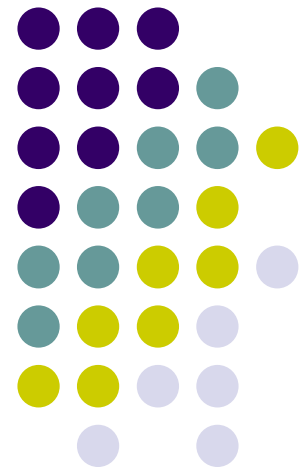
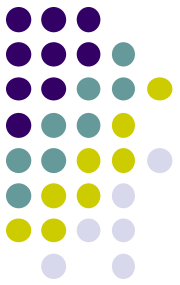


# **Завгородний В.Н. Задача линейного программирования в исследовании операций**

---

**[Электронный ресурс]:  
презентации курса лекций.—  
СПб, 2019. – 193 с.**

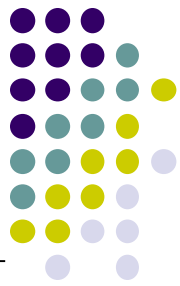




# Оглавление

|                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| Задачи и методы оптимизации в исследовании операций                     | 5   |
| Операционный подход в исследовании систем с организационным управлением | 42  |
| Основы теории линейного программирования                                | 67  |
| Метод последовательного улучшения плана                                 | 96  |
| ППП линейного программирования. Выполнение расчетов в среде Excel       | 131 |
| Основные положения теории двойственности в линейном программировании    | 148 |
| Анализ чувствительности моделей в задачах линейного программирования    | 177 |

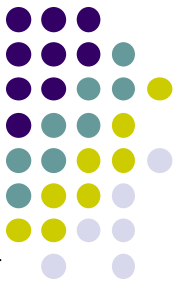
# Основная литература



1. Хемди А.Таха. Введение в исследование операций. — М.: Вильямс, 2007. — 912 с.
2. Токарев, В. В. Методы оптимизации [электронный ресурс]: учебное пособие для бакалавриата и магистратуры. — М. : Юрайт, 2018.—440 с.—Режим доступа: <https://biblio-online.ru/viewer/F00E19DF-994D-4E1C-A38E-CC7706F932F9#page/1>
3. Завгородний, В.Н. Исследование операций [Электронный ресурс]: презентации курса лекций.— СПб, 2018. — Режим доступа: <http://moodle.rshu.ru/course/view.php?id=206>
4. Акулич, И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах: Учеб. пособие для студентов эконом. спец. вузов.— М.: Высш. шк., 1986.— 319 с.
5. Кутузов, А.Л. Математические методы и методы исследования операций. Линейная оптимизация с помощью WINQSB и EXCEL: Учебное пособие. – СПб: Изд-во Политехн. университета, 2006. – 88 с.

# Дополнительная литература

---



1. Вентцель, Е.С. Исследование операций. — М.: Наука, 1980.
2. Сухарев А.Г., Тимохов А.В., Федоров В.В. Курс методов оптимизации.- М.: Наука, 1986.- 328 с.
3. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. 2-е изд., испр. и доп. - СПб.: Издательство «Лань», 2005.
4. Конюховский П. Математические методы исследования операций. Пособие для подготовки к экзамену. – СПб.: Питер, 2001.

# Задачи и методы оптимизации в исследовании операций

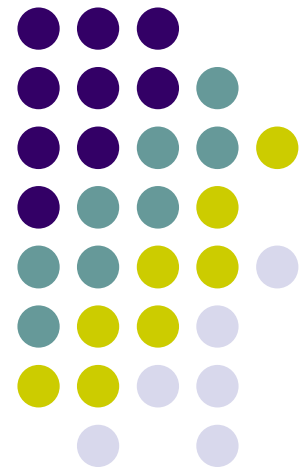
Объект и предмет исследования операций.

*Экскурс в ИО. Основные понятия.*

Математическая постановка задачи оптимизации. Система обозначений.

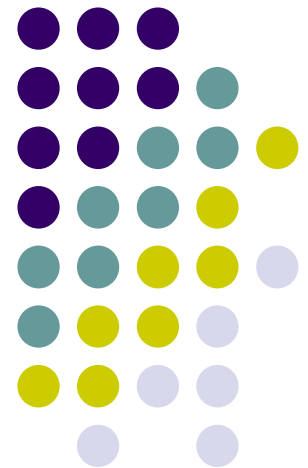
Классификация задач и методов оптимизации. Математические модели основных классов оптимизационных задач.

Примеры задач оптимизации. Задачи об оптимальном плане, о диете, о перевозках.

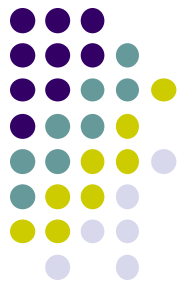


# Исследование операций и методы оптимизации

Operations Research  
Management Science  
Decision Science



# Принцип наименьшего действия (стационарности действия)



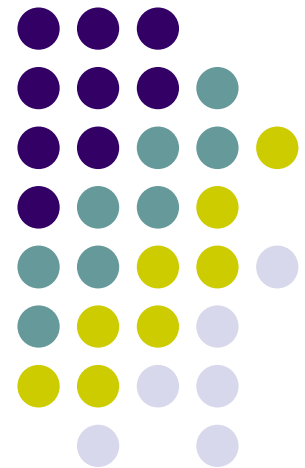
- Система ведёт себя таким образом, чтобы некоторая величина принимала минимальное (максимальное) возможное значение.
  - Классическая механика: тело движется таким образом, чтобы величина действия оказалась минимальной (при заданных начальных и конечных условиях)
  - Геометрическая оптика: луч света движется из начальной точки в конечную по такой траектории, где затраченное время минимально (принцип Ферма)
  - Термодинамика: система стремится к состоянию с максимальной энтропией.

Большая часть вопросов практики приводится к задачам наибольших и наименьших величин, ... и только решением этих задач мы можем удовлетворить требованиям практики, которая везде ищет самого лучшего, самого выгодного.

*П. Л. Чебышев*

П. Ферма (1601-1665), Р. Декарт (1596-1650), И. Ньютон (1643-1727),  
Г. Лейбниц (1646-1716), Я. Бернулли (1654-1705), И. Бернулли (1667-1748),  
Л. Эйлер (1707-1783), Ж. Даламбер (1717-1783), Ж. Лагранж (1736-1813),  
П. Лаплас (1749-1827), О. Коши (1789-1857), Б. Риман (1826-1866),  
К. Вейерштрасс (1815-1897), Г. Кантор (1845-1918), Д. Гильберт (1862-1943),  
П. Л. Чебышёв (1821-1894),

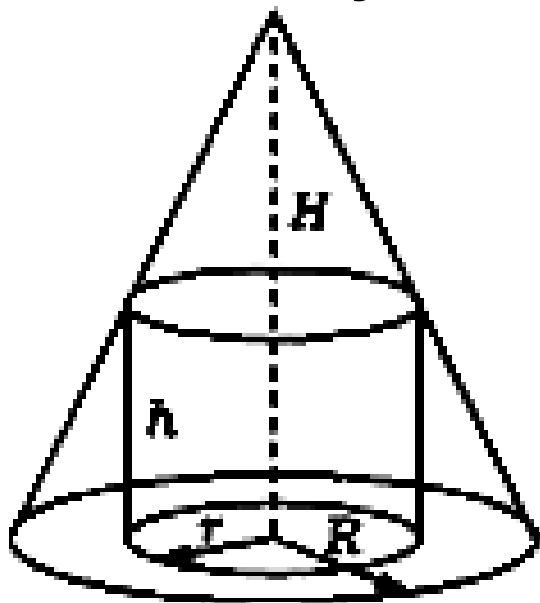
А. А. Марков (СССР), А. Н. Колмогоров (СССР), Л. В. Канторович (СССР),  
Д. Нейман (США), Р. Акоф (США), Р. Беллман (США), Дж. Данциг (США),  
Г. Кун (США), Т. Саати (США), Р. Чермен (США), А. Кофман (Франция),  
Б. В. Гнеденко (СССР), Н. П. Бусленко (СССР), Н. Н. Моисеев (СССР)



# Задача геометрической оптимизации



Пример 1. В прямой круговой конус вписан прямой круговой цилиндр, так что основания конуса и цилиндра лежат в одной плоскости. Найти наибольшую возможную часть объема конуса, занятую цилиндром.



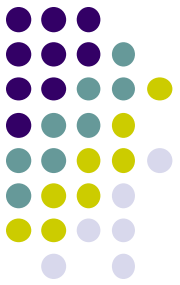
$$\eta = \frac{\pi r^2 h}{\pi R^2 H / 3} = 3 \frac{r^2 h}{R^2 H} \rightarrow \max$$

$$r/R = (H - h)/H$$

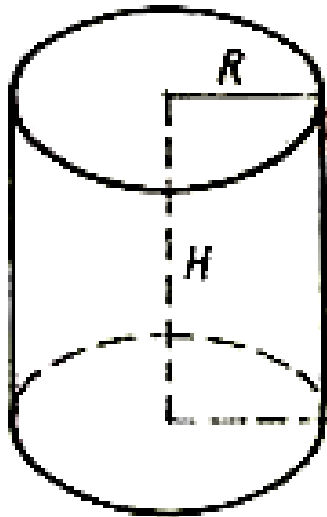
$$r/R, h/H \in [0, 1].$$

$$\eta(1/3) = 4/9 \quad \text{при} \quad h/H = 1/3, \quad r/R = 2/3.$$

# Задача оптимального проектирования



Пример 2. Требуется спроектировать цилиндрический бак горючего заданного объема  $V$ , на изготовление которого будет затрачено наименьшее количество листовой стали.



$$S = 2\pi R(H + R) \rightarrow \min.$$

$$\pi R^2 H = V$$

$$\pi R^2 \rightarrow 4R^2$$

$$\tilde{S} = 2\pi RH + 8R^2 \rightarrow \min.$$

$$\tilde{R}_* = \frac{1}{2} \sqrt[3]{V}, \quad \tilde{S}_* = 6 \sqrt[3]{V^2}, \quad \tilde{H}_* = \frac{8}{\pi} \tilde{R}_*.$$

$$\pi R^2 \rightarrow 2\sqrt{3} R^2$$

$$\hat{S} = 2\pi RH + 4\sqrt{3} R^2$$

$$\hat{R}_* = \sqrt[3]{\frac{V}{4\sqrt{3}}}, \quad \hat{S}_* = 3 \sqrt[3]{4\sqrt{3} V^2}, \quad \hat{H}_* = \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \hat{R}_*.$$

# Задача оптимального планирования



**Пример 3. Определить оптимальный план добычи газа на  $m$  месторождениях и распределения потоков газа в  $n$  пункты потребления по  $k$  участкам сети газопроводов при заданных значениях производительности и потребления и стоимостей добычи и подачи газа.**

**минимум общих затрат на добычу и подачу газа**

$$S = \sum_{i=1}^m \varphi_i(g_i) + \sum_{k=1}^K f_k(q_k) \rightarrow \min.$$

$m$  месторождений  $A_i, i = \overline{1, m}$ , газа

$n$  пунктов  $B_j, j = \overline{1, n}$ , потребления

$p_j \geq 0$  расход газа в единицу времени

$0 \leq g_i \leq G_i$ , производительность  
 $i$ -го месторождения,  $i = \overline{1, m}$ ,

$\varphi_i(g_i)$  затраты на добычу газа на  
 $i$ -м месторождении,  $i = \overline{1, m}$ ,

$f_k(q_k)$  стоимость подачи газа по  $k$ -му

$q_k$  расхода по  $k$ -му участку,  $k = \overline{1, K}$ .

ограничения типа равенства в пунктах  
потребления газа

$$\sum_{k \in B_j^+} q_k = p_j + \sum_{k \in B_j^-} q_k, \quad j = \overline{1, n},$$

где  $B_j^+$  и  $B_j^-$  — множества участков сети  
с входящими в  $j$ -й пункт и выходящими  
из него потоками газа соответственно  
ограничения типа равенства в для  
месторождений газа

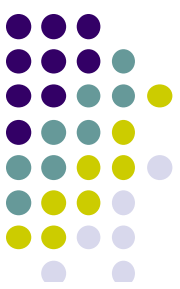
$$g_i = \sum_{k \in A_i^-} q_k, \quad i = \overline{1, m}.$$

# Исследование операций. Предмет и содержание



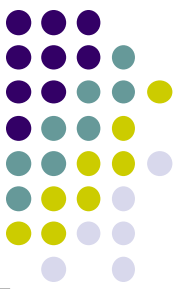
- *Исследование операций (ИО)*- комплексный математический аппарат построения и системного анализа прикладных моделей, предназначенных для количественного обоснования оптимальных решений в интересах управления организационно-техническими системами.
- *ИО* содержит методы и модели решения многомерных оптимизационных задач с ограничениями.

# Структура исследования операций как научной дисциплины прикладной математики



# Оптимизационная задача математического программирования (МП)

---



**Задача оптимизации в МП – это задача**

$$f(x) \rightarrow \min(\max), \quad x \in X$$

**нахождения экстремума (максимума или минимума) функции  $f(x)$  многих переменных  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  и точек ее экстремума  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , когда эти переменные заданы на допустимом множестве  $X: x \in X$ , удовлетворяющем системе из  $m$  ( $m < n$ ) ограничений с функциями  $g_i(x)$  в виде равенств и неравенств.**

# Задача оптимизации.

## Терминология



- **Планом** называется всякий вектор  $x$  из пространства  $R^n$ .
- **Допустимым планом** называется такой план, который удовлетворяет ограничениям *области допустимых планов*.
- **Оптимальным планом**  $x^*$  называется такой допустимый план, при котором целевая функция достигает оптимального значения  $\max(\min) f(x) = f(x^*)$ .
- Величина  $f^* = f(x^*)$  называется **оптимальным значением целевой функции**.
- **Решением задачи** называется пара  $(x^*, f^*)$ , состоящая из оптимального плана и оптимального значения целевой функции, а *процесс решения* заключается в отыскании множества всех решений.

# Постановка задачи математического программирования



- Найти оптимальный план:  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)$ ,
- обращающий целевую функцию в экстремум:

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \rightarrow \min (\max) \quad (1)$$

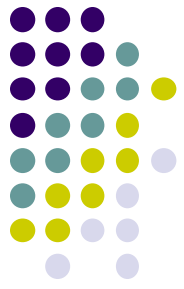
- при выполнении системы ограничений:

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) = b_i, & (i = 1, 2, \dots, m_1) \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \geq b_i, & (i = m_1 + 1, 2, \dots, m_2) \\ g_i(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n) \leq b_i, & (i = m_2 + 1, 2, \dots, m) \end{cases} \quad (2)$$

- $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_l \geq 0 \quad (l \leq n)$  – неотрицательные (3)

- $x_1, x_2, \dots, x_n \in Z_+$  – целые (4)

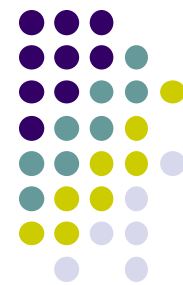
# Векторное (линейное) пространство $R^n$



- упорядоченная система  $n$  действительных чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$  называется  *$n$ -мерным вектором  $x$* .
- *линейное (вещественное) пространство  $R^n$*  – множество векторов, для которых заданы операции сложения и умножения на число.
- *линейная зависимость векторов* - если их линейная комбинация  $\lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2 + \dots + \lambda_m x^m = 0$  и  $\exists \lambda_i \neq 0$ .
- *базис пространства* – система  $n$  линейно-независимых векторов, где  $n$  - размерность  $R^n$ .

# Минимумы и максимумы.

## Точки минимума и максимума



- Локальный минимум (максимум) функции:

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (f(x^*) \geq f(x)) \quad \text{для} \quad \forall x \in \|x - x^*\| \leq \varepsilon$$

- Глобальный (абсолютный) минимум (максимум):

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (f(x^*) \geq f(x)) \quad \text{для} \quad \forall x \in X$$

- Точка минимума (значение переменной):

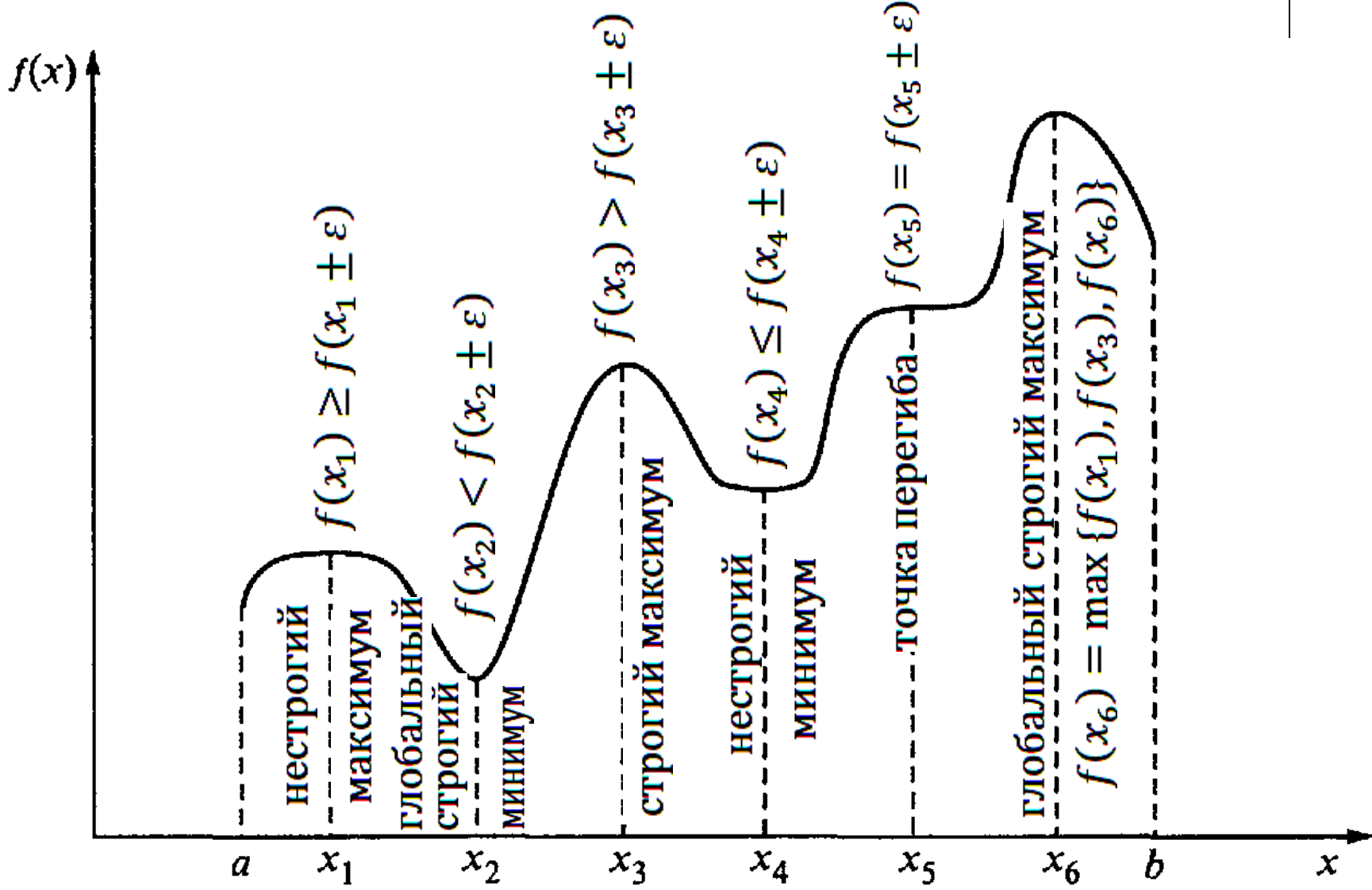
$$x^* : f(x^*) = f_{\min}(x) = \min_{x \in X} f(x)$$

$f(x^*)$  - минимальное значение функции;

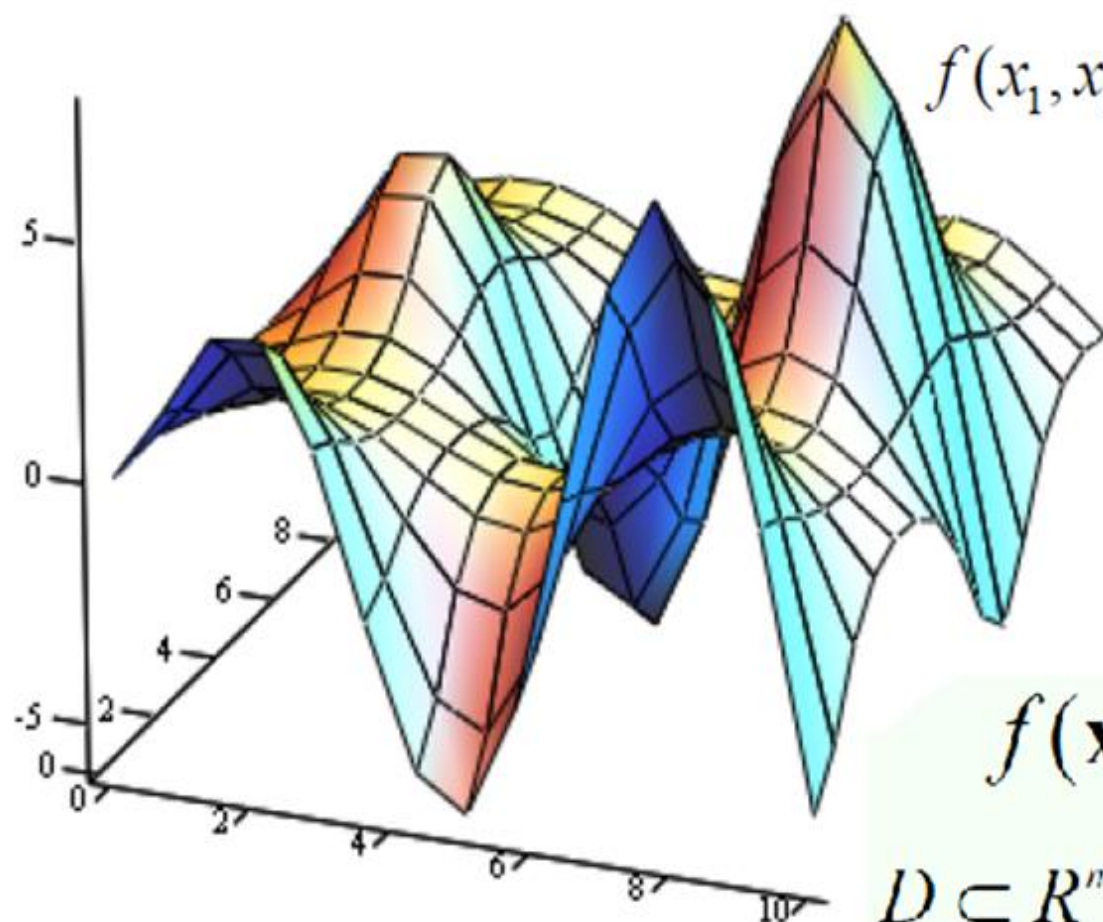
$$x^* = \arg \min_{x \in X} f(x) \quad - \text{точка минимума;}$$

- Точка максимума:  $x^* : f_{\max}(x) = - f_{\min}(x)$

# Экстремумы функции: локальные и глобальные минимумы и максимумы



# Экстремальные задачи

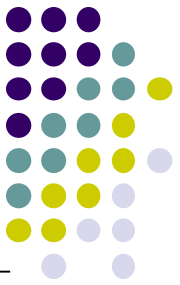


$$f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1} \cdot \sin(x_1) \cdot e^{\cos(x_2)}$$

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \max(\min)$$

$$D \subset \mathbb{R}^n \quad \begin{aligned} g_i(\mathbf{x}) &\leq 0, \quad i \in 1..r; \\ g_i(\mathbf{x}) &= 0, \quad i \in (r+1)..m. \end{aligned}$$

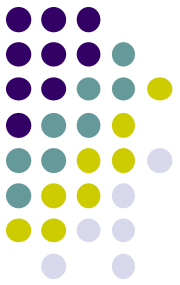
# Решение задачи оптимизации



$$(x^*, f(x^*)): x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = \\ = \text{Arg } f(x^*) = \{arg \text{ extr } f(x \mid g_i(x) \leq 0)\}$$

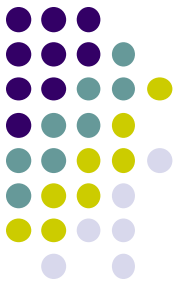
- $x$  – управляемые переменные решения
- $x^*$  – оптимальное значение решения
- $f(x)$  – целевая функция оценки качества решения  $x$
- $f(x^*)$  – экстремальное значение ЦФ  $f(x)$
- $g_i(x)$  – функции ограничений области  $X$  допустимых решений  $x \in X$

# Прямая и обратная задачи в исследовании операций



- **Прямая задача** – найти максимальное значение целевой функции, характеризующей эффективность операции, и оптимальный план для заданного набора значений неконтролируемых факторов (ресурсов) операции.
- **Обратная задача** – найти минимальное значение целевой функции, характеризующей ресурсы, и оптимальные значения ресурсов, для заданного значения эффективности операции.

