

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Г. И. Беликова, Е. А. Бровкина, Л. В. Витковская

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие для студентов 2-го курса

Санкт-Петербург
РГГМУ
2020

УДК 51
ББК 22.193я73

Г.И. Беликова, Е.А. Бровкина, Л.В. Витковская.

Б43 Дифференциальные уравнения. Учебное пособие. – СПб.: РГГМУ, 2020. – 162 с.

Книга содержит курс лекций, посвящённый решению дифференциальных уравнений – важному для гидрологии, метеорологии, океанологии и экологии разделу высшей математики. Учебное пособие рассчитано на студентов 2-го курса, знающих математический анализ и высшую алгебру. Каждый, представленный в книге, метод решения сопровождается достаточным количеством разобранных примеров.

Рецензент:

канд. физ.-мат. наук, доц. Е.Н. Бегун,
кафедра высшей математики и физики Санкт-Петербургского
государственного института кино и телевидения.

УДК 51
ББК 22.193я73

© Г.И. Беликова, Е.А. Бровкина, Л.В. Витковская, 2020

ISBN 978-5-86813-504-0

© Российский государственный университет (РГГМУ),
2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

Глава 1. Базовые понятия 6

- 1.1. Задача Коши 8
- 1.1.1. Существование и единственность 9
- 1.2. Краевая задача 12
- 1.2.1. Краевые условия 12

Глава 2. Уравнения первого порядка 13

- 2.1. Уравнения, содержащие одну переменную 13
- 2.2. Уравнения с разделёнными переменными 16
- 2.3. Уравнения с разделяющимися переменными 17
- 2.4. Уравнения с однородной правой частью 18
- 2.5. Уравнения, приводящиеся к однородным 21
- 2.6. Линейные уравнения 22
- 2.7. Нелинейные уравнения 27
- 2.7.1. Уравнение Бернулли 27
- 2.7.2. Уравнения в полных дифференциалах 29

Глава 3. Линейные уравнения высших порядков 35

- 3.1. Однородные уравнения порядка n 36
- 3.1.1. Уравнения с постоянными коэффициентами 38
- 3.2. Неоднородные уравнения порядка n 43
- 3.2.1. Построение решения неоднородного уравнения 44
- 3.3. Задача Штурма–Лиувилля 53

Глава 4. Системы дифференциальных уравнений 57

- 4.1. Система линейных уравнений 57
- 4.1.1. Система однородных уравнений с постоянными коэффициентами 60
- 4.1.2. Система неоднородных уравнений 66

Глава 5. Численные методы решения дифференциальных уравнений 73

- 5.1. Задача Коши 73
- 5.1.1. Метод Эйлера для уравнения первого порядка 73
- 5.1.2. Метод Рунге–Кутта для уравнения первого порядка 74
- 5.1.3. Метод Рунге–Кутта для системы 76

5.1.4. Алгоритм решения задачи Коши	76
5.1.5. Задача Коши для уравнений порядка n	79
5.2. Краевая задача	79
5.2.1. Разностная аппроксимация производных	79
5.2.2. Сеточный метод решения	81
5.2.3. Точность разностного метода	86
5.3. Методы аналитического приближения	87
5.3.1. Метод Бубнова–Галёркина	88
5.3.2. Метод Рунге	92
5.3.3. Метод конечных элементов	96

Глава 6. Создатели теории дифференциальных уравнений 100

6.1. Готфрид Вильгельм Лейбниц	100
6.2. Династия Бернулли	102
6.3. Леонард Эйлер	104
6.4. Жозеф Луи Лагранж	110
6.5. Огюст Луи Коши	111
6.6. Имена в истории дифференциальных уравнений	113

Литература 115

Приложение 1. Метод трёхдиагональной прогонки 117

Приложение 2. Проблема собственных значений 120

1. Постановка задачи	120
2. Частичная проблема	124
3. Полная проблема	129

Приложение 3. Толковый и этимологический словарь математических терминов и понятий 137

Приложение 4. Справочник имён 151

Предметный указатель 159

ПРЕДИСЛОВИЕ

*Какая наука может быть более
благородна, восхитительна и полезна
для человечества, чем математика?*

Бенджамин Франклин (1706 – 1790) –
американский учёный

Теория дифференциальных уравнений используется в метеорологии, гидрологии, океанологии и в математическом моделировании экосистем. К сожалению, на этот раздел математики выделяется мало аудиторных занятий. Пришла идея написать отдельное учебное пособие по этому интересному и важному разделу математики. Думаем, что такое введение в теорию дифференциальных уравнений станет хорошим стартом для более глубокого изучения современных методов решения дифференциальных уравнений и анализа результатов полученных решений.

Для удобства и быстрого запоминания сразу в первой главе представлены основные определения и понятия.

Многие типы дифференциальных уравнений, интегрируемых с помощью элементарных функций, были изучены в XVIII в. Следующие столетия связаны с развитием качественной теории таких уравнений, теории устойчивости и численных методов решения дифференциальных уравнений. В пятой главе даны те наиболее простые численные методы, которые широко представлены в компьютерных математических пакетах стандартных программ.

Во все времена математики относились к своей профессии с трепетной любовью. Они понимали, какую важную роль играет эта наука в развитии человечества. Жизнь и творчество многих великих математиков интересны и поучительны. Поэтому шестая глава посвящена основателям теории дифференциальных уравнений. Кроме этого, в приложении 4 (справочник имён) есть краткие сведения о математиках, чьи имена встречаются в учебнике.

Математический язык в своей основе – международный язык. В нём есть латинские, греческие, арабские слова и выражения. С историей происхождения математических терминов можно познакомиться в приложении 3.

Известный английский математик Харольд Харди (1877 – 1947) писал, что творчество математика в такой же степени создаёт прекрасное, как творчество живописца или поэта. Краски в работах художника или слова в стихах поэта обладают внутренней гармонией. Такая же гармония должна быть у идей, придуманных для решения математических проблем.

Надеемся, что студентам будет интересно содержание этого учебника и они оценят простоту и красоту представленных методов решения дифференциальных уравнений.

Благодарим доцентов Николая Ивановича Герасименко и Евгению Николаевну Бегун за внимательное отношение к этой работе и ценные замечания. Они все были учтены в окончательном варианте учебника.

Глава 1

БАЗОВЫЕ ПОНЯТИЯ

*Роль математики в современном обществе
если и изменилась, то в сторону
увеличения её значимости.*

Арнольд В.И (1937–2010) –
русский математик, академик РАН

Дифференциальным уравнением называется равенство, слагаемые которого содержат производные некоторой функции $y(x)$. Наличие хотя бы одной производной обязательно, а сама функция $y(x)$ и её аргумент могут отсутствовать в уравнении. В общем виде дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0. \quad (1.1)$$

Функция $y(x)$ является решением дифференциального уравнения, если при подстановке этой функции и её производных в исходное дифференциальное уравнение, оно становится тождеством. В общем случае у дифференциального уравнения есть бесчисленное множество решений.

Определение 1. Решение дифференциального уравнения называется **частным решением**, если в каждой его точке сохраняется единственность. Частное решение записывается в виде

$$y(x) = g(x) \text{ или } Q(x, y) = 0, \text{ или } x(y) = q(y).$$

Определение 2. **Общим решением или общим интегралом дифференциального уравнения** называют решение, из которого можно получить частные решения.

Общее решение записывается в виде явно заданной функции

$$y(x) = g(x, c_1, c_2, \dots, c_n), \quad (1.2)$$

общий интеграл записывается как неявно заданная функция

$$Q(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0. \quad (1.3)$$

Параметры $c_1, c_2, \dots, c_n$ в равенствах (1.2) и (1.3) называются **произвольными постоянными**. Численные значения параметров $c_1, c_2, \dots, c_n$ для частного решения находятся из дополнительных условий, которым удовлетворяет искомая функция в поставленной задаче. Количество дополнительных условий равно порядку дифференциального уравнения. В качестве дополнительных условий используют начальные или краевые (граничные) условия.

Замечание 1. У дифференциальных уравнений бывают решения, которые не входят в общее решение или в общий интеграл. Есть уравнения, для которых невозможно построить общее решение в виде (1.2) и (1.3).

Предположим, что в уравнении (1.1) удалось выразить старшую производную в явном виде:

$$y^{(n)}(x) = G(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)). \quad (1.4)$$

В этом случае говорят, что уравнение записано в **нормальной форме**.

Замечание 2. Дифференциальные уравнения, в которых искомая функция зависит только от одного аргумента, часто называют **обыкновенными дифференциальными уравнениями** (с конца XIX в.).

Определение 3. **Порядком дифференциального уравнения** называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Определение 4. Дифференциальное уравнение называется **линейным**, если слагаемые уравнения, содержащие неизвестную функцию и её производные, имеют, относительно них, первый порядок степени:

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = f(x). \quad (1.5)$$

Если это условие не выполняется, уравнение называется **нелинейным**.

Определение 5. Линейное дифференциальное уравнение называется **однородным**, если все слагаемые уравнения имеют первый порядок степени относительно искомой функции и её производных:

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = 0. \quad (1.6)$$

Если это условие не выполняется, уравнение называется **неоднородным**.

Замечание 3. Функции $\{p_i(x)\}_{i=0}^n$ в уравнениях (1.5) и (1.6) в теории дифференциальных уравнений называются **переменными коэффициентами**.

Если $\{p_i\}_{i=0}^n$ – константы, их называют **постоянными коэффициентами**.

Замечание 4. С XVIII века для некоторых классов дифференциальных уравнений удавалось найти точное решение с помощью операции интегрирования. Поэтому, по традиции, любой процесс построения решения дифференциального уравнения часто называют **интегрированием**, график решения – **интегральной кривой**, а само решение – **интегралом**.

Определение 6. Решение дифференциального уравнения называется **особым решением**, если в каждой его точке нарушается единственность, т.е. через каждую точку решения проходит ещё хотя бы одно решение уравнения.

Особое решение не входит в общее решение или в общий интеграл. Для нахождения особых решений уравнения первого порядка

$$y'(x) = f(x, y)$$

следует выполнить следующие действия.

1. Найти множество всех точек плоскости, в которых выполняется равенство

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \infty.$$

2. Проверить, является ли найденное множество точек интегральной кривой уравнения.

3. Если в каждой точке такой интегральной кривой нарушается единственность, тогда уравнение этой кривой – особое решение уравнения.

Определение 7. Огибающей называется такая линия на плоскости, которая в каждой своей точке касается интегральной кривой из общего решения некоторого дифференциального уравнения.

Из определения огибающей следует, что она является графиком особого решения. Уравнение огибающей не получается из общего решения или общего интеграла дифференциального уравнения.

Определение 8. Изоклиной уравнения первого порядка

$$y'(x) = f(x, y)$$

называется линия, во всех точках которой тангенс её наклона к положительному направлению оси абсцисс – постоянная величина:

$$\tan \varphi = f(x, y) = p = \text{const.}$$

1.1. Задача Коши

Предположим, что найдено общее решение уравнения первого порядка и оно равно

$$y(x) = g(x, c_1).$$

Для нахождения параметра c_1 используем заданные значения x_0 и y_0 , при которых решение уравнения удовлетворяет равенству

$$y(x_0) = y_0. \quad (1.7)$$

Условие (1.7) называется **начальным условием** для дифференциального уравнения первого порядка, а числа $\{x_0, y_0\}$ – **это начальные данные**.

Перейдём к виду общего решения дифференциального уравнения второго порядка

$$y(x) = g(x, c_1, c_2).$$

Для нахождения параметров c_1, c_2 используем начальные данные x_0, y_0 , при которых $y(x_0) = y_0$ и известное значение v_0 производной $y'(x)$ в точке x_0 :

$$y'(x_0) = v_0. \quad (1.8)$$

Условия (1.7) и (1.8) являются **начальными условиями** для уравнения второго порядка, $\{x_0, y_0, v_0\}$ – начальные данные.

Обратимся к общему решению дифференциального уравнения третьего порядка

$$y(x) = g(x, c_1, c_2, c_3).$$

Для нахождения параметров c_1, c_2, c_3 используем x_0, y_0 , производную (1.8) и значение w_0 второй производной $y''(x)$ в точке x_0 :

$$y''(x_0) = w_0. \quad (1.9)$$

Условия (1.7) – (1.9) являются начальными условиями для уравнения третьего порядка, а $\{x_0, y_0, v_0, w_0\}$ – начальные данные. Количество начальных условий всегда равно порядку уравнения.

Определение 9. Задача нахождения частного решения уравнения с заданными начальными условиями называется *задачей Коши*.

Задача Коши может быть поставлена для систем. Предположим, что система состоит из m дифференциальных уравнений первого порядка, в которых есть m неизвестных функций:

[illegible]

Начальные условия для такой системы имеют вид

$$y_1(x_0) = y_{0,1}, y_2(x_0) = y_{0,2}, y_3(x_0) = y_{0,3}, \dots, y_m(x_0) = y_{0,m},$$

где x_0 и $\{y_{0,k}\}_{k=1}^m$ – начальные данные.

В этой системе искомым решением будут функции $\{y_k(x)\}_{k=1}^m$.

1.1.1. Существование и единственность

Решение задачи Коши прежде всего связано с вопросом существования и единственности самого решения. Ответ на этот вопрос есть в ряде фундаментальных теорем. Обратимся к трём из них.

Теорема 1 (Теорема Пеано). Если правая часть уравнения

$$y'(x) = f(x, y) \quad (1.10)$$

определена, непрерывна и ограничена $|f(x, y)| \leq M$ в области

$$D_2: [|x - x_0| < a, |y - y_0| < b],$$

тогда уравнение (1.10) имеет хотя бы одно решение $y = y(x)$, которое удовлетворяет начальному условию $y_0 = y(x_0)$ и является непрерывно дифферен-

цируемой функцией в области

$$|x - x_0| \leq h, \text{ где } h = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}.$$

Теорема 2 (Теорема Пикара). Существует единственное решение задачи Коши для уравнения

$$y^{(n)}(x) = G(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = G,$$

если в начальной точке $N(x_0, y_0) \in D_2$ и некоторой её окрестности функция G непрерывна относительно всех своих аргументов и непрерывны первые частные производные функции G по переменным $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$.

Замечание 5. Для существования частного решения достаточно только непрерывности функции $G(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x))$, но единственность решения не гарантируется.

Есть другой подход к вопросу существования единственного решения уравнения с заданными начальными условиями. Обратимся к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y) \text{ с начальным условием } y(x_0) = y_0. \quad (1.11)$$

Определение 10. Предположим, что непрерывная функция $f(x, y)$ задана в области

$$D_2: \{x \in [x_0; b], y \in [y_0; d]\}.$$

Говорят, что функция $f(x, y)$ удовлетворяет в области D_2 **условию Липшица** по переменной y , если существует такая постоянная $L > 0$, при которой выполняется неравенство

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| < L |y_2 - y_1| \text{ для } \forall y_2 \in D_2 \text{ и } \forall y_1 \in D_2. \quad (1.12)$$

Величина L в неравенстве (1.12) называется **постоянной Липшица** для функции $f(x, y)$.

Теорема 3. Если правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ удовлетворяет условию Липшица в области D_2 , тогда у задачи Коши в этой области существует единственное решение.

Эта теорема обеспечивает достаточные условия существования и единственности решения. Если задача Коши (1.11) имеет единственное решение $y(x)$, то через точку $N(x_0, y_0)$ с заданными координатами проходит только одна интегральная кривая.

Приведём три примера существования единственного решения задачи Коши для уравнений первого порядка.

1. Правая часть уравнения (1.11) – это полином относительно двух переменных x и y :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_{kl} x^k y^l.$$

2. Правая часть уравнения (1.11) является полиномом относительно только переменной y , а коэффициенты этого полинома $a_k(x)$ – непрерывные функции от x :

$$f(x, y) = \sum_{k=0}^n a_k(x) y^k.$$

В 1-м примере задача Коши имеет решение при любых начальных данных $\{x_0, y_0\}$, во 2-м примере $\forall y_0 \in \mathbb{R}$, а x_0 принадлежит области непрерывности коэффициентов $\{a_k(x)\}_{k=0}^n$.

3. Функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в уравнении

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

являются полиномами относительно переменных x и y . Задача Коши будет иметь единственное решение, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ одновременно не равны нулю в начальной точке $N(x_0, y_0)$.

Определение 11. Точка плоскости называется *обыкновенной точкой дифференциального уравнения*

$$y'(x) = f(x, y), \quad (1.13)$$

если правая часть этого или *перевёрнутого уравнения*

$$x'(y) = \frac{1}{f(x, y)}$$

определена и в некоторой окрестности этой точки выполнены условия теоремы Пикара или условия Липшица. Точки, в которых эти требования не выполняются, называются *особыми точками*.

Через обыкновенную точку проходит только одна интегральная кривая. Через особые точки проходит либо более одной интегральной кривой, либо ни одной. Особые точки могут быть изолированными, а могут быть всеми точками графика особого решения дифференциального уравнения. Наиболее важны особые точки $N(x_0, y_0)$, в которых правая часть уравнения (1.13) имеет неопределённость вида

$$f(x_0, y_0) = \frac{0}{0}.$$

Если существует такая интегральная кривая $y = y(x)$, что

$$\lim_{x \rightarrow x_0} y(x) = y_0,$$

говорят, что интегральная кривая **примыкает к особой точке** $N(x_0, y_0)$. Если интегральные кривые примыкают к одной особой точке и имеют в ней **общую касательную**, такая точка называется **узлом**.

Граничные (краевые) точки области существования решения уравнения тоже считают **особыми точками уравнения**.

Поведение интегральных кривых в окрестности особых точек исследуется в «Качественной теории дифференциальных уравнений».

1.2. Краевая задача

Задача Коши и задача с краевыми условиями отличаются друг от друга способом задания дополнительных условий и методами решения. Кроме того, краевая задача ставится для дифференциальных уравнений не ниже 2-го порядка. Для краевых задач вновь возникает вопрос о единственности решения. Обратимся к следующей теореме.

Теорема 4. Дифференциальное уравнение

$$y''_{xx} = F(x, y, y'_x), \quad a \leq x \leq b. \quad (1.14)$$

второго порядка с заданными краевыми условиями в граничных точках $x = a$, $x = b$ имеет единственное решение, если выполняются следующие условия:

1. $F(x, y, y'_x)$, $F(x, y, y'_x)'_y$, $F(x, y, y'_x)'_{y'_x}$ – непрерывные функции по трём переменным.

2. $F(x, y, y'_x)'_{y'_x} > 0$.

3. Существует такое число $M > 0$, что $|F(x, y, y'_x)'_y| < M$. Это означает, что частная производная $F(x, y, y'_x)'_y$ по переменной y ограничена.

1.2.1. Краевые условия

Количество краевых условий всегда равняется порядку уравнения. Разберём простейшие способы постановки краевых задач на примере уравнения (1.14). Точки a, b – граничные точки, в которых задаются краевые условия. Определим **три рода краевых условий** для искомой функции $y(x)$.

1. Заданы значения функции: $y(a) = \gamma_1, \quad y(b) = \gamma_2$.

2. Известны значения производной: $y'(a) = \gamma_1, \quad y'(b) = \gamma_2$.

3. Даны значения **линейной комбинации** функции и её первой производной:

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = \gamma_1, \quad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = \gamma_2,$$

где числа $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ известны. Эти условия ещё называют **смешанными**. Частные случаи смешанных краевых условий:

$$y(a) = \gamma_1, y'(b) = \gamma_2 \text{ или } y'(a) = \gamma_1, y(b) = \gamma_2.$$

Если в любых краевых условиях $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, условия называют **однородными**.

Глава 2

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

*Чтобы понять математику
надо ею заниматься.*

Рихард Курант (1888–1972) –
немецкий математик

Уравнения первого порядка могут быть записаны в различной форме:

$$y' = f(x, y), \quad F(x, y, y') = 0, \quad y' + p(x)y = q(x),$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad P(x, y)dx = R(x, y)dy, \quad \frac{dx}{X(x, y)} = \frac{dy}{Y(x, y)},$$
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Если производная $y' = f(x, y)$ в окрестности каких-то точек плоскости стремится к бесконечности, то для нахождения решения следует перейти к **перевёрнутому уравнению**

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}.$$

Обычно в теории дифференциальных уравнений не принято называть переменную x аргументом, а переменную y функцией. Их называют просто переменными. При решении одних уравнений удаётся найти явную аналитическую зависимость y от x . В других случаях находится зависимость x от y . Можно сказать, что в дифференциальных уравнениях эти переменные равноправны. Главное при решении уравнения – найти аналитическую, по возможности достаточно простую, зависимость между x и y .

2.1. Уравнения, содержащие одну переменную

ОТСУТСТВУЕТ ПЕРЕМЕННАЯ y

Рассмотрим дифференциальное уравнение, не содержащее переменную y :

$$y' = f(x), \quad f(x) \in C_{[a; b]}.$$

Общее решение уравнения записывается в виде

$$y(x) = \int f(x)dx + C$$

или **в форме Коши:**

$$y(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in [a; b].$$

Если поставлена задача Коши с начальным условием $y(x_0) = y_0$, тогда

$$y(x_0) = y_0 = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx + C \Rightarrow C = y_0 \Rightarrow y(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx + y_0.$$

Последнее равенство – это решение задачи Коши.

Пример 1. Найдём общее решение уравнения

$$y' = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Решение.

$$y = \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \ln(1+x^2) + C.$$

Общее решение:

$$y(x) = \ln(1+x^2) + C.$$

Пример 2. Решим задачу Коши для уравнения $y' = \frac{1}{\sin x}$ с начальным условием $y(\pi/2) = 0$.

Решение.

$$y = \int \frac{dx}{\sin x} =$$

$$\left(\begin{aligned} \tan \frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \left(\tan \frac{x}{2} \right)' &= \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1+t^2}{2}, \\ dt &= \frac{1+t^2}{2} dx \Rightarrow dx = \frac{2dt}{(1+t^2)} \end{aligned} \right) =$$

$$= \int \frac{2(1+t^2)dt}{2t(1+t^2)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

Общее решение:

$$y(x) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C.$$

Находим частное решение $y_{\text{ч}}(x)$ с заданными начальными условиями

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \ln \left| \tan \frac{\pi}{4} \right| + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow y_q(x) = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right|.$$

ОТСУТСТВУЕТ ПЕРЕМЕННАЯ x

В уравнении может отсутствовать переменная x :

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(y), \quad f(y) \in C_{[c;d]}.$$

Предположим, что $f(y) \neq 0$, $y \in [c; d]$. Для решения таких уравнений перейдём к перевёрнутому уравнению

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)} \Rightarrow dx = \frac{dy}{f(y)}.$$

Общее решение последнего уравнения записываем в виде

$$x(y) = \int \frac{dy}{f(y)} + C = \int_{y_0}^y \frac{dy}{f(y)} + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}, \quad \forall y_0 \in [c; d].$$

Пример 3. Найдём общий интеграл уравнения $y' = e^y$.

Решение.

$$\frac{dx}{dy} = e^{-y} \Rightarrow dx = e^{-y} dy \Rightarrow \int dx = \int e^{-y} dy \Rightarrow x = -e^{-y} + C.$$

Равенство $x + e^{-y} = C$ – общий интеграл.

Пример 4. Найдём общий интеграл уравнения $y' = y\sqrt{y}$.

Решение. Очевидно, что $y = 0$ – частное решение исходного уравнения

$$\frac{dx}{dy} = y^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \int dx = \int y^{-\frac{3}{2}} dy \Rightarrow x = -\frac{2}{\sqrt{y}} + C.$$

Общий интеграл равен $x + \frac{2}{\sqrt{y}} = C$. Решение $y = 0$ входит в общее решение при $C = \infty$.

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ $y' = f(ax + by + c)$

Уравнение такого вида преобразуют в уравнение, не содержащее одной из двух переменных. Для этого вводят новую переменную (делают подстановку)

$$z = ax + by + c \Rightarrow z'_x = a + by'_x \Rightarrow y'_x = \left(\frac{z'_x - a}{b} \right) \Rightarrow$$

$$y' = f(ax + by + c) = f(z) \Rightarrow z'_x - a = bf(z) \Rightarrow z'_x = bf(z) + a.$$

Найдём общие интегралы для следующих уравнений.

Пример 5. $y' = x + y + 1$.

Решение. $z = x + y + 1 \Rightarrow z'_x = 1 + y'_x \Rightarrow y'_x = z'_x - 1 \Rightarrow z'_x = z + 1 \Rightarrow$

$$\frac{dz}{dx} = z + 1 \Rightarrow dx = \frac{dz}{z + 1} \Rightarrow \int dx = \int \frac{dz}{z + 1}.$$

Общий интеграл равен $x - \ln|x + y + 2| = C$.

Пример 6. $y' = \frac{1}{x+y-1}$.

Решение.

$$z = x + y - 1 \Rightarrow y' = z'_x - 1 \Rightarrow z'_x = \frac{1}{z} + 1 \Rightarrow \frac{dx}{dz} = \frac{z}{z + 1},$$

$$\int dx = \int \frac{zdz}{z + 1} = \int \left(1 - \frac{1}{z + 1}\right) dz = z - \ln|z + 1| + C,$$

$$x = x + y - 1 - \ln|x + y| + C.$$

Общий интеграл равен $y - 1 - \ln|x + y| = C$.

2.2. Уравнения с разделёнными переменными

Если уравнение представлено в дифференциальной форме

$$f(x)dx = g(y)dy \text{ или } f(x)dx + g(y)dy = 0, \quad (2.1)$$

такое уравнение называется уравнением с разделёнными переменными. Предположим, что функции $f(x)$ и $g(y)$ непрерывны.

Такие уравнения решаются очень просто. Если равны дифференциальные выражения (2.1), то равны и интегралы от них:

$$\int f(x)dx = \int g(y)dy + C \text{ или } \int f(x)dx + \int g(y)dy = C. \quad (2.2)$$

Когда удастся явно выразить одну переменную через другую, результат будет общим решением:

$$y = G(x) + C \text{ или } x = F(y) + C.$$

Пример 1. Найдём общий интеграл уравнения

$$xdx = (y + 1)dy$$

и уравнение интегральной кривой, проходящей через начало координат.

Решение. Проинтегрируем заданное уравнение

$$\int x dx - \int (y + 1) dy = C \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} - y = C.$$

Последнее равенство – это общий интеграл. Для нахождения уравнения искомой интегральной кривой зададим нулевые значения переменным. В этом случае $C = 0$. Уравнение интегральной кривой, проходящей через начало координат имеет вид

$$x^2 - y^2 - 2y = 0.$$

Пример 2. Найдём общий интеграл уравнения

$$x dx + y dy = 0.$$

Решение. Проинтегрируем заданное уравнение:

$$x^2 + y^2 = 2C, \quad C > 0.$$

Из общего интеграла следует, что интегральные кривые являются бесконечным семейством концентрических окружностей с центром в начале координат. Эти окружности не проходят через начало координат. Если исходное уравнение записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x},$$

то очевидно, что в начале координат производные неопределенны. В этом примере начало координат – особая точка. Её нельзя использовать в качестве начального условия.

2.3. Уравнения с разделяющимися переменными

Уравнения вида

$$P(x)Q(y)dx = G(x)R(y)dy, \quad \frac{P(x)}{Q(y)}dx = \frac{G(x)}{R(y)}dy, \quad y' = f(x)g(y)$$

называются уравнениями с разделяющимися переменными, их легко преобразовать в уравнения с разделёнными переменными.

Пример 1. Построим общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}$$

и изучим поведение интегральных кривых в окрестности начала координат.

Решение.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = 2 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = \ln x^2 + \ln C, C > 0 \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln(Cx^2) \Rightarrow |y| = Cx^2.$$

Общее решение уравнения можно записать в виде $y = Cx^2$, где $C \in \mathbb{R}$. В правой части исходного уравнения переменная x стоит в знаменателе, поэтому $x \neq 0$. Начало координат не принадлежит ни одной интегральной кривой. Но из полученного общего решения следует, что все интегральные кривые примыкают к началу координат, поэтому особая точка $O(0;0)$ является **узлом** (гл. 1).

Пример 2. Найдём общий интеграл уравнения

$$x(1+y^2)dx = -y(1+x^2)dy.$$

Решение. Разделим уравнение на $(1+x^2)(1+y^2)$, умножим на 2 и проинтегрируем полученное равенство:

$$\int \frac{2x}{1+x^2} dx + \int \frac{2y}{1+y^2} dy = 2C \Rightarrow \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} + \int \frac{d(1+y^2)}{1+y^2} \Rightarrow$$

$$\ln(1+x^2) + \ln(1+y^2) = 2C \Rightarrow \ln(1+x^2)(1+y^2) = 2C.$$

Общий интеграл можно записать в виде

$$(1+x^2)(1+y^2) = e^{2C}, C \in \mathbb{R}.$$

2.4. Уравнения с однородной правой частью.

Определение 1. Функция $f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k)$ называется **однородной функцией степени m** , $m \in \mathbb{Z}$, если для неё выполняется равенство

$$f(tx_1, tx_2, \dots, tx_{k-1}, tx_k) = t^m f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k).$$

Рассмотрим примеры однородных функций.

Пример 1. $f(x, y) = x^2 + 5xy - y^2$;

$$f(tx, ty) = t^2 x^2 + 5txty - t^2 y^2 = t^2(x^2 + 5xy - y^2) = t^2 f(x, y) \Rightarrow$$

$$f(tx, ty) = t^2 f(x, y).$$

$f(x, y)$ – однородная функция второй степени.

Пример 2. $f(x, y) = y/x$;

$$f(tx, ty) = \frac{ty}{tx} = \frac{y}{x} = f(x, y) \Rightarrow f(tx, ty) = f(x, y).$$

$f(x, y)$ – однородная функция нулевой степени.

Определение 2. Уравнение первого порядка

$$y' = f(x, y) \quad (2.3)$$

называется **однородным дифференциальным уравнением относительно x, y** , если функция $f(x, y)$ – однородная функция нулевой степени относительно этих переменных.

Такое уравнение всегда можно преобразовать в уравнение с разделёнными переменными. Предположим, что равенство (2.3) – однородное уравнение относительно x, y . Введём параметр t и преобразуем это уравнение:

$$t = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x, y) = f(tx, ty) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Сделаем подстановку

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu'.$$

Теперь уравнение (2.3) становится уравнением с разделёнными переменными:

$$u + xu' = g(u) \Rightarrow x \frac{du}{dx} = g(u) - u \Rightarrow \frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Общий интеграл последнего уравнения представляется в виде

$$\int \frac{du}{g(u) - u} - \ln|x| = C, \text{ где } u = \frac{y}{x}.$$

Рассмотрим случай $g(u) - u = 0$. Если решением этого уравнения будет число u_1 , возможно, что линейная функция $y = u_1 x$ – тоже решение исходного дифференциального уравнения (2.3). Это проверяется подстановкой в исходное уравнение.

Определение 3. Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (2.4)$$

называется однородным, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одинаковой степени.

Для решения уравнения (2.4) его следует сначала преобразовать к виду (2.3).

Замечание 1. При решении однородных дифференциальных уравнений относительно x, y можно использовать любую из двух подстановок

$$u = \frac{y}{x} \text{ или } v = \frac{x}{y}.$$

Обратимся к примерам построения общих интегралов и общих решений однородных уравнений первого порядка.

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}.$$

Решение.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x} + \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + xu' \Rightarrow \\ u + x \frac{du}{dx} &= u + \frac{1}{u} \Rightarrow x \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \Rightarrow u du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int u du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ \frac{u^2}{2} &= \ln|x| + C \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} = 2 \ln|x| + 2C. \end{aligned}$$

Общий интеграл равен

$$\frac{y^2}{x^2} - \ln x^2 = C,$$

Пример 4.

$$(y^2 + xy)dx - x^2 dy = 0.$$

Решение.

$$\begin{aligned} u &= \frac{y}{x} \Rightarrow y = x u \Rightarrow dy = x du + u dx \Rightarrow \\ (x^2 u^2 + x^2 u) dx - x^2 (x du + u dx) &= 0 \Rightarrow \\ x^2 ((u^2 + u - u) dx - x du) &= 0. \end{aligned}$$

Предположим, что $x \neq 0$, тогда $u^2 dx - x du = 0 \Rightarrow$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{x} - \int \frac{du}{u^2} = C.$$

Общий интеграл равен

$$\ln|x| + \frac{x}{y} = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Очевидно, что ось ординат $x = 0$, кроме точки $O(0,0)$, тоже решение исходного уравнения. Начало координат — это особая точка, так как в ней производная

$$\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}.$$

Пример 5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}.$$

Решение. Будем строить общее решение уравнения при условии $x \neq 0$.

$$y = xu \Rightarrow y' = u + xu' = 1 + u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = 1, \quad du = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int du = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$u = \ln|x| + C \Rightarrow \frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

Общее решение: $y = x(\ln|x| + C) = x \ln|x| + xC, \quad C \in \mathbb{R}.$

В начале координат правая часть исходного уравнения превращается в неопределенность $\frac{0}{0}$. Поэтому точка $O(0; 0)$ – особая точка. Изучим поведение полученного общего решения в окрестности начала координат.

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| + \lim_{x \rightarrow 0} xC = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = (\text{по Лопиталю}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{|x|}}{\frac{-1}{|x|^2}} = -\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0.$$

Приходим к предельному равенству

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} (x \ln|x| + Cx) = 0,$$

из которого следует, что в нашем примере начало координат – узел.

2.5. Уравнения, приводящиеся к однородным

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \quad (2.5)$$

параметры $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ – известные числа. Если $c_1 = c_2 = 0$, то правая часть этого уравнения – однородная функция. Разберём случай отсутствия однородности, т.е. случай, когда хотя бы один из коэффициентов c_1, c_2 не равен нулю.

Введём новые переменные $\tilde{x} = x + u, \tilde{y} = y + v$, где параметры u, v – неизвестны. Перепишем исходное уравнение в новых переменных:

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = f\left(\frac{a_1\tilde{x} + b_1\tilde{y} + a_1u + b_1v + c_1}{a_2\tilde{x} + b_2\tilde{y} + a_2u + b_2v + c_2}\right).$$

Для однородности правой части уравнения найдём такие два числа u, v , чтобы

$$\begin{cases} a_1 u + b_1 v + c_1 = 0, \\ a_2 u + b_2 v + c_2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 u + b_1 v = -c_1, \\ a_2 u + b_2 v = -c_2. \end{cases}$$

Если определитель этой системы не равен нулю, то числа u и v легко найти по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -c_1 & b_1 \\ -c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix},$$

$$u = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad v = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

Если определитель системы равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

значит, строки определителя пропорциональны:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = r \Rightarrow a_2 x + b_2 y = (a_1 x + b_1 y)r.$$

Сделаем подстановку

$$z = a_1 x + b_1 y, \quad rz = a_2 x + b_2 y, \quad z' = a_1 x' + b_1 y' = a_1 + b_1 y'.$$

Исходное уравнение (2.5) преобразовано в уравнение, содержащее только переменную z :

$$\frac{dz}{dx} = a_1 + b_1 f\left(\frac{z + c_1}{zr + c_2}\right) \Rightarrow \frac{dz}{dx} = g(z).$$

Решение уравнений такого типа представлено в п. 2.1.

2.6. Линейные уравнения

Уравнение

$$y'(x) + p(x)y = q(x) \tag{2.6}$$

называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Функции $p(x)$ и $q(x)$ – заданные непрерывные функции. Если функция $q(x) \neq 0$, уравнение будет неоднородным, если $q(x) = 0$ – однородное уравнение.

Запишем уравнение (2.6) в виде

$$y'(x) = -p(x)y + q(x)$$

и рассмотрим его в области

$$D_2 = \{x \in (a; b), y \in \mathbb{R}\}.$$

Правая часть этого уравнения удовлетворяет теореме Пикара (п. 1.1.1.). Поэтому в каждой точке области D_2 существует единственное решение. Через каждую точку этой области проходит одна интегральная кривая, особых решений нет. В качестве начальных условий для задачи Коши можно выбирать координаты любой точки из области D_2 .

ОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Однородное уравнение

$$y'(x) + p(x)y = 0 \quad (2.7)$$

легко преобразуется к уравнению с разделёнными переменными:

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int p(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

$$\ln|y| = \ln e^{-\int p(x)dx} + \ln C, C > 0 \Rightarrow \ln|y| = \ln C e^{-\int p(x)dx} \Rightarrow |y| = C e^{-\int p(x)dx}.$$

В последнем равенстве модуль можно убрать, тогда общее решение однородного уравнения можно записать в виде

$$y(x) = C e^{-\int p(x)dx}, \quad \text{где } C \in \mathbb{R}.$$

Уравнение (2.7) всегда имеет нулевое (*тривиальное*) решение $y \equiv 0$. Оно входит в общее решение при $C = 0$. Для задачи с начальным условием решение удобнее представлять в форме Коши:

$$y(x) = y_0 e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx}.$$

НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение

$$y'(x) + p(x)y = q(x) \quad (2.8)$$

можно решить тремя способами.

1. Метод Я. Бернулли. Неизвестную функцию $y(x)$ представим в виде произведения двух других неизвестных функций $u(x) = u, v(x) = v$:

$$y(x) = u(x)v(x) = uv.$$

Это гениальная по своей простоте идея. Ясно, что одну из двух новых неизвестных функций можно строить по собственному желанию.

