Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.В. Зайцева, О.А. Малафеев

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ И МОДЕЛИРОВАНИЮ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

2-е издание, переработанное и дополненное

Санкт-Петербург
РГГМУ
2021

УДК 512.64:[004.496:314.143](075.8)
ББК 22.143я73
З-17

Рецензенты:
Пичугин Юрий Александрович, д.ф.-м.н., профессор, профессор кафедры высшей математики и механики ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения».
Тарасенко Елена Олеговна, к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры вычислительной математики и кибернетики ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»

Зайцева И.В., Малафеев О.А.
Линейная алгебра с приложениями к математическому анализу и моделированию демографических аспектов интеллектуальной аналитической системы: учебное пособие. 2-е издание, переработанное и дополненное / И.В. Зайцева, О.А. Малафеев. – Санкт-Петербург : РГГМУ, 2021. – 382 с.

В учебном пособии изложен материал по курсу линейной алгебры. В учебном пособии определяются понятия системы линейных уравнений, линейного пространства, линейного оператора, собственных чисел и собственных векторов линейных операторов, линейной, квадратичной и билинейных форм, приведены примеры. В приложениях представлены примеры применения математического анализа к моделированию демографических аспектов интеллектуальной аналитической системы. Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений. Также может быть полезно инженерам и научным работникам разных специальностей, изучающим или использующим методы линейной алгебры.

ISBN 978-5-86813-524-8

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

В данном учебном пособии излагаются основные факты курса «Линейная алгебра». Линейная алгебра с ее методами предоставляет аппарат для единообразного изучения различных линейных физических и математических процессов. С помощью методов линейной алгебры изучаются и нелинейные задачи на основе линеаризации. Многие нелинейные методы испытывают на линейных моделях. Линейная алгебра позволяет установить связь между различными разделами математики.

Учебное пособие охватывает основные разделы базового курса линейной алгебры. Пособие включает девять глав, которые разбиваются на параграфы и лекции. В учебном пособии рассматриваются такие важные понятия как: понятия линейного пространства, базиса, линейного отображения, собственного элемента и собственного значения, матрицы линейного оператора и квадратичной формы, определителя и ранга матрицы. Глава посвящена системам линейных уравнений и определителям. Авторы излагают те теоретические вопросы, знание которых является необходимым минимумом для усвоения материала, рассматриваемого в последующих главах. Значительное место отведено рассмотрению определителей различных порядков, а также способам их вычисления. Подробно рассматриваются линейные, билинейные и квадратичные формы, понятия аффинных пространств и аффинных координат, изучаются плоскости и их взаимное расположение, линейные преобразования евклидова пространства. Данное пособие охватывает теоретический материал теории групп. Наряду со сведениями теоретического характера в пособии разбирается значительное число примеров и задач, цель которых – уяснение основных понятий.

В учебном пособии представлены приложения. В приложениях приведены материалы, связанные с применением математического анализа к моделированию демографических аспектов интеллектуальной аналитической системы.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений. Основным назначением пособия является помощь студентам в изучении и активном усвоении сложного материала. В результате изучения данного пособия студенты должны уметь выполнять действия с матрицами, знать свойства действий над матрицами, находить определители квадратных матриц и использовать свойства определителей, вычислять обратную матрицу, освоить методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Также учебное пособие может быть полезно инженерам и научным работникам разных специальностей, изучающим или использующим методы линейной алгебры.

Дополнительные теоретические сведения для более глубокого изучения того или иного параграфа можно получить из книг, приведенных в списке литературы.

ГЛАВА I. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Лекция 1

§1. Системы линейных уравнений

В самом общем случае система линейных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \tag{1}$$

или кратко:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j = b_k. \end{cases} \tag{1'}$$

Через $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначены неизвестные. Следует заметить, что число неизвестных не предполагается обязательно равным числу уравнений. Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{kn}$ называются коэффициентами системы (1) и образуют $k \times$ n -матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

которая называется основной матрицей системы (1). Первый индекс коэффициента указывает номер уравнения, в котором он фигурирует, а второй индекс – номер неизвестного, при котором этот коэффициент поставлен. Будем считать в дальнейшем, что матрица A не нулевая, то есть среди коэффициентов системы (1) есть отличные от нуля.

Числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$, стоящие в правых частях равенства (1), называются свободными членами уравнений системы, которые предполагаются известными.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} b_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} b_k \end{pmatrix}$$

называется расширенной матрицей системы (1).

Определение 1. Решением системы линейных уравнений (1) называется совокупность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которая после подстановки вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращает все уравнения системы в арифметические тождества.

<u>Замечание 1.</u> Если обозначить через $\boldsymbol{x}$ вектор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, записанный в виде столбца, то систему (1) можно представить в виде матричного уравнения $A\boldsymbol{x} = b$.

Не всякая система линейных уравнений вида (1) имеет решение. Например, система

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \qquad 2)$$

не может иметь ни одного решения. Действительно, какие бы числа c_1, c_2 ни подставили на место неизвестных x_1, x_2, левые части уравнений системы (2) окажутся совпадающими, в то время как правые части различны. Поэтому оба уравнения системы (2) такой подстановкой не могут быть одновременно обращены в тождества.

Определение 2. Систему уравнений вида (1), имеющую хотя бы одно решение, будем называть совместной. Систему, не имеющую решений, будем называть несовместной.

Совместная система может иметь одно решение или более чем одно. В последнем случае для различия решений будем указывать их номера индексами наверху в скобках.

Определение 3. Решение $c_1^1, c_2^1, \dots, c_n^1$ и $c_1^2, c_2^2, \dots, c_n^2$ считаются различными, если хотя бы одно из чисел c_i^1 не совпадает с соответствующим числом c_i^2 $(i = 1, 2, \dots, n)$. Например, система

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

имеет различные решения $c_1^1 = c_2^1 = 0$, $c_1^2 = 3$, $c_2^2 = -2$, а также бесконечное множество других решений.

Определение 4. Если совместная система имеет единственное решение, она называется определенной. Если совместная система имеет, по крайней мере, два различных решения, она называется неопределенной.

Определение 5. Система линейных уравнений (1) является однородной, если свободный член каждого уравнения системы равен нулю: $b_i = 0, i = 1, \dots, n$.

Однородная система всегда является совместной.

Системы линейных уравнений (1) с помощью элементарных преобразований приводятся к равносильным системам.

1. Если какое-либо уравнение системы умножить на некоторое отличное от нуля число, а остальные уравнения оставить без изменения, то получится система, равносильная данной.

2. Если к какому-либо уравнению системы прибавить другое, а все остальные уравнения оставить без изменения, то получится система, равносильная данной.

3. Если к какому-либо уравнению прибавить другое, умноженное на некоторое число, а все остальные уравнения оставить без изменения, то получится система, равносильная данной.

4. Если система уравнений содержит тривиальное уравнение, то его можно исключить из системы, при этом получится система равносильная исходной.

5. Если система уравнений содержит противоречивое уравнение, то она несовместна.

Классическим методом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод последовательного исключения неизвестных – метод Гаусса (его еще называют методом Жордана-Гаусса). Это метод последовательного исключения переменных, заключающийся в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которого последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Выразив из первого уравнения системы (1) одну неизвестную через другую и подставив ее во второе уравнение, после приведения подобных получим в итоге линейное уравнение вида $Ax = B$ с одним неизвестным x. При этом возможны три варианта:

1. $A \neq 0$, тогда из уравнения $Ax = B$ однозначно находится $x = \frac{b}{a}$, а затем по этому x однозначно находится и другие неизвестные, в итоге получим единственное решение системы (1).

2. $A = 0$, $b \neq 0$, тогда уравнение $Ax = B$ оказывается противоречивым и не имеет решений, а вместе с ним не имеет решений и система (1).

3. $A = 0$, $B = 0$, тогда уравнение $Ax = B$ принимает вид $0x = 0$ и удовлетворяется при любых x. В итоге будем иметь бесчисленное множество пар неизвестных системы (1).

Метод Гаусса практичен, но для теоретических исследований удобен другой способ. Основным математическим инструментом для изучения линейных систем является теория определителей.

Пример. Построить полином $f(x)$ степени не выше $n-1$, который в заданных n различных точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ принимает заданные значения $y_1, y_2, \dots, y_n$, т.е. $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Решение. Пусть $n = 4$, полином $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Пусть значения x_i и y_i заданы таблицей $\frac{y_i|\ \ 3\ \ 2\ \ 5\ \ 7}{x_i|\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4}$. Подставим в равенства $f(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 = y_i$ значения x_i и y_i в соответствии с таблицей. Получим систему 4 линейных уравнений относительно 4 неизвестных a_0, a_1, a_2, a_3:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3,$$
$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 2,$$
$$a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 5,$$
$$a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 7.$$

Будем решать эту систему методом Гаусса. Для этого выпишем «расширенную матрицу коэффициентов» этой системы и проделаем ряд элементарных преобразований над строками с целью получения нулей под главной диагональю (прямой ход метода Гаусса), затем с целью получения единиц на главной диагонали и, далее, нулей над главной диагональю (обратный ход метода Гаусса):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 19 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 37 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 18 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{23}{6} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{29}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{19}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{97}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{97}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Замечание. Переход от первой матрицы ко второй получен с помощью вычитания предыдущих строк из последующих. Аналогично получен переход от второй матрицы к третьей. Далее, процесс продолжается очевидным для метода Гаусса образом.

В итоге получим решение: $a_0 = 13$, $a_1 = -{}^{97}/_6$, $a_2 = 7$, $a_3 = -{}^{5}/_6$. То есть, получим полином $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 13 - {}^{97}/_6\, x + 7x^2 - {}^{5}/_6\, x^3$.

Позже, когда будет доказана теорема Крамера решения системы n уравнений с n неизвестными, и рассмотрен определитель Вандермонда, станет ясно, что исходная задача в общем случае (т.е. при произвольном n) имеет единственное решение.

Пример 1. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad X = A^{-1}B$$

Найдем матрицу обратную матрице A.

$$|A| = -5, \qquad A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -5, \qquad A^{-1}B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $x = 3, y = -1$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_1 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9,$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} -36 \\ -27 \\ -45 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 5$.

<u>Пример 2.</u> Решить матричное уравнение:

$XA + B = C$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Выразим искомую матрицу X из заданного уравнения.

$$XA = C - B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$= (C - B) \cdot A^{-1}$$

Найдем матрицу A^{-1}.

$$|A| = -1, \qquad A = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Проверка:

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$XA + B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = C.$$

<u>Пример 3.</u> Решить матричное уравнение:

$AX + B = C,$ где $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$.

Из уравнения получаем $X = A^{-1}(C - B)$.

$$C - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = -1, \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$X = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -12 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}.$$

§2. Определители 2-го и 3-го порядка

Пусть дана квадратная матрица, т. е. таблица из n^2 чисел a_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, \mathrm{n})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Число n, указывающее количество строк и столбцов матрицы (4), называется ее порядком. Числа a_{ij} называются элементами матрицы A. Первый и второй индексы у элемента a_{ij} указывают соответственно номер строки и столбца, в которых расположен этот элемент. Элементы $a_{11},\dots,a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы А.

Рассмотрим любое произведение n элементов, расположенных в различных строках и различных столбцах матрицы (4), по одному в каждой строке и в каждом столбце, которое можно записать в виде

$$a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \dots, a_{n\alpha_n}. \tag{5}$$

Индексы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ являются номерами строк, в которых расположены сомножители произведения (5), в соответствии с принятым порядком их записи по возрастанию индексов столбцов.

Так как, по условию элементы $a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \dots, a_{n\alpha_n}$ расположены в различных строках матрицы (4), по одному в каждой строке, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ все различны и представляют собой некоторую перестановку чисел $1,2,\dots,$ n.

Число всех произведений вида (5), которые можно составить из элементов данной матрицы n-го порядка, равно числу всех возможных перестановок чисел $1,2,\dots,$ n, которое равно n!.

Определение. Определителем матрицы (4) называется алгебраическая сумма, состоящая из n! всевозможных произведений вида (5), перед каждым из которых поставлен знак, определенный по правилу:

$$D = \sum(-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}\, a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \dots, a_{n\alpha_n}. \tag{6}$$

Произведения вида (5) будем называть членами определителя, а элементы a_{ij} матрицы (4) – элементами определителя.

Определитель матрицы (4) обозначается одним из следующих символов:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = det\left|a_{ij}\right| = det\left|a_{ij}\right|_{i,j=1,2,\dots,\mathrm{n}}. \quad (7)$$

Для определителей 2-го и 3-го порядка получим следующие выражения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Покажем роль определителей при решении систем линейных уравнений на примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными. Если дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

то, исключая обычным образом одно из неизвестных, можно получить формулы

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

в предположении, что знаменатели этих отношений отличны от нуля. Числители и знаменатели получающихся дробей представляют собой определители 2-го порядка:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Аналогичные формулы имеют место и для решения систем с любым числом неизвестных.

Правило для определения знака данного члена определителя в геометрических терминах можно сформулировать несколько иначе (рис. 1).

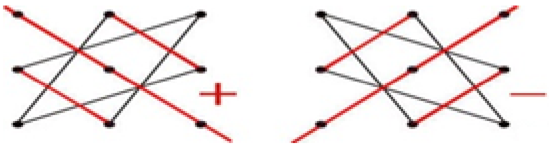


Рисунок 1

В матрице (4) в соответствии с нумерацией элементов естественно выделяются положительные направления: слева направо – вдоль строк, сверху вниз – вдоль столбцов. Вместе с этим и косые отрезки, соединяющие два каких-либо элемента матрицы, можно снабдить указанием направления: будем говорить, что отрезок, соединяющий элемент a_{ij} с элементом a_{km}, имеет положительный наклон, если его правый конец расположен ниже левого, и отрицательный наклон, если его правый конец лежит выше, чем левый. Мысленно проведем в матрице (4) все отрезки, соединяющие попарно элементы $a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \dots, a_{n\alpha_n}$ произведения (5) и при этом имеющие отрицательный наклон. Будем ставить перед произведением (5) знак «$+$», если число всех таких отрезков четно, и знак «$-$», если их число нечетно.

§3. Дополнение по Шуру

Квадратную матрицу A функцию можно записать в блочном виде: $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, где $A_{11},\ A_{12},\ A_{21}$ и A_{22} - матрицы размеров $n*n, n*m, m*n, m*m$ соответственно. Если матрица A_{11} невырождена, то определить матрицы A можно выразить следующим образом через матрицы $A_{11},\ A_{12},\ A_{21}$ и A_{22}.

Теорема 1. *Если* $|A_{11}| \neq 0$, то $|A| = |A_{11}| * \left|A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right|$.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица $(A\,|A_{11}) = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ называется *дополнением по Шуру матрицы* A_{11} в матрице A.

Другое доказательство теоремы 1 можно получить, например, представив матрицу A в виде:

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 \\ X & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & Y \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{11}Y \\ XA_{11} & XA_{11}Y + D \end{pmatrix}.$$

Для этого нужно взять $X = A_{21}A_{11}^{-1}, Y = A_{11}^{-1}A_{12}$ и $D = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Полученное разложение матрицы A позволяет свести вычисление обратной матрицы A^{-1} к вычислению матриц $A_{11}^{-1}\ D^{-1}$. В самом деле,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} E & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & E \end{pmatrix}.$$

Теорема 2. *Если* $|A_{11}| \neq 0, m = n$ *и* $A_{11}A_{21} = A_{21}\,A_{11}$, то $|\mathrm{A}| = |A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}|$.

Доказательство. Согласно теореме 1 $|\mathrm{A}| = \left|A_{11}A_{22} - A_{11}A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right| = |A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12}|$.

Теорема 3. Если u и v – строка и столбец, то

$$\begin{vmatrix} A & v \\ u & a \end{vmatrix} = a|A| - u(adj\ A)v.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $|A| \neq 0$. Тогда $\begin{vmatrix} A & v \\ u & a \end{vmatrix} = |A|\left(a - uA^{-1}v\right) = a|A| - u(adj\ A)v$. Обе части полученного равенства непрерывно зависит от элементов матрицы A, поэтому равенство остается справедливым и для вырожденных матриц.

Предельный переход в доказательстве теореме 3 очевиден: вырожденная матрица A является пределом невырожденных матриц. Но в теореме 2 нужно соблюдать осторожность: условие $A_{11}A_{21} = A_{21}\,A_{11}$ накладывает дополнительные ограничения. А, например, условие

$$A_{11}A_{12}^T = -A_{12}A_{11}^T. \qquad (1)$$

Лишает нас возможности приблизить вырожденную матрицу A_{11} невырожденными матрицами, удовлетворяющими этому условию. В самом деле, если $A_{12}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, то $XA_{12}^T = -A_{12}X^T$ тогда и только тогда, когда $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$. Это приводит к неприятным последствиям. Если выполнено условие (1) и матрица A_{11} невырождена, то

$$det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \left|A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\right| * \left|A_{11}^T\right| = \left|A_{22}A_{11}^T + A_{21}A_{12}^T\right|.$$

Но для матриц $A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $A_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, удовлетворяющих условию (1), это равенство не выполняется!

Дополнение по Шуру естественным образом возникает также при блочной записи обратной матрицы.

Теорема. Пусть A и D – невырожденные матрицы.

Тогда

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix},$$

где $A_1^{-1} = A - BD^{-1}C \text{ и } D_1^{-1} = D - CA^{-1}\,B$.

Доказательство.

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_1 + BC_1 & AB_1 + BD_1 \\ CA_1 + DC_1 & CB_1 + DD_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

поэтому $AB_1 + BD_1 = 0$ и $CA_1 + DC_1 = 0$, а значит, $B_1 = A^{-1}BD_1$ и $C_1 = -D^{-1}$. Далее, $AA_1 + BC_1 = E$, $CB_1 + DD_1 = E$. Следовательно, $AA_1 - BD^{-1}CA_1 = E$, $-CA^{-1}BD_1 + DD_1 = E$, т.е. $(A_1 = A - BD^{-1}C)^{-1}$ и $(D_1 = D - CA^{-1}B)^{-1}$.

Замечание. Если B и C -невырожденные матрицы, то аналогично получаем $D_1 = -B^{-1}AB_1$ и $A_1 = -C^{-1}DC_1$.

Далее, $-AC^{-1}DC_1 + BC_1 = E$ и $CB_1 - DB^{-1}AB_1 = E,$ т.е. $C_1 = (B - AC^{-1}D)^{-1}$ и $B_1 = (C - DB^{-1}A)^{-1}$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$. $B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$.

$C = A_{11}$ - квадратные матрицы, причем матрицы $B\ и\ C$ невырождены. Матрицу $(B|C) = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$ можно рассматривать как подматрицу матрицы $(A|C) = \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} A_{11}^{-1}(A_{12}\ A_{13})$.

Теорема (Хэйнсворт). $(A|B) = \big((A|C)|(B|C)\big)$.

Доказательство [Островский, 1973]. Для матрицы A можно записать следующие разложения:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & E & 0 \\ A_{31} & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & * & * \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$(A|C)$}} \\ 0 & & \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & * \\ 0 & E & * \\ 0 & 0 & (A|B) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Рассматривая дополнение по Шуру матрицы A_{11} в левом сомножителе разложения (2), можно записать

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & E & 0 \\ A_{31} & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & X_1 & A_{21} \\ 0 & X_3 & X_4 \\ 0 & X_5 & X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & A_{11}X_2 \\ * & * & A_{21}X_2 + X_4 \\ * & * & A_{31}X_2 + X_6 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Следовательно, $A_{11}X_2 = 0$, а так матрица A_{11} невырождена, то $X_2 = 0$. Поэтому 0=$A_{21}X_2 + X_4 = X_4$ и $E = A_{31}X_2 + X_6 = X_6$. Ясно также, что $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & X_1 \\ 0 & X_3 \end{pmatrix}$, т.е. $X_3 = (B|C)$. Подставим теперь разложение (3) в (2) и сравним полученное выражение с (1):

$$\begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & E & 0 \\ A_{31} & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & * & * \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$(A|C)$}} \\ 0 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ A_{21} & E & 0 \\ A_{31} & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & * & 0 \\ 0 & (B|C) & 0 \\ 0 & * & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 & * \\ 0 & E & * \\ 0 & 0 & (A|B) \end{pmatrix}.$$

Сокращая обе части этого равенства слева на невырожденную матрицу, получаем, в частности,

$$(A|C) = \begin{pmatrix} * & 0 \\ (B|C) & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & * \\ 0 & (A|B) \end{pmatrix}.$$

Разложение такого вида единственно.

ЗАДАЧИ

1. Пусть A - квадратная матрица. Докажите, что

$$\begin{vmatrix} E & A \\ A^T & E \end{vmatrix} = 1 - \sum M_1^2 + \sum M_2^2 - \sum M_3^2 \dots,$$

где $\sum M_k^2$ – сумма квадратов всех миноров порядка k матрицы A.

2. [Эдельман, 1976]. Пусть A – матрица размера $n \times n$, U и V- матрицы размера $n \times m$ и S – матрица $m \times m$, причем матрицы $A, S, A + VSU^T u\, S^{-1} + V^T A^{-1} U$ невырождены. Докажите, что

а) $\left(A + VSV^T\right)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U\left(S^{-1} + V^T A^{-1} U\right)^{-1} V^T A^{-1}$;

б) $\left(A + VSV^T\right)^{-1} US = A^{-1}U\left(S^{-1} + V^T A^{-1} U\right)^{-1}$;

в) $SV^T\,(A + VSV^T)^{-1} = (S^{-1} + V^T A\, U)^{-1} V^T A^{-1}$;

г) $S - SV^T\,(A + VSV^T)^{-1} US = (S^{-1} + V^T A^{-1}\, U)^{-1}$.

3. Пусть

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 3 & 5 & 8 & 11 \\ 6 & 9 & 12 & 14 \\ 10 & 13 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Матрица A_nдля произвольного n определяется аналогично (на диагоналях, перпендикулярных главной, стоят последовательные натуральные числа). Докажите, что $|A_{2k}| = (-1)^k k(k+1)$ и $|A_{2k+1}| = (-1)^k (2k^2 + 2k + 1)$.

§4. Симметрические функции, суммы степеней и числа Бернулли

Этот параграф посвящен различным детерминантным выражением для симметрических функций, сумм степеней и чисел Бернулли. Большинство из этих выражений возникает из соотношений, являющихся системами линейных уравнений, при решении этих систем по правилу Крамера. В большинстве из рассматриваемых случаев однородной части системы линейных уравнений соответствует треугольная матрица, поэтому в выражении остается только один определитель.

Для получения требуемых соотношений используются некоторые известные факты о симметрических функциях и числах Бернулли. Все эти факты приведены с полными доказательствами.

Пусть $\sigma_k(x_1 \dots, x_n)$ – k-я элементарная симметрическая функция, т.е. коэффициент при x^{n-k} в многочлене $(x + x_1) \dots (x + x_n)$; будем считать, что $\sigma_k(x_1 \dots, x_n) = 0$ при $k > n$. Пусть, далее, $s_k(x_1 \dots, x_n) = x_1^k + \dots + x_n$. Докажем сначала, что

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \dots + (-1)^k k\sigma_k = 0.$$

Произведение $s_{k-p}\sigma_p$ состоит из членов вида $x_i^{k-p}\left(x_{j_1} \dots x_{j_p}\right)$. Если $i \in \{j_1, \dots, j_p\}$, то этот член сокращается с членом $x_i^{k-p+1}\left(x_{j_1} \dots \widehat{x_i} \dots x_{j_p}\right)$ произведения $s_{k-p+1}\sigma_{p-1}$, а если $i \notin \{j_1, \dots, j_p\}$, то он сокращается с членом $x_i^{k-p-1}\left(x_i x_{j_1} \dots x_{j_p}\right)$ произведения $s_{k-p-1}\sigma_{p+1}$.

Рассмотрим соотношения

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 &&= S_1,\\
&s_1\sigma_1 - 2\sigma_2 &&= S_2,\\
&s_2\sigma_1 - s_1\sigma_2 + 3\sigma_3 &&= S_3,\\
&\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots,\\
&s_k\sigma_1 - s_k\sigma_2 + \dots + (-1)^k k\sigma_k = S_k
\end{aligned}$$

как систему линейных уравнений относительно $\sigma_1, \dots \sigma_k$. С помощью правила Крамера получаем:

$$\sigma_k = \frac{1}{k!}\begin{vmatrix} s_1 & 1 & & & \\ s_2 & s_1 & 2 & & \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & \dots & \dots & \dots & k-1 \\ s_k & s_{k-1} & \dots & \dots & s_1 \end{vmatrix}.$$

Аналогично

$$s_k = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & & \\ 2\sigma_2 & \sigma_1 & 1 & 0 \\ 3\sigma_3 & \sigma_2 & \sigma_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k\sigma_k & \sigma_{k-1} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix}.$$

Наряду с симметрическими функциями σ_k и суммами степеней s_k можно рассмотреть сумму однородных мономов степени k

$$p_k(x_1 \dots, x_n) = \sum_{i_1+\dots+i_n=k} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}.$$

Получим сначала соотношения, связывающие p_k и σ_k, а затем соотношения, связывающие p_k и s_k. Легко проверить, что:

$$1 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \dots =$$
$$= (1 + x_1 t + (x_1 t)^2 + \dots) \dots (1 + x_n t + (x_n t)^2 + \dots) == \frac{1}{(1 - x_1 t) \dots (1 - x_n t)}$$
$$= \frac{1}{1 - \sigma_1 t + \sigma_2 t^2 - \dots + (-1)^n \sigma_n t^n},$$

т.е.

$$p_1 - \sigma_1 = 0,$$
$$p_2 - p_1\sigma_1 + \sigma_2 = 0,$$
$$p_3 - p_2\sigma_1 + p_1\sigma_2 - \sigma_3 = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

Следовательно,

$$\sigma_k = \begin{vmatrix} p_1 & 1 & & 0 \\ p_2 & p_1 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k-1} & p_{k-2} & & 1 \\ p_k & p_{k-1} & \dots & p_1 \end{vmatrix} \text{ и } p_{k=} \begin{vmatrix} \sigma_1 & 1 & & 0 \\ \sigma_2 & \sigma_1 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{k-1} & \sigma_{k-2} & & 1 \\ \sigma_k & \sigma_{k-1} & \dots & \sigma_1 \end{vmatrix}.$$

Получить соотношения, связывающие p_k и s_k, несколько сложнее. Рассмотрим функцию $f(t) = (1 - x_1 t) \dots (1 - x_n t)$. Тогда

$$-\frac{f'(t)}{f^2(t)} = \left(\frac{1}{f(t)}\right)' = \left[\left(\frac{1}{1 - x_1 t}\right) \dots \left(\frac{1}{1 - x_n t}\right)\right]'$$

$$= \left(\frac{x_1}{1 - x_1 t}\right) \dots \left(\frac{x_n}{1 - x_n t}\right) \frac{1}{f(t)}.$$

Поэтому

$$-\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{x_1}{1 - x_1 t} + \dots + \frac{x_n}{1 - x_n t} = s_1 + s_2 t + s_3 t^2 + \cdots$$

С другой стороны, $(f(t))^{-1} = 1 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \cdots$, поэтому

$$-\frac{f'(t)}{f(t)} = \left(\frac{1}{f(t)}\right)' \cdot \left(\frac{1}{f(t)}\right)^{-1} = \frac{p + 2p_2 t + 3p_3 t^2 + \cdots}{1 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \cdots},$$

т.е.

$$(1 + p_1 t + p_2 t^2 + p_3 t^3 + \cdots)(s_1 + s_2 t + s_3 t^2 + \cdots)$$
$$= p + 2p_2 t + 3p_3 t^2 + \cdots$$

Следовательно,

$$s_k = (-1)^{k-1} \begin{vmatrix} p_1 & 1 & & 0 \\ 2p_2 & p_1 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (k-1)p_{k-1} & p_{k-2} & \dots & 1 \\ kp_k & p_{k-1} & \dots & p_1 \end{vmatrix} \text{ и}$$

$$p_k = \frac{1}{k!} \begin{vmatrix} s_1 & -1 & 0 & 0 \\ s_2 & s_1 & -2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k-1} & s_{k-2} & \dots & -k-1 \\ s_k & s_{k-1} & \dots & s_1 \end{vmatrix}.$$

Перейдем к рассмотрению свойств сумму степеней первых членов натурального ряда. Пусть $S_n(k) = 1^n + \cdots + (k-1)^n$. Докажем, что

$$S_n(k) = \frac{1}{n!}\begin{vmatrix} k^n & C_n^{n-2} & C_n^{n-3} & \dots & C_n^1 & 1 \\ k^{n-1} & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-3} & \dots & C_{n-1}^1 & 1 \\ k^{n-2} & 0 & C_{n-2}^{n-3} & \dots & C_{n-2}^1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Заметим сначала, что этот определитель не изменится, если из первого столбца вычесть последний.

Сложим равенства $(x+1)^m - x^m = \sum_{i=0}^{m-1} C_m^i x^i$ для $x = 1, 2, \dots, k-1$. В итоге получим $(k)^m - 1 = \sum_{i=0}^{m-1} C_m^i S_i(k)$. Набор таких неравенств для $m = 1, 2, \dots, n$ можно рассмотреть как систему линейных уравнений относительно $S_i(k)$; из этой системы получаем требуемое выражение для $S_{n-1}(k)$.

Из полученного выражения для $S_{n-1}(k)$ видно, что $S_{n-1}(k)$ - многочлен степени n от k.

Приведем теперь матричные выражения для $S_n(k)$, из которых, кстати, следует, что многочлен $S_n(x)$ полиноминально выражается через $S_1(x)$ и $S_2(x)$; точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть* $u = S_1(x)$и $v = S_2(x)$. *Тогда при* $k \geq 1$ *существуют такие многочлены* p_k и q_k *с рациональными коэффициентами, что* $S_{2k+1}(x) = u^2 p_k(u)$ *и* $S_{2k}(x) = v q_k(u)$.

Чтобы получить выражение для S_{2k+1}, воспользуемся равенством

$$[n(n-1)]^r = \sum_{x=1}^{n-1} (x^r(x+1))^r - x^r(x-1)^r) = \\ = 2(C_r^1 \sum x^{2r-1} + C_r^3 \sum x^{2r-3} + C_r^5 \sum x^{2r-5} \\ + \cdots). \quad (1)$$

Эти равенства для $r = 2, 3, 4, \ldots$ можно записать в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} [n(n-1)]^2 \\ [n(n-1)]^3 \\ [n(n-1)]^4 \\ \ldots \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & & \\ 0 & 4 & 4 & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_3(n) \\ S_5(n) \\ S_7(n) \\ \ldots \end{pmatrix}.$$

Все полученные матрицы конечного порядка невырождены, поэтому

$$\begin{pmatrix} S_3(n) \\ S_5(n) \\ S_7(n) \\ \ldots \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left\| a_{ij} \right\|^{-1} \begin{pmatrix} [n(n-1)]^2 \\ [n(n-1)]^3 \\ [n(n-1)]^4 \\ \ldots \end{pmatrix}, \text{где } a_{ij} = C_{i+1}^{2(i-j)+1}.$$

Из полученной формулы видно, что $S_{2k+1}(n)$ выражается через $n(n-1) = 2u(n)$ и делится на$[n(n-1)]^2$.

Чтобы получить выражение для S_{2k}, воспользуемся равенством

$$n^{r+1}(n-1)^r =$$
$$= \sum_{x=1}^{n-1} \left(x^r (x+1) \right)^{r+1} - \left(x-1 \right)^r x^{r+1} \Big) =$$
$$= \sum x^{2r} \left(C_{r+1}^1 + C_r^1 \right)$$
$$+ \sum x^{2r-1} \left(C_{r+1}^2 - C_r^2 \right)$$
$$+ \sum x^{2r} \left(C_{r+1}^3 + C_r^3 \right) + \cdots.$$

Предварительно, однако, из него нужно исключить нечетные степени равенства (1). В результате, учитывая, что $C_{r+1}^i - C_r^1 = C_r^{i-1}$, получим

$$n^{r+1}(n-1)^r =$$
$$= \frac{n^r (n-1)^r}{2} \Big| - \left(C_{r+1}^1 + C_r^1 \right) \sum x^{2r}$$
$$+ \left(C_{r+1}^3 + C_r^3 \right) \sum x^{2r-2} + \cdots, \Big|$$

т.е.

$$n^r(n-1)^r\frac{2n-1}{2}$$
$$=\left(C_{r+1}^1+C_r^1\right)\sum x^{2r}$$
$$+\left(C_{r+1}^3+C_r^3\right)\sum x^{2r-2}+\cdots.$$

Теперь аналогично предыдущему случаю получаем

$$\begin{pmatrix} S_2(n) \\ S_4(n) \\ S_6(n) \\ \dots \end{pmatrix}=\frac{2n-1}{2}\left\|b_{ij}\right\|^{-1}\begin{pmatrix} n(n-1) \\ [n(n-1)]^2 \\ [n(n-1)]^3 \\ \dots \end{pmatrix},$$

где

$$b_{ij}=C_{i+1}^{2(i-j)+1}+C_i^{2(i-j)+1}.$$

Так как $S_2(n)=\frac{2n-1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{3}$, то многочлены $S_4(n)$, $S_6(n),\dots$ делятся на $S_2(n)$, причем частное является многочленом от $n(n-1)=2u(n)$.

Во многих Теоремах анализа и теории чисел встречаются *числа Бернулли* B_k, возникающие при разложении в ряд функции

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{x^k}{k!}\qquad(\text{при}|x|<2\pi).$$

Легко проверить, что B_0=1 и $B_1=-1/2$.

С помощью чисел Бернулли можно представить $B_k(n)1^k+2^k+\cdots+(n-1)^k$ в виде многочлена от n.

Теорема.$(m+1)S_m(n)=\sum_{k=0}^m C_{m+1}^k B_k n^{m+1-k}$.

Доказательство. Представим произведение рядов $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_k x^k}{k!}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(nx)^s}{s!}$ в виде ряда двумя способами. С одной стороны, это произведение равно

$$\frac{x}{e^x-1}(e^{nx}-1)=x\sum_{r=1}^{n-1}e^{rx}=nx+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{r=1}^{m-1}r^m\right)\frac{x^{m+1}}{m!}=$$
$$=nx+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(m+1)S_m(n)}{(m+1)!}x^{m+1}.$$

С другой стороны, это произведение равно
$$\sum_{k=0,s=1}^{\infty}\frac{B_k n^s x^{s+k}}{k!\,s!}=B_0 nx+\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{C_{m+1}^k B_k n^{m+1-k}}{(m+1)!}x^{m+1}.$$

Приведем некоторые детерминантные выражения для B_k. Пусть $b_k=B_k/k!$. Тогда согласно определению

$x=(e^x-1)(\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k)=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)(1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\cdots)$, т.е.
$$\begin{array}{rcl} b_1 & = & -\dfrac{1}{2!},\\ \dfrac{b_1}{2!}+b_2 & = & -\dfrac{1}{3!},\\ \dfrac{b_1}{3!}+\dfrac{b_1}{2!}+b_3 & = & -\dfrac{1}{4!},\\ \dots & \dots & \dots. \end{array}$$

Решая эту систему линейных уравнений по правилу Крамера, получаем
$$B_k=k!\,b_k$$
$$=(-1)^k k!\begin{vmatrix} 1/2! & 1 & 0 & \dots & 0\\ 1/3! & 1/2! & 1 & \dots & 0\\ 1/4! & 1/3! & 1/2! & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1/(k+1)! & 1/k! & 1/(k-1)! & \dots & 1/2! \end{vmatrix}.$$

Докажем теперь, что $B_{2k+1}=0$ при $k\geq 1$. Пусть $\frac{x}{e^x-1}=-\frac{x}{2}+f(x)$. Тогда $f(x)-f(-x)=\frac{x}{e^x-1}=-\frac{x}{e^{-x}-1}+x=0$, т.е. f- четная функция. Пусть $c_k=B_{2k}/(2k)!$. Тогда
$$x=\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1-\frac{x}{2}+c_1x^2+c_2x^4+c_3x^6\dots\right).$$

Приравнивая коэффициенты при $x^3, x^5, x^7, \dots$ и учитывая, что $\frac{1}{2(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} = \frac{2n-1}{2(2n+1)!}$, получаем

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2 * 3!}, \\ \frac{c_1}{3!} + c_2 &= \frac{3}{2 * 5!}, \\ \frac{c_1}{5!} + \frac{c_2}{3!} c_3 &= \frac{5}{2 * 7!}, \\ \dots \quad & \dots \quad \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B_{2k} = (2k)!\, c_k = \frac{(-1)^{k+1}(2k)!}{2} \begin{vmatrix} 1/3! & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 3/5! & 1/3! & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 5/7! & 1/5! & 1/3! & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (2k-1)/(2k+1)! & 1/(2k-1)! & \dots & \dots & \dots & 1/3! \end{vmatrix}.$$

Лекция 2

§5. Перестановки и подстановки

Для дальнейшего изучения свойств определителя рассмотрим формулу, позволяющую вычислять определитель n-го порядка непосредственно через его элементы.

Определение 1. Упорядоченная совокупность $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ n попарно различных натуральных чисел, не превосходящих n, называется перестановкой из n чисел.

Так, совокупность чисел (2, 4, 1, 5, 3) является перестановкой из пяти чисел. Совокупность же (1, 3, 4, 1, 5), равно как совокупность (1, 4, 8, 2, 3), перестановкой не является.

Теорема 1. Количество различных перестановок из n чисел равно $n!$.

Доказательство. Рассмотрим перестановку $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. В качестве a_1 может быть взято любое натуральное число от 1 до n. Поэтому для выбора a_1 представляется n возможностей. Если число a_1 уже выбрано, то для выбора числа a_2 остается $(\mathrm{n} - 1)$ возможность – числом a_2 может быть любое натуральное число от 1 до n, кроме числа a_1. Таким образом, для выбора чисел a_1 и a_2 представляется $n(\mathrm{n} - 1)$ возможностей. Продолжая рассуждать аналогично, придем в конце концов к выводу, что всего возможностей $n(\mathrm{n} - 1)(n - 2) \dots 1 = n!$, что и требовалось доказать. ■

Примечание. Здесь и далее символ ■ означает конец доказательства.

Определение 2. Говорят, что пара чисел a_i, a_j в перестановке $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ образует беспорядок, если $a_i > a_j$, а $i > j$, т. е. большее число стоит раньше.

Например, перестановка (1, 2, 3, 4, 5) не содержит беспорядков, а в перестановке (1, 3, 2, 5, 4) их два: во-первых, число 3 стоит раньше, чем 2, во-вторых, число 5 стоит раньше числа 4.

Теорема 2. Если два числа в перестановке поменять местами, то количество беспорядков в ней изменится на некоторое нечетное число.

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции. Поменяем в перестановке a числа a_i и a_{i+k} местами. Рассмотрим сначала случай $j = i + 1$. Если прежде числа a_i и a_{i+1} не образовывали беспорядка, то теперь они будут его образовывать. Если же они образовывали беспорядок, то теперь они перестанут его образовывать. При этом все прочие беспорядки, очевидно, сохранятся. Таким образом, общее количество беспорядков изменится ровно на единицу (в ту или в другую сторону), т. е. на нечетное число.

Допустим теперь, что теорема доказана для $\mathrm{k} = \mathrm{m} -$

1 и докажем, что тогда она справедлива и для $\mathrm{k} = \mathrm{m}$. Поменяем сначала местами числа a_{i+k-1} и a_{i+1}. Затем в полученной перестановке $(\ldots, a_i, \ldots, a_{i+1}, a_{i+k-1}, \ldots)$ поменяем местами a_i и a_{i+k}, в перестановке $(\ldots, a_{i+k}, \ldots, a_i, a_{i+k-1}, \ldots)$ поменяем местами a_i, и a_{i+k-1}: $(\ldots, a_{i+k}, \ldots, a_{i+k-1}, a_i, \ldots)$. В результате i-ый и $(i+k)$-ый элементы поменялись местами, а порядок следования остальных элементов не изменился. При этом количество беспорядков изменялось три раза, причем каждый раз на нечетное число. Следовательно, в результате количество беспорядков изменилось на нечетное число. Теорема доказана. ■

Определение 3. Транспозицией заданных элементов называется перестановка, при которой меняются местами только соседние элементы.

Теорема 3. Все перестановки можно расположить так, что соседние две получены посредством транспозиции.

Теорема 4. От любой перестановки можно перейти к любой другой перестановке при помощи конечного числа транспозиций.

Определение 4. В $t = (i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_l, \ldots i_n)$ элементы i_kи i_l образуют инверсию в t, если $i_k > i_l$.

Определение 5. $t = (i_1, \ldots, i_k, \ldots, i_l, \ldots i_n)$ называется (не)четной, если число инверсий (не)четно.

Теорема 5. Транспозиция меняет четность перестановки.

Теорема 6. При $n \geq 2$ число четных перестановок равно числу нечетных: $\frac{1}{2}n!$.

Так как соседние элементы имеют различную четность и все упорядочены, а $n! = 2k$, то половина составит $\frac{1}{2}n!$.

Ясно, что при любой записи четности верхней и нижней строк (перестановок) или совпадают (подстановки называются четными) или не совпадают (подстановки называются нечетными).

Если подстановка в конечном виде выглядит $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, то четность ее определяется четностью второй перестановки. Следовательно, число четных подстановок равно числу нечетных подстановок и равно $\frac{n!}{2}$.

Теорема 7. Подстановка А четная, тогда и только тогда когда сумма инверсий в отмеченной строке четная. Подстановка А нечетная, тогда и только тогда когда сумма инверсий в отмеченной строке нечетная.

Рассмотрим систему уравнений примера к §1 при произвольных различных значениях $x_1, x_2, \dots, x_n$ и воспользуемся теоремой Крамера для её решения. Выпишем матрицу коэффициентов этой системы уравнений и вычислим её определитель. Как и в примере к §1 положим $n = 4$. Тогда определитель матрицы коэффициентов системы

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 = y_1,$$
$$a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 = y_2,$$
$$a_0 + a_1x_3 + a_2x_3^2 + a_3x_3^3 = y_3,$$
$$a_0 + a_1x_4 + a_2x_4^2 + a_3x_4^3 = y_4,$$

будет определителем Вандермонда 4-го порядка. Вычислим этот определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & (x_2-x_1)x_2 & (x_2-x_1)x_2^2 \\ 1 & x_3-x_1 & (x_3-x_1)x_3 & (x_3-x_1)x_3^2 \\ 1 & x_4-x_4 & (x_4-x_1)x_4 & (x_4-x_1)x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} x_2-x_1 & (x_2-x_1)x_2 & (x_2-x_1)x_2^2 \\ x_3-x_1 & (x_3-x_1)x_3 & (x_3-x_1)x_3^2 \\ x_4-x_4 & (x_4-x_1)x_4 & (x_4-x_1)x_4^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_3-x_2 & (x_3-x_2)x_3 \\ 1 & x_4-x_2 & (x_4-x_2)x_4 \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)\begin{vmatrix} x_3-x_2 & (x_3-x_2)x_3 \\ x_4-x_2 & (x_4-x_2)x_4 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix} =$$

$= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_4-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)(x_4-x_3) = \prod_{4\geq j>i\geq 1}(x_j-x_i)$ *Пояснения*. В выписанной системе равенств переход от первого определителя ко второму получен с помощью вычитания из четвертого столбца третьего, умноженного на x_1, затем из третьего столбца – второго, умноженного на x_1, затем из второго столбца – первого, умноженного на x_1. Далее, второй определитель разложен по элементам первой строки, тем самым определитель четвертого порядка сведен к вычислению определителя третьего порядка. Затем в определителе третьего порядка (третий определитель) из каждой строки вынесен общий множитель. Тем самым определитель Вандермонда четвертого порядка сведен к вычислению определителя Вандермонда третьего порядка. Затем, по той же схеме, определитель Вандермонда третьего порядка сведен к вычислению определителя второго порядка, который вычисляется уже в явном виде. В итоге получаем общую формулу для вычисления определителя Вандермонда четвертого порядка (последний элемент в цепочке равенств). Если в последнем члене равенства заменить 4 на n, то получим общую формулу для вычисления определителя Вандермонда. Доказывается очевидным образом с помощью метода математической индукции.

Зададим теперь, как и в примере к §1, значения величин x_i и y_i таблицей $\frac{y_i|\ \ 3\ \ 2\ \ 5\ \ 7}{x_i|\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4}$ и вычислим определители $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$, необходимые при применении формул Крамера для вычисления неизвестных системы a_0, a_1, a_2, a_3. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = 12$ (Определитель Вандермонда).

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 8 \\ 5 & 3 & 9 & 27 \\ 7 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 2 & 4 \\ -4 & 3 & 6 & 18 \\ -5 & 4 & 12 & 48 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -4 & 6 & 18 \\ -5 & 12 & 48 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 9 \\ 5 & 6 & 24 \end{vmatrix}$$

$$= 4\begin{vmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 3 & 15 \end{vmatrix} =$$

$$= 4\begin{vmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 4 & 3 & 9 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 0 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -23 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 23 \end{vmatrix}$$

$$= 4(46 - 7) = 4 \cdot 39$$

При вычислении определителя Δ_1 из 4-го столбца вычли третий столбец, затем из третьего второй, затем к первому столбцу прибавили второй умноженный на (-3).

Полученный определитель (второй) разложили по элементам первой строки. Из определителя третьего порядка (третьего определителя) из каждого столбца вынесли общие множители (из первого (-1), из второго 2, из третьего 2). В четвертом определителе цепочки равенств из первой и третьей строк вычли вторую строку. Получили пятый определитель. Затем к последней строке пятого определителя прибавили первую строку. Дальнейшие операции очевидны.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 9 & 27 \\ 1 & 7 & 16 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 19 \\ 0 & 2 & 7 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 19 \\ 2 & 7 & 37 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 0 & 14 & 40 \\ 0 & 13 & 51 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 14 & 40 \\ 13 & 51 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 14 & 40 \\ -1 & 11 \end{vmatrix} = -194$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & 27 \\ 1 & 4 & 7 & 64 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 19 \\ 0 & 1 & 2 & 37 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 1 & 3 & 19 \\ 1 & 2 & 37 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 0 & 4 & 12 \\ 0 & 3 & 30 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 3 & 30 \end{vmatrix} = 4 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} = 12 \cdot 7$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 1 & 4 & 16 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

При вычислении вторых определителей в цепочках равенств для определителей $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ вначале из четвертой строки вычиталась третья, затем из третьей – вторая, далее из второй – первая. Дальнейшие переходы очевидны.

Воспользовавшись формулами Крамера получим

$a_0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{4\cdot 39}{12} = 13,\quad a_1 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-194}{12} = -97/6,\quad a_2 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{12\cdot 7}{12} = 7,\ a_3 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{-10}{12} = \frac{-5}{6}.$

Полученные результаты совпадают с результатами примера к §1.

Лекция 3

§6. Определители *n*-го порядка

Определение определителя приведено в §2. Рассмотрим свойства определителей.

I. *Операция транспонирования.*

Определение 1. Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

полученный из определителя (7) заменой строк на столбцы с теми же номерами, называется транспонированным по отношению к определителю (7).

Величина транспонированного определителя совпадает с величиной исходного определителя:

$$\Delta\left(|a_{ij}|\right) = \Delta\left(|a_{ij}|^T\right).$$

Доказательство. Действительно, определители (7) и (8) состоят из одних и тех же членов, поэтому достаточно показать, что одинаковые члены обладают в определителях (7) и (8) и одинаковыми знаками. Транспонирование матрицы определителя, очевидно, есть результат ее поворота на 180° вокруг диагонали $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. При этом повороте каждый отрезок с отрицательным наклоном (например, образующий угол $\alpha < 90^\circ$ со строками матрицы) переходит снова в отрезок с отрицательным наклоном, а именно, образующий со строками матрицы угол $(90^\circ - \alpha)$. Поэтому число отрезков с отрицательным наклоном, соединяющих элементы данного члена, после транспонирования не изменится. Следовательно, не изменится и знак этого члена. Таким образом, знаки всех членов матрицы сохранятся, тем самым величина определителя останется неизменной:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что строки и столбцы равносильны. ■

Доказанное свойство определителя устанавливает равноправие его строк и столбцов. Поэтому дальнейшие свойства определителей будем формулировать и доказывать только для строк.

II. *Свойство антисимметричности.*

Определение 2. Под *антисимметричностью* относительно строк понимают свойство определителя менять знак при перестановке двух строк.

Для начала рассмотрим случай, когда переставляются две соседних строки определителя, например i-ая и $(i+1)$-ая. Определитель, полученный после перестановки строк, будет состоять из тех же самых членов, что и исходный определитель. Рассмотрим произвольный из членов исходного определителя. Этот член в своем составе имеет элемент из i-ой строки и элемент из $(i+1)$-ой строки. Если отрезок, соединяющий эти два элемента, имел отрицательный наклон, то после перестановки строк его наклон станет положительным, и наоборот. Что же касается остальных отрезков, соединяющих попарно элементы выделенного члена, то после перестановки строк характер наклона каждого из них останется неизменным. Следовательно, количество отрезков с отрицательным наклоном, соединяющих элементы данного члена, при перестановке строк заведомо изменяется на единицу, поэтому каждый член определителя, а, следовательно, и сам определитель, при перестановке строк меняет знак.

Пусть теперь переставляются не соседние строки, а, например, i-ая строка с k-ой строкой, причем между ними находится m других строк и $i < \mathrm{k}$. Такую перестановку можно осуществить последовательными перестановками соседних строк в следующем порядке: сначала i-ая строка переставляется с $(i+1)$-ой, далее с $(i+2)$-ой, $(i+3)$-ой, …, k-ой, затем получившаяся $(\mathrm{k}-1)$-ая строка (ранее k-ая) переставляется с $(\mathrm{k}-2)$-ой, $(\mathrm{k}-3)$-ой, …, i-ой. Всего понадобится $\mathrm{m}+1+\mathrm{m}=2\mathrm{m}+1$ перестановок соседних строк. После каждой из них, по доказанному, определитель изменяет знак, а значит, в конце процесса будет иметь знак, противоположный начальному ($(2\mathrm{m}+1)$ при любом целом m есть нечетное число).

III. *Определитель, имеющий две одинаковых строки, равен нулю.*

Доказательство. Действительно, переставляя две одинаковых строки, определитель не меняется. С другой стороны, по доказанному, он должен изменить свой знак. Таким образом, $D=-D$, следовательно, $D=0$. ■

IV. *Линейное свойство определителя.*

Если все элементы i*-ой строки определителя* D *представлены в виде «линейной комбинации» двух слагаемых*

$$a_{ij}=\lambda b_i+\mu c_i,\ i=1,2,\dots,n,$$

где λ и μ – фиксированные числа, то определитель D *равен такой же линейной комбинации двух определителей:*

$$D=\lambda D_1+\mu D_2,\ i=1,2,\dots,n,\ j=1,2,\dots,n. \qquad (9)$$

Причем у каждого из этих двух определителей все строки, кроме i*-ой, такие же, как у определителя D, а* i*-ая строка состоит у определителя D_1 из чисел b_i, у* *определителя D_2 – из чисел c_i.*

Доказательство. Действительно, всякий член определителя D можно представить в виде

$$a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{j\alpha_j}\dots a_{n\alpha_n} = a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots\left(\lambda b_{\alpha_j} + \mu c_{\alpha_j}\right)\dots a_{n\alpha_n} =$$

$$= \lambda a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots b_{\alpha_j}\dots a_{n\alpha_n} + \mu a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots c_{\alpha_j}\dots a_{n\alpha_n}.$$

Собирая вместе первые слагаемые (с теми знаками, которые имели соответствующие члены первого определителя) и вынося за скобки число λ, очевидно, получим в скобках, определитель D_1. Аналогично, собирая вторые слагаемые и вынося за скобки число μ, получим определитель D_2. Таким образом, формула (9) установлена. ■

Эту формулу удобнее записать в другом виде. Пусть D – произвольный фиксированный определитель. Обозначим через $D_j p_i$ определитель, который получается при замене элементов j-го столбца определителя D на числа p_i, $i = 1, 2, \dots,$ n. Исходный определитель можно записать в форме $D(a_{ij})$. Тогда доказанное равенство (9) принимает вид

$$D_j(\lambda b_i + \mu c_i) = \lambda D_j(b_i) + \mu D_j(c_i).$$

Линейное свойство определителя распространяется и на тот случай, когда каждый элемент j-го столбца есть линейная комбинация любого фиксированного числа слагаемых:

$$a_{ij} = \lambda b_i + \mu c_i + \dots + \tau f_i.$$

В этом случае

$$D_j(a_{ij}) = D_j(\lambda b_i + \mu c_i + \dots + \tau f_i) = \lambda D_j(b_i) + \mu D_j(c_i) + \dots + \tau D_j(f_i). \qquad (10)$$

V. *Общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно вынести за знак определителя.*

Доказательство. В самом деле, если $a_{ij} = \lambda b_i$, то по формуле (10)

$$D_j(a_{ij}) = D_j(\lambda b_i) = \lambda D_j(b_i),$$

что и утверждается. ■

VI. *Если некоторая строка определителя состоит целиком из нулей, то определитель равен нулю.*

Доказательство. В самом деле, 0 есть общий множитель элементов данной строки. Вынося его за знак определителя, получим

$$\mathrm{D_j}(0) = \mathrm{D_j}(0 \cdot 1) = 0 \cdot \mathrm{D_j}(1) = 0. \blacksquare$$

VII. *Если определитель имеет две пропорциональные строки, то он равен нулю* (следует из III и V).

VIII *Если одна из строк есть линейная комбинация других, то определитель равен нулю.*

IX *Прибавление к одной строке другой строки с произвольным множителем.*

Определитель не изменится, если к элементам одной из его строки прибавить соответствующие элементы любой другой строки, умноженные на фиксированное число.

Доказательство. Пусть i-ой строке прибавляется k-ая ($\mathrm{k} \neq \mathrm{i}$), умноженная на число λ. В полученном определителе -ая строка будет состоять из элементов вида $a_{ij} + \lambda a_{ik}$. В силу формулы (9)

$$D_j(a_{ij}) = (a_{ij} + \lambda a_{ik}) = D_j(a_{ij}) + \lambda D_j(a_{ik}).$$

Во втором определителе i-ая строка состоит из элементов a_{ik}, т. е. совпадает с i-ой строкой. По свойству III $\mathrm{D_j}(a_{ik}) = 0$, откуда

$$\mathrm{D_j}(\mathrm{a_{ij}} + \lambda a_{ik}) = \mathrm{D_j}(\mathrm{a_{ij}}),$$

что и требовалось доказать. ■

*X. С*войство *IX* можно сформулировать в более общей форме: *определитель D не изменится*, *если к элементам его i-ой строки прибавить соответствующие элементы*

k-ой строки, умноженные на число λ, затем элементы 1-ой строки, умноженные на число μ, ..., элементы p-ой строки, умноженные на число τ $(k \neq j, l \neq j, \ldots, p \neq j)$.

Все свойства, доказанные в этом параграфе для строк определителя, в силу неизменности определителя при транспонировании, остаются справедливыми и для его столбцов.

Рассмотрим два связанных между собой примера на вычисление определителей матриц n-го порядка:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{vmatrix} \text{ и } |B_n| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 1. При рассмотрении определителей n-го порядка нужно четко представлять себе их структуру. Для этого можно рассматривать конкретные определители небольшого порядка, например при $n = 4$. То есть, от исходных определителей перейти к определителям:

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \text{ и } |B_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 2. Вычисление определителей малого порядка нужно стараться производить таким методом, чтобы его было легко обобщить на определители большего порядка.

Замечание 3. По возможности стараться запоминать приемы вычисления определителей, чтобы применять их к вычислению других определителей (сводить вычисление неизвестных определителей к уже известным).

Решение. Для вычисления определителя $|A_4|$ прибавим первую строку ко второй, затем полученную – к третьей, затем полученную к четвертой, получим:

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Достаточно очевидно, что $|A_n| = 1$.

Для вычисления определителя $|B_4|$ представим его первую строку в виде двух строк, т.е. представим определитель в виде суммы двух определителей:

$$|B_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

С учетом того, что первый из двух определителей равен $|A_4| = 1$, после разложения второго определителя из суммы по первой строке получим:

$$|B_4| = |A_4| + |B_3| = 1 + |B_3|.$$

Поскольку $|B_2| = 3$, то $|B_3| = 1 + |B_2| = 4$, $|B_4| = 1 + |B_3| = 5$, то очевидно, что $|B_n| = 1 + |B_{n-1}| = 1 + n$.

Конечно, все это можно доказать весьма строго с использованием метода математической индукции.

Ответ: $|A_n| = 1$, $|B_n| = 1 + n$.

§7. Алгебраические дополнения и миноры

Рассмотрим произвольную, например i-ю строку, в определителя D. Пусть a_{ij}- некоторый элемент этой строки. В правой части равенства (6)

$$D = \sum(-1)^{N(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \dots, a_{n\alpha_n},$$

задающего определитель D, соберем все члены, содержащие элемент a_{ij}, заключим их в скобки и вынесем за эти скобки элемент a_{ij}. Величина, оставшаяся в скобках, обозначается через A_{ij}, она называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} в определителе D.

Так как в каждый член определителя D входит элемент из i-ой строки, то равенству (6) можно придать теперь вид

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}. \tag{11}$$

Формула (11) называется формулой разложения определителя D по элементам i-ой строки. Аналогичную формулу можно написать и для любого столбца определителя D. Например, для j-го столбца получим такое равенство:

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}. \tag{12}$$

Таким образом, получили теорему.

Теорема 1. Сумма всех произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) определителя D на соответствующие алгебраические дополнения равна самому определителю D:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Формулы (11) и (12) можно использовать для вычисления определителя. Но при этом необходимо уметь вычислять алгебраические дополнения.

Отметим одно следствие формул (11) и (12), которое будет в дальнейшем использовано.

Теорема 2. Сумма всех произведений элементов какой-нибудь строки (или какого-нибудь столбца) определителя D на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Доказательство. Равенство (11) выполняется тождественно относительно величин $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}$. Оно остаётся справедливым, если заменить в нем a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, \mathrm{n})$ на любые другие величины. При такой замене величины $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ остаются неизменными, так как они не зависят от элементов a_{ij}. Заменим в правой и левой частях равенства (11) элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}$ на соответствующие элементы какой-нибудь другой, например, i-ой, строки. Тогда определитель слева в (11) будет иметь две одинаковых строки и по свойству определителей будет равен нулю. Получим равенство (при $\mathrm{k} \neq \mathrm{i}$)

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \dots + a_{kn}A_{in} = 0. \tag{13}$$

Аналогично из формулы (12) при $l \neq i$ получим

$$a_{l1}A_{i1} + a_{l2}A_{i2} + \dots + a_{ln}A_{in} = 0. \tag{14}$$

Таким образом, доказали теорему. ■

Если зачеркнуть в матрице n-го порядка некоторую строку и некоторый столбец, то оставшиеся элементы образуют некоторую матрицу $(\mathrm{n} - 1)$-го порядка. Определитель этой матрицы называется минором данной матрицы n-го порядка, а также минором ее определителя D. Если были зачеркнуты i-я строка и -й столбец, то полученный минор обозначается через M_{ij}или $M_{ij}(D)$.

Теорема 3. Вычисление алгебраических дополнений сводится к вычислению соответствующих миноров

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{15}$$

Доказательство. Доказательство равенства (15) проведем сначала для случая $i = 1$, $j = 1$. Соберем в правой части равенства (6) все члены, содержащие элемент

a_{11}. Рассмотрим один из таких членов. Очевидно, что произведение всех его элементов, за исключением a_{11}, дает некоторый член с минора M_{11}. Так как в матрице определителя D нет отрезков с отрицательным наклоном, соединяющих элемент a_{11} с остальными элементами выделенного члена, то знак, который приписывается члену a_{11} определителя D, совпадает со знаком, который приписывается члену c в миноре M_{11}. Выбирая должным образом член определителя D, содержащий элемент a_{11}, и зачеркивая a_{11}, можно получить любой член минора M_{11}. Поэтому рассматриваемая алгебраическая сумма всех членов определителя D, содержащих a_{11}, равна произведению $a_{11}\mathrm{M}_{11}$. По теореме 1 эта сумма равна произведению $a_{11}\mathrm{A}_{11}$. Следовательно, $A_{11} = \mathrm{M}_{11}$,что и требовалось доказать.

Докажем формулу (15) при любых i и j. Рассмотрим элемент $a_{\mathrm{ij}} = a$, расположенный на пересечении i-ой строки и j-го столбца определителя D. Переставляя последовательно соседние строки и столбцы, можем перевести элемент а в левый верхний угол матрицы. Для этого понадобится $i - 1 + \mathrm{j} - 1 = i + \mathrm{j} - 2$ перестановок. В результате получим определитель D_1 с теми же членами, какие имеют исходный определитель D, если его умножить на $(-1)^{i+j-2} = (-1)^{i+j}$. Минор $\mathrm{M}_{11}(\mathrm{D}_1)$ определителя D_1, совпадает с минором $M_{ij}(\mathrm{D})$ определителя D. Из доказанного следует, что в определителе D_1 члены, содержащие элемент a, составляют в сумме величину $a\mathrm{M}_{11}(\mathrm{D}_1)$. Поэтому в составе исходного определителя D члены, содержащие элемент $a_{\mathrm{ij}} = a$, образуют в сумме величину

$$(-1)^{i+j} a M_{11}(\mathrm{D}_1) = a_{\mathrm{ij}}(-1)^{i+j} M_{ij}(\mathrm{D}).$$

По теореме 1 эта же сумма равна произведению $\mathrm{a_{ij}A_{ij}}$. Следовательно, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. Формула (15) доказана полностью. ■

Формулы (11) и (12) можно теперь записать соответственно в форме

$$\mathrm{D} = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in},$$

$$\mathrm{D} = (-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j} + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj},$$

в которой они обычно и употребляются.

Лекция 4

Лемма 1. Система $\{\boldsymbol{a}\}$, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

Доказательство. В самом деле, равенство $\alpha 0 = \mathbf{0}$ при любом α, в частности при $\alpha \neq 0$, установлено в аксиомах 1)-8) § 8. Пусть теперь $\mathrm{x} \neq 0$ и $\alpha x = \mathbf{0}$. Тогда $\alpha = 0$, согласно замечанию 3 § 8. ■

Лемма 2. Если часть системы линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

Доказательство. Пусть известно, что в системе $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{q}$ часть, состоящая, например, из векторов $\mathbf{c}, \dots, \mathbf{q}$, линейно зависима. Значит, существуют числа $\gamma, \dots, \chi$, среди которых не все равны нулю, и такие, что $\gamma\mathbf{c} + \dots + \chi\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Но тогда линейная комбинация $0 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} + \gamma\mathbf{c} + \dots + \chi\mathbf{q} = \mathbf{0}$ нетривиальна, поскольку отличные от нуля числа имеются среди $\gamma, \dots, \chi$. ■

Лемма 3. Если вся система линейно независима, то и любая ее часть линейно независима.

Доказательство. Доказательство вытекает непосредственно из леммы 2 на основании метода от противного. В частности, нулевой вектор не может входить в линейно независимую систему. ■

Лемма 4. В линейно зависимой системе существует хотя бы один вектор, являющейся линейной комбинацией остальных векторов этой системы.

Доказательство. В самом деле, если $\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\mathbf{c}+\ldots+\chi\mathbf{q}=\mathbf{0}$, а среди коэффициентов $\alpha,\beta,\gamma,\ldots,\chi$ есть отличные от нуля, то любой из векторов, имеющих ненулевые коэффициенты, можно линейно выразить через остальные векторы системы. Так, например, если $\alpha\neq 0$, то

$$\boldsymbol{a}=-\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{b}-\frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{c}-\cdots-\frac{\chi}{\alpha}\mathbf{q}. \blacksquare$$

Лемма 4 не только необходима, но и достаточна для линейной зависимости системы векторов. Поэтому, справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. Если в системе некоторый вектор является линейной комбинацией остальных, то система линейна зависима.

Доказательство. Действительно, если

$$a=\beta' b+\gamma'\mathrm{c}+\ldots+\chi'\mathrm{q},$$

то

$$1\cdot a+(-\beta')b+(-\gamma')\mathrm{c}+\ldots+(-\chi')\mathrm{q}=\mathbf{0},$$

и линейная комбинация в левой части последнего равенства нетривиальна.■

Лемма 6. Пусть $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k}$ – какие-нибудь векторы и каждый из векторов $\boldsymbol{c_1},\ldots,\boldsymbol{c_n}$ линейно выражается через $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{c_1}&=\alpha_{11}\boldsymbol{a_1}+\cdots+\alpha_{1k}\boldsymbol{a_k},\\
\boldsymbol{c_2}&=\alpha_{21}\boldsymbol{a_1}+\cdots+\alpha_{2k}\boldsymbol{a_k},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\boldsymbol{c_n}&=\alpha_{n1}\boldsymbol{a_1}+\cdots+\alpha_{nk}\boldsymbol{a_k}.
\end{aligned}$$

Пусть вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражаются через $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k},\boldsymbol{c_1},\ldots,\boldsymbol{c_n}$:

$$\boldsymbol{b}=\lambda_1\boldsymbol{a_1}+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{a_k}+\mu_1\boldsymbol{c_1}+\cdots+\mu_n\boldsymbol{c_n},$$

тогда вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a_1},\ldots,\boldsymbol{a_k}$.

Доказательство.

$$\boldsymbol{b} = (\lambda_1 + \mu_1 a_{11} + \cdots + \mu_n a_{n1})\, \boldsymbol{a_1} + \cdots + (\lambda_k + \mu_1 a_{1k} + \cdots + \mu_n a_{nk})\boldsymbol{a_k}.\blacksquare$$

Лемма 7. Система векторов $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{0})$ всегда линейно зависима.

§8. Вычисление определителей

Формула (12) приобретает простой вид, когда все элементы i-ой строки, кроме одного, например a_{ik}, равны нулю. В этом случае

$$D = a_{ik}A_{ik}, \tag{16}$$

и вычисление определителя D n-го порядка непосредственно приводится к вычислению определителя $(\mathrm{n}-1)$-го порядка. Но если при $a_{\mathrm{ik}} \neq 0$ в i-ой строке есть элемент a_{ij}, также не равный нулю, то можно вычесть из j-го столбца определителя D k-й столбец, умноженный на $\lambda = \frac{a_{\mathrm{ij}}}{\mathrm{a_{ik}}}$. В результате получим определитель, равный исходному, у которого k-ый элемент i-ой строки уже равен нулю. Повторяя аналогичные операции, можно от любого определителя с фиксированным элементом $\mathrm{a_{ik}} \neq 0$ перейти к определителю, у которого все элементы i-й строки, кроме $\mathrm{a_{ik}}$, равны нулю, и вычислить его по формуле (16). Аналогичные преобразования можно производить и со столбцами определителя.

<u>Пример 1.</u>

Вычислить определитель 5-го порядка

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

В третьем столбце этого определителя уже имеется два нуля. Чтобы получить в этом столбце еще два нуля, нужно ко второй строке прибавить утроенную пятую, а из четвертой строки вычесть учетверенную пятую. После этой операции и разложения определителя по третьему столбцу получим

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+5}(-1)\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Теперь проще получить три нуля в первом столбце: для этого прибавим к первой строке удвоенную вторую, а из третьей и четвертой строк вычтем вторую, соответственно утроенную и удвоенную:

$$D = -\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}.$$

Чтобы легче вычислить полученный определитель 3-го порядка, уменьшим абсолютные величины его элементов. Для этого после вынесения из второй строки общего множителя 2 прибавим вторую строку к первой и из третьей строки вычтем удвоенную вторую:

$$D = 2\begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 13 & -17 & -13 \\ 10 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot$$

$$4\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 13 & -17 & -13 \\ 10 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

В первой строке имеется уже один нуль. Чтобы получить еще один нуль, вычтем из второго столбца удвоенный третий. После этого определитель легко вычисляется до конца:

$$D = 8\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 13 & -17 & -13 \\ 10 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 13 & 9 & -13 \\ 10 & -3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 8 \cdot (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 13 & 9 \\ 10 & -3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 3\begin{vmatrix} 13 & 3 \\ 10 & -1 \end{vmatrix} = -1032.$$

<u>Пример 2.</u>

Вычислить определитель Вандермонда.

Определитель вида

$$\Delta_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

называется определителем Вандермонда и имеет теоретическое значение.

Вычислим определитель Вандермонда для $n = 2$ и $n = 3$.

Имеем $\Delta_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$.

Для определителя третьего порядка имеем

$$\Delta_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Очевидно, что аналогичные рассуждения можно проводить и при больших n, в результате получим

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \prod_{n \geq i \geq l \geq 1} (x_i - x_l).$$

<u>Пример 3.</u>

Рассмотрим два связанных между собой примера на вычисление определителей матриц n-го порядка:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

и

$$|B_n| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

<u>Замечание 1.</u> При рассмотрении определителей n-го порядка нужно четко представлять себе их структуру. Для этого можно рассматривать конкретные определители небольшого порядка, например при $n = 4$. То есть, от исходных определителей перейти к определителям:

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad |B_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

<u>Замечание 2.</u> Вычисление определителей малого порядка нужно стараться производить таким методом,

чтобы его было легко обобщить на определители большего порядка.

Замечание 3. По возможности стараться запоминать приемы вычисления определителей, чтобы применять их к вычислению других определителей (сводить вычисление неизвестных определителей к уже известным).

Для вычисления определителя $|A_4|$ прибавим первую строку ко второй, затем полученную – к третьей, затем полученную к четвертой, получим:

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

Достаточно очевидно, что $|A_n| = 1$.

Для вычисления определителя $|B_4|$ представим его первую строку в виде двух строк, т.е. представим определитель в виде суммы двух определителей:

$$|B_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

С учетом того, что первый из двух определителей равен $|A_4| = 1$, после разложения второго определителя из суммы по первой строке получим:

$$|B_4| = |A_4| + |B_3| = 1 + |B_3|.$$

Поскольку $|B_2| = 3$, то $|B_3| = 1 + |B_2| = 4$, $|B_4| = 1 + |B_3| = 5$, то очевидно, что $|B_n| = 1 + |B_{n-1}| = 1 + n$.

Конечно, все это можно доказать весьма строго с использованием метода математической индукции.

В итоге, получим:

$$|A_n| = 1, |B_n| = 1 + n.$$

§9. Еще об алгебраических дополнениях и минорах

Пусть в квадратной матрице n-го порядка указаны произвольно $\mathrm{k} \leq \mathrm{n}$ различных строк и столько же различных столбцов. Элементы, стоящие на пересечениях этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется минором k-го порядка данной матрицы n-го порядка и минором -го порядка определителя D. Обозначается через

$$M = M_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k},$$

где $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \dots, \mathrm{i}_\mathrm{k}$ – номера выделенных строк, а $\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \dots, \mathrm{j}_\mathrm{k}$ – номера выделенных столбцов.

Если зачеркнуть в исходной матрице строки и столбцы, в которых лежит минор M, то оставшиеся элементы снова образуют квадратную матрицу порядка $(\mathrm{n} - \mathrm{k})$, определитель которой называется минором, дополнительным к минору M, и обозначается символом

$$\overline{M} = \overline{M}_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k},$$

где индексы указывают номера вычеркнутых строк и столбцов.

В частности, если исходный минор имеет порядок 1, т. е. совпадает с некоторым элементом a_{ij} определителя D, то дополнительный минор совпадает с минором M_{ij}.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения

$$\mathrm{D} = \sum (-1)^{i+j} M_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k} \overline{M}_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}.$$

Доказательство. Рассмотрим минор

$$M_1 = M_{1,\dots,k}^{1,\dots,k},$$

лежащий в первых k строках и первых k столбцах определителя D. Минор, дополнительный к нему, есть минор

$$M_2 = \overline{M}_1 = \overline{M}_{1,\dots,k}^{1,\dots,k}.$$

Выделим в правой части формулы (6) все те члены определителя, в которых первые k элементов принадлежат минору M_1, а, следовательно, остальные $(\mathrm{n}-\mathrm{k})$ элементов – минору $\overline{M}_1$. Фиксируем сначала один из таких членов для определения знака, который должен быть ему приписан. Обозначим этот член через c. Первые k элементов этого члена определяют некоторый член c_1 минора M_1. Обозначим через N_1 число соответствующих отрезков отрицательного наклона. Тогда знак, который должен быть поставлен перед членом c_1 в миноре M_1 определяется выражением $(-1)^{\mathrm{N}_1}$, где $\mathrm{N}_1 -$ число соответствующих обрезков отрицательного наклона в миноре M_1. Остальные $(\mathrm{n}-\mathrm{k})$ элементов члена c определяют некоторый член c_2 минора M_2. Знак, который должен быть поставлен перед этим членом в миноре M_2, определяется выражением $(-1)^{\mathrm{N}_2}$, где N_2 – число соответствующих отрезков отрицательного наклона в миноре M_2. Так как в матрице определителя D нет ни одного отрезка с отрицательным наклоном, который соединял бы элемент минора M_1 с элементом минора M_2, то общее число отрезков отрицательного наклона, соединяющих элементы члена c, равно сумме $(\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2)$. В связи с этим, знак, который следует поставить перед членом c в определителе D определяется выражением $(-1)^{\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2}$. Следовательно, он равен произведению знаков членов c_1 и c_2 в минорах M_1 и

M_2. Заметим, что произведение любого члена минора M_1 на любой член минора M_2 дает один из выделенных членов определителя D. Отсюда следует, что сумма всех выделенных членов в выражении определителя D по формуле (6) равна произведению миноров M_1 и M_2.

Теперь получим похожий результат для произвольного минора

$$M_1 = M_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}$$

с дополнительным минором M_2. Переставляя последовательно соседние строки и столбцы, можно минор M_1 перевести в левый верхний угол определителя D. Для этого понадобится $(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \dots + (i_k - \mathrm{k}) + (j_1 - 1) + (j_2 - 2) + \dots + (j_k - \mathrm{k})$ перестановок. В результате получим определитель D_1 с теми же членами, что и исходный определитель D, в том случае, если его умножить на $(-1)^{i+j}$, где $\mathrm{i} = \mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2 + \dots + \mathrm{i}_\mathrm{k}$, $\mathrm{j} = \mathrm{j}_1 + \mathrm{j}_2 + \dots + \mathrm{j}_\mathrm{k}$. По доказанному, в определителе D_1 сумма всех тех членов, первые k элементов которых входят в минор M_1 равна произведению $M_1 M_2$. Отсюда следует, что сумма соответствующих членов определителя D равна произведению

$$(-1)^{i+j} M_1 M_2 = M_1 A_2,$$

где величина $A_2 = (-1)^{i+j} M_2$ называется алгебраическим дополнением минора в определителе D. Иногда употребляют обозначение $A_2 = \overline{A}_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}$.

Фиксируем теперь в определителе D строки с номерами $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \dots, \mathrm{i}_\mathrm{k}$. В каждый член определителя D входят некоторые элементы из этих строк. Если собрать вместе все такие члены, у которых элементы выделенных строк принадлежат к фиксированным столбцам с номерами $\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \dots, \mathrm{j}_\mathrm{k}$, то, по доказанному, сумма всех этих членов будет равна произведению минора $M_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}$ на соответствующее алгебраическое дополнение. Все члены определителя, таким образом, можно разбить на группы, каждая из которых определяется заданием k столбцов. Сумма членов в каждой группе равна произведению соответствующего минора и его алгебраического дополнения. Поэтому весь определитель представляется в виде суммы

$$D = \sum(-1)^{i+j} M_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k} \overline{M}_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}. \tag{17}$$

Причем суммирование производится при фиксированных индексах выбранных строк $i_1, i_2, \dots, i_k$ по всем возможным значениям индексов столбцов $j_1, j_2, \dots, j_k$, $1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_k \le n$. ■

Очевидно, формула (17) действительно является обобщением формулы разложения определителя по одной строке. Аналогичная формула справедлива для разложения определителя D по фиксированной системе столбцов.

Пример.

Определитель вида

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \dots & \cdots & \dots & \cdots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},$$

все элементы которого, находящиеся в первых k столбцах и последних $(n-k)$ строках, равны нулю, называется квазитреугольным. Для его вычисления разложим определитель по первым k строкам с помощью теоремы Лапласа. В сумме (17) останется только одно слагаемое, в результате получим

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Лекция 5

§10. Решение систем линейных уравнений

Рассмотрим сначала систему специального вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (18)$$

с числом неизвестных, равным числу уравнений.

Коэффициенты $\mathrm{a_{ij}}$, $i, \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n}$ образуют основную матрицу системы. Относительно данной матрицы предположим, что ее определитель D отличен от нуля.

Теорема Крамера. Система (18) всегда совместна, определена и имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим, что система (18) имеет некоторое решение $\mathrm{c_1, c_2, \ldots, c_n}$. Следовательно, справедлива система равенств

$$\begin{cases} a_{11}\mathrm{c}_1 + a_{12}\mathrm{c}_1 + \cdots + a_{1n}\mathrm{c}_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}\mathrm{c}_1 + a_{n2}\mathrm{c}_1 + \cdots + a_{nn}\mathrm{c}_n = b_n. \end{cases} \qquad (19)$$

Умножим первое из равенств (19) на алгебраическое дополнение A_{11} к элементу a_{11} в матрице системы, далее умножим второе равенство на A_{21}, третье – на A_{31} и т. д., дойдя до последнего равенства. После чего сложим все полученные равенства. В результате получим следующее соотношение:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})c_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \cdots + +a_{n2}A_{n1})c_2 + \cdots + +(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \cdots + a_{nn}A_{n1})c_n = b_{11}A_{11} + +b_{21}A_{21} + \cdots + b_{n1}A_{n1}. \qquad (20)$$

В силу теоремы 1 §5 гл. I коэффициент при c_1 в соотношении (20) равен самому определителю D. В силу теоремы 2 §5 гл. I коэффициенты при всех остальных c_j,

$j \neq 1$, обращаются в нуль. Выражение в правой части есть разложение определителя

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по первому его столбцу. Равенство (20) можно теперь записать в виде $D \cdot c_1 = D_1$, следовательно

$$c_1 = \frac{D_1}{D}.$$

Аналогично можно получить выражение

$$c_j = \frac{D_j}{D}, \ j = 1, 2, \ldots, n, \tag{21}$$

где

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_j(b_i)$$

есть определитель, полученный из определителя D заменой его j-го столбца на столбец из чисел $b_1, \ldots, b_n$.

Таким образом, если решение системы (18) существует, то оно выражается через коэффициенты системы и правые части по формулам (21). Если решение системы (18) существует, то оно единственно.

Покажем, что решение системы (18) всегда существует. Подставим величины

$$c_j = \frac{D_j}{D}, \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

в систему (18) на место неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Покажем, что все уравнения системы (18) при этом обращаются в тождества. Действительно, для i-го уравнения получаем

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D_n}{D} =$$
$$= \frac{1}{D}\Big((a_{i1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}) +$$
$$a_{i2}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}) + \cdots + +a_{in}(b_1A_{1n} +$$
$$b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn})\Big) = \frac{1}{D}\Big(b_1(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{21} + \cdots +$$

$$a_{in}A_{n1}) + \dots + +b_i(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}) + \dots + b_n(a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} + \dots + a_{in}A_{nn})\big).$$

Из всех скобок, служащих коэффициентами при величинах $b_1, b_2, \dots, b_n$ отлична от нуля в силу теорем 1 и 2 §5 гл. I только одна, именно та, которая стоит при величине b_i. Она равна самому определителю D. Следовательно, полученное выражение приводится к виду

$$\frac{1}{D} b_i D = b_i,$$

и совпадает с правой частью i-го уравнения системы.

Таким образом, величины c_j действительно образуют решение системы (18). ■

Сформулируем следующее правило для получения решения системы (18), которое называется правилом Крамера.

Если определитель системы (18) отличен от нуля, то она имеет одно и только одно решение: значение неизвестного x_j равно дроби, знаменателем которой является определитель системы (18), а числителем – определитель, получающийся заменой j-го столбца в определителе системы (18) на столбец из правых частей системы, $j = 1, 2, \dots, n$.

