Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.В. Зайцева, А.С. Шебукова

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
РГГМУ
2022

УДК 512.743(075.8)
ББК 22.143я73
З-17

Печатается по решению Учебно-методического совета РГГМУ

Рецензенты:

Гурнович Татьяна Генриховна, доктор экономических наук, профессор, профессор кафедры финансового менеджмента и банковского дела ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет»;
Тарасенко Елена Олеговна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной математики и кибернетики ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»

Зайцева И.В., Шебукова А.С.
З-17 Линейная алгебра для экономистов: учебное пособие / И.В. Зайцева; А.С. Шебукова. – Санкт-Петербург : РГГМУ, 2022. – 212 с.

ISBN 978-5-86813-551-4

Учебное пособие составлено в соответствие с рабочей программой дисциплины «Линейная алгебра для экономистов» (для студентов направлений 38.03.05 Бизнес-информатика, 38.03.04 Государственное и муниципальное управление, 38.03.01 Экономика). В учебном пособии изложен материал по курсу линейной алгебры для студентов экономических направлений. Представлены основные теоретические сведения и примеры решения типичных задач, рекомендации по изучению дисциплины. В учебном пособии определяются понятия системы линейных уравнений, линейного пространства, линейного оператора, собственных чисел и собственных векторов линейных операторов. Приводятся рекомендуемая литература и задания для контрольных работ. Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений. Также может быть полезно инженерам и научным работникам разных специальностей, изучающим или использующим методы линейной алгебры.

УДК 512.743(075.8)
ББК 22.143я73

ISBN 978-5-86813-551-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В данном учебном пособии излагаются основные факты курса «Линейная алгебра». Линейная алгебра с ее методами предоставляет аппарат для единообразного изучения различных линейных физических и математических процессов. С помощью методов линейной алгебры изучаются и нелинейные задачи на основе линеаризации. Многие нелинейные методы испытывают на линейных моделях. Линейная алгебра позволяет установить связь между различными разделами математики.

Учебное пособие охватывает основные разделы базового курса линейной алгебры. Пособие включает девять глав, которые разбиваются на параграфы и лекции. В учебном пособии рассматриваются такие важные понятия как: понятия линейного пространства, базиса, линейного отображения, собственного элемента и собственного значения, матрицы линейного оператора и квадратичной формы, определителя и ранга матрицы. Глава посвящена системам линейных уравнений и определителям. Авторы излагают те теоретические вопросы, знание которых является необходимым минимумом для усвоения материала, рассматриваемого в последующих главах. Значительное место отведено рассмотрению определителей различных порядков, а также способам их вычисления. Подробно рассматриваются линейные, билинейные и квадратичные формы, понятия аффинных пространств и аффинных координат, изучаются плоскости и их взаимное расположение, линейные преобразования евклидова пространства. Данное пособие охватывает теоретический материал теории групп. Наряду со сведениями теоретического характера в пособии разбирается значительное число примеров и задач, цель которых – уяснение основных понятий.

В учебном пособии представлены приложения. В приложениях приведены материалы, связанные с применением математического анализа к моделированию демографических аспектов интеллектуальной аналитической системы.

Учебное пособие предназначено для студентов высших учебных заведений. Основным назначением пособия является помощь студентам в изучении и активном усвоении сложного материала. В результате изучения данного пособия студенты должны уметь выполнять действия с матрицами, знать свойства действий над матрицами, находить определители квадратных матриц и использовать свойства определителей, вычислять обратную матрицу, освоить методы решения систем линейных алгебраических уравнений. Также учебное пособие может быть полезно инженерам и научным работникам разных специальностей, изучающим или использующим методы линейной алгебры.

Дополнительные теоретические сведения для более глубокого изучения того или иного параграфа можно получить из книг, приведенных в списке литературы.

ГЛАВА I. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

§1. Системы линейных уравнений

В самом общем случае система линейных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \qquad (1)$$

или кратко:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, x_j = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{kj}\, x_j = b_k. \end{cases} \qquad (1')$$

Через $x_1, x_2, \dots, x_n$ обозначены неизвестные. Следует заметить, что число неизвестных не предполагается обязательно равным числу уравнений. Числа $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{kn}$ называются коэффициентами системы (1) и образуют $k \times$ n -матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

которая называется основной матрицей системы (1). Первый индекс коэффициента указывает номер уравнения, в котором он фигурирует, а второй индекс – номер неизвестного, при котором этот коэффициент поставлен. Будем считать в дальнейшем, что матрица A не нулевая, то есть среди коэффициентов системы (1) есть отличные от нуля. Числа $b_1, b_2, \dots, b_n$, стоящие в правых частях равенства (1), называются свободными членами уравнений системы, которые предполагаются известными.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} b_k \end{pmatrix}$ называется расширенной матрицей системы (1).

Определение 1. Решением системы линейных уравнений (1) называется совокупность чисел $c_1, c_2, \dots, c_n$, которая после подстановки вместо неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, обращает все уравнения системы в арифметические тождества.

Замечание 1. Если обозначить через $\boldsymbol{x}$ вектор $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, записанный в виде столбца, то систему (1) можно представить в виде матричного уравнения $A\boldsymbol{x} = b$.

Не всякая система линейных уравнений вида (1) имеет решение. Например, система

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{cases} \qquad (2)$$

не может иметь ни одного решения. Действительно, какие бы числа c_1, c_2 ни подставили на место неизвестных x_1, x_2, левые части уравнений системы (2) окажутся совпадающими, в то время как правые части различны. Поэтому оба уравнения системы (2) такой подстановкой не могут быть одновременно обращены в тождества.

Определение 2. Систему уравнений вида (1), имеющую хотя бы одно решение, будем называть совместной. Систему, не имеющую решений, будем называть несовместной.

Совместная система может иметь одно решение или более чем одно. В последнем случае для различия решений будем указывать их номера индексами наверху в скобках.

Определение 3. Решение $\mathrm{c}_1^1, \mathrm{c}_2^1, \dots, \mathrm{c}_\mathrm{n}^1$ и $\mathrm{c}_1^2, \mathrm{c}_2^2, \dots, \mathrm{c}_\mathrm{n}^2$ считаются различными, если хотя бы одно из чисел c_i^1 не совпадает с соответствующим числом c_i^2 $(\mathrm{i} = 1, 2, \dots, \mathrm{n})$. Например, система

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases} \qquad (3)$$

имеет различные решения $c_1^1 = c_2^1 = 0$, $c_1^2 = 3$, $c_2^2 = -2$, а также бесконечное множество других решений.

Определение 4. Если совместная система имеет единственное решение, она называется определенной. Если совместная система имеет, по крайней мере, два различных решения, она называется неопределенной.

Определение 5. Система линейных уравнений (1) является однородной, если свободный член каждого уравнения системы равен нулю: $b_i = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Однородная система всегда является совместной.

Системы линейных уравнений (1) с помощью элементарных преобразований приводятся к равносильным системам.

1. Если какое-либо уравнение системы умножить на некоторое отличное от нуля число, а остальные уравнения оставить без изменения, то получится система, равносильная данной.

2. Если к какому-либо уравнению системы прибавить другое, а все остальные уравнения оставить без изменения, то получится система, равносильная данной.

3. Если к какому-либо уравнению прибавить другое, умноженное на некоторое число, а все остальные уравнения оставить без изменения, то получится система, равносильная данной.

4. Если система уравнений содержит тривиальное уравнение, то его можно исключить из системы, при этом получится система равносильная исходной.

5. Если система уравнений содержит противоречивое уравнение, то она несовместна.

Классическим методом решения систем линейных алгебраических уравнений является метод последовательного исключения неизвестных – метод

Гаусса (его еще называют методом Жордана-Гаусса). Это метод последовательного исключения переменных, заключающийся в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида, из которого последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Выразив из первого уравнения системы (1) одну неизвестную через другую и подставив ее во второе уравнение, после приведения подобных получим в итоге линейное уравнение вида $Ax = B$ с одним неизвестным x. При этом возможны три варианта:

1. $A \neq 0$, тогда из уравнения $Ax = B$ однозначно находится $x = \frac{b}{a}$, а затем по этому x однозначно находится и другие неизвестные, в итоге получим единственное решение системы (1).

2. $A = 0$, $b \neq 0$, тогда уравнение $Ax = B$ оказывается противоречивым и не имеет решений, а вместе с ним не имеет решений и система (1).

3. $A = 0$, $B = 0$, тогда уравнение $Ax = B$ принимает вид $0x = 0$ и удовлетворяется при любых x. В итоге будем иметь бесчисленное множество пар неизвестных системы (1).

Метод Гаусса практичен, но для теоретических исследований удобен другой способ. Основным математическим инструментом для изучения линейных систем является теория определителей.

<u>Пример.</u> Построить полином $f(x)$ степени не выше $n-1$, который в заданных n различных точках $x_1, x_2, \dots, x_n$ принимает заданные значения $y_1, y_2, \dots, y_n$, т.е. $f(x_i) = y_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Решение. Пусть $n = 4$, полином $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$. Пусть значения x_i и y_i заданы таблицей $\frac{y_i| \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 7}{x_i| \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4}$. Подставим в равенства $f(x_i) = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + a_3 x_i^3 = y_i$ значения x_i и y_i в соответствии с таблицей. Получим систему 4 линейных уравнений относительно 4 неизвестных a_0, a_1, a_2, a_3:

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 3,$$
$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 2,$$
$$a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 5,$$
$$a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 7.$$

Будем решать эту систему методом Гаусса. Для этого выпишем «расширенную матрицу коэффициентов» этой системы и проделаем ряд элементарных преобразований над строками с целью получения нулей под главной диагональю (прямой ход метода Гаусса), затем с целью получения единиц на главной диагонали и, далее, нулей над главной диагональю (обратный ход метода Гаусса):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 9 & 27 & 5 \\ 1 & 4 & 16 & 64 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 5 & 19 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & 37 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 18 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{23}{6} \\ 0 & 1 & 3 & 0 & \frac{29}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -\frac{19}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{97}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{97}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{6} \end{pmatrix}$$

Замечание. Переход от первой матрицы ко второй получен с помощью вычитания предыдущих строк из последующих. Аналогично получен переход от второй матрицы к третьей. Далее, процесс продолжается очевидным для метода Гаусса образом.

В итоге получим решение: $a_0 = 13,\ a_1 = -{}^{97}/_{6}$, $a_2 = 7,\ a_3 = -{}^{5}/_{6}$. То есть, получим полином $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 13 - {}^{97}/_{6}\,x + 7x^2 - {}^{5}/_{6}\,x^3$.

Позже, когда будет доказана теорема Крамера решения системы n уравнений с n неизвестными, и рассмотрен определитель Вандермонда, станет ясно, что исходная задача в общем случае (т.е. при произвольном n) имеет единственное решение.

Пример 1. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad X = A^{-1}B$$

Найдем матрицу обратную матрице A.

$$|A| = -5, \qquad A' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|A| = -5, \qquad A^{-1}B = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -15 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $x = 3, y = -1$.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_1 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3&1\\0&2\end{vmatrix}=3-12=-9,$$

$$A'=\begin{pmatrix}3&-6&3\\-4&2&-1\\2&-1&-4\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\3&-1&-4\end{pmatrix}.$$

$$X=A^{-1}B=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\3&-1&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\23\\13\end{pmatrix}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}-36\\-27\\-45\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1=4, x_2=3, x_3=5.$

Пример 2. Решить матричное уравнение:

$XA+B=C,$ где $A=\begin{pmatrix}2&5\\3&7\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}5&3\\-2&-5\end{pmatrix},$ $C=\begin{pmatrix}5&4\\-1&-3\end{pmatrix}.$

Выразим искомую матрицу X из заданного уравнения.

$$XA=C-B=\begin{pmatrix}5&4\\-1&-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}5&3\\-2&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}.$$

$$=(C-B)\cdot A^{-1}$$

Найдем матрицу A^{-1}.

$$|A|=-1,\qquad A=\begin{pmatrix}7&-3\\-5&2\end{pmatrix},\qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-7&5\\3&-2\end{pmatrix}.$$

$$X=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-7&5\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}$$

Проверка:

$$X\cdot A=\begin{pmatrix}3&-2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5\\3&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$$

$$XA+B=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&3\\-2&-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&4\\-1&-3\end{pmatrix}=C.$$

Пример 3. Решить матричное уравнение:

$AX+B=C,$ где $A=\begin{pmatrix}7&4\\-2&-1\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}1&4\\-3&-8\end{pmatrix},$ $C=\begin{pmatrix}2&4\\-3&-5\end{pmatrix}.$

Из уравнения получаем $X=A^{-1}(C-B).$

$C-B=\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}.$ $|A|=-1,$ $A^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-4\\2&7\end{pmatrix}$

Следовательно,

$X=\begin{pmatrix}-1&-4\\2&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-12\\2&21\end{pmatrix}.$

§2. Определители 2-го и 3-го порядка

Пусть дана квадратная матрица, т. е. таблица из n^2

чисел a_{ij} $(i,j = 1, 2, \ldots, \mathrm{n})$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Число n, указывающее количество строк и столбцов матрицы (4), называется ее порядком. Числа a_{ij} называются элементами матрицы А. Первый и второй индексы у элемента a_{ij} указывают соответственно номер строки и столбца, в которых расположен этот элемент. Элементы $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы А.

Рассмотрим любое произведение n элементов, расположенных в различных строках и различных столбцах матрицы (4), по одному в каждой строке и в каждом столбце, которое можно записать в виде

$$a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \ldots, a_{n\alpha_n}. \tag{5}$$

Индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ являются номерами строк, в которых расположены сомножители произведения (5), в соответствии с принятым порядком их записи по возрастанию индексов столбцов.

Так как, по условию элементы $a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \ldots, a_{n\alpha_n}$ расположены в различных строках матрицы (4), по одному в каждой строке, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ все различны и представляют собой некоторую перестановку чисел $1, 2, \ldots, \mathrm{n}$.

Число всех произведений вида (5), которые можно составить из элементов данной матрицы n-го порядка, равно числу всех возможных перестановок чисел $1, 2, \ldots, \mathrm{n}$, которое равно $n!$.

Определение. Определителем матрицы (4) называется алгебраическая сумма, состоящая из $n!$ всевозможных произведений вида (5), перед каждым из которых поставлен знак, определенный по правилу:

$$D = \sum (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \ldots, a_{n\alpha_n}. \tag{6}$$

Произведения вида (5) будем называть членами определителя, а элементы a_{ij} матрицы (4) – элементами определителя.

Определитель матрицы (4) обозначается одним из следующих символов:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = det\left|a_{ij}\right| = det\left|a_{ij}\right|_{i,j=1,2,\dots,\mathrm{n}}. \quad (7)$$

Для определителей 2-го и 3-го порядка получим следующие выражения:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Покажем роль определителей при решении систем линейных уравнений на примере системы из двух уравнений с двумя неизвестными. Если дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases}$$

то, исключая обычным образом одно из неизвестных, можно получить формулы

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

$$x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}},$$

в предположении, что знаменатели этих отношений отличны от нуля. Числители и знаменатели получающихся дробей представляют собой определители 2-го порядка:

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Аналогичные формулы имеют место и для решения систем с любым числом неизвестных.

Правило для определения знака данного члена определителя в геометрических терминах можно сформулировать несколько иначе (рис. 1).

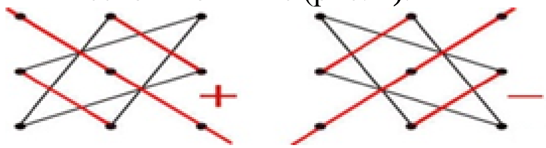

Рисунок 1

В матрице (4) в соответствии с нумерацией элементов естественно выделяются положительные направления: слева направо – вдоль строк, сверху вниз – вдоль столбцов. Вместе с этим и косые отрезки, соединяющие два каких-либо элемента матрицы, можно снабдить указанием направления: будем говорить, что отрезок, соединяющий элемент a_{ij} с элементом a_{km}, имеет положительный наклон, если его правый конец расположен ниже левого, и отрицательный наклон, если его правый конец лежит выше, чем левый. Мысленно проведем в матрице (4) все отрезки, соединяющие попарно элементы $a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \dots, a_{n\alpha_n}$ произведения (5) и при этом имеющие отрицательный наклон. Будем ставить перед произведением (5) знак « $+$ », если число всех таких отрезков четно, и знак « $-$ », если их число нечетно.

§3. Определители *n*-го порядка

Определение определителя приведено в §2. Рассмотрим свойства определителей.

I. *Операция транспонирования.*

Определение 1. Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (8)$$

полученный из определителя (7) заменой строк на столбцы с теми же номерами, называется транспонированным по отношению к определителю (7).

Величина транспонированного определителя совпадает с величиной исходного определителя:

$$\Delta(|a_{ij}|) = \Delta\left(|a_{ij}|^T\right).$$

Доказательство. Действительно, определители (7) и (8) состоят из одних и тех же членов, поэтому достаточно показать, что одинаковые члены обладают в определителях (7) и (8) и одинаковыми знаками. Транспонирование матрицы определителя, очевидно, есть результат ее поворота на 180° вокруг диагонали $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. При этом повороте каждый отрезок с отрицательным наклоном (например, образующий угол $\alpha < 90^\circ$ со строками матрицы) переходит снова в отрезок с отрицательным наклоном, а именно, образующий со строками матрицы угол $(90^\circ - \alpha)$. Поэтому число отрезков с отрицательным наклоном, соединяющих элементы данного члена, после транспонирования не изменится. Следовательно, не изменится и знак этого члена. Таким образом, знаки всех членов матрицы сохранятся, тем самым величина определителя останется неизменной:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \xrightarrow{T} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \dots & \alpha_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что строки и столбцы равносильны. ■

Доказанное свойство определителя устанавливает равноправие его строк и столбцов. Поэтому дальнейшие свойства определителей будем формулировать и доказывать только для строк.

II. *Свойство антисимметричности.*

Определение 2. Под *антисимметричностью* относительно строк понимают свойство определителя менять знак при перестановке двух строк.

Для начала рассмотрим случай, когда переставляются две соседних строки определителя, например i-ая и $(i+1)$-ая. Определитель, полученный после перестановки строк, будет состоять из тех же самых членов, что и исходный определитель. Рассмотрим произвольный из членов исходного определителя. Этот член в своем составе имеет элемент из i-ой строки и элемент из $(i+1)$-ой строки. Если отрезок, соединяющий эти два элемента, имел отрицательный наклон, то после перестановки строк его наклон станет положительным, и наоборот. Что же касается остальных отрезков, соединяющих попарно элементы выделенного члена, то после перестановки строк характер наклона каждого из них останется неизменным. Следовательно, количество отрезков с отрицательным наклоном, соединяющих элементы данного члена, при перестановке строк заведомо изменяется на единицу, поэтому каждый член определителя, а, следовательно, и сам определитель, при перестановке строк меняет знак.

Пусть теперь переставляются не соседние строки, а, например, i-ая строка с k-ой строкой, причем между ними находится m других строк и $i<\mathrm{k}$. Такую перестановку можно осуществить последовательными перестановками соседних строк в следующем порядке: сначала i-ая строка переставляется с $(i+1)$-ой, далее с $(i+2)$-ой, $(i+3)$-ой, …, k-ой, затем получившаяся $(\mathrm{k}-1)$-ая строка (ранее k-ая) переставляется с $(\mathrm{k}-2)$-ой, $(\mathrm{k}-3)$-ой, …, i-ой. Всего понадобится $\mathrm{m}+1+\mathrm{m}=2\mathrm{m}+1$ перестановок соседних строк. После каждой из них, по доказанному, определитель изменяет знак, а значит, в конце процесса будет иметь знак, противоположный начальному ($(2\mathrm{m}+1)$ при любом целом m есть нечетное число).

III. *Определитель, имеющий две одинаковых строки, равен нулю.*

Доказательство. Действительно, переставляя две одинаковых строки, определитель не меняется. С другой стороны, по доказанному, он должен изменить свой знак. Таким образом, $D = -D$, следовательно, $D = 0$. ■

IV. *Линейное свойство определителя.*

Если все элементы i-ой строки определителя D представлены в виде «линейной комбинации» двух слагаемых

$$a_{ij} = \lambda b_i + \mu c_i,\ i = 1,2,\dots,n,$$

где λ и μ – фиксированные числа, то определитель D равен такой же линейной комбинации двух определителей:

$$D = \lambda D_1 + \mu D_2,\ i = 1,2,\dots,n,\ \ j = 1,2,\dots,n. \qquad (9)$$

Причем у каждого из этих двух определителей все строки, кроме i-ой, такие же, как у определителя D, а i-ая строка состоит у определителя D_1 из чисел b_i, у определителя D_2 – из чисел c_i.

Доказательство. Действительно, всякий член определителя D можно представить в виде

$$a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{j\alpha_j} \dots a_{n\alpha_n} = a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots \left(\lambda b_{\alpha_j} + \mu c_{\alpha_j}\right) \dots a_{n\alpha_n} =$$
$$= \lambda a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots b_{\alpha_j} \dots a_{n\alpha_n} + \mu a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots c_{\alpha_j} \dots a_{n\alpha_n}.$$

Собирая вместе первые слагаемые (с теми знаками, которые имели соответствующие члены первого определителя) и вынося за скобки число λ, очевидно, получим в скобках, определитель D_1. Аналогично, собирая вторые слагаемые и вынося за скобки число μ, получим определитель D_2. Таким образом, формула (9) установлена. ■

Эту формулу удобнее записать в другом виде. Пусть D – произвольный фиксированный определитель. Обозначим через $D_j p_i$ определитель, который получается при замене элементов j-го столбца определителя D на числа p_i, $i = 1, 2, \dots, \mathrm{n}$. Исходный определитель можно записать в форме $D(a_{ij})$. Тогда доказанное равенство (9) принимает вид

$$D_j(\lambda b_i + \mu c_i) = \lambda D_j(b_i) + \mu D_j(c_i).$$

Линейное свойство определителя распространяется и на тот случай, когда каждый элемент j-го столбца есть линейная комбинация любого фиксированного числа слагаемых:

$$a_{ij} = \lambda b_i + \mu c_i + \dots + \tau f_i.$$

В этом случае

$$D_j(a_{ij}) = D_j(\lambda b_i + \mu c_i + \dots + \tau f_i) = \lambda D_j(b_i) + \mu D_j(c_i) + \dots + \tau D_j(f_i). \quad (10)$$

V. *Общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно вынести за знак определителя.*

Доказательство. В самом деле, если $a_{ij} = \lambda b_i$, то по формуле (10)

$$D_j(a_{ij}) = D_j(\lambda b_i) = \lambda D_j(b_i),$$

что и утверждается. ■

VI. *Если некоторая строка определителя состоит целиком из нулей, то определитель равен нулю.*

Доказательство. В самом деле, 0 есть общий множитель элементов данной строки. Вынося его за знак определителя, получим

$$\mathrm{D_j}(0) = \mathrm{D_j}(0 \cdot 1) = 0 \cdot \mathrm{D_j}(1) = 0. \ ■$$

VII. *Если определитель имеет две пропорциональные строки, то он равен нулю* (следует из III и V).

VIII *Если одна из строк есть линейная комбинация других, то определитель равен нулю.*

IX *Прибавление к одной строке другой строки с произвольным множителем.*

Определитель не изменится, если к элементам одной *из его строки прибавить соответствующие элементы любой другой строки, умноженные на фиксированное число.*

Доказательство. Пусть i-ой строке прибавляется k-ая $(\mathrm{k} \neq \mathrm{i})$, умноженная на число λ. В полученном определителе -ая строка будет состоять из элементов вида $a_{ij} + \lambda a_{ik}$. В силу формулы (9)

$$D_j(a_{ij}) = (a_{ij} + \lambda a_{ik}) = D_j(a_{ij}) + \lambda D_j(a_{ik}).$$

Во втором определителе i-ая строка состоит из элементов a_{ik}, т. е. совпадает с i-ой строкой. По свойству III $\mathrm{D_j}(a_{ik}) = 0$, откуда

$$\mathrm{D_j}(\mathrm{a_{ij}} + \lambda a_{ik}) = \mathrm{D_j}(\mathrm{a_{ij}}),$$

что и требовалось доказать. ■

X. *С*войство *IX* можно сформулировать в более общей форме: *определитель D не изменится, если к элементам его i-ой строки прибавить соответствующие элементы k-ой строки, умноженные на число λ, затем элементы 1-ой строки, умноженные на число μ, ..., элементы p-ой строки, умноженные на число τ $(k \neq j, l \neq j, \ldots, p \neq j)$.*

Все свойства, доказанные в этом параграфе для строк определителя, в силу неизменности определителя при транспонировании, остаются справедливыми и для его столбцов.

Рассмотрим два связанных между собой примера на вычисление определителей матриц n-го порядка:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} \text{ и } |B_n| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 1. При рассмотрении определителей n-го порядка нужно четко представлять себе их структуру. Для этого можно рассматривать конкретные определители небольшого порядка, например при $n = 4$. То есть, от исходных определителей перейти к определителям:

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \text{ и } |B_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 2. Вычисление определителей малого порядка нужно стараться производить таким методом, чтобы его было легко обобщить на определители большего порядка.

Замечание 3. По возможности стараться запоминать приемы вычисления определителей, чтобы применять их к вычислению других определителей (сводить вычисление неизвестных определителей к уже известным).

Решение. Для вычисления определителя $|A_4|$ прибавим первую строку ко второй, затем полученную – к третьей, затем полученную к четвертой, получим:

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Достаточно очевидно, что $|A_n| = 1$.

Для вычисления определителя $|B_4|$ представим его первую строку в виде двух строк, т.е. представим определитель в виде суммы двух определителей:

$$|B_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

С учетом того, что первый из двух определителей равен $|A_4| = 1$, после разложения второго определителя из суммы по первой строке получим:

$$|B_4| = |A_4| + |B_3| = 1 + |B_3|.$$

Поскольку $|B_2| = 3$, то $|B_3| = 1 + |B_2| = 4$, $|B_4| = 1 + |B_3| = 5$, то очевидно, что $|B_n| = 1 + |B_{n-1}| = 1 + n$.

Конечно, все это можно доказать весьма строго с использованием метода математической индукции.

Ответ: $|A_n| = 1$, $|B_n| = 1 + n$.

§4. Алгебраические дополнения и миноры

Рассмотрим произвольную, например i-ю строку, в определителя D. Пусть a_{ij}- некоторый элемент этой строки. В правой части равенства (6)

$$D = \sum (-1)^{N(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{1\alpha_1}, a_{2\alpha_2}, \dots, a_{n\alpha_n},$$

задающего определитель D, соберем все члены, содержащие элемент a_{ij}, заключим их в скобки и вынесем за эти скобки элемент a_{ij}. Величина, оставшаяся в скобках, обозначается через A_{ij}, она называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} в определителе D.

Так как в каждый член определителя D входит элемент из i-ой строки, то равенству (6) можно придать теперь вид

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}. \tag{11}$$

Формула (11) называется формулой разложения определителя D по элементам i-ой строки. Аналогичную формулу можно написать и для любого столбца определителя D. Например, для j-го столбца получим такое равенство:

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}. \tag{12}$$

Таким образом, получили теорему.

Теорема 1. Сумма всех произведений элементов какой-нибудь строки (или столбца) определителя D на соответствующие алгебраические дополнения равна самому определителю D:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}.$$

Формулы (11) и (12) можно использовать для вычисления определителя. Но при этом необходимо уметь вычислять алгебраические дополнения.

Отметим одно следствие формул (11) и (12), которое будет в дальнейшем использовано.

Теорема 2. Сумма всех произведений элементов какой-нибудь строки (или какого-нибудь столбца) определителя D на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

Доказательство. Равенство (11) выполняется тождественно относительно величин $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}$. Оно остаётся справедливым, если заменить в нем a_{ij} $(i = 1, 2, \dots, \mathrm{n})$ на любые другие величины. При такой замене величины $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{in}$ остаются неизменными, так как они не зависят от элементов a_{ij}. Заменим в правой и левой частях равенства (11) элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots a_{in}$ на соответствующие элементы какой-нибудь другой, например, i-ой, строки. Тогда определитель слева в (11) будет иметь две одинаковых строки и по свойству определителей будет равен нулю. Получим равенство (при $\mathrm{k} \neq \mathrm{i}$)

$$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0. \qquad (13)$$

Аналогично из формулы (12) при $l \neq i$ получим

$$a_{l1}A_{i1} + a_{l2}A_{i2} + \cdots + a_{ln}A_{in} = 0. \qquad (14)$$

Таким образом, доказали теорему. ■

Если зачеркнуть в матрице n-го порядка некоторую строку и некоторый столбец, то оставшиеся элементы образуют некоторую матрицу $(\mathrm{n}-1)$-го порядка. Определитель этой матрицы называется минором данной матрицы n-го порядка, а также минором ее определителя D. Если были зачеркнуты i-я строка и -й столбец, то полученный минор обозначается через M_{ij}или $M_{ij}(D)$.

Теорема 3. Вычисление алгебраических дополнений сводится к вычислению соответствующих миноров

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}. \qquad (15)$$

Доказательство. Доказательство равенства (15) проведем сначала для случая $i = 1$, $j = 1$. Соберем в правой части равенства (6) все члены, содержащие элемент a_{11}. Рассмотрим один из таких членов. Очевидно, что произведение всех его элементов, за исключением a_{11}, дает некоторый член с минора M_{11}. Так как в матрице определителя D нет отрезков с отрицательным наклоном, соединяющих элемент a_{11} с остальными элементами выделенного члена, то знак, который приписывается члену a_{11} определителя D, совпадает со знаком, который приписывается члену c в миноре M_{11}. Выбирая должным образом член определителя D, содержащий элемент a_{11}, и зачеркивая a_{11}, можно получить любой член минора M_{11}. Поэтому рассматриваемая алгебраическая сумма всех членов определителя D, содержащих a_{11}, равна произведению $a_{11}\mathrm{M}_{11}$. По теореме 1 эта сумма равна произведению $a_{11}\mathrm{A}_{11}$. Следовательно, $A_{11} = \mathrm{M}_{11}$,что и требовалось доказать.

Докажем формулу (15) при любых i и j. Рассмотрим элемент $a_{\mathrm{ij}} = a$, расположенный на пересечении i-ой строки и j-го столбца определителя D. Переставляя последовательно соседние строки и столбцы, можем перевести элемент a в левый верхний угол матрицы. Для этого понадобится $i-1+\mathrm{j}-1=i+\mathrm{j}-2$ перестановок. В результате получим определитель D_1 с теми же членами, какие имеют исходный определитель D, если его умножить на $(-1)^{i+j-2}=(-1)^{i+j}$. Минор $\mathrm{M}_{11}(\mathrm{D}_1)$ определителя D_1, совпадает с минором $M_{ij}(\mathrm{D})$ определителя D. Из доказанного следует, что в определителе D_1 члены, содержащие элемент a, составляют в сумме величину $a\mathrm{M}_{11}(\mathrm{D}_1)$. Поэтому в составе исходного определителя D члены, содержащие элемент $a_{\mathrm{ij}}=a$, образуют в сумме величину

$$(-1)^{i+j}aM_{11}(\mathrm{D}_1)=a_{\mathrm{ij}}(-1)^{i+j}M_{ij}(\mathrm{D}).$$

По теореме 1 эта же сумма равна произведению $\mathrm{a}_{\mathrm{ij}}\mathrm{A}_{\mathrm{ij}}$. Следовательно, $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$. Формула (15) доказана полностью. ■

Формулы (11) и (12) можно теперь записать соответственно в форме

$$\mathrm{D}=(-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1}+(-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2}+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}M_{in},$$

$$\mathrm{D}=(-1)^{1+j}a_{1j}M_{1j}+(-1)^{2+j}a_{2j}M_{2j}+\cdots+(-1)^{n+j}a_{nj}M_{nj},$$

в которой они обычно и употребляются.

Лемма 1. Система $\{\boldsymbol{a}\}$, состоящая из одного вектора, линейно зависима тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$.

Доказательство. В самом деле, равенство $\alpha 0=\mathbf{0}$ при любом α, в частности при $\alpha\neq 0$, установлено в аксиомах 1)-8) § 8. Пусть теперь $\mathrm{x}\neq 0$ и $\alpha x=\mathbf{0}$. Тогда $\alpha=0$, согласно замечанию 3 § 8. ■

Лемма 2. Если часть системы линейно зависима, то и вся система линейно зависима.

Доказательство. Пусть известно, что в системе $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \dots, \mathbf{q}$ часть, состоящая, например, из векторов $\mathbf{c}, \dots, \mathbf{q}$, линейно зависима. Значит, существуют числа $\gamma, \dots, \chi$, среди которых не все равны нулю, и такие, что $\gamma\mathbf{c} + \dots + \chi\mathbf{q} = \mathbf{0}$. Но тогда линейная комбинация $0 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} + \gamma\mathbf{c} + \dots + \chi\mathbf{q} = \mathbf{0}$ нетривиальна, поскольку отличные от нуля числа имеются среди $\gamma, \dots, \chi$. ■

Лемма 3. Если вся система линейно независима, то и любая ее часть линейно независима.

Доказательство. Доказательство вытекает непосредственно из леммы 2 на основании метода от противного. В частности, нулевой вектор не может входить в линейно независимую систему. ■

Лемма 4. В линейно зависимой системе существует хотя бы один вектор, являющейся линейной комбинацией остальных векторов этой системы.

Доказательство. В самом деле, если $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\mathbf{c} + \dots + \chi\mathbf{q} = \mathbf{0}$, а среди коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \chi$ есть отличные от нуля, то любой из векторов, имеющих ненулевые коэффициенты, можно линейно выразить через остальные векторы системы. Так, например, если $\alpha \neq 0$, то

$$\boldsymbol{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{c} - \dots - \frac{\chi}{\alpha}\mathbf{q}. \ ■$$

Лемма 4 не только необходима, но и достаточна для линейной зависимости системы векторов. Поэтому, справедливо следующее утверждение.

Лемма 5. Если в системе некоторый вектор является линейной комбинацией остальных, то система линейна зависима.

Доказательство. Действительно, если

$$a = \beta' b + \gamma' \mathrm{c} + \dots + \chi' \mathrm{q},$$

то

$$1 \cdot a + (-\beta')b + (-\gamma')\mathrm{c} + \dots + (-\chi')\mathrm{q} = \mathbf{0},$$

и линейная комбинация в левой части последнего равенства нетривиальна.■

Лемма 6. Пусть $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ – какие-нибудь векторы и каждый из векторов $\boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_n}$ линейно выражается через $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{c_1} &= \alpha_{11}\boldsymbol{a_1} + \dots + \alpha_{1k}\boldsymbol{a_k}, \\
\boldsymbol{c_2} &= \alpha_{21}\boldsymbol{a_1} + \dots + \alpha_{2k}\boldsymbol{a_k}, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
\boldsymbol{c_n} &= \alpha_{n1}\boldsymbol{a_1} + \dots + \alpha_{nk}\boldsymbol{a_k}.
\end{aligned}
$$

Пусть вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражаются через $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{c_1}, \dots, \boldsymbol{c_n}$:

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1\boldsymbol{a_1} + \dots + \lambda_k\boldsymbol{a_k} + \mu_1\boldsymbol{c_1} + \dots + \mu_n\boldsymbol{c_n},$$

тогда вектор $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$.

Доказательство.

$$\boldsymbol{b} = (\lambda_1 + \mu_1 a_{11} + \dots + \mu_n a_{n1})\,\boldsymbol{a_1} + \dots + (\lambda_k + \mu_1 a_{1k} + \dots + \mu_n a_{nk})\boldsymbol{a_k}.\blacksquare$$

Лемма 7. Система векторов $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_n}, \boldsymbol{0})$ всегда линейно зависима.

§5. Вычисление определителей

Формула (12) приобретает простой вид, когда все элементы i-ой строки, кроме одного, например a_{ik}, равны нулю. В этом случае

$$D = a_{ik}A_{ik}, \tag{16}$$

и вычисление определителя D n-го порядка непосредственно приводится к вычислению определителя $(\mathrm{n}-1)$-го порядка. Но если при $a_{\mathrm{ik}} \neq 0$ в i-ой строке есть элемент a_{ij}, также не равный нулю, то можно вычесть из j-го столбца определителя D k-й столбец, умноженный на $\lambda = \frac{a_{\mathrm{ij}}}{\mathrm{a_{ik}}}$. В результате получим определитель, равный исходному, у которого k-ый элемент i-ой строки уже равен нулю. Повторяя аналогичные операции, можно от любого определителя с фиксированным элементом $\mathrm{a_{ik}} \neq 0$ перейти к определителю, у которого все элементы i-й строки, кроме a_{ik}, равны нулю, и вычислить его по формуле (16). Аналогичные преобразования можно производить и со столбцами определителя.

Пример 1.

Вычислить определитель 5-го порядка

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

В третьем столбце этого определителя уже имеется два нуля. Чтобы получить в этом столбце еще два нуля, нужно ко второй строке прибавить утроенную пятую, а из четвертой строки вычесть учетверенную пятую. После этой операции и разложения определителя по третьему столбцу получим

$$D = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{3+5}(-1)\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}.$$

Теперь проще получить три нуля в первом столбце: для этого прибавим к первой строке удвоенную вторую, а из третьей и четвертой строк вычтем вторую, соответственно утроенную и удвоенную:

$$D=-\begin{vmatrix}-2 & 5 & -1 & 3\\ 1 & -9 & 13 & 7\\ 3 & -1 & 5 & -5\\ 2 & 18 & -7 & -10\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}0 & -13 & 25 & 17\\ 1 & -9 & 13 & 7\\ 0 & 26 & -34 & -26\\ 0 & 36 & -33 & -24\end{vmatrix}=$$

$$=-(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-13 & 25 & 17\\ 26 & -34 & -26\\ 36 & -33 & -24\end{vmatrix}.$$

Чтобы легче вычислить полученный определитель 3-го порядка, уменьшим абсолютные величины его элементов. Для этого после вынесения из второй строки общего множителя 2 прибавим вторую строку к первой и из третьей строки вычтем удвоенную вторую:

$$D=2\begin{vmatrix}-13 & 25 & 17\\ 26 & -34 & -26\\ 36 & -33 & -24\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}0 & 8 & 4\\ 13 & -17 & -13\\ 10 & 1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot$$

$$4\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 13 & -17 & -13\\ 10 & 1 & 2\end{vmatrix}.$$

В первой строке имеется уже один нуль. Чтобы получить еще один нуль, вычтем из второго столбца удвоенный третий. После этого определитель легко вычисляется до конца:

$$D=8\begin{vmatrix}0 & 2 & 1\\ 13 & -17 & -13\\ 10 & 1 & 2\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ 13 & 9 & -13\\ 10 & -3 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=8\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}13 & 9\\ 10 & -3\end{vmatrix}=8\cdot 3\begin{vmatrix}13 & 3\\ 10 & -1\end{vmatrix}=-1032.$$

Пример 2.

Вычислить определитель Вандермонда.

Определитель вида

$$\Delta_n(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}$$

называется определителем Вандермонда и имеет теоретическое значение.

Вычислим определитель Вандермонда для $n = 2$ и $n = 3$.

Имеем $\Delta_2(x_1, x_2) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$.

Для определителя третьего порядка имеем

$$\Delta_3(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2).$$

Очевидно, что аналогичные рассуждения можно проводить и при больших n, в результате получим

$$\Delta_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \cdots (x_n - x_1)(x_3 - x_2) \cdots (x_n - x_2) \cdots (x_n - x_{n-1}) =$$

$$= \prod_{n \geq i \geq l \geq 1} (x_i - x_l).$$

Пример 3.

Рассмотрим два связанных между собой примера на вычисление определителей матриц n-го порядка:

$$|A_n| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}$$

и

$$|B_n| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Замечание 1. При рассмотрении определителей n-го порядка нужно четко представлять себе их структуру. Для этого можно рассматривать конкретные определители небольшого порядка, например при $n = 4$. То есть, от исходных определителей перейти к определителям:

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} \quad |B_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

<u>Замечание 2.</u> Вычисление определителей малого порядка нужно стараться производить таким методом, чтобы его было легко обобщить на определители большего порядка.

<u>Замечание 3.</u> По возможности стараться запоминать приемы вычисления определителей, чтобы применять их к вычислению других определителей (сводить вычисление неизвестных определителей к уже известным).

Для вычисления определителя $|A_4|$ прибавим первую строку ко второй, затем полученную – к третьей, затем полученную к четвертой, получим:

$$|A_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1$$

Достаточно очевидно, что $|A_n| = 1$.

Для вычисления определителя $|B_4|$ представим его первую строку в виде двух строк, т.е. представим определитель в виде суммы двух определителей:

$$|B_4| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

С учетом того, что первый из двух определителей равен $|A_4| = 1$, после разложения второго определителя из суммы по первой строке получим:

$$|B_4| = |A_4| + |B_3| = 1 + |B_3|.$$

Поскольку $|B_2| = 3$, то $|B_3| = 1 + |B_2| = 4$, $|B_4| = 1 + |B_3| = 5$, то очевидно, что $|B_n| = 1 + |B_{n-1}| = 1 + n$.

Конечно, все это можно доказать весьма строго с использованием метода математической индукции.

В итоге, получим:

$$|A_n| = 1, |B_n| = 1 + n.$$

§6. Еще об алгебраических дополнениях и минорах

Пусть в квадратной матрице n-го порядка указаны произвольно $k \le n$ различных строк и столько же различных столбцов. Элементы, стоящие на пересечениях этих строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется минором k-го порядка данной матрицы n-го порядка и минором -го порядка определителя D. Обозначается через

$$M = M_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k},$$

где $i_1, i_2, \dots, i_k$ – номера выделенных строк, а $j_1, j_2, \dots, j_k$ – номера выделенных столбцов.

Если зачеркнуть в исходной матрице строки и столбцы, в которых лежит минор M, то оставшиеся элементы снова образуют квадратную матрицу порядка

$(\mathrm{n}-\mathrm{k})$, определитель которой называется минором, дополнительным к минору M, и обозначается символом

$$\overline{M} = \overline{M}_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k},$$

где индексы указывают номера вычеркнутых строк и столбцов.

В частности, если исходный минор имеет порядок 1, т. е. совпадает с некоторым элементом a_{ij} определителя D, то дополнительный минор совпадает с минором M_{ij}.

Теорема Лапласа. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения

$$\mathrm{D} = \sum (-1)^{i+j} M_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k} \overline{M}_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}.$$

Доказательство. Рассмотрим минор

$$M_1 = M_{1,\dots,k}^{1,\dots,k},$$

лежащий в первых k строках и первых k столбцах определителя *D*. Минор, дополнительный к нему, есть минор

$$M_2 = \overline{M}_1 = \overline{M}_{1,\dots,k}^{1,\dots,k}.$$

Выделим в правой части формулы (6) все те члены определителя, в которых первые k элементов принадлежат минору M_1, а, следовательно, остальные $(\mathrm{n}-\mathrm{k})$ элементов – минору $\overline{M}_1$. Фиксируем сначала один из таких членов для определения знака, который должен быть ему приписан. Обозначим этот член через c. Первые k элементов этого члена определяют некоторый член c_1 минора M_1. Обозначим через N_1 число соответствующих отрезков отрицательного наклона. Тогда знак, который должен быть поставлен перед членом c_1 в миноре M_1 определяется выражением $(-1)^{\mathrm{N}_1}$, где N_1- число соответствующих обрезков отрицательного наклона в миноре M_1. Остальные $(\mathrm{n}-\mathrm{k})$ элементов члена c определяют некоторый член c_2

минора M_2. Знак, который должен быть поставлен перед этим членом в миноре M_2, определяется выражением $(-1)^{\mathrm{N}_2}$, где N_2 – число соответствующих отрезков отрицательного наклона в миноре M_2. Так как в матрице определителя D нет ни одного отрезка с отрицательным наклоном, который соединял бы элемент минора M_1 с элементом минора M_2, то общее число отрезков отрицательного наклона, соединяющих элементы члена c, равно сумме $(\mathrm{N}_1 + \mathrm{N}_2)$. В связи с этим, знак, который следует поставить перед членом c в определителе D определяется выражением $(-1)^{\mathrm{N}_1+\mathrm{N}_2}$. Следовательно, он равен произведению знаков членов c_1 и c_2 в минорах M_1 и M_2. Заметим, что произведение любого члена минора M_1 на любой член минора M_2 дает один из выделенных членов определителя D. Отсюда следует, что сумма всех выделенных членов в выражении определителя D по формуле (6) равна произведению миноров M_1 и M_2.

Теперь получим похожий результат для произвольного минора

$$M_1 = M_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}$$

с дополнительным минором M_2. Переставляя последовательно соседние строки и столбцы, можно минор M_1 перевести в левый верхний угол определителя D. Для этого понадобится $(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \dots + (i_k - \mathrm{k}) + (j_1 - 1) + (j_2 - 2) + \cdots + (j_k - \mathrm{k})$ перестановок. В результате получим определитель D_1 с теми же членами, что и исходный определитель D, в том случае, если его умножить на $(-1)^{i+j}$, где $\mathrm{i} = \mathrm{i}_1 + \mathrm{i}_2 + \cdots + \mathrm{i}_\mathrm{k}$, $\mathrm{j} = \mathrm{j}_1 + \mathrm{j}_2 + \cdots + \mathrm{j}_\mathrm{k}$. По доказанному, в определителе D_1 сумма всех тех членов, первые k элементов которых входят в минор M_1 равна произведению $M_1 M_2$. Отсюда следует, что сумма соответствующих членов определителя D равна произведению

$$(-1)^{i+j} M_1 M_2 = M_1 A_2,$$

где величина $A_2 = (-1)^{i+j} M_2$ называется алгебраическим дополнением минора в определителе D. Иногда употребляют обозначение $A_2 = \overline{A}_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}$.