Подставим произведение uv и его производную в уравнение (2.8)

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \Rightarrow u'v + u(v' + p(x)v) = q(x). \quad (2.9)$$

Строим функцию $v(x)$ так, чтобы максимально упростить последнее уравнение. Для этого достаточно приравнять нулю выражение, стоящее в скобках (2.9):

$$v' + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} + p(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -p(x)dx.$$

Полученное уравнение – это уравнение с разделёнными переменными, поэтому

$$\int \frac{dv}{v} = - \int p(x)dx \Rightarrow \ln|v| = - \int p(x)dx.$$

Достаточно взять только одну функцию $v(x) > 0$ при $C = 0$:

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Функцию $u(x)$ найдём из уравнения (2.9) при $(v' + p(x)v) = 0$:

$$u'v = q(x) \Rightarrow u'e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Rightarrow u' = e^{\int p(x)dx} q(x) \Rightarrow$$

$$\frac{du}{dx} = e^{\int p(x)dx} q(x) \Rightarrow$$

$$du = e^{\int p(x)dx} q(x)dx \Rightarrow \int du = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx \Rightarrow$$

$$u(x) = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C.$$

Получена формула общего решения уравнения (2.8):

$$y(x) = v(x)u(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C \right). \quad (2.10)$$

2. Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной). В этом методе общее решение неоднородного уравнения строится с помощью уже построенного решения соответствующего однородного уравнения (2.7)

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}, \quad \text{где } C \in \mathbb{R}.$$

Будем считать, что для неоднородного уравнения (2.8) константа C станет некоторой переменной $C(x)$. Поэтому решение построим в виде

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \quad (2.11)$$

Для нахождения $C(x)$ подставим $y(x)$ и $y'(x)$ производную в уравнение (2.8):

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)C(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

После элементарного упрощения приходим к дифференциальному уравнению, решением которого будет $C(x)$:

$$C'(x) = e^{\int p(x)dx} q(x) \Rightarrow \int C'(x)dx = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx \Rightarrow$$

$$C(x) = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C.$$

Построенную функцию $C(x)$ подставляем в (2.11) и вновь приходим к общему решению, полученному методом Я. Бернулли:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C \right).$$

3. Метод Эйлера. Умножим уравнение (2.8) на функцию,

$$\mu = e^{\int p(x)dx},$$

которую называют *интегрирующим множителем*:

$$y'(x)e^{\int p(x)dx} + p(x)y(x)e^{\int p(x)dx} = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Левую часть последнего уравнения можно записать в виде производной произведения двух функций:

$$(y(x)e^{\int p(x)dx})' = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

После интегрирования приходим к равенству

$$y(x)e^{\int p(x)dx} = \int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C,$$

из которого снова получается общее решение уравнения (2.8):

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left(\int e^{\int p(x)dx} q(x)dx + C \right).$$

Замечание 2. Решение уравнения (2.8) с заданными начальными данными $\{x_0, y_0\}$ может быть записано в форме Коши:

$$y(x) = e^{-\int_{x_0}^x p(x)dx} \left(\int_{x_0}^x e^{\int_{x_0}^x p(x)dx} q(x)dx + y_0 \right). \quad (2.12)$$

Из равенства (2.12) видно, что решение уравнения (2.8) непрерывно зависит от начального условия $y(x_0) = y_0$.

Разберём примеры построения решений линейных уравнений 1-го порядка.

Пример 1.

$$y' + \frac{1}{x}y = 9x.$$

Найдём уравнение интегральной кривой, проходящей через точку $H(5; 6)$.

Решение. Строим общее решение по формуле (2.10):

$$y(x) = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int e^{\int \frac{1}{x} dx} 9x dx + C \right) = e^{-\ln|x|} \left(9 \int e^{\ln|x|} x dx + C \right),$$

$$y(x) = \frac{1}{|x|} \left(9 \int |x| x dx + C \right) = 9 \frac{\pm x^3}{\pm 3x} \pm \frac{C}{x} = 3x^2 + \frac{C}{x}, C \in \mathbb{R}.$$

Общее решение

$$y(x) = 3x^2 + \frac{C}{x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Подставим координаты начальной точки в общее решение:

$$6 = 3 \cdot 25 + \frac{C}{5} \Rightarrow C = -345.$$

Получаем уравнение интегральной кривой, проходящей через точку $H(5; 6)$:

$$y_H(x) = 3x^2 - \frac{345}{x}.$$

Пример 2. Найдём общее решение уравнения

$$x dy + (x^2 - y) dx = 0.$$

Решение. Разберём случай, когда $x \neq 0$. Разделим уравнение на $x dx$ и приведём к виду

$$y'(x) - \frac{1}{x}y = -x.$$

Из этого уравнения следует, что производная $y'(x)$ не определена в начале координат, поэтому точка $O(0; 0)$ – особая точка. Записываем общее решение уравнения:

$$y(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} \left(- \int e^{-\int \frac{1}{x} dx} x dx + C \right) = e^{\ln|x|} \left(- \int e^{-\ln|x|} x dx + C \right),$$

$$y(x) = -|x| \left(\int \frac{1}{|x|} x dx - C \right) = -x^2 + xC.$$

Общее решение равно $y(x) = -x^2 + Cx$, $C \in \mathbb{R}$.

У исходного уравнения есть ещё одно решение $x = 0$. Интегральной кривой является ось OY без одной точки $O(0; 0)$.

Пример 3. Найдём общее решение уравнения.

$$2ydx + (y^2 - 2x)dy = 0.$$

Решение. Это линейное дифференциальное уравнение относительно переменной x , поэтому его лучше привести к виду

$$\frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x + \frac{y}{2} = 0 \Rightarrow x' - \frac{1}{y}x = -\frac{y}{2} \Rightarrow p(y) = -\frac{1}{y}, q(y) = -\frac{y}{2};$$

$$x(y) = e^{\int \frac{1}{y} dy} \left(-\frac{1}{2} \int e^{-\int \frac{1}{y} dy} y dy + C \right) = |y| \left(-\frac{1}{2} \int \frac{1}{|y|} y dy + C \right).$$

Общее решение равно

$$x(y) = -\frac{1}{2}y^2 + Cy, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

2.7. Нелинейные уравнения

Некоторые нелинейные дифференциальные уравнения удаётся преобразовать в линейные с помощью введения новой переменной. В качестве примера обратимся к решению знаменитого уравнения И. Бернулли.

2.7.1. Уравнение И. Бернулли

$$y' + p(x)y = q(x)y^\beta, \quad \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}. \quad (2.13)$$

Предположим, что $y \neq 0$, разделим уравнение (2.13) на y^β :

$$\frac{y'}{y^\beta} + \frac{p(x)}{y^{\beta-1}} = q(x).$$

Сделаем подстановку

$$z = \frac{1}{y^{\beta-1}} = y^{1-\beta} \Rightarrow z' = (1-\beta)y'y^{1-\beta-1} = \frac{(1-\beta)y'}{y^\beta} \Rightarrow$$

$$\frac{y'}{y^\beta} = \frac{z'}{(1-\beta)}.$$

Уравнение (2.13) становится линейным относительно новой переменной z

$$\frac{z'}{(1-\beta)} + p(x)z = q(x) \Rightarrow z' + (1-\beta)p(x)z = (1-\beta)q(x) \Rightarrow$$

$$z(x) = e^{-(1-\beta) \int p(x) dx} \left((1-\beta) \int e^{(1-\beta) \int p(x) dx} q(x) dx + C \right). \quad (2.14)$$

Выразим неизвестную функцию $y(x)$ через найденную функцию $z(x)$:

$$y(x) = (z(x))^{1/(1-\beta)}.$$

Общее решение уравнения Бернулли (2.13) можно записать в виде

$$y(x) = e^{-\int p(x) dx} \left((1-\beta) \int e^{(1-\beta) \int p(x) dx} q(x) dx + C \right)^{1/(1-\beta)}. \quad (2.15)$$

Замечание 3. Если в уравнении Бернулли $\beta > 1$, значит, есть ещё частное тривиальное решение $y \equiv 0$. Если $0 < \beta < 1$, то это решение будет особым.

Пример 1. Найдём общее решение уравнения Бернулли

$$y' - 2xy = 2x^3y^2 \quad (\beta = 2)$$

и уравнение интегральной кривой, проходящей через точку $M(0; 1)$.

Решение. Разделим уравнение на y^2 ($y \neq 0$):

$$\frac{y'}{y^2} - 2x \frac{1}{y} = 2x^3.$$

Сделаем подстановку

$$z(x) = \frac{1}{y^{\beta-1}} = \frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{y'}{y^2}.$$

Исходное уравнение становится линейным относительно переменной z :

$$-z' - 2xz = 2x^3 \Rightarrow z' + 2xz = -2x^3, \quad \text{где } p(x) = 2x, \quad q(x) = -2x^3.$$

Запишем общее решение по формуле (2.14)

$$z(x) = e^{-2 \int x dx} \left(- \int e^{2 \int x dx} 2x^3 dx + C \right) = e^{-x^2} \left(- \int e^{x^2} 2x^3 dx + C \right).$$

Возьмём интеграл

$$I = \int e^{x^2} 2x^3 dx$$

с помощью подстановки ($t = x^2 \Rightarrow dt = 2x dx$) $\Rightarrow I = \int t e^t dt$.

Последний интеграл берётся по частям ($\int u dv = uv - \int v du$):

$$\left(\begin{array}{l} u = t, \quad dv = e^t dt \\ du = dt, \quad v = e^t \end{array} \right) \Rightarrow I = te^t - \int e^t dt = e^t(t - 1) = e^{x^2}(x^2 - 1).$$

В результате

$$z(x) = e^{-x^2}(-e^{-x^2}(x^2 - 1) + C) \Rightarrow z(x) = Ce^{-x^2} - x^2 + 1.$$

Общее решение уравнения в данном примере строится по формуле (2.15)

$$y(x) = (Ce^{-x^2} - x^2 + 1)^{-1} = \frac{1}{Ce^{x^2} - x^2 + 1}.$$

Из общего решения следует, что ось ОХ — это асимптота всех интегральных кривых уравнения. Частным решением уравнения является тривиальное решение $y \equiv 0$. Найдем уравнение кривой, проходящей через точку $M(0; 1)$

$$y(0) = 1 = (1 - 0 + Ce^0)^{-1} \Rightarrow 1 = \frac{1}{1 + C} \Rightarrow C = 0.$$

Уравнение интегральной кривой, проходящей через точку $M(0; 1)$, имеет вид

$$y_M(x) = \frac{1}{1 - x^2}.$$

2.7.2. Уравнение в полных дифференциалах

Из курса математического анализа известно, что у дифференцируемой функции $U(x; y)$ есть два **частных дифференциала**

$$dU_x(x, y) = U'_x(x, y) dx; \quad dU_y(x, y) = U'_y(x, y) dy.$$

Полным дифференциалом называется сумма частных дифференциалов:

$$dU(x, y) = dU_x(x, y) + dU_y(x, y) = U'_x(x, y)dx + U'_y(x, y)dy.$$

По заданному полному дифференциалу некоторой функции $U(x, y)$ можно найти саму функцию по любой из двух формул:

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x U'_x(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y U'_y(x_0, y)dy + C, \quad (2.16)$$

$$U(x, y) = \int_{x_0}^x U'_x(x, y)dx + \int_{y_0}^y U'_y(x_0, y)dy + C, \quad (2.17)$$

где x_0, y_0 — координаты любой точки из общей области определения частных производных функции

$$U'_x(x, y) \quad \text{и} \quad U'_y(x, y).$$

Предположим, что в некоторой *односвязной области* D_2 заданы две непрерывно дифференцируемые функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$. Далее будем опираться на теорему, связанную с такими функциями.

Теорема 1. Для того чтобы выражение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

было полным дифференциалом функции, необходимо и достаточно выполнения тождества

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$$

во всей области D_2 .

Уравнение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad (2.18)$$

называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть уравнения $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ – полный дифференциал непрерывно дифференцируемой функции $U(x, y)$:

$$P(x, y) = U'_x(x, y), \quad Q(x, y) = U'_y(x, y) \Rightarrow dU = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

Проинтегрируем уравнение в полных дифференциалах

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = C \quad (2.19)$$

или

$$\int_{x_0}^x P(x, y)dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y)dy = C, \quad (2.20)$$

Общий интеграл уравнения в полных дифференциалах можно записать в виде (2.19) или (2.20).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ

Если начальное условие задано в точке $N(x_0, y_0)$, величины $P(x_0, y_0)$ и $Q(x_0, y_0)$ одновременно не равны нулю, тогда решение задачи Коши получается в виде

$$\int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy = 0 \quad (2.21)$$

или

$$\int_{x_0}^x P(x, y) dx + \int_{y_0}^y Q(x_0, y) dy = 0. \quad (2.22)$$

Замечание 4. Уравнение в полных дифференциалах не имеет особых решений, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – многочлены относительно переменных x, y и одновременно не превращаются в ноль в некоторой точке плоскости. Если есть точка $N(x_0, y_0)$, в которой

$$P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0,$$

тогда $N(x_0, y_0)$ – особая точка. Задача Коши с начальным условием в особой точке может не иметь решения или решение будет не единственным.

Пример 1. Найдём общий интеграл уравнения

$$\frac{1}{x} dy - \frac{y}{x^2} dx = 0.$$

Решение. Проверим правую часть уравнения на полный дифференциал:

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2}, Q(x, y) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Интегрируем уравнение по формуле (2.19):

$$-\int_1^x \frac{1}{x^2} dx + \int_1^y \frac{1}{x} dy = C.$$

Общий интеграл уравнения равен

$$\frac{1-x}{x} + \frac{y-1}{x} = C.$$

Пример 2. Решим задачу Коши для уравнения

$$(x-y)dx + (2y-x)dy = 0; \quad x_0 = 1, y_0 = 0.$$

Решение.

$$(x-y)'_y = -1; \quad (2y-x)'_x = -1.$$

Частные производные равны. Значит, это уравнение в полных дифференциалах. Интегрируем уравнение по формуле (2.21)

$$\int_1^x (x-0)dx + \int_0^y (2y-x)dy = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + y^2 - xy = 0.$$

Решение задачи Коши представляем в виде неявно заданной функции

$$\frac{x^2}{2} + y^2 - xy = \frac{1}{2}.$$

ИНТЕГРИРУЮЩИЙ МНОЖИТЕЛЬ

Предположим, что уравнение (2.18) не является уравнением в полных дифференциалах. Теоретически можно построить такой интегрирующий множитель $\mu(x, y)$, что уравнение

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0 \quad (2.23)$$

станет уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial(\mu(x, y)P(x, y))}{\partial y} \equiv \frac{\partial(\mu(x, y)Q(x, y))}{\partial x}. \quad (2.24)$$

Решение уравнения (2.23) является решением уравнения (2.18). Но при таком способе построения решения могут быть потеряны особые решения или появиться посторонние решения, если множитель $\mu(x, y)$ в некоторой части области D_2 превращается в бесконечность или в ноль.

Процесс нахождения $\mu(x, y)$ в общем случае может быть гораздо сложнее исходной задачи. Поэтому рассмотрим, без доказательства, только три простых случая.

1. Если

$$\frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{Q(x, y)} = p(x) \Rightarrow \mu(x, y) = \mu(x) = e^{\int p(x)dx}. \quad (2.25)$$

2. Если

$$\frac{\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}}{-P(x, y)} = p(y) \Rightarrow \mu(x, y) = \mu(y) = e^{\int p(y)dy}. \quad (2.26)$$

3. Если уравнение (2.18) является однородным, тогда

$$\mu(x, y) = \frac{1}{xP(x, y) + yQ(x, y)}. \quad (2.27)$$

Следует отдельно рассмотреть случай, когда $xP(x, y) + yQ(x, y) = 0$. Решения этого уравнения могут быть особыми решениями уравнения (2.18).

Пример 3. Построим общий интеграл уравнения

$$(1 - x^2y) dx + x^2(y - x) dy = 0.$$

Решение. $(1 - x^2y)'_y = -x^2$, $(x^2y - x^3)'_x = 2xy - 3x^2$.

Частные производные не совпадают, поэтому это уравнение не в полных дифференциалах. Посмотрим, есть ли интегрирующий множитель, зависящий только от одной переменной. Для этого используем соотношения (2.25) или (2.26):

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-x^2 - 2xy + 3x^2}{x^2(y-x)} = -\frac{2}{x} = p(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int p(x)dx} = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Умножим исходное уравнение на найденный интегрирующий множитель $\mu(x)$:

$$\frac{1}{x^2}(1 - x^2y)dx + \frac{1}{x^2}x^2(y - x)dy = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)dy = 0.$$

Строим частные производные по последнему уравнению

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)'_y = -1; \quad (y - x)'_x = -1 \Rightarrow \left(\frac{1}{x^2} - y\right)'_y \equiv (y - x)'_x.$$

Частные производные совпадают, значит, уравнение

$$\left(\frac{1}{x^2} - y\right)dx + (y - x)dy = 0$$

является уравнением в полных дифференциалах, поэтому

$$\int_1^x \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx + \int_1^y (y - x)dy = C,$$

$$\frac{-1}{x} - x - (-1 - 1) + \frac{y^2}{2} - xy - \left(\frac{1}{2} - x\right) = C.$$

Общий интеграл можно записать в виде

$$\frac{y^2}{2} - \frac{1}{x} - xy + \frac{3}{2} = C.$$

Интегральный множитель $\mu(x)$ превращается в бесконечность при $x = 0$. Из аналитического вида исходного уравнения видно, что ось ординат – тоже решение уравнения. Можно сказать, что это частное решение входит в общий интеграл при $C = \infty$, значит, посторонних решений нет. Потерянных особых решений нет, так как наш интегральный множитель не обращается в ноль.

ОСОБЫЕ ТОЧКИ

Классификация особых точек дифференциального уравнения была введена А. Пуанкаре:

nœud – **узел**, *centre* – **центр**, *foyer* – **фокус**, *col* – **горное седло (перевал)**.

Приведём несколько простых примеров особых точек $M(x_0, y_0)$ уравнений первого порядка в форме

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0, \text{ где } Q(x_0; y_0) = P(x_0; y_0) = 0.$$

1. Через особую точку проходит бесконечное множество интегральных кривых, включая координатные оси (рис.2.1).

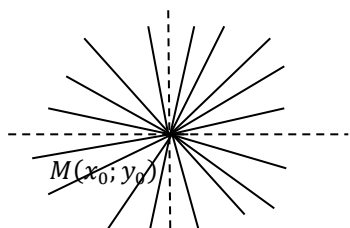


Рис.. 2.1

Особая точка – дикритический
(особый) узел.

$$\text{Уравнение } ydx - xdy = 0.$$

$$\text{Общее решение } y = Cx.$$

2. Через особую точку проходит бесконечное множество интегральных кривых. Координатные оси – тоже интегральные линии (рис.2.2).

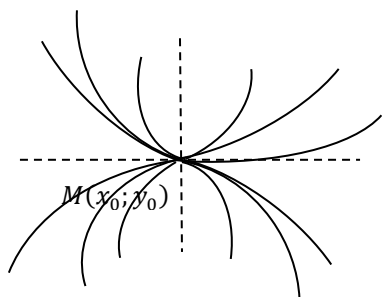


Рис. 2.2

Особая точка – узел.

$$\text{Уравнение } 2ydx - xdy = 0.$$

$$\text{Общее решение } y = Cx^2.$$

3. Через особую точку не проходит ни одной интегральной кривой (рис.2.3).

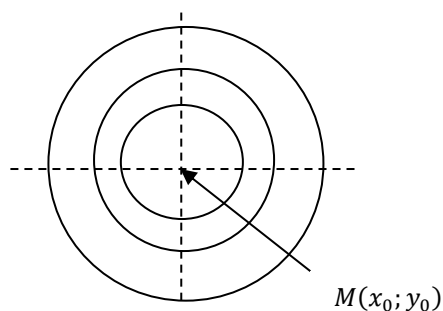


Рис. 2.3

Особая точка – центр.

$$\text{Уравнение } xdx + ydy = 0.$$

$$\text{Общий интеграл } x^2 + y^2 = C^2.$$

4. Через особую точку проходят две интегральные кривые – координатные оси (рис.2.4).

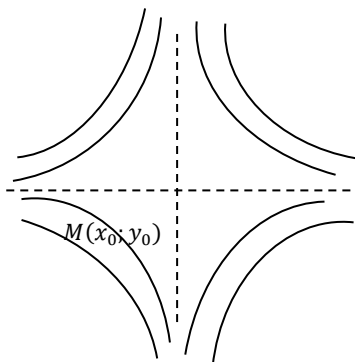


Рис. 2.4

Особая точка – седло.

Уравнение $ydx + xdy = 0$.

Общее решение $y = C/x$.

Глава 3

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

*Ключ к расшифровке языка вселенной –
математические соотношения.....*

Галилео Галилей

Для понимания методов решения дифференциальных уравнений высших порядков напомним несколько общих математических понятий.

1. Предположим, что есть множество функций $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ для $x \in (a; b)$ и множество постоянных величин $\{C_i\}_{i=1}^n$, тогда выражение

$$\sum_{i=1}^n C_i y_i(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$$

называется **линейной комбинацией функций** $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$.

Если рассматривать векторы $\{e_i\}_{i=1}^n$ в n -мерном векторном пространстве, то линейной комбинацией векторов будет

$$\sum_{i=1}^n C_i e_i = C_1 e_1 + C_2 e_2 + \dots + C_n e_n.$$

2. Функции $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ называются **линейно независимыми в области** $(a; b)$, если их линейная комбинация равна нулю только при равенстве нулю всех постоянных C_i для любого $x \in (a; b)$:

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0 \Rightarrow \{C_i = 0\}_{i=1}^n.$$

Векторы $\{e_i\}_{i=1}^n$ в n -мерном векторном пространстве называются **линейно независимыми**, если их линейная комбинация равна нулю только при равенстве нулю всех постоянных C_i :

$$C_1 e_1 + C_2 e_2 + \dots + C_n e_n = 0 \Rightarrow \{C_i = 0\}_{i=1}^n.$$

Свойство линейно независимых векторов. Векторы $\{e_i\}_{i=1}^n$

$$e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

в n -мерном векторном пространстве будут линейно независимы, если не равен нулю определитель, составленный из координат (компонент) этих векторов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.1)$$

Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка называется уравнение

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = f(x), \quad (3.2)$$

где коэффициенты $\{p_i(x)\}_{i=1}^n$ и функция $f(x)$ предполагаются непрерывными в области $(a; b)$. У такого уравнения особых решений нет. Задача Коши всегда имеет единственное решение для произвольных начальных условий:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad \forall x_0 \in (a; b).$$

3.1. Однородные уравнения порядка n

Рассмотрим различные способы решения уравнений вида

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = 0, \quad (3.3)$$

где коэффициенты $\{p_i(x)\}_{i=1}^n$ предполагаются непрерывными в заданной области. Пусть известны m решений этого уравнения

$$\{y_i(x) = y_i\}_{i=1}^m.$$

Теорема 1. Любая линейная комбинация решений $\{y_i\}_{i=1}^m$ уравнения (3.3) – тоже решение этого уравнения.

Доказательство. Операция дифференцирования линейна, поэтому линейен дифференциальный оператор

$$D_n = \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-2}(x) \frac{d^2}{dx^2} + p_{n-1}(x) \frac{d}{dx} + p_n(x). \quad (3.4)$$

Запишем уравнение (3.3) с помощью оператора D_n :

$$D_n(y_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Из линейности этого оператора следует, что

$$C_1 D_n(y_1) + C_2 D_n(y_2) + \dots + C_m D_n(y_m) = D_n(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m) = 0.$$

Последнее равенство говорит о том, что линейная комбинация решений уравне-

ния – тоже решение этого уравнения. Теорема доказана.

Предположим, что количество найденных решений уравнения (3.3) равно порядку этого уравнения $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$. Введём вспомогательные векторы

$$\mathbf{e}_1(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2(x) = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2' \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n(x) = \begin{pmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

и построим определитель $W(x)$, аналогичный определителю (3.1):

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \vdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \vdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \vdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Если определитель $W(x) \neq 0$ хотя бы в одной точке $x_0 \in (a; b)$, то функции $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ являются линейно независимыми. Такие решения называют **фундаментальной системой решений**. Верно и обратное утверждение. Определитель $W(x)$ для фундаментальной системы решений всегда не равен нулю.

Определитель $W(x)$ называется вронскианом или определителем Вронского и используется в теории дифференциальных уравнений.

Замечание 1. Если определитель Вронского не равен нулю в одной точке $x_0 \in (a, b)$, то $W(x) \neq 0$ во всей области $(a; b)$.

Для нахождения аналитического вида общего решения уравнения (3.3) обратимся к следующей теореме.

Теорема 2. Если решения $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка линейно независимы для $\forall x \in (a; b)$, тогда общим решением этого уравнения является функция

$$y_{00}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x), \quad (3.5)$$

где $\{C_i\}_{i=1}^n$ – произвольные постоянные.

Доказательство. В теореме 1 уже доказано, что $y_{00}(x)$ – решение уравнения. Осталось доказать, что с помощью этого решения можно найти любое частное решение с заданными начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \quad \forall x_0 \in (a; b).$$

Подставляем в начальные условия общее решение (3.5) и его производные, приходим к линейной алгебраической системе

[illegible]

Определитель этой системы – вронскиан, а $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ – фундаментальная система решений, поэтому $W(x_0) \neq 0$. Значит, у построенной системы всегда есть единственное решение $\{C_i\}_{i=1}^n$ для заданных начальных условий. Теорема доказана.

После доказательства этой теоремы возникает вопрос о нахождении фундаментальной системы решений. Будем рассматривать самые простые уравнения.

3.1.1. Уравнения с постоянными коэффициентами

МЕТОД ЭЙЛЕРА

Разберём один из самых элегантных методов построения фундаментальной системы решений для линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}(x) + p_1 y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1} y'(x) + p_n y(x) = 0. \quad (3.6)$$

Все коэффициенты $\{p_i\}$ – константы, поэтому левая часть уравнения (3.6) является линейной комбинацией неизвестной функции $y(x)$ и её производных. Из уравнения следует, что эта линейная комбинация равна нулю при любом $x \in (a; b)$. Очевидно, что это возможно, если функция и её производные принадлежат одному классу функций. Среди элементарных функций такое свойство есть, прежде всего, у показательной функции:

$$y(x) = e^{rx} \implies y'(x) = re^{rx}, y''(x) = r^2 e^{rx}, \dots, y^{(n)}(x) = r^n e^{rx}.$$

Найдём такое значение параметра r , при котором функция $y(x) = e^{rx}$ будет решением нашего уравнения. Для этого подставим e^{rx} и её производные в уравнение (3.6):

$$r^n e^{rx} + p_1 r^{n-1} e^{rx} + \dots + p_n e^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx} (r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_n) = 0 \Rightarrow$$

$$r^n + p_1 r^{n-1} + \cdots + p_n = 0. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения (3.6). Корни характеристического уравнения будут искомыми значениями параметра r . Перейдём к решению алгебраического уравнения (3.7).

Из высшей алгебры известно, что у алгебраического уравнения n -й степени

всегда есть ровно n корней в множестве комплексных чисел. Возможны следующие случаи.

1. Все корни действительны и различны.
2. Все корни действительны, но среди них есть кратные (одинаковые) корни.
3. Есть комплексные корни.

В 1-м случае все корни действительны и различны, значит, есть n различных решений уравнения (3.6):

$$y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \dots, y_n = e^{r_n x}. \quad (3.8)$$

Докажем, что найденные решения дифференциального уравнения линейно независимы. Возьмём два любых решения

$$y_i = e^{r_i x}, y_j = e^{r_j x}; \quad r_i x - r_j x = (r_i - r_j)x; \quad \lambda = r_i - r_j \Rightarrow r_i = r_j + \lambda \Rightarrow$$

$$y_i = e^{r_i x} = e^{(r_j + \lambda)x} = e^{r_j x + \lambda x} = e^{r_j x} e^{\lambda x} \Rightarrow y_i = e^{\lambda x} y_j, \quad e^{\lambda x} \neq \text{const}.$$

Очевидно, что $e^{\lambda x}$ – переменная величина, поэтому решения y_i и y_j линейно независимы. Полученный результат говорит о линейной независимости построенных решений (3.8). По теореме 2 общее решение однородного уравнения (3.6) имеет вид

$$y_{\text{оо}}(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \dots + C_n e^{r_n x}.$$

Рассмотрим 2-й случай. Предположим, что корень r_1 характеристического уравнения (3.7) имеет кратность 2 ($k=2$). Докажем, что в этом случае функция $y = x e^{r_1 x}$ будет решением исходного уравнения. Подставим эту функцию вместе с её производными в уравнение (3.6) и сгруппируем отдельно слагаемые, содержащие множитель x и слагаемые без этого множителя

$$y' = e^{r_1 x} + x r_1 e^{r_1 x}, \quad y'' = 2r_1 e^{r_1 x} + x r_1^2 e^{r_1 x}, \quad y^{(3)} = 3r_1^2 e^{r_1 x} + x r_1^3 e^{r_1 x}, \dots,$$

$$y^{(n)} = n r_1^{n-1} e^{r_1 x} + x r_1^n e^{r_1 x};$$

уравнение (3.6) преобразуется к виду

$$e^{r_1 x} (x(r_1^n + p_1 r_1^{n-1} + \dots + p_n) + (n r_1^{n-1} + (n-1)p_1 r_1^{n-2} + \dots + p_{n-1})) = 0.$$

Известно, что число r_1 – корень характеристического уравнения (3.7), тогда

$$P_n(r_1) = (r_1^n + p_1 r_1^{n-1} + \dots + p_n) \equiv 0.$$

Покажем, что если у полинома

$$P_n(r) = r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_n$$

есть корень r_1 кратности $k \geq 2$, то у производной этого полинома есть такой же корень кратности $k-1$.

Будем рассматривать r_1 как переменную величину и продифференцируем полином $P_n(r_1)$ по этой переменной:

$$P'_n(r_1) = (nr_1^{n-1} + (n-1)p_1r_1^{n-2} + \dots + p_{n-1}). \quad (3.9)$$

Запишем полином $P_n(r)$ как произведение линейных множителей с учётом кратности корня r_1 , а $r_2, \dots, r_n$ — остальные корни полинома $P_n(r)$

$$P_n(r) = (r - r_1)^k (r - r_2) \dots (r - r_n).$$

Если вновь взять производную, считая, r_1 переменной, то

$$P'_n(r_1) = -k(r - r_1)^{k-1} (r - r_2) \dots (r - r_n).$$

Из последнего равенства сразу следует, что число r_1 — корень производной, значит, эта же производная, представленная в форме (3.9) равна нулю если $r = r_1$:

$$P'_n(r_1) = (nr_1^{n-1} + (n-1)p_1r_1^{n-2} + \dots + p_{n-1}) \equiv 0.$$

После подстановки функции $y = xe^{r_1 x}$ в уравнение (3.6) оно превратится в тождество, поэтому $y = xe^{r_1 x}$ — решение этого уравнения и оно входит в фундаментальную систему решений.

Остановимся на 3-м случае. Из алгебры многочленов с действительными коэффициентами известно, что комплексные корни всегда появляются только комплексно сопряжёнными парами. Предположим, что два корня характеристического уравнения равны соответственно $r_1 = \alpha + i\beta$ и $r_2 = \alpha - i\beta$. Значит, два решения уравнения (3.6) имеют вид

$$y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}, \quad y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}. \quad (3.10)$$

Используем формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ для другого представления решения

$$y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)) = e^{\alpha x} \cos(\beta x) + i e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Для удобства введём новые обозначения

$$e^{\alpha x} \cos(\beta x) = u(x) = u, \quad e^{\alpha x} \sin(\beta x) = v(x) = v \Rightarrow y_1(x) = u + iv.$$

Докажем, что функции u, v тоже будут решениями уравнения (3.6).

Подставим в это уравнение решение $y_1(x) = u + iv$ и его производные:

$$(u + iv)^{(n)} + p_1(u + iv)^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(u + iv)' + p_n(u + iv) = 0.$$

Полученное уравнение можно преобразовать к виду

$$(u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u' + p_n u) + \\ + i(v^{(n)} + p_1 v^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} v' + p_n v) = 0 = 0 + i0.$$

Две комплексные величины равны, если равны соответственно их действительные и мнимые части:

$$u^{(n)} + p_1 u^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} u' + p_n u = 0,$$

$$v^{(n)} + p_1 v^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} v' + p_n v = 0.$$

Из этих уравнений следует, что функции

$$u(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad v(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$$

являются решениями уравнения (3.6). Они линейно независимы, так как линейно независимы величины $\cos(\beta x)$ и $\sin(\beta x)$:

$$\cos(\beta x) = \sqrt{1 - \sin^2(\beta x)}.$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$ входят в фундаментальную систему решений.

Замечание 2. Одно комплексное решение $y_1(x) = e^{(\alpha+i\beta)x}$ привело к двум действительным линейно независимым решениям. Поэтому второе комплексное решение $y_2(x) = e^{(\alpha-i\beta)x}$ не используется.

Алгоритм решения любого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами очень прост.

1. По данному уравнению строится характеристическое уравнение.
2. Находятся корни характеристического уравнения.
3. В зависимости от вида найденных корней характеристического уравнения сразу строится общее решение дифференциального уравнения.
4. Если из общего решения надо выделить частное решение с заданными начальными условиями, тогда, с помощью этих начальных условий, строится линейная система, из которой находятся соответствующие численные значения параметров $\{C_i\}_{i=1}^n$.

Пример 1. $y'' - 6y' + 8y = 0$. Начальные условия: $y(0) = 1, y'(0) = 1$.

Решение. Строим и решаем характеристическое уравнение:

$$r^2 - 6r + 8y = 0 \Rightarrow r_1 = 4, r_2 = 2.$$

Общее решение

$$y_{oo}(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{2x}.$$

Найдём частное решение с заданными начальными условиями:

$$y_{oo}(0) = C_1 e^{4 \cdot 0} + C_2 e^{2 \cdot 0} = C_1 + C_2 = 1,$$

$$y'_{oo}(x) = 4C_1 e^{4x} + 2C_2 e^{2x}, \quad y'_{oo}(0) = 4C_1 e^{4 \cdot 0} + 2C_2 e^{2 \cdot 0} = 4C_1 + 2C_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ 4C_1 + 2C_2 = 1. \end{cases} \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}; C_2 = \frac{3}{2}.$$

Частное решение с заданными начальными условиями имеет вид

$$y_{чо}(x) = -\frac{1}{2} e^{4x} + \frac{3}{2} e^{2x}.$$

Пример 2. $y'' - 4y' + 4y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 0.$

Решение.

$$r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r - 2)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = 2 \text{ (кратности 2)}.$$

Общее решение

$$y_{oo}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} = e^{2x}(C_1 + C_2 x).$$

Находим частное решение.

$$y_{oo}(0) = C_1 = 1,$$

$$y'(x) = 2e^{2x}(C_1 + C_2 x) + e^{2x}C_2 \Rightarrow y'_{oo}(0) = 2C_1 + C_2 = 0,$$

$$C_1 = 1 \Rightarrow C_2 = -2.$$

Частное решение равно

$$y_{ч.о}(x) = e^{2x}(1 - 2x).$$

Пример 3. $y'' + 9y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1.$

Решение.

$$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r^2 = -9 \Rightarrow r = 3i.$$

Общее решение

$$y_{oo}(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

Строим частное решение.

$$y_{oo}(0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$y'_{oo}(x) = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x, \quad y'_{oo}(0) = 3C_2 = 1, \quad C_2 = \frac{1}{3}.$$

Частное решение равно

$$y_{\text{чо}}(x) = \frac{1}{3} \sin 3x.$$

Пример 4. $y'' + 10y' + 9y = 0$; $y(0) = 2, y'(0) = 2$.

Решение.

$$r^2 + 10r + 9 = 0 \Rightarrow r = -5 + 2i.$$

Общее решение

$$y_{\text{оо}}(x) = e^{-5x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Строим решение с заданными начальными условиями.

$$y_{\text{оо}}(0) = C_1 = 2,$$

$$y'_{\text{оо}}(x) = -5e^{-5x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + e^{-5x}(-2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x),$$

$$y'_{\text{оо}}(0) = -5C_1 + 2C_2 = 2 \Rightarrow 2C_2 = 12 \Rightarrow C_2 = 6.$$

Частное решение равно

$$y_{\text{чо}}(x) = e^{-5x}(2 \cos 2x + 6 \sin 2x).$$

3.2. Неоднородные уравнения порядка n

Теорема 3. Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = f(x) \quad (3.11)$$

равно сумме общего решения однородного уравнения

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = 0 \quad (3.12)$$

и частного решения неоднородного уравнения (3.11).