Отыскание решения системы (18) сводится к вычислению определителей.

<u>Замечание</u>. Иногда встречаются системы линейных уравнений, свободные члены которых являются не числами, а векторами (например, в аналитической геометрии, в механике). Теорема Крамера и ее вывод остаются справедливыми и для этого случая. Следует иметь только в виду, что и значения неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$ также будут не числами, а векторами.

Прежде чем исследовать более общие системы, введем понятие линейные пространства.

§11. Гауссовский процесс исключения

Естественно ожидать, что n уравнений (линейных или нет), связывающих n неизвестных, могут быть решены и тем самым будет получено множество численных значений для n неизвестных. Часто физическая интуиция подводит нас также к предположению, что решение будет единственным. Предположим, что ищем n линейных уравнений, связывающих n неизвестных. Они могут быть записаны в виде:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered} \tag{1}$$

или

$$Ax = b, \tag{2}$$

где система уравнений (1) записана в матричной форме. Решим эту систему уравнений, т.е. найти величины $x_1, x_1, \dots, x_n$, которые удовлетворили бы все уравнения системы.

Само собой, напрашивается желание найти процедуру последовательного исключения неизвестных. Без потери общности можем предположить, что $a_{11} \neq 0$, поскольку уравнения могут быть перегруппированы и неизвестные перенумерованы с тем, чтобы согласоваться с нашей посылкой. Тогда решаем первое уравнение относительно x_1 и получаем

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{3}$$

Деля обе части первого уравнения на a_{11} для преобразования коэффициента при x_1 в единицу и используя уравнение (3) для исключения x_1 в оставшихся $n-1$ уравнениях, имеем:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}},$$

$$
\begin{aligned}
&\left[a_{22}-a_{21}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\right]x_2+\cdots+\left[a_{2n}-a_{21}\left(\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\right]x_n=b_2-a_{21}\frac{b_1}{a_{11}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4)\\
&\left[a_{n2}-a_{n1}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\right]x_2+\cdots+\left[a_{nn}-a_{n1}\left(\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\right]x_n=b_n-a_{n1}\frac{b_1}{a_{11}}
\end{aligned}
$$

или

$$
\begin{gathered}
x_1+a'_{12}x_2+\cdots+a'_{1n}x_n=b'_1,\\
a'_{22}x_2+\cdots+a'_{2n}x_n=b'_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a'_{n2}x_2+\cdots+a'_{nn}x_n=b'_n,\\
x_n=g_n.
\end{gathered}
\qquad (5)
$$

Если по крайней мере один из коэффициентов $a'_{ij}(i,j=2,\dots,n)$ отличен от нуля, и можем предположить, без потери общности, что $a'_{22}\neq 0$. Процесс преобразования продолжается с помощью деления второго уравнения системы (5) на a'_{22} с использованием этого уравнения для исключения неизвестного x_2 в уравнениях с номерами $3,\dots,n$ до тех пор, пока не получим в итоге систему

$$
\begin{gathered}
x_1+h_{12}x_2+\cdots+h_{1n}x_n=g_1,\\
x_2+\cdots+h_{2n}x_n=g_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
x_{n-1}+h_{n-1,n}x_n=g_{n-1},\\
x_n=g_n.
\end{gathered}
\qquad (6)
$$

Видим, что $x_n=g_n$. Это значение для x_n подставляется затем в предыдущие $n-1$ уравнений системы (6). Таким образом, имеем

$$x_{n-1}=g_{n-1}-h_{n-1}g_n.$$

Этот результат подставляется также в оставшиеся $n-2$ уравнений системы и т.д. Продолжением этого процесса обратной подстановки получаем значение всех неизвестных x_i. Эта процедура называется гауссовским преобразованием, или гауссовским исключением.

Теперь можем сделать интересное наблюдение. Поскольку окончательное множество уравнений может быть записано в виде

$$\begin{bmatrix} 1 & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & h_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \dots \\ g_n \end{bmatrix} \tag{7}$$

или как

$$Hx = g \tag{8}$$

Становится ясным, что H представляет собой ступенчатую матрицу, которая должна быть получена из матрицы A. Должны только напомнить результат действий, проведенных с элементами матрицы A для того, чтобы увидеть, что гауссовское преобразование безусловно превращает матрицу A в ступенчатую матрицу H. Если матрица E представляет собой комбинацию элементарных преобразований со строками, которые превращают матрицу A в матрицу H, то

$$H = EA, \qquad g = Eb. \tag{9}$$

Это наблюдение снабдило нас определенной полезной информацией. Знаем, что система уравнений (1) будет приведена к форме (6), если и только если ранг матрицы A равен n. Если ранг матрицы A меньше n, то метод непригоден по одной из двух причин: либо будем не в состоянии определить значения всех неизвестных или будет наблюдаться очевидная противоречивость, состоящая в том факте, что все коэффициенты h_{ij} принимают нулевое значение в некоторой строке, в то время как g_i не принимает нулевого значения. В настоящее время еще не уверены, что это приведет к непригодности метода. Это станет ясным позднее. Однако не знаем, что метод будет действовать, если $r(A) = n$.

Вместо того чтобы исключить x_k только в уравнениях с номерами $k + 1, \dots, n$, с одинаковым успехом можем исключить также x_k в уравнениях с номерами $1, \ldots,$ $k-1$, так что x_k появится только в k-м уравнении. В таком случае не будет необходимости в обратной подстановке. Эта модификация гауссовского исключения называется методом Гаусса-Жордана. Оба плана преобразования представляют итерационные процессы, и впервые вспоминаем о них при попытке решить систему линейных уравнений. Довольно интересно, что они представляют собой эффективные вычислительные процедуры и их модификации встречаются в ряде методов решения систем линейных уравнений как вручную, так и с помощью быстродействующих вычислительных машин. Следующий пример иллюстрирует применение методов Гаусса и Гаусса-Жордана для простого случая.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений:

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16.$$

а) Гауссовское преобразование. Используем первое уравнение для нахождения x_1 и подставляем его во второе и третье уравнения. В результате поучаем:

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8,$$
$$\frac{1}{2}x_2 - 5x_3 = -14,$$
$$\frac{5}{2}x_2 + x_3 = 8.$$

Используя второе уравнение из этой новой системы, исключаем x_2 в третьем уравнении. Первое уравнение остается неизменным. Таким образом, получаем:

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8,$$
$$x_2 - 10x_3 = -28,$$
$$26x_3 = 78.$$

Из третьего уравнения $x_3 = 3$. Подставляя это значение в первые два уравнения, находим, что

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 2,$$
$$x_2 = 2.$$

Отсюда $x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3.$

б) Преобразование Гаусса-Жордана. Первый шаг является тем же, что и изложенный в пункте а):

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8,$$
$$\frac{1}{2}x_2 - 5x_3 = -14,$$
$$\frac{5}{2}x_2 + x_3 = 8.$$

Используя второе уравнение, получаем величину x_2. Результат подставляется теперь и в первое и в третье уравнения. Это дает:

$$x_1 + 7x_3 = 22,$$
$$x_2 - 10x_3 = -28,$$
$$26x_3 = 78.$$

Получив $x_3 = 3$, немедленно находим, что $x_1 = 1, x_2 = 2$.

§12. Правило Крамера

Рассмотрим снова систему n линейных уравнений с n неизвестными (1 §11) или в матричной форме. Имеем:

$$Ax = b, \tag{10}$$

где $A = \|a_{ij}\|$; $x = [x_1, \dots, x_n], b = [b_1, \dots, b_n]$.

Теперь предположим, что $r(A) = n$, так что матрица A является невырожденной. Это означает, что $|A| \neq 0$ и обратная матрица A^{-1} существует. Умножая (слева) обе части равенства (10) на A^{-1}, получаем:

$$A^{-1}Ax = Ix = x = A^{-1}b. \qquad (11)$$

Отсюда, когда матрица A является невырожденной, получаем единственное решение $x = A^{-1}b$ для системы уравнений (1 §11). Решение является единственным, поскольку обратная матрица единственна. Таким образом, в соотношении (11) нашли решение системы уравнений (10), применяя обратную матрицу. Следовательно, свели численное решение системы (10) к нахождению обратной матрицы A^{-1}. Соотношение (11) приносит большую пользу для теоретической работы, так как величина первоначально неизвестного вектора выражена в виде $x = A^{-1}b$ и $A^{-1}b$ может быть вычислена на основе известных величин A и b.

Соотношение (11) может быть выражено и в другой более интересной форме. Обратная матрица дана в виде

$$A^{-1} = |A|^{-1}A^{+}; \qquad (12)$$

$$A^{+} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{,n} \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

где A_{ij} является адъюнктой элемента a_{ij} матрицы A. Таким образом, можем записать соотношение (11) в компонентной форме в виде

$$x_i = |A|^{-1}\sum_{j=1}^{n} A_{ji}b_j = |A|^{-1}\sum_{j=1}^{n} b_jA_{ji}, \qquad (14)$$

Однако помним, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji}A_{ji}$$

Является разложением определителя $|A|$ по i-му столбцу. При сравнении видим, что

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ji}A_{ji}$$

Является разложением определителя, образованного из матрицы изъятием i-го столбца и заменой его на столбец b. Это дает так называемое правило Крамера: *для получения значений x_i надо разделить на определитель $|A|$ определитель, полученный из матрицы A заменой i-го столбца на b. Отсюда*

$$x_1 = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \dots, x_n$$

$$= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Правило Крамера, вообще говоря, неэффективно для численного решения систем уравнений, так как вычисление $n+1$ определителя составляет очень тяжелую работу, особенно когда n является довольно большим числом. Более эффективным является метод Гаусса. Однако правило Крамера очень полезно при теоретических исследованиях из-за того, что оно дает компактное выражение для решения системы (10) в виде $x = A^{-1}b$.

Пример. Решить системы уравнений:

$$3x_1 + 2x_2 = 7,$$

$$4x_1 + x_2 = 1.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Таким образом, существует единственное решение:

$$x_1 = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}(7-2) = -1,$$

$$x_2 = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}(3-28) = 5.$$

Правильность решения может быть легко проверена подстановкой полученных величин в исходную систему уравнения.

§13. Правила ранга

В предыдущих двух разделах рассмотрели пути решения систем n линейных уравнений с n неизвестными. Теперь хотим изучить условия, которые определяют, существуют решения или нет. Уже видели, что система n уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, если $r(A) = n$. Также отмечали, что трудности возникают в том случае, когда $r(A) < n$ (хотя этот случай не был рассмотрен детально). Для полной общности рассмотрим систему m линейных уравнений с n неизвестными, не налагая никаких ограничений на m и n, т.е. может быть $m > n$ или $m = n$, или $m < n$. Эта система может быть записана:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}\ x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}\ x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{matrix} \qquad (16)$$

или

$$Ax = b,$$

где матрица A является $(m \times n)$- матрицей.

Затем определим новую $\big(m \times (n+1)\big)$- матрицу A_b, которая содержит матрицу A в первых n столбцах и b в качестве $(n+1)$-го столбца, т.е.

$$A_b = (A, b) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}. \qquad 17)$$

Матрица A_b является очень важной. Ее ранг так же, как и ранг матрицы A, определяет, существует ли решение для системы уравнений (16). Матрица A_b называется расширенной матрицей системы.

Поскольку каждый определитель матрицы A также встречается в матрице A_b, то ранг матрицы A не может превосходить ранг матрицы A_b. Поэтому существуют две возможности: (а) $r(A) < r(A_b)$, (б) $r(A) = r(A_b)$. Необходимо заметит, что $r(A)$ не может больше, чем $r(A_b)$.

Если справедлив случай (а), т.е. если $r(A) < r(A_b)$, то не существует значений неизвестных x_i, удовлетворяющих уравнениям (5-16). Определитель наибольшего порядка в матрице A_b, не принимающий нулевого значения, должен содержать столбец b, поскольку $r(A) < r(A_b)$. Отсюда b является линейно независимым столбцом матрицы A_b и, таким образом, не существует значений неизвестных x_i, таких, что

$$\sum_{j=1}^{n} x_j a_j = b,$$

где a_j представляют собой столбцы матрицы A, т.е. не существует никаких x_i, удовлетворяющих уравнениям (16). Отсюда решений не существует, и уравнения являются противоречивыми, или, другими словами *несовместными*.

С другой стороны, если справедливо (б), т.е. $r(A) = r(A_b) = k$, то существует по крайней мере одно решение. Поскольку $r(A) = k$ и $r(A_b) = k$, то каждый столбец матрицы A_b может быть выражен как линейная комбинация k линейно независимых столбцов матрицы A. (Без потери общности можем предположить, что они являются первыми k столбцами матрицы A). Поскольку b представляет собой столбец матрицы A_b, должны существовать числа x_j, такие, что

$$\sum_{j=1}^{k} x_j a_j = b.$$

Следовательно, существует по крайней мере одно решение для системы уравнений (16). Таким образом, доказали, что *если* $r(A) < r(A_b)$, *то система уравнений (16) несовместна и решения не существует. Напротив, если* $r(A) = r(A_b)$, *то для системы уравнений (16) всегда существует по крайней мере одно решение.*

Важно отметить, что существование решения не зависит от того, что $r(A) \le min(n, m)$. Понятно, что можем иметь 100 уравнений и 1000 неизвестных с $r(A) = r(A_b) = 1$. Из проведенного исследования знаем, что должно быть по крайней мере одно решение.

Примеры.

1. Существует ли решение для системы уравнений:

$$3x_1 + 4x_2 = 7,$$
$$2{,}25x_1 + 3x_2 = 5{,}25?$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2{,}25 & 3 \end{bmatrix}, r(A) = 1, A_b = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2{,}25 & 3 & 5{,}25 \end{bmatrix}, r(A_b) = 1.$$

Таким образом, система уравнений имеет решение. Фактически существует бесконечное число решений. Они даются формулой $x_1 = \frac{7}{3} - \frac{4}{3}x_2$.

Для любого значения x_2,поскольку второе уравнение получется из первого умножением его на 3/4. Заметим, что геометрически оба уравнения задают одну и ту же прямую линию.

2. Существует ли решение для системы уравнений:

$$3x_1 + 4x_2 = 7,$$
$$2{,}25x_1 + 3x_2 = 1?$$

$$r(A) = 1, A_b = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 2{,}25 & 3 & 1 \end{bmatrix}, r(A_b) = 2.$$

Решений не существует. Если первое уравнение умножить на 3/4, то его левая часть становится левой частью второго уравнения. Однако правая часть первого уравнения не становится правой частью второго уравнения. Совершенно очевидно, что уравнения являются несовместимыми. Иллюстрируйте это геометрически (две параллельные линии, которые не пересекаются).

3. Существуют ли решение для системы уравнений:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 7,$$
$$x_1 + 0{,}5x_2 - x_3 = 4,$$
$$x_1 = 0{,}75x_2 + x_3 = 5?$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0{,}5 & -1 \\ 1 & 0{,}75 & 1 \end{bmatrix}, A_b = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0{,}5 & -1 & 4 \\ 1 & 0{,}75 & 1 & 5 \end{bmatrix}, |A| = 0, r(A) = 2.$$

Однако $r(A_b) = 3$. Решений не существует. Если второе уравнение сложить с третьими, тот получим

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 14.$$

Это несовместимо с первым уравнением. Какова геометрически интерпретация?

§14. Комплексификация и овеществление. Унитарные пространства

Комплексификацией линейного пространства V над $\mathbb{R}$ называется множество пар (a, b), $a, b \in V$, на котором введена структура линейного пространства над $\mathbb{C}$ следующим образом:

$$(a, b) + (a_1, b_1) = (a + a_1, b + b_1),$$
$$(x + iy)(a, b) = (xa - yb, xb + ya).$$

Такие пары векторов можно записывать в виде $a + ib$. Комплексификация пространства V обозначается $V^{\mathbb{C}}$; подпространство, состоящее из пар $(a, 0)$, называется *вещественным подпространством* $V^{\mathbb{C}}$ или *вещественной формой* $V^{\mathbb{C}}$.

Оператору $A: V \to V$ можно сопоставить оператор $A^{\mathbb{C}}: V^{\mathbb{C}} \to V^{\mathbb{C}}$, заданный формулой $A^{\mathbb{C}}(a + ib) = Aa + iAb$. Оператор $A^{\mathbb{C}}$ называется комплексификацией оператора A. Если $e_1, \dots, e_n$ - базис пространства V, в этих базисах матрицы операторов A и $A^{\mathbb{C}}$ совпадают.

Пространство $V^{\mathbb{C}}$ с фиксированным вещественным подпространством V называется вещественно-комплексным пространством. В этом пространстве определена операция сопряжения, переводящая вектор $v + iw$ в вектор $v + iw = v - iw$ $(v, w \in V)$. Пространство $V^{\mathbb{C}}$ является линейным пространством размерности $2\, dim\, V$ над $\mathbb{R}$. Операция сопряжения является линейным преобразованием этого пространства над $\mathbb{R}$, но не над $\mathbb{C}$. Точки пространства V (и только они) остаются при сопряжении неподвижными.

Линейное пространство V над $\mathbb{C}$ является также и линейным пространством над $\mathbb{R}$ (элементы V можно умножать на все комплексные числа, поэтому их заведомо можно умножать на вещественные числа). Полученное пространство над $\mathbb{R}$ называется *овеществлением* V; будем обозначать его $V_{\mathbb{R}}$.

Аналогично, линейное отображение $A: V \to W$ над $\mathbb{C}$ можно рассматривать как линейное отображение $A_{\mathbb{R}}: V_{\mathbb{R}} \to W_{\mathbb{R}}$ над $\mathbb{R}$. Отображение $A_{\mathbb{R}}$ называется *овеществлением* отображения A.

Если $e_1, \dots, e_n$- базис V над $\mathbb{C}$, то $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$- базис $V_{\mathbb{R}}$. Легко проверить, что если $A = B + iC$- матрица линейного отображения $A: V \to W$ относительно базисов $e_1, \dots, e_n$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$, причем матрицы B и C вещественны, то матрица линейного отображения $A_{\mathbb{R}}$ относительно базисов $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$, $i\varepsilon_1, \dots, i\varepsilon_m$ имеет вид $\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$.

Теорема. Если $A: V \to V$- *линейное отображение над* $\mathbb{C}$, то $det\, A_{\mathbb{R}} = |det\, A|^2$.

Доказательство.

$$\begin{vmatrix} B & -C \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B + iC & -C + iB \\ C & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B + iC & 0 \\ C & B - iC \end{vmatrix} =$$
$$|B + iC| \cdot |B - iC| = det\, A \cdot det\, \overline{A} = |det\, A|^2.$$

Пусть V- линейное пространство над $\mathbb{C}$. *Скалярным* или *эрмитовым* произведением в V называется отображение $V \times V \to \mathbb{C}$, сопоставляющее паре векторов $x, y \in V$ комплексное число (x, y) и обладающее следующими свойствами:

1) $(x, y) = (\overline{y, x})$;

2) $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$;

3) (x, x)- действительное положительное число для любого $x \neq 0$.

Пространство V, в котором задано эрмитово произведение, называется *унитарным* или *эрмитовым*. Стандартное эрмитовое произведение в $\mathbb{C}^n$ имеет вид $x_1\, \overline{y}_1 + \dots + x_n\, \overline{y}_n$.

Базис $e_1, \dots, e_n$ пространства V называется *ортонормированным*, если $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Пусть $\|a_{ij}\|_1^n$- матрица оператора A относительно ортонормированного базиса $e_1, \dots, e_n$, т.е. $Ae_j = \sum a_{ij}\, e_i$. Тогда $a_{ij} = (Ae_j, e_i)$. В частности, значения (Ax, y) однозначно определяют оператор A.

Линейный оператор A^* называется *сопряженным* с A, если $(Ax, y) = (x, A^* y) = \overline{(A^* y, x)}$. Пусть $\|a_{ij}\|_1^n$ и $\|b_{ij}\|_1^n$- матрицы операторов A и A^* относительно ортонормированного базиса. Тогда $a_{ij} = (Ae_j,\ e_i) = a_{ij} = \overline{(A^* e_i,\ e_j)} = \overline{b}_{ij}$. Матрица $X^* = \overline{X}^T$ называется *сопряженной* с X (она получается их X комплексным сопряжением всех элементов и транспонированием).

Линейный оператор A называется *унитарным*, если $(Ax, Ay) = (x, y)$, т.е. унитарный оператор сохраняет эрмитово произведение. Если оператор A унитарен, то $(x, y) = (Ax, Ay) = \left(x, A^*Ay\right)$. Поэтому $A^*A = E = AA^*$, т.е. строки и столбцы матрицы A образуют ортонормированную систему векторов.

Линейный оператор A называется *эрмитовым* (соответственно *косоэрмитовым*), если $A^* = A$ (соответственно $A^* = -A$). Линейный оператор эрмитов или косоэрмитов тогда и только тогда, когда его матрица A относительно ортонормированного базиса эрмитова, т.е. $A^* = A$, или косоэрмитова, т.е. $A^* = -A$; в этом случае его матрица относительно любого ортонормированного базиса эрмитова или косоэрмитова.

Аналогом вещественных симметрических матриц в комплексном случае являются, как правило, эрмитовы матрицы. Иногда рассматривают также *комплексные симметрические* или *кососимметрические* матрицы, для которых $A^T = A$ или $A^T = -A$.

Теорема 1. *Пусть* A*- комплексный оператор, причем* $(Ax, x) \equiv 0$. *Тогда* $A = 0$.

Доказательство. Запишем равенство $(Ax, x) = 0$ для $x = u + v$ и $x = u + iv$. Учитывая, что $(Av, v) = (Au, u) = 0$, получим $(Av, u) + (Au, v) = 0$ и $i(Av, u) - i(Au, v) = (Aiv, u) + (Au, iv) = 0$. Следовательно, $(Au, v) = 0$ для любых $u, v \in V$.

<u>Замечание.</u> В вещественном случае тождество $(Ax, x) \equiv 0$ означает, что A- кососимметрический оператор (см. п.. 21.1, Теорема 2).

Теорема 2. *Пусть* A *- комплексный оператор, причем* $(Ax, x) \in \mathcal{R}$ *для любого* x. *Тогда* A*- эрмитов оператор.*

Доказательство. Так как $(Ax, x) = \overline{(Ax, x)} = (x, Ax)$ то $\big((A - A^*)x, x\big) = (Ax, x) - \big(A^*x, x\big) = (Ax, x) - (x, Ax) = 0$. Согласно теореме 1 $A - A^* = 0$.

Теорема3. *Любой комплексный оператор однозначно представим в виде $A = B + iC$, где B и C- эрмитовы операторы.*

Доказательство. Если $A = B + iC$, где B и C- эрмитовы операторы, то $A^* = B^* - iC^* = B - iC$, поэтому $2B = A + A^*$ и $2iC = A - A^*$. Легко проверить, что операторы $\big(A + A^*\big)/2$ и $\big(A - A^*\big)/2i$ эрмитовы.

Замечание. Оператор iC косоэрмитов тогда и только тогда, когда оператор C эрмитов, поэтому любой оператор A однозначно представим в виде суммы эрмитова и косоэрмитова оператора.

Оператор A называется *нормальным*, если $A^*A = AA^*$. Легко проверить, что унитарные, эрмитовы и косоэрмитовы операторы нормальны.

Теорема 4. *Оператор $A = B + iC$, где B и C- эрмитовы операторы, нормален тогда и только тогда, когда $BC = CB$.*

Доказательство. Так как $A^* = B^* - iC^* = B - iC$, то $A^*A = B^2 + C^2 + i(BC - CB)$ и $AA^* = B^2 + C^2 - i(BC - CB)$. Поэтому равенство $A^*A = AA^*$ эквивалентно равенству $BC - CB = 0$.

Если V- линейное пространство над $\mathbb{R}$, то для задания на V структуры линейного пространства над $\mathbb{C}$ необходимо задать операцию I умножения на i, т.е. $Iv = iv$. Это линейное отображение $I: V \to V$должно обладать следующим свойством: $I^2 v = i(iv) = -v$, т.е $I^2 = -E$. Ясно также, что если в пространстве V над $\mathbb{R}$ задан такой линейный оператор I, то V можно превратить в пространство над $\mathbb{C}$, определив умножение на комплексные числа формулой $(a + ib)v = av + bIv$. В частности, пространство V в этом случае имеет четную размерность.

Определение. Пусть V - линейное пространство над $\mathbb{R}$. Линейные оператор $I: V \to V$ называется *комплексной структурой*, если $I^2 = -E$.

Выберем в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$ базис и обозначим базисные векторы $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$. Отображение $I: \mathcal{R}^{2n} \to \mathcal{R}^{2n}$, заданное формулами $Ie_k = ie_k$ и $I(ie_k) = -e_k$, является комплексной структурой. Если A-невырожденное преобразование $\mathbb{R}^{2n}$, то для базиса $Ae_1, \dots, Ae_n, A(ie_1), \dots, A(ie_n)$ аналогично можно определить комплексную структуру I_A совпадают тогда и только тогда, когда оператор A является комплексно линейным оператором в пространстве $\mathbb{R}^{2n}$, на котором структура комплексного пространства определена оператором I; в этом случае матрица A относительно базиса $e_1, \dots, e_n, ie_1, \dots, ie_n$ имеет вид $\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}$.

Собственные значения оператора $I: V \to V$ чисто мнимые, поэтому для более детального изучения этого оператора рассмотрим комплексификацию V^G пространства V. Следует отметить, что операция умножения на i в V^G никак не связана с комплексной структурой I и ее комплексификацией I^G.

Теорема.$V^{\mathbb{C}} = V_+ \oplus V$- где $V_+ = Ker(I^G - iE) = Im(I^G + iE)$ и $V_- = Ker\left(I^G + iE\right) = Im\left(I^G - iE\right)$.

Доказательство. Так как $\left(I^G - iE\right)\left(I^G + iE\right) = \left(I^2\right)^G + E = 0$, то $Im(I^{\mathbb{C}} + iE) \subset Ker(I^{\mathbb{C}} - iE)$. Аналогично $Im(I^{\mathbb{C}} - iE) \subset Ker(I^{\mathbb{C}} + iE)$. С другой стороны, $-i(I^{\mathbb{C}} + iE) + i(I^{\mathbb{C}} - iE) = 2E$, поэтому $V^{\mathbb{C}} \subset Im\left(I^{\mathbb{C}} + iE\right) +$

$Im\left(I^{\mathbb{C}} - iE\right)$. Учитывая, что $Ker(I^{\mathbb{C}} - iE) \cap Ker(I^{\mathbb{C}} + iE) = 0$, получаем требуемое.

Замечание. Ясно, что $V_+ = V_-$

Пусть V- линейное пространство над $\mathbb{C}$. Рассмотрим пространство $\overline{V}$, совпадающее как множество и как группа по сложению с V, а произведение λ на v в $\overline{V}$ равно произведение λ на v в V. Легко проверить, что $\overline{V}$- линейное пространство над $\mathbb{C}$. Оно, конечно, изоморфно V, но изоморфизм не канонический. Ясно также, что овеществления пространств V и $\overline{V}$ канонически изоморфны.

Теорема. *Пространство* $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ *канонически изоморфно* $V \oplus \overline{V}$.

Доказательство. Овеществления пространств $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$ и $V \oplus \overline{V}$ канонически изоморфны, так как они изоморфны пространству W, состоящему из пар (x, y), где $x, y \in V$. В пространстве W, определена комплексная структура $I(x, y) = (-y, x)$, соответствующая комплексной структуре пространства $(V_{\mathbb{R}})^{\mathbb{C}}$, и комплексная структура $J(x, y) = (ix,\ iy)$, соответствующая комплексной структуре пространства V. Легко проверить, что $W = Ker\,(I - J)^{\oplus} Ker\,(I + J)$. В самом деле, $Ker\,(I - J)$ состоит из пар $(a, -ia)$, $Ker\,(I + J)$ состоит из пар (b, ib), поэтому $Ker\,(I - J) \cap Ker\,(I + J) = 0$; кроме того, любой элемент $(x, y) \in W$ можно представить в идее суммы элементов $(a, -ia)$ и (b, ib), где $a = (x + iy)/2$ и $b = (x - iy)/2$. Так как $I(a, -ia) = (ia, a)$ и $I(b, ib) = (-ib, b)$, пространства $Ker\,(I - J)$ и $Ker\,(I + J)$ канонически изоморфны V и $\overline{V}$ соответственно.

Задачи для самостоятельного решения

1. Выразите характеристический многочлен матрицы $A_{\mathbb{R}}$ через характеристический многочлен матрицы A.

2. Пусть W- комплексное пространство размерности $n, V \subset W$- некоторое вещественное подпространство размерности n. Докажите, что V может быть вещественной формой W тогда и только тогда, когда $V \cap iV$=0.

3. Пусть $V^{\mathbb{C}} = W \oplus \overline{W}$, W- некоторое комплексное подпространство. Докажите, что в пространстве V можно выбрать комплексную структуру I так, что $W = Ker\,(I^{\mathbb{C}} - E)$.

4. Рассмотрим вещественно линейное отображение комплексной плоскости в себе $Az = az + b\bar{z}$, где $\in \mathbb{C}$. Докажите, что это отображение вырождено тогда и только тогда, когда $|a| = |b|$.

5. В пространстве $\mathbb{C}^n$ укажите комплексное подпространство размерности $[n/2]$, на котором квадратичная форма $B(x, y) = x_1\, y_1 + \cdots + x_n\, y_n$ тождественно равно нулю.

ГЛАВА II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Лекция 6

§15. Линейные пространства

Пусть имеется множество **L**, состоящее из каких угодно элементов. Для обозначения элементов этого множества будем употреблять малые буквы латинского алфавита $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ и греческую букву θ. Рассматриваемые действительные или комплексные числа вместе с элементами множества **L** будем обозначать чисел малыми греческими буквами α, β, ... (исключая θ).

Предположим, что во множестве **L** определено понятие равенства элементов. Это значит, что все элементы множества **L** некоторым образом распределены по классам (подмножествам **L**) так, что разные классы не имеют общих элементов. При этом два элемента a, b, считаются равными $(a = b)$, если они принадлежат одному классу. Возможно, что каждый класс состоит только из одного элемента. В таком случае равенство $a = b$ означает, что через a *и* b, обозначен один и тот же элемент множества **L**.

Если вместо одного элемента берется любой другой элемент одного с ним класса (любой другой равный ему элемент) будем говорить, что совершается допустимая замена некоторого элемента множества **L**.

Иногда вместо заранее данного разбиения множества **L** на классы равных элементов будут непосредственно указываться условия допустимых замен (т. е. условия, при которых элементы считаются равными). Тогда для произвольного элемента a из **L** будет определен класс $\mathcal{A}$, состоящий из всех элементов **L**, равных элементу a. Чтобы получить требуемое распределение множества **L** по таким классам, нужно обеспечить следующие условия:

1) элемент a должен войти в класс, то есть условия равенства должны быть такими, чтобы элемент a считался равным самому себе: $a = a$ (или замена элемента самим собой должна быть допустимой).

2) Если $a = b$, то должно выполняться $b = a$.

3) Если $a = b$ и $b = c$, то выполняться $a = c$.

При обязательном соблюдении всех трех обстоятельств любые два элемента, входящие в класс равны между собой. Кроме того, класс включает все элементы множества **L**, равные какому-нибудь элементу этого класса.

Определим действия сложения и умножения на число в множестве **L**, следующим образом, если:

1) каждым двум элементам a и b из множества $\boldsymbol{L}$ сопоставлен некоторый элемент того же множества $\boldsymbol{L}$, называемый их суммой. Сумма элементов a, b обозначается через $a + b$;

2) каждому числу α и каждому элементу a из множества **L** сопоставлен некоторый элемент того же множества **L**, называемый произведением a на α или α на a. Произведение a на α обозначается через $a\alpha$ или αa.

Действия сложения и умножения на число инвариантны относительно допустимых замен элементов множества **L**: если $a = a'$, $b = b'$, то $a + b = a' + b'$ и $\alpha a = \alpha a'$.

Предполагается также, что соблюдены требования следующих аксиом:

1) Перестановочное или коммутативное свойство сложения: для любых x и y из **L**

$$x + y = y + x.$$

2) Сочетательное или ассоциативное свойство сложения: для любых x, y и z из **L**

3) $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z$.

Вследствие первой аксиомы безразличен порядок записи слагаемых.

4) В множестве **L** существует нулевой элемент **0** такой, что для любого x из **L**

$$x + \mathbf{0} = 0.$$

5) Для любого элемента x из **L** существует противоположный ему элемент y (обозначается через $-x$) из **L** такой, что $x + y = \mathbf{0}$.

6) $1 \cdot x = x$.

7) $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$.

8) Распределительное или дистрибутивное свойство для сомножителя из **L** (аксиома разрешает распределять сомножитель из **L** по составляющим числового сомножителя):

$$(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x.$$

9) Распределительное свойство для числового сомножителя:

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

В последних четырех аксиомах x и y означают произвольные элементы из $\boldsymbol{L}$, λ и β – произвольные числа.

Восемь сформулированных аксиом называют аксиомами линейного пространства.

Определение. Множество $\boldsymbol{L}$ называется линейным пространством над полем $\boldsymbol{K}$, если в нем определены следующие операции:

1) сложение $x + y$,
2) умножение на элементы из поля $\boldsymbol{K}$ λx.

Заметим, что в данном определении имеется в виду, что сложение и умножение удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства.

Элементы линейного пространства $\boldsymbol{L}$ принято называть также векторами, а само линейное пространство

$\boldsymbol{L}$ можно называть векторным пространством. В дальнейшем множество **L** будем называть пространством.

Если для векторов пространства **L** определено умножение только на действительные числа, то **L** называется действительным векторным пространством. В случае, если определено умножение векторов из **L** также и на комплексные числа, то пространство **L** называется комплексным.

В дальнейшем, употребляя термин «произвольное число», будем иметь в виду любое действительное число, если речь идет о действительном пространстве, и любое комплексное число, если речь идет о комплексном пространстве.

Теорема 1. В каждом линейном пространстве нулевой вектор только один.

Доказательство. Пусть элементы θ_1 и θ_2 нулевые. Вследствие аксиом 1) и 3) они совпадают:

$$\theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_1. \blacksquare$$

Замечание 1. Говоря, что нулевой вектор только один, не различаем равные векторы. В том же смысле следует понимать утверждение единственности и в других теоремах.

Теорема 2. Для любого вектора $\boldsymbol{x}$ существует единственный противоположный $(-\boldsymbol{x})$.

Доказательство. Предположим, что $x + y_1 = \mathbf{0}$ и что $x + y_2 = \mathbf{0}$. На основании аксиом 1)-4) можно записать следующую цепочку равенств:

$$y_2 = y_2 + \mathbf{0} = y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = (x + y_2) + y_1 = \mathbf{0} + y_1 = y_1,$$

следовательно, $y_2 = y_1$. ■

Теорема 3. Произведение любого вектора $\boldsymbol{x}$ на число 0 равно нулевому вектору $\mathbf{0}$: $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

Доказательство. Для данного вектора $\boldsymbol{x}$ возьмем противоположный вектор $\mathbf{y}$. Используя аксиомы 2)-5) и 7), получим $0 \cdot x = 0 \cdot x + \mathbf{0} = 0 \cdot x + (x + y) = (0 + 1)x + y = x + y = \mathbf{0}$. ∎

Теорема 4. Для любого вектора $\boldsymbol{x}$ его произведение на число -1 равно вектору, противоположному для $\boldsymbol{x}$: $(-1) \cdot \boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

Доказательство. Из теоремы 3 и аксиом 5), 7) имеем

$$x + (-1) \cdot x = (1 - 1) \cdot x = 0 \cdot x = \mathbf{0}.$$

Следовательно, $x + (-1) \cdot x = \mathbf{0}$.∎

Теорема 5. Произведение нулевого вектора $\mathbf{0}$ на любое число α равно нулевому вектору.

Доказательство. Используя аксиому 6) и теорему 3, для произвольного вектора x находим

$$\boldsymbol{\alpha 0} = \boldsymbol{\alpha(0 \cdot x)} = \boldsymbol{(\alpha \cdot 0)x} = \boldsymbol{0 \cdot x} = \mathbf{0}. \blacksquare$$

<u>Замечание 2.</u> Из теоремы 5 следует, что произведение ненулевого вектора на число, не равное нулю, всегда есть ненулевой вектор. Если бы при $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$ было $\lambda x = 0$, то на основании теоремы 5 и аксиом 5)-6) получили бы

$$x = 1 \cdot x = \left(\frac{1}{\lambda} \cdot \lambda\right) x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda} 0 = \mathbf{0},$$

что противоречит условию $x \neq 0$.

<u>Замечание 3.</u> Если $\alpha \neq \beta$ и $x \neq 0$, то $\alpha x \neq \beta x$. В самом деле, если бы $\alpha x = \beta x$, то $\alpha x + (-\beta)x = (\alpha - \beta)x = \mathbf{0}$, что противоречит предыдущему, так как $\alpha - \beta \neq 0$ и $x \neq 0$.

<u>**Пример 1.**</u> Координатное пространство: пусть **L** означает множество наборов, элементами которого служат всевозможные упорядоченные наборы действительных чисел, по n чисел в каждом, где n – зафиксированное натуральное число. Называя набор из n чисел упорядоченным, будем считать, что составляющие его числа занумерованы, но не обязательно различны. Если элемент x из **L** есть набор из n чисел $x_1, \ldots, x_n$, то будем писать $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Рассмотрим еще один, также произвольный элемент

$y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Элементы x и y будем полагать равными в том и только в том случае, когда $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_n = y_n$. Определим линейные операции в **L** соотношениями

$$x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\}, \tag{1}$$

$$\alpha x = \{\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n\}. \tag{2}$$

Тогда требования первых двух аксиом линейного пространства соблюдены, поскольку сложение действительных чисел обладает перестановочным и сочетательным свойствами. Для проверки аксиом 3), 4) достаточно указать в множестве **L** нулевой элемент:

$$\mathbf{0} \;=\; \{0, 0, \ldots, 0\}. \tag{3}$$

Вместе с тем ясно, что в **L** для любого x существует противоположный элемент $-x$, именно:

$$-x = \{-x_1, -x_2, \ldots, -x_n\}. \tag{4}$$

Аксиома 5) следует из соотношения (2), а аксиомы 6), 7), 8) выполняются вследствие соотношений (1) и (2), а также вследствие сочетательного и распределительного свойств для умножения действительных чисел.

Таким образом, множество **L** с заданными линейными операциями является действительным линейным пространством. Будем называть его действительным координатным пространством $\boldsymbol{K_n}$.

<u>Замечание.</u> Рассматриваемое множество **L** не позволяет считать множитель α в соотношении (2) комплексным числом, так как при комплексном α в правой части (2) получится набор комплексных чисел, не являющийся элементом множества **L**.

§16. Линейная зависимость

Пусть дано конечное число элементов линейного пространства: $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{q}$. Пусть далее $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \chi$ – произвольные числа.

Определение 1. Элемент x, пространства $\boldsymbol{L}$, представимый в виде $x = \alpha a + \beta b + \gamma \mathrm{c} + \ldots + \chi \mathrm{q}$ называется линейной комбинацией элементов $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{q}$. Также говорят, что x линейно выражается через $a, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{q}$.

Определение 2. Линейная комбинация называется тривиальной, если $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \chi = 0$. В противном случае комбинация называется нетривиальной, если среди чисел $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \chi$ хотя бы одно не равно нулю.

Определение 3. Система векторов $a, b, c, \ldots, \mathrm{q}$ называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т. е. существуют такие числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \chi$, что $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\mathbf{c} + \ldots + \chi\mathbf{q} = \mathbf{0}$, при этом хотя бы одно из чисел не равно нулю.

Определение 4. Система векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \mathbf{q}$ называется линейно независимой, если равенство $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\mathbf{c} + \ldots + \chi\mathbf{q} = \mathbf{0}$ возможно лишь тогда, когда $\alpha = \ldots = \chi = 0$.

Непосредственно из определений видно, что всякая конечная система векторов является либо линейно зависимой, либо линейно независимой.

§17. Ядро и образ оператора. Факторпространство

Для линейного отображения $A: V \to W$ можно рассмотреть два множества:

$Ker\, A = \{v \in V | Av = 0\}$- ядро отображения;

$Im\, A = \{w \in W | \exists v \in V: Av = w\}$- образ отображения.

Легко проверить, что $Ker\, A -$ линейное подпространство в V, а $Im\, A -$ подпространство в W. Пусть $e_1, \ldots, e_k -$ базис $Ker\, A, e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ –

расширение этого базиса до базиса V. Тогда $A_{e_{k+1}}, \dots, A_{e_n}$- базис $Im\, A$ поэтому

$$dim\, Ker\, A\ +\ dim\, Im\, A =\ dim\, V.$$

Выберем в подпространствах V и W базисы и рассмотрим матрицу оператора A относительно этих базисов. Пространство $Im\, A$ порождено столбцами матрицы A, поэтому $dim\, Im\, A = rk\, A$. Видно, в частности, что ранг матрицы оператора A не зависит от выбора базисов, т.е. ранг оператора определен однозначно.

Если даны отображения $A{:}\, U \to V$ и $B{:}\, V \to W,$ то $Im\, A$ и $Ker\, B$ могут пересекаться. Для вычисления размерности перечисления этих подпространств можно воспользоваться следующей формулой.

Теорема.$dim\,(Im\, A \cap Ker\, B) = dim\, Im\, A - dim\, Im\, BA = dim\, Ker\, BA - dim\, Ker\, A$.

Доказательство. Пусть C- ограничение отображения B на $Im\, A$. Тогда $dim\, Ker\, C + dim\, Im\, C =\ dim\, Im\, A$ т.е. $dim\,(Im\, A \cap Ker\, B) + dim\, Im\, BA = dim\, Im\, A$. Для доказательства второго равенства достаточно заметить, что $dim\, Im\, BA = dim\, V - dim\, Ker\, A$.

Ядро и образ оператора A и сопряженного к нему оператора A^* связаны следующим соотношением.

Теорема 1. $Ker\, A^* = (Im\, A)^{\perp}$ и $Im\, A^* = (Ker\, A)^{\perp}$

Доказательство. Равенство $A^* \cdot f = 0$ означает, что $f(Ax) = A^* f(x) = 0$ для любого $x \in V$, т.е. $f \in (Im\, A)^{\perp}$. Поэтому $Ker\, A^* = (Im\, A)^{\perp}$, а так как $\left(A^*\right)^* = A$, то $KerA = (Im\, A^*)^{\perp}$. Следовательно, $(Ker\, A)^{\perp} = \left((Im\, A^*)^{\perp}\right)^{\perp} = Im\, A^*$.

<u>Следствие</u>. $rk\, A =\ rk\, A^*$.

Доказательство. $rk\, A^* = dim\, Im\, A^* = dim(Ker\, A)^{\perp} = dim\, V - dim\, Ker\, A = dim\, Im\, A =\ rk\, A.$

Замечание 1. Из равенства $rk\, A = rk\, A^*$ легко получить другое доказательство того, что ранг матрицы по строкам равен рангу по столбцам (см. п. 2.2).

Замечание 2. Если V- пространство со скалярным произведением, то V^* можно отождествить с V и тогда $V = Im\, A^{\oplus}(Im\, A)^{\perp} = Im\, A^{\oplus} + KerA^*$. Аналогично $V = Im\, A^{*\,\oplus} + KerA$. (В матричной записи $A^* = A^T$).

Теорема 2. (альтернатива Фредгольма). *Пусть* $A{:}\, V \to V$*- линейный оператор. Рассмотрим 4 уравнения*

(1) $Ax = y, \quad x, y \in V$; (3) $Ax = 0$;

(2) $A^* f = g, \quad f, g \in V^*$; (4) $A^* f = 0$.

Тогда либо уравнения (1) и (2) разрешимы при любых правых частях, причем в этом случае решение единственно, либо уравнение (3) и (4) имеют одинакова количество линейно независимых решений $x_1, \dots, x_k$ и $f_1, \dots, f_k$, причем в этом случае уравнение (1) (соответственно (2)) разрешимо тогда и только тогда, когда $f_1(y) = \cdots = f_k(y) = 0$ (соответственно $g(x_1) = \cdots = g(x_k) = 0$.

Доказательство. Альтернатива Фредгольма является, по сути дела, переформулировкой теоремы 1. Разрешимость уравнений (1) и (2) при любых правых частях означает, что $Im\, A = V$ и $Im\, A^* = V$, т.е., $(Ker\, A^*)^{\perp} = V$ и $(Ker\, A)^{\perp} = V$, а значит, $Ker\, A^* = 0$ и $Ker\, A = 0$. Эти равенства эквивалентны, так как $rk\, A = rk\, A^*$.

Если же $Ker\, A \neq 0$, то $dim\, Ker\, A^* = dim\, Ker\, A$ и $y \in Im\, A$ тогда и только тогда, когда $y \in (Ker\, A^*)^{\perp}$, т.е., $f_1(y) = \cdots = f_k(y) = 0$. Аналогично $g \in Im\, A$ тогда и только тогда, когда $g(x_1) = \cdots = g(x_k) = 0$.

Образ линейного отображения A связан с разрешимостью линейного уравнения

$$Ax = b.$$

Это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $b \in Im\, A$. В том случае, когда отображение задано матрицей, есть простой критерий разрешимости уравнения (1).

Теорема 1. (Кропекер - Капелли). *Пусть A- матрица, x и b- столбцы, причем их размеры таковы, что (1) имеет смысл. Уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда $rk\, A = rk\,(A,\ b)$, где $(A,\ b)$- матрица, полученная из матрицы A приписыванием столбца b.*

Доказательство. Пусть $A_1, \dots, A_n$- столбцы матрицы A. Уравнение (1) можно переписать в виде $x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n = b$. Это равенство означает, что столбец b является линейной комбинацией столбцов $A_1, \dots, A_n$, т.е. $rk\, A = rk\,(A,\ b)$.

Линейные отображения можно записать разными способами; например, выражение $f(X) = A_1 X B_1 + \cdots + A_n X B_n$, где размеры матриц X, A_i и B_i таковы, что оно имеет смысл, задает линейное отображение одного пространства матриц в другое. Ограничимся исследованием уравнения

$$C = AXB. \tag{2}$$

Приведем сначала это уравнение к более простому виду.

Теорема 2. *Пусть $a = rkA$. Тогда существуют такие невырожденные матрицы L_A и R_A, что $\mathrm{L}_A A \mathrm{R}_A = \mathrm{E}_\alpha$- единичная матрица порядка a, дополненная нулями до размеров матрицы A.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $A: V^n \to V^m$ фиксированные базисы $e_1, \dots, e_n$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$, Пусть $y_{\alpha+1}, \dots, y_n$-базис $Ker\, A$, векторы $y_1, \dots, y_\alpha$ дополняют этот базис до базиса V^n. Зададим отображение $\mathrm{R}_A: V^n \to V^n$ формулой $\mathrm{R}_A(e_i) = y_i$. Тогда $A\mathrm{R}_A(e_i) = Ay_i$ при $i \le a$ и $A\mathrm{R}_A(e_i) = 0$ при $i > a$. Векторы $x_1 = Ay_1, \dots, x_1 = Ay_a$ образуют базис пространства $Im\, A$; дополним их векторами $x_{a+1}, \dots, x_m$ до базиса пространства V^m. Зададим отображение $\mathrm{L}_A: V^m \to V^m$ формулой $\mathrm{L}_A x_i = \varepsilon_i$. Тогда $\mathrm{L}_A A \mathrm{R}_A(e_i) = \varepsilon_i$ при $1 \leq i \leq a$ и $\mathrm{L}_A A \mathrm{R}_A(e_i) = 0$ при $i > a$. Поэтому матрицы операторов L_A и R_A относительно базисов e и ε соответственно являются искомыми.

Теорема 3. *Уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

а) существуют такие матрицы Y и Z, что $C = AY$ и $C = ZB$;

б) $rk\ A = rk\ (A, C)$ и $rk\ B = rk \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, где матрица (A, C) составлена из столбцов матриц A и C, а другая матрица составлена из строк матриц B и C.

Доказательство. Эквивалентность условий а) и б) доказывается аналогично теореме 1. Ясно также, что если $C = AXB$, то можно положить $Y = XB$ и $Z = AX$. Предположим теперь, что $C = AY$ и $C = ZB$. Используя теорему 2. уравнение (2) можно переписать в виде $D = E_a W E_b$, где $D = \mathrm{L}_A C \mathrm{R}_B$ и $W = R_A^{-1} X L_B^{-1}$. Условия $C = AY$ и $C = ZB$ запишутся при этом в виде $D = E_a(R_A^{-1} Y \mathrm{R}_B)$ и $D = (\mathrm{L}_A Z L_B^{-1}) E_b$. Первое из этих равенств означает, что последние $m - a$ строк матрицы D нулевые, а второе равенство означает, что последние $n - b$ столбцов матрицы D нулевые. Поэтому в качестве W можно взять матрицу D; более того, в матрице D элементы последних $m - a$ строк и последних $n - b$ столбцов можно заменить любыми числами, т.е. пространство решений имеет размерность $mn - ab$. По матрице W матрица X определяется однозначно: $X = \mathrm{R}_A W \mathrm{L}_B$.

Если W - подпространство в V, то V можно разбить на подмножества $M_v = M_{v'}$ тогда и только тогда, когда $v - v \in W$. На множестве $V/W = \{M_v | v \in V\}$ можно ввести структуру линейного пространства, полагая $\lambda M_v = M_{\lambda v}$ и

$M_v + M_{v'} = M_{v+v'}$; легко проверить, что $M_{\lambda v}$ и $M_{v+v'}$ не зависят от выбора v и v', а зависят лишь от самих множеств M_v и $M_{v'}$. Пространство V/W называется *факторпространством* пространства V по подпространству W; класс M_v удобно обозначать $v + W$.

Существует каноническое отображение $p: V \to V/W$, где $p(v) = M_v$; отображение p называется *проекцией.* Ясно, что $Ker\, p = W$ и $Im\, p = V/W$. Если $e_1, \dots, e_k, -$базис W и $e_1, \dots, e_k\; e_{k+1}, \dots, e_n$- базис V, то $p(e_1) = \dots = p(e_k) = 0$, а $p(e_{k+1}), \dots, p(e_n)$- базис V/W. Поэтому $dim(V/W) = dim\, V - \, dim\, W$.

Теорема. Имеют место следующие канонические изоморфизмы:

а) $(U/W)/(V/W) \cong U/V,$ *если* $W \subset V \subset U$;

б) $V/V \cap W \cong (V + W)/W,$ *если* $\mathrm{V}, \mathrm{W} \subset U$.

Доказательство. а) Пусть $u_1, u_2 \in U$. Классы $u_1 + W$ и $u_2 + W$ задают один класс по модулю V/W тогда и только тогда, когда $[(u_1 + W)(u_2 + W)] \in V$, т.е. $u_1 - u_2 \in V + W = V$, а значит, элементы u_1 и u_2 задают один класс по модулю V.

б) Элементы $v_1, v_2 \in V$ задают один класс по модулю $V \cap W$ тогда и только тогда, когда $v_1, v_2 \in W$, а значит, классы $v_1 + W$ и $v_2 + W$ совпадают.

Задача для самостоятельного решения

Пусть -линейный оператор. Докажите, что

$$dim\, Ker\, A^{n+1} = dim\, Ker\, A + \sum_{k=1}^{n} dim\left(Im\, A^k \cap Ker\, A\right)$$

и

$$dim\, Im\, A = \dim Im\, A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} dim\left(Im\, A^k \cap Ker\, A\right).$$

§18. Лемма о базисном миноре

Пусть дана прямоугольная матрица $A = (a_{ij})$. Будем рассматривать строчки этой матрицы как векторы координатного пространства $\mathbf{K_n}$, а столбцы – как векторы координатного пространства $\mathbf{K_m}$. Тогда можно говорить о линейной зависимости и независимости строк данной матрицы или о линейной зависимости и независимости ее столбцов.

Пусть отмечено k разных строк и k разных столбцов матрицы А $(\mathrm{k} \le \mathrm{n}, \mathrm{k} \le \mathrm{m})$. Элементами матрицы называют составляющие ее числа: $\mathrm{a}_{11}, \mathrm{a}_{12}, \dots$, точнее следует сказать, символы. При этом два элемента a_{ij} и $\mathrm{a_{ji}}$ считают различными, если $\mathrm{i} \ne \mathrm{j}$ или $\mathrm{k} \ne \mathrm{l}$ (не исключая возможности, что a_{ik} и a_{jl} обозначают одно и то же число). Следует отметить, что в ряде случаев рассматриваются матрицы, где под a_{ik} подразумеваются не числа, а какие-нибудь другие объекты, например, функции. Элементы матрицы А, стоящие на пересечении отмеченных строк и столбцов, сами образуют некоторую, очевидно квадратную, матрицу В. Определитель матрицы B называется минором порядка k данной матрицы А.

Отметим, если это возможно, еще одну строку и еще один столбец матрицы A, не повторяя тех, которые уже были отмечены раньше. Теперь все отмеченные строки и столбцы своим пересечением определяют некоторую квадратную матрицу C.

Определитель матрицы C есть минор порядка $(\mathrm{k} + 1)$ матрицы А. Будем называть его окаймляющим для первоначального взятого минора (т. е. для определителя матрицы В*)*.

<u>Замечание 1.</u> Если $\mathrm{k} = \mathrm{n}$ или $\mathrm{k} = \mathrm{m}$, то для миноров порядка k окаймляющих миноров нет.

Замечание 2. Если $k = 1$, то матрица B состоит из одного элемента матрицы A. Миноры первого порядка представляют собой численные значения элементов матрицы.

Определение 1. Минор матрицы называется базисным, если он не равен нулю, а окаймляющие его миноры либо все равны нулю, либо отсутствуют вовсе.

Определение 2. Столбцы матрицы, пересекающие базисный минор, называются базисными столбцами.

Аналогичная терминология употребляется для строк.

Замечание 3. Матрица может иметь несколько базисных миноров и, соответственно, несколько систем базисных столбцов. Всякая матрица, кроме нулевой, имеет по крайней мере один базисный минор и, тем самым, по крайней мере одну систему базисных столбцов.

Лемма 1 (о базисном миноре).

(1) Столбцы матрицы, пересекающие базисный минор (базисные столбцы) линейно независимы. Всякий столбец может быть линейно выражен через них.

Лемма 1, согласно определению 2, может быть высказана так:

(2) Базисные столбцы линейно независимы. Любой столбец матрицы линейно выражается через базисные.

Доказательство.

1) Доказательство первого утверждения леммы 1 – от противного. Предположим, что базисные столбцы линейно зависимы. Тогда линейно зависимы столбцы базисного минора. Но в таком случае базисный минор равен нулю, что противоречит его определению.

2) Будем считать для определенности, что рассматриваемый базисный минор имеет порядок r и занимает левый верхний угол матрицы:

$$\begin{pmatrix} \left| a_{11} \ldots\ a_{1r} \right| \ldots a_{1k} \ldots a_{1n} \\ \left| \ldots \ldots \ldots \ldots . \right| \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ \left| a_{r1} \ldots a_{rr} \right| \ldots a_{rk} \ldots a_{rn} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1} \ldots a_{mr}\ \ldots a_{mk} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим этот базисный минор через D. Положим, что базисный минор в левом углу D_{rr} размерности $r \times r$.

Возьмем произвольные индексы i, k $(1 \leq i \leq m,\ l \leq k \leq n)$ и составим определитель порядка $(r+1)$, который получается добавлением любого столбца и строки

$$\Delta_{ik} = \begin{vmatrix} \boxed{D} & a_{1k} \\ a_{i1} & a_{ik} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что $\Delta_{ik} = 0$. Рассмотрим три возможных случая:

1) $i \leq r$. В этом случае $\Delta_{ik} = 0$, так как в нем последняя строка совпадает с одной из предыдущих строк.

2) $k \leq r$. В этом случае $\Delta_{ik} = 0$ потому, что в нем последний столбец совпадает с одним из предыдущих.

3) $i > r$, $k > r$. В этом случае определитель Δ_{ik} является окаймляющим для минора D и равен нулю потому, что D – базисный минор.

Зафиксируем k и будем считать, что i пробегает всевозможные значения от 1 до m.

Разложим Δ_{ik} по элементам последней строки. Алгебраические дополнения элементов последней строки обозначим через $A_1, A_2, \ldots, A_{r+1}$. При изменении i эти величины остаются неизменными, так как алгебраическое дополнение какого-либо элемента зависит только от его места в определителе, но не зависит от численного значения самого элемента. В результате разложения получим

$$\Delta_{ik} = a_{i1}A_1 + \cdots + a_{ir}A_r + a_{ir}A_{r+1} = 0, \qquad (5)$$

причем

$$A_{r+1} = D \neq 0. \qquad (6)$$

Соотношения (5) и (6) дают

$$a_{ik} = \left(-\frac{A_1}{D}\right) a_{i1} + \cdots + \left(-\frac{A_r}{D}\right) a_{ir}.$$

Напомним, что k зафиксировано, i пробегает все значения от 1 до m. Поэтому

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \left(-\frac{A_1}{D}\right) \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + \left(-\frac{A_r}{D}\right) \begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Формула (7) представляет j-й столбец матрицы (который может быть взят произвольно) в виде линейной комбинации базисных столбцов, что и требовалось доказать. ■

<u>Замечание.</u> Разумеется, аналогичная лемма имеет место и для базисных строк.

Следствием леммы о базисном миноре является следующая теорема.

Теорема. Определитель квадратной матрицы равен нулю в том и только в том случае, когда между столбцами этой матрицы имеется линейная зависимость. Аналогичное утверждение справедливо и для строк.

Доказательство. Если столбцы $n \times n$-матрицы зависимы, то ее определитель равен нулю $\Delta = 0$, а это одно из основных свойств определителей. Покажем, что если столбцы независимы, то определитель не равен нулю. В самом деле, если столбцы независимы, а определитель равен нулю, то должен найтись базисный минор М порядка меньшего n. Но тогда имеется столбец, который не входит в систему базисных столбцов, соответствующую минору М, и который линейно выражается через эту систему, т. е. между столбцами имеется зависимость, что противоречит предположению. ■

Лекция 7

§19. Лемма о двух системах векторов

Пусть даны две системы векторов $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$, $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$ из одного и того же линейного пространства.

Лемма 1 (основная). Если система $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$ линейно независима и любой из векторов $\boldsymbol{b_i}$ линейно выражается через $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$, то $m \leq k$.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть $\mathrm{m} > \mathrm{k}$. Выпишем зависимости, выражающие векторы $\mathbf{b_i}$ через векторы $\mathbf{a_j}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{b_1} = \alpha_{11}\boldsymbol{a_1} + \dots + \alpha_{1k}\boldsymbol{a_k}, \\ \boldsymbol{b_2} = \alpha_{21}\boldsymbol{a_1} + \dots + \alpha_{2k}\boldsymbol{a_k}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \boldsymbol{b_{m-1}} = \alpha_{m-11}\boldsymbol{a_1} + \dots + \alpha_{m-1k}\boldsymbol{a_k}, \\ \boldsymbol{b_m} = \alpha_{m1}\boldsymbol{a_1} + \dots + \alpha_{mk}\boldsymbol{a_k}. \end{cases} \tag{8}$$

Если матрица $(a_{ij}) = 0$, то $\boldsymbol{b_1} = \dots = \boldsymbol{b_m} = \boldsymbol{0}$, и система $\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m}$ линейно зависима, что противоречит условию леммы.

Если матрица $(a_{ij}) \neq 0$, тогда существует базисный минор k-го порядка $r \leq k < m$, не равный нулю. Число строк в матрице (a_{ij}), равное m, больше k и, следовательно, больше числа базисных строк этой матрицы.

Таким образом, матрица (a_{ij}), имеет некоторую систему базисных строк и еще, по крайней мере одну строку, не входящую в эту систему, которая линейно выражается через базисные согласно лемме о базисном миноре. Но это означает, что между строками матрицы имеется линейная зависимость (см. § 9 гл. II). Напишем ее в виде

$$\lambda_1(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1k}) + \dots + \lambda_m(\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mk}) = (0, \dots, 0), \tag{9}$$

где среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ есть отличные от нуля.

Умножим равенства (8) соответственно на $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и сложим их почленно. Учитывая линейную зависимость (9), найдем

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = \boldsymbol{a_1}(\lambda_1 \alpha_{11} + \cdots + \lambda_m \alpha_{m1}) + \dots +$$
$$+\boldsymbol{a_k}(\lambda_1 \alpha_{1k} + \cdots + \lambda_m \alpha_{mk}) = 0 \cdot \boldsymbol{a_1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{a_k} =$$
$$(0, \dots, 0) = \boldsymbol{0}.$$

Система $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$ оказалась линейно зависимой, что невозможно по условию леммы, что и требовалось доказать. ■

Говорят, что векторы $\boldsymbol{a_{i_1}}, \dots, \boldsymbol{a_{i_r}}$ образуют линейно независимую подсистему в системе $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$, если векторы $\boldsymbol{a_{i_1}}, \dots, \boldsymbol{a_{i_r}}$ линейно независимы и входят в систему $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$.

Очевидно, что система $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ содержит по крайней мере одну линейно независимую подсистему в том и только в том случае, когда среди векторов $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ имеется хотя бы один ненулевой.

Лемма 2. Пусть система векторов $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_{r+1}})$ линейно зависима, а ее подсистема $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r})$ линейно независима, тогда вектор $\boldsymbol{a_{r+1}}$ есть линейная комбинация векторов $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r})$.

Доказательство. Имеем зависимость

$$\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \dots + \lambda_r \boldsymbol{a_r} + \lambda_{r+1} \boldsymbol{a_{r+1}} = \boldsymbol{0}, \qquad (10)$$

где среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$ есть отличные от нуля. Очевидно, $\lambda_{r+1} \neq 0$, так как в этом случае оказалась бы зависимой подсистема $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r})$. Таким образом, из формулы (10) находим

$$\boldsymbol{a_{r+1}} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right) \boldsymbol{a_1} + \cdots + \left(-\frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}}\right) \boldsymbol{a_r},$$

что и требовалось доказать. ■

Определение. Пусть $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r})$, состоящая из r векторов, максимальная линейная независимая подсистема системы $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ $(k \geq r)$. Тогда число r называется рангом системы $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$, если всякая ее подсистема из большего числа векторов линейно зависима, либо если таких подсистем нет совсем (в случае $k = r$).

Если коротко, рангом системы называется максимальное число ее линейно независимых векторов.

Если все векторы системы $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ нулевые, то будем говорить, что ее ранг равен нулю.

Лемма 3 (обобщенная основная). Пусть любой вектор из векторов $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$ линейно выражается через систему векторов $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$, тогда ранг системы $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$ не больше ранга системы $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$**:** $Rang\ b \leq Rang\ a$.

Доказательство. Пусть $Rang\ a = r_a$ ранг системы $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$.

I. Если $r_a = 0$, то справедливость утверждения леммы очевидна, $r_b = 0$.

II. Если $r_a = k$, то справедливость утверждения леммы следует из леммы 1, так как число векторов в любой линейной независимой подсистеме из $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$ не больше r_a.

III. Пусть $0 < r < k$. Тогда в системе $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ найдется r линейно независимых векторов. Добавляя к ним еще один вектор из системы $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$**,** всякий раз будем получать линейно зависимые системы

$$(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_{r+1}});$$
$$(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_{r+2}});$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots;$$
$$(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_k}).$$

По лемме 2 каждый из векторов $\boldsymbol{a_{r+1}}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}$. С другой стороны, по условию леммы каждый вектор $\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$. Отсюда следует, что каждый вектор $\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m}$ линейно выражается через $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}$ (см. § 9 гл. II). Тогда по лемме 1 число векторов в любой линейно независимой подсистеме $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m}) \leq r_a$, в том числе и в максимальной, то есть $r_b \leq r_a$, что и требовалось доказать. ■

Пример вычисления обратной матрицы.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ и построим вспомогательную матрицу $(A, E) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Элементарные преобразования со строками этой матрицы постараемся производить таким образом, чтобы в результате на месте матрицы A оказалась матрица E; тогда матрица, которая будет расположена на месте первоначальной матрицы E, и будет искомой матрицей A^{-1}. Пояснения к этому утверждению будут сделаны в конце этого примера. Итак, приступим к элементарным преобразованиям.

$$(A, E) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -9 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -9 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & -9 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -7 & -9 & -6 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -9 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -19 & -11 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -10 & -7 & -7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -19 & -11 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 4 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -19 & -11 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \to$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-7}{9}\\ 0 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-2}{9}\\ 0 & 0 & -2 & 0 & \frac{-23}{9} & \frac{-43}{9} & \frac{8}{9} & \frac{19}{9}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-7}{9}\\ 0 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-2}{9}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{23}{18} & \frac{43}{18} & \frac{-8}{18} & \frac{-19}{18}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-7}{9}\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{25}{18} & \frac{53}{18} & \frac{-4}{18} & \frac{-23}{18}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{23}{18} & \frac{43}{18} & \frac{-8}{18} & \frac{-19}{18}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-7}{9}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-25}{18} & \frac{-53}{18} & \frac{4}{18} & \frac{23}{18}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{23}{18} & \frac{43}{18} & \frac{-8}{18} & \frac{-19}{18}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

Искомая матрица A^{-1} будет такой: $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -4 & -14 \\ -25 & -53 & 4 & 23 \\ 23 & 43 & -8 & -19 \\ 8 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Проверка. $AA^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -4 & -14 \\ -25 & -53 & 4 & 23 \\ 23 & 43 & -8 & -19 \\ 8 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = E$

Пояснения. Элементарные преобразования над строками матрицы (A, E) эквивалентны умножению этой матрицы слева на «матрицы элементарных преобразований». Пусть с помощью k элементарных преобразований достигаем желаемого результата. То есть, в результате умножения слева матрицы (A, E) сначала на матрицу C_1 первого элементарного преобразования, затем на втором шаге умножения полученного произведения на матрицу C_2 второго элементарного преобразования и т.д. на k-ом шаге умножения полученного произведения на матрицу C_k k-ого элементарного преобразования получаем желаемый вид матрицы $(A, E) \to (E, C)$. То есть,

$C_k\big(C_{k-1} \dots \big(C_1(A, B)\big) \dots\big) = (E, C)$. Здесь $C = C_k C_{k-1} \dots C_1$. В силу ассоциативности умножения матриц предыдущее равенство можно записать как $C(A, E) = (E, C)$. Учитывая, что в произведении матриц матрица первого сомножителя последовательно умножается на все столбцы матрицы второго сомножителя, получим, что

$$C(A, E) = (CA, CE) = (E, C).$$

Откуда $CA = E$ и $CE = C$. Из первого равенства как раз и следует, что $C = A^{-1}$.

Лекция 8

§20. Ранг матрицы

Определение. Рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых столбцов.

Таким образом, ранг матрицы есть ранг системы ее столбцов, рассматриваемых как векторы координатного пространства.

Ранг матрицы А будем обозначать символом $RangA$.

Если матрица А нулевая, то $RangA = 0$, так как у нулевой матрицы нет линейно независимых столбцов. Следует отметить, что ранг ненулевой матрицы всегда положителен.

Теорема о ранге матрицы. Ранг произвольной матрицы равен максимальному порядку отличных от нуля миноров (порядок базовых миноров).

Доказательство. Если $RangA = 0$, то A – нулевая матрица, и у нее нет отличных от нуля миноров. Естественно считать в этом случае, что максимальный порядок отличных от нуля миноров равен нулю.

Пусть далее матрица A – не нулевая. Если некоторый ее минор M порядка r не равен нулю, а все миноры более высокого порядка равны нулю или отсутствуют вовсе, то M является базисным минором. По лемме о базисном миноре столбцы матрицы A, пересекающие минор M, линейно независимы, поэтому $RangA \geq r$. По той же лемме любой столбец матрицы А линейно выражается через базисные столбцы. Отсюда, применяя лемму 3 § 11 гл. II, находим, что $RangA \leq r$. Таким образом, $RangA = r$, что и требовалось доказать. ■

Из приведенных ранее рассуждений, вытекает ряд важных следствий.

Следствие 1. Ранг ненулевой матрицы равен порядку любого ее базисного минора.

Доказательство. В самом деле, если М – произвольный базисный минор, r – его порядок, то, повторяя предыдущие рассуждения, находим, что $RangA = r$.■

Следствие 2. Все базисные миноры ненулевой матрицы имеют одинаковый порядок, равный ее рангу.

Следствие 3. Если в матрице A минор M базисный, то все миноры более высокого порядка равны нулю (а не только миноры, окаймляющие M).

Следствие 4. Максимальное число линейно независимых строк произвольной матрицы A равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов (то есть, равно рангу A).

Другими словами, ранг матрицы не меняется при перестановке строк и столбцов. Кроме того, ранг матрицы не изменится, если к одному из ее столбцов прибавить линейную комбинацию других столбцов, поскольку такая операция не изменяет числовых значений ее миноров.

Доказательство. Если матрица А нулевая, то число линейно независимых строк, как и число линейно независимых столбцов, равно нулю. Пусть А – ненулевая матрица. Транспонируем матрицу А. Тогда ее строки перейдут в столбцы транспонированной матрицы A^*, линейно независимые строки перейдут в линейно независимые столбцы A^*, а максимальный порядок отличных от нуля миноров сохранится, поскольку при транспонировании каждый из миноров сохраняет свое числовое значение.

Таким образом,

$$RangA = RangA^*,$$

и равен максимальному числу линейно независимых строк матрицы А.

Следствие 5. Если A – произвольная $m \times n$-матрица, то $Rang$A не превышает меньшего из двух чисел m и n.

Аналогично ранг сохраняется, если к одной из строк прибавить линейную комбинацию других строк.

Перечисленные выше свойства обычно используются для вычисления ранга матрицы. Именно, данную матрицу преобразуют так, чтобы ранг не изменился, но, чтобы в результате получилась матрица, у которой сразу виден базисный минор.

Пример построения матрицы перехода от одной системы координат к другой в векторном пространстве.

Пусть задано векторное пространство $\boldsymbol{V}$ над полем $\boldsymbol{K}$, и в нем заданы два базиса: базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ и его разложения по базисам, т.е. представления $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$. Коэффициенты x_i и x'_j называются координатами вектора $\boldsymbol{x}$ в разложениях по базисам $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ соответственно. Столбцы X и X', построенные соответственно из координат x_i и x'_j вектора $\boldsymbol{x}$ называются координатными столбцами этого вектора. Покажем, как связаны между собой координаты одного и того же вектора в разных базисах. Для этого разложим вектора базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, т.е. рассмотрим суммы $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$, где $j = 1,2, \dots, n$. Затем подставим эти суммы в разложения вектора $\boldsymbol{x}$ и приравняем последние суммы между собой, т.е. положим $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j (\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i)$. Проделывая необходимые действия и меняя порядок суммирования в двойной сумме, получим: $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j) e_i$. Поскольку два вектора равны, когда равны их соответствующие координаты, то из последнего равенства получаем n равенств:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j,\ i = 1,2, \dots, n.$$

Эти n равенств записываются в виде одного матричного равенства $X = PX'$. Матрица P строится очевидным образом – её j-ый столбец равен координатному столбцу базисного вектора e'_j в разложении последнего по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Рассмотрим теперь конкретное векторное пространство $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}^4$ пространство четырехмерных вещественных столбцов. Показать, что конкретные столбцы e_1, e_2, e_3, e_4 и столбцы e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 образуют два различных базиса этого пространства и найти матрицу перехода P от второй системы координат к первой.

Пусть столбцы первого и второго базисов заданы как столбцы матриц A и B соответственно, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -8 & -6 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для решения поставленной задачи нужно проверить, что $|A| \neq 0$ и $|B| \neq 0$. Затем каждый столбец B_i матрицы B разложить по столбцам матрицы A, т.е. решить системы уравнений $AP_i = B_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$. Столбцы неизвестных P_i и будут столбцами искомой матрицы P. Для реализации указанной схемы решения составим матрицу, построенную из столбцов A и B (т.е. матрицу (A, B)) и с помощью элементарных преобразований строк этой матрицы (метод Гаусса) постараемся получить на месте матрицы A единичную матрицу E. Если этого сделать не удастся, то $|A| = 0$ (столбцы матрицы A линейно зависимы). Если удастся получить на указанном месте единичную матрицу, то на месте матрицы B будет находиться искомая матрица

$P = A^{-1}B$ в том и только в том случае если её определитель будет отличен от нуля.

Решение. $(A, B) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 10 & -8 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & -4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & -9 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 7 & -14 & 15 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 & -19 & 16 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -8 & 3 & 9 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 7 & -14 & 15 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 & -19 & 16 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{-8}{2} & \frac{20}{2} & \frac{-16}{2} & \frac{-12}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{-14}{2} & \frac{15}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{-19}{2} & \frac{16}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-8}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{-21}{2} & \frac{18}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{-14}{2} & \frac{15}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{-19}{2} & \frac{16}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-8}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{-21}{2} & \frac{18}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{2} & \frac{14}{2} & \frac{-15}{2} & \frac{-11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{2} & \frac{19}{2} & \frac{-16}{2} & \frac{-11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{8}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-9}{2} \end{pmatrix}$$

Вначале первая строка матрицы (A, B) вычитается из всех остальных, затем продолжение метода Гаусса с «обратным ходом».

Искомая матрица P будет следующей:

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -21 & 18 & 19 \\ -7 & 14 & -15 & -11 \\ -8 & 19 & -16 & -11 \\ -1 & 8 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

Поскольку $|A| = |B| = -8$ (проверяется непосредственно, коме того, для матрицы A этот результат непосредственно виден в процессе преобразования матрицы (A, B)), то $|P| = \left|A^{-1}B\right| = |A|^{-1}|B| = 1$ (проверяется также непосредственным вычислением определителя).

Замечание. Обратите внимание на расстановку индексов в коэффициентах разложения $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$.

Упражнение. Выразить через матрицу P матрицы перехода от нештрихованного базиса к штрихованному и обратно, а также от нештрихованной системы координат к штрихованной (в примере был рассмотрен переход от штрихованной системы координат к нештрихованной).

§21. Базис, размерность

Определение 1. Линейное пространство называется n-мерным, если в нем имеется линейно независимая система, состоящая из n векторов, а любая система, состоящая из большего числа векторов, является линейно зависимой.

Число n называется размерностью линейного пространства. Таким образом, размерность пространства – это наибольшее число его линейно независимых векторов.

Например, пространство геометрических векторов трехмерно, так как в нем имеется три независимых вектора, а любые четыре связаны линейной зависимостью. Геометрические векторы, расположенные в одной плоскости, образуют двумерное пространство, в котором любые два неколлинеарных вектора линейно независимы, а всякие три вектора линейно зависимы. Векторы, лежащие на одной прямой, образуют одномерное пространство. Линейное пространство, содержащее единственный элемент – нулевой вектор $\mathbf{0}$, является нульмерным.

Все n-мерные пространства $(\mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots)$ образуют класс конечномерных пространств.

Определение 2. Линейное пространство называется бесконечномерным, если для любого целого числа $\mathrm{N} > 0$ в нем найдется линейно независимая система, состоящая из N векторов.

Пример. Линейное пространство непрерывных на данном сегменте функций является бесконечномерным. Можно установить их линейную независимость, рассмотрев степенные функции 1, τ, τ^2, ..., τ^N.

Любая их линейная комбинация представляет собой многочлен степени не выше N

$$a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \cdots + a_N\tau^N = p(\tau).$$

У любого многочлена с ненулевыми коэффициентами есть лишь конечное число корней, поэтому $p(\tau) \equiv 0$, т. е. $\{p(\tau) = \mathbf{0}\}$ тогда и только тогда, когда $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$.

Таким образом, показано, что рассматриваемые элементы независимы, а само пространство бесконечномерно, так как число N может быть сколь угодно большим.

Введем весьма важное определение.

Определение 3. Линейно независимая система $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ называется базисом пространства $\boldsymbol{L}$, если для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ существует линейная комбинация $\{\boldsymbol{e_i}\}$:

$$x = x_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e_i}. \qquad (11)$$

Равенство вида (11) называется разложением вектора x по базису $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$. Числовые коэффициенты x_i называются координатами вектора x в базисе $\{\boldsymbol{e_i}\}$.

Определение 4. Размерность пространства есть максимальное число линейно независимых векторов. Если такого нет, то оно называется бесконечномерным.

Теорема. Линейное пространство тогда и только тогда n-мерно, когда в нем существует базис из n-векторов.

Доказательство.

1) Пусть пространство $\boldsymbol{L}$ – n-мерное. Следовательно, существует система из n линейно независимых векторов $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$. Добавив к ней произвольный вектор **x** из **L**, получим линейно зависимую систему $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}, x)$. Значит система из n линейно независимых векторов $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ максимальная и по лемме 2 §11 любой вектор есть линейная комбинация векторов $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e}\ \boldsymbol{n})$, следовательно, $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ есть базис.

2) Пусть пространство $\boldsymbol{L}$ имеет базис $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$. Возьмем в пространстве $\boldsymbol{L}$ любую линейно независимую систему $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$. По определению базиса каждый из векторов $\mathbf{b_j}$ линейно выражается через $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$. Значит, по лемме 1 §11 гл. II, $m \leq n$. Следовательно, любая система векторов $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ $(k > n)$ – линейно зависима. Вместе с тем, базис $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ образует линейно независимую систему, содержащую n векторов. Значит, размерность $\boldsymbol{L}$ равна n. ■

Замечание. Как видно из проведенного доказательства, в n-мерном пространстве любая независимая система из n векторов является базисом.

В качестве приложения доказанной теоремы докажем лемму.

Лемма. Координатное пространство $\mathbf{K_n}$ является n-мерным.

Доказательство. Рассмотрим в $\boldsymbol{K_n}$ векторы

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e_1} = \{1, 0, \dots, 0\}, \\ &\boldsymbol{e_2} = \{0, 1, \dots, 0\}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\boldsymbol{e_n} = \{0, 0, \dots, 1\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Согласно определению линейных операций в $\mathbf{K_n}$ (см. §8 гл. II) любой вектор из $\mathbf{K_n}$ линейно выражается через векторы $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ и из определения действий сложения и умножения на число для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbf{K_n}$ $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e_i} = (\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n})$. Отсюда следует, что линейная комбинация векторов $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e_i} = \mathbf{0}$, что равносильно $x_i = \mathbf{0}$ для любого i. Значит, векторы $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ независимы и составляют базис $\mathbf{K_n}$, следовательно, пространство $\mathbf{K_n}$ является n-мерным, что и требовалось доказать. ■

Пример. Показать, что, в трехмерном пространстве V над полем вещественных чисел с декартовой системой координат, функция $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \in V$, а знак $\times$ означает векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$, является линейным оператором, отображающим векторное пространство V в себя. Построить матрицу этого линейного оператора в декартовой системе координат.

Решение. Из свойств векторного произведения векторов следует, что для любых векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ и любых вещественных чисел α и β $f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times (\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$, т.е. $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$ действительно линейный оператор, действующий в обычном трехмерном пространстве.

Далее, предполагаем, что в пространстве V дана декартова система координат, т.е. существует такая тройка векторов-ортов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in V$, что любой вектор $\boldsymbol{v} \in V$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации этих ортов. То есть, $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$, где коэффициенты v_1, v_2, v_3 – координаты вектора $\boldsymbol{v}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Кроме того предполагается, что $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$. Отсюда, в силу свойств векторного произведения векторов, тотчас же следует, что $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 0$. Теперь, чтобы построить матрицу A линейного оператора f нужно применить наш оператор к базисным векторам отображаемого пространства (в нашем случае к векторам $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$), разложить эти образы по базису того пространства, в которое происходит отображение (в нашем случае по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$), и координаты образа i-го базисного вектора записать в i-ый столбец матрицы A. Итак, с учетом того, что a_1, a_2, a_3 – координаты вектора $\boldsymbol{a}$, получим:

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_1 = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_1 = -a_2\boldsymbol{e}_3 + a_3\boldsymbol{e}_2,$$

$$f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_2 = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_2 = a_1\boldsymbol{e}_3 - a_3\boldsymbol{e}_1,$$

$$f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_3 = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_3 = -a_1\boldsymbol{e}_2 + a_2\boldsymbol{e}_1.$$

Следовательно, матрица A оператора f будет следующей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, чтобы вычислить координаты вектора $f(\boldsymbol{v})$ достаточно умножить матрицу A на координатный столбец вектора $\boldsymbol{v}$. То есть, координатным столбцом вектора $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$ будет столбец

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3 v_2 + a_2 v_3 \\ a_3 v_1 - a_1 v_3 \\ -a_2 v_1 + a_1 v_2 \end{pmatrix}.$$

Этот пример используется для получения практических уравнений движения твердого тела вокруг центра масс.