# Построение математической модели исследования операций



**(I) Определение переменных, значения которых необходимо найти**

- вектор переменных

**(II) Определение критерия оптимальности**

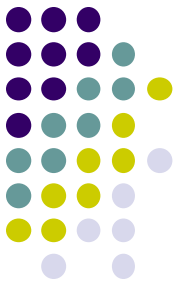
- целевая функция
- направление оптимизации

**(III) Область допустимых решений (система ограничений на переменные)**

- решение допустимое и оптимальное

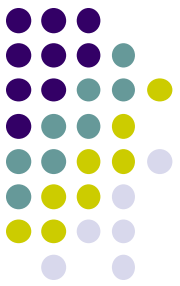
# Классификация задач и методов оптимизации

---



- *Классические задачи оптимизации*
  - Методы безусловной оптимизации
  - Методы условной оптимизации
- *Задачи линейного программирования*
  - Методы целочисленного программирования
- *Задачи нелинейного программирования*
  - Методы динамического программирования
  - Методы выпуклого программирования
  - Методы квадратичного программирования
  - Методы дробно-линейное программирования
  - Градиентные методы

# Задача безусловной оптимизации $f(x) \rightarrow \min, x \in R$



- **Необходимое** — условие, без которого переменная не может быть решением задачи:

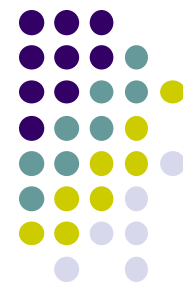
$$f'(x^*) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^*), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^*) \right) = 0.$$

- **Достаточное** — условие, при котором переменная гарантировано является решением задачи:

$$f''(x^*) = \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) \right)_{i,j=1,\dots,n} > 0 \text{ } (< 0)$$

*т.е. квадратичная форма из вторых частных производных функции (гессиан) отрицательно определена в точке минимума (положительно определена в точке максимума).*

# Задача безусловной оптимизации. Пример



Решить задачу оптимизации:

$$f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \rightarrow \min, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Необходимое условие:

$$3x_1^2 - 3x_2 = 0, \quad 3x_2^2 - 3x_1 = 0.$$

$$x^1 = (0, 0) \text{ и } x^2 = (1, 1).$$

Достаточное условие:

$$f''(x) = \begin{bmatrix} 6x_1 & -3 \\ -3 & 6x_2 \end{bmatrix}, \quad f''(x^1) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}, \quad f''(x^2) = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

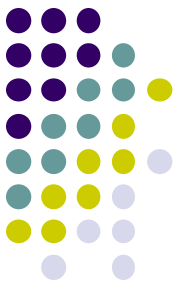
Ответ:  $x^2 = (1, 1).$

# Классическая задача условной оптимизации



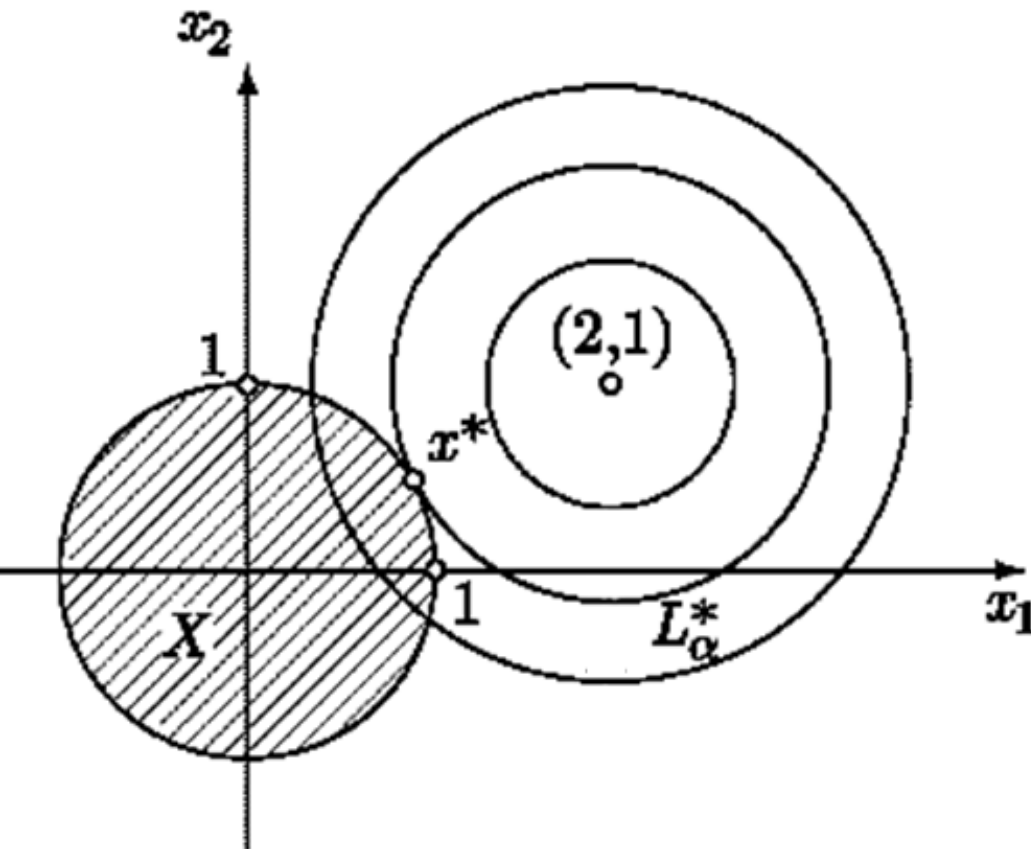
- $X = \{x \in \mathbf{R}^n \mid g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m\}$
- $$f(x) \rightarrow \min,$$
$$g_i(x) = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$
- $$\Phi(X, U) = f(X) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(X)$$

# Задача условной оптимизации. Пример



$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \min,$$

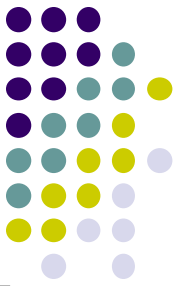
$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^2 \leq 1\}$$



$$x^* = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$$

# Линейное программирование.

## Общая задача



- Линейная целевая функция:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min(\max)$$

- Линейные ограничения:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = k + 1, \dots, m,$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, s,$$

# Формы задачи линейного программирования



- основная форма:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

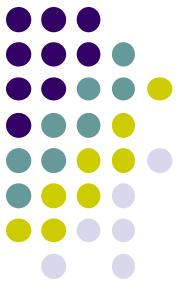
- стандартная форма:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ i = 1, \dots, m$$

- каноническая форма:

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

# Дискретное программирование



- Задача дискретной оптимизации

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in D$$

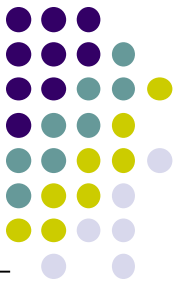
$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

$$g_i(x) = 0, \quad i = k + 1, \dots, m.$$

- Целочисленная 3ЛП:  $D = \{0, 1, 2, \dots\}$
- Булева 3ЛП:  $D = \{0, 1\}$
- Частично целочисленная задача:

$$x_j \in \mathbb{R}, \quad j = k + 1, \dots, n$$

# Нелинейное программирование



- Нелинейная целевая функция:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max (\min)$$

- Линейные ограничения:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

# Задачи нелинейного программирования



## ● Задача квадратичного программирования

- целевая функция – линейно-квадратичная форма

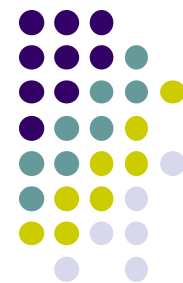
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j x_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_i x_j$$

## ● Задача сепарабельного программирования

- целевая функция – сепарабельная

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n f_j(x_j)$$

# Динамическое программирование



- Критерий эффективности (целевая функция):

$$F = \sum_{k=1}^n F_k(S_{k-1}, X_k)$$

- Функциональное уравнение (ограничения):

$$S_k = f_k(S_{k-1}, X_k), \quad k = \overline{1, n}$$

# Прикладные задачи и методы исследования операций



| Функция управления                                    | Задачи оптимизации                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Класс математических методов                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Техническая и организационная подготовка производства | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Моделирование состава изделий.</li> <li>• Оптимизация состава (марок, шихты, смесей).</li> <li>• Оптимизация раскроя (листового материала, проката).</li> <li>• Оптимизация распределения ресурсов в сетевых моделях комплексов работ.</li> <li>• Оптимизация планировок предприятий, производств и оборудования.</li> <li>• Оптимизация маршрута изготовления изделий.</li> <li>• Оптимизация технологий и технологических режимов.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Дискретное (целочисленное) программирование</li> <li>• Линейное программирование</li> <li>• Сетевое планирование и управление</li> <li>• Имитационное моделирование</li> <li>• Динамическое программирование</li> <li>• Нелинейное программирование</li> <li>• Теория графов</li> </ul> |
| Стратегическое планирование производства              | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Построение сводного плана и прогнозирование показателей развития предприятия.</li> <li>• Оптимизация портфеля заказов и производственной программы.</li> <li>• Оптимизация распределения производственной программы по плановым периодам.</li> </ul>                                                                                                                                                                                            | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Балансовые (матричные) модели «затраты-выпуск»</li> <li>• Корреляционно-регрессионный анализ</li> <li>• Экстраполяция тенденций</li> <li>• Линейное программирование</li> </ul>                                                                                                         |
| Оперативное управление основным производством         | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Оптимизация календарно-плановых нормативов.</li> <li>• Календарные задачи.</li> <li>• Оптимизация стандарт-планов.</li> <li>• Оптимизация краткосрочных планов производств.</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                          | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Нелинейное программирование</li> <li>• Имитационное моделирование</li> <li>• Линейное программирование</li> <li>• Целочисленное программирование</li> </ul>                                                                                                                             |

# Примеры задач исследования операций



| Виды задач                                   | Математическая формулировка                                                                                                                                                                                                                    | Экономическая интерпретация                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Задача о рациональном использовании ресурсов | $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, (i = \overline{1, m}),$ $x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}).$                                                                                                    | Найти план производства, показывающий, какие виды продукции $П_1, П_2, \dots, П_n$ нужно производить и в каких количествах $x_j$ , чтобы обеспечить предприятию максимум дохода $Z$ при имеющихся ресурсах $b_i$ и цене реализации $c_j$                                                                                                                        |
| Задача о смесях                              | $Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$ $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, (i = \overline{1, m}),$ $x_j \geq 0, (j = \overline{1, n}).$                                                                                                    | Получить продукцию с заданными свойствами при наименьших затратах на исходные сырьевые материалы: формировании минимальной потребительской продовольственной корзины, составлении кормового рациона в животноводстве, шихт в металлургии, горючих и смазочных смесей в нефтеперерабатывающей промышленности, смесей для получения бетона в строительстве и т.д. |
| Задача о раскрое материалов                  | $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l c_{jk} x_{jk} \rightarrow \min$ $\sum_{k=1}^l x_{jk} = d_j, j = \overline{1, n},$ $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^l a_{ijk} x_{jk} = b_i, i = \overline{1, m},$ $x_{jk} \geq 0, j = \overline{1, n}, k = \overline{1, l}.$ | Нахождение технологически допустимых планов раскроя, при которых получается необходимый комплект заготовок, а отходы (по длине, площади, объему, массе или стоимости) сводятся к минимуму.                                                                                                                                                                      |

# Модели в исследовании операций



- Задача оптимального распределения ресурсов
- Задача о диете
- Транспортная задача
- Задача о назначениях
- Задача о ранце
- Задача упаковки
- Задача о сумме подмножеств
- Задача коммивояжёра
- Задачи теории расписаний
- ...

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, i = \overline{1,m} \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array} \right.$$

- $m$  — всего видов ресурсов,  $i$ ;
- $n$  — всего технологических линий,  $j$ ;
- $c_{ij}$  — производительность  $j$ -ой технологической линии;
- $x_j$  — загрузка  $j$ -ой технологической линии;
- $a_{ij}$  — удельный расход  $i$ -го ресурса на  $j$ -ой технолог. линии на единицу продукта;
- $b_i$  — количество единиц  $i$ -го ресурса.

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

- $m$  — всего питательных веществ,  $i$ ;
- $n$  — кол-во продуктов,  $j$ ;
- $c_j$  — цена единицы  $j$ -го продукта;
- $x_j$  — сут.потребление  $j$ -го продукта;
- $a_{ij}$  — кол-во  $i$ -го питат. вещества в единице  $j$ -го продукта;
- $b_i$  — суточная потребность в  $i$ -ом питат.веществе.

# Транспортная задача

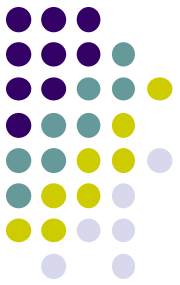


$$Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i, i = \overline{1, m}, \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \geq b_j, j = \overline{1, n}, \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

- $m$  – кол-во пунктов отправления  $A_i$ ;
- $n$  – кол-во пунктов назначения  $B_j$ ;
- $c_{ij}$  – стоимость доставки единицы груза из  $A_i$  в  $B_j$ ;
- $x_{ij}$  – кол-во единиц груза, перевозимого из  $A_i$  в  $B_j$ ;
- $a_i$  – имеется единиц однородного груза в  $A_i$ ;
- $b_j$  – требуется единиц однородного груза в  $B_j$ ;

# Задача раскроя



Найти интенсивность применения  $x_i \geq 0$   
каждого из раскроев, при к-рых

$$z = \sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \min$$

при условии  $\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq b_j, j = \overline{1, m}$

- где  $a_{ij}$  — количество  $j$ -х заготовок в  $i$ -м раскрое,
- $b_j$  — необходимое на одно изделие количество этих заготовок.

# Операционный подход в исследовании систем с организационным управлением (СОУ)

Задача принятия решения.

*Критериальный выбор. Классификация.*

Основные этапы исследования операций.

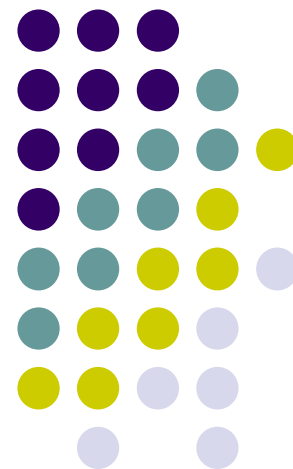
Формализация проблемной ситуации.

*Выбор показателей эффективности.*

Математическая модель операции.

*Исходные данные операции. Адекватность  
модели.*

Принципы реализации решения.

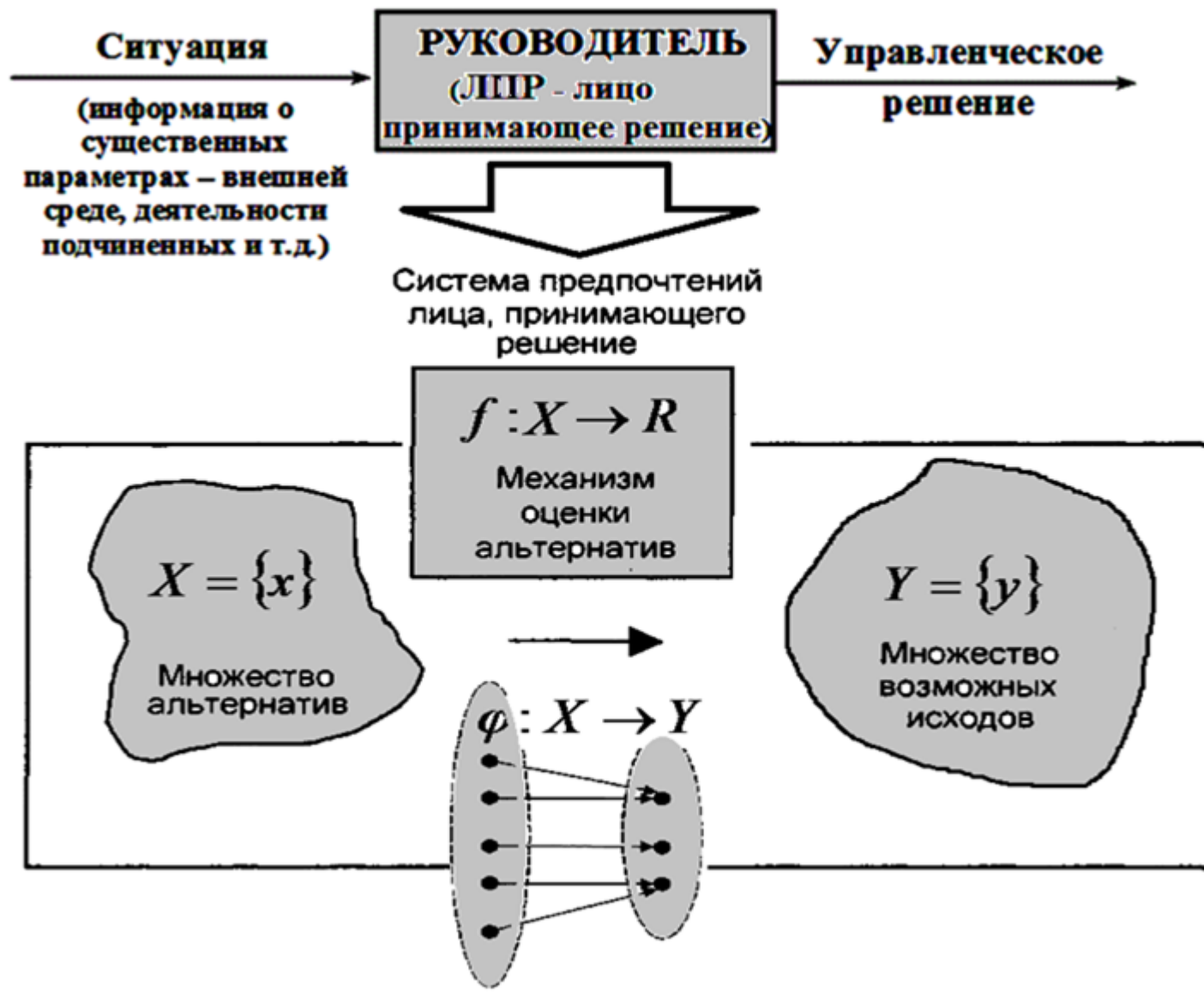
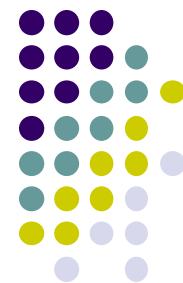


# Организационные структуры (системы “с организационным управлением”)



- **Социальные системы**
  - Социально-экономические системы
  - Системы с активным элементом
- **Организационные системы**
- **Организационно-технические системы**
  - Производственные системы
- **Автоматизированные системы**
  - АСУ (CRM, MRP, ERP..., ITIL, ITSM)
  - Информационные системы
  - Системы поддержки принятия решений
- **Человеко-машинные системы**

# Задача принятия решения. Критериальный выбор

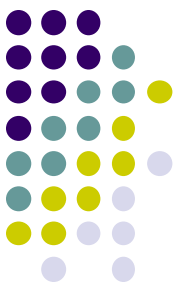


# Классификация задач принятия решений



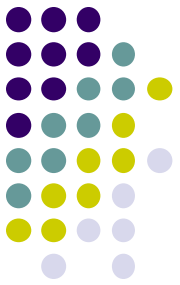
| Классы проблем в исследовании сложных систем                                                                                                                                                  | Типы моделей                                                                                             | Подходы к решению                                                                                                                     | Методы решения                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>хорошо структурированные (well-structured)</b></p> <p>- содержат количественные зависимости, которые формализованы</p>                                                                  |  <p>«Белый ящик»</p>    | <p><b>Операционный подход</b></p> <p>(на основе существования некоторых функций управления)</p>                                       | <p>Исследования операций, линейное, нелинейное, динамическое программирование, теория массового обслуживания, теория игр и др.</p> |
| <p><b>слабо структурированные (ill-structured)</b></p> <p>- содержат как формализованные, так и существенные неопределенные качественные зависимости</p>                                      |  <p>«Серый ящик»</p>    | <p><b>Системный подход</b></p> <p>(состоит в выявлении взаимозависимых подсистем и их вклада в функционирование системы)</p>          | <p>Системный анализ на основе общенаучных, естественнонаучных, статистических, математических методов</p>                          |
| <p><b>неструктурированные (unstructured)</b></p> <p>- содержат качественное описание важнейших ресурсов, признаков и характеристик, количественные зависимости между которыми неизвестны.</p> |  <p>«Черный ящик»</p> | <p><b>Ситуационный подход</b></p> <p>(рассматривает открытую систему во взаимодействии с внешней средой на основе «входа-выхода»)</p> | <p>Кибернетика, теория управления</p>                                                                                              |

# Классификация методов принятия решений в системном анализе



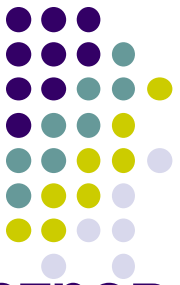
- *Строго формализованные* (оптимизация, принятие решений, передачи информации)
- *Направленные на формализацию* (экспериментальные исследования, построение моделей)
- *Слабо формализованные* (экспертные оценки, коллективный выбор)
- *В принципе неформализуемые операции* (формулирование проблем, выявление целей, определение критериев, генерирование альтернатив)

# Операционный подход. Основные понятия



- *Операция* – управляемая деятельность по эффективному использованию ограниченных ресурсов для достижения заданной цели.
- *Критерий эффективности (целевая функция)* – количественная мера достижения цели операции в форме функциональной зависимости эффективности решения оптимизационной задачи от управляемых и неуправляемых параметров, характеризующих операцию.
- *Дисциплинирующие условия (ограничения)* – условия, учитывающие ограниченность ресурсов и технологических возможностей выполнения операции, которые задают область допустимых решений в форме системы неравенств и уравнений.
- *Оптимизация (принцип оптимальности)* – нахождения экстремума (минимума или максимума) целевой функции в области допустимых решений.

# Операционный подход. Основные понятия



- **Решение** – определенный набор значений параметров управления операцией.
  - **Допустимое** – решение, удовлетворяющее требованиям, условиям и ограничениям выполнения операции.
  - **Оптимальное** (*optimus* – наилучшее) – наилучшее среди допустимых решение для выбранного правила предпочтения, называемого критерием оптимальности (эффективности).
  - **Субоптимальное** (локально-оптимальное) – наилучшее решение на неполном множестве допустимых решений или критериев оптимальности.
  - **Рациональное** – решение, достаточно близкое к оптимальному по значению критерия оптимальности.
  - **Эффективное** – решение, обеспечивающее достижение заданной цели операции.
- **План (элементы решения)** – упорядоченная совокупность значений управляемых переменных в задаче оптимизации.

# Понятие оптимальности.

## Содержание



- назначен *критерий оптимальности* (показатель, по которому проводится оптимизация);
- определена *область* (конечное или бесконечное *множество возможных состояний* объекта), на которой проводится оптимизация;
- существует логически строгая *процедура оптимизации* данного объекта по данному критерию;
- можно доказать, что *лучшего решения быть не может* (по этому критерию, в этой области допустимых состояний, по этой процедуре).

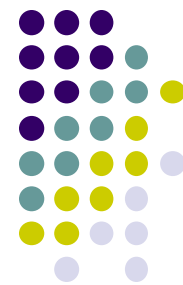
# Основные этапы исследования операций



- **Формализация проблемной ситуации**
  - построение проблематики;
  - выявить цель и определить критерий эффективности;
  - установить управляемые параметры и дисциплинирующие условия;
- **Построение математической модели**
  - сбор и подготовка исходных данных исследования;
  - проведение экспериментов на адекватность модели;
- **Математическое моделирование операции**
  - получение оптимального решения;
  - анализ параметрической и структурной чувствительности решения (условий операции);
- **Внедрение результатов операционного исследования**
  - выработка рекомендаций в форме, понятной ЛПР;
  - управление ходом реализации решения;
  - проверка эффективности решения.

# Этап 1. Декомпозиция проблемной ситуации

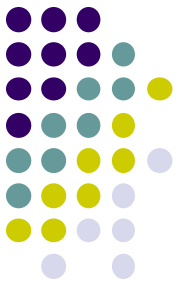
---



- **проблемосодержащая система**
  - цели для разрешения проблемы
- **проблеморазрешающая система**
  - ресурсы для разрешения проблемы
- **окружающая среда**
  - ограничения решения проблемы:
    - пассивного характера, но обязательные
    - активного характера.

# Заинтересованные лица (stakeholders)

---



- **Заказчик**
- **Лицо, принимающее решения  
(ЛПР)(decision-maker)**
- **Участники**
  - **активные**
  - **пассивные**

# Трудности выявления целей

---



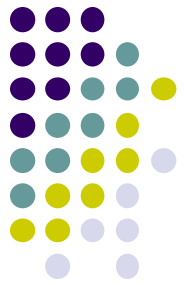
- часто путают цель и средство
- легко ошибиться в представлении желаемого будущего состояния как цели
- различные системы ценностей заинтересованных лиц (stakeholders)
- цель не бывает единственной
- опасность неверного упорядочения целей
- цели меняются с течением времени

# Задача выбора объема производства продукции. Пример



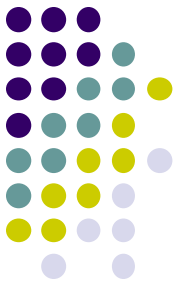
- **Производственный отдел:** загрузка оборудования, сложность технологических операций, объем незавершенного производства, количество бракованных изделий и производительность службы технического контроля.
- **Отдел материально-технического снабжения:** ограничения на складах запасов сырья и готовой продукции.
- **Отдел сбыта:** номенклатура продукции, активность рекламной деятельности, возможности сети сбыта и реализации, влияние конкуренции.

# Критерий эффективности в исследовании операций. Требования



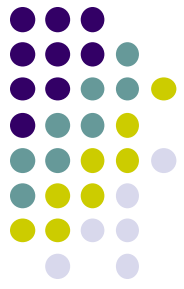
- **Адекватность** – учитывать все существенные факторы, влияющие на достижение цели
- **Измеримость** – выразить степень достижения поставленной цели в числовой форме
  - *модель цели* – отображение цели в количественную шкалу
  - *монотонность* целевой функции критерия
- **Интерпретируемость** – иметь простой и понятный содержательный (физический) смысл
- **Чувствительность** – отражать существенное изменение исследуемых факторов
- **Робастность** – нечувствительность к изменению несущественных факторов исследования

# Свойства критериальной функции оптимальных решений



- **Аксиома полноты.** Если любых решений  $A, B$  выполняется  $A > B$  или  $B > A$ , или  $A = B$ , то  $f(A) > f(B)$  либо  $f(B) > f(A)$ , либо  $f(A) = f(B)$ .
- **Аксиома транзитивности.** Если из  $A > B$  и  $B > C$  следует  $A > C$ , то  $f(A) > f(C)$ .
- **Аксиома независимости.** Пусть для любого  $C$  и  $p \in (0; 1]$  при  $A > B$  выполняется  $pA + (1-p)C > pB + (1-p)C$ , тогда из  $f(A) > f(B)$  следует, что  $pf(A) + (1-p)f(C) > pf(B) + (1-p)f(C)$ .
- **Аксиома непрерывности.** Пусть  $A > B > C$  и  $B = pA + (1-p)C$ , где  $p \in (0; 1]$ , тогда  $f(B) = pf(A) + (1-p)f(C)$ .