Доказательство. Для краткости запишем уравнения (3.11) и (3.12) с помощью дифференциального оператора (3.4):

$$D_n(y(x)) = f(x), \quad D_n(y(x)) = 0.$$

Пусть функция $y_{\text{оо}}(x)$ – общее решение уравнения (3.12), а функция $y_{\text{чн}}(x)$ – частное решение уравнения (3.11):

$$D_n(y_{\text{оо}}(x)) = 0, \quad D_n(y_{\text{чн}}(x)) = f(x).$$

Дифференциальный оператор D_n линеен, поэтому

$$D_n(y_{\text{оо}}(x)) + D_n(y_{\text{чн}}(x)) = 0 + f(x) \Rightarrow D_n(y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x)) = f(x).$$

Из последнего равенства следует, что

$$y_{00}(x) + y_{\text{чн}}(x) = y(x) - \text{решение уравнения (3.11)}.$$

Осталось доказать, что сумма $y_{00}(x) + y_{\text{чн}}(x)$ является общим решением $y_{0\text{н}}(x)$ неоднородного уравнения (3.11). Это означает, что из решения

$$y_{\text{OH}}(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x) + y_{\text{QH}}(x) \quad (3.13)$$

всегда можно получить частное решение с заданными начальными условиями. Пусть в некоторой точке x_0 известны начальные условия

$$y(x_0) = y_{00}, \quad y'(x_0) = y_{01}, \quad y''(x_0) = y_{02}, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{0(n-1)}.$$

Подставим начальные условия в решение (3.13):

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n C_i y_i(x_0) + y_{\text{qH}}(x_0) = y_{00}, \\ \sum_{i=1}^n C_i y'_i(x_0) + y'_{\text{qH}}(x_0) = y_{01}, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n-1)}(x_0) + y_{\text{qH}}^{(n-1)}(x_0) = y_{0(n-1)}^{(n-1)}; \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n C_i y_i(x_0) = y_{00} - y_{\text{qH}}(x_0), \\ \sum_{i=1}^n C_i y'_i(x_0) = y_{01} - y'_{\text{qH}}(x_0), \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n-1)}(x_0) = y_{0(n-1)}^{(n-1)} - y_{\text{qH}}^{(n-1)}(x_0). \end{array} \right. \quad (3.14)$$

В системе линейных алгебраических уравнений (3.14) неизвестны величины $\{C_i\}_{i=1}^n$. Определитель этой системы – вронскиан, построенный на фундаментальной системе решений однородного уравнения (3.12), поэтому он не равен нулю. Значит, у системы есть единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. Следовательно, решение (3.13) является общим решением неоднородного линейного уравнения (3.11). Теорема доказана.

3.2.1. Построение решения неоднородного уравнения

МЕТОД ЛАГРАНЖА

Этот метод решения часто называют *методом вариации произвольных постоянных*. Разберём его на примере неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x) = f(x), \quad (3.15)$$

где функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ – непрерывные функции на $(a; b)$. Предположим, что найдена фундаментальная система решений $y_1(x) = y_1$ и $y_2(x) = y_2$ соответствующего однородного уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x) = 0.$$

Будем искать решение уравнения (3.15) в виде

$$y(x) = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2. \quad (3.16)$$

В этом представлении функции $C_1(x) = C_1$ и $C_2(x) = C_2$ неизвестны. Для их нахождения построим систему из двух уравнений. Продифференцируем равенство (3.16):

$$y'(x) = C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_1y_1' + C_2y_2'. \quad (3.17)$$

Для упрощения аналитического вида первой производной будем полагать, что

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \quad (3.18)$$

тогда

$$y''(x) = C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_1y_1'' + C_2y_2''. \quad (3.19)$$

Подставляем равенства (3.16), (3.17), (3.19) в дифференциальное уравнение (3.15) и приводим подобные члены относительно функций C_1 и C_2 :

$$C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)) + C_2(y_2'' + y_2'p(x) + q(x)) + C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Функции y_1 и y_2 – это решения соответствующего однородного дифференциального уравнения, поэтому выражения, стоящие в больших скобках равны нулю. Последнее уравнение сводится к виду

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x).$$

Уравнение (3.18) и последнее уравнение образуют систему с неизвестными C_1' и C_2' :

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

Определитель этой системы $W(x)$ – вронскиан, построенный на двух линейно независимых функциях y_1 и y_2 , поэтому $W(x) \neq 0$. У системы есть единственное решение C_1' , C_2' . С помощью интегрирования становятся известными функции $C_1(x)$ и $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int C_1' dx + K_1, \quad C_2(x) = \int C_2' dx + K_2,$$

K_1 и K_2 – произвольные постоянные.

Общее решение уравнения (3.15) можно записать в виде

$$y_{\text{он}}(x) = \left(\int C_1'(x) dx + K_1 \right) y_1(x) + \left(\int C_2'(x) dx + K_2 \right) y_2(x).$$

Остановимся на примерах использования метода Лагранжа.

Пример 1.

$$y'' - \frac{1}{x} y' = x.$$

Решение. Решаем соответствующее однородное уравнение

$$y'' - \frac{1}{x} y' = 0.$$

Сделаем подстановку $z = y'$. Исходное уравнение преобразуется к виду

$$z' - \frac{1}{x} z = 0 \Rightarrow z' = \frac{1}{x} z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln|z| = \ln|x| + C, \forall C \in R, \quad \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1, \quad \forall C_1 > 0 \Rightarrow$$

$$|z| = C_1|x| \Rightarrow |y'| = C_1|x| \Rightarrow \int y' dx = C_1 \int |x| dx \Rightarrow y_{\text{оо}}(x) = 0.5 C_1 x^2 + C_2.$$

Общее решение исходного неоднородного уравнения строим в виде

$$y_{\text{он}}(x) = 0.5 C_1(x) x^2 + 1 \cdot C_2(x).$$

Решаем систему

$$\begin{cases} 0.5 C_1' x^2 + C_2' \cdot 1 = 0, \\ C_1' x + C_2' \cdot 0 = x. \end{cases}$$

$$C_1' = 1 \Rightarrow C_1(x) = x + K_1, \quad C_2' = -\frac{x^2}{2} \Rightarrow C_2(x) = -\frac{x^3}{6} + K_2,$$

K_1 и K_2 – произвольные постоянные.

Общее решение исходного дифференциального уравнения равно

$$y_{\text{он}}(x) = 0.5 (x + K_1)x^2 + \left(-\frac{x^3}{6} + K_2\right).$$

Пример 2.

$$y'' + y = \frac{1}{\sin x}.$$

Решение. Однородное уравнение, соответствующее исходному, имеет постоянные коэффициенты. Поэтому можно использовать метод Эйлера. Строим и решаем характеристическое уравнение

$$r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r = i \Rightarrow y_1 = \sin x, y_2 = \cos x.$$

Общее решение находим в виде

$$y_{\text{он}}(x) = C_1(x) \sin x + C_2(x) \cos x.$$

Производные неизвестных функций $C_1'(x) = C_1'$ и $C_2'(x) = C_2'$ находим из системы

$$\begin{cases} C_1' \sin x + C_2' \cos x = 0, \\ C_1' \cos x - C_2' \sin x = \frac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Для решения системы используем формулы Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ \cos x & -\sin x \end{vmatrix} = -1,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \cos x \\ \sin^{-1} x & -\sin x \end{vmatrix} = -\cos x \tan x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \sin x & 0 \\ \cos x & \sin^{-1} x \end{vmatrix} = 1;$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -1 \Rightarrow$$

$$C_1(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln|\sin x| + K_1, \quad C_2(x) = -\int 1 dx = -x + K_2.$$

Общее решение уравнения можно записать в виде

$$y_{\text{он}}(x) = (\ln|\sin x| + K_1) \sin x + (-x + K_2) \cos x,$$

K_1 и K_2 – произвольные постоянные.

МЕТОД НЕОПРЕДЕЛЁННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Этот метод удобен для нахождения частного решения некоторых линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = f(x),$$

когда структура правой части уравнения имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_m(x) \cos(\beta x) + Q_n(x) \sin(\beta x)). \quad (3.20)$$

Аналитический вид частного решения зависит от числа $\gamma = \alpha + i\beta$. Возможны два случая.

1. Если γ не равно ни одному корню характеристического уравнения, то частное решение строится в виде

$$y_{\text{чн}}(x) = e^{\alpha x} \cdot (R_l(x) \cos \beta x + T_l(x) \sin \beta x), \quad (3.21)$$

где $l = \max\{m, n\}$, $R_l(x)$ и $T_l(x)$ – полиномы степени l с **неопределёнными коэффициентами**.

2. Если γ совпадает с одним из корней характеристического уравнения кратности $k \geq 1$, тогда частное решение (3.21) умножается на x^k :

$$y_{\text{чн}}(x) = x^k \cdot e^{\alpha x} \cdot (R_l(x) \cos \beta x + T_l(x) \sin \beta x). \quad (3.22)$$

Разберём примеры с использованием метода неопределённых коэффициентов для решения уравнений второго порядка.

Пример 3. $y'' - y' = x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \quad (3.23)$

Решение. Решаем характеристическое уравнение и строим общее решение однородного уравнения:

$$r^2 - r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, \quad r_2 = 1 \Rightarrow y_{\text{оо}}(x) = C_1 + C_2 e^x.$$

Переходим к нахождению частного решения.

$$\gamma = \alpha + i\beta = 0 + i0 = 0 \Rightarrow \gamma = r_1 = 0 \Rightarrow k = 1.$$

Число γ совпало с корнем характеристического уравнения (кратность равна 1). Правая часть исходного уравнения относится к классу линейных функций. Поэтому частное решение записывается в виде

$$y_{\text{чн}}(x) = x(ax + b) = ax^2 + bx.$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов a и b подставляем в исходное уравнение частное решение $y_{\text{чн}}(x)$ и его производные:

$$2a - 2ax - b = x.$$

По определению два полинома равны, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях величины x . Значит, последнее равенство возможно, если

$$x^1 \left| -2a = 1, \quad x^0 \right| 2a - b = 0 \Rightarrow a = -0.5, b = -1 \Rightarrow y_{\text{чн}}(x) = -0.5x^2 - x.$$

Общее решение уравнения (3.23)

$$y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) = C_1 + C_2 e^x - 0.5x^2 - x.$$

Находим решение с заданными начальными условиями:

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 e^0 - 0.5 \cdot 0^2 - 0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1,$$

$$y'(x) = C_2 e^x - x - 1 \Rightarrow y'(0) = 2 \Rightarrow C_2 - 1 = 2 \Rightarrow C_2 = 3,$$

$$C_1 + C_2 = 1 \Rightarrow C_1 = -2.$$

Искомое решение уравнения (3.23) с заданными начальными условиями равно

$$y(x) = 3e^x - 0.5x^2 - x - 2.$$

Пример 4.

$$y'' + y' = x \cos x. \quad (3.24)$$

Решение. Решаем характеристическое уравнение и строим общее решение однородного уравнения:

$$r^2 + r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, \quad r_2 = -1 \Rightarrow y_{\text{оо}}(x) = C_1 + C_2 e^{-x}.$$

$$P_m(x) = x, \quad Q_n(x) = 0 \Rightarrow l = \max\{1, 0\} = 1; \quad \gamma = \alpha + i\beta = 0 + i1.$$

Число γ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения, поэтому частное решение строим в виде

$$y_{\text{чн}}(x) = R_1(x) \cos x + T_1(x) \sin x = (ax + b) \cos x + (cx + d) \sin x.$$

Для нахождения неопределённых коэффициентов a, b, c, d подставляем производные $y'_{\text{чн}}(x)$ и $y''_{\text{чн}}(x)$ в уравнение (3.24) и приводим подобные члены относительно $\cos x$ и $\sin x$:

$$y'_{\text{чн}}(x) = a \cos x - (ax + b) \sin x + c \sin x + (cx + d) \cos x,$$

$$y'_{\text{чн}}(x) = (cx + d + a)\cos x - (ax + b + c)\sin x;$$

$$y''_{\text{чн}}(x) = c \cos x - (cx + d + a)\sin x - a \sin x - (ax + b + c)\cos x,$$

$$y''_{\text{чн}}(x) = (-ax - b)\cos x + (-cx - d - 2a)\sin x;$$

$$(-ax - b)\cos x + (-cx - d - 2a)\sin x + (cx + d + a)\cos x - (ax + b + c)\sin x = x \cos x \Rightarrow$$

$$(-ax - b + cx + d + a)\cos x + (-cx - d - 2a - ax - b - c)\sin x = x \cos x.$$

Последнее равенство верно только в том случае, когда равны коэффициенты при косинусах и равны коэффициенты при синусах, стоящих в правой и левой частях этого равенства:

$$\cos x \left| \begin{array}{l} -ax - b + cx + d + a = x \Rightarrow (c - a)x + (d + a - b) = x; \end{array} \right. \quad (3.25)$$

$$\sin x \left| \begin{array}{l} -cx - d - 2a - ax - b - c = 0 \Rightarrow -(c + a)x - (d + c + b) = 0. \end{array} \right. \quad (3.26)$$

Из равенств (3.25) и (3.26) вытекают две элементарные системы

$$\begin{cases} c - a = 1, \\ c + a = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} d + a - b = 0, \\ d + c + b = 0. \end{cases}$$

Решением первой системы будет

$$c = \frac{1}{2}, \quad a = -\frac{1}{2}.$$

Решение второй системы:

$$d = 0, b = -\frac{1}{2}.$$

$$R_1(x) = (ax + b) = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right), \quad T_1(x) = (cx + d) = \frac{1}{2}x;$$

$$y_{\text{чн}}(x) = -\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\cos x + \frac{1}{2}x \sin x.$$

Общее решение уравнения (3.23) $y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) \Rightarrow$

$$y_{\text{он}}(x) = C_1 + C_2 e^{-x} - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)\cos x + \frac{1}{2}x \sin x.$$

Пример 5. $y'' + y = 4e^x; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0. \quad (3.27)$

Решение. $r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r_1 = +i, r_2 = -i \Rightarrow y_{\text{оо}}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

Число $\gamma = \alpha + i\beta = 1 + i0 = 1 \Rightarrow \gamma \neq r_2, \gamma \neq r_1$. Поэтому частное решение строим в виде

$$y_{\text{чн}}(x) = Ae^x.$$

Для определения коэффициента A подставляем функцию $y_{\text{чн}}(x)$ и её вторую производную в уравнение (3.27):

$$Ae^x + Ae^x = 4e^x \Rightarrow 2A = 4 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow y_{\text{чн}}(x) = 2e^x.$$

Общее решение уравнения (3.27) равно

$$y_{\text{оn}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) \Rightarrow y_{\text{оn}}(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 2e^x.$$

Строим частное решение с заданными начальными условиями:

$$y(0) = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 \cdot 0 + 2e^0 = 1 \Rightarrow C_1 + 2 = 1 \Rightarrow C_1 = -1,$$

$$y'(x) = \sin x + C_2 \cos x + 2e^x \Rightarrow y'(0) = C_2 + 2 = 0 \Rightarrow C_2 = -2.$$

Решение с заданными начальными условиями равно

$$y(x) = -1 \cos x - 2 \sin x + 2e^x.$$

Пример 6. $y'' - y = 4e^x$. (3.28)

Решение. $r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = -1 \Rightarrow y_{\text{оо}}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$;

$$\gamma = \alpha + i\beta = 1 + i0 = 1 \Rightarrow \gamma = r_1 \Rightarrow$$

$$y_{\text{чн}}(x) = xAe^x \Rightarrow y_{\text{чн}}''(x) = 2Ae^x + xAe^x.$$

Подставляем функции $y_{\text{чн}}(x)$ и $y_{\text{чн}}''(x)$ в уравнение (3.28):

$$2Ae^x + xAe^x - xAe^x = 4e^x \Rightarrow A = 2.$$

Общее решение уравнения (3.28) равно

$$y_{\text{оn}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) \Rightarrow y_{\text{оn}}(x) = (C_1 + 2x)e^x + C_2 e^{-x}.$$

Пример 7. $y'' - 2y' + y = 4e^x$. (3.29)

Решение. $r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r - 1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1 (k = 2) \Rightarrow$

$$y_{\text{оо}}(x) = C_1 x e^x + C_2 e^x = e^x (C_1 x + C_2);$$

$$\gamma = \alpha + i\beta = 1 + i0 = 1 \Rightarrow \gamma = r (k = 2) \Rightarrow$$

$$y_{\text{чн}}(x) = x^2 A e^x, \quad y'_{\text{чн}}(x) = 2x A e^x + x^2 A e^x, \quad y''_{\text{чн}}(x) = 2A e^x + 4x A e^x + x^2 A e^x.$$

Подставляем функцию $y_{\text{чн}}(x)$ и её производные в уравнение (3.29):

$$2A e^x + 4x A e^x + x^2 A e^x - 2(2x A e^x + x^2 A e^x) + x^2 A e^x = 4e^x.$$

После деления этого равенства на e^x и приведения подобных слагаемых приходим к равенству:

$$2A = 4 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow y_{\text{чн}}(x) = 2x^2 e^x.$$

Общее решение уравнения (3.29) имеет вид

$$y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) \Rightarrow y_{\text{он}}(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + 2x^2 e^x.$$

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

Рассмотрим случай, когда правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами – это сумма двух функций:

$$y'' + p y' + q y = f_1(x) + f_2(x), \quad (3.30)$$

каждая из которых имеет структуру (3.20):

$$f_1(x) = e^{\alpha x} \cdot (P_n(x) \cdot \cos \beta x + Q_m(x) \cdot \sin \beta x),$$

$$f_2(x) = e^{\theta x} \cdot (R_l(x) \cdot \cos \varphi x + T_k(x) \cdot \sin \varphi x).$$

В этом случае после построения общего решения однородного уравнения

$$y'' + p y' + q y = 0$$

отдельно находятся, методом неопределённых коэффициентов, частные решения двух уравнений

$$y'' + p y' + q y = f_1(x) \quad \text{и} \quad y'' + p y' + q y = f_2(x).$$

Предположим, что у этих уравнений найдены частные решения и они соответственно равны

$$y_{1\text{чн}}(x) \quad \text{и} \quad y_{2\text{чн}}(x).$$

Из линейности оператора дифференцирования следует, что частным решением уравнения (3.30) становится функция

$$y_{\text{чн}}(x) = y_{1\text{чн}}(x) + y_{2\text{чн}}(x).$$

Пример 8. $y'' + y' = e^{-x} + 2x - 1. \quad (3.31)$

Решение. Находим общее решение однородного уравнения

$$y'' + y' = 0, \quad r^2 + r = 0 \Rightarrow r_1 = 0, r_2 = -1 \Rightarrow y_{\text{о.о}}(x) = C_1 e^{-x} + C_2.$$

Строим частное решение $y_{1\text{чн}}(x)$ уравнения

$$y'' + y' = e^{-x}; \quad (3.32)$$

$$\gamma_1 = -1 + i0 = -1 \Rightarrow \gamma_1 = r_2 \Rightarrow y_{1\text{чн}}(x) = Axe^{-x} \Rightarrow$$

$$y'_{1\text{чн}} = Ae^{-x} - Axe^{-x} = Ae^{-x}(1 - x) \Rightarrow$$

$$y''_{1\text{чн}} = -Ae^{-x}(1 - x) - Ae^{-x} = -Ae^{-x}(2 - x).$$

Поставляем функцию $y_{1\text{чн}}(x)$ и её производные в уравнение (3.32), далее сокращаем полученное равенство на e^{-x} , приводим подобные слагаемые и находим коэффициент A :

$$-Ae^{-x}(2 - x) + Ae^{-x}(1 - x) = e^{-x} \Rightarrow -2A + A = 1 \Rightarrow A = -1;$$

$$y_{1\text{чн}}(x) = -xe^{-x}.$$

Строим частное решение $y_{2\text{чн}}(x)$ уравнения

$$y'' + y' = 2x - 1; \quad (3.33)$$

$$\gamma_2 = 0 + i0 = 0 \Rightarrow \gamma_2 = r_1 \Rightarrow y_{2\text{чн}}(x) = x(ax + b) \Rightarrow$$

$$y'_{2\text{чн}} = 2ax + b \Rightarrow y''_{2\text{чн}} = 2a.$$

Подставляем функцию $y_{2\text{чн}}(x)$ и её производные в уравнение (3.33), приводим подобные слагаемые и находим коэффициенты a , b :

$$2a + 2ax + b = 2x - 1 \Rightarrow$$

$$x^1 \left| \begin{array}{l} 2a = 2 \Rightarrow a = 1; \\ x^0 \left| \begin{array}{l} 2a + b = -1 \Rightarrow b = -3 \Rightarrow \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$y_{2\text{чн}}(x) = x(x - 3).$$

Частное решение уравнения (3.31) имеет вид

$$y_{\text{чн}}(x) = y_{1\text{чн}}(x) + y_{2\text{чн}}(x) = -xe^{-x} + x(x - 3).$$

В результате пришли к общему решению исходного уравнения (3.31)

$$y_{\text{он}}(x) = y_{\text{оо}}(x) + y_{\text{чн}}(x) \Rightarrow y_{\text{он}}(x) = C_1 e^{-x} + C_2 + x(x - e^{-x} - 3).$$

3.3. Задача Штурма–Лиувилля

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right) - q(x)y(x) = \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

называется уравнением Штурма–Лиувилля.

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО РОДА

Такое уравнение решается с помощью различных методов. Здесь мы ограничимся решением одного, достаточно простого и интересного, частного случая с нулевыми краевыми условиями

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0; \quad x \in [0, l]. \quad (3.34)$$

Пусть заданы краевые условия 1-го рода: $y(0) = 0$, $y(l) = 0$.

Найдём все значения параметра λ , при которых существуют нетривиальные решения уравнения (3,34), и найдём эти решения. Задача, поставленная в такой форме, называется задачей Штурма–Лиувилля.

Решение уравнения (3,34) начнём с характеристического уравнения

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\lambda}.$$

Возможны три случая: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

$$1. \quad \lambda < 0 \Rightarrow \text{Общее решение } y_{00}(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \Rightarrow$$

$$y(0) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}0} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}0} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1,$$

$$y(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \Rightarrow C_1 (e^{\sqrt{-\lambda}l} + e^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 0.$$

Последнее равенство будет верным только при $C_1 = 0$, но тогда $C_2 = 0$. Значит, есть только тривиальное решение $y(x) \equiv 0$.

2. $\lambda = 0 \Rightarrow y''(x) = 0$. Из этого равенства следует, что общее решение – это линейная функция. У линейной функции может быть только один корень, поэтому для задачи с нулевыми краевыми условиями не может быть решения в виде линейной функции

$$y(x) = C_1 x + C_2.$$

$$3. \quad \lambda > 0 \Rightarrow y(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x \Rightarrow$$

$$y(0) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}0 + C_2 \sin \sqrt{\lambda}0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$y(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow C_2 \neq 0, \quad \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi k \Rightarrow$$

$$\sqrt{\lambda_k} \frac{\pi k}{l} \Rightarrow \lambda_k = \left\{ \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 \right\}_{k=1}^{\infty}. \quad (3.35)$$

Построено бесконечное множество положительных значений параметра λ , при которых уравнение (3.34) имеет нетривиальные решения

$$y_k(x) = C_2 \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

В этом равенстве C_2 – любое, не равное нулю, число. Обычно берут $C_2 = 1$:

$$y_k(x) = \left\{ \sin \frac{\pi k x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}. \quad (3.36)$$

Найденные параметры λ_k (3.35) и решения $y_k(x)$ (3.36) называются соответственно *собственными значениями (числами)* и *собственными функциями задачи Штурма – Лиувилля*.

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ВТОРОГО РОДА

Разберём, как изменятся решения задачи при других нулевых краевых условиях

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0; \quad x \in [0, l], \quad y'(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \quad (3.37)$$

Очевидно, что и для таких краевых условий тоже возможен только случай $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x \Rightarrow \\ y'(x) &= -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x + \sqrt{\lambda} C_2 \cos \sqrt{\lambda} x \Rightarrow \\ y'(0) &= -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} 0 + \sqrt{\lambda} C_2 \cos \sqrt{\lambda} 0 = 0 \Rightarrow C_2 = 0, \\ y'(l) &= -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow C_1 \neq 0, \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = \pi k \Rightarrow \\ \sqrt{\lambda_k} &= \frac{\pi k}{l} \Rightarrow \lambda_k = \left\{ \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 \right\}_{k=1}^{\infty} \Rightarrow y_k(x) = \left\{ \cos \frac{\pi k x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Из равенств (3.38) видно, что собственные значения не изменились, а система собственных функций стала другой.

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ТРЕТЬЕГО РОДА

(СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ)

Построим собственные значения и собственные функции для двух случаев смешанных краевых условий.

Случай 1.

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0; \quad x \in [0, l], \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned}
y(x) &= C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x \Rightarrow \\
y'(x) &= -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}C_2 \cos \sqrt{\lambda}x \Rightarrow \\
y(0) &= C_1 \cos \sqrt{\lambda}0 + C_2 \sin \sqrt{\lambda}0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0, \\
y'(l) &= C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow C_2 \neq 0, \cos \sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi k + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\
\lambda_k &= \left\{ \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} \right)^2 \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad y_k(x) = \left\{ \sin \frac{\pi(2k+1)x}{2l} \right\}_{k=1}^{\infty}. \quad (3.40)
\end{aligned}$$

Случай 2.

$$\begin{aligned}
y''(x) + \lambda y(x) &= 0; \quad x \in [0, l], \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0. \quad (3.41) \\
y(x) &= C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x \Rightarrow \\
y'(x) &= -C_1 \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}C_2 \cos \sqrt{\lambda}x \Rightarrow \\
y'(0) &= \sqrt{\lambda}C_2 \cos 0 \Rightarrow C_2 = 0, \\
y(l) &= C_1 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow C_1 \neq 0, \cos \sqrt{\lambda}l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l = \pi k + \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\
\lambda_k &= \left\{ \left(\frac{\pi(2k+1)}{2l} \right)^2 \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad y_k(x) = \left\{ \cos \frac{\pi(2k+1)x}{2l} \right\}_{k=1}^{\infty}. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

Разобранный выше простейший вид задачи Штурма – Лиувилля используется ещё в математической физике.

Глава 4

СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Шагайте вперёд и вера к вам
придёт.*

Жан Даламбер (1717- 1783) — французский математик

Определение 1. *Порядком системы дифференциальных уравнений* называется сумма наибольших порядков производных каждой неизвестной функции, входящей в эту систему.

Важно отметить, что с помощью введения новых (дополнительных) неизвестных функций любую систему дифференциальных уравнений всегда можно превратить в систему, каждое уравнение которой будет дифференциальным уравнением первого порядка

[illegible]

Такой вид записи системы называется *нормальным*.

Решить систему дифференциальных уравнений — значит найти такие функции $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$, которые превращают в тождества все уравнения системы для любого $x \in (a; b)$.

4.1. Система линейных уравнений

Рассмотрим вопрос о построении решения линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка

[illegible]

где $\{y_i\}_{i=1}^n$ – искомые функции, заданные $\{f_i(x)\}_{i=1}^n$ и $\{a_{ij}(x)\}_{i=1}^n$ ($j = 1, 2, \dots, n$) предполагаются непрерывными функциями в области $x \in (a; b)$.

Порядок линейной нормальной системы (4.1) равен n , где n – это число неизвестных функций (количество уравнений) в системе.

Определение 2. *Общим решением системы* называют семейство функций

$$\{y_i(x, C_1, C_2, \dots, C_n)\}_{i=1}^n,$$

которое тождественно удовлетворяет всем уравнениям системы. С помощью этого семейства можно построить любое частное решение системы.

Определение 3. Задача о нахождении частного решения системы с заданными начальными условиями

$$\{y_i(x_0) = y_{i0}\}_{i=1}^n, \quad x_0 \in (a; b) \quad (4.2)$$

называется *задачей Коши*.

Если в системе (4.1) все переменные коэффициенты $a_{ij}(x) = a_{ij}$ и все функции $\{f_i(x) = f_i\}_{i=1}^n$ непрерывны в области $(a; b)$, то у системы есть единственное решение, которое удовлетворяет начальным условиям (4.2) для любого $x_0 \in (a; b)$.

Замечание 1. Важно отметить, что для нормальной системы (4.1) начальными условиями $\{y_{i0}\}_{i=1}^n$ могут быть любые действительные числа.

Замечание 2. У линейной системы (4.1) нет особых решений.

Введём матрицу системы и три вектора;

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y'(x) = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix}, \quad F(x) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Систему (4.1) теперь можно записать в матричном виде

$$Y'(x) = A(x) Y(x) + F(x). \quad (4.3)$$

Если вектор $F(x) \equiv \mathbf{0}$ (нулевой вектор), тогда система (4.1) будет однородной системой, матричная форма которой

$$Y'(x) = A(x) Y(x). \quad (4.4)$$

У однородной линейной системы (4.1) всегда есть нулевое решение

$$\{y_i(x) \equiv 0\}_{i=1}^n,$$

удовлетворяющее нулевым начальным условиям $\{y_i(x_0) \equiv 0\}_{i=1}^n$ и нет других решений с нулевыми начальными условиями.

Для однородной системы (4.4) справедливы теоремы, аналогичные теоремам о линейных однородных дифференциальных уравнениях второго порядка (глава 3).

Теорема 1. Линейная комбинация различных решений системы (4.4) – тоже решение этой системы.

Запишем n различных частных решений системы в векторной форме

$$Y_1(x) = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \dots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, Y_2(x) = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \dots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \dots, Y_n(x) = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \dots \\ y_{nn} \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Определение 4. Если решения $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ системы (4.4) линейно независимы, то совокупность таких решений называется **фундаментальной системой решений**.

Теорема 2. Система решений (4.5) является фундаментальной, если вронскиан $W(x)$, построенный на этой системе решений, не равен нулю хотя бы для одного значения $x \in (a; b)$:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Доказано, что если вронскиан $W(x)$ не равен нулю в одной точке области $(a; b)$, то он отличен от нуля для $\forall x \in (a; b)$.

Теорема 3. Если $Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$ — фундаментальная система решений уравнения (4.4), то общее решение $Y(x)$ — это линейная комбинация всех решений фундаментальной системы:

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n C_i Y_i(x), \quad \forall C_i \in \mathbb{R}. \quad (4.6)$$

Замечание 3. У однородной линейной системы существует бесчисленное множество фундаментальных систем решений.

Определение 5. Фундаментальная система решений

$$Y_1(x), Y_2(x), \dots, Y_n(x)$$

называется **нормированной в точке** $x = x_0$, если эти решения удовлетворяют равенствам

$$Y_1(x_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, Y_2(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, Y_n(x_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание 4. Вронскиан нормированной фундаментальной системы решений равен единице в точке x_0 :

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

4.1.1. Система однородных уравнений с постоянными коэффициентами.

Элементы матрицы такой системы – заданные числа

[illegible]

Систему (4.7) можно записать в матричной форме

$$Y'(x) = A Y(x). \quad (4.8)$$

МЕТОД ЭЙЛЕРА

Будем решать систему (4.8) методом Эйлера (глава 3). Решение представим в виде

$$Y(x) = \mathbf{G}e^{\lambda x} \Rightarrow Y'(x) = \lambda \mathbf{G}e^{\lambda x}, \quad (4.9)$$

где λ – неизвестное число, вектор $\mathbf{G} = (g_1, g_2, \dots, g_n)^T$ – неизвестный вектор с постоянными или переменными коэффициентами.

Подставляем правые части равенств (4.9) в уравнение (4.8) и приходим к уравнению

$$\mathbf{G}\lambda e^{\lambda x} = \mathbf{A}\mathbf{G} \cdot e^{\lambda x} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{G} = \lambda \mathbf{G}. \quad (4.10)$$

В алгебре число λ называется *собственным числом (значением) матрицы A* , а вектор G – соответствующим *собственным вектором*. Нахождение собственных чисел и векторов – это интересная алгебраическая задача, подробно описанная в приложении 2. Здесь рассмотрим только процесс решения уравнения (4.10). Его удобно записать в другом виде

$$\mathbf{A}\mathbf{G} = \lambda\mathbf{G} \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{G} = \lambda\mathbf{E}\mathbf{G} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E})\mathbf{G} = \mathbf{0}.$$

Последнее уравнение – это матричная запись линейной однородной алгебраической системы. У неё есть ненулевые решения, если определитель этой системы равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4.11)$$

В этом случае у системы существует бесчисленное множество решений, Уравнение (4.11) называется *характеристическим (вековым) уравнением*.

Из алгебры известно, что уравнение n -го порядка с действительными коэффициентами имеет n корней в множестве комплексных чисел. Предположим, что найден корень λ_i векового уравнения, тогда λ_i можно подставить в систему (4.12)

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)g_{i1} + a_{12}g_{i2} + \dots\dots\dots + a_{1n}g_{in} = 0, \\ a_{21} + (a_{22} - \lambda_i)g_{i2} + \dots\dots\dots + a_{2n}g_{in} = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots\dots\dots \quad \dots\dots\dots \\ a_{n1}g_{i1} + a_{n2}g_{i2} + \dots \quad \dots \quad \dots + (a_{nn} - \lambda_i)g_{in} = 0. \end{cases} \quad (4.12)$$

Пусть одним из решений системы (4.12) будет собственный вектор

$$\mathbf{G}_i = (g_{i1}, \quad g_{i2}, \cdots g_{in})^T.$$

При нахождении корней характеристического уравнения возможны три случая.

1. Все решения уравнения — различные действительные числа. В этом случае у каждого найденного λ_i находится собственный вектор $\mathbf{G}_i$. Частное решение $\mathbf{Y}_i(x)$ уравнения (4.8) теперь построено

$$\mathbf{Y}_i(x) = \mathbf{G}_i e^{\lambda_i x}.$$

Разным собственным значениям λ_i соответствуют линейно независимые собственные векторы $\mathbf{G}_i$ (приложение 2). Поэтому все частные решения $Y_i(x)$, тоже будут линейно независимы, Они образуют фундаментальную систему решений

$$Y_1(x) = G_1 e^{\lambda_1 x}, \quad Y_2(x) = G_2 e^{\lambda_2 x}, \dots, \quad Y_n(x) = G_n e^{\lambda_n x}.$$

В первом случае общее решение системы в векторной форме имеет вид

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{G}_i e^{\lambda_i x}, \quad \forall C_i \in \mathbb{R}.$$

2. Среди действительных корней уравнения есть кратные (одинаковые) корни. Например, если собственное число λ_i кратности k , тогда соответствующее частное решение для матричного уравнения (4.8) приобретает вид

$$\mathbf{Y}_i(x) = \mathbf{G}_i(x)e^{\lambda_i x}, \quad \text{где } \mathbf{G}_i(x) = (g_1(x) \ g_2(x) \cdots g_n(x))^T.$$

Компоненты $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$ – полиномы не выше $(k-1)$ -й степени. Общее решение во втором случае строится в виде

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n C_i \mathbf{G}_i(x) e^{\lambda_i x}, \quad \forall C_i \in \mathbb{R}.$$

3. Есть комплексный корень. В этом случае у исходной системы дифферен-

циальных уравнений будет комплексное решение. В третьей главе показано, что если у однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами есть комплексное решение, то действительная часть и мнимая часть этого решения тоже будут двумя частными, линейно независимыми решениями уравнения. Такая же ситуация имеет место для линейных однородных систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Построение собственного вектора $\mathbf{G}_i$ проще сделать с помощью исходной системы дифференциальных уравнений. После нахождения собственного числа λ_i надо сразу подставить в эту систему искомое решение

$$\mathbf{Y}_i(x) = \mathbf{G}_i e^{\lambda_i x} \quad (\mathbf{Y}_i(x) = \mathbf{G}_i(x) e^{\lambda_i x}),$$

его производную, затем сократить все уравнения системы на $e^{\lambda_i x}$ и решить полученную однородную алгебраическую систему. Обычно именно так находят векторы $\mathbf{G}_i$.

Перейдём к примерам построения общих решений для каждого разобранного выше случая.

Пример 1. Найдём общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 4y_2, \\ y_2' = 4y_1 + 5y_2. \end{cases} \quad (4.13)$$

Решение.

1. Строим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 5 - \lambda & 4 \\ 4 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0.$$

2. Корни характеристического уравнения – разные действительные числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 9$. Поэтому собственному числу $\lambda_1 = 1$ соответствует решение

$$y_{11} = Ae^x, \quad y_{21} = Be^x.$$

3. Для нахождения неизвестных коэффициентов подставляем функции y_{11} , y_{21} и их производные в исходную систему (4.13)

$$\begin{cases} 5Ae^x + 4Be^x = Ae^x, \\ 4Ae^x + 5Be^x = Be^x. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4A + 4B = 0, \\ 4A + 4B = 0. \end{cases} \Rightarrow B = -A.$$

Из последнего равенства следует, что A может быть любым, не равным нулю, числом. Пусть $A = 1$, тогда $B = -1$

$$y_{11} = e^x, \quad y_{21} = -e^x.$$

4. Собственному числу $\lambda_2 = 9$ соответствует решение

$$y_{12} = Ce^{9x}, \quad y_{22} = De^{9x}.$$

5. С помощью исходной системы находим неизвестные коэффициенты C, D

$$\begin{cases} 5Ce^{9x} + 4De^x = 9Ae^{9x}, \\ 4Ae^{9x} + 5Be^x = 9Be^{9x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4Ce^{9x} + 4De^{9x} = 0, \\ 4Ae^{9x} - 4Be^{9x} = 0. \end{cases} \Rightarrow C = D.$$

Пусть $C = 1 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow y_{12} = e^{9x}, \quad y_{22} = e^{9x}.$

Общее решение системы: $y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} = C_1 e^x + C_2 e^{9x},$

$$y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} = -C_1 e^x + C_2 e^{9x},$$

C_1, C_2 – любые действительные числа.