Фиксируем теперь в определителе D строки с номерами $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \dots, \mathrm{i}_\mathrm{k}$. В каждый член определителя D входят некоторые элементы из этих строк. Если собрать вместе все такие члены, у которых элементы выделенных строк принадлежат к фиксированным столбцам с номерами $\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \dots, \mathrm{j}_\mathrm{k}$, то, по доказанному, сумма всех этих членов будет равна произведению минора $M_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}$ на соответствующее алгебраическое дополнение. Все члены определителя, таким образом, можно разбить на группы, каждая из которых определяется заданием k столбцов. Сумма членов в каждой группе равна произведению соответствующего минора и его алгебраического дополнения. Поэтому весь определитель представляется в виде суммы

$$\mathrm{D} = \sum (-1)^{i+j} M_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k} \overline{M}_{j_1,\dots,j_k}^{i_1,\dots,i_k}. \qquad (17)$$

Причем суммирование производится при фиксированных индексах выбранных строк $\mathrm{i}_1, \mathrm{i}_2, \dots, \mathrm{i}_\mathrm{k}$ по всем возможным значениям индексов столбцов $\mathrm{j}_1, \mathrm{j}_2, \dots, \mathrm{j}_\mathrm{k}$, $1 \le \mathrm{j}_1 < \mathrm{j}_2 < \cdots < \mathrm{j}_\mathrm{k} \le n$. ■

Очевидно, формула (17) действительно является обобщением формулы разложения определителя по одной строке. Аналогичная формула справедлива для разложения определителя D по фиксированной системе столбцов.

Пример.

Определитель вида

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \cdots & \cdots & \ldots & \cdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \ldots & \cdots & \ldots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix},
$$

все элементы которого, находящиеся в первых k столбцах и последних $(n-k)$ строках, равны нулю, называется квазитреугольным. Для его вычисления разложим определитель по первым k строкам с помощью теоремы Лапласа. В сумме (17) останется только одно слагаемое, в результате получим

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & \cdots & a_{k+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,k+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.
$$

§7. Решение систем линейных уравнений

Рассмотрим сначала систему специального вида

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (18)
$$

с числом неизвестных, равным числу уравнений.

Коэффициенты a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ образуют основную матрицу системы. Относительно данной матрицы предположим, что ее определитель D отличен от нуля.

Теорема Крамера. Система (18) всегда совместна, определена и имеет единственное решение.

Доказательство. Предположим, что система (18) имеет некоторое решение $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Следовательно, справедлива система равенств

$$\begin{cases} a_{11}\mathrm{c}_1 + a_{12}\mathrm{c}_1 + \dots + a_{1n}\mathrm{c}_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}\mathrm{c}_1 + a_{n2}\mathrm{c}_1 + \dots + a_{nn}\mathrm{c}_n = b_n. \end{cases} \qquad (19)$$

Умножим первое из равенств (19) на алгебраическое дополнение A_{11} к элементу a_{11} в матрице системы, далее умножим второе равенство на A_{21}, третье – на A_{31} и т. д., дойдя до последнего равенства. После чего сложим все полученные равенства. В результате получим следующее соотношение:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \dots + a_{n1}A_{n1})c_1 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + \dots + +a_{n2}A_{n1})c_2 + \dots + \\ +(a_{1n}A_{11} + a_{2n}A_{21} + \dots + a_{nn}A_{n1})c_n = b_{11}A_{11} + \\ +b_{21}A_{21} + \dots + b_{n1}A_{n1}. \qquad (20)$$

В силу теоремы 1 §5 гл. I коэффициент при c_1 в соотношении (20) равен самому определителю D. В силу теоремы 2 §5 гл. I коэффициенты при всех остальных c_j, $j \neq 1$, обращаются в нуль. Выражение в правой части есть разложение определителя

$$\mathrm{D}_1 = \begin{vmatrix} b_1 & \mathrm{a}_{12} & \cdots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ b_n & \mathrm{a}_{\mathrm{n}2} & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix}$$

по первому его столбцу. Равенство (20) можно теперь записать в виде $\mathrm{D} \cdot \mathrm{c}_1 = \mathrm{D}_1$, следовательно

$$c_1 = \frac{D_1}{D}.$$

Аналогично можно получить выражение

$$c_j = \frac{D_j}{D}, \ \mathrm{j} = 1, 2, \dots, \mathrm{n}, \qquad (21)$$

где

$$\mathrm{D_j} = \begin{vmatrix} a_{11} & \mathrm{a}_{12} & \cdots & \mathrm{a}_{1,\mathrm{j}-1} & b_1 & \mathrm{a}_{1,\mathrm{j}+1} & \dots & \mathrm{a}_{1\mathrm{n}} \\ \cdots & \cdots & \dots & \dots & \dots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & \mathrm{a}_{\mathrm{n}2} & \cdots & \mathrm{a}_{\mathrm{n},\mathrm{j}-1} & b_n & \mathrm{a}_{\mathrm{n},\mathrm{j}+1} & \dots & \mathrm{a}_{\mathrm{nn}} \end{vmatrix} = \mathrm{D_j}(\mathrm{b_i})$$

есть определитель, полученный из определителя D заменой его j-го столбца на столбец из чисел $b_1, \dots, b_n$.

Таким образом, если решение системы (18) существует, то оно выражается через коэффициенты системы и правые части по формулам (21). Если решение системы (18) существует, то оно единственно.

Покажем, что решение системы (18) всегда существует. Подставим величины

$$c_j = \frac{D_j}{D},\ \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n},$$

в систему (18) на место неизвестных $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$. Покажем, что все уравнения системы (18) при этом обращаются в тождества. Действительно, для i-го уравнения получаем

$$a_{i1}c_1 + a_{i2}c_2 + \cdots + a_{in}c_n = a_{i1}\frac{D_1}{D} + a_{i2}\frac{D_2}{D} + \cdots + a_{in}\frac{D_n}{D} =$$

$$= \frac{1}{D}\big((a_{i1}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}) + a_{i2}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + \cdots + b_nA_{n2}) + \cdots + +a_{in}(b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn})\big) = \frac{1}{D}\big(b_1(a_{i1}A_{11} + a_{i2}A_{21} + \cdots + a_{in}A_{n1}) + \cdots + +b_i(a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}) + \cdots + b_n(a_{i1}A_{n1} + a_{i2}A_{n2} + \cdots + a_{in}A_{nn})\big).$$

Из всех скобок, служащих коэффициентами при величинах $\mathrm{b}_1, \mathrm{b}_2, \ldots, \mathrm{b}_\mathrm{n}$ отлична от нуля в силу теорем 1 и 2 §5 гл. I только одна, именно та, которая стоит при величине b_i. Она равна самому определителю D. Следовательно, полученное выражение приводится к виду

$$\frac{1}{D}b_iD = b_i,$$

и совпадает с правой частью i-го уравнения системы.

Таким образом, величины c_j действительно образуют решение системы (18). ■

Сформулируем следующее правило для получения решения системы (18), которое называется правилом Крамера.

Если определитель системы (18) отличен от нуля, то она имеет одно и только одно решение: значение неизвестного x_j равно дроби, знаменателем которой является определитель системы (18), а числителем –

определитель, получающийся заменой j-го столбца в определителе системы (18) на столбец из правых частей системы, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Отыскание решения системы (18) сводится к вычислению определителей.

Замечание. Иногда встречаются системы линейных уравнений, свободные члены которых являются не числами, а векторами (например, в аналитической геометрии, в механике). Теорема Крамера и ее вывод остаются справедливыми и для этого случая. Следует иметь только в виду, что и значения неизвестных $\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$ также будут не числами, а векторами.

Прежде чем исследовать более общие системы, введем понятие линейные пространства.

§8. Гауссовский процесс исключения

Естественно ожидать, что n уравнений (линейных или нет), связывающих n неизвестных, могут быть решены и тем самым будет получено множество численных значений для n неизвестных. Часто физическая интуиция подводит нас также к предположению, что решение будет единственным. Предположим, что ищем n линейных уравнений, связывающих n неизвестбных. Они могут быть записаны в виде:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{gathered} \tag{1}$$

или

$$Ax = b, \tag{2}$$

где система уравнений (1) записана в матричной форме. Решим эту систему уравнений, т.е. найти величины $x_1, x_1, \ldots, x_n$, которые удовлетворили бы все уравнения системы.

Само собой, напрашивается желание найти процедуру последовательного исключения неизвестных. Без потери общности можем предположить, что $a_{11} \neq 0$, поскольку уравнения могут быть перегруппированы и неизвестные перенумерованы с тем, чтобы согласоваться с нашей посылкой. Тогда решаем первое уравнение относительно x_1 и получаем

$$x_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \cdots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n + \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{3}$$

Деля обе части первого уравнения на a_{11} для преобразования коэффициента при x_1 в единицу и используя уравнение (3) для исключения x_1 в оставшихся $n-1$ уравнениях, имеем:

$$\begin{gathered} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \cdots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \left[a_{22} - a_{21}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\right]x_2 + \cdots + \left[a_{2n} - a_{21}\left(\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\right]x_n = b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left[a_{n2} - a_{n1}\left(\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)\right]x_2 + \cdots + \left[a_{nn} - a_{n1}\left(\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)\right]x_n = b_n - a_{n1}\frac{b_1}{a_{11}} \end{gathered} \tag{4}$$

или

$$\begin{gathered} x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{n2}x_2 + \cdots + a'_{nn}x_n = b'_n, \\ x_n = g_n. \end{gathered} \tag{5}$$

Если по крайней мере один из коэффициентов $a'_{ij} (i,j = 2, \dots, n)$ отличен от нуля, и можем предположить, без потери общности, что $a'_{22} \neq 0$. Процесс преобразования продолжается с помощью деления второго уравнения системы (5) на a'_{22} с использованием этого уравнения для исключения неизвестного x_2 в уравнениях с номерами $3, \dots, n$ до тех пор, пока не получим в итоге систему

$$\begin{aligned}x_1 + h_{12}x_2 + \cdots + h_{1n}x_n &= g_1,\\ x_2 + \cdots + h_{2n}x_n &= g_2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ x_{n-1} + h_{n-1,n}x_n &= g_{n-1},\\ x_n &= g_n.\end{aligned} \tag{6}$$

Видим, что $x_n = g_n$. Это значение для x_n подставляется затем в предыдущие $n-1$ уравнений системы (6). Таким образом, имеем

$$x_{n-1} = g_{n-1} - h_{n-1}g_n.$$

Этот результат подставляется также в оставшиеся $n-2$ уравнений системы и т.д. Продолжением этого процесса обратной подстановки получаем значение всех неизвестных x_i. Эта процедура называется гауссовским преобразованием, или гауссовским исключением.

Теперь можем сделать интересное наблюдение. Поскольку окончательное множество уравнений может быть записано в виде

$$\begin{bmatrix}1 & h_{12} & \ldots & h_{1n}\\ 0 & 1 & \ldots & h_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & 1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \ldots\\ x_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}g_1\\ g_2\\ \ldots\\ g_n\end{bmatrix} \tag{7}$$

или как

$$Hx = g \tag{8}$$

Становится ясным, что H представляет собой ступенчатую матрицу, которая должна быть получена из матрицы A. Должны только напомнить результат действий, проведенных с элементами матрицы A для того, чтобы увидеть, что гауссовское преобразование безусловно превращает матрицу A в ступенчатую матрицу H. Если матрица E представляет собой комбинацию элементарных преобразований со строками, которые превращают матрицу A в матрицу H, то

$$H = EA, \qquad g = Eb. \tag{9}$$

Это наблюдение снабдило нас определенной полезной информацией. Знаем, что система уравнений (1) будет приведена к форме (6), если и только если ранг матрицы A равен n. Если ранг матрицы A меньше n, то метод непригоден по одной из двух причин: либо будем не в состоянии определить значения всех неизвестных или будет наблюдаться очевидная противоречивость, состоящая в том факте, что все коэффициенты h_{ij} принимают нулевое значение в некоторой строке, в то время как g_i не принимает нулевого значения. В настоящее время еще не уверены, что это приведет к непригодности метода. Это станет ясным позднее. Однако не знаем, что метод будет действовать, если $r(A) = n$.

Вместо того чтобы исключить x_k только в уравнениях с номерами $k + 1, \ldots, n$, с одинаковым успехом можем исключить также x_k в уравнениях с номерами $1, \ldots$, $k - 1$, так что x_k появится только в k-м уравнении. В таком случае не будет необходимости в обратной подстановке. Эта модификация гауссовского исключения называется методом Гаусса-Жордана. Оба плана преобразования представляют итерационные процессы, и впервые вспоминаем о них при попытке решить систему линейных уравнений. Довольно интересно, что они представляют собой эффективные вычислительные процедуры и их модификации встречаются в ряде методов решения систем линейных уравнений как вручную, так и с помощью быстродействующих вычислительных машин. Следующий пример иллюстрирует применение методов Гаусса и Гаусса-Жордана для простого случая.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений:

$$2x_1 + x_2 + 4x_3 = 16,$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10,$$
$$x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 16.$$

а) Гауссовское преобразование. Используем первое уравнение для нахождения x_1 и подставляем его во второе и третье уравнения. В результате поучаем:

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8,$$
$$\frac{1}{2}x_2 - 5x_3 = -14,$$
$$\frac{5}{2}x_2 + x_3 = 8.$$

Используя второе уравнение из этой новой системы, исключаем x_2 в третьем уравнении. Первое уравнение остается неизменным. Таким образом, получаем:

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8,$$
$$x_2 - 10x_3 = -28,$$
$$26x_3 = 78.$$

Из третьего уравнения $x_3 = 3$. Подставляя это значение в первые два уравнения, находим, что

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 2,$$
$$x_2 = 2.$$

Отсюда $x_1 = 1, \quad x_2 = 2 \quad x_3 = 3$.

б) Преобразование Гаусса-Жордана. Первый шаг является тем же, что и изложенный в пункте а):

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 = 8,$$
$$\frac{1}{2}x_2 - 5x_3 = -14,$$
$$\frac{5}{2}x_2 + x_3 = 8.$$

Используя второе уравнение, получаем величину x_2. Результат подставляется теперь и в первое и в третье уравнения. Это дает:

$$x_1 + 7x_3 = 22,$$
$$x_2 - 10x_3 = -28,$$
$$26x_3 = 78.$$
Получив $x_3 = 3$, немедленно находим, что $x_1 = 1, x_2 = 2$.

§9. Правило Крамера

Рассмотрим снова систему n линейных уравнений с n неизвестными (1 §11) или в матричной форме. Имеем:
$$Ax = b, \tag{10}$$
где $A = \|a_{ij}\|$; $x = [x_1, \dots, x_n], b = [b_1, \dots, b_n]$.

Теперь предположим, что $r(A) = n$, так что матрица A является невырожденной. Это означает, что $|A| \neq 0$ и обратная матрица A^{-1} существует. Умножая (слева) обе части равенства (10) на A^{-1}, получаем:
$$A^{-1}Ax = Ix = x = A^{-1}b. \tag{11}$$

Отсюда, когда матрица A является невырожденной, получаем единственное решение $x = A^{-1}b$ для системы уравнений (1 §11). Решение является единственным, поскольку обратная матрица единственна. Таким образом, в соотношении (11) нашли решение системы уравнений (10), применяя обратную матрицу. Следовательно, свели численное решение системы (10) к нахождению обратной матрицы A^{-1}. Соотношение (11) приносит большую пользу для теоретической работы, так как величина первоначально неизвестного вектора выражена в виде $x = A^{-1}b$ и $A^{-1}b$ может быть вычислена на основе известных величин A и b.

Соотношение (11) может быть выражено и в другой более интересной форме. Обратная матрица дана в виде
$$A^{-1} = |A|^{-1}A^{+}; \tag{12}$$

$$A^{+} = \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & \dots & A_{,n} \end{bmatrix}. \qquad (13)$$

где A_{ij} является адъюнктой элемента a_{ij} матрицы A. Таким образом, можем записать соотношение (11) в компонентной форме в виде

$$x_i = |A|^{-1} \sum_{j=1}^{n} A_{ji} b_j = |A|^{-1} \sum_{j=1}^{n} b_j A_{ji}, \qquad (14)$$

Однако помним, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} A_{ji}$$

Является разложением определителя $|A|$ по i-му столбцу. При сравнении видим, что

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ji} A_{ji}$$

Является разложением определителя, образованного из матрицы изъятием i-го столбца и заменой его на столбец b. Это дает так называемое правило Крамера: *для получения значений x_i надо разделить на определитель $|A|$ определитель, полученный из матрицы A заменой i-го столбца на b. Отсюда*

$$x_1 = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \dots, x_n$$

$$= \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & b_n \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Правило Крамера, вообще говоря, неэффективно для численного решения систем уравнений, так как вычисление $n + 1$ определителя составляет очень тяжелую работу, особенно когда n является довольно большим числом. Более эффективным является метод Гаусса. Однако правило Крамера очень полезно при теоретических исследованиях из-за того, что оно дает компактное выражение для решения системы (10) в виде $x = A^{-1}b$.

Пример. Решить системы уравнений:

$$3x_1 + 2x_2 = 7,$$

$$4x_1 + x_2 = 1.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0.$$

Таким образом, существует единственное решение:

$$x_1 = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}(7-2) = -1,$$

$$x_2 = -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5}(3-28) = 5.$$

Правильность решения может быть легко проверена подстановкой полученных величин в исходную систему уравнения.

ГЛАВА II. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§10. Линейные пространства

Пусть имеется множество **L**, состоящее из каких угодно элементов. Для обозначения элементов этого множества будем употреблять малые буквы латинского алфавита $a, b, \dots, x, y, \dots$ и греческую букву θ. Рассматриваемые действительные или комплексные числа вместе с элементами множества **L** будем обозначать чисел малыми греческими буквами α, β, ... (исключая θ).

Предположим, что во множестве **L** определено понятие равенства элементов. Это значит, что все элементы множества **L** некоторым образом распределены по классам (подмножествам **L**) так, что разные классы не имеют общих элементов. При этом два элемента a, b, считаются равными $(a = b)$, если они принадлежат одному классу. Возможно, что каждый класс состоит только из одного элемента. В таком случае равенство $a = b$ означает, что через a *и* b, обозначен один и тот же элемент множества **L**.

Если вместо одного элемента берется любой другой элемент одного с ним класса (любой другой равный ему элемент) будем говорить, что совершается допустимая замена некоторого элемента множества **L**.

Иногда вместо заранее данного разбиения множества **L** на классы равных элементов будут непосредственно указываться условия допустимых замен (т. е. условия, при которых элементы считаются равными). Тогда для произвольного элемента a из **L** будет определен класс $\mathcal{A}$, состоящий из всех элементов **L**, равных элементу a. Чтобы получить требуемое распределение множества **L** по таким классам, нужно обеспечить следующие условия:

1) элемент a должен войти в класс, то есть условия равенства должны быть такими, чтобы элемент a считался равным самому себе: $a = a$ (или замена элемента самим собой должна быть допустимой).

2) Если $a = b$, то должно выполняться $b = a$.

3) Если $a = b$ и $b = c$, то выполняться $a = c$.

При обязательном соблюдении всех трех обстоятельств любые два элемента, входящие в класс равны между собой. Кроме того, класс включает все элементы множества **L**, равные какому-нибудь элементу этого класса.

Определим действия сложения и умножения на число в множестве **L**, следующим образом, если:

1) каждым двум элементам a и b из множества ***L*** сопоставлен некоторый элемент того же множества ***L***, называемый их суммой. Сумма элементов a, b обозначается через $a + b$;

2) каждому числу α и каждому элементу a из множества **L** сопоставлен некоторый элемент того же множества **L**, называемый произведением a на α или α на a. Произведение a на α обозначается через $a\alpha$ или αa.

Действия сложения и умножения на число инвариантны относительно допустимых замен элементов множества **L**: если $a = a'$, $b = b'$, то $a + b = a' + b'$ и $\alpha a = \alpha a'$.

Предполагается также, что соблюдены требования следующих аксиом:

1) Перестановочное или коммутативное свойство сложения: для любых x и y из **L**

$$x + y = y + x.$$

2) Сочетательное или ассоциативное свойство сложения: для любых x, y и z из **L**

3) $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z.$

Вследствие первой аксиомы безразличен порядок записи слагаемых.

4) В множестве **L** существует нулевой элемент $\mathbf{0}$ такой, что для любого х из **L**

$$x + \mathbf{0} = 0.$$

5) Для любого элемента x из **L** существует противоположный ему элемент у (обозначается через $-$x) из **L** такой, что $x + \text{y} = \mathbf{0}$.

6) $1 \cdot x = x$.

7) $\lambda(\beta x) = (\lambda\beta)x$.

8) Распределительное или дистрибутивное свойство для сомножителя из **L** (аксиома разрешает распределять сомножитель из **L** по составляющим числового сомножителя):

$$(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x.$$

9) Распределительное свойство для числового сомножителя:

$$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$$

В последних четырех аксиомах x и y означают произвольные элементы из $\boldsymbol{L}$, λ и β – произвольные числа.

Восемь сформулированных аксиом называют аксиомами линейного пространства.

Определение. Множество $\boldsymbol{L}$ называется линейным пространством над полем $\boldsymbol{K}$, если в нем определены следующие операции:

1) сложение $x + y$,
2) умножение на элементы из поля $\boldsymbol{K}$ λx.

Заметим, что в данном определении имеется в виду, что сложение и умножение удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства.

Элементы линейного пространства $\boldsymbol{L}$ принято называть также векторами, а само линейное пространство $\boldsymbol{L}$ можно называть векторным пространством. В дальнейшем множество **L** будем называть пространством.

Если для векторов пространства **L** определено умножение только на действительные числа, то **L** называется действительным векторным пространством. В случае, если определено умножение векторов из **L** также и на комплексные числа, то пространство **L** называется комплексным.

В дальнейшем, употребляя термин «произвольное число», будем иметь в виду любое действительное число, если речь идет о действительном пространстве, и любое комплексное число, если речь идет о комплексном пространстве.

Теорема 1. В каждом линейном пространстве нулевой вектор только один.

Доказательство. Пусть элементы θ_1 и θ_2 нулевые. Вследствие аксиом 1) и 3) они совпадают:

$$\theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_1. \blacksquare$$

Замечание 1. Говоря, что нулевой вектор только один, не различаем равные векторы. В том же смысле следует понимать утверждение единственности и в других теоремах.

Теорема 2. Для любого вектора $\boldsymbol{x}$ существует единственный противоположный $(-\boldsymbol{x})$.

Доказательство. Предположим, что $x + y_1 = \mathbf{0}$ и что $x + y_2 = \mathbf{0}$. На основании аксиом 1)-4) можно записать следующую цепочку равенств:

$$y_2 = y_2 + \mathbf{0} = y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 =$$
$$(x + y_2) + y_1 = \mathbf{0} + y_1 = y_1,$$

следовательно, $y_2 = y_1$. ■

Теорема 3. Произведение любого вектора $\boldsymbol{x}$ на число 0 равно нулевому вектору $\mathbf{0}$: $0 \cdot x = \mathbf{0}$.

Доказательство. Для данного вектора $\boldsymbol{x}$ возьмем противоположный вектор $\mathbf{y}$. Используя аксиомы 2)-5) и 7), получим $0 \cdot x = 0 \cdot x + \mathbf{0} = 0 \cdot x + (x + y) = (0 + 1)x + y = x + y = \mathbf{0}$. ■

Теорема 4. Для любого вектора $\boldsymbol{x}$ его произведение на число -1 равно вектору, противоположному для $\boldsymbol{x}$: $(-1)\cdot\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$.

Доказательство. Из теоремы 3 и аксиом 5), 7) имеем

$$x + (-1)\cdot x = (1-1)\cdot x = 0 \cdot x = \mathbf{0}.$$

Следовательно, $x + (-1)\cdot x = \mathbf{0}$.■

Теорема 5. Произведение нулевого вектора $\mathbf{0}$ на любое число α равно нулевому вектору.

Доказательство. Используя аксиому 6) и теорему 3, для произвольного вектора x находим

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{0})\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\cdot\boldsymbol{x} = \mathbf{0}. \blacksquare$$

<u>Замечание 2.</u> Из теоремы 5 следует, что произведение ненулевого вектора на число, не равное нулю, всегда есть ненулевой вектор. Если бы при $\lambda \neq 0$, $x \neq 0$ было $\lambda x = 0$, то на основании теоремы 5 и аксиом 5)-6) получили бы

$$x = 1\cdot x = \left(\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda\right)x = \frac{1}{\lambda}(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}0 = \mathbf{0},$$

что противоречит условию $x \neq 0$.

<u>Замечание 3.</u> Если $\alpha \neq \beta$ и $x \neq 0$, то $\alpha x \neq \beta x$. В самом деле, если бы $\alpha x = \beta x$, то $\alpha x + (-\beta)x = (\alpha - \beta)x = \mathbf{0}$, что противоречит предыдущему, так как $\alpha - \beta \neq 0$ и $x \neq 0$.

<u>Пример 1.</u> Координатное пространство: пусть **L** означает множество наборов, элементами которого служат всевозможные упорядоченные наборы действительных чисел, по n чисел в каждом, где n – зафиксированное натуральное число. Называя набор из n чисел упорядоченным, будем считать, что составляющие его числа занумерованы, но не обязательно различны. Если элемент x из **L** есть набор из n чисел $x_1, \ldots, x_n$, то будем писать $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Рассмотрим еще один, также произвольный элемент $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$. Элементы x и y будем полагать равными в том и только в том случае, когда $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, …,

$x_n = y_n$. Определим линейные операции в **L** соотношениями

$$x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\}, \quad (1)$$

$$\alpha x = \{\alpha x_1, \dots, \alpha x_n\}. \quad (2)$$

Тогда требования первых двух аксиом линейного пространства соблюдены, поскольку сложение действительных чисел обладает перестановочным и сочетательным свойствами. Для проверки аксиом 3), 4) достаточно указать в множестве **L** нулевой элемент:

$$\mathbf{0} = \{0, 0, \dots, 0\}. \quad (3)$$

Вместе с тем ясно, что в **L** для любого x существует противоположный элемент $-x$, именно:

$$-x = \{-x_1, -x_2, \dots, -x_n\}. \quad (4)$$

Аксиома 5) следует из соотношения (2), а аксиомы 6), 7), 8) выполняются вследствие соотношений (1) и (2), а также вследствие сочетательного и распределительного свойств для умножения действительных чисел.

Таким образом, множество **L** с заданными линейными операциями является действительным линейным пространством. Будем называть его действительным координатным пространством $\boldsymbol{K_n}$.

Замечание. Рассматриваемое множество **L** не позволяет считать множитель α в соотношении (2) комплексным числом, так как при комплексном α в правой части (2) получится набор комплексных чисел, не являющийся элементом множества **L**.

§11. Линейная зависимость

Пусть дано конечное число элементов линейного пространства: $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \dots, \mathrm{q}$. Пусть далее $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \chi$ – произвольные числа.

Определение 1. Элемент x, пространства $\boldsymbol{L}$, представимый в виде $x = \alpha a + \beta b + \gamma \mathrm{c} + \dots + \chi \mathrm{q}$

называется линейной комбинацией элементов $\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{q}$. Также говорят, что х линейно выражается через $a, \mathrm{b}, \mathrm{c}, \ldots, \mathrm{q}$.

Определение 2. Линейная комбинация называется тривиальной, если $\alpha = \beta = \gamma = \ldots = \chi = 0$. В противном случае комбинация называется нетривиальной, если среди чисел $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \chi$ хотя бы одно не равно нулю.

Определение 3. Система векторов $a, b, c, \ldots, \mathrm{q}$ называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т. е. существуют такие числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \chi$, что $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\mathbf{c} + \ldots + \chi\mathbf{q} = \mathbf{0}$, при этом хотя бы одно из чисел не равно нулю.

***Определение** 4*. Система векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots, \mathbf{q}$ называется линейно независимой, если равенство $\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\mathbf{c} + \ldots + \chi\mathbf{q} = \mathbf{0}$ возможно лишь тогда, когда $\alpha = \ldots = \chi = 0$.

Непосредственно из определений видно, что всякая конечная система векторов является либо линейно зависимой, либо линейно независимой.

§12. Ядро и образ оператора. Факторпространство

Для линейного отображения $A: V \to W$ можно рассмотреть два множества:

$Ker\, A = \{v \in V | Av = 0\}$- ядро отображения;

$Im\, A = \{w \in W | \exists v \in V: Av = w\}$- образ отображения.

Легко проверить, что $Ker\, A -$ линейное подпространство в V, а $Im\, A -$ подпространство в W. Пусть $e_1, \ldots, e_k -$ базис $Ker\, A, e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ – расширение этого базиса до базиса V. Тогда $A_{e_{k+1}}, \ldots, A_{e_n}$- базис $Im\, A$ поэтому

$$dim\, Ker\, A + dim\, Im\, A = dim\, V.$$

Выберем в подпространствах V и W базисы и рассмотрим матрицу оператора A относительно этих базисов. Пространство $Im\,A$ порождено столбцами матрицы A, поэтому $dim\,Im\,A = rk\,A$. Видно, в частности, что ранг матрицы оператора A не зависит от выбора базисов, т.е. ранг оператора определен однозначно.

Если даны отображения $A: U \to V$ и $B: V \to W,$ то $Im\,A$ и $Ker\,B$ могут пересекаться. Для вычисления размерности перечисления этих подпространств можно воспользоваться следующей формулой.

Теорема.$dim\,(Im\,A \cap Ker\,B) = dim\,Im\,A - dim\,Im\,BA = dim\,Ker\,BA - dim\,Ker\,A$.

Доказательство. Пусть C- ограничение отображения B на $Im\,A$. Тогда $dim\,Ker\,C + dim\,Im\,C = dim\,Im\,A$ т.е. $dim\,(Im\,A \cap Ker\,B) + dim\,Im\,BA = dim\,Im\,A$. Для доказательства второго равенства достаточно заметить, что $dim\,Im\,BA = dim\,V - dim\,Ker\,A$.

Ядро и образ оператора A и сопряженного к нему оператора A^* связаны следующим соотношением.

Теорема 1. $Ker\,A^* = (Im\,A)^{\perp}$ и $Im\,A^* = (Ker\,A)^{\perp}$

Доказательство. Равенство $A^* \cdot f = 0$ означает, что $f(Ax) = A^* f(x) = 0$ для любого $x \in V$, т.е. $f \in (Im\,A)^{\perp}$. Поэтому $Ker\,A^* = (Im\,A)^{\perp}$, а так как $\left(A^*\right)^* = A$, то $KerA = (Im\,A^*)^{\perp}$. Следовательно, $(Ker\,A)^{\perp} = \left((Im\,A^*)^{\perp}\right)^{\perp} = Im\,A^*$.

<u>Следствие</u>. $rk\,A = rk\,A^*$.

Доказательство. $rk\,A^* = dim\,Im\,A^* = dim(Ker\,A)^{\perp} = dim\,V - dim\,Ker\,A = dim\,Im\,A = rk\,A$.

<u>Замечание 1</u>. Из равенства $rk\,A = rk\,A^*$ легко получить другое доказательство того, что ранг матрицы по строкам равен рангу по столбцам (см. п. 2.2).

<u>Замечание 2.</u> Если V- пространство со скалярным произведением, то V^* можно отождествить с V и тогда $V =$

$Im\,A^{\oplus}(Im\,A)^{\perp} = Im\,A^{\oplus} + KerA^*$. Аналогично $V = Im\,A^{*\,\oplus} + KerA$. (В матричной записи $A^* = A^T$).

Теорема 2. (альтернатива Фредгольма). *Пусть* $A: V \to V$*- линейный оператор. Рассмотрим 4 уравнения*

$$(1) \quad Ax = y, \quad x, y \in V; \quad (3) \quad Ax = 0;$$

$$(2) \quad A^*f = g, \quad f, g \in V^*; \quad (4) \quad A^*f = 0.$$

Тогда либо уравнения (1) и (2) разрешимы при любых правых частях, причем в этом случае решение единственно, либо уравнение (3) и (4) имеют одинакова количество линейно независимых решений $x_1, \dots, x_k$ и $f_1, \dots, f_k$, причем в этом случае уравнение (1) (соответственно (2)) разрешимо тогда и только тогда, когда $f_1(y) = \dots = f_k(y) = 0$ (соответственно $g(x_1) = \dots = g(x_k) = 0$.

Доказательство. Альтернатива Фредгольма является, по сути дела, переформулировкой теоремы 1. Разрешимость уравнений (1) и (2) при любых правых частях означает, что $Im\,A = V$ и $Im\,A^* = V$, т. е., $(Ker\,A^*)^{\perp} = V$ и $(Ker\,A)^{\perp} = V$, а значит, $Ker\,A^* = 0$ и $Ker\,A = 0$. Эти равенства эквивалентны, так как $rk\,A = rk\,A^*$.

Если же $Ker\,A \neq 0$, то $dim\,Ker\,A^* = dim\,Ker\,A$ и $y \in Im\,A$ тогда и только тогда, когда $y \in (Ker\,A^*)^{\perp}$, т.е., $f_1(y) = \dots = f_k(y) = 0$. Аналогично $g \in Im\,A$ тогда и только тогда, когда $g(x_1) = \dots = g(x_k) = 0$.

Образ линейного отображения A связан с разрешимостью линейного уравнения

$$Ax = b.$$

Это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда $b \in Im\,A$. В том случае, когда отображение задано матрицей, есть простой критерий разрешимости уравнения (1).

Теорема 1. (Кропекер - Капелли). *Пусть* A- *матрица,* x и b- *столбцы, причем их размеры таковы, что (1) имеет смысл. Уравнение (1) разрешимо тогда и только тогда, когда* $rk\,A = rk\,(A,\ b)$, *где* $(A,\ b)$- *матрица, полученная из матрицы* A *приписыванием столбца* b.

Доказательство. Пусть $A_1, \dots, A_n$- столбцы матрицы A. Уравнение (1) можно переписать в виде $x_1 A_1 + \dots + x_n A_n = b$. Это равенство означает, что столбец b является линейной комбинацией столбцов $A_1, \dots, A_n$, т.е. $rk\,A = rk\,(A,\ b)$.

Линейные отображения можно записать разными способами; например, выражение $f(X) = A_1 X B_1 + \dots + A_n X B_n$, где размеры матриц X, A_i и B_i таковы, что оно имеет смысл, задает линейное отображение одного пространства матриц в другое. Ограничимся исследованием уравнения

$$C = AXB. \tag{2}$$

Приведем сначала это уравнение к более простому виду.

Теорема 2. *Пусть* $a = rkA$. *Тогда существуют такие невырожденные матрицы* L_A *и* R_A, *что* $\mathrm{L}_A A \mathrm{R}_A = \mathrm{E}_\alpha$- *единичная матрица порядка* a, *дополненная нулями до размеров матрицы* A.

Доказательство. Рассмотрим отображение $A: V^n \to V^m$ фиксированные базисы $e_1, \dots, e_n$ и $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$, Пусть $y_{\alpha+1}, \dots, y_n$-базис $Ker\,A$, векторы $y_1, \dots, y_\alpha$ дополняют этот базис до базиса V^n. Зададим отображение $\mathrm{R}_A: V^n \to V^n$ формулой $\mathrm{R}_A(e_i) = y_i$. Тогда $A\mathrm{R}_A(e_i) = Ay_i$ при $i \le a$ и $A\mathrm{R}_A(e_i) = 0$ при $i > a$. Векторы $x_1 = Ay_1, \dots, x_1 = Ay_a$ образуют базис пространства $Im\,A$; дополним их векторами $x_{a+1}, \dots, x_m$ до базиса пространства V^m. Зададим отображение $\mathrm{L}_A: V^m \to V^m$ формулой $\mathrm{L}_A x_i = \varepsilon_i$. Тогда $\mathrm{L}_A A \mathrm{R}_A(e_i) = \varepsilon_i$ при $1 \le i \le a$ и $\mathrm{L}_A A \mathrm{R}_A(e_i) = 0$ при $i > a$.

Поэтому матрицы операторов L_A и R_A относительно базисов e и ε соответственно являются искомыми.

Теорема 3. *Уравнение (2) разрешимо тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих эквивалентных условий:*

а) существуют такие матрицы Y и Z, что $C = AY$ и $C = ZB$;

б) $rk\, A = rk\, (A, C)$ и $rk\, B = rk \begin{pmatrix} B \\ C \end{pmatrix}$, где матрица (A, C) составлена из столбцов матриц A и C, а другая матрица составлена из строк матриц B и C.

Доказательство. Эквивалентность условий а) и б) доказывается аналогично теореме 1. Ясно также, что если $C = AXB$, то можно положить $Y = XB$ и $Z = AX$. Предположим теперь, что $C = AY$ и $C = ZB$. Используя теорему 2. уравнение (2) можно переписать в виде $D = E_a W E_b$, где $D = \mathrm{L}_A C \mathrm{R}_B$ и $W = R_A^{-1} X L_B^{-1}$. Условия $C = AY$ и $C = ZB$ запишутся при этом в виде $D = E_a(R_A^{-1} Y \mathrm{R}_B)$ и $D = (\mathrm{L}_A Z L_B^{-1}) E_b$. Первое из этих равенств означает, что последние $m - a$ строк матрицы D нулевые, а второе равенство означает, что последние $n - b$ столбцов матрицы D нулевые. Поэтому в качестве W можно взять матрицу D; более того, в матрице D элементы последних $m - a$ строк и последних $n - b$ столбцов можно заменить любыми числами, т.е. пространство решений имеет размерность $mn - ab$. По матрице W матрица X определяется однозначно: $X = \mathrm{R}_A W \mathrm{L}_B$.

Если W - подпространство в V, то V можно разбить на подмножества $M_v = M_{v'}$ тогда и только тогда, когда $v - v \in W$. На множестве $V/W = \{M_v | v \in V\}$ можно ввести структуру линейного пространства, полагая $\lambda M_v = M_{\lambda v}$ и $M_v + M_{v'} = M_{v+v'}$; легко проверить, что $M_{\lambda v}$ и $M_{v+v'}$ не зависят от выбора v и v', а зависят лишь от самих множеств M_v и $M_{v'}$. Пространство V/W называется *факторпространством* пространства V по подпространству W; класс M_v удобно обозначать $v + W$.

Существует каноническое отображение $p: V \to V/W$, где $p(v) = M_v$; отображение p называется *проекцией.* Ясно, что $Ker\, p = W$ и $Im\, p = V/W$. Если $e_1, \dots, e_k,$ −базис W и $e_1, \dots, e_k\ e_{k+1}, \dots, e_n$- базис V, то $p(e_1) = \cdots = p(e_k) = 0$, а $p(e_{k+1}), \dots, p(e_n)$- базис V/W. Поэтому $dim(V/W) = dim\, V - \ dim\, W$.

Теорема. Имеют место следующие канонические изоморфизмы:

а) $(U/W)/(V/W) \cong U/V,$ *если* $W \subset V \subset U$;

б) $V/V \cap W \cong (V + W)/W,$ *если* $\mathrm{V}, \mathrm{W} \subset U$.

Доказательство. а) Пусть $u_1, u_2 \in U$. Классы $u_1 + W$ и $u_2 + W$ задают один класс по модулю V/W тогда и только тогда, когда $[(u_1 + W)(u_2 + W)] \in V$, т.е. $u_1 - u_2 \in V + W = V$, а значит, элементы u_1 и u_2 задают один класс по модулю V.

б) Элементы $v_1, v_2 \ \in V$ задают один класс по модулю $V \cap W$ тогда и только тогда, когда $v_1, v_2 \ \in W$, а значит, классы $v_1 + W$ и $v_2 + W$ совпадают.

Задача для самостоятельного решения

Пусть -линейный оператор. Докажите, что

$$dim\, Ker\ A^{n+1} = dim\, Ker\ A + \sum_{k=1}^{n} dim\left(Im\ A^k \cap Ker\ A\right)$$

и

$$dim\, Im\ A = \dim Im\ A^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} dim\left(Im\ A^k \cap Ker\ A\right).$$

§13. Лемма о базисном миноре

Пусть дана прямоугольная матрица $A = \left(a_{ij}\right)$. Будем рассматривать строчки этой матрицы как векторы координатного пространства $\mathbf{K_n}$, а столбцы – как векторы координатного пространства $\mathbf{K_m}$. Тогда можно говорить о линейной зависимости и независимости строк данной матрицы или о линейной зависимости и независимости ее столбцов.

Пусть отмечено k разных строк и k разных столбцов матрицы A ($k \leq n, k \leq m$). Элементами матрицы называют составляющие ее числа: $a_{11}, a_{12}, \ldots$, точнее следует сказать, символы. При этом два элемента a_{ij} и a_{ji} считают различными, если $i \neq j$ или $k \neq l$ (не исключая возможности, что a_{ik} и a_{jl} обозначают одно и то же число). Следует отметить, что в ряде случаев рассматриваются матрицы, где под a_{ik} подразумеваются не числа, а какие-нибудь другие объекты, например, функции. Элементы матрицы A, стоящие на пересечении отмеченных строк и столбцов, сами образуют некоторую, очевидно квадратную, матрицу B. Определитель матрицы B называется минором порядка k данной матрицы A.

Отметим, если это возможно, еще одну строку и еще один столбец матрицы A, не повторяя тех, которые уже были отмечены раньше. Теперь все отмеченные строки и столбцы своим пересечением определяют некоторую квадратную матрицу C.

Определитель матрицы C есть минор порядка $(k + 1)$ матрицы A. Будем называть его окаймляющим для первоначального взятого минора (т. е. для определителя матрицы B).

Замечание 1. Если $k = n$ или $k = m$, то для миноров порядка k окаймляющих миноров нет.

Замечание 2. Если $k = 1$, то матрица B состоит из одного элемента матрицы A. Миноры первого порядка представляют собой численные значения элементов матрицы.

Определение 1. Минор матрицы называется базисным, если он не равен нулю, а окаймляющие его миноры либо все равны нулю, либо отсутствуют вовсе.

Определение 2. Столбцы матрицы, пересекающие базисный минор, называются базисными столбцами.

Аналогичная терминология употребляется для строк.

Замечание 3. Матрица может иметь несколько базисных миноров и, соответственно, несколько систем базисных столбцов. Всякая матрица, кроме нулевой, имеет по крайней мере один базисный минор и, тем самым, по крайней мере одну систему базисных столбцов.

Лемма 1 (о базисном миноре).

(1) Столбцы матрицы, пересекающие базисный минор (базисные столбцы) линейно независимы. Всякий столбец может быть линейно выражен через них.

Лемма 1, согласно определению 2, может быть высказана так:

(2) Базисные столбцы линейно независимы. Любой столбец матрицы линейно выражается через базисные.

Доказательство.

1) Доказательство первого утверждения леммы 1 – от противного. Предположим, что базисные столбцы линейно зависимы. Тогда линейно зависимы столбцы базисного минора. Но в таком случае базисный минор равен нулю, что противоречит его определению.

2) Будем считать для определенности, что рассматриваемый базисный минор имеет порядок r и занимает левый верхний угол матрицы:

$$\begin{pmatrix} \overline{|a_{11} \dots a_{1r}|} \dots a_{1k} \dots a_{1n} \\ |\dots\dots\dots\dots.| \quad \dots\dots\dots\dots\dots \\ \underline{|a_{r1} \dots a_{rr}|} \dots a_{rk} \dots a_{rn} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mr} \dots a_{mk} \dots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначим этот базисный минор через D. Положим, что базисный минор в левом углу D_{rr} размерности $r \times r$.

Возьмем произвольные индексы i, k $(1 \leq i \leq m,\ l \leq k \leq n)$ и составим определитель порядка $(r+1)$, который получается добавлением любого столбца и строки

$$\Delta_{ik}= \begin{vmatrix} \boxed{D} & a_{1k} \\ a_{i1} & a_{ik} \end{vmatrix}.$$

Докажем, что $\Delta_{ik}= 0$. Рассмотрим три возможных случая:

1) $i \leq r$. В этом случае $\Delta_{ik}= 0$, так как в нем последняя строка совпадает с одной из предыдущих строк.

2) $k \leq r$. В этом случае $\Delta_{ik}= 0$ потому, что в нем последний столбец совпадает с одним из предыдущих.

3) $i > r$, $k > r$. В этом случае определитель Δ_{ik} является окаймляющим для минора D и равен нулю потому, что D – базисный минор.

Зафиксируем k и будем считать, что i пробегает всевозможные значения от 1 до m.

Разложим Δ_{ik} по элементам последней строки. Алгебраические дополнения элементов последней строки обозначим через $A_1, A_2, ..., A_{r+1}$. При изменении i эти величины остаются неизменными, так как алгебраическое дополнение какого-либо элемента зависит только от его места в определителе, но не зависит от численного значения самого элемента. В результате разложения получим

$$\Delta_{ik}= a_{i1}A_1 + \cdots + a_{ir}A_r + a_{ir}A_{r+1} = 0, \tag{5}$$

причем

$$A_{r+1} = D \neq 0. \tag{6}$$

Соотношения (5) и (6) дают

$$a_{ik} = \left(-\frac{A_1}{D}\right) a_{i1} + \cdots + \left(-\frac{A_r}{D}\right) a_{ir}.$$

Напомним, что k зафиксировано, i пробегает все значения от 1 до m. Поэтому

$$\begin{pmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{pmatrix} = \left(-\frac{A_1}{D}\right)\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + \left(-\frac{A_r}{D}\right)\begin{pmatrix} a_{1r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Формула (7) представляет j-й столбец матрицы (который может быть взят произвольно) в виде линейной комбинации базисных столбцов, что и требовалось доказать. ■

Замечание. Разумеется, аналогичная лемма имеет место и для базисных строк.

Следствием леммы о базисном миноре является следующая теорема.

Теорема. Определитель квадратной матрицы равен нулю в том и только в том случае, когда между столбцами этой матрицы имеется линейная зависимость. Аналогичное утверждение справедливо и для строк.