# Показатель и критерий эффективности функционирования системы (операции)

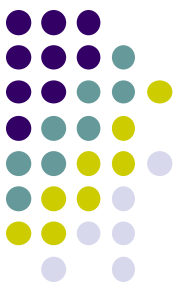


$$F^* = \langle E, R, T \rangle \rightarrow \max(\min)$$

- $F^*$  – количественный показатель оценки соответствия исхода операции поставленной цели (состояние системы и внешней среды)
  - $E$  – результативность, целевой эффект операций функционирования системы
  - $R$  – ресурсоемкость, все виды ресурсов для получения целевого эффекта:
    - трудовые, материально-технические, энергетические, информационные, финансовые
  - $T$  – оперативность, расход времени, потребный для достижения цели операции

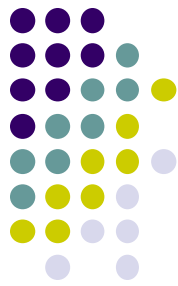
# Критерии, применяемые в анализе сложных технических систем

---



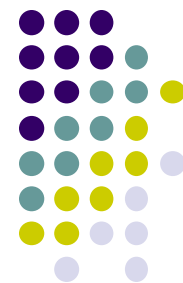
- финансовые (прибыль, стоимость и пр.),
- объемные (количество продукта),
- технические качества (эффективность функционирования, надежность и т.д.),
- живучесть (совместимость, приспособляемость или гибкость, стойкость против морального старения, безопасность)

# Технические показатели организационно-технических систем



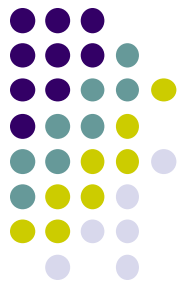
- **Функциональные показатели:**
  - производительность (мощность, грузоподъемность, скорость и др.);
  - эффективность (энергетические (КПД, потери), кинематические (точность перемещения), силовые (стабильность нагрузки) и т. п.);
- **Конструктивные показатели** (масса и габариты);
- **Показатели надежности** (безотказность, долговечность, ремонтпригодность, сохраняемость);
- **Эргономические показатели** (антропометрические, психологические, физиологические и др.);
  - эстетичность (выразительность формы, совершенство исполнения, целостность вида и т.п.)
- **Показатели безопасности** (химическая, радиационная, механическая, электрическая, магнитная, электромагнитная, термическая, санитарно-гигиеническая, противопожарная)
- **Экологические показатели** (засорение среды, излучения, шум ...)
  - утилизация (способы ликвидации изделия)

# Экономические показатели организационно-технических систем



- Прибыль;
- Себестоимость;
- Цена;
- Эксплуатационные расходы :
  - *стоимость потребляемой энергии*
  - *стоимость расходуемых материалов*
  - *стоимость обслуживания*
  - *стоимость ремонта и утилизации*
  - *отчисления: страховые, налоги, за вредные выбросы и др.*

## Этап 2. Математическая модель. Свойства



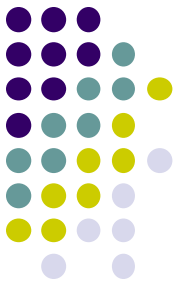
- **Математическая модель** – объект-заместитель объекта исследования, формализованный в виде взаимосвязанных математических и формально-логических выражений, свойства и взаимосвязи которых отражают поведение реального объекта:
  - воспроизводит только существенные для исследования свойства объекта-оригинала
  - служит для исследования свойств и закономерностей объекта-оригинала
  - обеспечивает переносимость результатов, получаемых с помощью модели, для построения обобщающей теории объекта

**Модели, основанные  
на логических  
детерминированных  
клеточных автоматах**



# Исходные данные операции.

## Типы измерительных шкал



- *шкала наименований (номинальная, классификационная);*
- *порядковая шкала (ординарная или ранговая);*
- *интервальная шкала (шкала разностей);*
- *шкала отношений (абсолютная шкала).*



# Количественные шкалы

|                                              | Отсутствует<br>естественное начало<br>отсчета                                                                                                                                         | Есть естественное<br>начало отсчета                                                                                   |
|----------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Нет<br>естественной<br>единицы<br>измерения  | <b><i>Интервальные шкалы</i></b><br>(шкалы Цельсия,<br>Фаренгейта, Реомюра;<br>курсы RUR, USD, EUR)<br>$\varphi(x) = ax + b$<br>( $t^{\circ}\text{C} = 5/9(t^{\circ}\text{F} - 32)$ ) | <b><i>Шкалы отношений</i></b><br>(масса тела, длина,<br>заряд; цены в<br>экономике)<br>$\varphi(x) = ax, \quad a > 0$ |
| Есть<br>естественная<br>единица<br>измерения | <b><i>Шкалы разностей</i></b> (год,<br>сутки)<br>$\varphi(x) = x + b$                                                                                                                 | <b><i>Абсолютные шкалы</i></b><br>(числовые<br>величины)                                                              |

# Свойства качественных и количественных шкал измерения



|                            |          | Номинальная шкала            | Порядковая шкала             | Интервальная шкала           | Отношений шкала              |
|----------------------------|----------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| Математические операции    | $\times$ | X                            | X                            | X                            | ✓                            |
|                            | $\div$   | X                            | X                            | X                            | ✓                            |
|                            | $+$      | X                            | X                            | ✓                            | ✓                            |
|                            | $-$      | X                            | X                            | ✓                            | ✓                            |
|                            | $<$      | X                            | ✓                            | ✓                            | ✓                            |
|                            | $>$      | X                            | ✓                            | ✓                            | ✓                            |
|                            | $=$      | ✓                            | ✓                            | ✓                            | ✓                            |
|                            | $?$      | ✓                            | ✓                            | ✓                            | ✓                            |
| Мера центральной тенденции |          | Мода                         | Медиана                      | Среднее арифметическое       | Среднее геометрическое       |
| Метрическая или нет        |          | Неметрическая (качественная) | Неметрическая (качественная) | Метрическая (количественная) | Метрическая (количественная) |

# Этап 4. Принципы внедрения результатов ИО



- необходимо иметь методику внедрения
  - важно различать развитие и рост
- принцип добровольности участия «стэйкхолдеров»
- принцип ответственности первого лица
  - выбор проблемы и результативность исследования
- выбрать принцип решения проблемы
  - не решать проблему (absolution)
  - частично решить проблему (resolution)
  - решить проблему (solution)
  - снять проблему, изменив условия (dissolution)

# Основы линейного программирования

**Задача линейного программирования.**

Основные понятия

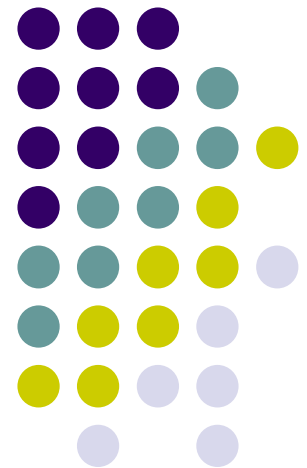
**Постановка общей задачи линейного программирования (ОЗЛП).**

Формы задачи линейного программирования

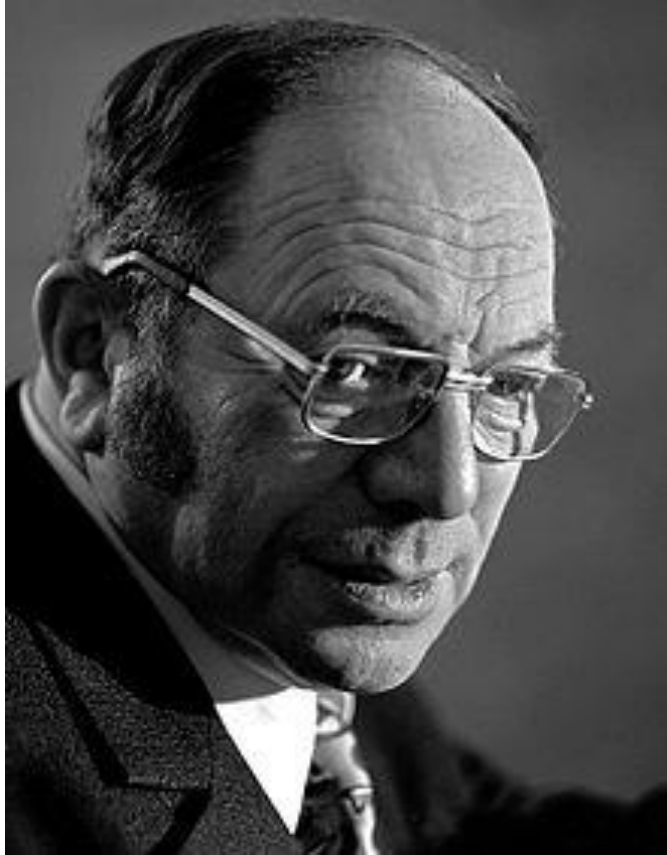
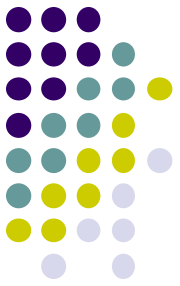
**Графический метод решения ЗЛП.**

Основные свойства задачи линейного программирования.

Примеры решения ЗЛП.



# Создатели теории линейного программирования



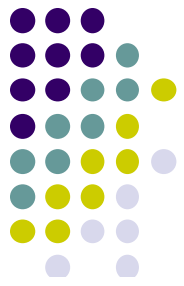
Лауреат Нобелевской премии  
1975 года «за вклад в теорию  
оптимального распределения  
ресурсов» академик АН СССР  
Л.В. Канторович (1912-1986)



Создатель алгоритма  
симплекс-метода ЗЛП  
Дж.Данциг (1914-2005)



# Задача линейного программирования. Определения



**О п р е д е л е н и е 1.** *Общей задачей линейного программирования* называется задача, которая состоит в определении максимального (минимального) значения функции  $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$  (1)

при условиях  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1, k}),$  (2)

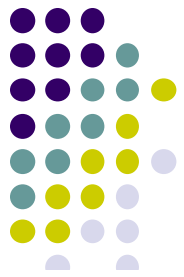
$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1, m}), \quad (2')$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, l}, l \leq n), \quad (3)$$

где  $a_{ij}, b_i, c_j$  — заданные постоянные величины и  $k \leq m$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Функция (1) называется *целевой функцией* (или *линейной формой*) задачи (1) — (3), а условия (2), (2'), (3) — *ограничениями* данной задачи.

# Задача линейного программирования. Определения



**О п р е д е л е н и е 3.** *Стандартной (или симметричной) задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1) при выполнении условий (2) и (3), где  $k = m$  и  $l = n$ .

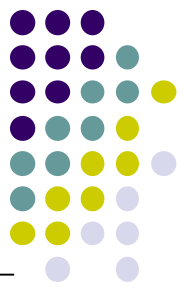
**О п р е д е л е н и е 4.** *Канонической (или основной) задачей* линейного программирования называется задача, которая состоит в определении максимального значения функции (1) при выполнении условий (2') и (3), где  $k = 0$  и  $l = n$ .

**О п р е д е л е н и е 5.** Совокупность чисел  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , удовлетворяющих ограничениям задачи (2)—(3), называется *допустимым решением (или планом)*.

**О п р е д е л е н и е 6.** План  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ , при котором целевая функция задачи (1) принимает свое максимальное (минимальное) значение, называется *оптимальным*:

$$f(x^*) \geq f(x) \quad (f(x^*) \leq f(x))$$

# Постановка задачи линейного программирования



| Типы сырья | Запасы сырья | Виды продукции |          |
|------------|--------------|----------------|----------|
|            |              | $A_1$          | $A_2$    |
| $B_1$      | $b_1$        | $a_{11}$       | $a_{12}$ |
| $B_2$      | $b_2$        | $a_{21}$       | $a_{22}$ |
| $B_3$      | $b_3$        | $a_{31}$       | $a_{32}$ |
| $B_4$      | $b_4$        | $a_{41}$       | $a_{42}$ |
| Д о х о д  |              | $c_1$          | $c_2$    |

$$f(X) = CX = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2;$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3;$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \leq b_4.$$

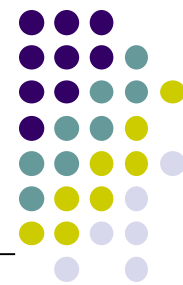
$$\text{или } AX \leq B,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

# Формы задачи линейного программирования



- Общая задача

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min(\max)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, k_1}, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = \overline{k_1 + 1, k_2}, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{k_2 + 1, m}, \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, l} (l \leq n).$$

- Основная задача

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

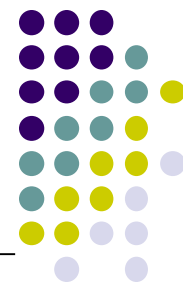
- Матричная форма

$$f(x) = CX \rightarrow \min$$

$$AX = B,$$

$$X \geq 0$$

# Симметричная (стандартная) ЗЛП



- на минимизацию

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \geq b_i, i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

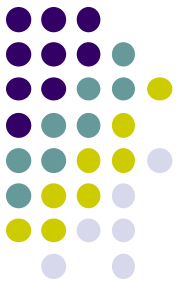
- на максимизацию

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} \leq b_i, i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

# Сведения из линейной алгебры



- упорядоченная система  $n$  действительных чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется  **$n$ -мерным вектором** с компонентами  $x_j$  ( $1 \leq j \leq n$ )
- вектор  $x_j$  ( $m < j \leq n$ ) называется **линейной комбинацией векторов**  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , если существуют такие действительные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ , что  $x_j = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$ 
  - линейно зависимый вектор является линейной комбинацией остальных векторов
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p = 0, \exists \lambda_i \mid \lambda_i \neq 0$$
  - линейная независимость векторов
$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_r x_r \neq 0, \forall \lambda_i \mid \lambda_i \neq 0$$

# Сведения из линейной алгебры



- **линейное векторное пространство**
  - $R^n : \{x, y \mid \alpha x + \beta y \in R^n\}$
- **базис (размерность  $n$ )  $n$ -мерного пространства**
  - линейно независимая система векторов  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$
- **аффинное пространство:  $A \subset L: A = L + a$** 
  - $(n-1)$ -гиперплоскость:  $(2-1)$ -прямая;  $(3-1)$ -плоскость
- **выпуклая оболочка (выпуклые многогранник, конус)**
  - $\{x \in R^n \mid x = (1-\lambda)x_0 + \lambda \bar{x}, \lambda \geq 0\}$
- **линия уровня:  $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \text{const}$**
- **градиент функции:  $\text{grad } f(x) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$**   
$$c = \nabla(c_1x_1 + \dots + c_nx_n) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

# Понятие выпуклости



а) **выпуклой комбинацией** векторов  $X_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ , называют линейную комбинацию  $\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_m X_m$  этих векторов, коэффициенты  $\lambda_k$  которой удовлетворяют условиям  $\lambda_k \geq 0$ ,  $k = \overline{1, m}$ ,  $\sum_{k=1}^m \lambda_k = 1$ ;

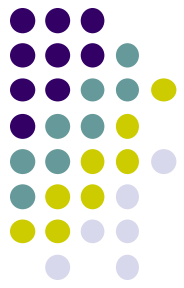
б) множество  $G \subset \mathbb{R}^n$  называют **выпуклым**, если наряду с любыми двумя элементами этого множества ему принадлежит и их произвольная выпуклая комбинация, т.е. для любых  $X_1, X_2 \in G$  и любого числа  $\lambda \in [0, 1]$  выполняется условие

$$\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2 \in G;$$

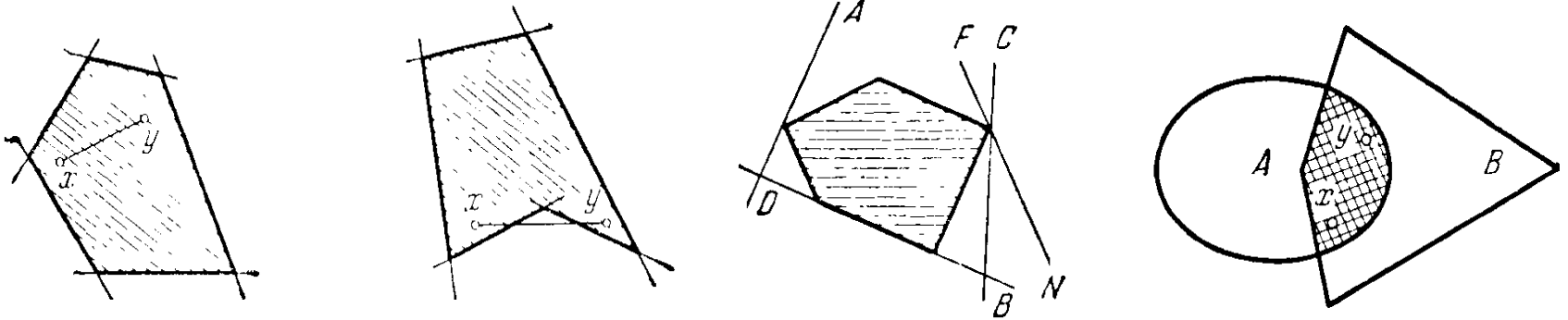
в) точку  $X_0$  выпуклого множества  $G$  называют **крайней точкой** этого **множества**, если не существует двух различных  $X_1, X_2 \in G$ , для которых

$$X_0 = \lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2, \quad 0 < \lambda < 1.$$

# Теорема о пересечении выпуклых множеств



- **Выпуклым множеством** называется такое, которое вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок.



- **Опорная прямая** имеет общую точку с многоугольником, который лежит по одну сторону от нее.
- **Теорема. Пересечение выпуклых множеств есть выпуклое множество.**

# Постановка задачи линейного программирования



| Типы сырья | Запасы сырья | Виды продукции |          |
|------------|--------------|----------------|----------|
|            |              | $A_1$          | $A_2$    |
| $B_1$      | $b_1$        | $a_{11}$       | $a_{12}$ |
| $B_2$      | $b_2$        | $a_{21}$       | $a_{22}$ |
| $B_3$      | $b_3$        | $a_{31}$       | $a_{32}$ |
| $B_4$      | $b_4$        | $a_{41}$       | $a_{42}$ |
| Д о х о д  |              | $c_1$          | $c_2$    |

$$f(X) = CX = c_1x_1 + c_2x_2$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2;$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3;$$

$$a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \leq b_4.$$

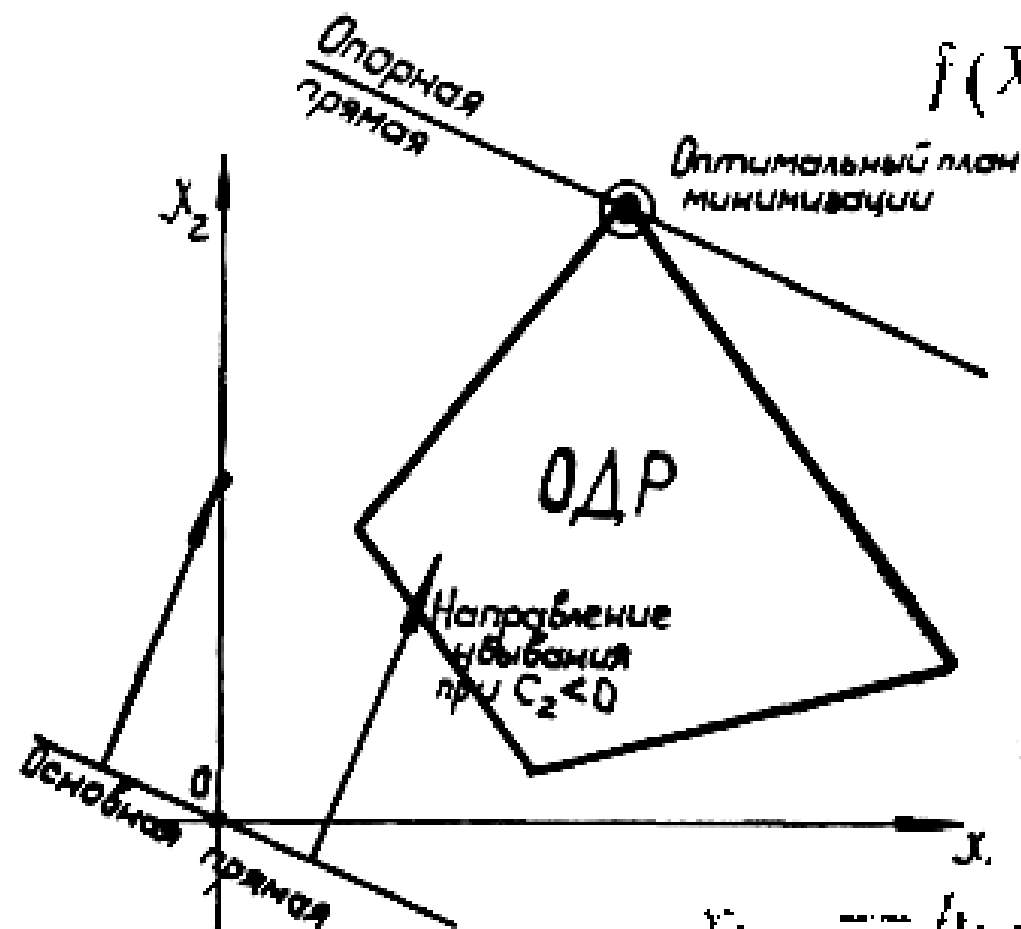
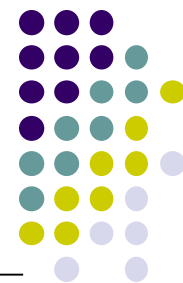
$$\text{или } AX \leq B,$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix};$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}.$$

# Графическое решение ЗЛП при $n - \text{rang } A_{m \times n} = 2$



$$f(X) = CX = c_1x_1 + c_2x_2 \quad (1)$$

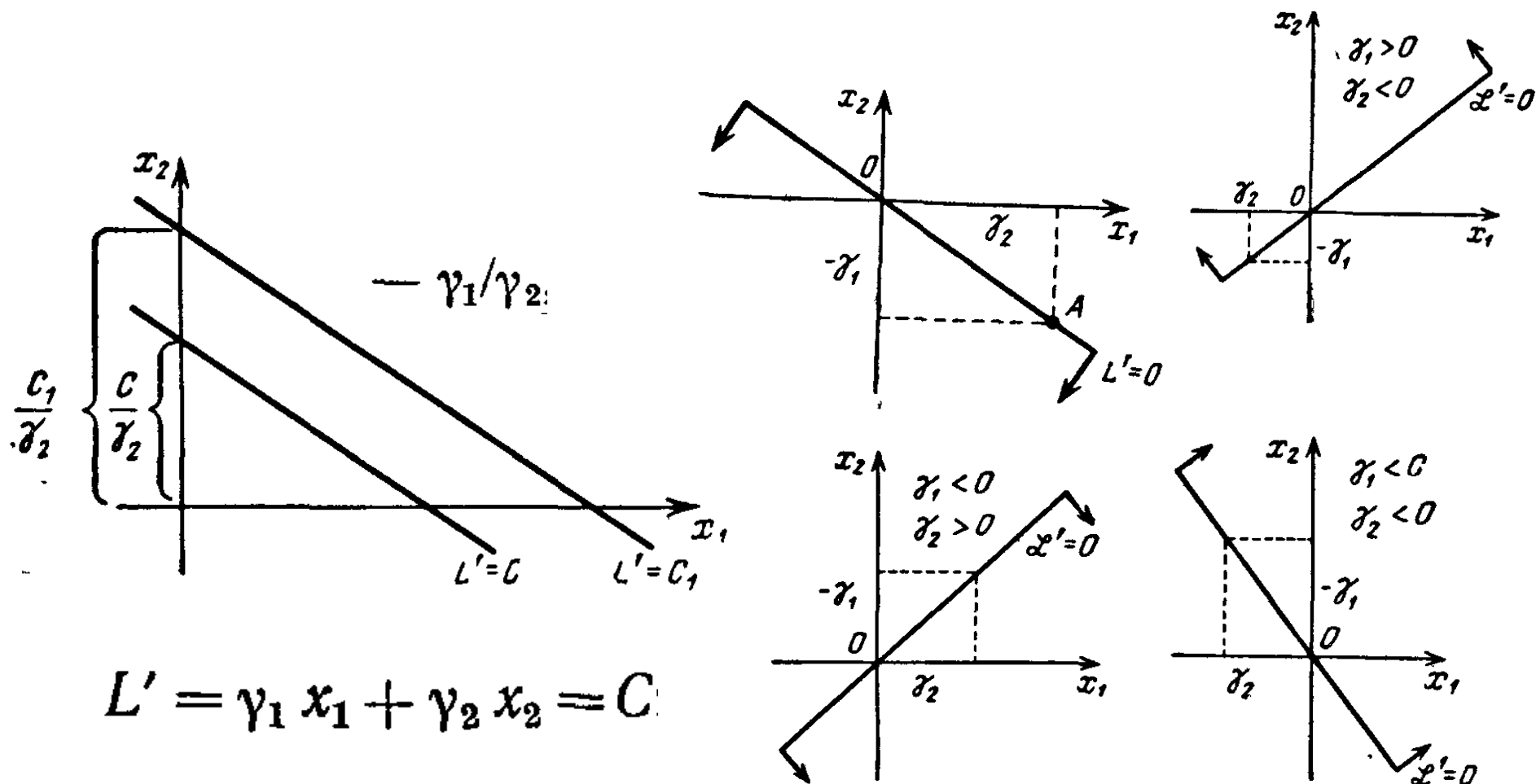
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leq b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leq b_3; \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 &\leq b_4. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\Updownarrow (x_j \geq 0) \quad (3)$$

$$x_{k+1} = b_i - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 \geq 0;$$

$$k = 2 \quad (i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}) \quad m = r$$

# Построение опорной прямой при минимизации целевой функции $f(x)$



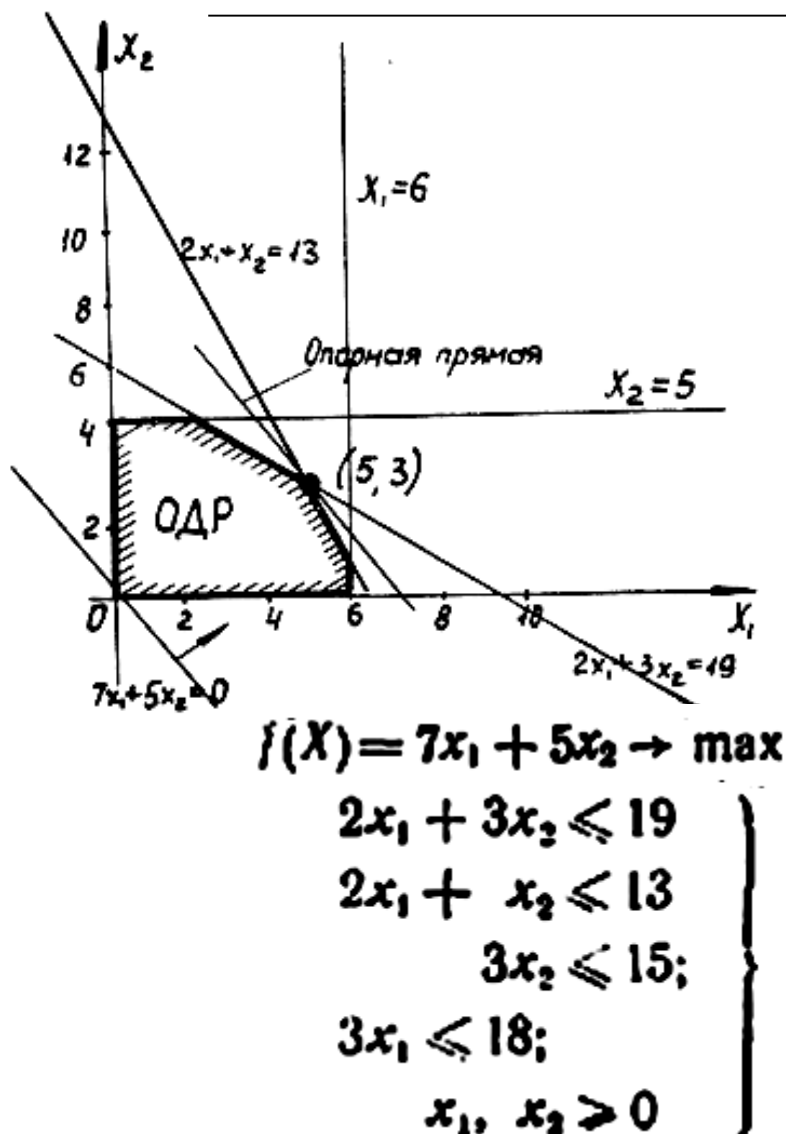
# Алгоритм графоаналитического метода решения ЗЛП



- 1. Построить область допустимых решений (ОДР). (Если  $ОДР = \emptyset$ , ЗЛП не имеет смысла):**
  - выбрать независимые свободные переменные и выразить через них базисные в целевой функции и ограничениях
  - построить прямые для ограничений-равенств
  - найти полуплоскости для ограничений-неравенств
  - построить многоугольник пересечения полуплоскостей
- 2. Построить в начале координат градиент целевой функции  $\text{grad } f(x) = (c_1, c_2)$ ;**
- 3. Построить основную прямую  $f(x=0)$ ;**
- 4. Построить с использованием градиента опорную прямую  $f(x^*) = \max(\min) f(x)$ ;**
- 5. Классифицировать экстремумы целевой функции (общие точки ОП и ОДР);**
- 6. Определить координаты  $x^*$  точки  $\max(\min) f(x)$  и вычислить значение  $f(x^*)$ .**