Пример 2. Построим общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases} \quad (4.14)$$

Решение.

1. Запишем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0.$$

2. Корни характеристического уравнения – комплексные числа $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$, поэтому

$$y_1 = Ae^{(2+i)x}, \quad y_2 = Be^{(2+i)x}.$$

3. Для нахождения чисел A и B подставляем эти функции и их производные в исходную систему уравнений (4.14):

$$\begin{cases} (2+i)A = 2A - B, \\ (2+i)B = A + 2B. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2A + Ai = 2A - B, \\ 2B + Bi = A + 2B. \end{cases} \Rightarrow Ai = -B.$$

4. Пусть $A = 1$, тогда $B = -i$. Далее будем использовать формулу Эйлера

$$y_1 = e^{(2+i)x} = e^{2x}(\cos x + i \sin x) = e^{2x} \cos x + ie^{2x} \sin x,$$

$$y_2 = -ie^{2x}(\cos x + i \sin x) = e^{2x} \sin x - ie^{2x} \cos x.$$

5. Однородное линейное уравнение имеет комплексное решение, значит, его

действительная часть и мнимая часть тоже будут решениями уравнения

$$y_{11} = e^{2x} \cos x, \quad y_{12} = e^{2x} \sin x; \quad y_{21} = e^{2x} \sin x, \quad y_{22} = -e^{2x} \cos x.$$

Функции $y_{11}(x)$, $y_{12}(x)$ линейно независимы и $y_{21}(x)$, $y_{22}(x)$ тоже линейно независимы. Поэтому общим решением системы (4.14) будут функции

$$y_1 = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x),$$

$$y_2 = C_1 e^{2x} \sin x - C_2 e^{2x} \cos x = e^{2x}(C_1 \sin x - C_2 \cos x).$$

Пример 3. Найдём общее решение системы

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 2y_2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Решение.

1. Строим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & -1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda - 3)^2 = 0.$$

2. Корень характеристического уравнения $\lambda = 3$ кратности 2. Поэтому будем искать два частных линейно независимых решения в виде

$$y_1 = (Ax + B)e^{3x}, \quad y_2 = (Cx + D)e^{3x}.$$

3. Для нахождения неизвестных чисел A, B, C, D подставляем в исходную систему функции y_1 и y_2 и их производные:

$$\begin{cases} Ae^{3x} + 3(Ax + B)e^{3x} = 4(Ax + B)e^{3x} - (Cx + D)e^{3x}, \\ Ce^{3x} + 3(Cx + D)e^{3x} = (Ax + B)e^{3x} + 2(Cx + D)e^{3x}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} A + 3(Ax + B) = 4(Ax + B) - (Cx + D), \\ C + 3(Cx + D) = (Ax + B) + 2(Cx + D). \end{cases} \quad (4.16)$$

Далее используем определение равенства алгебраических многочленов.

Первое равенство в (4.16) приводит к алгебраической системе

$$\begin{cases} A + 3B = 4B - D, \\ 3A = 4A - C. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = A + D, \\ A = C. \end{cases}$$

Второе равенство в (4.16) приводит к другой алгебраической системе

$$\begin{cases} C + 3D = B + 2D, \\ 3C = A + 2C. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = C + D, \\ A = C. \end{cases}$$

Из высшей алгебры известно, что в однородной системе из двух уравнений с 4-мя неизвестными можно двум неизвестным задавать произвольные значения.

Пусть для одного частного решения $A = 1, B = 0 \Rightarrow C = 1, D = -1$. В этом случае

$$y_{11} = xe^{3x}, \quad y_{21} = (x - 1)e^{3x}.$$

4. Для построения второго частного решения, линейно независимого с первым решением, пусть $A = 0, B = 1 \Rightarrow C = 0, D = 1$. Для таких значений параметров получаем

$$y_{12} = e^{3x}, \quad y_{22} = e^{3x}.$$

В итоге мы построили общее решение исходной системы (4.15):

$$y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} = C_1 x e^{3x} + C_2 e^{3x},$$

$$y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} = C_1 (x - 1) e^{3x} + C_2 e^{3x}.$$

Пример 4. Решим задачу Коши для системы

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2. \end{cases} \quad (4.17)$$

Начальные условия

$$y_1(0) = -1, \quad y_2(0) = 2.$$

Решение.

1. Строим характеристическое уравнение и находим его корни:

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -2 \\ 3 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

2. Корни характеристического уравнения – разные действительные числа. Поэтому собственному числу $\lambda_1 = 1$ будет соответствовать частное решение

$$y_{11} = Ae^x, \quad y_{21} = Be^x.$$

3. Для нахождения неизвестных коэффициентов подставляем решения y_{11} , y_{21} и их производные в исходную систему (4.17)

$$\begin{cases} 2Ae^x + 2Be^x = 0, \\ 3Ae^x + 3Be^x = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 0, \\ A + B = 0. \end{cases} \Rightarrow A = -B.$$

Пусть $A = 1 \Rightarrow B = -1 \Rightarrow y_{11} = e^x, \quad y_{21} = -e^x$.

4. Собственному числу $\lambda_2 = 2$ соответствует решение

$$y_{12} = Ce^{2x}, \quad y_{22} = De^{2x}.$$

5. С помощью системы (4.17) находим неизвестные коэффициенты C и D

$$\begin{cases} -Ce^{2x} - 2De^{2x} = 2Ce^{2x}, \\ 3Ce^{2x} + 4De^{2x} = 2De^{2x}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3C - 2D = 0, \\ 3C + 2D = 0. \end{cases} \Rightarrow 3C = -2D.$$

Пусть $C = 2 \Rightarrow D = -3 \Rightarrow y_{12} = 2e^{2x}, y_{22} = -3e^{2x}$.

Общее решение системы: $y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}$,

$$y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} = -C_1 e^x - 3C_2 e^{2x}.$$

6. Выделим из общего решения одно решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям

$$\begin{cases} y_1(0) = C_1 y_{11}(0) + C_2 y_{12}(0) = C_1 e^0 + 2C_2 e^0 = -1, \\ y_2(0) = C_1 y_{21}(0) + C_2 y_{22}(0) = -C_1 e^0 - 3C_2 e^0 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 + 2C_2 = -1, \\ -C_1 - 3C_2 = 2. \end{cases}$$

Из последней системы находим $C_1 = 1$ и $C_2 = -1$.

Решение задачи Коши для системы (4.17) равно

$$y_1 = e^x - 2e^{2x}, \quad y_2 = -e^x + 3e^{2x}.$$

4.1.2. Система неоднородных уравнений

Вернёмся к нормальной системе дифференциальных уравнений в матричной форме

$$Y'(x) = A(x) Y(x) + F(x).$$

Здесь, как и в п.4.1, $A(x)$ — матрица системы, компоненты вектора $Y(x)$ — неизвестные функции, компоненты вектора $Y'(x)$ — производные неизвестных функций, компоненты вектора $F(x)$ — заданные функции.

Введём дополнительные обозначения. Пусть вектор $Y_{\text{чн}}(x)$ — частное решение неоднородного уравнения, а $Y_{\text{оо}}(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения.

Теорема 4. Общее решение $Y_{\text{он}}(x)$ неоднородной системы равно сумме общего решения соответствующей однородной системы и любого частного решения исходной неоднородной системы:

$$Y_{\text{он}}(x) = Y_{\text{оо}}(x) + Y_{\text{чн}}(x).$$

Доказательство. Функция $Y_{oo}(x)$ – решение однородной системы, поэтому

$$Y'_{oo}(x) = A(x)Y_{oo}(x).$$

Функция $Y_{чн}(x)$ – частное решение неоднородной системы, поэтому

$$Y'_{чн}(x) = A(x)Y_{чн}(x) + F(x)$$

Складываем два последних равенства

$$Y'_{oo}(x) + Y'_{чн}(x) = A(x)Y_{oo}(x) + A(x)Y_{чн}(x) + F(x) \Rightarrow$$

$$(Y_{oo}(x) + Y_{чн}(x))' = A(x)(Y_{oo}(x) + Y_{чн}(x)) + F(x).$$

Из последнего равенства следует, что сумма $Y_{oo}(x) + Y_{чн}(x) = Y(x)$ – решение неоднородной системы. Осталось доказать, что $Y(x)$ – общее решение неоднородной системы. Для этого достаточно показать, что с помощью такой суммы можно найти любое частное решение с заданными начальными условиями.

Пусть начальные условия представлены в векторном виде $Y(x_0) = Y_0$, тогда

$$Y_{oo}(x_0) + Y_{чн}(x_0) = Y(x_0) \Rightarrow Y_{oo}(x_0) = Y_0 - Y_{чн}(x_0).$$

Общее решение однородной системы равно

$$Y_{oo}(x) = \sum_{i=1}^n C_i Y_i(x) \Rightarrow Y_{oo}(x_0) = \sum_{i=1}^n C_i Y_i(x_0) = Y_0 - Y_{чн}(x_0).$$

Последнее равенство – векторная запись линейной неоднородной алгебраической системы с неизвестными величинами $C_1, C_2, \dots, C_n$. Определитель системы – вронскиан фундаментальной системы решений, он не равен нулю. У такой системы всегда есть единственное решение $\{C_i\}_{i=1}^n$, при котором будут выполняться заданные начальные условия $Y(x_0) = Y_0$. Следовательно, сумма решений $Y_{oo}(x) + Y_{чн}(x) = Y_{он}(x)$ – общее решение неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений.

МЕТОД ЛАГРАНЖА

С помощью метода Лагранжа (*метод вариации произвольных постоянных*) можно построить общее решение неоднородной системы

$$Y'(x) = A(x)Y(x) + F(x),$$

зная общее решение

$$Y_{oo}(x) = \sum_{i=1}^n C_i Y_i(x)$$

однородной системы

$$Y'(x) = A(x) Y(x). \quad (4.18)$$

Будем искать решение неоднородной системы в виде

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x) Y_i(x), \quad (4.19)$$

где функции $[Y_i(x)]_{i=1}^n$ – фундаментальная система решений однородной системы (4.18).

Для нахождения неизвестных функций $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ прежде всего продифференцируем равенство (4.19):

$$Y'(x) = \sum_{i=1}^n C'_i(x) Y_i(x) + \sum_{i=1}^n C_i(x) Y'_i(x), \quad (4.20)$$

затем подставим правые части равенств (4.19) и (4.20) в исходную неоднородную систему дифференциальных уравнений:

$$\sum_{i=1}^n C'_i(x) Y_i(x) + \sum_{i=1}^n C_i(x) Y'_i(x) = A(x) \sum_{i=1}^n C_i(x) Y_i(x) + F(x).$$

Преобразуем правую часть последнего равенства

$$\begin{aligned} A(x) \sum_{i=1}^n C_i(x) Y_i(x) + F(x) &= \sum_{i=1}^n C_i(x) A(x) Y_i(x) + F(x) = \\ &= \sum_{i=1}^n C_i(x) Y'_i(x) + F(x) \Rightarrow \\ \sum_{i=1}^n C'_i(x) Y_i(x) + \sum_{i=1}^n C_i(x) Y'_i(x) &= \sum_{i=1}^n C_i(x) Y'_i(x) + F(x). \end{aligned}$$

Очевидное упрощение последнего равенства приводит к линейной неоднородной алгебраической системе, представленной в векторной форме

$$\sum_{i=1}^n C'_i(x) Y_i(x) = F(x). \quad (4.21)$$

Определитель этой системы – вронскиан линейно независимых решений однородной системы. Значит, у системы есть единственное решение. После нахож-

дения производных $\{C'_i(x)\}_{i=1}^n$ и последующего интегрирования становятся известными $\{C_i(x)\}_{i=1}^n$.

Построено общее решение

$$Y(x) = \sum_{i=1}^n C_i(x) Y_i(x)$$

неоднородной нормальной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример 1. Найдём общее решение системы

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 - 2y_2 + 3, \\ y'_2 = y_1 - y_2 + 1. \end{cases} \quad (4.22)$$

Решение.

1. Прежде всего, решаем однородную систему

$$\begin{cases} y'_1 = y_1 - 2y_2, \\ y'_2 = y_1 - y_2. \end{cases} \quad (4.23)$$

Строим характеристическое уравнение и находим его корни:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i.$$

2. Для построения двух частных линейно независимых решений системы достаточно использовать только один корень $\lambda = i$.

$$y_1 = Ae^{ix}, \quad y_2 = Be^{ix} \Rightarrow y'_1 = iAe^{ix}, \quad y'_2 = iBe^{ix}.$$

Подставляем y_1, y_2, y'_1, y'_2 в исходную систему (4.23)

$$\begin{cases} iAe^{ix} = Ae^{ix} - 2Be^{ix}, \\ iBe^{ix} = Ae^{ix} - Be^{ix}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} iA = A - 2B, \\ iB = A - B. \end{cases}$$

Пусть $A = 2$, тогда

$$\begin{cases} B = 1 - i, \\ 1 + i = 1 + i. \end{cases}$$

3. С помощью формулы Эйлера из одного частного решения для каждой функции, входящей в однородную систему, получается два частных линейно

независимых решения:

$$y_1 = 2e^{ix} = 2\cos x + i2\sin x \Rightarrow y_{11} = 2\cos x, \quad y_{12} = 2\sin x;$$

$$y_2 = (1 - i)e^{ix} = (1 - i)(\cos x + i\sin x) = (\sin x + \cos x) + i(\sin x - \cos x) \Rightarrow$$

$$y_{21} = (\sin x + \cos x), \quad y_{22} = (\sin x - \cos x).$$

Общим решением однородной системы (4.23) становятся функции

$$y_1 = 2C_1 \cos x + 2C_2 \sin x,$$

$$y_2 = C_1(\sin x + \cos x) + C_2(\sin x - \cos x).$$

6. Для нахождения общего решения исходной неоднородной системы сначала обратим внимание на вид неоднородности. В каждом уравнении — это заданные константы. Поэтому частное решение системы будем искать в виде постоянных величин: $y_{1\text{чн}} = a, y_{2\text{чн}} = b$. Подставляем их в систему (4.22):

$$\begin{cases} 0 = a - 2b + 3 \\ 0 = a - b + 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, \quad b = 2.$$

Общее решение исходной неоднородной системы равно

$$y_1 = 2C_1 \cos x + 2C_2 \sin x + 1,$$

$$y_2 = C_1(\sin x + \cos x) + C_2(\sin x - \cos x) + 2.$$

Пример 2. Решим систему методом Лагранжа.

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2 + 2e^{-x}, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2 + e^{-x}. \end{cases} \quad (4.24)$$

Решение.

Общее решение однородной системы

$$\begin{cases} y_1' = -y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 3y_1 + 4y_2. \end{cases}$$

уже построено в примере 4 (п. 4.2.):

$$y_1 = C_1 e^x + 2C_2 e^{2x}, \quad y_2 = -C_1 e^x - 3C_2 e^{2x}.$$

Осталось найти общее решение неоднородной системы (4.24) в виде

$$y_1 = C_1(x)e^x + 2C_2(x)e^{2x}, \quad y_2 = -C_1(x)e^x - 3C_2(x)e^{2x}.$$

Производные $C_1'(x)$, $C_2'(x)$ – это решение системы

$$\begin{cases} C_1'(x)e^x + 2C_2'(x)e^{2x} = 2e^{-x}, \\ -C_1'(x)e^x - 3C_2'(x)e^{2x} = e^{-x}, \end{cases} \quad (4.25)$$

которая строится по формуле (4.21).

Решаем последнюю систему по формулам Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & 2e^{2x} \\ -e^x & -3e^{2x} \end{vmatrix} = -e^{3x}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2e^{-x} & 2e^{2x} \\ e^{-x} & -3e^{2x} \end{vmatrix} = -8e^x, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^x & 2e^{-x} \\ -e^x & e^{-x} \end{vmatrix} = 3,$$

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 8e^{-2x}, \quad C_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -3e^{-3x} \Rightarrow$$

$$C_1(x) = 8 \int e^{-2x} dx = -4e^{-2x} + K_1, \quad C_2(x) = -3 \int e^{-3x} dx = e^{-3x} + K_2.$$

Общим решением исходной неоднородной системы дифференциальных уравнений являются функции

$$\begin{aligned} y_1 &= C_1(x)e^x + 2C_2(x)e^{2x} = (-4e^{-2x} + K_1)e^x + 2(e^{-3x} + K_2)e^{2x}, \\ y_2 &= -C_1(x)e^x - 3C_2(x)e^{2x} = -(-4e^{-2x} + K_1)e^x - 3(e^{-3x} + K_2)e^{2x}. \end{aligned}$$

После элементарных упрощений окончательное решение системы (4.24) приобретает вид

$$\begin{aligned} y_1 &= -2e^{-x} + K_1e^x + 2K_2e^{2x}, \\ y_2 &= e^{-x} - K_1e^x - 3K_2e^{2x}. \end{aligned}$$

В этой главе были разобраны только те методы, которые будут понятны студентам, знающим базовые курсы высшей алгебры и математического анализа. Кроме представленных методов используются ряд других способов решения таких систем. Перечислим некоторые из них:

- метод Даламбера,
- операторный метод решения,
- матричный метод интегрирования,
- интегрирование с помощью степенных рядов.

Глава 5

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Математика, являясь самой древней из всех наук, остаётся вечно молодой.

Келдыш М. В. — математик, президент Академии наук СССР

В теории дифференциальных уравнений есть различные методы построения общих решений некоторых классов дифференциальных уравнений. Наиболее простые методы разобраны в предыдущих главах. Но, в основном, дифференциальные уравнения и системы таких уравнений удаётся решить приближённо с помощью различных численных методов, которые строят только частные решения по заданным начальным или краевым условиям. Рассмотрим некоторые из них.

5.1. Задача Коши

5.1.1. Метод Эйлера для уравнения первого порядка

Метод Эйлера важно изучить для понимания более точных и сложных методов построения решений дифференциальных уравнений и систем.

Поставлена задача Коши для уравнения первого порядка

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \quad (5.1)$$

Предположим, что правая часть уравнения (5.1) удовлетворяет условию Липшица в заданной области интегрирования.

Будем строить решение задачи Коши на $[a; b]$. Для этого разобьём отрезок на n частей:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_n = b.$$

Пусть расстояние между соседними узлами — постоянная величина h (*шаг интегрирования*). Решение строим в виде табличной функции $y_i = y(x_i)$.

Допустим, что искомая функция дважды непрерывно дифференцируема в заданной области, поэтому в каждом узле сетки x_{i+1} функцию можно представить в виде многочлена Тейлора:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y_{i+1} = y_i + y'_i h + \frac{y''_i(c)}{2!} h^2, \quad c \in (x_i, x_{i+1}) \Rightarrow$$

$$y_{i+1} = y_i + y'_i h + O(h^2). \quad (5.2)$$

Значение производной y'_i равно значению правой части $f(x_i, y_i)$ уравнения (5.1). Если в равенстве (5.2) отбросить величину $O(h^2)$, получим рекуррентную **формулу Эйлера**

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i)h. \quad (5.3)$$

Метод построения решения задачи Коши (5.1) по формуле (5.3) называется методом Эйлера.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА

Локальный порядок точности формулы Эйлера равен $O(h^2)$. Очевидно, что чем меньше шаг интегрирования, тем выше точность расчёта по этой формуле. Теоретически при стремлении шага интегрирования к нулю приближение по методу Эйлера сходится к точному решению. Но из-за низкого порядка точности сходимость решения по методу Эйлера очень медленная. Для повышения точности надо проводить много операций, а это приводит к накоплению вычислительных погрешностей.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ МЕТОДА ЭЙЛЕРА

Сравним формулу Эйлера (5.3) с уравнением касательной к графику дифференцируемой функции $y(x)$ в точке $M(x_i, y_i)$:

$$y(x) = y_i + y'(x_i)(x - x_i).$$

Если соединить отрезками точки $\{M(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$, получится график кусочно-линейной аппроксимации решения уравнения (5.1). Каждое звено этого графика лежит на касательной, проведённой к теоретической интегральной кривой в точке $M(x_i, y_i)$, где $i = 1, 2, \dots, n$.



Рис. 5.1

5.1.2. Метод Рунге–Кутты для уравнения первого порядка

В начале XX в. математики Рунге, а затем Кутт предложили простой и более точный численный метод решения дифференциального уравнения первого порядка. Позже было разработано несколько вариантов (схем) этого метода. Наиболее популярным стал метод Рунге – Кутта четвёртого порядка. Построим этим методом табличное решение задачи Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Для понимания смысла метода Рунге–Кутта 4-го порядка используем понятие дифференциала функции. Напомним, что дифференциал – это линейная, относительно приращения Δx , часть приращения функции

$$dy_i = y'(x_i)\Delta x.$$

Для простоты будем строить решение на равномерной сетке $\{x_i\}_{i=1}^n$ с шагом $h = \Delta x$.

Процесс построения решения в каждом узле x_i начинается с вычисления четырёх дифференциалов. Дифференциал k_1 вычисляется в точке $M_1(x_i, y_i)$:

$$k_1 = h f(x_i, y_i),$$

дифференциал k_2 в точке

$$M_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right):$$

$$k_2 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2}\right),$$

дифференциал k_3 в точке

$$M_3\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right):$$

$$k_3 = h f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2}\right),$$

дифференциал k_4 в точке $M_4(x_i + h, y_i + k_3)$:

$$k_4 = h f(x_i + h, y_i + k_3).$$

Далее строится приращение $\tilde{\Delta}y_i$ как среднее взвешенное дифференциалов

k_1, k_2, k_3, k_4 :

$$\tilde{\Delta}y_i = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

В качестве значения функции в точке x_{i+1} берётся

$$y_{i+1} = y_i + \tilde{\Delta}y_i.$$

Приходим к формуле Рунге – Кутта 4-го порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (5.4)$$

Замечание 1. Точный вывод этой формулы представлен в книге [6].

5.1.3. Метод Рунге–Кутта для системы

Для наглядности обратимся к технике решения системы двух уравнений в нормальной форме:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2), \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2). \end{cases}$$

с начальными условиями $y_1(x_0) = y_{0,1}$, $y_2(x_0) = y_{0,2}$.

1. В каждом узле x_i , начиная с x_0 , вычисляется группа дифференциалов в следующем порядке

$$k_1 = h f_1(x_i, y_{i,1}, y_{i,2}), \quad m_1 = h f_2(x_i, y_{i,1}, y_{i,2});$$

$$k_2 = h f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i,1} + \frac{k_1}{2}, y_{i,2} + \frac{m_1}{2}\right), \quad m_2 = h f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i,1} + \frac{k_1}{2}, y_{i,2} + \frac{m_1}{2}\right);$$

$$k_3 = h f_1\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i,1} + \frac{k_2}{2}, y_{i,2} + \frac{m_2}{2}\right), \quad m_3 = h f_2\left(x_i + \frac{h}{2}, y_{i,1} + \frac{k_2}{2}, y_{i,2} + \frac{m_2}{2}\right);$$

$$k_4 = h f_1(x_i + h, y_{i,1} + k_3, y_{i,2} + m_3), \quad m_4 = h f_2(x_i + h, y_{i,1} + k_3, y_{i,2} + m_3).$$

2. Вычисляются приращения $\tilde{\Delta}y_{i,1}$ и $\tilde{\Delta}y_{i,2}$:

$$\tilde{\Delta}y_{i,1} = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4); \quad \tilde{\Delta}y_{i,2} = \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4).$$

3. По формуле Рунге – Кутта строятся значения функций y_1 и y_2 в точке

$$x_{i+1} = x_i + h:$$

$$y_{(i+1),1} = y_{i,1} + \tilde{\Delta}y_{i,1} = y_{i,1} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

$$y_{(i+1),2} = y_{i,2} + \tilde{\Delta}y_{i,2} = y_{i,2} + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4).$$

Доказано, что локальный порядок точности этого метода равен $O(h^5)$.

5.1.4. Алгоритм решения задачи Коши.

Построение численного решения задачи Коши в узлах $\{x_i\}_{i=1}^n$ области $[a; b]$ только с помощью формулы Эйлера или формулы Рунге – Кутта может привести

к решению, которое не будет иметь ничего общего с истинным решением поставленной задачи. Этот печальный факт связан с накоплением вычислительной погрешности при переходе от узла x_i к x_{i+1} (рис. 5.2).

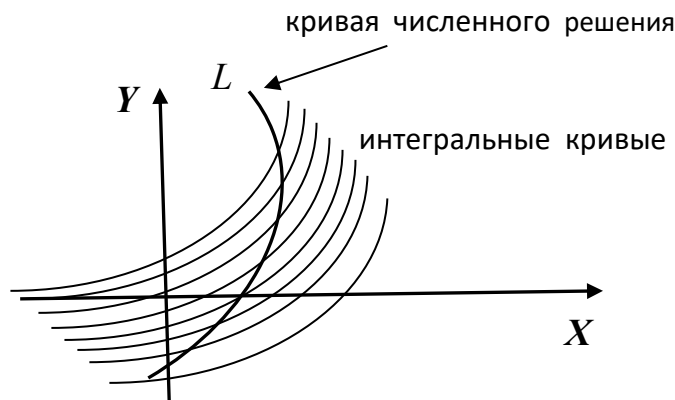


Рис. 5.2

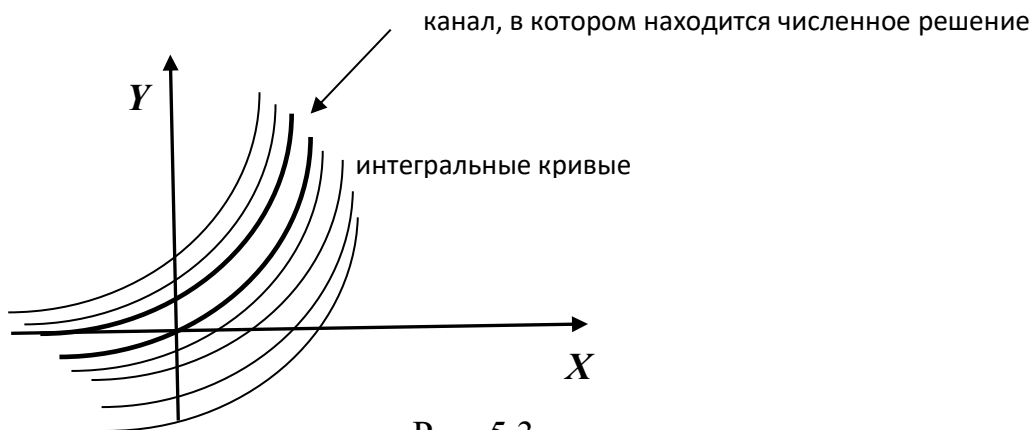


Рис. 5.3

Как правило, оптимальный шаг интегрирования h нельзя выбрать априори. Если мы хотим построить хорошее приближение к точному решению задачи Коши, необходимо на протяжении всего процесса вычисления по формуле Эйлера или Рунге – Кутты использовать такой алгоритм вычисления, в котором не будет накапливаться вычислительная погрешность. Значения приближенного решения должны лежать внутри достаточно узкого канала между теоретическими интегральными кривыми исходного уравнения (рис. 5.3).

Один из самых простых и достаточно эффективных алгоритмов решения задачи Коши – алгоритм с **автоматическим выбором шага**. Этот алгоритм и его модификации реализованы и успешно используются в стандартных программах различных математических пакетов. Опишем кратко один из простейших вариантов такого алгоритма.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ С АВТОМАТИЧЕСКИМ ВЫБОРОМ ШАГА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ

1. Входные данные для алгоритма: правая часть дифференциального уравнения $f(x, y)$, начальные условия $y(x_0) = y_0$, необходимая точность решения ε и начальный шаг интегрирования $h = h_{\text{нач}}$.

2. По формуле Рунге – Кутты (5.4) вычисляется y_1 в точке $x_1 = x_0 + h$.

3. Исходный шаг интегрирования делится пополам: $h = 0,5 h_{\text{нач}}$. С этим половинным шагом дважды используется формула (5.4) для вычисления $\bar{y}_1$ в той же точке $x_1 = x_0 + h$.

4. Сравниваются два значения искомой функции y_1 и $\bar{y}_1$ по формуле относительной погрешности:

$$\left| \frac{y_1 - \bar{y}_1}{y_1} \right| = \delta. \quad (5.5)$$

Рассматриваются три случая.

– Если $\delta < \varepsilon$, тогда по формуле (5.4) вычисляется значение решения y_2 в следующем узлеточке $x_2 = x_1 + h_{\text{нач}}$.

– Если $\delta \ll \varepsilon$ (намного меньше), тогда начальный шаг $h_{\text{нач}}$ увеличивается вдвое $h = 2h_{\text{нач}}$ и далее строится решение y_2 в точке $x_2 = x_1 + h$.

– Если $\delta > \varepsilon$, тогда шаг $h_{\text{нач}}$ уменьшается вдвое и в качестве исходного шага берётся $h = 0,5h_{\text{нач}}$ и с этим шагом вновь вычисляется решение y_1 в точке $x_1 = x_0 + h$, затем строится решение $\bar{y}_1$ (п. 3). Далее происходит оценка погрешности (5.5) и выбор оптимального шага интегрирования (п. 4).

Шаги алгоритма: 2–4 повторяются в каждой последующей точке интегрирования $x_{i+1} = x_i + h$. Благодаря постоянной корректировке шага h все вычисленные значения решения задачи Коши находятся в достаточно узком канале между близкими теоретическими интегральными кривыми исходного уравнения (рис. 5.3). Ширина этого канала зависит от заданной точности ε .

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ С АВТОМАТИЧЕСКИМ ВЫБОРОМ ШАГА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Структура алгоритма сохраняется в случае решения систем, содержащих m неизвестных функций. Остановимся подробнее на 4-м шаге алгоритма. С помощью формулы (5.5) в каждой точке x_i вычисляется относительная погрешность δ_k для всех функций:

$$\left\{ \left| \frac{y_{i,k} - \bar{y}_{i,k}}{y_{i,k}} \right| = \delta_k \right\}_{k=1}^m; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Интегрирование переходит в точку $x_{i+1} = x_i + h$ только при условии $\delta_k < \varepsilon$

или $\delta_k \ll \varepsilon$ для каждой пары

$$y_{i,k} \text{ , } \bar{y}_{i,k} \text{ и } \forall k = 1, 2, \dots, m.$$

5.1.5. Задача Коши для уравнений порядка n

Любое дифференциальное уравнение порядка n можно преобразовать в систему уравнений первого порядка. Для этого вводят новые переменные:

$$y'(x) = g_1(x), y''(x) = g_2(x), \dots, y^{(n-1)}(x) = g_{n-1}(x).$$

Дифференциальное уравнение

$$y^{(n)}(x) = F\left(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right) \quad (5.6)$$

превращается в систему дифференциальных уравнений первого порядка

[illegible]

Начальные условия для дифференциального уравнения (5.6)

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

становятся начальными условиями для системы (5.7)

$$y(x_0) = y_0, \quad g_1(x_0) = y'_0, \dots, \quad g_{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Задачу Коши для системы (5.7) можно решить методом Рунге — Кутты. В процессе решения уравнения (5.6) с помощью системы (5.7) находятся не только значения функции $y(x)$, но и одновременно с этим вычисляются значения всех производных этой функции до $(n - 1)$ -го порядка включительно.

5.2. Краевая задача

5.2.1. Разностная аппроксимация производных

Предположим, что функция $y(x)$ задана на отрезке $[a; b]$ и дважды непрерывно дифференцируема в этой области. Область $[a; b]$ разбита на n равных частей с достаточно малым ($h \ll 1$) шагом $h = (b - a)/n$. Пусть $\{x_i\}_{i=0}^n$ — **узлы разбиения отрезка**.

Выразим значение функции $y(x)$ в узле x_{i+1} через значение функции и её производных в предыдущем узле x_i . Для этого используем *многочлен Тейлора*:

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1} = y_i + \frac{y'_i}{1!}h + \frac{y''(c)}{2!}h^2, \quad \exists c \in (x_i; x_{i+1}) \Rightarrow$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{y'_i}{1!}h + O(h^2) \Rightarrow y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h). \quad (5.8)$$

Равенство (5.8) приводит к формуле

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \quad (5.9)$$

Формула (5.9) называется **правосторонней разностной аппроксимацией первой производной** в любом внутреннем узле разбиения x_i и в левой граничной точке a области $[a; b]$:

$$y'(a) = y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \frac{y_1 - y(a)}{h}.$$

Порядок точности формулы (5.8) равен $O(h)$. Запишем равенство (5.8) в виде

$$y_{i-1} = y_i - \frac{y'_i}{1!}h + O(h^2) \Rightarrow y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h).$$

Последнее равенство даёт формулу

$$y'_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}. \quad (5.10)$$

Её называют **левосторонней разностной аппроксимацией первой производной**. Порядок точности равен $O(h)$. Такую аппроксимацию можно использовать для приближения первой производной в правой граничной точке области интегрирования:

$$y'(b) = y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \frac{y(b) - y_{n-1}}{h}.$$

Пусть функция $y(x)$ трижды непрерывно дифференцируема на $[a; b]$ с тем же разбиением. Выразим y_{i+1} и y_{i-1} через значения функции и её производных в точке x_i :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{y'_i}{1!}h + \frac{y''_i}{2!}h^2 + \frac{y'''(c_1)}{3!}h^3, \quad c_1 \in (x_i, x_{i+1}),$$

$$y_{i-1} = y_i - \frac{y'_i}{1!}h + \frac{y''_i}{2!}h^2 - \frac{y'''(c_2)}{3!}h^3, \quad c_2 \in (x_{i-1}, x_i).$$

Из первого равенства вычитаем второе:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2y'_i h + O(h^3).$$

Выразим из последнего равенство значение первой производной:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2). \quad (5.11)$$

Равенство (5.11) приводит к формуле

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \quad (5.12)$$

Эта формула называется **центрально-разностной (центральной) аппроксимацией первой производной**. Её можно использовать в любом внутреннем узле x_i отрезка $[a; b]$. Порядок точности формулы (5.12) равен $O(h^2)$.

Предположим, что функция $y(x)$ имеет непрерывную производную 4-го порядка. Запишем для неё два многочлена Тейлора, используя соседние узлы x_{i-1} , x_i , x_{i+1} :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{y'_i}{1!}h + \frac{y''_i}{2!}h^2 + \frac{y'''_i}{3!}h^3 + \frac{y^{(4)}_i(c_1)}{4!}h^4, \quad c_1 \in (x_i, x_{i+1}),$$

$$y_{i-1} = y_i - \frac{y'_i}{1!}h + \frac{y''_i}{2!}h^2 - \frac{y'''_i}{3!}h^3 + \frac{y^{(4)}_i(c_2)}{4!}h^4, \quad c_2 \in (x_{i-1}, x_i).$$

Складываем эти равенства:

$$y_{i+1} + y_{i-1} = 2y_i + 2\frac{y''_i}{2!}h^2 + O(h^4).$$

Выразим из последнего равенства значение второй производной:

$$y''_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + O(h^2). \quad (5.13)$$

Равенство (5.13) даёт формулу

$$y''_i = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}. \quad (5.14)$$

Она называется **центрально-разностной (центральной) аппроксимацией второй производной**. Эту формулу можно использовать в любом внутреннем узле x_i отрезка $[a; b]$. Порядок точности этой формулы $O(h^2)$.

5.2.2. Сеточный метод решения

Применение сеточного метода (**разностного метода, конечно-разностного метода**) для решения краевых задач сводится к простой процедуре замены производных в дифференциальном уравнении на их разностную аппроксимацию. После такой замены уравнение можно преобразовать в систему линейных

алгебраических уравнений. Простота структуры полученной системы наиболее привлекательна в сеточном методе.

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО РОДА

В качестве примера разберём решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (5.15)$$

с заданными непрерывными коэффициентами $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ и краевыми условиями первого рода

$$x \in [a; b], \quad y(a) = \gamma_1, \quad y(b) = \gamma_2.$$

Построим на $[a; b]$ сетку с постоянным шагом интегрирования h и узлами разбиения x_i , $i = 1, \dots, n-1$.

Уравнение (5.15) в любом внутреннем узле x_i можно аппроксимировать разностным уравнением. Для этого заменим $y''(x_i)$ и $y'(x_i)$ центральными разностями (5.12) и (5.13). Пусть $y(x_i) = y_i$.

Разностная аппроксимация уравнения (5.15) имеет вид

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = f(x_i).$$

Для упрощения вида этого уравнения введём новые обозначения и приведём подобные члены. Пусть $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$:

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right)y_{i-1} + \left(q_i - \frac{2}{h^2}\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)y_{i+1} = f_i. \quad (5.16)$$

Это уравнение называется **разностной аппроксимацией дифференциального уравнения** (5.15).

Построенная аппроксимация верна во всех внутренних узлах разбиения. Поэтому можно записать уравнение (5.16) в каждом узле $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$. Так строится линейная алгебраическая система (5.17) с трёхдиагональной матрицей. Неизвестными величинами в системе выступают значения $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{n-1}$ искомой функции $y(x)$ — решения дифференциального уравнения (5.15).