Лекция 9

§22. Линейные операции в координатах

Пусть пространство $\boldsymbol{L}$ является n-мерным, а векторы $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ образуют в нем базис.

Теорема 1. Разложение вектора по данному базису единственно.

Доказательство. Пусть вектор $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{L}$ имеет два разложения:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e_i}, \widetilde{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i \boldsymbol{e_i}.$$

Тогда произведем вычитание и получим

$$x - \tilde{x} = \sum_1^n \boldsymbol{e_i}(x_i - \tilde{x}_i) = \boldsymbol{0}.$$

А так как векторы базиса линейно независимы, то $x_i - \widetilde{x}_i = 0$. Следовательно, $x_i = \widetilde{x}_i$, что и требовалось доказать. ■

<u>Следствие 1.</u> Все координаты нулевого вектора $\boldsymbol{0}$ равны нулю при любом выборе базиса:

$$\theta = 0 \cdot \boldsymbol{e_1} + \ \dots + 0 \cdot \boldsymbol{e_n}. \qquad (13)$$

Теорема 2. При умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число. При сложении векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ складываются их соответствующие координаты.

Доказательство. Пусть даны векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$. Разложим их по базису:

$$\boldsymbol{x} = \sum_1^n x_i \boldsymbol{e_i},\ y = \sum_1^n y_i \boldsymbol{e_i}.$$

Пусть α – любое число. По аксиомам линейного пространства имеем:

$$\alpha\boldsymbol{x} = \alpha\left(\sum_1^n x_i \boldsymbol{e_i}\right) = \sum_1^n (\alpha x_i)\boldsymbol{e_i}.$$

Таким образом, вектор $\alpha\boldsymbol{x}$ имеет координаты $(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.

Далее имеем, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \sum_1^n (x_i + y_i)\boldsymbol{e_i}$. Значит, вектор $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ имеет координаты $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, что и требовалось доказать.

Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{q}$ – произвольная из $\boldsymbol{L}$. Разложим каждый из них по базису:

$$\begin{aligned} &\mathbf{a} = a_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + a_n\boldsymbol{e_n}, \\ &\mathbf{b} = b_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + b_n\boldsymbol{e_n}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ &\mathbf{q} = q_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + q_n\boldsymbol{e_n}. \end{aligned} \tag{14}$$

Наряду с векторами (14) рассмотрим матрицу M, образованную их координатами:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix}.$$

Тогда справедлива теорема. ■

Теорема 3. Ранг системы векторов (14) равен рангу матрицы M.

Доказательство. Предположим, что между векторами (14) имеется линейная зависимость

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\boldsymbol{b} + \cdots + \chi\boldsymbol{q} = \mathbf{0}. \tag{15}$$

Тогда из формул (13), (15), теоремы 2 и теоремы 1 имеем

$$\alpha(\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}) + \beta(\mathrm{b}_1, \dots, \mathrm{b}_\mathrm{n}) + \cdots + \chi(\mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_\mathrm{n}) = (0, \dots, 0). \tag{16}$$

Иначе говоря, между строками матрицы M имеется линейная зависимость с теми же коэффициентами α, β, …, χ. Обратно, из (16) следует (15). Аналогичные рассуждения можно провести, взяв не всю систему (14), а какую-нибудь ее подсистему и соответствующую подсистему строк матрицы М (т. е. те ее строки, в которых выписаны координаты векторов выбранной подсистемы). Поэтому подсистема векторов из системы (14) линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима соответствующая подсистема строк матрицы М. Значит, максимальное число линейно независимых векторов системы (14) совпадает с максимальным числом линейно независимых строк матрицы М. Теорема 3 доказана. ■

Если число векторов в системе (14) равно n, то матрица М становится квадратной.

Следствие 2. В n-мерном пространстве система из n векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы координат этих векторов равен нулю:

$$\Delta = detM = 0,$$

т. е. когда ранг матрицы M меньше n.

Данное утверждение нередко используется при практической проверке линейной зависимости или независимости конкретных систем векторов.

Лекция 10

§23. Линейные подпространства

Пусть $\boldsymbol{L_n}$ – линейное пространство, $\mathbf{L}'$ – некоторое множество элементов из $\boldsymbol{L_n}$.

Определение 1. Множество $\mathbf{L}'$ в пространстве $\boldsymbol{L_n}$ называется линейным подпространством (или просто подпространством $\boldsymbol{L_n}$), если выполняются следующие условия:

1) для любых x, y из $\mathbf{L}'$ их сумма $x +$ y также входит в $\mathbf{L}'$;

2) для любого $x \in \boldsymbol{L}'$ и любого числа α произведение $\alpha x \in \boldsymbol{L}'$.

Пусть $\mathbf{L}'$ – линейное подпространство в $\boldsymbol{L_n}$. Операции сложения векторов и умножения их на числа, заданные в $\boldsymbol{L_n}$, будем рассматривать применительно лишь к тем элементам, которые входят в $\mathbf{L}'$.

Теорема 1. В линейном пространстве $\boldsymbol{L_n}$ каждое линейное подпространство $\mathbf{L}'$ само является линейным пространством.

Доказательство. По определению подпространства действия сложения и умножения на число не выводят за пределы $\mathbf{L}'$. Аксиомы линейного пространства 1)-2) и 5)-8) заведомо выполнены в $\mathbf{L}'$, так как они выполнены вообще для всех элементов $\boldsymbol{L_n}$. Для доказательства надо проверить только аксиомы 3) и 4), то есть установить, что вместе с каждым элементом x из $\mathbf{L}'$ в подпространство L_n входит противоположный элемент $-x$, и что $\mathbf{0} \in \mathbf{L}'$.

По второму условию определения подпространства имеем $-x = (-1) \cdot x \in \mathbf{L}'$. Применяя первое условие, получаем $\mathbf{0} = x + (-x) \in \mathbf{L}'$. Теорема доказана. ■

Примеры подпространств.

1) Множество $\mathbf{L}'$, состоящее только из одного нулевого элемента $\mathbf{0}$ данного пространства, образует его подпространство. Действительно, $\mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \in \mathrm{L}'$, $\alpha 0 = \mathbf{0} \in \mathbf{L}'$.

2) В n^2-мерном пространстве квадратных $n \times n$-матриц множество симметрических матриц (a_{ik}), то есть таких, что $a_{ik} = a_{ki}$, образует подпространство.

Множество кососимметрических матриц, характеризующихся тем, что $a_{ik} = -a_{ki}$, также образует подпространство в пространстве $n \times n$-матриц.

3) В пространстве всевозможных функций, заданных на отрезке $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, каждое из следующих множеств образует линейное подпространство:

а) функции, непрерывные в некоторой внутренней точке τ_0 интервала $\tau_1 < \tau < \tau_2$;

б) функции, непрерывные в интервале $\tau_1 < \tau < \tau_2$;

в) функции, непрерывные на всем отрезке $[\tau_1, \tau_2]$;

г) функции, непрерывные на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ вместе с их производными до порядка N включительно, где N – произвольное целое положительное число;

д) функции, имеющие на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ производные всех порядков;

е) всевозможные многочлены, рассматриваемые на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$;

ж) многочлены, степени которых не превосходят фиксированного целого числа $N > 0$.

В примере 3) каждое из перечисленных выше подпространств содержится в предыдущем, и все они, за исключением последнего, бесконечномерны (последнее имеет размерность $\mathrm{N} + 1$).

з) Зафиксируем на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ произвольное множество точек $\mathcal{A}$. Функции, равные нулю в точках множества $\mathcal{A}$, также образуют подпространство.

4) Пусть $\boldsymbol{L_n}$ – трехмерное пространство геометрических векторов в обычном евклидовом пространстве. Будем считать, что векторы отложены из начала координат. Рассмотрим все векторы, расположенные в какой-нибудь плоскости, проходящей через начало координат. Такие векторы образуют подпространство.

Примеры подмножеств линейного пространства, которые не являются подпространствами.

а) В трехмерном пространстве геометрических векторов рассмотрим совокупность векторов, концы которых лежат в фиксированной плоскости, не проходящей через начало координат. Они не образуют подпространства, так как и сумма двух векторов, и произведение вектора на любое число, не равное единице, уже не входят в это подмножество.

б) В этом же пространстве рассмотрим векторы, концы которых лежат на поверхности конуса с вершиной в начале координат. Произведение любого вектора из рассматриваемого множества на любое число снова принадлежит этому множеству. Тем не менее, указанное множество не является подпространством, так как операция сложения, вообще говоря, выводит за его пределы.

Пересечением некоторой совокупности множеств называется совокупность тех элементов, которые одновременно принадлежат всем рассматриваемым множествам. Пересечение двух множеств $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ обозначается символом $\mathbf{L_1} \cap \mathbf{L_2}$.

Пусть $\mathbf{L_1}, \mathbf{L_2} \subset \mathbf{L_n}$ – подпространства. Множество $\{x | x \in \mathbf{L_1}, x \in \mathbf{L_2}\}$ называется пересечением $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ и $\{x | x \in \mathbf{L_1}, x \in \mathbf{L_2}\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{L_1} \cap \mathbf{L_2}$.

Теорема 2. Пересечение любой совокупности подпространств данного линейного пространства $\boldsymbol{L_n}$ тоже является линейным подпространством.

Доказательство. Пусть $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ два подпространства и $\mathbf{L_3} = \mathbf{L_1} \cap \mathbf{L_2}$, а векторы **x, y** принадлежат $\mathbf{L_3}$. Рассматривая **x, y** как элементы $\mathbf{L_1}$ по определению подпространства находим, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{L_1}$, $\alpha\mathbf{x} \in \mathbf{L_1}$, где α – произвольное число. Точно так же $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{L_2}$, $\alpha\mathbf{x} \in \mathbf{L_2}$. Но это значит, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{L_3}$, $\alpha\mathbf{x} \in \mathbf{L_3}$, поэтому $\mathbf{L_3}$ удовлетворяет определению подпространства, что и требовалось доказать. ■

Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{L_n}$ даны два линейных подпространства $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$. Обозначим через $\mathbf{L}'$ множество всех векторов $\boldsymbol{x}$, представимых в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \mathbf{L_1}$, $x_2 \in \mathbf{L_2}$ (рисунок 1).

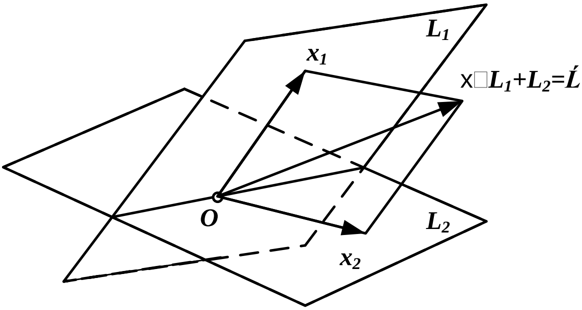


Рисунок 1

Можно убедиться, что $\mathbf{L}'$ есть линейное подпространство в $\boldsymbol{L_n}$. Действительно, возьмем вместе с $\boldsymbol{x} \in \mathbf{L}'$ еще вектор $\boldsymbol{x}' \in \mathbf{L}'$, т. е. $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}_2'$, где $\boldsymbol{x}_1' \in \mathbf{L_1}$, $\boldsymbol{x}_2' \in \mathbf{L_2}$. Тогда вектор $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_1') + (\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_2')$ принадлежит $\mathbf{L}'$, так как $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_1' \in \mathbf{L_1}$, $\boldsymbol{x}_2 + \boldsymbol{x}_2' \in \mathbf{L_2}$. Кроме того, $\alpha\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}_1 + \alpha\boldsymbol{x}_1 \in \mathbf{L}'$, так как $\alpha\boldsymbol{x}_1 \in \mathbf{L_1}$, $\alpha\boldsymbol{x}_2 \in \mathbf{L_2}$.

Подпространство $\mathbf{L}'$ называется суммой подпространств $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ и обозначается так: $\mathbf{L}' = \mathbf{L_1} + \mathbf{L_2}$. На рисунке 1 показан частный случай, когда $\mathbf{L}' = \mathbf{L}$ трехмерно, $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ двумерны.

Понятие суммы подпространств применимо и для любого числа слагаемых. Пусть в пространстве $\mathbf{L}$ даны подпространства $\mathbf{L_1}, \dots, \mathbf{L_k}$. Тогда их сумма

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L_1} + \ \dots + \ \mathbf{L_k}$$

есть линейное подпространство, состоящее из всех векторов вида

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_1 + \cdots + \mathrm{x}_\mathrm{k}, \qquad (17)$$

где $\boldsymbol{x}_1 \in \mathbf{L_1}, \dots, \boldsymbol{x}_k \in \mathbf{L_k}$.

Определение 2. Если для каждого $\mathbf{x} \in \mathbf{L}'$ разложение (17) единственно, то $\mathbf{L}'$ называется прямой суммой подпространств $\mathbf{L_1}, \dots, \mathbf{L_k}$.

Если речь идет о прямой сумме, то будем употреблять знак $\oplus$.

В качестве примера на рисунке 2 показана прямая сумма одномерных подпространств $\boldsymbol{L_1}$ и $\boldsymbol{L_2}$. Заметим, что сумма $\boldsymbol{L_1} + \boldsymbol{L_2}$ на рисунке 2 не является прямой суммой.

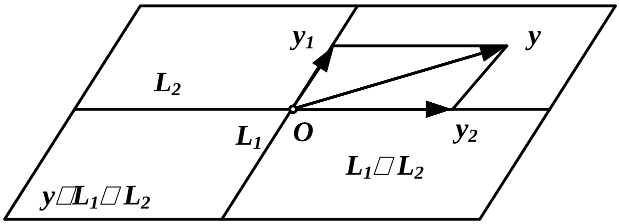


Рисунок 2

Отметим некоторые свойства подпространств.

Прежде всего, всякое линейное соотношение, связывающее векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}$ в подпространстве $\mathbf{L}'$, справедливо во всем пространстве $\boldsymbol{L_n}$, и обратно. Линейная зависимость векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}$ в подпространстве $\mathbf{L}'$ выполняется одновременно в подпространстве $\mathbf{L}'$ и в пространстве $\boldsymbol{L_n}$. Если, например, в пространстве $\boldsymbol{L_n}$ всякие $(\mathrm{n}+1)$ векторов линейно зависимы, то это утверждение будет выполнено в подпространстве $\mathbf{L}'$. Отсюда вытекает, что размерность любого подпространства $\mathbf{L}'$ в n-мерном пространстве $\boldsymbol{L_n}$ не превосходит числа n. В этом случае, согласно теореме §13, в каждом подпространстве $\mathbf{L}' \subset \boldsymbol{L_n}$ можно построить базис из такого числа векторов, какова размерность подпространства $\boldsymbol{L}$.

Если в пространстве $\boldsymbol{L_n}$ выбран базис $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$, то в общем случае, нельзя выбрать базисные векторы подпространства $\mathbf{L}'$ из числа векторов $\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}$, потому, что в подпространство $\mathbf{L}'$ может не входить ни один из них.

<u>Теорема 3.</u> Если, выбран базис $\{\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}\}$ в подпространстве $\mathbf{L}'$, имеющем размерность $l < n$, то всегда можно дополнительно выбрать векторы $\boldsymbol{f}_{l+1}, \cdots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}}$ во всем пространстве $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}$ так, что система $(\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \cdots, \boldsymbol{f}_{l}, \cdots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{n}})$ будет базисом во всем $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}$**.**

Доказательство. В пространстве $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}$ существуют векторы, которые линейно не выражаются через $\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \cdots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{l}}$. Если бы таких векторов не было, то векторы $\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \cdots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{l}}$, которые по условию линейно независимые, составляли бы базис пространства $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}$, и по теореме §13 размерность $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}$ была бы равна l, а не n. Обозначим через $\mathbf{f}_{\mathbf{l+1}}$ любой из векторов, не выражающихся линейно через $\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \cdots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{l}}$. Система $(\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \cdots, \boldsymbol{f}_{l}, \mathbf{f}_{\mathbf{l+1}})$ линейно независима. Действительно, если бы существовало соотношение вида

$$\alpha_1 \boldsymbol{f}_{\mathbf{1}} + \alpha_2 \boldsymbol{f}_{\mathbf{2}} + \ldots + \alpha_l \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{l}} + \alpha_{l+1} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{l}+\mathbf{1}} = 0,$$

то при $\alpha_{l+1} \neq 0$ получили бы, что вектор $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{l}+\mathbf{1}}$ можно линейно выразить через $\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \cdots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{l}}$, а при $\alpha_{l+1} = 0$ получили бы, что векторы $\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \cdots, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{l}}$ линейно зависимы. Эти выводы противоречат построению. Если теперь любой вектор пространства $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}$ линейно выражается через $\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \cdots, \boldsymbol{f}_{l}, \boldsymbol{f}_{l+\mathbf{1}}$, то система $(\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \cdots, \boldsymbol{f}_{l}, \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{l}+\mathbf{1}})$ образует базис в $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}$, $l + 1 = n$). Построение закончено. Если $l + 1 < n$, то имеется вектор $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{l}+\mathbf{2}}$, не выражающийся линейно через $\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \cdots, \boldsymbol{f}_{l}, \boldsymbol{f}_{l+\mathbf{1}}$. Таким образом можно продолжить построение, через $(n - l\ )$ получим базис пространства $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}$. ■

Определение. Векторы $\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}$ линейно независимы над подпространством $\boldsymbol{L}' \subset \boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}$, если из соотношения $\sum_1^k \alpha_i \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{i}} \in \boldsymbol{L}'$ следует $\alpha_i = 0$.

Если $\mathbf{L}'$ – нулевое подпространство, то линейная независимость над $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{n}}$ означает обычную линейную зависимость.

Линейная зависимость векторов $\boldsymbol{a}_{\mathbf{1}}, \cdots, \boldsymbol{a}_{\boldsymbol{k}}$ над подпространством $\mathbf{L}'$ означает, что существует линейная комбинация $\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a_k}$, лежащая в $\mathbf{L}'$, причем среди коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, имеются отличные от нуля.

Максимальное число векторов пространства $\boldsymbol{L_n}$, линейно независимых над подпространством $\boldsymbol{L}' \subset \boldsymbol{L_n}$, называется размерностью $\boldsymbol{L_n}$ над $\mathbf{L}'$.

Теорема 4 (О линейной независимости системы векторов). Если векторы $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}$ линейно независимы над пространством $\boldsymbol{L}' \subset \boldsymbol{L_n}$, а $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}$ – векторы, линейно независимые в подпространстве $\mathbf{L}'$, то векторы $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}$ линейно независимы в пространстве $\boldsymbol{L_n}$.

Доказательство. Действительно, если бы имело место равенство

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a_k} + \beta_1\boldsymbol{f_1} + \beta_2\boldsymbol{f_2} + \ldots + \beta_l\boldsymbol{f_l},$$

то, написанное в форме

$$\alpha_1\boldsymbol{a_1} + \alpha_2\boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a_k} = -(\beta_1\boldsymbol{f_1} + \beta_2\boldsymbol{f_2} + \ldots + \beta_l\boldsymbol{f_l}),$$

привело бы к заключению, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k$ в силу предположенной линейной независимости векторов $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}$ над $\mathbf{L}'$. Отсюда $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_l$, а в силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}$. ■

Лемма 1. Векторы $\boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_n}$, построенные ранее, линейно независимы над подпространством $\boldsymbol{L}'$.

Доказательство. Если бы имело место равенство

$$\beta_{l+1}\boldsymbol{f_{l+1}} + \beta_{l+2}\boldsymbol{f_{l+2}} + \ldots + \beta_n\boldsymbol{f_n} = \beta_1\boldsymbol{f_1} + \beta_2\boldsymbol{f_2} + \ldots + \beta_l\boldsymbol{f_l},$$

причем среди чисел $\beta_{l+1}, \beta_{l+2}, \ldots, \beta_n$ были бы отличные от нуля, то векторы $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_n}$ оказались бы линейно зависимыми в противоречии с построением. Размерность пространства $\boldsymbol{L_n}$ над $\mathbf{L}'$, следовательно, не меньше, чем $(\mathrm{n} - \mathrm{l})$. С другой стороны, она не может быть и больше, чем $(\mathrm{n} - \mathrm{l})$. Так как если бы нашлось $(\mathrm{n} - \mathrm{l} + 1)$ векторов, линейно независимых над $\mathbf{L}'$, то в пространстве $\boldsymbol{L_n}$ были бы линейно независимы векторы, число которых больше, чем n. Таким образом, размерность $\boldsymbol{L_n}$ над $\mathbf{L}'$ в данном случае равна $(\mathrm{n}-\mathrm{l})$. ■

Определение. Пространство $\mathbf{L}$ является прямой суммой своих подпространств $\boldsymbol{L_1},\ldots,\mathbf{L_m}$, если:

1) Для всякого $x \in \mathbf{L}$ существует разложение

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m,\ x_1 \in \mathbf{L_1},\ x_2 \in \mathbf{L_2},\ \ldots,\ x_m \in \mathbf{L_m}.$$

2) Данное разложение единственно: если

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_m = y_1 + y_2 + \cdots + y_m,$$

где $x_j \in \mathbf{L_j}$, $y_j \in \mathbf{L_j}$, $j = 1, \ldots, m$, то $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …, $x_m = y_m$.

Справедливость последнего условия следует из 2').

Если имеется разложение

$$0 = z_1 + \ldots + z_m,\ \text{где } z_1 \in \boldsymbol{L_1},\ \ldots,\ z_m \in \boldsymbol{L_m},\ \text{то } z_1 = \ldots = z_m = 0.$$

Действительно, пусть выполнено условие 2) и дано разложение 2'). Вычитая, получим

$$0 = (x_1 - y_1) + \ldots + (x_m - y_m).$$

Применяя 2'), получим $x_1 = y_1, \ldots, x_m = y_m$. Обратно, 2') следует из 2), если положить $x = 0$, $x_1 = \ldots = x_m = 0$.

Лемма 2. n-мерное пространство $\boldsymbol{L_n}$ есть прямая сумма n одномерных подпространств, определенных любыми n линейно независимыми векторами. Пространство $\boldsymbol{L_n}$ можно представить разными способами в форме прямой суммы и неодномерных подпространств.

Доказательство. Из 2) следует, что всякие два из подпространств $\mathbf{L_1},\ldots,\mathbf{L_m}$ имеют лишь один общий элемент 0. Действительно, если бы имели $\mathrm{z} \in \mathbf{L_k}$ и $\mathrm{z} \in \mathbf{L_j}$, то из сравнения двух разложений

$$z = z + 0,\ z \in \boldsymbol{L_j},\ 0 \in \boldsymbol{L_k},$$

$$\mathrm{z} = 0 + \mathrm{z},\ 0 \in \mathbf{L_j},\ z \in \mathbf{L_k}$$

из условия 2) следовало бы, что $\mathrm{z} = 0$. ■

Теорема 5 (О различии в прямой сумме). Пусть в n-мерном пространстве $\boldsymbol{L_n}$ фиксировано подпространство $\boldsymbol{L}$.

Всегда существует подпространство $\boldsymbol{M} \subset \boldsymbol{L_n}$, которое в прямой сумме с $\boldsymbol{L}$ дает все $\boldsymbol{L_n}$.

Доказательство. Для доказательства используем векторы $\boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_n}$, построенные в теореме 3, линейно независимые над подпространством $\boldsymbol{L}$. Пусть M – подпространство, составленное из всех линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_n}$. Поскольку векторы $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_n}$ образуют базис в $\boldsymbol{L_n}$, каждый вектор $x \in \mathbf{L}$ допускает разложение $\boldsymbol{x} = \beta_1 \boldsymbol{f_1} + \beta_2 \boldsymbol{f_2} + \ldots + \beta_l \boldsymbol{f_l} + \beta_{l+1} \boldsymbol{f_{l+1}} + \cdots + \beta_n \boldsymbol{f_n} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z},$ где $\boldsymbol{y} = \beta_1 \boldsymbol{f_1} + \beta_2 \boldsymbol{f_2} + \ldots + \beta_l \boldsymbol{f_l} \in \mathbf{L},$ $\boldsymbol{z} = \beta_{l+1} \boldsymbol{f_{l+1}} + \cdots + \beta_n \boldsymbol{f_n} \in M$. При этом из $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ следует $\beta_j = 0,\ j = 1,2, \dots, n,$ в силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_n}$. Следовательно, условия определения выполнены, и $\boldsymbol{L_n}$ есть прямая сумма $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$: $\boldsymbol{L} \oplus \boldsymbol{M} = \boldsymbol{L_n}$. ■

Теорема 6. Размерность суммы пространств $\mathbf{L_1} + \ldots + \mathbf{L_k}$ не больше суммы их размерностей: $\dim(\sum_1^m L_k) \le \sum_1^m (dim L_k)$. Если сумма $\mathbf{L_1} + \ldots + \mathbf{L_k}$ прямая, то все векторы $\mathbf{f_{k1}}, \ldots, \mathbf{f_{kr_k}}$ $(k = 1,2, \dots, m)$ линейно независимы.

Доказательство. Если размерность пространства $\boldsymbol{L_k}$ равна $\mathrm{r_k}$ $(k = 1,2, \dots, m)$ и в каждом пространстве $\boldsymbol{L_k}$ выделены $\mathrm{r_k}$ линейно независимых векторов $\mathbf{f_{k1}}, \ldots, \mathbf{f_{kr_k}}$, то каждый вектор $\boldsymbol{x}$ суммы $\mathbf{L} = \mathbf{L_1} + \ldots + \mathbf{L_k}$ можно линейно выразить через все эти векторы. Если сумма $\mathbf{L_1} + \ldots + \mathbf{L_k}$ прямая, то все векторы $\mathbf{f_{k1}}, \ldots, \mathbf{f_{kr_k}}$ $(k = 1,2, \dots, m)$ линейно независимы, так что в этом случае размерность суммы равна сумме размерностей. ■

В общем случае размерность суммы определяется через размерности слагаемых более сложным образом. Рассмотрим вопрос о размерности суммы двух конечномерных подпространств $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ пространства $\boldsymbol{K}$.

Теорема 7 (О размерности суммы). Размерность суммы двух подпространств равна сумме их размерностей за вычетом размерности пересечения.

Доказательство. Пусть p и q обозначают размерности подпространств $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$. Обозначим через $\boldsymbol{L}$ пересечение подпространств $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ и через l его размерность. Выберем в $\boldsymbol{L}$ базис $\{\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_l}\}$ и, используя теорему 3, дополним его векторами $\boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_p}$ до полного базиса подпространства $\boldsymbol{P}$ и векторами $\boldsymbol{g_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{g_q}$ до полного базиса подпространства $\boldsymbol{Q}$. Каждый вектор суммы $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$ по определению есть сумма вектора из $\boldsymbol{P}$ и вектора из $\boldsymbol{Q}$ и поэтому может быть линейно выражен через векторы $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_l}, \boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_p}, \boldsymbol{g_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{g_q}$. Покажем, что эти векторы образуют базис подпространства $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$. Для этого проверим их линейную независимость. Допустим, что существует линейное соотношение вида

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_l \boldsymbol{e_l} + \beta_1 \boldsymbol{f_1} + \cdots + \beta_p \boldsymbol{f_p} + \gamma_1 \boldsymbol{g_1} + \cdots + \gamma_q \boldsymbol{g_q} = 0, \quad (18)$$

причем среди коэффициентов $\alpha_1, \dots, \gamma_q$ имеются отличные от нуля. Можем тогда утверждать, что имеются отличные от нуля числа в совокупности $\gamma_1, \dots, \gamma_q$. В противном случае векторы $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_l}, \boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_p}, \boldsymbol{g_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{g_q}$ оказались бы линейно зависимыми, что невозможно ввиду того, что они образуют базис подпространства $\boldsymbol{P}$. Следовательно, вектор

$$\boldsymbol{x} = \gamma_{l+1} \boldsymbol{g_{l+1}} + \cdots + \gamma_q \boldsymbol{g_q} \neq 0. \quad (19)$$

Иначе векторы $\boldsymbol{g_{l+1}}, \dots, \boldsymbol{g_q}$ оказались бы линейно зависимыми. Но из (18) следует, что

$$-\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{e_1} + \cdots + \beta_p \boldsymbol{f_p} \in \boldsymbol{P},$$

тогда как (19) показывает, что $x \in \boldsymbol{Q}$. Значит, $\boldsymbol{x}$ принадлежит и $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ и, следовательно, входит в подпространство $\boldsymbol{L}$. Но тогда

$$\boldsymbol{x} = \gamma_{l+1} \boldsymbol{g_{l+1}} + \cdots + \gamma_q \boldsymbol{g_q} = \lambda_1 \boldsymbol{e_1} + \cdots + \lambda_l \boldsymbol{e_l}.$$

Так как векторы $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_l}, \boldsymbol{g_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{g_q}$ линейно независимы, $\gamma_{l+1} = \cdots = \gamma_q = 0$. Полученное противоречие показывает, что векторы $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_l}, \boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_p}, \boldsymbol{g_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{g_q}$ действительно линейно независимы.

Согласно теореме §13 гл. II размерность подпространства $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$ равна числу базисных векторов $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_l}, \boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_p}, \boldsymbol{g_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{g_q}$, но это число равно $(p + q - l)$. Значит, размерность суммы двух подпространств равна сумме их размерностей за вычетом размерности пересечения. ■

Следствие. Если в n-мерном пространстве $\boldsymbol{R_n}$ выделены два подпространства $\boldsymbol{R_p}$ и $\boldsymbol{R_q}$, размерности которых p и q в сумме превышают число n, то пересечение $\boldsymbol{R_p}$ и $\boldsymbol{R_q}$ имеет размерность не меньшую, чем $(p + q - n)$.

Рассмотрим фактор-пространства. Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{K}$ выделено подпространство $\boldsymbol{L}$. Элемент $x \in \boldsymbol{K}$ сравнимым с элементом $y \in \boldsymbol{K}$, точнее, сравнимым относительно $\boldsymbol{L}$, если $x - y \in \boldsymbol{L}$.

Очевидно, в этом случае и y сравним с x, так что отношение сравнения симметрично. Любой $x \in \boldsymbol{K}$ сравним сам с собою. Далее, если x сравним с y, а y сравним с z, то и x сравним с z, так как

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in \boldsymbol{L}.$$

Совокупность всех элементов $y \in \boldsymbol{K}$, сравнимых с данным элементом $x \in \boldsymbol{K}$, называется классом и обозначается через X. Класс X содержит сам элемент x, и любые два элемента $y \in \boldsymbol{K}$, z $\in \boldsymbol{K}$ сравнимы друг с другом. Если $u \notin X$, то u не сравним ни с одним элементом из класса X. Поэтому два класса X и Y или не имеют общих элементов, или полностью совпадают. Одним из классов является все подпространство $\boldsymbol{L}$, так как оно содержит нулевой элемент пространства $\boldsymbol{K}$. Этот класс обозначается через 0.

Все пространство $\boldsymbol{K}$ разбивается в совокупность непересекающихся классов X, Y, ... Такую совокупность классов обозначим через $\boldsymbol{K}/\mathbf{L}$. Введем в множестве $\boldsymbol{K}/\mathbf{L}$ линейные операции следующим образом. Пусть X и Y – классы, α и β – элементы поля $\boldsymbol{K}$. Определим класс $\alpha X + \beta Y$. Для этого выберем произвольно элементы $x \in X$ и $y \in Y$, найдем класс Z, который содержит элемент $z = \alpha x + \beta y$. Данный класс обозначим $\alpha X + \beta Y$. Проверим, что он определен однозначно. Если в классе X возьмем элемент x_1, а в классе Y – элемент y_1,то

$$\left(\alpha x_1 + \beta y_1\right) - (\alpha x + \beta y) = \alpha(x_1 - x) + \beta(y_1 - y)$$

лежит в подпространстве $\boldsymbol{L}$ вместе с $x_1 - x$ и $y_1 - y$. Значит, $\alpha x_1 + \beta y_1$ лежит в том же классе, что и $\alpha x + \beta y$.

Таким образом определили сложение классов X, Y и умножение их на числа $\alpha \in \boldsymbol{K}$. Покажем, что эти операции удовлетворяют аксиомам линейного пространства. Действительно, для элементов пространства $\boldsymbol{K}$ следует сразу выполнение этих же свойств для классов. Нулем пространства $\boldsymbol{K}/\mathbf{L}$ является класс 0, состоящий из всех элементов пространства $\mathbf{L}$. Противоположным к классу X является класс, состоящий из элементов, противоположных к элементам класса X. Таким образом, для совокупности классов выполнены аксиомы линейного пространства.

Определение. Построенное линейное пространство $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$ называется фактор-пространством пространства $\boldsymbol{K}$ по подпространству $\boldsymbol{L}$.

Теорема. Пусть $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K_n}$ есть n-мерное линейное пространство над полем $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L_l} \subset \boldsymbol{K}$ есть l-мерное подпространство в $\boldsymbol{K}$. Тогда фактор-пространство $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$ имеет размерность $(n - l)$.

Доказательство.

Выберем произвольно базис $\{\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}\}$ в подпространстве $\boldsymbol{L}$ и дополним его векторами $\boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_n}$ до базиса всего $\boldsymbol{K}$. Рассмотрим классы $X_{l+1} \ni \boldsymbol{f_{l+1}}$, …, $X_n \ni \boldsymbol{f_n}$. Покажем, что они образуют базис в пространстве $\boldsymbol{K/L}$. Для любого $x \in \boldsymbol{K}$ существует представление $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\alpha_k f_k}$, поэтому для класса $X \ni x$ существует представление $\boldsymbol{X} = \sum_{k=l+1}^{n} \boldsymbol{\alpha_k X_k}$.

Покажем, что классы $X_{l+1}, \ldots, X_n$ линейно независимы. Если бы имели при некоторых $\alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_n$ из $\boldsymbol{K}$ $\boldsymbol{\alpha_{l+1} X_{l+1}} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_n X_n} = \boldsymbol{0} \in \boldsymbol{K/L}$, то, в частности, выполнялось бы соотношение $\alpha_{l+1}\boldsymbol{f_{l+1}} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{f_n} = \boldsymbol{0} \in \boldsymbol{L}$.

Но так как $\boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_n}$ линейно независимы над $\boldsymbol{L}$, то $\alpha_{l+1} = \cdots = \alpha_n = 0$, что и требовалось доказать. Таким образом, $X_{l+1}, \cdots, X_n$ образуют базис в $\boldsymbol{K/L}$. Но тогда их число $(\mathrm{n} - \mathrm{l})$ есть размерность пространства $\boldsymbol{K/L}$. Теорема доказана. ■

Лекция 11

§24. Линейные оболочки

Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{L}$ дана система векторов $(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k})$.

Определение. Линейной оболочкой системы $(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ называется бесконечная (конечная) совокупность линейных комбинаций вида

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a_k},$$

где k – любое число.

Обозначается символом $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}, \cdots)$. Иногда говорят, что $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}, \cdots)$ – линейная оболочка, натянутая на векторы $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}$.

Теорема 1. Линейная оболочка любой системы векторов является линейным подпространством в пространстве $\boldsymbol{L}$.

Доказательство. Возьмем из линейной оболочки $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ произвольные векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{a_k} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}),$$

$$\boldsymbol{y} = \beta_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \beta_k \boldsymbol{a_k} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}).$$

Тогда

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{a_1} + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)\boldsymbol{a_k} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}).$$

Кроме того, для любого числа λ имеем

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\alpha_1 \lambda)\boldsymbol{a_1} + \cdots + (\alpha_k \lambda)\boldsymbol{a_k} \in \boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}). \blacksquare$$

Замечание. Линейная оболочка $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ может совпадать со всем пространством $\boldsymbol{L}$, например, если $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}$ – базис в $\boldsymbol{L}$.

Теорема 2. Если каждый вектор системы $(\boldsymbol{c_1}, \cdots, \boldsymbol{c_m})$ линейно выражается через векторы системы $(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$, то $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{c_1}, \cdots, \boldsymbol{c_m}) \subset \boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$.

Доказательство. Пусть $\mathrm{x} \in \mathbf{L}(c_1, \cdots, c_m)$, т. е. выражается через $(c_1, \cdots, c_m)$. Тогда, согласно свойству § 9 гл. II, вектор x выражается через $(a_1, \cdots, a_k)$. Следовательно, $\mathrm{x} \in \mathbf{L}(a_1, \cdots, a_k)$. Таким образом,

$$\boldsymbol{L}(c_1, \cdots, c_m) \subset \boldsymbol{L}(a_1, \cdots, a_k). \blacksquare$$

Следствие. Линейная оболочка любой подсистемы дачной системы векторов включается в линейную оболочку всей данной системы.

Теорема 3. Если система $(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ имеет ранг $r > 0$, то всякая ее линейно независимая подсистема, состоящая из r векторов, является базисом в линейной оболочке $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$.

Доказательство. Система $(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ ранга r, $r > 0$, имеет линейно независимую подсистему, состоящую из r векторов.

Для определенности предположим, что линейно независимы первые r векторов данной системы. Тогда, так как ранг системы $(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ равен r, каждый из векторов

$\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}$. Отсюда и по теореме 2

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_{r+1}}, \cdots, \boldsymbol{a_k}) \subset \mathbf{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}).$$

С другой стороны, по следствию из теоремы 2

$$\mathbf{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}) \subset \mathbf{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_{r+1}}, \cdots, \boldsymbol{a_k}).$$

Следовательно, $\mathbf{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_{r+1}}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ совпадает с $\mathbf{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r})$. Значит, каждый элемент х из $\mathbf{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ разлагается по $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}$. Из независимости векторов $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_r}$ следует, что они составляют базис в $\mathbf{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$. ■

Теорема 4. Если ранг системы $(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ равен r, то $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ является k-мерным подпространством.

Доказательство. Предположим, что $r > 0$. Тогда по предыдущей теореме в $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ имеется базис из r элементов. Отсюда, по теореме из § 13, и $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ имеет размерность, равную r. Предположим, что $r = 0$. В этом случае $\boldsymbol{a_1} = \cdots = \boldsymbol{a_k} = \mathbf{0}$. Но тогда $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k})$ включает только 0 и, следовательно, имеет размерность 0. ■

Замечание. В конечномерном пространстве всякое подпространство является линейной оболочкой некоторой системы элементов.

Примеры.

1. Линейная оболочка векторов $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \dots, \mathbf{e_n}$, образующих базис некоторого пространства $\boldsymbol{K}$, совпадает со всем пространством $\boldsymbol{K}$.

2. Линейная оболочка пары неколлинеарных векторов пространства $\mathbf{V_3}$ состоит из всех векторов, параллельных плоскости этих векторов.

3. Линейная оболочка системы функций $1, \mathrm{t}, \mathrm{t}^2, \dots, \mathrm{t}^\mathrm{k}$ пространства $\boldsymbol{K}(a,b)$ *(*$\boldsymbol{K}$ есть $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$*)* совпадает с совокупностью всех многочленов от t не выше k-й степени. Линейная оболочка бесконечной системы

функций $1, t, t^2, \ldots$ состоит из всех многочленов любой степени от переменного t с коэффициентами из поля $\boldsymbol{K}$.

§25. Морфизмы линейных пространств

Определение. Пусть каждому вектору $\mathbf{x}'$ линейного пространства $\boldsymbol{K}'$ по некоторому правилу A поставлен в соответствие вектор $\mathbf{x}''$ линейного пространства $\boldsymbol{K}''$**.** Правило A называется морфизмом или линейным оператором, если выполняются следующие соотношения:

1) $A(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}') = A(\boldsymbol{x}') + \omega(\boldsymbol{y}')$ для любых $\mathbf{x}'$**,** $\mathbf{y}'$ из $\boldsymbol{K}'$;

2) $A(\alpha\boldsymbol{x}') = \alpha A(\boldsymbol{x}')$ для любых $\mathbf{x}'$**,** $\mathbf{y}'$ и любого $\alpha \in \boldsymbol{K}$.

Если морфизм A отображает пространство $\boldsymbol{K}'$ на все пространство $\boldsymbol{K}''$**,** он называется эпиморфизмом.

Если морфизм A отображает пространство $\boldsymbol{K}'$ не обязательно на все $\boldsymbol{K}''$, но взаимно однозначно, так, что из $\mathbf{x}' \neq \mathbf{y}'$ следует $A(\boldsymbol{x}') \neq A(\boldsymbol{y}')$), то он называется мономорфизмом. Если морфизм A отображает пространство $\boldsymbol{K}'$ взаимно однозначно на все пространство $\boldsymbol{K}''$, т. е. является одновременно моно- и эпиморфизмом, то он называется изоморфизмом, а сами пространства $\boldsymbol{K}'$ и $\boldsymbol{K}''$ называются изоморфными или **K**-изоморфными.

Общепринятое обозначение морфизма:

$$A: \boldsymbol{K}' \to \boldsymbol{K}''.$$

Примеры.

1. Пусть L есть подпространство пространства $\boldsymbol{K}$. Отображение A, которое каждому вектору $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ ставит в соответствие этот же вектор x в пространстве $\boldsymbol{K}$, есть морфизм $\boldsymbol{L}$ в $\boldsymbol{K}$, и именно мономорфизм (причем, если $\boldsymbol{L} \neq \boldsymbol{K}$**,** не эпиморфизм). Этот морфизм A называется вложением $\boldsymbol{L}$ в $\boldsymbol{K}$.

Пусть $\boldsymbol{L}$ есть подпространство пространства $\boldsymbol{K}$, и $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$

– фактор-пространство пространства **K** по подпространству $\boldsymbol{L}$. Отображение A, которое каждому вектору $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$ ставит в соответствие класс $\boldsymbol{X} \subset \boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$, содержащий элемент x, есть морфизм $\boldsymbol{K}$ в $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$, и именно эпиморфизм (причем, если $\boldsymbol{L} \neq 0$, не мономорфизм). Такой морфизм A называется каноническим отображением **K** на $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$.

2. Пусть пространство $\boldsymbol{K}'$ n-мерно и обладает базисом $\{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}}', \dots, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}'\}$. В пространстве $\boldsymbol{K}''$ выберем произвольно векторы $\{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}}'', \dots, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}''\}$. Поставим в соответствие любому вектору $\boldsymbol{x}' = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}' \in \boldsymbol{K}'$ вектор

$$A(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}'' = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}''$$

с теми же коэффициентами ε_k, $(k = 1, \dots, n)$.

Покажем, что отображение $A(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}''$ есть морфизм пространства $\boldsymbol{K}'$ в пространство $\boldsymbol{K}''$.

Пусть в пространстве $\boldsymbol{K}'$ выбраны два вектора

$$\mathrm{x}' = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}' \text{ и } \mathrm{y}' = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}',$$

тогда

$$\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_k + \eta_k) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}'.$$

Согласно определению отображения A

$$A(\boldsymbol{x}') = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}'', A(\boldsymbol{y}') = \sum_{k=1}^{n} \eta_k \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}''.$$

Далее,

$$A(\boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}') = \sum_{k=1}^{n} (\varepsilon_k + \eta_k) \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}'' = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}'' + \sum_{k=1}^{n} \eta_k \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}'' = A(\boldsymbol{x}') + A(\boldsymbol{y}'),$$

так что условие 1) определения выполнено. Аналогично при любом $\alpha \in \mathbf{K}$

$$A(\alpha\boldsymbol{x}') = A\left(\alpha\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{k}}\right) = A\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha\varepsilon_k\boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{k}}\right) = \sum_{k=1}^{n}\alpha\varepsilon_k\boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{k}}$$
$$= \alpha\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{k}} = \alpha A(\boldsymbol{x}'),$$

так что выполнено и условие 2). Следовательно, $A(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}''$ есть морфизм $\boldsymbol{K}'$ в $\boldsymbol{K}''$, что и требовалось доказать. ■

Морфизм A, описанный в примере 2, является эпиморфизмом при условии возможности представления в форме $\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{k}}$ любого вектора $\mathbf{x}'' \in \mathbf{K}''$, или, что $\boldsymbol{K}''$ совпадает с линейной оболочкой векторов $\boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{n}}$.

Морфизм A, описанный в примере 2, является мономорфизмом при условии, что векторы $\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k\boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{k}}$, $\sum_{k=1}^{n}\eta_k\boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{k}}$ различающиеся хотя бы по одной паре координат (т. е. такие, что $\varepsilon_k \neq \eta_k$ хотя бы при одном значении k), были бы различными векторами пространства $\boldsymbol{K}''$. Но это равносильно линейной независимости векторов $\boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{n}}$. Следовательно, морфизм A тогда и только тогда является мономорфизмом, когда векторы $\boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{n}}$ линейно независимы.

<u>Следствие 1.</u> Морфизм A, описанный в примере 2, является изоморфизмом тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{n}}$ линейно независимы и их линейная оболочка совпадает со всем пространством $\boldsymbol{K}''$**.** Другими словами, морфизм A является изоморфизмом тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{n}}$ образуют базис пространства $\boldsymbol{K}''$.

Теорема. Любые два n-мерных пространства $\boldsymbol{K}'$ и $\boldsymbol{K}''$ над одним и тем же полем $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}$– изоморфны.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \boldsymbol{e}'_{\boldsymbol{n}}$ – базис в пространстве $\boldsymbol{K}'$ и $\boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{1}}, \ldots, \boldsymbol{e}''_{\boldsymbol{n}}$ – базис в пространстве $\boldsymbol{K}''$**.** С помощью этих систем векторов построим морфизм A, как указано в примере 2. В силу следствия он является изоморфизмом, что и требовалось доказать. ■

Следствие 2. Всякое n -мерное линейное пространство над полем $\mathbf{K}$ -изоморфно пространству $\mathbf{K_n}$. В частности, всякое n-мерное комплексное пространство C-изоморфно пространству $\mathbf{C_n}$. Всякое n-мерное вещественное пространство $\mathbf{R}$-изоморфно пространству $\mathbf{R_n}$.

Свойства моно- и эпиморфизмов.

1) Пусть имеется морфизм $A: \boldsymbol{K'} \to \boldsymbol{K''}$. Рассмотрим совокупность всех векторов $A(\boldsymbol{x'}) \in \boldsymbol{K''}$, когда x' пробегает все $\boldsymbol{K'}$. Эта совокупность есть подпространство $\boldsymbol{L''} \subset \boldsymbol{K''}$, которое называется областью значений морфизма A. Очевидно, что отображение A пространства $\boldsymbol{K'}$ в $\boldsymbol{L''}$ является эпиморфизмом. Если морфизм $A: \boldsymbol{K'} \to \boldsymbol{K''}$ был мономорфизмом, то морфизм $A: \boldsymbol{K'} \to \boldsymbol{L''}$ есть изоморфизм.

2) Пусть имеется морфизм $A: \boldsymbol{K'} \to \boldsymbol{K''}$. Рассмотрим совокупность $\boldsymbol{L'}$ всех векторов $\boldsymbol{x'} \in \boldsymbol{K'}$, для которых $A\,(\boldsymbol{x'}) = 0$. Совокупность $\boldsymbol{L'}$ есть подпространство в пространстве $\boldsymbol{K'}$, которое называется ядром, или нуль-многообразием морфизма A.

Лемма. Любой морфизм $A: \boldsymbol{K'} \to \boldsymbol{K''}$ порождает мономорфизм $\Omega: \boldsymbol{K'}/\boldsymbol{L'} \to \boldsymbol{K''}$. Если морфизм A был эпиморфизмом, то и мономорфизм Ω является эпиморфизмом, эпиморфизм $A: \boldsymbol{K'} \to \boldsymbol{K''}$ порождает изоморфизм $\Omega: \boldsymbol{K'}/\boldsymbol{L'} \to \boldsymbol{K''}$.

Доказательство. Построим фактор-пространство $\boldsymbol{K'}/\boldsymbol{L'}$. Все элементы $\mathbf{x'}$, лежащие в одном и том же классе $\boldsymbol{X'} \in \boldsymbol{K'}/\boldsymbol{L'}$ переводятся морфизмом A в один и тот же элемент пространства $\boldsymbol{K''}$. Действительно, для двух таких элементов $\mathbf{x'}$ и $\mathbf{y'}$ имеем $\mathbf{x'} - \mathbf{y'} = \mathbf{z'} \in \boldsymbol{L'}$, откуда $\mathrm{A}(\mathbf{x'}) - A(\boldsymbol{y'}) = A(\boldsymbol{z'}) = 0$, $A(\boldsymbol{x'}) = A(\boldsymbol{y'})$. Поставим в соответствие каждому классу $\boldsymbol{X'} \in \boldsymbol{K'}/\boldsymbol{L'}$ элемент $\mathbf{x''} = A\left(\boldsymbol{x'}\right) \in \boldsymbol{K''}$, где $\mathbf{x'} \in \boldsymbol{X'}$ – любой элемент, а $\mathbf{x''}$ определен однозначно. Положим $x'' = \Omega(\mathbf{X}')$. Отображение Ω, как легко видеть, есть морфизм пространства $\mathbf{K}'/\boldsymbol{L}'$ в $\boldsymbol{K}''$, который является мономорфизмом, так как из $\mathbf{X}' \neq \mathbf{Y}'$, $\mathbf{x}' \in \mathbf{X}'$, $\mathbf{y}' \in \mathbf{Y}'$ следует

$$\Omega(\mathbf{X}') - \Omega(\mathbf{Y}') = A(\boldsymbol{x}') - A(\boldsymbol{y}') = A(\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y}') \neq 0.$$

Таким образом, любой морфизм $A: \boldsymbol{K}' \to \boldsymbol{K}''$ порождает мономорфизм $\Omega: \boldsymbol{K}'/\boldsymbol{L}' \to \boldsymbol{K}''$. Если морфизм A был эпиморфизмом, то, очевидно, и мономорфизм Ω является эпиморфизмом, так что эпиморфизм $A: \boldsymbol{K}' \to \boldsymbol{K}''$ порождает изоморфизм $\Omega: \boldsymbol{K}'/\boldsymbol{L}' \to \boldsymbol{K}''$. ■

ГЛАВА III. ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ

Лекция 12

§26. Линейные преобразования переменных

Пусть $x = (x_1, \cdots, x_n)$ – упорядоченный набор независимых переменных. Пусть дана $m \times n$ матрица:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Напишем соотношения

$$\begin{cases} y_1 = \sum_1^n b_{1k}\, x_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots.., \\ y_{\mathrm{m}} = \sum_1^n b_{mk}\, x_{k,} \end{cases} \tag{1}$$

где $y_1, \dots, y_{\mathrm{m}}$ обозначены численные значения правых частей (1), которые изменяются в зависимости от $x_1, \cdots, x_n$.

Система соотношений (1) является линейным преобразованием переменных $x_1, \cdots, x_n$ в $y_1, \dots, y_m$.

Числа $\mathrm{b_{ik}}$ называются коэффициентами линейного преобразования (1), а составленная из них матрица B называется матрицей этого линейного преобразования, которая, будучи заданной, определяет линейное преобразование (1).

Замечание 1. Упорядоченный набор переменных $x_1, \cdots, x_n$ можно было бы рассматривать как переменную точку координатного пространства. Точно так же можно геометрически истолковать $y_1, \dots, y_m$. Однако представляется целесообразным определять линейное преобразование переменных как чисто арифметическое (или алгебраическое) понятие, не связывая с ним заранее каких-либо геометрических представлений.

Пусть дана $p \times m$ –матрица

$$A = (a_{ij})_{pm} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & \cdots & a_{pm} \end{pmatrix}.$$

Напишем соответствующее ей линейное преобразование переменных в виде

$$\begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1m}y_m, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z_p = a_{p1}y_1 + \cdots + a_{pm}y_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} z_1 = \sum_1^m a_{1i}\, y_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z_p = \sum_1^m a_{pi}\, y_i. \end{cases} \tag{2'}$$

Независимые переменные обозначены через $y_1, \dots, y_m$. Вместе с тем можно считать, что $y_1, \dots, y_m$ в правых частях (2) те же величины, которые определяются равенствами (1) по переменным $x_1, \dots, x_n$. В таком случае $z_1, \dots, z_p$ становятся функциями от независимых переменных $x_1, \dots, x_n$, а $y_1, \dots, y_m$ получают роль посредников.

Если переменные $y_1, \dots, y_m$ исключить из равенств (1) и (2), то $z_1, \dots, z_p$ будут выражены через $x_1, \dots, x_n$ явно. Чтобы провести эту операцию, нужно в правых частях (2) заменить y_i их выражениями (1) и выразить z через x.

Приведя подобные преобразования и обозначив полученные коэффициенты $c_{11}, c_{12}, \dots$, получим

$$\begin{cases} z_1 = c_{11}y_1 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z_p = c_{p1}y_1 + \cdots + c_{pn}y_n, \end{cases}, \tag{3}$$

$$\begin{cases} z_1 = \sum_1^n c_{1k}\, x_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z_p = \sum_1^n c_{pk}\, x_k. \end{cases}. \tag{3'}$$

Линейное преобразование переменных (3) называется преобразованием (1) и (2). Его матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{p1} & \cdots & c_{pn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Линейное преобразование переменных (3), полученное в результате исключения $y_1, \dots, y_m$ из (2) и (1), называется произведением линейного преобразования переменных (2) на линейное преобразование переменных (1). При этом $p{\times}n$-матрица С называется произведением $p \times m$ – матрицы А на $m \times n$ -матрицу В.

$$C = AB.$$

Найдем формулу, которая выражает любой элемент матрицы С через элементы матриц А и В. Для этого нужно фактически произвести исключение величин $y_1, \dots, y_m$ из соотношений (1) и (2).

Теперь найдем выражение для C_{ij} через элементы матриц А и В:

$$z_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{jk}\, \mathrm{x}_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{jk}\right) x_k. \quad (4)$$

С другой стороны

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}\, x_k. \quad (5)$$

Из (4) и (5) находим

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{jk}. \quad (6)$$

Если подробно, то

$$(1) \qquad \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_i a_{ij}\right) = \sum_{ij} a_{ij} = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}\right).$$

$$(2) \qquad \sum_i \sum_j a_{ij} b_i = \sum_i b_i \sum_j a_{ij}.$$

Следовательно,

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{im}b_{mk} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, b_{jk}. \quad (7)$$

Выражение (7) называется произведением i-ой строки матрицы А на k-й столбец матрицы В (по аналогии с известной из аналитической геометрии формулой, выражающей скалярное произведение векторов через их координаты).

Число столбцов матрицы А должно быть равно числу строк матрицы B, иначе произведение AB не определено. Число строк и столбцов произведения можно выразить по схеме

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}) = (\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{m})\cdot(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}).$$

Два произведения AB и BA одновременно определены тогда и только тогда, когда A и B квадратные матрицы одинакового порядка.

<u>Замечание 2.</u> Произведение матриц можно было бы определить непосредственно с помощью формулы (7), не учитывая ее происхождения из линейных преобразований.

<u>Замечание 3.</u> Умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно, в чем можно убедиться на примерах. Пусть

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечаем, что AB≠BA.

Наборы переменных x_i, y_j, z_k запишем в виде матриц-столбцов:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_p \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы преобразования переменных (1), (2) и (3) можно записать в виде матричных равенств

$$Y = BX;\ Z = AY;\ Z = CX,$$

где $C = AB$.

Перечислим ряд тождеств, которые выражают свойства умножения матриц:

1) $A(BC) = (AB)C = ABC$ (ассоциативность);

2) $(\alpha\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}(\alpha\mathrm{B}) = \alpha\mathrm{AB}$;

3) $A(B + C) = AB + AC$; $(B + C)A = BA + CA$.

Здесь α – произвольное число, A, B, C – произвольные матрицы, у которых число столбцов и строк обеспечивает возможность выполнения указанных выше действий.

Доказательство тождеств 1), 2), 3) очевидно.

Введем еще операцию транспонирования матрицы. Эту операцию будем обозначать $'$. A$'$ – матрица, полученная из матрицы A заменой ее строк соответствующими (по номеру) столбцами. Имеют место очевидные тождества

4) $(A+B)' = A' + B'$;

5) $(\alpha A)' = \alpha A'$;

6) $(AB)' = B'A'$.

В справедливости последнего тождества можно убедиться, если принять во внимание то, что произведение A на B строится по схеме: строка A на столбец B: $\boxed{A} \cdot \boxed{B} = \boxed{B'} \cdot \boxed{A'}$.

§27. Квадратные матрицы и невырожденные преобразования

Рассмотрим более подробно линейные преобразования, при которых сохраняется число переменных. Таким преобразованиям соответствуют квадратные матрицы.

Напомним, что определителем или детерминантом $n{\times}n$-матрицы $A = \left(a_{ij}\right) = (a_{ij})_{nn}$ называется величина

$$detA = \sum\nolimits_{i_1,\dots,i_n} \delta_{i_1 i_2 \dots i_n} a_{i_1 1} \dots a_{i_n n}, \qquad (8)$$

где

$$\delta_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} 0, \text{если среди чисел } i_1,\dots,i_n \text{ есть одинаковые;} \\ +1, \text{если перестановка } (i_1,\dots,i_n) \text{ четная;} \\ -1, \text{если перестановка } (i_1,\dots,i_n) \text{ нечетная.} \end{cases}$$

$$det\,A = \sum (-1)^{\delta(i_1,\cdots,i_n)} \cdot a_{i_1 1} \cdots a_{i_n n} = (-1)^{\delta(j_1,\cdots,j_n)} \cdot det\,A$$
$$= \sum (-1)^{\delta(i_1,\cdots,i_n)} \cdot a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n}.$$

Индексы $i_1,\dots,i_n$ принимают значения $1, 2, \dots$, n. В формуле (8) вторые индексы элементов матрицы A взяты в натуральном порядке. Для иного их расположения, а также в случае их повторений имеем

$$\sum_{i_1,\cdots,i_n} \delta_{i_1\ldots i_n} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n} = \delta_{j_1\ldots j_n} det\, A. \qquad (9)$$

Теорема 1 (о произведение определителей). Определитель произведения матриц равен произведению их определителей, то есть

$$det\, AB = detA \cdot detB.$$

Доказательство. Используя (1), (2) и формулу (6) предыдущего параграфа, получаем

$$detAB = detC = \sum_{i_1\cdots i_n} (-1)^{\delta(i_1\cdots i_n)} \cdot c_{i_1 1} \cdots c_{i_n n} =$$

$$= \sum_{i_1\cdots i_n} (-1)^{\delta(i)} \left(\sum_{j_1} a_{i_1 j_1} b_{j_1 1} \right) \cdots \left(\sum_{j_n} a_{i_n j_n} b_{j_n n} \right) =$$

$$= \sum_{j_1\cdots j_n} \left(\sum_{i_1\cdots i_n} (-1)^{\delta(i_1\cdots i_n)} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n} \right) \cdot b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n} =$$

$$= \sum_{j_1\cdots j_n} (detA)\,(-1)^{\delta(j_1\cdots j_n)} \cdot b_{j_1 1} \cdots b_{j_n n} =$$

$$= detA \cdot detB,$$

что и требовалось доказать. ■

Квадратная матрица A называется невырожденной или неособенной, если ее определитель не равен нулю: $detA \neq 0$. Линейное преобразование переменных $x_1, \ldots, x_n$ в переменные $y_1, \ldots, y_n$ называется невырожденным или неособенным, если оно имеет невырожденную квадратную матрицу.

Из теоремы 1 следует, что произведение невырожденных матриц есть невырожденная матрица. Произведение невырожденных линейных преобразований переменных есть невырожденное линейное преобразование переменных.

Невырожденная $n \times m$-матрица A имеет ранг $\mathrm{r} = \mathrm{n}$, так как определитель такой матрицы является ее базисным минором. Вырожденная матрица имеет ранг $\mathrm{r} < \mathrm{n}$, так как определитель вырожденной матрицы равен нулю и, следовательно, ее базисные миноры имеют порядок, меньший n (либо их нет, но тогда $\mathrm{r} = 0$). В понижении ранга матрицы (сравнительно со стандартным случаем $\mathrm{r} = \mathrm{n}$) и заключается ее вырождение.

Пусть дано невырожденное линейное преобразование переменных с матрицей $A = (a_{ij})$

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{cases} \quad (10)$$

Введем обозначение

$$\Delta = detA.$$

По условию $\Delta \neq 0$. В таком случае система (10) с произвольно данными $y_1, \dots, y_n$ и неизвестными $x_1, \dots, x_n$ имеет единственное решение. Для его нахождения удобно применить формулы Крамера. В соответствии с этими формулами x_k выражается в виде дроби, знаменатель которой есть Δ, а числитель получается заменой j-го столбца Δ столбцом из величин $y_1, \dots, y_n$. Развертывая определитель, стоящий в числителе такой дроби, получим

$$x = \frac{1}{\Delta}(A_{1k}y_1 + \cdots + A_{nk}y_n),$$

где через $\mathrm{A}_{1\mathrm{k}}, \dots, \mathrm{A}_{\mathrm{nk}}$ обозначены алгебраические дополнения элементов j-го столбца определителя матрицы А. Таким образом,

$$\begin{cases} x_1 = \frac{A_{11}}{\Delta}y_1 + \cdots + \frac{A_{n1}}{\Delta}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = \frac{A_{1n}}{\Delta}y_1 + \cdots + \frac{A_{nn}}{\Delta}y_n. \end{cases} \quad (11)$$

Равенства (11), выражающие $x_1, \dots, x_n$ через $y_1, \dots, y_n$ из формулы (10), представляют собой линейное преобразование переменных. Оно называется обратным для линейного преобразования (10), где $y_1, \dots, y_n$

выражаются через $x_1, \ldots, x_n$. Матрица преобразования (11) называется обратной для (невырожденной) матрицы A преобразования (10). Ее обозначают через A^{-1}. Таким образом, если

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \Delta = detA \neq 0,$$

то

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \ldots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Следует отметить, что в матрице A^{-1} по строкам расположены алгебраические дополнения тех элементов матрицы A, которые в матрице A расположены в соответствующих (по номеру) столбцах.

Так как равенства (11) выражают решение системы (10) относительно неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, то в результате подстановки выражений (11) в правые части (10) получим

$$\begin{cases} y_1 = & y_1, \\ y_2 = & y_2, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots, \\ y_n = & y_n. \end{cases} \tag{12}$$

Такое преобразование называется тождественным. Его матрица обозначается буквой E и называется единичной:

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \ldots & \ldots & \cdots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как произведение преобразования (10) на обратное ему преобразование (11) есть тождественное преобразование (12), то, соответственно, произведение матрицы A на обратную ей матрицу A^{-1} есть единичная матрица E*:*

$$\mathrm{AA}^{-1} = E. \tag{13}$$

На основании вышесказанного имеем из (13)

$$(det\,A) \cdot (det\,A^{-1}) = 1.$$

Отсюда $det\,A \neq 0$, и матрица A^{-1} невырождена. В таком случае решение системы (11) относительно $y_1, \dots, y_n$ единственно и, следовательно, совпадает с выражениями (10). Поэтому подстановка выражений (10) в правые части (11) должна дать тождественное преобразование

$$\begin{cases} x_1 = & x_1, \\ x_2 = & x_2, \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots, \\ x_n = & x_n. \end{cases}$$

Одновременно получаем $\mathrm{AA}^{-1} = E$.

Итак, каждое невырожденное линейное преобразование переменных – $x_1, \dots, x_n$ в $y_1, \dots, y_n$ имеет единственное обратное линейное преобразование переменных $y_1, \dots, y_n$ в $x_1, \dots, x_n$. Оно также невырождено, обратным ему является исходное преобразование. Каждая невырожденная матрица имеет единственную обратную. Она также невырождена, обратная ей есть исходная матрица.

Понятия обратного преобразования и обратной матрицы можно определять несколько иным способом. Именно, пусть даны два линейных преобразования переменных, которые запишем сокращенно:

$$y_i = \sum a_{ij}\, x_j \tag{14}$$

с $n\times n$-матрицей $A = \left(a_{ij}\right)$ и

$$x_j = \sum b_{jk}\, z_k \tag{15}$$

с $n\times n$-матрицей $B = \left(b_{jk}\right)$. Тогда преобразование (15) называют преобразованием, обратным преобразованию (14), если произведение преобразования (14) на преобразование (15) есть тождественное преобразование

$$y_i = z_i \ (i = 1, \dots, n). \tag{16}$$

Соответственно матрицу B можно назвать обратной матрицей для A, если

$$AB = E. \tag{17}$$

Невырожденность преобразования (14) и матрицы A неизбежно следует из (17), так как $(det\ A) \cdot (det\ B) = 1$, и поэтому $det\ A \neq 0$. Но при условии $det\ A \neq 0$ система (14) с неизвестными $x_1, \dots, x_n$ и известными $y_1, \dots, y_n$ имеет единственное решение. Следовательно, выражения (15) с учетом (16), т. е. с учетом, что $z_k = y_k$, должны совпасть с выражениями (11). Тем самым возвращаемся к нашему первоначальному определению обратного преобразования и обратной матрицы.

Лемма. Если A и B невырождены, $|A| \neq 0$ $|B| \neq 0$, то имеет место тождество $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$.

Другими словами, обратная матрица произведения есть произведение двух обратных матриц.

Доказательство. Пусть $B^{-1}A^{-1} = C$.

Тогда

$$(AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = (AE)A^{-1} = AA^{-1} = E.$$

Следовательно, $C = (AB)^{-1}$ согласно (17), что и требовалось доказать. ■

Можно сказать, что в умножении матриц E играет такую же роль, какую единица играет в умножении чисел.

Замечание. Легко доказать, что другой матрицы с таким же свойством нет. Если для какой-нибудь одной невырожденной матрицы A соблюдается равенство $AE_1 = A$, то $E_1 = E$. В самом деле,

$$E_1 = E_1E = \left(A^{-1}A\right)E_1 = A^{-1}(AE_1) = A^{-1}A = E.$$

Вместе с произведением матриц определены натуральные степени матрицы: $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$ и т. д. Таким образом понятие многочлена от матрицы определено следующим образом:

$$\mathrm{P(A)} = \alpha_0 \mathrm{A}^n + \alpha_1 \mathrm{A}^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\mathrm{A} + \alpha_n \mathrm{E}, \qquad (18)$$

где $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ – числа, а P(A) есть $n \times n$-матрица.

Принято считать, что любая $n \times n$-матрица A в нулевой степени равна единичной $n \times n$-матрице E:

$$\mathrm{A}^0 = \mathrm{E}.$$

Поэтому слагаемое α_nE в выражении (18) играет роль свободного члена.

Определены степени A^n и, следовательно, многочлены от матрицы $P(A) = \sum a_n A^n, \quad A^0 \stackrel{\text{def}}{=} E$.

<u>**Пример**</u>. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}$$

и построим вспомогательную матрицу

$$(A, E) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования со строками этой матрицы постараемся производить таким образом, чтобы в результате на месте матрицы A оказалась матрица E; тогда матрица, которая будет расположена на месте первоначальной матрицы E, и будет искомой матрицей A^{-1}. Пояснения к этому утверждению будут сделаны в конце этого примера.

Итак, приступим к элементарным преобразованиям.

$$(A,E)=\begin{pmatrix}3&-3&-5&8&1&0&0&0\\-3&2&4&-6&0&1&0&0\\2&-5&-7&5&0&0&1&0\\-4&3&5&-6&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}3&-3&-5&8&1&0&0&0\\0&-1&-1&2&1&1&0&0\\2&-5&-7&5&0&0&1&0\\0&-7&-9&4&0&0&2&1\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&2&3&1&0&-1&0\\0&-1&-1&2&1&1&0&0\\2&-5&-7&5&0&0&1&0\\0&-7&-9&4&0&0&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&7&3&2&-1&0\\0&-1&-1&2&1&1&0&0\\2&-5&-7&5&0&0&1&0\\0&-7&-9&4&0&0&2&1\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&7&3&2&-1&0\\0&-1&-1&2&1&1&0&0\\0&-5&-7&-9&-6&-4&3&0\\0&-7&-9&4&0&0&2&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&7&3&2&-1&0\\0&-1&-1&2&1&1&0&0\\0&0&-2&-19&-11&-9&3&0\\0&0&-2&-10&-7&-7&2&1\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&7&3&2&-1&0\\0&-1&-1&2&1&1&0&0\\0&0&-2&-19&-11&-9&3&0\\0&0&0&9&4&2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&0&0&7&3&2&-1&0\\0&-1&-1&2&1&1&0&0\\0&0&-2&-19&-11&-9&3&0\\0&0&0&1&\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&\frac{-1}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}\to$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-7}{9} \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-2}{9} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & \frac{-23}{9} & \frac{-43}{9} & \frac{8}{9} & \frac{19}{9} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-7}{9} \\ 0 & -1 & -1 & 0 & \frac{1}{9} & \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{23}{18} & \frac{43}{18} & \frac{-8}{18} & \frac{-19}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-7}{9} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{25}{18} & \frac{53}{18} & \frac{-4}{18} & \frac{-23}{18} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{23}{18} & \frac{43}{18} & \frac{-8}{18} & \frac{-19}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-25}{18} & \frac{-53}{18} & \frac{4}{18} & \frac{23}{18} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{23}{18} & \frac{43}{18} & \frac{-8}{18} & \frac{-19}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Искомая матрица A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -4 & -14 \\ -25 & -53 & 4 & 23 \\ 23 & 43 & -8 & -19 \\ 8 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверим:

$$AA^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -4 & -14 \\ -25 & -53 & 4 & 23 \\ 23 & 43 & -8 & -19 \\ 8 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = E$$

Элементарные преобразования над строками матрицы (A, E) эквивалентны умножению этой матрицы слева на «матрицы элементарных преобразований». Пусть с помощью k элементарных преобразований достигаем желаемого результата. То есть, в результате умножения слева матрицы (A, E) сначала на матрицу C_1 первого элементарного преобразования, затем на втором шаге умножения полученного произведения на матрицу C_2 второго элементарного преобразования и т.д. на k-ом шаге умножения полученного произведения на матрицу C_k k-ого элементарного преобразования мы получаем желаемый вид матрицы $(A, E) \to (E, C)$. То есть, $C_k\big(C_{k-1} \dots \big(C_1(A, B)\big) \dots\big) = (E, C)$. Здесь $C = C_k C_{k-1} \dots C_1$. В силу ассоциативности умножения матриц предыдущее равенство можно записать как $C(A, E) = (E, C)$. Учитывая, что в произведении матриц матрица первого сомножителя последовательно умножается на все столбцы матрицы второго сомножителя, получим, что

$$C(A, E) = (CA, CE) = (E, C).$$

Откуда $CA = E$ и $CE = C$. Из первого равенства как раз и следует, что $C = A^{-1}$.

Лекция 13

§28. Преобразование координат вектора при изменении базиса

Для замены базиса новым, выведем формулы, по которым преобразуются координаты произвольного вектора при переходе к новому базису.

Пусть $\boldsymbol{L_n}$ – линейное n-мерное пространство, где $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$ – его базис. Пусть $\{\mathrm{e}_1^{'}, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}^{'}\}$ – новый базис в $\boldsymbol{L_n}$. Разложим каждый из векторов $\{\mathrm{e}_1^{'}, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}^{'}\}$ по старому базису, получим

$$\begin{cases} \boldsymbol{e_1^{'}} = P_{11}\boldsymbol{e}_1 + P_{12}\boldsymbol{e_2} + \dots + P_{1n}\boldsymbol{e_n}, \\ \boldsymbol{e_2^{'}} = P_{21}\boldsymbol{e_1} + P_{22}\boldsymbol{e_2} + \dots + P_{2n}\boldsymbol{e_n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \boldsymbol{e_n^{'}} = P_{n1}\boldsymbol{e_1} + P_{n2}\boldsymbol{e_2} + \dots + P_{nn}\boldsymbol{e_n}. \end{cases} \tag{19}$$

Коэффициенты этих разложений составляют квадратную $n \times n$- матрицу

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nn} \end{pmatrix}.$$

Строка матрицы P с номером i образована координатами вектора $\mathrm{e}_\mathrm{i}^{'}$ в первоначальном базисе. Так как новые базисные векторы $\{\mathrm{e}_1^{'}, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}^{'}\}$ независимы, то матрица Р невырождена, т. е.

$$detP \neq 0. \tag{20}$$

С другой стороны, если произвольно взять матрицу P при условии (20), то векторы $\mathrm{e}_1^{'}, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}^{'}$ определяемые равенствами (1), будут независимы и составят базис. Таким образом, переход к любому новому базису определяется заданием матрицы P при единственном условии ее невырожденности.

Пусть $\boldsymbol{x}$ – произвольный вектор из $\mathbf{L_n}$. Разложим его по старому и по новому базису:

$$\boldsymbol{x} = \sum_j x_j \boldsymbol{e_j},\ x = \sum_{\boldsymbol{i}} \mathrm{x}'_{\mathrm{i}} \mathrm{e}'_{\mathrm{i}}.$$

Запишем формулы (1) в виде

$$\mathrm{e}'_{\mathrm{i}} = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \boldsymbol{e_j} \quad i = 1, \dots, n. \tag{21}$$

Отсюда имеем

$$\boldsymbol{x} = \sum_i \mathrm{x}'_{\mathrm{i}} \left(\sum_j P_{ij} \boldsymbol{e_j}\right) = \sum_j \left(\sum_i P_{ij} \boldsymbol{x_i}\right) \boldsymbol{e_j}.$$

Сравнивая это разложение с (1), найдем

$$\boldsymbol{x_j} = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} \mathrm{x}'_{\mathrm{i}},\ j = 1, \dots, n, \tag{22}$$

или подробно

$$\begin{cases} \boldsymbol{x_1} = P_{11}\mathrm{x}'_1 + P_{21}\mathrm{x}'_2 + \cdots + P_{n1}\mathrm{x}'_{\mathrm{n}}, \\ \boldsymbol{x_2} = P_{21}\mathrm{x}'_1 + P_{22}\mathrm{x}'_2 + \cdots + P_{n2}\mathrm{x}'_{\mathrm{n}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \boldsymbol{x_n} = P_{1n}\mathrm{x}'_1 + P_{2n}\mathrm{x}'_2 + \cdots + P_{nn}\mathrm{x}'_{\mathrm{n}}. \end{cases} \tag{23}$$

Формулы (23) выражают старые координаты $x_1, \dots, \mathrm{x_n}$ вектора **x** через его новые координаты $\mathrm{x}'_1, \dots, \mathrm{x}'_{\mathrm{n}}$ и представляют собой линейное преобразование переменных $\mathrm{x}'_1, \dots, \mathrm{x}'_{\mathrm{n}}$ в переменные $x_1, \dots, \mathrm{x_n}$. Матрица этого преобразования есть $\mathrm{P^T}$, т. е. получается транспонированием матрицы Р. Поэтому, обозначая через X и X′ матрицы-столбцы, состоящие из старых и новых координат вектора x**,** можем записать формулы 5) в виде матричного равенства

$$X = P^T X'. \tag{23a}$$

Преобразование (23) невырождено, так как

$$det\ P^T = det\ P \neq 0.$$

Следовательно, любому изменению базиса соответствует невырожденное линейное преобразование координат каждого вектора. Новые координаты вектора выражаются через его старые координаты с помощью линейного преобразования, обратного преобразованию (23).

Запишем его в виде

$$\begin{cases} x'_1 = Q_{11}x_1 + Q_{12}x_2 + \cdots + Q_{1n}x_n, \\ x'_2 = Q_{21}x_1 + Q_{22}x_2 + \cdots + Q_{2n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x'_n = Q_{n1}x_1 + Q_{n2}x_2 + \cdots + Q_{nn}x_n. \end{cases} \tag{24}$$

Или сокращенно

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} Q_{ij}x_j,\ i = 1, \dots, n. \tag{25}$$

Матрица преобразования (24), которую обозначим через Q, обратна матрице P^T:

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_{n1} & \cdots & Q_{nn} \end{pmatrix} = (P^T)^{-1}. \tag{26}$$

Заметим, что каждый из элементов матрицы Q равен алгебраическому дополнению элемента матрицы P с теми же номерами строки и столбца, поделенному на det P. Аналогично для (23а) можно написать, что

$$X' = QX. \tag{25а}$$

Равенство (26), связывающее матрицы P и Q, можно переписать двумя другими эквивалентными способами, а именно:

$$P^T \cdot Q = E,\ QP^T = E. \tag{27}$$

В свою очередь для дальнейшего использования полезно равенства (27) переписать в другой форме, используя для обозначения элементов единичной матрицы E так называемый символ Кронекера δ_{ij}. По определению

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{если } i \neq j, \\ 1, \text{если } i = j. \end{cases}$$

Отсюда два матричных равенства (27) заменяются соответственно двумя системами числовых равенств:

$$\sum_l P_{li}Q_{lj} = \delta_{ij},\ \sum_i Q_{ki}P_{li} = \delta_{kl}. \tag{28}$$

В первом из них i-я строка матрицы P^T умножается на j-й столбец матрицы Q, а во втором k-я строка матрицы Q умножается на j-й столбец матрицы P^T.

В заключении заметим, что всякое невырожденное линейное преобразование переменных $x_1, \dots, \mathrm{x_n}$ в переменные $\mathrm{x}_1^{'}, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}^{'}$ можно рассматривать как преобразование координат векторов в n-мерном линейном пространстве. В самом деле, если дано преобразование (25), то знаем матрицу Q (det Q $\neq 0$). Откуда найдем $P^T = Q^{-1}$ и $\mathrm{P} = (P^T)^\mathrm{T}$. Зная матрицу P, получим соответствующий базис $\{\mathrm{e}_1^{'}, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}^{'}\}$ по формулам (19).

<u>Пример.</u> Рассмотрим пример построения матрицы перехода от одной системы координат к другой в векторном пространстве. Пусть задано векторное пространство $\boldsymbol{V}$ над полем $\boldsymbol{K}$, и в нем заданы два базиса: базис $e_1, e_2, \dots, e_n$ и базис $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$. Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ и его разложения по базисам, т.е. представления $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ и $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j$. Коэффициенты x_i и x'_j называются координатами вектора $\boldsymbol{x}$ в разложениях по базисам $e_1, e_2, \dots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ соответственно. Столбцы X и X', построенные соответственно из координат x_i и x'_j вектора $\boldsymbol{x}$ называются координатными столбцами этого вектора. Покажем, как связаны между собой координаты одного и того же вектора в разных базисах. Для этого разложим вектора базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, т.е. рассмотрим суммы $e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$, где $j = 1,2, \dots, n$. Затем подставим эти суммы в разложения вектора $\boldsymbol{x}$ и приравняем последние суммы между собой, т.е. положим $\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{j=1}^n x'_j (\sum_{i=1}^n p_{ij} e_i)$. Проделывая необходимые действия и меняя порядок суммирования в двойной сумме, получим: $\sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n p_{ij} x'_j) e_i$. Поскольку два вектора равны, когда равны их соответствующие координаты, то из последнего равенства получаем n равенств:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j,\ i = 1,2,\dots,n.$$

Эти n равенств записываются в виде одного матричного равенства $X = PX'$. Матрица P строится очевидным образом – её j-ый столбец равен координатному столбцу базисного вектора e'_j в разложении последнего по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$. Рассмотрим теперь конкретное векторное пространство $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}^4$ пространство четырехмерных вещественных столбцов. Показать, что конкретные столбцы e_1, e_2, e_3, e_4 и столбцы e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 образуют два различных базиса этого пространства и найти матрицу перехода P от второй системы координат к первой.