# Графическое решение ЗЛП.

## Пример



| Тип сырья | Запасы сырья | Виды продукции |       |
|-----------|--------------|----------------|-------|
|           |              | $A_1$          | $A_2$ |
| $B_1$     | 19           | 2              | 3     |
| $B_2$     | 13           | 2              | 1     |
| $B_3$     | 15           | 0              | 3     |
| $B_4$     | 18           | 3              | 0     |
| Д о х о д |              | 7 р            | 5 р   |

$$2x_1 + 3x_2 = 19$$

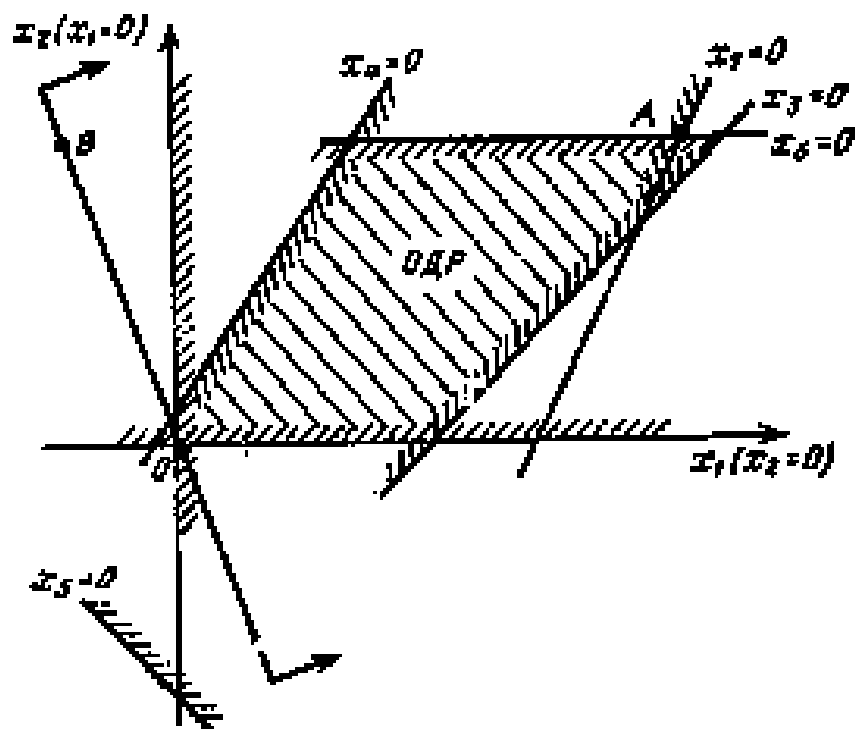
$$2x_1 + x_2 = 13;$$

$$X^0 = (5, 3);$$

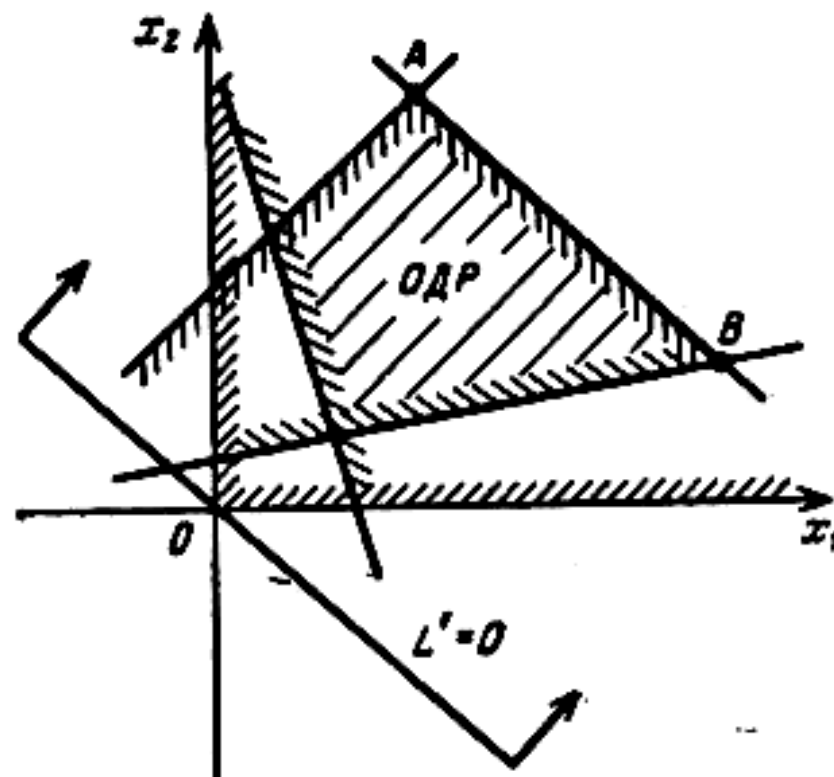
$$\max f(X) = f(X^0) =$$

$$= 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50$$

# Свойства решений задачи линейного программирования

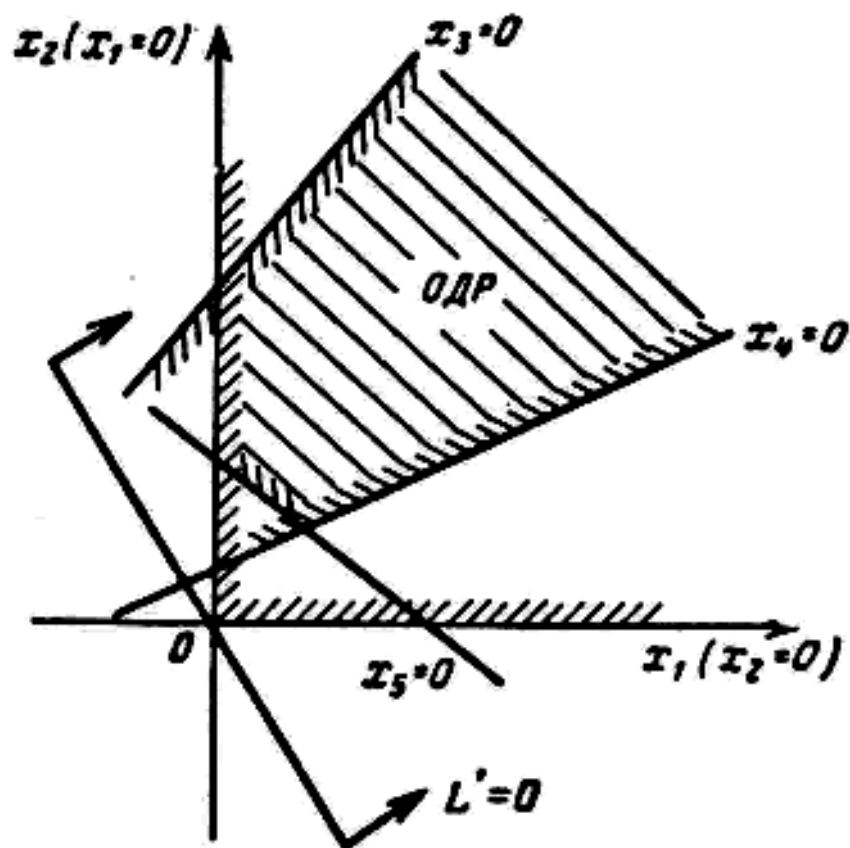


Единственное решение

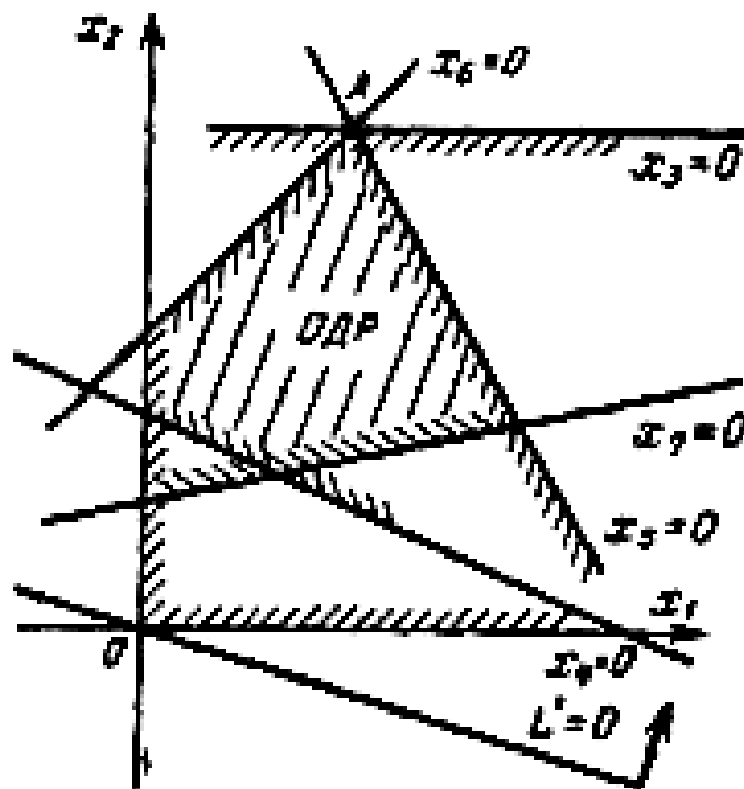


Бесконечное множество решений

# Свойства решений задачи линейного программирования

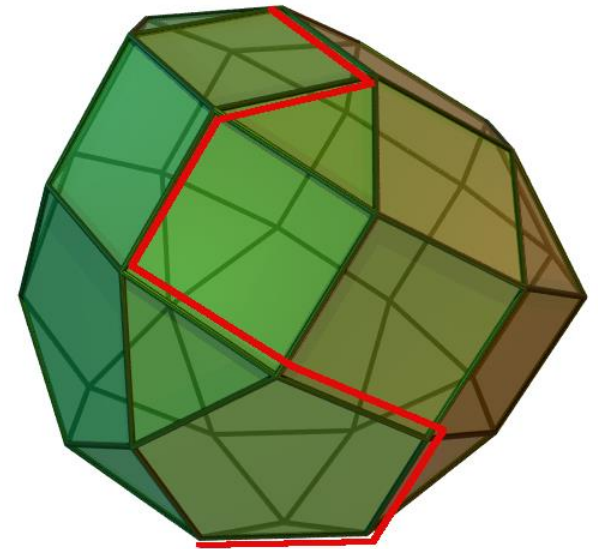
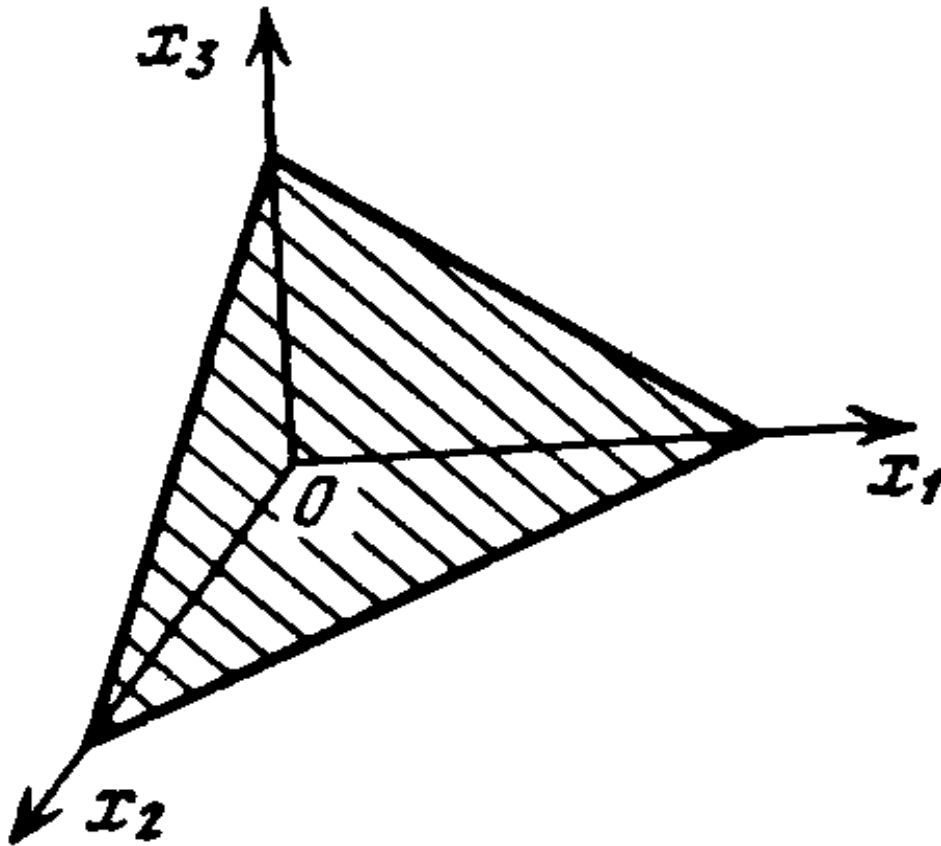
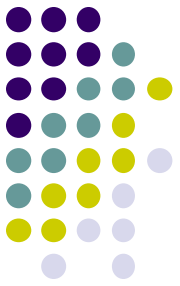


Неограниченное решение



Вырожденный случай

# Область допустимых решений ЗЛП при $n-m \geq 3$



# Теорема об области определения ЗЛП

---



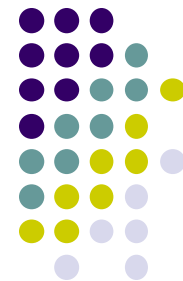
**Теорема 1.** Множество допустимых решений (ОДР), определяемое системой смешанных ограничений:

$$AX \leq B;$$

$$AX = B$$

**является выпуклым множеством (многогранником).**

# Теорема об оптимальном плане ЗЛП



**Теорема 2. Линейная форма (целевая функция )**

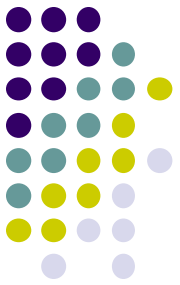
$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j = (c, x),$$

**определенная на выпуклом многограннике:**

$$AX \leq B; X \geq 0,$$

**достигает своего экстремума в вершине  
этого многогранника.**

# Теорема о существовании оптимального плана ЗЛП

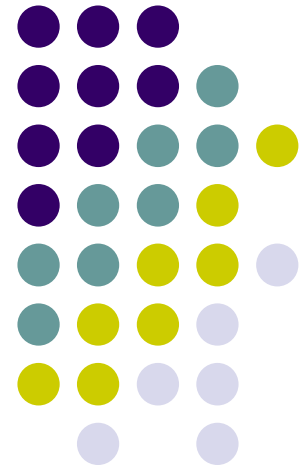


**Теорема 3.** Для того, чтобы задача ЛП была разрешимой, необходимо и достаточно выполнение условий:

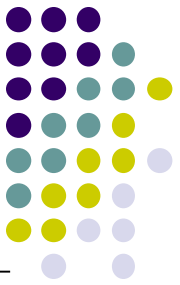
- 1) множество допустимых планов непусто;**
- 2) линейная форма ограничена на этом множестве:**
  - сверху для задачи максимизации;**
  - снизу для задачи минимизации.**

# Примеры решения

## Графический метод решения задач линейного программирования



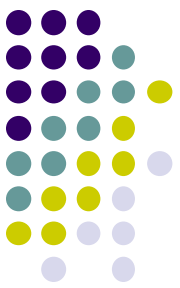
# Формулировка основной ЗЛП



$$\langle X^*, f(X^*) \rangle: X^* = \{x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)\} = \\ = \text{Arg } f(x^*) = \{ \arg \text{extr } f(x) = \sum_j c_j x_j \mid \\ g_i(x) = \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i, i=1, \dots, m) \}$$

- $X$  – область допустимых решений  $x \in X$
- $x^*$  – оптимальные значения  $x$
- $f(x)$  – целевая функция оценки качества  $x$
- $f(x^*)$  – экстремальное значение  $f(x)$
- $g_i(x)$  – ограничения области  $X$  допустимых решений  $x$

# Решение ЗЛП



Решить задачу  $f(x) \rightarrow \min_{\vec{x} \in X}$  означает одно из:

1. Показать, что  $X = \emptyset$ .
2. Показать, что целевая функция  $f(\vec{x})$  не ограничена снизу.
3. Найти  $\vec{x}^* \in X : f(\vec{x}^*) = \min_{\vec{x} \in X} f(\vec{x})$ .
4. Если  $\nexists \vec{x}^*$ , то найти  $\inf_{\vec{x} \in X} f(\vec{x})$ .

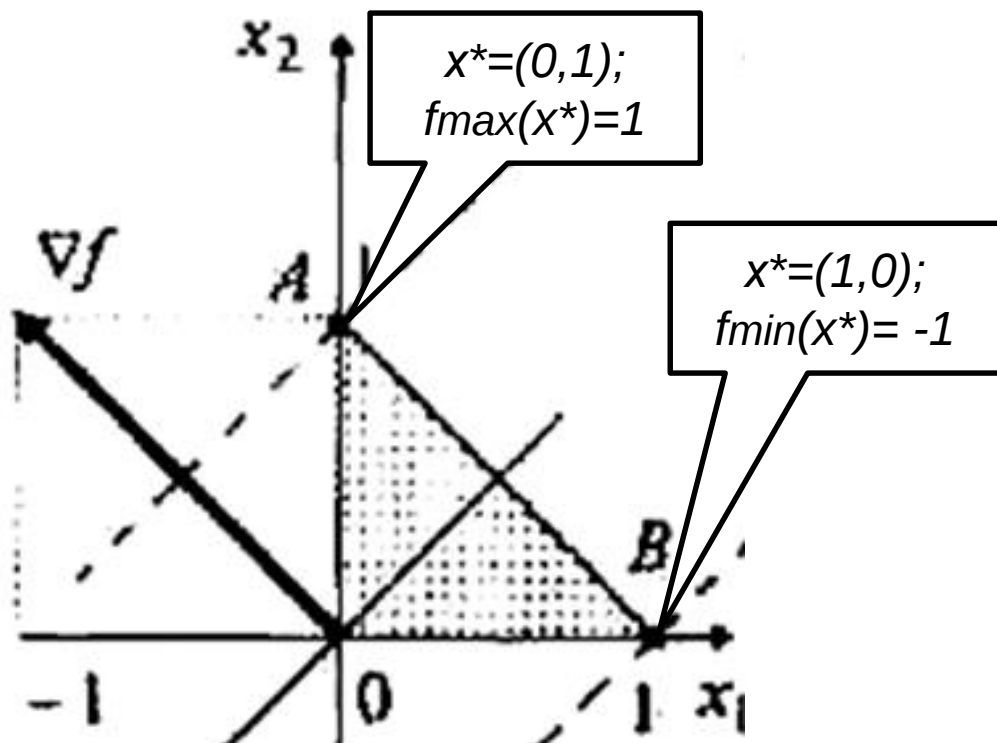
# Графический метод решения ЗЛП. Пример 1а,б



а)  $f(x) = -x_1 + x_2 \rightarrow \text{extr}$ ,

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

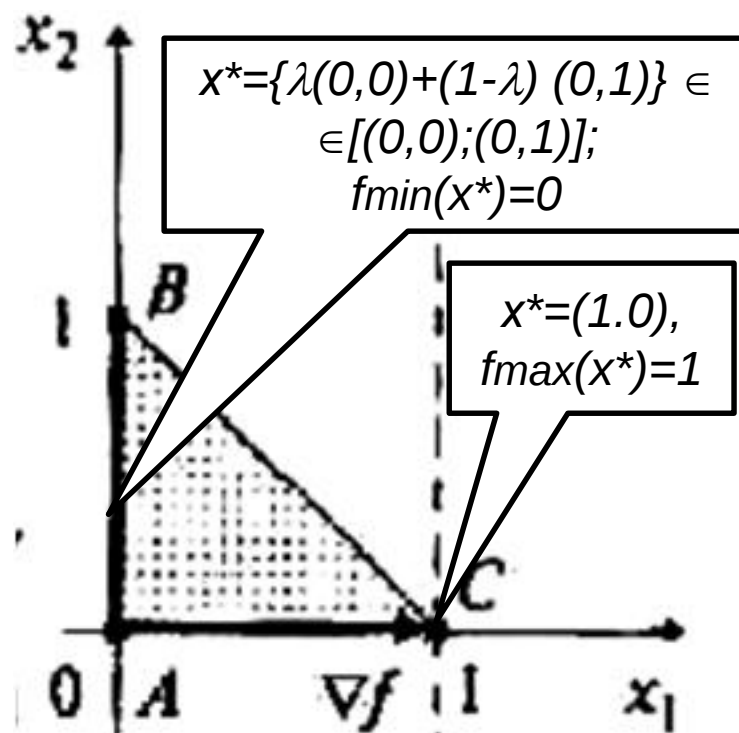
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$



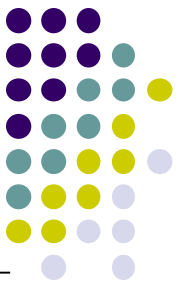
б)  $f(x) = x_1 \rightarrow \text{extr}$ ,

$$x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0;$$

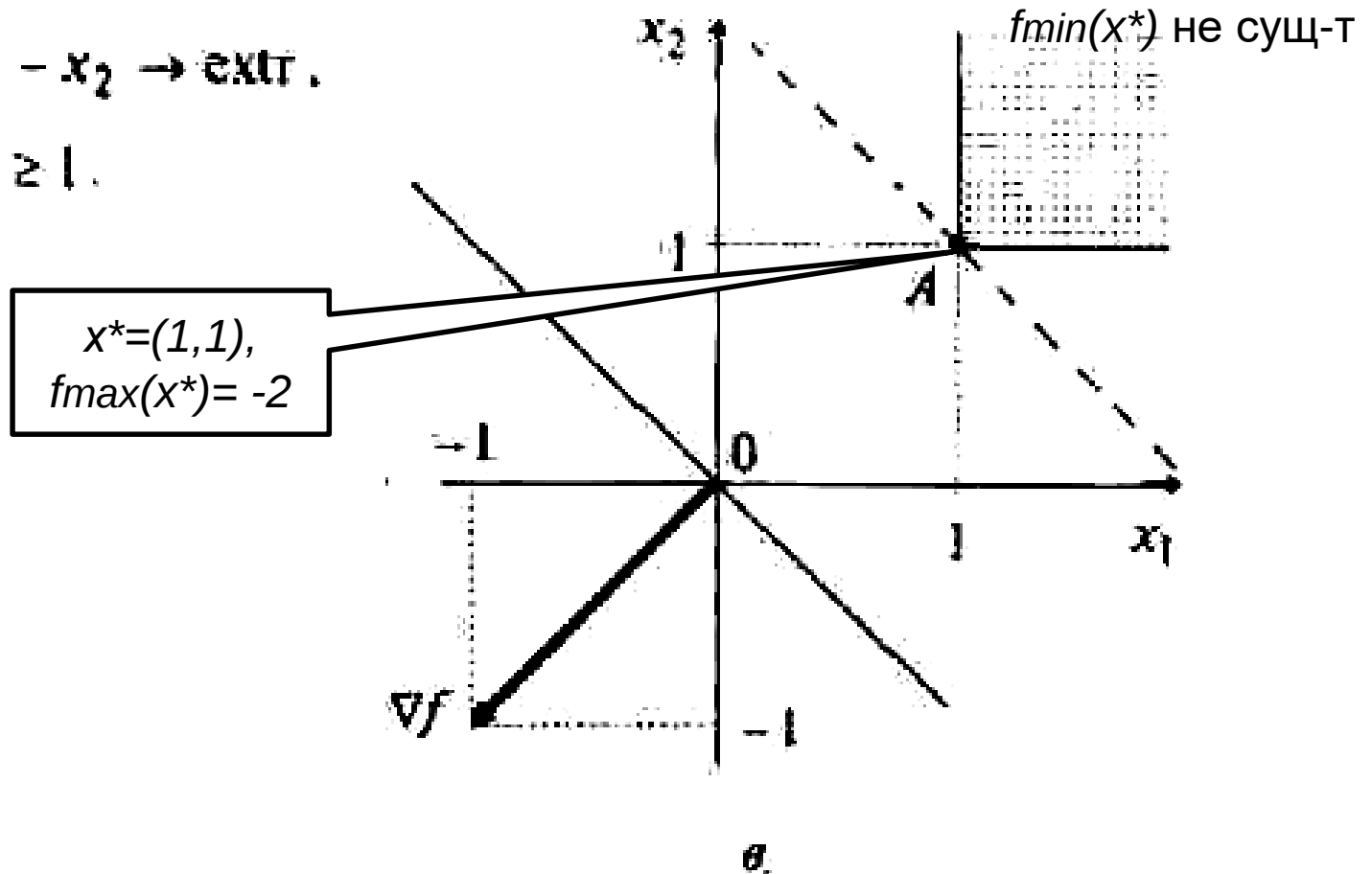


# Графический метод решения ЗЛП. Пример 1в

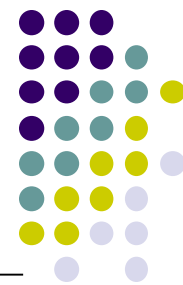


В)  $f(x) = -x_1 - x_2 \rightarrow \text{ext.}$

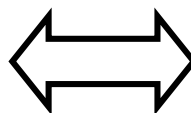
$x_1 \geq 1, x_2 \geq 1.$



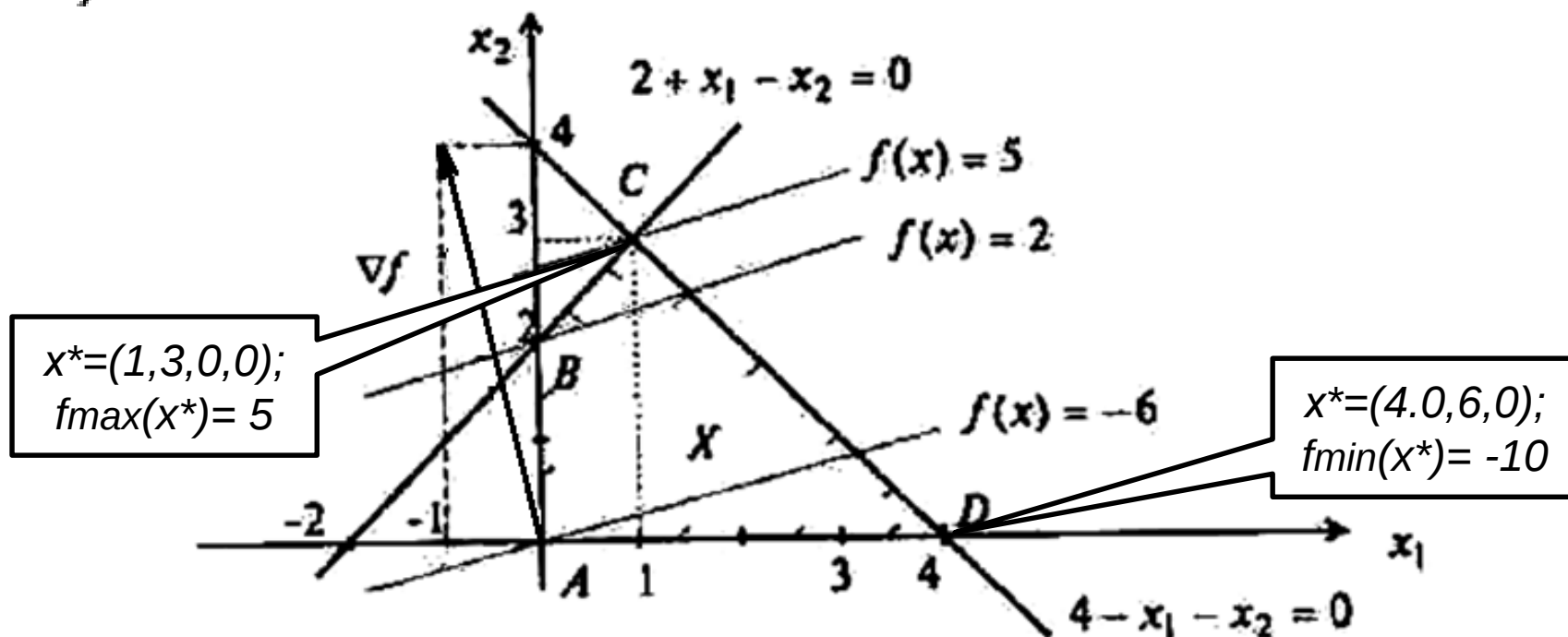
# Графический метод решения ЗЛП. Пример 2



$$\begin{aligned}
 f(x) &= -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \rightarrow \text{extr}, \\
 -x_1 + x_2 + \underline{x_3} &= 2, \\
 x_1 + x_2 + \underline{x_4} &= 4, \\
 x_j &\geq 0, \quad j = 1, \dots, 4.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 f(x) &= -6 - x_1 + 4x_2 \rightarrow \text{extr}, \\
 2 + x_1 - x_2 &\geq 0, \\
 4 - x_1 - x_2 &\geq 0, \\
 x_1 &\geq 0, \quad x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$



# **Метод последовательного улучшения плана**

**Основная задача ЛП**

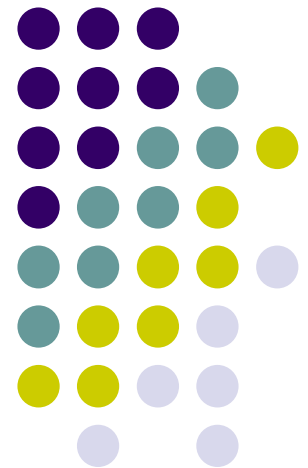
**Правила перехода к основной ЗЛП**

**Метод последовательного  
улучшения плана**

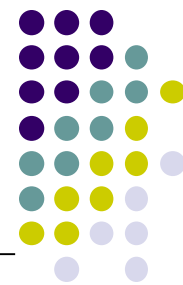
**Алгебраические основы. Алгоритм симплекс-метода**

**М-метод искусственного базиса**

**Выполнение расчетов в среде Excel**



# Формы задачи линейного программирования



- Общая задача ЛП

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min(\max)$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, k_1}, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, i = \overline{k_1 + 1, k_2}, \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{k_2 + 1, m}, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, l} (l \leq n).$$

- Основная задача (ОЗЛП)

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

- Матричный вид ОЗЛП

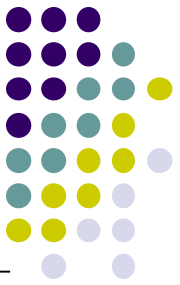
$$f(x) = CX \rightarrow \min$$

$$AX = B,$$

$$X \geq 0$$

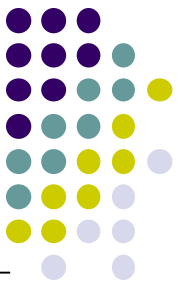
# Переход к основному виду ЗЛП

---



- **Переход от максимизации к минимизации**
- **Переход к эквивалентной системе неравенств**
- **Обращение неравенства в равенство**
- **Обращение равенства в неравенство**
- **Переход к неотрицательным переменным**

# Правила перехода к основной ЗЛП



- Переход от максимизации к минимизации

$$\max F = \min(-F) \Leftrightarrow \max \sum_{j=1}^n c_j x_j = \min \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$$

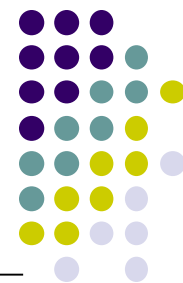
- Переход к эквивалентной системе неравенств

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (-a_j) x_j \geq -b$$

- Пример.  $1x_1 - 1x_2 \leq -4$

$$\Leftrightarrow -1x_1 + 1x_2 \geq 4.$$

# Правила перехода к основной ЗЛП



- Обращение неравенства в равенство

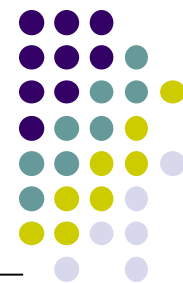
$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \iff \sum_{j=1}^n a_j x_j + 1s = b, \quad \text{где } s \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b \iff \sum_{j=1}^n a_j x_j - 1t = b, \quad \text{где } t \geq 0$$

- Пример.  $7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120 \iff$   
 $7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 1y = 120, \quad \text{где } y \geq 0$

- Пример.  $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geq 1250 \iff$   
 $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 1a = 1250, \quad \text{где } a \geq 0.$

# Правила перехода к форме основной ЗЛП



- Обращение равенства в неравенство

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad -\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq -b_i$$

- Пример.