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}\right)y_0 + \left(q_1 - \frac{2}{h^2}\right)y_1 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}\right)y_2 = f_1, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_2}{2h}\right)y_1 + \left(q_2 - \frac{2}{h^2}\right)y_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_2}{2h}\right)y_3 = f_2, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_3}{2h}\right)y_2 + \left(q_3 - \frac{2}{h^2}\right)y_3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_3}{2h}\right)y_4 = f_3, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right)y_{i-1} + \left(q_i - \frac{2}{h^2}\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)y_{i+1} = f_i, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_{n-1}}{2h}\right)y_{n-2} + \left(q_{n-1} - \frac{2}{h^2}\right)y_{n-1} + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_{n-1}}{2h}\right)y_n = f_{n-1}. \end{array} \right. \quad (5.17)$$

В первом и последнем уравнениях системы (5.17) значения y_0 и y_n известны из краевых условий первого рода: $y_0 = y(a) = \gamma_1$, $y_n = y(b) = \gamma_2$, поэтому первое слагаемое в первом уравнении и последнее слагаемое в последнем уравнении можно перенести в правую часть системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(q_1 - \frac{2}{h^2}\right)y_1 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}\right)y_2 = -\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}\right)\gamma_1 + f_1, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_2}{2h}\right)y_1 + \left(q_2 - \frac{2}{h^2}\right)y_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_2}{2h}\right)y_3 = f_2, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_3}{2h}\right)y_2 + \left(q_3 - \frac{2}{h^2}\right)y_3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_3}{2h}\right)y_4 = f_3 \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right)y_{i-1} + \left(q_i - \frac{2}{h^2}\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)y_{i+1} = f_i, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_{n-1}}{2h}\right)y_{n-2} + \left(q_{n-1} - \frac{2}{h^2}\right)y_{n-1} = -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_{n-1}}{2h}\right)\gamma_n + f_{n-1}. \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Система (5.18) замкнутая, так как содержит одинаковое количество уравнений и неизвестных. Матрица системы трёхдиагональная, значит, значения $\{y_i\}_{i=1}^{n-1}$ лучше находить **методом трёхдиагональной прогонки** (приложение 1).

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ВТОРОГО РОДА

Краевые условия второго рода для уравнения (5.15) имеют вид

$$y'(a) = \gamma_1, \quad y'(b) = \gamma_2.$$

Аппроксимируем первую производную $y'(a)$ правосторонней разностью:

$$y'(a) = y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h} = \gamma_1 \Rightarrow -y_0 + y_1 = h\gamma_1 \quad (5.19)$$

и первую производную $y'(b)$ – левосторонней разностью:

$$y'(b) = y'_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = \gamma_2 \Rightarrow -y_{n-1} + y_n = h\gamma_2. \quad (5.20)$$

Последнее равенство в (5.19) станет первым уравнением в системе для нахождения значений $\{y_i\}_{i=0}^n$, а последнее равенство в (5.20) будет последним уравнением этой системы. Она состоит из $(n+1)$ -го уравнения и содержит столько же неизвестных. Уравнения, кроме первого и последнего, строятся аналогично уравнениям (5.18). Матрица трёхдиагональна, поэтому система легко решается методом прогонки.

Ниже представлена такая система (5.21).

$$\left\{ \begin{array}{l} -y_0 + y_1 = h\gamma_1, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}\right)y_0 + \left(q_1 - \frac{2}{h^2}\right)y_1 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}\right)y_2 = f_1, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_2}{2h}\right)y_1 + \left(q_2 - \frac{2}{h^2}\right)y_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_2}{2h}\right)y_3 = f_2, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_3}{2h}\right)y_2 + \left(q_3 - \frac{2}{h^2}\right)y_3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_3}{2h}\right)y_4 = f_3, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right)y_{i-1} + \left(q_i - \frac{2}{h^2}\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)y_{i+1} = f_i, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_{n-1}}{2h}\right)y_{n-2} + \left(q_{n-1} - \frac{2}{h^2}\right)y_{n-1} + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_{n-1}}{2h}\right)y_n = f_{n-1}, \\ -y_{n-1} + y_n = h\gamma_2. \end{array} \right. \quad (5.21)$$

СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

Смешанные краевые условия (краевые условия третьего рода) приводят к одной из представленных ниже систем с трёхдиагональной матрицей.

Решение исходного дифференциального уравнения (5.15) с краевыми условиями

$$y'(a) = \gamma_1, \quad y(b) = \gamma_2$$

сводится к решению линейной алгебраической системы с n неизвестными и n уравнениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} -y_0 + y_1 = h \cdot \gamma_1, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}\right)y_0 + \left(q_1 - \frac{2}{h^2}\right)y_1 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}\right)y_2 = f_1, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_2}{2h}\right)y_1 + \left(q_2 - \frac{2}{h^2}\right)y_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_2}{2h}\right)y_3 = f_2, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_3}{2h}\right)y_2 + \left(q_3 - \frac{2}{h^2}\right)y_3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_3}{2h}\right)y_4 = f_3, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right)y_{i-1} + \left(q_i - \frac{2}{h^2}\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)y_{i+1} = f_i, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_{n-1}}{2h}\right)y_{n-2} + \left(q_{n-1} - \frac{2}{h^2}\right)y_{n-1} = -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_{n-1}}{2h}\right)\gamma_2 + f_{n-1} \end{array} \right. \quad (5.22)$$

Решение исходного уравнения (5.15) с краевыми условиями

$$y(a) = \gamma_1, \quad y'(b) = \gamma_2$$

сводится к решению линейной алгебраической системы, которая тоже состоит из n уравнений и содержит столько же неизвестных:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(q_1 - \frac{2}{h^2}\right)y_1 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)y_2 = -\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}\right)\gamma_1 + f_1, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_2}{2h}\right)y_1 + \left(q_2 - \frac{2}{h^2}\right)y_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_2}{2h}\right)y_3 = f_2, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_3}{2h}\right)y_2 + \left(q_3 - \frac{2}{h^2}\right)y_3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_3}{2h}\right)y_4 = f_3, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right)y_{i-1} + \left(q_i - \frac{2}{h^2}\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)y_{i+1} = f_i, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_{n-1}}{2h}\right)y_{n-2} + \left(q_{n-1} - \frac{2}{h^2}\right)y_{n-1} + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_{n-1}}{2h}\right)y_n = f_{n-1}, \\ \\ -y_{n-1} + y_n = h \cdot \gamma_2. \end{array} \right. \quad (5.23)$$

Система (5.23) решается методом трёхдиагональной прогонки.

5.2.3. Точность разностного метода

Доказано, что если в уравнении (5.15) $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируемые функции, то разностное решение равномерно сходится к точному решению с погрешностью $O(h^2)$ при $h \rightarrow 0$.

В случае краевых условий 2-го и 3-го рода на границах отрезка $[a; b]$ можно использовать аппроксимации (5.9) и (5.10). Порядок точности этих формул $O(h)$. Менее точная аппроксимация только в одной или в двух точках понижает точность всего решения. Поэтому в граничных точках лучше построить более точное приближение первой производной с помощью **метода фиктивных областей**. Опишем кратко идею этого простого метода.

Введём два фиктивных узла

$$x_{-1} = a - h = x_0 - h; \quad x_{n+1} = b + h = x_n + h.$$

Выразим значения неизвестной функции $y(x)$ в двух фиктивных узлах через её значения в ближайших реальных узлах на $[a; b]$. Для этого используем центрально-разностную аппроксимацию первой производной, порядок точности которой $O(h^2)$:

$$y'(a) = y'_0 = \gamma_1 = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} \Rightarrow y_{-1} = y_1 - \gamma_1 2h, \quad (5.24)$$

$$y'(b) = y'_n = \gamma_2 = \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h} \Rightarrow y_{n+1} = y_{n-1} + \gamma_2 2h. \quad (5.25)$$

Запишем разностную аппроксимацию (5.16) исходного дифференциального уравнения (5.15) в точке $x_0 = a$ и в точке $x_n = b$:

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_0}{2h}\right)y_{-1} + \left(q_0 - \frac{2}{h^2}\right)y_0 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_0}{2h}\right)y_1 = f_0,$$

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_n}{2h}\right)y_{n-1} + \left(q_n - \frac{2}{h^2}\right)y_n + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_n}{2h}\right)y_{n+1} = f_n.$$

Сделаем в этих уравнениях подстановки (5.24) и (5.25):

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_0}{2h}\right)(y_1 - \gamma_1 2h) + \left(q_0 - \frac{2}{h^2}\right)y_0 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_0}{2h}\right)y_1 = f_0,$$

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_n}{2h}\right)y_{n-1} + \left(q_n - \frac{2}{h^2}\right)y_n + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_n}{2h}\right)(y_{n-1} + \gamma_2 2h) = f_n.$$

Приведём подобные члены:

$$\left(q_0 - \frac{2}{h^2}\right)y_0 + \frac{2}{h^2}y_1 = f_0 + \gamma_1 \left(\frac{2}{h} - p_0\right), \quad (5.26)$$

$$\frac{2}{h^2}y_{n-1} + \left(q_n - \frac{2}{h^2}\right)y_n = f_n - \gamma_2 \left(\frac{2}{h} + p_n\right). \quad (5.27)$$

Построенные уравнения (5.26), (5.27) имеют порядок точности $O(h^2)$.

Для повышения точности решения уравнения (5.15) с граничными условиями 2-го рода надо первое уравнение системы (5.21) заменить на уравнение (5.26), а последнее уравнение заменить на уравнение (5.27). В случае граничных условий 3-го рода таким же образом меняется либо первое уравнение системы (5.22), либо последнее уравнение системы (5.23).

Метод фиктивных областей успешно используется в различных задачах для аппроксимации производных в граничных точках заданной области.

5.3. Методы аналитического приближения

Перейдём к методам аналитической аппроксимации решения краевой задачи для линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Для этого напомним некоторые понятия из теории функциональных рядов.

Определение 1. Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ называются *линейно независимыми* на $[a; b]$, если при любом числе $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ верно неравенство

$$\varphi_1(x) \neq \gamma \varphi_2(x) \text{ или } \varphi_2(x) \neq \gamma \varphi_1(x).$$

Определение 2. Бесконечная система функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ называется **линейно независимой** на отрезке $[a; b]$, если равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = 0$$

верно только в случае равенства нулю всех числовых коэффициентов $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Функции, входящие в линейно независимую систему, называются **базисными (координатными)** функциями.

Теорема 1. Любую непрерывную на $[a; b]$ функцию $y(x)$ можно разложить на этом отрезке в равномерно сходящийся ряд по бесконечному набору линейно независимых непрерывных функций:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x) = \sum_{n=0}^M c_n \varphi_n(x) + R_M.$$

Определение 3. Бесконечная система функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ называется **полной** в некотором метрическом пространстве, если любую функцию из этого же пространства можно с любой степенью точности аппроксимировать линейной комбинацией функций из этой системы.

Теорема 2. Если для некоторой функции $\eta(x)$ и полной системы функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ выполняется равенство

$$\int_a^b \eta(x) \varphi_n(x) dx = 0$$

для любой функции $\varphi_n(x)$ из полной системы, тогда функция $\eta(x) \equiv 0$ на всём отрезке $[a; b]$.

5.3.1. Метод Бубнова – Галёркина

Решение линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (5.28)$$

с линейными краевыми условиями 1-го рода будем строить в виде

$$y(x) = y_M = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n(x) = \varphi_0 + \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n. \quad (5.29)$$

Запишем аналитическое представление 1-й и 2-й производных функции $y(x)$:

$$y_M'' = \varphi_0''(x) + \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n''(x) = \varphi_0'' + \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n''. \quad (5.31)$$

где $p = p(x)$, $q = q(x)$, $f = f(x)$.

Величина η называется *невязкой*. Чем больше слагаемых в частичных суммах в уравнении (5.32), тем меньше значение невязки. Она равна нулю только при подстановке точного решения в исходное дифференциальное уравнение.

В уравнении (5.32) приведём подобные члены относительно неизвестных коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^M$:

$$c_1(\varphi_1'' + p\varphi_1' + \varphi_1) + c_2(\varphi_2'' + p\varphi_2' + \varphi_2) + \cdots \\ \cdots + c_M(\varphi_M'' + p\varphi_M' + \varphi_M) + pc_0 + q\varphi_0 - f = \eta. \quad (5.33)$$

2. С помощью уравнения (5.33) строим систему из M уравнений. Для построения 1-го уравнения умножаем (5.33) на базисную функцию φ_1 , для получения 2-го уравнения умножаем (5.33) на φ_2 и т.д. Последнее уравнение системы появляется после умножения (5.33) на φ_M .

Для компактной записи системы введём новые обозначения. Пусть

$$\varphi_n'' + p\varphi_n' + \varphi_n = L_n, \text{ где } n = 1, 2, \dots, M.$$

Построенная система имеет вид

[illegible]

Базисные функции $\{\varphi_n\}_{n=1}^M$ линейно независимы. Поэтому уравнения построенной системы (5.34) тоже линейно независимы.

3. Для превращения системы (5.34) в алгебраическую систему проинтегрируем по области $[a; b]$ каждое её уравнение и учтём, что значение невязки η достаточно мало. На основе теоремы 2 можно считать, что невязка ортогональна всем базисным функциям $\{\varphi_n\}_{n=1}^M$ на отрезке $[a; b]$:

$$\int_a^b \eta \varphi_1 dx = \int_a^b \eta \varphi_2 dx = \cdots = \int_a^b \eta \varphi_M dx = 0.$$

Преобразованная система (5.34) стала линейной алгебраической системой

$$\begin{cases} c_1 \int_a^b L_1 \varphi_1 dx + c_2 \int_a^b L_2 \varphi_1 dx + .. + c_M \int_a^b L_M \varphi_1 dx = \int_a^b (f - q\varphi_0 - pc_0) \varphi_1 dx, \\ c_1 \int_a^b L_1 \varphi_2 dx + c_2 \int_a^b L_2 \varphi_2 dx + .. + c_M \int_a^b L_M \varphi_2 dx = \int_a^b (f - q\varphi_0 - pc_0) \varphi_2 dx, \\ \\ c_1 \int_a^b L_1 \varphi_M dx + c_2 \int_a^b L_2 \varphi_M dx + .. + c_M \int_a^b L_M \varphi_M dx = \int_a^b (f - q\varphi_0 - pc_0) \varphi_M dx. \end{cases}$$

4. Определитель построенной системы не равен нулю, так как все её уравнения линейно независимы. Значит, существует единственное решение. Наши базисные функции – многочлены. Входящие в исходное уравнение заданные функции $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$, обычно достаточно просты. Поэтому не будет никаких проблем в вычислении интегралов, входящих в систему.

После нахождения коэффициентов $\{c_n(x)\}_{n=1}^M$ приближённое аналитическое решение дифференциального уравнения (5.28) построено

$$y(x) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n(x).$$

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА БУБНОВА – ГАЛЁРКИНА

Количество базисных функций в представлении решения заранее неизвестно. Оно зависит от заданной точности расчёта ε . Сначала ограничиваются числом $M = 2$. По описанному выше алгоритму строится первое приближение

$$y_M(x) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n(x). \quad (5.35)$$

Далее добавляется ещё одна базисная функция ($M = 3$) и по такому же алгоритму строится следующее приближение

$$y_{M+1}(x) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{M+1} \tilde{c}_n \varphi_n(x). \quad (5.36)$$

В области $[a; b]$ выбираются точки $\{x_i\}_{i=1}^K$, в которых сравниваются значения полученных приближений:

$$\left| \frac{y_{M+1}(x_i) - y_M(x_i)}{y_M(x_i)} \right| < \varepsilon. \quad (5.37)$$

Если неравенство (5.37) выполняется во всех точках $\{x_i\}_{i=1}^K$, тогда в качестве решения исходной краевой задачи выбирается приближение (5.35). Если неравенство не выполняется, хотя бы в одной точке x_i , тогда весь алгоритм по-

вторяется. Перед повтором алгоритма параметр M увеличивают на единицу.

Процесс заканчивается, когда на $(L + 1)$ -м повторении алгоритма во всех узлах $\{x_i\}_{i=1}^K$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{y_{M+1+L}(x_i) - y_{M+L}(x_i)}{y_{M+L}(x_i)} \right| < \varepsilon.$$

Последнее приближение к точному решению имеет вид

$$y_{M+L}(x) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{M+L} \tilde{c}_n \varphi_n(x).$$

ОСОБЕННОСТИ МЕТОДА БУБНОВА–ГАЛЁРКИНА

1. Метод даёт хорошие результаты для решения линейных дифференциальных уравнений.
2. При добавлении базисных функций в следующее приближение появляются новые коэффициенты c_n и меняются старые.
3. Выбор системы базисных функций зависит от поставленной задачи. Точность результата решения тоже зависит от того, насколько удачно выбрана такая система функций.

5.3.2. Метод Ритца

С помощью этого метода можно найти приближённое решение уравнения в аналитическом виде. Основой метода является раздел высшей математики «Вариационное исчисление». Исторические сведения о нём можно прочесть в приложении 3. Здесь ограничимся только основными понятиями и свойствами.

Базовым понятием этого раздела математики является функционал.

Определение 4(а). *Функционалом* называется взаимно однозначное соответствие между функциональным множеством и числовым множеством.

Можно дать другое определение.

Определение 4(б). *Функционал* – это оператор, отображающий пространство функций в числовое множество.

Определение 5. Функция, при которой функционал достигает своего экстремального значения в заданной области, называется *экстремалью*.

Примером функционала может быть определённый интеграл, подынтегральное выражение которого зависит от некоторой функции $y(x)$ и её производных.

«Вариационное исчисление» посвящено исследованию функционалов на экстремум и построению общих методов нахождения экстремалей.

Развитие численных методов вариационного исчисления началось с метода Ритца (1908), благодаря которому экстремали строятся с любой степенью точности.

УРАВНЕНИЕ ЭЙЛЕРА

Дифференциальные уравнения и функционалы тесно связаны между собой. В качестве примера приведём фундаментальную теорему, которая часто встречается в различных приложениях.

Теорема 3. Функционал

$$I(y) = \int_a^b F(x, y, y') dx \quad (5.38)$$

с дважды непрерывно дифференцируемой по всем своим переменным подынтегральной функцией $F(x, y, y')$ имеет экстремаль $y(x)$ с заданными краевыми условиями только в том случае, когда функция $y(x)$ – решение уравнения

$$F''_{y'y'} \cdot y'' + F''_{y'y} \cdot y' + F''_{y'x} - F'_y = 0 \quad (5.39)$$

с теми же краевыми условиями.

Дифференциальное уравнение (5.39) называется *уравнением Эйлера*. Его можно записать в более компактной форме

$$(F(x, y, y'))'_{y'} - F'_y = 0. \quad (5.40)$$

С помощью этой теоремы можно построить решение уравнения (5.40). Для этого достаточно найти экстремаль соответствующего функционала. Если экстремаль не находится точно, её можно построить приближённо методом Рунта.

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПО ФУНКЦИОНАЛУ

В качестве примера функционала (5.39) используем функционал

$$I(y) = \int_a^b (p(x)(y')^2 + q(x)y^2 - 2f(x)y) dx \quad (5.41)$$

с заданными краевыми условиями $y(a) = \gamma_1$, $y(b) = \gamma_2$.

Построим соответствующее уравнение Эйлера. Для этого возьмём частные производные:

$$F''_{y'y'} = 2p(x), \quad F''_{y'y} = 0, \quad F''_{y'x} = 2p'(x)y', \quad F'_y = 2q(x)y - 2f(x)$$

и подставим их в уравнение Эйлера (5.40):

$$\begin{aligned} 2p(x)y'' + 2p'(x)y' - 2q(x)y + 2f(x) &= 0 \Rightarrow \\ -\left(p(x)y'(x)\right)'_x + q(x)y(x) - f(x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Уравнение (5.42) – уравнение Эйлера для функционала (5.41).

Из теоремы 3 следует, что решение уравнения (5.42) с заданными краевыми условиями совпадает с экстремалью функционала (5.41) с теми же краевыми условиями.

Прежде чем приступить к описанию метода Ритца, покажем, как любое линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами можно преобразовать в уравнение Эйлера.

ПЕРЕХОД К УРАВНЕНИЮ ЭЙЛЕРА

Предположим, что дифференциальное уравнение задано в виде

$$y''(x) + g(x)y'(x) + z(x)y(x) = f(x). \quad (5.43)$$

Функции $g(x)$, $z(x)$ и $f(x)$ непрерывны, а $g(x)$ – дифференцируема на отрезке $[a; b]$. Умножим уравнение (5.43) на положительную функцию

$$p(x) = e^{\int_a^x g(t)dt} \Rightarrow p'(x) = p(x)g(x) \Rightarrow \\ p(x)y''(x) + p(x)g(x)y'(x) + p(x)z(x)y(x) = p(x)f(x).$$

Сумма двух первых слагаемых этого уравнения – это производная от произведения $y'(x)p(x)$:

$$p(x)y''(x) + p(x)g(x)y'(x) = (p(x)y'(x))'_x \Rightarrow \\ (p(x)y'(x))'_x + p(x)z(x)y(x) = p(x)f(x).$$

Умножим последнее уравнение на (-1) и введём новые обозначения

$$u(x) = -p(x)z(x), \quad w(x) = -p(x)f(x).$$

Теперь преобразованное уравнение (5.43) стало уравнением Эйлера

$$-(p(x)y'(x))'_x + u(x)y(x) = w(x). \quad (5.44)$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДОМ РИТЦА

1. Решение уравнения (5.43) строится в виде *обобщённого многочлена*

$$y_M(x) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n(x) \quad (5.45)$$

по системе линейно независимых на $[a; b]$ функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^M$. Базисные функции в этой системе можно строить также как в методе Бубнова–Галёркина:

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) &= \gamma_1 + \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)(x - a)}{b - a}, \\ \varphi_1(x) &= (x - a)(x - b), \quad \varphi_2(x) = x(x - a)(x - b), \\ \varphi_3(x) &= x^2(x - a)(x - b), \quad \varphi_4(x) = x^3(x - a)(x - b), \\ &\dots\dots\dots \\ \varphi_M(x) &= x^{M-1}(x - a)(x - b).\end{aligned}$$

2. Для нахождения неизвестных коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^M$ заменяем в функционале (5.41) неизвестную функцию на её приближение (5.45):

$$I(y) = \int_a^b (p(x)(y')^2 + q(x)y^2 - 2f(x)y)dx = I \Rightarrow$$

$$I = \int_a^b \left(p \left(\varphi'_0 + \sum_{n=1}^M c_n \varphi'_n \right)^2 + q \left(\varphi_0 + \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n \right)^2 - 2f \left(\varphi_0 + \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n \right) \right) dx, \quad (5.46)$$

где $p = p(x)$, $q = q(x)$, $f = f(x)$, $\varphi_0 = \varphi_0(x)$, $\varphi_n = \varphi_n(x)$.

3. Правая часть равенства (5.46) зависит от коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^M$. Поэтому функционал $I = I(y_M)$ становится функцией, которая тоже зависит от: $\{c_n\}_{n=1}^M$:

$$I(y_M) = I(c_1, c_2, \dots, c_{M-1}, c_M). \quad (5.47)$$

Функция (5.47) дифференцируема по каждой переменной c_n , следовательно, для неё справедливо необходимое условие существования экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial c_1} = 0, \\ \frac{\partial I}{\partial c_2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial I}{\partial c_k} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial I}{\partial c_M} = 0. \end{cases} \quad (5.48)$$

Система называется системой Ритца. В каждом уравнении этой системы

приведём подобные члены относительно $\{c_n\}_{n=1}^M$. После этого любое уравнение системы (5.48) с номером k ($k = 1, 2, \dots, M$) преобразуется к виду

$$\int_a^b \left(p \left(\varphi'_0 + \sum_{n=1}^M c_n \varphi'_n \right) \varphi'_k + q \left(\varphi_0 + \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n \right) \varphi_k - f \varphi_k \right) dx = 0 \Rightarrow$$

$$c_1 \int_a^b (p \varphi'_1 \varphi'_k + q \varphi_1 \varphi_k) dx + c_2 \int_a^b (p \varphi'_2 \varphi'_k + q \varphi_2 \varphi_k) dx + \dots +$$

$$+ c_M \int_a^b (p \varphi'_M \varphi'_k + q \varphi_M \varphi_k) dx = \int_a^b (f \varphi_k - p \varphi'_0 - q \varphi_0) dx, \quad (5.49)$$

Из уравнения (5.49) видно, что система (5.48) – линейная система относительно коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^M$. Легко проверить, что матрица этой системы будет симметричной.

В рамках вариационного исчисления доказано, что если функции

$$p(x) > 0 \text{ и } q(x) \geq 0$$

и заданы краевые условия первого рода, тогда существует единственное решение системы (5.48).

После решения системы (5.48) сразу становится известным приближённое решение дифференциального уравнения Эйлера:

$$y_M(x) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n(x),$$

которое сходится к точному решению $y(x)$:

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \left(\varphi_0(x) + \sum_{n=1}^M c_n \varphi_n(x) \right) = y(x).$$

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МЕТОДА РИТЦА

Системы с симметричными матрицами лучше решать методом квадратного корня. Этот метод содержит вдвое меньше арифметических действий и использует вдвое меньше оперативной памяти, чем метод Гаусса. Он даёт более точные результаты за меньшее время расчёта.

Алгоритм нахождения оптимального количества базисных функций в методе Ритца аналогичен соответствующему алгоритму в методе Бубнова – Галёркина.

Замечание 2. Следует отметить, что сначала был разработан Метод Ритца, а метод Бубнова – Галёркина создали позже.

5.3.3. Метод конечных элементов

Во второй половине XX века был разработан метод конечных элементов (МКЭ). Он повысил точность метода Ритца. В рамках МКЭ строятся специальные базисные функции – **финитные функции**, которые не только имеют простейший аналитический вид, но и приводят к системе (5.48) с трёхдиагональной матрицей.

ФИНИТНЫЕ ФУНКЦИИ

Опишем процесс построения финитных функций на простом примере. Предположим, что задача решается с нулевыми (однородными) краевыми условиями 1-го рода на отрезке $[0; 1]$. Разобьём отрезок на M равных частей с шагом $h = 1/M$. Каждый узел разбиения вычисляется по формуле

$$x_n = nh, \text{ где } n = 0, 1, 2, \dots, M.$$

Зададим систему финитных функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^M$ на отрезке $[0; 1]$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq x \leq x_{n-1}, \\ \frac{x-x_{n-1}}{h}, & \text{если } x_{n-1} < x \leq x_n, \\ \frac{x_{n+1}-x}{h}, & \text{если } x_n < x \leq x_{n+1}, \\ 0, & \text{если } x_{n+1} < x \leq 1. \end{cases} \quad (n = 1, 2, \dots, M-1) \quad (5.50)$$

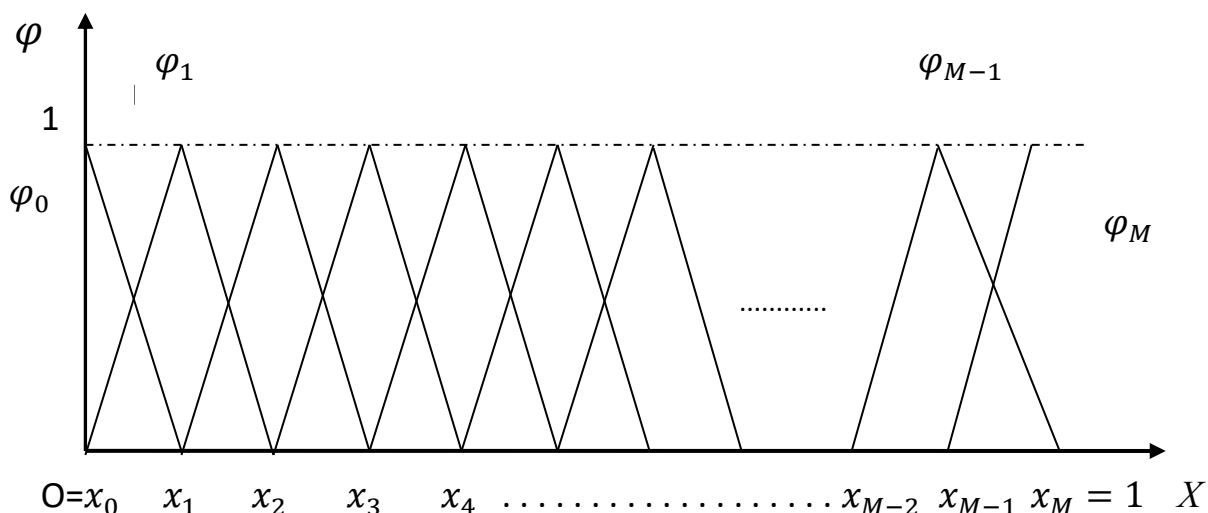


Рис. 5.4

Каждая функция $\varphi_n(x)$ – непрерывная, кусочно-линейная функция и не равна нулю только в области $[x_{n-1}; x_{n+1}]$. В МКЭ эти области называют **конечными элементами**. На рисунке 5.4. представлены эскизы графиков таких функций.

Интегрирование произведения любой пары построенных функций показывает, что система финитных функций $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^M$ **почти ортогональна**:

$$(\varphi_n, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & n \leq j-2, \\ h/6, & n = j-1, \\ 2h/3, & n = j, \\ h/6, & n = j+1, \\ 0, & n \geq j+2. \end{cases} \quad (5.51)$$

Из соотношения (5.51) видно, что любая финитная функция $\varphi_n(x)$ системы ортогональна всем функциям той же системы кроме двух соседних функций $\varphi_{n-1}(x)$ и $\varphi_{n+1}(x)$. Производные финитных функций элементарны:

$$\frac{d\varphi_n(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_{n-1}, \\ \frac{1}{h}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ -\frac{1}{h}, & x_n \leq x \leq x_{n+1}, \\ 0, & x_{n+1} \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (5.52)$$

Вернёмся к решению уравнения Эйлера (5.42) с нулевыми (однородными) краевыми условиями 1-го рода на отрезке $[0; 1]$. Решение будем искать в виде обобщённого многочлена

$$y(x) = \sum_{n=0}^M c_n \varphi_n(x), \quad (5.53)$$

где $\varphi_n(x)$ – финитные функции (5.51), а неизвестные коэффициенты c_n вычисляются методом Рунге.

Интересно отметить, что в каждом узле x_n сетки финитная функция $\varphi_n(x_n) = 1$, а в остальных узлах она равна нулю. Из равенства (5.53) следует, что

$$y(x_n) = y_n = c_n.$$

Коэффициенты $c_0 = c_M = 0$ из-за нулевых краевых условий. Остальные коэффициенты $\{c_n\}_{n=1}^{M-1}$ находятся из линейной системы (5.48). Благодаря почти ортогональности системы финитных функций и структуре каждого уравнения системы, матрица системы (5.48) становится трёхдиагональной.

ОЦЕНКА ТОЧНОСТИ МКЭ

Чрезвычайная простота аналитического вида финитных функций (5.50) и их производных (5.52) существенно упрощает каждое уравнение системы. Поэтому МКЭ имеет минимальные вычислительные погрешности при решении дифференциального уравнения.

Оптимальный выбор количества финитных функций строится по такому же принципу, что и в методах Бубнова – Галёркина и Ритца.

Глава 6

СОЗДАТЕЛИ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Процветание математики тесно
связано с благосостоянием государства.*
Наполеон

Понятие «дифференциальное уравнение» впервые употребил Г. Лейбниц в письме к И. Ньютону (1676). Ньютон решал отдельные дифференциальные уравнения только с помощью открытого им самим биномиального разложения функций. Общие приёмы интегрирования отдельных классов уравнений первыми стали создавать братья Якоб и Иоганн Бернулли, Лейбниц, Эйлер, Даниил Бернулли, Лагранж и Коши. Эти великие учёные заложили прочный фундамент в теорию обыкновенных дифференциальных уравнений. Им посвящены наши исторические эссе.

6.1. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716)

*Нельзя быть настоящим математиком,
не будучи немного поэтом.*

Карл Вейерштрасс (1815–1897) —
немецкий математик

Лейбниц жил на рубеже XVII и XVIII веков. Он публиковал свои математические и философские труды в виде статей, заметок в научных журналах и писем к друзьям и ученикам. Многие идеи Лейбница впоследствии стали основой различных современных теорий в математике, физике, биологии, геологии, психологии, лингвистике, политике, праве, истории и философии. Он усовершенствовал счётную машину Б. Паскаля. Его бинарная система стала фундаментом цифровых технологий. В основе Булевой алгебры и символической логики лежат идеи Лейбница.

В истории науки имена Исаака Ньютона и Готфрида Лейбница стоят рядом. Но они были полной противоположностью. Ньютон никогда не покидал Англию. Лейбниц, став дипломатом, жил и работал в разных странах Европы. Ньютон с детства увлекался изобретениями. Лейбница с детства интересовала философия и поэзия.

С 1711 г. между ними возникло глубокое и неразрешимое противоречие о первенстве в создании исчисления бесконечно малых. Спор о первенстве подогревали именно ученики этих великих математиков. Лейбниц, как и Ньютон, был членом Королевского научного общества Англии. На одном из заседаний Лейбниц выступил со своими идеями и открытиями. Большинство математиков тогда осмеяли Лейбница и встали на сторону Ньютона. Долгие годы его не признавали одним из создателей дифференциального и интегрального исчислений.

Лейбниц родился 1 июля 1646 г. в Лейпциге. Его отец, Фридрих Лейбнюц,

был профессором философии в Лейпцигском университете. При крещении сына назвали Готфрид Вильгельм. В 20 лет Готфрид слегка изменил свою фамилию и стал Лейбницем.

Отец Лейбница умер, когда мальчику исполнилось всего 5 лет. В 8 лет ему разрешили читать книги из библиотеки отца. Почти все книги были написаны на греческом и латинском. Для чтения книг ребёнок самостоятельно выучил эти языки. В своей биографии он писал: «Две вещи принесли мне огромную пользу, хотя они часто приносят вред. Во-первых, я был самоучкой; во-вторых, как только в какой-то науке я приобретал первые понятия, я всегда искал новое часто потому, что не мог достаточно хорошо усвоить первые понятия». В 15 лет Лейбниц стал студентом Лейпцигского университета. В 26 лет – доктор права и известный дипломат.

Германия тогда была очень слабой и раздробленной, боялась нападения могущественной Франции. Лейбниц придумал, как отвести угрозу нашествия соседней страны. Поэтому молодого и талантливого дипломата направили с миссией ко двору французского короля Людовика XIV. Он составил проект завоевания Египта и вручил его французскому правительству. Благодаря такому дипломатическому ходу, нападения на Германию не произошло. Проект Лейбница реализовал гораздо позже Наполеон.

В Париже Лейбниц прожил четыре года. Там познакомился с главой Королевской академии наук Христианом Гюйгенсом. Встреча с знаменитым учёным сыграла решающую роль в жизни Лейбница. Поэтому следует хотя бы совсем коротко рассказать об этом удивительном человеке.

Христиан Гюйгенс (1629–1695) родился в голландском городе Гааге. Его отец, дипломат и поэт, дружил с Декартом. С 16-и лет Христиан изучал в университете математику и юридические науки. Но в процессе учёбы он увлёкся математикой, механикой, астрономией и физикой. Усовершенствовал телескоп, с помощью него открыл кольца Сатурна и его спутник, названный Титаном. Изобрёл маятниковые часы. Написал знаменитую книгу «Трактат о свете». В этой работе он изложил волновую теорию света и выступил против корпускулярной теории Ньютона, который тоже не признавал теорию Гюйгенса. Несмотря на это, учёные относились друг к другу с большим уважением и даже встречались в Лондоне. Созданная в 20-м веке квантовая теория показала, что верны обе теории.

Под руководством Гюйгенса началось математическое образование Лейбница. Он изучил труды Декарта, Ферма, Паскаля и через четыре года сам подошёл к открытию дифференциального и интегрального исчисления. Его первая работа по дифференциальному исчислению была опубликована в 1684 году.

Лейбниц придумал выражения “дифференциальное исчисление, интегральное исчисление”. Современные обозначения дифференциала и интеграла придумал Лейбниц. Благодаря ему в математике повсюду стали использовать известные всем с детства знаки равенства и умножения. Он ввёл в математику термины “функция” и “координаты”. Выражение “дифференциальное

уравнение” тоже ввёл Лейбниц. Оно означало равенство дифференциальных выражений. Простейшие дифференциальные уравнения впервые были проинтегрированы Лейбницем.

Постоянная публикация научных работ Лейбница и его большая научная переписка привели к появлению научной школы, в которую входили братья Якоб, Иоганн Бернулли и их ученик Лопиталь. Братья Бернулли освоили метод Лейбница и решили с помощью него широкий круг задач. Лопиталь – автор первого и весьма удачного учебника по новому исчислению, изданного в 1690 г. под названием «Анализ бесконечно малых для познания кривых линий».

После выпуска учебника началось быстрое распространение новых идей по всей Европе. В XVIII столетии исчисление бесконечно малых становится главным инструментом в математике.

К началу XVIII столетия у Лейбница была уже европейская слава. Он общался со многими учёными и монархами. С 1700 г. Лейбниц стал президентом Бранденбургского научного общества, которое позже преобразовали в Берлинскую академию наук. Лейбниц рассматривал научную деятельность как религиозную миссию. Гармонию между реальным миром и миром математики он объяснял единством реального мира и Бога. Главный тезис Лейбница: «Наш мир – самый совершенный из всех миров и рациональное мышление открывает его законы».