Доказательство. Если столбцы $n \times n$-матрицы зависимы, то ее определитель равен нулю $\Delta = 0$, а это одно из основных свойств определителей. Покажем, что если столбцы независимы, то определитель не равен нулю. В самом деле, если столбцы независимы, а определитель равен нулю, то должен найтись базисный минор М порядка меньшего n. Но тогда имеется столбец, который не входит в систему базисных столбцов, соответствующую минору М, и который линейно выражается через эту систему, т. е. между столбцами имеется зависимость, что противоречит предположению. ■

§14. Лемма о двух системах векторов

Пусть даны две системы векторов $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$, $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$ из одного и того же линейного пространства.

Лемма 1 (основная). Если система $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$ линейно независима и любой из векторов $\boldsymbol{b_i}$ линейно выражается через $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$, то $m \leq k$.

Доказательство. Доказательство проведем от противного. Пусть $m > k$. Выпишем зависимости, выражающие векторы $\mathbf{b_i}$ через векторы $\mathbf{a_j}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{b_1} = \alpha_{11}\boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_{1k}\boldsymbol{a_k}, \\ \boldsymbol{b_2} = \alpha_{21}\boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_{2k}\boldsymbol{a_k}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \boldsymbol{b_{m-1}} = \alpha_{m-11}\boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_{m-1k}\boldsymbol{a_k}, \\ \boldsymbol{b_m} = \alpha_{m1}\boldsymbol{a_1} + \cdots + \alpha_{mk}\boldsymbol{a_k}. \end{cases} \tag{8}$$

Если матрица $(a_{ij}) = 0$, то $\boldsymbol{b_1} = \cdots = \boldsymbol{b_m} = \mathbf{0}$, и система $\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m}$ линейно зависима, что противоречит условию леммы.

Если матрица $(a_{ij}) \neq 0$, тогда существует базисный минор k-го порядка $r \leq k < m$, не равный нулю. Число строк в матрице (a_{ij}), равное m, больше k и, следовательно, больше числа базисных строк этой матрицы.

Таким образом, матрица (a_{ij}), имеет некоторую систему базисных строк и еще, по крайней мере одну строку, не входящую в эту систему, которая линейно выражается через базисные согласно лемме о базисном миноре. Но это означает, что между строками матрицы имеется линейная зависимость (см. § 9 гл. II). Напишем ее в виде

$$\lambda_1(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1k}) + \ \dots + \lambda_m(\alpha_{m1}, \dots, \alpha_{mk}) = (0, \dots, 0), \tag{9}$$

где среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ есть отличные от нуля.

Умножим равенства (8) соответственно на $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ и сложим их почленно. Учитывая линейную зависимость (9), найдем

$$\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_m b_m = \boldsymbol{a_1}(\lambda_1\alpha_{11} + \cdots + \lambda_m\alpha_{m1}) + \ \dots +$$
$$+\boldsymbol{a_k}(\lambda_1\alpha_{1k} + \cdots + \lambda_m\alpha_{mk}) = 0 \cdot \boldsymbol{a_1} + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{a_k} =$$
$$(0, \dots, 0) = \mathbf{0}.$$

Система $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$ оказалась линейно зависимой, что невозможно по условию леммы, что и требовалось доказать. ■

Говорят, что векторы $\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ образуют линейно независимую подсистему в системе $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$, если векторы $\boldsymbol{a}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{a}_{i_r}$ линейно независимы и входят в систему $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$.

Очевидно, что система $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ содержит по крайней мере одну линейно независимую подсистему в том и только в том случае, когда среди векторов $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ имеется хотя бы один ненулевой.

Лемма 2. Пусть система векторов $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_{r+1}})$ линейно зависима, а ее подсистема $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r})$ линейно независима, тогда вектор $\boldsymbol{a_{r+1}}$ есть линейная комбинация векторов $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r})$.

Доказательство. Имеем зависимость

$$\lambda_1 \boldsymbol{a_1} + \dots + \lambda_r \boldsymbol{a_r} + \lambda_{r+1} \boldsymbol{a_{r+1}} = \boldsymbol{0}, \tag{10}$$

где среди чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_r, \lambda_{r+1}$ есть отличные от нуля. Очевидно, $\lambda_{r+1} \neq 0$, так как в этом случае оказалась бы зависимой подсистема $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r})$. Таким образом, из формулы (10) находим

$$\boldsymbol{a_{r+1}} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_{r+1}}\right) \boldsymbol{a_1} + \dots + \left(-\frac{\lambda_r}{\lambda_{r+1}}\right) \boldsymbol{a_r},$$

что и требовалось доказать. ■

Определение. Пусть $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r})$, состоящая из r векторов, максимальная линейная независимая подсистема системы $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ $(k \geq r)$. Тогда число r называется рангом системы $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$, если всякая ее подсистема из большего числа векторов линейно зависима, либо если таких подсистем нет совсем (в случае $k = r$).

Если коротко, рангом системы называется максимальное число ее линейно независимых векторов.

Если все векторы системы $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ нулевые, то будем говорить, что ее ранг равен нулю.

Лемма 3 (обобщенная основная). Пусть любой вектор из векторов $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$ линейно выражается через систему векторов $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$, тогда ранг системы $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$ не больше ранга системы $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$**:** $Rang\ b \leq Rang\ a$.

Доказательство. Пусть $Rang\ a = r_a$ ранг системы $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$.

I. Если $r_a = 0$, то справедливость утверждения леммы очевидна, $r_b = 0$.

II. Если $r_a = k$, то справедливость утверждения леммы следует из леммы 1, так как число векторов в любой линейной независимой подсистеме из $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$ не больше r_a.

III. Пусть $0 < r < k$. Тогда в системе $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ найдется r линейно независимых векторов. Добавляя к ним еще один вектор из системы $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$**,** всякий раз будем получать линейно зависимые системы

$$(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_{r+1}});$$
$$(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_{r+2}});$$
$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots;$$
$$(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}, \boldsymbol{a_k}).$$

По лемме 2 каждый из векторов $\boldsymbol{a_{r+1}}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}$. С другой стороны, по условию леммы каждый вектор $\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m}$ линейно выражается через векторы $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k}$. Отсюда следует, что каждый вектор $\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m}$ линейно выражается через $\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_r}$ (см. § 9 гл. II). Тогда по лемме 1 число векторов в любой линейно независимой подсистеме $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m}) \leq r_a$, в том числе и в максимальной, то есть $r_b \leq r_a$, что и требовалось доказать. ■

Пример вычисления обратной матрицы.

Рассмотрим матрицу $A=\begin{pmatrix}3 & -3 & -5 & 8\\ -3 & 2 & 4 & -6\\ 2 & -5 & -7 & 5\\ -4 & 3 & 5 & -6\end{pmatrix}$ и построим вспомогательную матрицу $(A,E)=\begin{pmatrix}3 & -3 & -5 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 4 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Элементарные преобразования со строками этой матрицы постараемся производить таким образом, чтобы в результате на месте матрицы A оказалась матрица E; тогда матрица, которая будет расположена на месте первоначальной матрицы E, и будет искомой матрицей A^{-1}. Пояснения к этому утверждению будут сделаны в конце этого примера. Итак, приступим к элементарным преобразованиям.

$$(A,E)=\begin{pmatrix}3 & -3 & -5 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 4 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}3 & -3 & -5 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -7 & -9 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -7 & -9 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -5 & -7 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -7 & -9 & 4 & 0 & 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\to$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&7&3&2&-1&0\\0&-1&-1&2&1&1&0&0\\0&-5&-7&-9&-6&-4&3&0\\0&-7&-9&4&0&0&2&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&7&3&2&-1&0\\0&-1&-1&2&1&1&0&0\\0&0&-2&-19&-11&-9&3&0\\0&0&-2&-10&-7&-7&2&1\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&7&3&2&-1&0\\0&-1&-1&2&1&1&0&0\\0&0&-2&-19&-11&-9&3&0\\0&0&0&9&4&2&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&7&3&2&-1&0\\0&-1&-1&2&1&1&0&0\\0&0&-2&-19&-11&-9&3&0\\0&0&0&1&\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&\frac{-1}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{-1}{9}&\frac{4}{9}&\frac{-2}{9}&\frac{-7}{9}\\0&-1&-1&0&\frac{1}{9}&\frac{5}{9}&\frac{2}{9}&\frac{-2}{9}\\0&0&-2&0&\frac{-23}{9}&\frac{-43}{9}&\frac{8}{9}&\frac{19}{9}\\0&0&0&1&\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&\frac{-1}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&\frac{-1}{9}&\frac{4}{9}&\frac{-2}{9}&\frac{-7}{9}\\0&-1&-1&0&\frac{1}{9}&\frac{5}{9}&\frac{2}{9}&\frac{-2}{9}\\0&0&1&0&\frac{23}{18}&\frac{43}{18}&\frac{-8}{18}&\frac{-19}{18}\\0&0&0&1&\frac{4}{9}&\frac{2}{9}&\frac{-1}{9}&\frac{1}{9}\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-7}{9} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{25}{18} & \frac{53}{18} & \frac{-4}{18} & \frac{-23}{18} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{23}{18} & \frac{43}{18} & \frac{-8}{18} & \frac{-19}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{-2}{9} & \frac{-7}{9} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-25}{18} & \frac{-53}{18} & \frac{4}{18} & \frac{23}{18} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{23}{18} & \frac{43}{18} & \frac{-8}{18} & \frac{-19}{18} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Искомая матрица A^{-1} будет такой: $A^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -4 & -14 \\ -25 & -53 & 4 & 23 \\ 23 & 43 & -8 & -19 \\ 8 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Проверка. $AA^{-1} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 3 & -3 & -5 & 8 \\ -3 & 2 & 4 & -6 \\ 2 & -5 & -7 & 5 \\ -4 & 3 & 5 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 8 & -4 & -14 \\ -25 & -53 & 4 & 23 \\ 23 & 43 & -8 & -19 \\ 8 & 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{pmatrix} = E$

Пояснения. Элементарные преобразования над строками матрицы (A, E) эквивалентны умножению этой матрицы слева на «матрицы элементарных преобразований». Пусть с помощью k элементарных преобразований достигаем желаемого результата. То есть, в результате умножения слева матрицы (A, E) сначала на матрицу C_1 первого элементарного преобразования, затем на втором шаге умножения полученного произведения на матрицу C_2 второго элементарного преобразования и т.д. на k-ом шаге умножения полученного произведения на матрицу C_k k-ого элементарного преобразования получаем желаемый вид матрицы $(A, E) \to (E, C)$. То есть,

$C_k\big(C_{k-1} \dots \big(C_1(A, B)\big) \dots\big) = (E, C)$. Здесь $C = C_k C_{k-1} \dots C_1$. В силу ассоциативности умножения матриц предыдущее равенство можно записать как $C(A, E) = (E, C)$. Учитывая, что в произведении матриц матрица первого сомножителя последовательно умножается на все столбцы матрицы второго сомножителя, получим, что

$$C(A, E) = (CA, CE) = (E, C).$$

Откуда $CA = E$ и $CE = C$. Из первого равенства как раз и следует, что $C = A^{-1}$.

Определение. Рангом матрицы называется максимальное число ее линейно независимых столбцов.

Таким образом, ранг матрицы есть ранг системы ее столбцов, рассматриваемых как векторы координатного пространства.

Ранг матрицы А будем обозначать символом $RangA$.

Если матрица А нулевая, то $RangA = 0$, так как у нулевой матрицы нет линейно независимых столбцов. Следует отметить, что ранг ненулевой матрицы всегда положителен.

Теорема о ранге матрицы. Ранг произвольной матрицы равен максимальному порядку отличных от нуля миноров (порядок базовых миноров).

Доказательство. Если $RangA = 0$, то A – нулевая матрица, и у нее нет отличных от нуля миноров. Естественно считать в этом случае, что максимальный порядок отличных от нуля миноров равен нулю.

Пусть далее матрица A – не нулевая. Если некоторый ее минор M порядка r не равен нулю, а все миноры более высокого порядка равны нулю или отсутствуют вовсе, то M является базисным минором. По лемме о базисном миноре столбцы матрицы A, пересекающие минор M, линейно независимы, поэтому $RangA \geq r$. По той же лемме любой столбец матрицы А линейно выражается через базисные столбцы. Отсюда, применяя лемму 3 § 11 гл. II, находим, что $RangA \leq r$. Таким образом, $RangA = r$, что и требовалось доказать. ■

Из приведенных ранее рассуждений, вытекает ряд важных следствий.

Следствие 1. Ранг ненулевой матрицы равен порядку любого ее базисного минора.

Доказательство. В самом деле, если М – произвольный базисный минор, r – его порядок, то, повторяя предыдущие рассуждения, находим, что $RangA = r$.■

Следствие 2. Все базисные миноры ненулевой матрицы имеют одинаковый порядок, равный ее рангу.

Следствие 3. Если в матрице A минор M базисный, то все миноры более высокого порядка равны нулю (а не только миноры, окаймляющие M).

Следствие 4. Максимальное число линейно независимых строк произвольной матрицы A равно максимальному числу ее линейно независимых столбцов (то есть, равно рангу A).

Другими словами, ранг матрицы не меняется при перестановке строк и столбцов. Кроме того, ранг матрицы не изменится, если к одному из ее столбцов прибавить линейную комбинацию других столбцов, поскольку такая операция не изменяет числовых значений ее миноров.

Доказательство. Если матрица А нулевая, то число линейно независимых строк, как и число линейно независимых столбцов, равно нулю. Пусть A – ненулевая матрица. Транспонируем матрицу A. Тогда ее строки перейдут в столбцы транспонированной матрицы A^*, линейно независимые строки перейдут в линейно независимые столбцы A^*, а максимальный порядок отличных от нуля миноров сохранится, поскольку при транспонировании каждый из миноров сохраняет свое числовое значение.

Таким образом,

$$Rang\mathrm{A} = Rang\mathrm{A}^*,$$

и равен максимальному числу линейно независимых строк матрицы A.

<u>Следствие 5.</u> Если A – произвольная $m \times n$-матрица, то $Rang$A не превышает меньшего из двух чисел m и n.

Аналогично ранг сохраняется, если к одной из строк прибавить линейную комбинацию других строк.

Перечисленные выше свойства обычно используются для вычисления ранга матрицы. Именно, данную матрицу преобразуют так, чтобы ранг не изменился, но, чтобы в результате получилась матрица, у которой сразу виден базисный минор.

Пример построения матрицы перехода от одной системы координат к другой в векторном пространстве.

Пусть задано векторное пространство $\boldsymbol{V}$ над полем $\boldsymbol{K}$, и в нем заданы два базиса: базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и базис $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ и его разложения по базисам, т.е. представления $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ и $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$. Коэффициенты x_i и x'_j называются координатами вектора $\boldsymbol{x}$ в разложениях по базисам $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ соответственно. Столбцы X и X', построенные соответственно из координат x_i и x'_j вектора $\boldsymbol{x}$ называются координатными столбцами этого вектора. Покажем, как связаны между собой координаты одного и того же вектора в разных базисах.

Для этого разложим вектора базиса $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$ по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$, т.е. рассмотрим суммы $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$, где $j = 1,2, \dots, n$. Затем подставим эти суммы в разложения вектора $\boldsymbol{x}$ и приравняем последние суммы между собой, т.е. положим $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{j=1}^{n} x'_j (\sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i)$. Проделывая необходимые действия и меняя порядок суммирования в двойной сумме, получим: $\sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j) e_i$. Поскольку два вектора равны, когда равны их соответствующие координаты, то из последнего равенства получаем n равенств:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x'_j,\ i = 1,2, \dots, n.$$

Эти n равенств записываются в виде одного матричного равенства $X = PX'$. Матрица P строится очевидным образом – её j-ый столбец равен координатному столбцу базисного вектора e'_j в разложении последнего по базису $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Рассмотрим теперь конкретное векторное пространство $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R}^4$ пространство четырехмерных вещественных столбцов. Показать, что конкретные столбцы e_1, e_2, e_3, e_4 и столбцы e'_1, e'_2, e'_3, e'_4 образуют два различных базиса этого пространства и найти матрицу перехода P от второй системы координат к первой.

Пусть столбцы первого и второго базисов заданы как столбцы матриц A и B соответственно, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 10 & -8 & -6 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ 4 & -9 & 8 & 5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Для решения поставленной задачи нужно проверить, что $|A| \neq 0$ и $|B| \neq 0$. Затем каждый столбец B_i матрицы B разложить по столбцам матрицы A, т.е. решить системы уравнений $AP_i = B_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Столбцы неизвестных P_i и будут столбцами искомой матрицы P. Для реализации указанной схемы решения составим матрицу, построенную из столбцов A и B (т.е. матрицу (A, B)) и с помощью элементарных преобразований строк этой матрицы (метод Гаусса) постараемся получить на месте матрицы A единичную матрицу E. Если этого сделать не удастся, то $|A| = 0$ (столбцы матрицы A линейно зависимы). Если удастся получить на указанном месте единичную матрицу, то на месте матрицы B будет находиться искомая матрица $P = A^{-1}B$ в том и только в том случае если её определитель будет отличен от нуля.

Решение. $(A, B) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 10 & -8 & -6 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 3 & -4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 4 & -9 & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 10 & -8 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 7 & -14 & 15 & 11 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 & -19 & 16 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -8 & 3 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & -4 & 10 & -8 & -6\\ 0 & -2 & 0 & 0 & 7 & -14 & 15 & 11\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 8 & -19 & 16 & 11\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -8 & 3 & 9\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & \frac{-8}{2} & \frac{20}{2} & \frac{-16}{2} & \frac{-12}{2}\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{-14}{2} & \frac{15}{2} & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{-19}{2} & \frac{16}{2} & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-8}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2}\end{pmatrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{-21}{2} & \frac{18}{2} & \frac{19}{2}\\ 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & \frac{-14}{2} & \frac{15}{2} & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{-19}{2} & \frac{16}{2} & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{-8}{2} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2}\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & \frac{8}{2} & \frac{-21}{2} & \frac{18}{2} & \frac{19}{2}\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{2} & \frac{14}{2} & \frac{-15}{2} & \frac{-11}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-8}{2} & \frac{19}{2} & \frac{-16}{2} & \frac{-11}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{8}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-9}{2}\end{pmatrix}$$

Вначале первая строка матрицы (A, B) вычитается из всех остальных, затем продолжение метода Гаусса с «обратным ходом».

Искомая матрица P будет следующей:

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 & -21 & 18 & 19\\ -7 & 14 & -15 & -11\\ -8 & 19 & -16 & -11\\ -1 & 8 & -3 & -9\end{pmatrix}$$

Поскольку $|A| = |B| = -8$ (проверяется непосредственно, коме того, для матрицы A этот результат непосредственно виден в процессе преобразования матрицы (A, B)), то $|P| = \left|A^{-1}B\right| = |A|^{-1}|B| = 1$ (проверяется также непосредственным вычислением определителя).

Замечание. Обратите внимание на расстановку индексов в коэффициентах разложения $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} e_i$.

Упражнение. Выразить через матрицу P матрицы перехода от нештрихованного базиса к штрихованному и обратно, а также от нештрихованной системы координат к штрихованной (в примере был рассмотрен переход от штрихованной системы координат к нештрихованной).

§15. Базис, размерность

Определение 1. Линейное пространство называется n-мерным, если в нем имеется линейно независимая система, состоящая из n векторов, а любая система, состоящая из большего числа векторов, является линейно зависимой.

Число n называется размерностью линейного пространства. Таким образом, размерность пространства – это наибольшее число его линейно независимых векторов.

Например, пространство геометрических векторов трехмерно, так как в нем имеется три независимых вектора, а любые четыре связаны линейной зависимостью. Геометрические векторы, расположенные в одной плоскости, образуют двумерное пространство, в котором любые два неколлинеарных вектора линейно независимы, а всякие три вектора линейно зависимы. Векторы, лежащие на одной прямой, образуют одномерное пространство. Линейное пространство, содержащее единственный элемент – нулевой вектор $\mathbf{0}$, является нульмерным.

Все n-мерные пространства ($\mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots$) образуют класс конечномерных пространств.

Определение 2. Линейное пространство называется бесконечномерным, если для любого целого числа $\mathrm{N} > 0$ в нем найдется линейно независимая система, состоящая из N векторов.

Пример. Линейное пространство непрерывных на данном сегменте функций является бесконечномерным. Можно установить их линейную независимость, рассмотрев степенные функции 1, τ, τ^2, ..., τ^N.

Любая их линейная комбинация представляет собой многочлен степени не выше N

$$a_0 + a_1\tau + a_2\tau^2 + \cdots + a_N\tau^N = p(\tau).$$

У любого многочлена с ненулевыми коэффициентами есть лишь конечное число корней, поэтому $p(\tau) \equiv 0$, т. е. $\{p(\tau) = \mathbf{0}\}$ тогда и только тогда, когда $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_N = 0$.

Таким образом, показано, что рассматриваемые элементы независимы, а само пространство бесконечномерно, так как число N может быть сколь угодно большим.

Введем весьма важное определение.

Определение 3. Линейно независимая система $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ называется базисом пространства $\boldsymbol{L}$, если для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ существует линейная комбинация $\{\boldsymbol{e_i}\}$:

$$x = x_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e_i}. \qquad (11)$$

Равенство вида (11) называется разложением вектора x по базису $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$. Числовые коэффициенты x_i называются координатами вектора x в базисе $\{\boldsymbol{e_i}\}$.

Определение 4. Размерность пространства есть максимальное число линейно независимых векторов. Если такого нет, то оно называется бесконечномерным.

Теорема. Линейное пространство тогда и только тогда n-мерно, когда в нем существует базис из n-векторов.

Доказательство.

1) Пусть пространство $\boldsymbol{L}$ – n-мерное. Следовательно, существует система из n линейно независимых векторов $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$. Добавив к ней произвольный вектор $\mathbf{x}$ из $\mathbf{L}$, получим линейно зависимую систему $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}, x)$. Значит система из n линейно независимых векторов $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ максимальная и по лемме 2 §11 любой вектор есть линейная комбинация векторов $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}})$, следовательно, $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ есть базис.

2) Пусть пространство $\boldsymbol{L}$ имеет базис $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$. Возьмем в пространстве $\boldsymbol{L}$ любую линейно независимую систему $(\boldsymbol{b_1}, \dots, \boldsymbol{b_m})$. По определению базиса каждый из векторов $\mathbf{b_j}$ линейно выражается через $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$. Значит, по лемме 1 §11 гл. II, $m \leq n$. Следовательно, любая система векторов $(\boldsymbol{a_1}, \dots, \boldsymbol{a_k})$ $(k > n)$ – линейно зависима. Вместе с тем, базис $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ образует линейно независимую систему, содержащую n векторов. Значит, размерность $\boldsymbol{L}$ равна n. ■

<u>Замечание.</u> Как видно из проведенного доказательства, в n-мерном пространстве любая независимая система из n векторов является базисом.

В качестве приложения доказанной теоремы докажем лемму.

Лемма. Координатное пространство $\mathbf{K_n}$ является n-мерным.

Доказательство. Рассмотрим в $\boldsymbol{K_n}$ векторы

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_1} &= \{1, 0, \dots, 0\}, \\ \boldsymbol{e_2} &= \{0, 1, \dots, 0\}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \boldsymbol{e_n} &= \{0, 0, \dots, 1\}. \end{aligned} \tag{12}$$

Согласно определению линейных операций в $\mathbf{K_n}$ (см. §8 гл. II) любой вектор из $\mathbf{K_n}$ линейно выражается через векторы $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ и из определения действий сложения и умножения на число для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbf{K_n}$ $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e_i} = (\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_n})$. Отсюда следует, что линейная комбинация векторов $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{e_i} = \mathbf{0}$, что равносильно $x_i = \mathbf{0}$ для любого i. Значит, векторы $(\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n})$ независимы и составляют базис $\mathbf{K_n}$, следовательно, пространство $\mathbf{K_n}$ является n-мерным, что и требовалось доказать. ■

Пример. Показать, что, в трехмерном пространстве V над полем вещественных чисел с декартовой системой координат, функция $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \in V$, а знак $\times$ означает векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$, является линейным оператором, отображающим векторное пространство V в себя. Построить матрицу этого линейного оператора в декартовой системе координат.

Решение. Из свойств векторного произведения векторов следует, что для любых векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ и любых вещественных чисел α и β $f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times (\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v})$, т.е. $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$ действительно линейный оператор, действующий в обычном трехмерном пространстве.

Далее, предполагаем, что в пространстве V дана декартова система координат, т.е. существует такая тройка векторов-ортов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in V$, что любой вектор $\boldsymbol{v} \in V$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации этих ортов. То есть, $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$, где коэффициенты v_1, v_2, v_3 – координаты вектора $\boldsymbol{v}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Кроме того предполагается, что $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$. Отсюда, в силу свойств векторного произведения векторов, тотчас же следует, что $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 0$. Теперь, чтобы построить матрицу A линейного оператора f нужно применить наш оператор к базисным векторам отображаемого пространства (в нашем случае к векторам $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$), разложить эти образы по базису того пространства, в которое происходит отображение (в нашем случае по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$), и координаты образа i-го базисного вектора записать в i-ый столбец матрицы A.

Итак, с учетом того, что a_1, a_2, a_3 – координаты вектора $\boldsymbol{a}$, получим:

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_1 = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_1 = -a_2\boldsymbol{e}_3 + a_3\boldsymbol{e}_2,$$

$$f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_2 = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_2 = a_1\boldsymbol{e}_3 - a_3\boldsymbol{e}_1,$$

$$f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_3 = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_3 = -a_1\boldsymbol{e}_2 + a_2\boldsymbol{e}_1.$$

Следовательно, матрица A оператора f будет следующей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, чтобы вычислить координаты вектора $f(\boldsymbol{v})$ достаточно умножить матрицу A на координатный столбец вектора $\boldsymbol{v}$. То есть, координатным столбцом вектора $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$ будет столбец

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3v_2 + a_2v_3 \\ a_3v_1 - a_1v_3 \\ -a_2v_1 + a_1v_2 \end{pmatrix}.$$

Этот пример используется для получения практических уравнений движения твердого тела вокруг центра масс.

§16. Линейные операции в координатах

Пусть пространство $\boldsymbol{L}$ является n-мерным, а векторы $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ образуют в нем базис.

Теорема 1. Разложение вектора по данному базису единственно.

Доказательство. Пусть вектор $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{L}$ имеет два разложения:

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\boldsymbol{e_i}, \widetilde{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{x}_i\boldsymbol{e_i}.$$

Тогда произведем вычитание и получим

$$x - \tilde{x} = \sum_1^n \boldsymbol{e_i}(x_i - \tilde{x}_i) = \mathbf{0}.$$

А так как векторы базиса линейно независимы, то $x_i - \tilde{x}_i = 0$. Следовательно, $x_i = \tilde{x}_i$, что и требовалось доказать. ■

<u>Следствие 1.</u> Все координаты нулевого вектора **0** равны нулю при любом выборе базиса:

$$\theta = 0 \cdot \boldsymbol{e_1} + \ \dots + 0 \cdot \boldsymbol{e_n}. \tag{13}$$

Теорема 2. При умножении вектора на число каждая его координата умножается на это число. При сложении векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ складываются их соответствующие координаты.

Доказательство. Пусть даны векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$. Разложим их по базису:

$$\boldsymbol{x} = \sum_1^n x_i \boldsymbol{e_i},\ y = \sum_1^n y_i \boldsymbol{e_i}.$$

Пусть α – любое число. По аксиомам линейного пространства имеем:

$$\alpha\boldsymbol{x} = \alpha\left(\sum_1^n x_i \boldsymbol{e_i}\right) = \sum_1^n (\alpha x_i)\boldsymbol{e_i}.$$

Таким образом, вектор $\alpha\boldsymbol{x}$ имеет координаты $(\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$.

Далее имеем, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \sum_1^n (x_i + y_i)\boldsymbol{e_i}$. Значит, вектор $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ имеет координаты $(x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$, что и требовалось доказать.

Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{q}$ – произвольная из $\boldsymbol{L}$. Разложим каждый из них по базису:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\boldsymbol{e_1} + \dots + a_n\boldsymbol{e_n}, \\ \mathbf{b} &= b_1\boldsymbol{e_1} + \dots + b_n\boldsymbol{e_n}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \mathbf{q} &= q_1\boldsymbol{e_1} + \dots + q_n\boldsymbol{e_n}. \end{aligned} \tag{14}$$

Наряду с векторами (14) рассмотрим матрицу M, образованную их координатами:

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \\ \dots & \dots & \dots \\ q_1 & \dots & q_n \end{pmatrix}.$$

Тогда справедлива теорема. ■

Теорема 3. Ранг системы векторов (14) равен рангу матрицы М.

Доказательство. Предположим, что между векторами (14) имеется линейная зависимость

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\boldsymbol{b} + \cdots + \chi\boldsymbol{q} = \mathbf{0}. \tag{15}$$

Тогда из формул (13), (15), теоремы 2 и теоремы 1 имеем

$$\alpha(\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}) + \beta(\mathrm{b}_1, \dots, \mathrm{b}_\mathrm{n}) + \cdots + \chi(\mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_\mathrm{n}) = (0, \dots, 0). \tag{16}$$

Иначе говоря, между строками матрицы М имеется линейная зависимость с теми же коэффициентами α, β, …, χ. Обратно, из (16) следует (15). Аналогичные рассуждения можно провести, взяв не всю систему (14), а какую-нибудь ее подсистему и соответствующую подсистему строк матрицы М (т. е. те ее строки, в которых выписаны координаты векторов выбранной подсистемы). Поэтому подсистема векторов из системы (14) линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независима соответствующая подсистема строк матрицы М. Значит, максимальное число линейно независимых векторов системы (14) совпадает с максимальным числом линейно независимых строк матрицы М. Теорема 3 доказана. ■

Если число векторов в системе (14) равно n, то матрица М становится квадратной.

<u>Следствие 2.</u> В n-мерном пространстве система из n векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда определитель матрицы координат этих векторов равен нулю:

$$\Delta = detM = 0,$$

т. е. когда ранг матрицы M меньше n.

Данное утверждение нередко используется при практической проверке линейной зависимости или независимости конкретных систем векторов.

§17. Линейные подпространства

Пусть $\boldsymbol{L_n}$ – линейное пространство, $\mathbf{L}'$ – некоторое множество элементов из $\boldsymbol{L_n}$.

Определение 1. Множество $\mathbf{L}'$ в пространстве $\boldsymbol{L_n}$ называется линейным подпространством (или просто подпространством $\boldsymbol{L_n}$), если выполняются следующие условия:

1) для любых x, у из $\mathbf{L}'$ их сумма $x +$ у также входит в $\mathbf{L}'$;

2) для любого $x \in \boldsymbol{L}'$ и любого числа α произведение $\alpha x \in \boldsymbol{L}'$.

Пусть $\mathbf{L}'$ – линейное подпространство в $\boldsymbol{L_n}$. Операции сложения векторов и умножения их на числа, заданные в $\boldsymbol{L_n}$, будем рассматривать применительно лишь к тем элементам, которые входят в $\mathbf{L}'$.

Теорема 1. В линейном пространстве $\boldsymbol{L_n}$ каждое линейное подпространство $\mathbf{L}'$ само является линейным пространством.

Доказательство. По определению подпространства действия сложения и умножения на число не выводят за пределы $\mathbf{L}'$. Аксиомы линейного пространства 1)-2) и 5)-8) заведомо выполнены в $\mathbf{L}'$, так как они выполнены вообще для всех элементов $\boldsymbol{L_n}$. Для доказательства надо проверить только аксиомы 3) и 4), то есть установить, что вместе с каждым элементом x из $\mathbf{L}'$ в подпространство L_n входит противоположный элемент $-x$, и что $\mathbf{0} \in \mathbf{L}'$.

По второму условию определения подпространства имеем $-x = (-1) \cdot x \in \mathbf{L}'$. Применяя первое условие, получаем $\mathbf{0} = x + (-x) \in \mathbf{L}'$. Теорема доказана. ■

<u>Примеры подпространств.</u>

1) Множество $\mathbf{L}'$, состоящее только из одного нулевого элемента $\mathbf{0}$ данного пространства, образует его

подпространство. Действительно, $\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}\in \mathrm{L}'$, $\alpha 0=\mathbf{0}\in$ $\mathbf{L}'$.

2) В n^2-мерном пространстве квадратных $n\times n$-матриц множество симметрических матриц (a_{ik}), то есть таких, что $a_{ik}=a_{ki}$, образует подпространство.

Множество кососимметрических матриц, характеризующихся тем, что $a_{ik}=-a_{ki}$, также образует подпространство в пространстве $n\times n$-матриц.

3) В пространстве всевозможных функций, заданных на отрезке $\tau_1\leq\tau\leq\tau_2$, каждое из следующих множеств образует линейное подпространство:

а) функции, непрерывные в некоторой внутренней точке τ_0 интервала $\tau_1<\tau<\tau_2$;

б) функции, непрерывные в интервале $\tau_1<\tau<\tau_2$;

в) функции, непрерывные на всем отрезке $[\tau_1,\tau_2]$;

г) функции, непрерывные на отрезке $[\tau_1,\tau_2]$ вместе с их производными до порядка N включительно, где N – произвольное целое положительное число;

д) функции, имеющие на отрезке $[\tau_1,\tau_2]$ производные всех порядков;

е) всевозможные многочлены, рассматриваемые на отрезке $[\tau_1,\tau_2]$;

ж) многочлены, степени которых не превосходят фиксированного целого числа $N>0$.

В примере 3) каждое из перечисленных выше подпространств содержится в предыдущем, и все они, за исключением последнего, бесконечномерны (последнее имеет размерность $\mathrm{N}+1$).

з) Зафиксируем на отрезке $[\tau_1,\tau_2]$ произвольное множество точек $\mathcal{A}$. Функции, равные нулю в точках множества $\mathcal{A}$, также образуют подпространство.

4) Пусть $\boldsymbol{L_n}$ – трехмерное пространство геометрических векторов в обычном евклидовом пространстве. Будем считать, что векторы отложены из

начала координат. Рассмотрим все векторы, расположенные в какой-нибудь плоскости, проходящей через начало координат. Такие векторы образуют подпространство.

Примеры подмножеств линейного пространства, которые не являются подпространствами.

а) В трехмерном пространстве геометрических векторов рассмотрим совокупность векторов, концы которых лежат в фиксированной плоскости, не проходящей через начало координат. Они не образуют подпространства, так как и сумма двух векторов, и произведение вектора на любое число, не равное единице, уже не входят в это подмножество.

б) В этом же пространстве рассмотрим векторы, концы которых лежат на поверхности конуса с вершиной в начале координат. Произведение любого вектора из рассматриваемого множества на любое число снова принадлежит этому множеству. Тем не менее, указанное множество не является подпространством, так как операция сложения, вообще говоря, выводит за его пределы.

Пересечением некоторой совокупности множеств называется совокупность тех элементов, которые одновременно принадлежат всем рассматриваемым множествам. Пересечение двух множеств $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ обозначается символом $\mathbf{L_1} \cap \mathbf{L_2}$.

Пусть $\mathbf{L_1}, \mathbf{L_2} \subset \mathbf{L_n}$ – подпространства. Множество $\{\mathrm{x} | \mathrm{x} \in \mathbf{L_1}, \mathrm{x} \in \mathbf{L_2}\}$ называется пересечением $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ и $\{\mathrm{x} | \mathrm{x} \in \mathbf{L_1}, \mathrm{x} \in \mathbf{L_2}\} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{L_1} \cap \mathbf{L_2}$.

Теорема 2. Пересечение любой совокупности подпространств данного линейного пространства $\boldsymbol{L_n}$ тоже является линейным подпространством.

Доказательство. Пусть $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ два подпространства и $\mathbf{L_3} = \mathbf{L_1} \cap \mathbf{L_2}$, а векторы **x, y** принадлежат $\mathbf{L_3}$.

Рассматривая $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ как элементы $\mathbf{L_1}$ по определению подпространства находим, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{L_1}$, $\alpha\mathbf{x} \in \mathbf{L_1}$, где α – произвольное число. Точно так же $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{L_2}$, $\alpha\mathbf{x} \in \mathbf{L_2}$. Но это значит, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbf{L_3}$, $\alpha\mathbf{x} \in \mathbf{L_3}$, поэтому $\mathbf{L_3}$ удовлетворяет определению подпространства, что и требовалось доказать. ■

Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{L_n}$ даны два линейных подпространства $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$. Обозначим через $\mathbf{L}'$ множество всех векторов $\boldsymbol{x}$, представимых в виде $\mathrm{x} = \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2$, где $\mathrm{x}_1 \in \mathbf{L_1}$, $\mathrm{x}_2 \in \mathbf{L_2}$ (рисунок 1).

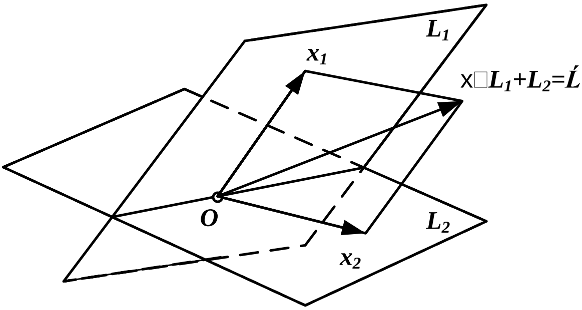

Рисунок 1

Можно убедиться, что $\mathbf{L}'$ есть линейное подпространство в $\boldsymbol{L_n}$. Действительно, возьмем вместе с $\boldsymbol{x} \in \mathbf{L}'$ еще вектор $\boldsymbol{x}' \in \mathbf{L}'$, т. е. $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}_1' + \boldsymbol{x}_2'$, где $\boldsymbol{x}_1' \in \mathbf{L_1}$, $\boldsymbol{x}_2' \in \mathbf{L_2}$. Тогда вектор $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}' = (\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x}_1') + (\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x}_2')$ принадлежит $\mathbf{L}'$, так как $\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x}_1' \in \mathbf{L_1}$, $\boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x}_2' \in \mathbf{L_2}$. Кроме того, $\alpha\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x_1} + \alpha\boldsymbol{x_1} \in \mathbf{L}'$, так как $\alpha\boldsymbol{x_1} \in \mathbf{L_1}$, $\alpha\boldsymbol{x_2} \in \mathbf{L_2}$.

Подпространство $\mathbf{L}'$ называется суммой подпространств $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ и обозначается так: $\mathbf{L}' = \mathbf{L_1} + \mathbf{L_2}$. На рисунке 1 показан частный случай, когда $\mathbf{L}' = \mathbf{L}$ трехмерно, $\mathbf{L_1}$ и $\mathbf{L_2}$ двумерны.

Понятие суммы подпространств применимо и для любого числа слагаемых. Пусть в пространстве $\mathbf{L}$ даны подпространства $\mathbf{L_1}, \dots, \mathbf{L_k}$. Тогда их сумма

$$\mathbf{L}' = \mathbf{L_1} + \dots + \mathbf{L_k}$$

есть линейное подпространство, состоящее из всех векторов вида

$$\mathrm{x} = \mathrm{x}_1 + \dots + \mathrm{x}_\mathrm{k}, \qquad (17)$$

где $\boldsymbol{x_1} \in \mathbf{L_1}, \dots, \boldsymbol{x_k} \in \mathbf{L_k}$.

Определение 2. Если для каждого $\mathbf{x} \in \mathbf{L}'$ разложение (17) единственно, то $\mathbf{L}'$ называется прямой суммой подпространств $\mathbf{L_1}, \dots, \mathbf{L_k}$.

Если речь идет о прямой сумме, то будем употреблять знак $\oplus$.

В качестве примера на рисунке 2 показана прямая сумма одномерных подпространств $\boldsymbol{L_1}$ и $\boldsymbol{L_2}$. Заметим, что сумма $\boldsymbol{L_1} + \boldsymbol{L_2}$ на рисунке 2 не является прямой суммой.

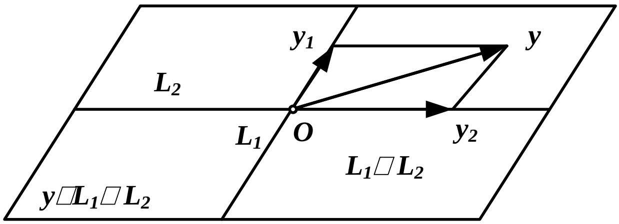

Рисунок 2

Отметим некоторые свойства подпространств.

Прежде всего, всякое линейное соотношение, связывающее векторы $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}$ в подпространстве $\mathbf{L}'$, справедливо во всем пространстве $\boldsymbol{L_n}$, и обратно. Линейная зависимость векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots, \mathbf{z}$ в подпространстве $\mathbf{L}'$ выполняется одновременно в подпространстве $\mathbf{L}'$ и в пространстве $\boldsymbol{L_n}$. Если, например, в пространстве $\boldsymbol{L_n}$ всякие $(\mathrm{n}+1)$ векторов линейно зависимы, то это утверждение будет выполнено в подпространстве $\mathbf{L}'$. Отсюда вытекает, что размерность любого подпространства $\mathbf{L}'$ в n-мерном пространстве $\boldsymbol{L_n}$ не превосходит числа n. В этом случае, согласно теореме §13, в каждом подпространстве $\mathbf{L}' \subset \boldsymbol{L_n}$

можно построить базис из такого числа векторов, какова размерность подпространства $\boldsymbol{L}$.

Если в пространстве $\boldsymbol{L_n}$ выбран базис $\{\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}\}$, то в общем случае, нельзя выбрать базисные векторы подпространства $\mathbf{L}'$ из числа векторов $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$, потому, что в подпространство $\mathbf{L}'$ может не входить ни один из них.

<u>Теорема 3.</u> Если, выбран базис $\{\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}\}$ в подпространстве $\mathbf{L}'$**,** имеющем размерность $l < n$, то всегда можно дополнительно выбрать векторы $\boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_n}$ во всем пространстве $\boldsymbol{L_n}$ так, что система $(\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}, \cdots, \boldsymbol{f_n})$ будет базисом во всем $\boldsymbol{L_n}$**.**

Доказательство. В пространстве $\boldsymbol{L_n}$ существуют векторы, которые линейно не выражаются через $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}$. Если бы таких векторов не было, то векторы $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}$, которые по условию линейно независимые, составляли бы базис пространства $\boldsymbol{L_n}$, и по теореме §13 размерность $\boldsymbol{L_n}$ была бы равна l, а не n. Обозначим через $\mathbf{f_{l+1}}$ любой из векторов, не выражающихся линейно через $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}$. Система $(\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}, \mathbf{f_{l+1}})$ линейно независима. Действительно, если бы существовало соотношение вида

$$\alpha_1\boldsymbol{f_1} + \alpha_2\boldsymbol{f_2} + \ldots + \alpha_l\boldsymbol{f_l} + \alpha_{l+1}\boldsymbol{f_{l+1}} = 0,$$

то при $\alpha_{l+1} \neq 0$ получили бы, что вектор $\boldsymbol{f_{l+1}}$ можно линейно выразить через $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}$, а при $\alpha_{l+1} = 0$ получили бы, что векторы $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}$ линейно зависимы. Эти выводы противоречат построению. Если теперь любой вектор пространства $\boldsymbol{L_n}$ линейно выражается через $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}, \boldsymbol{f_{l+1}}$, то система $(\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}, \boldsymbol{f_{l+1}})$ образует базис в $\boldsymbol{L_n}$, $l + 1 = n$). Построение закончено. Если $l + 1 < n$, то имеется вектор $\boldsymbol{f_{l+2}}$, не выражающийся линейно через $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}, \boldsymbol{f_{l+1}}$. Таким образом можно продолжить построение, через $(n - l\,)$ получим базис пространства $\boldsymbol{L_n}$.

■

Определение. Векторы $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}$ линейно независимы над подпространством $\boldsymbol{L}' \subset \boldsymbol{L_n}$, если из соотношения $\sum_1^k \alpha_i \boldsymbol{a_i} \in \boldsymbol{L}'$ следует $\alpha_i = 0$.

Если $\mathbf{L}'$ – нулевое подпространство, то линейная независимость над $\boldsymbol{L_n}$ означает обычную линейную зависимость.

Линейная зависимость векторов $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}$ над подпространством $\mathbf{L}'$ означает, что существует линейная комбинация $\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a_k}$, лежащая в $\mathbf{L}'$, причем среди коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, имеются отличные от нуля.

Максимальное число векторов пространства $\boldsymbol{L_n}$, линейно независимых над подпространством $\boldsymbol{L}' \subset \boldsymbol{L_n}$, называется размерностью $\boldsymbol{L_n}$ над $\mathbf{L}'$.

Теорема 4 (О линейной независимости системы векторов). Если векторы $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}$ линейно независимы над пространством $\boldsymbol{L}' \subset \boldsymbol{L_n}$, а $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}$ – векторы, линейно независимые в подпространстве $\mathbf{L}'$, то векторы $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}, \boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}$ линейно независимы в пространстве $\boldsymbol{L_n}$.

Доказательство. Действительно, если бы имело место равенство

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a_k} + \beta_1 \boldsymbol{f_1} + \beta_2 \boldsymbol{f_2} + \ldots + \beta_l \boldsymbol{f_l},$$

то, написанное в форме

$$\alpha_1 \boldsymbol{a_1} + \alpha_2 \boldsymbol{a_2} + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a_k} = -(\beta_1 \boldsymbol{f_1} + \beta_2 \boldsymbol{f_2} + \ldots + \beta_l \boldsymbol{f_l}),$$

привело бы к заключению, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k$ в силу предположенной линейной независимости векторов $\boldsymbol{a_1}, \cdots, \boldsymbol{a_k}$ над $\mathbf{L}'$. Отсюда $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_l$, а в силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}$. ■

Лемма 1. Векторы $\boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_n}$, построенные ранее, линейно независимы над подпространством $\boldsymbol{L}'$.