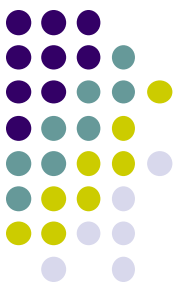
$$\begin{array}{rcl} 1x_1 + 1x_2 & & \leq 1, \\ 1x_1 + 1x_2 & = & 1, \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1 - 4x_3 \leq -5, \\ 2x_1 - 4x_3 & = & -5 \quad \quad \quad -3x_1 - 1x_2 + 4x_3 \leq 4. \end{array}$$

- Переход к неотрицательным переменным

$$x_j \equiv x'_j - x''_j, \quad \text{где } x'_j \geq 0 \quad \text{и} \quad x''_j \geq 0.$$

# Переход к ОЗЛП.

## Пример



- $$f(x) = 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 7,$$

$$-3x_2 + 4x_3 - 5x_4 - 4x_5 \leq 2,$$

$$3x_1 - 5x_3 + 6x_4 - 2x_5 \leq 4,$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.$$
- $$f'(x') = 5x_1 + 3\bar{x}_2 - 3\bar{\bar{x}}_2 + x_3 + 2\bar{x}_4 - 2\bar{\bar{x}}_4 - 2\bar{x}_5 + 2\bar{\bar{x}}_5 + 0x'_2 + 0x'_3 \rightarrow \max$$

$$2x_1 + 4\bar{x}_2 - 4\bar{\bar{x}}_2 + 5x_3 = 7,$$

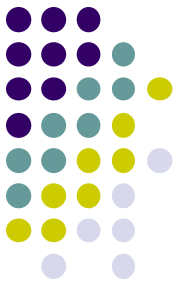
$$-3\bar{x}_2 + 3\bar{\bar{x}}_2 + 4x_3 - 5\bar{x}_4 + 5\bar{\bar{x}}_4 - 4\bar{x}_5 + 4\bar{\bar{x}}_5 + x'_2 = 2,$$

$$3x_1 - 5x_3 + 6\bar{x}_4 - 6\bar{\bar{x}}_4 - 2\bar{x}_5 + 2\bar{\bar{x}}_5 + x'_3 = 4,$$

$$x_1 \geq 0, \bar{x}_2 \geq 0, \bar{\bar{x}}_2 \geq 0, x_3 \geq 0, \bar{x}_4 \geq 0, \bar{\bar{x}}_4 \geq 0, \bar{x}_5 \geq 0, \bar{\bar{x}}_5 \geq 0,$$

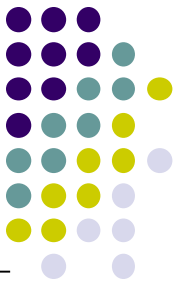
$$x'_2 \geq 0, x'_3 \geq 0.$$

# Основные понятия симплекс-метода



- Допустимым решением ЗЛП называется такой набор  $n$  неотрицательных значений переменных  $x_j$ , который удовлетворяет всем  $m$  ограничениям задачи.
- Базисом называется набор из  $m$  переменных (по числу линейно-независимых ограничений ЗЛП), которые выражены через остальные переменные. Эти  $m$  переменных называются базисными, а  $n-m$  переменных – небазисными (свободными) переменными.
- Базисное решение – такое решение, в котором все  $n-m$  свободных переменных имеют нулевые значения, а значения  $m$  базисных переменных равны свободным членам  $b_i$  системы ограничений.

# Метод Жордана-Гаусса. Алгебраические основы



$$AX = B$$



$$D\bar{X} + S\tilde{X} = B$$

$$X = \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \tilde{X} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{pmatrix}; \tilde{X} = \begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \dots \\ x_{m+k} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} & a_{1m+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2m} & a_{2m+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} & a_{mm+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_D$ 
 $\underbrace{\hspace{10em}}_S$

$$\bar{X} = D^{-1}B - D^{-1}S\tilde{X} \Leftrightarrow \bar{X} = \beta - \alpha\tilde{X}$$

$$X_{\beta \alpha \tilde{X}} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, 0, 0, \dots, 0)$$

$$x_i + \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij} x_j = \beta_i, i=1, \dots, m$$

$$A^* X = \beta \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & \alpha_{1m+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{2m+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & \alpha_{mm+1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}}_m \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{1m+1} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{2m+1} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{mm+1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}}_{n-m} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

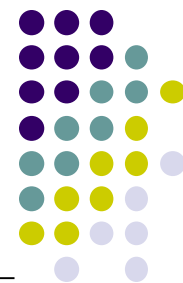
(1)

$$\text{zde } c_0^* = \sum_{i=1}^m c_i b_i, \quad c_j^* = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j$$

(2)

(3)

# Условия улучшения опорного плана

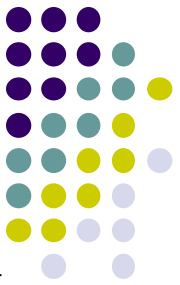


- **Улучшение плана.** Для наибольшего изменения целевой функции в задаче минимизации (максимизации) изменяется переменная с наибольшим положительным (отрицательным) коэффициентом в линейной форме целевой функции:

$$f(X) = c_0^* - \sum_{j=m+1}^n c_j^* x_j \rightarrow \text{min},$$

$$\text{где } c_0^* = \sum_{i=1}^m c_i b_i, \quad c_j^* = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j$$

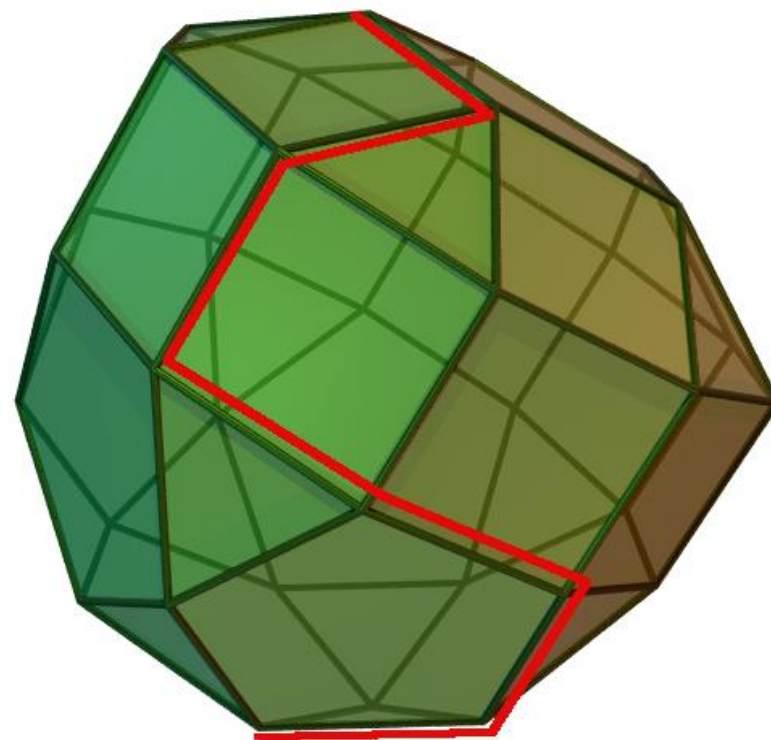
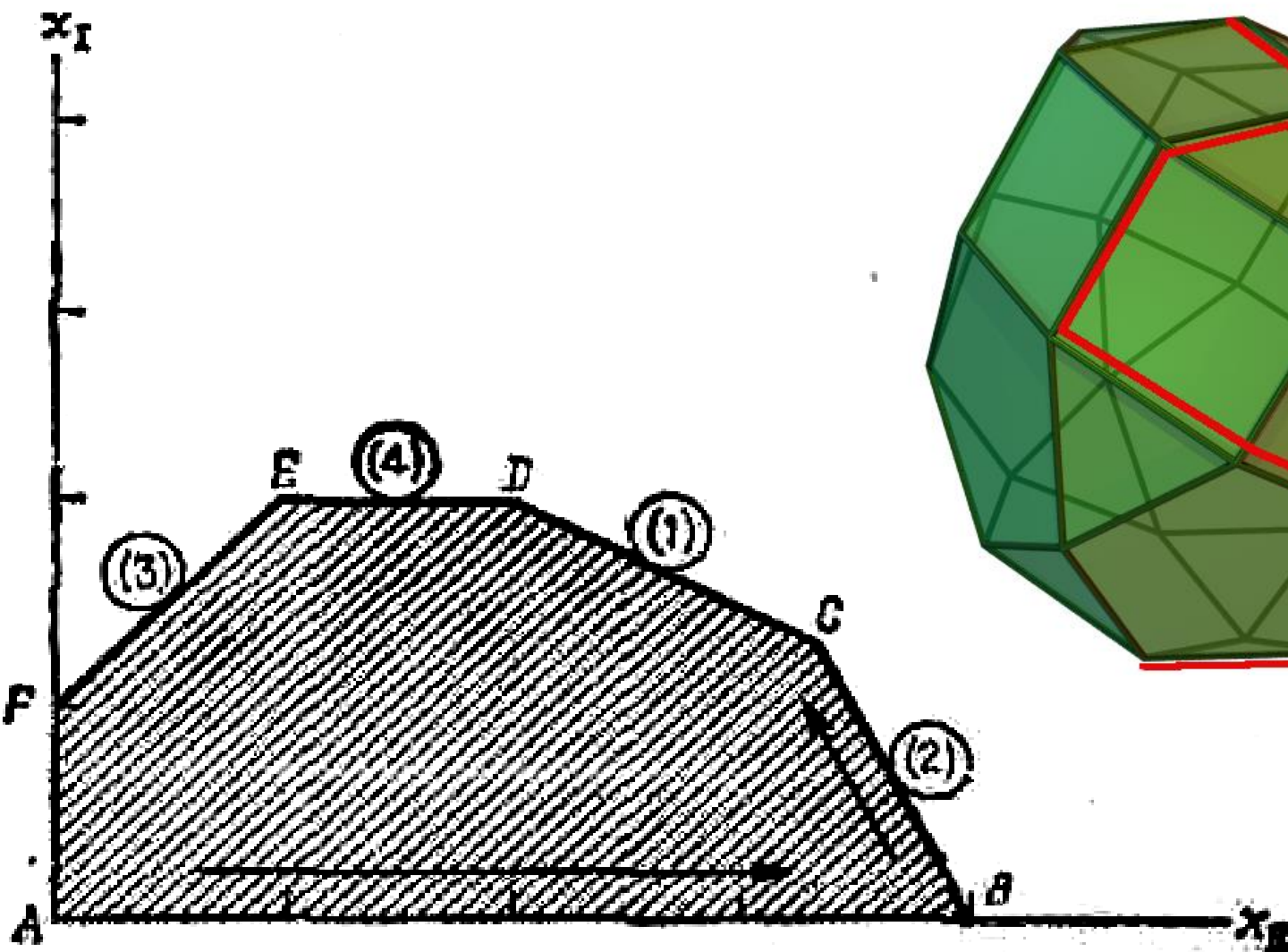
# Условия улучшения опорного плана



- **Допустимость плана.** Для неотрицательности изменяемой переменной ее значение равно минимальному из отношений  $\min \beta_i / \alpha_{ip}$  свободного члена к положительным коэффициентам при ней в системе ограничений:

$$x_i = \beta_i - \sum_{j=m+1}^n \alpha_{ij} x_j \geq 0, i = 1, \dots, m$$

# Идея симплекс-метода



# Метод последовательного улучшения плана. Симплексная таблица



|         | Базисные<br>перемен-<br>ные | Свобод-<br>ные<br>члены | $c_1$ | $\dots$ | $c_m$ | $c_{k+1}$       | $\dots$ | $c_p$         | $\dots$ | $c_n$         |
|---------|-----------------------------|-------------------------|-------|---------|-------|-----------------|---------|---------------|---------|---------------|
|         |                             |                         | $x_1$ | $\dots$ | $x_m$ | $x_{k+1}$       | $\dots$ | $x_p$         | $\dots$ | $x_n$         |
| $c_1$   | $x_1$                       | $\beta_1$               | 1     | $\dots$ | 0     | $\alpha_{1k+1}$ | $\dots$ | $\alpha_{1p}$ | $\dots$ | $\alpha_{1n}$ |
| $\dots$ | $\dots$                     | $\dots$                 | 0     | $\dots$ | 0     | $\dots$         | $\dots$ | $\dots$       | $\dots$ | $\dots$       |
| $c_q$   | $x_q$                       | $\beta_q$               | 0     | $\dots$ | 0     | $\alpha_{qk+1}$ | $\dots$ | $\alpha_{qp}$ | $\dots$ | $\alpha_{qn}$ |
| $\dots$ | $\dots$                     | $\dots$                 | 0     | $\dots$ | 0     | $\dots$         | $\dots$ | $\dots$       | $\dots$ | $\dots$       |
| $c_m$   | $x_m$                       | $\beta_m$               | 0     | $\dots$ | 1     | $\alpha_{mk+1}$ | $\dots$ | $\alpha_{mp}$ | $\dots$ | $\alpha_{mn}$ |
|         | $f(X)$                      | $c_0^*$                 | 0     | $\dots$ | 0     | $c_{k+1}^*$     | $\dots$ | $c_p^*$       | $\dots$ | $c_n^*$       |

$$f(X) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = c_0^* - \sum_{j=m+1}^n c_j^* x_j$$

$$c_0^* = \sum_{i=1}^m c_i \beta_i; \quad c_j^* = \sum_{i=m+1}^n c_i \alpha_{ij} - c_j$$

# Структура симплексной таблицы канонической задачи



- индексная строка содержит коэффициенты  $C_i$  целевой функции и базисное решение  $f(X)$  в столбце свободных членов  $b_i$
- столбец базисных переменных содержит опорный план  $X$  с неотрицательными переменными  $x_j$
- столбцы  $X_j$  содержат коэффициенты системы ограничений при базисных  $x_j$  ( $j=1, \dots, k$ ) и свободных переменных  $x_j$  ( $j=k+1, \dots, m$ )
- столбец  $B$  свободных переменных содержит неотрицательные правые части  $b_i$  системы ограничений

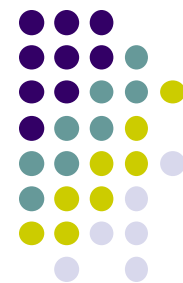
# Теорема об оптимальности базисного плана



**Теорема 1. Если все коэффициенты  $c_j$  ( $j=m+1, m+2, \dots, n$ ) целевой функции  $f(x)$  канонической задачи минимизации неположительны ( $c_j \leq 0$ ), то базисный план  $x^*$  оптимален:**

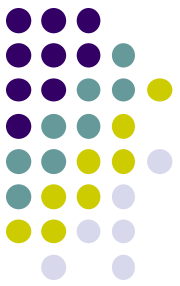
$$f_{\min} = f(x^*) = c_1 x_1^* + c_2 x_2^* + \dots + c_n x_n^* = c_0^* - \sum_{j=m+1}^n c_j^* x_j$$

# Теорема об отсутствии оптимального плана



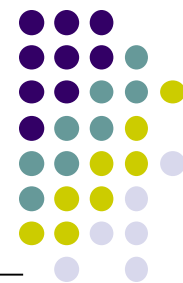
**Теорема 2. Если в симплексной таблице среди коэффициентов  $c_j$  ( $j=1,2,\dots,k$ ) целевой функции  $f(x)$  есть хотя бы один положительный  $c_p > 0$ , а в соответствующем  $p$ -ом столбце нет положительных коэффициентов  $\alpha_{ip}$ , то ЗЛП не имеет решения, так как целевая функция не ограничена снизу, т.е.  $f_{\min}$  не существует.**

# Теорема об улучшении базисного плана

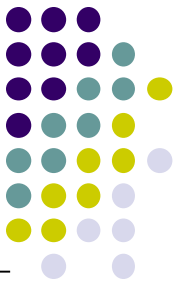


**Теорема 3. Если в симплексной таблице среди коэффициентов целевой функции  $f(x)$  есть положительный коэффициент  $c_r > 0$  и в  $r$ -ом столбце среди коэффициентов  $\alpha_{ir}$  ( $i=1, 2, \dots, m$ ) свободных переменных  $x_j$  есть положительные  $\alpha_{ir} > 0$  и отношение  $\beta_i / \alpha_{ir}$  свободных членов  $\beta_i$  к этим положительным коэффициентам  $\alpha_{ir}$  положительно, то новый базисный план, полученный при замене свободной неизвестной  $x_r$  на базисную неизвестную  $x_q$  с номером  $q$  строки, соответствующей наименьшему отношению  $\min(\beta_i / \alpha_{ir})$ , улучшает целевую функцию  $f(x_{\text{нов}}) \leq f(x_{\text{стар}})$ .**

# Метод последовательного улучшения плана. Алгоритм

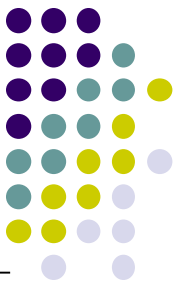


# Алгоритм преобразования симплексной таблицы



- 1) найти разрешающий элемент на пересечении ключевого столбца и ключевой строки и разделить на него всю строку;
- 2) преобразовать остальные элементы таблицы и строку коэффициентов по правилу двух перпендикуляров:  $a_{ij} - \frac{a_{ip} \cdot a_{qj}}{a_{qp}}$
- 3) переписать таблицу с новыми значениями и поменяв ключевые строку и столбец местами.

# Метод последовательного улучшения плана. Пример



| Свободные члены  |                   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$          | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$           |                |
|------------------|-------------------|-------|-------|----------------|-------|-------|-----------------|----------------|
| Ключевой столбец | $x_1$             | 12    | 1     | 0              | 0     | -2    | 3               | -7             |
|                  | $\leftarrow x_2$  | 8     | 0     | 1              | 0     | 2     | 1               | -3             |
|                  | $x_3$             | 7     | 0     | 0              | 1     | 1     | 4               | -5             |
|                  | $f$               | 15    | 0     | 0              | 0     | 8     | -8              | -2             |
| Ключевая строка  | $x_1$             | 20    | 1     | 1              | 0     | 0     | 4               | -10            |
|                  | $\rightarrow x_4$ | 4     | 0     | $\frac{1}{2}$  | 0     | 1     | $\frac{1}{2}$   | $-\frac{3}{2}$ |
|                  | $x_3$             | 3     | 0     | $-\frac{1}{2}$ | 1     | 0     | $\frac{7}{2}$   | $-\frac{7}{2}$ |
|                  | $f$               | 3     | 0     | $-\frac{3}{2}$ | 0     | 0     | $-\frac{19}{2}$ | $\frac{5}{2}$  |

$$f(X) = -3x_4 + 8x_5 + 2x_6 + 15 \rightarrow \min;$$

$$x_1 - 2x_4 + 3x_5 - 7x_6 = 12;$$

$$x_2 + 2x_4 + x_5 - 3x_6 = 8;$$

$$x_3 + x_4 + 4x_5 - 5x_6 = 7;$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, 6}).$$

Задача  
не имеет  
решения

$$(c_6 > 0, \text{ все } a_{i6} \leq 0)$$

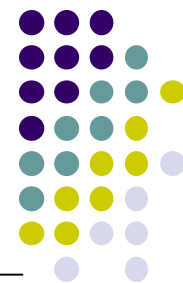
# Правило двух перпендикуляров для симплексной таблицы



- Каждый элемент  $a_{ij \text{ нов}}$  новой таблицы, кроме элементов ключевой  $q$ -ой строки, равен разности между соответствующим элементом  $a_{ij}$  исходной таблицы и отношением произведения элементов  $a_{qj}$  и  $a_{ip}$  в основаниях перпендикуляров, опущенных из элемента  $a_{ij}$  старой таблицы на ключевой  $p$ -ый столбец и на ключевую  $q$ -ую строку, к ключевому элементу  $a_{qp}$ :

$$a_{ij \text{ нов}} = a_{ij} - \frac{a_{qj} a_{ip}}{a_{qp}}$$

# Метод последовательного улучшения плана. Пример



| Свободные члены |       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$           | $x_5$ |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-----------------|-------|
| 2               | $x_1$ | 10    | 1     | 2     | 0               | 6     |
| -5              | $x_3$ | 8     | 0     | -3    | 1               | 2     |
| -2              | $x_4$ | 6     | 0     | 3     | 0               | 3     |
| -32             |       | 0     | 17    | 0     | 0               | -7    |
| 2               | $x_1$ | 6     | 1     | 0     | 0               | 4     |
| -5              | $x_3$ | 14    | 0     | 0     | 1               | 5     |
| -4              | $x_2$ | 2     | 0     | 1     | 0               | 1     |
| -66             |       | 0     | 0     | 0     | $-\frac{17}{3}$ | -24   |

$$f(X) = 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 \rightarrow \min;$$

$$x_1 + 2x_2 + 6x_5 = 10;$$

$$-3x_2 + x_3 + 2x_5 = 8;$$

$$3x_2 + x_4 + 3x_5 = 6.$$

$$x_j \geq 0 \quad (j \in \{1, 2, 3, 4, 5\});$$

$$f(X) = -66 \quad x_1 = 6$$

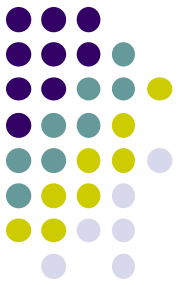
$$x_2 = 2$$

$$x_3 = 14$$

$$x_4 = 0$$

$$x_5 = 0$$

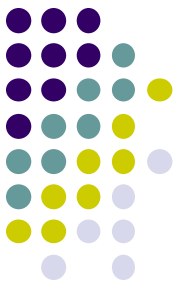
# Дополнительная информация симплекс-таблицы



- **Статус ресурса**
  - дефицитный – дополнительная переменная равна нулю, ресурс использован полностью
  - недефицитный - дополнительная переменная положительная
- **Неограниченность решения : модель некорректна**
  - во всех ограничениях коэффициенты перед переменной  $x_j$  отрицательны или равны нулю
- **Цена единицы ресурсов (двойственные цены).**
- **Данные, необходимые для проведения анализа чувствительности оптимального решения.**

# Метод искусственного базиса.

## Вспомогательная задача



$$f(x) = c_1x_1 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

. . . . .

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}),$$

$$b_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}), \quad m < n$$

$$\varphi = -Mx_{n+1} - \dots - Mx_{n+m} \rightarrow \max$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2,$$

. . . . .

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n+m}),$$

$$X = (0; \underbrace{0; \dots; 0}_n; b_1; b_2; \dots; b_m)$$

n нулей

# М-метод искусственного базиса.

## Алгебраические основы



Основная задача

$$f(X) = CX \rightarrow \min:$$

$$AX = B;$$

$$X \geq 0.$$

Вспомогательная задача

$$\varphi(\bar{X}) = \sum_{s=1}^m X_{n+s} \rightarrow \min;$$

$$\bar{A}\bar{X} = B \ (B \geq 0);$$

$$\bar{X} \geq 0.$$

$$(I) \quad AX = B, \quad \Rightarrow \quad (II) \quad \bar{A}\bar{X} = B,$$

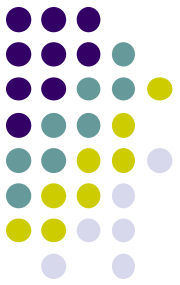
$$\bar{A}_{m \times n+m} = (A/E)$$

$$\bar{X} = (X/X^*) = (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}).$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n);$$

$$X^* = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}) \geq 0$$

# Теорема об опорном плане общей ЗЛП



- Теорема. Если в оптимальном плане

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*, x_{n+1}^*, \dots, x_{n+m}^*)$$

вспомогательной задачи значения  
искусственных переменных равны нулю:

$$x_{n+i}^* = 0 \ (i = \overline{1, m}),$$

то  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$  является начальным  
опорным планом исходной задачи.