В 1711 году Лейбниц встретился с Петром I. Учёный произвёл такое глубокое впечатление, что император присвоил ему звание тайного советника при царском дворе с жалованьем 1000 рейхсталлеров в год. Интересно, что кроме этой должности Лейбниц занимал ещё различные должности при пяти королевских дворах Европы. До конца своей жизни Лейбниц поддерживал переписку с Петром I. По просьбе царя учёный разрабатывал проекты развития образования, научных исследований, перестройки российского судопроизводства и проект преобразования России в правовое государство.

Лейбниц – первый немецкий учёный, создавший всеобщую философскую систему, которую дальше развивали Кант, Гегель, Шопенгауэр, Ницше и другие немецкие философы.

6.2. Династия Бернулли

Якоб Бернулли (1654 – 1705) и Иоганн Бернулли (1667–1748)

С конца XVII в. и до настоящего времени род Бернулли давал человечеству десятки выдающихся деятелей науки: математиков, физиков, врачей, юристов. Пятеро из них стали академиками Петербургской академии наук.

Основателями династии математиков были два брата Якоб и Иоганн Бернулли. Якоб изучал теологию, а Иоганн медицину. Но после чтения математических статей Лейбница они решили стать его учениками. Якоб вёл активную переписку с Лейбницем; изучал математику в Голландии, Англии и Франции. В 1687 г. он возглавил кафедру математики в университете швейцарского города Базель, который с 1263 г. считается городом науки и искусства.

Велики заслуги Я. Бернулли в создании теории вероятностей, теории дифференциального и интегрального исчисления, теории дифференциальных уравнений. Я. Бернулли придумал метод решения линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с помощью подстановки

$$y(x) = u(x)v(x).$$

Ему принадлежит идея понижения порядка уравнения с помощью введения специального параметра. Я. Бернулли в 1695 г. предложил решить известное теперь всем математикам нелинейное дифференциальное уравнение Бернулли. Решение этого уравнения опубликовал его брат Иоганн в 1697 г.

Запись общего решения дифференциального уравнения первого порядка с произвольной постоянной впервые встречается у И. Бернулли. Он же решал однородные линейные уравнения, придумав для этого подстановку $y = u \cdot x$. Для решения некоторых уравнений он впервые применял интегрирующий множитель, позже вновь открытый Эйлером. И. Бернулли ввёл (1694) в теорию дифференциальных уравнений понятие “изоклина”.

Даниил Бернулли (1700 – 1782)

*Для меня истинное удовольствие всю
жизнь состоять в русской службе.*

Д. Бернулли

Даниил Бернулли родился 29 января 1700 г. в Гронингене (Голландия), В 1705 г. семья переехала в Базель, где его отец Иоганн занял место профессора математики после смерти старшего брата Якоба.

Даниил окончил гимназию, некоторое время жил во Франции, а после возвращения на родину получил звание магистра философии. По настоянию отца он занимался медициной, но сам увлекался математикой и законами природы.

В 1724 г. вышла в свет его первая научная работа «Математические упражнения». В этом же году Д. Бернулли становится членом Научной академии в Болонье, получает приглашение возглавить Академию в Генуе и приглашение на службу в Петербургскую академию наук. Даниил выбрал Петербург.

В октябре 1725 г. Д. Бернулли прибыл в Петербург вместе со своим братом Николаем. Но математическая деятельность Н. Бернулли продолжалась недолго. Климат в северной столице оказался для него слишком тяжёлым. Через восемь месяцев после приезда Николай умер.

Даниил оставался в Петербурге до лета 1733 г. Он занимался научными исследованиями, читал лекции, участвовал в научных семинарах. В 1733 г. возвратился в Базель. В университете этого города Д. Бернулли получил кафедру анатомии и ботаники, позже возглавил кафедру физики.

После отъезда из Петербурга Д. Бернулли поддерживал тесную связь с Российской академией наук и оставался её почётным членом. Он переписывался с петербургскими учёными, посылал им результаты своих научных трудов. Из 75

его научных работ 47 опубликованы Петербургской академией. После 1766 г. он стал регулярно получать пенсию от России, поэтому все свои научные результаты издавал только в Петербурге.

Д. Бернулли удалось доказать, что знаменитое уравнение Риккати

$$y' = ax^n + by^2,$$

которое часто встречается в различных задачах механики, может быть проинтегрировано, когда

$$n = -\frac{4k}{(2k \pm 1)}, \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$$

Наука была единственной страстью Д. Бернулли. Из-за этого у него сложились сложные отношения с отцом Иоганном Бернулли. Они часто и независимо друг от друга успешно занимались одинаковыми научными проблемами, а потом спорили о приоритете. В 1732 г. Парижская академия наук объявила конкурс по теме «О взаимном наклонении планет». Две работы были признаны лучшими. Премию решили разделить между авторами этих работ. Когда вскрыли конверты с девизами (именами победителей), оказалось, что авторы – отец и сын Бернулли.

Д. Бернулли получил премии Парижской академии наук за работы: «О лучшем способе устройства якорей», «О морском приливе и отливе», «О наилучшем способе устройства магнитных стрелок наклонения», «О лучшем определении времени в море», «Теория магнита».

6.3. Леонард Эйлер (1707–1783)

*Читайте, читайте Эйлера –
он наш общий учитель.*

Пьер Лаплас

Леонард Эйлер – крупнейший учёный XVIII столетия, который прославил Петербургскую и Берлинскую академии наук и фактически основал Петербургскую математическую школу.

Эйлер-математик обладал удивительным даром обобщения, очень быстро понимал и с успехом применял доказанные математические утверждения. Эйлер не был знаком ни с Ньютоном, ни с Лейбницем, но стал их преемником. Биографы Эйлера, говоря о его математических сочинениях, используют слово “красота”. Многие, введенные им, математические понятия и обозначения без изменения перешли в современную математику. Благодаря Эйлеру стали общепринятыми обозначения тригонометрических функций, приращений в виде Δ , операции суммирования – Σ . Эйлер ввёл обозначение i для $\sqrt{-1}$ по первой букве латинского слова *imaginaris* (мнимый). Для двух знаменитых иррациональных чисел учёный ввёл известные теперь во всём мире обозначения e и π . Число e часто называют числом Эйлера. Логарифмы и тригонометрия изучаются

фактически по Эйлеру.

Он дал общее определение функции как произвольной зависимости одной величины от другой. Ввёл неявно заданные и параметрически заданные функции (1755). Распространил определение функции на величины, зависящие от нескольких переменных.

Эйлер внёс огромный вклад не только в математику. Результатами своих трудов он обогатил механику, астрономию, оптику, физику, кораблестроение, теорию гидротурбин, географию и др. Поэтому XVIII век в науке называют веком Эйлера.

НАЧАЛО ПУТИ

Фамилия Эйлер происходит от латинского слова *ulla* – горшок. Из чего следует, что Эйлер – потомок ремесленников – гончаров. В XVI в. Эйлеры занимались уже прядельным делом. Потом появились пасторы. Одним из них был отец учёного Пауль Эйлер. Он учился в Базельском университете. Слушал лекции знаменитого математика Якоба Бернулли и защитил диссертацию по математике.

Леонард Эйлер родился 15 апреля 1707 г. После рождения сына Пауль получил приход рядом с Базелем. Отец будущего великого учёного давал ему первые уроки математики. В 13 лет Леонард поступил на факультет свободных искусств Базельского университета. В нём было всего 100 студентов и 19 профессоров. Обязательные лекции по математике включали только элементарную математику. Эти лекции читал математик и выдающийся преподаватель Иоганн Бернулли. Он заметил необыкновенные способности Эйлера и посоветовал ему изучать дополнительную литературу по математике. По субботам они обсуждали изученный студентом материал. Позже Эйлер считал, что для него такой метод освоения математики был наилучшим.

По желанию отца Эйлер стал учиться на богословском факультете, но вместо изучения богословия постоянно ходил на лекции Бернулли. Постепенно он подружился с его сыновьями – Даниилом и Николаем.

ПЕРВЫЙ ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПЕРИОД

Первая четверть XVIII в. – время активного развития математического образования в России, которое стало базой для русской математической школы. По совету Лейбница в 1724 году Петр I издал указ об организации Российской академии наук, университета и гимназии при этом университете.

Образование Петербургской академии наук совпало с периодом расцвета математики в Европе. При участии знаменитого немецкого профессора Христиана Вольфа, будущего учителя Ломоносова, в Петербург пригласили молодых начинающих европейских учёных. Приехали семь математиков. Среди них были братья Николай и Даниил Бернулли. Они помогли Эйлеру приехать в Петербург (1727).

Первый петербургский период жизни Эйлера продолжался 14 лет. За эти годы он провёл исследования в математическом анализе, геометрии, алгебре, теории чисел, прикладной математике, механике и физике. Эйлер опубликовал 50 и подготовил к печати 85 научных работ. Изучал обширный материал для последующей научной работы. Слава об Эйлере постепенно распространилась по всей Европе.

Удачно складывалась его личная жизнь. В Петербурге он женился на дочери швейцарского художника, работавшего в Петербурге. Родились дети. Был построен рядом с Невой собственный просторный добротный дом на 10-й линии Васильевского острова. Огорчало лишь одно – полная потеря зрения правого глаза (1738).

В первый год пребывания в России Эйлер быстро выучил русский язык и принимал большое участие в многообразной жизни ещё очень молодой Российской академии. В университете и гимназии он читал лекции по математике, логике и физике. Уделял внимание учебным пособиям для школьного и университетского образования. Написал несколько учебников по различным разделам математики. Во всех учебниках Эйлера научная строгость сочетается с простой изложения. Особенно популярным было учебное пособие «Универсальная арифметика». До конца XIX в. этот учебник являлся основой всех последующих учебников в России и западной Европе.

В XVIII в. встал вопрос о необходимости создания наиболее точных географических карт всей территории России. Для этого образовали группу из геодезистов, чертёжников и математиков. Работая в этой группе, Эйлер не только руководил математической и картографической работами, но и сам занимался черчением карт. В 1745 г. появился «Атлас России». Эйлер писал: «Я уверен, что география российская через наши труды приведена в гораздо исправнейшее состояние, чем география немецкой земли».

Ещё до переезда в Россию Эйлер с большим интересом занимался вопросами кораблестроения и навигацией. Россия как раз в это время стала уделять большое внимание кораблестроению. Поэтому Эйлеру поручили заняться морской наукой. В итоге, в 1749 г. в Петербурге издали на латинском языке двухтомный труд Эйлера «Морская наука или трактат о кораблестроении и кораблевождении». Эта работа заинтересовала все морские государства Европы. Её переиздали в Париже, потом она вышла на английском и итальянском языках. На русский язык труды своего учителя перевёл адъютант М. Е. Головин – племянник М. Ломоносова. За этот трактат Эйлер получил большие денежные награды от русского и французского правительств.

Первые 14 лет жизни в Петербурге Эйлер занимался фундаментальными исследованиями в интегральном исчислении, алгебре, теории чисел, геометрии. Следил за текущей математической литературой. Детально разбирал новые опубликованные математические утверждения и доказательства. Многие математические открытия других математиков, изложенные неточно и неясно, вошли в математику только с помощью Эйлера. Он всегда доводил изученный материал

до полной строгости и ясности. Такое произошло и со знаменитой формулой

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

выведенной Р. Коутсом в 1714 г. Долгое время на эту формулу никто не обращал внимания. Только благодаря Эйлеру с 1748 г. её начали успешно использовать. Аналогичная история произошла с использованием в тригонометрии окружности единичного радиуса.

Спокойное и плодотворное течение жизни Эйлера в Петербурге нарушилось в 1740–1741 гг. Начались бурные дворцовые конфликты, которые привели к изменениям в руководстве Российской академии. Столичное дворянство возмущалось засильем иностранцев в правительстве. В Петербурге иностранцам стало опасно жить. В это же время прусский король Фридрих II неоднократно предлагал Эйлеру переехать в Берлин для реорганизации бездействующего общества наук Берлинской академии. Эйлер долго думал над этим предложением, а потом договорился с Петербургской академией о продолжении всесторонних научных контактов и в июне 1741 г. со всей семьёй покинул Петербург.

О первом периоде жизни в Петербурге Эйлер писал: «Я и все прочие, имевшие счастье некоторое время состоять при Русской императорской академии, должны признать, что всем, что собой представляем, обязаны благоприятным обстоятельствам, в которых мы находились. Что касается собственно меня, то при отсутствии такого благоприятного обстоятельства я бы вынужден был, главным образом, обратиться к другим занятиям, в которых по всем признакам мог бы заниматься только крохоборством».

БЕРЛИНСКИЙ ПЕРИОД

В Берлине Эйлер стал директором математического класса Берлинской академии. Часто замещал почти всегда больного президента академии. Эйлер сохранил хорошие отношения с Петербургом, был иностранным членом Петербургской академии и получал солидную ежегодную пенсию. Кроме этого являлся иностранным членом Парижской академии, Лондонского королевского и Базельского научных обществ.

Научно-организационная работа Эйлера была весьма разнообразна: механика жидкостей, гидротехника, оптика, организация государственных лотерей, вопросы страхования, баллистика, машиностроение и астрономия. За свою теорию движения Луны Эйлер получил крупное вознаграждение от Петербургской академии и премию от английского парламента за лучший способ ориентировки в открытом море. За исследования в теории движения Юпитера, Сатурна и комет учёный получил премию от Парижской академии наук.

Эйлер вёл активную переписку со своими петербургскими коллегами: Миллером, Шумахером, президентом академии Разумовским и др. Он заказывал и покупал для Петербургской академии книги, необходимые инструменты, редактировал математические статьи, писал отзывы на студенческие работы, реко-

мендовал темы для международных конкурсов, подбирал кандидатов на академические должности. Отзывы на диссертации М. Ломоносова тоже написаны Эйлером. О трудах молодого Ломоносова он писал Шумахеру: «Все сии сочинения не только хороши, но и превосходны. Желать надобно, чтобы все прочие академии были в состоянии показать такие изобретения, какие показал господин Ломоносов». В берлинский период между Эйлером и Ломоносовым велась переписка. Их взгляды на многие явления в физике совпадали или были близки. К сожалению, этим великим учёным при жизни встретиться не пришлось. Но с 1957 г. они покоятся рядом в петербургском Некрополе Александро-Невской лавры.

В Берлине у Эйлера проходили стажировку и жили в его доме русские адъюнкты, среди которых были будущие известные российские учёные: С. Котельников, С. Румовский и М. Сафронов. Следует отметить, что Эйлер высоко ценил способности русских молодых учёных и мастеров. Он писал о русских механиках: «Русский человек представляется в этом более искусным, чем немец, который редко может изготовить что-либо, чему не был обучен. Простые русские люди берутся за всё и по большей части счастливо справляются с делом, что и требуется от механика».

ВТОРОЙ ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПЕРИОД

В Берлине Эйлер прожил 25 лет, наполненных интенсивной работой. Что касается математики, то в Германии он в основном занимался только прикладной математикой, а статьи по теоретическим вопросам самой математики посылал в Петербургскую академию. За эти годы у Эйлера сложились устойчиво плохие отношения с прусским королём Фридрихом II, который считал себя хозяином академии, да и политическая обстановка в Берлине становилась напряжённой. После очередного конфликта с королём Эйлер решил уволиться и вернуться в Россию. Фридрих не хотел отпускать, но знал, что за великого учёного встанет могущественная императрица Екатерина II.

Эйлер прибыл с семьёй в Петербург летом 1766 г. Возвращение стало праздником для Петербургской академии. Екатерина II дала Эйлеру аудиенцию. Они беседовали о наилучшей организации Петербургской академии наук. Правительство выделило ему деньги, на которые вновь построили большой двухэтажный дом на углу Невы и 10-й линии Васильевского острова. Эйлер был полон сил и энергии. В России ему создали наилучшие материальные условия.

Вся семья Эйлера обосновалась в Петербурге. Его дети приняли российское подданство. Средний сын Эйлера стал врачом, младший – офицером русской армии, был директором оружейного завода в Сестрорецке и дослужился до генерала. Потомки Эйлера по линии сыновей живут в Петербурге и Москве. Дочери вышли замуж за иностранцев. Всего у Эйлера было 13 детей и 38 внуков.

Осенью 1766 г. Эйлер почти полностью потерял зрение. Но это не отразилось на его работе. Помощником Эйлера стал его старший сын – профессор физики и

другие физики и математики. Большую помощь оказывал ученик Даниила Бернулли, швейцарский учёный Н. Фусс. Впоследствии Фусс принял российское подданство, стал известным русским учёным-математиком Николаем Ивановичем Фуссом и мужем одной из внучек Эйлера.

Весной 1771г. семья Эйлера пережила пожар дома. Сгорела библиотека, но все рукописи учёного удалось спасти. Дом полностью восстановили с помощью щедрой материальной правительственной поддержки. Этот дом сохранился до наших дней, его называют домом Эйлера. Находится он по адресу: набережная лейтенанта Шмидта, дом 15. В 1957 г. в юбилейную сессию академии наук, посвященную 250-летию со дня рождения Эйлера, на этом доме укрепили мемориальную доску из белого мрамора, на ней высечен барельеф с профилем учёного.

Во второй петербургский период жизни Эйлер познакомился с известным русским изобретателем И. В. Кулибиным, который участвовал в изготовлении микроскопа по проекту Эйлера. Из истории Петербурга хорошо известно, что Кулибин создал проект одноарочного моста через Неву. Этот проект поддержал Эйлер и доказал правильность теоретических расчётов Кулибина.

Среди математических трудов, опубликованных во 2-й петербургский период, особое место занимает трёхтомник «Интегральное исчисление» (1700 страниц). Фолиант посвящён различным разделам математики. Среди них – теория дифференциальных уравнений. Остановимся кратко на вкладе Эйлера в эту теорию.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальные уравнения простейших классов умели решать и Лейбниц, и Ньютон. Ньютон строил решения только в виде степенных рядов. Лейбниц и его ученики искали решения в конечном аналитическом виде (в квадратурах). Им удалось проинтегрировать уравнения первого порядка с разделяющимися переменными, линейные однородные и линейные неоднородные уравнения первого порядка, а также некоторые нелинейное уравнение первого порядка.

Эйлер первый провёл полное исследование линейных уравнений в общем виде. В 1743 г. он опубликовал общий метод решения однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами с помощью представления неизвестного решения в виде $y = e^{rx}$. В 1753 г. Эйлер построил общее решение линейного неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами. Решение он находил за счёт понижения порядка уравнения с помощью интегрирующего множителя. Он исследовал системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Получил важные результаты в интегрировании отдельных линейных уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами. Эйлер исследовал уравнения в полных дифференциалах. Он установил классы дифференциальных уравнений, имеющих интегрирующий множитель. Вывел условие, при котором выражение

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

будет полным дифференциалом (1740).

Эйлер первый (1739) разработал метод вариации произвольных постоянных. Сейчас мы называем его методом Лагранжа, но Лагранж опубликовал своё изобретение только в 1775 г.

В 1768 г. стал известен, придуманный Эйлером, метод ломаных – первый метод численного решения дифференциальных уравнений и систем первого порядка. Он послужил основой для дальнейшего успешного развития других численных методов решения дифференциальных уравнений.

Эйлер систематизировал, обобщил и ввёл многие понятия, характерные только для дифференциальных уравнений: общее решение, частное решение, особые точки, порядок уравнения, разделённые переменные и др.

Благодаря Эйлеру различные приёмы решения дифференциальных уравнений постепенно превратились в самостоятельную математическую дисциплину. Она стала основой математического моделирования различных динамических процессов.

За последние 17 лет жизни в Петербурге Эйлер опубликовал более 200 научных работ. Посмертных сочинений – около 300. Более 200 из них подготовил к печати Н. И. Фусс. Издание остальных трудов Эйлера, созданных в петербургский период, завершилось только в 1862 г.

Полный список трудов Эйлера содержит около 850 наименований. В 1909 г. в Швейцарии приступили к изданию полного собрания сочинений учёного, которое насчитывает 72 тома.

В России всегда относились и относятся к Леонарду Эйлеру с большой благодарностью и любовью. Считают его не только швейцарским, но и великим российским математиком. Жизни и творчеству Эйлера в России посвящены книги учёных-историков математики. В 1784 г. известный французский скульптор Рашет создал мраморный бюст Эйлера. Он установлен на колонне в большом конференц-зале Российской академии наук.

6.4. Жозеф Луи Лагранж (1736 – 1813)

*Математика – это единая симфония
бесконечности.*

Давид Гильберт (1862– 1943) –
немецкий математик

Наполеон считал Лагранжа самым скромным математиком XVIII века и величественной пирамидой математических наук. Император любил беседовать с Лагранжем на философские, государственные и математические темы; присваивал учёному различные титулы и звания. Лагранж стал сенатором, графом и командором ордена почётного легиона. Король Франции Людовик XVI и королева Мария Антуанетта осыпали Лагранжа почестями. Некоторое время он даже жил в Лувре.

Лагранж родился в итальянском городе Турине. Его дед – француз женился на итальянке. Лагранжа крестили под итальянским именем Джузеппе Людови-

ко. В итальянской энциклопедии он – итальянский учёный. В других странах его считают французским математиком.

Лагранж был одиннадцатым и последним ребёнком в семье. Его отец ко времени рождения Лагранжа полностью разорился. Позже Лагранж писал: «Если бы я унаследовал состояние, то мне, вероятно, не пришлось бы связать свою судьбу с математикой».

В детстве Лагранж увлекался латынью и случайно изучил научную книгу «О преимуществах аналитического метода», написанную на латыни. Автор книги Э. Галлей – друг Ньютона. Его именем названа малая планета (комета) Галлея. Книга посвящена применению математического анализа в оптике. С тех пор и на всю жизнь Лагранж, по его словам, заболел математическим анализом. К семнадцати годам он изучил все, известные к тому времени в Европе, труды по математике и приступил к самостоятельным исследованиям.

В августе 1755 г. юный Лагранж послал письмо знаменитому Эйлеру, в котором изложил новые идеи в вариационном исчислении. Эйлер высоко оценил содержание этого письма.

В 19 лет Лагранж становится профессором Королевской артиллерийской школы. Ещё через год его избрали в Берлинскую академию наук. Он настолько плодотворно использовал математику в механике, что пошёл дальше Ньютона. Сейчас классическая механика наполовину может быть названа «лагранжевой механикой». Во время берлинского периода Лагранжу пять раз присуждали премии Парижской академии за работы в области небесной механики. Король Пруссии Фридрих II покровительствовал Лагранжу, часто и подолгу беседовал с ним. Через полгода после смерти Фридриха II Лагранж переехал в Париж.

В 1790 г. Лагранжа включили в комиссию по стандартизации системы мер и весов. Благодаря стараниям этого учёного была введена десятичная метрическая система. В 1795 году во Франции открылись две знаменитые школы: Политехническая школа (Ecole Polytechnique) для подготовки офицеров и инженеров и Нормальная школа (Ecole Normale) для подготовки учителей. В этих школах Лагранж читал лекции по элементарной математике и математическому анализу.

Интересно, что в работе Лагранжа «Теория аналитических функций» (1797) впервые появились новые термины и обозначения, которые с тех пор успешно используются во всём математическом мире: “производная, первообразная” и обозначения: y' и $f'(x)$.

6.5. Огюстен Луи Коши (1789–1857)

Суть математики целиком и полностью в её свободе.

Георг Кантор (1845–1918) —
немецкий математик

Коши – французский математик, почётный член Петербургской академии наук. Окончил в Париже Политехническую школу и школу мостов и дорог. Был

профессором Политехнической школы и членом Парижской академии наук.

После революции 1830 г. Коши находился в изгнании в Турине и Праге. Вернулся в Париж только в 1838 году. Через 10 лет благодаря новой революции он получил должность профессора в Сорбонском университете.

Всё это время Коши интенсивно занимался математикой. Одной из первых теорем, доказанных Коши, была теорема о промежуточном значении непрерывной функции, поэтому её часто называют теоремой Коши. Он изучал числовые ряды. Вывел несколько достаточных признаков их сходимости. Эти признаки тоже носят имя его создателя: радикальный признак Коши, интегральный признак Коши. Исследуя функции комплексной переменной, Коши превратил эту работу в самостоятельную область математики.

Он был необычайно работоспособным. Опубликовал более 800 научных работ. Какое-то время Коши каждую неделю представлял в Парижскую академию новые статьи. Руководству пришлось ввести ограничение на их объём (не более четырёх страниц).

Коши сыграл ведущую роль в создании теории пределов. Предел последовательности использовал ещё Архимед, затем Галилей, Кавальери, Блез Паскаль и Сент-Винсент, который в 1764 году ввёл в употребление термин "limit".

Первое строгое определение предела функции в точке ввёл Коши (1820). Он дал определение понятия непрерывности функции в точке и определение определённого интеграла как предела интегральных сумм. Благодаря ему бесконечно малую величину стали рассматривать как переменную, предел которой равен нулю. После этого ушёл мистический туман, который покрывал понятие бесконечно малой.

Коши сформировал стройную математическую теорию пределов и изложил её в работе «Курс анализа», опубликованной в 1821 г. В результате этого основной математического анализа стали понятие предела и предельного перехода.

Коши, как и его современники Гаусс, Абель и Больцано, придерживался в математике абсолютной строгости. Он был уверен, что такой строгости он достиг в «Курсе анализа». С одной из теорем этой книги произошёл интересный случай. В теореме Коши утверждалось, что сумма ряда из непрерывных функций тоже будет непрерывной функцией. В 1826 г. норвежский математик Нильс Абель представил контрпример. Он построил ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx,$$

у суммы которого есть разрывы при $x = (2k + 1)\pi$.

Позже немецкий математик К. Вейерштрасс ввёл понятие равномерной сходимости функциональных рядов и доказал, что непрерывность суммы ряда гарантирована только в случае его равномерной сходимости. Уровень строгости Вейерштрасса стал выше строгости Коши.

Важнейшим моментом в теории дифференциальных уравнений первой половины XIX в. стал вопрос о нахождении условий существования частного решения дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями.. Соответствующие теоремы доказал Коши (1836), поэтому решение задачи с начальными условиями называется задачей Коши.

6.6. Имена в истории дифференциальных уравнений Вронский

Польский математик Йозеф Вронский (1776 –1753). В 16 лет поступил на военную службу, но после очередного раздела Польши он перешёл в Русскую армию. Служил в штабе Суворова. В 20 лет решил выйти в отставку и посвятить себя науке. Император Павел I назначил ему пенсию, и Вронский отправился учиться в Германию, затем во Францию, там и остался. Его труды по философии математики имели мистический характер и невысоко оценивались в Европе. Выражение “определитель Вронского” появилось в математике только в конце XIX века.

Лиувилль

Французский математик Жозеф Лиувилль (1809 – 1882). В середине XIX в. его считали ведущим математиком Франции. Он работал профессором Французского колледжа в Париже. Был членом Парижской и Петербургской академий наук. Лиувилль заложил основу теории трансцендентных чисел и вывел достаточный признак трансцендентности числа. Исследовал краевую задачу для решения линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Был издателем журнала по чистой и прикладной математике. В нём Лиувилль первый напечатал бóльшую часть работ погибшего гениального молодого французского математика Эвариста Галуа. Только после этого некоторые знаменитые французские математики заинтересовались теорией Галуа, широко известной сейчас во всём математическом мире.

Пеано

Итальянский математик Джузеппе Пеано (1858 –1930). Написал и опубликовал сочинение, в котором представил разработанный им язык на основе символики математической логики. Первый сформулировал аксиомы для линейного векторного пространства. Пеано вместе с Гильбертом и Пашом пересмотрели аксиомы и определения геометрии Евклида. Они предложили ввести без определений, а просто как первичные понятия “точка, прямая, плоскость”. Свойства этих понятий выражаются через систему аксиом. Пеано – один из первых использовал приближённые методы для решения линейных дифференциальных уравнений любого порядка. Он является автором определения непрерывности функции в точке в форме

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Пикар

В первой половине XIX в. удалось найти условия, при которых у дифференциальных уравнений существует решение с начальными условиями. Были разработаны способы построения таких решений. Задача о существовании решения с заданными начальными условиями была впервые поставлена Коши, поэтому она носит его имя. Но этой задачей с успехом занимался и другой французский математик Эмиль Пикар (1856 – 1941). Он находил решение задачи Коши с помощью метода последовательных приближений. В конце XIX в. Пикар и его ученики начали строить теорию линейных дифференциальных уравнений, которая по структуре должна была соответствовать теории Галуа для алгебраических уравнений.

Пуанкаре

Французский математик Анри Пуанкаре (1854 – 1912) не только глубоко разбирался во многих областях математики, но и существенно обогатил их. Работая профессором Сорбонны, Пуанкаре каждый год читал новые курсы лекций по различным математическим дисциплинам. Эти лекции были настолько интересны и содержательны, что сами слушатели издали эти лекции отдельной книгой. Пуанкаре стал одним из творцов «Качественной теории дифференциальных уравнений». Он сделал фундаментальные открытия в поведении интегральных кривых в окрестности особых точек. Пуанкаре исследовал поведение расходящихся рядов и на основе этого исследования разработал теорию асимптотических разложений. Он создал теорию бесконечных детерминантов. Интересны его труды о сущности вероятности, космогонии и теории относительности. Пуанкаре принадлежит название «нормальный закон распределения». Кроме научных работ он написал ряд популярных книг о проблемах математики.

Штурм

Французский математик Шарль Франсуа Штурм (1803 – 1855) родился и учился в Женеве, там окончил академию. Он занимался научной работой в области математики и механики. Получил премию за работы по сжимаемости жидкости. В 1836 г. был избран членом Парижской академии наук и остался работать во Франции, став профессором знаменитой Политехнической школы. Основным направлением в его исследованиях была математическая физика. Он был одним из создателей теории колебания струны. Штурм вместе с Лиувиллем решили задачу о нахождении собственных значений и собственных векторов дифференциального уравнения 2-го порядка с заданными краевыми условиями. Эта знаменитая задача называется задачей Штурма – Лиувилля.

ЛИТЕРАТУРА

1. Александрова Н. В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. – М.: Изд. ЛКИ, 2008. – 248 с.
2. Арнольд В. И. Первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эволюент до квазикристаллов. – М.: ЛЕНАНД, 2015. – 96 с.
3. Баврин И. И. Высшая математика: Учеб. для студ. естественно-научных специальностей. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 616 с.
4. Беликова Г. И., Витковская Л. В. Очерки по истории математики. – СПб.: РГГМУ, 2016. – 133 с.
5. Беликова Г. И., Бровкина Е. А., Вагер Б. Г., Витковская Л. В., Матвеев Ю. А. Численные методы. – СПб.: РГГМУ, 2019. – 174 с.
6. Вагер Б. Г. Численные методы решения дифференциальных уравнений. Учебное пособие для вузов. – СПб.: РГГМУ, 2004. – 110 с.
7. Гнеденко Б. В., Гнеденко Д. Б. Об обучении математике в университетах и педвузах на рубеже двух тысячелетий. – М.: КомКнига, 2006. – 160 с.
8. Гусев И. Е. Математика. – М.: Изд. АСТ, 2018. – 208 с.
9. Джон Г. Мэтьюз, Куртис Д. Финк. Численные методы. Использование MATLAB/ 3-е издание: Пер. с англ. . – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. 720 с.
10. Дж. Холл, Дж. Уатт. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд. «Мир», 1979. 312 с.
11. Земляков А. Н. Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический экскурс. – М.: БИНОМ, 2007. – 320 с. –
12. Зализняк В. Е. Численные методы. Основы научных вычислений: учебник и практикум для академического бакалавриата. – М.: Изд. «Юрайт», 2015. – 356 с.
13. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Изд. НАУКА, 1971. – 576 с.
14. Краснов М. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Высшая школа, 1983. – 128 с.
15. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления. II том – М.: Изд. Наука, 1970. – 670 с.

16. Матвеев. Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Минск, «Вышэйш. школа», 1967.– 307 с.
17. Матвеев. Н. М. Дифференциальные уравнения. Минск, «Вышэйш. Школа», 1976.– 367 с.
18. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 640 с.
19. Юшкевич А. П. Леонард Эйлер. – М.: Знание, 1982. – 64 с.
20. Петров Ю. П. История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика.– СПб.: БХВ - Петербург, 2005.–448 с.
21. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т 2. (для вузов). – М.: Наука, 1976. –576 с.
22. Полякова Т. С. Леонард Эйлер и математическое образование в России. – М.,: КомКнига, 2007. – 184 с.
23. Ричард Браун. Математика за 30 секунд.– М.: РИПОЛ классик, 2015.– 160 с.
24. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т 2. – М.: Наука, 1967. – 656 с.
25. Стретери П. Лейбниц за 90 минут. – М.: АСТ: Астрель, 2005.–79 с.
26. Тихонов А. Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. –736 с.
27. Файншмидт В. Л. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких аргументов.– СПб.: БХВ-Петербург, 2007.– 208 с.
28. Шевцов Г. С., Крюкова О. Г., Мызникова Б. И. Численные методы линейной алгебры: Учебное пособие. – СПб.: Издательство «Лань», 2011. –496 с.

Приложение 1

МЕТОД ТРЁХДИАГОНАЛЬНОЙ ПРОГОНКИ

Среди линейных алгебраических систем особое место занимают системы с *трёхдиагональной матрицей*. Они встречаются в теории аппроксимации, в численных методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

Замечание 1. Термин *прогонка* характерен для Русской математической школы и был введён в середине XX века.

Запишем систему в матричном виде

$$AX = f, \text{ где} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} C_1 B_1 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ A_2 C_2 B_2 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & A_3 C_3 B_3 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_4 C_4 B_4 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n-2} C_{n-2} B_{n-2} 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & A_{n-1} C_{n-1} B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \dots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \dots \\ f_{n-2} \\ f_{n-1} \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Главная диагональ матрицы системы (1) состоит из элементов $\{C_i\}_{i=1}^n$, диагональ ниже главной — из элементов $\{A_i\}_{i=2}^n$, диагональ выше главной — из элементов $\{B_i\}_{i=1}^{n-1}$. Остальные элементы матрицы A равны нулю.

Данную систему уравнений можно записать в более простом виде, если ввести ещё четыре вспомогательных нулевых элемента $A_1 = 0$, $B_n = 0$, $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 0$. Теперь система становится одним обобщённым уравнением

$$A_i x_{i-1} + C_i x_i + B_i x_{i+1} = f_i, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2)$$

Будем предполагать, что определитель системы не равен нулю, поэтому решение существует и единственно. Система линейна, значит, любая пара соседних неизвестных тоже связана линейной зависимостью. Запишем её в виде

$$x_i = \alpha_i x_{i+1} + \beta_i \Rightarrow x_{i-1} = \alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1}. \quad (3)$$

Для каждой пары неизвестных будет своя единственная пара коэффициентов $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^n$. Построим формулы нахождения всех α_i, β_i . Для этого используем линейную зависимость (3). Заменим в уравнении (2) неизвестную x_{i-1} на $(\alpha_{i-1} x_i + \beta_{i-1})$:

$$A_i(\alpha_{i-1}x_i + \beta_{i-1}) + C_ix_i + B_ix_{i+1} = f_i.$$

Последнее уравнение представим в виде

$$(A_i\alpha_{i-1} + C_i)x_i = -B_ix_{i+1} + f_i - A_i\beta_{i-1} \Rightarrow$$

$$x_i = \frac{-B_i}{(A_i\alpha_{i-1} + C_i)}x_{i+1} + \frac{f_i - A_i\beta_{i-1}}{(A_i\alpha_{i-1} + C_i)}. \quad (4)$$

Будем предполагать, что в этом равенстве знаменатель

$$(A_i\alpha_{i-1} + C_i) \neq 0.$$

Сравним уравнение (4) с исходной линейной зависимостью между той же парой неизвестных

$$x_i = \alpha_ix_{i+1} + \beta_i.$$

В силу единственности решения системы приходим к очевидным равенствам

$$\alpha_i = \frac{-B_i}{(A_i\alpha_{i-1} + C_i)}, \quad \beta_i = \frac{f_i - A_i\beta_{i-1}}{(A_i\alpha_{i-1} + C_i)}. \quad (5)$$

В итоге построены **рекуррентные формулы** (5), в которых каждая пара α_i, β_i выражена через пару предыдущих коэффициентов $\alpha_{i-1}, \beta_{i-1}$. Если найдём значения первых коэффициентов α_1, β_1 , то с помощью формул (5) сможем вычислить все остальные коэффициенты.

Для нахождения α_1, β_1 обратимся к первому уравнению системы

$$C_1x_1 + B_1x_2 = f_1 \Rightarrow x_1 = \frac{-B_1}{C_1}x_2 + \frac{f_1}{C_1} \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{-B_1}{C_1}, \quad \beta_1 = \frac{f_1}{C_1}.$$

Остальные α_i, β_i вычисляются по рекуррентным формулам (5).

Процесс построения всех коэффициентов $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^n$ называется **прямым ходом прогонки**, а сами коэффициенты называются **прогоночными коэффициентами**. После нахождения всех прогоночных коэффициентов очень просто вычисляется решение исходной системы.