Пусть столбцы первого и второго базисов заданы как столбцы матриц A и B соответственно, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -8 & -6 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для решения поставленной задачи нужно проверить, что $|A| \neq 0$ и $|B| \neq 0$. Затем каждый столбец B_i матрицы B разложить по столбцам матрицы A, т.е. решить системы уравнений $AP_i = B_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$. Столбцы неизвестных P_i и будут столбцами искомой матрицы P. Для реализации указанной схемы решения составим матрицу, построенную из столбцов A и B (т.е. матрицу (A, B)) и с помощью элементарных преобразований строк этой матрицы (метод Гаусса) постараемся получить на месте матрицы A единичную матрицу E. Если этого сделать не удастся, то $|A| = 0$ (столбцы матрицы A линейно зависимы). Если удастся получить на указанном месте единичную матрицу, то на месте матрицы B будет находиться искомая матрица

$P = A^{-1}B$ в том и только в том случае если её определитель будет отличен от нуля.

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 10 & -8 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & -4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & -9 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 7 & -14 & 15 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 & -19 & 16 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 7 & -14 & 15 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 & -19 & 16 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -8 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{-8}{2} & \frac{20}{2} & \frac{-16}{2} & \frac{-12}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{-14}{2} & \frac{15}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{-19}{2} & \frac{16}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-8}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix} \to$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{-21}{2} & \frac{18}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{-14}{2} & \frac{15}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{-19}{2} & \frac{16}{2} & \frac{11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-8}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{-21}{2} & \frac{18}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{2} & \frac{14}{2} & \frac{-15}{2} & \frac{-11}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{2} & \frac{19}{2} & \frac{-16}{2} & \frac{-11}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{8}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-9}{2} \end{pmatrix}$$

Вначале первая строка матрицы (A, B) вычитается из всех остальных, затем продолжение метода Гаусса с «обратным ходом».

Искомая матрица P будет следующей:

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 8 & -21 & 18 & 19 \\ -7 & 14 & -15 & -11 \\ -8 & 19 & -16 & -11 \\ -1 & 8 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

Поскольку $|A| = |B| = -8$ (проверяется непосредственно, коме того, для матрицы A этот результат непосредственно виден в процессе преобразования матрицы (A, B)), то $|P| = |A^{-1}B| = |A^{-1}|\ |B| = 1$ (проверяется также непосредственным вычислением определителя).

Замечание. Обратите внимание на расстановку индексов в коэффициентах разложения $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$.

ГЛАВА IV. ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

Лекция 14

§29. Линейные операторы

Пусть в линейном пространстве **L** задана числовая функция векторного аргумента, т. е. каждому вектору $\boldsymbol{x}$ поставлено в соответствие число $a(\boldsymbol{x})$.

Функцию $a(\boldsymbol{x})$ будем считать инвариантной, т. е. значение $a(\boldsymbol{x})$ не зависит от выбора базиса в пространстве **L**.

Определение 1. Числовая функция $a(\boldsymbol{x})$ векторного аргумента называется линейной формой, если

1) $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}) + a(\boldsymbol{y})$ для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из **L**;

2) $a(\alpha\boldsymbol{x}\ ) = \alpha a(\boldsymbol{x})$ для любого числа α и для любого вектора $\boldsymbol{x}$ из **L**.

Можно увидеть, что $a(\sum \alpha_i \boldsymbol{x_i}) = \sum \alpha\alpha_i(\boldsymbol{x_i})$.

В качестве значений функции $a(\boldsymbol{x})$ будем брать действительные числа, если **L** действительно, и комплексные числа, если **L** комплексно.

<u>Примеры.</u>

1. Пусть $x = x_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n}$, где $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ – базис в $\boldsymbol{L}$. В каждом базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ положим $a(\boldsymbol{x}) = x_1$. Тогда свойства 1) и 2) определения для $a(\boldsymbol{x})$ соблюдаются, но $a(\boldsymbol{x})$ не удовлетворяет определению линейной функции, так как зависит от выбранного базиса.

2. Пусть $\boldsymbol{L}$ – пространство многочленов степени не выше n. Пусть каждому многочлену $x(\tau)$ из $\boldsymbol{L}$ ставится в соответствие число $a(\boldsymbol{x})$ по формуле

$$(x) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} x(\tau)d\tau, \qquad (1)$$

где $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$ – заданный отрезок числовой оси. Ясно, что числовое значение $a(\boldsymbol{x})$ не зависит от выбора базиса в $\boldsymbol{L}$. Условия 1) и 2) определения соблюдены вследствие известных свойств определенного интеграла. Таким образом, функция (1) является линейной функцией в пространстве $\boldsymbol{L}$.

Замечание 1. Линейную функцию (1) можно рассматривать также в бесконечномерном пространстве непрерывных функций, заданных на произвольно выбранном отрезке $[\tau_1', \tau_2']$ при условии, что $\tau_1' \leq \tau_1, \tau_2' \geq \tau_2$, или в пространстве всех интегрируемых на $[\tau_1', \tau_2']$ функций (также бесконечномерном).

Пусть в пространстве $\boldsymbol{L}$ дана линейная функция $a(x)$. Считая, что пространство $\boldsymbol{L}$ является n-мерным, зафиксируем в нем произвольный базис $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ и разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по этому базису: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + \dots + x_n\boldsymbol{e_n}$. Тогда линейная функция запишется в виде

$$a(\boldsymbol{x}) = a(x_1\boldsymbol{e_1} + \dots + x_n\boldsymbol{e_n}) = x_1 a(\boldsymbol{e_1}) + \dots + x_n a(\boldsymbol{e_n}). \quad (2)$$

Обозначим через a_i значение функции $a(\boldsymbol{x})$ на базисном векторе $\boldsymbol{e_i}$:

$$a_1 = a(\boldsymbol{e_1}), \dots, a_n = a(\boldsymbol{e_n}). \quad (3)$$

Если базис фиксирован, то a_i – вполне определенные числа. Подставив величины (3) в равенство (2), получим выражение функции $a(\boldsymbol{x})$ в виде однородного многочлена первой степени относительно координат вектора $\boldsymbol{x}$:

$$a(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n. \quad (4)$$

Однородные многочлены степени k принято называть формами степени k, при $k = 1$ употребляют термин «линейные формы», при $k = 2$ – термин «квадратичные формы».

Согласно формуле (4) всякая линейная функция $a(\boldsymbol{x})$ в n-мерном линейном пространстве является линейной формой относительно координат ее аргумента x.

В связи с этим линейные функции обычно называют линейными формами.

В пространстве $\boldsymbol{L_n}$ перейдем к новому базису $\{\boldsymbol{e_1'}, \dots, \boldsymbol{e_n'}\}$ по формуле (см. § 19 гл. III)

$$\boldsymbol{e_i'} = \sum P_{ij}\boldsymbol{e_j}. \qquad (5)$$

В новом базисе линейная форма будет иметь новые коэффициенты a_i':

$$a(\boldsymbol{x}) = a_1'x_1' + a_2'x_2' + \cdots + a_n'x_n'.$$

Найдем a_i', пользуясь тем, что эти числа являются значениями формы $a(x)$ на новых базисных векторах:

$$a_i' = a(\boldsymbol{e_i'}).$$

Пользуясь выражением (5) для векторов $\boldsymbol{e_i'}$ и линейностью функции $a(\boldsymbol{x})$, находим

$$a_i' = a\left(\sum P_{ij}\boldsymbol{e_j}\right) = \sum P_{ij}a(\boldsymbol{e}_j) = \sum P_{ij}a_j.$$

Таким образом,

$$a_i' = \sum P_{ij}a_j. \qquad (6)$$

Очевидно, что формула (6) аналогична формуле (5).

Заметим, что закон преобразования коэффициентов, выраженный формулой (6), обеспечивает инвариантность значений функции, которая в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ задается формулой (4).

Линейная форма $\mathbf{L}(\mathbf{x})$, определенная в линейном пространстве $\boldsymbol{K}$, как указывали, является морфизмом пространства $\boldsymbol{K}$ в одномерное пространство $\boldsymbol{K_1}$.

Рассмотрим морфизм $A = A(x)$ линейного пространства $\boldsymbol{X}$ в любое линейное пространство $\boldsymbol{Y}$ над тем же самым полем $\boldsymbol{K}$. Записывают Ax или A(x). Согласно определению, функция A(x) удовлетворяет условиям:

1) $A(x + y) = A(x) + A(y)$ для любых векторов x и y из $\boldsymbol{X}$;

2) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ для любого числа α и для любого вектора x из $\boldsymbol{X}$.

Как и для линейных форм, из условий 1) и 2) следует более общая формула

3) $A(\sum \alpha_i x_i) = \sum A\alpha_i(x_i)$ для любых $x_1, \dots, x_k$ из $\boldsymbol{X}$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ из $\boldsymbol{K}$.

Морфизм A называют также, как в §17 гл. II, линейным оператором, действующим из $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$.

Примеры.

а. Оператор, который каждому вектору $\boldsymbol{x}$ пространства $\boldsymbol{X}$ ставит в соответствие нуль-вектор пространства $\boldsymbol{Y}$, является линейным оператором и называется нулевым оператором.

б. Пусть имеется некоторый линейный оператор A, действующий из пространства $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$. Положим по определению $Bx = -$Ax. Полученный оператор B также является линейным оператором, переводящим $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$, который называется оператором, противоположным оператору A.

в. Пусть векторам базиса $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ пространства $\boldsymbol{X}$ произвольно поставлены в соответствие векторы $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ пространства $\boldsymbol{Y}$. Тогда существует единственный линейный оператор A, переводящий $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$, и при этом каждый вектор $\boldsymbol{e_k}$, переводящий в соответствующий вектор $\boldsymbol{f_k}$ $(k = 1, .., n)$.

Действительно, если искомый оператор A существует, то для любого вектора $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k} \in \boldsymbol{X}$ выполняется равенство

$$A\boldsymbol{x} = A(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k}) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A\boldsymbol{e_k} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{f_k},$$

чем доказана единственность оператора A. С другой стороны, для любого $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k} \in \boldsymbol{X}$ можно положить по определению

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{f_k}.$$

Получающийся при этом оператор A является линейным оператором, переводящим $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$ и при этом переводящим каждый вектор $\boldsymbol{e_k}$ в соответствующий вектор

$\boldsymbol{f_k}$ (k $= 1, \ldots,$ n), что нам и требуется.

г. Поставим в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x}$ пространства $\boldsymbol{X}$ этот же вектор x, получим линейный оператор $\boldsymbol{K}$, действующий из $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{X}$. Такой оператор называется тождественным, или единичным, оператором.

Рассмотрим матричную запись линейных операторов. Пусть А – линейный оператор, действующий из пространства $\boldsymbol{X}$ размерности n в пространство $\boldsymbol{Y}$ размерности m. Фиксируем в пространстве $\boldsymbol{X}$ базис $\{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\}$ и в пространстве $\boldsymbol{Y}$ базис $\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_m}$.

Вектор $\boldsymbol{e_1}$ переводится оператором A в некоторый вектор $A\boldsymbol{e_1}$ пространства $\boldsymbol{Y}$, который, как вектор этого пространства, можем разложить по базисным векторам:

$$A\boldsymbol{e_1} = a_1^1\boldsymbol{f_1} + \cdots + a_m^1\boldsymbol{f_m}.$$

Аналогично для остальных базисных векторов:

$$A\boldsymbol{e_2} = a_1^2\boldsymbol{f_1} + \cdots + a_m^2\boldsymbol{f_m},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A\boldsymbol{e_n} = a_1^n\boldsymbol{f_1} + \cdots + a_m^n\boldsymbol{f_m}.$$

Короче формулы можно записать так:

$$A\boldsymbol{e_j} = \sum_{i=1}^{m} a_i^j\, \boldsymbol{f_i}, j = 1, \ldots, n. \tag{7}$$

Коэффициенты a_i^j $(i = 1, \ldots, \mathrm{m},\ j = 1, \ldots, n)$ определяют матрицу из m строк и n столбцов или, m×n-матрицу

$$A = A_{(e,f)} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix},$$

которая называется матрицей оператора A в базисах $\{\mathbf{e}\} = \{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\}$ и $\{\boldsymbol{f}\} = \{\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_\mathrm{m}}\}$. Столбцами этой матрицы служат координаты векторов $A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, \ldots, A\boldsymbol{e_n}$ относительно базиса $\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_\mathrm{m}}$.

Пусть $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \boldsymbol{e_j}$ – произвольный вектор, и $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{m} \eta_i \boldsymbol{f_i}$. Выясним, как выражаются координаты η_i

вектора y через координаты ε_j вектора $\boldsymbol{x}$. Имеем

$$\boldsymbol{y} = \sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{\eta_i f_i} = \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{A}\left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\varepsilon_j e_j}\right) = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\varepsilon_j A e_j} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\varepsilon_j} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a_i^j f_i} = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_i^j f_i}\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_i^j \varepsilon_j}\right) \boldsymbol{f_i}.$$

Сравнивая коэффициенты при векторе $\boldsymbol{f_i}$, находим

$$\boldsymbol{\eta_i} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_i^j \varepsilon_j},\ \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{m}, \tag{8}$$

или подробно

$$\begin{cases} \eta_1 = a_1^1\varepsilon_1 + a_1^2\varepsilon_2 + \dots + a_1^n\varepsilon_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \eta_m = a_m^1\varepsilon_1 + a_m^2\varepsilon_2 + \dots + a_m^n\varepsilon_n. \end{cases} \tag{9}$$

Следовательно, зная матрицу оператора A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$, можно определить результат применения оператора к любому вектору $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k}$ пространства $\boldsymbol{X}$: координаты вектора $\mathbf{y} = \mathrm{A}\mathbf{x}$ линейно выражаются через координаты вектора $\mathbf{x}$ по формулам (9). Матрица коэффициентов в формулах (9) совпадает с матрицей $A_{(e,f)}$.

Пусть теперь $\left(a_i^j\right)$ – произвольная $m \times n$-матрица. Если $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \boldsymbol{e_j}$, можно построить вектор $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \boldsymbol{f_i}$ по формулам (9).

Можно проверить, что оператор A, задающий этот переход от вектора $\boldsymbol{x}$ к вектору $\boldsymbol{y}$ является линейным оператором. Построим матрицу оператора A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$. Вектор $\boldsymbol{e_1}$ имеет координаты $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0$. По формуле (9) координатами вектора $\boldsymbol{f_1} = A\boldsymbol{e_1}$ будут числа $a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1$, так что

$$\boldsymbol{f_1} = A\boldsymbol{e_1} = a_1^1\boldsymbol{e_1} + \dots + a_n^1\boldsymbol{e_n}.$$

Аналогично

$$\boldsymbol{f_j} = A\boldsymbol{e_j} = a_1^1\boldsymbol{e_1} + \dots + a_n^j\boldsymbol{e_n}, j = 1, \dots, m.$$

Следовательно, матрица оператора A совпадает с исходной матрицей $\left(a_i^j\right)$.

Таким образом, каждая m×n-матрица является матрицей некоторого линейного оператора A, действующего из n-мерного пространства $\boldsymbol{X}$ в m-мерное пространство $\boldsymbol{Y}$, с фиксированными базисами $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ в пространстве $\boldsymbol{X}$ и $\{\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_m}\}$ в пространстве $\boldsymbol{Y}$.

Следовательно, между линейными операторами, действующими из пространства $\boldsymbol{X}$ (с фиксированным базисом $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$) в пространство **Y** (с фиксированным базисом $\{\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_m}\}$), $\mathrm{m} \times n$-матрицами, заполненными числами из поля **K**, устанавливается взаимно однозначное соответствие, осуществляемое с помощью формул (7) или (8).

Замечание 2. Оператор A можно восстановить по матрице $A = \left(a_i^j\right)$ (притом однозначно), исходя непосредственно из формул (9). В этих формулах j-й столбец матрицы A представляет собой набор координат вектора $\boldsymbol{f_j} = A\boldsymbol{e_j}$.

Примеры.

1. Матрица нулевого оператора в любом базисе пространства $\boldsymbol{X}$ и любом базисе пространства $\boldsymbol{Y}$, очевидно, состоит из одних нулей.

2. Если $\left(a_i^j\right)$ есть матрица оператора A, то матрицей противоположного оператора является матрица $\left(-a_i^j\right)$.

3. Пусть $\mathrm{m} > n$ и оператор A переводит векторы базиса $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ пространства $\boldsymbol{X}$ в линейно независимые векторы $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ пространства $\boldsymbol{Y}$. Дополним векторы $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ до полного базиса пространства $\boldsymbol{Y}$ векторами $\boldsymbol{f_{n+1}}, \dots, \boldsymbol{f_m}$. Тогда матрица оператора A в базисах $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ и $\{\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_m}\}$ примет следующий вид:

$$m = \left\{ n \quad \begin{pmatrix} \overbrace{\left\{\begin{matrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{matrix}\right.}^{n} \\ \begin{matrix}0&0&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&0\end{matrix}\end{pmatrix}\right..$$

4. Матрица тождественного оператора в базисе $\{\boldsymbol{e_1},\dots,\boldsymbol{e_n}\}$ пространства $\boldsymbol{X}$, как области определения, и в том же базисе $\{\boldsymbol{e_1},\dots,\boldsymbol{e_n}\}$ пространства $\boldsymbol{X}$, как области значений, имеет вид

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}. \tag{9'}$$

Матрица Е вида (9') называется тождественной или единичной матрицей.

Рассмотрим действия сложения операторов, умножения оператора на число и умножения операторов друг на друга.

Два оператора A и B, действующих из пространства $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$, будем считать равными и записывать $A = B$, если $A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ для каждого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$.

Рассмотрим сложение операторов. Пусть даны два линейных оператора A и B, отображающих пространство $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$. Оператор $C = A + B$ определяется по формуле

$$C\boldsymbol{x} \equiv (A + B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}. \tag{10}$$

Очевидно, что C также отображает пространство $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$. Покажем что C – линейный оператор. Пусть $\mathbf{x} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, тогда

$$C(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2 + \alpha_1 B x_1 + \alpha_2 B x_2 = \alpha_1 (A x_1 + B x_1) + \alpha_2 (A x_2 + B x_2).$$

Таким образом, оба условия определения выполнены.

■

Определение 2. Линейный оператор C, определенный равенством (10), называется суммой операторов A и B.

Для действия сложения операторов выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} A + B = B + A, \\ (A + B) + \mathrm{C} = A + (B + \mathrm{C}), \\ A + 0 = A, \\ A + (-A) = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

где A, B, C – произвольные линейные операторы, 0 – нулевой оператор, $-A$ – оператор, противоположный к оператору A, т. е. переводящий каждый вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ в вектор $-A\boldsymbol{x}$.

Рассмотрим умножение оператора на число. Если A – линейный оператор, действующий из пространства $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$, и λ – число из поля $\boldsymbol{K}$, то оператор $B = \lambda A$, называемый произведением оператора А на число Х, определяется формулой

$$Bx \equiv (\lambda A)\boldsymbol{x} = \lambda(A\boldsymbol{x}).$$

Можно проверить, что построенный оператор является линейным. При этом имеют место соотношения

$$\begin{cases} \lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1 \lambda_2)A, \\ 1 \cdot A = A, \\ (\lambda_1 + \lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A, \\ \lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B. \end{cases} \qquad (11')$$

Соотношения (11) – (11') показывают, что совокупность всех линейных операторов, действующих из линейного пространства $\boldsymbol{X}$ в линейное пространство $\boldsymbol{Y}$, образует новое линейное пространство.

Рассмотрим умножение операторов. Если A – линейный оператор, действующий из пространства $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$, а B – линейный оператор, действующий из пространства $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$ (все пространства над одним и тем же числовым полем **K**), то определим оператор $P = BA$, называемый произведениям оператора В на оператор А, как оператор, действующий из пространства $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$ по формуле

$$P\boldsymbol{x} = (BA)\boldsymbol{x} = B(A\boldsymbol{x}),$$

т. е. сначала на вектор $\boldsymbol{x}$ действует оператор A, а затем на результат, лежащий в пространстве $\boldsymbol{Y}$, действует оператор B. Построенный оператор P является линейным, так как

$$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = B(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = B(\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2) = \alpha_1 BAx_1 + +\alpha_2 BAx_2 = \alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2.$$

Можно проверить выполнение следующих соотношений:

а) $\lambda(BA) = (\lambda B)A$ для любых операторов A и B с указанными свойствами и любого $\lambda \in \mathbf{K}$;

б) $(A + B)C = AC + BC$ для любых операторов A и B, действующих из пространства $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$, и любого C, действующего из $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$;

в) $A(B + C) = AB + AC$ для любых операторов B и C, действующих из $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$, и любого A, действующего из $\boldsymbol{Y}$ в $\boldsymbol{Z}$;

г) $(AB)C = A(BC)$ для любых операторов: C – из пространства $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$, B – из пространства $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$, A – из пространства $\boldsymbol{Z}$ в пространство $\boldsymbol{W}$.

Действия над операторами соответствуют действиям над матрицами.

Примеры.

1. Умножим $m \times n$-матрицу $A = (a_{jk})$ (Элементы матриц пишутся внизу, так что элемент a_{jk} стоит на пересечении ее j-ой строки и k-го столбца.) слева на $m\times n$-матрицу $B_{rs} = (b_{jk})$, в которой все элементы b_{jk} равны 0, кроме одного элемента b_{rs}, равного 1. По общему правилу умножения операторов получим $m\times n$-матрицу

$$B_{rs}\cdot A=\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & (s) & \end{array}\\ (r) & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=$$

$$(r)\begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}=(r)(a_{s1},\cdots,a_{sn}),$$

так что в i-ой строке матрицы $B_{rs}A$ стоят элементы 5-й строки матрицы A, а остальные элементы матрицы $B_{rs}A$ равны 0.

2. Умножим m×n-матрицу $A=(a_{jk})$ справа на n × n-матрицу $C_{qt}=(c_{jk})$, в которой все элементы c_{ik} равны 0, кроме одного элемента c_{qt}, равного 1. По общему правилу умножения операторов получим m ×-матрицу

$$AC_{qt}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & \cdots & a_{mq} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} & (t) & \end{array}\\ (q) & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}\end{array}=$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & (t) & & \end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1q} & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & a_{2q} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & a_{mq} & \cdots & 0\end{pmatrix}.\end{array}$$

так что в t-ом столбце матрицы AC_{qt} стоят элементы q-го столбца матрицы A, а остальные элементы матрицы AC_{qt} равны 0.

3. При тех же B_{rs}, A, C_{qt} получаем

$$B_{rs}AC_{qt} = \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & (t) & & \end{array} \\ (r) & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{sq} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

так что операция $B_{rs}AC_{qt}$ приводит к m×n-матрице, в которой все элементы равны нулю, кроме стоящего на пересечении r-ой строки и t-го столбца, который равен a_{sq}.

В некоторых случаях бывает удобно разбивать перемножаемые матрицы на блоки и действовать далее с блоками.

Правило умножения матриц состоит в следующем: матрицу A можно составить из блоков, построенных из блоков матриц A и B так же, как элементы матрицы AB составляются из элементов матриц A и B:

$$AB = \begin{pmatrix} \underline{A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + \cdots|} & \underline{A_{11}B_{12} + \cdots|} & \cdots \\ \underline{A_{21}B_{11} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots|} & \cdots & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Действительно, пусть i – номер блок-строки матрицы A, содержащей i-ую строку самой матрицы A, и j-номер блок-столбца матрицы B, содержащего j-й столбец матрицы B. По общему правилу умножения операторов элементы матрицы P = AB имеют вид

$$p_{kq} = a_{k1}b_{1q} + \cdots + a_{kn}b_{nq} == (a_{k1}b_{1q} + \cdots + a_{kp}b_{pq}) + \\ + \cdots + (a_{nr}b_{rq} + \cdots + a_{kn}b_{nq}),$$

где скобки расставлены в соответствии с шириной блоков матрицы A и высотой блоков матрицы B. Будем нумеровать строки и столбцы блоков теми же номерами, что и в самой матрице A. В первой скобке стоит элемент, стоящий на пересечении k-й строки и q-го столбца блока $A_{i1}B_{1j,}$ во второй скобке – элемент, стоящий на пересечении k-й строки и q-го столбца блока $A_{i2}B_{2j}$, и т. д. В результате получается элемент, стоящий на пересечении k-й строки и q-го столбца блока $A_{i1}B_{1j}+\ldots+A_{ir}B_{rj}$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим умножение квазидиагональных матриц.

Определение 3. Матрица называется квазидиагональной, если она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{A}_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\mathrm{A}_{\mathrm{ss}}} \end{pmatrix},$$

причем необозначенные блоки состоят из нулей. Предположим, что блок A_{kk} представляет собой $\mathrm{m}_{\mathrm{k}} \times \mathrm{n}_k$-матрицу $(k = 1, \dots, \mathrm{s})$.

Рассмотрим квазидиагональную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{B}_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\mathrm{B}_{\mathrm{ss}}} \end{pmatrix},$$

у которой блок B_{kk} представляет собой $\mathrm{n}_{\mathrm{k}} \times \mathrm{p}_{\mathrm{k}}$-матрицу $(k = 1, \dots, \mathrm{s})$.

Матрицы A и B можно перемножить по правилу, рассмотренному выше, которое в данном случае немедленно приводит к результату

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}B_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_{ss}B_{ss}} \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Таким образом, в данном случае матрица AB есть квазидиагональная матрица, причем блок $A_{\mathrm{kk}}B_{\mathrm{kk}}$ имеет m_{k} строк и p_{k} столбцов.

Пример. Показать, что, в трехмерном пространстве V над полем вещественных чисел с декартовой системой координат, функция $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \in V$, а знак $\times$ означает векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$, является линейным оператором, отображающим векторное пространство V в себя. Построить матрицу этого линейного оператора в декартовой системе координат.

Из свойств векторного произведения векторов следует, что для любых векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ и любых вещественных чисел α и β

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times (\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v}),$$

т.е. $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$ действительно линейный оператор, действующий в обычном трехмерном пространстве.

Далее, предполагаем, что в пространстве V дана декартова система координат, т.е. существует такая тройка векторов-ортов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in V$, что любой вектор $\boldsymbol{v} \in V$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации этих ортов. То есть, $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$, где коэффициенты v_1, v_2, v_3 – координаты вектора $\boldsymbol{v}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Кроме того предполагается, что $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$. Отсюда, в силу свойств векторного произведения векторов, тотчас же следует, что $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 0$. Теперь, чтобы построить матрицу A линейного оператора f нужно применить наш оператор к базисным векторам отображаемого пространства (в нашем случае к векторам $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$), разложить эти образы по базису того пространства, в которое происходит отображение (в нашем случае по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$), и координаты образа i-го базисного вектора записать в i-ый столбец матрицы A. Итак, с учетом того, что a_1, a_2, a_3 – координаты вектора $\boldsymbol{a}$, получим:

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_1 = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_1 = -a_2\boldsymbol{e}_3 + a_3\boldsymbol{e}_2,$$

$$f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_2 = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_2 = a_1\boldsymbol{e}_3 - a_3\boldsymbol{e}_1,$$

$$f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_3 = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_3 = -a_1\boldsymbol{e}_2 + a_2\boldsymbol{e}_1.$$

Следовательно, матрица A оператора f будет следующей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, чтобы вычислить координаты вектора $f(\boldsymbol{v})$ достаточно умножить матрицу A на координатный столбец вектора $\boldsymbol{v}$. То есть, координатным столбцом вектора $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$ будет столбец

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3 v_2 + a_2 v_3 \\ a_3 v_1 - a_1 v_3 \\ -a_2 v_1 + a_1 v_2 \end{pmatrix}.$$

Этот пример используется для получения практических уравнений движения твердого тела вокруг центра масс.

Лекция 15

§30. Область значений линейного оператора

Пусть дан линейный оператор A, действующий из линейного пространства $\boldsymbol{X}$ в линейное пространство $\boldsymbol{Y}$: $A\colon \boldsymbol{X} \to \mathbf{Y}$.

Пусть n – размерность пространства $\boldsymbol{X}$, а m – размерность пространства $\boldsymbol{Y}$. Выберем произвольно базис $\{\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_n}\}$ в пространстве $\boldsymbol{X}$ и базис $\{\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_m}\}$ в пространстве $\boldsymbol{Y}$. Тогда оператору A можно поставить в соответствие m × n-матрицу $A = (a_i^j)$, $(a_j^i = a_{ij})$ $i = 1, \ldots, \mathrm{m}$, $\mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{n}$. Обозначим через $T(A)$ область значений оператора A, т. е. совокупность всех векторов $y = Ax$, $\mathrm{x} \in \boldsymbol{X}$. Вычислим по матрице A размерность подпространства $T(A)$, полагая $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k}$, получаем $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A \boldsymbol{e_k}$.

Следовательно, область значений оператора A совпадает с линейной оболочкой векторов $A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, \dots, A\boldsymbol{e_n}$. Размерность линейной оболочки $\boldsymbol{L}(A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, \dots, A\boldsymbol{e_n})$ равна максимальному количеству линейно независимых векторов в системе $A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, \dots, A\boldsymbol{e_n}$. В столбцах матрицы оператора A выписаны координаты векторов $A\boldsymbol{e_i}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{f}\}$. Таким образом, вопрос о максимальном количестве линейно независимых векторов в системе $A\boldsymbol{e_j}$ $(\mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{n})$ сводится к вопросу о максимальном количестве линейно независимых столбцов у матрицы оператора A. Но это последнее равно рангу матрицы оператора A. Итак, размерность области значений линейного оператора A, действующего из n-мерного пространства $\mathbf{X}$ в m-мерное пространство $\mathbf{Y}$, равна рангу матрицы оператора A в любом базисе $\{\boldsymbol{e}\}$ пространства $\mathbf{X}$ и любом базисе $\{\boldsymbol{f}\}$ пространства $\mathbf{Y}$. Выбор базисов в данном случае безразличен.

Следовательно, ранг матрицы оператора A не зависит от выбора базисов, т. е. зависит только от самого оператора A. Ранг матрицы оператора A (в любых базисах) можно просто называть рангом оператора A и обозначать через r_A.

Обозначим через $N(A)$ нуль-многообразие оператора A, т. е. совокупность всех тех векторов $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, для которых $A\boldsymbol{x} = 0$. Размерность $\mathrm{n_A}$ этого подпространства равна числу $(\mathrm{n} - \mathrm{r})$, где r – ранг матрицы из коэффициентов системы, или ранг оператора A. Таким образом, $\mathrm{n_A} = \mathrm{n} - \mathrm{r_A}$.

Значит, размерность нуль-многообразия оператора A равна дополнению ранга оператора A до размерности пространства $\boldsymbol{X}$, из которого действует оператор A.

Если морфизм $\mathrm{A}: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ есть эпиморфизм, то $\mathrm{T(A)} = \mathbf{Y}$, следовательно, $\mathrm{r_A} = \mathrm{m}$. Если морфизм $\mathrm{A}: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ есть мономорфизм, то $\mathrm{N(A)} = 0$ и, следовательно, $\mathrm{r_A = n}$. Верны и обратные утверждения, а именно, если ранг матрицы A равен числу m её строк, то размерность T(A) совпадает с размерностью всего $\mathbf{Y}$, откуда следует, что $\mathrm{T(A)} = \mathbf{Y}$. Поэтому морфизм A есть эпиморфизм тогда и только тогда, когда $\mathrm{r_A = m}$. Если ранг матрицы A равен числу n ее столбцов, то векторы $\mathbf{f_1} = \mathrm{A}\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{f_n} = \mathrm{A}\mathbf{e_n}$ являются линейно независимыми. Следовательно, оператор A является мономорфизмом, поэтому морфизм A есть мономорфизм тогда и только тогда, когда $\mathrm{r_A = n}$.

Теорема 1. Пусть $\boldsymbol{X}$ есть n-мерное пространство, $\boldsymbol{Y}$ – произвольное пространство. Каковы бы ни были подпространства $N \subset \boldsymbol{X}$ и $T \subset \boldsymbol{Y}$, сумма размерностей которых равна n, существует линейный оператор $A: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, для которого $N(A) = N, T(A) = T$.

Доказательство. Обозначим размерности подпространств N и T соответственно через k и $m = n - k$. В подпространстве T выберем m линейно независимых векторов $(f_1, \cdots, f_m)$. Далее выберем произвольный базис $\{\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$ в пространстве $\boldsymbol{X}$ так, чтобы первые k векторов базиса лежали в подпространстве N.

Определим оператор A условиями

$$\begin{cases} A\boldsymbol{e_i} = 0, (i = 1, \cdots, k), \\ A\boldsymbol{e_i} = f_i, (i = 1, \cdots, m). \end{cases} \tag{13}$$

Покажем, что оператор A удовлетворяет поставленным требованиям. Прежде всего, очевидно, что $T(A)$ есть линейная оболочка векторов $\boldsymbol{f_i}$, $(i = 1, \cdots, m)$ и, следовательно, совпадает с подпространством T. Затем любой вектор подпространства N по условию принадлежит к $N(A)$. Покажем, что любой вектор пространства $N(A)$ входит в N. Допустим, что для некоторого $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \boldsymbol{e_i}$ будет $A\boldsymbol{x} = 0$. Используя условия (13), получим

$$0 = A\boldsymbol{x} = A(\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \boldsymbol{e_i}) = \varepsilon_{k+1} A\boldsymbol{e_{k+1}} + \cdots + \varepsilon_{k+m} A\boldsymbol{e_m} = \varepsilon_{k+1}\boldsymbol{f_1} + \cdots + \varepsilon_n \boldsymbol{f_m} = 0.$$

Так как $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_m}$ линейно независимы, то получим имеем $\varepsilon_{k+1} = \cdots = \varepsilon_n = 0$. Но тогда $\boldsymbol{x} = \varepsilon_1 \boldsymbol{e_1} + \cdots + \varepsilon_k \boldsymbol{e_k} \in N$, что и утверждалось. ■

Следующая теорема о ранге произведения двух матриц вытекает из свойств только что введенных геометрических характеристик.

Теорема 2. Ранг произведения AB матриц A и B не превосходит ранга каждого из сомножителей.

Доказательство. Предположим, что число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, так как иначе их нельзя было бы перемножить. Пусть A есть $m \times n$-матрица, а B есть $n \times p$-матрица. Введем в рассмотрение линейные пространства $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ с размерностями, соответственно, n, m и p. В пространстве $\boldsymbol{X}$ выберем базис $\{\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$, в пространстве $\boldsymbol{Y}$ – базис $\{\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_m}\}$, в пространстве $\boldsymbol{Z}$ – базис $\{\boldsymbol{g_1}, \cdots, \boldsymbol{g_p}\}$. Используя их, матрице A можно поставить в соответствие линейный оператор $A: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, а матрице B – линейный оператор $B: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{X}$. Произведению AB матриц A и B отвечает линейный оператор $AB: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Y}$. Область значений оператора AB в силу его определения содержится в области значений оператора A. Так как размерность области значений любого оператора равна рангу соответствующей матрицы, получаем, что ранг произведения двух матриц не превосходит ранга первого множителя. Обозначив ранг r, имеем $r_{AB} \le r_A$. Чтобы доказать, что он не превосходит также и ранга второго множителя, перейдем к транспонированным матрицам. Если ранг r, то получим $r_{AB} = r_{(AB)^T} = r_{B^T A^T} \le r_{B^T} = r_B$, что и требовалось доказать. ■

Ранг произведения двух матриц может быть и меньше, чем ранг каждого из сомножителей. Например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

обе имеют ранг, равный единице, а их произведение

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет нулевой ранг. Поэтому представляет интерес следующая теорема, дающая оценку ранга произведения двух матриц не сверху, а снизу.

Теорема 3. Пусть A есть m×n-матрица ранга r_A и B есть n×p-матрица ранга r_B. Тогда ранг m×p-матрицы AB не меньше $r_A + r_B - n$.

Доказательство. Покажем сначала, что любой оператор $A: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ ранга r переводит всякое n-мерное подпространство $\boldsymbol{X}' \subset \boldsymbol{X}$ в подпространство $\boldsymbol{Y}' \subset \boldsymbol{Y}$, размерность которого не ниже $r - (n - k)$. Выберем базис $\{\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$ в пространстве $\boldsymbol{X}$ так, чтобы первые k векторов базиса лежали в подпространстве $\boldsymbol{X}'$. Координаты векторов $A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, \dots, A\boldsymbol{e_k}$, порождающих подпространство $\boldsymbol{Y}'$, в матрице оператора A занимают k первых столбцов. По условию в матрице оператора A имеется r линейно независимых столбцов. Эти столбцы разобьем на две группы: в первую группу отнесем те, которые имеют номера от 1 до k, а во вторую группу – те, которые имеют номера от $(\mathrm{k}+1)$ до n. Численность второй группы не больше $(\mathrm{n}-\mathrm{k})$, следовательно, численность первой группы не меньше $r - (n - k)$. Таким образом, подпространство $\boldsymbol{Y}'$ имеет не менее $r - (n - k)$ линейно независимых векторов, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $A: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ и $B: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{X}$ – линейные операторы, соответствующие перемножаемым матрицам. Оценка ранга матрицы оператора AB, в соответствии с вышесказанным, есть оценка размерности области значений этого оператора. Оператор B переводит все пространство $\boldsymbol{Z}$ в подпространство $T(B) \subset \boldsymbol{X}$ размерности r_B. По доказанному оператор A переводит подпространство $T(B)$ в подпространство, размерность которого не ниже $r_A - (n - r_B) = r_A + r_B - n$. Таким образом, область значений оператора AB, а с ней и ранг матрицы AB, имеют величину не ниже $r_A + r_B - n$, что и требовалось доказать. ■

Следствие. Если одна из перемножаемых матриц, т. е. $m\times n$-матрица A или n×m-матрица B, имеет ранг, равный n, то ранг произведения равен рангу второй матрицы.

Действительно, в этом случае оценки ранга произведения сверху и снизу, полученные в теоремах 1 и 2, дают одинаковый результат, равный рангу второй матрицы.

Пусть дан линейный оператор A, переводящий линейное пространство $\boldsymbol{X}$ в линейное пространство $\boldsymbol{Y}$.

Определение. Линейный оператор B, переводящий линейное пространство $\boldsymbol{Y}$ в линейное пространство $\boldsymbol{X}$, называется левым обратным к оператору A, если $BA = E$ есть единичный оператор в пространстве $\boldsymbol{X}$. Оператор A в этом случае называется правым обратным к оператору B.

Теорема 4. Оператор $A: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ имеет левый обратный тогда и только тогда, когда A есть мономорфизм. Оператор $B: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ имеет правый обратный тогда и только тогда, когда B есть эпиморфизм.

Доказательство. Пусть A есть мономорфизм, и $T(A) \subset \boldsymbol{Y}$ – его область значений. Каждому $y \in T(A)$ отвечает x $\in \boldsymbol{X}$, для которого A$\mathbf{x} = \mathbf{y}$, причем **x** определяется однозначно по **y** в силу предположенной мономорфности A. Пусть $Q \subset \boldsymbol{Y}$ есть подпространство, дающее в прямой сумме с $T(A)$ все пространство $\boldsymbol{Y}$. Определим оператор $B: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ по следующему правилу. Для y $\in T(A)$ положим By равным тому единственному x, для которого $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Для $\mathbf{y} \in Q$ положим $B\mathbf{y} = 0$. Для $\mathbf{y} = \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}$, где $\mathbf{y_1} \in T(A)$, $\mathbf{y_2} \in \mathrm{Q}$ положим $B\mathbf{y} = B\mathbf{y_1}$. Оператор B линейный, и для каждого $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$ имеем $BA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, так что B есть левый обратный для A. Если A не есть мономорфизм, то существует вектор $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$, отличный от 0 и такой, что $A\boldsymbol{x} = 0$. Тогда для любого $B: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ имеем $(BA)\boldsymbol{x} = B(A)\boldsymbol{x} = B(0) = 0$, так что левого обратного для оператора A заведомо не существует.

Пусть $B: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ есть эпиморфизм и пусть $N(B) \subset \boldsymbol{Y}$ есть нуль-многообразие оператора B, а $Q \subset \boldsymbol{Y}$ в прямой сумме с $N(B)$ дает все пространство $\boldsymbol{Y}$. Так как $\boldsymbol{X} = B(\boldsymbol{Y}) = B(N(B) + Q) = B(Q)$, то отображение $B: \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{X}$ есть также эпиморфизм и, более того, изоморфизм, так как никакой элемент $\mathrm{y} \in Q$, отличный от 0, не переходит при воздействии оператора в нуль. Определим оператор $A: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ по следующему правилу: для любого $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$ вектор $\mathrm{A}\mathbf{x}$ есть тот (единственный) вектор $\mathbf{y} \in Q$, для которого $B\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Оператор А, очевидно, линеен, и для каждого $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$ имеем $BA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, так что А есть правый обратный для B. Если $B: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ не есть эпиморфизм, то для вектора $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$, не входящего в $T(B)$, и любого оператора $A: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ имеем $BA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, так что B не имеет правого обратного. Теорема доказана. ■

Известно, что результатом умножения $\mathrm{n} \times m$-матрицы Р на $m \times \mathrm{n}$-матрицу A является квадратная $\mathrm{n} \times n$-матрица

$$S = PA.$$

Если S – единичная $\mathrm{n} \times n$-матрица, то матрица Р называется левой обратной для матрицы А. Аналогично результатом умножения m×n-матрицы А на $\mathrm{n} \times m$-матрицу Q является квадратная $\mathrm{m} \times \mathrm{m}$-матрица $\mathrm{T} = \mathrm{AQ}$, и если Т – единичная m×n-матрица, то Q называется правой обратной для матрицы А.

Теорему 4 в терминах ранга матрицы можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4'. Тогда и только тогда некоторая m×n-матрица A имеет левую обратную, когда ее ранг равен числу n. Тогда и только тогда она имеет правую обратную, когда ее ранг равен числу m.

§31. Линейные операторы, переводящие пространство в себя

Рассмотрим линейный оператор A, переводящий пространство $\boldsymbol{X}$ в себя. Назовем такой оператор A действующим в пространстве $\boldsymbol{X}$.

Пусть оператор A действует в n-мерном пространстве $\boldsymbol{X_n}$. Выберем в пространстве $\boldsymbol{X_n}$ базис $\{\mathbf{e_1},\ldots,\mathbf{e_n}\}$ и этот же базис в $\boldsymbol{X_n}$ используем для построения матрицы оператора A. В соответствии с §21 гл. IV, матрица A оператора A строится по формулам

$$A\boldsymbol{e_k} = \sum_{i=1}^{n} a_i^i\, \boldsymbol{e_i}, \tag{14}$$

так что коэффициенты $\mathrm{a}_\mathrm{i}^\mathrm{i}$ образуют квадратную n×n-матрицу, которая называется матрицей оператора A в базисе $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e_1},\ldots,\mathbf{e_n}\}$ (иногда будем обозначать через A$(\mathbf{e})$). Соответствующая формула для координат вектора $\boldsymbol{y} = \mathrm{A}\mathbf{x}$, $y = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \eta_\mathrm{j}\, \mathbf{e_j}$, $\boldsymbol{x} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \varepsilon_\mathrm{j}\, \mathbf{e_j}$, имеет вид:

$$\eta_\mathrm{i} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_\mathrm{i}^\mathrm{i}\, \varepsilon_\mathrm{j}. \tag{15}$$

При фиксированном базисе $\{\mathbf{e}\}$ получается взаимно однозначное соответствие между всеми линейными операторами, действующими в пространстве $\boldsymbol{X_n}$ и всеми квадратными $n \times n$ -матрицами.

<u>Примеры 1.</u>

1. Оператор, который каждому вектору пространства $\boldsymbol{X}$ ставит в соответствие нуль-вектор является линейным и называется нулевым оператором.

Матрица нулевого оператора в любом базисе состоит из одних нулей.

2. Единичный или тождественный оператор E, ставящий в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ сам вектор $\boldsymbol{x}$, рассмотрели в §21.

Матрица единичного оператора имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

и называется единичной.

3. Оператор A, который переводит каждый вектор $\boldsymbol{x}$ в $\lambda\boldsymbol{x}$, где λ фиксированное число из поля $\boldsymbol{X}$, линеен и называется оператором подобия (с коэффициентом подобия λ).

Матрица оператора подобия в любом базисе имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

4. На евклидовой плоскости V_2 векторы можно определять полярными координатами $\boldsymbol{x} = \{\varphi, \rho\}$. Оператор A, переводящий вектор $\boldsymbol{x} = \{\varphi, \rho\}$ в $A\boldsymbol{x} = \{\varphi + \varphi_0, \rho\}$, где φ_0 – фиксированный угол, является линейным и называется оператором поворота на угол φ_0.

Для построения матрицы оператора поворота выберем в плоскости V_2 базис из двух единичных взаимно ортогональных векторов $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}$. Вектор $\mathbf{e_1}$ после поворота на угол φ_0 перейдет в вектор $\cos\varphi_0\, \mathbf{e_1} + \sin\varphi_0 \mathbf{e_2}$, а вектор $\mathbf{e_2}$ – в вектор $-\sin\varphi_0 \mathbf{e_1} + \cos\varphi_0\, \mathbf{e_2}$.

Следовательно, матрица оператора поворота в любом из указанных базисов имеет вид

$$\begin{pmatrix} cos\varphi_0 & -sin\varphi_0 \\ sin\varphi_0 & cos\varphi_0 \end{pmatrix}.$$

5. Пусть $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ – некоторый базис в n-мерном пространстве $\boldsymbol{X_n}$. Поставим в соответствие вектору $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\, \mathbf{e_k}$ вектор $P\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\, \mathbf{e_k}$, где $m < n$. Оператор P –

линейный оператор и называется оператором проектирования на подпространство $\mathbf{X_m}$, порожденное векторами $\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_m}$.

Для построения матрицы оператора проектирования заметим, что под его воздействием векторы $\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_m}$ переходят в себя, а векторы $\mathbf{e_{m+1}}, \dots, \mathbf{e_n}$ – в нуль. Поэтому матрица оператора проектирования в базисе $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ имеет вид

$$A = m\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Пусть $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ – базис в n-мерном пространстве $\mathbf{X_n}$ и даны n фиксированных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_\mathrm{n}$. Определим оператор A для векторов базиса условиями $\mathrm{A}\mathbf{e_1} = \lambda_1\mathbf{e_1}, \dots, \mathrm{A}\mathbf{e_n} = \lambda_\mathrm{n}\mathbf{e_n}$, и для любого другого вектора $\boldsymbol{x} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \varepsilon_\mathrm{k}\, \mathbf{e_k}$ по линейности условием $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \lambda_\mathrm{k}\varepsilon_\mathrm{k}\, \mathbf{e_k}$. Полученный оператор называется диагональным относительно базиса $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ или диагонализируемым оператором.

Матрица диагонального относительно базиса $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ оператора в этом же самом базисе $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_\mathrm{n} \end{pmatrix}.$$

Элементы, отличные от нуля, могут находиться в этой матрице только на главной диагонали. Такая матрица называется диагональной. Отметим, что в другом базисе $\{\boldsymbol{f}_\mathbf{1}, \dots, \mathbf{f_n}\}$ матрица оператора, диагонального относительно базиса $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$, уже не будет диагональной.

Линейные операторы, действующие в пространстве $\boldsymbol{X_n}$, можно по общим правилам §21 гл. II складывать друг с другом и умножать на числа, причем снова получаются линейные операторы, действующие в $\boldsymbol{X_n}$.

Равенства (11) и (11') §21 гл. II показывают, что при введенных там операциях сложения и умножения на числа совокупность всех линейных операторов, действующих в пространстве $\boldsymbol{X_n}$, становится линейным пространством. Кроме того, для операторов, действующих в пространстве $\boldsymbol{X_n}$, всегда определена и операция умножения, в результате которой также получается оператор, действующий в пространстве $\boldsymbol{X_n}$. В частности, если B – любой оператор, то $(BE)\boldsymbol{x} = B(E\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} = E(B\boldsymbol{x})$, значит $BE = EB = B$.

Определим степени данного оператора A по правилам

$$A^1 = A,$$
$$A^2 = AA,$$
$$A^3 = A^2A = (AA)A = A(AA) = AA^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$A^n = A^{n-1}A = AA^{n-1}.$$

При этом имеет место формула

$$A^{m+n} = A^m A^n,\ m, n = 1,2, \dots, \tag{16}$$

которую легко доказать по индукции.

Еще положим по определению $A^0 = E$ – тождественный оператор.

Очевидно формула (19) остается справедливой и в том случае, когда один из показателей обращается в нуль.

Пусть пространство $\boldsymbol{X}$ конечномерно, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_n}$. Фиксируем в пространстве $\boldsymbol{X_n}$ произвольно базис $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$. Тогда каждому линейному оператору A, действующему в пространстве $\boldsymbol{X_n}$, можно поставить в соответствие матрицу оператора A в этом базисе. В соответствии с правилами §21 гл. II вместе с операторами складываются, умножаются и возводятся в степени и соответствующие им матрицы. В этом случае легко можно найти размерность линейного пространства всех матриц n-го порядка. Матрицы E_{jk} имеющие единственный элемент, отличный от нуля, для определенности 1, на пересечении j-й строки и k-го столбца линейно независимы. С другой стороны, каждая матрица n-го порядка есть линейная комбинация матриц E_{jk}. Таким образом, матрицы E_{jk} образуют базис в пространстве всех матриц n-го порядка. Так как число матриц E_{jk} равно n^2, это число и есть размерность пространства всех матриц n-го порядка.

Такую же размерность n^2 имеет и пространство всех линейных операторов, действующих в пространстве $\boldsymbol{X_n}$.

<u>Примеры 2.</u>

1. Умножение на комплексное число $\omega = \alpha i + \beta$ есть линейное преобразование на плоскости $\mathrm{z = x + iy}$, которое можно записать с помощью вещественной матрицы 2-го порядка. Из формулы умножения $(\alpha i + \beta)(\mathrm{x + iy}) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$ следует, что в базисе 1, i соответствующая матрица имеет вид $\widetilde{\omega} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Таким образом, комплексным числам $\omega = \alpha i + \beta$ взаимно однозначно ставятся в соответствие вещественные матрицы $\widetilde{\omega}$ 2-го порядка. При этом сумме и произведению чисел отвечают сумма и произведение соответствующих матриц: вещественные матрицы $\widetilde{\omega}$ образуют точное представление поля комплексных чисел.

2. Обозначим через B_k $(k \geq 0)$ оператор «сдвига на k шагов по индексу». По определению, он переводит каждый базисный вектор $\mathbf{e_m}$ в базисный вектор $\mathbf{e_{m-k}}$, если $\mathrm{m - k} > 0$, и в 0, если $\mathrm{m - k} \leq 0$. Очевидно, $B_0 = E$, $B_k \cdot B_r = B_{k+r}$. Матрица оператора B_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора B_k имеет вид ($\mathrm{k} < \mathrm{n}$)

$$k+1\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема. Определитель произведения двух n×n-матриц равен произведению определителей этих матриц.

Доказательство. Пусть $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ две произвольные $n \times n$-матрицы, $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ – их произведение. По теореме, примененной к минору $M_{1,\dots,n}^{1,\dots,n}(\mathrm{AB})$, т. е. к самому определителю матрицы AB получим $det\mathrm{AB} = det\mathrm{A} \cdot det\mathrm{B}$. ■

Лекция 16

§32. Инвариантные подпространства

Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{L}$ задан линейный оператор A.

Определение. Подпространство $\boldsymbol{L}'$ пространства $\boldsymbol{L}$ называется инвариантным относительно оператора A, если $A\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}'$ для $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}'$.

В частности, тривиальные подпространства – нулевое, и все пространство – являются инвариантными для всякого линейного оператора.

Рассмотрим с этой точки зрения примеры линейных операторов, указанные в §23 гл. IV.

Для операторов: нулевой оператор, тождественный оператор и оператор подобия, каждое подпространство является инвариантным. Для доказательства рассмотрим $\boldsymbol{x} \in L'$ из которого следует, что $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$, а это не выводит из подпространств.

Оператор поворота на угол $\varphi_0 \neq mn$, m целое – не имеет нетривиальных инвариантных подпространств.

Оператор проектирования имеет, например, следующие инвариантные подпространства: подпространство $\boldsymbol{L}'$ из векторов $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k}$, которые не изменяются, и подпространство $\boldsymbol{L}''$ из векторов $\boldsymbol{y} = \sum_{k=m+1}^{m} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k}$, которые переходят в нуль.

Каждое подпространство, порожденное некоторыми из базисных векторов $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$, является инвариантным для диагонального оператора.

Пусть оператор A имеет в n-мерном пространстве $\boldsymbol{L}_\mathbf{n}$ инвариантное m-мерное подпространство $\boldsymbol{L}_\mathbf{m}$. Выберем базис $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ пространства $\boldsymbol{L}_\mathbf{n}$ так, чтобы его первые m векторов $\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_m}$ лежали в подпространстве $\boldsymbol{L}_\mathbf{m}$. Тогда получим

$$\mathrm{A}\mathbf{e_1} = a_1^1\mathbf{e_1} + \dots + a_1^m\mathbf{e_m},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\mathrm{A}\mathbf{e_m} = a_m^1\mathbf{e_1} + \dots + a_m^m\mathbf{e_m},$$

следовательно, матрица оператора A в указанном базисе будет иметь вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_m^1 & a_{m+1}^1 & \cdots & a_n^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^m & \cdots & a_m^m & a_{m+1}^m & \cdots & a_n^m \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m+1}^{m+1} & \cdots & a_n^{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m+1}^n & \cdots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

В первых m столбцах матрицы все элементы $(m+1)$-й и следующих строк равны 0. Обратно, если матрица оператора A имеет такой вид, то подпространство, определяемое векторами $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_m}$, является инвариантным для оператора А.

Предположим, что пространство $\boldsymbol{L}_\mathbf{n}$ можно представить в виде прямой суммы инвариантных подпространств $E, F, \ldots, H$. Выберем базис пространства $\boldsymbol{L}_\mathbf{n}$ так, чтобы векторы $\mathbf{e_1}, \ldots, \mathbf{e_r}$ лежали в E, $(\mathbf{f_1}, \ldots, \mathbf{f_s})$ – в F, …, $(\mathbf{h_1}, \ldots, \mathbf{h_t})$ – в H.

Тогда матрица оператора А примет квазидиатональный вид

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_e} & & & \\ & \boxed{A_f} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_h} \end{pmatrix}.$$

Диагональные квадраты матрицы А заполняются элементами $a_k^j, b_k^j, \ldots, c_k^j$, в соответствии с формулами

$$\mathrm{A}\mathbf{e_j} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{r}} a_k^j \, \mathbf{e_k},$$

$$\mathrm{A}\mathbf{f_j} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{s}} a_k^j \, \mathbf{f_k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathrm{A}\mathbf{h_j} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{t}} a_k^j \, \mathbf{h_k}.$$

Вне диагональных квадратов в матрице А всюду стоят нули. Обратно, если матрица оператора А в некотором базисе имеет квазидиагональную структуру, то пространство $\boldsymbol{L}_\mathbf{n}$ разлагается в прямую сумму подпространств, порожденных соответствующими группами базисных элементов.

§33. Собственные векторы и собственные значения

Особую роль играют одномерные инвариантные подпространства оператора A, которые называются инвариантными или собственными направлениями.

Определение 1. Любой ненулевой вектор, принадлежащий к одномерному инвариантному направлению оператора A, называется собственным вектором оператора A.

Другими словами, вектор $x \neq 0$ называется собственным вектором оператора A, если оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в коллинеарный ему вектор $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Число λ называется собственным значением (собственным числом) оператора A соответствующим собственному вектору $\boldsymbol{x}$.

Примеры.

1. В примерах 1 §23 гл. IV каждый ненулевой вектор пространства есть собственный вектор соответствующего оператора с собственными значениями соответственно 0, 1, λ.

2. Оператор поворота на угол $\varphi_0 \neq m\pi$ с целым m, не имеет собственных векторов.

3. Оператор проектирования имеет собственные векторы вида $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k}$ и $\boldsymbol{y} = \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k}$ с собственными значениями соответственно 1 и 0. Других собственных векторов у оператора проектирования нет.

4. Диагональный оператор по самому определению имеет собственные векторы $\{\boldsymbol{e_i}\}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}}$ с собственными значениями соответственно $\{\lambda_i\}_i^n$.

Свойства собственных векторов.

Лемма 1. Собственные векторы $\{\boldsymbol{x_i}\}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}}$ оператора A с попарно различными собственными значениями $\{\lambda_i\}_i^m$

линейно независимы.

Доказательство. Докажем индукцией по числу m. Очевидно, что для $m = 1$ лемма верна. Допустим, что лемма верна для всяких $(m-1)$ собственных векторов оператора А. Покажем, что она продолжает оставаться верной и для всяких m собственных векторов оператора А. Предположим противное и допустим, что между m собственными векторами оператора А имеется линейная зависимость

$$\alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{x_m} = \textstyle\sum_1^m \alpha_i \boldsymbol{x_i} = 0,$$

где, например, $\alpha_1 \neq 0$. Применяя к этому равенству оператор А, получаем

$$\boldsymbol{\alpha_1} \lambda_{\boldsymbol{1}} \boldsymbol{x_1} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_m} \lambda_{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{x_m} = \textstyle\sum_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{\alpha_i} \lambda_{\boldsymbol{i}} \boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{0}.$$

Умножим первое равенство на λ_m и вычтем из второго, получим

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)\boldsymbol{x_1} + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\boldsymbol{x_{m-1}} = 0,$$

откуда по индуктивному предположению все коэффициенты должны быть равны нулю. В частности, $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = 0$, что противоречит условиям $\alpha_1 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_m$. Следовательно, предположение неверно, и векторы $\boldsymbol{x_1}, \ldots, \boldsymbol{x_m}$ линейно независимы, что и требовалось доказать. ■

Следствие. В n-мерном пространстве линейный оператор А не может иметь более n собственных векторов с различными собственными значениями.

Лемма 2. Все собственные векторы линейного оператора A, отвечающие данному собственному значению λ, образуют подпространство $\boldsymbol{K}^{\lambda} \subset \boldsymbol{K}$.

Доказательство. Действительно, если $A\boldsymbol{x_1} = \lambda \boldsymbol{x_1}$ и $A\boldsymbol{x_2} = \lambda \boldsymbol{x_2}$, то $A(\alpha \boldsymbol{x_1} + \beta \boldsymbol{x_2}) = \alpha A \boldsymbol{x_1} + \beta A \boldsymbol{x_2} = \alpha \lambda \boldsymbol{x_1} + \beta \lambda \boldsymbol{x_2} = \lambda(\alpha \boldsymbol{x_1} + \beta \boldsymbol{x_2})$, чем утверждение леммы доказано. ■

Определение 2. Подпространство $\boldsymbol{K}^{\lambda}$ называется собственным подпространством оператора А, отвечающим собственному значению λ.

Покажем, как можно вычислить координаты собственных векторов оператора А, заданного своей матрицей в некотором базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ пространства $\boldsymbol{K_n}$. Допустим, что $\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k}$ есть собственный вектор оператора А, так что $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ с некоторым λ. Данное равенство можно переписать в координатной форме:

$$\begin{aligned}
&\lambda\varepsilon_1 = a_1^1\varepsilon_1 + a_1^2\varepsilon_2 + \dots + a_1^n\varepsilon_n,\\
&\lambda\varepsilon_2 = a_2^1\varepsilon_1 + a_2^2\varepsilon_2 + \dots + a_2^n\varepsilon_n,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\lambda\varepsilon_n = a_n^1\varepsilon_1 + a_n^2\varepsilon_2 + \dots + a_n^n\varepsilon_n,
\end{aligned}$$

или

$$\begin{cases}
(a_1^1 - \lambda)\varepsilon_1 + a_1^2\varepsilon_2 + \dots + a_1^n\varepsilon_n = 0,\\
a_2^1\varepsilon_1 + (a_2^2 - \lambda)\varepsilon_2 + \dots + a_2^n\varepsilon_n = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
a_n^1\varepsilon_1 + a_n^2\varepsilon_2 + \dots + (a_n^n - \lambda)\varepsilon_n = 0.
\end{cases} \tag{17}$$

Эта однородная система уравнений относительно величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ допускает ненулевое решение в том и только в том случае, когда ее определитель равен нулю (по теореме Крамера):

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix}
a_1^1 - \lambda & a_1^2 & \cdots & a_1^n\\
a_2^1 & a_2^2 - \lambda & \cdots & a_2^n\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n - \lambda
\end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Определение 3. Многочлен n-й степени относительно λ, стоящий в левой части уравнения, называется характеристическим многочленом матрицы А.

Всякому его корню $\lambda_0 \in \boldsymbol{K}$ отвечает собственный вектор, который определяется после подстановки в (17) вместо λ величины λ_0 путем решения получившейся совместной системы относительно величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$.

Следствие. Корни характеристического многочлена (18) не зависят от выбора базиса, в котором написана матрица оператора А.

Рассмотрим возможности, которые могут представиться при решении характеристического уравнения (18).

1) Случай отсутствия корней в поле $\boldsymbol{K}$. Если уравнение $\Delta\lambda$ в поле $\boldsymbol{K}$ совсем не имеет корней, то линейный оператор А не имеет в пространстве $\boldsymbol{K_n}$ собственных векторов.

Например, оператор поворота на угол $\varphi_0 \neq m\pi$ (m $=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) на плоскости V_2 не имеет собственных векторов. Этот факт, геометрически очевидный, легко устанавливается алгебраически. В самом деле, уравнение (18) для оператора поворота имеет вид

$$\begin{vmatrix} cos\varphi_0 - \lambda & -sin\varphi_0 \\ sin\varphi_0 & cos\varphi_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Или, после раскрытия определителя,

$$1 - 2\lambda cos\varphi_0 + \lambda^2 = 0.$$

Если $\varphi_0 \neq m\pi$ (m $= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то это уравнение не имеет вещественных корней.

2) Если $\boldsymbol{K} = \mathrm{C}$ есть поле комплексных чисел, то в силу основной теоремы алгебры уравнение (24) всегда имеет корень $\lambda_0 \in \boldsymbol{K}$. Таким образом, в пространстве $\boldsymbol{C_n}$ любой линейный оператор имеет хотя бы один собственный вектор.

3) Случай существования n различных корней. Если все n корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ уравнения $\Delta\lambda = 0$ лежат в поле $\boldsymbol{K}$ и различны, то можно в пространстве $\boldsymbol{K_n}$ найти n различных собственных векторов оператора А, решая систему (23) последовательно при $\lambda = \lambda_1, \ldots, \lambda_n$. В силу леммы 1 собственные векторы $\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_n}$ будут линейно независимы.

Примем их за новый базис и построим матрицу оператора А в этом новом базисе. Поскольку

$$Af_1 = \lambda_1 f_1,$$
$$Af_2 = \lambda_2 f_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$Af_n = \lambda_n f_n,$$

матрица A_f имеет вид

$$A_f = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Используя определение диагонализируемого оператора, можно сформулировать полученный результат следующим образом: в пространстве $\boldsymbol{K_n}$ всякий линейный оператор, характеристический многочлен матрицы которого в каком-либо базисе имеет n различных корней в поле $\boldsymbol{K}$, является диагонализируемым. Матрица этого оператора, построенная в базисе из его собственных векторов, диагональна, и ее диагональные элементы есть собственные значения оператора.

4) **Лемма 3.** Оператор А в некотором базисе $\{\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}\}$ пространства $\boldsymbol{K_n}$ имеет диагональную матрицу (18) с произвольными, необязательно различными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на диагонали, векторы $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ – собственные, а числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – соответствующие собственные значения.

Доказательство. Пусть λ – собственное значение, соответствующие собственному вектору $\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{f_i}$, то, выделяя в равенстве

$$A\boldsymbol{f} = \lambda \boldsymbol{f} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{f_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i \boldsymbol{f_i}$$

слагаемое по вектору $\boldsymbol{f_i}$, получим

$$\lambda \alpha_i = \lambda_i \alpha_i, i = 1, \dots, n. \tag{19}$$

Среди чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ есть хотя бы одно отличное от нуля. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда равенство (19) при $i = 1$ дает $\lambda = \lambda_1$, что и требовалось доказать. ■

5) Случай кратного корня. Пусть $\lambda = \lambda_0$ – некоторый корень уравнения (17) кратности $r \geq 1$.

Размерность каждого собственного подпространства $\boldsymbol{K}^{\lambda_0}$ совпадает с кратностью соответствующего собственного значения λ_0 как корня характеристического многочлена оператора А. Однако в общем случае это не так. Рассмотрим оператор А в R_2, заданный матрицей А $= \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ \mu & \lambda_0 \end{pmatrix}$ с произвольным $\mu \neq 0$. Характеристический многочлен имеет вид $(\lambda_0 - \lambda)^2$, который имеет двойной корень $\lambda = \lambda_0$. Система (16) в данном случае принимает вид

$$0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 = 0,$$
$$\mu \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 = 0,$$

и имеет единственное (с точностью до числового множителя) решение $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$.

Таким образом, собственное подпространство оператора А, соответствующее собственному значению $\lambda = \lambda_0$ имеет размерность 1, меньшую, чем кратность корня λ_0. В общем случае размерность собственного подпространства $\boldsymbol{K}^{\lambda_0}$ не превышает кратности корня λ_0.

<u>Пример.</u> Две квадратичные формы называются *ортогонально эквивалентными*, если от одной из них можно перейти к другой посредством ортогонального преобразования. Для ортогональной эквивалентности двух форм необходимо и достаточно чтобы характеристические многочлены их матриц совпадали.

Выяснить, какие из следующих квадратичных форм ортогонально эквивалентны:

$$f = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3;$$
$$g = -3y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2 - 12y_1y_2 + 12y_1y_3 + 6y_2y_3;$$

$$h = 11z_1^2 - 4z_2^2 + 11z_3^2 + 8z_1z_2 - 2z_1z_3 + 8z_2z_3.$$

Решение. Выпишем матрицы квадратичных форм:

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}, A_g = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}, A_h = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Общий вид характеристических полиномов матриц в нашем случае будет следующим: $q(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$. Причем коэффициент a_k характеристического полинома матрицы A вычисляется через элементы матрицы A следующим образом: $a_k = (-1)^k \times$(сумму главных миноров k-го порядка матрицы A).

Так $q_f(\lambda) = |\lambda E - A_f| = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$, где $a_1 = -(0 + 9 + 9) = -18$ (минус след матрицы A_f), $a_2 = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $a_3 = -\begin{vmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 864$. То есть, $q_f(\lambda) = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 864 = (\lambda + 6)(\lambda - 12)^2$. Аналогично получим:

$$q_g(\lambda) = |\lambda E - A_f| = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 1269\lambda +,$$

$$q_f(\lambda) = |\lambda E - A_h| = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 864.$$

Это означает, что квадратичные формы f и h ортогонально эквивалентны между собой и не эквивалентны ортогонально с формой g.

Найдем в явном виде ортогональное преобразование, устанавливающее ортогональную эквивалентность форм. f и h. Построим вначале ортогональные преобразования приводящие формы f и h к каноническому виду. Для этого, как известно, нужно найти корни характеристических многочленов (в нашем случае одного общего характеристического многочлена), затем найти соответствующие этим корням собственные вектора, ортогонализировать собственные вектора отвечающие кратным корням и нормировать их. Матрицы, построенные из этих ортонормированных собственных векторов, как столбцов, и будут искомыми ортогональными матрицами, приводящими наши формы f и h к каноническому виду.

Корни многочлена $q(\lambda) = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 864 = (\lambda + 6)(\lambda - 12)^2$, являющегося общим характеристическим многочленам для матриц форм f и h, уже найдены (видны из разложения этого многочлена). Поэтому остаётся только найти, соответствующие этим корням ортонормированные собственные вектора матриц и A_h.

Для матрицы A_f эти вектора являются решениями уравнений $(A_f + 6\,E)U = 0$ и $(A_f - 12\,E)V = 0$ (U и V – неизвестные столбцы). Найдем «фундаментальные системы решений» уравнений (систем уравнений) $(A_f + 6\,E)U = 0$ и $(A_f - 12\,E)V = 0$. Фундаментальная система решений первого уравнения будет состоять из одного решения, второго уравнения – из двух (кратность корня равна двум). Находятся решения методом Гаусса. Сразу приведем эти решения, в виде, допускающем легкую проверку.

$$(A_f + 6\,E)U = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & 15 & -3 \\ 6 & -3 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(A_f - 12\,E)V_1 = \begin{pmatrix} -12 & 6 & 6 \\ 6 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A_f - 12\,E)V_2 = \begin{pmatrix} -12 & 6 & 6 \\ 6 & -3 & -3 \\ 6 & -3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Как следует из теории (это видно и непосредственно) решение $U = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ортогонально решениям $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ и

$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ортогонализируем между собой решения V_1 и V_2., т.е. перейдем от решений V_1 и V_2 к решениям $V_1' = V_1$ и $V_2' = V_2 + \alpha V_1'$. При этом α выбирается из условия, чтобы $\left(V_1', V_2'\right) = (V_1, V_2 + \alpha V_1) = 0$. Откуда $\alpha = -\frac{(V_1, V_2)}{(V_1, V_1)} = -\frac{1}{5}$.

Итак, решения (собственные векторы матрицы A_f) U, V_1' и V_2' будут уже попарно ортогональны. Нормализуем эти векторы, т.е. умножим эти векторы на числа обратные длинам этих векторов и построим из них, как из столбцов, матрицу Q_1. То есть, $Q_1 = \left(\frac{1}{\|U\|} U, \frac{1}{\|V_1'\|} V_1', \frac{1}{\|V_2'\|} V_2'\right)$. Выпишем её явный вид, т.е. проведем необходимые вычисления, получим

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Проделаем аналогичные вычисления для матрицы A_h, получим:

$$(A_h + 6\,E)\widehat{U} = \begin{pmatrix} 17 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(A_h - 12\,E)\widehat{V_1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -16 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A_h - 12\,E)\widehat{V_2} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -16 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для $\widehat{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widehat{V_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widehat{V_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ опять очевидным образом получаем, что $(\widehat{U}, \widehat{V_1}) == (\widehat{U}, \widehat{V_2}) = 0$.

Ортоганализируем вектора $\widehat{V_1}$ и $\widehat{V_2}$, т.е. перейдем к системе векторов $\widehat{V_1'} = \widehat{V_1}$ и $\widehat{V_2'} = \widehat{V_2} + \beta\widehat{V_1'}$, где величина β подобрана таким образом, что $(\widehat{V_1', V_2'}) = 0$. Нетрудно видеть, что $\beta = -\frac{(\widehat{V_1}, \widehat{V_2})}{(\widehat{V_1}, \widehat{V_1})} = 2$. Нормализуем, как и в случае матрицы A_f, собственные векторы $(\widehat{U}, \widehat{V_1'}, \widehat{V_2'}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4, & 0, & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A_h и построим матрицу Q_2:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-4}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Так как матрица Q_1 построена из ортонормированных собственных векторов матрицы A_f, а матрица Q_2 из ортонормированных собственных векторов матрицы A_h, то $A_f Q_1 = Q_1 D$, а $A_h Q_2 = Q_2 D$, где $D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. Отсюда тотчас же получаем, что $Q_1^T A_f Q_1 = D$ и $Q_2^T A_h Q_2 = D$, т.е. $Q_1^T A_f Q_1 = Q_2^T A_h Q_2$. Следовательно, $A_f = Q_1 Q_2^T A_h Q_2 Q_1^T$. Пусть $X = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$, $Z = (z_1 \quad z_2 \quad z_3)^T$. Теперь уже нетрудно видеть, что с помощью ортогонального преобразования переменных $Z = (Q_2 Q_1^T)X$ квадратичная форма $h = Z^T A_h Z$ переводится в квадратичную форму $f = X^T A_f X$. Действительно,

$$h = Z^T A_h Z = \left((Q_2 Q_1^T)X\right)^T A_h \left((Q_2 Q_1^T)X\right) = X^T (Q_1 Q_2^T A_h Q_2 Q_1^T) X = X^T A_f X = f.$$

Очевидно, что полагая $X = Q_1 Q_2^T Z$, с помощью этого ортогонального преобразования превратим квадратичную форму f в форму h.

ГЛАВА V. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Лекция 17

Определение. Два оператора A и B, действующие в n-мерном пространстве $\boldsymbol{K_n}$, называются эквивалентными, если существуют такие два базиса в $\boldsymbol{K_n}$, что матрица оператора A в первом базисе совпадает с матрицей оператора B во втором базисе, т. е. существует такой базис $\{\boldsymbol{e_i}\}_1^n$ и $\{\boldsymbol{f_j}\}_1^n$, что $A_{\boldsymbol{f}} = B_{\boldsymbol{e}}$.

Очевидно, что эквивалентные операторы определяют в пространстве $\boldsymbol{K_n}$ одинаковые по своим свойствам линейные преобразования.

В этой главе укажем для любого линейного оператора такой базис, в котором его матрица принимает «каноническую» форму, и покажем, что если эти формы совпадают для A и B, то A эквивалентна B и обратно (при этом базисы могут быть различными).

§34. Каноническая форма матрицы нильпотентного оператора

Определение 1. Линейный оператор B называется нильпотентным в n-мерном пространстве $\boldsymbol{L_n}$, если при некотором натуральном r>0 выполняется равенство $B^r = 0$, другими словами, $B^r\boldsymbol{x} = 0$ для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L_n}$

Предположим, что B – нильпотентный оператор, и $B^r = 0$. Будем считать, что $B^{r-1} \neq 0$, т. е. имеются векторы $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L_n}$, для которых $B^{r-1}x \neq 0$.

Определение 2. Назовем высотой вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L_n}$ наименьшее из чисел m, при которых $B^m x = 0$.

Все векторы $x \in \boldsymbol{L_n}$, по нашему предположению, имеют высоту $\leq r$, причем имеются векторы с высотой, равной r. Для любого $k \leq r$ обозначим через H_k совокупность всех векторов высоты $\leq k$. Очевидно, H_k есть подпространство в $\boldsymbol{L_n}$: если $x \in H_k$ и $y \in H_k$, то $B^k x = 0$, $B^k y = 0$, откуда при любых $\alpha \in \boldsymbol{L}$ и $\beta \in \boldsymbol{L}$ также $B^k(\alpha x + \beta y) = 0$, так что высота вектора $\alpha x + By$ не превосходит k и $\alpha x + By \in H_k$. Очевидно, что $H_r = \boldsymbol{L_n}$ и $0 \subseteq H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_{r-1} \subseteq H_r = \boldsymbol{L_n}$. Размерности этих пространств обозначим соответственно через $m_0 = 0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_r = n$. Построим базис в пространстве $\boldsymbol{L_n}$ следующим образом.

Ясно, что H_{r-1} не совпадает со всем $\boldsymbol{L_n} = H_r$. Поэтому можно найти векторы $\boldsymbol{f_1}, \ldots, \boldsymbol{f_{p_1}}$, лежащие в H_r и линейно независимые над H_{r-1} ($p_1 = m_r - m_{r-1}$).

Лемма. Векторы $B\boldsymbol{f_1}, \ldots, B\boldsymbol{f_{p_1}}$ лежат в H_{r-1} и линейно независимы над H_{r-2}.

Доказательство. Действительно, если бы имели $c_1 B\boldsymbol{f_1} + \cdots + c_{p_1} B\boldsymbol{f_{p_1}} = \boldsymbol{g} \in H_{r-2}$ то, применяя B^{r-2}, получили бы, что $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{p_1} c_i B^{r-1} f_i = 0}$. Или $\sum_{i=1}^{p_1} c_i \boldsymbol{f_i} \in H^{r-1}$, что по построению не имеет места. Отсюда видно, что размерность $(m_{r-1} - m_{r-2})$ пространства H_{r-1} над H_{r-2} равна или больше размерности $(m_r - m_{r-1})$ пространства H_r над H_{r-1}. Дополним векторы $B\boldsymbol{f_1}, \ldots, B\boldsymbol{f_{p_1}}$ векторами $\boldsymbol{f_{p_1+1}}, \ldots, \boldsymbol{f_{p_2}}$ в H_{r-1} до максимальной системы, линейно независимой над H_{r-2} ($p_2 = m_{r-1} - m_{r-2}$). Применяя ко всем этим векторам оператор B, получаем векторы в H_{r-2}

$$\boldsymbol{B^2 f_1}, \ldots, \boldsymbol{B^2 f_{p_1}}, \boldsymbol{B f_{p_1+1}}, \ldots, \boldsymbol{B f_{p_2}},$$

линейно независимые над H_{r-3}, что доказывается аналогично предыдущему. Отсюда $m_{r-2} - m_{r-3} \geq m_{r-1} - m_{r-2}$, и можно построить в пространстве H_{r-2} векторы

$f_{p_{2+1}}, \dots, f_{p_3}$, образующие вместе с предыдущими полную систему, линейно независимую над H_{r-3}.

Переходя таким же образом в подпространства $H_{r-3}, \dots, H_0 = 0$, получаем, в конце концов, полную систему n линейно независимых векторов. ■

Полученную систему векторов можно записать в таблицу

$$
\begin{array}{llllllll}
f_1, & \dots, & f_{p_1}, & & & & & \\
Bf_1, & \dots, & Bf_{p_1}, & f_{p_1+1}, & \dots, & f_{p_2}, & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots\ \dots & \dots & \dots, & & \\
B^{r-1}f_1, & \dots, & B^{r-1}f_{p_1}, & B^{r-2}f_{p_1+1}, & \dots, & B^{r-2}f_{p_2} & \dots, \quad f_{p_{r-1}+1} & \dots, \quad f_{p_r}.
\end{array}
$$

Векторы, стоящие в первой строке таблицы, имеют высоту r, векторы следующей строки – высоту $(r-1)$ и т. д. Векторы последней строки имеют высоту 1, т. е. оператором B переводятся в 0. Каждый столбец таблицы определяет инвариантное подпространство оператора B. Первые p_1 инвариантных подпространств имеют размерность r каждое, следующие $(p_2 - p_1)$ подпространств – размерность $(r-1)$ каждое и т. д. Последние (одноэлементные) столбцы определяют одномерные инвариантные подпространства.

Все пространство $\boldsymbol{L_n}$ есть прямая сумма p_r указанных подпространств.

Запишем матрицу оператора B в подпространстве, определяемом векторами первого столбца. В качестве базиса возьмем векторы $B^{r-1}\boldsymbol{f_1}, \dots, B\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_1}$. В таком порядке они располагаются по возрастанию высоты. В этой записи первый вектор базиса оператором B переводится в 0, второй в первый, ..., r-й переводится в $(r-1)$-й, поэтому матрица оператора B содержит по r строк и столбцов и имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

с отличными от нуля элементами, а именно, равными 1, над главной диагональю.

Аналогичный вид имеет матрица оператора B в остальных инвариантных подпространствах, соответствующих остальным столбцам таблицы. Отличие от матрицы (1) может состоять лишь в числе строк и столбцов.

Матрица оператора B во всем пространстве $\boldsymbol{L_n}$ будет квазидиагональной с указанными блоками на диагонали:

$$B = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & & & & & & \\ & \begin{matrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \begin{matrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{matrix} & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

Число блоков размера r равно p_1, число блоков размера $(r-1)$ равно $(p_2 - p_1)$, число блоков размера 2 равно $p_{r-1} - p_{r-2}$, число блоков размера 1 равно $p_r - p_{r-1}$. Очевидно, если для некоторого i имеем $p_{r-i+1} - p_{r-i}$, то в матрице (2) блоков размера i не будет вовсе.

§35. Алгебры. Алгебра многочленов от одного переменного

Определение 1. Линейное пространство $\boldsymbol{L}$ над числовым полем $\boldsymbol{K}$ называется алгеброй или алгеброй над полем $\boldsymbol{K}$, если в $\boldsymbol{L}$ установлена операция умножения, приводящая в соответствие каждой паре элементов (x, y) из $\boldsymbol{L}$ элемент $z \in \boldsymbol{L}$, обозначаемый $x \cdot y$ или xy, и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ для любых $x, y \in \boldsymbol{L}$ и $\alpha \in \boldsymbol{K}$;

2) $(xy)z = x(yz)$ для любых $x, y, z \in \boldsymbol{L}$ (ассоциативный закон);

3) $(x + y)z = xz + yz$ для любых $x, y, z \in \boldsymbol{L}$ (дистрибутивный закон).