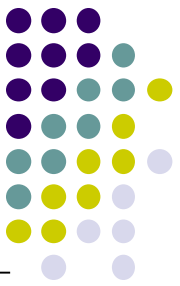
# Схема алгоритма метода искусственного базиса



- Построить вспомогательную задачу
- Составить начальный план вспомогательной задачи с использованием искусственных переменных
- Найти симплекс-методом оптимальный план вспомогательной задачи путем исключения из базиса искусственных переменных
- Найти симплекс-методом оптимальный план исходной задачи либо установить его отсутствие

# Задача о диете.

## Постановка задачи



| Виды<br>корма<br>Кол-во<br>ед-ц вещ-ва<br>в 1 кг корма | I         | II        | Содержание<br>в рационе<br>(ед.) |
|--------------------------------------------------------|-----------|-----------|----------------------------------|
| A                                                      | 50        | 20        | $\geq 1000$                      |
| B                                                      | 2         | 4         | $\geq 80$                        |
| C                                                      | 15        | 10        | $\geq 300$                       |
| Цена<br>(д.е./1 кг)                                    | 4         | 3         |                                  |
| Кол-во<br>корма в<br>суточном<br>рационе<br>(кг)       | $\leq 25$ | $\leq 20$ |                                  |

$X = (x_1, x_2)$  —  
количество корма первого  
и второго вида в суточном  
рационе (в килограммах).

$$f(X) = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$$

$$50x_1 + 20x_2 \geq 1000; \quad (1)$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 80; \quad (2)$$

$$15x_1 + 10x_2 \geq 300; \quad (3)$$

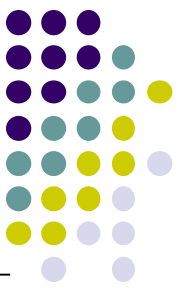
$$x_1 \leq 25;$$

$$x_2 \leq 20;$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$

# Задача о диете.

## Вспомогательная задача



### Основная задача

$$f(\bar{X}) = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$$

$$50x_1 + 20x_2 \geq 1000;$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 80;$$

$$15x_1 + 10x_2 \geq 300;$$

$$x_1 \leq 25;$$

$$x_2 \leq 20;$$

$$x_{1,2} \geq 0.$$

### Вспомогательная задача

$$\varphi(\bar{x}) = x_8 \rightarrow \min$$

$$5x_1 + 2x_2 - x_3 + x_8 = 100;$$

$$4x_1 - x_3 + x_4 = 60;$$

$$2x_1 - x_3 + x_5 = 40;$$

$$x_1 + x_6 = 25;$$

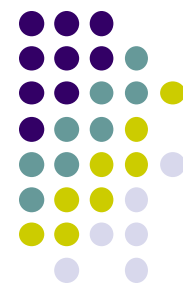
$$x_2 + x_7 = 20.$$

# Симплекс-таблица вспомогательной задачи (итерация 1)



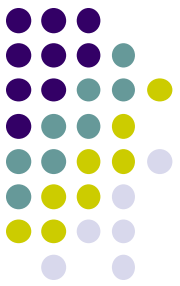
| Свобод-<br>ный член |       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1                   | $x_3$ | 100   | 5     | 2     | -1    | 0     | 0     | 0     | 1     |
| -0                  | $x_4$ | 60    | 4     | 0     | -1    | 1     | 0     | 0     | 0     |
| 0                   | $x_5$ | 40    | 2     | 0     | -1    | 0     | 1     | 0     | 0     |
| 0                   | $x_6$ | 25    | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     |
| 0                   | $x_7$ | 20    | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     |
| $\varphi$           |       | 100   | 5     | 2     | -1    | 0     | 0     | 0     | 0     |

# Симплекс-таблица вспомогательной задачи (итерация 2)



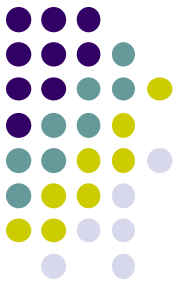
| Свобод-<br>ный член | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$  | $x_4$  | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
|---------------------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| $\leftarrow x_8$ 25 | 0     | 2     | $1/4$  | $5/4$  | 0     | 0     | 0     | 1     |
| $x_1$ 15            | 1     | 0     | $1/4$  | $1/4$  | ●     | ●     | 0     | ●     |
| $x_5$ 10            | 0     | ●     | $-1/2$ | $-1/2$ | 1     | 0     | 0     | 0     |
| $x_6$ 10            | 0     | 0     | $1/4$  | $1/4$  | 0     | 1     | 0     | 0     |
| $x_7$ 20            | 0     | 1     | 0      | 0      | 0     | 0     | 1     | 0     |
| 25                  | 0     | 2     | $1/4$  | $-5/4$ | 0     | 0     | 0     | 0     |

# Симплекс-таблицы вспомогательной задачи (итерация 3) и основной задачи



| Свобод-<br>ный член |          | $x_1$                    | $x_2$    | $x_3$    | $x_4$                   | $x_5$                    | $x_6$    | $x_7$    | $x_8$                   |
|---------------------|----------|--------------------------|----------|----------|-------------------------|--------------------------|----------|----------|-------------------------|
| $+3$                | $x_2$    | <b><math>25/2</math></b> | <b>0</b> | <b>1</b> | <b><math>1/8</math></b> | <b><math>-5/8</math></b> | <b>0</b> | <b>0</b> | <b><math>1/2</math></b> |
| 4                   | $x_1$    | 15                       | 1        | 0        | $-1/4$                  | $1/4$                    | 0        | 0        | 0                       |
| 0                   | $x_3$    | 10                       | 0        | 0        | $-1/2$                  | $-1/2$                   | 1        | 0        | 0                       |
| 0                   | $x_6$    | 10                       | 0        | 0        | $-1/4$                  | $-1/4$                   | 0        | 1        | 0                       |
| 0                   | $x_7$    | $15/2$                   | 0        | 1        | $-1/8$                  | $-5/8$                   | 0        | 0        | $-1/2$                  |
| $\varphi$           | <u>0</u> | 0                        | 0        | 0        | 0                       | 0                        | 0        | 0        | -1                      |
|                     |          | 4                        | 3        | 0        | 0                       | 0                        | 0        | 0        |                         |
| $f$                 | $195/2$  | 0                        | 0        | $-5/8$   | $-7/8$                  | 0                        | 0        | 0        |                         |

# Объяснение результата и выводы



- Минимальная стоимость суточного рациона при полном обеспечении веществами А, В, С составляет  $195/2$  д.е.
- Расход корма первого вида - 15 кг , корма 2 вида - 12, 5 кг
- Потребление вещества А - 1000 ед., вещества В - 80 ед., вещества С - 310 ед. (а не 300 ед)
- Корма первого вида останется 10 кг (из 25 кг) , корма 2 вида  $15/2$  кг (из 20 кг)

# Сравнение процедур графического алгебраического методов ЗЛП



## Графический метод

Графическое представление всех ограничений, включая условие неотрицательности

Пространство решений состоит из бесконечного количества **допустимых точек**

Определяются **допустимые угловые точки** пространства решений

Кандидатами на оптимальное решение будут *конечное* число **угловых точек**

Целевая функция используется для определения **оптимальной угловой точки** среди всех кандидатов

## Алгебраический метод

Задание пространства решений посредством системы из  $m$  линейных уравнений с  $n$  неотрицательными переменными,  $m < n$

Задача имеет бесконечное количество **допустимых решений**

Находятся **допустимые базисные решения** системы уравнений

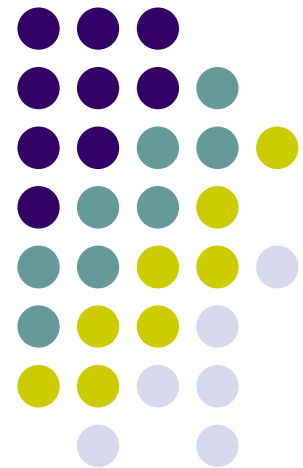
Кандидатами на оптимальное решение будут *конечное* число **базисных допустимых решений**

Целевая функция используется для определения **оптимального базисного допустимого решения** среди всех кандидатов

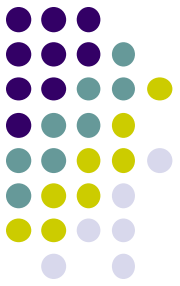
# ППП ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Метод последовательного  
улучшения плана**

**Выполнение расчетов в среде EXCEL**



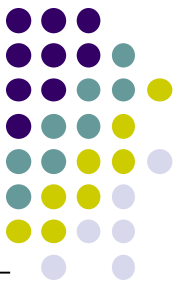
# Программное обеспечение для решения ЗЛП



- **Linear Program Solver (LiPS) —  
бесплатный оптимизационный пакет  
для решения задач линейного и  
целочисленного программирования**
- **WinQSB, EUREKA**
- **MathLab, Mathematica, Microsoft Solver  
Foundation**
- **LINGO, AMPL**
- **Excel**

# Задача о диете.

## Постановка задачи



| Виды<br>корма                                 | I         | II        | Содержание<br>в рационе<br>(ед.) |
|-----------------------------------------------|-----------|-----------|----------------------------------|
| Кол-во<br>ед. пит.вещ-в<br>в 1 кг корма       |           |           |                                  |
| А (белок)                                     | 50        | 20        | $\geq 1000$                      |
| В (кальций)                                   | 2         | 4         | $\geq 80$                        |
| С<br>(клетчатка)                              | 15        | 10        | $\geq 300$                       |
| Цена<br>(д.е./1 кг)                           | 4         | 3         |                                  |
| Кол-во корма<br>в суточном<br>рационе<br>(кг) | $\leq 25$ | $\leq 20$ |                                  |

$X = (x_1, x_2)$  —  
количество корма первого  
и второго вида в суточном  
рационе (в килограммах).

$$f(X) = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$$

$$50x_1 + 20x_2 \geq 1000; \quad (1)$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 80; \quad (2)$$

$$15x_1 + 10x_2 \geq 300; \quad (3)$$

$$x_1 \leq 25;$$

$$x_2 \leq 20;$$

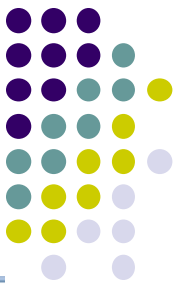
$$x_{1,2} \geq 0.$$

# Форма для ввода условий задачи



|    | A           | B               | C  | D      | E    | F       |
|----|-------------|-----------------|----|--------|------|---------|
| 1  |             | Целевая функция |    |        |      |         |
| 2  |             | переменные      |    |        |      |         |
| 3  |             | x1              | x2 | f(x)   |      |         |
| 4  | значения    |                 |    |        |      |         |
| 5  | коэф.ЦФ     | 4               | 3  |        |      |         |
| 6  |             | ограничения     |    |        |      |         |
| 7  |             |                 |    | лев.ч. | знак | св.член |
| 8  | белок А     | 50              | 20 | 0      | >=   | 1000    |
| 9  | кальций В   | 2               | 4  | 0      | >=   | 80      |
| 10 | клетчатка С | 15              | 10 | 0      | >=   | 300     |
| 11 |             |                 | 0  | 0      | <=   | 25      |
| 12 |             | 0               |    | 0      | <=   | 20      |

# Ввод зависимости для целевой функции



СУММПРОИЗВ       =СУММПРОИЗВ(B4:C4;B5:C5)

|   | A        | B               | C  | D     | E | F | G |
|---|----------|-----------------|----|-------|---|---|---|
| 1 |          | Целевая функция |    |       |   |   |   |
| 2 |          | переменные      |    |       |   |   |   |
| 3 |          | x1              | x2 | f(x)  |   |   |   |
| 4 | значения |                 |    | B5:C5 |   |   |   |
| 5 | коэф.ЦФ  | 4               | 3  |       |   |   |   |

**Аргументы функции**

СУММПРОИЗВ

Массив1: B4:C4 = {0;0}

Массив2: B5:C5 = {4;3}

Массив3: = МАССИВ

= 0

Возвращает сумму произведений диапазонов или массивов.

**Массив2:** массив1;массив2;... от 2 до 255 массивов, соответствующие компоненты которых нужно сначала перемножить, а затем сложить полученные произведения. Все массивы должны иметь одинаковую

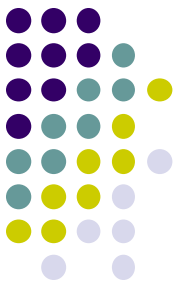
Значение: 0

[Справка по этой функции](#)

OK    Отмена

# Ввод параметров

## Поиск решения



|    | A           | B               | C  | D      | E    | F       |
|----|-------------|-----------------|----|--------|------|---------|
| 1  |             | Целевая функция |    |        |      |         |
| 2  |             | переменные      |    |        |      |         |
| 3  |             | x1              | x2 | f(x)   |      |         |
| 4  | значения    |                 |    | 0      |      |         |
| 5  | коэф.ЦФ     | 4               | 3  |        |      |         |
| 6  |             | ограничения     |    |        |      |         |
| 7  |             |                 |    | лев.ч. | знак | св.член |
| 8  | белок А     | 50              | 20 | 0      | >=   | 1000    |
| 9  | кальций В   | 2               | 4  | 0      | >=   | 80      |
| 10 | клетчатка С | 15              | 10 | 0      | >=   | 300     |
| 11 |             |                 | 0  | 0      | <=   | 25      |
| 12 |             | 0               |    | 0      | <=   | 20      |

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:

Равной: ☐ максимальному значению ☒ значению:

☒ минимальному значению

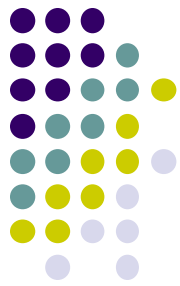
Изменяя ячейки:

Ограничения:

- \$D\$10 >= \$F\$10
- \$D\$11 <= \$F\$11
- \$D\$12 <= \$F\$12
- \$D\$8 >= \$F\$8
- \$D\$9 >= \$F\$9

Кнопки: Выполнить, Закреть, Параметры, Предположить, Добавить, Изменить, Удалить, Восстановить, Справка

# Ввод параметров решения ЗЛП



**Параметры поиска решения** [X]

|                            |                                       |        |                                                    |
|----------------------------|---------------------------------------|--------|----------------------------------------------------|
| Максимальное время:        | <input type="text" value="100"/>      | секунд | <input type="button" value="ОК"/>                  |
| Предельное число итераций: | <input type="text" value="100"/>      |        | <input type="button" value="Отмена"/>              |
| Относительная погрешность: | <input type="text" value="0,000001"/> |        | <input type="button" value="Загрузить модель..."/> |
| Допустимое отклонение:     | <input type="text" value="5"/>        | %      | <input type="button" value="Сохранить модель..."/> |
| Сходимость:                | <input type="text" value="0,0001"/>   |        | <input type="button" value="Справка"/>             |

|                                                              |                                                                  |
|--------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| <input checked="" type="checkbox"/> <u>Л</u> инейная модель  | <input type="checkbox"/> Авто <u>м</u> атическое масштабирование |
| <input checked="" type="checkbox"/> Неотрицательные значения | <input type="checkbox"/> Показывать результаты итераций          |

|                                                    |                                                  |                                                       |
|----------------------------------------------------|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| Оценки                                             | Разности                                         | Метод поиска                                          |
| <input checked="" type="radio"/> л <u>и</u> нейная | <input checked="" type="radio"/> п <u>р</u> ямые | <input checked="" type="radio"/> Н <u>ь</u> ютона     |
| <input type="radio"/> к <u>в</u> адратичная        | <input type="radio"/> ц <u>е</u> нтральные       | <input type="radio"/> сопряженных г <u>р</u> адиентов |

# Диалоговое окно Результаты поиска решения



|    | A           | B               | C    | D      | E    | F       |
|----|-------------|-----------------|------|--------|------|---------|
| 1  |             | Целевая функция |      |        |      |         |
| 2  |             | переменные      |      |        |      |         |
| 3  |             | x1              | x2   | f(x)   |      |         |
| 4  | значения    | 15              | 12,5 | 97,5   |      |         |
| 5  | коэф.ЦФ     | 4               | 3    |        |      |         |
| 6  |             | ограничения     |      |        |      |         |
| 7  |             |                 |      | лев.ч. | знак | св.член |
| 8  | белок А     | 50              | 20   | 1000   | >=   | 1000    |
| 9  | кальций В   | 2               | 4    | 80     | >=   | 80      |
| 10 | клетчатка С | 15              | 10   | 350    | >=   | 300     |
| 11 |             |                 | 0    | 0      | <=   | 25      |
| 12 |             | 0               |      | 0      | <=   | 20      |

**Результаты поиска решения** [X]

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Тип отчета

☒ Сохранить найденное решение  
☐ Восстановить исходные значения

Результаты  
 Устойчивость  
 Пределы

ОК Отмена Сохранить сценарий... Справка

# Задача распределения ресурсов. Постановка задачи



| Ресурсы         | Нормы расхода ресурсов на единицу изделия |                 |                  |               | Наличие ресурсов |
|-----------------|-------------------------------------------|-----------------|------------------|---------------|------------------|
|                 | Ковер «Силюга»                            | Ковер «Снегирь» | Ковер «Степашки» | Ковер «Дымка» |                  |
| труд            | 7                                         | 2               | 2                | 6             | 80               |
| сырье           | 5                                         | 8               | 4                | 3             | 480              |
| оборудование    | 2                                         | 4               | 1                | 8             | 130              |
| Цена (тыс.руб.) | 3                                         | 4               | 3                | 1             |                  |

- $X_1, X_2, X_3, X_4$  - количество ковров каждого типа
- Целевая функция :  $f(x) = 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + X_4$
- Ограничения:
$$7X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 6X_4 \leq 80$$
$$5X_1 + 8X_2 + 4X_3 + 3X_4 \leq 480$$
$$2X_1 + 4X_2 + X_3 + 8X_4 \leq 130$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

# Форма для ввода условий задачи



|   | A        | B  | C           | D  | E  | F                    | G    | H         |
|---|----------|----|-------------|----|----|----------------------|------|-----------|
| 1 |          |    | Переменные  |    |    |                      |      |           |
| 2 |          | X1 | X2          | X3 | X4 |                      |      |           |
| 3 | значение |    |             |    |    | цел. ф-я             |      |           |
| 4 | коэфф.цф | 3  | 4           | 3  | 1  | <input type="text"/> |      |           |
| 5 |          |    | Ограничения |    |    |                      |      |           |
| 6 |          |    |             |    |    | лев. часть           | знак | правая ч. |
| 7 | труд     | 7  | 2           | 2  | 6  | 0                    | <=   | 80        |
| 8 | сырье    | 5  | 8           | 4  | 3  | 0                    | <=   | 480       |
| 9 | оборуд-е | 2  | 4           | 1  | 8  | 0                    | <=   | 130       |

# Ввод зависимости для целевой функции



СУММПРОИЗВ =СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B4:E4)

lab1.xls

|   | A        | B           | C          | D  | E  | F         | G    | H         | I |
|---|----------|-------------|------------|----|----|-----------|------|-----------|---|
| 1 |          |             | Переменные |    |    |           |      |           |   |
| 2 |          | X1          | X2         | X3 | X4 |           |      |           |   |
| 3 | значение | 0           | 0          | 0  | 0  | цел. ф-я  |      |           |   |
| 4 | коэфф.цф | 3           | 4          | 3  | 1  | :B4:E4)   |      |           |   |
| 5 |          | Ограничения |            |    |    |           |      |           |   |
| 6 |          |             |            |    |    | лев.часть | знак | правая ч. |   |
| 7 | труд     | 7           | 2          | 2  | 6  | 0         | <=   | 80        |   |
| 8 | сырье    | 5           | 8          | 4  | 3  | 0         | <=   | 480       |   |
| 9 | оборуд-е | 2           | 4          | 1  | 8  | 0         | <=   | 130       |   |

СУММПРОИЗВ

Массив1 B\$3:E\$3 = {0;0;0;0}

Массив2 B4:E4 = {3;4;3;1}

Массив3 = массив

= 0

Возвращает сумму произведений соответствующих элементов массивов.

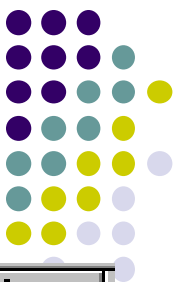
**Массив1:** массив1;массив2;... от 2 до 30 массивов, чьи компоненты нужно перемножить а затем сложить. Все массивы должны иметь одну и ту же размерность.

Значение: 0

OK Отмена

# Ввод параметров

## Поиск решения



|   | A        | B  | C           | D  | E  | F         | G    | H         |
|---|----------|----|-------------|----|----|-----------|------|-----------|
| 1 |          |    | Переменные  |    |    |           |      |           |
| 2 |          | X1 | X2          | X3 | X4 |           |      |           |
| 3 | значение |    |             |    |    | цел. ф-я  |      |           |
| 4 | коэфф.цф | 3  | 4           | 3  | 1  | 0         |      |           |
| 5 |          |    | Ограничения |    |    |           |      |           |
| 6 |          |    |             |    |    | лев.часть | знак | правая ч. |
| 7 | труд     | 7  | 2           | 2  | 6  | 0         | <=   | 80        |
| 8 | сырье    | 5  | 8           | 4  | 3  | 0         | <=   | 480       |
| 9 | оборуд-е | 2  | 4           | 1  | 8  | 0         | <=   | 130       |

Поиск решения

Установить целевую

\$F\$4

Выполнить

Равной:

☒ максимальному значению
 ☐ значению: 0

Заккрыть

☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

\$B\$3:\$E\$3

Предположить

Ограничения:

\$F\$7 <= \$H\$7

\$F\$8 <= \$H\$8

\$F\$9 <= \$H\$9

Добавить

Изменить

Удалить

Параметры

Восстановить

Справка

# Ввод параметров решения ЗЛП



## Параметры поиска решения

Максимальное время:  секунд

Предельное число итераций:

Относительная погрешность:

Допустимое отклонение:  %

Сходимость:

ОК

Отмена

Загрузить модель...

Сохранить модель...

Справка

☒ Линейная модель

☐ Автоматическое масштабирование

☒ Неотрицательные значения

☐ Показывать результаты итераций

Оценки

☒ линейная

☐ квадратичная

Разности

☒ прямые

☐ центральные

Метод поиска

☒ Ньютона

☐ сопряженных градиентов

# Диалоговое окно Результаты поиска решения



|    | A        | B  | C           | D  | E  | F          | G    | H         |
|----|----------|----|-------------|----|----|------------|------|-----------|
| 1  |          |    | Переменные  |    |    |            |      |           |
| 2  |          | X1 | X2          | X3 | X4 |            |      |           |
| 3  | значение | 0  | 30          | 10 | 0  | цел. ф-я   |      |           |
| 4  | коэфф.цф | 3  | 4           | 3  | 1  | 150        |      |           |
| 5  |          |    | Ограничения |    |    |            |      |           |
| 6  |          |    |             |    |    | лев. часть | знак | правая ч. |
| 7  | труд     | 7  | 2           | 2  | 6  | 80         | <=   | 80        |
| 8  | сырье    | 5  | 8           | 4  | 3  | 280        | <=   | 480       |
| 9  | оборуд-е | 2  | 4           | 1  | 8  | 130        | <=   | 130       |
| 10 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 11 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 12 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 13 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 14 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 15 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 16 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 17 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 18 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 19 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 20 |          |    |             |    |    |            |      |           |

Результаты поиска решения

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

☒ Сохранить найденное решение
 ☐ Восстановить исходные значения

Тип отчета

Результаты

Устойчивость

Пределы

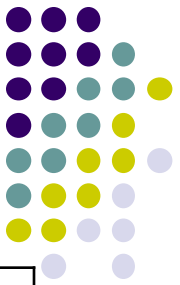
ОК

Отмена

Сохранить сценарий...

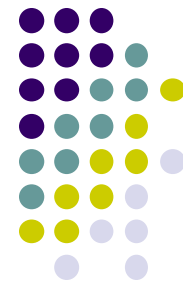
Справка

# Создание отчета по результатам поиска решения



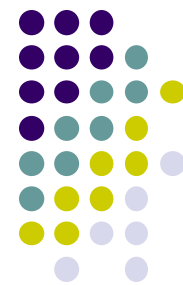
| Целевая ячейка (максимум) |                          |          |                |
|---------------------------|--------------------------|----------|----------------|
| Ячейка                    | Имя                      | Исходно  | Результат      |
| \$F\$4                    | коэфф. цел. функции      | 0        | 150            |
| Изменяемые ячейки         |                          |          |                |
| Ячейка                    | Имя                      | Исходно  | Результат      |
| \$B\$3                    | Значение X1              | 0        | 0              |
| \$C\$3                    | Значение X2              | 0        | 30             |
| \$D\$3                    | Значение X3              | 0        | 10             |
| \$E\$3                    | Значение X4              | 0        | 0              |
| Ограничения               |                          |          |                |
| Ячейка                    | Имя                      | Значение | Формула        |
| \$F\$7                    | Труд левая часть         | 80       | \$F\$7<=\$H\$7 |
| \$F\$8                    | Сырье левая часть        | 280      | \$F\$8<=\$H\$8 |
| \$F\$9                    | Оборудование левая часть | 130      | \$F\$9<=\$H\$9 |

# Особые случаи в симплексном методе



- **Вырожденность**
  - базисные переменные принимают нулевое значение, т.к. имеется избыточное ограничение.
- **Альтернативные оптимальные решения**
  - целевая функция принимает оптимальное значение на бесконечном множестве решений (точек границы ОДР).
- **Неограниченные решения**
  - целевую функцию можно улучшать
  - значения переменных могут неограниченно возрастать без нарушения ограничений
  - модель некорректна: не учитываются ограничения, не являющиеся избыточными, не точно оцениваются параметры (коэффициенты) ограничений.
- **Отсутствие допустимых решений**
  - задача не имеет допустимых решений
  - ограничения задачи ЛП несовместны
  - задача плохо сформулирована.

# Особые случаи. Отсутствие допустимых решений



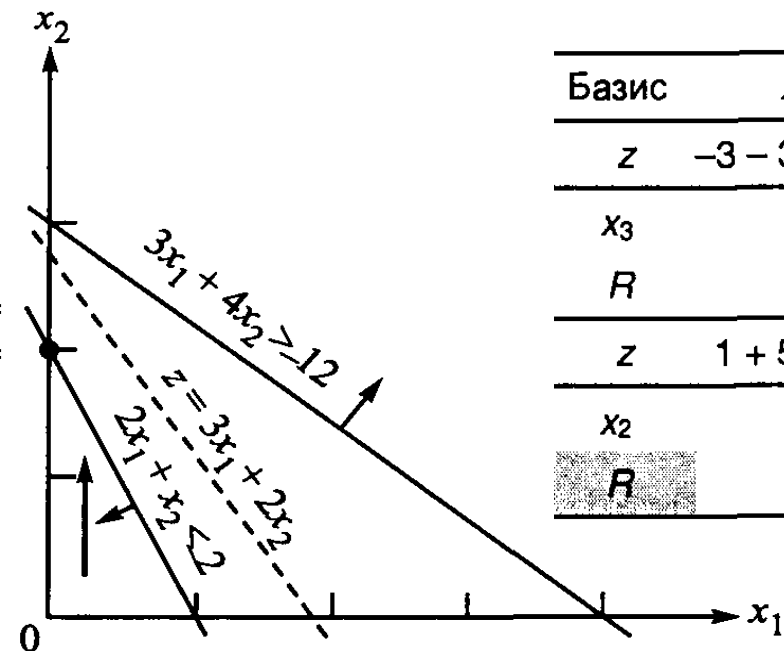
- $$\max f(x) = 3x_1 + 2x_2$$

$$2x_1 + x_2 \leq 2$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- область допустимых решений пуста
- ограничения задачи ЛП несовместны
- в оптимальном решении имеется положительная искусственная переменная.
- задача плохо сформулирована.



| Базис | $x_1$     | $x_2$     | $x_4$ | $x_3$    | $R$ | Решение  |
|-------|-----------|-----------|-------|----------|-----|----------|
| $z$   | $-3 - 3M$ | $-2 - 4M$ | $M$   | 0        | 0   | $-12M$   |
| $x_3$ | 2         | 1         | 0     | 1        | 0   | 2        |
| $R$   | 3         | 4         | -1    | 0        | 1   | 12       |
| $z$   | $1 + 5M$  | 0         | $M$   | $2 + 4M$ | 0   | $4 - 4M$ |
| $x_2$ | 2         | 1         | 0     | 1        | 0   | 2        |
| $R$   | -5        | 0         | -1    | -4       | 1   | 4        |

# Основные положения теории двойственности в линейном программировании

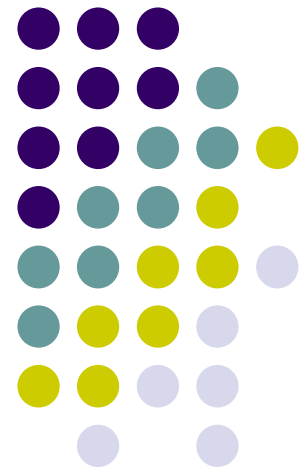
---

**Двойственная ЗЛП.**  
Правила перехода.

**Экономическая интерпретация ДЗЛП**  
Смысл переменных и ограничений

**1-я и 2-я теоремы двойственности**

**Анализ чувствительности ЗЛП**  
1-я, 2-я и 3-я задачи



# Практические приложения теории двойственности



- Если число ограничений двойственной задачи меньше, чем прямой, решение двойственной задачи требует меньший объем вычислений
- Понятие двойственности позволяет дать экономическую интерпретацию ЗЛП
- Двойственность играет важную роль при анализе моделей ЗЛП на чувствительность
- На основе двойственности разработан двойственный симплекс-метод решения злп

## Прямая задача (I)

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \dots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{array} \right.$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, l}, l \leq n)$$