Прежде всего, вычисляется x_n . Обратимся к линейной зависимости

$$x_n = \alpha_n \cdot x_{n+1} + \beta_n; \quad \alpha_n = \frac{-B_n}{(A_n \cdot \alpha_{n-1} + C_n)}, \quad B_n = 0 \Rightarrow \alpha_n = 0 \Rightarrow x_n = \beta_n.$$

Далее вычисляются $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1$:

$$x_{n-1} = \alpha_{n-1} \cdot x_n + \beta_{n-1}, \quad x_{n-2} = \alpha_{n-2} \cdot x_{n-1} + \beta_{n-2}, \dots, x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1.$$

Эта часть алгоритма нахождения $\{x_i\}_{i=1}^n$ называется **обратным ходом прогонки**.

Метод прогонки можно успешно применять, если в процессе вычислений не возникнет деление на ноль. Для метода трёхдиагональной прогонки доказана следующая теорема.

Теорема 1. Если выполняется условие **доминирования** главной диагонали:

$$\begin{cases} |C_i| \geq |A_i| + |B_i|, \quad \{A_i\}_{i=2}^n, \quad \{B_i\}_{i=1}^{n-1}, \\ |C_1| \geq |B_1|, \quad |C_n| \geq |A_n|, \end{cases} \quad (6)$$

тогда для всех прогоночных коэффициентов $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ справедливы два соотношения

$$|\alpha_i| < 1 \quad \text{и} \quad (A_i \alpha_{i-1} + C_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В качестве оценки метода прогонки используют два определения.

Определение 1. Метод прогонки называется **корректным**, если знаменатели всех прогоночных коэффициентов не равны нулю:

$$(A_i \alpha_{i-1} + C_i) \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Определение 2. Метод прогонки называется **устойчивым**, если для всех прогоночных коэффициентов $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ справедливо неравенство $|\alpha_i| < 1$.

Доминирование главной диагонали (6) – это достаточное условие корректности и устойчивости метода прогонки.

Замечание 2. В случае доминирования главной диагонали метод прогонки устойчив относительно вычислительных округлений даже при большой размерности исходной системы уравнений.

Приложение 2

ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

*Много шума из ничего — ноль,
но как число, оно заслуживает
особо пристального рассмотрения.*

Ричард Браун. «Математика за 30 секунд»

Решение различных задач в гидрометеорологии, экономике, технике и физике часто связано с алгебраической задачей нахождения собственных значений и собственных векторов квадратной матрицы. Эта задача является одной из самых сложных задач матричной алгебры. Поэтому её часто называют *проблемой собственных значений (чисел)*.

Остановимся кратко только на основных моментах постановки задачи, а затем перейдём к соответствующим численным методам решения.

1. Постановка задачи

Собственным вектором квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

называется ненулевой вектор

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

который удовлетворяет матричному уравнению

$$AX = \lambda X. \quad (3)$$

Число λ в уравнении (3) называется *собственным значением матрицы* или *собственным числом матрицы A* .

Замечание 1. Часто говорят, что собственный вектор X принадлежит собственному значению λ .

Будем предполагать, что все элементы рассматриваемых матриц — действительные числа. Ставится задача о нахождении таких собственных чисел $\lambda \neq 0$ и

собственных векторов $X \neq 0$, для которых верно равенство (3).

Для решения задачи преобразуем уравнение (3)

$$AX - \lambda X = \mathbf{0} \Rightarrow AX - \lambda EX = \mathbf{0} \Rightarrow (A - \lambda E)X = \mathbf{0}. \quad (4)$$

Последнее уравнение – это матричная форма записи линейной однородной системы

[illegible]

Из основного курса высшей алгебры известно, что однородная линейная алгебраическая система имеет ненулевое решение

$$\mathbf{X} = (x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n)^T,$$

если её определитель равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Равенство (6) можно представить в виде алгебраического уравнения n -й степени относительно собственного числа λ :

$$(-1)^n(\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + c_{n-1}\lambda + c_n) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) называется *характеристическим (вековым) уравнением матрицы*. Корни этого уравнения – собственные числа матрицы **A**. В общем случае собственные числа могут быть комплексными числами.

На основе следствия из теоремы Гаусса можно сказать, что количество собственных чисел с учётом их кратности всегда равно размерности матрицы. Множество всех собственных значений матрицы называется её **спектром**.

Для дальнейшего знакомства с методами нахождения собственных чисел и векторов матрицы напомним базовые определения и свойства векторов в n -мерном векторном пространстве.

ВЕКТОРЫ

Определение 1. Ненулевой вектор X называется **линейной комбинацией векторов** $\{X_i\}_{i=1}^k$, если существуют такие числа $\{\alpha_i \neq 0\}_{i=1}^k$, при которых верно равенство

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k.$$

Определение 2. Система векторов $\{X_i\}_{i=1}^k$ называется **линейно зависимой**, если хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных векторов.

Определение 3. Система векторов называется **линейно независимой**, если ни один из векторов этой системы не является линейной комбинацией других векторов этой же системы.

Можно сказать, что система векторов линейно независима, если из равенства

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_k X_k = 0$$

следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

Определение 4. Любая система линейно независимых векторов $\{X_i\}_{i=1}^n$ в n -мерном векторном пространстве называется **базисом**.

Определение 5. **Скалярным произведением** двух векторов называется сумма произведений их компонент (координат), стоящих на одинаковых местах:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}; \quad (X, Y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Определение 6. Два вектора называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю.

Определение 7. Система векторов $\{X_i\}_{i=1}^n$ называется **ортогональным базисом** в n -мерном векторном пространстве, если все его векторы попарно ортогональны:

$$(X_l, X_m) = \begin{cases} 0, & \text{если } l \neq m, \\ a \neq 0, & \text{если } l = m. \end{cases}$$

Определение 8. Вектор X называется **нормированным**, если скалярное произведение $(X, X) = 1$. У таких векторов евклидова норма равна единице:

$$\|\mathbf{X}\|_E = \left(\sum_{n=1}^N x_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Определение 9. Ортогональный базис, все векторы которого имеют единичную норму $\|\mathbf{X}\|_E$, называется *ортонормированным базисом*.

Свойство 1. Максимальное количество линейно независимых векторов в n -мерном векторном пространстве равно размерности этого пространства.

Свойство 2. Любая система ненулевых ортогональных векторов – это линейно независимая система.

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

1. У каждого собственного числа λ существует хотя бы один собственный вектор $\mathbf{X}_\lambda$.

2. Если кратность собственного числа λ больше единицы ($k > 1$), то у этого числа λ есть k линейно независимых собственных векторов

$$\mathbf{X}_{\lambda 1}, \mathbf{X}_{\lambda 2}, \dots, \mathbf{X}_{\lambda k}.$$

3. Если все собственные числа $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ матрицы (1) различны, то все собственные векторы $\{\mathbf{X}_{\lambda i}\}_{i=1}^n$ линейно независимы и образуют базис в n -мерном векторном пространстве.

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

1. Каждому собственному числу соответствует бесчисленное множество собственных векторов, которые отличаются только скалярным множителем, значит эти векторы коллинеарны.

2. Все собственные числа диагональных и верхних треугольных матриц являются диагональными элементами таких матриц. Эти собственные значения – всегда действительные числа.

3. Если λ – собственное число, а $\mathbf{X}_\lambda$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$, определитель которой не равен нулю (*обратимая матрица*), тогда число $\frac{1}{\lambda}$ является собственным числом обратной матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ с тем же собственным вектором $\mathbf{X}_\lambda$

4. Пусть λ – собственное число, а $\mathbf{X}_\lambda$ – собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$. Тогда при любом постоянном числе σ разность $(\lambda - \sigma)$ будет собственным

числом матрицы $B = (A - \sigma E)$ с тем же собственным вектором X_λ .

Это свойство называется *сдвигом собственных чисел*.

ВАРИАНТЫ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ

Возможны два варианта постановки задачи о собственных числах и векторах.

Задача о нахождении одного или нескольких собственных чисел.

Такая постановка называется *частичной проблемой собственных чисел*. Решение строится итерационными методами без использования характеристического уравнения.

Задача о нахождении всех собственных чисел и векторов. Эта задача называется *полной проблемой собственных чисел*. Задача легко (вручную) решается для матриц второго и третьего порядков. Решение строится с помощью прямых методов. В этих методах сначала находятся собственные числа как корни характеристического уравнения (7). Далее решается однородная система (5). Решением этой системы являются соответствующие собственные векторы. Если порядок матрицы больше трёх, то задачу решают с помощью численных методов.

2. Частичная проблема

Для решения задачи используют степенной метод, метод скалярных произведений и другие методы. Остановимся на одном из них.

СТЕПЕННОЙ МЕТОД

Ставится задача о вычислении наибольшего по модулю собственного числа. Предполагается, что модуль такого числа строго больше остальных модулей собственных чисел (*мажорирующее собственное число*).

В основе степенного метода лежит следующий достаточно простой и красивый итерационный процесс.

1. Предположим, что матрица A n -го порядка имеет n различных собственных значений $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. Пусть нумерация собственных чисел и векторов соответствует расположению собственных чисел λ_i по убыванию их модулей:

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

Возьмём произвольный вектор $\tilde{X}_0 = (\tilde{x}_1^{(0)} \ \tilde{x}_2^{(0)} \ \dots \ \tilde{x}_n^{(0)})^T$ и построим вектор

$$Y_1 = A\tilde{X}_0, \quad Y_1 = (y_1^{(1)} \ y_2^{(1)} \ \dots \ y_n^{(1)})^T.$$

Нормируем вектор Y_1 с помощью числа c_1 :

$$c_1 = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i^{(1)}|, \quad \tilde{X}_1 = \frac{1}{c_1} Y_1.$$

2. Вновь строим вектор Y_2 и проводим такую же нормировку:

$$Y_2 = A\tilde{X}_1, Y_2 = \left(y_1^{(2)} \ y_2^{(2)} \ \dots \ y_n^{(2)} \right)^T, c_2 = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i^{(2)}|, \tilde{X}_2 = \frac{1}{c_2} Y_2.$$

.....

К. Аналогичным образом строим векторы Y_k и $\tilde{X}_k$:

$$Y_k = A\tilde{X}_{k-1}, Y_k = \left(y_1^{(k)} \ y_2^{(k)} \ \dots \ y_n^{(k)} \right)^T, c_k = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i^{(k)}|, \tilde{X}_k = \frac{1}{c_k} Y_k.$$

Докажем, что построенный выше процесс сходится к точному решению задачи, т.е. справедливы сразу два предельных соотношения:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{X}_k = X_1 \text{ и } \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lambda_1, \quad (8)$$

где λ_1 – наибольшее по модулю число матрицы, а X_1 – соответствующий собственный вектор матрицы A .

СХОДИМОСТЬ СТЕПЕННОГО МЕТОДА

Рассмотрим более подробно шаги описанного выше процесса.

1. Вектор $\tilde{X}_0$ можно разложить по базису из собственных векторов $\{X_i\}_{i=1}^n$ исходной матрицы:

$$\tilde{X}_0 = b_1 X_1 + b_2 X_2 + \dots + b_n X_n. \quad (9)$$

Предположим, что в равенстве (9) все собственные векторы нормализованы, т.е. в каждом собственном векторе максимальное значение его компонент равно единице.

Замечание 2. Всегда можно подобрать такой вектор $\tilde{X}_0$, для которого $b_1 \neq 0$.

Проследим за цепочкой элементарных преобразований

$$\begin{aligned} Y_1 = A\tilde{X}_0 &\Rightarrow Y_1 = b_1 AX_1 + b_2 AX_2 + \dots + b_n AX_n \Rightarrow \\ Y_1 &= b_1 \lambda_1 X_1 + b_2 \lambda_2 X_2 + \dots + b_n \lambda_n X_n \Rightarrow \\ \tilde{X}_1 &= \frac{1}{c_1} Y_1 = \frac{\lambda_1}{c_1} \left(b_1 X_1 + b_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} X_2 + \dots + b_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} X_n \right). \end{aligned} \quad (10)$$

2. Умножаем равенство (10) на матрицу A :

$$Y_2 = A\tilde{X}_1 \Rightarrow \frac{\lambda_1}{c_1} \left(b_1 A X_1 + b_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} A X_2 + \dots + b_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} A X_n \right) \Rightarrow$$

$$Y_2 = \frac{\lambda_1}{c_1} \left(b_1 \lambda_1 X_1 + b_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda_2 X_2 + \dots + b_n \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \lambda_n X_n \right) \Rightarrow$$

$$\tilde{X}_2 = \frac{1}{c_2} Y_2 = \frac{\lambda_1^2}{c_1 c_2} \left(b_1 X_1 + b_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^2 X_2 + \dots + b_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^2 X_n \right).$$

.....

К. Очевидно, что вектор $\tilde{X}_k$ можно сразу представить в виде

$$\tilde{X}_k = \frac{1}{c_k} Y_k = \frac{\lambda_1^k}{c_1 c_2 \dots c_k} \left(b_1 X_1 + b_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k X_2 + \dots + b_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k X_n \right). \quad (11)$$

По условию поставленной задачи λ_1 – это максимальное по модулю собственное число матрицы, поэтому

$$\left| \frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right| < 1 \text{ для } \forall j = 2, \dots, k \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} b_j \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1} \right)^k X_j = \mathbf{0} \text{ для } \forall j = 2, \dots, n.$$

Из последнего предельного равенства следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{X}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_1 \lambda_1^k}{c_1 c_2 \dots c_k} X_1 = V. \quad (12)$$

Поскольку все векторы $\tilde{X}_k$ и собственный вектор X_1 нормированы, то предельный вектор V тоже будет нормированным.

Из определения равенства n -мерных векторов известно, что векторы равны, если равны их компоненты, стоящие на одинаковых местах. Поэтому предел скалярного множителя при векторе X_1 существует и равен единице:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_1 \lambda_1^k}{c_1 c_2 \dots c_k} = 1. \quad (13)$$

Предельное равенство (12) теперь можно записать в виде

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{X}_k = X_1. \quad (14)$$

Из предельного равенства (14) следует, что последовательность из $\{\tilde{X}_k\}_{k=1}^{\infty}$ нормированных векторов сходится к собственному вектору X_1 .

Для нахождения собственного числа λ_1 используем равенство (13) в виде

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_1 \lambda_1^{k-1}}{c_1 c_2 \cdots c_{k-1}} = 1. \quad (15)$$

Разделим равенство (13) на (15) и после сокращений общих множителей приходим к простейшему предельному равенству

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1}{c_k} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} c_k.$$

В итоге мы полностью доказали сходимость степенного метода и справедливость предельных соотношений (8).

Приведём простейший пример использования степенного метода.

Пример 1. Найдём наибольшее по модулю собственное число и соответствующий собственный вектор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Пусть $\tilde{X}_0 = (1 \ 1 \ 1)^T$. Тогда первый шаг итерации имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 12 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \tilde{X}_1 \approx 12 \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,67 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Второй шаг итерации

$$\begin{pmatrix} 0 & 11 & -5 \\ -2 & 17 & -7 \\ -4 & 26 & -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{10}{3} \\ \frac{16}{3} \end{pmatrix} = \frac{16}{3} \begin{pmatrix} \frac{7}{16} \\ \frac{5}{8} \\ 1 \end{pmatrix} = c_2 \tilde{X}_2 \approx 5,33 \begin{pmatrix} 0,44 \\ 0,63 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

За восемь шагов итерации приходим к последовательности чисел c_i и векторов $\tilde{X}_i$, представленных в таблице 4.1.

Таблица 4.1

N	1	2	3	4
c_i	12	5.33	4.50	4.22
$\tilde{X}_i$	$(0.50 \ 0.67 \ 1)^T$	$(0.44 \ 0.63 \ 1)^T$	$(0.42 \ 0.61 \ 1)^T$	$(0.41 \ 0.60 \ 1)^T$

Таблица 4.1 (окончание)

N	5	6	7	8
c_i	4,11	4,05	4.02	4.01
$\tilde{X}_i$	$(0.40 \ 0.60 \ 1)^T$	$(0.40 \ 0.60 \ 1)^T$	$(0.40 \ 0.60 \ 1)^T$	$(0.40 \ 0.60 \ 1)^T$

Из таблицы следует, что с точностью до десятых долей собственное число $\lambda = 4,0$. Собственный вектор $X_\lambda = (0.4 \ 0.6 \ 1)^T$.

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ МЕТОДА

У степенного метода линейный порядок сходимости. Из равенства (11) следует, что скорость сходимости итерационного процесса пропорциональна величине $\left(\frac{\lambda_j}{\lambda_1}\right)^k$. Чем больше по модулю собственное число λ_1 , тем больше скорость сходимости. Для увеличения скорости сходимости используют различные дополнительные методы. Одним из них является достаточно общий метод Эйткена.

МОДИФИКАЦИИ СТЕПЕННОГО МЕТОДА

Перечислим некоторые модификации степенного метода.

1. Метод модифицирован для случая, когда максимальное по модулю собственное число имеет кратность $k > 1$.

2. При совместном использовании этого метода и 4-го свойства собственных чисел (сдвиг собственных чисел) находится наименьшее собственное число и соответствующий собственный вектор.

3. В комбинации с другими методами степенной метод можно применять для нахождения всех собственных чисел и векторов матрицы.

4. Степенной метод вместе с различными приёмами уточнения часто используют, когда необходимо построить с большой точностью вектор, собственное число которого известно приближённо.

Различные варианты степенного метода реализованы в стандартных программах математических пакетов.

3. Полная проблема

Создано много методов решения этой проблемы для матриц различной структуры. Рассмотрим только один классический метод вращений на примере симметричных действительных матриц, которые наиболее часто встречаются в прикладных задачах.

Здесь напомним только те определения и свойства из матричной алгебры, которые используются в методе вращений..

Определение 10. Квадратная матрица называется *невыврожденной* или *неособенной*, если её определитель не равен нулю.

Определение 11. Квадратная матрица называется *симметричной*, если для всех её элементов выполняется равенство

$$a_{ij} = a_{ji} \text{ для } i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n.$$

Определение 12. Симметричная матрица называется *положительно определённой*, если для любых ненулевых векторов X верно соотношение

$$(AX, X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0.$$

Определение 13. Система линейных алгебраических уравнений называется *нормальной*, если матрица этой системы положительно определена.

Определение 14. Квадратная матрица называется *неопределённой*, если знак скалярного произведения (AX, X) зависит от вектора X .

Определение 15. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все её элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю.

Определение 16. Квадратная матрица A называется *ортогональной*, если её транспонированная матрица A^T равна обратной матрице A^{-1} :

$$A^T = A^{-1}.$$

Определение 17. Квадратная матрица называется *верхней треугольной*, если все элементы матрицы ниже главной диагонали равны нулю. Если все элементы матрицы выше главной диагонали равны нулю, такая матрица называется *нижней треугольной*.

СВОЙСТВА СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ

1. Все собственные числа симметричной матрицы – действительные числа.

2. Если собственные числа симметричной матрицы положительны, тогда матрица положительно определена. Верно обратное утверждение. Если симметричная матрица положительно определена, то её собственные числа всегда положительны

3. Собственные векторы, соответствующие различным собственным числам симметричной матрицы, ортогональны.

4. Если у симметричной матрицы все собственные числа различны, то все собственные векторы образуют ортогональный базис в n -мерном векторном пространстве.

5. Если A симметричная матрица, то существует такая **ортогональная матрица R – матрица преобразования**, которая преобразует исходную матрицу A в диагональную матрицу D :

$$R^{-1} A R = R^T A R = D. \quad (16)$$

На главной диагонали такой матрицы D будут стоять все собственные числа исходной матрицы A . Столбцы матрицы преобразования R станут соответствующими собственными векторами матрицы A .

Матрицы A и D в равенстве (16) называются **подобными**. Равенство (16) называется **преобразованием подобия** или **вращением матрицы**.

МЕТОД ВРАЩЕНИЙ (МЕТОД ЯКОБИ)

Якоби предложил этот метод в 1846 году. Со временем он превратился в классический **метод вращений**, в котором с помощью итерационного процесса строятся с одинаковой степенью точности все собственные числа и соответствующие векторы симметричной матрицы. Метод обладает высокой скоростью сходимости. Его можно использовать для матриц размерности $n \leq 20$. В основе метода лежит 5-е свойство симметричных матриц.

Нахождение собственных значений и собственных векторов матрицы A равносильно построению диагональной матрицы D и ортогональной матрицы вращения R , для которых будет выполняться равенство

$$D = R^T A R.$$

АЛГОРИТМ МЕТОДА ВРАЩЕНИЙ

Алгоритм осуществляет последовательность подобных преобразований матрицы A , в результате чего она становится диагональной без изменения спектра. Каждое вращение строится так, чтобы в последующей подобной матрице обнулились два симметричных недиагональных элемента, на месте которых в предыдущей матрице стояли максимальные по модулю элементы.

Основная часть каждого k -го шага этого алгоритма – построение специальной ортогональной матрицы подобия R_k – **матрицы простых вращений**. Для построения алгоритма удобнее исходную матрицу переименовать: $A = A_0$. Первый шаг итерации начинается с построения первой матрицы простых вращений R_1 .

ПОСТРОЕНИЕ МАТРИЦЫ ПРОСТЫХ ВРАЩЕНИЙ

1. В исходной матрице A_0 находится максимальный по модулю элемент $a_{ij}^{(0)}$. Из-за симметричности матрицы $a_{ij}^{(0)} = a_{ji}^{(0)}$.

2. Выбирается такой угол вращения φ_1 , чтобы в подобной матрице A_1 равнялись нулю элементы $a_{ij}^{(1)} = a_{ji}^{(1)} = 0$. Матрицы A_1 и A_0 связывает равенство

$$A_1 = R_1^T A_0 R_1. \quad (17)$$

3. Матрица вращений R_1 строится с помощью единичной матрицы E . Нулевой недиагональный элемент в i -й строке и j -м столбце в E заменяется на $(-\sin \varphi_1)$. Нулевой недиагональный элемент в j -й строке и i -м столбце заменяется на $\sin \varphi_1$. Две диагональные единицы i -й строки и j -го столбца в матрице E заменяются на $\cos \varphi_1$.

Угол φ_1 называется **углом вращения**. Будем использовать только такие углы вращения, для которых верно неравенство $|\varphi_1| \leq \frac{\pi}{4}$.

Матрица простых вращений имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cos \varphi_1 & \cdots & -\sin \varphi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \sin \varphi_1 & \cdots & \cos \varphi_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

4. Значения $\cos \varphi_1$ и $\sin \varphi_1$ находятся с помощью определения равенства матриц. Результат матричного умножения $R_1^T A_0 R_1$ – матрица подобия A_1 , у которой элемент $a_{ij}^{(1)}$, стоящий в i строке и в j столбце будет равен

$$a_{ij}^{(1)} = (\cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1) a_{ij}^{(0)} + \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 (a_{jj}^{(0)} - a_{ii}^{(0)}).$$

По условию алгоритма (п. 2) $a_{ij}^{(1)} = a_{ji}^{(1)} = 0$. Из определения равенства матриц вытекает простое тригонометрическое уравнение

$$(\cos^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_1) a_{ij}^{(0)} + \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 (a_{jj}^{(0)} - a_{ii}^{(0)}) = 0. \quad (19)$$

Решение уравнения (19) поможет найти значения $\cos \varphi_1$ и $\sin \varphi_1$ в матрице вращений $\mathbf{R}_1$. Упростим уравнение с помощью школьных формул:

$$a_{ij}^{(0)} \cos 2\varphi_1 + \frac{(a_{jj}^{(0)} - a_{ii}^{(0)})}{2} \sin 2\varphi_1 = 0 \Rightarrow \tan 2\varphi_1 = \frac{2 a_{ij}^{(0)}}{(a_{ii}^{(0)} - a_{jj}^{(0)})}. \quad (20)$$

Выразим $\cos 2\varphi_1$ через $\tan 2\varphi_1$:

$$\cos 2\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2\varphi_1}}. \quad (21)$$

Используем формулы понижения степени:

$$\cos \varphi_1 = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\varphi_1}{2}}, \quad \sin \varphi_1 = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi_1}{2}}. \quad (22)$$

Из п. 3 известно, что $|\varphi_1| \leq \frac{\pi}{4}$, поэтому знак числа $\sin \varphi_1$ будет совпадать со знаком $\tan 2\varphi_1$ и со знаком произведения $a_{ij}^{(0)} (a_{ii}^{(0)} - a_{jj}^{(0)})$.

Построение первой матрицы вращения $\mathbf{R}_1$ выполнено. Затем элементарно строится транспонированная матрица $\mathbf{R}_1^T$.

Первый шаг итерации заканчивается нахождением подобной матрицы $\mathbf{A}_1$ по формуле (17).

Второй шаг алгоритма аналогичен первому. В матрице $\mathbf{A}_1$ выбирается максимальный по модулю элемент $a_{ij}^{(1)}$ и запоминается номер строки i и номер столбца j , в котором находится этот элемент. С помощью формул (20) – (22) вычисляются $\cos \varphi_2$ и $\sin \varphi_2$. Следующая матрица простых вращений $\mathbf{R}_2$ строится по такому же принципу как матрица $\mathbf{R}_1$. Второй шаг итерации заканчивается построением матрицы $\mathbf{A}_2$:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{R}_2.$$

.....

На k -м шаге в матрице $\mathbf{A}_{k-1}$ выбирается максимальный по модулю элемент $a_{ij}^{(k-1)}$ и запоминается его индексы. По формулам (20) – (22) находятся косинус и синус угла вращения φ_k . Далее строится матрица простых вращений $\mathbf{R}_k$ и подобная матрица $\mathbf{A}_k$:

$$A_k = R_k^T A_{k-1} R_k.$$

В результате работы такого алгоритма строятся две последовательности: последовательность подобных матриц

$$A_0, A_1, A_2, \dots, A_{k-1}, A_k \quad (23)$$

и последовательность матриц простых вращений

$$E, T_1, T_2, \dots, T_{k-1}, T_k. \quad (24)$$

Доказано, что последовательность (23) сходится к диагональной матрице D , на главной диагонали которой стоят собственные числа исходной матрицы A :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = D.$$

Последовательность (24) сходится к матрице вращений T . Её столбцы – это соответствующие собственные векторы матрицы A :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T.$$

Итерационный процесс, лежащий в основе описанного выше алгоритма, сходится. Поэтому всегда наступит такой шаг итерации, начиная с которого модули всех недиагональных элементов матрицы A_k будут меньше заданного малого числа ε . (заданная точность расчёта). Диагональные элементы матрицы A_k – это приближённые значения собственных чисел исходной матрицы A .

Соответствующая матрица вращений T_k является последовательным произведением всех предыдущих матриц простого вращения:

$$T_k = T_1 T_2 \cdots T_{k-2} T_{k-1}.$$

Каждый столбец матрицы T_k приближённо равен соответствующему собственному вектору исходной матрицы A .

Рассмотрим очень простой пример использования метода вращений.

Пример 2. Найдём все собственные числа и векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Пусть $A_0 = A$. Находим максимальный по модулю недиагональный элемент матрицы A_0 :

$$|a_{12}| = |a_{21}| = 3 \Rightarrow i = 1, j = 2.$$

Строим матрицу простых вращений

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\tan 2\varphi_1 = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}} = \frac{-6}{1 - 1} = (-\infty) \Rightarrow 2\varphi = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin \varphi_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

С учётом найденных тригонометрических величин угла φ_1 матрица $\mathbf{R}_1$ записывается в виде

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу $\mathbf{A}_1$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \mathbf{R}_1^T \mathbf{A}_0 \mathbf{R}_1 = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \mathbf{A}_1 &= \begin{pmatrix} 4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 5 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. На втором шаге находим максимальный по модулю недиагональный элемент матрицы $\mathbf{A}_1$:

$$|a_{13}| = |a_{31}| = \sqrt{2} \Rightarrow i = 1, j = 3.$$

Записываем следующую матрицу простых вращений

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем тригонометрические величины по формулам (20) – (22):

$$\tan 2\varphi_2 = \frac{2a_{13}}{a_{11} - a_{33}} = \frac{-4\sqrt{2}}{4 - 5} = 2\sqrt{2}, \quad \cos \varphi_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \sin \varphi_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}.$$

Подставляем найденные значения в матрицу $\mathbf{R}_2$:

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

С помощью матрицы $\mathbf{R}_2$ делаем следующее вращение

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{R}_2^T \mathbf{A}_1 \mathbf{R}_2 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -2 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

За два шага итерации построена диагональная матрица $\mathbf{A}_2$. На её главной диагонали расположены точные значения собственных чисел исходной матрицы $\mathbf{A}$. Понадобилось только два простых вращения. Поэтому матрица вращений $\mathbf{R}$, преобразовавшая матрицу $\mathbf{A}$ в $\mathbf{A}_2$, строится как произведение двух матриц простого вращения:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2 \Rightarrow$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ -\sqrt{\frac{1}{3}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{6}} \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}.$$

Первый столбец матрицы $\mathbf{R}$ равен собственному вектору $\mathbf{X}_{\lambda=3}$, второй столбец – вектор $\mathbf{X}_{\lambda=-2}$, третий столбец – вектор $\mathbf{X}_{\lambda=6}$. Полученные точные собственные векторы можно записать в более простом виде:

$$\mathbf{X}_{\lambda=3} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \ -1 \ 1)^T, \quad \mathbf{X}_{\lambda=-2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \ 1 \ 0)^T, \quad \mathbf{X}_{\lambda=6} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1 \ 1 \ 1)^T.$$

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ МЕТОДА

На каждом шаге итерации вместо построенных нулевых элементов могут возникнуть ненулевые. Этот факт мало влияет на скорость сходимости, так как после каждого шага с большой скоростью уменьшается сумма квадратов всех недиагональных элементов.

Если в результате k вращений все недиагональные элементы матрицы $\mathbf{A}_k$ отличаются от нуля на величину порядка $O(\varepsilon)$, то её диагональные элементы отличаются от собственных чисел на величину порядка $O(\varepsilon^2)$.

Метод вращений легко реализуется на компьютерах в виде различных стандартных программ с малым количеством арифметических действий. Поэтому такие программы дают хорошую вычислительную точность.

МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА ВРАЩЕНИЙ

1. Метод Хаусхольдера основан на вращениях. За один шаг итерации в этом методе обнуляются более двух элементов преобразованной матрицы и при последующих вращениях эти нули сохраняются.

2. QR-МЕТОД (АЛГОРИТМ). Этот итерационный метод разработали независимо друг от друга российский математик В.Н. Кублановский (1961 г.) и английский математик Дж. Фрэнсис (1962). В настоящее время QR метод считается наиболее надёжным. Он используется для решения полной проблемы собственных чисел. В его основе лежит следующее свойство любой квадратной матрицы.

QR-разложение. Любую квадратную матрицу $\mathbf{A}$ можно представить в виде произведения двух матриц $\mathbf{A} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{R}$, где $\mathbf{Q}$ – ортогональная матрица, $\mathbf{R}$ – верхняя треугольная матрица.

Приложение 3

ТОЛКОВЫЙ И ЭТИМОЛОГИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И ПОНЯТИЙ

*Уточняйте значение слов
и вы избавите человечество
от половины заблуждений.*

Рене Декарт

А

АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Уравнение называется алгебраическим, если оно представимо в виде

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где коэффициенты $\{a_i\}_{i=1}^n$ – заданные действительные числа. Решить данное уравнение, значит найти такие значения величины x , при которых это уравнение превращается в тождество. Найденные значения x называются корнями уравнения.

В XVI в. произошло величайшее открытие в алгебре. Итальянские математики Тарталья, Кардано и Феррари вывели формулы для нахождения корней уравнений и 3-й и 4-й степеней.

В течение следующих трёх веков лучшие математические умы пытались вывести формулы для точного нахождения корней уравнений 5-й степени.

В начале XIX в. молодой гениальный норвежский математик Нильс Абель вывел эти формулы. Многие известные математики того времени проверяли их и сочли правильными. Ошибку нашёл сам Нильс Абель. В результате размышлений о причине ошибочного результата он доказал (1823), что в общем случае алгебраическое уравнение выше 4-й степени не решается точно с помощью четырёх арифметических действий и извлечения корней (в радикалах).

АЛГОРИТМ

Последовательность точно описанных операций, которые однозначно выполняются в определённом порядке и преобразуют исходные данные в решение задач определённого класса.

Слово произошло от географического названия – Хорезм. Так называли древнее государство Средней Азии в низовьях реки Амударья. В конце VIII в. и начале IX в. там жил великий арабский математик Абу Абдуллах Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми (аль-Хорезми – из Хорезма).

Этот учёный предложил некоторые методы решения различных задач арифметики. В средневековой Европе знали работы Мухаммада ибн Мусы. Его полное имя писали на латинском языке (.....аль-Хорезми – *algoritmi*).

С античных времён математики искали общие методы и порядок решения

различных математических задач. Но понимание алгоритма как самостоятельного математического инструмента встречается только с 1912 г. в работах Э. Бореля – великого французского математика. Современное понятие было закреплено за словом *алгоритм* только в 30-х годах XX века в работах А. Тьюринга, Е. Поста, А. Маркова и др.

На русском языке слово впервые появилось в 1835 г. В Петербурге долго говорили *алгориџм*.

Программа для компьютера – это запись алгоритма решения задачи или класса задач на определённом языке программирования. Со второй половины XX века у каждой стандартной компьютерной программы есть свой алгоритм, разработанный с максимальной степенью общности и максимальным быстродействием с учётом современных достижений в математике.

АНАЛИЗ

Более детальное (глубокое) изучение некоторого объекта исследования. Произошло от греческого слова *αναλυσις* – *решение, разрешение*. В «Началах» Евклида встречаются слова *анализ* и *синтез*. В новую математику термин настойчиво вводил Ф. Виет. Ньютон использовал это слово при изучении функций.

АППРОКСИМАЦИЯ

Приближённое выражение математических объектов через другие, более простые. Буквальное значение термина – *приближение*. Термин происходит от латинского *approximo* – *приближаюсь*. Основы теории аппроксимации заложили Вейерштрасс и Чебышёв в середине XIX в.

Б

БАЗИС

Набор из n линейно независимых элементов в n -мерном векторном или функциональном пространствах.

В

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Первая задача этой ветви математического анализа известна с глубокой древности. Она называется задачей Дидо. Согласно легенде Дидо была царицей одного из государств Древней Греции. Спасаясь от преследования царя соседнего государства, она попала в Северную Африку. Там попросила у местных жителей участок земли, который можно покрыть шкурой вола. Аборигены удивились её скромности и сразу согласились. Царица резала шкуру на тончайшие полоски и связывала их друг с другом. Получилась очень длинная и тонкая нить, которой она охватила достаточно большой участок земли. Там Дидо развернула строительство, которое потом превратилось в знаменитый город древности Карфаген.

Начиная с XVII века у математиков стали появляться задачи о нахождении функций, при которых некоторое свойство исследуемого объекта достигает наибольшего или наименьшего значений. Существенно позднее, после изобретения

общего метода решения таких задач, метод называли «Вариационным исчислением», а найденные функции – экстремалиями.

В 1687 г. аналогичную задачу стал изучать Ньютон. Ему надо было выбрать такую форму корабля, при которой сопротивление воды стало бы наименьшим. Швейцарский математик Иоганн Бернулли первый попытался обобщить такого рода задачи. Он предложил математикам за год решить задачу о брахистохроне: «Среди всех линий, соединяющих две заданные точки, найти кривую, двигаясь по которой под действием только силы тяжести и без трения, материальная точка пройдёт этот путь за минимальное время». Лейбниц решил эту, по его мнению, прекрасную задачу. Кроме Лейбница её решили ещё три человека: Якоб Бернулли, Лопиталь и Ньютон.

Группе математиков, включая И. Бернулли, его старшего брата Я. Бернулли и Лейбница, удалось ещё решить ряд аналогичных задач. Но честь создания совершенно нового метода решения таких задач принадлежит только Эйлеру. Ему было всего 25 лет, когда он получил первые блестящие результаты в этом направлении.

Второй этап развития «Вариационного исчисления» связан с Ж. Лагранжем и А. Лежандром (1752 – 1833). Французский математик Лагранж в 19 лет придумал новый метод решения – метод вариации и сразу написал об этом мировой математической звезде Эйлеру. Ответ был быстрым. Метод привёл в восторг Эйлера. Переписка между ними продолжалась много лет.

Следующий этап развития связан с немецкими математиками К. Якоби и К. Вейерштрассом. В XX веке этот раздел математики продолжали успешно развивать. Задачами вариационного исчисления занимались и получили прекрасные результаты математики России: Н. Крылов, Н. Боголюбов, В. Кротов, Б. Давыдов Л. Понтрягин, Л. Канторович, С. Михлин и др.

В 1908 г. немецкий математик и физик Ритц разработал эффективный метод нахождения приближённых решений вариационных задач. Теоретическое обоснование метода Ритца было сделано только в 1929 г. русскими математиками Н. Крыловым и Н. Боголюбовым.

До настоящего времени расширяется диапазон применения вариационного исчисления. Оно используется в геометрии, физике, в квантовой механике, теории оптимального управления, в ракетной и космической технике.

ВЕЛИЧИНА

Величиной называют параметр, функцию, коэффициент или другие математические объекты, если они могут быть равны числам.

ВЫРАЖЕНИЕ

Формула или некоторая её часть.

Г

ГЛАДКАЯ ФУНКЦИЯ

Функция, имеющая непрерывную хотя бы первую производную. Чем выше порядок непрерывной производной, тем выше порядок гладкости функции.

Д

ДЕДУКЦИЯ

Латинское слово *deduction* – *выведение*. Способ рассуждения, при котором новое положение выводится чисто логическим путём из некоторых исходных утверждений.