Доказательство. Если бы имело место равенство

$$\beta_{l+1}\boldsymbol{f_{l+1}}+\beta_{l+2}\boldsymbol{f_{l+2}}+\ldots+\beta_n\boldsymbol{f_n}=\beta_1\boldsymbol{f_1}+\beta_2\boldsymbol{f_2}+\ldots+\beta_l\boldsymbol{f_l},$$
причем среди чисел $\beta_{l+1},\beta_{l+2},\ldots,\beta_n$ были бы отличные от нуля, то векторы $\boldsymbol{f_1},\cdots,\boldsymbol{f_n}$ оказались бы линейно зависимыми в противоречии с построением. Размерность пространства $\boldsymbol{L_n}$ над $\mathbf{L}'$, следовательно, не меньше, чем $(\mathrm{n}-\mathrm{l})$. С другой стороны, она не может быть и больше, чем $(\mathrm{n}-\mathrm{l})$. Так как если бы нашлось $(\mathrm{n}-\mathrm{l}+1)$ векторов, линейно независимых над $\mathbf{L}'$, то в пространстве $\boldsymbol{L_n}$ были бы линейно независимы векторы, число которых больше, чем n. Таким образом, размерность $\boldsymbol{L_n}$ над $\mathbf{L}'$ в данном случае равна $(\mathrm{n}-\mathrm{l})$. ■

Определение. Пространство $\mathbf{L}$ является прямой суммой своих подпространств $\boldsymbol{L_1},\ldots,\mathbf{L_m}$, если:

1) Для всякого $x\in\mathbf{L}$ существует разложение
$$x=x_1+x_2+\cdots+x_m,\ x_1\in\mathbf{L_1},\ x_2\in\mathbf{L_2},\ \ldots,\ x_m\in\mathbf{L_m}.$$
2) Данное разложение единственно: если
$$x=x_1+x_2+\cdots+x_m=y_1+y_2+\cdots+y_m,$$
где $x_j\in\mathbf{L_j}$, $y_j\in\mathbf{L_j}$, $j=1,\ldots,m$, то $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, …, $x_m=y_m$.

Справедливость последнего условия следует из 2').

Если имеется разложение
$$0=z_1+\ldots+z_m,\ \text{где } z_1\in\boldsymbol{L_1},\ \ldots,\ z_m\in\boldsymbol{L_m},\ \text{то } z_1=\ldots=z_m=0.$$

Действительно, пусть выполнено условие 2) и дано разложение 2'). Вычитая, получим
$$0=(x_1-y_1)+\ldots+(x_m-y_m).$$
Применяя 2'), получим $x_1=y_1,\ldots,x_m=y_m$. Обратно, 2') следует из 2), если положить $x=0$, $x_1=\ \ldots=x_m=0$.

Лемма 2. n-мерное пространство $\boldsymbol{L_n}$ есть прямая сумма n одномерных подпространств, определенных любыми n линейно независимыми векторами. Пространство $\boldsymbol{L_n}$ можно представить разными способами в форме прямой суммы и неодномерных подпространств.

Доказательство. Из 2) следует, что всякие два из подпространств $\mathbf{L_1},\ldots,\mathbf{L_m}$ имеют лишь один общий элемент 0. Действительно, если бы имели $z \in \mathbf{L_k}$ и $z \in \mathbf{L_j}$, то из сравнения двух разложений

$$z = z + 0,\ z \in \boldsymbol{L_j},\ 0 \in \boldsymbol{L_k},$$
$$z = 0 + z,\ 0 \in \mathbf{L_j},\ z \in \mathbf{L_k}$$

из условия 2) следовало бы, что $z = 0$. ■

Теорема 5 (О различии в прямой сумме). Пусть в n-мерном пространстве $\boldsymbol{L_n}$ фиксировано подпространство $\boldsymbol{L}$. Всегда существует подпространство $\boldsymbol{M}\subset\boldsymbol{L_n}$, которое в прямой сумме с $\boldsymbol{L}$ дает все $\boldsymbol{L_n}$.

Доказательство. Для доказательства используем векторы $\boldsymbol{f_{l+1}},\cdots,\boldsymbol{f_n}$, построенные в теореме 3, линейно независимые над подпространством $\boldsymbol{L}$. Пусть M – подпространство, составленное из всех линейных комбинаций векторов $\boldsymbol{f_{l+1}},\cdots,\boldsymbol{f_n}$. Поскольку векторы $\boldsymbol{f_1},\cdots,\boldsymbol{f_n}$ образуют базис в $\boldsymbol{L_n}$, каждый вектор $x \in \mathbf{L}$ допускает разложение $\boldsymbol{x} = \beta_1\boldsymbol{f_1} + \beta_2\boldsymbol{f_2}+\ldots+\beta_l\boldsymbol{f_l} + \beta_{l+1}\boldsymbol{f_{l+1}} + \cdots + \beta_n\boldsymbol{f_n} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z},$ где $\boldsymbol{y} = \beta_1\boldsymbol{f_1} + \beta_2\boldsymbol{f_2}+\ldots+\beta_l\boldsymbol{f_l} \in \mathbf{L},$ $\boldsymbol{z} = \beta_{l+1}\boldsymbol{f_{l+1}} + \cdots + \beta_n\boldsymbol{f}_n \in M$. При этом из $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ следует $\beta_j = 0,\ j = 1,2,\ldots,n,$ в силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{f_1},\cdots,\boldsymbol{f_n}$. Следовательно, условия определения выполнены, и $\boldsymbol{L_n}$ есть прямая сумма $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$: $\boldsymbol{L}\oplus\boldsymbol{M} = \boldsymbol{L_n}$. ■

Теорема 6. Размерность суммы пространств $\mathbf{L_1}+\ldots+\mathbf{L_k}$ не больше суммы их размерностей: $\dim(\sum_1^m L_k) \le \sum_1^m(dimL_k)$. Если сумма $\mathbf{L_1}+\ldots+\mathbf{L_k}$ прямая, то все векторы $\mathbf{f_{k1}},\ldots,\mathbf{f_{kr_k}}$ $(k = 1,2,\ldots,m)$ линейно независимы.

Доказательство. Если размерность пространства $\boldsymbol{L_k}$ равна r_k $(k = 1,2,\ldots,m)$ и в каждом пространстве $\boldsymbol{L_k}$ выделены r_k линейно независимых векторов $\mathbf{f_{k1}},\ldots,\mathbf{f_{kr_k}}$, то каждый вектор $\boldsymbol{x}$ суммы $\mathbf{L} = \mathbf{L_1} + \ldots + \mathbf{L_k}$ можно линейно выразить через все эти векторы. Если сумма $\mathbf{L_1} + \ldots + \mathbf{L_k}$ прямая, то все векторы $\mathbf{f_{k1}}, \ldots, \mathbf{f_{kr_k}}$ $(k = 1,2, \ldots, m)$ линейно независимы, так что в этом случае размерность суммы равна сумме размерностей. ■

В общем случае размерность суммы определяется через размерности слагаемых более сложным образом. Рассмотрим вопрос о размерности суммы двух конечномерных подпространств $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ пространства $\boldsymbol{K}$.

Теорема 7 (О размерности суммы). Размерность суммы двух подпространств равна сумме их размерностей за вычетом размерности пересечения.

Доказательство. Пусть p и q обозначают размерности подпространств $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$. Обозначим через $\boldsymbol{L}$ пересечение подпространств $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ и через l его размерность. Выберем в $\boldsymbol{L}$ базис $\{\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_l}\}$ и, используя теорему 3, дополним его векторами $\boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_p}$ до полного базиса подпространства $\boldsymbol{P}$ и векторами $\boldsymbol{g_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{g_q}$ до полного базиса подпространства $\boldsymbol{Q}$. Каждый вектор суммы $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$ по определению есть сумма вектора из $\boldsymbol{P}$ и вектора из $\boldsymbol{Q}$ и поэтому может быть линейно выражен через векторы $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_l}, \boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_p}, \boldsymbol{g_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{g_q}$. Покажем, что эти векторы образуют базис подпространства $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$. Для этого проверим их линейную независимость. Допустим, что существует линейное соотношение вида

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \cdots + \alpha_l \boldsymbol{e_l} + \beta_1 \boldsymbol{f_1} + \cdots + \beta_p \boldsymbol{f_p} + \gamma_1 \boldsymbol{g_1} + \cdots + \gamma_q \boldsymbol{g_q} = 0, \quad (18)$$

причем среди коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \gamma_q$ имеются отличные от нуля. Можем тогда утверждать, что имеются отличные от нуля числа в совокупности $\gamma_1, \ldots, \gamma_q$. В противном случае векторы $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_l}, \boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_p}, \boldsymbol{g_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{g_q}$ оказались бы линейно зависимыми, что невозможно ввиду того, что они образуют базис подпространства $\boldsymbol{P}$. Следовательно, вектор

$$\boldsymbol{x} = \gamma_{l+1}\boldsymbol{g_{l+1}} + \cdots + \gamma_q\boldsymbol{g_q} \neq 0. \qquad (19)$$

Иначе векторы $\boldsymbol{g_{l+1}}, \dots, \boldsymbol{g_q}$ оказались бы линейно зависимыми. Но из (18) следует, что

$$-\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + \beta_p\boldsymbol{f_p} \in \boldsymbol{P},$$

тогда как (19) показывает, что $x \in \boldsymbol{Q}$. Значит, $\boldsymbol{x}$ принадлежит и $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ и, следовательно, входит в подпространство $\boldsymbol{L}$. Но тогда

$$\boldsymbol{x} = \gamma_{l+1}\boldsymbol{g_{l+1}} + \cdots + \gamma_q\boldsymbol{g_q} = \lambda_1\boldsymbol{e_1} + \cdots + \lambda_l\boldsymbol{e_l}.$$

Так как векторы $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_l}, \boldsymbol{g_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{g_q}$ линейно независимы, $\gamma_{l+1} = \cdots = \gamma_q = 0$. Полученное противоречие показывает, что векторы $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_l}, \boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_p}, \boldsymbol{g_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{g_q}$ действительно линейно независимы.

Согласно теореме §13 гл. II размерность подпространства $\boldsymbol{P} + \boldsymbol{Q}$ равна числу базисных векторов $\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_l}, \boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_p}, \boldsymbol{g_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{g_q}$, но это число равно $(p + q - l)$. Значит, размерность суммы двух подпространств равна сумме их размерностей за вычетом размерности пересечения. ■

<u>Следствие.</u> Если в n-мерном пространстве $\boldsymbol{R_n}$ выделены два подпространства $\boldsymbol{R_p}$ и $\boldsymbol{R_q}$, размерности которых p и q в сумме превышают число n, то пересечение $\boldsymbol{R_p}$ и $\boldsymbol{R_q}$ имеет размерность не меньшую, чем $(p + q - n)$.

Рассмотрим фактор-пространства. Пусть в линейном пространстве $\boldsymbol{K}$ выделено подпространство $\boldsymbol{L}$. Элемент $x \in \boldsymbol{K}$ сравнимым с элементом $y \in \boldsymbol{K}$, точнее, сравнимым относительно $\boldsymbol{L}$, если $x - y \in \boldsymbol{L}$.

Очевидно, в этом случае и y сравним с x, так что отношение сравнения симметрично. Любой $x \in \boldsymbol{K}$ сравним сам с собою. Далее, если x сравним с y, а y сравним с z, то и x сравним с z, так как

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in \boldsymbol{L}.$$

Совокупность всех элементов $y \in \boldsymbol{K}$, сравнимых с данным элементом $x \in \boldsymbol{K}$, называется классом и обозначается через X. Класс X содержит сам элемент x, и любые два элемента $y \in \boldsymbol{K}$, $\mathrm{z} \in \boldsymbol{K}$ сравнимы друг с другом. Если $u \notin X$, то u не сравним ни с одним элементом из класса X. Поэтому два класса X и Y или не имеют общих элементов, или полностью совпадают. Одним из классов является все подпространство $\boldsymbol{L}$, так как оно содержит нулевой элемент пространства $\boldsymbol{K}$. Этот класс обозначается через 0.

Все пространство $\boldsymbol{K}$ разбивается в совокупность непересекающихся классов X, Y, ... Такую совокупность классов обозначим через $\boldsymbol{K}/\mathbf{L}$. Введем в множестве $\boldsymbol{K}/\mathbf{L}$ линейные операции следующим образом. Пусть X и Y – классы, α и β – элементы поля $\boldsymbol{K}$. Определим класс $\alpha X + \beta Y$. Для этого выберем произвольно элементы $x \in X$ и $y \in Y$, найдем класс Z, который содержит элемент $z = \alpha x + \beta y$. Данный класс обозначим $\alpha X + \beta Y$. Проверим, что он определен однозначно. Если в классе X возьмем элемент x_1, а в классе Y – элемент y_1,то

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x + \beta y) = \alpha(x_1 - x) + \beta(y_1 - y)$$

лежит в подпространстве $\boldsymbol{L}$ вместе с $x_1 - x$ и $\mathrm{y}_1 - y$. Значит, $\alpha x_1 + \beta \mathrm{y}_1$ лежит в том же классе, что и $\alpha x + \beta y$.

Таким образом определили сложение классов X, Y и умножение их на числа $\alpha \in \boldsymbol{K}$. Покажем, что эти операции удовлетворяют аксиомам линейного пространства. Действительно, для элементов пространства $\boldsymbol{K}$ следует сразу выполнение этих же свойств для классов. Нулем пространства $\boldsymbol{K}/\mathbf{L}$ является класс 0, состоящий из всех элементов пространства $\mathbf{L}$. Противоположным к классу X является класс, состоящий из элементов, противоположных к элементам класса X. Таким образом, для совокупности классов выполнены аксиомы линейного пространства.

Определение. Построенное линейное пространство $\boldsymbol{K/L}$ называется фактор-пространством пространства $\boldsymbol{K}$ по подпространству $\boldsymbol{L}$.

Теорема. Пусть $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K_n}$ есть n-мерное линейное пространство над полем $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L_l} \subset \boldsymbol{K}$ есть l-мерное подпространство в $\boldsymbol{K}$. Тогда фактор-пространство $\boldsymbol{K/L}$ имеет размерность $(n - l)$.

Доказательство.

Выберем произвольно базис $\{\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_l}\}$ в подпространстве $\boldsymbol{L}$ и дополним его векторами $\boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_n}$ до базиса всего $\boldsymbol{K}$. Рассмотрим классы $X_{l+1} \ni \boldsymbol{f_{l+1}}$, …, $X_n \ni \boldsymbol{f_n}$. Покажем, что они образуют базис в пространстве $\boldsymbol{K/L}$. Для любого $x \in \boldsymbol{K}$ существует представление $\boldsymbol{x} = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\alpha_k f_k}$, поэтому для класса $X \ni x$ существует представление $\boldsymbol{X} = \sum_{\boldsymbol{k=l+1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\alpha_k X_k}$.

Покажем, что классы $X_{l+1}, \dots, X_n$ линейно независимы. Если бы имели при некоторых $\alpha_{l+1}, \dots, \alpha_n$ из $\boldsymbol{K}$ $\boldsymbol{\alpha_{l+1} X_{l+1}} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_n X_n} = \boldsymbol{0} \in \boldsymbol{K/L},$ то, в частности, выполнялось бы соотношение $\alpha_{l+1}\boldsymbol{f_{l+1}} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{f_n} = \boldsymbol{0} \in \boldsymbol{L}$.

Но так как $\boldsymbol{f_{l+1}}, \cdots, \boldsymbol{f_n}$ линейно независимы над $\boldsymbol{L}$, то $\alpha_{l+1} = \cdots = \alpha_n = 0$, что и требовалось доказать. Таким образом, $X_{l+1}, \cdots, X_n$ образуют базис в $\boldsymbol{K/L}$. Но тогда их число $(\mathrm{n} - \mathrm{l})$ есть размерность пространства $\boldsymbol{K/L}$. Теорема доказана. ■

ГЛАВА III. ЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ

§18. Линейные операторы

Пусть в линейном пространстве **L** задана числовая функция векторного аргумента, т. е. каждому вектору $\boldsymbol{x}$ поставлено в соответствие число $a(\boldsymbol{x})$.

Функцию $a(\boldsymbol{x})$ будем считать инвариантной, т. е. значение $a(\boldsymbol{x})$ не зависит от выбора базиса в пространстве **L**.

Определение 1. Числовая функция $a(\boldsymbol{x})$ векторного аргумента называется линейной формой, если

1) $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a(\boldsymbol{x}) + a(\boldsymbol{y})$ для любых векторов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ из **L**;

2) $a(\alpha\boldsymbol{x}\ ) = \alpha a(\boldsymbol{x})$ для любого числа α и для любого вектора $\boldsymbol{x}$ из **L**.

Можно увидеть, что $a(\sum \alpha_i \boldsymbol{x_i}) = \sum \alpha \alpha_i(\boldsymbol{x_i})$.

В качестве значений функции $a(\boldsymbol{x})$ будем брать действительные числа, если **L** действительно, и комплексные числа, если **L** комплексно.

Примеры.

1. Пусть $x = x_1\boldsymbol{e_1} + \dots + x_n\boldsymbol{e_n}$, где $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ – базис в $\boldsymbol{L}$. В каждом базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ положим $a(\boldsymbol{x}) = x_1$. Тогда свойства 1) и 2) определения для $a(\boldsymbol{x})$ соблюдаются, но $a(\boldsymbol{x})$ не удовлетворяет определению линейной функции, так как зависит от выбранного базиса.

2. Пусть $\boldsymbol{L}$ – пространство многочленов степени не выше n. Пусть каждому многочлену $x(\tau)$ из $\boldsymbol{L}$ ставится в соответствие число $a(\boldsymbol{x})$ по формуле

$$(x) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} x(\tau)d\tau, \qquad (1)$$

где $\tau_1 \le \tau \le \tau_2$ – заданный отрезок числовой оси. Ясно, что числовое значение $a(\boldsymbol{x})$ не зависит от выбора базиса в $\boldsymbol{L}$. Условия 1) и 2) определения соблюдены вследствие известных свойств определенного интеграла. Таким образом, функция (1) является линейной функцией в пространстве $\boldsymbol{L}$.

<u>Замечание 1</u>. Линейную функцию (1) можно рассматривать также в бесконечномерном пространстве непрерывных функций, заданных на произвольно выбранном отрезке $[\tau_1', \tau_2']$ при условии, что $\tau_1' \leq \tau_1, \tau_2' \geq \tau_2$, или в пространстве всех интегрируемых на $[\tau_1', \tau_2']$ функций (также бесконечномерном).

Пусть в пространстве $\boldsymbol{L}$ дана линейная функция $a(x)$. Считая, что пространство $\boldsymbol{L}$ является n-мерным, зафиксируем в нем произвольный базис $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ и разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по этому базису: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e_1} + \dots + x_n\boldsymbol{e_n}$. Тогда линейная функция запишется в виде

$$a(\boldsymbol{x}) = a(x_1\boldsymbol{e_1} + \dots + x_n\boldsymbol{e_n}) = x_1 a(\boldsymbol{e_1}) + \dots + x_n a(\boldsymbol{e_n}). \quad (2)$$

Обозначим через a_i значение функции $a(\boldsymbol{x})$ на базисном векторе $\boldsymbol{e_i}$:

$$a_1 = a(\boldsymbol{e_1}), \dots, a_n = a(\boldsymbol{e_n}). \quad (3)$$

Если базис фиксирован, то a_i – вполне определенные числа. Подставив величины (3) в равенство (2), получим выражение функции $a(\boldsymbol{x})$ в виде однородного многочлена первой степени относительно координат вектора $\boldsymbol{x}$:

$$a(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n. \quad (4)$$

Однородные многочлены степени k принято называть формами степени k, при $k = 1$ употребляют термин «линейные формы», при $k = 2$ – термин «квадратичные формы».

Согласно формуле (4) всякая линейная функция $a(\boldsymbol{x})$ в n-мерном линейном пространстве является линейной формой относительно координат ее аргумента x.

В связи с этим линейные функции обычно называют линейными формами.

В пространстве $\boldsymbol{L_n}$ перейдем к новому базису $\{\boldsymbol{e_1'}, \dots, \boldsymbol{e_n'}\}$ по формуле (см. § 19 гл. III)

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}' = \sum P_{ij}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}}. \qquad (5)$$

В новом базисе линейная форма будет иметь новые коэффициенты a_i':

$$a(\boldsymbol{x}) = a_1'x_1' + a_2'x_2' + \cdots + a_n'x_n'.$$

Найдем a_i', пользуясь тем, что эти числа являются значениями формы $a(x)$ на новых базисных векторах:

$$a_i' = a(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}').$$

Пользуясь выражением (5) для векторов $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{i}}'$ и линейностью функции $a(\boldsymbol{x})$, находим

$$a_i' = a\left(\sum P_{ij}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{j}}\right) = \sum P_{ij}a(\boldsymbol{e}_j) = \sum P_{ij}a_j.$$

Таким образом,

$$a_i' = \sum P_{ij}a_j. \qquad (6)$$

Очевидно, что формула (6) аналогична формуле (5).

Заметим, что закон преобразования коэффициентов, выраженный формулой (6), обеспечивает инвариантность значений функции, которая в базисе $\{\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{1}}, \dots, \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{n}}\}$ задается формулой (4).

Линейная форма $\mathbf{L}(\mathbf{x})$, определенная в линейном пространстве $\boldsymbol{K}$, как указывали, является морфизмом пространства $\boldsymbol{K}$ в одномерное пространство $\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{1}}$.

Рассмотрим морфизм $A = A(x)$ линейного пространства $\boldsymbol{X}$ в любое линейное пространство $\boldsymbol{Y}$ над тем же самым полем $\boldsymbol{K}$. Записывают Ax или A(x). Согласно определению, функция A(x) удовлетворяет условиям:

1) $A(x + y) = A(x) + A(y)$ для любых векторов x и y из $\boldsymbol{X}$;

2) $A(\alpha x) = \alpha A(x)$ для любого числа α и для любого вектора x из $\boldsymbol{X}$.

Как и для линейных форм, из условий 1) и 2) следует более общая формула

3) $A(\sum \alpha_i x_i) = \sum A\alpha_i(x_i)$ для любых $x_1, \dots, x_k$ из $\boldsymbol{X}$ и любых $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ из $\boldsymbol{K}$.

Морфизм A называют также, как в §17 гл. II, линейным оператором, действующим из $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$.

Примеры.

а. Оператор, который каждому вектору $\boldsymbol{x}$ пространства $\boldsymbol{X}$ ставит в соответствие нуль-вектор пространства $\boldsymbol{Y}$, является линейным оператором и называется нулевым оператором.

б. Пусть имеется некоторый линейный оператор A, действующий из пространства $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$. Положим по определению $Bx = -$Ax. Полученный оператор B также является линейным оператором, переводящим $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$, который называется оператором, противоположным оператору А.

в. Пусть векторам базиса $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ пространства $\boldsymbol{X}$ произвольно поставлены в соответствие векторы $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ пространства $\boldsymbol{Y}$. Тогда существует единственный линейный оператор A, переводящий $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$, и при этом каждый вектор $\boldsymbol{e_k}$, переводящий в соответствующий вектор $\boldsymbol{f_k}$ $(k = 1, .., n)$.

Действительно, если искомый оператор А существует, то для любого вектора $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k} \in \boldsymbol{X}$ выполняется равенство

$$A\boldsymbol{x} = A(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k}) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A\boldsymbol{e_k} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{f_k},$$

чем доказана единственность оператора A. С другой стороны, для любого $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k} \in \boldsymbol{X}$ можно положить по определению

$$A\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{f_k}.$$

Получающийся при этом оператор A является линейным оператором, переводящим $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$ и при этом переводящим каждый вектор $\boldsymbol{e_k}$ в соответствующий вектор $\boldsymbol{f_k}$ (k $= 1, ..,$ n), что нам и требуется.

г. Поставим в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x}$ пространства $\boldsymbol{X}$ этот же вектор x, получим линейный оператор $\boldsymbol{K}$, действующий из $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{X}$. Такой оператор называется тождественным, или единичным, оператором.

Рассмотрим матричную запись линейных операторов. Пусть A – линейный оператор, действующий из пространства $\boldsymbol{X}$ размерности n в пространство $\boldsymbol{Y}$ размерности m. Фиксируем в пространстве $\boldsymbol{X}$ базис $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ и в пространстве $\boldsymbol{Y}$ базис $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_m}$.

Вектор $\boldsymbol{e_1}$ переводится оператором A в некоторый вектор $A\boldsymbol{e_1}$ пространства $\boldsymbol{Y}$, который, как вектор этого пространства, можем разложить по базисным векторам:

$$A\boldsymbol{e_1} = a_1^1\boldsymbol{f_1} + \cdots + a_m^1\boldsymbol{f_m}.$$

Аналогично для остальных базисных векторов:

$$A\boldsymbol{e_2} = a_1^2\boldsymbol{f_1} + \cdots + a_m^2\boldsymbol{f_m},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$A\boldsymbol{e_n} = a_1^n\boldsymbol{f_1} + \cdots + a_m^n\boldsymbol{f_m}.$$

Короче формулы можно записать так:

$$A\boldsymbol{e_j} = \sum_{i=1}^m a_i^j\,\boldsymbol{f_i},\ j = 1, \dots, n. \tag{7}$$

Коэффициенты a_i^j $(i = 1, \dots, \mathrm{m},\ j = 1, \dots, n)$ определяют матрицу из m строк и n столбцов или, m×n-матрицу

$$A = A_{(e,f)} = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix},$$

которая называется матрицей оператора A в базисах $\{\mathbf{e}\} = \{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ и $\{\boldsymbol{f}\} = \{\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_\mathrm{m}}\}$. Столбцами этой матрицы служат координаты векторов $A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, \dots, A\boldsymbol{e_n}$ относительно базиса $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_\mathrm{m}}$.

Пусть $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j\boldsymbol{e_j}$ – произвольный вектор, и $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^m \eta_i\boldsymbol{f_i}$. Выясним, как выражаются координаты η_i вектора y через координаты ε_j вектора $\boldsymbol{x}$. Имеем

$$\boldsymbol{y = \sum_{j=1}^m \eta_i f_i = Ax = A\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j A e_j} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{\varepsilon_j} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{a_i^j f_i} = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_i^j f_i} \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_i^j \varepsilon_j} \right) \boldsymbol{f_i}.$$

Сравнивая коэффициенты при векторе $\boldsymbol{f_i}$, находим

$$\boldsymbol{\eta_i} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_i^j \varepsilon_j},\ \boldsymbol{i} = \mathbf{1}, \dots, \mathbf{m}, \tag{8}$$

или подробно

$$\begin{cases} \eta_1 = a_1^1\varepsilon_1 + a_1^2\varepsilon_2 + \cdots + a_1^n\varepsilon_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \eta_m = a_m^1\varepsilon_1 + a_m^2\varepsilon_2 + \cdots + a_m^n\varepsilon_n. \end{cases} \tag{9}$$

Следовательно, зная матрицу оператора A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$, можно определить результат применения оператора к любому вектору $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k}$ пространства $\boldsymbol{X}$: координаты вектора $\mathbf{y} = \mathrm{A}\mathbf{x}$ линейно выражаются через координаты вектора $\mathbf{x}$ по формулам (9). Матрица коэффициентов в формулах (9) совпадает с матрицей $A_{(e,f)}$.

Пусть теперь $\left(a_i^j\right)$ – произвольная $m \times n$-матрица. Если $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j \boldsymbol{e_j}$, можно построить вектор $\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i \boldsymbol{f_i}$ по формулам (9).

Можно проверить, что оператор A, задающий этот переход от вектора $\boldsymbol{x}$ к вектору $\boldsymbol{y}$ является линейным оператором. Построим матрицу оператора A в базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$. Вектор $\boldsymbol{e_1}$ имеет координаты $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_n = 0$. По формуле (9) координатами вектора $\boldsymbol{f_1} = A\boldsymbol{e_1}$ будут числа $a_1^1, a_2^1, \dots, a_n^1$, так что

$$\boldsymbol{f_1} = A\boldsymbol{e_1} = a_1^1\boldsymbol{e_1} + \cdots + a_n^1\boldsymbol{e_n}.$$

Аналогично

$$\boldsymbol{f_j} = A\boldsymbol{e_j} = a_1^1\boldsymbol{e_1} + \cdots + a_n^j\boldsymbol{e_n}, j = 1, \dots, m.$$

Следовательно, матрица оператора A совпадает с исходной матрицей $\left(a_i^j\right)$.

Таким образом, каждая m×n-матрица является матрицей некоторого линейного оператора A, действующего из n-мерного пространства $\boldsymbol{X}$ в m-мерное пространство $\boldsymbol{Y}$, с фиксированными базисами $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ в пространстве $\boldsymbol{X}$ и $\{\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_m}\}$ в пространстве $\boldsymbol{Y}$.

Следовательно, между линейными операторами, действующими из пространства $\boldsymbol{X}$ (с фиксированным базисом $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$) в пространство **Y** (с фиксированным базисом $\{\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_m}\}$), $\mathrm{m} \times n$-матрицами, заполненными числами из поля **K**, устанавливается взаимно однозначное соответствие, осуществляемое с помощью формул (7) или (8).

Замечание 2. Оператор A можно восстановить по матрице $A = \left(a_i^j\right)$ (притом однозначно), исходя непосредственно из формул (9). В этих формулах j-й столбец матрицы A представляет собой набор координат вектора $\boldsymbol{f_j} = A\boldsymbol{e_j}$.

Примеры.

1. Матрица нулевого оператора в любом базисе пространства $\boldsymbol{X}$ и любом базисе пространства $\boldsymbol{Y}$, очевидно, состоит из одних нулей.

2. Если $\left(a_i^j\right)$ есть матрица оператора A, то матрицей противоположного оператора является матрица $\left(-a_i^j\right)$.

3. Пусть $\mathrm{m} > n$ и оператор A переводит векторы базиса $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ пространства $\boldsymbol{X}$ в линейно независимые векторы $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ пространства $\boldsymbol{Y}$. Дополним векторы $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ до полного базиса пространства $\boldsymbol{Y}$ векторами $\boldsymbol{f_{n+1}}, \dots, \boldsymbol{f_m}$. Тогда матрица оператора A в базисах $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ и $\{\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_m}\}$ примет следующий вид:

$$m=\begin{cases} n\begin{cases} \\ \\ \\ \\ \end{cases} \\ \\ \\ \\ \end{cases} \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{matrix}}^{n}\\ \begin{matrix}0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{matrix}\end{pmatrix}.$$

4. Матрица тождественного оператора в базисе

$\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ пространства $\boldsymbol{X}$, как области определения, и в том же базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ пространства $\boldsymbol{X}$, как области значений, имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{9'}$$

Матрица Е вида (9') называется тождественной или единичной матрицей.

Рассмотрим действия сложения операторов, умножения оператора на число и умножения операторов друг на друга.

Два оператора A и B, действующих из пространства $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$, будем считать равными и записывать $A = B$, если $A\boldsymbol{x} = B\boldsymbol{x}$ для каждого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$.

Рассмотрим сложение операторов. Пусть даны два линейных оператора A и B, отображающих пространство $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$. Оператор $C = A + B$ определяется по формуле

$$C\boldsymbol{x} \equiv (A + B)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{x}. \tag{10}$$

Очевидно, что C также отображает пространство $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$. Покажем что C – линейный оператор. Пусть $\mathbf{x} = \alpha_1 \mathrm{x}_1 + \alpha_2 \mathrm{x}_2$, тогда

$$C(\alpha_1 \mathrm{x}_1 + \alpha_2 \mathrm{x}_2) = A(\alpha_1 \mathrm{x}_1 + \alpha_2 \mathrm{x}_2) + B(\alpha_1 \mathrm{x}_1 + \alpha_2 \mathrm{x}_2) = \alpha_1 A\mathrm{x}_1 + \alpha_2 A\mathrm{x}_2 + \alpha_1 B\mathrm{x}_1 + \alpha_2 B\mathrm{x}_2 = \alpha_1 (A\mathrm{x}_1 + B\mathrm{x}_1) + \alpha_2 (A\mathrm{x}_2 + B\mathrm{x}_2).$$

Таким образом, оба условия определения выполнены. ■

Определение 2. Линейный оператор C, определенный равенством (10), называется суммой операторов A и B.

Для действия сложения операторов выполняются следующие равенства:

$$\begin{cases} A+B=B+A, \\ (A+B)+\mathrm{C}=A+(B+\mathrm{C}), \\ A+0=A, \\ A+(-A)=0. \end{cases} \qquad (11)$$

где A, B, C – произвольные линейные операторы, 0 – нулевой оператор, $-A$ – оператор, противоположный к оператору A, т. е. переводящий каждый вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ в вектор $-A\boldsymbol{x}$.

Рассмотрим умножение оператора на число. Если A – линейный оператор, действующий из пространства $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$, и λ – число из поля $\boldsymbol{K}$, то оператор $B = \lambda A$, называемый произведением оператора А на число Х, определяется формулой

$$Bx \equiv (\lambda A)\boldsymbol{x} = \lambda(A\boldsymbol{x}).$$

Можно проверить, что построенный оператор является линейным. При этом имеют место соотношения

$$\begin{cases} \lambda_1(\lambda_2 A) = (\lambda_1\lambda_2)A, \\ 1 \cdot A = A, \\ (\lambda_1+\lambda_2)A = \lambda_1 A + \lambda_2 A, \\ \lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B. \end{cases} \qquad (11')$$

Соотношения (11) – (11') показывают, что совокупность всех линейных операторов, действующих из линейного пространства $\boldsymbol{X}$ в линейное пространство $\boldsymbol{Y}$, образует новое линейное пространство.

Рассмотрим умножение операторов. Если A – линейный оператор, действующий из пространства $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$, а B – линейный оператор, действующий из пространства $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$ (все пространства над одним и тем же числовым полем **K**), то определим оператор $P = BA$, называемый произведениям оператора В на оператор А, как оператор, действующий из пространства $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$ по формуле

$$P\boldsymbol{x} = (BA)\boldsymbol{x} = B(A\boldsymbol{x}),$$

т. е. сначала на вектор $\boldsymbol{x}$ действует оператор A, а затем на результат, лежащий в пространстве $\boldsymbol{Y}$, действует оператор B. Построенный оператор P является линейным, так как

$$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = B(A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) = B(\alpha_1 A x_1 + \alpha_2 A x_2) = \alpha_1 BAx_1 + +\alpha_2 BAx_2 = \alpha_1 Px_1 + \alpha_2 Px_2.$$

Можно проверить выполнение следующих соотношений:

а) $\lambda(BA) = (\lambda B)A$ для любых операторов A и B с указанными свойствами и любого $\lambda \in \mathbf{K}$;

б) $(A + B)C = AC + BC$ для любых операторов A и B, действующих из пространства $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$, и любого C, действующего из $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$;

в) $A(B + C) = AB + AC$ для любых операторов B и C, действующих из $\boldsymbol{X}$ в $\boldsymbol{Y}$, и любого A, действующего из $\boldsymbol{Y}$ в $\boldsymbol{Z}$;

г) $(AB)C = A(BC)$ для любых операторов: C – из пространства $\boldsymbol{X}$ в пространство $\boldsymbol{Y}$, B – из пространства $\boldsymbol{Y}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$, A – из пространства $\boldsymbol{Z}$ в пространство $\boldsymbol{W}$.

Действия над операторами соответствуют действиям над матрицами.

<u>Примеры.</u>

1. Умножим $m \times n$-матрицу $A = (a_{jk})$ (Элементы матриц пишутся внизу, так что элемент a_{jk} стоит на пересечении ее j-ой строки и k-го столбца.) слева на m×n-матрицу $B_{rs} = (b_{jk})$, в которой все элементы b_{jk} равны 0, кроме одного элемента b_{rs}, равного 1. По общему правилу умножения операторов получим m×n-матрицу

$$B_{rs} \cdot A = \begin{array}{cc} & (s) \\ (r) & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$
(r)\begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = (r)(a_{s1}, \cdots, a_{sn}),
$$

так что в i-ой строке матрицы $B_{rs}A$ стоят элементы 5-й строки матрицы A, а остальные элементы матрицы $B_{rs}A$ равны 0.

2. Умножим m×n-матрицу $A = (a_{jk})$ справа на n × n-матрицу $C_{qt} = (c_{jk})$, в которой все элементы c_{ik} равны 0, кроме одного элемента c_{qt}, равного 1. По общему правилу умножения операторов получим m ×-матрицу

$$
AC_{qt} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1q} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2q} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mq} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ (q) \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} (t) \\ \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & 1 & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \end{array} =
$$

$$
\begin{array}{c} (t) \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & a_{1q} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{2q} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & a_{mq} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

так что в t-ом столбце матрицы AC_{qt} стоят элементы q-го столбца матрицы A, а остальные элементы матрицы AC_{qt} равны 0.

3. При тех же B_{rs}, A, C_{qt} получаем

$$
B_{rs}AC_{qt} = (r)\begin{array}{c} (t) \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & a_{sq} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array},
$$

так что операция $B_{rs}AC_{qt}$ приводит к m×n-матрице, в которой все элементы равны нулю, кроме стоящего на пересечении r-ой строки и t-го столбца, который равен a_{sq}.

В некоторых случаях бывает удобно разбивать перемножаемые матрицы на блоки и действовать далее с блоками.

Правило умножения матриц состоит в следующем: матрицу A можно составить из блоков, построенных из блоков матриц A и B так же, как элементы матрицы AB составляются из элементов матриц A и B:

$$AB = \begin{pmatrix} \underline{A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21} + \cdots |} & \underline{A_{11}B_{12} + \cdots |} & \cdots \\ \underline{A_{21}B_{11} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots |} & \cdots & \cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \end{pmatrix}.$$

Действительно, пусть i – номер блок-строки матрицы A, содержащей i-ую строку самой матрицы A, и j-номер блок-столбца матрицы B, содержащего j-й столбец матрицы B. По общему правилу умножения операторов элементы матрицы $\mathrm{P} = \mathrm{AB}$ имеют вид

$$p_{kq} = a_{k1}b_{1q} + \cdots + a_{kn}b_{nq} == (a_{k1}b_{1q} + \cdots + a_{kp}b_{pq}) + \\ + \cdots + (a_{nr}b_{rq} + \cdots + a_{kn}b_{nq}),$$

где скобки расставлены в соответствии с шириной блоков матрицы A и высотой блоков матрицы B. Будем нумеровать строки и столбцы блоков теми же номерами, что и в самой матрице A. В первой скобке стоит элемент, стоящий на пересечении k-й строки и q-го столбца блока $A_{i1}B_{1j,}$ во второй скобке – элемент, стоящий на пересечении k-й строки и q-го столбца блока $A_{i2}B_{2j}$, и т. д. В результате получается элемент, стоящий на пересечении k-й строки и q-го столбца блока $A_{i1}B_{1j}+\ldots+A_{ir}B_{rj}$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим умножение квазидиагональных матриц.

Определение 3. Матрица называется квазидиагональной, если она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{A}_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\mathrm{A}_{ss}} \end{pmatrix},$$

причем необозначенные блоки состоят из нулей. Предположим, что блок $\mathrm{A_{kk}}$ представляет собой $\mathrm{m_k} \times \mathrm{n}_k$-матрицу $(k = 1, \dots, \mathrm{s})$.

Рассмотрим квазидиагональную матрицу

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{\mathrm{B_{11}}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{\mathrm{B_{ss}}} \end{pmatrix},$$

у которой блок B_{kk} представляет собой $\mathrm{n_k} \times \mathrm{p_k}$-матрицу $(k = 1, \dots, \mathrm{s})$.

Матрицы A и B можно перемножить по правилу, рассмотренному выше, которое в данном случае немедленно приводит к результату

$$AB = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}B_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_{ss}B_{ss}} \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Таким образом, в данном случае матрица AB есть квазидиагональная матрица, причем блок $A_{\mathrm{kk}}B_{\mathrm{kk}}$ имеет $\mathrm{m_k}$ строк и $\mathrm{p_k}$ столбцов.

Пример. Показать, что, в трехмерном пространстве V над полем вещественных чисел с декартовой системой координат, функция $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$, где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \in V$, а знак $\times$ означает векторное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{v}$, является линейным оператором, отображающим векторное пространство V в себя. Построить матрицу этого линейного оператора в декартовой системе координат.

Из свойств векторного произведения векторов следует, что для любых векторов $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ и любых вещественных чисел α и β

$$f(\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times (\alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} = \alpha f(\boldsymbol{u}) + \beta f(\boldsymbol{v}),$$

т.е. $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$ действительно линейный оператор, действующий в обычном трехмерном пространстве.

Далее, предполагаем, что в пространстве V дана декартова система координат, т.е. существует такая тройка векторов-ортов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in V$, что любой вектор $\boldsymbol{v} \in V$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации этих ортов. То есть, $\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3$, где коэффициенты v_1, v_2, v_3 – координаты вектора $\boldsymbol{v}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Кроме того предполагается, что $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2$. Отсюда, в силу свойств векторного произведения векторов, тотчас же следует, что $\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1 = -\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2 = -\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3 = -\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_3 = 0$. Теперь, чтобы построить матрицу A линейного оператора f нужно применить наш оператор к базисным векторам отображаемого пространства (в нашем случае к векторам $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$), разложить эти образы по базису того пространства, в которое происходит отображение (в нашем случае по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$), и координаты образа i-го базисного вектора записать в i-ый столбец матрицы A. Итак, с учетом того, что a_1, a_2, a_3 – координаты вектора $\boldsymbol{a}$, получим:

$$f(\boldsymbol{e}_1) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_1 = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_1 = -a_2\boldsymbol{e}_3 + a_3\boldsymbol{e}_2,$$

$$f(\boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_2 = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_2 = a_1\boldsymbol{e}_3 - a_3\boldsymbol{e}_1,$$

$$f(\boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{e}_3 = (a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3) \times \boldsymbol{e}_3 = -a_1\boldsymbol{e}_2 + a_2\boldsymbol{e}_1.$$

Следовательно, матрица A оператора f будет следующей

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь, чтобы вычислить координаты вектора $f(\boldsymbol{v})$ достаточно умножить матрицу A на координатный столбец вектора $\boldsymbol{v}$. То есть, координатным столбцом вектора $f(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$ будет столбец

$$\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_3v_2 + a_2v_3 \\ a_3v_1 - a_1v_3 \\ -a_2v_1 + a_1v_2 \end{pmatrix}.$$

Этот пример используется для получения практических уравнений движения твердого тела вокруг центра масс.

§19. Область значений линейного оператора

Пусть дан линейный оператор A, действующий из линейного пространства $\boldsymbol{X}$ в линейное пространство $\boldsymbol{Y}$: $A: \boldsymbol{X} \to \mathbf{Y}$.

Пусть n – размерность пространства $\boldsymbol{X}$, а m – размерность пространства $\boldsymbol{Y}$. Выберем произвольно базис $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ в пространстве $\boldsymbol{X}$ и базис $\{\mathbf{f_1}, \dots, \mathbf{f_m}\}$ в пространстве $\boldsymbol{Y}$. Тогда оператору A можно поставить в соответствие $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$-матрицу $A = (a_i^j)$, $(a_j^i = a_{ij})$ $i = 1, \dots, \mathrm{m}$, $\mathrm{j} = 1, \dots, \mathrm{n}$. Обозначим через $T(A)$ область значений оператора A, т. е. совокупность всех векторов $y = Ax$, $\mathrm{x} \in \boldsymbol{X}$. Вычислим по матрице A размерность подпространства $T(A)$, полагая $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k}$, получаем $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k A\boldsymbol{e_k}$.

Следовательно, область значений оператора A совпадает с линейной оболочкой векторов $A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, \dots, A\boldsymbol{e_n}$. Размерность линейной оболочки $\boldsymbol{L}(A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, \dots, A\boldsymbol{e_n})$ равна максимальному количеству линейно независимых векторов в системе $A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, \dots, A\boldsymbol{e_n}$. В столбцах матрицы оператора A выписаны координаты векторов $A\boldsymbol{e_i}$ относительно базиса $\{\boldsymbol{f}\}$. Таким образом, вопрос о максимальном количестве линейно независимых векторов в системе $A\boldsymbol{e_j}$ $(\mathrm{j} =$

$1,\dots,\mathrm{n}$) сводится к вопросу о максимальном количестве линейно независимых столбцов у матрицы оператора A. Но это последнее равно рангу матрицы оператора A. Итак, размерность области значений линейного оператора A, действующего из n-мерного пространства $\mathbf{X}$ в m-мерное пространство $\mathbf{Y}$, равна рангу матрицы оператора A в любом базисе $\{\boldsymbol{e}\}$ пространства $\mathbf{X}$ и любом базисе $\{\boldsymbol{f}\}$ пространства $\mathbf{Y}$. Выбор базисов в данном случае безразличен.

Следовательно, ранг матрицы оператора A не зависит от выбора базисов, т. е. зависит только от самого оператора A. Ранг матрицы оператора A (в любых базисах) можно просто называть рангом оператора A и обозначать через r_A.

Обозначим через $N(A)$ нуль-многообразие оператора A, т. е. совокупность всех тех векторов $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, для которых $A\boldsymbol{x} = 0$. Размерность $\mathrm{n_A}$ этого подпространства равна числу $(\mathrm{n} - \mathrm{r})$, где r – ранг матрицы из коэффициентов системы, или ранг оператора A. Таким образом, $\mathrm{n_A} = \mathrm{n} - \mathrm{r_A}$.

Значит, размерность нуль-многообразия оператора A равна дополнению ранга оператора A до размерности пространства $\boldsymbol{X}$, из которого действует оператор A.