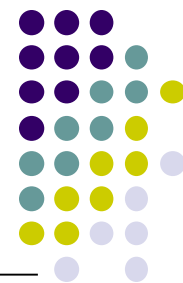
## Двойственная задача (II)

$$g(r) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m \rightarrow \min$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \dots + a_{ml}y_l \geq c_l, \\ a_{1l+1}y_1 + a_{2l+1}y_2 + \dots + a_{ml+1}y_m = c_{l+1}, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m = c_n, \end{array} \right.$$

$$y_i \geq 0 \quad (i = 1, k, k \leq m)$$

# Симметричные задачи двойственной пары



## Прямая задача

найти неизвестные

$$x_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

обращающие целевую функцию

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = \overline{1, n}).$$

## Двойственная задача

найти неизвестные

$$y_i \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

обращающие целевую функцию

$$g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

$$y_i \geq 0$$

# Двойственная задача.

## Правила перехода



### Исходная задача

Максимизация

Константы в правых частях ограничений

Целевая функция

$j$ -й столбец, составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях

$i$ -я строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях

$j$ -я неотрицательная переменная

$j$ -я переменная, не имеющая ограничения в знаке

$i$ -е неравенство вида  $\leq$

$i$ -е соотношение в виде равенства

### Двойственная задача

Минимизация

Целевая функция

Константы в правых частях ограничений

$j$ -я строка, составленная из коэффициентов при неизвестных в ограничениях

$i$ -й столбец, составленный из коэффициентов при неизвестных в ограничениях

$j$ -е неравенство вида  $\geq$

$j$ -е соотношение в виде равенства

$i$ -я неотрицательная переменная

$i$ -я переменная, не имеющая ограничения в знаке

# Правила перехода. Схема



| <u>Задача максимизации</u> |                   | <u>Задача минимизации</u> |
|----------------------------|-------------------|---------------------------|
| <u>Ограничения</u>         |                   | <u>Переменные</u>         |
| $\geq$                     | $\Leftrightarrow$ | $\leq 0$                  |
| $\leq$                     | $\Leftrightarrow$ | $\geq 0$                  |
| $=$                        | $\Leftrightarrow$ | Свободная                 |
| <u>Переменные</u>          |                   | <u>Ограничения</u>        |
| $\geq 0$                   | $\Leftrightarrow$ | $\geq$                    |
| $\leq 0$                   | $\Leftrightarrow$ | $\leq$                    |
| Свободная                  | $\Leftrightarrow$ | $=$                       |

# Двойственная задача. Правила перехода

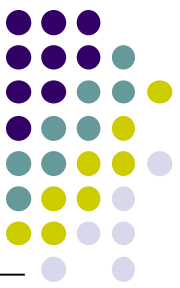


| Переменные двойственной задачи | Переменные прямой задачи |          |                                        |          |     |                                                  |       |
|--------------------------------|--------------------------|----------|----------------------------------------|----------|-----|--------------------------------------------------|-------|
|                                | $x_1$                    | $x_2$    | ...                                    | $x_j$    | ... | $x_n$                                            |       |
|                                | $c_1$                    | $c_2$    | ...                                    | $c_j$    | ... | $c_n$                                            |       |
| $y_1$                          | $a_{11}$                 | $a_{12}$ | ...                                    | $a_{1j}$ | ... | $a_{1n}$                                         | $b_1$ |
| $y_2$                          | $a_{21}$                 | $a_{22}$ | ...                                    | $a_{2j}$ | ... | $a_{2n}$                                         | $b_2$ |
| .                              | .                        | .        |                                        | .        |     | .                                                | .     |
| .                              | .                        | .        | ...                                    | .        | ... | .                                                | .     |
| .                              | .                        | .        |                                        | .        |     | .                                                | .     |
| $y_n$                          | $a_{m1}$                 | $a_{m2}$ | ...                                    | $a_{mj}$ | ... | $a_{mn}$                                         | $b_m$ |
|                                |                          |          | $j$ -е ограничение двойственной задачи |          |     | Коэффициенты целевой функции двойственной задачи |       |

| Целевая функция прямой задачи | Двойственная задача |                 |            |
|-------------------------------|---------------------|-----------------|------------|
|                               | Целевая функция     | Тип ограничений | Переменные |
| Максимизация                  | Минимизация         | $\geq$          | Свободные  |
| Минимизация                   | Максимизация        | $\leq$          | Свободные  |

# Двойственная задача.

## Правила перехода. Пример 1



### Прямая задача

$$4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \rightarrow \max$$

$$1x_1 + 1x_2 + 1x_3 + 1x_4 \leq 15,$$

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120,$$

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100,$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4).$$

### Двойственная задача

$$15y_1 + 120y_2 + 100y_3 \rightarrow \min$$

$$1y_1 + 7y_2 + 3y_3 \geq 4,$$

$$1y_1 + 5y_2 + 5y_3 \geq 5,$$

$$1y_1 + 3y_2 + 10y_3 \geq 9,$$

$$1y_1 + 2y_2 + 15y_3 \geq 11,$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \geq 0.$$

# Правила перехода.

## Пример 2



### Прямая задача

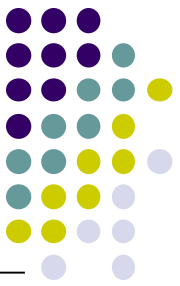
$$\begin{aligned} & 2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \max \\ & \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

### Двойственная задача

$$\begin{aligned} & 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \rightarrow \min \\ & \begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3. \end{cases} \end{aligned}$$

# Правила перехода.

## Пример 3



### Прямая задача

$$4x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 4x_3 \leq 12, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 13, \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \leq 11, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \end{cases}$$

### Двойственная задача

$$12y_1 + 13y_2 + 11y_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 4, \\ -y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 1, \\ 4y_1 - 2y_2 - 6y_3 \geq -4, \\ y_1, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

# Экономическая интерпретация прямой ЗЛП



$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m},$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

- $f$  – валовой доход;
- $C_j$  – стоимость единицы  $j$ -ой продукции;
- $X_j$  – всего произведено  $j$ -ой продукции;
- $a_{ij}$  – удельный расход  $i$ -ого ресурса на производство единицы  $j$ -ой продукции;
- $b_i$  – запас  $i$ -го ресурса

# Экономическая интерпретация двойственной ЗЛП



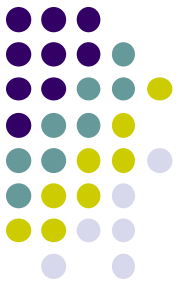
$$g(y) = \sum_{i=1}^m b_i y_i \rightarrow \min$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j, j = \overline{1, n},$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1, m}.$$

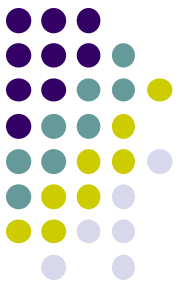
- $g$  – суммарные издержки;
- $y_j$  – ценность единицы  $i$ -го ресурса;
- $b_i$  – запас  $i$ -го ресурса
- $c_j$  – стоимость единицы  $j$ -ой продукции;
- $a_{ij}$  – удельный расход  $i$ -ого ресурса на производство  $j$ -ой продукции;

# Экономическое содержание двойственных оценок



- **Переменные двойственной задачи являются оценками потенциальной возможности получения дополнительного дохода за счет увеличения соответствующего ресурса:**
  - **оценка вклада  $i$ -го ресурса в целевую функцию на оптимальном плане**
  - **прирост дохода, возникающий при увеличении  $i$ -го ресурса на единицу при условии оптимального использования ресурсов.**

# Основное неравенство двойственности



**Лемма.** Если  $X$  — некоторый план исходной задачи, а  $Y$  — произвольный план двойственной задачи, то значение целевой функции исходной задачи при плане  $X$  всегда не превосходит значения целевой функции двойственной задачи при плане  $Y$ , т. е.  $f(X) \leq g(Y)$ .

$$X = \arg f(X) = \{ \sum_j c_j x_j \mid \sum_j a_{ij} x_j \leq b_i, i=1, \dots, m \};$$

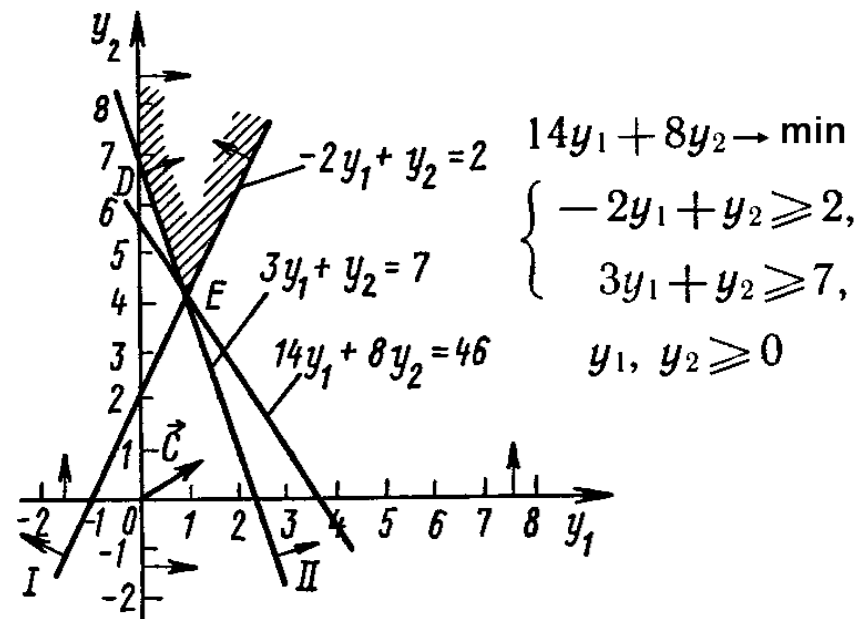
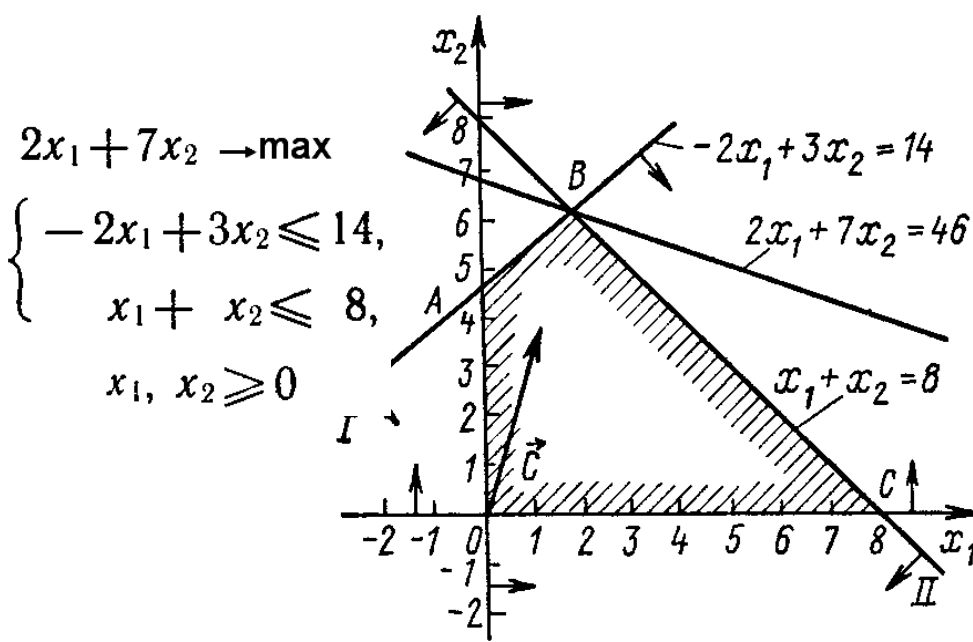
$$Y = \arg g(Y) = \{ \sum_i b_i y_i \mid \sum_i a_{ji} y_j \geq c_j, j=1, \dots, n \}$$

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_j^n c_j x_j \leq \\ &\leq \sum_j^n \left( \sum_i^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_i^m \left( \sum_j^n a_{ij} x_j \right) y_i \leq \\ &\leq \sum_i^m b_i y_i = g(Y) \end{aligned}$$

# Первая теорема двойственности



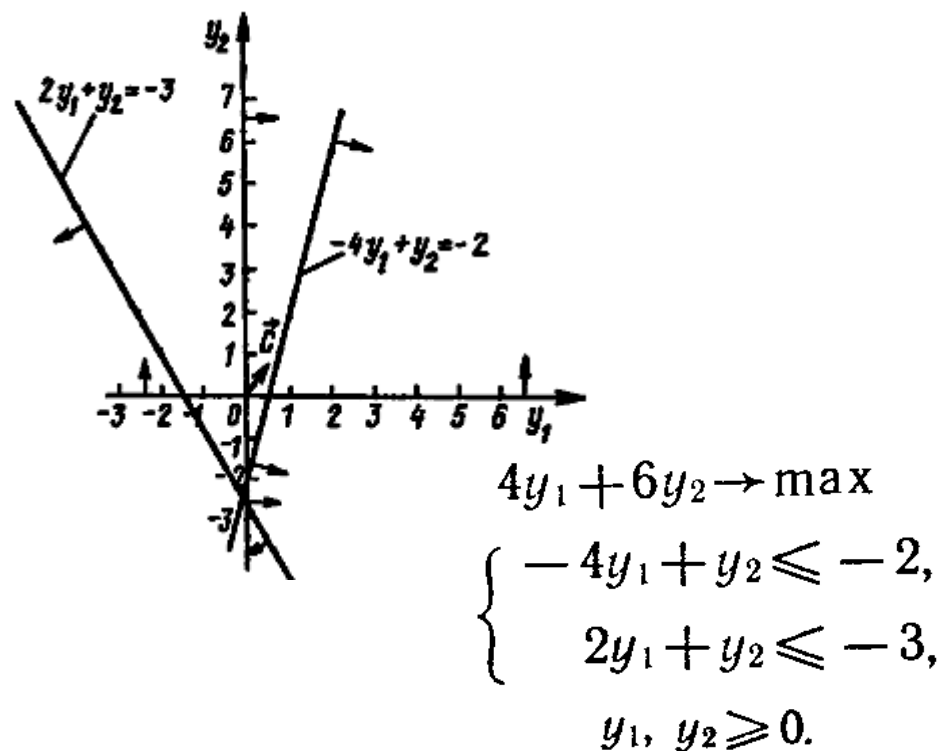
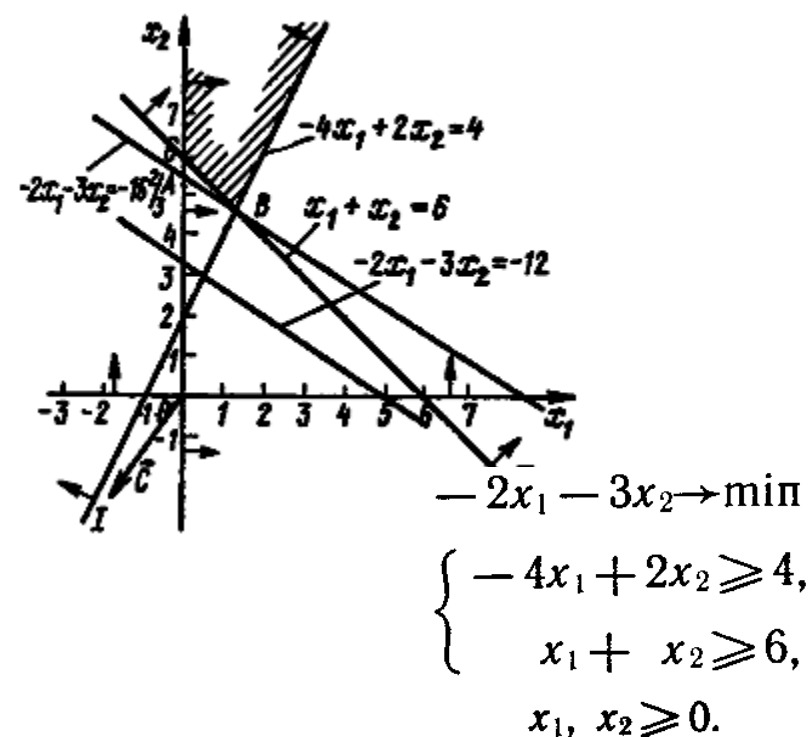
**Теорема 1. (первая теорема двойственности).**  
 Если одна из пары двойственных задач (I) или (II), имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план и значения целевых функций задач при их оптимальных планах равны между собой, т. е.  $f_{\max} = g_{\min}$ .



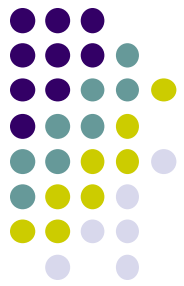
# Первая теорема двойственности



*Если же целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена [для исходной (I) — сверху, для двойственной (II) — снизу], то другая задача вообще не имеет планов.*

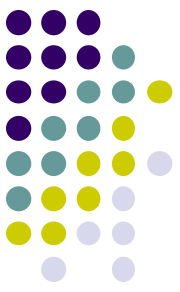


# Случаи первой теоремы двойственности



- 1. В прямой и двойственной задачах имеются оптимальные решения, при этом значения целевых функций совпадают.**
- 2. В прямой задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена сверху. При этом у двойственной задачи будет пустое допустимое множество.**
- 3. В двойственной задаче допустимое множество не пусто, а целевая функция на этом множестве не ограничена снизу. При этом у прямой задачи допустимое множество оказывается пустым.**
- 4. Обе из рассматриваемых задач имеют пустые допустимые множества.**

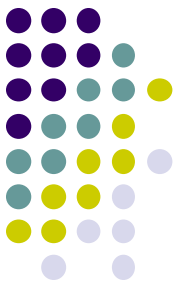
# Вторая теорема двойственности (теорема<sup>(1)</sup> равновесия, теорема о дополняющей нежесткости)



**Теорема . (вторая теорема двойственности).**  
*План  $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$  задачи (I) и план  $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*)$  задачи (II) являются оптимальными планами этих задач тогда и только тогда, когда для любого  $j$  ( $j = \overline{1, n}$ ) выполняется равенство*

$$y_i \cdot \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot x_j - b_i \right) = 0$$
$$x_j \cdot \left( \sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot y_i - c_j \right) = 0$$

# Вторая теорема двойственности. Следствие



- Требования на оптимальную производственную программу  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  :

$$y_i \cdot \left( \sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot x_j - b_i \right) = 0$$

если  $y_i > 0$ , то  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m;$

если  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot x_j < b_i$ , то  $y_i = 0, \quad i = 1, \dots, m;$

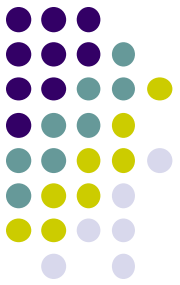
- и оптимальный вектор оценок  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$  :

$$x_j \cdot \left( \sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot y_i - c_j \right) = 0$$

если  $x_j > 0$ , то  $\sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot y_i = c_j, \quad j = 1, \dots, n;$

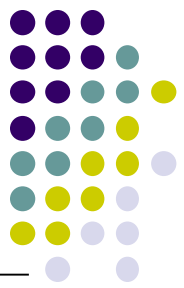
если  $\sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot y_i > c_j$ , то  $x_j = 0, \quad j = 1, \dots, n.$

# Следствия второй теоремы двойственности



- Следствие 1. Если на оптимальном плане прямой задачи  $i$ -е ограничение выполняется как строгое неравенство, то оптимальное значение соответствующей двойственной переменной равно нулю: если  $\sum_{j=1}^n a_{i,j} \cdot x_j < b_i$ , то  $y_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;
  - Если ресурс  $b_i$  используется не полностью при реализации оптимального плана, то  $i$ -е ограничение становится несущественным и оценка такого ресурса равна 0 ( $y_i^* = 0$ ).
- Следствие 2. Если на оптимальном плане двойственной задачи  $j$ -е ограничение выполняется как строгое неравенство, то оптимальное значение соответствующей переменной прямой задачи равно нулю: если  $\sum_{i=1}^m a_{i,j} \cdot y_i > c_j$ , то  $x_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$ .
  - Если удельные затраты на ресурсы в  $j$ -ом ограничении превышают доход от реализации единицы  $j$ -го продукта, то производство  $j$ -го продукта является нерентабельным и отсутствует в оптимальном производственном плане ( $x_j^* = 0$ ).

# Модифицированный симплекс-метод



| $N$      | $f(X)$    | $Y$      | $\Delta_j$ |
|----------|-----------|----------|------------|
| $f_1$    | $x_{j_1}$ | $D^{-1}$ |            |
| $f_2$    | $x_{j_2}$ |          |            |
| $\vdots$ | $\vdots$  |          |            |
| $\vdots$ | $\vdots$  |          |            |
| $f_m$    | $x_{j_m}$ |          |            |

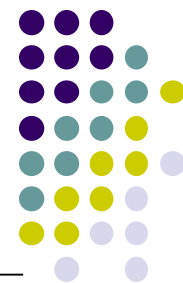
$$Y^T = \bar{C}D^{-1}.$$

$$c_j^* = \sum_{i=1}^m a_{ij}c_{i_0} - c_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i - c_j = \Delta_j.$$

$$X'_\theta = \begin{cases} x'_{j_s} = x_{j_s} - \theta \lambda_s, & s \neq t, \quad s \in \{1, 2, \dots, m\}; \\ x'_p = \theta; \\ x_j = 0 & \text{для всех остальных } j \\ & \text{(свободные неизвестные)}; \end{cases}$$

$$f(X'_\theta) = c_0^* - c_p^* x'_p = f(X_\theta) - \Delta_p \theta.$$

# Метод последовательного улучшения плана. Алгоритм



# Схема модифицированного симплекс-метода



1. Найдем план двойственной  
ЗЛП-вектор  $Y^* = \bar{C}D^{-1}$ .

2. Рассмотрим  $\Delta_j = c_j^* - \sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j$

а) все  $\Delta_j \leq 0$  ( $c_j^* \leq 0$ )

б) хотя бы одно  $\Delta_p > 0$ .

$$\lambda_s = D^{-1}A_p = a_{sp} \leq 0,$$

в) хотя бы одно  $\Delta_p > 0$

есть положительные  $\lambda$

$$\theta = \min_{s(\lambda_s > 0)} \frac{x_{js}}{\lambda_s}$$

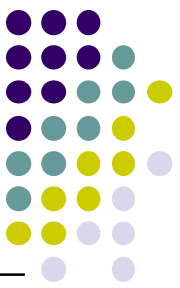
| $N$      | $f(X)$    | $Y$      | $\Delta_j$ |
|----------|-----------|----------|------------|
| $f_1$    | $x_{j_1}$ | $D^{-1}$ | $\lambda$  |
| $f_2$    | $x_{j_2}$ |          |            |
| $\vdots$ | $\vdots$  |          |            |
| $f_m$    | $x_{j_m}$ |          |            |

$$4. Y' = Y - \Delta_p (D')^{-1}$$

$$X'_b = \begin{cases} x'_{js} = x_{js} - \theta \lambda_s, & s \neq k, \quad s \in \{1, 2, \dots, m\}; \\ x'_p = \theta; \\ x_j = 0 & \text{для всех остальных } j \\ & \text{(свободные неизвестные)}; \end{cases}$$

$$f(X'_b) = c_0^* - c_p^* x'_p = f(X_b) - \Delta_p \theta.$$

# Модифицированный симплекс-метод. Пример



|   | 1 | 3  | 1 | -1 | 0 |
|---|---|----|---|----|---|
| 1 | 2 | 10 | 1 | 0  | 0 |
| 1 | 4 | 7  | 0 | 1  | 0 |
| 0 | 5 | 4  | 0 | 0  | 1 |

$$f(X) = x_2 - 2x_1 - 3x_3 - x_4 \rightarrow \min;$$

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 = 10;$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 7;$$

$$-3x_1 - 2x_3 + x_5 = 4;$$

$$\forall x_j \geq 0.$$

$$j_1 = 2; j_2 = 4; j_3 = 5;$$

$$X_b = (0, 10, 0, 7, 4);$$

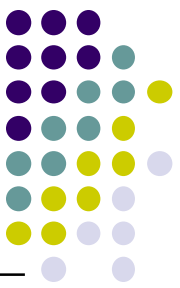
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 10 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}; \quad D = D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$C = (-2 \quad 1 \quad -3 \quad 1 \quad 0);$$

$$\bar{C} = (1 \quad -1 \quad 0).$$

# Модифицированный симплекс-метод. Пример



|    |     |      |    |   |              |
|----|-----|------|----|---|--------------|
| I  | 3   | 1    | -1 | 0 | $\Delta_1=3$ |
| 2  | 10  | 1    | 0  | 0 | 2            |
| 4  | 7   | 0    | 1  | 0 | 1            |
| 5  | 4   | 0    | 0  | 1 | -3           |
| II | -12 | -1/2 | -1 | 0 | 7/2          |
| 1  | 5   | 1/2  | 0  | 0 | -3/2         |
| 4  | 2   | -1/2 | 1  | 0 | 5/2          |
| 5  | 19  | 3/2  | 0  | 1 | -13/2        |

$$f(X) = \sum_{j=1}^5 c_j x_j = 1 \cdot 10 - 1 \cdot 7 + 0 \cdot 4 = 3;$$

$$Y = \bar{C}D^{-1} = (1 \quad -1 \quad 0) \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad -1 \quad 0).$$

$$\Delta_1 = (Y, A_1) - c_1 =$$

$$2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 3 \cdot 0 + 2 = 3 > 0;$$

$$\Delta_3 = (Y, A_3) - c_3 =$$

$$-3 - 1 + 3 = -1 < 0.$$

$$\theta = \min \left( \frac{10}{2}; \frac{7}{1} \right) = 5.$$

# Модифицированный симплекс-метод. Пример



| II | -12 | -1/2 | -1 | 0 | 7/2   |
|----|-----|------|----|---|-------|
| 1  | 5   | 1/2  | 0  | 0 | -3/2  |
| 4  | 2   | -1/2 | 1  | 0 | 5/2   |
| 5  | 19  | 3/2  | 0  | 1 | -13/2 |

$$Y' = Y - \Delta_5 (D')_{20}^{-1} = \left( \frac{1}{5} \quad -\frac{11}{5} \quad 0 \right);$$

$$\Delta_2 = (Y, A_2) - c_2 = \frac{1}{5} - 1 < 0;$$

$$\Delta_4 = (Y, A_4) - c_4 = -\frac{11}{5} + 1 < 0.$$

| III | 74/5  | 1/5  | -11/5 | 0 |
|-----|-------|------|-------|---|
| 1   | 31/5  |      |       |   |
| 3   | 4/5   | -1/5 | 2/5   | 0 |
| 5   | 121/5 |      |       |   |

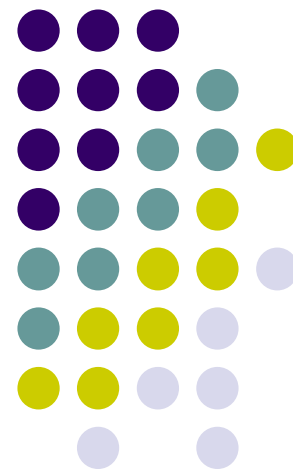
$$x'_{1_1} = \frac{31}{5}; \quad x'_{1_2} = \frac{4}{5}; \quad x'_{1_3} = \frac{121}{5};$$

$$f(X_{1'}) = -12 - \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{74}{5}.$$

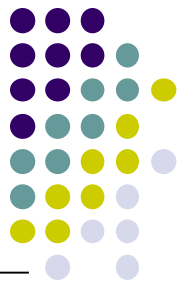
$$\text{Ответ: } X^0 = \left( \frac{31}{5}, 0, \frac{4}{5}, 0, \frac{121}{5} \right)$$

$$f(X^0) = -\frac{74}{5}.$$

# Примечания



# Двойственная задача. Правила перехода



- 1) если прямая задача является задачей максимизации, то двойственная будет задачей минимизации и наоборот;
- 2) коэффициенты целевой функции прямой задачи  $c_1, c_2, \dots, c_n$  становятся свободными членами ограничений двойственной задачи;
- 3) свободные члены ограничений прямой задачи  $b_1, b_2, \dots, b_m$  становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи;
- 4) матрицу ограничений двойственной задачи получают транспонированием матрицы ограничений прямой задачи;
- 5) знаки неравенств в ограничениях изменяются на обратные;
- 6) число ограничений прямой задачи равно числу переменных двойственной задачи, а число ограничений двойственной задачи равно числу переменных прямой задачи.