Вообще говоря, умножение может не быть коммутативным, так что ху $\neq$ ух**.** Если умножение коммутативно, т. е. выполнено условие

4) $xy = yx$ для любых $x, y \in \boldsymbol{L}$, то алгебра $\boldsymbol{L}$ называется коммутативной.

Пусть $\mathbf{0}$ есть нуль-вектор пространства $\boldsymbol{L}$. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{L}$ $0 \cdot x = (0 + 0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, откуда следует, что $\mathbf{0} \cdot x = 0$.

Элемент $e \in \boldsymbol{L}$ называется левой единицей, если $ex = x$ для любого $x \in \boldsymbol{L}$. Правой единицей, если $xe = x$ для любого $x \in \boldsymbol{L}$. Двусторонней единицей или просто единицей в $\boldsymbol{L}$, если $ex = xe = x$ для любого $x \in \boldsymbol{L}$.

Элемент $x \in \boldsymbol{L}$ называется левым обратным к элементу $y \in \boldsymbol{L}$, если xy есть единица алгебры $\boldsymbol{L}$. В этом случае y называется правым обратным к x. Если элемент z обладает и левым и правым обратными, то они могут быть лишь единственными и совпадают друг с другом. Элемент z называется в этом случае обратимым, ему обратный обозначается через z^{-1}.

Произведение zu обратимого элемента z и обратимого элемента u и есть обратимый элемент с обратным $u^{-1}z^{-1}$. Если элемент и обратим, то уравнение $ux = v$ имеет решение $x = u^{-1}v$, так как оно получается из самого уравнения умножением на u^{-1}, оно единственно. В коммутативном случае употребляют запись $x = \frac{v}{u}$ или $\mathrm{x} = \mathrm{v}:\mathrm{u}$. Такой элемент называют частным элементов v и u. Для частных справедливы обычные арифметические правила действий.

Алгебра $\boldsymbol{L}$ по определению имеет размерность n, если эту размерность n имеет соответствующее линейное пространство $\boldsymbol{K}$.

Примеры 1.

1) В любом линейном пространстве $\boldsymbol{L}$ положим $x \cdot y = 0$ для любых $x, y \in \boldsymbol{L}$, получим алгебру, которая называется тривиальной.

2) Примером нетривиальной коммутативной алгебры над полем $\boldsymbol{K}$ является совокупность П всех многочленов

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k$$

с коэффициентами из $\boldsymbol{K}$, с обычными операциями сложения и умножения. В этой алгебре есть единица, а именно, многочлен $e(\lambda)$, у которого $\mathrm{a}_0 = 1$, а остальные коэффициенты равны 0.

3) Линейное пространство $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{K_n})$ из всех матриц n-го порядка с элементами из $\boldsymbol{K}$ с обычным матричным умножением дает пример конечномерной некоммутативной алгебры размерности n^2. Эта алгебра обладает единицей, которой является единичная матрица E.

4) Более общим примером некоммутативной алгебры

с единицей является линейное пространство $B(\boldsymbol{K})$ всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{K}$, с обычным для операторов действием умножения.

Определение 2. Подпространство $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{K}$ называется подалгеброй алгебры $\boldsymbol{K}$, если из $x, y \in \boldsymbol{L}$ следует $xy \in \boldsymbol{L}$.

Определение 3. Подпространство $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{K}$ называется левым идеалом в $\boldsymbol{K}$, если из $x \in \boldsymbol{L}$, $y \in \boldsymbol{L}$ следует $xy \in \boldsymbol{L}$, и левым идеалом в $\boldsymbol{K}$, если из $x \in \boldsymbol{L}\, y \in \boldsymbol{L}$ следует $yx \in \boldsymbol{L}$. Идеал, одновременно левый и правый, называется двусторонним идеалом.

В коммутативной алгебре нет различия между левыми, правыми и двусторонними идеалами. Во всякой алгебре $\boldsymbol{L}$ имеются два очевидных двусторонних идеала: один, обозначаемый (0), – состоящий из единственного элемента 0, второй – состоящий из всех элементов $x \in \boldsymbol{L}$. Все остальные идеалы, односторонние и двусторонние, называются собственными идеалами. Всякий идеал есть подалгебра, обратное, вообще говоря, несправедливо. Так, совокупность всех многочленов $\mathrm{P}(\lambda)$, удовлетворяющих условию $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1)$, есть подалгебра алгебры П, не являющаяся идеалом. Совокупность всех многочленов $\mathrm{P}(\lambda)$, удовлетворяющих условию $\mathrm{P}(0) = 0$, есть собственный идеал в алгебре П.

Пусть $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{K}$ есть подпространство в алгебре $\boldsymbol{K}$. Рассмотрим фактор-пространство $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$, т. е. линейное пространство из классов $\boldsymbol{X}$ элементов $x \in \boldsymbol{K}$, взаимно сравнимых относительно подпространства $\boldsymbol{L}$. Если $\boldsymbol{L}$ – двусторонний идеал в $\boldsymbol{K}$, то для классов $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$, кроме линейных операций, можно ввести операцию умножения. Имея классы $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, выберем произвольно элементы $x \in \mathbf{X}$, $y \in \mathbf{Y}$, и под произведением $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}$ будем понимать класс, содержащий произведение xy.

Определение 3. Фактор-пространство $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$ с введенным в нем умножением является также алгеброй, которая называется фактор-алгеброй алгебры $\boldsymbol{K}$ по двустороннему идеалу $\boldsymbol{L}$.

Очевидно, она коммутативна, если коммутативна алгебра $\boldsymbol{K}$.

Пусть имеются две алгебры $\boldsymbol{L_1}$ и $\boldsymbol{L_2}$ над полем $\boldsymbol{K}$.

Определение 4. Морфизм ω линейного пространства $\boldsymbol{L_1}$ в пространство $\boldsymbol{L_2}$ называется морфизмом алгебры $\boldsymbol{L_1}$ в алгебру $\boldsymbol{L_2}$, если наряду с условиями морфизма пространств

1) $\omega(x_1 + y_1) = \omega(x_1) + \omega(y_1)$ для любых $x_1, y_1 \in \boldsymbol{L_1}$;

2) $\omega(\alpha x) = \alpha\omega(x)$ для любого $x_1 \in \boldsymbol{L_1}$ и любого $\alpha \in \boldsymbol{K}$;

3) $\omega(x_1 \cdot y_1) = \omega(x_1) \cdot \omega(y_1)$ для любых $x_1, y_1 \in \boldsymbol{L_1}$.

Если морфизм ω есть эпиморфизм, мономорфизм или изоморфизм пространства $\boldsymbol{L_1}$ в пространство $\boldsymbol{L_2}$, то при выполнении условия 3) он соответственно называется эпиморфизмом, мономорфизмом, изоморфизмом алгебры $\boldsymbol{L_1}$ в алгебру $\boldsymbol{L_2}$.

Примеры 2.

1) Пусть $\boldsymbol{L}$ – подалгебра алгебры $\boldsymbol{K}$. Отображение ω, которое каждому вектору x ∈ **X** ставит в соответствие этот же вектор x в алгебре $\boldsymbol{K}$, есть морфизм алгебры $\boldsymbol{L}$ в алгебру $\boldsymbol{K}$, а именно, мономорфизм. Этот мономорфизм называется вложением $\boldsymbol{L}$ в $\boldsymbol{K}$.

2) Пусть $\boldsymbol{L}$ – двусторонний идеал алгебры $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$ – соответствующая фактор-алгебра. Отображение ω, которое каждому вектору x ∈ $\boldsymbol{K}$ ставит в соответствие класс $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$, содержащий элемент x, есть морфизм алгебры $\boldsymbol{K}$ в алгебру $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$, а именно, эпиморфизм. Этот эпиморфизм называется каноническим отображением $\boldsymbol{K}$ на $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$.

3) Пусть имеется мономорфизм ω алгебры $\boldsymbol{K_1}$ в алгебру $\boldsymbol{K_2}$. Совокупность всех векторов $\omega(x_1) \in \boldsymbol{K_2}$ есть

подалгебра $\boldsymbol{L_2} \subset \boldsymbol{K_2}$, и мономорфизм ω есть изоморфизм алгебры $\boldsymbol{K_1}$ в алгебру $\boldsymbol{L_2}$.

4) Пусть имеется морфизм ω алгебры $\boldsymbol{K_1}$ в алгебру $\boldsymbol{K_2}$.

Лемма 1. Совокупность $\boldsymbol{L_1}$ всех векторов $x_1 \in \boldsymbol{K_1}$, для которых $\omega(x_1) = 0$, есть двусторонний идеал алгебры $\boldsymbol{K_1}$.

Доказательство. Действительно, $\boldsymbol{L_1}$ есть подпространство в $\boldsymbol{K_1}$. Если $x_1 \in \boldsymbol{L_1}$, $y_1 \in \boldsymbol{K_1}$, то $\omega(x_1 y_1) = \omega(x_1) \cdot \omega(y_1) = 0$, так что $x_1 y_1 \in \boldsymbol{L_1}$. Аналогично $y_1 x_1 \in \boldsymbol{L_1}$, что и требовалось доказать. ■

Далее, мономорфизм Ω пространства $\boldsymbol{K_1}/\boldsymbol{L_1}$ в пространство $\boldsymbol{K_2}$, ставящий в соответствие каждому классу $X_1 \in \boldsymbol{K_1}/\boldsymbol{L_1}$ элемент $\omega(x_1)$, $x_1 \in X_1$, в данном случае есть мономорфизм алгебры $\boldsymbol{K_1}/\boldsymbol{L_1}$ в алгебру $\boldsymbol{K_2}$. Действительно, выбирая $x_1 \in X_1$, $y_1 \in Y_1$, имеем $x_1 y_1 \in X_1 Y_1$ и $\Omega(X_1 Y_1) = \omega(x_1 y_1) = \omega(x_1) \cdot \omega(y_1) = \Omega(X') \cdot \Omega(Y')$.

В частности, если морфизм ω есть эпиморфизм алгебры $\boldsymbol{K_1}$ в алгебру $\boldsymbol{K_2}$, то морфизм Ω есть изоморфизм алгебры $\boldsymbol{K_1}/\boldsymbol{L_1}$ с алгеброй $\boldsymbol{K_2}$.

5) Пусть A – линейный оператор, действующий в пространстве $\boldsymbol{K}$. Так как для линейных операторов в пространстве $\boldsymbol{K}$ определены операции сложения и умножения, то каждому многочлену $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k \in \Pi$ можем поставить в соответствие оператор $P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$, действующий в том же пространстве $\boldsymbol{K}$. При этом соответствии сложению и умножению многочленов отвечает сложение и умножение соответствующих операторов в смысле § 21 гл. IV. Действительно, пусть $P(\lambda) = \mathrm{P}_1(\lambda) + \mathrm{P}_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^k = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) \lambda^k$, тогда $P(A) = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) A^k = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k + \sum_{k=0}^{m} b_k A^k = P_1(A) + P_2(A)$. Аналогично пусть $Q(\lambda) = P_1(\lambda) \cdot P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k \cdot$

$\sum_{j=0}^{m} b_j\lambda^j = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j \lambda^{k+j}$, тогда по распределительному закону для операторов $Q(A) = \sum_{k=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_k b_j A^{k+j} = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k \sum_{j=0}^{n} b_j A^j = P_1(A) \cdot P_2(A)$.

Замечание. Операторы P(A) и Q(A) всегда коммутативны, каковы бы ни были многочлены $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$.

Получили морфизм алгебры многочленов П в алгебру линейных операторов $B(K)$. Вообще говоря, этот морфизм не есть эпиморфизм хотя бы потому, что операторы вида P(A) коммутируют друг с другом, а вся алгебра $B(K)$, за исключением тривиального случая $K = K_1$ некоммутативна.

6) Существует изоморфизм между алгеброй $B(\boldsymbol{K_n})$ всех линейных операторов, действующих в пространстве $\boldsymbol{K_n}$, и алгеброй $L(\boldsymbol{K_n})$ всех матриц n-го порядка с элементами из поля $\boldsymbol{K}$. Осуществляем его, фиксируя в пространстве $\boldsymbol{K_n}$ базис $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ и ставя в соответствие каждому оператору $A \in B(\boldsymbol{K_n})$ его матрицу в этом базисе. Обе эти алгебры имеют одинаковую размерность n^2.

В коммутативной алгебре П всех многочленов P(A) с коэффициентами из поля $\boldsymbol{K}$ совокупность всех многочленов вида $P(\lambda)Q_0(\lambda)$, где $Q_0(\lambda)$ – фиксированный многочлен, а $P(\lambda)$ – любой многочлен, очевидно, является идеалом.

Лемма 2. Любой идеал $I \neq 0$ алгебры П имеет такую структуру, т. е. получается из некоторого многочлена $Q_0(\lambda)$ умножением на любой многочлен $P(\lambda)$.

Доказательство. Для доказательства найдем в идеале I отличный от 0 многочлен наименьшей возможной степени, например q, и обозначим его через $Q_0(\lambda)$. Теперь утверждаем, что любой многочлен $Q(\lambda) \in I$ имеет вид $P(\lambda) \cdot Q_0(\lambda)$, где $P(\lambda) \in$ П. Действительно, по правилу действий с многочленами можно записать

$$Q(\lambda) \equiv P(\lambda) \cdot Q_0(\lambda) + R(\lambda), \tag{3}$$

где $P(\lambda)$ – частное от деления $Q(\lambda)$ на $Q_0(\lambda)$, а $R(\lambda)$ – остаток, имеющий степень, меньшую степени делителя, т. е. меньшую, чем число q. Многочлены $Q(\lambda)$ и $Q_0(\lambda)$ принадлежат идеалу I. Но тогда из равенства (3) и многочлен $R(\lambda)$ принадлежит идеалу I. Так как степень $R(\lambda)$ меньше q, а многочлен $Q_0(\lambda)$ в идеале имеет наименьшую возможную степень q среди многочленов, отличных от 0, то $R(\lambda) = 0$, что и требовалось доказать. ■

Многочлен $Q_0(\lambda)$ называется порождающим идеал I.

Следствие. Полином $Q_0(\lambda)$ определяет идеал I единственным образом с точностью до числового множителя.

Доказательство. Действительно, если бы наряду с $Q_0(\lambda)$ тем же свойством обладал многочлен $Q_1(\lambda)$, то, по доказанному, имели бы $Q_1(\lambda) = P_1(\lambda) \cdot Q_0(\lambda)$, $Q_0(\lambda) = P_0(\lambda) \cdot Q_1(\lambda)$. Из этих равенств вытекает, что степени многочленов $Q_1(\lambda)$ и $Q_0(\lambda)$ одинаковы, и что $P_1(\lambda)$и $P_0(\lambda)$ не содержат λ, т. е. являются числами, что и требовалось доказать. ■

Лемма 3. Пусть существуют многочлены $Q_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$ не все равные 0 и не имеющие общего делителя степени не меньше 1. Тогда существуют многочлены $P_i^0(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} P_i^0(\lambda) \cdot Q_i(\lambda) \equiv 1. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть I – совокупность всех многочленов вида $\sum_{i=1}^{m} P_i(\lambda) Q_i(\lambda)$, где $P_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$ – любой из П. Очевидно, совокупность I есть идеал в П. По лемме 2 идеал I порожден одним многочленом

$$Q_0(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} P_i^0(\lambda) \cdot Q_i(\lambda). \tag{5}$$

При этом, в частности, справедливы соотношения

$$Q_1(\lambda) = S_1(\lambda) \cdot Q_0(\lambda), \dots, Q_m(\lambda) = S_m(\lambda) Q_0(\lambda),$$

где $S_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$ – некоторые многочлены. Эти равенства показывают, что $Q_0(\lambda)$ есть общий делитель многочленов $Q_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда из предположения следует, что степень многочлена $Q_0(\lambda)$ равна 0, т. е. что $Q_0(\lambda)$ есть постоянная a_0. При этом $a_0 \neq 0$, так как иначе $I = 0$. Умножая (5) на $\frac{1}{a_0}$, получаем (4), что и требовалось доказать. ■

§36. Жорданова нормальная форма

Пусть A- матрица некоторого линейного оператора относительно базиса e пространства V; тогда $P^{-1}AP$-матрица того же оператора относительно базиса Pe. Матрицы A и $P^{-1}AP$ называются *подобными* или *сопряженными*. Выбрав подходящим образом базис, матрицу оператора можно привести к более простому виду: к нормальной жордановой форме, циклической форме, к матрице с равными элементами на диагонали или всеми нулевыми, кроме одного, элементами на диагонали и т.д.

Может показаться, что класс матриц, сопряженных с матрицей A посредством комплексных матриц, шире класса матриц, сопряженных с A посредством вещественных матриц. Но это не так.

Теорема. *Пусть A и B- вещественные матрицы и $A = PBP^{-1}$, P- комплексная матрица. Тогда $A = QBQ^{-1}$, Q- вещественная матрица.*

Доказательство. Требуется доказать, что если среди решений уравнения

$$AX = XB \qquad (1)$$

Есть невырожденная комплексная матрица P, то среди решений есть и невырожденная вещественная матрица Q. Решения над $\mathbb{C}$ линейного уравнения (1) образуют линейное пространство W над $\mathbb{C}$ с базисом $C_1, \dots, C_n$. Матрицу C_j можно представить в виде суммы $C_j = X_j + iY_j$, где X_j и Y_j- вещественные матрицы. Так как A и B- вещественные матрицы, то из равенства $AC_j = C_jB$ следуют равенства $AX_j = X_jB$ и $AY_j = Y_jB$. Поэтому пространство W порождено над $\mathbb{C}$ матрицами $X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n$, а значит, в нем можно выбрать вещественный базис $D_1, \dots, D_n$.

Пусть $P(t_1, \dots, t_n) = |t_1D_1, \dots, t_nD_n|$. По условию многочлен $P(t_1, \dots, t_n)$ не равен тождественно нулю над $\mathbb{C}$, поэтому он не равен тождественно нулю и над $\mathbb{R}$ (см. п. 1 приложения), матричное уравнение (1) имеет невырожденное вещественное решение $t_1D_1, \dots, t_nD_n$.

Жордановой клеткой называется квадратная матрица

$$J_r(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

порядка r.

Жордановой матрицей называется матрица, состоящая из диагональных блоков $J_r(\lambda)$ и нулей вне этих блоков.

Жордановым базисом для оператора $A: V \to V$ называется базис пространства V, в котором матрица A является жордановой.

Теорема. *Для любого линейного оператора $A: V \to V$ над алгебраически замкнутым полем существует жорданов базис, причем жорданова матрица оператора A определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток.*

Доказательство [Вальяхо, 1986]. Докажем сначала существование жорданова базиса. Доказательство

$$
\begin{array}{cccccc}
x_i^p & & & & & \\
\downarrow & & & & & \\
x_i^{p-1} & y_j^{p-1} & & & & \\
\downarrow & \downarrow & & & & \\
x_i^{p-2} & y_j^{p-2} & z_k^{p-2} & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
\dots & \dots & \dots & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
x_i^2 & y_j^2 & z_k^2 & \dots & a_s^2 & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\
x_i^1 & y_j^1 & z_k^1 & \dots & a_s^1 & b_t^1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{array}
$$

проведем индукцией по $n = dim\, V$. При $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть λ- собственное значение оператора A. Рассмотрим вырожденный оператор $B = A - \lambda E$. Жорданов базис для оператора B будет также жордановым базисом для оператора $A = B + \lambda E$. Последовательность $Im\, B^0 \supset Im\, B^1 \supset Im\, B^2 \supset \cdots$ стабилизируется, поэтому можно выбрат натуральное число p так, что $Im\, B^{p+1} = Im\, B^p \neq Im\, B^{p-1}$. Тогда $Im\, B^p \cap Ker\, B = 0$ и $Im\, B^{p-1} \cap Ker\, B \neq 0$. Следовательно, $B^p(Im\, B^p) = ImB^p$.

Пусть $S_i = Im\, B^{i-I} \cap Ker\, B$. Тогда $Ker\, B = S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_p \neq 0$ и $S_{p+1} = 0$. Следить за дальнейшим ходом доказательства поможет рис 4. Выберем в пространстве S_p базис $x_i^1\ (i = 1, \dots, n_p)$. Так как $x_i^1 \in Im\, B^{p-1}$, то $x_i^1 = B^{p-1}x_i^p$ для некоторого вектора x_i^p. Рассмотрим векторы $x_i^p = B^{p-k}x_i^k\ (k = 1, \dots, p)$. Векторы x_i^1 дополним до базиса пространства S_{p-1} векторами y_j^1, найдем вектор y_j^{p-1}, для которого $y_j^1 = B^{p-2}y_j^{p-1}$, и рассмотрим векторы $y_j^l = B^{p-l-1}y_j^{p-1}\ (l = 1, \dots, p-1)$.

Затем дополним векторы x_i^1 и y_j^1 до базиса пространства S_{p-2} векторами z_k^1 и т.д. Если i изменяется от 1 до $I, \dots, t$ изменяется от 1 до T, то количество всех выбранных векторов равно $pI + (p-1)J + \cdots + 2S += I + (I+J) + \cdots + (I + J + \cdots + S + T) = dim\, S_p + dim\, S_{p-1} + \cdots + dim\, S_1$. А так как $dim\Big(Im\, B^{i-1} \cap Ker\, B\Big) = dim\, Ker\, B^i - dim\, Ker\, B^{i-1}$ (см. 6.1), то $\sum_{i=1}^p dim\, S_i = dim\, Ker\, B^p$.

Дополним выбранные векторы базисом пространства ImB^pи докажем, что получится базис пространства V. Количество этих векторов показывает, что достаточно проверить их линейную независимость. Предположим, что

$$f + \sum \alpha_i x_i^{\varphi} + \sum \beta_i x_i^{p-1} + \cdots + \sum \gamma_j y_j^{p-1} + \cdots + \sum \delta_t b_t^1 = 0, \quad (1)$$

где $f \in ImB^p$. Применив к (1) оператор B^p, получим $B^p(f) = 0$, а значит, $f = 0$ так как $B^p\big(ImB^p\big) = ImB^p$. Применив теперь к (1) оператор B^{p-1}, получим $\sum \alpha_i x_i^{\varphi} = 0$. А значит, все числа α_i нулевые, и т.д.

По предположению индукции в пространстве $ImB^p \neq V$ можно выбрать жорданов базис для оператора B; дополнив его выбранными векторами, получим жорданов базис пространства V.

Для доказательства однозначности жордановой формы достаточно проверить, что количество жордановых клеток матрицы B, соответствующих нулевому собственному значению, определенно однозначно. Этим клеткам можно сопоставить диаграмму, изображенную на рис 4, поэтому количество клеток порядка k равно

$$\begin{aligned}
dim\, S_k - dim\, S_k - 1 = &\\
&= \left(dim\, Ker\; B^k - dim\, Ker\; B^{k-1}\right) \\
&- \left(dim\, Ker\; B^{k+1} - dim\, Ker\; B^k\right) \\
&= 2\; dim\, Ker\; B^k - dim\, Ker\; B^{k-1} \\
&- dim\, Ker\; B^{k+1} \\
&= rk\, B^{k-1} - 2\, rk\, B^k + rk\; B^{k+I};
\end{aligned}$$

это число определено инвариантно.

Жорданову нормальную форму удобно использовать при возведении матрицы в степень. В самом деле, если $A = P^{-1}JP$, то $A^s = P^{-1}J^sP$. Для возведения в степень жордановой клетки $\lambda E + N$ можно воспользоваться формулой бинома Ньютона $(\lambda E + N)^s = \sum_{k=0}^{s} \lambda E + C_s^k \lambda^k N^{s-k}$ (эта формула верна, так как $EN = NE$). Единственными ненулевыми элементами матрицы N^m являются единицы на местах $(1, m+1), (2, m+2), \dots, (n-m, n)$, где n порядок матрицы N; если $m \geq n$, то $N^m = 0$.

Жорданов базис всегда существует лишь над алгебраически замкнутым полем; над полем $\mathbb{R}$ жорданов базис существует не всегда. Но над полем $\mathbb{R}$ тоже имеется жорданова форма, являющаяся овеществлением жордановой формы над $\mathbb{C}$. Объясним, как она устроена. Заметим сначала, что жорданов базис, соответствующий вещественным собственным значениям оператора A, над $\mathbb{R}$ строится точно так же, как над $\mathbb{C}$. Поэтому интересен лишь случай невещественных собственных значений.

Пусть $A^{\mathbb{C}}$- комплексификация вещественного оператора A (см. п. 10.1).

Теорема 1. *Между жордановыми клетками оператора* $A^{\mathbb{C}}$*, соответствующими собственным значениям* λ *и* λ*, существует взаимно однозначное соответствие.*

Доказательство. Пусть $B = P + iQ$, где P и Q-вещественные операторы. Если x, y- вещественные векторы, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, то равенства $Bz = 0$ и $\bar{B}\bar{z} = 0$ эквивалентны. А так как $\left(A - \bar{\lambda}E\right)^k = \overline{(A - \lambda E)^k}$. Размерности этих пространств определяют количество и размеры жордановых клеток.

Пусть $J_n^*(\lambda)$- матрица порядка $2n$, полученная из жордановой клетки $J_n(\lambda)$ заменой каждого элемента $x + iy$ матрицей $\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$.

Теорема 2. *Для оператора A существует базис, в котором его матрица имеет блочно диагональный вид с блоками $J_{m_1}(t_1), \dots, J_{m_k}(t_k)$ для вещественных собственных значений t_i и блоками $J_{n_1}^*(\lambda_1), \dots, J_{n_s}^*(\lambda_s)$ для невещественных собственных значений λ_i и $\bar{\lambda}_i$.*

Доказательство. Если λ- собственное значение оператора A, то согласно теореме 1 $\bar{\lambda}$- тоже собственное значение оператора A, причем каждой жордановой клетке $J_n(\lambda)$ оператора A соответствует жорданова клетка $J_n(\bar{\lambda})$. Кроме того, если $e_1, \dots, e_n$- жорданов базис для $J_n(\lambda)$, то $e_1, \dots, e_n$- жорданов базис для $J_n(\bar{\lambda})$. Поэтому вещественные векторы $x_1, y_1 \dots, x_n, y_n$, где $e_k = x_k + iy_k$, линейно независимы. Матрица ограничения оператора A на подпространство $\langle x_1, y_1 \dots, x_n, y_n \rangle$ в базисе $x_1, y_1 \dots, x_n, y_n$ имеет вид $J_n^*(\lambda)$.

Жорданово разложение показывает, что любой линейный оператор A можно представить в виде суммы $A = A_s + A_n$, где A_s- диагональный оператор, A_n-нильпотентный оператор, причем $A_s A_n = A_n A_s$.

Теорема 1. *Операторы A_s и A_n определены однозначно, причем $A_s = S(A)$ и $A_n = N(A)$, где S и N-некоторые многочлены.*

Доказательство. Рассмотрим сначала одну жорданову клетку $A = \lambda E + N_k$ порядка k. Пусть $S(t) = \sum_{i=1}^{m} s_i t^i$. Тогда $S(A) = \sum_{i=1}^{m} s_i \sum_{j=0}^{i} C_i^j \lambda^j N_k^{i-j}$, так как $EN_k = N_k E$. Коэффициент при N_k^p равен $\sum_i s_i C_i^{i-p} \lambda^{i-p} = \frac{1}{p!} S^{(p)}(\lambda)$, $S^{(p)}$- p- я производная многочлена S. Поэтому нужно подобрать многочлен S так, что $S(\lambda)=\lambda$ и $S^{'}(\lambda) = \cdots = S^{(k-1)}(\lambda) = 0$, где k- порядок жордановой клетки. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$- различные собственные значения оператора $A, k_1, \ldots, k_n$- порядки максимальных соответствующих им жордановых клеток, то многочлен S должен принимать в точке λ_i значение λ_i и иметь нулевые производные до порядка $k_i - 1$ включительно. Такой многочлен всегда можно построить (см. п. 3 приложения). Ясно также, что если $A_s = S(A)$, то $A_n = A - S(A)$, т.е. $N(A) = A - S(A)$.

Докажем теперь единственность разложения. Пусть $A_s + A_n = A = A_s^{'} + A_n^{'}$, причем $A_s A_n = A_n A_s$ и $A_s^{'} A_n^{'} = A_n^{'} A_s^{'}$. Если $AX = XA$, то $S(A)X = XS(A)$ и $N(A)X = XN(A)$. Поэтому $A_s A_s^{'} = A_s^{'} A_s$ и $A_n A_n^{'} = A_n^{'} A_n$. Оператор $B = A_s' - A_s = A_n - A_n'$ является разностью коммутирующих диагонализируемых оператор, поэтому он диагонализируем (см. задачу 39.6, б). С другой стороны, оператор B является разностью коммутирующих нильпотентных операторов, поэтому он нильпотентен (см. задачу 39.6, а)). Диагонализируемый нильпотентный оператор равен нулю.

Аддитивное жорданово разложение $A = A_s + A_n$ позволяет получить для невырожденного оператора A разложение $A = A_s A_u$, где A_u- *унипотентный* оператор, т.е. сумма единичного оператора и нильпотентного.

Теорема 2. *Пусть* A- *невырожденный оператор над* $\mathbb{C}$. *Тогда* A *можно представить в виде* $A = A_u A_s$, *где* A_s-

полупростой оператор, A_u- унипотентный оператор, причем такое разложение единственно.

Доказательство. Если оператор A невырожден, то оператор A_s тоже невырожден. Тогда $A = A_s + A_n = A_s A_u$, где $A_u = A_s^{-1}$ и A_n коммутируют (см. п. 2.4), то $A_s^{-1} A_n$- нильпотентный оператор, коммутирующий с A. Такой оператор $A_s\, N = A_n$ единствен.

§37. Каноническая форма Фробениуса

Жорданова форма является лишь одной из канонических форм матриц линейных операторов. Примером другой канонической формы является циклическое разложение (*каноническая форма Фробениуса*).

Циклической клеткой называется матрица вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Если $A: V^n \to V^n$ и $Ae_1, = e_2, \dots, Ae_{n-1} = e_n$, то матрица оператора A относительно базиса $e_1, \dots, e_n$ является циклической клеткой.

Теорема. *Для любого линейно оператора $A: V \to V$ и (над полем $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$) существует базис, в котором матрица A имеет блочно диагональный вид, причем блоками являются циклические клетки.*

Доказательство [Джекоб, 1973]. Применим индукцию по размерности пространства V. Если степень минимального многочлена A равна k, то существует вектор $y \in V$, степень минимального многочлена которого тоже равна k. Пусть $y_i = A^{i-1} y$. Дополним базис $y_1, \dots, y_k$ пространства $W = \langle y_1, \dots, y_k \rangle$ до базиса пространства V и рассмотрим $W_1^* = \langle y_k, A^* y_k^*, \dots, A^{*k-1} y_k^* \rangle$. Докажем, что $V = W \oplus W_1^* - A$- инвариантное разложение пространства V.

Степень минимального многочлена оператора A^* тоже равна k, поэтому подпространство W_1^* инвариантно относительно A^*, а значит, подпространство $\left(W_1^*\right)^{\perp}$ инвариантно относительно A. Остается доказать, что $W_1^* \cap W^{\perp} = 0$ и $dim\, W_1^* = k$. Предположим, что $a_0 y_k^* + \dots + a_s A^{*s} y_k^* \in W^{\perp}$ при $0 \le s \le k-1$ и $a_s \ne 0$. Тогда $A^{*k-s-1}\left(a_0 y_k^* + \dots + a_s A^{*s} y_k^*\right) \in W^{\perp}$, значит, $0 = \langle a_0 A^{*k-s-1} y_k^* + \dots + a_s A^{*k-1} y_k^*, y \rangle = a_0 \langle y_k^*, A^{*k-s-1} y \rangle + \dots + a_s \langle y_k^*, A^{k-1} y \rangle = a_0 \langle y_k^*, y_{k-s} \rangle + \dots + a_s \langle y_k^*, y_k \rangle = a_s$.

Получено противоречие.

Матрица ограничения оператора A на подпространство W в базисе $y_1, \dots, y_k$, является циклической клеткой. Ограничение оператора A на подпространство $W_1^{*\perp}$ можно представить в требуемом виде по предложению индукции.

<u>Замечание</u>. При доказательстве для оператора A найден базис, в котором его матрица имеет блочно диагональный вид. На диагонали стоят циклические клетки с характеристическими многочленами $p_1, p_2, \dots, p_k$, где p_1- минимальный многочлен A, p_2- минимальный многочлен A на некоторое подпространство, поэтому p_2- делитель p_1. Аналогично p_{i+1}- делитель p_i.

Докажем, что характеристический многочлен циклический клетки

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

равен $\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_k$. Так как $Ae_1, = e_2, \dots, Ae_{n-1} = e_n$ и $Ae_n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda_{k+1}$, то $\left(A^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k\right) e_1 = 0$.

Учитывая, что $e_i = A^{i-1}e_1$ линейно независимы, поэтому степень минимального многочлена A не меньше n.

Попутно доказали, что характеристический многочлен циклической клетки совпадает с минимальным многочленом.

§38. Полярное разложение

Любое комплексное число z можно представить в виде $z = |z|e^{i\varphi}$. Аналогом этого представления является *полярное* разложение матрицы $A = SU$, где S- эрмитова, U- унитарная матрица.

Теорема. *Любую квадратную матрицу A над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$) можно представить в виде $A = SU$, где S- симметрическая (эрмитова) неотрицательно определенная матрица, U- ортогональная (унитарная) матрица. Если матрица A невырождена, то такое представление единственно.*

Доказательство. Если $A = SU$, S- эрмитова, U- унитарная матрица, то $AA^* = SUU^*S = S^2$. Если матрица S к тому же неотрицательно определена, то равенство $S^2 = AA^*$ задает ее однозначно. Для невырожденной матрицы A остается положить $U = S^{-1}A$. Матрица U унитарна, так как $UU^* = S^{-1}AA^*S^{-1} = E$.

В случае вырожденной матрицы A требуются более тонкие рассуждения. Для оператора AA^* существуют ортонормированный собственный базис $z_1, \ldots, z_n$, причем $AA^*z_i = k_i^2$, где $z_k \in \mathbb{R}$. Положим $Sz_i = k_i z_i$, где $k_i \geq 0$. Можно считать, что числа $k_1, \ldots, k_m$, положительны и $k_{m+1} = \cdots = k_n = 0$. Пусть $w_i = A^*z_i/k_i$ для $i \leq m$ и $W = \langle w_1, \ldots, w_m \rangle$. Так как $k_i k_j(w_1, w_m) = \left(A^*z_i, A^*z_j\right) = \left(z_i, AA^*z_j\right) = k_j^2\left(z_i, z_j\right)$, то $w_1, \ldots, w_m$- ортонормированный базис пространства W. Дополним векторы $w_1, \ldots, w_m$ до ортонормированного базиса $w_1, \ldots, w_n$, и положим $Uw_i = z_i$. Докажем, что $A = SU$. Для $i \leq m$ $SUw_i = Sz_i = k_i z_i$ и $Aw_i = AA^* z_i / k_i = k_i z_i$. Для $i > m$ $SUw_i = 0$ и $Aw_i, Aw_i = (w_i, A^* Aw_i\ ) = 0$, так как $A^* Aw_i \in\ Im\, A^* A \subset Im A^* = W$.

Замечание. Матрицу A^* можно представить в виде $A^* = SU$, поэтому $A = (A^*)^* = U^* S$, где матрица U^* унитарна.

Теорема1. *Любую матрицу A можно представить в виде $A = UDW$, где U и W- унитарные матрицы, D-диагональная матрица.*

Доказательство. Пусть $A = SV$, S- эрмитова, V-унитарная матрица. Для матрицы S существует такая унитарная матрица U, что $S = UDU^*$, где D- диагональная матрица. Матрица $W = U^* V$ унитарна и $A = A = SV = UDWSV = UDW$.

Теорема 2. *Если $A = S_1 U_1 = U_2 S_2$- полярные разложения невырожденной матрицы A*, то $U_1 = U_2$.

Доказательство. Пусть $A = UDW$, где U и W-унитарные матрицы, а $D = diag(|d_1|, \ldots, |d_n|)$. Рассмотрим матрицу $D_+ = diag(|d_1|, \ldots, |d_n|)$. Тогда $DD_+ = D_+ D$, а значит, $A = (UD_+ U^*)(UD_+^{-1} DW) = (UD_+^{-1} DW)(W^* D_+ W)$.

Матрицы $UD_+ U^*$ и $W^* D_+ W$ положительно определенные, а матрица $D_+^{-1} D$ унитарная. Из единственности полярного разложения невырожденной матрицы следует, что $S_1 = UD_+ U^*, S_2 = W^* D_+ W$ и $U_1 = UD_+^{-1} DW = U_2$.

Лекция 18

§39. Каноническая форма матрицы линейного оператора

Рассмотрим линейный оператор A в n-мерном пространстве $\boldsymbol{L_n}$.

Отображение $\omega\big(P(\lambda)\big) = P(A)$ есть эпиморфизм алгебры П всех многочленов с коэффициентами из поля **K** в алгебру Π_A линейных операторов вида $P(A)$ в пространстве $\boldsymbol{L_n}$. Алгебра Π_A изоморфна фактор-алгебре Π/I, где I – идеал, состоящий из всех многочленов $P(\lambda)$, для которых $\omega\big(P(\lambda)\big) = P(A) = 0$. Выясним структуру этого идеала.

Совокупность всех линейных операторов, действующих в пространстве $\boldsymbol{L_n}$ представляет собой алгебру над полем **K** размерности n^2. Фиксируя оператор A, рассмотрим последовательность операторов $A^0 = E, A, A^2, \dots, A^m, \dots$.

В этой последовательности первые $n^2 + 1$ членов линейно зависимы. Пусть, например, $\sum_{k=0}^{m} c_k A^k = 0$ $(m \le n^2)$. Это означает, в установленном выше соответствии $Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} c_k \lambda^k$ соответствует нулевой оператор.

Определение. Всякий многочлен $Q(\lambda)$, для которого оператор $Q(A)$ есть нулевой оператор, будем называть аннулирующим многочленом оператора A.

Следовательно, лемма доказана.

Лемма. Любой оператор A имеет аннулирующий многочлен степени не больше n^2.

Совокупность всех аннулирующих многочленов оператора A есть идеал в алгебре П. И, следовательно, существует многочлен $Q_0(\lambda)$, определенный с точностью до множителя, такой, что все аннулирующие многочлены имеют вид $P(\lambda) \cdot Q_0(\lambda)$., где P – любой многочлен из П.

В частности, $Q_0(\lambda)$ сам является аннулирующим многочленом. Среди всех аннулирующих многочленов он имеет наименьшую степень и поэтому называется минимальным аннулирующим многочленом для оператора A.

Теорема 1. Пусть аннулирующий многочлен $Q(\lambda)$ оператора A разложен в произведение двух взаимно простых множителей $Q(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot Q_2(\lambda)$.

Тогда пространство $\boldsymbol{L_n}$ разлагается в прямую сумму двух подпространств $\boldsymbol{L_n} = T_1 + T_2$,инвариантных относительно оператора A так, что $AT_i \subset T_i$, $i = 1,2$, причем для любых $x_1 \in T_1$ и $x_2 \in T_2$ $Q_1(A)x_2 = 0$, $Q_2(A)x_1 = 0$, так, что $Q_1(A)$ $(Q_2(A))$ есть аннулирующий многочлен для A, действующий в пространстве $T_1(T_2)$.

Доказательство. По лемме существуют такие $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$, что $P_1(\lambda) \cdot Q_1(\lambda) + P_2(\lambda) \cdot Q_2(\lambda) \equiv 1$. Используя морфизм ω, получаем $P_1(A) \cdot Q_1(A) + P_2(A) \cdot Q_2(A) \equiv E$.

Обозначим T_k $(k = 1,2)$ область значений оператора $Q_k(A)$, т. е. совокупность векторов вида $Q_k(A)x$, $x \in \boldsymbol{L_n}$. Тогда из $y = Q_k(A)x \in T_k$, т. к. $Ax \in L_n$, следует $Ay = Q_k(A)Ax \in T_k$, так что подпространство T_k инвариантно относительно A.

Имеем для любого $x_1 \in T_1$ и некоторого $y \in \boldsymbol{L_n}$

$$Q_2(A)x_1 = Q_2(A)Q_1(A)y = Q(A)y = 0,$$

и аналогично для любого $x_2 \in T_2$ и некоторого $z \in \boldsymbol{L_n}$

$$Q_1(A)x_2 = Q_1(A)Q_2(A)z = Q(A)z = 0.$$

Далее, для любого $x \in \boldsymbol{L_n}$, имеет место равенство

$$x = Q_1(A)P_1(A)x + Q_2(A)P_2(A)x = x_1 + x_2,$$

где $x_k = Q_k(A)P_k(A)x \in T_k$ $(k = 1,2)$, которое показывает, что подпространства T_1 и T_2 в сумме дают все $\boldsymbol{L_n}$.

Пусть $x_0 \in T_1 \cap T_2$, тогда $Q_1(A)x_0 = Q_2(A)x_0 = 0$, следовательно, $x_0 = P_1(A)Q_1(A)x_0 + P_2(A)Q_2(A)x_0 = 0$.

Таким образом, $T_1 \cap T_2 = 0$, и сумма $T_1 + T_2 = \boldsymbol{L_n}$ – прямая. Разумеется, не исключена возможность, что одно из подпространств T_1, T_2 состоит только из одного нулевого вектора. ■

<u>Замечание.</u> По построению оператор $Q_1(A)$ аннулирует подпространство T_2, а оператор $Q_2(A)$

аннулирует подпространство T_1. Покажем, что любой вектор x, аннулируемый оператором $Q_1(A)$, лежит в T_2, и всякий вектор x, аннулируемый оператором $Q_2(A)$, лежит в T_1.

Доказательство. Пусть $Q_1(A)x = 0$, имеем $x = x_1 + x_2$, где $x_i \in T_i\ (i = 1, 2)$. Так как $Q_1(A)x_2 = 0$, то и $Q_1(A)x_1 = Q_1(A)x - Q_1(A)x_2 = 0$. Но и $Q_2(A)x_1 = 0$, поскольку $x_1 \in T_1$. Следовательно, $x_1 = P_1(A)Q_1(A)x_1 + P_2(A)Q_2(A)x_1 = 0$, $x = x_2 \in T_2$. Аналогично из $Q_2(A)x = 0$ следует $x \in T_1$, что и требовалось доказать. ■

Разлагая многочлены $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$ на взаимно простые множители, получаем возможность разбивать пространство $\boldsymbol{L_n}$ на более мелкие инвариантные относительно оператора A подпространства, аннулируемые соответствующими множителями многочленов $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$.

Пусть многочлен $P(\lambda)$ допускает в поле $\boldsymbol{L_n}$ разложение вида

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{m}(\lambda - \lambda_j)^{r_j}, \tag{6}$$

где λ_j – все различные корни многочлена, а r_j – их кратности. Такое разложение всегда возможно, в частности, в поле C комплексных чисел. Разложение (6) есть разложение на m попарно взаимно простых множителей $(\lambda - \lambda_j)^{r_j}$.

Теорема 2. Если аннулирующий многочлен оператора A имеет вид (6), то пространство $\boldsymbol{L_n}$ разлагается в прямую сумму m подпространств $T_1, \dots, T_m$, инвариантных относительно оператора A, причем подпространство T_k аннулируется оператором $B_k^{r_k}$, где $B_k = A - \lambda_k E$.

Доказательство. Утверждение теоремы получаем последовательным применением теоремы 1 к аннулируемому полиному (6). ■

В каждом ненулевом пространстве T_k можно выбрать базис, в котором матрица оператора $\mathrm{B_k}$ (по построению нильпотентного в пространстве T_k) примет канонический вид (2) §26 гл. V. В этом же базисе матрица оператора $A = B_k + \lambda_k E$ примет вид

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Матрица оператора A во всем пространстве $\boldsymbol{L_n} = T_1 + \cdots + T_m$ в базисе, который получается объединением всех канонических базисов, построенных в пространствах, приобретает окончательную форму.

$$J(A) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{matrix} & & & & & & & \\ & \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \begin{matrix} \lambda_m & 1 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_m & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{matrix} & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Формулируем окончательный результат:

Теорема 3. Для любого оператора A в n-мерном пространстве $\boldsymbol{L_n}$, имеющего аннулирующий многочлен вида (6) (в частности, для любого оператора A в n-мерном комплексном пространстве $\boldsymbol{C_n}$), существует базис, в котором матрица оператора A записывается в форме (8). Матрица (8) называется нормальной формой Жордана оператора A, а соответствующий базис – базисом Жордана.

В случае $\boldsymbol{L_n} = \boldsymbol{C_n}$ комплексные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ можно упорядочить по какому-либо правилу: например, в порядке возрастания модулей, а при равных модулях – в порядке возрастания аргумента θ, меняющегося в промежутке $0 \leq \theta < 2\pi$.

Для оператора A, действующего в пространстве $\boldsymbol{L_n} \neq \boldsymbol{C_n}$ представление (8) возможно не всегда.

§40. Элементарные делители

Матрицу (8) можно задать таблицей

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1; & n_1^1, & \cdots, & n_{r_1}^1 \\ \lambda_2; & n_1^2, & \cdots, & n_{r_2}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_m; & n_1^m, & \cdots, & n_{r_m}^m \end{matrix}\right\} (n_1^k \geq n_2^k \geq \cdots \geq n_{r_k}^k), \qquad (9)$$

в которой для каждого диагонального числа λ_k указаны размеры $n_1^k, n_2^k, \dots, n_{r_k}^k$ соответствующих «элементарных жордановых клеток» вида

$$\left.\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_k} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_k} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right\} \boldsymbol{n_j^k} \text{строк}, \qquad (10)$$

встречающихся в матрице (8). Выясним, как построить таблицу (9) и тем самым восстановить вид матрицы $J(A)$ оператора A по известной его матрице A в каком-либо базисе пространства $\boldsymbol{L_n}$.

Характеристический многочлен оператора A не зависит от выбора базиса. Составим его для жорданова базиса. Так как под главной диагональю стоят нули, получим

$$\det(A-\lambda E)=det(J(A)-\lambda E)=\prod_{k=1}^{m}(\lambda_k-\lambda)^{n_1^{(k)}+\cdots+n_{\mathrm{r}_k}^{(k)}}. \quad (11)$$

Очевидно, что числа λ_k являются корнями характеристического многочлена, а суммы $r_k=n_1^{(k)}+\cdots+n_{\mathrm{r}_k}^{(k)}$ – их кратности.

Таким образом, вычисляя характеристический многочлен и находя его корни, получим величины λ_k и $r_k=n_1^{(k)}+\cdots+n_{\mathrm{r}_k}^{(k)}$ таблицы (9).

Так как $J(A)$ и A – матрицы одного и того же оператора A, взятого в разных базисах, справедливо равенство

$$J(A)=T^{-1}AT,$$

где T – невырожденная матрица, поэтому

$$J(A)-\lambda E=T^{-1}(A-\lambda E)T.$$

Миноры фиксированного, например p-го, порядка матрицы $A-\lambda E$ представляют собой некоторые многочлены от λ степени p. Обозначим через $I_p(\mathrm{A})$ идеал в алгебре П, порожденный всеми этими минорами. Аналогичный смысл имеет идеал $I_p(J(A))$.

Теорема. $I_p(\mathrm{A})$ идеал в алгебре П совпадает с идеалом $I_p(J(A))$.

Доказательство. Действительно, каждый минор p-го порядка матрицы $J(A)-\lambda E$ является суммой произведений миноров p-го порядка матриц $A-\lambda E$, T^{-1} и T. Но элементы матриц T^{-1} и T суть числа. Таким образом, всякий минор p-го порядка матрицы $J(A)-\lambda E$ есть просто линейная комбинация миноров p-го порядка матрицы $A-\lambda E$ и тем самым входит в идеал $J(A)$. По симметрии каждый минор p-го порядка матрицы $A-\lambda E$ входит в идеал $I_p(J(A))$. Тем самым $I_p(\mathrm{A}) = J(A) - \lambda E$, что и требовалось доказать. ■

Пусть $\mathrm{D_p}(\lambda)$ – порождающий многочлен этого идеала, который может быть определен как общий наибольший делитель многочленов, порождающих идеал $I_p(\mathrm{A})$. Таким образом, наибольший общий делитель миноров p-го порядка у матрицы $J(A) - \lambda E$ тот же, что и у миноров p-го порядка матрицы $A - \lambda E$, и поэтому может считаться известным. Вычислим непосредственно наибольший общий делитель миноров p-го порядка матрицы $J(A) - \lambda E$. Вместо матрицы $J(A) - \lambda E$ при этом можно рассматривать матрицу вида $P(IA - \lambda E)Q$, где P и Q – обратимые числовые матрицы, не содержащие λ. Операции перестановок строк, столбцов, прибавления к одному столбцу другого с произвольным множителем в матрице $J(A) - \lambda E$ приводят как раз к такого рода матрицам. Утверждаем, что элементарную клетку

$$\begin{pmatrix} \lambda_k - \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k - \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k - \lambda \end{pmatrix},$$

указанными операциями можно преобразовать к виду

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_k - \lambda)n_j^{(k)} \end{pmatrix}\right\} n_j^k \text{ строк.} \qquad (12)$$

Для получения требуемого результата следует вначале из второй строки вычесть первую, умноженную на $\lambda_k - \lambda$, из третьей – вторую, умноженную на $\lambda_k - \lambda$, и т. д. Получим матрицу $p = n_j^k$

$$\begin{pmatrix} \lambda_k - \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ -(\lambda_k - \lambda)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{P-2}(\lambda_k - \lambda)^{p-1} & 0 & \cdots & 1 \\ (-1)^{P-1}(\lambda_k - \lambda)^p & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если теперь из первого столбца вычесть второй, умноженный на $\lambda_k - \lambda$, затем третий, умноженный на $-(\lambda_k - \lambda)^2$,..., $P-1$-й, умноженный на $(-1)^{P-2}(\lambda_k - \lambda)^{p-1}$, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ (-1)^{P-1}(\lambda_k - \lambda)^p & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad (13)$$

из которой матрица (12) получается перестановкой столбцов.

Теперь подсчитаем общий наибольший делитель миноров p-го порядка у матрицы $\mathrm{J}(\lambda)$ с клетками вида (12) на главной диагонали. Так как у этой матрицы вне главной диагонали стоят нули, то отличными от нуля могут быть лишь миноры с одинаковым набором номеров строк и столбцов. Такой минор равен произведению своих диагональных элементов.

В матрице $\hat{\mathrm{J}}(\lambda)$ среди элементов на главной диагонали имеется некоторое число, положим N, биномов вида $(\lambda_k - \lambda)^{n_j^k}$, а остальные $n - \mathrm{N}$ элементов главной диагонали равны 1. Число N есть полное число жордановых клеток в матрице $J(A)$, т. е. $\mathrm{N} = \mathrm{r}_1 + \cdots + \mathrm{r}_\mathrm{m}$. С другой стороны, среди миноров до порядка $(n - \mathrm{N})$ заведомо имеются равные 1, следовательно, $\mathrm{D_p}(\lambda) \equiv 1$ при $p \leq n - \mathrm{N}$. Можно заменить матрицу $\hat{\mathrm{J}}(\lambda)$ более простой диагональной матрицей

$$
I(\lambda)=\begin{pmatrix}
(\lambda_1-\lambda)^{n_1^1} & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & (\lambda_1-\lambda)^{n_{r_1}^1} & & & \\
 & & & (\lambda_2-\lambda)^{n_1^2} & & \\
 & & & & \ddots & \\
 & & & & & (\lambda_m-\lambda)^{n_{r_m}^m}
\end{pmatrix},
$$

тогда многочлен $D_p(\lambda)$, вычисленный для матрицы $\hat{J}(\lambda)$, будет совпадать с многочленом $D_{p-(n-N)}(\lambda)$, вычисленный для матрицы $I(\lambda)$. Очевидно, наибольший общий делитель миноров p-го порядка матрицы $I(\lambda)$ имеет вид

$$D_p(\lambda)=\prod_{j=1}^{m}(\lambda_j-\lambda)^{m_j(p)}, \tag{14}$$

где $m_j \geq 0$. Величина $m_1(p)$ есть наименьший показатель, с которым $\lambda_1-\lambda$ входит во все миноры p-го порядка. Если $p \leq n_1^2+\cdots+n_{r_m}^m$, то имеется минор p-го порядка, не содержащий вообще $\lambda_1-\lambda$, так что при этих p имеем $m_1(p)=0$ для $p=n_1^2+\cdots+n_{r_m}^m+1$. Учитывая, что показатели $n_1^1,\dots,n_{r_1}^1$ идут в убывающем порядке, имеем $m_1(p)=n_{r_1}^1$.

В дальнейшем на каждую единицу увеличения p показатель $m_1(p)$ будет увеличиваться соответственно на $n_{r_1-1}^1, n_{r_1-2}^1, \dots$, наконец, при $p=n$ получим $m_1(p)=n_1^1+\cdots+n_{r_1}^1$.

Аналогично, $m_j(p)=n_1^j+\cdots+n_{r_j}^j$, $1 \leq j \leq m$.

Определение. Отношение $E_p(\lambda)=\frac{D_{p+1}(\lambda)}{D_p(\lambda)}$ называется элементарным делителем оператора A.

Вместе с многочленами $D_p(\lambda)$ элементарные делители не зависят от выбора базиса, и их можно вычислять по матрице оператора A в любом базисе.

Лекция 19

§41. Следствия

Если известно, что оператор A приводится к диагональному виду, т. е. его матрица в некотором базисе имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_m \end{pmatrix},$$

то матрица A и есть жорданова матрица оператора A. Все жордановы клетки имеют размер 1. В частности, все элементарные делители имеют простые корни. Обратно, если все элементарные делители некоторого оператора A имеют только простые корни, жорданова матрица $J(A)$ имеет клетки только размера 1 и, следовательно, диагональна.

Имея жорданову форму оператора A, можно написать его минимальный аннулирующий многочлен. Пусть оператор B в некотором базисе $\{\mathbf{e_1} \dots, \mathbf{e_p}\}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Это означает, что $B_{\boldsymbol{e_1}} = 0, B_{\boldsymbol{e_2}} = \boldsymbol{e_1}, \dots, B_{\boldsymbol{e_p}} = \boldsymbol{e_p} - 1$, откуда следует, что $B^p x = 0$ при любом $\boldsymbol{x} = \sum_1^p c_k \boldsymbol{e_k}$. Таким образом, аннулирующий многочлен оператора B имеет вид λ^p. Минимальный аннулирующий многочлен, как делитель λ^p, должен иметь вид λ^m, $m \leq p$. Поскольку $B_{\boldsymbol{e_p}}^{p-1} = \boldsymbol{e}_1 \neq 0$, видим, что λ^p и есть минимальный аннулирующий многочлен.

Пусть оператор A в том же базисе $\{\mathbf{e_1} \dots, \mathbf{e_p}\}$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix},$$

так что $A = B + \lambda_0 E$. По доказанному $(A - \lambda_0 E)^p = B^p = 0$, так что для оператора A аннулирующим многочленом является $(\lambda_0 - \lambda)^p$, который является и минимальным в силу той же аргументации.

Пусть оператор A имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_0 \end{matrix}} \end{pmatrix},$$

причем числа $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_r$ – размеры ее диагональных клеток. Многочлен $Q(\lambda)$, аннулирующий оператор A, должен по отдельности аннулировать каждую его клетку. Этим свойством обладает многочлен $(\lambda_0 - \lambda)^{p_1}$. По указанным выше причинам он является и минимальным аннулирующим многочленом.

Наконец, в общем случае, когда оператор A обладает жордановой матрицей с таблицей

$$\lambda_1; n_1^1 \geq n_2^1 \geq \cdots \geq n_{p_1}^1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\lambda_m; n_1^m \geq n_2^m \geq \cdots \geq n_{p_m}^m,$$

аннулирующим многочленом является многочлен

$$Q(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} (\lambda_n - \lambda)^{n_1^k}. \tag{15}$$

Он является и минимальным аннулирующим многочленом оператора A, так как ни один из показателей n_1^k не может быть здесь понижен по указанным выше соображениям.

Итак, минимальный аннулирующий многочлен матрицы A есть многочлен (15). Его степень равна $n_1^1 + \dots + n_1^m$ сумме размеров максимальных жордановых клеток, отвечающих каждому корню характеристического многочлена.

Замечание. Число $n_1^1 + \dots + n_1^m$ не превосходит размера всей матрицы A, т. е. числа n – размерности пространства, в котором действует оператор. Характеристический многочлен $det(A — \lambda E)$ оператора A содержит многочлен $Q(\lambda)$ в качестве делителя, поэтому также является аннулирующим (данное утверждение называется теоремой Гамильтона-Кэли). Вообще говоря, характеристический многочлен $det(A — \lambda E)$ не является минимальным аннулирующим многочленом оператора A. Если оказывается, что минимальный многочлен совпадает с характеристическим, то это означает, что каждый характеристический корень используется только в одной жордановой клетке, размера, равного кратности корня.

ГЛАВА VI. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Лекция 20

§42. Аффинное пространство

В линейном пространстве элементами являются векторы как объекты линейных операций. Следует заметить, что во многих задачах в центре внимания оказываются факты, связанные со взаимным расположением фигур (подмножеств) в рассматриваемом пространстве. В связи с этим определением линейного пространства вводится понятие аффинного пространства, элементы которого называются точками. Точки аффинного пространства определенным образом связаны с векторами линейного пространства наподобие того, как это делается в элементарной аналитической геометрии.

Пусть дано некоторое множество $\boldsymbol{U}$, элементы которого будем называть точками и обозначать заглавными латинскими буквами $A, B, \dots, M, \dots$. Пусть дано также некоторое линейное пространство. Пусть с каждой упорядоченной парой точек из $\boldsymbol{U}$ сопоставлен вектор из $\boldsymbol{L}$. Если паре точек A, B соответствует вектор $\boldsymbol{x}$, то запишем: $\boldsymbol{x} = \overline{AB}$, где $\overline{AB}$ – новое обозначение вектора $\boldsymbol{x}$.

Первая из двух точек называется началом вектора $\overline{AB}$, а вторая – его концом.

Определение. Множество $\boldsymbol{U}$, сопоставленное с линейным пространством $\mathbf{L}$, называется аффинным пространством, если соблюдены следующие две аксиомы:

1) Для каждой точки А из $\boldsymbol{U}$ и каждого вектора x из $\mathbf{L}$ существует единственная точка В из $\boldsymbol{U}$, такая, что $\overline{AB} = x$.

2) Если $\overline{AB} = \mathbf{x}$, $\overline{\mathrm{BC}} = \mathbf{y}$, то $\overline{AC} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ (см. рис. 1).

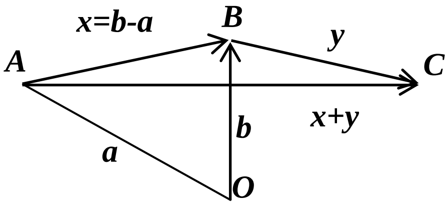


Рисунок 1

Аффинное пространство в зависимости от того, действительным или комплексным, конечномерным или бесконечномерным является соответствующее ему линейное пространство **L**, называется действительным или комплексным, конечномерным или бесконечномерным. Размерностью аффинного пространства $\boldsymbol{U}$ называют число, равное размерности линейного пространства **L**.

Лемма 1. Любое линейное пространство $\boldsymbol{L}$ можно рассматривать как аффинное $\boldsymbol{U}$.

Доказательство. Назовем векторы из пространства $\boldsymbol{L}$ точками и каждой паре векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, рассматриваемых как точек множества $\boldsymbol{U}$, соответствует вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{L}$. ■

Лемма 2. Любое аффинное пространство $\boldsymbol{U}$ есть линейное $\boldsymbol{L}$.

Доказательство. Зафиксируем точку $O \in \boldsymbol{U}$ и сопоставим с любой точкой $M \in \boldsymbol{U}$ радиус-вектор $\overline{OM}$. Множество радиус-векторов всех точек пространства $\boldsymbol{U}$ и составляет пространство **L**. ■

Выделим два простейших свойства аффинного пространства.

Теорема 1. Каждой паре совпадающих в аффинном пространстве $\boldsymbol{U}$ точек соответствует нулевой вектор из линейного пространства $\boldsymbol{L}$.

Доказательство. Пусть $A \in \boldsymbol{U}$ – произвольная точка, и пусть с парой точек AA сопоставлен вектор $\overline{AA} = \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}$.

Пусть $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ – произвольный вектор, тогда по первой аксиоме из определения аффинного пространства найдется такая точка $B \in \boldsymbol{U}$, что $\overline{AB} = \boldsymbol{x}$.

Применяя вторую аксиому из определения аффинного пространства, получим $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{x} = \overline{AA} + \overline{AB} = \overline{AB} = \boldsymbol{x}$, следовательно $z = \mathbf{0}$. ■

Теорема 2. Если $\overline{AB} = \boldsymbol{x}$, то $\overline{BA} = -\boldsymbol{x}$.

Доказательство. Пусть $\overline{BA} = \boldsymbol{y}$, тогда $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \mathbf{0}$, следовательно $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$. ■

§43. Аффинные координаты

Введем в n-мерное аффинное пространство $\boldsymbol{U}$ аффинную систему координат. Для этого в $\boldsymbol{U}$ выберем произвольную точку O, которую назовем началом координат, а в соответствующем линейном пространстве $\boldsymbol{L}$ возьмем некоторый базис $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$. Пусть M – произвольная точка из $\boldsymbol{U}$, которая вместе с точкой O определяет вектор $\overline{\mathrm{OM}} \in \mathrm{L}$. Вектор $\overline{\mathrm{OM}}$ называется радиус-вектором точки M. Разлагая радиус-вектор $\overline{\mathrm{OM}}$ по базису $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$ получим

$$\overline{\mathrm{OM}} = \mathrm{x}_1\mathbf{e_1} + \mathrm{x}_2\mathbf{e_2} + \dots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\mathbf{e_n} = \textstyle\sum_1^n x_i \boldsymbol{e_i}.$$

Коэффициенты этого разложения $x_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$ называются аффинными координатами точки M (относительно выбранной системы с началом O и базисом $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$). Аффинная система координат есть пара – точка O и базис $\{\boldsymbol{e_i}\}$. Следует заметить, что аффинная система координат задается двумя разнородными объектами – точкой O из аффинного пространства $\boldsymbol{U}$ и базисом $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$ из линейного пространства $\boldsymbol{L}$.

Координаты каждой точки M определены однозначно ввиду единственности разложения вектора $\overline{\mathrm{OM}}$ по базису $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$.

Пусть дана другая произвольная точка N с координатами $\mathrm{y}_1, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{n}$. Покажем, как выражаются координаты вектора $\overline{\mathrm{MN}}$ через аффинные координаты точек M и N. Используя аксиому 2 из определения аффинного пространства и теорему 2 из § 31 гл. VI, получим

$$\overline{\mathrm{MN}} = \overline{\mathrm{MO}} + \overline{\mathrm{ON}} = \overline{\mathrm{ON}} - \overline{\mathrm{OM}} = (\mathrm{y}_1 - \mathrm{x}_1)\mathrm{e}_1 + \cdots + (\mathrm{y}_\mathrm{n} - \mathrm{x}_\mathrm{n})\mathrm{e}_\mathrm{n}.$$

Следовательно, вектор $\overline{\mathrm{MN}}$ имеет координаты $\mathrm{y}_1 - x_1, \dots, \mathrm{y}_\mathrm{n} - x_n$.

Таким образом, чтобы получить координаты вектора $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$, нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты начала.

Перенесем начало из точки O в точку $O_1(a_1, \dots, a_n)$, сохраняя выбранный базис и считая координаты точки O_1 известными, и найдем новые аффинные координаты $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{\mathrm{x}}_\mathrm{n}$ произвольной точки M. Старые координаты точки M обозначаем через $x_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$.

Получим векторное равенство

$$\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M}$$

или, $x_1\mathrm{e}_1 + \cdots + x_n\mathrm{e}_\mathrm{n} = a_1\mathrm{e}_1 + \cdots + a_n\mathrm{e}_\mathrm{n} + \tilde{x}_1\mathrm{e}_1 + \cdots + \tilde{x}_n\mathrm{e}_\mathrm{n}$, что то же самое, $\sum_1^n x_i\boldsymbol{e_i} = \sum_1^n a_i\boldsymbol{e_i} + \sum_1^n \tilde{x}_i\boldsymbol{e_i}$.

Отсюда, вследствие единственности разложения вектора по базису, находим

$$x_i = \tilde{x}_i + a_i, i = 1, \dots, n.$$

Если начало координат не меняется, а меняется базис, то аффинные координаты точек преобразуются так же, как координаты их радиус-векторов, то есть по формулам § 20 главы III.

Предположим теперь, что от данной аффинной системы координат с началом O и базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$ переходим к новой системе с началом O' и базисом $\{e_1', \dots, e_n'\}$. Считаем координаты O' в старой системе известными $(a_1, \dots, a_n)$, а также разложения векторов нового базиса по старому базису:

$$e_i' = \sum P_{ij}\boldsymbol{e_j}.$$

Используя предыдущие результаты и сведения из § 20 гл. III, получим формулы, выражающие старые координаты $(x_1, \dots, x_n)$ произвольной точки M через ее новые координаты $(x_1', \dots, x_n')$,

$$x_i = \sum P_{ij}x_j' + a_i\,, \quad i = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Вместе с формулами (1) имеют место обратные формулы $x_i' = \sum Q_{ij}(x_j - a_j) = \sum Q_{ij}x_j + a_i'$, где $Q = (P^*)^{-1}$ (см. § 20 гл. III), $a_i' = -\sum Q_{ij}a_j$, $i = 1, \dots, n$.

§44. Плоскости

Пусть в n-мерном аффинном пространстве $\mathbf{U_n}$ зафиксирована произвольная точка A, и в соответствующем линейном пространстве $\mathbf{L_n}$ зафиксировано произвольное n-мерное подпространство $\mathbf{L_r}$.

Определение 1. Множество всех точек M аффинного пространства, для которых $\overline{AM} \in \mathbf{L_r}$, называется r-мерной плоскостью, проходящей через точку A в направлении подпространства $\mathbf{L_r}$. На рисунке 2 изображена плоскость при $r = 2$.

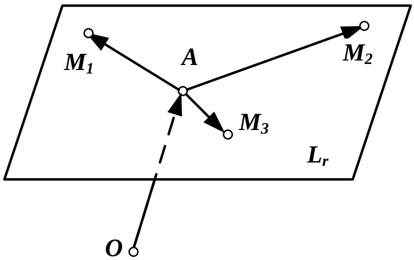


Рисунок 2

Говорят также, что $\mathbf{L_r}$ есть направляющее подпространство этой плоскости. Очевидно, что каждая плоскость однозначно определяет свое направляющее подпространство.

Точку М называют текущей точкой плоскости. На рисунке 2 показаны три положения $\mathrm{M_1, M_2, M_3}$ текущей точки М.

Рассмотрим частные случаи.

1. Если $\mathrm{r} = 0$, то плоскость состоит из одной точки А. Каждую точку аффинного пространства можно рассматривать как нульмерную плоскость.

2. Одномерная плоскость называется прямой линией или прямой.

3. Плоскость размерности $(n-1)$ называется гиперплоскостью.

4. При $\mathrm{r = n}$ плоскость совпадает со всем пространством $\boldsymbol{U_n}$.

Лемма. Все точки плоскости равноправны.

Доказательство. В определении плоскости выделена точка А. Обозначим плоскость через $\boldsymbol{\Pi_r}$ и зафиксируем произвольную точку $\mathrm{B} \in \boldsymbol{\Pi_r}$. Докажем, что точка M принадлежит плоскости $\boldsymbol{\Pi_r}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\mathrm{BM}} \in \mathbf{L_r}$, или что любая точка В может играть роль точки А.

Пусть $\overline{\mathrm{BM}} \in \mathbf{L_r}$ (рис. 3) по определению плоскости $\overline{\mathrm{AB}} \in \mathbf{L_r}$. Отсюда и по определению подпространства $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BM}} \in \mathbf{L_r}$, поэтому $\mathrm{M} \in \mathbf{\Pi_r}$. Обратно, если $\mathrm{M} \in \mathbf{\Pi_r}$, $\overline{\mathrm{AM}} \in \mathbf{L_r}$, значит, $\overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{AM}} - \overline{\mathrm{AB}} \in \mathbf{L_r}$.

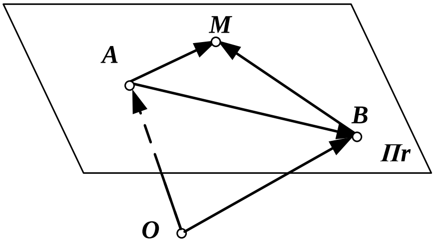


Рисунок 3

Теорема. Всякая r-мерная плоскость в аффинном пространстве сама является r-мерным аффинным пространством.

Доказательство. Пусть дано аффинное пространство $\boldsymbol{U}$, которому соответствует линейное пространство $\mathbf{L}$. Пусть $\boldsymbol{\Pi_r}$ – плоскость, проходящая через точку A в направлении подпространства $\mathbf{L_r}$. Возьмем в плоскости $\boldsymbol{\Pi_r}$ две произвольные точки M, N. По определению аффинного пространства им соответствует вектор $\overline{\mathrm{MN}} \in \boldsymbol{L}$. По определению плоскости векторы $\overline{\mathrm{AM}}$ и $\overline{\mathrm{AN}}$ принадлежат подпространству $\mathbf{L_r}$. Следовательно,

$$\overline{\mathrm{MN}} = \overline{\mathrm{AN}} - \overline{\mathrm{AM}} \in \mathbf{L_r}.$$

Таким образом, каждой упорядоченной паре точек M, N плоскости $\boldsymbol{\Pi_r}$ поставлен в соответствие вектор $\overline{\mathrm{MN}}$ из r-мерного линейного пространства $\mathbf{L_r}$. При этом соблюдение для $\boldsymbol{\Pi_r}$ первой из аксиом § 31 гл. VI вытекает из определения r-мерной плоскости, а вторая из этого же параграфа справедлива для $\boldsymbol{\Pi_r}$ потому, что она соблюдается для всего аффинного пространства $\boldsymbol{U}$. Теорема доказана. ■

Замечание 1. Если плоскость проходит через начало аффинной системы координат в направлении подпространства $\mathbf{L_r}$, то совокупность радиус-векторов ее точек образует линейное пространство, по определению совпадающее с подпространством $\mathbf{L_r}$.

Пусть в аффинном пространстве $\boldsymbol{U}$ даны точки $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{r}$ (в числе $r+1$). Считается, что эти точки находятся в общем положении, если они не принадлежат одной $(r-1)$-мерной плоскости.

Точки $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{r}$ находятся в общем положении тогда и только тогда, когда векторы $\overline{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}, \dots, \overline{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_\mathrm{r}}$ линейно независимы (рис. 4), причем независимо от выбора в качестве начала векторов A_0.

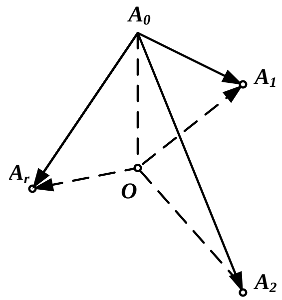


Рисунок 4

Из вышесказанного и из определения плоскости следует, что через систему точек $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{r}$, находящихся в общем положении, проходит r-мерная плоскость и притом только одна.

Предположим, что в пространстве зафиксирована какая-нибудь аффинная система координат с началом O и базисом $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$. Рассмотрим плоскость $\boldsymbol{\Pi_r}$ проходящую через точку A в направлении подпространства $\mathbf{L_r}$.

Будем считать, что точка A имеет координаты $(\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_\mathrm{n})$, и что $\mathbf{L_r}$ задается как линейная оболочка независимой системы векторов $(q_1,\dots,q_r)$. Тогда радиус-вектор $\overline{OM}$ текущей точки плоскости можно записать в виде

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{AM} = \overline{OA} + \tau_1\mathbf{q_1} + \dots + \tau_r\mathbf{q_r}, \qquad (2)$$

где параметры $\tau_1,\dots,\tau_r$ независимо друг от друга пробегают всевозможные числовые значения, а вектор $\overline{OA} = p_1\mathbf{e_1} + \dots + p_r\mathbf{e_r}$ (рис. 5).

Разложим векторы $q_1,\dots,q_r$ по базису $\{e_1,\dots,e_n\}$:

$$q_j = q_{j1}\boldsymbol{e_1} + q_{j2}\boldsymbol{e_2} + \dots + q_{jn}\boldsymbol{e_n}.$$

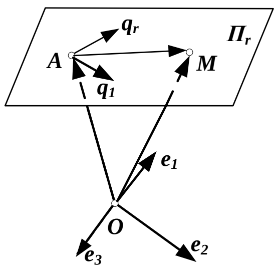


Рисунок 5

Координаты текущей точки M обозначим через $(x_1,\dots,x_n)$ и запишем векторное равенство (2) в координатах. В результате получим n числовых равенств

$$\begin{cases} x_1 = q_{11}\tau_1 + q_{21}\tau_2 + \dots + q_{r1}\tau_r + p_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = q_{1n}\tau_1 + q_{2n}\tau_2 + \dots + q_{rn}\tau_r + p_n. \end{cases} \qquad (3)$$

Эти равенства называются параметрическими уравнениями плоскости $\boldsymbol{\Pi_r}$ (в данной системе координат). Все уравнения системы (3) являются линейными относительно координат текущей точки и параметров τ_j.

Верно и обратное: геометрическое место точек, определяемых уравнениями (3) при всевозможных значениях τ_j, есть плоскость, проходящая через точку A в направлении подпространства $\mathbf{L_r} = \mathbf{L}(\mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_\mathrm{r})$. В самом деле, уравнения (3) равносильны векторному равенству (2), которое означает, что вектор $\overline{\mathrm{AM}} \in \mathbf{L_r}$.

Если для системы (3) написать соответствующую однородную систему, то есть $\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_\mathrm{n}$ заменить нулями, то получим параметрические уравнения направляющего подпространства плоскости $\boldsymbol{\Pi_r}$.

Пример.

Пространство, изучаемое в стереометрии, является трехмерным аффинным пространством. В нем одномерные и двумерные плоскости совпадают соответственно с прямыми линиями и плоскостями, понимаемыми в элементарно-геометрическом смысле.

Замечание 2. В отличие от пространства, изучаемого в элементарной геометрии, в аффинном пространстве не определены метрические понятия: расстояние между точками и длины линий, площади и объемы фигур, углы и перпендикулярность. При исследовании фигур в аффинном пространстве изучаются лишь те геометрические свойства, которые не зависят от метрических понятий.

Определение 2. Точки $A_0, \dots, A_r$ в $\boldsymbol{U}$ находятся в общем положении, если они не принадлежат одной $(r-1)$-мерной плоскости.

Лекция 21

§45. Системы уравнений первой степени

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4}$$

Буквы $a_{11}, \dots, a_{mn}$, $b_1, \dots, b_m$ обозначают известные числа, а числа $x_1, \dots, x_n$ – неизвестные.

Числа a_{ij} называются коэффициентами системы (4) и образуют m×n-матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, которая называется основной матрицей системы (4). Будем считать в дальнейшем, что матрица A не нулевая, а это значит, что среди коэффициентов системы (4) есть отличные от нуля.

Числа $b_1, \dots, b_m$ называют свободными членами уравнений.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} b_m \end{pmatrix}$ называется расширенной матрицей системы (4).

Всякий упорядоченный набор чисел $x_1, \dots, x_n$, подстановка которых вместо неизвестных обращает все уравнения системы в арифметические тождества, называется решением системы. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение.

Теорема Кронекера-Капелли. Для того чтобы система (4) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее расширенной матрицы был равен рангу основной матрицы:

$$Rang\mathrm{B} = Rang\mathrm{A}. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимое условие.

Очевидно, что

$$Rang\mathrm{B} \geq Rang\mathrm{A}. \tag{6}$$

Обозначим через $a_1, \dots, a_n$ столбцы матрицы A, через b – столбец свободных членов. Будем все эти столбцы рассматривать как векторы координатного пространства $\mathbf{K_m}$. Пусть система (1) имеет решение $(x_1, \dots, x_n)$. Это решение обращает уравнения в систему числовых тождеств, которые можно записать в виде одного векторного равенства

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = \mathrm{b}. \qquad (7)$$

Из формулы (4) следует, что векторы $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$, b линейно выражаются через векторы $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$. По основной лемме 3 из § 11 главы II и по определению ранга матрицы имеем

$$Rang\mathrm{B} \leq Rang\mathrm{A}. \qquad (8)$$

Достаточность.

Пусть соблюдается равенство (2). Матрица А по условию ненулевая, поэтому у нее есть базисный минор порядка $r = Rang\mathrm{A} > 0$.

Допустим для определенности, что базисными являются первые r столбцов $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{r}$. Рассмотрим систему векторов $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{r}$, b. Эта система линейно зависима, так как в противном случае $Rang\mathrm{B} = \mathrm{r} + 1 > \mathrm{r}$. Поэтому вектор b выражается через линейно независимые векторы $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{r}$ (см. гл. II, § 11):

$$b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r. \qquad (9)$$

Положим

$$x_1 = \lambda_1, \dots, x_r = \lambda_r, x_{r+1} = \cdots = x_n = 0. \qquad (10)$$

Записав систему (4) в векторной форме (5) и подставив в нее величины (10), получим тождество (9). Таким образом, система (4) совместна, т. е. имеет по крайней мере одно решение (10). Теорема доказана. ■

Отметим частный случай, когда число уравнений равно числу неизвестных, и квадратная матрица А невырождена, то есть $D = detA = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \neq 0.$

Тогда система (4) имеет единственное решение, которое может быть найдено по правилу Крамера:

$$x_1 = \frac{D_1(b)}{D}, x_2 = \frac{D_2(b)}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n(b)}{D}. \qquad (11)$$

Здесь через $D_j(b)$ обозначен определитель, который получается из D заменой его j-го столбца на столбец свободных членов, то есть

$$D_j(b) = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\ j-1}\ \ b_1\ a_{1\ j+1} \cdots\ a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{n\ j-1}\ \ b_n\ a_{n\ j+1} \cdots\ a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Замечание 1.

Если обозначить через $\mathbf{x}$ вектор $(x_1, \dots, x_n)$, записанный в виде столбца, то систему (4) можно представить в виде матричного уравнения

$$A\boldsymbol{x} = b, \qquad (4a)$$

а формулы Крамера (8) – в виде матричного равенства

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}b. \qquad (11a)$$

Переход от формулы ($4a$) к формуле ($11a$) получается умножением обеих частей равенства слева на матрицу A^{-1}.

Замечание 2.

Для практического решения систем с большим числом уравнений и неизвестных формулы (11) неудобны ввиду трудности вычисления определителей D и $D_j(b)$, поэтому для решения таких систем разработан ряд других методов вычислительной математики.