Если морфизм $\mathrm{A}: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ есть эпиморфизм, то $\mathrm{T(A)} = \mathbf{Y}$, следовательно, $\mathrm{r_A} = \mathrm{m}$. Если морфизм $\mathrm{A}: \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ есть мономорфизм, то $\mathrm{N(A)} = 0$ и, следовательно, $\mathrm{r_A} = \mathrm{n}$. Верны и обратные утверждения, а именно, если ранг матрицы A равен числу m её строк, то размерность T(A) совпадает с размерностью всего $\mathbf{Y}$, откуда следует, что $\mathrm{T(A)} = \mathbf{Y}$. Поэтому морфизм A есть эпиморфизм тогда и только тогда, когда $\mathrm{r_A} = \mathrm{m}$. Если ранг матрицы A равен числу n ее столбцов, то векторы $\mathbf{f_1} = \mathrm{A}\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{f_n} = \mathrm{A}\mathbf{e_n}$ являются линейно независимыми. Следовательно, оператор A является мономорфизмом, поэтому морфизм A есть мономорфизм тогда и только тогда, когда $\mathrm{r_A} = \mathrm{n}$.

Теорема 1. Пусть $\boldsymbol{X}$ есть n-мерное пространство, $\boldsymbol{Y}$ – произвольное пространство. Каковы бы ни были подпространства $N \subset \boldsymbol{X}$ и $T \subset \boldsymbol{Y}$, сумма размерностей которых равна n, существует линейный оператор $A: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$, для которого $N(A) = N, T(A) = T$.

Доказательство. Обозначим размерности подпространств N и T соответственно через k и $m = n - k$. В подпространстве T выберем m линейно независимых векторов $(f_1, \cdots, f_m)$. Далее выберем произвольный базис $\{\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$ в пространстве $\boldsymbol{X}$ так, чтобы первые k векторов базиса лежали в подпространстве N.

Определим оператор A условиями

$$\begin{cases} A\boldsymbol{e_i} = 0, (i = 1, \cdots, k), \\ A\boldsymbol{e_i} = f_i, (i = 1, \cdots, m). \end{cases} \tag{13}$$

Покажем, что оператор A удовлетворяет поставленным требованиям. Прежде всего, очевидно, что $T(A)$ есть линейная оболочка векторов $\boldsymbol{f_i}$, $(i = 1, \cdots, m)$ и, следовательно, совпадает с подпространством T. Затем любой вектор подпространства N по условию принадлежит к $N(A)$. Покажем, что любой вектор пространства $N(A)$ входит в N. Допустим, что для некоторого $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \boldsymbol{e_i}$ будет $A\boldsymbol{x} = 0$. Используя условия (13), получим

$$0 = A\boldsymbol{x} = A(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \boldsymbol{e_i}) = \varepsilon_{k+1} A\boldsymbol{e_{k+1}} + \cdots + \varepsilon_{k+m} A\boldsymbol{e_m} = \varepsilon_{k+1}\boldsymbol{f_1} + \cdots + \varepsilon_n \boldsymbol{f_m} = 0.$$

Так как $\boldsymbol{f_1}, \cdots, \boldsymbol{f_m}$ линейно независимы, то получим имеем $\varepsilon_{k+1} = \cdots = \varepsilon_n = 0$. Но тогда $\boldsymbol{x} = \varepsilon_1 \boldsymbol{e_1} + \cdots + \varepsilon_k \boldsymbol{e_k} \in N$, что и утверждалось. ■

Следующая теорема о ранге произведения двух матриц вытекает из свойств только что введенных геометрических характеристик.

Теорема 2. Ранг произведения AB матриц A и B не превосходит ранга каждого из сомножителей.

Доказательство. Предположим, что число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, так как иначе их нельзя было бы перемножить. Пусть A есть $m\times n$-матрица, а B есть $n\times p$-матрица. Введем в рассмотрение линейные пространства $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ с размерностями, соответственно, n, m и p. В пространстве $\boldsymbol{X}$ выберем базис $\{\boldsymbol{e_1},\cdots,\boldsymbol{e_n}\}$, в пространстве $\boldsymbol{Y}$ – базис $\{\boldsymbol{f_1},\cdots,\boldsymbol{f_m}\}$, в пространстве $\boldsymbol{Z}$ – базис $\{\boldsymbol{g_1},\cdots,\boldsymbol{g_p}\}$. Используя их, матрице A можно поставить в соответствие линейный оператор $A{:}\,\boldsymbol{X}\to\boldsymbol{Y}$, а матрице B – линейный оператор $B{:}\,\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{X}$. Произведению AB матриц A и B отвечает линейный оператор $AB{:}\,\boldsymbol{Z}\to\boldsymbol{Y}$. Область значений оператора AB в силу его определения содержится в области значений оператора A. Так как размерность области значений любого оператора равна рангу соответствующей матрицы, получаем, что ранг произведения двух матриц не превосходит ранга первого множителя. Обозначив ранг r, имеем $r_{AB}\le r_A$. Чтобы доказать, что он не превосходит также и ранга второго множителя, перейдем к транспонированным матрицам. Если ранг r, то получим $r_{AB}=r_{(AB)^T}=r_{B^TA^T}\le r_{B^T}=r_B$, что и требовалось доказать. ■

Ранг произведения двух матриц может быть и меньше, чем ранг каждого из сомножителей. Например, матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

обе имеют ранг, равный единице, а их произведение

$$AB=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

имеет нулевой ранг. Поэтому представляет интерес следующая теорема, дающая оценку ранга произведения двух матриц не сверху, а снизу.

Теорема 3. Пусть A есть m×n-матрица ранга r_A и B есть n×p-матрица ранга r_B. Тогда ранг m×p-матрицы AB не меньше $r_A + r_B - n$.

Доказательство. Покажем сначала, что любой оператор $A: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ ранга r переводит всякое n-мерное подпространство $\boldsymbol{X}' \subset \boldsymbol{X}$ в подпространство $\boldsymbol{Y}' \subset \boldsymbol{Y}$, размерность которого не ниже $r - (n - k)$. Выберем базис $\{\boldsymbol{e_1}, \cdots, \boldsymbol{e_n}\}$ в пространстве $\boldsymbol{X}$ так, чтобы первые k векторов базиса лежали в подпространстве $\boldsymbol{X}'$. Координаты векторов $A\boldsymbol{e_1}, A\boldsymbol{e_2}, \dots, A\boldsymbol{e_k}$, порождающих подпространство $\boldsymbol{Y}'$, в матрице оператора A занимают k первых столбцов. По условию в матрице оператора A имеется r линейно независимых столбцов. Эти столбцы разобьем на две группы: в первую группу отнесем те, которые имеют номера от 1 до k, а во вторую группу – те, которые имеют номера от $(\mathrm{k}+1)$ до n. Численность второй группы не больше $(\mathrm{n}-\mathrm{k})$, следовательно, численность первой группы не меньше $r - (n - k)$. Таким образом, подпространство $\boldsymbol{Y}'$ имеет не менее $r - (n - k)$ линейно независимых векторов, что и требовалось доказать.

Пусть теперь $A: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ и $B: \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{X}$ – линейные операторы, соответствующие перемножаемым матрицам. Оценка ранга матрицы оператора AB, в соответствии с вышесказанным, есть оценка размерности области значений этого оператора. Оператор B переводит все пространство $\boldsymbol{Z}$ в подпространство $T(B) \subset \boldsymbol{X}$ размерности r_B. По доказанному оператор A переводит подпространство $T(B)$ в подпространство, размерность которого не ниже $r_A - (n - r_B) = r_A + r_B - n$. Таким образом, область значений оператора AB, а с ней и ранг матрицы AB, имеют величину не ниже $r_A + r_B - n$, что и требовалось доказать. ■

<u>Следствие.</u> Если одна из перемножаемых матриц, т. е.

$m \times n$-матрица A или n×m-матрица B, имеет ранг, равный n, то ранг произведения равен рангу второй матрицы.

Действительно, в этом случае оценки ранга произведения сверху и снизу, полученные в теоремах 1 и 2, дают одинаковый результат, равный рангу второй матрицы.

Пусть дан линейный оператор A, переводящий линейное пространство $\boldsymbol{X}$ в линейное пространство $\boldsymbol{Y}$.

Определение. Линейный оператор B, переводящий линейное пространство $\boldsymbol{Y}$ в линейное пространство $\boldsymbol{X}$, называется левым обратным к оператору A, если $BA = E$ есть единичный оператор в пространстве $\boldsymbol{X}$. Оператор A в этом случае называется правым обратным к оператору B.

Теорема 4. Оператор $A: \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ имеет левый обратный тогда и только тогда, когда A есть мономорфизм. Оператор $B: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ имеет правый обратный тогда и только тогда, когда B есть эпиморфизм.

Доказательство. Пусть A есть мономорфизм, и $T(A) \subset \boldsymbol{Y}$ – его область значений. Каждому $y \in T(A)$ отвечает $\mathrm{x} \in \boldsymbol{X}$, для которого $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, причем $\mathbf{x}$ определяется однозначно по $\mathbf{y}$ в силу предположенной мономорфности A. Пусть $Q \subset \boldsymbol{Y}$ есть подпространство, дающее в прямой сумме с $T(A)$ все пространство $\boldsymbol{Y}$. Определим оператор $B: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ по следующему правилу. Для $\mathrm{y} \in T(A)$ положим $B\mathrm{y}$ равным тому единственному x, для которого $\mathrm{A}\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Для $\mathbf{y} \in Q$ положим $B\mathbf{y} = 0$. Для $\mathbf{y} = \mathbf{y_1} + \mathbf{y_2}$, где $\mathbf{y_1} \in T(A)$, $\mathbf{y_2} \in \mathrm{Q}$ положим $B\mathbf{y} = B\mathbf{y_1}$. Оператор B линейный, и для каждого $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$ имеем $BA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, так что B есть левый обратный для A. Если A не есть мономорфизм, то существует вектор $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$, отличный от 0 и такой, что $A\boldsymbol{x} = 0$. Тогда для любого $B: \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ имеем $(BA)\boldsymbol{x} = B(A)\boldsymbol{x} = B(0) = 0$, так что левого обратного для оператора A заведомо не существует.

Пусть $B\colon \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ есть эпиморфизм и пусть $N(B) \subset \boldsymbol{Y}$ есть нуль-многообразие оператора B, а $Q \subset \boldsymbol{Y}$ в прямой сумме с $N(B)$ дает все пространство $\boldsymbol{Y}$. Так как $\boldsymbol{X} = B(\boldsymbol{Y}) = B(N(B) + Q) = B(Q)$, то отображение $B\colon \boldsymbol{Q} \to \boldsymbol{X}$ есть также эпиморфизм и, более того, изоморфизм, так как никакой элемент $y \in Q$, отличный от 0, не переходит при воздействии оператора в нуль. Определим оператор $A\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ по следующему правилу: для любого $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$ вектор $A\mathbf{x}$ есть тот (единственный) вектор $\mathbf{y} \in Q$, для которого $B\mathbf{y} = \mathbf{x}$. Оператор A, очевидно, линеен, и для каждого $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$ имеем $BA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, так что A есть правый обратный для B. Если $B\colon \boldsymbol{Y} \to \boldsymbol{X}$ не есть эпиморфизм, то для вектора $\mathbf{x} \in \boldsymbol{X}$, не входящего в $T(B)$, и любого оператора $A\colon \boldsymbol{X} \to \boldsymbol{Y}$ имеем $BA\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, так что B не имеет правого обратного. Теорема доказана. ■

Известно, что результатом умножения $\mathrm{n} \times m$-матрицы P на $m \times \mathrm{n}$-матрицу A является квадратная $\mathrm{n} \times n$-матрица

$$S = PA.$$

Если S – единичная $\mathrm{n} \times n$-матрица, то матрица P называется левой обратной для матрицы A. Аналогично результатом умножения m×n-матрицы A на $\mathrm{n} \times m$-матрицу Q является квадратная $\mathrm{m} \times \mathrm{m}$-матрица $\mathrm{T} = \mathrm{AQ}$, и если T – единичная m×n-матрица, то Q называется правой обратной для матрицы A.

Теорему 4 в терминах ранга матрицы можно сформулировать следующим образом.

Теорема 4'. Тогда и только тогда некоторая m×n-матрица A имеет левую обратную, когда ее ранг равен числу n. Тогда и только тогда она имеет правую обратную, когда ее ранг равен числу m.

§20. Линейные операторы, переводящие пространство в себя

Рассмотрим линейный оператор A, переводящий пространство $\boldsymbol{X}$ в себя. Назовем такой оператор A действующим в пространстве $\boldsymbol{X}$.

Пусть оператор A действует в n-мерном пространстве $\boldsymbol{X_n}$. Выберем в пространстве $\boldsymbol{X_n}$ базис $\{\mathbf{e_1},\ldots,\mathbf{e_n}\}$ и этот же базис в $\boldsymbol{X_n}$ используем для построения матрицы оператора A. В соответствии с §21 гл. IV, матрица A оператора A строится по формулам

$$A\boldsymbol{e_k} = \sum_{i=1}^{n} a_i^i\, \boldsymbol{e_i}, \tag{14}$$

так что коэффициенты $\mathrm{a}_\mathrm{i}^\mathrm{i}$ образуют квадратную $n\times n$-матрицу, которая называется матрицей оператора A в базисе $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e_1},\ldots,\mathbf{e_n}\}$ (иногда будем обозначать через $\mathrm{A}(\mathbf{e})$). Соответствующая формула для координат вектора $\boldsymbol{y} = \mathrm{A}\mathbf{x}$, $y = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \eta_\mathrm{j}\, \mathbf{e_j}$, $\boldsymbol{x} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \varepsilon_\mathrm{j}\, \mathbf{e_j}$, имеет вид:

$$\eta_\mathrm{i} = \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{a}_\mathrm{i}^\mathrm{i}\, \varepsilon_\mathrm{j}. \tag{15}$$

При фиксированном базисе $\{\mathbf{e}\}$ получается взаимно однозначное соответствие между всеми линейными операторами, действующими в пространстве $\boldsymbol{X_n}$ и всеми квадратными $n \times n$ -матрицами.

<u>Примеры 1.</u>

1. Оператор, который каждому вектору пространства $\boldsymbol{X}$ ставит в соответствие нуль-вектор является линейным и называется нулевым оператором.

Матрица нулевого оператора в любом базисе состоит из одних нулей.

2. Единичный или тождественный оператор E, ставящий в соответствие каждому вектору $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$ сам вектор $\boldsymbol{x}$, рассмотрели в §21.

Матрица единичного оператора имеет вид

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$
и называется единичной.

3. Оператор A, который переводит каждый вектор $\boldsymbol{x}$ в $\lambda\boldsymbol{x}$, где λ фиксированное число из поля $\boldsymbol{X}$, линеен и называется оператором подобия (с коэффициентом подобия λ).

Матрица оператора подобия в любом базисе имеет вид
$$A = \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

4. На евклидовой плоскости V_2 векторы можно определять полярными координатами $\boldsymbol{x} = \{\varphi, \rho\}$. Оператор A, переводящий вектор $\boldsymbol{x} = \{\varphi, \rho\}$ в $A\boldsymbol{x} = \{\varphi + \varphi_0, \rho\}$, где φ_0 – фиксированный угол, является линейным и называется оператором поворота на угол φ_0.

Для построения матрицы оператора поворота выберем в плоскости V_2 базис из двух единичных взаимно ортогональных векторов $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$. Вектор $\mathbf{e_1}$ после поворота на угол φ_0 перейдет в вектор $\cos\varphi_0\, \mathbf{e_1} + \sin\varphi_0 \mathbf{e_2}$, а вектор $\mathbf{e_2}$ – в вектор $-\sin\varphi_0 \mathbf{e_1} + \cos\varphi_0\, \mathbf{e_2}$.

Следовательно, матрица оператора поворота в любом из указанных базисов имеет вид
$$\begin{pmatrix} cos\varphi_0 & -sin\varphi_0 \\ sin\varphi_0 & cos\varphi_0 \end{pmatrix}.$$

5. Пусть $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ – некоторый базис в n-мерном пространстве $\boldsymbol{X_n}$. Поставим в соответствие вектору $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\, \mathbf{e_k}$ вектор $P\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\, \mathbf{e_k}$, где $m < n$. Оператор P – линейный оператор и называется оператором проектирования на подпространство $\mathbf{X_m}$, порожденное векторами $\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_m}$.

Для построения матрицы оператора проектирования заметим, что под его воздействием векторы $\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_m}$ переходят в себя, а векторы $\mathbf{e_{m+1}}, \dots, \mathbf{e_n}$ – в нуль. Поэтому матрица оператора проектирования в базисе $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ имеет вид

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ m \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \cdots & \dots & \dots & \cdots & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Пусть $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ – базис в n-мерном пространстве $\mathbf{X_n}$ и даны n фиксированных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Определим оператор A для векторов базиса условиями $\mathrm{A}\mathbf{e_1} = \lambda_1\mathbf{e_1}, \dots, \mathrm{A}\mathbf{e_n} = \lambda_n\mathbf{e_n}$, и для любого другого вектора $\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\, \mathbf{e_k}$ по линейности условием $\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\varepsilon_k\, \mathbf{e_k}$. Полученный оператор называется диагональным относительно базиса $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ или диагонализируемым оператором.

Матрица диагонального относительно базиса $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ оператора в этом же самом базисе $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Элементы, отличные от нуля, могут находиться в этой матрице только на главной диагонали. Такая матрица называется диагональной. Отметим, что в другом базисе $\{\boldsymbol{f}_{\mathbf{1}}, \dots, \mathbf{f_n}\}$ матрица оператора, диагонального относительно базиса $\{\mathbf{e_1}, \dots, \mathbf{e_n}\}$, уже не будет диагональной.

Линейные операторы, действующие в пространстве $\boldsymbol{X_n}$, можно по общим правилам §21 гл. II складывать друг с другом и умножать на числа, причем снова получаются линейные операторы, действующие в $\boldsymbol{X_n}$.

Равенства (11) и (11') §21 гл. II показывают, что при введенных там операциях сложения и умножения на числа совокупность всех линейных операторов, действующих в пространстве $\boldsymbol{X_n}$, становится линейным пространством. Кроме того, для операторов, действующих в пространстве $\boldsymbol{X_n}$, всегда определена и операция умножения, в результате которой также получается оператор, действующий в пространстве $\boldsymbol{X_n}$. В частности, если B – любой оператор, то $(BE)\boldsymbol{x} = B(E\boldsymbol{x}) = B\boldsymbol{x} = E(B\boldsymbol{x})$, значит $BE = EB = B$.

Определим степени данного оператора A по правилам

$$A^1 = A,$$
$$A^2 = AA,$$
$$A^3 = A^2A = (AA)A = A(AA) = AA^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$
$$A^n = A^{n-1}A = AA^{n-1}.$$

При этом имеет место формула

$$A^{m+n} = A^mA^n, m, n = 1,2, \dots , \tag{16}$$

которую легко доказать по индукции.

Еще положим по определению $A^0 = E$ – тождественный оператор.

Очевидно формула (19) остается справедливой и в том случае, когда один из показателей обращается в нуль.

Пусть пространство $\boldsymbol{X}$ конечномерно, $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X_n}$. Фиксируем в пространстве $\boldsymbol{X_n}$ произвольно базис $\{\mathbf{e_1}, \dots , \mathbf{e_n}\}$. Тогда каждому линейному оператору A, действующему в пространстве $\boldsymbol{X_n}$, можно поставить в соответствие матрицу оператора A в этом базисе. В соответствии с правилами §21 гл. II вместе с операторами складываются, умножаются и возводятся в степени и соответствующие им матрицы. В этом случае легко можно найти размерность линейного пространства всех матриц n-

го порядка. Матрицы E_{jk} имеющие единственный элемент, отличный от нуля, для определенности 1, на пересечении j-й строки и k-го столбца линейно независимы. С другой стороны, каждая матрица n-го порядка есть линейная комбинация матриц E_{jk}. Таким образом, матрицы E_{jk} образуют базис в пространстве всех матриц n-го порядка. Так как число матриц E_{jk} равно n^2, это число и есть размерность пространства всех матриц n-го порядка.

Такую же размерность n^2 имеет и пространство всех линейных операторов, действующих в пространстве $\boldsymbol{X_n}$.

Примеры 2.

1. Умножение на комплексное число $\omega = \alpha i + \beta$ есть линейное преобразование на плоскости $\mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{iy}$, которое можно записать с помощью вещественной матрицы 2-го порядка. Из формулы умножения $(\alpha i + \beta)(\mathrm{x} + \mathrm{iy}) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y)$ следует, что в базисе 1, i соответствующая матрица имеет вид $\widetilde{\omega} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Таким образом, комплексным числам $\omega = \alpha i + \beta$ взаимно однозначно ставятся в соответствие вещественные матрицы $\widetilde{\omega}$ 2-го порядка. При этом сумме и произведению чисел отвечают сумма и произведение соответствующих матриц: вещественные матрицы $\widetilde{\omega}$ образуют точное представление поля комплексных чисел.

2. Обозначим через B_k $(k \geq 0)$ оператор «сдвига на k шагов по индексу». По определению, он переводит каждый базисный вектор $\mathbf{e_m}$ в базисный вектор $\mathbf{e_{m-k}}$, если $\mathrm{m} - \mathrm{k} > 0$, и в 0, если $\mathrm{m} - \mathrm{k} \leq 0$. Очевидно, $B_0 = E$, $B_k \cdot B_r = B_{k+r}$. Матрица оператора B_1 имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица оператора B_k имеет вид (k < n)

$$\begin{array}{cc} & \\ & \\ k+1 & \\ & \\ & \end{array}\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема. Определитель произведения двух n×n-матриц равен произведению определителей этих матриц.

Доказательство. Пусть $A = (a_{jk})$, $B = (b_{jk})$ две произвольные $n \times n$-матрицы, $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ – их произведение. По теореме, примененной к минору $M_{1,\dots,n}^{1,\dots,n}(\mathrm{AB})$, т. е. к самому определителю матрицы AB получим $det\mathrm{AB} = det\mathrm{A} \cdot det\mathrm{B}$. ■

§21. Собственные векторы и собственные значения

Особую роль играют одномерные инвариантные подпространства оператора A, которые называются инвариантными или собственными направлениями.

Определение 1. Любой ненулевой вектор, принадлежащий к одномерному инвариантному направлению оператора A, называется собственным вектором оператора A.

Другими словами, вектор $x \neq 0$ называется собственным вектором оператора A, если оператор A переводит вектор $\boldsymbol{x}$ в коллинеарный ему вектор $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$. Число λ называется собственным значением (собственным числом) оператора A соответствующим собственному вектору $\boldsymbol{x}$.

Свойства собственных векторов.

Лемма 1. Собственные векторы $\{\boldsymbol{x_i}\}_{\boldsymbol{i}}^{\boldsymbol{n}}$ оператора A с попарно различными собственными значениями $\{\lambda_i\}_i^m$

линейно независимы.

Доказательство. Докажем индукцией по числу m. Очевидно, что для $m = 1$ лемма верна. Допустим, что лемма верна для всяких $(m-1)$ собственных векторов оператора А. Покажем, что она продолжает оставаться верной и для всяких m собственных векторов оператора А. Предположим противное и допустим, что между m собственными векторами оператора А имеется линейная зависимость

$$\alpha_1 \boldsymbol{x_1} + \dots + \alpha_m \boldsymbol{x_m} = \sum_1^m \alpha_i \boldsymbol{x_i} = 0,$$

где, например, $\alpha_1 \neq 0$. Применяя к этому равенству оператор А, получаем

$$\boldsymbol{\alpha_1 \lambda_1 x_1} + \dots + \boldsymbol{\alpha_m \lambda_m x_m} = \sum_1^m \boldsymbol{\alpha_i \lambda_i x_i} = \mathbf{0}.$$

Умножим первое равенство на λ_m и вычтем из второго, получим

$$\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m)\boldsymbol{x_1} + \dots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1} - \lambda_m)\boldsymbol{x_{m-1}} = 0,$$

откуда по индуктивному предположению все коэффициенты должны быть равны нулю. В частности, $\alpha_1(\lambda_1 - \lambda_m) = 0$, что противоречит условиям $\alpha_1 \neq 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_m$. Следовательно, предположение неверно, и векторы $\boldsymbol{x_1}, \dots, \boldsymbol{x_m}$ линейно независимы, что и требовалось доказать. ■

Следствие. В n-мерном пространстве линейный оператор А не может иметь более n собственных векторов с различными собственными значениями.

Лемма 2. Все собственные векторы линейного оператора A, отвечающие данному собственному значению λ, образуют подпространство $\boldsymbol{K}^{\lambda} \subset \boldsymbol{K}$.

Доказательство. Действительно, если $A\boldsymbol{x_1} = \lambda \boldsymbol{x_1}$ и $A\boldsymbol{x_2} = \lambda \boldsymbol{x_2}$, то $A(\alpha \boldsymbol{x_1} + \beta \boldsymbol{x_2}) = \alpha A \boldsymbol{x_1} + \beta A \boldsymbol{x_2} = \alpha \lambda \boldsymbol{x_1} + \beta \lambda \boldsymbol{x_2} = \lambda(\alpha \boldsymbol{x_1} + \beta \boldsymbol{x_2})$, чем утверждение леммы доказано. ■

Определение 2. Подпространство $\boldsymbol{K}^{\lambda}$ называется собственным подпространством оператора А, отвечающим собственному значению λ.

Покажем, как можно вычислить координаты собственных векторов оператора А, заданного своей матрицей в некотором базисе $\{\boldsymbol{e_1}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ пространства $\boldsymbol{K_n}$. Допустим, что $\sum_{k=1}^{m} \varepsilon_k \boldsymbol{e_k}$ есть собственный вектор оператора А, так что $A\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$ с некоторым λ. Данное равенство можно переписать в координатной форме:

$$\begin{gathered}\lambda\varepsilon_1 = a_1^1\varepsilon_1 + a_1^2\varepsilon_2 + \cdots + a_1^n\varepsilon_n,\\ \lambda\varepsilon_2 = a_2^1\varepsilon_1 + a_2^2\varepsilon_2 + \cdots + a_2^n\varepsilon_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \lambda\varepsilon_n = a_n^1\varepsilon_1 + a_n^2\varepsilon_2 + \cdots + a_n^n\varepsilon_n,\end{gathered}$$

или

$$\begin{cases}(a_1^1 - \lambda)\varepsilon_1 + a_1^2\varepsilon_2 + \cdots + a_1^n\varepsilon_n = 0,\\ a_2^1\varepsilon_1 + (a_2^2 - \lambda)\varepsilon_2 + \cdots + a_2^n\varepsilon_n = 0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ a_n^1\varepsilon_1 + a_n^2\varepsilon_2 + \cdots + (a_n^n - \lambda)\varepsilon_n = 0.\end{cases} \tag{17}$$

Эта однородная система уравнений относительно величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ допускает ненулевое решение в том и только в том случае, когда ее определитель равен нулю (по теореме Крамера):

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 - \lambda & \cdots & a_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & a_n^2 & \cdots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Определение 3. Многочлен n-й степени относительно λ, стоящий в левой части уравнения, называется характеристическим многочленом матрицы А.

Всякому его корню $\lambda_0 \in \boldsymbol{K}$ отвечает собственный вектор, который определяется после подстановки в (17) вместо λ величины λ_0 путем решения получившейся совместной системы относительно величин $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$.

Следствие. Корни характеристического многочлена (18) не зависят от выбора базиса, в котором написана матрица оператора A.

Рассмотрим возможности, которые могут представиться при решении характеристического уравнения (18).

1) Случай отсутствия корней в поле $\boldsymbol{K}$. Если уравнение $\Delta\lambda$ в поле $\boldsymbol{K}$ совсем не имеет корней, то линейный оператор A не имеет в пространстве $\boldsymbol{K_n}$ собственных векторов.

Например, оператор поворота на угол $\varphi_0 \neq m\pi$ (m $=$ $0, \pm 1, \pm 2, \dots$) на плоскости V_2 не имеет собственных векторов. Этот факт, геометрически очевидный, легко устанавливается алгебраически. В самом деле, уравнение (18) для оператора поворота имеет вид

$$\begin{vmatrix} cos\varphi_0 - \lambda & -sin\varphi_0 \\ sin\varphi_0 & cos\varphi_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Или, после раскрытия определителя,

$$1 - 2\lambda cos\varphi_0 + \lambda^2 = 0.$$

Если $\varphi_0 \neq m\pi$ (m $=$ $0, \pm 1, \pm 2, \dots$), то это уравнение не имеет вещественных корней.

2) Если $\boldsymbol{K} = \mathrm{C}$ есть поле комплексных чисел, то в силу основной теоремы алгебры уравнение (24) всегда имеет корень $\lambda_0 \in \boldsymbol{K}$. Таким образом, в пространстве $\boldsymbol{C_n}$ любой линейный оператор имеет хотя бы один собственный вектор.

3) Случай существования n различных корней. Если все n корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ уравнения $\Delta\lambda = 0$ лежат в поле $\boldsymbol{K}$ и различны, то можно в пространстве $\boldsymbol{K_n}$ найти n различных собственных векторов оператора A, решая систему (23) последовательно при $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_n$. В силу леммы 1 собственные векторы $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ будут линейно независимы.

Примем их за новый базис и построим матрицу оператора А в этом новом базисе. Поскольку

$$Af_1 = \lambda_1 f_1,$$
$$Af_2 = \lambda_2 f_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$Af_n = \lambda_n f_n,$$

матрица A_f имеет вид

$$A_f = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{vmatrix}. \qquad (18)$$

Используя определение диагонализируемого оператора, можно сформулировать полученный результат следующим образом: в пространстве $\boldsymbol{K_n}$ всякий линейный оператор, характеристический многочлен матрицы которого в каком-либо базисе имеет n различных корней в поле $\boldsymbol{K}$, является диагонализируемым. Матрица этого оператора, построенная в базисе из его собственных векторов, диагональна, и ее диагональные элементы есть собственные значения оператора.

4) **Лемма 3.** Оператор А в некотором базисе $\{\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}\}$ пространства $\boldsymbol{K_n}$ имеет диагональную матрицу (18) с произвольными, необязательно различными числами $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ на диагонали, векторы $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_n}$ – собственные, а числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – соответствующие собственные значения.

Доказательство. Пусть λ – собственное значение, соответствующие собственному вектору $\boldsymbol{f} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{f_i}$, то, выделяя в равенстве

$$A\boldsymbol{f} = \lambda \boldsymbol{f} = \lambda \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{f_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda \alpha_i \boldsymbol{f_i}$$

слагаемое по вектору $\boldsymbol{f_i}$, получим

$$\lambda \alpha_i = \lambda_i \alpha_i, i = 1, \dots, n. \qquad (19)$$

Среди чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ есть хотя бы одно отличное от нуля. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда равенство (19) при $i = 1$ дает $\lambda = \lambda_1$, что и требовалось доказать. ■

5) Случай кратного корня. Пусть $\lambda = \lambda_0$ – некоторый корень уравнения (17) кратности $r \geq 1$.

Размерность каждого собственного подпространства $\boldsymbol{K}^{\lambda_0}$ совпадает с кратностью соответствующего собственного значения λ_0 как корня характеристического многочлена оператора A. Однако в общем случае это не так. Рассмотрим оператор A в R_2, заданный матрицей A $= \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ \mu & \lambda_0 \end{pmatrix}$ с произвольным $\mu \neq 0$. Характеристический многочлен имеет вид $(\lambda_0 - \lambda)^2$, который имеет двойной корень $\lambda = \lambda_0$. Система (16) в данном случае принимает вид

$$0 \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 = 0,$$
$$\mu \cdot \varepsilon_1 + 0 \cdot \varepsilon_2 = 0,$$

и имеет единственное (с точностью до числового множителя) решение $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 1$.

Таким образом, собственное подпространство оператора A, соответствующее собственному значению $\lambda = \lambda_0$ имеет размерность 1, меньшую, чем кратность корня λ_0. В общем случае размерность собственного подпространства $\boldsymbol{K}^{\lambda_0}$ не превышает кратности корня λ_0.

Пример. Две квадратичные формы называются *ортогонально эквивалентными*, если от одной из них можно перейти к другой посредством ортогонального преобразования. Для ортогональной эквивалентности двух форм необходимо и достаточно чтобы характеристические многочлены их матриц совпадали.

Выяснить, какие из следующих квадратичных форм ортогонально эквивалентны:

$$f = 9x_2^2 + 9x_3^2 + 12x_1x_2 + 12x_1x_3 - 6x_2x_3;$$
$$g = -3y_1^2 + 6y_2^2 + 6y_3^2 - 12y_1y_2 + 12y_1y_3 + 6y_2y_3;$$

$$h = 11z_1^2 - 4z_2^2 + 11z_3^2 + 8z_1z_2 - 2z_1z_3 + 8z_2z_3.$$

Решение. Выпишем матрицы квадратичных форм:

$$A_f = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}, A_g = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 6 \\ -6 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 6 \end{pmatrix}, A_h = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -1 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

Общий вид характеристических полиномов матриц в нашем случае будет следующим: $q(\lambda) = |\lambda E - A| = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$. Причем коэффициент a_k характеристического полинома матрицы A вычисляется через элементы матрицы A следующим образом: $a_k = (-1)^k \times$(сумму главных миноров k-го порядка матрицы A).

Так $q_f(\lambda) = |\lambda E - A_f| = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$, где $a_1 = -(0+9+9) = -18$ (минус след матрицы A_f), $a_2 = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $a_3 = -\begin{vmatrix} 0 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & -3 \\ 6 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 864$. То есть, $q_f(\lambda) = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 864 = (\lambda+6)(\lambda-12)^2$. Аналогично получим:

$$q_g(\lambda) = |\lambda E - A_f| = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 1269\lambda +,$$

$$q_f(\lambda) = |\lambda E - A_h| = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 864.$$

Это означает, что квадратичные формы f и h ортогонально эквивалентны между собой и не эквивалентны ортогонально с формой g.

Найдем в явном виде ортогональное преобразование, устанавливающее ортогональную эквивалентность форм. f и h. Построим вначале ортогональные преобразования приводящие формы f и h к каноническому виду. Для этого, как известно, нужно найти корни характеристических многочленов (в нашем случае одного общего характеристического многочлена), затем найти соответствующие этим корням собственные вектора, ортогонализировать собственные вектора отвечающие кратным корням и нормировать их. Матрицы, построенные из этих ортонормированных собственных векторов, как столбцов, и будут искомыми ортогональными матрицами, приводящими наши формы f *и* h к каноническому виду.

Корни многочлена $q(\lambda)=\lambda^3-18\lambda^2+864=(\lambda+6)(\lambda-12)^2$, являющегося общим характеристическим многочленам для матриц форм f *и* h, уже найдены (видны из разложения этого многочлена). Поэтому остаётся только найти, соответствующие этим корням ортонормированные собственные вектора матриц и A_h.

Для матрицы A_f эти вектора являются решениями уравнений $(A_f+6\,E)U=0$ и $(A_f-12\,E)V=0$ (U и V – неизвестные столбцы). Найдем «фундаментальные системы решений» уравнений (систем уравнений) $(A_f+6\,E)U=0$ и $(A_f-12\,E)V=0$. Фундаментальная система решений первого уравнения будет состоять из одного решения, второго уравнения – из двух (кратность корня равна двум). Находятся решения методом Гаусса. Сразу приведем эти решения, в виде, допускающем легкую проверку.

$$(A_f+6\,E)U=\begin{pmatrix}6&6&6\\6&15&-3\\6&-3&15\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$$

$$(A_f-12\,E)V_1=\begin{pmatrix}-12&6&6\\6&-3&-3\\6&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

$$(A_f-12\,E)V_2=\begin{pmatrix}-12&6&6\\6&-3&-3\\6&-3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Как следует из теории (это видно и непосредственно) решение $U=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ ортогонально решениям $V_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ и

$V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Ортогонализируем между собой решения V_1 и V_2., т.е. перейдем от решений V_1 и V_2 к решениям $V_1^{'} = V_1$ и $V_2^{'} = V_2 + \alpha V_1^{'}$. При этом α выбирается из условия, чтобы $\left(V_1^{'}, V_2^{'}\right) = (V_1, V_2 + \alpha V_1) = 0$. Откуда $\alpha = -\frac{(V_1, V_2)}{(V_1, V_1)} = -\frac{1}{5}$.

Итак, решения (собственные векторы матрицы A_f) U, $V_1^{'}$ и $V_2^{'}$ будут уже попарно ортогональны. Нормализуем эти векторы, т.е. умножим эти векторы на числа обратные длинам этих векторов и построим из них, как из столбцов, матрицу Q_1. То есть, $Q_1 = \left(\frac{1}{\|U\|} U, \frac{1}{\left\|V_1^{'}\right\|} V_1^{'}, \frac{1}{\left\|V_2^{'}\right\|} V_2^{'}\right)$. Выпишем её явный вид, т.е. проведем необходимые вычисления, получим

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{30}} \end{pmatrix}.$$

Проделаем аналогичные вычисления для матрицы A_h, получим:

$$(A_h + 6\,E)\widehat{U} = \begin{pmatrix} 17 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$(A_h - 12\,E)\widehat{V_1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -16 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(A_h - 12\,E)\widehat{V_2} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & -16 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для $\widehat{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widehat{V_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\widehat{V_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ опять очевидным образом получаем, что $\left(\widehat{U}, \widehat{V_1}\right) == (\widehat{U}, \widehat{V_2}\ ) = 0$.

Ортоганализируем вектора $\widehat{V_1}$ и $\widehat{V_2}$, т.е. перейдем к системе векторов $\widehat{V_1'} = \widehat{V_1}$ и $\widehat{V_2'} = \widehat{V_2} + \beta\widehat{V_1'}$, где величина β подобрана таким образом, что $\widehat{(V_1', V_2')} = 0$. Нетрудно видеть, что $\beta = -\frac{(\widehat{V_1}, \widehat{V_2})}{(\widehat{V_1}, \widehat{V_1})} = 2$. Нормализуем, как и в случае матрицы A_f, собственные векторы $(\widehat{U}, \widehat{V_1'}, \widehat{V_2'}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -4, & 0\ , & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ матрицы A_h и построим матрицу Q_2:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ \frac{-4}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Так как матрица Q_1 построена из ортонормированных собственных векторов матрицы A_f, а матрица Q_2 из ортонормированных собственных векторов матрицы A_h, то $A_f Q_1 = Q_1 D$, а $A_h Q_2 = Q_2 D$, где $D = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. Отсюда тотчас же получаем, что $Q_1^T A_f Q_1 = D$ и $Q_2^T A_h Q_2 = D$, т.е. $Q_1^T A_f Q_1 = Q_2^T A_h Q_2$. Следовательно, $A_f = Q_1 Q_2^T A_h Q_2 Q_1^T$. Пусть $X = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^T$, $Z = (z_1 \quad z_2 \quad z_3)^T$. Теперь уже нетрудно видеть, что с помощью ортогонального преобразования переменных $Z = (Q_2 Q_1^T)X$ квадратичная форма $h = Z^T A_h Z$ переводится в квадратичную форму $f = X^T A_f X$. Действительно,

$$h = Z^T A_h Z = \left((Q_2 Q_1^T)X\right)^T A_h \left((Q_2 Q_1^T)X\right) = X^T (Q_1 Q_2^T A_h Q_2 Q_1^T) X = X^T A_f X = f.$$

Очевидно, что полагая $X = Q_1 Q_2^T Z$, с помощью этого ортогонального преобразования превратим квадратичную форму f в форму h.

ГЛАВА IV. КАНОНИЧЕСКАЯ ФОРМА МАТРИЦЫ ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА

Определение. Два оператора A и B, действующие в n-мерном пространстве $\boldsymbol{K_n}$, называются эквивалентными, если существуют такие два базиса в $\boldsymbol{K_n}$, что матрица оператора A в первом базисе совпадает с матрицей оператора B во втором базисе, т. е. существует такой базис $\{\boldsymbol{e_i}\}_1^n$ и $\{\boldsymbol{f_j}\}_1^n$, что $A_{\boldsymbol{f}} = B_{\boldsymbol{e}}$.

Очевидно, что эквивалентные операторы определяют в пространстве $\boldsymbol{K_n}$ одинаковые по своим свойствам линейные преобразования.

В этой главе укажем для любого линейного оператора такой базис, в котором его матрица принимает «каноническую» форму, и покажем, что если эти формы совпадают для A и B, то A эквивалентна B и обратно (при этом базисы могут быть различными).

§22. Каноническая форма матрицы нильпотентного оператора

Определение 1. Линейный оператор B называется нильпотентным в n-мерном пространстве $\boldsymbol{L_n}$, если при некотором натуральном r>0 выполняется равенство $B^r = 0$, другими словами, $B^r\boldsymbol{x} = 0$ для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L_n}$

Предположим, что B – нильпотентный оператор, и $B^r = 0$. Будем считать, что $B^{r-1} \neq 0$, т. е. имеются векторы $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L_n}$, для которых $B^{r-1}x \neq 0$.

Определение 2. Назовем высотой вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L_n}$ наименьшее из чисел m, при которых $B^m x = 0$.

Все векторы $x \in \boldsymbol{L_n}$, по нашему предположению, имеют высоту $\leq r$, причем имеются векторы с высотой, равной r. Для любого $\mathrm{k} \leq \mathrm{r}$ обозначим через H_k совокупность всех векторов высоты $\leq \mathrm{k}$. Очевидно, H_k есть подпространство в $\boldsymbol{L_n}$: если $x \in H_k$ и $y \in H_k$, то $B^k x = 0$, $B^k \mathrm{y} = 0$, откуда при любых $\alpha \in \boldsymbol{L}$ и $\beta \in \boldsymbol{L}$ также $B^k(\alpha x + \beta y) = 0$, так что высота вектора $\alpha x + By$ не превосходит k и $\alpha x + By \in H_k$. Очевидно, что $H_r = \boldsymbol{L_n}$ и $0 \subseteq H_0 \subseteq H_1 \subseteq \cdots \subseteq H_{r-1} \subseteq H_r = \boldsymbol{L_n}$. Размерности этих пространств обозначим соответственно через $m_0 = 0 \leq m_1 \leq \cdots \leq m_r = n$. Построим базис в пространстве $\boldsymbol{L_n}$ следующим образом.

Ясно, что H_{r-1} не совпадает со всем $\boldsymbol{L_n} = H_r$. Поэтому можно найти векторы $\boldsymbol{f_1}, \dots, \boldsymbol{f_{p_1}}$, лежащие в H_r и линейно независимые над H_{r-1} $(p_1 = \ m_r - m_{r-1})$.

Лемма. Векторы $B\boldsymbol{f_1}, \dots, B\boldsymbol{f_{p_1}}$ лежат в H_{r-1} и линейно независимы над H_{r-2}.

Доказательство. Действительно, если бы имели $c_1 B\boldsymbol{f_1} + \cdots + c_{p_1} B\boldsymbol{f_{p_1}} = \boldsymbol{g} \in H_{r-2}$ то, применяя B^{r-2}, получили бы, что $\boldsymbol{\sum_{i=1}^{p_1} c_i B^{r-1} f_i = 0}$. Или $\sum_{i=1}^{p_1} c_i \boldsymbol{f_i} \in H^{r-1}$, что по построению не имеет места. Отсюда видно, что размерность $(m_{r-1} - m_{r-2})$ пространства H_{r-1} над H_{r-2} равна или больше размерности $(m_r - m_{r-1})$ пространства H_r над H_{r-1}. Дополним векторы $B\boldsymbol{f_1}, \dots, B\boldsymbol{f_{p_1}}$ векторами $\boldsymbol{f_{p_1+1}}, \dots, \boldsymbol{f_{p_2}}$ в H_{r-1} до максимальной системы, линейно независимой над H_{r-2} $(p_2 = m_{r-1} - m_{r-2})$. Применяя ко всем этим векторам оператор B, получаем векторы в H_{r-2}

$$\boldsymbol{B^2 f_1}, \dots, \boldsymbol{B^2 f_{p_1}}, \boldsymbol{B f_{p_1+1}}, \dots, \boldsymbol{B f_{p_2}},$$

линейно независимые над H_{r-3}, что доказывается аналогично предыдущему. Отсюда $m_{r-2} - m_{r-3} \geq m_{r-1} - m_{r-2}$, и можно построить в пространстве H_{r-2} векторы $f_{p_{2+1}}, \dots, f_{p_3}$, образующие вместе с предыдущими полную систему, линейно независимую над H_{r-3}.

Переходя таким же образом в подпространства

$H_{r-3}, \dots, H_0 = 0$, получаем, в конце концов, полную систему n линейно независимых векторов. ■

Полученную систему векторов можно записать в таблицу

$$
\begin{array}{llllllllll}
f_1, & \dots, & f_{p_1}, & & & & & & & \\
Bf_1, & \dots, & Bf_{p_1}, & f_{p_1+1}, & \dots, & f_{p_2}, & & & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots, & & & \\
B^{r-1}f_1, & \dots, & B^{r-1}f_{p_1}, & B^{r-2}f_{p_1+1}, & \dots, & B^{r-2}f_{p_2} & \dots, & f_{p_{r-1}+1} & \dots, & f_{p_r}.
\end{array}
$$

Векторы, стоящие в первой строке таблицы, имеют высоту r, векторы следующей строки – высоту $(r-1)$ и т. д. Векторы последней строки имеют высоту 1, т. е. оператором B переводятся в 0. Каждый столбец таблицы определяет инвариантное подпространство оператора B. Первые p_1 инвариантных подпространств имеют размерность r каждое, следующие $(p_2 - p_1)$ подпространств – размерность $(r-1)$ каждое и т. д. Последние (одноэлементные) столбцы определяют одномерные инвариантные подпространства.

Все пространство $\boldsymbol{L_n}$ есть прямая сумма p_r указанных подпространств.