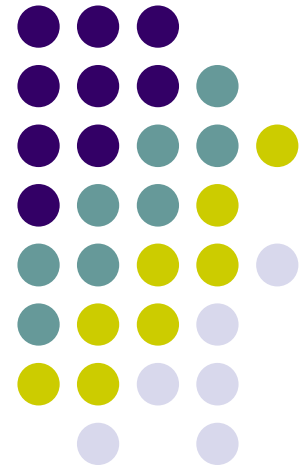
# **Анализ чувствительности моделей в задачах линейного программирования**

**Первая задача анализа  
на чувствительность модели  
(чувствительность к правой части)**

**Вторая задача анализа  
на чувствительность.**

**Третья задача анализа  
на чувствительность.**

**Примеры постановки ЗЛП: задачи об  
ассортименте, о диете, о раскрое.**



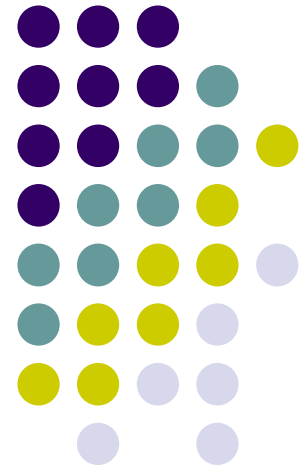
# Анализ чувствительности моделей в задачах линейного программирования

---

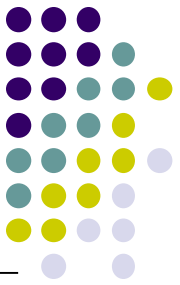
Первая задача  
анализа на чувствительность  
(к правой части)

Вторая задача  
анализа на чувствительность

Третья задача  
анализа на чувствительность  
(к коэффициентам целевой функции)



# Пример. Задача об использовании ресурсов



| Тип сырья | Расход сырья<br>(в тоннах)<br>на тонну краски |          | Запас<br>сырья, т |
|-----------|-----------------------------------------------|----------|-------------------|
|           | Краска 1                                      | Краска 2 |                   |
| Сырье А   | 1                                             | 2        | 6                 |
| Сырье Б   | 2                                             | 1        | 8                 |

# Математическая модель ЗЛП



Найти  $x_1, x_2$  :

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

При ограничениях:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 - x_1 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

- Переменные:

$x_1$  – суточный объем производства краски 1

$x_2$  – суточный объем производства краски 2

- Целевая функция:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

- Ограничения на расход:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \text{ (для A)}$$

$$2x_1 + x_2 \leq 8 \text{ (для B)}$$

- Ограничения на спрос:

$$- x_1 + x_2 \leq 1 \text{ (для красок 1 и 2)}$$

$$x_2 \leq 2 \text{ (для краски 2)}$$

# Область допустимых решений ЗЛП



Ограничения:

$$x_1 + 2x_2 \leq 6 \quad (1)$$

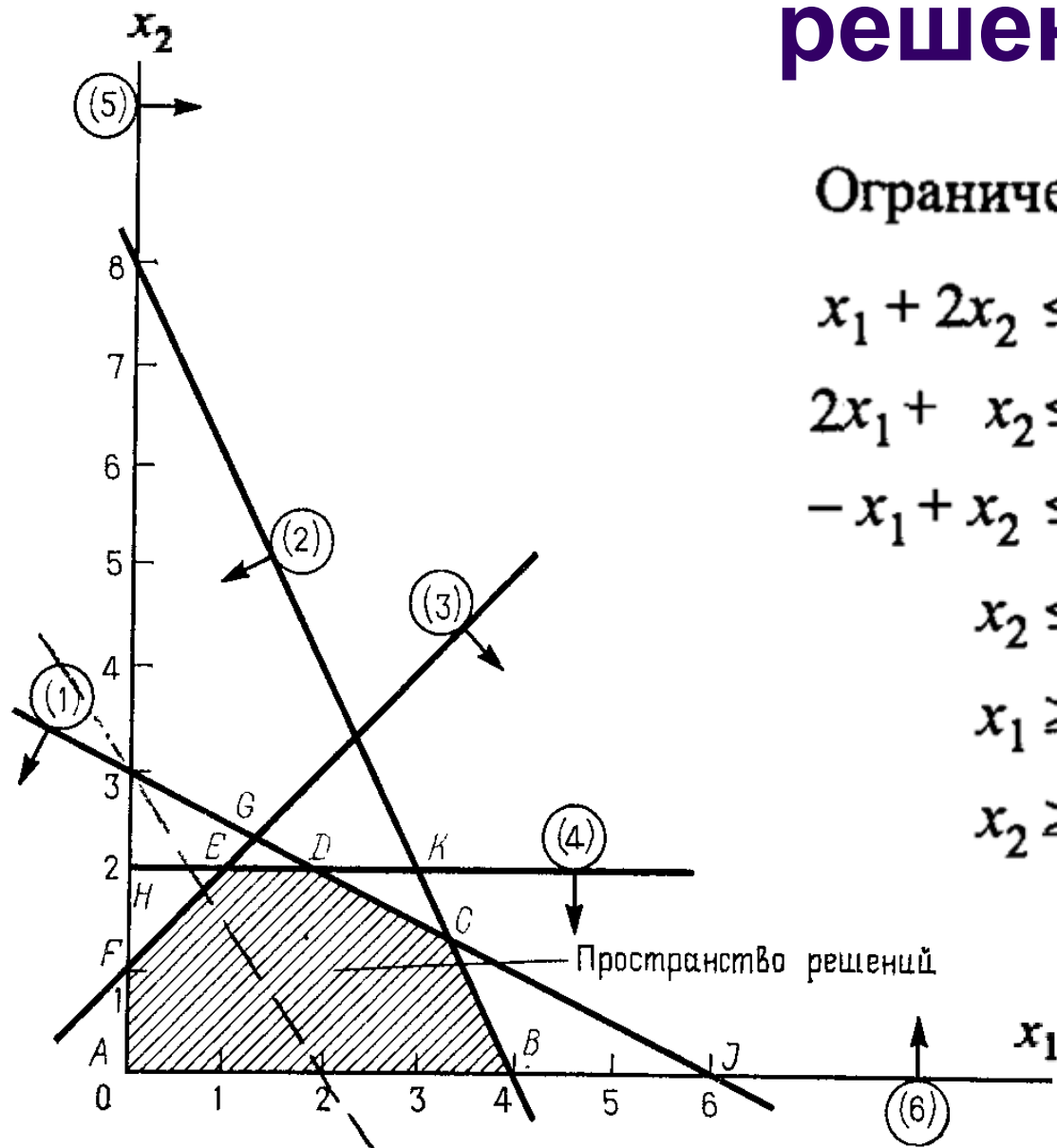
$$2x_1 + x_2 \leq 8 \quad (2)$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1 \quad (3)$$

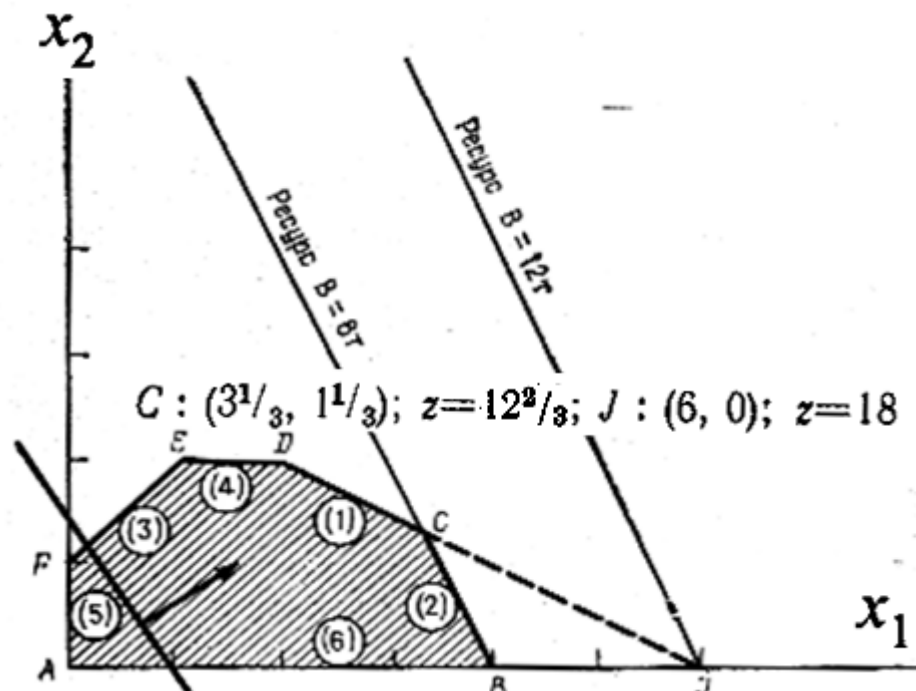
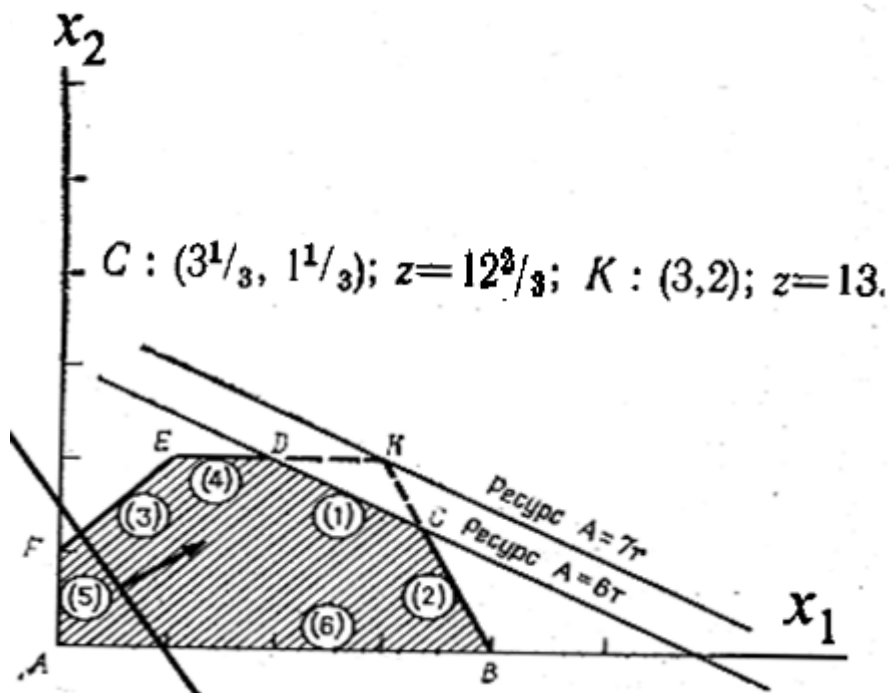
$$x_2 \leq 2 \quad (4)$$

$$x_1 \geq 0 \quad (5)$$

$$x_2 \geq 0 \quad (6)$$



# Первая задача анализа на чувствительность (чувствительность к правой части)



| Ресурс | Тип ресурса  | Максимальное изменение запаса ресурса, т | Максимальное изменение дохода от реализации $z$ , тыс. долл. |
|--------|--------------|------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| 1      | Дефицитный   | $7 - 6 = +1$                             | $13 - 12\frac{2}{3} = +\frac{1}{3}$                          |
| 2      | Дефицитный   | $12 - 8 = +4$                            | $18 - 12\frac{2}{3} = +5\frac{1}{3}$                         |
| 3      | Недефицитный | $-2 - 1 = -3$                            | $12\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 0$                          |
| 4      | Недефицитный | $1\frac{1}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$        | $12\frac{2}{3} - 12\frac{2}{3} = 0$                          |

# Вторая задача анализа на чувствительность



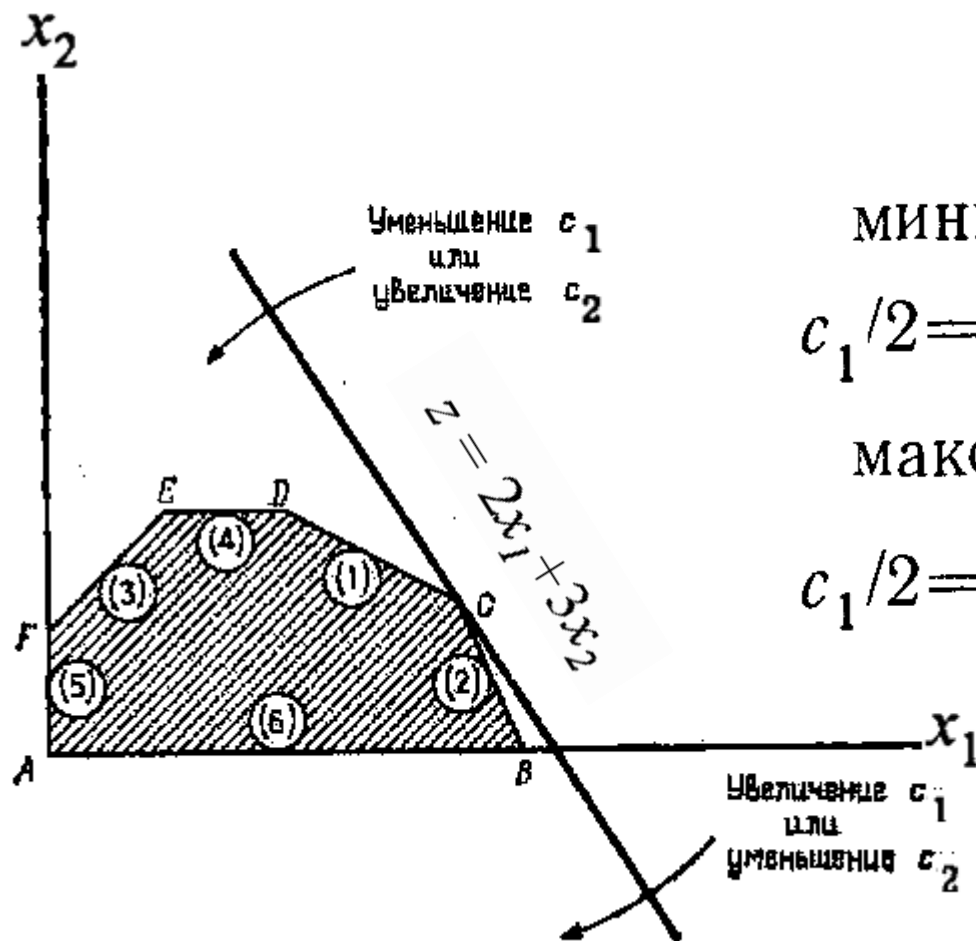
| Ресурс | Тип ресурса  | Значение $y_i$ ,<br>тыс. долл./тонна |
|--------|--------------|--------------------------------------|
| 1      | Дефицитный   | $y_1 = 1/3$                          |
| 2      | Дефицитный   | $y_2 = 4/3$                          |
| 3      | Недефицитный | $y_3 = 0$                            |
| 4      | Недефицитный | $y_4 = 0$                            |

$y_i = \frac{\text{Максимальное приращение оптимального значения } z}{\text{Максимально допустимый прирост объема ресурса } i}$

$$y_1 = \frac{13 - 12^{2/3}}{7 - 6} = 1/3 \text{ тыс. долл./тонна А}$$

$$y_2 = 4/3 \text{ тыс. долл./тонна Б.}$$

# Третья задача анализа на чувствительность модели



$$z = 2x_1 + 3x_2$$

минимальное значение  $c_1$   
 $c_1/2 = 1/2$ , откуда  $\min c_1 = 1$ ,  
максимальное значение  $c_1$   
 $c_1/2 = 2/1$ , откуда  $\max c_1 = 4$ .

# Задача распределения ресурсов. Постановка задачи



| Ресурсы        | Нормы расхода ресурсов на единицу изделия |                 |                  |               | Наличие ресурсов |
|----------------|-------------------------------------------|-----------------|------------------|---------------|------------------|
|                | Ковер «Силюга»                            | Ковер «Снегирь» | Ковер «Степашки» | Ковер «Дымка» |                  |
| Труд           | 7                                         | 2               | 2                | 6             | 80               |
| Сырье          | 5                                         | 8               | 4                | 3             | 480              |
| Оборудование   | 2                                         | 4               | 1                | 8             | 130              |
| Цена (ден.ед.) | 3                                         | 4               | 3                | 1             |                  |

- $X_1, X_2, X_3, X_4$  - количество ковров каждого типа

- Целевая функция :  $f(x) = 3X_1 + 4X_2 + 3X_3 + X_4$

- Ограничения:
 
$$7X_1 + 2X_2 + 2X_3 + 6X_4 \leq 80$$

$$5X_1 + 8X_2 + 4X_3 + 3X_4 \leq 480$$

$$2X_1 + 4X_2 + X_3 + 8X_4 \leq 130$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

# Форма для ввода условий задачи



|   | A        | B  | C           | D  | E  | F                    | G    | H         |
|---|----------|----|-------------|----|----|----------------------|------|-----------|
| 1 |          |    | Переменные  |    |    |                      |      |           |
| 2 |          | X1 | X2          | X3 | X4 |                      |      |           |
| 3 | значение |    |             |    |    | цел. ф-я             |      |           |
| 4 | коэфф.цф | 3  | 4           | 3  | 1  | <input type="text"/> |      |           |
| 5 |          |    | Ограничения |    |    |                      |      |           |
| 6 |          |    |             |    |    | лев. часть           | знак | правая ч. |
| 7 | труд     | 7  | 2           | 2  | 6  | 0                    | <=   | 80        |
| 8 | сырье    | 5  | 8           | 4  | 3  | 0                    | <=   | 480       |
| 9 | оборуд-е | 2  | 4           | 1  | 8  | 0                    | <=   | 130       |

# Ввод зависимости для целевой функции



СУММПРОИЗВ =СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3;B4:E4)

lab1.xls

|   | A        | B           | C          | D  | E  | F          | G    | H         | I |
|---|----------|-------------|------------|----|----|------------|------|-----------|---|
| 1 |          |             | Переменные |    |    |            |      |           |   |
| 2 |          | X1          | X2         | X3 | X4 |            |      |           |   |
| 3 | значение | 0           | 0          | 0  | 0  | цел. ф-я   |      |           |   |
| 4 | коэфф.цф | 3           | 4          | 3  | 1  | B4:E4      |      |           |   |
| 5 |          | Ограничения |            |    |    |            |      |           |   |
| 6 |          |             |            |    |    | лев. часть | знак | правая ч. |   |
| 7 | труд     | 7           | 2          | 2  | 6  | 0          | <=   | 80        |   |
| 8 | сырье    | 5           | 8          | 4  | 3  | 0          | <=   | 480       |   |
| 9 | оборуд-е | 2           | 4          | 1  | 8  | 0          | <=   | 130       |   |

СУММПРОИЗВ

Массив1 B\$3:E\$3 = {0;0;0;0}

Массив2 B4:E4 = {3;4;3;1}

Массив3 = массив

= 0

Возвращает сумму произведений соответствующих элементов массивов.

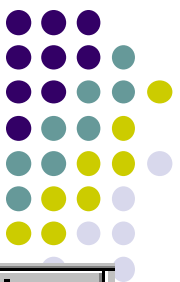
**Массив1:** массив1;массив2;... от 2 до 30 массивов, чьи компоненты нужно перемножить а затем сложить. Все массивы должны иметь одну и ту же размерность.

Значение: 0

OK Отмена

# Ввод параметров

## Поиск решения



|   | A        | B  | C           | D  | E  | F         | G    | H         |
|---|----------|----|-------------|----|----|-----------|------|-----------|
| 1 |          |    | Переменные  |    |    |           |      |           |
| 2 |          | X1 | X2          | X3 | X4 |           |      |           |
| 3 | значение |    |             |    |    | цел. ф-я  |      |           |
| 4 | коэфф.цф | 3  | 4           | 3  | 1  | 0         |      |           |
| 5 |          |    | Ограничения |    |    |           |      |           |
| 6 |          |    |             |    |    | лев.часть | знак | правая ч. |
| 7 | труд     | 7  | 2           | 2  | 6  | 0         | <=   | 80        |
| 8 | сырье    | 5  | 8           | 4  | 3  | 0         | <=   | 480       |
| 9 | оборуд-е | 2  | 4           | 1  | 8  | 0         | <=   | 130       |

### Поиск решения

Установить целевую

\$F\$4

Равной: ☒ максимальному значению

☐ значению:

0

☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

\$B\$3:\$E\$3

Предположить

Ограничения:

\$F\$7 <= \$H\$7

\$F\$8 <= \$H\$8

\$F\$9 <= \$H\$9

Добавить

Изменить

Удалить

Выполнить

Заккрыть

Параметры

Восстановить

Справка

# Ввод параметров решения ЗЛП



## Параметры поиска решения

Максимальное время:  секунд

Предельное число итераций:

Относительная погрешность:

Допустимое отклонение:  %

Сходимость:

ОК

Отмена

Загрузить модель...

Сохранить модель...

Справка

☒ Линейная модель

☐ Автоматическое масштабирование

☒ Неотрицательные значения

☐ Показывать результаты итераций

Оценки

☒ линейная

☐ квадратичная

Разности

☒ прямые

☐ центральные

Метод поиска

☒ Ньютона

☐ сопряженных градиентов

# Диалоговое окно Результаты поиска решения



|    | A        | B  | C           | D  | E  | F          | G    | H         |
|----|----------|----|-------------|----|----|------------|------|-----------|
| 1  |          |    | Переменные  |    |    |            |      |           |
| 2  |          | X1 | X2          | X3 | X4 |            |      |           |
| 3  | значение | 0  | 30          | 10 | 0  | цел. ф-я   |      |           |
| 4  | коэфф.цф | 3  | 4           | 3  | 1  | 150        |      |           |
| 5  |          |    | Ограничения |    |    |            |      |           |
| 6  |          |    |             |    |    | лев. часть | знак | правая ч. |
| 7  | труд     | 7  | 2           | 2  | 6  | 80         | <=   | 80        |
| 8  | сырье    | 5  | 8           | 4  | 3  | 280        | <=   | 480       |
| 9  | оборуд-е | 2  | 4           | 1  | 8  | 130        | <=   | 130       |
| 10 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 11 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 12 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 13 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 14 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 15 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 16 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 17 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 18 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 19 |          |    |             |    |    |            |      |           |
| 20 |          |    |             |    |    |            |      |           |

Результаты поиска решения

?

X

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

☒ Сохранить найденное решение
 ☐ Восстановить исходные значения

Тип отчета

Результаты  
 Устойчивость  
 Пределы

ОК

Отмена

Сохранить сценарий...

Справка



# Отчет по результатам

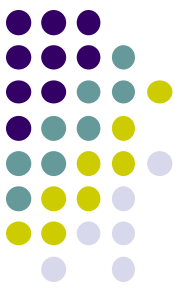
|    | A                         | B      | C   | D                 | E              | F          | G       |
|----|---------------------------|--------|-----|-------------------|----------------|------------|---------|
| 1  | Целевая ячейка (Максимум) |        |     |                   |                |            |         |
| 2  |                           | Ячейка | Имя | Исходное значение | Результат      |            |         |
| 3  |                           | \$F\$4 |     | 150               | 150            |            |         |
| 4  |                           |        |     |                   |                |            |         |
| 5  | Изменяемые ячейки         |        |     |                   |                |            |         |
| 6  |                           | Ячейка | Имя | Исходное значение | Результат      |            |         |
| 7  |                           | \$B\$3 |     | 0                 | 0              |            |         |
| 8  |                           | \$C\$3 |     | 30                | 30             |            |         |
| 9  |                           | \$D\$3 |     | 10                | 10             |            |         |
| 10 |                           | \$E\$3 |     | 0                 | 0              |            |         |
| 11 | Ограничения               |        |     |                   |                |            |         |
| 12 |                           | Ячейка | Имя | Значение          | Формула        | Статус     | Разница |
| 13 |                           | \$F\$7 |     | 80                | \$F\$7<=\$H\$7 | связанное  | 0       |
| 14 |                           | \$F\$8 |     | 280               | \$F\$8<=\$H\$8 | не связан. | 200     |
| 15 |                           | \$F\$9 |     | 130               | \$F\$9<=\$H\$9 | связанное  | 0       |
| 16 |                           |        |     |                   |                |            |         |



# Отчет по устойчивости

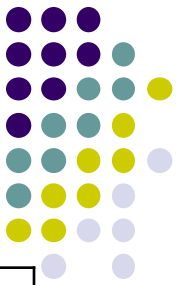
|    | A                 | B   | C        | D            | E            | F           | G          | H |
|----|-------------------|-----|----------|--------------|--------------|-------------|------------|---|
| 1  | Изменяемые ячейки |     |          |              |              |             |            |   |
| 2  |                   |     | Результ. | Нормир.      | Целевой      | Допустимое  | Допустимое |   |
| 3  | Ячейка            | Имя | значение | стоимость    | Коэффициент  | Увеличение  | Уменьшение |   |
| 4  | \$B\$3            |     | 0        | -7           | 3            | 7           | 1E+30      |   |
| 5  | \$C\$3            |     | 30       | 0            | 4            | 8           | 1          |   |
| 6  | \$D\$3            |     | 10       | 0            | 3            | 1           | 1,75       |   |
| 7  | \$E\$3            |     | 0        | -9,666666667 | 1            | 9,666666667 | 1E+30      |   |
| 8  |                   |     |          |              |              |             |            |   |
| 9  | Ограничения       |     |          |              |              |             |            |   |
| 10 |                   |     | Результ. | Теневая      | Ограничение  | Допустимое  | Допустимое |   |
| 11 | Ячейка            | Имя | значение | Цена         | Правая часть | Увеличение  | Уменьшение |   |
| 12 | \$F\$7            |     | 80       | 1,333333333  | 80           | 150         | 15         |   |
| 13 | \$F\$8            |     | 280      | 0            | 480          | 1E+30       | 200        |   |
| 14 | \$F\$9            |     | 130      | 0,333333333  | 130          | 30          | 90         |   |

# Отчет по пределам



|    | A                 | B   | C        | D            | E            | F           | G          | H |
|----|-------------------|-----|----------|--------------|--------------|-------------|------------|---|
| 1  | Изменяемые ячейки |     |          |              |              |             |            |   |
| 2  |                   |     | Результ. | Нормир.      | Целевой      | Допустимое  | Допустимое |   |
| 3  | Ячейка            | Имя | значение | стоимость    | Коэффициент  | Увеличение  | Уменьшение |   |
| 4  | \$B\$3            |     | 0        | -7           | 3            | 7           | 1E+30      |   |
| 5  | \$C\$3            |     | 30       | 0            | 4            | 8           | 1          |   |
| 6  | \$D\$3            |     | 10       | 0            | 3            | 1           | 1,75       |   |
| 7  | \$E\$3            |     | 0        | -9,666666667 | 1            | 9,666666667 | 1E+30      |   |
| 8  |                   |     |          |              |              |             |            |   |
| 9  | Ограничения       |     |          |              |              |             |            |   |
| 10 |                   |     | Результ. | Теневая      | Ограничение  | Допустимое  | Допустимое |   |
| 11 | Ячейка            | Имя | значение | Цена         | Правая часть | Увеличение  | Уменьшение |   |
| 12 | \$F\$7            |     | 80       | 1,333333333  | 80           | 150         | 15         |   |
| 13 | \$F\$8            |     | 280      | 0            | 480          | 1E+30       | 200        |   |
| 14 | \$F\$9            |     | 130      | 0,333333333  | 130          | 30          | 90         |   |

# Создание отчета по результатам поиска решения



| Целевая ячейка (максимум) |                          |          |                |
|---------------------------|--------------------------|----------|----------------|
| Ячейка                    | Имя                      | Исходно  | Результат      |
| \$F\$4                    | коэфф. цел. функции      | 0        | 150            |
| Изменяемые ячейки         |                          |          |                |
| Ячейка                    | Имя                      | Исходно  | Результат      |
| \$B\$3                    | Значение X1              | 0        | 0              |
| \$C\$3                    | Значение X2              | 0        | 30             |
| \$D\$3                    | Значение X3              | 0        | 10             |
| \$E\$3                    | Значение X4              | 0        | 0              |
| Ограничения               |                          |          |                |
| Ячейка                    | Имя                      | Значение | Формула        |
| \$F\$7                    | Труд левая часть         | 80       | \$F\$7<=\$H\$7 |
| \$F\$8                    | Сырье левая часть        | 280      | \$F\$8<=\$H\$8 |
| \$F\$9                    | Оборудование левая часть | 130      | \$F\$9<=\$H\$9 |