Вернемся к рассмотрению системы (4) при произвольных m и n и при выполнении условия совместности (5). Найдем все решения системы. Число r, равное рангу матриц A и B, назовем рангом системы (4). Для определенности будем считать, что базисный минор матрицы A занимает в ней верхний левый угол (этого можно добиться изменением нумерации неизвестных и перестановкой уравнений). Обозначим этот минор через D:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Минор D является базисным и для матрицы B, поэтому строки матрицы B с номерами $r+1, \dots, m$

являются линейными комбинациями первых r ее строк (см. гл. II, § 12). Это значит, что уравнения с номерами $r+1,\dots,m$ представляют собой линейные комбинации первых r уравнений, так что система (4) эквивалентна системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n=b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{r1}x_1+\dots+a_{rn}x_n=b_r. \end{cases} \tag{13}$$

Оставим в левых частях лишь те слагаемые, коэффициенты которых образуют базисный минор D, все остальные члены перенесем направо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\dots+a_{1r}x_r=b_1-a_{1r+1}x_{r+1}-\dots-a_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{r1}x_1+\dots+a_{rr}x_r=b_r-a_{rr+1}x_{r+1}-\dots-a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{14}$$

Неизвестные $x_{r+1},\dots,x_n$ будем называть свободными, которым можно придать любые числовые значения. Тогда неизвестные $x_1,\dots,x_r$ однозначно определятся из системы (11) по формулам Крамера:

$$x_j=\frac{\mathrm{D_j}(\mathrm{b}-x_{r+1}a_{r+1}-\dots-x_na_n)}{D}. \tag{15}$$

Через $\mathrm{a_i}$ обозначены столбцы основной матрицы A системы (13), через b – столбец свободных членов системы (13). Символ $\mathrm{D_j}$ определяется формулой (12), в которой нужно n заменить на r и вместо вектора b подставить вектор $\mathrm{b}-x_{r+1}a_{r+1}-\dots-x_na_n$.

Пользуясь свойствами определителей, разложим числитель формулы (15), получим

$$x_j=\frac{\mathrm{D_j(b)}}{D}-\frac{\mathrm{D_j}(a_{r+1})}{D}x_{r+1}-\dots-\frac{\mathrm{D_j}(a_n)}{D}x_n, j=1,\dots,r. \tag{16}$$

Введем обозначения

$$P_j=\frac{\mathrm{D_j(b)}}{D}, q_{kj}=\frac{\mathrm{D_j}(-a_k)}{D}, i=1,\dots,r,\ \ k=r+1,\dots,n. \tag{17}$$

Тогда из (16)

$$\begin{cases} x_1=p_1+q_{r+1\ \ 1}\ x_{r+1}+\dots+q_{n1}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_r=p_r+q_{r+1\ \ r}\ x_{r+1}+\dots+q_{nr}x_n. \end{cases} \tag{18}$$

Добавим сюда еще $(\mathrm{n}-\mathrm{r})$ очевидных равенств:

$$\begin{cases} x_{r+1} = x_{r+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = x_n. \end{cases} \tag{19}$$

Всю совокупность равенств (18) и (19) заменим одним векторным соотношением

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+1} + \dots + \begin{pmatrix} q_{n1} \\ \vdots \\ q_{nr} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} x_n. \tag{20}$$

Формула (20) дает общее решение системы (4), поскольку выражает все неизвестные $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ через свободные неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$, которым можно придавать любые численные значения. При этом все возможные решения системы (4) будут исчерпаны. Действительно, если $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ – любое заданное решение системы (4), то $x_{r+1}, \dots, x_n$ имеют определенные численные значения, подставив которые в систему (1) и повторяя предыдущие выкладки, получаем равенство (20).

Обозначим столбец в левой части равенства (20) через x, столбцы в правой части этого равенства обозначим по порядку их расположения через $\mathrm{p}, \mathrm{q}_{\mathrm{r}+1}, \dots, \mathrm{q}_{\mathrm{n}}$. Равенство (20) примет вид

$$x = p + x_{r+1}\mathrm{q}_{\mathrm{r}+1} + \dots + x_n\mathrm{q}_{\mathrm{n}}. \tag{21}$$

Равенства (21) и (20) следует понимать как равенства между векторами координатного пространства $\mathbf{K_n}$.

<u>Следствие.</u> Если система (4) совместна и ее ранг r меньше числа неизвестных n, то эта система имеет бесконечное множество решений.

<u>Замечание.</u> Выбор свободных неизвестных, вообще говоря, можно делать по-разному. Однако не всякие $(\mathrm{n} - \mathrm{r})$ неизвестных можно принять за свободные. Нужно,

чтобы в системе (4) коэффициенты при остальных r неизвестных составили базисный минор матрицы А.

Лекция 22

§46. Однородные системы

Система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases} \qquad (22)$$

называется однородной. В этом случае правые части всех уравнений равны нулю:

$$b_1 = \cdots = b_m = 0. \qquad (23)$$

Однородная система всегда совместна, это вытекает из теоремы Кронекера-Капелли: $Rang\mathrm{B} = Rang\mathrm{A}$. Матрица B получается из A добавлением нулевого столбца. С другой стороны, видно, что система (22) имеет нулевое решение $\mathrm{x}_1 = \cdots = \mathrm{x}_\mathrm{n} = 0$.

Нулевое решение однородной системы называется тривиальным. Остальные решения, т. е. не состоящие только из одних нулей, называются нетривиальными.

Теорема 1. Множество решений однородной системы образует в пространстве $\mathbf{K_n}$ подпространство размерности $(n-r)$, где r – ранг системы.

Доказательство. Вследствие условия (23)

$$p_j = \frac{\mathrm{D_j(b)}}{D} = 0.$$

В рассматриваемом случае $\mathrm{p} = \mathbf{0}$ и формула (21) §34 гл. VI выражает любое решение $\mathbf{x}$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{q_{r+1}}, \dots, \mathbf{q_n}$. Обратно, всякая линейная комбинация векторов $\mathbf{q_{r+1}}, \dots, \mathbf{q_n}$ дает решение однородной системы (22). Другими словами, множество X всех решений такой системы есть линейная оболочка векторов $\mathbf{q_{r+1}}, \dots, \mathbf{q_n}$ в $\mathbf{K_n}$. Следовательно, X является линейным подпространством в $\mathbf{K_n}$.

Убедимся, что векторы $\mathbf{q_{r+1}}, \dots, \mathbf{q_n}$ линейно независимы. С этой целью рассмотрим матрицу Γ, составленную координатами векторов $\mathbf{q_{r+1}}, \dots, \mathbf{q_n}$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} q_{r+11} & \cdots & q_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ q_{r+1r} & \cdots & q_{nr} \\ 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нижний минор максимального порядка матрицы Γ является ее базисным минором (он равен единице, т. е. отличен от нуля, и не имеет окаймляющих). Следовательно, столбцы Γ линейно независимы. Тем самым линейно независимы векторы $\mathbf{q_{r+1}}, \dots, \mathbf{q_n}$.

Отсюда следует, что векторы $\mathbf{q_{r+1}}, \dots, \mathbf{q_n}$ составляют базис в X. Но число их равно $(n-r)$. Значит, размерность X равна $(n-r)$, и теорема доказана. ∎

Пусть известна какая-нибудь линейно независимая система решений в числе $(n-r)$:

$$c_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix}, \dots, \quad c_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{n-r1} \\ \vdots \\ c_{n-rn} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Тогда любое решение x системы (22) представляется в виде линейной комбинации данных решений (24):

$$x = \tau_1 c_1 + \cdots + \tau_{n-r} c_{n-r}. \tag{25}$$

Обратно, любая линейная комбинация вида (25) дает решение.

Оба утверждения сразу следуют из предыдущей теоремы, согласно этой теореме, подпространство **X** решений системы (22) имеет размерность $(n-r)$. Следовательно, решения $c_1, \dots, c_{n-r}$ составляют в нем базис.

Определение. Всякая линейно независимая система решений в числе $(\mathrm{n}-\mathrm{r})$ называется фундаментальной для системы уравнений (22).

Таким образом, чтобы решить однородную систему уравнений (22), достаточно найти какую-нибудь фундаментальную систему ее решений $c_1, \ldots, c_{n-r}$. Тогда все решения системы (22) даются формулой (25), в которой каждый из параметров $\tau_1, \ldots, \tau_{n-r}$ независимо от других пробегает всевозможные числовые значения.

Замечание. Одна из фундаментальных систем решений составлена столбцами матрицы Г. Эту систему решений дают формулы (17) предыдущего параграфа.

Пример.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_4 = 0, \\ \quad \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_4 = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь $\mathrm{n} = 4$, $\mathrm{r} = 2$. Значит, пространство решений имеет размерность $\mathrm{n} - \mathrm{r} = 2$. Следовательно, нам достаточно найти какие-нибудь два независимых решения, например:

$$\mathrm{x}_1 = 0, \mathrm{x}_2 = 0, \mathrm{x}_3 = 1, \mathrm{x}_4 = 1;$$
$$\mathrm{x}_1 = 2, \mathrm{x}_2 = -1, \mathrm{x}_3 = -1, \mathrm{x}_4 = 0.$$

Общее решение системы выглядит следующим образом (26):

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \\ \mathrm{x}_4 \end{pmatrix} = \tau_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tau_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частные случаи.

1) Однородная система n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0\cdot \end{cases} \tag{27}$$

Относительно системы (27) сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Система вида (27) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю: $\mathrm{D} = det\left(a_{ij}\right) = 0$.

Доказательство. Действительно, в этом и только в этом случае $r = Rang\ \mathrm{A} < \mathrm{n}$, и размерность пространства решений положительна: $\mathrm{n} - \mathrm{r} > 0$.

Однородная система $(\mathrm{n} - 1)$ независимых уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n-1\ 1}x_1 + \cdots + a_{n-1\ n}x_n = 0. \end{cases} \tag{28}$$

Условие независимости уравнений означает, что (прямоугольная) матрица $A = \left(a_{ij}\right)$ системы (28) имеет ранг $r = n - 1$. В этом случае пространство решений одномерно ($n - r = 1$), и для получения общего решения системы (28) достаточно найти одно ее нетривиальное решение.

Для этого составим вспомогательную квадратную матрицу $\widetilde{\mathrm{A}}$ порядка n, которая получается из матрицы A прибавлением сверху новой строки

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n} \end{pmatrix},$$

где $a_{01}, \dots, a_{0n}$ – произвольные числа. Через A_{0j} обозначим алгебраические дополнения элементов a_{0j} в матрице $\widetilde{\mathrm{A}}$. Тогда величины

$$\boldsymbol{x_1 = A_{01}, x_2 = A_{02}, \dots, x_n = A_{0n}} \tag{29}$$

образуют решение системы (28). Действительно, подставим величины (29) в уравнение с номером l. Получим сумму произведений элементов одной строки матрицы $\widetilde{\mathrm{A}}$ на алгебраические дополнения элементов другой строки, равную, как известно, нулю:

$$\mathrm{a}_{11}A_{01} + \cdots + a_{in}A_{0n} = 0.$$

Таким образом, числа (29) действительно

удовлетворяют системе (28).

Обозначим через $\mathrm{M_j}$ минор матрицы A порядка $(n-1)$, который получается вычеркиванием столбца с номером j:

$$\mathrm{M_j} = \begin{pmatrix} \mathrm{a_{11}} & \dots & \mathrm{a_{1j-1}} & \mathrm{a_{1\,j+1}} & \dots & \mathrm{a_{1n}} \\ \mathrm{a_{21}} & \dots & \mathrm{a_{2j-1}} & \mathrm{a_{2\,j+1}} & \dots & \mathrm{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{a_{n-11}} & \dots & \mathrm{a_{n\,j-1}} & \mathrm{a_{nj+1}} & \dots & \mathrm{a_{n-1n}} \end{pmatrix}.$$

Тогда $A_{0j} = (-1)^{j+1}\mathrm{M_j}$. Среди миноров $\mathrm{M_j}$ имеется по крайней мере один, не равный нулю (базисный минор матрицы А), поэтому решение (29) нетривиально. ■

Общее решение системы (28) можно записать в виде

$$x_j = (-1)^{j+1}\mathrm{M_j}\tau,$$

где τ – произвольное число. Иначе говоря, решение системы (28) пропорционально минорам максимального порядка матрицы А, взятым с чередующимися знаками. Иногда это записывают так:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots = M_1 : (-M_2) : M_3 : \dots .$$

Покажем, что верно и обратное утверждение теоремы 2, а именно, справедлива теорема 3.

Теорема 3. Всякое подпространство размерности k в пространстве $\mathbf{L_n}$ с данным базисом является подпространством решений некоторой однородной системы линейных уравнений ранга $(n-k)$.

Доказательство. Пусть в $\mathbf{L_n}$ даны базис $\{\mathrm{e_1}, \dots, \mathrm{e_n}\}$ и подпространство $\mathbf{L_k}$. Возьмем в этом подпространстве k независимых векторов, которые обозначим $\mathrm{e'_{n-k+1}}, \dots, \mathrm{e'_n}$, дополним их до базиса в $\mathbf{L_n}$:

$$\{\mathrm{e'_1}, \dots, \mathrm{e'_{n-k}}, \dots, \mathrm{e'_{n-k+1}}, \dots, \mathrm{e'_n}\}. \qquad (30)$$

Подпространство $\mathbf{L_k}$ является линейной оболочкой векторов $\mathrm{e'_{n-k+1}}, \dots, \mathrm{e'_n}$. Поэтому вектор **x** из $\mathbf{L_n}$ лежит в $\mathbf{L_k}$ тогда и только тогда, когда его координаты в базисе (30), имеющие номера $1, \dots, n$ — k, равны нулю:

$$\mathrm{x'_i} = 0, \;\; i = 1, \dots, n - \mathrm{k}. \qquad (31)$$

Формулы (31) представляют собой систему уравнений, определяющую $\mathbf{L_k}$ в базисе (30). Перейдем к исходному базису $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$.

Для этого воспользуемся формулами преобразования координат (см. гл. III, § 20)

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}' = \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} x_j,\ i = 1, \dots, n.$$

Отсюда получим искомую систему уравнений (32), эквивалентную системе (31):

$$\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} x_j = 0\,, i = 1, \dots, n-k. \qquad (32)$$

Так как n×n-матрица $Q = \left(Q_{ij}\right)$ невырожденная, то все ее строки линейно независимы. Следовательно, ранг системы (32) равен числу ее уравнений: $\mathrm{r} = \mathrm{n} - \mathrm{k}$. Теорема 3 доказана. ■

Кроме того, в данном базисе данное подпространство может задаваться различными однородными системами уравнений. Покажем, как можно строить такие системы. Пусть $H = (h_{li}) = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1\,n-k} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{n-k\,1} & \dots & h_{n-k\,n-k} \end{pmatrix}$ – любая невырожденная квадратная матрица порядка $(\mathrm{n} - \mathrm{k})$. Фиксируя l, умножим уравнения (32) соответственно на числа $h_{li}, i = 1, \dots, \mathrm{n} - k$ и сложим их. Затем выпишем найденные соотношения, беря $l = 1, \dots, \mathrm{n} - \mathrm{k}$.

Получим однородную систему

$$\sum_{i=1}^{n-k} h_{li} \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} x_j = 0, l = 1, \dots, n-k. \qquad (33)$$

Если ввести числа

$$R_{lj} = \sum_{i=1}^{n-k} h_{li}\, Q_{ij}, l = 1, \dots, n-k; j = 1, \dots, n, \qquad (34)$$

то система (33) запишется более просто:

$$\sum_{j=1}^{n} R_{lj}\, x_j = 0,\ l = 1, \dots, n-k. \qquad (35)$$

Система (35), очевидно, есть следствие системы (32), а система (32) в свою очередь есть следствие системы (35).

При каждом фиксированном $j (1 \leq j \leq n)$ формулу (34) можно рассматривать как систему уравнений с неизвестными Q_{ij} и правыми частями R_{ij}. Решая эту систему по правилу Крамера для каждого j, находим, что

$$Q_{ij} = \sum_{a=1}^{n-k} H_{ia} R_{aj}, \tag{36}$$

где матрица $(H_{ia}) = H^{-1}$ – обратная по отношению к матрице $H = (h_{li})$.

Формула (36) показывает, что коэффициенты системы (32) выражаются через коэффициенты системы (35) с помощью матрицы (H_{ia}) совершенно аналогично тому, как коэффициенты (35) выражались через (32) с помощью матрицы (h_{li}). Следовательно, системы (32) и (35) эквивалентны.

Замечание. Если прямоугольные матрицы систем уравнений (32) и (35) обозначить соответственно через $\tilde{Q}$ и R, то две системы равенств (34) и (36) можно заменить двумя матричными равенствами $R = H\tilde{Q}, \tilde{Q} = H^{-1}R$.

Отсюда следует, что $Rang\mathrm{R} = Rang\tilde{Q}$.

Пример.

Система $\begin{cases} \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_4 = 0, \\ \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_4 = 0 \end{cases}$ определяет в четырехмерном линейном пространстве некоторое двумерное подпространство $\boldsymbol{L_2}$. Беря $H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, получим в качестве (35) систему $x_1 = 0, \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_4 = 0$, которая определяет то же самое подпространство $\boldsymbol{L_2}$, что и данная система. Следовательно, заменяем данные уравнения их полусуммой и полуразностью.

Лемма. Линейное невырожденное преобразование переменных сохраняет ранг системы уравнений (22).

Доказательство. Запишем систему (22) в виде матричного равенства

$$\mathrm{AX} = 0, \tag{22a}$$

где $A = (a_{ij})$ есть m×n-матрица коэффициентов, X – матрица-столбец неизвестных $x_1, \ldots, x_n$, нуль в правой части обозначает нулевую $m \times 1$ -матрицу. Пусть дана замена переменных $X' = QX$ (см. формулы (IIIa) и (III) § 20 гл. III; Q – невырожденная $n \times m$-матрица). Тогда

$$X = P \cdot X', \tag{37}$$

где $P = (P_{kl}) = (Q^{-1})^*$. Подставляя (37) в (22а), получим матричную запись рассматриваемой системы уравнений в новых переменных $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$: $(AP^*)X' = 0$, или подробнее $\sum_{k=1}^{n}(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}P_{k\alpha})x_k' = 0, i = 1, \ldots, m$. Матрица P невырождена, так что $Rang\mathrm{AP}^* = Rang\mathrm{A}$. Лемма доказана. ■

Определителем Грама совокупности векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ евклидова пространства (далее обозначается как $\mathrm{G}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ или просто G) называется определитель матрицы, построенный из скалярных произведений векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (*матрицы Грама*), т.е.

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \ldots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \ldots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \ldots & (a_2, a_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \ldots & (a_k, a_k) \end{vmatrix}.$$

Из свойств скалярных произведений следует, что матрица Грама симметричная.

Задача. В евклидовом n-мерном пространстве $\mathbb{E}$ задано подпространство $\mathbb{L}$, как линейная оболочка векторов этого пространства $a_1, a_2, \ldots, a_k$, и вектор x.

Нужно найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора x относительно подпространства $\mathbb{L}$.

Решение.

Обозначим ортогональную проекцию вектора x через y, а ортогональную составляющую через z. Полагая, что вектора $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независимы (т.е. образуют базис подпространства $\mathbb{L}$), представим y, как линейную комбинацию этих векторов:

$$y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k. \qquad (1)$$

Тогда $x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_k a_k + z$.

Умножим скалярно справа это выражение для x последовательно на вектора $a_1, a_2, \ldots, a_k$, учитывая, что вектор z ортогонален ко всем этим векторам. Получим:

$$\begin{aligned}
&(x, a_1) = \beta_1(a_1, a_1) + \beta_2(a_2, a_1) + \cdots + \beta_k(a_k, a_1),\\
&(x, a_2) = \beta_1(a_1, a_2) + \beta_2(a_2, a_2) + \cdots + \beta_k(a_k, a_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)\\
&(x, a_k) = \beta_1(a_1, a_k) + \beta_2(a_2, a_k) + \cdots + \beta_k(a_k, a_k).
\end{aligned}$$

То есть, для определения неизвестных $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ получена система k линейных уравнений с k неизвестными с определителем матрицы коэффициентов $\mathrm{G}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ отличным от нуля (определитель Грама для линейно независимых векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$). Следовательно, в этом случае ортогональная проекция y вектора x определяется однозначно. Значит, и ортогональная составляющая z вектора x также определяется однозначно, как $z = x - y$.

Перенося в выражениях (2) и (1) левые части в конец правых частей с обратным знаком, и приравнивая полученные выражения 0, получим:

$$\begin{aligned}
&(a_1, a_1)\beta_1 + (a_2, a_1)\beta_2 + \cdots + (a_k, a_1)\beta_k + (x, a_1)(-1) = 0,\\
&(a_1, a_2)\beta_1 + (a_2, a_2)\beta_2 + \cdots + (a_k, a_2)\beta_k + (x, a_2)(-1) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(3)\\
&(a_1, a_k)\beta_1 + (a_2, a_k)\beta_2 + \cdots + (a_k, a_k)\beta_k + (x, a_k)(-1) = 0,\\
&\qquad a_1\beta_1 + \qquad a_2\beta_2 + \cdots + \qquad a_k\beta_k + \qquad y(-1) = 0.
\end{aligned}$$

Последнее выражение в (3) состоит из n равенств для каждой компоненты отдельно.

На систему равенств (3) (для каждой компоненты последнего векторного равенства отдельно) можно смотреть как на совокупность n систем $k + 1$ линейных однородных уравнений с $k+1$ неизвестными, имеющих ненулевое решение $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, -1$. Каждый определитель такой системы однородных уравнений из совокупности равен нулю. Далее, n определителей таких однотипных систем могут быть выписаны формально в виде одного определителя:

$$\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_k, a_1) & (x, a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_1, a_k) & \dots & (a_k, a_k) & (x, a_k) \\ a_1 & \dots & a_k & y \end{vmatrix} = 0$$

Или после транспонирования (с учетом свойства симметричности скалярного произведения)

$$\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_k) & a_k \\ (x, a_1) & \dots & (x, a_k) & y \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Выделим из определителя (4) вектор y, для чего представим его в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_k) & a_k \\ (x, a_1) & \dots & (x, a_k) & y \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_k) & a_k \\ (x, a_1) & \dots & (x, a_k) & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_k) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_k) & 0 \\ (x, a_1) & \dots & (x, a_k) & y \end{vmatrix}.$$

Откуда, с помощью разложения второго определителя по элементам последнего столбца, получим:

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_k) & a_k \\ (x, a_1) & \dots & (x, a_k) & 0 \end{vmatrix}}{\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)} \qquad (5)$$

Поскольку вектор x можем представить в виде:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}(a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & 0\\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & x\end{vmatrix}}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)},$$

то вектор z, равный $x-y$ определится следующим образом:

$$z=\ x-y=\frac{\begin{vmatrix}(a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & a_1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & a_k\\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & x\end{vmatrix}}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)}. \qquad (6)$$

Ответ. Выражения (5) и (6) дают представления векторов y и z соответственно в явном виде, после разложения определителей, входящих в эти выражения, по элементам последних столбцов.

Для некоторых геометрических задач важно уметь вычислять длину ортогональной составляющей вектора x, т.е. длину вектора z. Проведем необходимые рассуждения, позволяющие найти формулу для определения квадрата длины вектора z.

Поскольку $(z,y)=0$, то $(z,z)=(z,x-y)=(z,x)$.

Обозначим длину вектора z через h. Тогда

$$h^2=(z,z)=(z,x)=\frac{\begin{vmatrix}(a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & (a_1,x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & (a_k,x)\\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & (x,x)\end{vmatrix}}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)}=\frac{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k,x)}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)} \quad (7)$$

Поясним, каким образом выражение (6) умножалось скалярно на x. Для этого определитель в числителе дроби выражения (6) раскладывался по элементам последнего столбца. В результате числитель превратился в линейную комбинацию векторов $a_1,a_2,\dots,a_k,x$, с коэффициентами, являющимися алгебраическими дополнениями элементов последнего столбца указанного определителя. Затем эту линейную комбинацию векторов $a_1,a_2,\dots,a_k,x$ умножили скалярно на вектор x и снова свернули в определитель. Таким образом и получили выражение (7).

Укажем некоторые свойства определителя Грама $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$

1. Определитель $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ для линейно независимых векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ отличен от нуля и равен нулю тогда и только тогда, когда векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно зависимы.

2. Если в (7) положить $x = a_{k+1}$, то из (7) следует, что $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}) = \mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)h^2$. Из последнего выражения следует, что $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k) \geq 0$, причем равенство нулю будет тогда и только тогда, когда вектора $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно зависимы.

3. *Параллелепипедом*, натянутым на k линейно независимых векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$, в n-мерном евклидовом пространстве, называется множество векторов $t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_k a_k$ при t_i, независимо изменяющимися на отрезке [0, 1]. Назовем $(k-1)$-мерный параллелепипед, натянутый на векторы $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, *основанием параллелепипеда*, а расстояние от вектора a_k (длину ортогональной составляющей вектора a_k) до подпространства, натянутого на $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ – *высотой параллелепипеда*.

«Объемом» одномерного параллелепипеда $\{t a_1\}$ называется длина вектора a_1. Для бóльших размерностей объем определяется индуктивно, как объем основания, умноженный на высоту.

Теорема. *Квадрат объема параллелепипеда, натянутого на k линейно независимых векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$, равен определителю $G(a_1, a_2, \dots, a_k)$.*

Доказательство индукцией по k с учетом свойства **2**:

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k, a_k) = \mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})h^2$$

Проведем **доказательство** теоремы ещё раз, не прибегая к выражению (7).

Для $k = 1$ утверждение теоремы верно. Пусть z ортогональная составляющая вектора a_k относительно подпространства натянутого на вектора $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, т.е. z ортогональна векторам $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$.

Пусть $y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_{k-1} a_{k-1}$ – ортогональная проекция вектора a_k на подпространство натянутое на вектора $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$. Ясно, что $a_k = y + z$, откуда $z = a_k - y$.

Будем считать, что утверждение теоремы верно для $k-1$ $(k > 1)$ векторов, т.е. для определителя $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$.

Рассмотрим определитель

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_{k-1}) & (a_1, a_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{k-1}, a_1) & \dots & (a_{k-1}, a_{k-1}) & (a_{k-1}, a_k) \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_{k-1}) & (a_k, a_k) \end{vmatrix}.$$

Прибавим к последнему столбцу определителя $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ предшествующие, умноженные на $-\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_{k-1}$ соответственно. В силу линейности скалярного произведения по второму аргументу, получим в последнем столбце числа (a_1, z), …,(a_{k-1}, z), (a_k, z), из которых первые $k-1$ равны нулю. Последний элемент последнего столбца равен $(a_k, z) = (y + z, z) = (z, z) = |z|^2$ Разложим теперь преобразованный определитель $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ по последнему столбцу, получим

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k) = |z|^2 \mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}).$$

Длина вектора z равна высоте параллелепипеда согласно определению расстояния от вектора до подпространства. Таким образом, $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ равен произведению квадрата высоты $|z|^2$, на квадрат объема основания $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ (по индуктивному предположению), т.е. квадрату объема k-мерного параллелепипеда. Что и требовалось доказать.

В n-мерном евклидовом пространстве объем n-мерного параллелепипеда, натянутого на n линейно независимых векторов можно выразить через координаты этих векторов в каком-нибудь ортонормальном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – линейно независимая совокупность векторов в n-мерном евклидовом пространстве, и пусть матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

имеет своими столбцами координаты векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ относительно некоторого ортонормального базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ тогда элемент g_{ij} матрицы $G = A^T A$ равен

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} = (a_i, a_j),$$

т.е. матрица $G = A^T A$ есть матрица Грама для совокупности векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Имеем $\det G = \det A^T A = (\det A)^2$

Таким образом, квадрат объема параллелепипеда равен квадрату определителя матрицы A и, следовательно, объем параллелепипеда равен абсолютной величине $\det A$.

Вычислить площадь S параллелограмма со сторонами-векторами $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, образующими угол, и заданными своими координатами в декартовой системе: *а*) (1,0) и (0,2), *б*) (1,1) и (3,1).

Решение. В обоих случаях вычисляем определители Грама. В случае *а*) $G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \\ (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$. В случае *б*) $G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \\ (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 4$.

В обоих случаях искомые площади - это корни квадратные из соответствующих определителей Грама.

Ответ. *а*) $S = 2$, *б*) $S = 2$.

Вычислить объем V параллелепипеда построенного на векторах $\boldsymbol{x}_1 = (1,2,1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (2,1,2)$, $\boldsymbol{x}_3 = (3,2,2)$, как на сторонах. Векторы заданы своими координатами в декартовой системе.

Решение. Вычисляем определитель Грама

$$G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_3) \\ \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3) \\ (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_2) & (\boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_3) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 6 & 9 \\ 6 & 9 & 12 \\ 9 & 12 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$9 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9.$$

(При вычислении определителя вычли первую строчку из второй и третьей, затем в полученном определителе второй столбец из третьего, далее очевидно).

Искомый объем V будет равен корню квадратному из вычисленного определителя $G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3)$, т.е. $V = 3$.

Замечание. Векторы в примерах рассматривались в ортонормированных системах координат евклидовых пространств (декартовы системы координат в обычном двухмерном и трехмерном пространствах). Если определитель Грама от k векторов рассматривается в k-мерном евклидовом пространстве с ортонормированным базисом (скалярное произведение векторов в этих базисах равно сумме произведений соответствующих координат их координатных столбцов), то $G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k) = |\Delta^T \cdot \Delta| = |\Delta|^2$, где $\Delta = (X_1, X_2, \dots, X_k)$ матрица, столбцами которой являются координатные столбцы векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$. В этом случае объем V k-мерного гиперпараллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_k$, будет равен абсолютной величине определителя матрицы Δ, т.е. $V = ||\Delta||$.

Используя это замечание, можно переписать ответы примеров выше: *а*) $S = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix} = 2$, *б*) $S = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix} = 2$, $V = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{Vmatrix} = 3$.

§47. Неоднородные системы

Пусть дана неоднородная система

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \tag{38}$$

где $i = 1, \dots, m$, и среди чисел b_i есть отличные от нуля. Допустим, что система совместна, то есть $Rang\,\mathrm{A} = Rang\mathrm{B} = r$. Пусть $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ – некоторое решение системы (38). Подставив данное решение в систему (38), получим тождества

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 = b_i. \tag{39}$$

Вычтем тождества (39) из уравнений (38). В результате получим систему (40), эквивалентную системе (38):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0. \tag{40}$$

Положим $x_j - x_j^0 = u_j$, получим однородную систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = 0. \tag{41}$$

Пусть для системы уравнений (41) известна фундаментальная система решений

$$c_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix}, \dots, c_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{n-r\,1} \\ \vdots \\ c_{n-r\,n} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

В таком случае, согласно § 34 гл. VI, любое решение системы (41) выражается в виде линейной комбинации векторов (42), то есть

$$u_j = \tau_1 c_{1\,j} + \dots + \tau_{n-r} c_{n-r\,j}, \tag{43}$$

где $\tau_1, \dots, \tau_{n-r}$ – произвольные числа. Так как $u_j = x_j - x_j^0$, то из (43) находим

$$x_j = x_j^0 + (\tau_1 c_{1j} + \cdots + \tau_{n-r} c_{n-rj}), j = 1, \dots, n. \quad (44)$$

Назовем $x_1^0, \dots, x_n^0$ частным решением системы (38). Сумма, стоящая в скобках в формуле (44), представляет собой общее решение системы (41).

Система (41), полученная из системы (38) заменой правых частей нулями, называется однородной системой, соответствующей системе (38).

Теорема 1. Общее решение неоднородной системы (38) представляется в виде суммы произвольного частного решения этой системы и общего решения соответствующей ей однородной системы.

Геометрическое истолкование множества решений неоднородной системы линейных уравнений. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство $\boldsymbol{U_n}$. Зафиксируем в нем какую-нибудь аффинную систему координат. Тогда каждому решению $x_1, \dots, x_n$ системы (1) можно поставить в соответствие точку пространства $\boldsymbol{U_n}$ с координатами $x_1, \dots, x_n$. Имеет место следующая терема.

Теорема 2. Все решения системы (1) образуют в $\boldsymbol{U_n}$ плоскость размерности $(n-r)$.

Доказательство. Все решения системы (38) даются формулой (44). Ввиду независимости векторов (42) эта формула представляет собой параметрические уравнения некоторой плоскости размерности $(n-r)$ (см. § 33 гл.VI). Теорема 2 доказана. ■

Теорема 3. В аффинном пространстве и в любых аффинных координатах всякая плоскость $\mathbf{\Pi_m}$ может быть задана системой линейных уравнений вида (1) и ранга $r = n - m$.

Доказательство. Пусть плоскость $\mathbf{\Pi_m}$ проходит через точку А, имеющую координаты $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, в направлении подпространства $\mathrm{L_m}$. Перенесем начало аффинной системы координат в точку А, сохраняя прежний базис. Координаты текущей точки М в исходной системе обозначим через $(x_1, \dots, x_n)$, в новой системе – через $(\widetilde{x}_1, \dots, \widetilde{x}_n)$, которые совпадают с координатами вектора $\overline{\mathrm{AM}} \in \mathrm{L_m}$. По теореме 3 из § 35 гл. VI подпространство $\mathrm{L_m}$ задается некоторой однородной системой линейных уравнений ранга $r = n - m$: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widetilde{x}_j = 0, = 1, \dots, r$. Учитывая, что $\widetilde{x}_j = x_j - x_j^0$,получаем $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0$.

Положив $\mathrm{b_i} = \sum a_{ij}x_j^0$, найдем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = \mathrm{b_i}, \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{r}, \tag{45}$$

которая имеет тот же ранг $r = n - m$ и определяет $\mathbf{\Pi_m}$ в исходных координатах. Теорема 3 доказана. ■

Следствие. Плоскость задается однородной системой линейных уравнений тогда и только тогда, когда она проходит через начало координат.

Частный случай.

Гиперплоскость задается одним линейным уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$.

Каждое из уравнений (45) можно рассматривать как уравнение некоторой гиперплоскости. Поэтому каждую плоскость размерности m можно рассматривать как пересечение некоторых гиперплоскостей в количестве $(\mathrm{m} - \mathrm{n})$.

Если система линейных уравнений несовместна, то геометрически это означает, что нет ни одной точки, принадлежащей сразу всем гиперплоскостям, которые задаются уравнениями системы.

Очевидно, что при переходе к новым аффинным координатам вид уравнений (45) меняется. Кроме того, данная плоскость $\mathbf{\Pi_m}$ в данной системе аффинных координат может задаваться различными системами уравнений, поскольку для системы (45) имеется бесконечное множество других эквивалентных ей систем. Так, например, можно взять любую невырожденную квадратную матрицу $H = (h_{li})$, и написать следствия системы (45):

$$\sum_{\alpha=1}^{r} h_{i\alpha} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{\alpha j} x_j - b_\alpha\right) = 0. \quad (46)$$

Если ввести обозначения

$$a'_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{r} h_{i\alpha} a_{\alpha j}, b'_i = \sum_{\alpha=1}^{r} h_{i\alpha} b_\alpha,$$

то уравнения (46) запишутся более просто:

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j = b'_i, i = 1, \dots, r. \quad (47)$$

Система уравнений (47) не только следует из системы (45), но является эквивалентной ей.

Возможность перехода от системы (45) к разным системам вида (47) геометрически означает, что $\mathbf{\Pi_m}$ определятся как пересечение различных наборов независимых гиперплоскостей в числе $(\mathrm{n} - \mathrm{m})$. Независимость гиперплоскостей следует понимать в том смысле, что ранг совместной системы (47) уравнений этих гиперплоскостей имеет максимально возможное значение, т. е. равен числу уравнений $(\mathrm{r} = \mathrm{n} - \mathrm{m})$.

Лекция 23

§48. Взаимное расположение плоскостей

Пересекающиеся плоскости. Пусть две плоскости $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$ в аффинном пространстве $\mathbf{U_n}$ имеют общую точку A. Примем эту точку за начало аффинной системы координат. Когда текущая точка M пробегает плоскость $\mathbf{\Pi_k}$ (или $\mathbf{\Pi_l}$), вектор $\overline{\mathrm{AM}}$ пробегает подпространство $\mathbf{L_k}$ (соответственно $\mathbf{L_l}$). Вопрос о взаимном расположении двух пересекающихся плоскостей естественно связан с рассмотрением подпространств $\mathbf{L_k}$ и $\mathbf{L_l}$ в векторном пространстве $\mathbf{L_n}$.

Используя свойства подпространств (§§ 15, 16 гл. II), нетрудно установить следующие факты:

1) Если плоскости $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$ пересекаются, то их пересечением является некоторая плоскость $\mathbf{\Pi_m}$ (на рисунке 6 взято $\mathrm{k = l = 2, m = 1}$).

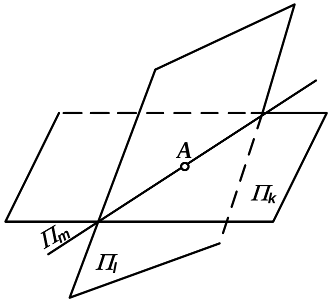


Рисунок 6

Замечание 1. Не исключена возможность, что $\mathbf{\Pi_m}$ состоит из одной точки $(\mathrm{m} = 0)$. Это видно на примере двух пересекающихся прямых или прямой и плоскости (рис. 7). В общем случае по одной точке могут пересекаться две плоскости, сумма размерностей которых не превышает размерности пространства, например, двумерные плоскости в четырехмерном пространстве.

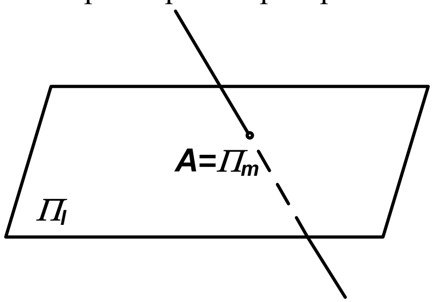


Рисунок 7

Замечание 2. Имеет место и крайний случай, когда одна из двух плоскостей целиком принадлежит другой.

Например, $\mathbf{\Pi_k} \in \mathbf{\Pi_l}$, $k < l$, тогда $\mathbf{\Pi_m} = \mathbf{\Pi_k}$ (на рисунке 8 $k = m = 1, l = 2$).

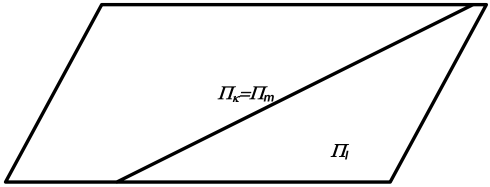


Рисунок 8

Если плоскости $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$ пересекаются по плоскости $\mathbf{\Pi_m}$, то существует единственная плоскость $\mathbf{\Pi_k}$ размерности $r = k + l - m$, содержащая $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$, причем ни в какой плоскости меньшей размерности $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$ не могут одновременно поместиться. Направляющее подпространство $\mathbf{L_r}$ плоскости $\mathbf{\Pi_r}$ является суммой направляющих подпространств $\mathbf{L_r}$ и $\mathbf{L_l}$. Эта сумма является прямой суммой тогда и только тогда, когда $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$ пересекаются по одной точке ($m = 0$, см. рис. 9).

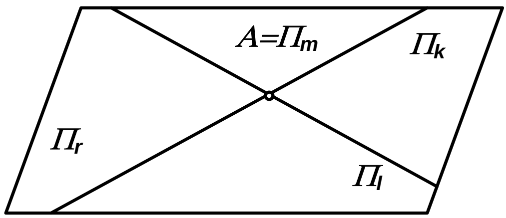


Рисунок 9

Если пересекающиеся плоскости $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$, содержатся в какой-нибудь плоскости $\mathbf{\Pi_r}$, то размерность их пересечения $m \geq k + l - r$. В частности,

$$m \geq k + l - r \tag{48}$$

для любых двух пересекающихся плоскостей из $\boldsymbol{U_n}$.

Если плоскости $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$, проходят через точку А в направлении подпространств $\mathbf{L_k}$ и $\mathbf{L_l}$ соответственно, и если $\mathbf{L_k}$ содержится в $\mathbf{L_l}$, то плоскость $\mathbf{\Pi_k}$ содержится в плоскости $\mathbf{\Pi_l}$. При этом, если $k = l$, то $\mathbf{\Pi_k}$ совпадает с $\mathbf{\Pi_l}$

(также и $\mathbf{L_k}$ совпадает с $\mathbf{L_l}$).

Пусть теперь плоскость $\mathbf{\Pi_k}$ определяется точкой А и подпространством $\mathbf{L_k}$, а плоскость $\mathbf{\Pi_l}$ – точкой В и подпространством $\mathbf{\Pi_l}$. Условимся, что $l \geq k$.

Определение. Плоскость $\mathbf{\Pi_k}$ параллельна плоскости $\mathbf{\Pi_l}$, если $\mathbf{L_k} \subset \mathbf{L_l}$.

Будем говорить, что в этом случае плоскость $\mathbf{\Pi_l}$ параллельна плоскости $\mathbf{\Pi_k}$.

<u>Замечание 3.</u> Согласно определению, включение $\mathbf{\Pi_k} \subset \mathbf{\Pi_l}$ является частным случаем параллельности.

<u>Замечание 4.</u> Если $\mathbf{\Pi_k}$ параллельна $\mathbf{\Pi_l}$, причем $k = l$, то $\mathbf{L_k}$ совпадает с $\mathbf{L_l}$.

<u>Замечание 5.</u> Можно убедиться, что при $n = 3$ частные случаи $k = l = 1$ (рис. 10), $k = l = 2$ (рис. 11) и $k = 1$, $l = 2$ (рис. 12) согласуются с понятием параллельности прямых и плоскостей, известным из элементарной геометрии.

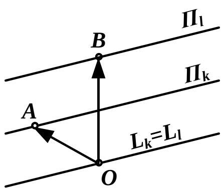


Рисунок 10

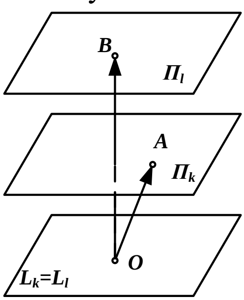


Рисунок 11

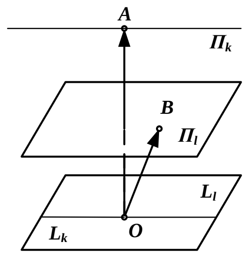


Рисунок 12

Пусть в произвольной аффинной системе координат две плоскости $\boldsymbol{П}$ и $\boldsymbol{П}'$ одинаковой размерности заданы системами линейных уравнений. На основании определения параллельности, можно установить следующее утверждение.

Лемма. Чтобы $\boldsymbol{П_k}$ и $\boldsymbol{П_k'}$ были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие однородные системы уравнений были эквивалентны.

В частности, гиперплоскости параллельны тогда и только тогда, когда в одних и тех же координатах они задаются уравнениями $\sum a_i x_i = b$, $\sum a_i' x_i = b'$ с пропорциональными коэффициентами при переменных:

$$\frac{a_i}{a_i'} = k, i = 1, \dots, n\,.$$

Для совпадения гиперплоскостей, заданных уравнениями $\sum a_i x_i = b$, $\sum a_i' x_i = b'$, необходимо и достаточно, чтобы были пропорциональны все коэффициенты их уравнений:

$$\frac{a_1}{a_1'} = \dots = \frac{a_n}{a_n'} = \frac{b}{b'} = k.$$

Теорема. Пусть в аффинном пространстве $\boldsymbol{U_n}$ даны плоскость $\boldsymbol{П_k}$ и точка B. Тогда существует единственная плоскость $\boldsymbol{П_k'}$ размерности k, проходящая через точку B параллельно $\boldsymbol{\Pi_k}$. Если $B \in \boldsymbol{\Pi_k}$, то $\boldsymbol{\Pi_k'}$ совпадает с $\boldsymbol{\Pi_k}$, в противном случае, плоскости $\boldsymbol{\Pi_k}$ и $\boldsymbol{\Pi_k'}$ не пересекаются.

Доказательство основывается на предыдущем изложении.

Определение. Если две плоскости не пересекаются и не параллельны, то они называются скрещивающимися.

Хорошо известно, что в трехмерном пространстве две прямые линии (одномерные плоскости) могут скрещиваться, тогда как прямая линия и двумерная плоскость в таком пространстве скрещиваться не могут. С повышением размерности пространства оно становится более просторным, в результате чего появляется возможность строить в нем скрещивающиеся плоскости разных размерностей, а не только одномерные.

Свойства скрещивающих прямых.

1. Пусть в аффинном пространстве $\mathbf{U_n}$ дана плоскость $\mathbf{\Pi_l}$ $(\mathrm{l} < n)$. Возьмем произвольную плоскость $\mathbf{\Pi_k}$ так, чтобы $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$ не были параллельны и пересекались, обозначим через $\mathbf{\Pi_m}$ плоскость их пересечения. Тогда $\mathbf{\Pi_r}$ – плоскость наименьшей размерности, содержащая $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$, где $\mathrm{r} = \mathrm{k} + \mathrm{l} - \mathrm{m}$.

2 (общий прием построения скрещивающихся плоскостей). Если $\mathrm{k} + \mathrm{l} - \mathrm{m} < \mathrm{n}$, то всякая k-мерная плоскость $\mathbf{\Pi_k'}$, которая параллельна $\mathbf{\Pi_k}$ и не лежит в $\mathbf{\Pi_r}$, скрещивается с $\mathbf{\Pi_l}$.

3. Если целые числа k, l, m, n удовлетворяют неравенствам $0 \le m < k$, $0 \le m < l$, $k + l - m < n$, то в $\boldsymbol{U_n}$ найдутся скрещивающиеся плоскости $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$, с направляющими подпространствами $\mathbf{L_k}$ и $\mathbf{L_l}$, пересечение которых $\mathbf{L_m} = \mathbf{L_k} \cap \mathbf{L_l}$ имеет размерность m.

4. Существует единственная плоскость $\mathbf{\Pi_{r+1}}$ размерности $\mathrm{r} + 1 = (\mathrm{k} + \mathrm{l} - \mathrm{m}) + 1$, содержащая плоскости $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$.

5. Если скрещивающиеся плоскости $\mathbf{П_k}$ и $\mathbf{П_l}$ лежат в плоскости $\mathbf{П_s}$, то $s \geq (\mathrm{k}+\mathrm{l}-m)+1$, m – размерность пересечения $\mathbf{L_k} \cap \mathbf{L_l}$.

6. Если в $\boldsymbol{U_n}$ имеются скрещивающиеся плоскости $\mathbf{П_k}$ и $\mathbf{П_l}$ положительных размерностей, то $\mathrm{k} \leq \mathrm{n}-2$, $\mathrm{l} \leq \mathrm{n}-2$, так как для скрещивающихся плоскостей $\mathrm{k}-\mathrm{m} \geq 1$, $\mathrm{l}-\mathrm{m} \geq 1$.

7. Гиперплоскость не может скрещиваться с какой-либо плоскостью положительной размерности.

8 (достаточное условие пересечения двух плоскостей). Если в $\boldsymbol{U_n}$ даны плоскости $\mathbf{П_k}$ и $\mathbf{П_l}$ такие, что $\mathrm{k}+\mathrm{l}-\mathrm{m} \geq \mathrm{n}$, где m – размерность пересечения $\mathbf{L_m}$ направляющих подпространств $\mathbf{L_k}$ и $\mathbf{L_l}$, то $\mathbf{П_k}$ и $\mathbf{П_l}$, пересекаются.

9 (алгебраическая интерпретация свойства о пересечении плоскостей). Пусть даны две неоднородные порознь совместные системы линейных уравнений рангов r_1 и r_2. Будем рассматривать совместно все входящие в них уравнения, составим соответствующую ей однородную систему и обозначим ранг последней через r_0. Если $r_0 \geq r_1 + r_2$, то «объединенная» неоднородная система уравнений совместна.

§49. Системы линейных неравенств и выпуклые многогранники

Рассмотрим действительное *n*-мерное аффинное пространство $\boldsymbol{U_n}$ с заданной аффинной системой координат.

Пусть через некоторую точку $X_0 \in \boldsymbol{U_n}$, имеющую координаты $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, проведена прямая в направлении вектора l, координаты которого обозначим $l = (\mathrm{l}_1, \dots, l_n)$. Эту прямую можно задать параметрическими уравнениями

$$\mathrm{X_i} = x_i^0 + \tau l_i,\ i = 1, \dots, n,\ -\infty < \tau < +\infty. \qquad (49)$$

Пусть на прямой (1) выбраны две любые точки A и B с соответствующими им τ_1 и τ_2 значениями параметра τ. Предположим, что $\tau_1 < \tau_2$.

Определение 1. Множество точек прямой, удовлетворяющих неравенствам $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, называется отрезком AB.

Если точка A имеет координаты $(\mathrm{a}_1, \dots, a_n)$, а точка B имеет координаты $(\mathrm{b}_1, \dots, b_n)$, то в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\mathrm{l} = \overline{\mathrm{AB}}$. Тогда $l_i = b_i - a_i$, и для текущей точки прямой имеем $\mathrm{x_i} = a_i + (b_i - a_i)\tau = (1 - \tau)a_i + \tau b_i$, причем $\tau = 0$ в точке A, $\tau = 1$ в точке B, тогда отрезок AB задается неравенствами $0 \leq \tau \leq 1$. Если положим $1 - \tau = \alpha$, $\tau = \beta$, тогда и только тогда для точек отрезка AB имеем

$$x_i = \alpha a_i + \beta b_i, i = 1, \dots, n, \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1. \quad (50)$$

Точка, в которой $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$, называется серединой отрезка AB.

Определение 2. Множество точек действительного аффинного пространства $\boldsymbol{U_n}$ называется выпуклым, если вместе с каждыми двумя своими точками A, B содержит отрезок AB.

Простейшими примерами выпуклых множеств могут служить: отрезок, плоскость любой размерности, все пространство $\boldsymbol{U_n}$.

Множество, состоящее из одной точки, и пустое множество также считаются выпуклыми.

Теорема 1. Пересечение любой совокупности выпуклых множеств само является выпуклым множеством.

Доказательство. Из определения следует, что если точки A, B принадлежат пересечению некоторой совокупности выпуклых множеств, то отрезок AB принадлежит каждому из этих множеств, а значит, и их пересечению. ■

Пусть в пространстве $\boldsymbol{U_n}$ дана произвольная гиперплоскость

$$A_1x_1 + \cdots + A_nx_n + C = 0. \qquad (51)$$

Гиперплоскость (51) разбивает пространство на два полупространства, называемых открытыми полупространствами. Их точки характеризуются неравенствами

$$\sum A_ix_i + C < 0, \sum A_ix_i + C > 0 \qquad (52)$$

соответственно. Присоединяя к открытому полупространству гиперплоскость (51), получим так называемое замкнутое полупространство.

Одно из них состоит из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sum A_ix_i + C \leq 0. \qquad (53)$$

Другое

$$\sum A_ix_i + C \geq 0. \qquad (54)$$

Рассматриваемое пространство является действительным. В комплексном случае никакая гиперплоскость не разделяет пространства, подобно тому как одна прямая не разделяет трехмерного действительного пространства.

Теорема 2. Каждое полупространство является выпуклым множеством.

Доказательство. Доказательство проведем, например, для полупространства (53). Пусть точки A и B принадлежат этому полупространству. Тогда $\sum A_ia_i + C \leq 0$, $\sum A_ib_i + C \leq 0$, и для произвольной точки X отрезка AB, учитывая (50), получим

$$\sum A_ix_i + C = \sum A_i(\alpha a_i + \beta b_i) + C(\alpha + \beta)$$
$$= \alpha\left(\sum A_ia_i + C\right) + \beta\left(\sum A_ib_i + C\right) \leq 0.$$

Таким образом, точка X принадлежит полупространству (53). Но точка X на отрезке AB взята произвольно, значит, следовательно, отрезок AB принадлежит полупространству (53), что и требовалось доказать. ■

Определение 3. Пересечение конечного числа полупространств называется выпуклым многогранником.

Определение 4. Выпуклая оболочка множества A точек в аффинном пространстве $\boldsymbol{U}$ есть минимальное выпуклое множество, содержащее A.

Другими словами, выпуклая оболочка представляет собой пересечение всевозможных выпуклых множеств, содержащих данное множество A или является наименьшим выпуклым множеством, содержащим A.

Пусть в аффинном пространстве $\boldsymbol{U}$ даны точки $A_0, A_1, \dots, A_p$ с радиус-векторами $a_0,\ a_1, \dots, a_p$ соответственно. Имеет место теорема:

Теорема 3. Выпуклая оболочка системы точек A_0, $A_1, \dots, A_p$ задается формулой

$$x = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_p a_p, \tag{55}$$

где x – радиус-вектор произвольной точки из выпуклой оболочки числа $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_p=1, \\ \alpha_0\geq 0, \alpha_1\geq 0, \dots, \alpha_p\geq 0. \end{cases} \tag{56}$$

Доказательство. Доказательство проведем посредством индукции по числу точек. Для двух точек теорема 3 справедлива, так как при $\mathrm{p} = 1$ формулы (55) и (56) задают отрезок A_0A_1.

Пусть теорема 3 доказана для $(\mathrm{p}+1)$ точек. Рассмотрим точки $A_0, \dots, A_p$. Их выпуклую оболочку обозначим А, добавим еще одну точку A_{p+1} с радиус-вектором a_{p+1} и построим выпуклую оболочку В объединения $A \cup A_{p+1}$. По свойству из п. 16 множество В совпадает с выпуклой оболочкой системы точек $A_0, A_1, \dots, A_p, A_{p+1}$. По теореме 2 множество В состоит из всевозможных отрезков $A_{p+1}X$, где X ∈ A. Радиус-вектор x точки X задается равенством (55). Обозначим через у радиус-вектор произвольной точки отрезка $A_{p+1}X$. Тогда

$$y = \alpha x + \beta a_{p+1},\ \alpha + \beta = 1,\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0. \qquad (57)$$

Положим

$$\beta_i = \alpha a_i, i = 0, \dots, p,\ \beta_{p+1} = \beta. \qquad (58)$$

Из формул (55) – (58) получим

$$\begin{cases} y = \beta_0 a_0 + \cdots + \beta_p a_p + \beta_{p+1} a_{p+1}, \\ \beta_0 + \cdots + \beta_p + \beta_{p+1} = 1, \beta_j \geq 0,\ j = 0, \dots, p+1. \end{cases} \qquad (59)$$

Таким образом, каждая точка множества $\mathcal{B}$ удовлетворяет соотношениям (59). Обратно, подставив величины (58) в формулы (59), получим для у выражение вида (57), где x удовлетворяет соотношениям (55) и (56). Это значит, что каждая точка, удовлетворяющая условиям (59), принадлежит множеству B. ■

ГЛАВА VII. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Лекция 24

§50. Линейные формы

В линейном пространстве $\boldsymbol{L}$ (которое быть может, бесконечномерном) рассмотрим всевозможные линейные формы, то есть числовые линейные функции одного векторного аргумента. Будем понимать сумму функций и произведение функции на число в обычном (арифметическом) смысле.

Теорема 1. Множество L^* всех линейных функций, заданных в пространстве $\boldsymbol{L}$**,** представляет собой линейное пространство.

Доказательство. Докажем, что сумма двух произвольных линейных функций $a(x)$, $b(x)$ также является линейной функцией. Положим

$$c(x) = a(x) + b(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} c(x+y) &= a(x+y) + b(x+y) \\ &= [a(x) + a(y)] + [b(x) + b(y)] = \\ &= [a(x) + b(x)] + [a(x) + b(y)] = c(x) + c(y). \end{aligned}$$

Кроме того,

$$c(\alpha x) = a(\alpha x) + b(\alpha x) = \alpha a(x) + \alpha b(x) = \alpha[a(x) + b(x)] = \alpha c(x).$$

Таким образом, линейность суммы доказана.

Покажем теперь, что если линейную функцию умножить на произвольное число λ, то получится линейная функция. Пусть $c(x) = \lambda a(x)$. Тогда

$$c(x+y) = \lambda a(x+y) = \lambda a(x) + \lambda a(y) = c(x) + c(y).$$

Далее

$$c(\alpha x) = \lambda a(\alpha x) = \lambda \alpha a(x) = \alpha c(x).$$

Тем самым показано, что $\lambda a(x)$ – линейная функция. Итак, если $a(x)$, $b(x) \in L^*$, то $a(x) + b(x) \in L^*$ и $\lambda a(x) \in L^*$ при любом λ. ■

Нулевым элементом L^* является (линейная) функция $\mathbf{0}(x)$, равная нулю для любого вектора x.

Функция $(-1) \cdot a(x)$ является противоположной для $a(x)$.

Очевидно, что для L^* выполняются все аксиомы линейного пространства, откуда и вытекает справедливость теоремы 1.

Определение. Линейное пространство L^* всех линейных функций, определенных на L, называется сопряженным пространству $\boldsymbol{L}$.

<u>Замечание</u>. Согласно определению линейной функции в сопряженном пространстве допускается умножение на такие же числа, как и в исходном, т. е., если $\boldsymbol{L}$ – действительное, то и L^* – действительное, если $\boldsymbol{L}$ – комплексное, то и L^* – комплексное.

Теорема 2. Если линейное пространство n-мерно, то сопряженное ему пространство также n-мерно.

Доказательство. Введем в $\boldsymbol{L}$ базис $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ и разложим по нему произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{L}$:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + \dots + x_n\boldsymbol{e_n}.$$

Тогда произвольный вектор a из сопряженного пространства L^*, то есть линейная функция $a(x)$, записывается в виде $a(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ и однозначно определяется заданием набора коэффициентов $(a_1, \dots, a_n)$. Этот набор можно рассматривать как вектор из координатного пространства $\boldsymbol{K_n}$. При сложении линейных функций и умножении их на число соответственно складываются и умножаются на число их коэффициенты. Поэтому в данном случае L^* изоморфно координатному пространству $\boldsymbol{K_n}$. Теорема 2 доказана. ■

Рассмотрим геометрический смысл линейной формы. Для этого используем аффинное пространство $\boldsymbol{U_n}$, считая векторы из $\boldsymbol{L_n}$ радиус-векторами точек из $\boldsymbol{U_n}$, отложенными из некоторой точки O. Будем считать, что значение функции $a(x)$ в точке A равно ее значению на векторе $x = \overline{OA}$. Тем самым функция $a(x)$ будет определена в $\boldsymbol{U_n}$.

Справедливы следующие утверждения.

Множество точек, в которых линейная функция $a(x)$ принимает постоянное значение, представляет собой гиперплоскость.

Всякая гиперплоскость представляет собой геометрическое место точек, в которых некоторая линейная функция сохраняет постоянное значение.

Гиперплоскости, соответствующие разным значениям данной линейной функции $a(x)$, параллельны.

Гиперплоскость, на которой $a(x) = 0$, проходит через начало координат.

§51. Билинейные формы

Определение. Числовая функция $a(x, y)$ двух векторных аргументов x, y называется билинейной, если она линейна по каждому аргументу, то есть

1) $a(x_1 + x_2, y) = a(x_1, y) + a(x_2, y), a(\alpha x, y) = \alpha a(x, y)$,
2) $a(x, y_1 + y_2) = a(x, y_1) + a(x, y_2)$, $a(x, \alpha y) = \alpha a(x, y)$,

где x, y, x_1, x_2, y_1, y_2 – любые векторы пространства $\boldsymbol{L}$, α – произвольное число.

Пусть L – линейное n-мерное пространство, $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ – базис в нем, и пусть аргументы билинейной функции разложены по этому базису:

$$x = \sum x_i \boldsymbol{e_i},\ y = \sum y_i \boldsymbol{e_i}.$$

Тогда

$$a(x, y) = a\left(\sum x_i \boldsymbol{e_i}, \sum y_k \boldsymbol{e_k}\right) = \sum x_i y_k a(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_k}) \quad (1)$$

Введем обозначения:

$$a_{ik} = a(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_k}). \qquad (2)$$

Тогда получим

$$a(x, y) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i y_k. \qquad (3)$$

Формула (3) выражает функцию $a(x, y)$ в координатах по данному базису.

Многочлен в правой части формулы (3) называется билинейной формой. Вместе с ним билинейной формой называют и функцию $a(x, y)$, Числа a_{ik} называются коэффициентами данной формы в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$. В качестве аргументов x, y можно рассматривать векторы как действительного, так и комплексного линейного пространства. В соответствии с этим говорят, что форма $a(x, y)$ дана в действительном или в комплексном пространстве. В последнем случае в качестве значений формы $a(x, y)$ допускают комплексные числа, в этом случае коэффициенты a_{ik} являются, вообще говоря, комплексными числами.

Можно доказать, что множество всех билинейных форм, заданных в линейном пространстве $\boldsymbol{L}$, тоже образует линейное пространство (если рассматривать сложение форм и умножение их на число в обычном арифметическом смысле. См. § 38 гл. VII, где доказательство проведено для линейных форм).

В данном базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ рассмотрим одночленные билинейные формы

$$I_{ik}(x, y) = x_i y_k. \qquad (4)$$

Из (2) и (3)

$$a(x, y) = \sum a_{ik} I_{ik}(x, y). \qquad (5)$$

Если взять $x = \boldsymbol{e_i}$, $y = \boldsymbol{e_m}$ при любых фиксированных l и m, то $I_{im} = 1$, а все остальные формы (4) будут равны нулю. Отсюда следует, что формы (4) независимы, следовательно, они образуют базис в пространстве билинейных форм. Формула (5) дает разложение билинейной формы (1) по базису (4).

Если базис (4) состоит из n^2 элементов, то пространство билинейных форм имеет размерность n^2.

Билинейная форма $a(x,y)$ называется симметричной, если для любых $x, y \in L$ $a(x,y) = a(y,x)$.

Билинейная форма $a(x,y)$ называется кососимметричной, если для любых $x, y \in L$ $a(x,y) = -a(y,x)$.

В случае симметричной билинейной формы коэффициенты симметричны: $a_{ik} = a_{ki}$ (см. формулу (2)). В случае кососимметричной формы $a_{ik} = -a_{ki}$ и, в частности, $a_{ii} = 0$. Как симметричные, так и кососимметричные билинейные формы образуют подпространства в пространстве всех билинейных форм с аргументами из $\boldsymbol{L}$. Для определения размерности этих подпространств, построим в них базисы.

Симметричную билинейную форму можно записать в виде

$$a(x,y) = \sum_{i<k} a_{ik}(x_i y_k + x_k y_i) + \sum_i a_{ii} x_i\, y_i. \qquad (6)$$

Рассмотрим формы

$$\begin{cases} I_{ik}(x,y) = x_i y_k + x_k y_i \text{ при } i \neq k, \\ \qquad I_{ii}(x,y) = x_i y_i. \end{cases} \qquad (7)$$

Билинейные формы (7) линейно независимы и симметричны, а любая симметричная билинейная форма выражается через них по формуле вида (6). Поэтому формы (7) составляют базис в подпространстве всех симметричных билинейных форм. Количество элементов в базисе (7) равно $C_n^2 + n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Такую же размерность имеют подпространства симметричных форм. Отсюда следует, что при любом выборе независимых симметричных билинейных форм $\omega_1(x,y), \dots, \omega_N(x,y)$ в числе $N = \frac{1}{2}n(n+1)$ произвольная симметричная форма может быть представлена в виде $a(x,y) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \omega_i(x,y)$, где λ_i – числовые коэффициенты.

Для кососимметричных билинейных форм имеем $a(x,y) = \sum_{i<k} a_{ik}(x_i y_k - x_k y_i)$, и в качестве базиса можно взять формы $\tilde{I}_{ik}(x,y) = x_i y_k - x_k y_i$.

Их общее число равно $\tilde{N} = \frac{1}{2}n(n-1)$. Следовательно, при любом выборе кососимметричных независимых форм $\tilde{\omega}_1, \dots, \tilde{\omega}_N$ получаем для произвольной кососимметричной формы $a(x,y)$ представление $a(x,y) = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \lambda_i \tilde{\omega}_i(x,y)$.

Теорема. Пространство билинейных форм является прямой суммой подпространства симметричных и подпространства кососимметричных билинейных форм.

Доказательство. Известно, что билинейная форма является одновременно симметричной и кососимметричной тогда и только тогда, когда она нулевая. Отсюда и из определения прямой суммы следует, что сумма рассматриваемых подпространств является прямой суммой.

С другой стороны, всякая билинейная форма $a(x,y)$ может быть представлена в виде суммы симметричной и кососимметричной форм, а именно

$$a(x,y) = \frac{1}{2}\big(a(x,y) + a(y,x)\big) + \frac{1}{2}\big(a(x,y) - a(y,x)\big).$$

Следовательно, прямая сумма рассматриваемых подпространств совпадает со всем пространством. Теорема доказана. ■

Произведем переход к новому базису

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}^{'} = \sum P_{ij} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}}. \tag{8}$$

В новом базисе $\boldsymbol{x} = \sum x_i' \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}'$, $y = \sum y_k' \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}}'$.

Вследствие инвариантности формы $a(x,y)$ имеем

$$a(x,y) = \sum a_{ik} x_i y_k = \sum a_{ik}' x_i' y_k', \tag{9}$$

где a'_{ik} – новые коэффициенты. Разумеется, инвариантность формы $a(x,y)$ не означает инвариантности ее коэффициентов. Вообще говоря, $a'_{ik} \neq a_{ik}$. Найдем выражения коэффициентов a'_{ik} через старые a_{ik}. Воспользуемся тем, что значения формы на базисных векторах совпадают с коэффициентами формы:

$$a'_{ik} = a(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_k). \tag{10}$$

Вместо новых базисных векторов $\{\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_k\}$ подставим в (10) их выражения (8):

$$a(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_k) = a\left(\sum P_{ij}\boldsymbol{e}_j, \sum P_{kl}\boldsymbol{e}_l\right).$$

Теперь, ввиду линейности формы $a(x,y)$ по каждому из аргументов, получаем

$$a(\boldsymbol{e}'_i, \boldsymbol{e}'_k) = \sum P_{ij}P_{kl}a(\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{e}_l).$$

Таким образом,

$$a'_{ik} = \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\, P_{ij}P_{kl}. \tag{11}$$

Замечание. Выражения (11) можно получить другим способом, учитывая (9), а именно, так как, согласно § 20 гл. III, $x_j = \sum P_{ij}x'_i$, $y_l = \sum P_{kl}y'_k$, то из (9) имеем $\sum a_{jl}x_j y_l = \sum a_{jl}P_{ij}P_{kl}x'_i y'_k = \sum a'_{ik}x'_i y'_k$.

Отсюда находим (11). Очевидно, что не только (11) следует из (9), но и (9) следует из (I). Таким образом, инвариантность формы влечет за собой закон преобразования ее коэффициентов согласно равенствам (11). В свою очередь преобразование коэффициентов по закону (11) гарантирует инвариантность формы.

Пусть дана произвольная билинейная форма. Запишем ее в развернутом виде:

$$\begin{gathered} a(x,y) = \sum a_{ik}x_i y_k = \\ = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \cdots + a_{1n}x_1y_n + \\ + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{2n}x_2y_n + \\ + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \end{gathered}$$

$$+a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n.$$

Если выписать отсюда таблицу коэффициентов, то получится квадратная матрица, которая называется матрицей билинейной формы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В данном базисе матрица билинейной формы полностью ее определяет, так как дает все ее коэффициенты.

Допустим, что совершается переход к новому базису

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}' = \sum P_{ij}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}}.$$

В новом базисе форма $a(x, y)$имеет другую матрицу $A' = (a'_{ik})$. Элементы a'_{ik} матрицы A' выражаются формулами (11). Преобразуем эти формулы так, чтобы получить матричное соотношение, выражающее (11) целиком. Для этого запишем (11) в виде

$$a'_{ik} = \sum_{j,l} P_{ij}(a_{jl}P_{kl}) \tag{12}$$

и введем величину

$$c_{jk} = \sum_l a_{jl}P_{kl}. \tag{13}$$

Вследствие (12) и (13)

$$a'_{ik} = \sum_j P_{ij}c_{jk}. \tag{14}$$

Составим матрицу $C = (c_{jk})$, где первый индекс – номер строки, второй – номер столбца.

Соотношения (13) и (14) рассмотрим с точки зрения умножения матриц. При изменении индекса l величина a_{jl} проходит строку матрицы A, а величина P_{kl} – строку матрицы P. Таким образом, в (13) записано произведение строки на строку. Для превращения строки в столбец, достаточно транспонировать матрицу. Соответственно в соотношении (13) будем рассматривать второй множитель под знаком суммы как элемент матрицы P^T

(транспонированной матрицы P). Тогда получим произведение строки матрицы A на столбец матрицы P^T. Таким образом, (13) эквивалентно матричному равенству

$$C = AP^T. \tag{15}$$

Теперь рассмотрим формулу (14). Отметим, что справа имеем произведение строки на столбец, то есть из (14) следует

$$A^{'} = PC. \tag{16}$$

Из (15) и (16) получаем искомую формулу

$$A^{'} = PAP^T. \tag{17}$$

Формула (17) выражает матрицу билинейной формы в новом базисе через матрицу этой формы в старом базисе и матрицу P, с помощью которой делается переход от старого базиса к новому.

Из формулы (17) следует, что P и P^T – невырожденные матрицы. Отсюда и по теореме о ранге произведения матриц (гл. II, § 12)

$$Rang\, A' = Rang\, A. \tag{18}$$

Определение. Рангом билинейной формы называется ранг ее матрицы.

Из равенства (18) ранг билинейной формы является инвариантом относительно изменений базиса и тем самым представляет собой величину, которая связана с самой формой, независимо от ее координатного представления.

Рассмотрим определитель матрицы билинейной формы в некотором базисе: $\triangle = det$ A.

В другом базисе $\triangle^{'} = det\,$A$'$. Из формулы (17) и теоремы о перемножении определителей следует, что

$$\triangle^{'} = \triangle \cdot (det\, P)^2. \tag{19}$$

Таким образом, определитель матрицы билинейной формы не является инвариантом, а изменяется при переходе к новому базису по формуле (19).

Пусть даны какая-нибудь билинейная форма $a(x,y)=\sum a_{ij}x_i y_j$, определитель которой $\triangle \neq 0$, и произвольная линейная форма $b(x)=\sum b_i x_i$. Тогда можно так выбрать y, чтобы $a(x,y)=b(x)$ для любого $x\in L$ (при фиксированном y). Для этого достаточно найти $(y_1,\dots,y_n)$ из системы $\sum a_{ij}y_j=b_i$ определитель, которой равен $\triangle \neq 0$. Таким образом, одна билинейная форма $a(x,y)$ как бы содержит в себе всевозможные линейные формы, заданные в $\boldsymbol{L}$.

Лекция 25

§52. Квадратичные формы

Пусть билинейная форма $a(x,y)$ является симметричной: $a(y,x)=a(x,y)$. Это равносильно тому, что в любом базисе симметрична ее матрица: $A^*=A$:

$$a_{ik}=a(\boldsymbol{e_i},\boldsymbol{e_k})=a(\boldsymbol{e_k},\boldsymbol{e_i})=a_{ki}.$$

Отождествив оба аргумента формы $a(x,y)$, получим $a(x,x)=a(x,y)$ при $y=x$.

Определение 1. Функция $a(x,x)$ называется квадратичной формой соответствующей данной симметричной билинейной форме $a(x,y)$.

Исходная (симметричная) билинейная форма $a(x,y)$ называется полярной для квадратичной формы $a(x,x)$.

Докажем, что полярная билинейная форма однозначно определяется своей квадратичной формой.

Лемма 1. Если $f(x)$ – квадратичная форма, то найдем соответствующую полярную $a(x,x)=f(x)$.

Доказательство. Пусть дана числовая функция $f(x)$ векторного аргумента. Предположим, что $f(x)$ есть некоторая квадратичная форма, т. е. $f(x)=a(x,x)$, причем $a(x,y)$ неизвестна. Чтобы найти ее, рассмотрим $f(x+y)$, где x, y – произвольные векторы. На основании свойств билинейной формы и ее симметричности, имеем

$$f(x+y) = a(x+y, x+y)$$
$$= a(x,x) + a(x,y) + a(y,x) + a(y,y) =$$
$$= f(x) + 2a(x+y) + f(y).$$

Отсюда получаем искомое выражение

$$a(x,y) = \frac{1}{2}[f(x+y) - f(x) - f(y)]. \qquad (1) \blacksquare$$

Формулу (1) можно принять за определение квадратичной формы. Можно сказать, что $f(x)$ называется квадратичной формой, если левая часть формулы (1) является билинейной функцией.

Следует заметить, что определение квадратичной формы не предусматривает наличия базиса, поэтому оно применимо в бесконечномерных пространствах.

Пример.

Пусть L – линейное пространство функций, непрерывных на отрезке $[0,1]$. Рассмотрим функцию $f(x) = \int_0^1 (x(t))^2 dt$, аргумент которой $x = x(t) \in \boldsymbol{L}$.

Имеем

$$\frac{1}{2}\big(f(x+y) - f(x) - f(y)\big) = \int_0^1 x(t)y(t)dt. \qquad (20)$$

Можно непосредственно проверить, что в правой части равенства (20) стоит билинейная форма. Таким образом, $f(x)$ есть квадратичная форма в бесконечномерном пространстве $\boldsymbol{L}$.

В дальнейшем отсюда можно получить важные выводы, такие как доказательство интегральных неравенств, опираясь на чисто алгебраические теоремы.

В n-мерном пространстве рассмотрим квадратичную форму и запишем ее выражение через координаты аргументов.

Пусть $a(x,y) = a(y,x)$, $y = x$. Тогда

$$f(x) = a(x,x) = \sum a_{ik}x_i x_k =$$

$$= a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n +$$
$$+a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \dots + a_{2n}x_2x_n +$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$
$$+a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_nx_n. \qquad (21)$$

Если принять во внимание симметричность коэффициентов, то члены суммы (21), кроме диагональных, объединяются в пары. При этом получается наиболее употребляемая запись квадратичной формы в виде

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n +$$
$$+a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n +$$
$$+\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$
$$+a_{nn}x_n^2. \qquad (22)$$

Заметим, что в первой строке формулы (22) выписаны все члены, содержащие x_1.

Определение 2. Матрицей квадратичной формы называется матрица ее полярной билинейной формы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Из этого определения сразу следует, что матрица квадратичной формы преобразуется по формуле

$$A^{'} = PAP^T.$$

Ранг квадратичной формы по определению равен рангу ее матрицы: $r = Rang$ A.

Если в некотором базисе все коэффициенты $a_{ik} = 0$ при $i \neq k$, то говорят, что в этом базисе квадратичная форма имеет канонический вид $f(x) = f(x) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2$.

Для того чтобы получить канонический вид квадратичной формы, базис нужно выбрать специально. В произвольном базисе квадратичная форма будет полной, то есть будет иметь все члены.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду является важной задачей в теоретических вопросах и в прикладной математике.

Если форма приведена к каноническому виду, то ее матрица становится диагональной:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & 0 \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Так как ранг квадратичной формы есть инвариант, то он равен числу отличных от нуля диагональных элементов матрицы (23).

Если ранг $Rang\,\mathrm{A} = r < n$, то после надлежащего изменения номеров матрицу (23) можно записать в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & a_{rr} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Замечание 1.</u> Если привести к каноническому виду квадратичную форму, то одновременно приведется к диагональному виду и ее билинейная форма

$$a(x,y) = a_{11}x_1y_1 + a_{22}x_2y_2 + \cdots + a_{nn}x_ny_n.$$

Пусть дана квадратичная форма $f(x) = a(x,x)$. Вследствие формулы (22) можно в любом базисе записать $f(x)$ в виде

$$f(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n + g(x_2,\ldots,x_n), \tag{24}$$

где g – квадратичная форма, не включающая x_1.

Запись вида (24) позволяет доказать возможность приведения квадратичной формы к каноническому виду по индукции.

Теорема 1. Любую квадратичную форму с помощью невырожденного линейного преобразования можно привести к каноническому виду.

<u>Замечание 2.</u> Здесь речь идет о преобразовании переменных, а именно числовых аргументов $x_1, \dots, x_n$ многочлена (24). Но теорему можно понимать и геометрически, поскольку всякое невырожденное преобразование переменных можно рассматривать как преобразование координат при переходе к новому базису (см. гл. II).

Доказательство. Квадратичная форма от одного переменного всегда имеет канонический вид $a_{11}x_1^2$. Примем как предположение индукции, что любую квадратичную форму от $(n-1)$ числовых аргументов можно привести к каноническому виду невырожденным линейным преобразованием $(n-1)$ переменных.

Рассмотрим произвольную квадратичную форму $f(x)$ от n числовых аргументов $f(x) = \sum a_{ij}x_i x_j$.

Пользуясь предположением индукции, докажем, что ее можно привести к каноническому виду невырожденным линейным преобразованием n переменных. Рассмотрим два случая.

1) В квадратичной форме $f(x)$ хотя бы один из коэффициентов a_{ii} при квадратах переменных отличен от нуля. Не нарушая общности, можем считать, что именно $a_{11} \neq 0$. По данным коэффициентам формы $f(x)$ составим следующее линейное преобразование:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \\ \quad y_1 = x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \quad y_n = x_n \end{cases} \tag{25}$$

Матрицу этого преобразования обозначим $\widetilde{Q}$:

$$\widetilde{Q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Преобразование (25) невырождено, так как $det\, \widetilde{Q} = a_{11} \neq 0$. Невырожденность преобразования (25) вытекает из его обратимости, которая в свою очередь видна из формул (25).

Возведем в квадрат выражение y_1 и разделим на $a_{11} \neq 0$:

$$\frac{1}{a_{11}} y_1^2 = \frac{1}{a_{11}} (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n)^2 =$$
$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots +$$
$$+2a_{1n}x_1x_n + \varphi(x_2, \dots, x_n),$$

где φ – некоторая квадратичная форма аргументов $x_2, \dots, x_n$, не включающая x_1. Введем еще одну квадратичную форму ψ тех же аргументов $x_2, \dots, x_n$, положив $\psi(x_2, \dots, x_n) = g(x_2, \dots, x_n) - \varphi(x_2, \dots, x_n)$, где $g(x_2, \dots, x_n)$ дана записью $f(x)$ в виде (1). Тогда получим $f(x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \psi(x_2, \dots, x_n)$, или, что то же самое, $f(x) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \psi(y_2, \dots, y_n)$.

По предположению индукции существует такое невырожденное преобразование переменных в числе $(n - 1)$

$$z_k = \sum_{l=2}^{n} R_{kl} y_l, k = 2, \dots, n, \quad (26)$$

которое приводит к каноническому виду форму ψ:

$$\psi(y_2, \dots, y_n) = b_{22}z_2^2 + \dots + b_{nn}z_n^2.$$

Дополним преобразование (26) так, чтобы в нем участвовали все n переменных, положим

$$\begin{cases} z_1 = y_1, \\ z_2 = R_{22}y_2 + \dots + R_{2n}y_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ z_n = R_{n2}y_2 + \dots + R_{nn}y_n. \end{cases} \quad (27)$$

Преобразуем переменные $x_1, \dots, x_n$ в переменные $y_1, \dots, y_n$ по формулам (25), а затем переменные $y_1, \dots, y_n$ преобразуем по формулам (27). В результате получим преобразование переменных $x_1, \dots, x_n$ в переменные $z_1, \dots, z_n$, которое приводит исходную квадратичную форму к каноническому виду

$$f(x) = \frac{1}{a_{11}} z_1^2 + b_{22} z_2^2 + \cdots + b_{nn} z_n^2.$$

Последнее преобразование является невырожденным, так как представляет собой произведение невырожденных преобразований (25) и (27).

2) В квадратичной форме $f(x)$ все диагональные коэффициенты a_{ii} равны нулю, тогда предыдущие рассуждения неприменимы. Предположим, что какой-либо из коэффициентов, например a_{12}, отличен от нуля. Тогда квадратичная форма имеет вид

$$f(x) = 2a_{12}x_1x_2 + \cdots . \tag{28}$$

Сделаем преобразование:

$$\begin{cases} x_1 = \widetilde{x}_1 + \widetilde{x}_2, \\ x_2 = \widetilde{x}_1 - \widetilde{x}_2, \\ \quad x_3 = \widetilde{x}_3, \\ \quad \dots\dots\dots\dots, \\ \quad x_n = \widetilde{x}_n. \end{cases} \tag{29}$$

Преобразование (29) обратимо, значит, является невырожденным.

Подставив величины (29) в квадратичную форму (28), получим

$$f(x) = 2a_{12}\tilde{x}_1^2 - 2a_{12}x_2^2 + \cdots . \tag{30}$$

Слагаемое $2a_{12}\tilde{x}_1^2$ не может исчезнуть при приведении подобных членов, так как все члены квадратичной формы, которые не выписаны в выражении (28), не содержат произведения x_1x_2 и не могут в результате преобразования (29) дать величину $\widetilde{x}_1^2$.