Запишем матрицу оператора B в подпространстве, определяемом векторами первого столбца. В качестве базиса возьмем векторы $B^{r-1}\boldsymbol{f_1}, \dots, B\boldsymbol{f_1}, \boldsymbol{f_1}$. В таком порядке они располагаются по возрастанию высоты. В этой записи первый вектор базиса оператором B переводится в 0, второй в первый, ..., r-й переводится в $(r-1)$-й, поэтому матрица оператора B содержит по r строк и столбцов и имеет вид

$$
B = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}, \qquad (1)
$$

с отличными от нуля элементами, а именно, равными 1, над главной диагональю.

Аналогичный вид имеет матрица оператора B в остальных инвариантных подпространствах, соответствующих остальным столбцам таблицы. Отличие от матрицы (1) может состоять лишь в числе строк и столбцов.

Матрица оператора B во всем пространстве $\boldsymbol{L_n}$ будет квазидиагональной с указанными блоками на диагонали:

$$B = \begin{pmatrix}
\begin{matrix}0&1&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&1\\0&0&\dots&0\end{matrix} &&&&&&\\
& \begin{matrix}0&1&\dots&0\\ \dots&&\dots&\dots\\0&\dots&\dots&1\\0&0&\dots&0\end{matrix} &&&&&\\
&&\ddots&&&&\\
&&&\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}&&&\\
&&&&0&&\\
&&&&&\ddots&\\
&&&&&&0
\end{pmatrix} \tag{2}$$

Число блоков размера r равно p_1, число блоков размера $(r-1)$ равно $(p_2 - p_1)$, число блоков размера 2 равно $p_{r-1} - p_{r-2}$, число блоков размера 1 равно $p_r - p_{r-1}$. Очевидно, если для некоторого i имеем $p_{r-i+1} - p_{r-i}$, то в матрице (2) блоков размера i не будет вовсе.

§23. Алгебры. Алгебра многочленов от одного переменного

Определение 1. Линейное пространство $\boldsymbol{L}$ над числовым полем $\boldsymbol{K}$ называется алгеброй или алгеброй над полем $\boldsymbol{K}$, если в $\boldsymbol{L}$ установлена операция умножения, приводящая в соответствие каждой паре элементов (x, y) из $\boldsymbol{L}$ элемент $z \in \boldsymbol{L}$, обозначаемый $x \cdot y$ или xy, и удовлетворяющая следующим условиям:

1) $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$ для любых $x, y \in \boldsymbol{L}$ и $\alpha \in \boldsymbol{K}$;

2) $(xy)z = x(yz)$ для любых $x, y, z \in \boldsymbol{L}$ (ассоциативный закон);

3) $(x + y)z = xz + yz$ для любых $x, y, z \in \boldsymbol{L}$ (дистрибутивный закон).

Вообще говоря, умножение может не быть коммутативным, так что ху ≠ ух**.** Если умножение коммутативно, т. е. выполнено условие

4) $xy = yx$ для любых $x, y \in \boldsymbol{L}$, то алгебра $\boldsymbol{L}$ называется коммутативной.

Пусть $\boldsymbol{0}$ есть нуль-вектор пространства $\boldsymbol{L}$. Тогда для любого $x \in \boldsymbol{L}$ $0 \cdot x = (0 + 0)x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$, откуда следует, что $\boldsymbol{0} \cdot x = 0$.

Элемент $e \in \boldsymbol{L}$ называется левой единицей, если $ex = x$ для любого $x \in \boldsymbol{L}$. Правой единицей, если $xe = x$ для любого $x \in \boldsymbol{L}$. Двусторонней единицей или просто единицей в $\boldsymbol{L}$, если $ex = xe = x$ для любого $x \in \boldsymbol{L}$.

Элемент $x \in \boldsymbol{L}$ называется левым обратным к элементу $y \in \boldsymbol{L}$, если xy есть единица алгебры $\boldsymbol{L}$. В этом случае y называется правым обратным к x. Если элемент z обладает и левым и правым обратными, то они могут быть лишь единственными и совпадают друг с другом. Элемент z называется в этом случае обратимым, ему обратный обозначается через z^{-1}.

Произведение zu обратимого элемента z и обратимого элемента u и есть обратимый элемент с обратным $u^{-1}z^{-1}$. Если элемент и обратим, то уравнение $ux = v$ имеет решение $x = u^{-1}v$, так как оно получается из самого уравнения умножением на u^{-1}, оно единственно. В коммутативном случае употребляют запись $x = \frac{v}{u}$ или $x = v : u$. Такой элемент называют частным элементов v и u. Для частных справедливы обычные арифметические правила действий.

Алгебра $\boldsymbol{L}$ по определению имеет размерность n, если эту размерность n имеет соответствующее линейное пространство $\boldsymbol{K}$.

Примеры 1.

1) В любом линейном пространстве $\boldsymbol{L}$ положим $x \cdot y = 0$ для любых $x, y \in \boldsymbol{L}$, получим алгебру, которая называется тривиальной.

2) Примером нетривиальной коммутативной алгебры над полем $\boldsymbol{K}$ является совокупность П всех многочленов

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{p} a_k \lambda^k$$

с коэффициентами из $\boldsymbol{K}$, с обычными операциями сложения и умножения. В этой алгебре есть единица, а именно, многочлен $e(\lambda)$, у которого $a_0 = 1$, а остальные коэффициенты равны 0.

3) Линейное пространство $\boldsymbol{L}(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{n}})$ из всех матриц n-го порядка с элементами из $\boldsymbol{K}$ с обычным матричным умножением дает пример конечномерной некоммутативной алгебры размерности n^2. Эта алгебра обладает единицей, которой является единичная матрица E.

4) Более общим примером некоммутативной алгебры с единицей является линейное пространство $B(\boldsymbol{K})$ всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве $\boldsymbol{K}$, с обычным для операторов действием умножения.

Определение 2. Подпространство $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{K}$ называется подалгеброй алгебры $\boldsymbol{K}$, если из $x, y \in \boldsymbol{L}$ следует $xy \in \boldsymbol{L}$.

Определение 3. Подпространство $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{K}$ называется левым идеалом в $\boldsymbol{K}$, если из $x \in \boldsymbol{L}$, $y \in \boldsymbol{L}$ следует $xy \in \boldsymbol{L}$, и левым идеалом в $\boldsymbol{K}$, если из $x \in \boldsymbol{L}$ $y \in \boldsymbol{L}$ следует $yx \in \boldsymbol{L}$. Идеал, одновременно левый и правый, называется двусторонним идеалом.

В коммутативной алгебре нет различия между левыми, правыми и двусторонними идеалами. Во всякой алгебре $\boldsymbol{L}$ имеются два очевидных двусторонних идеала: один, обозначаемый (0), – состоящий из единственного элемента 0, второй – состоящий из всех элементов $x \in \boldsymbol{L}$. Все остальные идеалы, односторонние и двусторонние, называются собственными идеалами. Всякий идеал есть подалгебра, обратное, вообще говоря, несправедливо. Так, совокупность всех многочленов $\mathrm{P}(\lambda)$, удовлетворяющих условию $\mathrm{P}(0) = \mathrm{P}(1)$, есть подалгебра алгебры П, не являющаяся идеалом. Совокупность всех многочленов $\mathrm{P}(\lambda)$, удовлетворяющих условию $\mathrm{P}(0) = 0$, есть собственный идеал в алгебре П.

Пусть $\boldsymbol{L} \subset \boldsymbol{K}$ есть подпространство в алгебре $\boldsymbol{K}$. Рассмотрим фактор-пространство $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$, т. е. линейное пространство из классов $\boldsymbol{X}$ элементов $x \in \boldsymbol{K}$, взаимно сравнимых относительно подпространства $\boldsymbol{L}$. Если $\boldsymbol{L}$ – двусторонний идеал в $\boldsymbol{K}$, то для классов $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$, кроме линейных операций, можно ввести операцию умножения. Имея классы $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$, выберем произвольно элементы $\mathrm{x} \in \mathbf{X}$, $\mathrm{y} \in \mathbf{Y}$, и под произведением $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{Y}$ будем понимать класс, содержащий произведение ху.

Определение 3. Фактор-пространство $\boldsymbol{K}/\boldsymbol{L}$ с введенным в нем умножением является также алгеброй, которая называется фактор-алгеброй алгебры $\boldsymbol{K}$ по двустороннему идеалу $\boldsymbol{L}$.

Очевидно, она коммутативна, если коммутативна алгебра $\boldsymbol{K}$.

Пусть имеются две алгебры $\boldsymbol{L_1}$ и $\boldsymbol{L_2}$ над полем $\boldsymbol{K}$.

Определение 4. Морфизм ω линейного пространства

$\boldsymbol{L_1}$ в пространство $\boldsymbol{L_2}$ называется морфизмом алгебры $\boldsymbol{L_1}$ в алгебру $\boldsymbol{L_2}$, если наряду с условиями морфизма пространств

1) $\omega(x_1 + y_1) = \omega(x_1) + \omega(y_1)$ для любых $x_1, y_1 \in \boldsymbol{L_1}$;

2) $\omega(\alpha x) = \alpha\omega(x)$ для любого $x_1 \in \boldsymbol{L_1}$ и любого $\alpha \in \boldsymbol{K}$;

3) $\omega(x_1 \cdot y_1) = \omega(x_1) \cdot \omega(y_1)$ для любых $x_1, y_1 \in \boldsymbol{L_1}$.

Если морфизм ω есть эпиморфизм, мономорфизм или изоморфизм пространства $\boldsymbol{L_1}$ в пространство $\boldsymbol{L_2}$, то при выполнении условия 3) он соответственно называется эпиморфизмом, мономорфизмом, изоморфизмом алгебры $\boldsymbol{L_1}$ в алгебру $\boldsymbol{L_2}$.

Примеры 2.

1) Пусть $\boldsymbol{L}$ – подалгебра алгебры $\boldsymbol{K}$. Отображение ω, которое каждому вектору x ∈ **X** ставит в соответствие этот же вектор x в алгебре $\boldsymbol{K}$, есть морфизм алгебры $\boldsymbol{L}$ в алгебру $\boldsymbol{K}$, а именно, мономорфизм. Этот мономорфизм называется вложением $\boldsymbol{L}$ в $\boldsymbol{K}$.

2) Пусть $\boldsymbol{L}$ – двусторонний идеал алгебры $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K/L}$ – соответствующая фактор-алгебра. Отображение ω, которое каждому вектору x ∈ $\boldsymbol{K}$ ставит в соответствие класс $\boldsymbol{X} \in \boldsymbol{K/L}$, содержащий элемент x, есть морфизм алгебры $\boldsymbol{K}$ в алгебру $\boldsymbol{K/L}$, а именно, эпиморфизм. Этот эпиморфизм называется каноническим отображением $\boldsymbol{K}$ на $\boldsymbol{K/L}$.

3) Пусть имеется мономорфизм ω алгебры $\boldsymbol{K_1}$ в алгебру $\boldsymbol{K_2}$. Совокупность всех векторов $\omega(x_1) \in \boldsymbol{K_2}$ есть подалгебра $\boldsymbol{L_2} \subset \boldsymbol{K_2}$, и мономорфизм ω есть изоморфизм алгебры $\boldsymbol{K_1}$ в алгебру $\boldsymbol{L_2}$.

4) Пусть имеется морфизм ω алгебры $\boldsymbol{K_1}$ в алгебру $\boldsymbol{K_2}$.

Лемма 1. Совокупность $\boldsymbol{L_1}$ всех векторов $x_1 \in \boldsymbol{K_1}$, для которых $\omega(x_1) = 0$, есть двусторонний идеал алгебры $\boldsymbol{K_1}$.

Доказательство. Действительно, $\boldsymbol{L_1}$ есть подпространство в $\boldsymbol{K_1}$. Если $x_1 \in \boldsymbol{L_1}$, $y_1 \in \boldsymbol{K_1}$, то $\omega(x_1 y_1) = \omega(x_1) \cdot \omega(y_1) = 0$, так что $x_1 y_1 \in \boldsymbol{L_1}$. Аналогично $y_1 x_1 \in \boldsymbol{L_1}$, что и требовалось доказать. ■

Далее, мономорфизм Ω пространства $\boldsymbol{K_1}/\boldsymbol{L_1}$ в пространство $\boldsymbol{K_2}$, ставящий в соответствие каждому классу $X_1 \in \boldsymbol{K_1}/\boldsymbol{L_1}$ элемент $\omega(x_1)$, $x_1 \in X_1$, в данном случае есть мономорфизм алгебры $\boldsymbol{K_1}/\boldsymbol{L_1}$ в алгебру $\boldsymbol{K_2}$. Действительно, выбирая $x_1 \in X_1$, $y_1 \in Y_1$, имеем $x_1 y_1 \in X_1 Y_1$ и $\Omega(X_1 Y_1) = \omega(x_1 y_1) = \omega(x_1) \cdot \omega(y_1) = \Omega(X') \cdot \Omega(Y')$.

В частности, если морфизм ω есть эпиморфизм алгебры $\boldsymbol{K_1}$ в алгебру $\boldsymbol{K_2}$, то морфизм Ω есть изоморфизм алгебры $\boldsymbol{K_1}/\boldsymbol{L_1}$ с алгеброй $\boldsymbol{K_2}$.

5) Пусть A – линейный оператор, действующий в пространстве $\boldsymbol{K}$. Так как для линейных операторов в пространстве $\boldsymbol{K}$ определены операции сложения и умножения, то каждому многочлену $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k \in \Pi$ можем поставить в соответствие оператор $P(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$, действующий в том же пространстве $\boldsymbol{K}$. При этом соответствии сложению и умножению многочленов отвечает сложение и умножение соответствующих операторов в смысле § 21 гл. IV. Действительно, пусть $P(\lambda) = \mathrm{P}_1(\lambda) + \mathrm{P}_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k + \sum_{k=0}^{m} b_k \lambda^k = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) \lambda^k$, тогда $P(A) = \sum_{k=0}^{m} (a_k + b_k) A^k = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k + \sum_{k=0}^{m} b_k A^k = P_1(A) + P_2(A)$. Аналогично пусть $Q(\lambda) = P_1(\lambda) \cdot P_2(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j \lambda^j = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_k b_j \lambda^{k+j}$, тогда по распределительному закону для операторов $Q(A) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} a_k b_j A^{k+j} = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k \sum_{j=0}^{n} b_j A^j = P_1(A) \cdot P_2(A)$.

<u>Замечание.</u> Операторы P(A) и Q(A) всегда коммутативны, каковы бы ни были многочлены $P(\lambda)$ и $Q(\lambda)$.

Получили морфизм алгебры многочленов П в алгебру линейных операторов $B(K)$. Вообще говоря, этот морфизм не есть эпиморфизм хотя бы потому, что операторы вида Р(А) коммутируют друг с другом, а вся алгебра $B(K)$, за исключением тривиального случая $K = K_1$ некоммутативна.

6) Существует изоморфизм между алгеброй $B(\boldsymbol{K_n})$ всех линейных операторов, действующих в пространстве $\boldsymbol{K_n}$, и алгеброй $L(\boldsymbol{K_n})$ всех матриц n-го порядка с элементами из поля $\boldsymbol{K}$. Осуществляем его, фиксируя в пространстве $\boldsymbol{K_n}$ базис $\{\mathbf{e_1},\dots,\mathbf{e_n}\}$ и ставя в соответствие каждому оператору $A \in B(\boldsymbol{K_n})$ его матрицу в этом базисе. Обе эти алгебры имеют одинаковую размерность n^2.

В коммутативной алгебре П всех многочленов Р(А) с коэффициентами из поля $\boldsymbol{K}$ совокупность всех многочленов вида $P(\lambda)Q_0(\lambda)$, где $Q_0(\lambda)$ – фиксированный многочлен, а $P(\lambda)$ – любой многочлен, очевидно, является идеалом.

Лемма 2. Любой идеал $I \neq 0$ алгебры П имеет такую структуру, т. е. получается из некоторого многочлена $Q_0(\lambda)$ умножением на любой многочлен $P(\lambda)$.

Доказательство. Для доказательства найдем в идеале I отличный от 0 многочлен наименьшей возможной степени, например q, и обозначим его через $Q_0(\lambda)$. Теперь утверждаем, что любой многочлен $Q(\lambda) \in I$ имеет вид $P(\lambda) \cdot Q_0(\lambda)$, где $P(\lambda) \in$ П. Действительно, по правилу действий с многочленами можно записать

$$Q(\lambda) \equiv P(\lambda) \cdot Q_0(\lambda) + R(\lambda), \qquad (3)$$

где $P(\lambda)$ – частное от деления $Q(\lambda)$ на $Q_0(\lambda)$, а $R(\lambda)$ – остаток, имеющий степень, меньшую степени делителя, т. е. меньшую, чем число q. Многочлены $Q(\lambda)$ и $Q_0(\lambda)$ принадлежат идеалу I. Но тогда из равенства (3) и многочлен $R(\lambda)$ принадлежит идеалу I. Так как степень $R(\lambda)$ меньше q, а многочлен $Q_0(\lambda)$ в идеале имеет наименьшую возможную степень q среди многочленов, отличных от 0, то $R(\lambda) = 0$, что и требовалось доказать. ■

Многочлен $Q_0(\lambda)$ называется порождающим идеал I.

Следствие. Полином $Q_0(\lambda)$ определяет идеал I единственным образом с точностью до числового множителя.

Доказательство. Действительно, если бы наряду с $Q_0(\lambda)$ тем же свойством обладал многочлен $Q_1(\lambda)$, то, по доказанному, имели бы $Q_1(\lambda) = P_1(\lambda) \cdot Q_0(\lambda)$, $Q_0(\lambda) = P_0(\lambda) \cdot Q_1(\lambda)$. Из этих равенств вытекает, что степени многочленов $Q_1(\lambda)$ и $Q_0(\lambda)$ одинаковы, и что $P_1(\lambda)$и $P_0(\lambda)$ не содержат λ, т. е. являются числами, что и требовалось доказать. ■

Лемма 3. Пусть существуют многочлены $Q_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$ не все равные 0 и не имеющие общего делителя степени не меньше 1. Тогда существуют многочлены $P_i^0(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{m} P_i^0(\lambda) \cdot Q_i(\lambda) \equiv 1. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть I – совокупность всех многочленов вида $\sum_{i=1}^{m} P_i(\lambda) Q_i(\lambda)$, где $P_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$ – любой из П. Очевидно, совокупность I есть идеал в П. По лемме 2 идеал I порожден одним многочленом

$$Q_0(\lambda) = \sum_{i=1}^{m} P_i^0(\lambda) \cdot Q_i(\lambda). \tag{5}$$

При этом, в частности, справедливы соотношения

$$Q_1(\lambda) = S_1(\lambda) \cdot Q_0(\lambda), \dots, Q_m(\lambda) = S_m(\lambda) Q_0(\lambda),$$

где $S_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$ – некоторые многочлены. Эти равенства показывают, что $Q_0(\lambda)$ есть общий делитель многочленов $Q_i(\lambda)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда из предположения следует, что степень многочлена $Q_0(\lambda)$ равна 0, т. е. что $Q_0(\lambda)$ есть постоянная a_0. При этом $a_0 \neq 0$, так как иначе

$I = 0$. Умножая (5) на $\frac{1}{a_0}$, получаем (4), что и требовалось доказать. ■

§24. Полярное разложение

Любое комплексное число z можно представить в виде $z = |z|e^{i\varphi}$. Аналогом этого представления является *полярное* разложение матрицы $A = SU$, где S- эрмитова, U- унитарная матрица.

Теорема. *Любую квадратную матрицу A над $\mathbb{R}$ (над $\mathbb{C}$) можно представить в виде $A = SU$, где S- симметрическая (эрмитова) неотрицательно определенная матрица, U- ортогональная (унитарная) матрица. Если матрица A невырождена, то такое представление единственно.*

Доказательство. Если $A = SU$, S- эрмитова, U- унитарная матрица, то $AA^* = SUU^*S = S^2$. Если матрица S к тому же неотрицательно определена, то равенство $S^2 = AA^*$ задает ее однозначно. Для невырожденной матрицы A остается положить $U = S^{-1}A$. Матрица U унитарна, так как $UU^* = S^{-1}AA^*S^{-1} = E$.

В случае вырожденной матрицы A требуются более тонкие рассуждения. Для оператора AA^* существуют ортонормированный собственный базис $z_1, \dots, z_n$, причем $AA^*z_i = k_i^2$, где $z_k \in \mathbb{R}$. Положим $Sz_i = k_i z_i$, где $k_i \geq 0$. Можно считать, что числа $k_1, \dots, k_m$, положительны и $k_{m+1} = \cdots = k_n = 0$. Пусть $w_i = A^*z_i/k_i$ для $i \leq m$ и $W = \langle w_1, \dots, w_m \rangle$. Так как $k_i k_j(w_1, w_m) = \left(A^*z_i, A^*z_j\right) = \left(z_i, AA^*z_j\right) = k_j^2\left(z_i, z_j\right)$, то $w_1, \dots, w_m$- ортонормированный базис пространства W. Дополним векторы $w_1, \dots, w_m$ до ортонормированного базиса $w_1, \dots, w_n$, и положим $Uw_i = z_i$. Докажем, что $A = SU$. Для $i \leq m$ $SUw_i = Sz_i = k_i z_i$ и

$Aw_i = AA^*z_i/k_i = k_iz_i$. Для $i > m$ $SUw_i = 0$ и $Aw_i, Aw_i = (w_i, A^*Aw_i\ ) = 0$, так как $A^*Aw_i \in \ Im\, A^*A \subset ImA^* = W$.

Замечание. Матрицу A^* можно представить в виде $A^* = SU$, поэтому $A = (A^*)^* = U^*S$, где матрица U^* унитарна.

Теорема1. *Любую матрицу A можно представить в виде $A = UDW$, где U и W- унитарные матрицы, D-диагональная матрица.*

Доказательство. Пусть $A = SV$, S- эрмитова, V-унитарная матрица. Для матрицы S существует такая унитарная матрица U, что $S = UDU^*$, где D- диагональная матрица. Матрица $W = U^*V$ унитарна и $A = A = SV = UDWSV = UDW$.

Теорема 2. *Если $A = S_1U_1 = U_2S_2$- полярные разложения невырожденной матрицы A*, то $U_1 = U_2$.

Доказательство. Пусть $A = UDW$, где U и W-унитарные матрицы, а $D = diag(|d_1|, \dots, |d_n|)$. Рассмотрим матрицу $D_+ = diag(|d_1|, \dots, |d_n|)$. Тогда $DD_+ = D_+D$, а значит, $A = (UD_+U^*)(UD_+^{-1}DW) = (UD_+^{-1}DW)(W^*D_+W)$.

Матрицы UD_+U^* и W^*D_+W положительно определенные, а матрица $D_+^{-1}D$ унитарная. Из единственности полярного разложения невырожденной матрицы следует, что $S_1 = UD_+U^*, S_2 = W^*D_+W$ и $U_1 = UD_+^{-1}DW = U_2$.

§25. Каноническая форма матрицы линейного оператора

Рассмотрим линейный оператор A в n-мерном пространстве $\boldsymbol{L_n}$.

Отображение $\omega\big(P(\lambda)\big) = P(A)$ есть эпиморфизм алгебры П всех многочленов с коэффициентами из поля **K** в алгебру Π_A линейных операторов вида $P(A)$ в пространстве $\boldsymbol{L_n}$. Алгебра Π_A изоморфна фактор-алгебре

Π/I, где I – идеал, состоящий из всех многочленов $P(\lambda)$, для которых $\omega\big(P(\lambda)\big) = P(A) = 0$. Выясним структуру этого идеала.

Совокупность всех линейных операторов, действующих в пространстве $\boldsymbol{L_n}$ представляет собой алгебру над полем **К** размерности n^2. Фиксируя оператор A, рассмотрим последовательность операторов $A^0 = E, A, A^2, \dots, A^m, \dots$.

В этой последовательности первые $n^2 + 1$ членов линейно зависимы. Пусть, например, $\sum_{k=0}^{m} c_k A^k = 0$ $(m \leq n^2)$. Это означает, в установленном выше соответствии $Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} c_k \lambda^k$ соответствует нулевой оператор.

Определение. Всякий многочлен $Q(\lambda)$, для которого оператор $Q(A)$ есть нулевой оператор, будем называть аннулирующим многочленом оператора A.

Следовательно, лемма доказана.

Лемма. Любой оператор A имеет аннулирующий многочлен степени не больше n^2.

Совокупность всех аннулирующих многочленов оператора A есть идеал в алгебре П. И, следовательно, существует многочлен $Q_0(\lambda)$, определенный с точностью до множителя, такой, что все аннулирующие многочлены имеют вид $P(\lambda) \cdot Q_0(\lambda)$., где P – любой многочлен из П.

В частности, $Q_0(\lambda)$ сам является аннулирующим многочленом. Среди всех аннулирующих многочленов он имеет наименьшую степень и поэтому называется минимальным аннулирующим многочленом для оператора A.

Теорема 1. Пусть аннулирующий многочлен $Q(\lambda)$ оператора A разложен в произведение двух взаимно простых множителей $Q(\lambda) = Q_1(\lambda) \cdot Q_2(\lambda)$.

Тогда пространство $\boldsymbol{L_n}$ разлагается в прямую сумму двух подпространств $\boldsymbol{L_n} = T_1 + T_2$,инвариантных относительно оператора A так, что $AT_i \subset T_i$, $i = 1,2$, причем для любых $x_1 \in T_1$ и $x_2 \in T_2$ $Q_1(A)x_2 = 0$, $Q_2(A)x_1 = 0$, так, что $Q_1(A)$ $(Q_2(A))$ есть аннулирующий многочлен для A, действующий в пространстве $T_1(T_2)$.

Доказательство. По лемме существуют такие $P_1(\lambda)$ и $P_2(\lambda)$, что $P_1(\lambda) \cdot Q_1(\lambda) + P_2(\lambda) \cdot Q_2(\lambda) \equiv 1$. Используя морфизм ω, получаем $P_1(A) \cdot Q_1(A) + P_2(A) \cdot Q_2(A) \equiv E$.

Обозначим T_k $(k = 1,2)$ область значений оператора $Q_k(A)$, т. е. совокупность векторов вида $Q_k(A)x$, $x \in \boldsymbol{L_n}$. Тогда из $y = Q_k(A)x \in T_k$, т. к. $Ax \in L_n$, следует $Ay = Q_k(A)Ax \in T_k$, так что подпространство T_k инвариантно относительно A.

Имеем для любого $x_1 \in T_1$ и некоторого $y \in \boldsymbol{L_n}$

$$Q_2(A)x_1 = Q_2(A)Q_1(A)y = Q(A)y = 0,$$

и аналогично для любого $x_2 \in T_2$ и некоторого $z \in \boldsymbol{L_n}$

$$Q_1(A)x_2 = Q_1(A)Q_2(A)z = Q(A)z = 0.$$

Далее, для любого $x \in \boldsymbol{L_n}$, имеет место равенство

$$x = Q_1(A)P_1(A)x + Q_2(A)P_2(A)x = x_1 + x_2,$$

где $x_k = Q_k(A)P_k(A)x \in T_k$ $(k = 1,2)$, которое показывает, что подпространства T_1 и T_2 в сумме дают все $\boldsymbol{L_n}$.

Пусть $x_0 \in T_1 \cap T_2$, тогда $Q_1(A)x_0 = Q_2(A)x_0 = 0$, следовательно, $x_0 = P_1(A)Q_1(A)x_0 + P_2(A)Q_2(A)x_0 = 0$.

Таким образом, $T_1 \cap T_2 = 0$, и сумма $T_1 + T_2 = \boldsymbol{L_n}$ – прямая. Разумеется, не исключена возможность, что одно из подпространств T_1, T_2 состоит только из одного нулевого вектора. ■

Замечание. По построению оператор $Q_1(A)$ аннулирует подпространство T_2, а оператор $Q_2(A)$ аннулирует подпространство T_1. Покажем, что любой вектор x, аннулируемый оператором $Q_1(A)$, лежит в T_2, и всякий вектор x, аннулируемый оператором $Q_2(A)$, лежит в T_1.

Доказательство. Пусть $Q_1(A)x = 0$, имеем $x = x_1 + x_2$, где $x_i \in T_i$ $(i = 1, 2)$. Так как $Q_1(A)x_2 = 0$, то и $Q_1(A)x_1 = Q_1(A)x - Q_1(A)x_2 = 0$. Но и $Q_2(A)x_1 = 0$, поскольку $x_1 \in T_1$. Следовательно, $x_1 = P_1(A)Q_1(A)x_1 + P_2(A)Q_2(A)x_1 = 0$, $x = x_2 \in T_2$. Аналогично из $Q_2(A)x = 0$ следует $x \in T_1$, что и требовалось доказать. ■

Разлагая многочлены $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$ на взаимно простые множители, получаем возможность разбивать пространство $\boldsymbol{L_n}$ на более мелкие инвариантные относительно оператора A подпространства, аннулируемые соответствующими множителями многочленов $Q_1(\lambda)$ и $Q_2(\lambda)$.

Пусть многочлен $P(\lambda)$ допускает в поле $\boldsymbol{L_n}$ разложение вида

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda - \lambda_j)^{r_j}, \tag{6}$$

где λ_j – все различные корни многочлена, а r_j – их кратности. Такое разложение всегда возможно, в частности, в поле C комплексных чисел. Разложение (6) есть разложение на m попарно взаимно простых множителей $(\lambda - \lambda_j)^{r_j}$.

Теорема 2. Если аннулирующий многочлен оператора A имеет вид (6), то пространство $\boldsymbol{L_n}$ разлагается в прямую сумму m подпространств $T_1, \dots, T_m$, инвариантных относительно оператора A, причем подпространство T_k аннулируется оператором $B_k^{r_k}$, где $B_k = A - \lambda_k E$.

Доказательство. Утверждение теоремы получаем последовательным применением теоремы 1 к аннулируемому полиному (6). ■

В каждом ненулевом пространстве T_k можно выбрать базис, в котором матрица оператора B_k (по построению нильпотентного в пространстве T_k) примет канонический вид (2) §26 гл. V. В этом же базисе матрица оператора $A = B_k + \lambda_k E$ примет вид

$$\begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{matrix} & & & \\ & \begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_k \end{matrix} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_k \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Матрица оператора A во всем пространстве $\boldsymbol{L_n} = T_1 + \dots + T_m$ в базисе, который получается объединением всех канонических базисов, построенных в пространствах, приобретает окончательную форму.

$$J(A) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1 \end{matrix} & & & & & & \\ & \begin{matrix} \lambda_1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{matrix} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \lambda_1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \begin{matrix} \lambda_m & 1 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_m & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \dots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{matrix} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Формулируем окончательный результат:

Теорема 3. Для любого оператора A в n-мерном пространстве $\boldsymbol{L_n}$, имеющего аннулирующий многочлен вида (6) (в частности, для любого оператора A в n-мерном комплексном пространстве $\boldsymbol{C_n}$), существует базис, в котором матрица оператора A записывается в форме (8). Матрица (8) называется нормальной формой Жордана оператора A, а соответствующий базис – базисом Жордана.

В случае $\boldsymbol{L_n} = \boldsymbol{C_n}$ комплексные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ можно упорядочить по какому-либо правилу: например, в порядке возрастания модулей, а при равных модулях – в порядке возрастания аргумента θ, меняющегося в промежутке $0 \leq \theta < 2\pi$.

Для оператора A, действующего в пространстве $\boldsymbol{L_n} \neq \boldsymbol{C_n}$ представление (8) возможно не всегда.

§26. Элементарные делители

Матрицу (8) можно задать таблицей

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1; & n_1^1, & \cdots, & n_{r_1}^1 \\ \lambda_2; & n_1^2, & \cdots, & n_{r_2}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_m; & n_1^m, & \cdots, & n_{r_m}^m \end{matrix}\right\} (n_1^k \geq n_2^k \geq \cdots \geq n_{r_k}^k), \qquad (9)$$

в которой для каждого диагонального числа λ_k указаны размеры $n_1^k, n_2^k, \ldots, n_{r_k}^k$ соответствующих «элементарных жордановых клеток» вида

$$\left.\begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda_k} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda_k} & \mathbf{1} & \cdots & \mathbf{0} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right\} \boldsymbol{n_j^k} \text{строк}, \qquad (10)$$

встречающихся в матрице (8). Выясним, как построить таблицу (9) и тем самым восстановить вид матрицы $J(A)$ оператора A по известной его матрице A в каком-либо базисе пространства $\boldsymbol{L_n}$.

Характеристический многочлен оператора A не зависит от выбора базиса. Составим его для жорданова базиса. Так как под главной диагональю стоят нули, получим

$$\det(A-\lambda E)=det(J(A)-\lambda E)=\prod_{k=1}^{m}(\lambda_k-\lambda)^{n_1^{(k)}+\cdots+n_{r_k}^{(k)}}. \quad (11)$$

Очевидно, что числа λ_k являются корнями характеристического многочлена, а суммы $r_k=n_1^{(k)}+\cdots+n_{r_k}^{(k)}$ – их кратности.

Таким образом, вычисляя характеристический многочлен и находя его корни, получим величины λ_k и $r_k=n_1^{(k)}+\cdots+n_{r_k}^{(k)}$ таблицы (9).

Так как $J(A)$ и A – матрицы одного и того же оператора A, взятого в разных базисах, справедливо равенство

$$J(A)=T^{-1}AT,$$

где T – невырожденная матрица, поэтому

$$J(A)-\lambda E=T^{-1}(A-\lambda E)T.$$

Миноры фиксированного, например p-го, порядка матрицы $A-\lambda E$ представляют собой некоторые многочлены от λ степени p. Обозначим через $I_p(\mathrm{A})$ идеал в алгебре П, порожденный всеми этими минорами. Аналогичный смысл имеет идеал $I_p(J(A))$.

Теорема. $I_p(\mathrm{A})$ идеал в алгебре П совпадает с идеалом $I_p(J(A))$.

Доказательство. Действительно, каждый минор p-го порядка матрицы $J(A)-\lambda E$ является суммой произведений миноров p-го порядка матриц $A-\lambda E$, T^{-1} и T. Но элементы матриц T^{-1} и T суть числа. Таким образом, всякий минор p-го порядка матрицы $J(A)-\lambda E$ есть просто линейная комбинация миноров p-го порядка матрицы $A-\lambda E$ и тем самым входит в идеал $J(A)$. По симметрии каждый минор p-го порядка матрицы $A-\lambda E$ входит в идеал $I_p(J(A))$. Тем самым $I_p(\mathrm{A})=J(A)-\lambda E$, что и требовалось доказать. ■

Пусть $\mathrm{D_p}(\lambda)$ – порождающий многочлен этого идеала, который может быть определен как общий наибольший делитель многочленов, порождающих идеал I_p(A). Таким образом, наибольший общий делитель миноров p-го порядка у матрицы $J(A)-\lambda E$ тот же, что и у миноров p-го порядка матрицы $A-\lambda E$, и поэтому может считаться известным. Вычислим непосредственно наибольший общий делитель миноров p-го порядка матрицы $J(A)-\lambda E$. Вместо матрицы $J(A)-\lambda E$ при этом можно рассматривать матрицу вида $P(IA-\lambda E)Q$, где P и Q – обратимые числовые матрицы, не содержащие λ. Операции перестановок строк, столбцов, прибавления к одному столбцу другого с произвольным множителем в матрице $J(A)-\lambda E$ приводят как раз к такого рода матрицам. Утверждаем, что элементарную клетку

$$\begin{pmatrix} \lambda_k-\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k-\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_k-\lambda \end{pmatrix},$$

указанными операциями можно преобразовать к виду

$$\left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_k-\lambda)n_j^{(k)} \end{pmatrix}\right\} n_j^k \text{ строк.} \qquad (12)$$

Для получения требуемого результата следует вначале из второй строки вычесть первую, умноженную на $\lambda_k-\lambda$, из третьей – вторую, умноженную на $\lambda_k-\lambda$, и т. д. Получим матрицу $p=n_j^k$

$$\begin{pmatrix} \lambda_k-\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ -(\lambda_k-\lambda)^2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (-1)^{P-2}(\lambda_k-\lambda)^{p-1} & 0 & \cdots & 1 \\ (-1)^{P-1}(\lambda_k-\lambda)^{p} & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Если теперь из первого столбца вычесть второй, умноженный на $\lambda_k-\lambda$, затем третий, умноженный на $-(\lambda_k-\lambda)^2$,..., $P-1$-й, умноженный на $(-1)^{P-2}(\lambda_k-\lambda)^{p-1}$, получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ (-1)^{P-1}(\lambda_k - \lambda)^p & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

из которой матрица (12) получается перестановкой столбцов.

Теперь подсчитаем общий наибольший делитель миноров p-го порядка у матрицы $\mathrm{J}(\lambda)$ с клетками вида (12) на главной диагонали. Так как у этой матрицы вне главной диагонали стоят нули, то отличными от нуля могут быть лишь миноры с одинаковым набором номеров строк и столбцов. Такой минор равен произведению своих диагональных элементов.

В матрице $\hat{\mathrm{J}}(\lambda)$ среди элементов на главной диагонали имеется некоторое число, положим N, биномов вида $(\lambda_k - \lambda)^{n_j^k}$, а остальные $n - \mathrm{N}$ элементов главной диагонали равны 1. Число N есть полное число жордановых клеток в матрице $J(A)$, т. е. $\mathrm{N} = \mathrm{r}_1 + \cdots + \mathrm{r}_\mathrm{m}$. С другой стороны, среди миноров до порядка $(n - \mathrm{N})$ заведомо имеются равные 1, следовательно, $\mathrm{D}_\mathrm{p}(\lambda) \equiv 1$ при $p \leq n - \mathrm{N}$. Можно заменить матрицу $\hat{\mathrm{J}}(\lambda)$ более простой диагональной матрицей

$$I(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda)^{n_1^1} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & (\lambda_1 - \lambda)^{n_{r_1}^1} & & & \\ & & & (\lambda_2 - \lambda)^{n_1^2} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & (\lambda_m - \lambda)^{n_{r_m}^m} \end{pmatrix},$$

тогда многочлен $\mathrm{D}_\mathrm{p}(\lambda)$, вычисленный для матрицы $\hat{\mathrm{J}}(\lambda)$, будет совпадать с многочленом $\mathrm{D}_{\mathrm{p}-(\mathrm{n}-\mathrm{N})}(\lambda)$, вычисленный для матрицы $I(\lambda)$. Очевидно, наибольший общий делитель миноров p-го порядка матрицы $I(\lambda)$ имеет вид

$$\mathrm{D_p}(\lambda) = \prod_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{m}} (\lambda_j - \lambda)^{m_j(p)}, \tag{14}$$

где $m_j \geq 0$. Величина $m_1(p)$ есть наименьший показатель, с которым $\lambda_1 - \lambda$ входит во все миноры p-го порядка. Если $p \leq n_1^2 + \cdots + n_{r_m}^m$, то имеется минор p-го порядка, не содержащий вообще $\lambda_1 - \lambda$, так что при этих p имеем $\mathrm{m_1(p)} = 0$ для $p = n_1^2 + \cdots + n_{r_m}^m + 1$. Учитывая, что показатели $n_1^1, \dots, n_{r_1}^1$ идут в убывающем порядке, имеем $\mathrm{m_1(p)} = n_{r_1}^1$.

В дальнейшем на каждую единицу увеличения p показатель $\mathrm{m_1(p)}$ будет увеличиваться соответственно на $n_{r_1-1}^1, n_{r_1-2}^1, \dots$, наконец, при $p = n$ получим $\mathrm{m_1(p)} = n_1^1 + \cdots + n_{r_1}^1$.

Аналогично, $\mathrm{m_j(p)} = n_1^j + \cdots + n_{r_j}^j$, $1 \leq j \leq m$.

Определение. Отношение $\mathrm{E_p}(\lambda) = \frac{\mathrm{D_{p+1}}(\lambda)}{\mathrm{D_p}(\lambda)}$ называется элементарным делителем оператора A.

Вместе с многочленами $\mathrm{D_p}(\lambda)$ элементарные делители не зависят от выбора базиса, и их можно вычислять по матрице оператора A в любом базисе.

ГЛАВА V. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ. АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

§27. Аффинное пространство

В линейном пространстве элементами являются векторы как объекты линейных операций. Следует заметить, что во многих задачах в центре внимания оказываются факты, связанные со взаимным расположением фигур (подмножеств) в рассматриваемом пространстве. В связи с этим определением линейного пространства вводится понятие аффинного пространства, элементы которого называются точками. Точки аффинного пространства определенным образом связаны с векторами линейного пространства наподобие того, как это делается в элементарной аналитической геометрии.

Пусть дано некоторое множество $\boldsymbol{U}$, элементы которого будем называть точками и обозначать заглавными латинскими буквами $A, B, \dots, M, \dots$. Пусть дано также некоторое линейное пространство. Пусть с каждой упорядоченной парой точек из $\boldsymbol{U}$ сопоставлен вектор из $\boldsymbol{L}$. Если паре точек A, B соответствует вектор $\boldsymbol{x}$, то запишем: $\boldsymbol{x} = \overline{AB}$, где $\overline{AB}$ – новое обозначение вектора $\boldsymbol{x}$.

Первая из двух точек называется началом вектора $\overline{AB}$, а вторая – его концом.

Определение. Множество $\boldsymbol{U}$, сопоставленное с линейным пространством $\mathbf{L}$, называется аффинным пространством, если соблюдены следующие две аксиомы:

1) Для каждой точки A из $\boldsymbol{U}$ и каждого вектора x из $\mathbf{L}$ существует единственная точка B из $\boldsymbol{U}$, такая, что $\overline{AB} = x$.

2) Если $\overline{AB} = \mathbf{x}$, $\overline{\mathrm{BC}} = \mathbf{y}$, то $\overline{AC} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ (см. рис. 1).

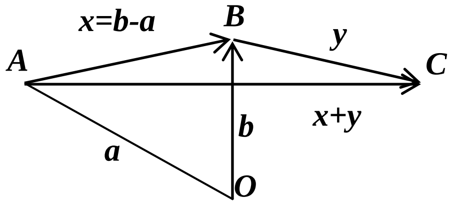

Рисунок 1

Аффинное пространство в зависимости от того, действительным или комплексным, конечномерным или бесконечномерным является соответствующее ему линейное пространство **L**, называется действительным или комплексным, конечномерным или бесконечномерным. Размерностью аффинного пространства $\boldsymbol{U}$ называют число, равное размерности линейного пространства **L**.

Лемма 1. Любое линейное пространство $\boldsymbol{L}$ можно рассматривать как аффинное $\boldsymbol{U}$.

Доказательство. Назовем векторы из пространства $\boldsymbol{L}$ точками и каждой паре векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$, рассматриваемых как точек множества $\boldsymbol{U}$, соответствует вектор $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{L}$. ■

Лемма 2. Любое аффинное пространство $\boldsymbol{U}$ есть линейное $\boldsymbol{L}$.

Доказательство. Зафиксируем точку $O \in \boldsymbol{U}$ и сопоставим с любой точкой $M \in \boldsymbol{U}$ радиус-вектор $\overline{OM}$. Множество радиус-векторов всех точек пространства $\boldsymbol{U}$ и составляет пространство **L**. ■

Выделим два простейших свойства аффинного пространства.

Теорема 1. Каждой паре совпадающих в аффинном пространстве $\boldsymbol{U}$ точек соответствует нулевой вектор из линейного пространства $\boldsymbol{L}$.

Доказательство. Пусть $A \in \boldsymbol{U}$ – произвольная точка, и пусть с парой точек АА сопоставлен вектор $\overline{AA} = \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{L}$.

Пусть $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}$ – произвольный вектор, тогда по первой аксиоме из определения аффинного пространства найдется такая точка $B \in \boldsymbol{U}$, что $\overline{AB} = \boldsymbol{x}$.

Применяя вторую аксиому из определения аффинного пространства, получим $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{x} = \overline{AA} + \overline{AB} = \overline{AB} = \boldsymbol{x}$, следовательно $z = \mathbf{0}$. ■

Теорема 2. Если $\overline{AB} = \boldsymbol{x}$, то $\overline{BA} = -\boldsymbol{x}$.

Доказательство. Пусть $\overline{BA} = \boldsymbol{y}$, тогда $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \overline{AB} + \overline{BA} = \overline{AA} = \mathbf{0}$, следовательно $\boldsymbol{y} = -\boldsymbol{x}$. ■

§28. Аффинные координаты

Введем в n-мерное аффинное пространство $\boldsymbol{U}$ аффинную систему координат. Для этого в $\boldsymbol{U}$ выберем произвольную точку О, которую назовем началом координат, а в соответствующем линейном пространстве $\boldsymbol{L}$ возьмем некоторый базис $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$. Пусть М – произвольная точка из $\boldsymbol{U}$, которая вместе с точкой О определяет вектор $\overline{\mathrm{OM}} \in \mathrm{L}$. Вектор $\overline{\mathrm{OM}}$ называется радиус-вектором точки М. Разлагая радиус-вектор $\overline{\mathrm{OM}}$ по базису $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$ получим

$$\overline{\mathrm{OM}} = \mathrm{x}_1\mathbf{e_1} + \mathrm{x}_2\mathbf{e_2} + \dots + \mathrm{x}_\mathrm{n}\mathbf{e_n} = \textstyle\sum_1^n x_i\boldsymbol{e_i}.$$

Коэффициенты этого разложения $x_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$ называются аффинными координатами точки М (относительно выбранной системы с началом O и базисом $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$). Аффинная система координат есть пара – точка О и базис $\{\boldsymbol{e_i}\}$. Следует заметить, что аффинная система координат задается двумя разнородными объектами – точкой О из аффинного пространства $\boldsymbol{U}$ и базисом $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$ из линейного пространства $\boldsymbol{L}$.