Далее квадратичную форму (30) можно невырожденным преобразованием привести к каноническому виду, так как все сводится к первому случаю. Коэффициент при $\widetilde{x}_1^2$ отличен от нуля.

Таким образом рассуждения индукции завершены, и теорема доказана. ■

Замечание 3. Из доказательства видно, что квадратичную форму с действительными коэффициентами можно привести к каноническому виду с помощью невырожденного линейного преобразования, которое также имеет действительные коэффициенты.

Пусть квадратичная форма $f(x)$ приведена к каноническому виду

$$f(x) = \sum_{i=1}^{r} a_{ii} x_i^2, \tag{31}$$

где $a_{11}, \dots, a_{rr} \neq 0$, r – ранг $f(x)$.

Допустим, что имеем дело с комплексным пространством и разрешаем себе пользоваться линейными преобразованиями с комплексными коэффициентами. Положим

$$\begin{cases} y_i = \sqrt{a_{ii} x_i}, \text{ если } i \leq r \\ y_i = x_i, \text{ если } i > r. \end{cases} \tag{32}$$

Из (31) и (32) получим

$$f(x) = y_1^2 + \dots + y_r^2, \tag{33}$$

где $y_1, \dots, y_r$, $y_{r+1}, \dots, y_n$ – новые координаты вектора x. Выражение (33) называется нормальным видом квадратичной формы $f(x)$. Так как преобразование (32) невырождено, то сделаем вывод:

Теорема 2. В комплексном пространстве любую квадратичную форму можно привести к нормальному виду (33) невырожденным преобразованием.

Ограничимся теперь действительными пространствами и действительными линейными преобразованиями. Учитывая, что среди коэффициентов a_{ii} могут быть отрицательные, положим

$$\begin{cases} y_i = \sqrt{|a_{ii}|}x_i, \text{ если } i \le r, \\ y_i = x_i, \text{ если } i > r. \end{cases} \tag{34}$$

Если первые k коэффициентов a_{ii} положительны, а остальные отрицательны, то из (31) и (34) получим

$$f(x) = y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2. \tag{35}$$

Выражение (35) называют нормальным видом формы $f(x)$. Таким образом, в действительном пространстве с помощью невырожденных действительных линейных преобразований всякую квадратичную форму можно привести к нормальному виду (35).

Пусть в действительном пространстве дана квадратичная форма ранга r $f(x) = \sum a_{ik}x_i x_k$, где $\{x_i\}$ – координаты вектора x в некотором базисе $e_1, \dots, e_n$.

Пусть $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}\}$ – некоторый базис, в котором $f(x)$ имеет нормальный вид

$$f(x) = y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2, \tag{36}$$

где $\{y_i\}$ – координаты вектора x в базисе $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}\}$.

Число положительных и число отрицательных членов в формуле (36) называется соответственно положительным и отрицательным индексом формы. Разность между положительным и отрицательным индексом называется ее сигнатурой.

Теорема 3 (закон инерции квадратичных форм). Положительный и отрицательный индексы являются инвариантами квадратичной формы, то есть не зависят от выбора базиса, в котором она имеет нормальный вид.

Доказательство. Пусть имеется еще один базис $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}\}$, в котором форма $f(x)$ имеет нормальный вид:

$$f(x) = z_1^2 + \dots + z_m^2 - z_{m+1}^2 - \dots - z_r^2, \tag{37}$$

где $\{z_i\}$ – координаты x в базисе $\{\tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \tilde{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{n}}\}$. Докажем, что $k = m$.

Предположим, что $k \neq m$, например $k > m$. Рассмотрим формулы преобразования координат

$$z_i = \sum Q_{ij} y_j. \tag{38}$$

Заметим, что матрица Q коэффициентов Q_{ij} невырождена.

Подставим выражения (38) в формулу (37), имеем тождество

$$z_1^2 + \cdots + z_m^2 - z_{m+1}^2 - \cdots - z_r^2 \equiv y_1^2 + \cdots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \cdots - y_r^2, \tag{39}$$

т. е. равенство, верное при любых $y_1, \dots, y_r$, $y_{r+1}, \dots, y_n$, считая, что $z_1, \dots, z_n$ выражены через $y_1, \dots, y_n$ с помощью (38).

Составим вспомогательную однородную систему уравнений

$$\begin{cases} Q_{11} y_1 + \cdots + Q_{1k} y_k = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ Q_{m1} y_1 + \cdots + Q_{mk} y_k = 0. \end{cases} \tag{40}$$

В системе (40) число неизвестных больше числа уравнений вследствие предположения $k > m$. Поэтому система (40) имеет нетривиальное решение $y_1, \dots, y_k$. Подставим это решение в тождество (39), взяв дополнительно

$$y_{k+1} = \cdots = y_r = y_{r+1} = \cdots = y_n = 0. \tag{41}$$

В результате, учитывая (38), (40) и (41), получим

$$y_1^2 + \cdots + y_k^2 = -z_{m+1}^3 - \cdots - z_r^3. \tag{42}$$

Однако это невозможно, так как левая часть (42) строго положительна, тогда как правая либо отрицательна, либо равна нулю. Значит, k не может быть больше m. Аналогично устанавливается, что m не может быть больше, чем k. Поэтому $k = m$. Теорема доказана. ■

Рассмотрим нормальный вид квадратичной формы.

Пусть в линейном пространстве, например, бесконечномерном, задана квадратичная форма $f(x)$.

Определение 1. Форма $f(x)$ называется положительно определенной, если $f(x) > 0$ для всех $x \neq$

0.

Заметим, что $f(0) = 0$ всегда. Действительно, так как $0 = 0 \cdot \mathrm{z}$ и $f(x) = \mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{x})$, где z – произвольный вектор, $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ – билинейная функция, то $f(0) = \mathrm{a}(0 \cdot \mathrm{z}, 0 \cdot \mathrm{z}) = 0 \cdot (\mathrm{z}, \mathrm{z}) = 0$.

Определение 2. Квадратичная форма $f(x)$ называется отрицательно определенной, если $f(x) < 0$ для всех $x \neq 0$.

Очевидно, что достаточно рассмотреть положительно определенные формы, поскольку отрицательно определенные получаются из них сменой знака.

Ограничиваясь квадратичными формами в конечномерных (n-мерных) пространствах, укажем прежде всего ряд простых необходимых признаков положительной определенности. Пусть в каком-нибудь базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ дана квадратичная форма $f(x) = a(x, x) = \sum a_{ik} x_i x_k$.

Как известно, $a_{ik} = a(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_k})$.

1) Если $f(x)$ положительно определена, то $a_{ii} > 0$ для любых $i = \overline{1, n}$.

Доказательство.

$$a_{ii} = a(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_i}) = f(\boldsymbol{e_i}) > 0,$$

что и требовалось доказать.■

Замечание 4. Это условие недостаточно для положительной определенности формы.

Например, форма $f(x) = x_1^2 + 1000 x_1 x_2 + x_1^2$ имеет $a_{ii} = 1 > 0$, но на векторе $(-1, 1)$ принимает отрицательное значение.

2) Если форма f(x) положительно определена, то определитель ее матрицы положителен: $\Delta = \det A > 0$.

Доказательство. Для доказательства приведем f(x) к каноническому виду. Пусть $\{\mathbf{e_1'}, \dots, \mathbf{e_n'}\}$ – канонический базис, то есть базис, в котором f(x) имеет канонический вид $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a'_{ii} (x'_i)^2$, $i = \overline{1, n}$.

Согласно предыдущему признаку, все $a_{ii}^{'} > 0$. Обозначим через $\Delta^{'}$ определитель матрицы формы f(x) в каноническом базисе. Имеем

$$\Delta^{'} = \begin{vmatrix} a_{11}^{'} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn}^{'} \end{vmatrix} = a_{11}^{'} \dots a_{nn}^{'} > 0.$$

С другой стороны,

$$\Delta^{'} = \Delta(detP)^2,$$

значит, $\Delta > 0$. ■

Замечание 5. И это условие не является достаточным для положительной определенности квадратичной формы. Например: форма $f(x) = -x_1^2 - x_1^2$ имеет $\Delta > 0$, однако $f(x) \leq 0$.

3) В n-мерном пространстве каждая положительно определенная форма имеет ранг n.

Доказательство.. Доказательство вытекает из неравенства $\Delta \neq 0$. ■

Теорема (критерий Сильвестра). Для положительной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы были положительны.

Доказательство. Доказательство необходимости. Пусть форма f(x) положительно определена. Возьмем произвольный базис $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_k}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ и построим линейную оболочку $\mathbf{L}(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_k})$. Рассмотрим квадратичную форму f(x) не на всем пространстве, а лишь на подпространстве $\mathbf{L}(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_k})$.

Если $\boldsymbol{x} \in \mathbf{L}(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_k})$, то $\boldsymbol{x} = \{x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0\}$ и $f(x) = \sum_{i,j=1}^{k} a_{ij} x_i x_j$.

Все остальные члены, у коэффициентов которых хотя бы один из двух индексов больше k, исчезают за счет нулевых значений координат.

Форма f(x) на подпространстве $\mathbf{L}(\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_k})$ является положительно определенной, так как она положительно определена на всем пространстве. Поэтому определитель формы f(x), рассматриваемой на $\mathbf{L}(\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_k})$, положителен:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kn} \end{vmatrix} > 0.$$

Но Δ_k – главный минор порядка k матрицы квадратичной формы f(x), индекс k может принимать значения $1,2,\ldots,n$. Тем самым необходимость признака доказана.

Доказательство достаточности.

Пусть $\Delta_k > 0$ при $k = 1,2,\ldots,n$.

Приведем квадратичную форму к каноническому виду методом Якоби. Получим $f(x) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1}(x_1')^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}(x_2')^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}(x_n')^2$.

Если $x \neq 0$, то хотя бы одна из координат $x_k' \neq 0$, и, следовательно, $f(x) > 0$. Теорема доказана. ■

Обратим внимание на двумерный случай. Пусть $f(x) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, где числовые аргументы формы обозначены через x, y.

Условие Сильвестра сводится к неравенствам

$$a > 0, \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} = ac - b^2 > 0.$$

В двумерном случае теорему Сильвестра можно установить без какой-либо специальной теории, поскольку для положительной определенности необходимо $a > 0$, и при $a > 0$ $f = \frac{1}{a}((ax + by)^2 + (ac - b)^2 y^2$.

Определитель Грама.

Предположим, что в произвольном линейном пространстве $\mathbf{L}$ задана квадратичная форма $f(x) = g(x, x)$ и конечная система векторов $(\boldsymbol{p_1}, \ldots, \boldsymbol{p_k})$.

Определение 3. Определителем Грама для квадратичной формы $g(x,x)$ и системы векторов $(\boldsymbol{p_1},\ldots,\boldsymbol{p_k})$ называется величина

$$G(p_1,\ldots,p_k)=\begin{vmatrix} g(p_1,p_1) & \cdots & g(p_1,p_k)\\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g(p_k,p_1) & \cdots & g(p_k,p_k)\end{vmatrix}.$$

С определителями такого вида приходится часто иметь дело в математической физике и интегральных уравнениях.

Теорема. Пусть пространство $\boldsymbol{L}$ действительно, а квадратичная форма $g(x,x)$ положительно определена. Тогда, если векторы $\boldsymbol{p_1},\ldots,\boldsymbol{p_k}$ линейно независимы, то $G(p_1,\ldots,p_k)>0$. Если векторы $\boldsymbol{p_1},\ldots,\boldsymbol{p_k}$ зависимы, то $G(p_1,\ldots,p_k)=0$.

Доказательство. 1) Пусть векторы $\boldsymbol{p_1},\ldots,\boldsymbol{p_k}$ линейно независимы. В таком случае они составят базис в своей линейной оболочке $\mathbf{L}(\boldsymbol{p_1},\ldots,\boldsymbol{p_k})$. Произвольный вектор $\boldsymbol{x}\in\mathbf{L}(\boldsymbol{p_1},\ldots,\boldsymbol{p_k})$ можно записать в виде $\boldsymbol{x}=\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{x_i p_i}$.

Будем рассматривать $f(x)$ на векторах из $\mathbf{L}(\boldsymbol{p_1},\ldots,\boldsymbol{p_k})$. В базисе $\{\boldsymbol{p_1},\ldots,\boldsymbol{p_k}\}$ имеем

$$f(x)=\sum_{i,j=1}^{k}g_{ij}x_ix_j,$$

даже если исходное пространство **L** бесконечномерно.

Так как $f(x)$ положительно определена на всем пространстве **L**, то она положительно определена и на подпространстве $\mathbf{L}(\boldsymbol{p_1},\ldots,\boldsymbol{p_k})$, так что

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1k}\\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{k1} & \cdots & g_{kk}\end{vmatrix}>0. \qquad (43)$$

Заметим, что $g_{ij}=g(p_i,p_j)$. Отсюда и из (43)

$$G(p_1,\ldots,p_k)=\Delta_k>0.$$

2) Пусть теперь $p_1,\ldots,p_k$ линейно зависимы. Тогда найдутся числа $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$, не все равные нулю, для которых $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i p_i=\mathbf{0}$. Учтем, что $g(x,\mathbf{0})=0$, и подставим в это

тождество $x = p_i$, $\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i p_i$.

Придавая i значения $1, \dots, \mathrm{k}$, получим однородную систему k линейных уравнений с k неизвестными

$$\begin{cases} \lambda_1 g(p_1, p_1) + \dots + \lambda_k g(p_1, p_k) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \lambda_1 g(p_k, p_1) + \dots + \lambda_k g(p_k, p_k) = 0. \end{cases}$$

Эта система заведомо имеет нетривиальное решение $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, поэтому ее определитель равен нулю:

$$G(p_1, \dots, p_k) = 0.$$

Теорема доказана. ■

Определителем Грама совокупности векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ евклидова пространства (далее обозначается как $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ или просто G) называется определитель матрицы, построенный из скалярных произведений векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ (*матрицы Грама*), т.е.

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{vmatrix}.$$

Из свойств скалярных произведений следует, что матрица Грама симметричная.

Пример. В евклидовом n-мерном пространстве $\mathbb{E}$ задано подпространство $\mathbb{L}$, как линейная оболочка векторов этого пространства $a_1, a_2, \dots, a_k$, и вектор x. Нужно найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора x относительно подпространства $\mathbb{L}$.

Обозначим ортогональную проекцию вектора x через y, а ортогональную составляющую через z. Полагая, что вектора $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно независимы (т.е. образуют базис подпространства $\mathbb{L}$), представим y, как линейную комбинацию этих векторов:

$$y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k. \qquad (1)$$

Тогда

$$x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k + z.$$

Умножим скалярно справа это выражение для x последовательно на вектора $a_1, a_2, \ldots, a_k$, учитывая, что вектор z ортогонален ко всем этим векторам. Получим:

$$
\begin{gathered}
(x, a_1) = \beta_1(a_1, a_1) + \beta_2(a_2, a_1) + \cdots + \beta_k(a_k, a_1), \\
(x, a_2) = \beta_1(a_1, a_2) + \beta_2(a_2, a_2) + \cdots + \beta_k(a_k, a_2), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(x, a_k) = \beta_1(a_1, a_k) + \beta_2(a_2, a_k) + \cdots + \beta_k(a_k, a_k).
\end{gathered} \qquad (2)
$$

То есть, для определения неизвестных $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ получена система k линейных уравнений с k неизвестными с определителем матрицы коэффициентов $\mathrm{G}(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ отличным от нуля (определитель Грама для линейно независимых векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$). Следовательно, в этом случае ортогональная проекция y вектора x определяется однозначно. Значит, и ортогональная составляющая z вектора x также определяется однозначно, как $z = x - y$.

Перенося в выражениях (2) и (1) левые части в конец правых частей с обратным знаком, и приравнивая полученные выражения 0, получим:

$$
\begin{gathered}
(a_1, a_1)\beta_1 + (a_2, a_1)\beta_2 + \cdots + (a_k, a_1)\beta_k + (x, a_1)(-1) = 0, \\
(a_1, a_2)\beta_1 + (a_2, a_2)\beta_2 + \cdots + (a_k, a_2)\beta_k + (x, a_2)(-1) = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(a_1, a_k)\beta_1 + (a_2, a_k)\beta_2 + \cdots + (a_k, a_k)\beta_k + (x, a_k)(-1) = 0, \\
a_1\beta_1 + \qquad a_2\beta_2 + \cdots + \qquad a_k\beta_k + \qquad y(-1) = 0.
\end{gathered} \qquad (3)
$$

Последнее выражение в (3) состоит из n равенств для каждой компоненты отдельно.

На систему равенств (3) (для каждой компоненты последнего векторного равенства отдельно) можно смотреть как на совокупность n систем $k+1$ линейных однородных уравнений с $k+1$ неизвестными, имеющих ненулевое решение $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, -1$. Каждый определитель такой системы однородных уравнений из совокупности равен нулю. Далее, n определителей таких однотипных систем могут быть выписаны формально в виде одного определителя:

$$\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_k,a_1) & (x,a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_1,a_k) & \dots & (a_k,a_k) & (x,a_k) \\ a_1 & \dots & a_k & y \end{vmatrix} = 0.$$

Или после транспонирования (с учетом свойства симметричности скалярного произведения)

$$\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & a_k \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & y \end{vmatrix} = 0\,. \qquad (4)$$

Выделим из определителя (4) вектор y, для чего представим его в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & a_k \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & y \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & a_k \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & 0 \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & y \end{vmatrix}.$$

Откуда, с помощью разложения второго определителя по элементам последнего столбца, получим:

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & a_k \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & 0 \end{vmatrix}}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)} \qquad (5)$$

Поскольку вектор x можем представить в виде:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & 0 \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & x \end{vmatrix}}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)},$$

то вектор z, равный $x-y$ определится следующим образом:

$$z = x - y = \frac{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & a_k \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & x \end{vmatrix}}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)}. \tag{6}$$

Выражения (5) и (6) дают представления векторов y и z соответственно в явном виде, после разложения определителей, входящих в эти выражения, по элементам последних столбцов.

Для некоторых геометрических задач важно уметь вычислять длину ортогональной составляющей вектора x, т.е. длину вектора z. Проведем необходимые рассуждения, позволяющие найти формулу для определения квадрата длины вектора z.

Поскольку $(z,y)=0$, то $(z,z)=(z,x-y)=(z,x)$.

Обозначим длину вектора z через h. Тогда

$$h^2 = (z,z) = (z,x) = \frac{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & (a_1,x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & (a_k,x) \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & (x,x) \end{vmatrix}}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)} = \frac{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k,x)}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)}. \tag{7}$$

Поясним, каким образом выражение (6) умножалось скалярно на x. Для этого определитель в числителе дроби выражения (6) раскладывался по элементам последнего столбца. В результате числитель превратился в линейную комбинацию векторов $a_1, a_2, \dots, a_k, x$, с коэффициентами, являющимися алгебраическими дополнениями элементов последнего столбца указанного определителя. Затем эту линейную комбинацию векторов $a_1, a_2, \dots, a_k, x$ умножили скалярно на вектор x и снова свернули в определитель. Таким образом и получили выражение (7).

Укажем некоторые свойства определителя Грама $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$

1. Определитель $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ для линейно независимых векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ отличен от нуля и равен нулю тогда и только тогда, когда векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно зависимы.

2. Если в (7) положить $x = a_{k+1}$, то из (7) следует, что $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}) = \mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)h^2$. Из последнего выражения следует, что $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k) \geq 0$, причем равенство нулю будет тогда и только тогда, когда вектора $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно зависимы.

3. *Параллелепипедом*, натянутым на k линейно независимых векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$, в n-мерном евклидовом пространстве, называется множество векторов $t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_k a_k$ при t_i, независимо изменяющимися на отрезке [0, 1]. Назовем $(k-1)$-мерный параллелепипед, натянутый на векторы $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, *основанием параллелепипеда*, а расстояние от вектора a_k (длину ортогональной составляющей вектора a_k) до подпространства, натянутого на $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ – *высотой параллелепипеда*.

«Объемом» одномерного параллелепипеда $\{ta_1\}$ называется длина вектора a_1. Для бо́льших размерностей объем определяется индуктивно, как объем основания, умноженный на высоту.

Теорема. Квадрат объема параллелепипеда, натянутого на k линейно независимых векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$, равен определителю $G(a_1, a_2, \dots, a_k)$.

Доказательство индукцией по k с учетом свойства 2:

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k, a_k) = \mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})h^2.$$

Проведем доказательство теоремы ещё раз, не прибегая к выражению (7).

Для $k = 1$ утверждение теоремы верно. Пусть z ортогональная составляющая вектора a_k относительно подпространства, натянутого на вектора $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, т.е. z ортогональна векторам $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$.

Пусть $y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_{k-1} a_{k-1}$ – ортогональная проекция вектора a_k на подпространство, натянутое на вектора $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$. Ясно, что $a_k = y + z$, откуда $z = a_k - y$.

Будем считать, что утверждение теоремы верно для $k-1$ $(k > 1)$ векторов, т.е. для определителя $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$.

Рассмотрим определитель

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_{k-1}) & (a_1, a_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{k-1}, a_1) & \dots & (a_{k-1}, a_{k-1}) & (a_{k-1}, a_k) \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_{k-1}) & (a_k, a_k) \end{vmatrix}.$$

Прибавим к последнему столбцу определителя $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ предшествующие, умноженные на $-\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_{k-1}$ соответственно. В силу линейности скалярного произведения по второму аргументу, получим в последнем столбце числа (a_1, z), …,(a_{k-1}, z), (a_k, z), из которых первые $k-1$ равны нулю. Последний элемент последнего столбца равен $(a_k, z) = (y + z, z) = (z, z) = |z|^2$ Разложим теперь преобразованный определитель $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ по последнему столбцу, получим

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k) = |z|^2 \mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}).$$

Длина вектора z равна высоте параллелепипеда согласно определению расстояния от вектора до подпространства. Таким образом, $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ равен произведению квадрата высоты $|z|^2$, на квадрат объема основания $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ (по индуктивному предположению), т.е. квадрату объема k-мерного параллелепипеда. Что и требовалось доказать.

В n-мерном евклидовом пространстве объем n-мерного параллелепипеда, натянутого на n линейно независимых векторов можно выразить через координаты этих векторов в каком-нибудь ортонормальном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – линейно независимая совокупность векторов в n-мерном евклидовом пространстве, и пусть матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

имеет своими столбцами координаты векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ относительно некоторого ортонормального базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ тогда элемент g_{ij} матрицы $G = A^T A$ равен

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} = (a_i, a_j),$$

т.е. матрица $G = A^T A$ есть матрица Грама для совокупности векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Имеем $\det G = \det A^T A = (\det A)^2$

Таким образом, квадрат объема параллелепипеда равен квадрату определителя матрицы A и, следовательно, объем параллелепипеда равен абсолютной величине $\det A$.

Нулевое подпространство билинейной и квадратичной формы

Пусть $g(x, y)$ – билинейная форма, заданная в пространстве **L**.

Определение 4. Назовем правым нулевым подпространством формы $g(x, y)$ множество всех элементов y, для каждого из которых при любом $x \in \boldsymbol{L}$ соблюдается равенство

$$g(x, y) = 0. \tag{*}$$

Это определение, очевидно, не зависит от размерности и может быть использовано в бесконечномерном случае.

Правое нулевое подпространство будем обозначать $\mathbf{L}_0''$. Аналогично определим левое нулевое подпространство $\mathbf{L}_0'$, именно: $y \in \mathbf{L}_0'$, если $g(x, y) = 0$ при любом $x \in \boldsymbol{L}$.

Лемма 2. $\mathbf{L_0^{''}}$ есть линейное подпространство.

Доказательство. Пусть $y_1, y_2 \in \mathbf{L_0^{''}}$. Тогда $g(x, y_1) = 0$, $g(x, y_2) = 0$ при любом x. Но отсюда следует, что

$$g(x, y_1 + y_2) = g(x, y_1) + g(x, y_2) = 0,$$
$$g(x, \alpha y_1) = \alpha g(x, y_1) = 0.$$

Таким образом, $y_1 + y_2 \in \mathbf{L_0''}$ и $\alpha y_1 \in \mathbf{L_0^{''}}$.

Аналогично доказывается, что подпространством является и $\mathbf{L_0^{'}}$.

Далее рассмотрим n-мерное пространство. Зафиксируем в нем базис $\{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\}$ и запишем билинейную форму в координатах:

$$g(x, y) = \sum g_{ij} x_i y_j,$$

где $a_{ij} = g(\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_j})$.

Покажем, что $y \in \mathbf{L_0''}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum g_{ij} y_j = 0, \tag{44}$$

при всех значениях $\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, n$. Для этого напишем тождество

$$\Sigma_{i,j}\, g_{ij} x_i y_j = \Sigma_i \left(\Sigma_j\, g_{ij} y_j\right) x_i. \tag{a}$$

■

Лемма 3. $y \in \mathbf{L_0''}$ тогда и только тогда, когда выполняется равенство (1).

Доказательство. Если выполняются условия (1), то выполняется и (*). С другой стороны, из условия (*) следует, что в правой части равенства (a) все коэффициенты при x_i обращаются в нуль, а это и дает нам систему (1).

Точно так же, $y \in \mathbf{L_0'}$ тогда и только тогда, когда

$$\sum g_{ij} y_i = 0. \tag{45}$$

Все коэффициенты при x_i есть 0, что и требовалось доказать. ■

Равенства (1) и (2) представляют собой системы уравнений, определяющие $\mathbf{L_0^{''}}$ и $\mathbf{L_0^{'}}$ в координатах.

Ранг формы $g(x, y)$ равен разности между размерностью всего пространства и размерностью нулевого подпространства этой формы (какое здесь брать нулевое подпространство – правое или левое, – безразлично, так как их размерности одинаковы).

Определение 5. Билинейная форма называется невырожденной, если размерность $\mathbf{L}_0^{'}$ (или $\mathbf{L}_0^{''}$) равна нулю.

В остальных случаях билинейная форма называется вырожденной.

Иначе говоря, билинейная форма вырождена, если ее нулевые подпространства имеют ненулевую размерность, или (что то же самое) если ее ранг меньше размерности пространства: $r < n$, или если определитель ее матрицы равен нулю: $\Delta = det\mathrm{A} = 0$.

Лекция 26

§53. Пространства (линейные) с квадратичной формой

Пусть **L** – действительное линейное пространство. Введем в пространстве **L** операцию скалярного умножения векторов.

Пусть в ***L*** над ***R*** фиксирована билинейная симметричная невырожденная форма, называемая скалярным произведением. Действие скалярного умножения ставит в соответствие каждой паре векторов **x, y** из **L** действительное число, которое обозначается (x, y) и называется скалярным произведением вектора **x** на вектор **y**.

Каждую невырожденную симметричную билинейную форму $g(x, y)$, заданную в пространстве $\boldsymbol{L}$, можно принять в качестве скалярного произведения, положив $(x, y) = g(x, y)$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \boldsymbol{L}$.

Скалярное произведение зависит от выбора формы $g(x,y)$. Если в качестве скалярного произведения выбирать разные формы, то для данной пары векторов **x, y** пространства **L** скалярное произведение будет получать, вообще говоря, разные численные значения.

Предполагая пространство **L** n-мерным, возьмем в нем произвольный базис $\{\boldsymbol{e}_i\}_1^n$. Если $\boldsymbol{x} = \sum x^i \boldsymbol{e_i}$, $\boldsymbol{y} = \sum y^k \boldsymbol{e_k}$, то скалярное произведение запишется в координатах следующим образом

$$(x,y) = g(x,y) = \sum g_{ik} x^i y^k, \tag{46}$$

где g_{ik} – коэффициенты билинейной формы $g(x,y)$ в базисе $\{\boldsymbol{e}_i\}_1^n$. Они являются значениями этой формы на базисных векторах, то есть их скалярными произведениями. Таким образом,

$$g_{ik} = (\boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{e_k}), \tag{47}$$

причем $g_{ik} = g_{ki}$. Равенства (47) представляют собой таблицу умножения базисных векторов.

Если правые части таблицы (47) даны, то тем самым однозначно определено скалярное произведение любой пары векторов (x,y) на основании равенства (46).

Определение 1. Векторы **x, y** называются ортогональными, если $(x,y) = 0$.

В координатах условие ортогональности векторов **x, y** имеет вид $\sum g_{ik} x^i y^k = 0$.

Определение 2. Вектор x ортогонален подпространству $\mathbf{L}'$, если $(x,y) = 0$ для любого $y \in \boldsymbol{L}'$.

<u>Замечание 1.</u> Если $\boldsymbol{L}'$ имеет размерность k, то для ортогональности вектора **x** подпространству $\boldsymbol{L}'$ достаточно, чтобы x был ортогонален к каким-нибудь независимым векторам в числе k_1, лежащим в $\boldsymbol{L}'$. Действительно, если независимые векторы $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ лежат в $\boldsymbol{L}'$ и $(x, a_1) = 0$, …, $(x, a_k) = 0$, то для любого $\mathbf{y} \in \mathbf{L}$ имеем $\mathbf{y} = \lambda^1 a_1 + \dots + \lambda^{\mathrm{k}} a_k$, откуда $(x,y) = \lambda^1 (x, a_1) + \dots + \lambda^{\mathrm{k}} (x, a_k) = 0$.

Определение 3. Подпространства $\boldsymbol{L}'$, $\boldsymbol{L}''$ называются ортогональными, если $(x,y)=0$ для любого $x \in \boldsymbol{L}'$ и любого $y \in \boldsymbol{L}''$.

Определение 4. Подпространство $\boldsymbol{L}''$ называется ортогональным дополнением подпространства $\boldsymbol{L}'$ в пространстве $\mathbf{L}$, если $\boldsymbol{L}'$ и $\boldsymbol{L}''$ ортогональны и их прямая сумма совпадает с $\mathbf{L}$.

<u>Замечание 2.</u> Ортогональность векторов и ортогональность подпространств существенно зависит от того, какая именно билинейная форма $g(x,y)$ взята в качестве скалярного произведения (x,y) в пространстве $\mathbf{L}$.

Важным примером группы, особенно при изучении конечных групп является группа подстановок из n элементов (множество из n элементов можно всегда отождествить с числами $\{1,2,\dots,n\}$).

Подстановкой на множестве $\{1,2,\dots,n\}$ называется взаимно однозначное отображение этого множества на себя.

Подстановку удобно задавать прямым указанием замен для каждого элемента, посредством записи образа под прообразом, т.е. в виде таблицы (матрицы из двух строк), где в первой строке записаны прообразы, а во второй – их образы. Так запись $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ задает подстановку, которая заменяет элементы 1, 2, 3, 4, 5, соответственно, на 4, 1, 5, 3, 2; <u>порядок расположения её столбцов безразличен</u>. В такой записи, как в первой, так и второй строках оказываются перестановки. Удобно в первой строке записывать элементы в натуральном расположении.

Последовательное применение двух подстановок приводит к подстановке, называемой их *произведением*. Так,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(первой действующей подстановкой считается та, которая записана слева). В силу произвольности расположения столбцов в табличной записи подстановки, всегда можно расположить столбцы во втором сомножителе таким образом, чтобы элементы первой строки второго сомножителя имели такое же расположение, как элементы второй строки первого сомножителя. Тогда результирующая подстановка будет иметь первую строку такую же, как у первого сомножителя, а вторую строку - такую же, как у второго преобразованного сомножителя. Рассмотрим предыдущий пример. Преобразуем указанным выше образом второй сомножитель и произведем умножение, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

т.е. предыдущий результат. Таким образом, процесс последовательного применения подстановок (умножение подстановок), по сути, сводится к указанной выше перестановке столбцов в табличной записи второй подстановки. Следовательно, если отображаемые элементы (прообразы) подстановки, стоящей справа, записывать в том же порядке, как элементы второй строки (образы) подстановки, стоящей слева, то ассоциативность операции умножения подстановок будет очевидной.

Действительно,

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}\left\{\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}\right\} =$$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$.

Выше выписаны два варианта вычисления произведения трех подстановок, т.е. два варианта расстановки скобок, чтобы с помощью бинарной операции произвести умножение трех подстановок-сомножителей. Показано, что результат не зависит от расстановки скобок, т.е. показано, что данная бинарная операция последовательного выполнения двух подстановок ассоциативна. Таким образом, показано, что совокупность всех подстановок на множестве из n элементов с бинарной замкнутой операцией умножения подстановок (последовательного выполнения подстановок) образует структуру полугруппы. Покажем, что на самом деле множество подстановок с операцией умножения, как последовательного выполнения подстановок, имеет структуру группы. То есть, укажем подстановку, исполняющую роль единицы при умножении подстановок и для любой подстановки, укажем обратную ей.

Действительно, в множестве подстановок существует тождественная подстановка, отображающая каждый элемент (число) в себя. Множество её возможных обозначений можно записать в виде равенства: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$. Тогда произведение любой исходной подстановки на тождественную подстановку будет давать $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, т.е. исходную подстановку.

Обратной к подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ будет подстановка $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$, поскольку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$.

Умножение подстановок, вообще говоря, некоммутативно, например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{а} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Резюмируем сказанное выше в виде следующего предложения.

Множество подстановок на некотором конечном множестве с операцией умножения подстановок образует некоммутативную группу. Эта группа называется *симметрической группой* и обозначается обычно как S_n

Выше рассмотрели действия с подстановками, а теперь посмотрим, что происходит внутри самой подстановки с отображаемыми элементами. Для этого возьмем первый столбец матричной (табличной) записи подстановки и обозначим его элементы через i_1 и i_2, т.е. предположим, что данная подстановка отображает элемент i_1 в элемент i_2. Если элемент $i_2 \neq i_1$, то в подстановке обязательно найдется столбец с верхним элементом i_2. Поставим указанный столбец на второе место. Обозначим второй элемент этого столбца через i_3. Очевидно, что $i_3 \neq i_2$ (отображение взаимно однозначное). Если $i_3 \neq i_1$, то в исходной подстановке найдется столбец с первым элементом i_3. Поставим этот столбец на третье место. Обозначим его второй элемент через i_4. В силу взаимной однозначности отображения, определяющего рассматриваемую подстановку $i_4 \neq i_2$ и $i_4 \neq i_3$. Если $i_4 \neq i_1$, то в исходной подстановке найдется столбец с первым элементом равным i_4, который поставим на четвертое место. Если в четвертом столбце соответствующий второй элемент $i_5 \neq i_1$, то продолжим процесс перестановки столбцов. Обязательно, на каком-то r-ом шаге найдется элемент, когда $i_{r+1} = i_1$. В этом случае будем говорить, что различные элементы $\{i_1, i_2, \dots i_r\} \subset \{1,2,\dots,n\}$образуют *циклическую подстановку* или *цикл* $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{r-1} & i_r \\ i_2 & i_3 & \dots & i_r & i_1 \end{pmatrix}$. В этом случае число r называют длиной цикла. Если $r = n$, то исходная подстановка является циклом. Если $r < n$, то исходная подстановка задает на множестве $\{1,2,\dots,n\} - \{i_1, i_2, \dots i_r\}$ взаимно однозначное отображение или подстановку. Рассматривая последнюю подстановку как исходную, можем и в ней выделить цикл, и процесс выделения циклов можем продолжать до тех пор, пока исходная подстановка не будет разбита на циклы. Разбиение подстановки на циклы называют также *разложением подстановки в произведение циклов*. Поясним сказанное.

Пусть $\{1,2,\dots,n\} - \{i_1, i_2, \dots i_r\} = \{j_1, j_2, \dots, j_{n-r}\}$ или, по-другому, $\{i_1, i_2, \dots i_r\} \cup \{j_1, j_2, \dots, j_{n-r}\} = \{1,2,\dots,n\}$ и $\{i_1, i_2, \dots i_r\} \cap \{j_1, j_2, \dots, j_{n-r}\} = \emptyset$. Пусть исходная подстановка $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$. разбивается на два цикла, т.е. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r & j_1 & j_2 & \dots & j_{n-r} \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_1 \end{pmatrix}$.

Последнюю подстановку в этом равенстве можно записать в виде произведения подстановок

$\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_r & j_1 & \dots & j_{n-r} \\ i_2 & \dots & i_1 & j_2 & \dots & j_1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r & j_1 & j_2 & \dots & j_{n-r} \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 & j_1 & j_2 & \dots & j_{n-r} \end{pmatrix} \cdot$
$\begin{pmatrix} i_2 & i_3 & \dots & i_1 & j_1 & j_2 & \dots & j_{n-r} \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_1 \end{pmatrix}$ Если к тому же договориться опускать при записи элементы, отображаемые сами в себя, то последняя запись становится короче: $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r & j_1 & j_2 & \dots & j_{n-r} \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 & j_2 & j_3 & \dots & j_1 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_r \\ i_2 & i_3 & \dots & i_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_{n-r} \\ j_2 & j_3 & \dots & j_1 \end{pmatrix}$. Понятно, что указанный подход к записи подстановки разбитый на два цикла легко обобщается на случай, когда подстановка разбивается на k циклов. Если хотим и впредь говорить о разбиении подстановки на циклы, как о разложении в произведение циклов, то следует уточнить само определение цикла.

Подстановка на множестве из n элементов называется *циклом длины* r, если она $n - r$ элементов отображает самих в себя (оставляет на местах), а остальные r элементов переставляет циклическим образом.

Подстановка называется *транспозицией*, если она $n - 2$ элемента оставляет на местах, а остальные два элемента переставляет местами.

Выше упростили запись циклической подстановки, опустив запись элементов, отображаемых самих в себя. Можем еще более упростить запись, если цикл $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{r-1} & i_r \\ i_2 & i_3 & \dots & i_r & i_1 \end{pmatrix}$ будем записывать как $(i_1, i_2, \dots, i_r)$, понимая при этом, что $i_1 \to i_2 \to \dots \to i_r \to i_1$ (элемент i_1 отображается в элемент i_2, i_2в i_3 и т.д., i_{r-1} в i_r, i_rв i_1). Ясно, что тот же цикл можно записать как $(i_k, i_{k+1}, \dots, i_r, i_1, \dots, i_{k-1})$, где $1 < k \leq r$. При такой записи транспозиция, как цикл длины два, записывается в виде (α_i, α_j).

Пример 1. Рассмотрим подстановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 2 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 & 7 & 6 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$ $(1 \quad 5) \cdot (2 \quad 3 \quad 7 \quad 6 \quad 4)$.

В этой записи первая матрица (таблица) – исходная подстановка. Вторая таблица – запись исходной подстановки, разбитой на циклы. Последнее выражение в равенстве – разложение исходной подстановки в произведение циклов.

Покажем связь транспозиции элементов в <u>перестановке</u> и определения транспозиции <u>как цикла</u> длины 2.

Пусть дана подстановка $\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, в нижней строке (перестановке) которой хотим поменять местами элементы α_i и α_j. Умножим данную подстановку на транспозицию $(\alpha_i, \alpha_j) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_j & \dots & \alpha_i & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Учитывая связь между транспозициями в перестановках и подстановках, можно результаты, связанные с перестановками и полученные для перестановок, перенести на подстановки. Частично это уже делалось ранее при введении понятия четности подстановки.

Чтобы увязать введенное ранее понятие четности подстановки, как суммарную четность числа инверсий в двух её строках-перестановках, с циклами, рассмотрим пример вычисления четности подстановки-цикла длины r.

Пример. Подсчитаем четность цикла длины r, как подстановки r-го порядка.

Пусть $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{r-1} & i_r \\ i_2 & i_3 & \dots & i_r & i_1 \end{pmatrix}$ - циклическая подстановка. Четность этой подстановки совпадает с четностью числа $m = inv(i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_r)$ $+inv(i_2, \dots, i_{r-1}, i_r, i_1)$ (суммарное число инверсий в верхней и нижней строках циклической подстановки). Поскольку

$inv(i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_r) = inv(i_1, i_2) + \dots + inv(i_1, i_r) + inv(i_2, i_3, \dots i_r)$, а

$inv(i_2, \dots, i_{r-1}, i_r, i_1) = inv(i_2, i_3, \dots i_r) + inv(i_2, i_1) + inv(i_3, i_1) \dots + inv(i_r, i_1)$, то $m = 2 \cdot inv(i_2, i_3, \dots i_r) + \{inv(i_1, i_2) + inv(i_2, i_1)\} + \dots + \{inv(i_1, i_r) + inv(i_r, i_1)\}$.

Так как первое слагаемое в последнем выражении для числа m является четным числом, то четность числа m совпадает с четностью числа фигурных скобок, т.е. с (r-1), в выражении для m, поскольку каждое число в фигурных скобках равно единице (только одна из двух пар в фигурных скобках образует инверсию). Совпадение четностей чисел m и $r-1$ можно записать и как $m \equiv r - 1 (mod\, 2)$. Таким образом четность цикла длины r противоположна четности его длины, т.е. совпадает с четностью числа $r-1$.

Этот пример показывает, что понятие четности подстановки можно ввести и по-другому – через разложение подстановки на циклы.

Замечание. Любую подстановку в табличной записи можно с помощью перестановки столбцов привести к виду, в котором столбцы разбиты на упорядоченные группы так, что каждая группа столбцов образует циклическую подстановку (будем считать, что элементы, переводимые рассматриваемой подстановкой сами в себя, образуют циклы длины единица). Будем называть такую запись подстановки *канонической*. Каноническая запись определяется единственным образом с точностью до перестановки циклических подстановок (циклов). Сказанное вытекает из описанной выше процедуры разбиения подстановки на циклы. Каноническая запись подстановки достигается с помощью процедуры (перестановки столбцов), не меняющей четность подстановки. Поэтому четность подстановки n-ой степени можно определить с помощью её четности в канонической записи. Несложно доказать, опираясь на пример выше, что если подстановка разбивается на s циклов с длинами $r_1, r_2, \dots, r_s$ соответственно, то четность подстановки n-ой степени совпадает с четностью числа $d = \sum_{i=1}^{s}(r_i - 1)$. Поскольку $\sum_{i=1}^{s} r_i = n$, то $d = n - s$. Число $d = n - s$ называется *декрементом* подстановки. Таким образом, *четность подстановки совпадает с четностью её декремента*.

Указать, какое подмножество вещественных чисел образует группу относительно операции $a * b = a + b + ab$, где $a, b \in \boldsymbol{R}$ (множество вещественных чисел).

Решение. Замкнутость операции $*$ на множестве $\mathbb{R}$ очевидна. Проверим ассоциативность операции.

$(a * b) * c = (a + b + ab) * c = a + b + ab + c + ac + bc + abc$,

$a * (b * c) = a * (b + c + bc) = a + b + c + bc + ab + ac + abc$.

Правые части обоих равенств равны между собой (с точностью до перестановки слагаемых). Следовательно, операция $*$ ассоциативна на множестве $\boldsymbol{R}$.

Покажем, что существует «нейтральный элемент» относительно операции $*$, т.е. существует такой элемент x, что для любого a: $a * x = a$. Действительно, $a * x = a + x + ax = a$. Откуда $x = 0$. То есть нейтральным элементом относительно операции $*$ для любого числа a является 0.

Рассмотрим теперь для каких чисел существует «симметричное число» относительно операции $*$. То есть, для каких чисел a существует число y, для которого выполняется $a * y = 0$ или в развернутом виде $a + y + ay = 0$. Из последнего равенства следует, что если $a \neq -1$, то $y = \frac{-a}{1+a}$. Поэтому, если из множества $\boldsymbol{R}$ исключить число (-1), то для любого $a \in \boldsymbol{R} - (-1)$ существует симметричный элемент a' такой, что $a * a' = 0$.

Покажем теперь, что множество $\boldsymbol{R} - (-1)$ замкнуто относительно операции $*$, т.е. что $a * b \neq -1$, если $a \neq -1$ и $b \neq -1$. Действительно, из $a * b = -1$ следует, что $a + b + ab = -1$. Откуда, либо $a = -1$, либо $b = -1$.

Ответ. Множество $\boldsymbol{R} - (-1)$ относительно операции $*$ образует группу. Очевидно, что эта группа будет коммутативна.

Упражнение. Показать, что множество $\boldsymbol{R}$ без 1 образует коммутативную группу относительно операции $a * b = a + b - ab$.

Лекция 27

§54. Норма вектора

Пусть в линейном пространстве **L** задано скалярное произведение.

Определение 1. Нормой вектора x называется число

$$\|\boldsymbol{x}\| = +\sqrt{(x, x)}. \tag{48}$$

Норма является обобщением понятия модуля или длины вектора, известного из элементарной геометрии.

Скалярное произведение (x, x) является действительным числом, при этом оно может не быть положительным, так что норма вектора может оказаться мнимой. Условимся считать, что радикал в формуле (1) может быть либо неотрицательным действительным числом, либо мнимым числом с положительным множителем при i ($i = +\sqrt{-1}$).

Из определения нормы следует, что $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$ для любого $\mathbf{x} \in \mathbf{L}$ и любого числа α.

Ясно, что

$$\|-\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|, \|\mathbf{0}\| = 0. \qquad (49)$$

Ненулевые векторы, норма которых равна нулю, называются изотропными. Изотропные векторы существуют тогда и только тогда, когда квадратичная форма (x, x) не является знакоопределенной.

Квадратичная форма $\|\boldsymbol{x}\|^2 = (x, x)$ называется метрической формой рассматриваемого пространства, а пространство называется пространством с квадратичной метрикой.

Задание скалярного произведения и задание квадратичной формы для измерения норм векторов равносильны, так как она определяется билинейной формой (x, y) и определяет ее как свою полярную форму.

Если пространство k-мерно, то метрическая форма в координатах имеет вид $\|\boldsymbol{x}\|^2 = (x, x) = \sum g_{ik} x^i x^k$.

Определение 2. Угол между векторами x и y находится по формуле $\cos(x, y) = \frac{(x,y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$.

Для обычных векторов (в пространстве $\mathbf{V_3}$) определение 2 согласуется с обычным выражением угла между векторами через скалярное произведение.

Чтобы это определение можно было применить в общем евклидовом пространстве, необходимо доказать, что указанное отношение по абсолютной величине не превосходит единицы, каковы бы ни были векторы x и y.

Лемма 1. $A(x, y) \leq 1$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$.

Доказательство. Для доказательства этого утверждения рассмотрим вектор $\boldsymbol{\lambda x} - \boldsymbol{y}$, где λ –

вещественное число. В силу положительности определения

$$(\lambda \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, \lambda \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \geq 0, \qquad (50)$$

переписав, получим

$$\lambda^2 (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2\lambda (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) \geq 0. \qquad (51)$$

В левой части неравенства стоит квадратный трехчлен относител может быть положительным.

Следовательно, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$, откуда, извлекая квадратный корень, получаем

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq |\boldsymbol{x}| \cdot |\boldsymbol{y}|, \qquad (52)$$

что и требовалось доказать. ■

Неравенство (8) называют неравенством Коша-Буняковского.

Лемма 2. Если метрическая форма является положительно определенной, то для любых двух векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{L}$ выполняется неравенство

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|. \qquad (53)$$

Доказательство. Используем неравенство Коши-Буняковского

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})^2 \leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}). \qquad (54)$$

Учитывая (54), получим, что

$$\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + 2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$
$$\leq (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) +$$
$$+2\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \cdot (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = (\|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|)^2,$$

откуда следует (53). ■

<u>Замечание.</u> Из (53) следует, что если метрическая форма положительно определена, то $\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\|$, $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \geq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$.

Рассмотрим аффинное пространство **U**, которому соответствует линейное пространство **L** с квадратичной метрикой.

В аффинном пространстве $\boldsymbol{U}$ для любой пары точек A, B определим расстояние $\rho(A, B)$, полагая его равным норме вектора $\overline{\mathrm{AB}}$

$$\rho(A, B) = \|\overline{AB}\|. \tag{55}$$

Тогда из формул (52) и (55), следуют равенства:

$$\rho(A, B) = \rho(B, A), \rho(A, A) = 0. \tag{56}$$

В случае положительно определенной метрической формы (x, x) расстояние между точками равно нулю только тогда, когда точки совпадают, и для любых трех точек A, B, С из **U** выполняется неравенство треугольника, которое следует из неравенства (53) и формулы (55)

$$\rho(A, C) \leq \rho(A, C) + \rho(B, C). \tag{57}$$

Если между точками аффинного пространства **U** расстояние определяется по формуле (55), то говорят, что в аффинном пространстве **U** задана квадратичная метрика. В аффинных координатах квадрат расстояния имеет выражение

$$\rho^2(A, B) = \sum g_{ik}(x_2^i - x_1^i)\,(x_2^k - x_1^k), \tag{58}$$

где $x_1^1, \dots, x_1^n$ – аффинные координаты точки A, $x_2^1, \dots, x_2^n$ – аффинные координаты точки B.

Правую часть (58), квадратичную относительно разностей координат произвольных точек A к B, называют метрической формой пространства **U**.

Если матричная форма положительно определена, то $\rho(A, B) = 0$ тогда и только тогда, когда $A = B$. В этом случае $\boldsymbol{U}$ называется метрическим пространством, и ρ называют метричной. Если это условие не выполняется, то ρ называют псевдометричной.

Лемма 3. Взаимные ортогональные ненулевые векторы $\{\boldsymbol{x_i}\}_{\boldsymbol{1}}^{\boldsymbol{k}}$ линейно независимы.

Доказательство. Допустим, что эти векторы линейно зависимы. Тогда имеет место равенство $\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = 0$, где, например, $c_1 \neq 0$.

Скалярно умножим это равенство на x_1, в силу предположения о взаимной ортогональности векторов $\{\boldsymbol{x_i}\}_\mathbf{1}^\boldsymbol{k}$ получим $c_1(x_1, x_1) = 0$. Отсюда $(x_1, x_1) = 0$ и, следовательно, $x_1 = 0$ в противоречие с предположением. ■

Результат этой леммы будем использовать в такой форме: если сумма взаимно ортогональных векторов равна нулю, то каждое из слагаемых равно нулю.

Лемма 4. Если векторы $\{\boldsymbol{y_i}\}_\mathbf{1}^\boldsymbol{k}$ ортогональны к вектору $\boldsymbol{x}$, то любая линейная комбинация $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{y_i}$ также ортогональна к вектору $\boldsymbol{x}$.

Доказательство. Действительно,

$$(\alpha_1 \boldsymbol{y_1} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{y_k}, \boldsymbol{x}) = \alpha_1(\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{x}) + \cdots + \alpha_k(\boldsymbol{y_k}, \boldsymbol{x}).$$

Следовательно, вектор $\alpha_1 \boldsymbol{y_1} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{y_k}$ ортогонален к вектору $\boldsymbol{x}$, что и требовалось доказать. ■

Совокупность всех линейных комбинаций $\alpha_1 \boldsymbol{y_1} + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{y_k}$ образует подпространство $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}\,(\boldsymbol{y_1}, \ldots, \boldsymbol{y_k})$ – линейную оболочку векторов $\boldsymbol{y_1}, \ldots, \boldsymbol{y_k}$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{x}$ ортогонален к каждому вектору подпространства $\boldsymbol{L}$, и будем говорить, что вектор $\boldsymbol{x}$ ортогонален к подпространству $\boldsymbol{L}$. Вообще, если $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{L}$ – произвольное множество векторов в евклидовом пространстве $\boldsymbol{L}$, то будем говорить, что вектор $\boldsymbol{x}$ ортогонален к множеству $\boldsymbol{F}$, если он ортогонален к любому вектору из $\boldsymbol{F}$.

Совокупность G всех векторов x, ортогональных к множеству $\boldsymbol{F}$, в силу той же леммы 4, составляет подпространство в пространстве $\boldsymbol{L}$. Подпространство $\boldsymbol{G}$ называется ортогональным дополнением подпространства $\boldsymbol{F}$.

Теорема Пифагора. Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Доказательство. Пусть векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ортогональны. Тогда по аналогии с элементарной геометрией вектор $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ можно называть гипотенузой прямоугольного треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$. Умножая $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ скалярно на себя и используя ортогональность векторов x и y, получим

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+\mathbf{2}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=$$
$$=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=|\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{y}|^2.$$

Тем самым доказали в общем евклидовом пространстве теорему Пифагора. ■

Можно обобщить эту теорему на случай любого числа слагаемых. Пусть векторы $\boldsymbol{x_1},\dots,\boldsymbol{x_k}$ взаимно ортогональны, и $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x_1}+\dots+\boldsymbol{x_k}$, тогда $|\boldsymbol{z}|^2=(\boldsymbol{x_1}+\dots+\boldsymbol{x_k},\boldsymbol{x_1}+\dots+\boldsymbol{x_k})=|\boldsymbol{x_1}|^2+\dots+|\boldsymbol{x_k}|^2$.

§55. Ортогональные проекции. Ортогонализация

Рассмотрим евклидово пространство $\boldsymbol{L}$, то есть линейное пространство со знакоопределенной метрической формой. Размерность пространства **L** может быть бесконечной.

Будем считать метрическую форму положительно определенной, тогда пространство $\boldsymbol{L_n}$ является евклидовым.

Пусть в **L** дано подпространство $\mathbf{L}'$. Допустим, что вектор $\boldsymbol{x}\in\mathbf{L}$ представляется в виде суммы

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\widetilde{\boldsymbol{x}}, \qquad (59)$$

где $\boldsymbol{x}'\in\mathbf{L}'$, а $\widetilde{\boldsymbol{x}}$ ортогонален к $\mathbf{L}'$. Тогда вектор $\boldsymbol{x}'$ называется ортогональной проекцией вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство $\mathbf{L}'$.

Лемма. Если ортогональная проекция вектора $\boldsymbol{x}$ на $\mathbf{L}'$ существует, то эта проекция единственна.

Доказательство. Пусть имеется другое разложение $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1'+\widetilde{\boldsymbol{x}}_1$, где $\boldsymbol{x}_1'\in\boldsymbol{L}'$, а $\widetilde{\boldsymbol{x}}_1$ ортогонален к $\mathbf{L}'$. В этом случае $\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_1'=\widetilde{\boldsymbol{x}}-\widetilde{\boldsymbol{x}}_1$, отсюда

$$(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_1')^2=(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_1',\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_1')=(\widetilde{\boldsymbol{x}}-\widetilde{\boldsymbol{x}}_1,\widetilde{\boldsymbol{x}}-\widetilde{\boldsymbol{x}}_1)=\mathbf{0}, \quad (*)$$

так как $\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_1' \in \mathbf{L}'$, а $\tilde{\boldsymbol{x}}$ и $\tilde{\boldsymbol{x}}_1$ ортогональны к $\mathbf{L}'$. Из (*) следует, что $\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_1' = \mathbf{0}$, то есть $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}_1'$, так как метрическая форма пространства положительно определена. ■

Преобразование пространства $\mathbf{L}$, которое каждому вектору x ставит в соответствие вектор $\boldsymbol{x}'$ по формуле (1), также называется ортогональной проекцией (или ортогональным проектированием) на $\mathbf{L}'$.

Если пространство $\boldsymbol{L}$ рассматривается как точечное, а $\mathbf{L}'$ – как плоскость в нем, то точка M' с радиус-вектором $\overline{OM'} = \boldsymbol{x}'$ называется ортогональной проекцией на $\boldsymbol{L}$ точки M, имеющей радиус-вектор $\overline{OM} = \boldsymbol{x}$ (рис. 1).

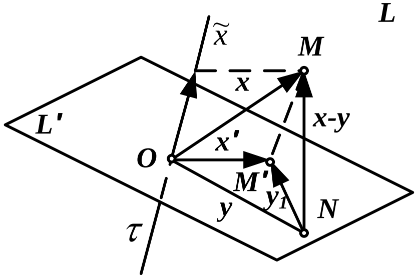


Рисунок 1

Лемма 1. В аффинном пространстве $\boldsymbol{U}$ ортогональная проекция M' точки M на подпространство $\boldsymbol{L}'$ есть ближайшая к M точка из $\boldsymbol{L}'$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{y} = \overline{ON} \in \boldsymbol{L}'$, докажем что

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\| \geq \|\tilde{\boldsymbol{x}}\|. \tag{60}$$

Положим $\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1$, тогда $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} = \tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{y}_1$, и

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2 = (\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{y}_1, \tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{y}_1) = \|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2 + \|\boldsymbol{y}_1\|^2 + \mathbf{2}(\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{y}_1) = \|\tilde{\boldsymbol{x}}\|^2 + \|\boldsymbol{y}_1\|^2, \tag{61}$$

так как $\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{y}_1 = \mathbf{0}$ вследствие ортогональности вектора $\tilde{x}$ подпространству $\boldsymbol{L}'$, содержащему $\boldsymbol{y}_1$.

Отметим, что $\|\boldsymbol{y}_1\|^2 = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_1) \geq \mathbf{0}$ в силу положительной определенности метрической формы рассматриваемого пространства. Поэтому из (3) следует (2). Равенство в (2) достигается лишь тогда, когда $\boldsymbol{y_1} = \mathbf{0}$, или когда $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}^{'}$). ■

Пусть

$$\boldsymbol{L}^{'} = \boldsymbol{L}(\boldsymbol{z_1}, \ldots, \boldsymbol{z_k}),$$

где $\boldsymbol{z_1}, \ldots, \boldsymbol{z_k}$ – некоторая конечная независимая система векторов из $\mathbf{L}$. В этом случае для нахождения ортогональной проекции $\boldsymbol{x}^{'}$ заданного вектора $\boldsymbol{x}$ на подпространство $\boldsymbol{L}'$ достаточно вычислить коэффициенты $a_1, \ldots, a_k$ в разложении

$$\boldsymbol{x}^{'} = \alpha_1 \boldsymbol{z_1} + \ \ldots + \alpha_k \boldsymbol{z_k}. \tag{62}$$

Для этого запишем условие ортогональности вектора $\widetilde{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{'}$ каждому из векторов $\boldsymbol{z_j}$:

$$(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^{'}, \boldsymbol{z_j}) = 0. \tag{63}$$

Подставив разложение (62) в (63) и, используя свойства скалярного произведения, получим для α_i систему линейных уравнений

$$\textstyle\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{k}} (\boldsymbol{z_i}, \boldsymbol{z_j}) \boldsymbol{\alpha_i} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z_j}),\ j = 1, \ldots, k. \tag{64}$$

Определитель системы (64) представляет собой определитель Грама для положительно определенной квадратичной формы (x, x) и независимых векторов $\boldsymbol{z_1}, \ldots, \boldsymbol{z_k}$. Поэтому он положителен (см. § 41 гл. VII), а система (64) однозначно разрешима. Таким образом, искомая проекция найдется.

Лемма 2. Пусть в пространстве с положительно определенной метрической формой имеется система попарно ортогональных векторов $(\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_k})$, то есть $(\boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_k}) = 0$ при $i \neq k$. Если ни один из этих векторов не нулевой, то они линейно независимы.

Доказательство. Рассмотрим соотношение

$$\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \cdots + \lambda_k \boldsymbol{a_k} = \mathbf{0}. \tag{65}$$

Умножим (65) скалярно на $\boldsymbol{a_1}$:

$$\lambda_1 (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1}) + \cdots + \lambda_k (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_k}) = (\boldsymbol{a_1}, \mathbf{0}). \tag{66}$$

Так как $a_1 \neq \mathbf{0}$, а метрическая форма положительно определена, то $(\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_1}) = \|\boldsymbol{a_1}\|^2 \neq \mathbf{0}$. Остальные скалярные произведения в левой части (66) обратятся в нуль по условию леммы, а $(\boldsymbol{a_1}, \mathbf{0}) = 0$ из-за участия нулевого вектора. Следовательно, $\lambda_1 = 0$. Аналогично устанавливается, что $\lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$. Лемма доказана. ■

Пусть в пространстве $\mathbf{L}$ дана упорядоченная система линейно независимых векторов $(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_k})$. Проведем геометрическое построение, называемое процессом ортогонализации, которое будет заключаться в замене этой системы другой системой векторов, ортогональной и в некотором смысле эквивалентной данной. Оно напоминает процесс выбора базиса при приведении квадратичной формы к каноническому виду методом Якоби,

Новая система векторов $\left(\mathbf{e_{1'}}, \dots, \mathbf{e_{k'}}\right)$ будет с соблюдением следующих условий:

1) $\mathbf{e_{1'}} \in \mathbf{L}(\mathbf{e_1})$, $\mathbf{e_{2'}} \in \mathbf{L}(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$, ..., $\mathbf{e_{i'}} \in \mathbf{L}(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_i})$, …, $\mathbf{e_{k'}} \in \mathbf{L}(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_k})$;
2) Векторы $\mathbf{e_{1'}}, \dots, \mathbf{e_{k'}}$ попарно ортогональны;
3) Система $\left(\mathbf{e_{1'}}, \dots, \mathbf{e_{k'}}\right)$ линейно независима.

В таком случае говорят, что новая система векторов получена из первоначальной системы $(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_k})$ процессом ортогонализации.

Если данная система состоит из трех векторов $\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}$ в трехмерном евклидовом пространстве, то новую систему $\mathbf{e_{1'}}, \mathbf{e_{2'}}, \mathbf{e_{3'}}$ строим следующим образом: первый вектор оставляем без изменений $(\mathbf{e_{1'}} = \mathbf{e_1})$, второй вектор проведем к нему ортогонально в плоскости, проходящей через $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{e_2}$, третий вектор проведем ортогонально этой плоскости (рис. 2).

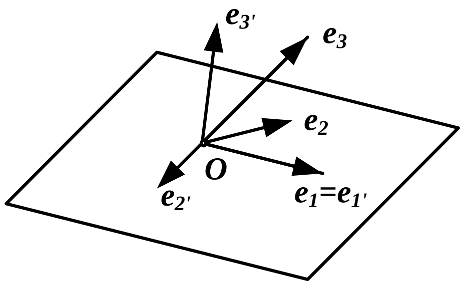


Рисунок 2

Рассматривая случай большей размерности, нужно четвертый вектор располагать перпендикулярно данному трехмерному пространству и т. д. В общем случае положим

$$\begin{gathered}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}'} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}},\\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{2}'} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{2}} + \alpha\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}'} = \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}} + \lambda_1\boldsymbol{e}_{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})'} + \lambda_2\boldsymbol{e}_{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{2})'} + \dots + \lambda_{k-1}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}'}.\end{gathered} \tag{67}$$

Из (67) видим, что векторы $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}'}$ расположены в нужных линейных оболочках и являются ненулевыми вследствие независимости векторов $\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_k}$.

Выберем коэффициенты λ_i так, чтобы $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}'}$ были попарно ортогональны. Тогда система $\left(\mathbf{e}_{\mathbf{1}'}, \dots, \mathbf{e}_{\mathbf{k}'}\right)$ будет независимой по лемме 2. Найдем α. Имеем

$$(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{2}'}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}'}) = (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{2}}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}'}) + \alpha(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}'}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}'}) = 0,$$

отсюда

$$\alpha = -\frac{(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{2}'}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}'})}{(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}'}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}'})}. \qquad (68).$$

Деление выполнимо, так как $\left(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}'}, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}'}\right) = (\mathbf{e_1}, \mathbf{e_1}) \neq 0$**.** Вектор $(-\alpha\boldsymbol{e}_1)$ представляет собой ортогональную проекцию $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{2}}$ на $\boldsymbol{L}(\mathbf{e_1})$ (рис. 3).

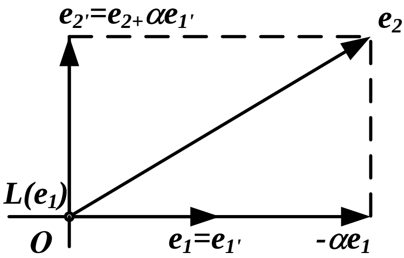


Рисунок 3

Дальше обеспечим ортогональность третьего вектора первым двум β, γ:

$$\left(\boldsymbol{e}_{3'}, \boldsymbol{e}_{1'}\right) = (\boldsymbol{e}_{3'}, \boldsymbol{e}_{1'}) + \underline{\beta(\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{1'})} + \gamma(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{1'}) = 0,$$

$$\left(\boldsymbol{e}_{3'}, \boldsymbol{e}_{2'}\right) = (\boldsymbol{e}_{3'}, \boldsymbol{e}_{2'}) + \beta(\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{2'}) + \underline{\gamma(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{2'})} = 0.$$

Подчеркнутые члены обращаются в нуль, а $(\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{2'}) \neq 0$ по построению, поэтому:

$$\gamma = -\frac{(\boldsymbol{e}_{3'}, \boldsymbol{e}_{1'})}{(\boldsymbol{e}_{1'}, \boldsymbol{e}_{1'})}, \tag{9}$$

$$\beta = \frac{(\boldsymbol{e}_{3'}, \boldsymbol{e}_{2'})}{(\boldsymbol{e}_{2'}, \boldsymbol{e}_{2'})}.$$

Формулы (68) и (69) геометрически означают, что для построения вектора $\boldsymbol{e}_{3'}$ нужно из вектора $\boldsymbol{e}_3$ вычесть его ортогональную проекцию на подпространство $\boldsymbol{L}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ (рис. 4).

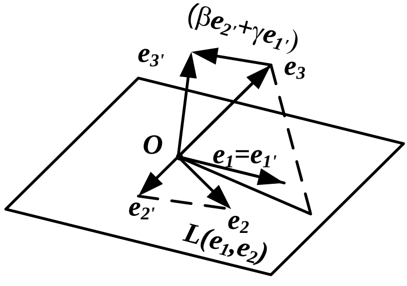


Рисунок 4

Дальше процесс идет по аналогии.

В процессе ортогонализации иногда бывает важно обеспечить соблюдение двух дополнительных условий.

1. При любом $j(1 \le j \le k)$ система $\left(\mathbf{e}_{\mathbf{1}'}, \dots, \mathbf{e}_{\mathbf{j}'}\right)$ ориентирована точно также, как система $(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_j})$;
2. $\left\|\mathbf{e}_{\mathbf{i}'}\right\| = 1$.

<u>Замечание.</u> Очевидно, что все условия ортогонализации по данной системе $(\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_k})$ однозначно определяют систему векторов $\left(\mathbf{e}_{\mathbf{1}'}, \dots, \mathbf{e}_{\mathbf{k}'}\right)$.

Применяя к разложению (53) теорему Пифагора, получаем

$$|\boldsymbol{x}|^{\mathbf{2}} = \left|\boldsymbol{x}'\right|^{\mathbf{2}} + |\tilde{\boldsymbol{x}}|^{\mathbf{2}}, \tag{70}$$

откуда вытекает, что справедливо неравенство

$$\mathbf{0} \le |\tilde{\boldsymbol{x}}| \le |\boldsymbol{x}|, \tag{71}$$

геометрически выражающее тот факт, что длина перпендикуляра не превосходит длины наклонной.

Пусть теперь $\{\boldsymbol{e_i}\}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}}$ – ортонормальный базис в подпространстве $\mathbf{L}'$, и пусть $\boldsymbol{x}' = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{a_{ij}} \boldsymbol{x}'_{\boldsymbol{j}}$. Тогда, учитывая, что в нормированном ортогональном базисе скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих координат (коэффициентов Фурье), получим

$$\left|\boldsymbol{x}'\right|^{\mathbf{2}} = \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{k}} a_j^2.$$

Подставляя это значение $\left|\boldsymbol{x}'\right|^2$ в равенство (70), получаем

$$|\boldsymbol{x}|^{\mathbf{2}} = |\tilde{\boldsymbol{x}}|^{\mathbf{2}} + \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{k}} a_j^2.$$

В частности, для любой (конечной) ортогональной нормированной системы $\{\boldsymbol{e_i}\}_{\mathbf{1}}^{\boldsymbol{k}}$ и любого вектора $\boldsymbol{x}$ получим неравенство

$$\sum_{j=1}^{k} a_j^2 \le |\boldsymbol{x}|^2,$$

которое называется неравенством Бесселя. Геометрический смысл его очевиден: квадрат длины вектора $\boldsymbol{x}$ не меньше, чем сумма квадратов его проекций на любые k взаимно ортогональных направлений.

Лекция 28

§56. Уравнение гиперплоскости в евклидовом пространстве

Пусть $\boldsymbol{U_n}$ аффинное квадратично-метрическое пространство, соответствующее линейному пространству $\mathbf{L}$ с квадратичной метрикой. Пусть в $\boldsymbol{U_n}$ задана система аффинных координат с любым началом и произвольным базисом $\{\boldsymbol{e_i}\}_1^n$. Пусть в этой системе координат дано уравнение произвольной гиперплоскости

$$A_1x^1 + \cdots + A_nx^n + C = 0,$$

или,

$$\sum A_kx^k + C = 0. \qquad (72)$$

Перейдем к новому базису с сохранением начала координат, получим

$$\boldsymbol{x^k} = \sum P_{k'}^k \boldsymbol{x^{k'}}.$$

Отсюда

$$\sum A_kx^k + C = \sum A_kP_{k'}^k x^{k'} + C = \sum A_{k'} x^{k'} + C, \quad (73)$$

где положено

$$A_{k'} = \sum A_kP_{k'}^k. \qquad (74)$$

Выражение (73) представляет собой левую часть уравнения той же гиперплоскости в новой системе координат. Из (73) и (74) следует, что с левой частью уравнения гиперплоскости инвариантно сопоставлен вектор

$$n = \{A_1, \dots, A_n\}$$

с ковариантными координатами $A_1, \dots, A_n$, то есть

$$n = A_1\boldsymbol{e^1} + \cdots + A_n\boldsymbol{e^n},$$

где $\{\boldsymbol{e^1}, \dots, \boldsymbol{e^n}\}$ – базис, взаимный с данным базисом

$\{\boldsymbol{e_1},\dots,\boldsymbol{e_n}\}$. Текущие координаты $\mathrm{x}^1,\dots,\mathrm{x}^\mathrm{n}$ произвольной точки плоскости, по своему определению являются контравариантными, поскольку представляют собой координаты радиус-вектора этой точки в данном базисе:

$$\mathbf{x} = \mathrm{x}^1\boldsymbol{e_1} + \dots + \mathrm{x}^\mathrm{n}\boldsymbol{e_n}.$$

На основании сказанного левая часть уравнения гиперплоскости может быть записана в инвариантном виде с помощью скалярного произведения

$$(n, x) + C = 0. \qquad (75)$$

Если $(x_0^1,\dots,x_0^n)$ – произвольная фиксированная точка гиперплоскости, и x_0 – ее радиус-вектор, тогда $-(n, x_0) = C$ и уравнение (75) можно записать в следующем виде

$$(n, x - x_0) = 0, \qquad (76)$$

или

$$\sum A_i\left(x^i - x_0^i\right) = 0.$$

Из (76) следует, что вектор n ортогонален к любому вектору $x - x_0$, лежащему в гиперплоскости. Следовательно, вектор n является нормалью к гиперплоскости, заданной уравнением (72).

Контравариантные координаты нормали, т. е. координаты вектора n в данном базисе $\{\boldsymbol{e_1},\dots,\boldsymbol{e_n}\}$, задаются формулами

$$A' = \sum g^{ik}A_k, \qquad (77)$$

где g^{ik} – метрический тензор.

§57. Нормальное уравнение гиперплоскости в евклидовом пространстве

Пусть в $\mathbf{L_n}$ дана система координат с произвольным базисом $\{\boldsymbol{e_1},\dots,\boldsymbol{e_n}\}$, и в этой системе задано уравнение гиперплоскости

$$A_1x^1 + \dots + A_nx^n + C = 0, \qquad (78)$$

где $\mathrm{n} = \mathrm{A}_1\boldsymbol{e^1} + \dots + \mathrm{A}_\mathrm{n}\boldsymbol{e^n}$ нормаль гиперплоскости,

$\{\boldsymbol{e^1}, \dots, \boldsymbol{e^n}\}$ – взаимный базис (см. § 45).

Если в качестве n берется единичная нормаль n_0, а свободный член отрицателен или нуль, то уравнение (78) при таких условиях называется нормальным. Положив в этом случае свободный член $C = -p$ $(p \geq 0)$, запишем нормальное уравнение в виде

$$(n_0, x) - p = 0, \tag{79}$$

где $\mathbf{x} = x^1\boldsymbol{e_1} + \dots + \mathrm{x}^\mathrm{n}\boldsymbol{e_n}$ – радиус-вектор текущей точки гиперплоскости.

Для приведения общего уравнения (78) к нормальному виду, достаточно умножить его на нормирующий множитель

$$m = \pm\frac{1}{\|n\|},$$

выбрав знак с учетом условия $mC < 0$. Тогда $\mathrm{p} = -mC > 0$, если $C = 0$, можно брать m со знаком плюс. Очевидно, что $n_0 = mn$ есть единичный вектор.

Обозначим через φ угол между n_0 и x из (79)

$$\boldsymbol{p} = (\boldsymbol{n_0}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x}|\boldsymbol{cos\varphi}. \tag{80}$$

Также как в элементарной аналитической геометрии, так и в многомерном евклидовом пространстве такая величина называется проекцией вектора x на нормаль с положительным направлением по вектору n_0. Вместе с тем, p является расстоянием от начала координат до гиперплоскости. Действительно, из (80) $p \leq |x|$, и $p = |x|$, если $cos\varphi = 1$ $(\varphi = 0)$. Таким образом, p есть длина самого короткого из радиус-векторов, имеющих концы на данной гиперплоскости.

В частном случае, когда базис $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ ортонормирован, взаимный ему базис совпадает с ним, и все рассмотренные соотношения получают полное сходство с хорошо известными фактами из элементарной аналитической геометрии.

В этом случае $m = \frac{\pm 1}{\sqrt{\sum_1^n A_i^2}}$, а нормальное уравнение может быть написано в виде

$$x_1 \cos\alpha + x_2 \cos\beta + \cdots + x_n \cos\gamma - p = 0, \quad (81)$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \ldots, \cos\gamma$ направляющие косинусы вектора n_0.

В произвольном (косом) базисе форма записи (81) нормального уравнения не имеет смысла. Но принципиальная сторона задачи о приведении общего уравнения к нормальному виду и задачи о расстоянии от точки до гиперплоскости не усложняется. Нужно только иметь в виду, что нормирующий множитель следует вычислять по общей формуле

$$m = \frac{\pm 1}{\sqrt{\sum g^{ik} A_i A_k}}. \quad (82)$$

Объем n-мерного гиперпараллелепипеда.

Площадь параллелограмма, как известно из планиметрии, равна произведению его основания на высоту. Если параллелограмм построен на двух векторах x_1, x_2, то можно принять за основание длину вектора x_1, за высоту – длину перпендикуляра, опущенного из конца вектора x_2 на ось вектора x_1.

Аналогично объем параллелепипеда, построенного на векторах x_1, x_2, x_3 равен произведению площади основания на высоту. Площадь основания есть площадь параллелограмма, построенного на векторах x_1, x_2, а высота есть длина перпендикуляра, опущенного из конца вектора x_3 на плоскость векторов x_1, x_2.

Приведем следующее индуктивное определение объема n-мерного гиперпараллелепипеда в евклидовом пространстве $\boldsymbol{L}$.

Пусть дана система векторов $(x_1, \ldots, x_k)$ в евклидовом пространстве $\boldsymbol{L}$. Обозначим через h_j перпендикуляр, опущенный из конца вектора x_{j+1} на подпространство $L(x_1, \dots, x_j)$, $j = 1, 2, \dots, \mathrm{k} - 1$. Далее, введем следующие обозначения:

$V_1 = |x_1|$ – одномерный объем длина вектора x_1,

$V_2 = V_1 \cdot |h_1|$ – двумерный объем – площадь параллелограмма, построенного на векторах x_1, x_2,

$V_3 = V_2 \cdot |h_2|$ – трехмерный объем – объем параллелепипеда, построенного на векторах x_1, x_2, x_3. По аналогии ясно, что

$V_k = |x_1||h_1| \cdot \dots \cdot |h_{k-1}|$ – k-мерный объем – объем гиперпараллелепипеда, построенного на векторах $x_1, \dots, x_k$.

Очевидно, что объем V_k может быть вычислен по формуле $V_k \equiv V(x_1, \dots, x_k) = |x_1||h_1| \cdot \dots \cdot |h_{k-1}|$.

Замечание. Определитель Грама от k векторов $x_1, \dots, x_k$ равен квадрату объема k-мерного гиперпараллелепипеда, построенного на этих векторах: $V_n^2 = G(x_1, \dots, x_n)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Malafeyev O., Farvazov K., Zenovich O., Zaitseva I., Kostyukov K., Svechinskaya T. Geopolitical model of investment power station construction project implementation. В сборнике: AIP Conference Proceedings. International Conference on Electrical, Electronics, Materials and Applied Science. 2018. P. 020066.

2. Malafeyev O., Lakhina J., Redinskikh N., Smirnova T., Smirnov N., Zaitseva I. A mathematical model of production facilities location. В сборнике: Journal of Physics: Conference Series. 2019. P. 012090.

3. Malafeyev O., Rylow D., Novozhilova L., Zaitseva I., Popova M., Zelenkovskii P. Game-theoretic model of dispersed material drying process. В сборнике: AIP Conference Proceedings. Сер. "International Conference on Functional Materials, Characterization, Solid State Physics, Power, Thermal and Combustion Energy, FCSPTC 2017" 2017. P. 020063.

4. Malafeyev O.A., Redinskikh N.D., Nemnyugin S.A., Kolesin I.D., Zaitseva I.V. The optimization problem of preventive equipment repair planning. В сборнике: AIP Conference Proceedings. Сер. "International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2017" 2018. P. 100013.

5. Malafeyev O.A., Rylow D., Zaitseva I., Ermakova A., Shlaev D. Multistage voting model with alternative elimination. В сборнике: AIP Conference Proceedings. Сер. "International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2017" 2018. P. 100012.

6. Zaitseva I., Ermakova A., Shlaev D., Malafeyev O., Strekopytov S. Game-theoretical model of labour force training // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. 2018. T. 96. № 4. C. 978-983.

7. Zaitseva I.V., Semenchin E.A., Vorokhobina Ya.V., Popova M.V. Optimal control of labour potencial of the region // Life Science Journal. 2014. Т. 11. № 11s. С. 674-678.

8. Zaytseva I.V., Popova M.V., Bogdanova S.V., Ermakova A.N. Economic and mathematical methods of labor potential management of the region // Agricultural Bulletin of Stavropol Region. 2016. № S2. С. 149-153. 31

9. Афанасьев, М.Ю. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: учебное пособие / М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444 с. 10. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д.В. Беклемишев. – М.: Физматлит, 2006. – 312 с.

10. Ефимов, Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – М.: Наука, 1970. – 528 с.: с ил.

11. Зайцева И.В. Экономико-математическое моделирование рынка труда: монография НОУ ВПО СКСИ. Ставрополь, 2009. – 116 с.

12. Зайцева И.В., Белкина А.Ю., Старухин А.Ю. Устойчивость экономического развития бизнес-циклов макросистем. В сборнике: моделирование производственных процессов и развитие информационных систем. СтГАУ, Ставрополь. 2011. С. 135-137. 14.

13. Зайцева И.В., Попова М.В. Демографическое развитие ставропольского края как основа формирования трудовых ресурсов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2012. № 81. С. 862-877.

14. Зайцева И.В., Попова М.В., Ермакова А.Н., Богданова С.В. Управление трудовым потенциалом региона методами математического моделирования // Фундаментальные исследования. 2015. № 5-4. С. 723-726.

16. Кадомцев, С.Б. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / С.Б. Кадомцев. – М.: Физматлит, 2003. – 160 с.

15. Колосова А.А., Степанов В.Е.- Матрицы и определители, решение задач. 18. Льюс, Р.Д. Игры и решения. Введение и критический обзор / Р.Д. Льюс, Х. Райфа. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 644 с.

16. Малафеев О. А. О существовании обобщенного значения динамической игры // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 1972. – № 4. – С. 41–46.

17. Малафеев О. А. Управляемые конфликтные системы. – СПб.: СПбГУ, 2000. – 280 с.

18. Малафеев О. А. Устойчивость решений задач многокритериальной оптимизации и конфликтно управляемые динамические процессы. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет, 1990. – 103 с.

19. Малафеев О. А. О существовании значения игры преследования // Сибирский журнал исследования операций. – 1970. – № 5. – С. 25–36.

20. Малафеев О. А., Буре В. М. Согласованная стратегия в повторяющихся конечных играх N лиц // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 1995. – № 1. – С. 120–122.

21. Малафеев О. А., Гордеев Д. А., Титова Н. Д. Probabilistic and deterministic model of the influence factors on the activities of the organization to innovate // Экономическое возрождение России. – 2011. – № 1. – С. 73–82.

22. Малафеев О. А., Гордеев Д. А., Титова Н. Д. Стохастическая модель принятия решения о выводе на

рынок инновационного продукта // Вестник гражданских инженеров. – 2011. – № 2. – С. 161–166.

23. Малафеев О. А., Григорьева К. В. Динамический процесс кооперативного взаимодействия в многокритериальной (многоагентной) задаче почтальона // Вестник гражданских инженеров. – 2011. – № 1. – С. 150–156.

24. Малафеев О. А., Григорьева К. В. Методы решения динамической многокритериальной задачи почтальона // Вестник гражданских инженеров. – 2011. – № 4. – С. 156–161.

25. Малафеев О. А., Григорьева К. В., Иванов А. С. Статистическая коалиционная модель инвестирования инновационных проектов // Экономическое возрождение России. – 2011. – № 4. – С. 90–98.

26. Малафеев О. А., Грицай К. Н. Задача конкурентного управления в модели многоагентного взаимодействия аукционного типа // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. – 2007. – № 39. – С. 36–45.

27. Малафеев О. А., Грицай К. Н. Конкурентное управление в моделях аукционов // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. – 2004. – № 36. – С. 74–82.

28. Малафеев О. А., Дейнега Л. А., Андреева М. А. Модель взаимодействия коррумпированного предприятия и федерального отдела по борьбе с коррупцией // Молодой

29. Малафеев О. А., Зенович О. С., Севек В. К. Многоагентное взаимодействие в динамической задаче управления венчурными строительными проектами // Экономическое возрождение России. – 2012. – № 1. – С. 124–131.

30. Малафеев О. А., Зубова А. Ф. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических

систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости, надежности). – СПб.: Мобильность-плюс, 2006. – 1006 с.

31. Малафеев О. А., Зубова А. Ф. Устойчивость по Ляпунову и колебательность в экономических моделях. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет, 2001. – 101 с.

32. Малафеев О. А., Кефели И. Ф. Математические начала глобальной геополитики. – СПб: Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2013. – 204 с.

33. Малафеев О. А., Кефели И. Ф. О математических моделях глобальных геополитических процессов многоагентного взаимодействия // Геополитика и безопасность. – 2013. – № 2. – С. 44–57.

34. Малафеев О. А., Колокольцов В. Н. Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение (часть I) // Вестник гражданских инженеров. – 2010. – № 4. – С. 144–153.

35. Малафеев О. А., Колокольцов В. Н. Динамические конкурентные системы многоагентного взаимодействия и их асимптотическое поведение (часть II) // Вестник гражданских инженеров. – 2011. – № 1. – С. 134–145.

36. Малафеев О. А., Колокольцов В. Н. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (теория игр для всех). – СПб.: Лань, 2012. – 624 с.

37. 40. Малафеев О. А., Королева О. А. Модель коррупции при заключении контрактов //Процессы управления и устойчивость Труды XXXIX международной научной конференции аспирантов и студентов под редакцией Н. В. Смирнова, Г.Ш. Тамасяна. – СПб: Санкт-

Петербургский государственный университет, 2008. – С. 446–449.
38. Малафеев О. А., Королева О. А., Васильев Ю. Г. Компромиссное решение в аукционе первой цены с коррумпированным аукционистом // Строительство и эксплуатация энергоэффективных зданий (теория и практика с учетом коррупционного фактора) – Боровичи: НП “НТО стройиндустрии Санкт-Петербурга”, 2015. – С. 119–127.
39. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 2000. – Т. 1. – 283 с.
40. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 2001. – Т. 2. – 294 с.
41. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Моделирование конфликтных ситуаций в социально-экономических системах. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 1998. – 317 с.
42. Малафеев О. А., Немнюгин С. А. Стохастическая модель социально-экономической динамики // Устойчивость и процессы управления Материалы III международной конференции. – СПб: Издательский дом Федоровой Г. В., 2015. – С. 433–434.
43. Малафеев О. А., Парфенов А. П. Равновесие и компромиссное управление в сетевых моделях многоагентного взаимодействия // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. – 2007. – № 39. – С. 154–167.
44. Малафеев О. А., Пахар О. В. Динамическая нестационарная задача инвестирования проектов в

условиях конкуренции // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. – 2009. – № 41. – С. 103–108.

45. Малафеев О. А., Рединских Н. Д. Стохастическое оценивание и прогноз эффективности стратегии развития фирмы в условиях коррупционного воздействия // Устойчивость и процессы управления Материалы III международной конференции. – СПб: Издательский дом Федоровой Г. В., 2015. – С. 437–438.

46. Малафеев О. А., Соснина В. В. Модель управления процессом кооперативного трехагентного взаимодействия // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. – 2007. – № 39. – С. 131–144.

47. Малафеев О. А., Троева М. С. Устойчивость и некоторые численные методы в конфликтно управляемых системах. – Якутск: Якутский государственный университет им. М. К. Аммосова, 1998. – 102 с.

48. Малафеев О. А., Черных К. С. Математическое моделирование развития компании // Экономическое возрождение России. – 2004. – № 1. – С. 60–66.

49. Малафеев, О.А. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости и надежности) / Малафеев О. А., А. Ф. Зубова. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. – 1006 с.

50. Меньшиков, Г. Г. Практические начала интервальных вычислений: учебное пособие / Г.Г. Меньшиков. – Л.: РИО ЛГУ, 1991. – 92 с.: ил. 340

51. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Имитационная модель работы биржи труда // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005. Т. 12. № 2. С. 508-509.

52. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для двух отраслей экономики // Экономика и математические методы. 2004. Т. 40. № 4. С. 137-139.

53. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическая модель самоорганизации рынка труда для нескольких отраслей // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т. 10. № 3. С. 740-741.

54. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Хемди А. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с. 58. Хедли, Дж. Линейная алгебра: (Для экономистов) / Перевод с англ. Ю. И. Соркина и А. А. Дмитриева. – М.: Высш. школа, 1966. - 206 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Исследование демографического развития региона экономико-математическими методами

В данной работе рассмотрены демографические характеристики на примере Ставропольского края как количественные характеристики его трудового потенциала.

Стратегический SWOT-анализ выделяет следующие сильные стороны социально-экономического развития Ставропольского края, характеризующие трудовой потенциал региона. Ставропольский край обладает высоким трудовым потенциалом, который характеризуется наличием большого количества экономически активного населения (63,4%, 4 место среди регионов Южного и Северо-Кавказского федеральных округов и 19 место в РФ). Общий уровень безработицы, рассчитанный по методологии Международной организации труда, в 2008 году составил 7,8% (в России - 6,5%, в среднем по регионам Южного и Северо-Кавказского федеральных округов - 10,2%, из них в Краснодарском крае - 4,8%, Чеченской Республике - 35,5 процента). В отличие от большинства регионов России, в соответствии с прогнозными расчетами, численность населения не является ограничивающим фактором развития Ставропольского края.

При этом слабые стороны характеризуются следующими факторами. Низкие показатели ВРП, инвестиций в основной капитал и бюджетной обеспеченности в расчете на одного жителя края, вследствие чего отмечается диспропорция между сложившимися объёмами производства продукции (товаров, работ, услуг) и плотностью населения (в 5 раз превышающую среднюю плотность по РФ).

Высокая степень неравномерности экономического, социального развития края в территориальном разрезе, депрессивное состояние районов восточной зоны. Растущее расслоение населения по уровню доходов, увеличение числа граждан, нуждающихся в социальной поддержке. Отток и старение профессиональных кадров, высокая смертность населения в трудоспособном возрасте, инвалидизация населения, нарастающий дефицит высококвалифицированных кадров.

Из вышесказанного можно выделить следующие угрозы: сокращение спроса на продукцию, доходов населения, рост безработицы, развитие бартерных форм расчётов может «отбросить» экономику края на десятилетие назад.

Рост инфляции сократит реальные доходы населения и значительно ухудшит положение малообеспеченных слоёв населения. Более высокий размер заработной платы и комфортные условия для жизни стимулируют отток наиболее перспективных и талантливых молодых специалистов в другие регионы России и за рубеж.

Количественные характеристики трудового потенциала региона определяются его демографическими показателями. В настоящее время демографическое развитие Ставропольского края, используя методику [1], можно охарактеризовать следующими положениями.

1. Увеличение общей численности населения. Начиная с 2006 года наблюдается увеличение численности населения, причем если в 2007 году оно увеличилось на 3,9 тыс. человек, то уже в 2009 году на 75,8 тыс. человек по сравнению с 2008 годом. В России в целом происходят процессы снижения численности населения, при этом

следует отметить, что темп убыли населения в 2007 г. по сравнению с 2006 г. снизился в 3 раза.

2. Снижение численности населения трудоспособного возраста. В крае наблюдался рост численности населения в трудоспособном возрасте, но в 2010 году наблюдалось ее снижение. Снижение численности населения старше трудоспособного возраста с 2000 года по 2007 год, сменилось увеличением, а численность населения моложе трудоспособного возраста имеет стабильную тенденцию к снижению. Доля лиц трудоспособного возраста в последние годы держится на уровне 61 %, при этом удельный вес населения трудоспособного возраста по России составляет 63 %.

3. Низкий процент занятости трудоспособного населения. Актуальна проблема занятости трудоспособного населения (она составляет лишь 62%, а в 62 населенных пунктах Ставропольского края отсутствуют работодатели; увеличивается численность работников предприятий Ставропольского края, находящихся под угрозой увольнения) и интеграции в трудовую деятельность и социальную сферу инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья. Низкими темпами растет уровень доходов населения (почти каждый 5-й житель Ставропольского края относится к категории малоимущих, то есть имеет доход ниже величины прожиточного минимума).

4. Увеличение экономической нагрузки на население трудоспособного возраста. Отмечается напряженность на рынке труда, связанная с опережением прироста экономически активного населения над экономическим ростом. Существуют проблемы квалификационного состава трудовых ресурсов. Численность занятых в экономике (в среднем на 10000 человек) населения в расчете на одного пенсионера в 2010 г. снизилась по

сравнению с 2009 г. на 0,1 человек. Уровень экономической активности населения в 2010 г. (в возрасте 15-72 лет) составил 63,5%, а уровень занятости 57.9% (для сравнения в 2009 г. они соответственно составляли 64.9% и 59.8%) [2].

5. Низкий уровень рождаемости. В 2008 и 2009 г.г. в Ставропольском крае наблюдался рост численности родившихся, но при этом уровень рождаемости остается недостаточным для воспроизводства населения, так как естественный прирост имеет отрицательные значения. Современные параметры рождаемости в два раза меньше, чем требуется для замещения поколений, внешняя миграции является единственным источником пополнения численности населения в Ставропольском крае. По состоянию на март 2012 года в Северо-Кавказском федеральном округе только Ставропольский край имеет естественную убыль. Естественный прирост населения в Российской Федерации имеет отрицательное значение с тенденцией к увеличению.

6. Высокий уровень смертности. В целом, наблюдается тенденция снижения уровня смертности, но каждый год в Ставропольском крае более 30 тыс. человек умирают, что составляет более 1 %. В социальной сфере Ставропольского края наблюдаются многие из тенденций, характерных для России в целом. Несмотря на то, что коэффициент рождаемости в Ставропольском крае в расчете на 1000 населения увеличился с 10,3 до 12,2, современные параметры рождаемости в два раза меньше, чем требуется для замещения поколений. Высокая смертность населения также является причиной депопуляции в Ставропольском крае. В трудоспособном возрасте в крае умирает каждый четвертый человек, причем из них 80 процентов составляют мужчины.

7. Низкий миграционный прирост. Всплеск миграционного прироста в Ставропольском крае наблюдался в 2007 году, после чего наступил спад и к 2010 году миграционный прирост населения составил 3.8 тыс. человек. В целом по России коэффициенты миграционного прироста в 2007 г. были 18 тыс. на 10 тыс. чел. населения. По-прежнему, единственным источником пополнения численности населения в Ставропольском крае является внешняя миграция, которая не только компенсировала естественную убыль населения в 2008 г. на 62,9%, но и обеспечила его прирост на 2,1 тыс. человек. Однако в дальнейшем тенденции миграционных процессов не оставляют надежд на замещение естественной убыли

8. Увеличение ожидаемой продолжительности жизни. За последнее пятилетие она выросла более, чем на два года, хотя все еще остается недостаточно высокой – 67,2 года (61,4 – для мужчин, 73,9 – для женщин). По среднему варианту прогноза Росстата этот показатель в 2010 г. должен составить по России 69,4 года (63,4 года - у мужчин, 75,4 –у женщин), по Ставропольскому краю - 70,4 года (64,9 – мужчины, 75,8 – женщины), по Северо-Кавказскому региону - 73,2 года (68,5 – мужчины, 75,8 – женщины).

В таблице 1 представлены прогнозируемые основные демографические показатели оценки достижения стратегических целей до 2025 года. Приведенные данные свидетельствуют о том, что ожидаемая продолжительность жизни жителей края увеличится до 76 лет, общий коэффициент рождаемости, претерпевая снижение, к 2025 году значительно не изменится, снижение смертности в трудоспособном возрасте по отношению к уровню 2008 года достигнет 72,0 %.

В ходе реализации [2] в Ставропольском крае ожидаемая средняя продолжительность жизни увеличилась с 69, 7 лет в 2008 г. до 70,6 лет в 2009 г. и 70,3 лет в 2010 г.

Таблица 1 – Показатели оценки достижения стратегических целей1

№ п/п	Наименование показателя	Значение показателя				
		2008 г.	2012 г.	2015 г.	2020 г.	2025 г.
I. Новое качество жизни						
1.	Ожидаемая продолжительность жизни, лет	69,5	71,2	72,0	75,0	76,0
2.	Общий коэффициент рождаемости (число родившихся на 1000 человек населения)	11,5	11,8	11,3	11,3	11,6
3.	Снижение смертности в трудоспособном возрасте по отношению к уровню 2008 года, процентов	100,0	91,0	83,0	75,0	72,0

Планируемая в 2012 г. ожидаемая средняя продолжительность жизни составляет 71, 2 года, таким образом является вполне достижимым. Смертность населения в трудоспособном возрасте имеет выраженную тенденцию к снижению. Так, в 2009 г. она составила 94,3 % , а в 2010 г. - 88,8 % по отношению к уровню 2008 г. Таким образом, запланированное к 2012 г. снижение до 91% уже достигнуто. Общий коэффициент рождаемости (число родившихся на 1000 человек населения) - плановый показатель 11,8, фактически за 2010 год - 12,2.

Следует отметить, что в конце 2009 г. отмечался некоторый спад демографических процессов в

[1] В ред. распоряжения Правительства Ставропольского края от 20.04.2011 г. N 147-рп.

Ставропольском крае. За счет снижения смертности на 2,6% на 23,1% снизилась естественная убыль, составив 1,0 (в расчете на 1000 населения) против 1,3 в январе-ноябре 2008 г. Число умерших превышало на 8,1% число родившихся. Уровень рождаемости составил 12,1 (в расчете на 1000 населения) против 12,2 в январе-ноябре 2008 г.

Миграционный прирост составил 6348 человек превысив естественную убыль населения в 2,6 раза, учитывая что в январе-ноябре 2008 г. – в 1,6 раза.

Численность населения края по состоянию на 1 декабря 2009 г. составила, по оценке, 2711,2 тыс. человек и увеличилась за анализируемый период на 3,9 тыс. человек. Рост численности населения края происходит, в основном, за счет миграционных процессов.

Следовательно, заложенные в [2-10] демографические показатели по продолжительности жизни населения и рождаемости в 2009-2011 годах, в основном соответствуют заявленным показателям.

Список литературы

1. К.А. Гулин, А.А. Шабунова, Е.А. Чекмарева Трудовой потенциал региона / под рук. д.э.н., проф. В.А. Ильина. – Вологда: ИСЭРТ РАН, 2009.

2. Распоряжение Правительства Ставропольского края от 15 июля 2009 г. № 221-рп «Об утверждении Стратегии социально-экономического развития Ставропольского края на период до 2020 года».

3. Зайцева И.В., Попова М.В. Демографическое развитие Ставропольского края как основа формирования трудовых ресурсов // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета, № 81, 2012. – С. 862-877.

4. Malafeyev O.A., Rylow D., Zaitseva I., Ermakova A., Shlaev D. Multistage voting model with alternative elimination. AIP Conference Proceedings. Сер. "International Conference of Numerical Analysis and Applied Mathematics, ICNAAM 2017" 2018. С. 100012.

5. Малафеев, О.А. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. Том 1. Общая теория и вспомогательные сведения / О.А. Малафеев, А.И. Муравьев. - СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2000. - 283 с.

6. Зайцева, И.В. Математическая модель оптимального распределения трудового потенциала региона по отраслям экономики / И.В. Зайцева, Е.А. Семенчин, В.А. Гимбицкий // Фундаментальные исследования, 2013. - № 8-2. - С. 413-416.

7. Зайцева, И.В. Математическая модель оптимального управления трудовым потенциалом региона / И.В. Зайцева, Е.А. Семенчин // Научно-методический электронный журнал Концепт, 2014. - № Т20. - С. 1306-1310.

8. Зайцева, И.В. Экономико-математическое моделирование оптимального управления трудовыми ресурсами с учетом изменяющихся условий / И.В. Зайцева, М.Г. Казначеева, Л.И. Тимошенко, И.А. Колезнев // Экономика и управление: проблемы, решения. 2018. Т. 4. № 10. - С. 61-67.

9. Зайцева, И.В. Постановка задачи оптимального распределения трудовых ресурсов по предприятиям с учетом изменяющихся условий / И.В. Зайцева, М.В. Попова, О.А. Малафеев. Труды международной научно-практической конференции (ЭКОПРОМ-2016). – СПб, СПбГПУ, 2016. - С. 439-443.

10. Зайцева, И.В. Экономико-математическое моделирование рынка труда: монография / И. В. Зайцева. – НОУ ВПО СКСИ. Ставрополь, 2009. – 116 с.

Приложение 2

Моделирование оптимального распределения трудовых ресурсов

1. Теоретико-игровая модель оптимального распределения ресурсов

Рассмотрим множество работников $S = \{s_1, \ldots, s_m\}$, желающих устроиться на работу, и множество предприятий $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$, которые предлагают рабочие места. Предположим, что каждое предприятие h_j имеет одну вакантную должность, на которую оно желает принять работника, и работник s_i может быть принят только на одно предприятие. Таким образом, требуется произвести назначение работников оптимальным образом.

В качестве множества H можно рассмотреть предприятия, нуждающиеся в работниках, а под S понимать множество типов работников.

Будем считать, что каждое предприятие из множества H имеет работников только одного типа, и каждый работник из множества S, в свою очередь, может найти работу только на одном предприятии. В качестве множества S можно рассмотреть также множество типов работников, а под H понимать регионы, в которых можно найти для них работу. Решением этой задачи является выбор работника для каждого предприятия оптимальным образом.

Рассмотрим игру в нормальной форме $\Gamma = \langle I, X, \{H_i\}_{i=1}^{m+n} \rangle$, где $I = \{1,2,3, \ldots, m+n\}$–множество игроков, X– множество всех ситуаций в игре, $H_i : X \to R_1$– функция выигрыша игрока i. Формально назначение работников на работы можно представить подстановкой p_k

вида: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m \\ h_k & h_l & \dots & h_n \end{pmatrix}$, где первая строка неизменна и соответствует номерам работников из S, а вторая – игрокам из H. Количество таких подстановок $|P| = n!$. Ситуацией в игре будем считать подстановку. Таким образом $|X| = |P| = n!$.

Пусть каждый игрок оценивает свое назначение некоторым положительным числом, которое назовем полезностью для данного игрока от полученного назначения. Будем считать, что полезность тем больше, чем больше игрок удовлетворен полученным назначением. Таким образом, полезность показывает степень удовлетворенности интересов игрока.

Запишем полезности для игроков из множеств S и H в матрицы A и B, которые назовем матрицами полезности.

Матрицы $A_{m\times n} = (\alpha_{lh_k})$ и $B_{n\times m} = \left(\beta_{h_k l}\right)$ $(l = 1,\dots,m, k = 1,\dots n)$ (индекс l соответствует номерам игроков из множества S, индекс k соответствует номерам игроков из множества H) имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{1h_1} & \alpha_{1h_2} & \cdots & \alpha_{1h_n} \\ \alpha_{2h_1} & \alpha_{2h_2} & \cdots & \alpha_{2h_n} \\ & & \cdots\cdot & \\ \alpha_{mh_1} & \alpha_{mh_2} & \cdots & \alpha_{mh_n} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} \beta_{h_1 1} & \beta_{h_1 2} & \cdots & \beta_{h_1 m} \\ \beta_{h_2 1} & \beta_{h_2 2} & \cdots & \beta_{h_2 m} \\ & & \cdots & \\ \beta_{h_n 1} & \beta_{h_n 2} & \cdots & \beta_{h_n m} \end{pmatrix}.$$

Функции выигрыша игроков зададим на множестве подстановок P следующим образом:

$H_1(p_k) = \alpha_{1h_1}, H_2(p_k) = \alpha_{2h_l}, \dots, H_m(p_k) = \alpha_{mh_n};$
$H_{m+1}(p_k) = \beta_{h_1 1}, \quad H_{m+2}(p_k) = \beta_{h_l 2}, \quad \dots, \quad H_{m+n}(p_k) = \beta_{h_n m}, \quad k = 1,2,\dots,n!$.

Сформируем матрицу выигрышей $W_{n!\times(m+n)}$ (строки соответствуют подстановкам, образующим множество ситуаций X, а столбцы – номерам игроков из множества I):

$$W = \begin{pmatrix} H_1(p_1) & H_2(p_1) & \dots & H_{m+n}(p_1) \\ \dots & \dots & & \dots \\ H_1(p_k) & H_2(p_k) & \dots & H_{m+n}(p_k) \\ \dots & \dots & & \dots \\ H_1(p_{n!}) & H_2(p_{n!}) & \dots & H_{m+n}(p_{n!}) \end{pmatrix}.$$

В качестве решения задачи предлагается компромиссное множество. Ниже приведем определение компромиссного множества.

Определение 1. [1] Компромиссное множество C_H определяется следующим образом: $C_H = \left\{x \in X: \max_i(M_i - H_i(x)) \leq \max_i(M_i - H_i(x')), \forall x' \in X\right\}$.

Определение 2. [2] Будем говорить, что алгоритм принадлежит классу сложности $O\big(f(n)\big)$, если время его работы $T \leq \theta \cdot f(n)$, где θ – константа, зависящая от скорости вычисления ЭВМ. В этом случае время T называют временной сложностью алгоритма.

В наших обозначениях $|I| = m + n$, $|X| = n!$, $W_{n! \times (m+n)}$.

Представим алгоритм, который из состоит из 4-х шагов [3]:

1 шаг. Вычислим идеальный вектор $M = (M_1, \dots, M_{m+n})$, где $M_i = \max_{x \in X} H_i(x)$. $(T_1 \leq \theta \cdot n!\,(m+n))$.

2 шаг. Для каждой ситуации $x \in X$ и найдем отклонение функции выигрыша i-го игрока $H_i(x)$ от компоненты идеального вектора M_i, то есть для $\forall\ x \in X$ и вычислим $M_i - H_i(x)$. Так делаем для всех игроков из множества I. $(T_2 \leq \theta \cdot (m+n)n!)$.

3 шаг. Для каждой ситуации $x \in X$ найдем максимальное отклонение разности $M_i - H_i(x)$ по множеству игроков I, то есть вычислим $\max_{i \in I}(M_i - H_i(x))$.

$(T_3 \leq \theta \cdot (m+n)n!)$.

4 шаг. На множестве ситуаций X найдем такую точку x^*, которая доставляет минимум выражению $\max_{i \in I}(M_i - H_i(x))$, то есть найдем ситуацию x^*:

$$\min_{x \in X}\max_{i \in I}(M_i - H_i(x)) = M_{\bar{i}} - H_{\bar{i}}(x^*). \ (T_4 \leq \theta \cdot n!).$$

Тогда время работы алгоритма построения компромиссного множества $T \leq \theta \cdot n!\,(m + n + 1)$, то есть алгоритм принадлежит классу $O(n!\,(m + n + 1))$.

Замечание [4]. В случае $m > n$ $(m < n)$ следует ввести $m - n$ $(n - m)$ фиктивных игроков из H (S) и положить для них функции выигрыша равными нулю. Далее применить описанный алгоритм.

2. Теоретико-игровая модель оптимального распределения трудовых ресурсов с учетом изменяющихся условий

Рассмотрим функционирование рынка труда в течение нескольких периодов времени. Работники, предприятия и биржа труда являются его активными участниками. Работники подают сведения о своих профессиональных квалификациях и предполагаемой работе на биржу труда. Предприятия, испытывая необходимость в различных работниках, также подают заявки на биржу. Биржа труда, изучив спрос на работников того или иного профиля с учетом предложения со стороны работников, выбирает политику по распределению работников по предприятиям. Таким образом удовлетворяются запросы обеих сторон [5].

Предположим, что работник в любой момент времени может находиться в одном из конечного числа социально-экономических состояний. Состояние работника описывает вектор параметров, компоненты которого оценивают, например, его квалификацию, образование, доход и т. д. Каждое предприятие, в свою очередь, может находиться в одном из конечного числа финансово-экономических состояний, определяемых вектором параметров с компонентами, соответствующими, например, оценке его основных фондов, размеров производства, прибыли, численности работников и т. д. Векторы состояний работников и предприятий задают вектор состояния рынка (или системы) труда в каждый момент времени.

Пусть каждый работник, находясь в определенном социально-экономическом состоянии, оценивает для себя работу на том или ином предприятии. Критерий оценки может включать, например, заработную плату, соответствие полученной специальности, количество времени, необходимого на дорогу от дома до работы, предоставляемые льготы и т. д. Учтя все преимущества и недостатки, работник выносит предприятию свою оценку. Аналогично предприятие, находясь в определенном финансово-экономическом состоянии, дает оценку каждому работнику, на которую влияет совокупность таких факторов как профессиональная квалификация работника, назначаемая заработная плата, умение работать в коллективе и т. д. Оценки обеих сторон задают их матрицы полезности, в зависимости от которых биржа труда в каждом состоянии рынка труда выбирает свою политику [6].

Будем считать, что после распределения работников по предприятиям, то есть после проведения биржей труда определенной политики, рынок труда имеет некоторый доход. Назовем его доходом от назначений и будем понимать под ним доход биржи труда от проведённой политики. Доход от назначений может вычисляться, например, как сумма доходов работников и предприятий от полученных назначений, которые, в свою очередь, определяются по их матрицам полезности. Можно приписать доходам работников и предприятий различные весовые коэффициенты и вычислить доход от назначений как сумму этих доходов, взятых с весовыми коэффициентами.

Пусть в начальный момент времени задано состояние рынка труда, определено множество политик биржи труда, а также матрицы полезности работников и предприятий и их доходы от возможных назначений. Решение статической задачи о назначениях дает оптимальную политику биржи и соответствующие назначения работников на предприятия. В качестве принципа оптимальности можно выбрать, например, максимизацию суммарного дохода от назначений или принцип компромиссного множества [7].

Известно, что под влиянием изменений в экономике конъюнктура рынка труда может измениться. В следующий момент времени в зависимости от решения, принятого на предыдущем этапе, и, возможно, от иных причин может измениться множество предприятий, имеющих потребность в работниках, множество работников, нуждающихся в работе, а также множество их состояний. Могут измениться и критерии оценки обеих сторон и, соответственно, их матрицы полезности. Следовательно, возникает новая ситуация на рынке труда, в которой бирже труда необходимо определить оптимальную политику и в соответствии с ней произвести назначения, то есть необходимо решить новую задачу об оптимальных назначениях. Пусть для определенности имеется конечное множество таких ситуаций, причем в каждой из них может быть реализован любой из двух принципов оптимальности: принцип максимизации суммарного дохода от назначений или принцип компромиссного множества.

Те моменты времени, когда ситуация на рынке труда определена и оптимальное решение дает статическая задача о назначениях, будем называть моментами стационарных состояний рынка труда, или системы. Рассмотрим периоды времени, когда происходит процесс изменения конъюнктуры рынка. Будем называть их переходными периодами рынка труда. Переход рынка труда из одного состояния в другое осуществляется под действием общего вектора управления. Его компонентами являются векторы управлений из множества векторов управлений работников и предприятий. Каждая компонента векторов управлений работника и предприятия изменяет соответствующий параметр их векторов состояний, то есть управляет этими параметрами. Например, работник может повысить свою квалификацию, увеличить или уменьшить свой доход, изменить семейное положение и т. д. Предприятие может изменить свои основные фонды, размеры производства, повысить качество выпускаемой продукции, увеличить прибыль, сократить или увеличить численность работников и т. д.

Будем считать, что рынок труда от перехода из одного состояния в другое под действием общего вектора управления имеем доход, который назовем доходом от перехода за один шаг. Доход от перехода за один шаг может вычисляться как сумма доходов от перехода работников и предприятий, взятых с различными весовыми коэффициентами, а может быть найден как разность доходов от назначений рынка труда в соответствующих состояниях. Необходимо найти оптимальный вектор управления и соответствующий доход от перехода рынка труда из одного состояния в другое на основе известных принципов оптимальности.

Пусть работники и предприятия могут изменять параметры своих векторов состояний некоторое конечное число раз. Значит множество общих векторов управления конечно и конечно число возможных состояний рынка труда. Таким образом, возникает многошаговая модель функционирования рынка труда. Ее удобно представить на конечном связном графе (дереве). Вершины дерева соответствуют состояниям рынка труда в определенный момент времени. Дуги дерева соответствуют общим векторам управления, под действием которых осуществляется переход рынка труда из одного состояния в другое. В каждой вершине необходимо решить статическую задачу оптимального назначения и определить соответствующий доход системы, и, кроме того, найти оптимальный путь на дереве, соответствующий последовательности оптимальных векторов управления и доход от перехода рынка труда из одного состояния в другое за общее число шагов.

В качестве принципа оптимальности выберем принцип компромиссного множества, и решим задачу поиска компромиссного дохода от функционирования системы за T шагов и соответствующего компромиссного пути методом динамического программирования [8].

Перейдем к решению задачи. Считаем, что переход работников и предприятий в новые состояния детерминирован, то есть они переходят в новые состояния с вероятностью, равной единице. Процесс распределения работников по предприятиям в каждый момент времени осуществляет биржа труда [9].

Построим игры в моменты стационарных состояний системы. Пусть распределение работников по предприятиям происходит в течение t моментов времени, где $t = 0,1,\ldots,T-1$ (T – число периодов распределения). В каждый момент времени t множество работников, состоящих на бирже труда, обозначим через $M^t = \left\{m_1, m_2, \ldots, m_{|M^t|}\right\}$, множество предприятий, нуждающихся в работниках, обозначим через $L^t = \left\{l_1, l_2, \ldots, l_{|L^t|}\right\}$ и определим игру в нормальной форме $G^t =$

$\left\langle I^t, X^t, \{K^t_{m_k}\}_{k=1}^{|M^t|}, \{K^t_{l_d}\}_{d=1}^{|L^t|} \right\rangle$, где $I^t = \left\{m_1, \dots, m_{|M^t|}, l_1, \dots, l_{|L^t|}\right\}$ – множество игроков, X^t – множество ситуаций в игре, $K^t_{m_k}: X^t \to R_1$ – функция выигрыша игрока m_k, $K^t_{l_d}: X^t \to R_1$ – функция выигрыша игрока l_d $\left(k = 1,2,\dots,|M^t|,\ l = 1,2,\dots,|L^t|\right)$ [10].

Назначение работников на работы можно представить подстановкой p_d вида:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & |M^t| \\ l_d & l_e & \dots & l_s \end{pmatrix}$, где первая строка неизменна и соответствует номерам работников M^t, а вторая – игрокам из L^t. Ситуацией в игре будем считать подстановку, $X^t = P^t = \{p_d | d = 1,2,\dots,|L^t|\}$ – множество ситуаций (подстановок), $|X^t| = (|L^t|)!$. Каждой ситуации p_d однозначно соответствует политика биржи труда q_d из множества $Q^t = \left\{q_1, q_2, \dots, q_{|L^t|!}\right\}$.

В каждый момент времени t игроки m_k и l_d находятся в некоторых состояниях, определяемых векторами параметров $a^t_{m_k}$ и $b^t_{l_d}$: $a^t_{m_k} = (a^1_{m_k}, a^2_{m_k}, \dots, a^{\mu}_{m_k})$, $b^t_{l_d} = \left(b^1_{l_d}, b^2_{l_d}, \dots, b^{\nu}_{l_d}\right)$, где $A^t_{m_k} = \{a^t_{m_k} |\ a^t_{m_k} = (a^1_{m_k}, a^2_{m_k}, \dots, a^{\mu}_{m_k}),\ k = 1,2,\dots,|M^t|\}$ – множество векторов состояний игрока m_k в момент времени t, $B^t_{l_d} = \left\{b^t_{l_d} |\ b^t_{l_d} = \left(b^1_{l_d}, b^2_{l_d}, \dots, b^{\mu}_{l_d}\right),\ d = 1,2,\dots,|L^t|\right\}$ – множество векторов состояний игрока l_d в момент времени t.

Вектор состояния системы S^t_{η} задается векторами состояний всех игроков: $S^t_{\eta} = \left(a^t_{m_1}, a^t_{m_2}, \dots, a^t_{m_{|M^t|}}, b^t_{l_1}, b^t_{l_2}, \dots, b^t_{l_{|L^t|}}\right)$, где η – номер состояния в момент времени t. В каждый момент времени t определим матрицы полезности игроков A^t и B^t

следующим образом. Пусть количество векторов состояний у каждого игрока m_k и l_d одинаково. Занумеруем векторы состояний $a_{m_k}^t$ игрока m_k индексом i, $i = 1,2,\ldots,|A^t|$, векторы состояний $b_{l_d}^t$ игрока l_d индексом j, $j = 1,2,\ldots,|B^t|$. Тогда матрицы A^t и B^t имеют вид:

$$\mathrm{A}^t = \begin{pmatrix} \alpha_{1m_1}(p_1) & \ldots & \alpha_{1m_{|M^t|}}(p_1) & \ldots & \alpha_{1m_1}(p_{|L^t|!}) & \ldots & \alpha_{1m_{|M^t|}}(p_{|L^t|!}) \\ & & & \ldots & & & \\ \alpha_{im_1}(p_1) & \ldots & \alpha_{im_{|M^t|}}(p_1) & & \alpha_{im_1}(p_{|L^t|!}) & \ldots & \alpha_{im_{|M^t|}}(p_{|L^t|!}) \\ & & & \ldots & & & \\ \alpha_{|A^t|m_1}(p_1) & & \alpha_{|A^t|m_{|M^t|}}(p_1) & & \alpha_{|A^t|m_1}(p_{|L^t|!}) & & \alpha_{|A^t|m_{|M^t|}}(p_{|L^t|!}) \end{pmatrix}$$

где номера строк соответствуют номерам состояний игрока m_k, $i = 1,2,\ldots,|A^t|$, Например, $\alpha_{1m_1}(p_1)$ – оценка игроком m_1 (работником) состоянии 1 того игрока (предприятия), который ему соответствует в ситуации p_1 (при политике q_1).

Матрица B^t имеет вид:

$$B^t = \begin{pmatrix} \beta_{1l_1}(p_1) & \ldots & \beta_{1l_{|L^t|}}(p_1) & \ldots & \alpha_{1l_1}(p_{|L^t|!}) & \ldots & \beta_{1l_{|L^t|}}(p_{|L^t|!}) \\ & & & \ldots & & & \\ \beta_{jl_1}(p_1) & \ldots & \beta_{jl_{|L^t|}}(p_1) & & \beta_{jl_1}(p_{|L^t|!}) & \ldots & \beta_{jl_{|L^t|}}(p_{|L^t|!}) \\ & & & \ldots & & & \\ \beta_{|B^t|l_1}(p_1) & & \beta_{|B^t|l_{|L^t|}}(p_1) & & \beta_{|B^t|l_1}(p_{|L^t|!}) & & \beta_{|B^t|l_{|L^t|}}(p_{|L^t|!}) \end{pmatrix}$$

где номера строк соответствуют номерам состояний игрока l_d, $j = 1,2,\ldots,|B^t|$, Например, $\beta_{1l_1}(p_1)$ – игроком l_1 (предприятием) в состоянии 1 того игрока (работника), который ему соответствует в ситуации p_1 (при политике q_1).

Функции выигрыша игроков определим на множестве ситуаций X^t для каждого состояния системы $S_\eta^t \in S^t$. Пусть состояние системы S_η^t описывает вектор

$S_\eta^t = \left(a_{m_1}^t, a_{m_2}^t, \dots, a_{m_{|M^t|}}^t, b_{l_1}^t, b_{l_2}^t, \dots, b_{l_{|L^t|}}^t\right)$. Его компонентами являются векторы состояний $a_{m_k}^t \in A^t$ и $b_{l_d}^t \in B^t$, которые занумерованы индексами i и j соответственно. Тогда функции выигрыша игроков в ситуации p_1 зададим следующим образом.

Для игрока m_1 определяем каким индексом i занумерована компонента $a_{m_1}^t$ вектора S_η^t и выбираем соответствующий элемент $\alpha_{im_1}(p_1)$ в первом столбце матрицы полезности A^t.Для остальных игроков под номерами $m_2, m_3, \dots, m_{|M^t|}$ определяем какими индексами занумерованы компоненты $a_{m_2}^t, a_{m_3}^t, \dots, a_{m_{|M^t|}}^t$ и выбираем элементы с соответствующими номерами во 2-ом, 3-ем,…,$|M^t|$-ом столбцах матрицы A^t.

Для игрока l_1 определяем каким индексом j занумерована компонента $b_{l_1}^t$ вектора S_η^t и выбираем соответствующий элемент $\beta_{jl_1}(p_1)$ в первом столбце матрицы полезности B^t. Для остальных игроков $l_2, l_3, \dots, l_{|L^t|}$ определяем какими индексами занумерованы компоненты $b_{l_2}^t, b_{l_3}^t, \dots, b_{l_{|L^t|}}^t$ и выбираем элементы с соответствующими номерами во 2-ом, 3-ем,…,$|L^t|$-ом столбцах матрицы B^t.

Аналогичным образом задаются функции выигрыша игроков в ситуациях $p_2, p_3, \dots, p_{|L^t|!}$.

Запишем функции выигрыша игроков в матрицу выигрышей W_η^t (строки соответствуют ситуациям $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{|L^t|!}$ из множества ситуаций X^t, столбцы – игрокам из множества I^t):

$$W_\eta^t = \begin{pmatrix} K_{m_1}^t(p_1) & \dots & K_{m_{|M^t|}}^t(p_1) & K_{l_1}^t(p_1) & \dots & K_{l_{|L^t|}}^t(p_1) \\ & & \dots & & & \\ K_{m_1}^t(p_d) & \dots & K_{m_{|M^t|}}^t(p_d) & K_{l_1}^t(p_d) & & K_{l_{|L^t|}}^t(p_d) \\ & & \dots & & & \\ K_{m_1}^t\left(p_{|L^t|!}\right) & \dots & K_{m_{|M^t|}}^t\left(p_{|L^t|!}\right) & K_{l_1}^t\left(p_{|L^t|!}\right) & & K_{l_{|L^t|}}^t\left(p_{|L^t|!}\right) \end{pmatrix}.$$

По матрице W_η^t построим компромиссное множество $С_H^{t,\eta} = \left\{p_{\bar{\eta}}\right\}$ и определим соответствующую политику биржи труда $q_{\bar{\eta}} \in Q^t$. Доход системы от назначений $V\left(S_\eta^t, p_{\bar{\eta}}\right)$ в компромиссной ситуации $p_{\bar{\eta}} \in C_H^{t,\eta}$ определим как сумму функций выигрыша всех игроков: $V\left(S_\eta^t, p_{\bar{\eta}}\right) = \sum_{k=1}^{|M^t|} K_{m_k}^t\left(p_{\bar{\eta}}\right) + \sum_{d=1}^{|L^t|} K_{l_d}^t\left(p_{\bar{\eta}}\right)$.

В рассматриваемой модели в каждый момент времени $t = 0,1,2,\dots,T-1$ определим множества управлений игроков m_k и l_d $\left(k = 1,2,\dots,\left|M^t\right|, d = 1,2,\dots,\left|L^t\right|\right)$: $U_{m_k}^{t+1} = \left\{u_{a_{m_k}^{t+1}} | u_{a_{m_k}^{t+1}} = \left(u_{a_{m_k}^1}, u_{a_{m_k}^2}, \dots, u_{a_{m_k}^\mu}\right)\right\}$, $U_{l_d}^{t+1} = \left\{u_{b_{l_d}^{t+1}} | u_{b_{l_d}^{t+1}} = \left(u_{b_{l_d}^1}, u_{b_{l_d}^2}, \dots, u_{b_{l_d}^\nu}\right)\right\}$, которые составляют общий вектор управления $U_\eta^{t+1} = \left(u_{a_{m_1}^{t+1}}, \dots, u_{a_{m_k}^{t+1}}, \dots, u_{a_{m_{|M^t|}}^{t+1}}, u_{b_{l_1}^{t+1}}, \dots, u_{b_{l_d}^{t+1}}, \dots, u_{b_{l_{|L^t|}}^{t+1}}\right) \in U^{t+1}$, где U^{t+1} – множество общих векторов управления на шаге t. Каждая компонента векторов $u_{a_{m_k}^{t+1}} = \left(u_{a_{m_k}^1}, u_{a_{m_k}^2}, \dots, u_{a_{m_k}^\mu}\right)$ и $u_{b_{l_d}^{t+1}} = \left(u_{b_{l_d}^1}, u_{b_{l_d}^2}, \dots, u_{b_{l_d}^\nu}\right)$ управляет соответствующим параметром векторов состояний $a_{m_k}^t = (a_{m_k}^1, a_{m_k}^2, \dots, a_{m_k}^\mu,)$ и $b_{l_d}^t = \left(b_{l_d}^1, b_{l_d}^2, \dots, b_{l_d}^\nu,\right)$ из множеств A^t и B^t, то есть задает вектор состояния работника $a_{m_k}^{t+1}$ и вектор состояния предприятия $b_{l_d}^{t+1}$ в следующий момент времени $t+1$, а значит и новое состояние системы $S_{\varsigma}^{t+1} \in S^{t+1}$. Таким образом, под действием общих векторов управления из множества U^{t+1} система переходит из состояния $S_{\eta}^{t} \in S^{t}$ во множество состояний S^{t+1}. Поскольку переход в каждое состояние $S_{\varsigma}^{t+1} \in S^{t+1}$определяется одним из общих векторов управления $U_{\eta}^{t+1} \in U^{t+1}$, то количество состояний на шаге $t+1$ равно количеству общих векторов управления на шаге t, $\left|S^{t+1}\right| = \left|U^{t+1}\right|$. Функционирование системы в течение t, $t = 0,1,2,\dots,T$ периодов времени удобно представить в виде многошаговой игры G на конечном связном графе (дереве). Опишем этапы построения дерева многошаговой игры G.

Рассмотрим этапы построения дерева многошаговой игры [11].

1 этап. Задание одношаговой игры Γ^0 в начальной вершине S^0 и множества доходов от перехода за один шаг $R_{S^o S^1}^{1}\left(U^1\right)$.

Пусть в момент времени $t = 0$ система находится в состоянии S^0, которое соответствует начальной вершине, или корню дерева. В вершине S^0 определим игру в нормальной форме $\Gamma^0 = \left\langle I^0, S^1, \left\{H_{m_k}^0\right\}_{k=1}^{\left|M^0\right|}, \left\{H_{l_d}^0\right\}_{d=1}^{\left|L^0\right|} \right\rangle$. Опишем стратегии игроков m_k и l_d, множество ситуаций S^1 и функции выигрыша игроков $H_{m_k}^0$ и $H_{l_d}^0$.

Стратегии игроков m_k и l_d могут быть следующими: они могут управлять одним из параметров $a_{m_k}^1, a_{m_k}^2, \dots, a_{m_k}^{\mu}$ и $b_{l_d}^1, b_{l_d}^2, \dots, b_{l_d}^{\nu}$ векторов состояний $a_{m_k}^0$ и $b_{l_d}^0$ соответственно, управлять одновременно двумя параметрами векторов $a_{m_k}^0$ и $b_{l_d}^0$, ..., управлять одновременно всеми μ параметрами вектора состояния $a_{m_k}^0$

и ν параметрами вектора состояния $b_{l_d}^0$ (под управлением параметром будем понимать его изменение; если параметр сохранен прежним, то считаем, что игрок в данный момент времени им не управлял). В общем случае игрок m_k в начальный момент времени управляет всеми параметрами вектора $a_{m_k}^0$, поэтому его стратегия будет иметь вид: $u_{a_{m_k}^1} = \left(u_{a_{m_k}^1}, u_{a_{m_k}^2}, \dots, u_{a_{m_k}^\mu}\right)$. Стратегии игрока l_d в момент времени $t = 0$ определяются аналогично.

Игра Γ^0 происходит следующим образом. Игроки m_k и l_d $\left(k = 1,2,\dots,\left|M^0\right|, l = 1,2,\dots,\left|L^0\right|\right)$ выбирают свои стратегии $u_{a_{m_k}^1} \in U_{m_k}^1$ и $u_{b_{ld}^1} \in U_{l_d}^1$ и определяют общий вектор стратегий, или общий вектор управления $U_\gamma^1 \in U^1$, ситуацию в игре и функции выигрыша. Ситуацией в игре Γ^0 будет являться вершина дерева $S_\gamma^1 \in S^1$ на следующем шаге $t = 1$, S^1 – множество ситуаций в игре Γ^0. Общий вектор управления $U_\gamma^1 \in U^1$ описывает переход из вершины S^0в S_γ^1. Функции выигрыша игроков зададим на множестве ситуаций S^1 помощью матриц полезности A^0, A^1, B^0 и B^1. Например, если игрок m_k в начальной вершине находился в состоянии i и имел выигрыш $K_{m_1}^0 = \alpha_{im_1}(p_{\bar{c}})$ в статической игре G^0, а после перехода в вершину S_γ^1 он находится в состоянии j и имеет выигрыш $K_{m_1}^1 = \alpha_{jm_1}\left(p_{\bar{\gamma}}\right)$ в статической игре G_γ^1, то его функцию выигрыша в игре Γ^0 зададим как разность выигрышей в играх G^0 и G_γ^1, то есть $H_{m_k}^0 = \alpha_{jm_k}\left(p_{\bar{\gamma}}\right) - \alpha_{im_k}(p_{\bar{c}})$. Аналогично определим функции выигрыша остальных игроков.

Тогда доход системы от перехода $R_{S^0S^1}^1\left(U_\gamma^1\right)$ из начальной вершины S^0 в вершину S_γ^1 за один шаг вычислим как сумму функций выигрыша всех игроков:

$$R^1_{S^0S^1}(U^1_\gamma) = \sum_{k=1}^{|M^t|} H^0_{m_k} + \sum_{d=1}^{|L^t|} H^0_{l_d} = V(S^1_\gamma, p_{\bar{\gamma}}) - V(S^0, p_{\bar{c}}),$$

где $V(S^1_\gamma, p_{\bar{\gamma}})$, $V(S^0, p_{\bar{c}})$ – доходы от назначений в играх G^1_γ и G^0. Множество доходов от перехода системы из вершины S^0 за один шаг обозначим $R^1_{S^oS^1}(U^1)$.

2 этап. Задание одношаговой игры Γ^t_ξ в промежуточной вершине дерева S^t_ξ и множества доходов от перехода $R^1_{S^t\ S^{t+1}}\left(U^{t+1}\right)$ за один шаг.

Рассмотрим моменты времени $t = 1,2,\ldots,T-1$ и определим игру в нормальной форме $\Gamma^t_\xi = \left\langle I^t, S^{t+1}, \{H^t_{m_k}\}_{k=1}^{|M^t|}, \{H^t_{l_d}\}_{d=1}^{|L^t|}\right\rangle$в каждой промежуточной вершине дерева $S^t_\xi \in S^t$. Опишем стратегии игроков m_k и l_d, множество ситуаций S^{t+1} и функции выигрыша игроков $H^t_{m_k}$ и $H^t_{l_d}$.

Стратегии игроков m_k и l_d могут быть такими же, как в начальный момент времени, то есть игроки могут управлять одним из параметров $a^1_{m_k}, a^2_{m_k}, \ldots, a^\mu_{m_k}$ и $b^1_{l_d}, b^2_{l_d}, \ldots, b^\nu_{l_d}$ векторов состояний $a^t_{m_k}$ и $b^t_{l_d}$ соответственно, двумя параметрами, ..., всеми μ параметрами вектора состояния $a^t_{m_k}$ и ν параметрами вектора состояния $b^t_{l_d}$. Например, если игрок m_k в момент времени t управляет только первым параметром $a^1_{m_k}$ вектора $a^t_{m_k}$, то его стратегия будет иметь вид: $u_{a^{t+1}_{m_k}} = \left(u_{a^1_{m_k}}, \bar{u}_{a^2_{m_k}}, \ldots, \bar{u}_{a^\mu_{m_k}}\right)$, где $\bar{u}_{a^2_{m_k}}, \ldots, \bar{u}_{a^\mu_{m_k}}$ – управления игрока на предыдущем шаге. Если игрок m_k управляет двумя параметра $a^i_{m_k}$, $a^j_{m_k}$, то его стратегия будет следующей $u_{a^{t+1}_{m_k}} = \left(\bar{u}_{a^1_{m_k}}, \ldots, u_{a^i_{m_k}}, \ldots, u_{a^j_{m_k}}, \ldots, \bar{u}_{a^\mu_{m_k}}\right)$. В общем случае игрок m_k управляет всеми параметрами вектора $a^t_{m_k}$, поэтому его стратегия будет иметь вид $u_{a_{m_k}^{t+1}} = \left(u_{a_{m_k}^1}, u_{a_{m_k}^2}, \ldots, u_{a_{m_k}^\mu}\right)$. Заметим, что игрок в момент времени t может не управлять ни одним из параметров вектора состояния $a_{m_k}^t$, тогда его стратегия будет иметь вид $u_{a_{m_k}^{t+1}} = \left(\bar{u}_{a_{m_k}^1}, \bar{u}_{a_{m_k}^2}, \ldots, \bar{u}_{a_{m_k}^\mu}\right)$. Такая стратегия может быть вполне обоснована, поэтому не будем ее исключать из множества стратегий игрока в момент времени t. Стратегии игрока l_d в момент времени t определяются аналогично.

Число стратегий игрока m_k равно числу подмножеств μ -элементного множества $\left\{u_{a_{m_k}^1}, u_{a_{m_k}^2}, \ldots, u_{a_{m_k}^\mu}\right\}$, то есть $\left|U_{m_k}^{t+1}\right| = 2^\mu$. Число стратегий игрока l_d равно числу подмножеств ν -элементного множества $\left\{u_{b_{l_d}^1}, u_{b_{l_d}^2}, \ldots, u_{b_{l_d}^\nu}\right\}$, то есть $\left|U_{l_d}^{t+1}\right| = 2^\nu$.

Игра Γ_ξ^t происходит следующим образом. Игроки m_k и l_d $\left(k = 1,2,\ldots,\left|M^t\right|, l = 1,2,\ldots,\left|L^t\right|\right)$ выбирают свои векторы стратегии $u_{a_{m_k}^1} \in U_{m_k}^{t+1}$ и $u_{b_{ld}^1} \in U_{l_d}^{t+1}$ и определяют общий вектор управления $U_\lambda^{t+1} \in U^{t+1}$, ситуацию в игре и функции выигрыша. Ситуацией в игре Γ_ξ^t будет вершина дерева $S_\lambda^{t+1} \in S^{t+1}$ на следующем шаге $t+1$, S^{t+1} – множество ситуаций в игре Γ_ξ^t. Общий вектор управления U_λ^{t+1} описывает переход из вершины S_ξ^tв S_λ^{t+1}. Функции выигрыша игроков зададим на множестве ситуаций S^{t+1} помощью матриц полезности A^t, A^{t+1}, B^t и B^{t+1}. Например, если игрок m_k в вершине S_ξ^t находился в состоянии i и имел выигрыш $K_{m_1}^t = \alpha_{im_1}\left(p_{\bar{\xi}}\right)$ в статической игре G_ξ^t, а после перехода в вершину S_λ^{t+1} он находится в состоянии j и имеет выигрыш $K_{m_1}^{t+1} = \alpha_{jm_1}\left(p_{\bar{\lambda}}\right)$ в статической игре G_λ^{t+1}, то его функцию выигрыша в игре Γ_{ξ}^{t} зададим как разность выигрышей в играх G_{ξ}^{t} и G_{λ}^{t+1} , то есть $H_{m_k}^{t}=\alpha_{jm_k}(p_{\bar{\lambda}})-\alpha_{im_k}\left(p_{\bar{\xi}}\right)$. Аналогично определим функции выигрыша остальных игроков.

Тогда доход системы от перехода $R_{S^0S^1}^{1}\left(U_{\lambda}^{t+1}\right)$ из вершины S_{ξ}^{t} в вершину S_{λ}^{t+1} за один шаг вычислим как сумму функций выигрыша всех игроков:

$$R_{S^tS^{t+1}}^{1}(U_{\lambda}^{t+1})=\sum_{k=1}^{|M^t|}H_{m_k}^{t}+\sum_{d=1}^{|L^t|}H_{l_d}^{t}=V(S_{\lambda}^{t+1},p_{\bar{\lambda}})-V(S_{\xi}^{t},p_{\bar{\xi}}),$$

где $V\left(S_{\lambda}^{t+1},p_{\bar{\lambda}}\right)$, $V\left(S_{\xi}^{t},p_{\bar{\xi}}\right)$ –доходы системы от назначений в играх G_{λ}^{t+1}и G_{ξ}^{t}.

Заметим, что если $\left|M^t\right|=\left|M^{t+1}\right|$, $\left|L^t\right|=\left|L^{t+1}\right|$, то доход системы от перехода $R_{S^tS^{t+1}}^{1}\left(U_{\lambda}^{t+1}\right)$ может быть вычислен как сумма разностей функций выигрыши игроков в вершинах S_{ξ}^{t} и S_{λ}^{t+1}:

$$\begin{aligned}R_{S^tS^{t+1}}^{1}\left(U_{\lambda}^{t+1}\right)&=\sum_{k=1}^{|M^t|}\left(K_{m_k}^{t+1}(p_{\bar{\lambda}})-K_{m_k}^{t}\left(p_{\bar{\xi}}\right)\right)\\&\quad+\sum_{d=1}^{|L^t|}\left(K_{l_d}^{t+1}(p_{\bar{\lambda}})-K_{l_d}^{t}\left(p_{\bar{\xi}}\right)\right)=\\&=\left(\sum_{k=1}^{|M^t|}K_{m_k}^{t+1}(p_{\bar{\lambda}})+\sum_{l=1}^{|L^t|}K_{l_d}^{t+1}(p_{\bar{\lambda}})\right)\\&\quad-\left(\sum_{k=1}^{|M^t|}K_{m_k}^{t}(p_{\bar{\xi}})+\sum_{l=1}^{|L^t|}K_{l_d}^{t}(p_{\bar{\xi}})\right)=\\&=V\left(S_{\lambda}^{t+1},p_{\bar{\lambda}}\right)-V\left(S_{\xi}^{t},p_{\bar{\xi}}\right).\end{aligned}$$

Множество доходов системы от перехода из вершины S_ξ^t в вершину S_λ^{t+1} за один шаг обозначим $R^1_{S^t S^{t+1}}\left(U^{t+1}\right)$.

Построим компромиссный общий вектор управления за один шаг. Рассмотрим игру Γ_ξ^t в вершине S_ξ^t дерева многошаговой игры G. На основе принципа оптимальности компромиссного множества определим компромиссную ситуацию $S_{\bar\lambda}^{t+1} \in S^{t+1}$ в игре Γ_ξ^t и общий вектор управления $U_{\bar\lambda}^{t+1}$, который переводит систему из состояния S_ξ^t в состояние S_λ^{t+1}.

Составим матрицу выигрышей игроков $W\left(\Gamma_\xi^t\right)$. Элементами этой матрицы являются функции выигрыша игроков в каждой ситуации. По матрице $W\left(\Gamma_\xi^t\right)$ найдем компромиссную ситуацию $S_{\bar\lambda}^{t+1} \in S^{t+1}$ в игре Γ_ξ^t, а затем по дереву многошаговой игры G определим соответствующий общий вектор управления $U_{\bar\lambda}^{t+1} \in U^{t+1}$, который назовем компромиссным общим вектором управления за один шаг, или просто компромиссным вектором управления за один шаг. Тогда соответствующий вектору $U_{\bar\lambda}^{t+1}$ доход системы от перехода $R^1_{S^t S^{t+1}}\left(U_\lambda^{t+1}\right)$ будет являться компромиссным доходом за один шаг

После того, как указан способ построения компромиссного вектора управления за один шаг, найдем компромиссный путь $U_{\bar r} = \left(U_{\bar r}^1, U_{\bar r}^2, \dots, U_{\bar r}^T\right)$ на дереве игры G и соответствующий ему компромиссный доход C^T за T шагов. Для этого применим рекуррентные соотношения динамического программирования.

Введем функцию дохода системы от перехода за T шагов, когда реализовалась последовательность игр $\Gamma^0, \Gamma_r^1, \dots, \Gamma_r^{t-1}, \Gamma_r^t, \dots, \Gamma_r^{T-1}$:

$$R^T\left(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \ldots, \Gamma_r^{t-1}, \Gamma_r^t, \ldots, \Gamma_r^{T-1}\right)$$
$$= R^1_{S^0 S^1}\left(U_r^1\right) + \ldots + R^1_{S^{t-1} S^t}\left(U_r^t\right) + \ldots + R^1_{S^{T-1} S^T}\left(U_r^T\right),$$

где Γ_r^{t-1} – одношаговая игра в вершине S_r^{t-1} в момент времени $t-1$, U_r^t – общий вектор управления, $U_r^t \in U^t$, $R^1_{S^{t-1} S^t}\left(U_r^t\right)$ – доход системы от перехода из вершины S_r^{t-1} за один шаг.

Обозначим через C^t компромиссный доход за t шагов, $t = 1,2, \ldots, T$. Найдем компромиссный доход $C^T\left(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \ldots, \Gamma_r^t, \ldots, \Gamma_r^{T-1}\right)$ за T шагов в игре G и ту последовательность управлений $\left\{U_{\bar r}^t\right\}_{t=1}^{T-1}$, которая его реализует. Введем оператор $comp$, который задан на множестве доходов системы от перехода $R^1_{S^{t-1} S^t}\left(U^t\right)$ за один шаг и возвращает компромиссный из этих доходов.

Выпишем функцию Беллмана $C^T(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \ldots, \Gamma_r^t, \ldots, \Gamma_r^{T-1}) = \underset{U_r^t, t=1\ldots,T}{comp}\ R^T(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \ldots, \Gamma_r^t, \ldots, \Gamma_r^{T-1})$, и воспользуемся для ее вычисления рекуррентными соотношениями динамического программирования $C^t\left(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \ldots, \Gamma_r^{t-1}\right) = \underset{U_r^t, r}{comp}\left(R^1_{S^{t-1} S^t}\left(U_r^t\right) + C^{t-1}\left(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \ldots, \Gamma_r^{t-2}\right)\right)$, $t = T, T-1, \ldots, 2,1;$ $C^1\left(\Gamma^0\right) = \underset{U_r^1, r}{comp} R^1_{S^0 S^1}\left(U_r^1\right)$.

Применяя последовательно эти соотношения вычислим компромиссные доходы системы за 1 шаг, 2 шага, ..., T шагов $C^1\left(\Gamma^0\right)$, $C^2\left(\Gamma^0, \Gamma_r^1\right)$, ..., $C^T\left(\Gamma^0, \Gamma_r^1, \ldots, \Gamma_r^{T-1}\right)$ и сможем указать компромиссный путь $U_{\bar r} = \left(U_{\bar r}^1, U_{\bar r}^2, \ldots, U_{\bar r}^T\right)$ на дереве игры G, который соответствует последовательности компромиссных управлений $\left\{U_{\bar r}^t\right\}_{t=1}^{T-1}$.

3. Численный пример применения теоретико-игровой модели оптимального распределения трудовых ресурсов

Положим $m = n = 3$, $S = \{s_1, s_2, s_3\}$, $H = \{h_1, h_2, h_3\}$. $I = \{1,2,3,4,5,6\}$ – множество игроков, причем игроки с номерами 1,2,3 соответствуют игрокам s_1, s_2, s_3 из множества S, а игроки 4,5,6 соответствуют игрокам h_1, h_2, h_3 из множества H.

Матрицы полезности A и B игроков из множеств S и H соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} 76 & 22 & 94 \\ 33 & 41 & 86 \\ 45 & 13 & 54 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 94 & 71 & 17 \\ 30 & 32 & 18 \\ 59 & 85 & 38 \end{pmatrix}.$$

Множество ситуаций в игре $P = \{p_1, \dots, p_6\}$: $p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}$, $p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_3 & h_1 & h_2 \end{pmatrix}$, $p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_2 & h_1 & h_3 \end{pmatrix}$, $p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_1 & h_3 & h_2 \end{pmatrix}$, $p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_3 & h_2 & h_1 \end{pmatrix}$, $p_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_2 & h_3 & h_1 \end{pmatrix}$.

Функции выигрыша игроков от подстановки p_1: $H_1(p_1) = \alpha_{1h_1} = 76$, $H_2(p_1) = \alpha_{2h_2} = 41$, $H_3(p_1) = \alpha_{3h_3} = 54$, $H_4(p_1) = \beta_{h_1 1} = 94$, $H_5(p_1) = \beta_{h_2 2} = 32$, $H_6(p_1) = \beta_{h_3 3} = 38$.

Функции выигрыша игроков от подстановок p_2, p_3, p_4, p_5 и p_6 зададим аналогично.

Тогда матрица выигрышей Wбудет следующей: $W =$

$$\begin{pmatrix} 76 & 41 & 54 & 94 & 32 & 38 \\ 22 & 33 & 54 & 30 & 71 & 38 \\ 94 & 41 & 45 & 59 & 32 & 17 \\ 94 & 33 & 13 & 94 & 71 & 18 \\ 76 & 86 & 13 & 94 & 85 & 18 \\ 22 & 86 & 45 & 30 & 85 & 17 \end{pmatrix}.$$

Решением задачи будет: $C_H = \{p_5\}$, $p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ h_1 & h_3 & h_2 \end{pmatrix}$, $H_3(p_5) = 13$.

Разработанный алгоритм может быть запрограммирован на ЭВМ.

Список литературы

1. Петросян, Л.А. Теория игр / Л.А. Петросян, Н.А. Зенкевич, Е.А. Семина. - Учеб. пособие для ун-тов. - М.: Высш. шк., Книжный дом "Университет", 1998. - 304 с.

2. Воробьев, Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков / Н.Н. Воробьев. - М.: Наука, 1985. - 272 с.

3. Конвей, Р.В. Теория расписаний / Р.В. Конвей, В.Л. Максвелл, Л.В. Миллер. – М.: Наука, 1975. — 360 с.

4. Малафеев, О.А. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. Том 1. Общая теория и вспомогательные сведения / О.А. Малафеев, А.И. Муравьев. - СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2000. - 283 с.

5. Зайцева, И.В. Математическая модель оптимального распределения трудового потенциала региона по отраслям экономики / И.В. Зайцева, Е.А. Семенчин, В.А. Гимбицкий // Фундаментальные исследования, 2013. - № 8-2. - С. 413-416.

6. Зайцева, И.В. Математическая модель оптимального управления трудовым потенциалом региона / И.В. Зайцева, Е.А. Семенчин // Научно-методический электронный журнал Концепт, 2014. - № Т20. - С. 1306-1310.

7. Зайцева, И.В. Экономико-математическое моделирование оптимального управления трудовыми ресурсами с учетом изменяющихся условий / И.В. Зайцева, М.Г. Казначеева, Л.И. Тимошенко, И.А. Колезнев // Экономика и управление: проблемы, решения. 2018. Т. 4. № 10. - С. 61-67.

8. Зайцева, И.В. Постановка задачи оптимального распределения трудовых ресурсов по предприятиям с учетом изменяющихся условий / И.В. Зайцева, М.В. Попова, О.А. Малафеев. Труды международной научно-

практической конференции «Инновационная экономика и промышленная политика региона» (ЭКОПРОМ-2016). – СПб, СПбГПУ, 2016. - С. 439-443.

9. Зайцева, И.В. Экономико-математическое моделирование рынка труда: монография / И. В. Зайцева. – НОУ ВПО "Северо-Кавказский социальный ин-т". Ставрополь, 2009. – 116 с.

10. Малафеев, О.А. Устойчивость решений задач многокритериальной оптимизации и конфликтно-управляемые динамические процессы / О.А. Малафеев. - Л.: Ленинградский университет, 1990. – 113 с.

11. Roth, Alvin E. The Evolution of the Labor Market for Medical Interns and Residents: A Case Study in Game Theory / Alvin E. Roth // Journal of Political Economy, 1994, vol. Y2. no 6. – pp. 991-1016.

12. Malafeyev O., Lakhina J., Redinskikh N., Smirnova T., Smirnov N., Zaitseva I. A mathematical model of production facilities location. Journal of Physics: Conference Series. 2019. С. 012090.

13. Zaitseva I., Ermakova A., Shlaev D., Malafeyev O., Strekopytov S. Game-theoretical model of labour force training. Journal of Theoretical and Applied Information Technology. 2018. Т. 96. № 4. С. 978-983.

Приложение 3

Интерактивный анализ распределения трудовых ресурсов

Организация эффективного управления трудовыми ресурсами предприятия, отрасли, региона и в целом страны возможна лишь при условии своевременной и полной информации об их состоянии. Необходима также достоверная информация о социально-экономических процессах, протекающих в различных отраслях и сферах жизни территории, где основными компонентами выступают трудовые ресурсы. Полученная таким образом информация позволит произвести комплексную количественную оценку состояния как предприятия, отрасли, региона и в целом страны, так и трудовых ресурсов [1]. Результатом оценки послужит формирование модели управления, направленной на ослабление негативных тенденций и укрепление позитивных, связанных с функционированием трудовых ресурсов [2].

Одним из главных компонентов такой модели может служить информационная база [3]. Разработанная информационная база должна как можно более полно отражать все процессы и явления, происходящие с трудовыми ресурсами, и учитывать все их субъективные и объективные оценки [4].

В данной работе в результате исследования разработан информационный модуль в виде веб-сервиса для анализа и прогнозирования распределения трудовых ресурсов [5]. Теоретической основой информационного модуля служит динамическая математическая модель, связывающая трудовые ресурсы различных отраслей экономики [6]. Динамическая математическая модель имеет вид:

$$\begin{cases} u(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to \max\limits_{x}, \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = A, \\ \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \geq P, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \leq Q, \\ x_i \geq 0, i = 1,2, \ldots, n. \end{cases} \quad (1)$$

Основные компоненты модели (1):

A (человек) - общее количество трудовых ресурсов из различных отраслей экономики; n – количество отраслей экономики (в том числе и «безработица»); $\sum_{i=1}^{n} k_i = A$; k_i - количество человек, работающих в i-ой отрасли в данный момент времени;

q_i - единица затрат в i-ую отрасль; $\sum_{j=1}^{m} q_i = Q$ - сумма вложений общая;

$\sum_{l=1}^{s} p_l = P$ - доход суммарный; p_l (у. е.) - доход за год за счет i-ой отрасли;

$\alpha_n = \frac{p_n}{k_n}$ - доход за единицу времени, приходящийся на одного работника отрасли; $\beta_n = \frac{q_n}{k_n}$ - затраты на каждого работника из бюджета за единицу времени по отраслям;

α_i, β_i, i=1, ... , n - постоянные величины на некотором интервале времени [0; T];

$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R_+^n$ - множество наборов на интервале времени [0; T]; $x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n$.

Математическая модель (1) представляет собой задачу нелинейного программирования.

Разработанный информационный модуль представляет собой веб-сервис, который в режиме онлайн и офлайн позволяет анализировать распределение трудовых ресурсов на выбранной территории [7]. Модуль предназначен для определения оптимальных значений распределения трудовых ресурсов и расчета числовых характеристик трудового потенциала. Расчет числовых характеристик трудовых ресурсов осуществляется с использованием методов экономико-математического моделирования [8].

Пользователь информационного модуля имеет следующие возможности: быстро рассчитать показатели трудовых ресурсов на выбранной территории; осуществить расчет оптимальных значений распределения выбранных трудовых ресурсов; получить результаты анализа и обработки данных в виде динамических диаграмм и числовых показателей, собранных в таблицы.

Программа информационного модуля реализована на языке программирования PhP и JavaScript, с использованием веб-сервера, самописной CMS и Yandex Карт, а также поддерживается любым браузером без дополнительных плагинов.

Программа веб-сервиса является реализацией решения задачи нелинейного программирования для исследования трудовых ресурсов. Используя статистические данные и экономические показатели, программа находит оптимальное распределение трудовых ресурсов на выбранной территории [9]. Параметрами математической модели информационного модуля являются общий объем инвестиций в одного работника отрасли и сумма прибыли, которую он приносит отрасли. Выбранные параметры определяются статистическими данными государственных статистических органов. В качестве целевой функции в программе определена функция полезности, которая состоит из множества наборов трудовых ресурсов в различных отраслях экономики [10].

Программа веб-сервиса состоит из следующих модулей:

– пользовательский интерактивный интерфейс;

–плагин расчета суммарных показателей текущего состояния распределения трудовых ресурсов;

–плагин расчета суммарных показателей оптимального состояния распределения трудовых ресурсов;

–плагин распределения общего числа людей по категориям;

–плагин распределения фиксированных показателей, вводимых данных;

–плагин построения графиков.

Интерфейсный модуль веб-сервиса построен на следующих элементах: Array, Echo, Google chart, Var.

Элемент Array выполняет функцию приема исходных данных разбитых по категориям (количество человек, доход, затраты). Затем программа преобразует текстовый формат в числовой формат. Для вывода характеристик (всего доходов, всего расходов и доход) используется элемент Lable. Два графического контейнера типа Chart применяются для построения диаграмм визуализирующих текущие и оптимальное значения распределения трудовых ресурсов по категориям, с указанием его общей положительной или отрицательной характеристики. Для управления расчетом, выводом диаграмм и распределением значений используются элементы типа Button (Кнопка).

Рассмотрим описание методики работы с интерфейсом информационного модуля. На рисунке 1 представлен исходный интерфейс веб-сервиса. В правом верхнем углу находится поле для ввода общей численности населения, которая вычисляется с помощью математической модели. Кнопка "Random" используется для автоматического распределения всего населения по категориям. Количество человек в каждой категории также можно задать вручную.

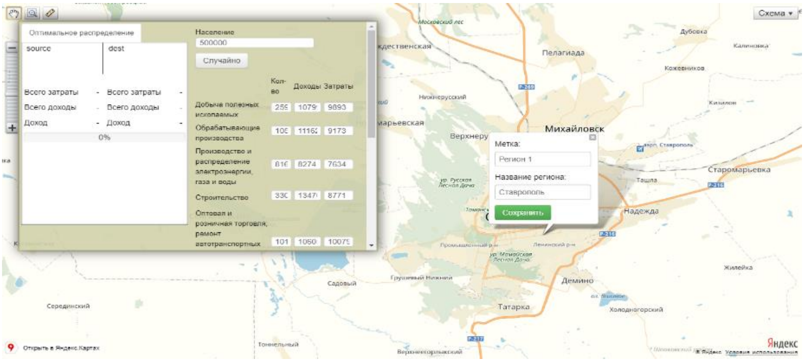


Рисунок 1 – Интерфейс информационного модуля

Для отображения результатов моделирования используются диаграммы «Рассчитать» и «Построить». Если во входных данных математической модели нет ошибок, в центральной области появится графическое представление результатов моделирования по категориям.

Веб-сервис может быть использован в любом браузере (Chrome, Opera, IE и им подобных). Для работы в онлайн режиме необходим PC и интернет, WiFi либо Ethernet соединение [11]. Входные данные обрабатываются и хранятся в базе данных удалённого сервера KVM виртуальной машины. Входными данными для программного модуля являются:

1) Входные данные для расчета суммарных показателей текущего состояния распределения трудовых ресурсов:

– общее число человек, предназначенных для разбиения по категориям;

– количество человек в каждой категории (от категории «занятость» до категории «без работы»);

– суммарное значение дохода, полученного от конкретной категории;

– суммарное значение затрат, направленных на конкретную категорию.

2) Входные данные для расчета суммарных показателей оптимального состояния распределения трудовых ресурсов аналогичны входным данным для расчета суммарных показателей текущего состояния; так в ходе работы программный модуль в автоматическом режиме рассчитывает входные данные для определения оптимального состояния трудовых ресурсов аналогично расчету исходных данных, используемых для анализа текущего состояния трудовых ресурсов.

Интерфейс модуля состоит из трех частей (модулей), представленных на рисунках 2-4: интерфейс входных данных (рис. 2), интерфейс выходных данных (числовых) (рис. 3), интерфейс выходных данных (графических) (рис. 4).

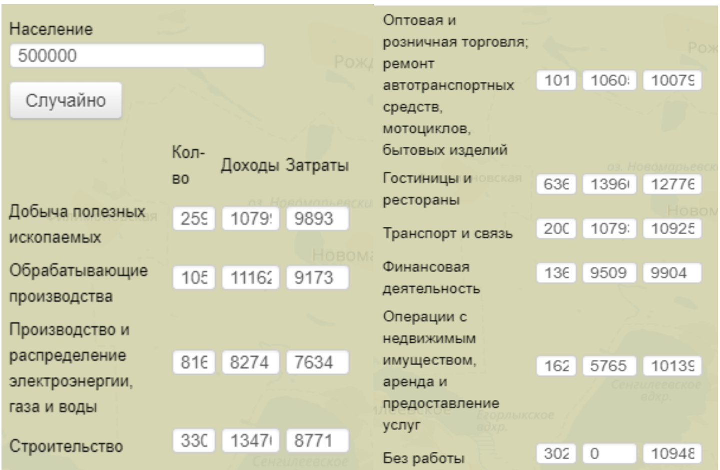
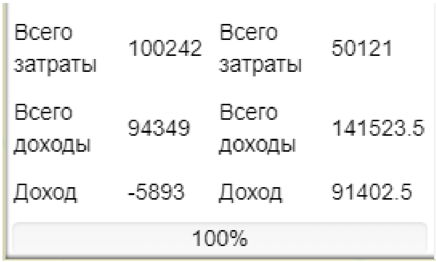


Рисунок 2. – Интерфейс входных данных



Всего затраты	100242	Всего затраты	50121
Всего доходы	94349	Всего доходы	141523.5
Доход	-5893	Доход	91402.5

100%

Рисунок 3 – Интерфейс выходных данных (числовых)

На основе полученных пользователем выходных данных строятся следующие диаграммы (рис. 4) [12]:

1. Левая – отражает текущее состояние распределения трудовых ресурсов региона на основе вводимых данных и указывает характер состояния каждой категории в отдельности.

2. Правая – отражает оптимальное состояние распределения трудовых ресурсов на основе суммарного значение количества человек в каждой категории, а также значений доходов и затрат по всем категориям.

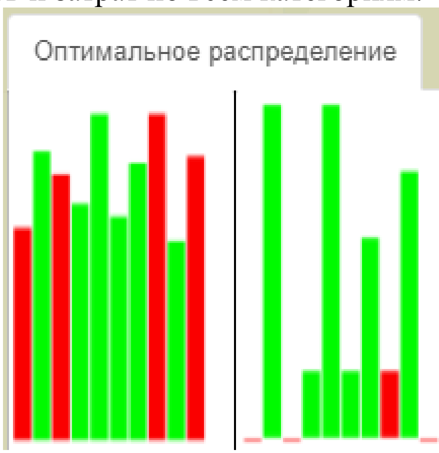


Рисунок 4. – Интерфейс выходных данных (графических)

Таким образом, автоматизация экономико-математической модели распределения трудовых ресурсов позволит решать проблемы управления на различном уровне, а также актуализирует исследование процессов перераспределения трудовых ресурсов в условиях рыночной экономики России в рамках конкретного региона [13]. В дальнейшем авторы планируют разработать информационную систему экономико-математических методов анализа и прогнозирования трудовых ресурсов страны.

Список литературы

1. Зайцева И.В. Экономико-математическое моделирование рынка труда: монография. СКСИ. Ставрополь, 2009. 112 с.
2. Зайцева И.В., Попова М.В., Ермакова А.Н., Богданова С.В. Управление трудовым потенциалом региона методами математического моделирования // Фундаментальные исследования. 2015. № 5-4. С. 723-726.
3. Зайцева И.В., Астахова Н.И. Оптимизация управленческой деятельности организации с использованием современных информационных систем // II международная научно-практическая конференция «Информационные системы и технологии как фактор развития экономики региона». Ставрополь: СтГАУ, 2013. С. 25-26.
4. Зайцева И.В. Методы исследования состояний информационной системы //Алгоритмы, методы и системы обработки данных. 2011. № 17. С. 7.
5. Малафеев О.А., Сотникова Н.Н., Зайцева И.В., Пичугин Ю.А., Костюков К.И., Хитров Г.М. Линейная алгебра с приложениями к моделированию коррупционных систем и процессов: учебное пособие. – Ставрополь: ООО ИД «ТЭСЭРА», 2016. – 366 с.

6. Зайцева И.В., Немова А.В. Определение оптимального распределения трудового потенциала региона методами математического моделирования //Вестник Северо-Кавказского федерального университета. 2016. № 4 (55). С. 73-78.

7. Зайцева И.В., Попова М.В. Демографическое развитие Ставропольского края как основа формирования трудовых ресурсов //Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета. 2012. № 81. С. 862-877.

8. Зайцева И.В., Попова М.В. Качественное состояние трудового потенциала Ставропольского края // Вестник АПК Ставрополья. 2013. № 2 (10). С. 157-160.

9. Зайцева И.В., Ермакова А.Н., Гайчук Д.В., Резеньков Д.Н., Шлаев Д.В. Исследование математической модели резервирования информационной системы // Инженерный вестник Дона. 2017. 1. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2017/4005.

10. Сироткин А.В. Модель системы трёхуровневого обеспечения информационного взаимодействия в АСУ // Инженерный вестник Дона. 2012. 4. URL: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n4p1y2012/1187.

11. Zaitseva I., Popova M. Technique to study the employment potential of the region: economic-mathematical aspect //World Applied Sciences Journal. 2013. V. 22. № 1. Pp. 22-25.

12. Zaitseva I.V., Semenchin E.A., Vorokhobina Y.V., Popova M.V. Optimal control of labour potencial of the region //Life Science Journal. 2014. V. 11. № 11s. Pp. 674-678.

13. Малафеев О.А. Управление в конфликтных динамических системах. - СПб.: Издательство СПбГУ, 1993. – 92 с.

Учебное издание

Зайцева Ирина Владимировна,
канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики и теоретической механики ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет»
Малафеев Олег Алексеевич,
д-р. физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой моделирования социально-экономических систем ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургского государственного университета»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
И МОДЕЛИРОВАНИЮ ДЕМОГРАФИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 21.05.2021. Формат 60x90 1/16.
Гарнитура Times New Roman.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 24. Тираж 50 экз. Заказ № 1078.
РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская, 79.