Координаты каждой точки M определены однозначно ввиду единственности разложения вектора $\overline{OM}$ по базису $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Пусть дана другая произвольная точка N с координатами $y_1, \dots, y_n$. Покажем, как выражаются координаты вектора $\overline{MN}$ через аффинные координаты точек M и N. Используя аксиому 2 из определения аффинного пространства и теорему 2 из § 31 гл. VI, получим

$$\overline{MN} = \overline{MO} + \overline{ON} = \overline{ON} - \overline{OM} = (y_1 - x_1)e_1 + \dots + (y_n - x_n)e_n.$$

Следовательно, вектор $\overline{MN}$ имеет координаты $y_1 - x_1, \dots, y_n - x_n$.

Таким образом, чтобы получить координаты вектора $\overrightarrow{MN}$, нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты начала.

Перенесем начало из точки O в точку $O_1(a_1, \dots, a_n)$, сохраняя выбранный базис и считая координаты точки O_1 известными, и найдем новые аффинные координаты $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ произвольной точки M. Старые координаты точки M обозначаем через $x_1, \dots, x_n$.

Получим векторное равенство

$$\overline{OM} = \overline{OO_1} + \overline{O_1M}$$

или, $x_1e_1 + \dots + x_ne_n = a_1e_1 + \dots + a_ne_n + \tilde{x}_1e_1 + \dots + \tilde{x}_ne_n$, что то же самое, $\sum_1^n x_i\boldsymbol{e_i} = \sum_1^n a_i\boldsymbol{e_i} + \sum_1^n \tilde{x}_i\boldsymbol{e_i}$.

Отсюда, вследствие единственности разложения вектора по базису, находим

$$x_i = \tilde{x}_i + a_i, i = 1, \dots, n.$$

Если начало координат не меняется, а меняется базис, то аффинные координаты точек преобразуются так же, как координаты их радиус-векторов, то есть по формулам § 20 главы III.

Предположим теперь, что от данной аффинной системы координат с началом O и базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$ переходим к новой системе с началом O' и базисом $\{e_1', \dots, e_n'\}$. Считаем координаты O' в старой системе известными $(a_1, \dots, a_n)$, а также разложения векторов нового базиса по старому базису:

$$e_i' = \sum P_{ij}\boldsymbol{e_j}.$$

Используя предыдущие результаты и сведения из § 20 гл. III, получим формулы, выражающие старые координаты $(x_1, \dots, x_n)$ произвольной точки M через ее новые координаты $(x_1', \dots, x_n')$,

$$x_i = \sum P_{ij}x_j' + a_i, \quad i = 1, \dots, n. \qquad (1)$$

Вместе с формулами (1) имеют место обратные формулы $x_i' = \sum Q_{ij}(x_j - a_j) = \sum Q_{ij}x_j + a_i'$, где $Q = (P^*)^{-1}$ (см. § 20 гл. III), $a_i' = -\sum Q_{ij}a_j, i = 1, \dots, n$.

§29. Плоскости

Пусть в n-мерном аффинном пространстве $\mathbf{U_n}$ зафиксирована произвольная точка A, и в соответствующем линейном пространстве $\mathbf{L_n}$ зафиксировано произвольное n-мерное подпространство $\mathbf{L_r}$.

Определение 1. Множество всех точек M аффинного пространства, для которых $\overline{AM} \in \mathbf{L_r}$, называется r-мерной плоскостью, проходящей через точку A в направлении подпространства $\mathbf{L_r}$. На рисунке 2 изображена плоскость при $r = 2$.

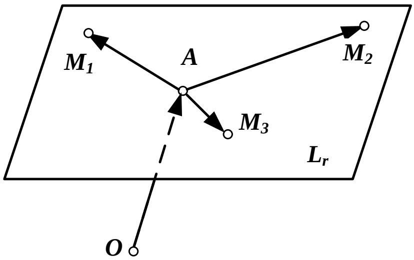

Рисунок 2

Говорят также, что $\mathbf{L_r}$ есть направляющее подпространство этой плоскости. Очевидно, что каждая плоскость однозначно определяет свое направляющее подпространство.

Точку M называют текущей точкой плоскости. На рисунке 2 показаны три положения $\mathrm{M_1, M_2, M_3}$ текущей точки M.

Рассмотрим частные случаи.

1. Если $\mathrm{r} = 0$, то плоскость состоит из одной точки А. Каждую точку аффинного пространства можно рассматривать как нульмерную плоскость.

2. Одномерная плоскость называется прямой линией или прямой.

3. Плоскость размерности $(n-1)$ называется гиперплоскостью.

4. При $\mathrm{r = n}$ плоскость совпадает со всем пространством $\boldsymbol{U_n}$.

Лемма. Все точки плоскости равноправны.

Доказательство. В определении плоскости выделена точка А. Обозначим плоскость через $\boldsymbol{\Pi_r}$ и зафиксируем произвольную точку $\mathrm{B} \in \boldsymbol{\Pi_r}$. Докажем, что точка M принадлежит плоскости $\boldsymbol{\Pi_r}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\mathrm{BM}} \in \mathbf{L_r}$, или что любая точка В может играть роль точки А.

Пусть $\overline{\mathrm{BM}} \in \mathbf{L_r}$ (рис. 3) по определению плоскости $\overline{\mathrm{AB}} \in \mathbf{L_r}$. Отсюда и по определению подпространства $\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{BM}} \in \mathbf{L_r}$, поэтому $\mathrm{M} \in \mathbf{\Pi_r}$. Обратно, если $\mathrm{M} \in \mathbf{\Pi_r}$, $\overline{\mathrm{AM}} \in \mathbf{L_r}$, значит, $\overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{AM}} - \overline{\mathrm{AB}} \in \mathbf{L_r}$.

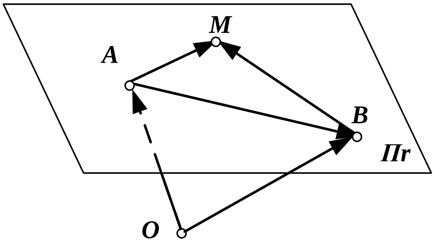

Рисунок 3

Теорема. Всякая r-мерная плоскость в аффинном пространстве сама является r-мерным аффинным пространством.

Доказательство. Пусть дано аффинное пространство $\boldsymbol{U}$, которому соответствует линейное пространство $\mathbf{L}$. Пусть $\boldsymbol{\Pi_r}$ – плоскость, проходящая через точку A в направлении подпространства $\mathbf{L_r}$. Возьмем в плоскости $\boldsymbol{\Pi_r}$ две произвольные точки M, N. По определению аффинного пространства им соответствует вектор $\overline{\mathrm{MN}} \in \boldsymbol{L}$. По определению плоскости векторы $\overline{\mathrm{AM}}$ и $\overline{\mathrm{AN}}$ принадлежат подпространству $\mathbf{L_r}$. Следовательно,

$$\overline{\mathrm{MN}} = \overline{\mathrm{AN}} - \overline{\mathrm{AM}} \in \mathbf{L_r}.$$

Таким образом, каждой упорядоченной паре точек M, N плоскости $\boldsymbol{\Pi_r}$ поставлен в соответствие вектор $\overline{\mathrm{MN}}$ из r-мерного линейного пространства $\mathbf{L_r}$. При этом соблюдение для $\boldsymbol{\Pi_r}$ первой из аксиом § 31 гл. VI вытекает из определения r-мерной плоскости, а вторая из этого же параграфа справедлива для $\boldsymbol{\Pi_r}$ потому, что она соблюдается для всего аффинного пространства $\boldsymbol{U}$. Теорема доказана. ■

Замечание 1. Если плоскость проходит через начало аффинной системы координат в направлении подпространства $\mathbf{L_r}$, то совокупность радиус-векторов ее точек образует линейное пространство, по определению совпадающее с подпространством $\mathbf{L_r}$.

Пусть в аффинном пространстве $\boldsymbol{U}$ даны точки $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{r}$ (в числе $r+1$). Считается, что эти точки находятся в общем положении, если они не принадлежат одной $(r-1)$-мерной плоскости.

Точки $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{r}$ находятся в общем положении тогда и только тогда, когда векторы $\overline{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}, \dots, \overline{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_\mathrm{r}}$ линейно независимы (рис. 4), причем независимо от выбора в качестве начала векторов A_0.

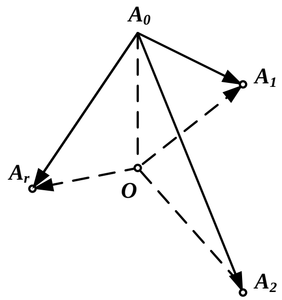

Рисунок 4

Из вышесказанного и из определения плоскости следует, что через систему точек $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_\mathrm{r}$, находящихся в общем положении, проходит r-мерная плоскость и притом только одна.

Предположим, что в пространстве зафиксирована какая-нибудь аффинная система координат с началом O и базисом $\{\mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$. Рассмотрим плоскость $\boldsymbol{\Pi_r}$ проходящую через точку A в направлении подпространства $\mathbf{L_r}$.

Будем считать, что точка A имеет координаты $(\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_\mathrm{n})$, и что $\mathbf{L_r}$ задается как линейная оболочка независимой системы векторов $(\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_\mathrm{r})$. Тогда радиус-вектор $\overline{\mathrm{OM}}$ текущей точки плоскости можно записать в виде

$$\overline{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{OA}} + \overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{OA}} + \tau_1 \mathbf{q_1} + \cdots + \tau_\mathrm{r} \mathbf{q_r}, \qquad (2)$$

где параметры $\tau_1, \ldots, \tau_\mathrm{r}$ независимо друг от друга пробегают всевозможные числовые значения, а вектор $\overline{\mathrm{OA}} = \mathrm{p}_1 \mathbf{e_1} + \cdots + \mathrm{p}_\mathrm{r} \mathbf{e_r}$ (рис. 5).

Разложим векторы $\mathrm{q}_1, \ldots, \mathrm{q}_\mathrm{r}$ по базису $\{\mathrm{e}_1, \ldots, \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$:

$$q_j = q_{j1} \boldsymbol{e_1} + q_{j2} \boldsymbol{e_2} + \cdots + q_{jn} \boldsymbol{e_n}.$$

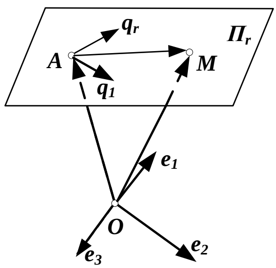

Рисунок 5

Координаты текущей точки M обозначим через $(\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ и запишем векторное равенство (2) в координатах. В результате получим n числовых равенств

$$\begin{cases} \mathrm{x}_1 = q_{11}\tau_1 + q_{21}\tau_2 + \cdots + q_{r1}\tau_r + p_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{x}_\mathrm{n} = q_{1n}\tau_1 + q_{2n}\tau_2 + \cdots + q_{rn}\tau_r + p_n. \end{cases} \qquad (3)$$

Эти равенства называются параметрическими уравнениями плоскости $\boldsymbol{\Pi_r}$ (в данной системе координат). Все уравнения системы (3) являются линейными относительно координат текущей точки и параметров τ_j.

Верно и обратное: геометрическое место точек, определяемых уравнениями (3) при всевозможных значениях τ_j, есть плоскость, проходящая через точку A в направлении подпространства $\mathbf{L_r} = \mathbf{L}(\mathrm{q}_1, \dots, \mathrm{q}_\mathrm{r})$. В самом деле, уравнения (3) равносильны векторному равенству (2), которое означает, что вектор $\overline{\mathrm{AM}} \in \mathbf{L_r}$.

Если для системы (3) написать соответствующую однородную систему, то есть $\mathrm{p}_1, \dots, \mathrm{p}_\mathrm{n}$ заменить нулями, то получим параметрические уравнения направляющего подпространства плоскости $\boldsymbol{\Pi_r}$.

Пример.

Пространство, изучаемое в стереометрии, является трехмерным аффинным пространством. В нем одномерные и двумерные плоскости совпадают соответственно с прямыми линиями и плоскостями, понимаемыми в элементарно-геометрическом смысле.

Замечание 2. В отличие от пространства, изучаемого в элементарной геометрии, в аффинном пространстве не определены метрические понятия: расстояние между точками и длины линий, площади и объемы фигур, углы и перпендикулярность. При исследовании фигур в аффинном пространстве изучаются лишь те геометрические свойства, которые не зависят от метрических понятий.

Определение 2. Точки $A_0, \dots, A_r$ в $\boldsymbol{U}$ находятся в общем положении, если они не принадлежат одной $(r-1)$-мерной плоскости.

§30. Системы уравнений первой степени

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{4}$$

Буквы $a_{11}, \dots, a_{mn}$, $b_1, \dots, b_m$ обозначают известные числа, а числа $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$ – неизвестные.

Числа a_{ij} называются коэффициентами системы (4) и образуют m×n-матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, которая называется основной матрицей системы (4). Будем считать в дальнейшем, что матрица A не нулевая, а это значит, что среди коэффициентов системы (4) есть отличные от нуля.

Числа $b_1, \dots, b_m$ называют свободными членами уравнений.

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} b_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} b_m \end{pmatrix}$ называется расширенной матрицей системы (4).

Всякий упорядоченный набор чисел $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$, подстановка которых вместо неизвестных обращает все уравнения системы в арифметические тождества, называется решением системы. Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение.

Теорема Кронекера-Капелли. Для того чтобы система (4) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг ее расширенной матрицы был равен рангу основной матрицы:

$$Rang\mathrm{B} = Rang\mathrm{A}. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимое условие.

Очевидно, что

$$Rang\mathrm{B} \geq Rang\mathrm{A}. \tag{6}$$

Обозначим через $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$ столбцы матрицы A, через b – столбец свободных членов. Будем все эти столбцы рассматривать как векторы координатного пространства $\mathbf{K_m}$. Пусть система (1) имеет решение $(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$. Это решение обращает уравнения в систему числовых тождеств, которые можно записать в виде одного векторного равенства

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = \mathrm{b}. \tag{7}$$

Из формулы (4) следует, что векторы $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$, b линейно выражаются через векторы $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{n}$. По основной лемме 3 из § 11 главы II и по определению ранга матрицы имеем

$$Rang\mathrm{B} \leq Rang\mathrm{A}. \tag{8}$$

Достаточность.

Пусть соблюдается равенство (2). Матрица A по условию ненулевая, поэтому у нее есть базисный минор порядка $r = Rang\mathrm{A} > 0$.

Допустим для определенности, что базисными являются первые r столбцов $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{r}$. Рассмотрим систему векторов $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{r}$, b. Эта система линейно зависима, так как в противном случае $Rang\mathrm{B} = \mathrm{r} + 1 > \mathrm{r}$. Поэтому вектор b выражается через линейно независимые векторы $\mathrm{a}_1, \dots, \mathrm{a}_\mathrm{r}$ (см. гл. II, § 11):

$$b = \lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_r a_r. \tag{9}$$

Положим

$$x_1 = \lambda_1, \dots, x_r = \lambda_r, x_{r+1} = \cdots = x_n = 0. \tag{10}$$

Записав систему (4) в векторной форме (5) и подставив в нее величины (10), получим тождество (9). Таким образом, система (4) совместна, т. е. имеет по крайней мере одно решение (10). Теорема доказана. ■

Отметим частный случай, когда число уравнений равно числу неизвестных, и квадратная матрица A невырождена, то есть $D = detA = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \neq 0.$

Тогда система (4) имеет единственное решение, которое может быть найдено по правилу Крамера:

$$x_1 = \frac{D_1(b)}{D}, x_2 = \frac{D_2(b)}{D}, \dots, x_n = \frac{D_n(b)}{D}. \tag{11}$$

Здесь через $\mathrm{D_j(b)}$ обозначен определитель, который получается из D заменой его j-го столбца на столбец свободных членов, то есть

$$\mathrm{D_j(b)} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1\ j-1}\ \ b_1\ a_{1\ j+1} \dots\ a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \dots a_{n\ j-1}\ \ b_n\ a_{n\ j+1} \dots\ a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (12)$$

Замечание 1.

Если обозначить через $\mathbf{x}$ вектор $(\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$, записанный в виде столбца, то систему (4) можно представить в виде матричного уравнения

$$A\boldsymbol{x} = b, \qquad (4a)$$

а формулы Крамера (8) – в виде матричного равенства

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}b. \qquad (11a)$$

Переход от формулы ($4a$) к формуле ($11a$) получается умножением обеих частей равенства слева на матрицу A^{-1}.

Замечание 2.

Для практического решения систем с большим числом уравнений и неизвестных формулы (11) неудобны ввиду трудности вычисления определителей D и $\mathrm{D_j(b)}$, поэтому для решения таких систем разработан ряд других методов вычислительной математики.

Вернемся к рассмотрению системы (4) при произвольных m и n и при выполнении условия совместности (5). Найдем все решения системы. Число r, равное рангу матриц A и B, назовем рангом системы (4). Для определенности будем считать, что базисный минор матрицы A занимает в ней верхний левый угол (этого можно добиться изменением нумерации неизвестных и перестановкой уравнений). Обозначим этот минор через D:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Минор D является базисным и для матрицы B, поэтому строки матрицы B с номерами $r+1, \dots, m$ являются линейными комбинациями первых r ее строк (см. гл. II, § 12). Это значит, что уравнения с номерами $r +$

$1, \dots, m$ представляют собой линейные комбинации первых r уравнений, так что система (4) эквивалентна системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \quad (13)$$

Оставим в левых частях лишь те слагаемые, коэффициенты которых образуют базисный минор D, все остальные члены перенесем направо:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \dots - a_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - \dots - a_{rn}x_n. \end{cases} \quad (14)$$

Неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$ будем называть свободными, которым можно придать любые числовые значения. Тогда неизвестные $x_1, \dots, x_r$ однозначно определятся из системы (11) по формулам Крамера:

$$x_j = \frac{\mathrm{D_j}(\mathrm{b} - x_{r+1}a_{r+1} - \dots - x_n a_n)}{D}. \quad (15)$$

Через $\mathrm{a_i}$ обозначены столбцы основной матрицы А системы (13), через b – столбец свободных членов системы (13). Символ $\mathrm{D_j}$ определяется формулой (12), в которой нужно n заменить на r и вместо вектора b подставить вектор $\mathrm{b} - x_{r+1}a_{r+1} - \dots - x_n a_n$.

Пользуясь свойствами определителей, разложим числитель формулы (15), получим

$$x_j = \frac{\mathrm{D_j(b)}}{D} - \frac{\mathrm{D_j}(a_{r+1})}{D} x_{r+1} - \dots - \frac{\mathrm{D_j}(a_n)}{D} x_n, j = 1, \dots, r. \quad (16)$$

Введем обозначения

$$P_j = \frac{\mathrm{D_j(b)}}{D}, q_{kj} = \frac{\mathrm{D_j}(-a_k)}{D}, i = 1, \dots, r, \;\; k = r + 1, \dots, n. \quad (17)$$

Тогда из (16)

$$\begin{cases} x_1 = p_1 + q_{r+1\;\;1}\, x_{r+1} + \dots + q_{n1}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_r = p_r + q_{r+1\;\;r}\, x_{r+1} + \dots + q_{nr}x_n. \end{cases} \quad (18)$$

Добавим сюда еще $(\mathrm{n} - \mathrm{r})$ очевидных равенств:

$$\begin{cases} x_{r+1} = x_{r+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = x_n. \end{cases} \quad (19)$$

Всю совокупность равенств (18) и (19) заменим одним векторным соотношением

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_r \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} x_{r+1} + \cdots + \begin{pmatrix} q_{n1} \\ \vdots \\ q_{nr} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} x_n. \qquad (20)$$

Формула (20) дает общее решение системы (4), поскольку выражает все неизвестные $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ через свободные неизвестные $x_{r+1}, \dots, x_n$, которым можно придавать любые численные значения. При этом все возможные решения системы (4) будут исчерпаны. Действительно, если $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n$ – любое заданное решение системы (4), то $x_{r+1}, \dots, x_n$ имеют определенные численные значения, подставив которые в систему (1) и повторяя предыдущие выкладки, получаем равенство (20).

Обозначим столбец в левой части равенства (20) через x, столбцы в правой части этого равенства обозначим по порядку их расположения через $\mathrm{p}, \mathrm{q}_{\mathrm{r+1}}, \dots, \mathrm{q}_{\mathrm{n}}$. Равенство (20) примет вид

$$x = p + x_{r+1}\mathrm{q}_{\mathrm{r+1}} + \cdots + x_n\mathrm{q}_{\mathrm{n}}. \qquad (21)$$

Равенства (21) и (20) следует понимать как равенства между векторами координатного пространства $\mathbf{K_n}$.

<u>Следствие.</u> Если система (4) совместна и ее ранг r меньше числа неизвестных n, то эта система имеет бесконечное множество решений.

<u>Замечание.</u> Выбор свободных неизвестных, вообще говоря, можно делать по-разному. Однако не всякие $(\mathrm{n} - \mathrm{r})$ неизвестных можно принять за свободные. Нужно, чтобы в системе (4) коэффициенты при остальных r неизвестных составили базисный минор матрицы A.

§31. Однородные системы

Система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases} \qquad (22)$$

называется однородной. В этом случае правые части всех уравнений равны нулю:

$$b_1 = \cdots = b_m = 0. \qquad (23)$$

Однородная система всегда совместна, это вытекает из теоремы Кронекера-Капелли: $Rang\mathrm{B} = Rang\mathrm{A}$. Матрица B получается из A добавлением нулевого столбца. С другой стороны, видно, что система (22) имеет нулевое решение $\mathrm{x}_1 = \cdots = \mathrm{x}_\mathrm{n} = 0$.

Нулевое решение однородной системы называется тривиальным. Остальные решения, т. е. не состоящие только из одних нулей, называются нетривиальными.

Теорема 1. Множество решений однородной системы образует в пространстве $\mathbf{K_n}$ подпространство размерности $(n-r)$, где r – ранг системы.

Доказательство. Вследствие условия (23)

$$p_j = \frac{\mathrm{D_j(b)}}{D} = 0.$$

В рассматриваемом случае $\mathrm{p} = \mathbf{0}$ и формула (21) §34 гл. VI выражает любое решение $\mathbf{x}$ в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{q_{r+1}}, \dots, \mathbf{q_n}$. Обратно, всякая линейная комбинация векторов $\mathbf{q_{r+1}}, \dots, \mathbf{q_n}$ дает решение однородной системы (22). Другими словами, множество X всех решений такой системы есть линейная оболочка векторов $\mathbf{q_{r+1}}, \dots, \mathbf{q_n}$ в $\mathbf{K_n}$. Следовательно, X является линейным подпространством в $\mathbf{K_n}$.

Убедимся, что векторы $\mathbf{q_{r+1}}, \dots, \mathbf{q_n}$ линейно независимы. С этой целью рассмотрим матрицу Г, составленную координатами векторов $\mathbf{q_{r+1}}, \dots, \mathbf{q_n}$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} q_{r+11} & \cdots & q_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ q_{r+1r} & \cdots & q_{nr} \\ 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Нижний минор максимального порядка матрицы Г является ее базисным минором (он равен единице, т. е. отличен от нуля, и не имеет окаймляющих). Следовательно, столбцы Г линейно независимы. Тем самым линейно независимы векторы $\mathbf{q_{r+1}}, \ldots, \mathbf{q_n}$.

Отсюда следует, что векторы $\mathbf{q_{r+1}}, \ldots, \mathbf{q_n}$ составляют базис в X. Но число их равно $(\mathrm{n}-\mathrm{r})$. Значит, размерность X равна $(\mathrm{n}-\mathrm{r})$, и теорема доказана. ■

Пусть известна какая-нибудь линейно независимая система решений в числе $(\mathrm{n}-\mathrm{r})$:

$$c_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix}, \ldots, \quad c_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{n-r1} \\ \vdots \\ c_{n-rn} \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Тогда любое решение x системы (22) представляется в виде линейной комбинации данных решений (24):

$$x = \tau_1 c_1 + \cdots + \tau_{n-r} c_{n-r}. \tag{25}$$

Обратно, любая линейная комбинация вида (25) дает решение.

Оба утверждения сразу следуют из предыдущей теоремы, согласно этой теореме, подпространство **X** решений системы (22) имеет размерность $(\mathrm{n}-\mathrm{r})$. Следовательно, решения $c_1, \ldots, c_{n-r}$ составляют в нем базис.

Определение. Всякая линейно независимая система решений в числе $(\mathrm{n}-\mathrm{r})$ называется фундаментальной для системы уравнений (22).

Таким образом, чтобы решить однородную систему уравнений (22), достаточно найти какую-нибудь фундаментальную систему ее решений $c_1, \ldots, c_{n-r}$. Тогда все решения системы (22) даются формулой (25), в которой каждый из параметров $\tau_1, \ldots, \tau_{n-r}$ независимо от других пробегает всевозможные числовые значения.

Замечание. Одна из фундаментальных систем решений составлена столбцами матрицы Г. Эту систему решений дают формулы (17) предыдущего параграфа.

Пример.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ \quad x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Здесь $n = 4$, $r = 2$. Значит, пространство решений имеет размерность $n - r = 2$. Следовательно, нам достаточно найти какие-нибудь два независимых решения, например:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1;$$
$$x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = -1, x_4 = 0.$$

Общее решение системы выглядит следующим образом (26):

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \tau_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \tau_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Частные случаи.

1) Однородная система n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Относительно системы (27) сформулируем следующую теорему.

Теорема 2. Система вида (27) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю: $D = det\left(a_{ij}\right) = 0$.

Доказательство. Действительно, в этом и только в этом случае $r = Rang\ A < n$, и размерность пространства решений положительна: $n - r > 0$.

Однородная система $(\mathrm{n}-1)$ независимых уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n-1\ 1}x_1+\cdots+a_{n-1\ n}x_n=0. \end{cases} \tag{28}$$

Условие независимости уравнений означает, что (прямоугольная) матрица $A=\left(a_{ij}\right)$ системы (28) имеет ранг $r=n-1$. В этом случае пространство решений одномерно $(n-r=1)$, и для получения общего решения системы (28) достаточно найти одно ее нетривиальное решение.

Для этого составим вспомогательную квадратную матрицу $\widetilde{\mathrm{A}}$ порядка n, которая получается из матрицы A прибавлением сверху новой строки

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix} a_{01} & \dots & a_{0n} \\ a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ a_{n-11} & \dots & a_{n-1n} \end{pmatrix},$$

где $a_{01},\dots,a_{0n}$ – произвольные числа. Через A_{0j} обозначим алгебраические дополнения элементов a_{0j} в матрице $\widetilde{\mathrm{A}}$. Тогда величины

$$\boldsymbol{x_1=A_{01}, x_2=A_{02},\dots,x_n=A_{0n}} \tag{29}$$

образуют решение системы (28). Действительно, подставим величины (29) в уравнение с номером l. Получим сумму произведений элементов одной строки матрицы $\widetilde{\mathrm{A}}$ на алгебраические дополнения элементов другой строки, равную, как известно, нулю:

$$\mathrm{a}_{11}A_{01}+\cdots+a_{in}A_{0n}=\ 0.$$

Таким образом, числа (29) действительно удовлетворяют системе (28).

Обозначим через $\mathrm{M_j}$ минор матрицы A порядка $(n-1)$, который получается вычеркиванием столбца с номером j:

$$\mathrm{M_j} = \begin{pmatrix} \mathrm{a_{11}} & \dots & \mathrm{a_{1j-1}} & \mathrm{a_{1\,j+1}} & \dots & \mathrm{a_{1n}} \\ \mathrm{a_{21}} & \dots & \mathrm{a_{2j-1}} & \mathrm{a_{2\,j+1}} & \dots & \mathrm{a_{2n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{a_{n-11}} & \dots & \mathrm{a_{n\,j-1}} & \mathrm{a_{nj+1}} & \dots & \mathrm{a_{n-1n}} \end{pmatrix}.$$

Тогда $A_{0j} = (-1)^{j+1}\mathrm{M_j}$. Среди миноров $\mathrm{M_j}$ имеется по крайней мере один, не равный нулю (базисный минор матрицы А), поэтому решение (29) нетривиально. ■

Общее решение системы (28) можно записать в виде

$$x_j = (-1)^{j+1}\mathrm{M_j}\tau,$$

где τ – произвольное число. Иначе говоря, решение системы (28) пропорционально минорам максимального порядка матрицы А, взятым с чередующимися знаками. Иногда это записывают так:

$$x_1 : x_2 : x_3 : \dots = M_1 : (-M_2) : M_3 : \dots .$$

Покажем, что верно и обратное утверждение теоремы 2, а именно, справедлива теорема 3.

Теорема 3. Всякое подпространство размерности k в пространстве $\mathbf{L_n}$ с данным базисом является подпространством решений некоторой однородной системы линейных уравнений ранга $(n-k)$.

Доказательство. Пусть в $\mathbf{L_n}$ даны базис $\{\mathrm{e_1}, \dots, \mathrm{e_n}\}$ и подпространство $\mathbf{L_k}$. Возьмем в этом подпространстве k независимых векторов, которые обозначим $\mathrm{e'_{n-k+1}}, \dots, \mathrm{e'_n}$, дополним их до базиса в $\mathbf{L_n}$:

$$\{\mathrm{e'_1}, \dots, \mathrm{e'_{n-k}}, \dots, \mathrm{e'_{n-k+1}}, \dots, \mathrm{e'_n}\}. \qquad (30)$$

Подпространство $\mathbf{L_k}$ является линейной оболочкой векторов $\mathrm{e'_{n-k+1}}, \dots, \mathrm{e'_n}$. Поэтому вектор **x** из $\mathbf{L_n}$ лежит в $\mathbf{L_k}$ тогда и только тогда, когда его координаты в базисе (30), имеющие номера $1, \dots, n - \mathrm{k}$, равны нулю:

$$\mathrm{x'_i} = 0, \ i = 1, \dots, n - \mathrm{k}. \qquad (31)$$

Формулы (31) представляют собой систему уравнений, определяющую $\mathbf{L_k}$ в базисе (30). Перейдем к исходному базису $\{\mathrm{e_1}, \dots, \mathrm{e_n}\}$.

Для этого воспользуемся формулами преобразования координат (см. гл. III, § 20)

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{i}}' = \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} x_j,\ i = 1, \dots, n.$$

Отсюда получим искомую систему уравнений (32), эквивалентную системе (31):

$$\sum_{j=1}^{n} Q_{ij} x_j = 0\,, i = 1, \dots, n-k. \qquad (32)$$

Так как n×n-матрица $Q = \left(Q_{ij}\right)$ невырожденная, то все ее строки линейно независимы. Следовательно, ранг системы (32) равен числу ее уравнений: $\mathrm{r} = \mathrm{n} - \mathrm{k}$. Теорема 3 доказана. ■

Кроме того, в данном базисе данное подпространство может задаваться различными однородными системами уравнений. Покажем, как можно строить такие системы. Пусть $H = (h_{li}) = \begin{pmatrix} h_{11} & \dots & h_{1\,n-k} \\ \dots & \dots & \dots \\ h_{n-k\,1} & \dots & h_{n-k\,n-k} \end{pmatrix}$ – любая невырожденная квадратная матрица порядка $(\mathrm{n} - \mathrm{k})$. Фиксируя l, умножим уравнения (32) соответственно на числа $h_{li}, i = 1, \dots, \mathrm{n} - k$ и сложим их. Затем выпишем найденные соотношения, беря $l = 1, \dots, \mathrm{n} - \mathrm{k}$.

Получим однородную систему

$$\sum_{i=1}^{n-k} h_{li} \sum_{j=1}^{n} Q_{ij} x_j = 0, l = 1, \dots, n-k. \qquad (33)$$

Если ввести числа

$$R_{lj} = \sum_{i=1}^{n-k} h_{li}\, Q_{ij}, l = 1, \dots, n-k; j = 1, \dots, n, \qquad (34)$$

то система (33) запишется более просто:

$$\sum_{j=1}^{n} R_{lj}\, x_j = 0,\ l = 1, \dots, n-k. \qquad (35)$$

Система (35), очевидно, есть следствие системы (32), а система (32) в свою очередь есть следствие системы (35). При каждом фиксированном $j (1 \le j \le n)$ формулу (34) можно рассматривать как систему уравнений с неизвестными Q_{ij} и правыми частями R_{ij}. Решая эту систему по правилу Крамера для каждого j, находим, что

$$Q_{ij} = \sum_{a=1}^{n-k} H_{ia} R_{aj}, \tag{36}$$

где матрица $(H_{ia}) = H^{-1}$ – обратная по отношению к матрице $H = (h_{li})$.

Формула (36) показывает, что коэффициенты системы (32) выражаются через коэффициенты системы (35) с помощью матрицы (H_{ia}) совершенно аналогично тому, как коэффициенты (35) выражались через (32) с помощью матрицы (h_{li}). Следовательно, системы (32) и (35) эквивалентны.

Замечание. Если прямоугольные матрицы систем уравнений (32) и (35) обозначить соответственно через $\tilde{Q}$ и R, то две системы равенств (34) и (36) можно заменить двумя матричными равенствами $R = H\tilde{Q}, \tilde{Q} = H^{-1}R$.

Отсюда следует, что $Rang\mathrm{R} = Rang\tilde{Q}$.

Пример.

Система $\begin{cases} \mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_4 = 0, \\ \mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2 + \mathrm{x}_3 + \mathrm{x}_4 = 0 \end{cases}$ определяет в четырехмерном линейном пространстве некоторое двумерное подпространство $\boldsymbol{L_2}$. Беря $H = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, получим в качестве (35) систему $x_1 = 0, \mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_3 - \mathrm{x}_4 = 0$, которая определяет то же самое подпространство $\boldsymbol{L_2}$, что и данная система. Следовательно, заменяем данные уравнения их полусуммой и полуразностью.

Лемма. Линейное невырожденное преобразование переменных сохраняет ранг системы уравнений (22).

Доказательство. Запишем систему (22) в виде матричного равенства

$$\mathrm{AX} = 0, \tag{22a}$$

где $A = (a_{ij})$ есть m×n-матрица коэффициентов, X – матрица-столбец неизвестных $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n}$, нуль в правой части обозначает нулевую $m \times 1$ -матрицу. Пусть дана замена переменных $X' = QX$ (см. формулы (IIIa) и (III) § 20 гл. III; Q – невырожденная $n \times m$-матрица). Тогда

$$X = P \cdot X', \tag{37}$$

где $P = (P_{kl}) = (Q^{-1})^*$. Подставляя (37) в (22a), получим матричную запись рассматриваемой системы уравнений в новых переменных $(x_1^1, \dots, x_n^1)$: $(AP^*)X' = 0$, или подробнее $\sum_{k=1}^{n}(\sum_{\alpha=1}^{n} a_{i\alpha}P_{k\alpha})x_k' = 0, i = 1, \dots, m$. Матрица P невырождена, так что $Rang\mathrm{AP}^* = Rang\mathrm{A}$. Лемма доказана. ■

Определителем Грама совокупности векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ евклидова пространства (далее обозначается как $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ или просто G) называется определитель матрицы, построенный из скалярных произведений векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ (*матрицы Грама*), т.е.

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & (a_1, a_2) & \dots & (a_1, a_k) \\ (a_2, a_1) & (a_2, a_2) & \dots & (a_2, a_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k, a_1) & (a_k, a_2) & \dots & (a_k, a_k) \end{vmatrix}.$$

Из свойств скалярных произведений следует, что матрица Грама симметричная.

Задача. В евклидовом n-мерном пространстве $\mathbb{E}$ задано подпространство $\mathbb{L}$, как линейная оболочка векторов этого пространства $a_1, a_2, \dots, a_k$, и вектор x.

Нужно найти ортогональную проекцию и ортогональную составляющую вектора x относительно подпространства $\mathbb{L}$.

Решение.

Обозначим ортогональную проекцию вектора x через y, а ортогональную составляющую через z. Полагая, что вектора $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно независимы (т.е. образуют базис подпространства $\mathbb{L}$), представим y, как линейную комбинацию этих векторов:

$$y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k. \tag{1}$$

Тогда $x = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_k a_k + z$.

Умножим скалярно справа это выражение для x последовательно на вектора $a_1, a_2, \dots, a_k$, учитывая, что вектор z ортогонален ко всем этим векторам. Получим:

$$
\begin{aligned}
&(x, a_1) = \beta_1(a_1, a_1) + \beta_2(a_2, a_1) + \dots + \beta_k(a_k, a_1),\\
&(x, a_2) = \beta_1(a_1, a_2) + \beta_2(a_2, a_2) + \dots + \beta_k(a_k, a_2),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (2)\\
&(x, a_k) = \beta_1(a_1, a_k) + \beta_2(a_2, a_k) + \dots + \beta_k(a_k, a_k).
\end{aligned}
$$

То есть, для определения неизвестных $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ получена система k линейных уравнений с k неизвестными с определителем матрицы коэффициентов $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ отличным от нуля (определитель Грама для линейно независимых векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$). Следовательно, в этом случае ортогональная проекция y вектора x определяется однозначно. Значит, и ортогональная составляющая z вектора x также определяется однозначно, как $z = x - y$.

Переноса в выражениях (2) и (1) левые части в конец правых частей с обратным знаком, и приравнивая полученные выражения 0, получим:

$$
\begin{aligned}
&(a_1, a_1)\beta_1 + (a_2, a_1)\beta_2 + \dots + (a_k, a_1)\beta_k + (x, a_1)(-1) = 0,\\
&(a_1, a_2)\beta_1 + (a_2, a_2)\beta_2 + \dots + (a_k, a_2)\beta_k + (x, a_2)(-1) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(3)\\
&(a_1, a_k)\beta_1 + (a_2, a_k)\beta_2 + \dots + (a_k, a_k)\beta_k + (x, a_k)(-1) = 0,\\
&\qquad a_1\beta_1 + \qquad a_2\beta_2 + \dots + \qquad a_k\beta_k + \qquad y(-1) = 0.
\end{aligned}
$$

Последнее выражение в (3) состоит из n равенств для каждой компоненты отдельно.

На систему равенств (3) (для каждой компоненты последнего векторного равенства отдельно) можно смотреть как на совокупность n систем $k + 1$ линейных однородных уравнений с $k + 1$ неизвестными, имеющих ненулевое решение $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k, -1$. Каждый определитель такой системы однородных уравнений из совокупности равен нулю. Далее, n определителей таких однотипных систем могут быть выписаны формально в виде одного определителя:

$$\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_k,a_1) & (x,a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_1,a_k) & \dots & (a_k,a_k) & (x,a_k) \\ a_1 & \dots & a_k & y \end{vmatrix} = 0$$

Или после транспонирования (с учетом свойства симметричности скалярного произведения)

$$\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & a_k \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & y \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

Выделим из определителя (4) вектор y, для чего представим его в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & a_k \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & y \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & a_k \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & 0 \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & y \end{vmatrix}.$$

Откуда, с помощью разложения второго определителя по элементам последнего столбца, получим:

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & a_k \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & 0 \end{vmatrix}}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)} \qquad (5)$$

Поскольку вектор x можем представить в виде:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & 0 \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & x \end{vmatrix}}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)},$$

то вектор z, равный $x - y$ определится следующим образом:

$$z = x - y = \frac{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & a_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & a_k \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & x \end{vmatrix}}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)}. \qquad (6)$$

Ответ. Выражения (5) и (6) дают представления векторов y и z соответственно в явном виде, после разложения определителей, входящих в эти выражения, по элементам последних столбцов.

Для некоторых геометрических задач важно уметь вычислять длину ортогональной составляющей вектора x, т.е. длину вектора z. Проведем необходимые рассуждения, позволяющие найти формулу для определения квадрата длины вектора z.

Поскольку $(z,y) = 0$, то $(z,z) = (z,x-y) = (z,x)$.

Обозначим длину вектора z через h. Тогда

$$h^2 = (z,z) = (z,x) = \frac{\begin{vmatrix} (a_1,a_1) & \dots & (a_1,a_k) & (a_1,x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_k,a_1) & \dots & (a_k,a_k) & (a_k,x) \\ (x,a_1) & \dots & (x,a_k) & (x,x) \end{vmatrix}}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)} = \frac{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k,x)}{\mathrm{G}(a_1,a_2,\dots,a_k)} \quad (7)$$

Поясним, каким образом выражение (6) умножалось скалярно на x. Для этого определитель в числителе дроби выражения (6) раскладывался по элементам последнего столбца. В результате числитель превратился в линейную комбинацию векторов $a_1, a_2, \dots, a_k, x$, с коэффициентами, являющимися алгебраическими дополнениями элементов последнего столбца указанного определителя. Затем эту линейную комбинацию векторов $a_1, a_2, \dots, a_k, x$ умножили скалярно на вектор x и снова свернули в определитель. Таким образом и получили выражение (7).

Укажем некоторые свойства определителя Грама $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$

1. Определитель $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ для линейно независимых векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ отличен от нуля и равен нулю тогда и только тогда, когда векторы $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно зависимы.

2. Если в (7) положить $x = a_{k+1}$, то из (7) следует, что $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}) = \mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)h^2$. Из последнего выражения следует, что $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k) \geq 0$, причем равенство нулю будет тогда и только тогда, когда вектора $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно зависимы.

3. *Параллелепипедом*, натянутым на k линейно независимых векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$, в n-мерном евклидовом пространстве, называется множество векторов $t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_k a_k$ при t_i, независимо изменяющимися на отрезке [0, 1]. Назовем $(k-1)$-мерный параллелепипед, натянутый на векторы $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, *основанием параллелепипеда*, а расстояние от вектора a_k (длину ортогональной составляющей вектора a_k) до подпространства, натянутого на $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ – *высотой параллелепипеда*.

«Объемом» одномерного параллелепипеда $\{ta_1\}$ называется длина вектора a_1. Для больших размерностей объем определяется индуктивно, как объем основания, умноженный на высоту.

Теорема. *Квадрат объема параллелепипеда, натянутого на k линейно независимых векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$, равен определителю $G(a_1, a_2, \dots, a_k)$.*

Доказательство индукцией по k с учетом свойства **2**:

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k, a_k) = \mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})h^2$$

Проведем **доказательство** теоремы ещё раз, не прибегая к выражению (7).

Для $k = 1$ утверждение теоремы верно. Пусть z ортогональная составляющая вектора a_k относительно подпространства натянутого на вектора $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$, т.е. z ортогональна векторам $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$.

Пусть $y = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_{k-1} a_{k-1}$ – ортогональная проекция вектора a_k на подпространство натянутое на вектора $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$. Ясно, что $a_k = y + z$, откуда $z = a_k - y$.

Будем считать, что утверждение теоремы верно для $k-1$ $(k>1)$ векторов, т.е. для определителя $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$.

Рассмотрим определитель

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k) = \begin{vmatrix} (a_1, a_1) & \dots & (a_1, a_{k-1}) & (a_1, a_k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{k-1}, a_1) & \dots & (a_{k-1}, a_{k-1}) & (a_{k-1}, a_k) \\ (a_k, a_1) & \dots & (a_k, a_{k-1}) & (a_k, a_k) \end{vmatrix}.$$

Прибавим к последнему столбцу определителя $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ предшествующие, умноженные на $-\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_{k-1}$ соответственно. В силу линейности скалярного произведения по второму аргументу, получим в последнем столбце числа (a_1, z), …,(a_{k-1}, z), (a_k, z), из которых первые $k-1$ равны нулю. Последний элемент последнего столбца равен $(a_k, z) = (y+z, z) = (z, z) = |z|^2$ Разложим теперь преобразованный определитель $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ по последнему столбцу, получим

$$\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k) = |z|^2 \mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}).$$

Длина вектора z равна высоте параллелепипеда согласно определению расстояния от вектора до подпространства. Таким образом, $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_k)$ равен произведению квадрата высоты $|z|^2$, на квадрат объема основания $\mathrm{G}(a_1, a_2, \dots, a_{k-1})$ (по индуктивному предположению), т.е. квадрату объема k-мерного параллелепипеда. Что и требовалось доказать.

В n-мерном евклидовом пространстве объем n-мерного параллелепипеда, натянутого на n линейно независимых векторов можно выразить через координаты этих векторов в каком-нибудь ортонормальном базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – линейно независимая совокупность векторов в n-мерном евклидовом пространстве, и пусть матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

имеет своими столбцами координаты векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ относительно некоторого ортонормального базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ тогда элемент g_{ij} матрицы $G = A^T A$ равен

$$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \dots + a_{in}a_{jn} = (a_i, a_j),$$

т.е. матрица $G = A^T A$ есть матрица Грама для совокупности векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$. Имеем $\det G = \det A^T A = (\det A)^2$

Таким образом, квадрат объема параллелепипеда равен квадрату определителя матрицы A и, следовательно, объем параллелепипеда равен абсолютной величине $\det A$.

Вычислить площадь S параллелограмма со сторонами-векторами $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$, образующими угол, и заданными своими координатами в декартовой системе: *а*) (1,0) и (0,2), *б*) (1,1) и (3,1).

Решение. В обоих случаях вычисляем определители Грама. В случае *а*) $G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \\ (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$. В случае *б*) $G(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2) \\ (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 4$.

В обоих случаях искомые площади - это корни квадратные из соответствующих определителей Грама.

Ответ. *а*) $S = 2$, *б*) $S = 2$.

Вычислить объем V параллелепипеда построенного на векторах $\boldsymbol{x}_1 = (1,2,1)$, $\boldsymbol{x}_2 = (2,1,2)$, $\boldsymbol{x}_3 = (3,2,2)$, как на сторонах. Векторы заданы своими координатами в декартовой системе.

Решение. Вычисляем определитель Грама

$$G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,)=\begin{vmatrix}(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2) & (\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_3)\\ \boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_1 & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_2) & (\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3)\\ (\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_1) & (\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_2) & (\boldsymbol{x}_3,\boldsymbol{x}_3)\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}6 & 6 & 9\\ 6 & 9 & 12\\ 9 & 12 & 17\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 6 & 9\\ 0 & 3 & 3\\ 3 & 6 & 8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 6 & 3\\ 0 & 3 & 0\\ 3 & 6 & 2\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}6 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=$$

$$9\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=9.$$

(При вычислении определителя вычли первую строчку из второй и третьей, затем в полученном определителе второй столбец из третьего, далее очевидно).

Искомый объем V будет равен корню квадратному из вычисленного определителя $G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}_3\,)$, т.е. $V=3$.

Замечание. Векторы в примерах рассматривались в ортонормированных системах координат евклидовых пространств (декартовы системы координат в обычном двухмерном и трехмерном пространствах). Если определитель Грама от k векторов рассматривается в k-мерном евклидовом пространстве с ортонормированным базисом (скалярное произведение векторов в этих базисах равно сумме произведений соответствующих координат их координатных столбцов), то $G(\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_k)=|\Delta^T\cdot\Delta|=|\Delta|^2$, где $\Delta=(X_1,X_2,\dots,X_k)$ матрица, столбцами которой являются координатные столбцы векторов $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_k$. В этом случае объем V k-мерного гиперпараллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_k$, будет равен абсолютной величине определителя матрицы Δ, т.е. $V=\|\Delta\|$.

Используя это замечание, можно переписать ответы примеров выше: *а*) $S=\left\|\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{matrix}\right\|=2$, *б*) $S=\left\|\begin{matrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{matrix}\right\|=2$,

$$V=\left\|\begin{matrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{matrix}\right\|=3.$$

§32. Неоднородные системы

Пусть дана неоднородная система

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad (38)$$

где $i = 1, \dots, m,$ и среди чисел b_i есть отличные от нуля. Допустим, что система совместна, то есть $Rang\,\mathrm{A} = Rang\mathrm{B} = r$. Пусть $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ – некоторое решение системы (38). Подставив данное решение в систему (38), получим тождества

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 = b_i. \qquad (39)$$

Вычтем тождества (39) из уравнений (38). В результате получим систему (40), эквивалентную системе (38):

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0. \qquad (40)$$

Положим $x_j - x_j^0 = u_j$, получим однородную систему

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}u_j = 0. \qquad (41)$$

Пусть для системы уравнений (41) известна фундаментальная система решений

$$c_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ \vdots \\ c_{1n} \end{pmatrix}, \dots, c_{n-r} = \begin{pmatrix} c_{n-r\,1} \\ \vdots \\ c_{n-r\,n} \end{pmatrix}. \qquad (42)$$

В таком случае, согласно § 34 гл. VI, любое решение системы (41) выражается в виде линейной комбинации векторов (42), то есть

$$u_j = \tau_1 c_{1\,j} + \dots + \tau_{n-r} c_{n-r\,j}, \qquad (43)$$

где $\tau_1, \dots, \tau_{n-r}$ – произвольные числа. Так как $u_j = x_j - x_j^0$, то из (43) находим

$$x_j = x_j^0 + (\tau_1 c_{1j} + \dots + \tau_{n-r} c_{n-rj}), j = 1, \dots, n. \quad (44)$$

Назовем $x_1^0, \dots, x_n^0$ частным решением системы (38). Сумма, стоящая в скобках в формуле (44), представляет собой общее решение системы (41).

Система (41), полученная из системы (38) заменой правых частей нулями, называется однородной системой, соответствующей системе (38).

Теорема 1. Общее решение неоднородной системы (38) представляется в виде суммы произвольного частного решения этой системы и общего решения соответствующей ей однородной системы.

Геометрическое истолкование множества решений неоднородной системы линейных уравнений. Рассмотрим n-мерное аффинное пространство $\boldsymbol{U_n}$. Зафиксируем в нем какую-нибудь аффинную систему координат. Тогда каждому решению $x_1, \dots, x_n$ системы (1) можно поставить в соответствие точку пространства $\boldsymbol{U_n}$ с координатами $x_1, \dots, x_n$. Имеет место следующая терема.

Теорема 2. Все решения системы (1) образуют в $\boldsymbol{U_n}$ плоскость размерности $(n-r)$.

Доказательство. Все решения системы (38) даются формулой (44). Ввиду независимости векторов (42) эта формула представляет собой параметрические уравнения некоторой плоскости размерности $(n-r)$ (см. § 33 гл.VI). Теорема 2 доказана. ■

Теорема 3. В аффинном пространстве и в любых аффинных координатах всякая плоскость $\mathbf{\Pi_m}$ может быть задана системой линейных уравнений вида (1) и ранга $r = n - m$.

Доказательство. Пусть плоскость $\mathbf{\Pi_m}$ проходит через точку A, имеющую координаты $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, в направлении подпространства $\mathrm{L_m}$. Перенесем начало аффинной системы координат в точку A, сохраняя прежний базис. Координаты текущей точки M в исходной системе обозначим через $(x_1, \dots, x_n)$, в новой системе – через $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$, которые совпадают с координатами вектора $\overline{\mathrm{AM}} \in \mathrm{L_m}$. По теореме 3 из § 35 гл. VI подпространство $\mathrm{L_m}$ задается некоторой однородной системой линейных уравнений ранга $r = n - m$: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widetilde{x}_j = 0, = 1, \dots, r$. Учитывая, что $\widetilde{x}_j = x_j - x_j^0$,получаем $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^0) = 0$.

Положив $\mathrm{b_i} = \sum a_{ij}x_j^0$, найдем систему уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j = \mathrm{b_i}, \mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{r}, \qquad (45)$$

которая имеет тот же ранг $r = n - m$ и определяет $\mathbf{\Pi_m}$ в исходных координатах. Теорема 3 доказана. ■

Следствие. Плоскость задается однородной системой линейных уравнений тогда и только тогда, когда она проходит через начало координат.

Частный случай.

Гиперплоскость задается одним линейным уравнением $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$.

Каждое из уравнений (45) можно рассматривать как уравнение некоторой гиперплоскости. Поэтому каждую плоскость размерности m можно рассматривать как пересечение некоторых гиперплоскостей в количестве $(\mathrm{m} - \mathrm{n})$.

Если система линейных уравнений несовместна, то геометрически это означает, что нет ни одной точки, принадлежащей сразу всем гиперплоскостям, которые задаются уравнениями системы.

Очевидно, что при переходе к новым аффинным координатам вид уравнений (45) меняется. Кроме того, данная плоскость $\mathbf{\Pi_m}$ в данной системе аффинных координат может задаваться различными системами уравнений, поскольку для системы (45) имеется бесконечное множество других эквивалентных ей систем. Так, например, можно взять любую невырожденную квадратную матрицу $H = (h_{li})$, и написать следствия системы (45):

$$\sum_{\alpha=1}^{r} h_{i\alpha}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{\alpha j}x_j - b_\alpha\right) = 0. \qquad (46)$$

Если ввести обозначения

$$a'_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{r} h_{i\alpha} a_{\alpha j}, b'_i = \sum_{\alpha=1}^{r} h_{i\alpha} b_\alpha,$$

то уравнения (46) запишутся более просто:

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} x_j = b'_i, i = 1, \dots, r. \tag{47}$$

Система уравнений (47) не только следует из системы (45), но является эквивалентной ей.

Возможность перехода от системы (45) к разным системам вида (47) геометрически означает, что $\mathbf{П_m}$ определятся как пересечение различных наборов независимых гиперплоскостей в числе $(\mathrm{n} - \mathrm{m})$. Независимость гиперплоскостей следует понимать в том смысле, что ранг совместной системы (47) уравнений этих гиперплоскостей имеет максимально возможное значение, т. е. равен числу уравнений $(\mathrm{r} = \mathrm{n} - \mathrm{m})$.

§33. Взаимное расположение плоскостей

Пересекающиеся плоскости. Пусть две плоскости $\mathbf{П_k}$ и $\mathbf{П_l}$ в аффинном пространстве $\mathbf{U_n}$ имеют общую точку A. Примем эту точку за начало аффинной системы координат. Когда текущая точка M пробегает плоскость $\mathbf{П_k}$ (или $\mathbf{П_l}$*),* вектор $\overline{\mathrm{AM}}$ пробегает подпространство $\mathbf{L_k}$ (соответственно $\mathbf{L_l}$*).* Вопрос о взаимном расположении двух пересекающихся плоскостей естественно связан с рассмотрением подпространств $\mathbf{L_k}$ и $\mathbf{L_l}$ в векторном пространстве $\mathbf{L_n}$.

Используя свойства подпространств (§§ 15, 16 гл. II), нетрудно установить следующие факты:

1) Если плоскости $\mathbf{П_k}$ и $\mathbf{П_l}$ пересекаются, то их пересечением является некоторая плоскость $\mathbf{П_m}$ (на рисунке 6 взято $\mathrm{k} = \mathrm{l} = 2, \mathrm{m} = 1$).

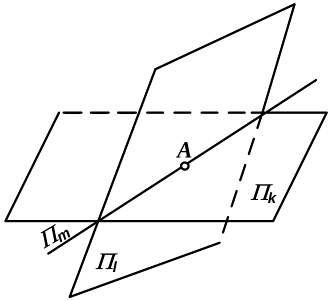

Рисунок 6

<u>Замечание 1.</u> Не исключена возможность, что $\mathbf{\Pi_m}$ состоит из одной точки ($m = 0$). Это видно на примере двух пересекающихся прямых или прямой и плоскости (рис. 7). В общем случае по одной точке могут пересекаться две плоскости, сумма размерностей которых не превышает размерности пространства, например, двумерные плоскости в четырехмерном пространстве.

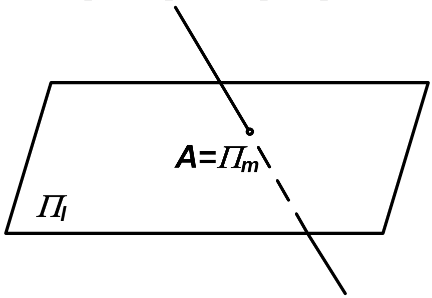

Рисунок 7

<u>Замечание 2.</u> Имеет место и крайний случай, когда одна из двух плоскостей целиком принадлежит другой. Например, $\mathbf{\Pi_k} \in \mathbf{\Pi_l}$, $k < l$, тогда $\mathbf{\Pi_m} = \mathbf{\Pi_k}$ (на рисунке 8 $k = m = 1, l = 2$).

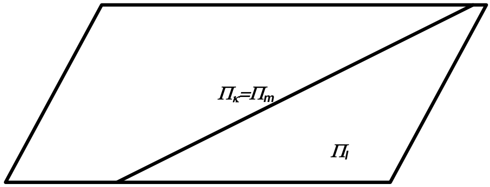

Рисунок 8

Если плоскости $\mathbf{П_k}$ и $\mathbf{П_l}$ пересекаются по плоскости $\mathbf{П_m}$, то существует единственная плоскость $\mathbf{П_k}$ размерности $\mathrm{r = k + l - m}$, содержащая $\mathbf{П_k}$ и $\mathbf{П_l}$, причем ни в какой плоскости меньшей размерности $\mathbf{П_k}$ и $\mathbf{П_l}$ не могут одновременно поместиться. Направляющее подпространство $\mathbf{L_r}$ плоскости $\mathbf{П_r}$ является суммой направляющих подпространств $\mathbf{L_r}$ и $\mathbf{L_l}$. Эта сумма является прямой суммой тогда и только тогда, когда $\mathbf{П_k}$ и $\mathbf{П_l}$ пересекаются по одной точке ($\mathrm{m} = 0$, см. рис. 9).

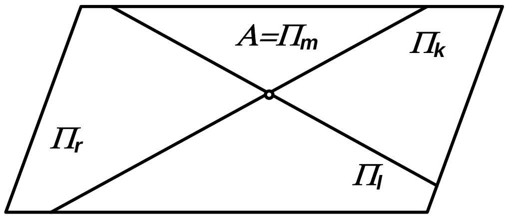

Рисунок 9

Если пересекающиеся плоскости $\mathbf{П_k}$ и $\mathbf{П_l}$, содержатся в какой-нибудь плоскости $\mathbf{П_r}$, то размерность их пересечения $\mathrm{m \geq k + l - r}$. В частности,

$$\mathrm{m \geq k + l - r} \tag{48}$$

для любых двух пересекающихся плоскостей из $\boldsymbol{U_n}$.

Если плоскости $\mathbf{П_k}$ и $\mathbf{П_l}$, проходят через точку А в направлении подпространств $\mathbf{L_k}$ и $\mathbf{L_l}$ соответственно, и если $\mathbf{L_k}$ содержится в $\mathbf{L_l}$, то плоскость $\mathbf{П_k}$ содержится в плоскости $\mathbf{П_l}$. При этом, если $\mathrm{k = l}$, то $\mathbf{П_k}$ совпадает с $\mathbf{П_l}$ (также и $\mathbf{L_k}$ совпадает с $\mathbf{L_l}$).

Пусть теперь плоскость $\mathbf{П_k}$ определяется точкой А и подпространством $\mathbf{L_k}$, а плоскость $\mathbf{\Pi_l}$ – точкой B и подпространством $\mathbf{\Pi_l}$. Условимся, что $l \geq k$.

Определение. Плоскость $\mathbf{\Pi_k}$ параллельна плоскости $\mathbf{\Pi_l}$, если $\mathbf{L_k} \subset \mathbf{L_l}$.

Будем говорить, что в этом случае плоскость $\mathbf{\Pi_l}$ параллельна плоскости $\mathbf{\Pi_k}$.

<u>Замечание 3.</u> Согласно определению, включение $\mathbf{\Pi_k} \subset \mathbf{\Pi_l}$ является частным случаем параллельности.

<u>Замечание 4.</u> Если $\mathbf{\Pi_k}$ параллельна $\mathbf{\Pi_l}$, причем $k = l$, то $\mathbf{L_k}$ совпадает с $\mathbf{L_l}$.

<u>Замечание 5.</u> Можно убедиться, что при $n = 3$ частные случаи $k = l = 1$ (рис. 10), $k = l = 2$ (рис. 11) и $k = 1$, $l = 2$ (рис. 12) согласуются с понятием параллельности прямых и плоскостей, известным из элементарной геометрии.

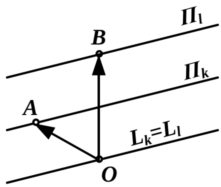

Рисунок 10

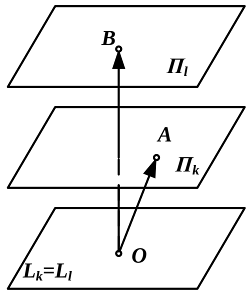

Рисунок 11

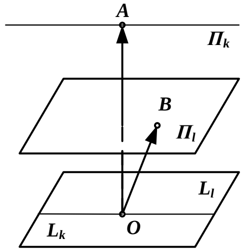

Рисунок 12

Пусть в произвольной аффинной системе координат две плоскости $\boldsymbol{П}$ и $\boldsymbol{П}'$ одинаковой размерности заданы системами линейных уравнений. На основании определения параллельности, можно установить следующее утверждение.

Лемма. Чтобы $\boldsymbol{П_k}$ и $\boldsymbol{П_k'}$ были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие однородные системы уравнений были эквивалентны.

В частности, гиперплоскости параллельны тогда и только тогда, когда в одних и тех же координатах они задаются уравнениями $\sum a_i x_i = b$, $\sum a_i' x_i = b'$ с пропорциональными коэффициентами при переменных:

$$\frac{a_i}{a_i'} = k, i = 1, \dots, n\,.$$

Для совпадения гиперплоскостей, заданных уравнениями $\sum a_i x_i = b$, $\sum a_i' x_i = b'$, необходимо и достаточно, чтобы были пропорциональны все коэффициенты их уравнений:

$$\frac{a_1}{a_1'} = \dots = \frac{a_n}{a_n'} = \frac{b}{b'} = k.$$

Теорема. Пусть в аффинном пространстве $\boldsymbol{U_n}$ даны плоскость $\boldsymbol{П_k}$ и точка B. Тогда существует единственная плоскость $\boldsymbol{П_k'}$ размерности k, проходящая через точку B параллельно $\boldsymbol{\Pi_k}$. Если $B \in \boldsymbol{\Pi_k}$, то $\boldsymbol{\Pi_k'}$ совпадает с $\boldsymbol{\Pi_k}$, в противном случае, плоскости $\boldsymbol{\Pi_k}$ и $\boldsymbol{\Pi_k'}$ не пересекаются.

Доказательство основывается на предыдущем изложении.

Определение. Если две плоскости не пересекаются и не параллельны, то они называются скрещивающимися.

Хорошо известно, что в трехмерном пространстве две прямые линии (одномерные плоскости) могут скрещиваться, тогда как прямая линия и двумерная плоскость в таком пространстве скрещиваться не могут. С повышением размерности пространства оно становится более просторным, в результате чего появляется возможность строить в нем скрещивающиеся плоскости разных размерностей, а не только одномерные.

Свойства скрещивающих прямых.

1. Пусть в аффинном пространстве $\mathbf{U_n}$ дана плоскость $\mathbf{\Pi_l}$ $(\mathrm{l} < n)$. Возьмем произвольную плоскость $\mathbf{\Pi_k}$ так, чтобы $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$ не были параллельны и пересекались, обозначим через $\mathbf{\Pi_m}$ плоскость их пересечения. Тогда $\mathbf{\Pi_r}$ – плоскость наименьшей размерности, содержащая $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$, где $\mathrm{r} = \mathrm{k} + \mathrm{l} - \mathrm{m}$.

2 (общий прием построения скрещивающихся плоскостей). Если $\mathrm{k} + \mathrm{l} - \mathrm{m} < \mathrm{n}$, то всякая k-мерная плоскость $\mathbf{\Pi_k'}$, которая параллельна $\mathbf{\Pi_k}$ и не лежит в $\mathbf{\Pi_r}$, скрещивается с $\mathbf{\Pi_l}$.

3. Если целые числа k, l, m, n удовлетворяют неравенствам $0 \le m < k$, $0 \le m < l$, $k + l - m < n$, то в $\boldsymbol{U_n}$ найдутся скрещивающиеся плоскости $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$, с направляющими подпространствами $\mathbf{L_k}$ и $\mathbf{L_l}$, пересечение которых $\mathbf{L_m} = \mathbf{L_k} \cap \mathbf{L_l}$ имеет размерность m.

4. Существует единственная плоскость $\mathbf{\Pi_{r+1}}$ размерности $\mathrm{r} + 1 = (\mathrm{k} + \mathrm{l} - \mathrm{m}) + 1$, содержащая плоскости $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$.

5. Если скрещивающиеся плоскости $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$ лежат в плоскости $\mathbf{\Pi_s}$, то $s \geq (\mathrm{k}+\mathrm{l}-m)+1$, m – размерность пересечения $\mathbf{L_k} \cap \mathbf{L_l}$.

6. Если в $\boldsymbol{U_n}$ имеются скрещивающиеся плоскости $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$ положительных размерностей, то $\mathrm{k} \leq \mathrm{n}-2$, $\mathrm{l} \leq \mathrm{n}-2$, так как для скрещивающихся плоскостей $\mathrm{k}-\mathrm{m} \geq 1$, $\mathrm{l}-\mathrm{m} \geq 1$.

7. Гиперплоскость не может скрещиваться с какой-либо плоскостью положительной размерности.

8 (достаточное условие пересечения двух плоскостей). Если в $\boldsymbol{U_n}$ даны плоскости $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$ такие, что $\mathrm{k}+\mathrm{l}-\mathrm{m} \geq \mathrm{n}$, где m – размерность пересечения $\mathbf{L_m}$ направляющих подпространств $\mathbf{L_k}$ и $\mathbf{L_l}$, то $\mathbf{\Pi_k}$ и $\mathbf{\Pi_l}$, пересекаются.

9 (алгебраическая интерпретация свойства о пересечении плоскостей). Пусть даны две неоднородные порознь совместные системы линейных уравнений рангов r_1 и r_2. Будем рассматривать совместно все входящие в них уравнения, составим соответствующую ей однородную систему и обозначим ранг последней через r_0. Если $r_0 \geq r_1+r_2$, то «объединенная» неоднородная система уравнений совместна.

§34. Системы линейных неравенств и выпуклые многогранники

Рассмотрим действительное n-мерное аффинное пространство $\boldsymbol{U_n}$ с заданной аффинной системой координат.

Пусть через некоторую точку $X_0 \in \boldsymbol{U_n}$, имеющую координаты $(x_1^0, \dots, x_n^0)$, проведена прямая в направлении вектора l, координаты которого обозначим $l=(\mathrm{l}_1, \dots, l_n)$. Эту прямую можно задать параметрическими уравнениями

$$\mathrm{X_i} = x_i^0 + \tau l_i,\ i = 1, \dots, n,\ -\infty < \tau < +\infty. \qquad (49)$$

Пусть на прямой (1) выбраны две любые точки A и B с соответствующими им τ_1 и τ_2 значениями параметра τ. Предположим, что $\tau_1 < \tau_2$.

Определение 1. Множество точек прямой, удовлетворяющих неравенствам $\tau_1 \leq \tau \leq \tau_2$, называется отрезком AB.

Если точка A имеет координаты $(\mathrm{a}_1, \dots, a_n)$, а точка B имеет координаты $(\mathrm{b}_1, \dots, b_n)$, то в качестве направляющего вектора прямой можно взять вектор $\mathrm{l} = \overline{\mathrm{AB}}$. Тогда $l_i = b_i - a_i$, и для текущей точки прямой имеем $\mathrm{x_i} = a_i + (b_i - a_i)\tau = (1-\tau)a_i + \tau b_i$, причем $\tau = 0$ в точке A, $\tau = 1$ в точке B, тогда отрезок AB задается неравенствами $0 \leq \tau \leq 1$. Если положим $1 - \tau = \alpha$, $\tau = \beta$, тогда и только тогда для точек отрезка AB имеем

$$x_i = \alpha a_i + \beta b_i, i = 1, \dots, n, \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \alpha + \beta = 1. \quad (50)$$

Точка, в которой $\alpha + \beta = \frac{1}{2}$, называется серединой отрезка AB.

Определение 2. Множество точек действительного аффинного пространства $\boldsymbol{U_n}$ называется выпуклым, если вместе с каждыми двумя своими точками A, B содержит отрезок AB.

Простейшими примерами выпуклых множеств могут служить: отрезок, плоскость любой размерности, все пространство $\boldsymbol{U_n}$.

Множество, состоящее из одной точки, и пустое множество также считаются выпуклыми.

Теорема 1. Пересечение любой совокупности выпуклых множеств само является выпуклым множеством.

Доказательство. Из определения следует, что если точки A, B принадлежат пересечению некоторой совокупности выпуклых множеств, то отрезок AB принадлежит каждому из этих множеств, а значит, и их пересечению. ■

Пусть в пространстве $\boldsymbol{U_n}$ дана произвольная гиперплоскость

$$A_1x_1+\dots+A_nx_n+C=0. \qquad (51)$$

Гиперплоскость (51) разбивает пространство на два полупространства, называемых открытыми полупространствами. Их точки характеризуются неравенствами

$$\sum A_ix_i+C<0, \sum A_ix_i+C>0 \qquad (52)$$

соответственно. Присоединяя к открытому полупространству гиперплоскость (51), получим так называемое замкнутое полупространство.

Одно из них состоит из точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\sum A_ix_i+C\le 0. \qquad (53)$$

Другое

$$\sum A_ix_i+C\ge 0. \qquad (54)$$

Рассматриваемое пространство является действительным. В комплексном случае никакая гиперплоскость не разделяет пространства, подобно тому как одна прямая не разделяет трехмерного действительного пространства.

Теорема 2. Каждое полупространство является выпуклым множеством.

Доказательство. Доказательство проведем, например, для полупространства (53). Пусть точки A и B принадлежат этому полупространству. Тогда $\sum A_ia_i+C\le 0$, $\sum A_ib_i+C\le 0$, и для произвольной точки X отрезка AB, учитывая (50), получим

$$\sum A_ix_i+C=\sum A_i(\alpha a_i+\beta b_i)+C(\alpha+\beta)$$
$$=\alpha\left(\sum A_ia_i+C\right)+\beta\left(\sum A_ib_i+C\right)\le 0.$$

Таким образом, точка X принадлежит полупространству (53). Но точка X на отрезке AB взята произвольно, значит, следовательно, отрезок AB принадлежит полупространству (53), что и требовалось доказать. ■

Определение 3. Пересечение конечного числа полупространств называется выпуклым многогранником.

Определение 4. Выпуклая оболочка множества A точек в аффинном пространстве $\boldsymbol{U}$ есть минимальное выпуклое множество, содержащее A.

Другими словами, выпуклая оболочка представляет собой пересечение всевозможных выпуклых множеств, содержащих данное множество A или является наименьшим выпуклым множеством, содержащим A.

Пусть в аффинном пространстве $\boldsymbol{U}$ даны точки $A_0, A_1, \dots, A_p$ с радиус-векторами $a_0,\ a_1, \dots, a_p$ соответственно. Имеет место теорема:

Теорема 3. Выпуклая оболочка системы точек A_0, $A_1, \dots, A_p$ задается формулой

$$x = \alpha_0 a_0 + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_p a_p, \tag{55}$$

где x – радиус-вектор произвольной точки из выпуклой оболочки числа $\alpha_0, \dots, \alpha_p$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_p=1, \\ \alpha_0\geq 0, \alpha_1\geq 0, \dots, \alpha_p\geq 0. \end{cases} \tag{56}$$

Доказательство. Доказательство проведем посредством индукции по числу точек. Для двух точек теорема 3 справедлива, так как при $\mathrm{p} = 1$ формулы (55) и (56) задают отрезок A_0A_1.

Пусть теорема 3 доказана для $(\mathrm{p} + 1)$ точек. Рассмотрим точки $A_0, \dots, A_p$. Их выпуклую оболочку обозначим А, добавим еще одну точку A_{p+1} с радиус-вектором a_{p+1} и построим выпуклую оболочку В объединения $A \cup A_{p+1}$. По свойству из п. 16 множество В совпадает с выпуклой оболочкой системы точек $A_0, A_1, \dots, A_p, A_{p+1}$. По теореме 2 множество В состоит из всевозможных отрезков $A_{p+1}X$, где $\mathrm{X} \in \mathrm{A}$. Радиус-вектор x точки X задается равенством (55). Обозначим через y радиус-вектор произвольной точки отрезка $A_{p+1}X$. Тогда

$$y = \alpha x + \beta a_{p+1},\ \alpha + \beta = 1,\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0. \qquad (57)$$

Положим

$$\beta_i = \alpha a_i, i = 0, \dots, p,\ \beta_{p+1} = \beta. \qquad (58)$$

Из формул (55) – (58) получим

$$\begin{cases} y = \beta_0 a_0 + \dots + \beta_p a_p + \beta_{p+1} a_{p+1}, \\ \beta_0 + \dots + \beta_p + \beta_{p+1} = 1, \beta_j \geq 0,\ j = 0, \dots, p+1. \end{cases} \qquad (59)$$

Таким образом, каждая точка множества $\mathcal{B}$ удовлетворяет соотношениям (59). Обратно, подставив величины (58) в формулы (59), получим для y выражение вида (57), где x удовлетворяет соотношениям (55) и (56). Это значит, что каждая точка, удовлетворяющая условиям (59), принадлежит множеству B. ■

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ И ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа должна быть сделана в отдельной тетради, на обложке которой следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы и адрес, название дисциплины и дату отправки работы в университет. Задачи контрольной работы выбираются согласно тому варианту, который совпадает с первой буквой фамилии студента. Решение задач необходимо проводить в последовательности, указанной в контрольной работе. При этом условие задачи должно быть полностью переписано перед ее решением. Решение задач следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных вычислений. В прорецензированной зачтенной работе студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки и учесть его рекомендации и советы. Если же работа не зачтена, то ее выполняют еще раз и отправляют на повторную рецензию. Зачтенная контрольная работа предъявляется студентом перед сдачей зачета или экзамена.

Контрольная работа 1 Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии

I. Даны координаты вершин пирамиды. Найти: 1) длину ребер A_1A_2 и A_1A_3; 2) угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_3; 3) площадь грани $A_1A_2A_3$; 4) объем пирамиды; 5) уравнения прямой A_1A_2; 6) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$; 7) угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$; 8) уравнения высоты, опущенной из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. Координаты вершин приведены в таблице 1.

Таблица 1

	Координаты точки			
	A_1	A_2	A_3	A_4
А	(0; 3; 2)	(–6; 3; 6)	(–2; 4; 2)	(0; 5; 4)
Б	(–1; 2; 0)	(–2; 2; 4)	(–3; 3; 0)	(–1; 4; 2)
В	(2; 2; 3)	(1; 2; 7)	(0; 3; 3)	(2; 4; 5)
Г	(0; –1; 2)	(–1; –1; 6)	(–2; 0; 2)	(0; 1; 4)
Д	(3; 0; 2)	(2; 0; 6)	(1; 1; 2)	(3; 2; 4)
Е	(0; 2; –1)	(–1; 2; 3)	(–2; 3; –1)	(0; 4; 1)
Ж	(2; 3; 2)	(1; 3; 6)	(0; 4; 2)	(2; 5; 4)
З	(–1; 0; 2)	(–2; 0; 6)	(–3; 1; 2)	(–1; 2; 4)
И	(2; 0; 3)	(1; 0; 7)	(0; 1; 3)	(2; 2; 5)
К	(2; –1; 2)	(1; –1; 6)	(0; 0; 2)	(2; 1; 4)
Л	(4; 2; 5)	(0; 7; 2)	(0; 2; 7)	(1; 5; 0)
М	(4; 4; 10)	(4; 10; 2)	(2; 8; 4)	(9; 6; 4)
Н	(4; 6; 5)	(6; 9; 4)	(2; 10; 10)	(7; 5; 9)
О	(3; 5; 4)	(8; 7; 4)	(5; 10; 4)	(4; 7; 8)
П	(10; 6; 6)	(–2; 8; 2)	(6; 8; 9)	(7; 10; 3)
Р.	(1; 8; 2)	(5; 2; 6)	(5; 7; 4)	(4; 10; 9)
С	(6; 6; 5)	(4; 9; 5)	(4; 6; 11)	(6; 9; 3)
Т	(7; 2; 2)	(5; 7; 7)	(5; 3; 1)	(2; 3; 7)
У	(8; 6; 4)	(10; 5; 5)	(5; 6; 8)	(8; 10; 7)
Ф.	(7; 7; 3)	(6; 5; 8)	(3; 5; 8)	(8; 4; 1)
Х	(5; 1; 0)	(7; 1; 0)	(2; 1; 4)	(5; 5; 3)
Ц	(0; 1; 2)	(3; 1; 4)	(2; 1; 7)	(3; 0; 1)
Ч	(1; 3; 2)	(5; 0; 1)	(2; 1; 4)	(2; 2; 2)
Ш	(0; 2; 1)	(2; 1; 2)	(4; 1; 1)	(2; 3; 5)
Щ	(1; 1; 1)	(3; 1; 7)	(0; 2; 4)	(2; 7; 1)
Э	(0; 2; 1)	(5; 1; 0)	(5; 5; 3)	(2; 7; 1)
Ю	(0; 1; 2)	(2; 1; 4)	(2; 2; 2)	(1; 1; 1)

Я	(5; 1; 0)	(0; 1; 2)	(3; 0; 1)	(2; 2; 2)

II. Линия задана уравнением $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат, требуется:

1) построить линию по точкам от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$, придавая φ значения через промежуток $\frac{\pi}{8}$;

2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью;

3) по уравнению в декартовой прямоугольной системе координат определить, какая это линия. Уравнение $r = r(\varphi)$ приведено в таблице 2.

Таблица 2

	r		r
А	$\frac{1}{1+\cos\varphi}$	П	$\frac{1}{6+3\cos\varphi}$
Б	$\frac{1}{2+\cos\varphi}$	Р.	$\frac{2}{2-\cos\varphi}$
В	$\frac{4}{2-3\cos\varphi}$	С	$\frac{2}{1+\cos\varphi}$
Г	$\frac{8}{3-\cos\varphi}$	Т	$\frac{1}{2-\sin\varphi}$
Д	$\frac{1}{2+2\cos\varphi}$	У	$\frac{3}{1+\sin\varphi}$
Е	$\frac{5}{3-4\cos\varphi}$	Ф.	$\frac{1}{2+\sin\varphi}$
Ж	$\frac{10}{2+\cos\varphi}$	Х	$\frac{16}{5-3\cos\varphi}$
З	$\frac{3}{1-2\cos\varphi}$	Ц	$\frac{16}{3-5\cos\varphi}$

И	$\dfrac{1}{3-3\cos\varphi}$	Ч	$\dfrac{5}{1-\cos\varphi}$
К	$\dfrac{5}{6+3\cos\varphi}$	Ш	$\dfrac{4}{3-2\cos\varphi}$
Л	$\dfrac{3}{2+\sin\varphi}$	Щ	$\dfrac{8}{1-3\cos\varphi}$
М	$\dfrac{4}{1-\cos\varphi}$	Э	$\dfrac{5}{4-3\cos\varphi}$
Н	$\dfrac{4}{1+\sin\varphi}$	Ю	$\dfrac{3}{1-2\sin\varphi}$
О	$\dfrac{6}{2+\cos\varphi}$	Я	$\dfrac{1}{1-2\sin\varphi}$

Контрольная работа 2 Элементы линейной алгебры

I. Даны две матрицы A и B. Найти $(2A^T-3B)\cdot(A+2B^T)$.

А. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Б. $A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & -5 \\ -3 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

В. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Г. $A=\begin{pmatrix} -6 & 1 & 11 \\ 9 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Д. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 7 & 1\end{pmatrix}$.

Е. $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 1 & 3 & -1\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 5 & 3 & 0\end{pmatrix}$.

Ж. $A=\begin{pmatrix}6 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 4 & -1 & -2\\ 4 & 3 & 7\end{pmatrix}$.

З. $A=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 4\\ 3 & -1 & -4\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 3 & 1\\ 0 & 6 & 2\\ 1 & 9 & 2\end{pmatrix}$.

И. $A=\begin{pmatrix}1 & 7 & 3\\ -4 & 9 & 4\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}6 & 5 & 2\\ 1 & 9 & 2\\ 4 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

К. $A=\begin{pmatrix}2 & 6 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 2\\ -4 & 0 & 5\\ 3 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

Л. $A=\begin{pmatrix}6 & 9 & 4\\ -1 & -1 & 1\\ 10 & 1 & 7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 4 & 3\\ 0 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

М. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 4\\ -3 & 0 & 1\\ 5 & 6 & -4\end{pmatrix}$.

Н. $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 5 & 5\\ 7 & 1 & 2\\ 1 & 6 & 0\end{pmatrix}$.

О. $A=\begin{pmatrix}2&2&5\\3&3&6\\4&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$.

П. $A=\begin{pmatrix}1&-2&5\\3&0&6\\4&3&4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&1&1\\2&3&3\\1&-2&-1\end{pmatrix}$.

Р. $A=\begin{pmatrix}5&4&2\\1&2&4\\3&0&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&4&-5\\3&-7&1\\1&2&2\end{pmatrix}$.

С. $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\4&3&2\\2&2&-7\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&7&0\\5&3&1\\1&-6&1\end{pmatrix}$.

Т. $A=\begin{pmatrix}8&-1&-1\\5&-5&-1\\10&3&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&5\\3&2&1\\1&0&2\end{pmatrix}$.

У. $A=\begin{pmatrix}3&-7&2\\1&-8&3\\4&-2&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&5&-3\\2&4&1\\2&1&-5\end{pmatrix}$.

Ф. $A=\begin{pmatrix}3&-1&0\\3&5&1\\4&-7&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-8&5\\3&0&2\end{pmatrix}$.

Х. $A=\begin{pmatrix}2&-1&4\\4&-9&3\\2&-7&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&-4\\5&-6&4\\7&-4&1\end{pmatrix}$.

Ц. $A=\begin{pmatrix}8&5&-1\\1&5&3\\1&1&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4&-7&-6\\3&2&-1\\0&1&2\end{pmatrix}$.

Ч. $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -4 & 1\\ 4 & -3 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -4\\ 2 & 5 & -3\\ 4 & -3 & 2\end{pmatrix}$.

Ш. $A=\begin{pmatrix}5 & -8 & -4\\ 7 & 0 & -5\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -3\end{pmatrix}$.

Щ. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -2 & 4\\ 3 & -5 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$.

Э. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 2\\ 1 & -5 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 4 & 4\\ 1 & 3 & 2\\ -4 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

Ю. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 4 & 5 & 1\\ -2 & 3 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 7 & -1\\ 0 & 2 & 6\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$.

Я. $A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & -3\\ 1 & 2 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 0\\ 5 & 4 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

II. Дана система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Требуется: 1) найти ее решение с помощью формул Крамера; 2) записать систему в матричной форме и решить ее средствами матричного исчисления, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение.

А. $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=5,\\ 2x_1+3x_2+x_3=1,\\ 2x_1+x_2+3x_3=11.\end{cases}$ П. $\begin{cases}3x_1-5x_2+6x_3=5,\\ 2x_1-3x_2+5x_3=8,\\ x_1+4x_2-x_3=1.\end{cases}$

Б. $\begin{cases}x_1-2x_2+3x_3=6,\\ 2x_1+3x_2-4x_3=20,\\ 3x_1-2x_2-5x_3=6.\end{cases}$ Р. $\begin{cases}3x_1-9x_2+8x_3=5,\\ 2x_1-5x_2+5x_3=4,\\ 2x_1-x_2+x_3=-4.\end{cases}$

В. $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

С. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -5, \\ x_1 + 9x_2 - 4x_3 = -1, \\ 2x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -6. \end{cases}$

Г. $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$

Т. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 9. \end{cases}$

Д. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$

У. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ 4x_1 + 7x_2 - 2x_3 = -6, \\ x_1 - 8x_2 + 5x_3 = 1. \end{cases}$

Е. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$

Ф. $\begin{cases} x_1 + 7x_2 - 2x_3 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 4. \end{cases}$

Ж. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

Х. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$

З. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -3, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -9. \end{cases}$

Ц. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$

И. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 31, \\ 4x_1 + 11x_3 = -43, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -20. \end{cases}$

Ч. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$

К. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 9. \end{cases}$

Ш. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$

Л. $\begin{cases} 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = -10, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 8, \\ x_1 - 6x_2 + 3x_3 = -3. \end{cases}$

Щ. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

М. $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3=-1, \\ 2x_1+4x_2+\ x_3=6, \\ 3x_1-3x_2+7x_3=13. \end{cases}$ Э. $\begin{cases} 8x_1+3x_2-6x_3=-4, \\ x_1+\ x_2-\ x_3=2, \\ 4x_1+\ x_2-3x_3=-5. \end{cases}$

Н. $\begin{cases} 2x_1+4x_2-3x_3=-10, \\ x_1-5x_2+2x_3=-5, \\ 3x_1-2x_2+4x_3=3. \end{cases}$ Ю. $\begin{cases} 4x_1+\ x_2-3x_3=9, \\ x_1+\ x_2-\ x_3=-2, \\ 8x_1+3x_2-6x_3=12. \end{cases}$

О. $\begin{cases} 2x_1-5x_2+6x_3=8, \\ x_1+7x_2-5x_3=-9, \\ 4x_1+2x_2-\ x_3=-12. \end{cases}$ Я. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3=33, \\ 7x_1-5x_2 \qquad =24, \\ 4x_1 \qquad +11x_3=39. \end{cases}$

III. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы третьего порядка.

А. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Л. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Х. $\begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Б. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. М. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ц. $\begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

В. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Н. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Ч. $\begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Г. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. О. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$. Ш. $\begin{pmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Д. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. П. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. Щ. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Е. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$. Р. $\begin{pmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Э. $\begin{pmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{pmatrix}$.

Ж. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. С. $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. Ю. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

З. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$. Т. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}$. Я. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

И. $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. У. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

К. $\begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 2 & 13 & -4 \\ 2 & -2 & 11 \end{pmatrix}$. Ф. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

IV. Дано комплексное число z. Требуется: 1) записать число z в алгебраической и тригонометрической формах; 2) найти все корни уравнения $w^3 + z = 0$.

Таблица 3

	z		z		z
А	$\dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$	Л	$\dfrac{2\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$	Х	$\dfrac{4\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$
Б	$\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$	М	$-\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}$	Ц	$\dfrac{3}{1+i\sqrt{2}}$
В	$-\dfrac{2\sqrt{2}}{1-i}$	Н	$\dfrac{4}{\sqrt{3}-i}$	Ч	$-\dfrac{1}{1-i\sqrt{2}}$
Г	$-\dfrac{4}{1-i\sqrt{3}}$	О	$\dfrac{4}{\sqrt{3}+i}$	Ш	$\dfrac{3}{\sqrt{2}+i}$
Д	$-\dfrac{2\sqrt{2}}{1+i}$	П	$-\dfrac{4}{1+i\sqrt{3}}$	Щ	$-\dfrac{4}{\sqrt{3}-i}$
Е	$\dfrac{2\sqrt{2}}{1-i}$	Р.	$\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$	Э	$\dfrac{3}{1-i\sqrt{2}}$

Ж	$\frac{4}{1-i\sqrt{3}}$	С	$-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$	Ю	$-\frac{3}{1+i\sqrt{2}}$
З	$-\frac{4}{\sqrt{3}-i}$	Т	$\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}.$	Я	$-\frac{4\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$
И	$\frac{1}{\sqrt{3}+i}$	У	$-\frac{4\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}$		
К	$\frac{1}{\sqrt{3}-i}$	Ф.	$-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$		

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Zaitseva I.V., Malafeyev O.A., Zakharov V.V., Smirnova T.E., Novozhilova L.M. Mathematical model of network flow control. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 1. Сер. "1st International Conference on Innovative Informational and Engineering Technologies, IIET 2020" 2020. P. 012036.

2. Афанасьев, М.Ю. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения: учебное пособие / М.Ю. Афанасьев, Б.П. Суворов. – М.: ИНФРА-М, 2003. – 444 с. 10. Беклемишев, Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д.В. Беклемишев. – М.: Физматлит, 2006. – 312 с.

3. Введение в моделирование коррупционных систем и процессов: коллективная монография /Под общей ред. О.А. Малафеева. Ставрополь, 2016. Том 1. – 224 с.

4. Ефимов, Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – М.: Наука, 1970. – 528 с.: с ил.

5. Зайцева И.В. Решение задачи оптимального управления математической моделью сложной экономической системы // Вестник Ставропольского государственного университета. 2010. № 5. С. 16-21.

6. Зайцева И.В Экономико-математическое моделирование рынка труда: монография НОУ ВПО СКСИ. Ставрополь, 2009. – 116 с.

7. Зайцева И.В., Малафеев О.А. Линейная алгебра с приложениями к математическому анализу и моделированию демографических аспектов интеллектуальной аналитической системы. - Санкт-Петербург, 2021. (2-е издание, переработанное и дополненное). – 382 с.

8. Зайцева И.В., Ржонсницкая Ю.Б. Математика и статистика. - Санкт-Петербург, 2021. – 184 с.

9. Колосова А.А., Степанов В.Е.- Матрицы и определители, решение задач. 18. Льюс, Р.Д. Игры и решения. Введение и критический обзор / Р.Д. Льюс, Х. Райфа. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 644 с.

10. Линейная алгебра с приложениями к моделированию коррупционных систем и процессов: учебное пособие / Малафеев О.А., Сотникова Н.Н., Зайцева И.В., Пичугин Ю.А., Костюков К.И., Хитров Г.М. - Ставрополь, ООО "Издательский дом "ТЭСЭРА", 2016. – 366 с.

11. Малафеев О. А., Зубова А. Ф. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости, надежности). – СПб.: Мобильность-плюс, 2006. – 1006 с.

12. Малафеев О. А., Зубова А. Ф. Устойчивость по Ляпунову и колебательность в экономических моделях. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет, 2001. – 101 с.

13. Малафеев О. А., Кефели И. Ф. Математические начала глобальной геополитики. – СПб: Санкт-Петербургский государственный политехнический университет, 2013. – 204 с.

14. Малафеев О. А., Колокольцов В. Н. Математическое моделирование многоагентных систем конкуренции и кооперации (теория игр для всех). – СПб.: Лань, 2012. – 624 с.

15. Малафеев О. А., Королева О. А., Васильев Ю. Г. Компромиссное решение в аукционе первой цены с коррумпированным аукционистом // Строительство и эксплуатация энергоэффективных зданий (теория и

практика с учетом коррупционного фактора) – Боровичи: НП “НТО стройиндустрии Санкт-Петербурга”, 2015. – С. 119–127.

16. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 2000. – Т. 1. – 283 с.

17. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 2001. – Т. 2. – 294 с.

18. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Моделирование конфликтных ситуаций в социально-экономических системах. – Санкт-Петербург: СПбУЭФ, 1998. – 317 с.

19. Меньшиков, Г. Г. Практические начала интервальных вычислений: учебное пособие / Г.Г. Меньшиков. – Л.: РИО ЛГУ, 1991. – 92 с.: ил. 340

20. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Имитационная модель работы биржи труда // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2005. Т. 12. № 2. С. 508-509.

21. Семенчин Е.А., Зайцева И.В. Математическое моделирование работы биржи труда // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т. 11. № 2. С. 398-399.

22. Таха, Хемди А. Введение в исследование операций / Хемди А. Таха. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 912 с. 58. Хедли, Дж. Линейная алгебра: (Для экономистов) / Перевод с англ. Ю. И. Соркина и А. А. Дмитриева. – М.: Высш. школа, 1966. - 206 с.

Учебное издание

Зайцева Ирина Владимировна,
канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики и теоретической механики ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет»
Шебукова Анна Сергеевна,
канд. техн. наук, доцент, доцент кафедры инновационных технологий управления в государственной сфере и бизнесе ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 01.07.2022. Формат 60x90 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 13,25. Тираж 10 экз. Заказ № 1256.
РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, ул. Воронежская, д. 79.