ДИССИПАЦИЯ

Мера скорости рассеяния.

ДЕТЕРМИНАНТ

Слово происходит от латинского *determine* – *ограничивать, определять*. Впервые встречается у Гаусса (1801). Но у него это слово означало «дискриминант квадратичной формы». В современном значении это слово стал употреблять Коши.

Идея введения детерминанта принадлежит Лейбницу. Он пришёл к детерминантам при решении линейных систем уравнений (1700). В 1750 г. детерминанты были изобретены вновь женеvским математиком Габриэлем Крамером (1750), а затем Лагранжем (1770). Крамер ввёл знакомые сегодня термины: строка и столбец детерминанта.

Метод Крамера очень быстро вошёл в школьную математическую программу тех времён. Французский математик Вандермонд опубликовал первое исследование, посвящённое свойствам детерминанта. Якоби (1826 – 1841) обозначил его греческой буквой Δ и стал использовать слово *element* для описания определителя.

Правило вычисления определителя 3-го порядка методом треугольников придумал страсбургский профессор Саррюс (1846). Теорема о разложении определителя по элементам любой строки или столбца встречалась в частных случаях у Лапласа, Вандермонда и Безу, но только Коши смог её полностью сформулировать и доказать.

Первое полное изложение теории определителей принадлежит Коши. Он посвятил этой теории 14 мемуаров и превратил её в самостоятельный раздел математики. Ему принадлежит выражение “детерминант n -го порядка”.

Следующим этапом развития теории определителей стали 30 работ Якоби с завершающей статьёй «О построении и свойствах детерминантов». Он ввёл и первый использовал функциональные определители.

Английский математик Сильвестр впервые назвал якобианом известный функциональный определитель, чтобы воздать должное трудам Якоби. Теория бесконечных детерминантов была заложена Пуанкаре.

ДИСКРЕТНОСТЬ

Термин образован от латинского слова *discretus* – *сложенный из отдельных частей, разорванный*.

Е

e

Впервые это число появилось в 1618 г. в работе «Описание удивительной таб-

лицы логарифмов» шотландского астронома, изобретателя логарифмов Джона Непера. Он использовал в качестве основания логарифма число e^{-1} , которое называли числом Непера. В 1668 г. немецкий математик Меркатор (Кауфман) первый стал использовать термин “натуральный” для логарифма по основанию e . В 1683 году Я. Бернулли доказал, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Это был первый случай в истории математики, когда число определялось как предел. Обозначение e введено Эйлером. Этот символ сразу стал общепринятым. Скорее всего, Эйлер выбрал такое обозначение, потому что e – первая буква латинского слова *exponential* – *показательный*.

Иррациональность и трансцендентность числа e была доказана только в XIX в. французскими математиками Ж. Лиувиллем и Ш. Эрмитом.

И

ИЗОКЛИНА

Слово образовано из греческого *ισος* – *одинаковый, равный, подобный* и *κλινω* – *наклоняю*.

ИЗОЛИРОВАННЫЙ

Термин происходит от французского слова *isole* – *отдельный*.

ИЗОМОРФИЗМ

Взаимно однозначное соответствие между определёнными алгебраическими системами. В таких алгебраических системах сохраняются операции и их свойства. Изоморфные системы одинаковы в математическом смысле. Можно сказать, что изоморфизм – существенное внутреннее сходство, тождественность в главном.

ИНВАРИАНТ

Французское *invariant* – *неизменяющийся*. В математике инвариантом называют выражение, которое остаётся неизменным при некоторых преобразованиях переменных. Инвариантом является первый дифференциал функции одного аргумента. Форма дифференциала не меняется при переходе к новой независимой переменной.

ИНДЕКС

Латинское *index* – *показатель, указатель, титул, надпись*. С развитием книгопечатания индексы стали писать ниже строки. Первым это сделал Лейбниц.

ИНТЕГРАЛ

Впервые (1690) это слово использовал Якоб Бернулли. Возможно, он образовал этот термин от латинского слова *integer* – *целый* или от слова *integro* – *восстанавливать*. После долгих обсуждений Лейбниц и Иоганн Бернулли согласились с этим названием (1696). Знак интеграла придумал Лейбниц. Он просто стал использовать с 1675 г. первую букву слова *summa*, которая в те времена писалась

как современный знак интеграла.

ИНТЕРВАЛ

Термин происходит от латинского *intervallum* – *промежуток, расстояние*.

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ (ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ)

Восстановление значений таблично заданной функции между внутренними узлами таблицы. Термин происходит от латинского *interpolare* – *подделывать, подновлять*. Слово *интерполяция* сначала означало *подделка рукописи*. Термин в его современном смысле впервые употребил английский математик Д. Валлис (1656) при составлении астрономических и математических таблиц.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ (МНОГОЧЛЕНЫ)

Многочлены, численные значения которых совпадают со значениями табличной функции в заданных узлах. С помощью таких многочленов восстанавливаются значения табличной функции между узлами.

Интерполирование с помощью полиномов впервые ввёл Джеймс Грегори в 1670 г. Интерполяционная формула Ньютона была опубликована в 1711 г., формула Лагранжа в 1792 г. Дальнейшее развитие теории интерполирования связано с Гауссом, Коши, Энке, Леверье и Чебышевым. Независимо друг от друга Рунге (1904) и Борель (1903) показали, что рост степени многочлена не увеличивает точность приближения.

С 1918 г. началась строгая разработка теории интерполирования.

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Латинское *interpretatio* – *толкование, объяснение*.

ИТЕРАЦИЯ

Термин появился только в XIX в. Происходит от латинского *iteratio* – *повторение*. Английское слово *iteration* – *повторение, итерация*. В математике этим словом называют процесс повторного применения совокупности математических операций при решении различных задач. Метод итерации ещё называют методом последовательных приближений. Первые попытки изучения методов итераций были сделаны Эйлером (1778).

ИТЕРИРОВАНИЕ

Переход от одного шага итерации к следующему шагу.

К

КАНОН

Слово образовано от греческого слова *κανον* – *предписание, правило*.

КАНОНИЧЕСКИЙ

От греческого слова *κανονικοζ* – *составленный по правилам, нормальный*.

КВАДРАТУРА

От латинского *quadratura* – *придание квадратной формы*. Смысл этого слова связан с историей греческой математики. Вычисление площади плоской фигуры греки сводили к построению квадрата той же площади. С точки зрения геометрии определённый интеграл – это тоже площадь. Ещё в начале XIX в. математики считали, что определённый интеграл следует интерпретировать

только как площадь. Поэтому процесс вычисления определённого интеграла называли и сейчас по традиции называют квадратурой.

КВАНДРАНТ

Один из четырёх углов на плоскости, образованных двумя перпендикулярными осями координат. Четверть круга. Сектор с центральным углом в 90^0 .

КОРРЕКТНОСТЬ

От латинского *correctement* – правильно.

КОЭФФИЦИЕНТ

Числовой множитель при буквенном выражении, известный множитель при неизвестном выражении, постоянный множитель при переменной величине. Термин составлен из латинских *co* – вместе и *efficiens* – производящий. Буквальное значение слова *coefficientens* – содействующий. Этот термин в математике систематически стал использовать английский математик Д. Валлис (XVII в).

КРАТНОЕ

Число, равное данному числу, умноженному на другое целое число.

Л

ЛЕММА

Вспомогательное утверждение, которое используется для доказательства тех или иных теорем.

ЛОГАРИФМ

Это изобретение Д. Непера (1594) – шотландского математика, астронома и друга Кеплера. Свою работу о логарифмах Непер опубликовал только спустя 20 лет после изобретения. В математическом мире логарифмы встретили с полным восторгом. Через сто лет после публикации этой работы Лаплас писал: «Изобретение логарифмов превратило труд нескольких месяцев в вычисления нескольких дней, удваивая этим жизнь астрономам».

Непер придумал слово *логарифм*, опираясь на греческие слова *λόγος* и *ἀριθμός* – числа отношений. Дело в том, что логарифмы возникли при сравнении членов двух числовых последовательностей. Немецкий математик Меркатор (1668) назвал логарифмы с основанием *e* натуральными. Выражение *logarithmi naturali* использовали Галлей (1695) и Коши (1823).

Термин *логарифм* получил современный смысл благодаря английскому математику Д. Валлису.

ЛОКАЛЬНЫЙ

Термин происходит от латинского *localis* – местный.

М

МАТРИЦА

Термин происходит от латинского слова *matrix*. Впервые этот термин стали использовать в середине XIX в. Квадратные матрицы 2×2 , 3×3 есть в работах Эйлера (1771). Он называл их просто квадратами. Гаусс использовал матрицы для линейных преобразований (1801) и называл их таблицами.

МЕТОД

От греческого слова *μεθοδος* – *дорога, ведущая за чем-либо*. Платон и Аристотель стали использовать это слово как название совокупности математических действий, необходимых для получения правильного результата.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ (РАЗНОСТНЫЙ МЕТОД)

Этот метод возник и развивался теоретически на протяжении XVII в. Его использовали для составления тригонометрических, логарифмических, навигационных и других таблиц, необходимых в географии, небесной механике, теоретической и практической астрономии. Развитием этого метода занимались Кеплер, Гюйгенс, Ньютон и др.

МЕТОД ПРОГОНКИ

Частный случай метода Гаусса. Термин *прогонка* образован от слова *гонка-очень быстро*.

МЕТРИКА

Неотрицательная функция $\rho(x, y)$ двух точек множества, которая удовлетворяет трём условиям:

1. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$;
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

МЕТРИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВО

Пространство, в котором (на котором) можно измерить расстояние между любыми элементами этого пространства.

МОДУЛЬ

От латинского *modulus* – *мера*. Это неотрицательная числовая характеристика некоторых математических объектов: модуль функции, модуль вектора, модуль комплексного числа. Изобрёл знак модуля и впервые его использовал в 1864 г. немецкий математик Рудольф Липшиц.

Н

НЕСОВМЕСТИМОСТЬ

Система называется несовместной, если у неё нет решений, удовлетворяющих всем уравнениям системы.

НОЛЬ

Особое место в позиционной системе занимает число 0. У нуля не было геометрического образа, поэтому он очень долго и тяжело входил в мир чисел. Ноль признали числом только в XVII в. после работ Рене Декарта.

Число ноль возникло в Индии. Там увлекались огромными числами. Например, у индусов было 68000 божеств, у брамов сто миллионов божеств. В легенде о мудром Арджуме пытались вычислить количество всех мельчайших частиц во вселенной. Именно индийский ум создал понятие небытия, которое играет важную роль в буддийской философии. Всё это привело к введению знака, кото-

рый обозначал отсутствие цифры. Индусы называли такой знак словом *sunya*, что значит *пустой*. Арабы перевели это слово по смыслу и получили слово *al-sifr*. Леонардо Фибоначчи нашёл соответствующее слово в латинском языке, поэтому называл в своей книге современный ноль словом *zephirum*. Отсюда произошло французское и английское слово *zero* для обозначения нуля. Сторонники индийской нумерации в Италии сохранили арабское звучание *cifra*, которое с XIII в. перешло во все европейские языки. На французском – *chiffre*, на немецком – *ziffer*, на английском – *cipher*.

В латинских переводах арабских трактатов XII в. знак 0 назывался кружком *ciculus* или *nulla figura* – *никакой знак*. В XV в. итальянцы заменили арабское слово *cifra* словом *nulla*. Его заимствовали немцы и стали писать *null*. Из Германии ноль перешёл в Россию. Введение нового термина освободило арабское слово *cifra* от значения 0. Его стали постепенно использовать для обозначения числового знака.

Слово *цифра* очень долго использовалось для обозначения нуля. Ещё в 1783 г. Эйлер использовал вместо слова *ноль* термин *цифра*. Также поступал Гаусс. В Англии такое же использование слова можно встретить в произведениях Шекспира и Теккерея. Английское слово *cipher* до сих пор сохраняет значение *ноль*. В России в конце XVIII в. число 0 называли цифрой. В это же время появилось в русском языке слово *нуль*, а позже *ноль*. Европейцы не вдавались в историю происхождения изображения чисел. Привычные для нас числа называли и сегодня часто называют арабскими.

НОРМА

Неотрицательное число $\|x\|$, которое сопоставляется каждому элементу некоторого множества и удовлетворяет условиям:

1. $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$;
2. $\|\beta x\| = |\beta| \cdot \|x\|$, где $\beta \in \mathbb{R}$;
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

– вектора

В качестве нормы можно взять квадратный корень из скалярного произведения вектора на себя:

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

– функции

В пространстве интегрируемых с квадратом функций ($f(x) \in L_2[a, b]$) норма вычисляется по формуле

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Всё множество интегрируемых с квадратом функций называется гильбертовым пространством.

– матрицы

В пространстве матриц порядка $(n \times m)$ часто используют нормы:

1. $\|A\| = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ – наибольшая из сумм модулей элементов матрицы по столбцам;
2. $\|A\| = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ – наибольшая из сумм модулей элементов матрицы по строкам;
3. $\|A\|_E = \left(\sum_{ij} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ – евклидова норма.

НОРМАЛЬ

Нормаль к линии в некоторой её точке – это прямая, проходящая через эту точку и перпендикулярная касательной (касательной плоскости) в этой точке. Иногда нормалью называют вектор, ортогональный к прямой или поверхности.

Впервые этот термин появился в работах Гюйгенса (1659 г). Эйлер использовал выражение *normalis planum* (1775). После Эйлера термин стал широко применяться в математике.

О

ОДНОСВЯЗНАЯ ОБЛАСТЬ

Область, в которой любую замкнутую кривую можно непрерывно деформировать в точку, оставаясь в пределах исходной области.

ОКТАНТ

Одна из восьми частей, на которые разбивается трёхмерное пространство координатными плоскостями декартовой системы координат.

ОПЕРАТОР

Знак, символ, обозначение некоторого математического действия или преобразования. Термин произошёл от латинского *operator* – *работник*. Например, символ $\sum$ – оператор суммирования.

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ – см. детерминант.

ОРТ

Термин ввёл английский математик Оливер Хевисайд (1892) как сокращение слова *orientation* – *ориентация*.

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

В основе этого термина лежат два греческих слова *орθος* – *прямой* и *γωνια* – *угол*. Греческий термин *орθογωνιος* – *прямоугольный*. Он относился к треугольникам и квадратам. Встречается в работах Евклида.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Впервые это понятие использовал в конце XIX в. Ф. Клейн в лекциях по математической физике. Потом стал часто использовать Д. Гильберт. Но отдельные системы ортогональных функций изучались задолго до введения самого понятия. Первая ортогональная система функций появилась ещё у Д. Бернулли и

Эйлера. Лагранж доказал свойство ортогональности знаменитой системы функций

$$\left\{ \cos \frac{k\pi x}{l}, \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=0}^{\infty} \text{ на } [-l; l].$$

Большой вклад в изучение и применение ортогональных систем функций внесли Штурм, Лиувиль, Фурье, Лежандр и др. Среди русских математиков следует особо отметить П. Л. Чебышева и В. А. Стеклова. Чебышев создал всемирно известную систему ортогональных с весом функций, которые сегодня играют очень важную роль в математике и её приложениях. Стеклов провёл полное исследование систем ортогональных функций и за 30 лет построил теорию замкнутости ортогональной системы функций.

ОСЦИЛЛЯЦИЯ

Термин произошёл от английского слова *oscillation* – качание, колебание, вибрация.

П

ПАРАМЕТР

От греческого слова *παράμετρος* – измеряю что-нибудь, сравнивая с чем-то другим. Лейбниц называл параметром любую произвольную постоянную величину, входящую в уравнение.

ПЕРЕМЕННАЯ

Термин ввёл в конце XVII в. Лейбниц при обсуждении понятия функции.

π

Значение отношения длины окружности к её диаметру. Иногда это число называют *константой Архимеда*. Его вычисление проводились ещё с IV в. до н. э. В Библии написано, что это отношение равно трём. В разных странах это число находили с различной степенью точности. В IV в. н. э. китайский математик Лю Хуэй нашёл приближение $\pi \approx 3,14159$. Эта точность удерживалась до XV в. Тогда в обсерватории Улугбека в Самарканде получили приближение числа π с точностью до 16-и знаков после запятой. В 1673 г. Лейбниц открыл числовой ряд

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Первый раз привычное для нас обозначение появилось в 1706 г. в книге Уильяма Джонса «Новое введение в математику». Знаменитую константу называли, скорее всего, таким именем по первой букве греческого слова *περίμετρος* – *периметр*. Позже Эйлер стал постоянно пользоваться этим обозначением. Окончательно знаменитое число стали называть числом π с 1736 года только благодаря Эйлеру. Французский математик А. Лежандр (1752 – 1833) доказал иррациональность этого знаменитого числа. В 1882 г. немецкий математик Ф. Линдеман доказал трансцендентность этого числа. Более того,

математики нашли разнообразные связи между удивительными константами π и e . Ниже представлены простейшие из них

$$\pi^e = e^\pi; \sqrt{\pi^\pi} + \sqrt{e^e} = \pi^2; \pi e^2 = e^\pi; \frac{\pi^2 + e^2}{\pi^3 - e^3} = \frac{\pi}{2}.$$

Есть международный день числа π – 3-й месяц 14 числа (день рождения Эйнштейна). В Америке и Франции этот день считают праздником числа π .

ПОЛНАЯ СИСТЕМА ФУНКЦИЙ

Бесконечная система функций $\{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ называется полной в некотором метрическом пространстве, если любую функцию из этого же метрического пространства можно с любой степенью точности аппроксимировать линейной комбинацией функций из этой системы.

ПРЕДЕЛ

В начале XIX в. математики давали только словесное описание предела. Современное обозначение предела придумали Гамильтон, Вейерштрасс и Риман. В русском издании лекций Коши (1831) слово *limit* перевели как *предел* и обозначение *lim* заменяли на *пр.*

ПРИРАЩЕНИЕ

Разность двух значений переменной величины.

ПОСТУЛАТ

Термин образован от латинского слова *postulare* – *требовать*. В греческой геометрии постулаты играли роль аксиом. Примером этому является знаменитый пятый постулат геометрии Евклида. Он гласит, что через одну точку на плоскости можно провести только одну прямую, не пересекающуюся с данной прямой.

ПРОБЛЕМА

От греческого слова *προβλημα* – *то, что поставлено вперёд, задание*.

ПРОГРАММА

От греческого слова *προγραμμα* – *объявление, наказ*.

Р

РАВЕНСТВО

До появления специального знака слово *равенство* писали в математике на разных языках. В 1557 г. английский математик и врач Рекорд предложил знак $=$. Он писал: «Ничего нет более равного, чем две параллельные прямые». Этот знак равенства широко распространился только к концу XVIII века. К сожалению, изобретатель знака, который наиболее часто встречается в математике, умер в Лондонской долговой тюрьме.

РАДИКАЛ

Радикалом в математике называют знак $\sqrt[n]{}$ извлечения корня произвольной степени $n \geq 2$. Декарт ввёл знак квадратного корня с чертой над подкоренным

выражением $\sqrt[n]{}$, а Ньютон распространил обозначение Декарта на корни любой степени, используя его в книге «Всеобщая арифметика».

Древние греки вместо слов *извлечь корень* говорили: “найти сторону по данной площади квадрата”, а квадратный корень называли стороной. На латинский язык слова *сторона, бок, корень* переводятся одним и тем же словом *radix*. Термины *корень* и *радикал* стали математическими благодаря первым переводчикам Евклида. Переводили сначала с греческого языка на арабский язык, а затем на латынь.

РЕКУРРЕНТНОСТЬ

От латинского *resuro* – *бегу назад, возвращаюсь*. Очень удобное свойство некоторых последовательностей, при котором любой их член может быть вычислен через предыдущие члены этой же последовательности. Формула, с помощью которой вычисляется любой член такой последовательности, называется рекуррентной формулой.

С

СЕКУЩАЯ

От латинского *seco* – *секу*.

СИГНУМ

От латинского слова *signum* – *знак*.

СИМВОЛ

Русское написание греческого слова *συμβολος* – *условный знак, примета*. Древние греки обозначали символом устный опознавательный знак (пароль) для членов определённого общества.

СКАЛЯР

От латинского *scale* – *шкала, лестница*. Французский математик Виет первым стал называть величины *скалярами*. В таком смысле слово *скаляр* впервые вошло в математику. Современное понятие *скалярная величина*, в отличие от векторной, придумал Гамильтон.

СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ (собственное число)

От английского *proper value*. Известный математик Гамильтон называл такие величины собственными числами. Использовали название *characteristic value* – *характеристическое значение*. Современное название стало общепринятым только с начала XX века.

СООТНОШЕНИЕ

Равенство или неравенство, выражающее зависимость между величинами.

Т

ТАБЛИЦА

От латинского слова *tabula* – *доска, стол*.

ТЕОРЕМА

Греческое слово *θεωρημα* – *зрелище, представление*. Архимед использовал это слово в качестве математического термина со смыслом *истина, доступная созерцанию*.

ТЕОРИЯ

От греческого слова *θεωρία* – *наблюдение, исследование, опыт*.

ТЕРМИН

Латинское слово *terminus* – *межа, граница, конец*. Наименование некоторого понятия.

ТИП

Термин образован от греческого *τυπος* – *образ, отображение*.

ТОЖДЕСТВО

Равенство выражений с одной или несколькими переменными, левая и правая части которого равны при любых значениях переменных. Знак тождества $\equiv$ впервые использовал немецкий математик Риман (1857).

ТОЧКА

Лобачевский говорил, что это слово происходит от прикосновения отточенного пера, поэтому *точка* означает остриё гусиного пера, которым писали во времена Лобачевского, следовательно, слово образовано от глагола *точить*.

ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЙ

От латинского *transcendens* – *выходящий за пределы*. Буквальный смысл – недоступный познанию.

У

УСЛОВИЕ ЛИПШИЦА

Условие $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|^n$ ввёл немецкий математик Рудольф Липшиц в 1864 г. Он изобрёл знак модуля и первый раз использовал его именно в этом неравенстве.

Ф

ФАКТОРИАЛ

От английского слова *factor* – *множитель*. Термин ввели в 1800 г., но обозначение были разные. Только в 1916 г. совет Лондонского математического общества рекомендовал всем математикам принять знак $n!$ и предложил читать его так: «*n-восхищение*».

ФУНКЦИОНАЛ

Появление функционалов связано с задачами вариационного исчисления (XVII в.). Вито Вольтерра (1860-1940), знаменитый итальянский математик, первый систематически исследовал функционалы, опубликовал результаты своей работы и прочитал об этом лекции в Париже. Он основал новый раздел математики «Функциональный анализ».

ФУНКЦИЯ

Термин впервые ввёл в математику в XVII веке Г. В. Лейбниц.

Э

ЭКСТРЕМУМ

От латинского *extremum* – *крайний, последний*. Этот термин предложил немецкий математик Дюбуа-Раймон (1879) для обозначения минимума и максимума в тех случаях, когда не обязательно их различие.

Приложение 4

СПРАВОЧНИК ИМЁН

Математик изучает свою науку вовсе не потому, что она полезна. Он изучает её потому, что она прекрасна.

Лузин Н.Н. (1883 – 1950) – знаменитый русский математик

А

Абель Нильс Генрих (1802 – 1829) – норвежский математик.

По традиции новые результаты в науке называют в честь того, кто их открыл. Поэтому в различных разделах высшей математики встречаются теоремы Абеля, абелевы интегралы, уравнения Абеля, абелевы группы, преобразования Абеля. Он сделал огромный вклад в математику, занимаясь ею всего семь лет.

С тринадцати лет Нильс вместе со своими братьями учился в школе, где математику вёл один из лучших учителей Норвегии. Математика давала ему столько радости, что он занимался ею всё свободное время. Только иногда он ходил в театр или играл в шахматы.

В 1820 г. умер отец Нильса. После этого жизнь Абеля резко изменилась. Он постоянно подрабатывал, что бы помочь своей семье и самому не умереть от голода. В 1821 г. Абель окончил школу и поступил в университет. Там оценили его выдающиеся математические способности, желание учиться, отличное поведение, поэтому ему разрешили бесплатно жить в общежитии. В те времена студентам не платили стипендию. Несколько профессоров сами материально поддерживали студента Абеля.

В 1822 г. Нильс успешно сдал экзамены за первый курс и получил звание кандидата философии. К этому времени Абель прочитал все книги по математике, которые можно было достать, и начал заниматься собственным творчеством.

В 1823 г. в журнале «Естественнонаучный журнал» напечатали первую статью Абеля. Она связана с функциональными уравнениями. В этом же году он выполнил большую научную работу, в которой описал общий метод проверки дифференциального уравнения на интегрируемость. За эту работу Абеля назначили государственную стипендию. После университета он уехал за границу для продолжения образования. Тогда же стал заниматься теорией алгебраических уравнений.

Предшественники Абеля уже умели решать точно (с помощью формул) алгебраические уравнения до четвёртой степени включительно. Надо было сделать следующий шаг – найти формулы для точного решения уравнений пятой степени. Над этой проблемой в течение трёх веков безуспешно трудились лучшие математические умы.

Абель взялся за эту задачу. Через несколько недель он вывел формулы. Но

затем обнаружил, что они не универсальны. Отрицательный результат привёл Абеля к мысли: «Алгебраическое уравнение выше четвёртой степени в общем случае не решается с помощью четырёх арифметических действий и извлечения корней (в радикалах)».

К концу 1823 г. Абель доказал, что уравнение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, \quad \text{где } n \geq 5$$

не может быть разрешено в радикалах.

Б

Больцано Бернارد (1781–1848) – чешский богослов, философ, логик и математик.

Больцано оказал большое влияние на Коши. Первый доказал, что если правая часть уравнения $f(x) = d$ принимает значения противоположных знаков при изменении $x \in (a; b)$, то в интервале $(a; b)$ лежит хотя бы один действительный корень уравнения. Первый дал определение предела через $\{\varepsilon, \delta\}$ и определение бесконечно малой величины на основе понятия предела. Ввёл в математику понятия: односторонняя непрерывность, окрестность точки, предельная точка последовательности. Нашёл критерии сходимости.

В 1851 г. посмертно опубликовали его работу «Парадоксы бесконечности». Благодаря этой работе математический мир по праву стал считать Больцано основателем теории множеств. Он дал определения конечным и бесконечным множествам, ввёл понятие взаимно однозначного соответствия.

В течение 15-и лет его математические рукописи были запрещены для публикации, так как императора Франца-Иосифа разгневали вольнодумные проповеди Больцано. В 1930 г. нашли и опубликовали рукопись Больцано «Учение о функциях». Из содержания этой работы стало ясно, что учёный на несколько десятилетий обогнал своих современников.

В

Вандермонд Александр (1735 – 1796) – французский математик.

Опубликовал первое исследование, посвященное определителям (1772).

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815 – 1897) – немецкий математик, почётный член Петербургской академии наук.

Родился в Вестфалии. С 14 лет работал в католической прогимназии, где преподавал математику, физику, ботанику, географию, историю, чистописание и немецкий язык. Свободное от работы время посвящал математике. В 1854 г. стал доктором наук за работы в области математического анализа. С 1856 г. Вейерштрасс – профессор Берлинского университета. В число его многочисленных учеников входила Софья Васильевна Ковалевская – знаменитый русский математик.

Вито Вольтерра (1860–1940) – итальянский математик.

Первый систематически исследовал функционалы, опубликовал результаты своей работы и прочитал об этом лекции в Париже. Он основал новый раздел

математики «Функциональный анализ».

Г

Гаусс Карл Фридрих (1777 – 1855) – немецкий математик.

Гаусс родился в семье мастера-водопроводчика в маленьком немецком герцогстве Брауншвейг. Блестящие математические способности он проявлял с раннего детства. Гаусс учился в Геттингенском университете и первое выдающееся открытие опубликовал в студенческие годы. Он доказал, что циркулем и линейкой можно построить правильный 17-и угольник. Это открытие осталось для Гаусса на всю жизнь самым любимым результатом его творчества.

Всемирную славу Гауссу принесла работа по определению орбиты планеты по малому числу наблюдений. Он разработал новый способ вычисления орбит, а затем предсказал положение карликовой планеты (астероида), которую потом назвали Церерой. Эта планета появилась на том месте, которое предсказал Гаусс. Вскоре он вновь достаточно точно рассчитал положение другой малой планеты Паллады. В 1804 г. Гаусс изложил разработанный им метод вычисления орбит в знаменитой монографии «Теория движения небесных тел». За великие заслуги в астрономии его именем называли один из крупнейших кратеров Луны.

Многие результаты Гаусса были незаконченными или описаны только в письмах к своим коллегам. Учёные Германии собирали и исследовали научное наследие Гаусса вплоть до начала второй мировой войны. Результатом такой работы стала публикация 12-и томного собрания трудов Гаусса.

Д

Даламбер Жан ле Рон (Д'Аламбер) (1717–1783) – французский математик.

Современники считали его ведущим математиком энциклопедистом. Ранние блестящие способности Даламбера быстро привели его к должности секретаря Французской академии. Постепенно он стал во Франции наиболее влиятельным учёным того времени. Даламбера интересовали многие вопросы математики.

Он первый ввёл понятие предела. Занимался несобственными интегралами, неопределённостями, теорией пределов и теорией сходимости рядов. Он поддерживал идею рассматривать время как четвёртое измерение. Между Эйлером и Даламбером велась оживлённая переписка. Именно они дали (далёкое от совершенства) доказательство основной теоремы алгебры. Иногда её даже называют теоремой Даламбера. Он установил, что общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения. Даламбер первый ввёл понятие *натуральные числа*, был лидером в изучении уравнений в частных производных, исследовал движение жидкости и вывел формулу Даламбера (1744–1747). Он, как и Эйлер, стал представлять комплексные числа в тригонометрической форме. У Даламбера первого возникла идея о бесконечностях различных порядков.

Имя Жан ле Ронд совпадает с названием церкви святого Жана ле Ронда в Париже, рядом с которой нашли подкидыша – будущего знаменитого Даламбера.

Дирихле Петер Густав Лежен (1805–1859) – немецкий математик.

Ученик и друг Гаусса. Какое-то время жил в Париже и работал там учителем. Дирихле был тесно связан с немецкой и французской математическими школами. Он первый дал чёткое определение функции. Ввёл понятия условной и абсолютной сходимости рядов. Первый вывел условие сходимости рядов Фурье. Внёс большой вклад в теорию чисел и интегральное исчисление. Был блестящим преподавателем. Знаменитый математик Минковский так писал о высоком педагогическом даре Дирихле: «Он обладал искусством соединять минимум слепых формул с максимумом зрячей мысли».

К

Кronecker Леопольд (1823– 1891) – немецкий математик.

Представитель Берлинской математической школы. Ему принадлежит знаменитая фраза: «Целые числа сотворил господь бог, а всё прочее – дело людских рук».

Л

Ландау Эдмунд (1877– 1938) – немецкий математик.

Внёс большой вклад в «Аналитическую теорию чисел», ввёл понятия: О-большое и о-малое.

Липшиц Рудольф Отто Сигизмунд (1832– 1903) – немецкий математик.

Впервые ввёл условие $|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2|^n$, которое получило широкое распространение в математике. Интересно, что Липшиц изобрёл обозначение модуля и впервые использовал его в этом неравенстве.

Ляпунов Александр Михайлович (1845–1918) – русский математик.

До Ляпунова не было общей теории устойчивости движения. Пытались создать такую теорию английские учёные Томпсон и Тэтт, французский математик Пуанкаре и русский математик Жуковский.

В 1892 г. Ляпунов защитил докторскую диссертацию «Общая задача устойчивости движения», которая принесла ему всемирную известность. Он стал действительным членом Российской академии наук.

Общую теорию устойчивости движения, созданную Ляпуновым, в настоящее время используют в авиации, космонавтике, кораблестроении и в теории механизмов. Кроме того, Ляпунов создал за 8 лет ещё одну важную общую теорию фигур равновесия. Является автором одной из важнейших центральных теорем в теории вероятностей. Заслуги Ляпунова высоко оценил математический мир. Его избрали членом Римской и Парижской академий наук.

Известный русский математик В.А. Стеклов, вспоминая о Ляпунове, говорил, что смысл жизни он видел в научном творчестве и все свои силы отдавал служению математике.

Ляпунов учился и закончил с золотой медалью физико-математический факультет Петербургского университета, был учеником великого П.Л. Чебышева, жил и занимался научной работой в Санкт-Петербурге.

Н

Нейман Джон фон (1903 – 1957) – венгерский математик.

Нейман сыграл выдающуюся роль в разработке теории вычислительных машин. Джон фон Нейман родился в Будапеште. Там окончил университет. В 1930 г. переехал в США. Стал профессором Принстонского университета и сотрудником Института перспективных исследований в Принстоне. Его коллеги вспоминали, что улыбка сразу вспыхивала на его лице, если в задаче появлялись логические или математические парадоксы. Он мог часами говорить с друзьями о различных научных вопросах. Кроме науки он больше всего интересовался историей. Хорошо знал латынь, греческий, английский, немецкий и испанский языки. В 1946 г. совместно с другими учёными опубликовал статью об основных принципах построения вычислительных машин.

Ньютон Исаак (1643 – 1727) – английский математик.

Имя Исаака Ньютона известно миллионам людей, его называют величайшим учёным в истории человечества. Он открыл многие законы механики и всемирного тяготения. Ньютон является одним из создателей дифференциального и интегрального исчисления. Сделал открытия в небесной механике и построил зеркальный телескоп.

Ньютон заметил, что законы природы выражаются с помощью дифференциальных уравнений. Рассматривал их как самостоятельный и очень важный инструмент. Для решения дифференциальных уравнений он использовал только ряды Тейлора, не ставя вопрос об их сходимости.

Ньютон писал: «Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов». В своей научной деятельности Ньютон придерживался принципа Галилея – искать не физическое, а математическое описание.

В жизни Ньютона нет ярких внешних событий. Учёба, научная работа, работа в Монетном дворе. Ньютон жил во время зарождения английской опытной науки, которая сыграла большую роль в истории мировой культуры и в научной жизни самого Ньютона.

В школе Ньютон учился средне. В свободное время он делал механические игрушки. Построил мельницу, которую приводила в движение мышь. Сделал водяные и солнечные часы. Запускал воздушных змей с фонариками. Ньютон много читал, рисовал, писал стихи. В 1661 году он поступил в колледж Святой Троицы Кембриджского университета. Там встретился с выдающимся учителем Исааком Барроу. С этого момента и до 1696 г. жизнь Ньютона была связана с Кембриджем. В 1665 г. из-за эпидемии чумы он уехал на два года в деревню на юго-восток Англии. В этот период Ньютон занимался научной работой в области механики, математики и оптики. Понял, что открытый им закон всемирного тяготения даёт ключ ко всей механике. Он установил, что белый свет включает

в себя все цвета радуги от красного до фиолетового. Ньютон – автор ряда методов решения многих математических задач.

Результаты своей научной работы Ньютон не торопился опубликовывать. Классическое произведение Ньютона «Математические начала натуральной философии» издали только в 1687 г. После выхода этой книги имя Ньютона стало широко известно. Но книга была очень трудна для чтения, поэтому появились популярные изложения этого сочинения. Постепенно, почти за сто лет, математики довели содержание его книги до полной ясности. Известный математик Клейн (1849 – 1925) так определил значение этого научного труда: «Эта книга открыла перед человечеством новый мир – Вселенную, управляемую единым сводом законов физики с их точным математическим выражением. Работа Ньютона доказала всему миру, что природа основана на математических принципах и что законы природы описываются математическим языком». В 27 лет Ньютон стал профессором Кембриджского университета, а затем членом Лондонского королевского общества.

Анализом бесконечно малых занимались многие учёные, начиная с Архимеда и включая некоторых учёных XVII в. Но Ньютон обобщил и систематизировал труды своих предшественников. В результате он построил интегральное и дифференциальное исчисления. Ньютон пришёл к понятию производной, когда определял в механике скорость движения. Функцию от времени он называл флюэнтной – текущей величиной (от латинского слова *fluere* – течь), а производную – флюксийей. Он решал обратные задачи, в которых по флюксиям находил флюэнты, т.е. по производным находил первообразные.

Ньютон считал, что задача науки состоит в раскрытии блистательных замыслов творца. Он всю жизнь изучал и интерпретировал религиозные произведения, а в конце жизни посвятил себя богословию (теологии). Ньютон верил, что Бог сотворил мир. Он писал: «Мне хотелось найти такие начала, которые были бы совместимы с верой людей в Бога; мой труд оказался не напрасным».

В 1696 г. начался лондонский период жизни Ньютона – время его славы и признания. Он становится членом парламента и директором Монетного двора.

В Кембридже на статuae Ньютона высечено: «Разумом он превосходил род человеческий». В доме, где он родился, есть запись: «Природа и её законы были покрыты мраком. Бог сказал: да будет Ньютон – и стал свет».

Сам о себе Ньютон сказал так: «Не знаю, чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь только мальчиком, который играет на берегу и отыскивает цветные камешки и красивую раковину, а в это время великий океан истины расстилается передо мной неисследованным».

II

Парсеваль Марк-Антуан (1755 – 1836) – французский математик.

Основные математические труды Парсеваля связаны с дифференциальными уравнениями и теорией функций действительной переменной. В 1799 г. он нашёл соотношение между функцией и коэффициентами в разложении функции в

тригонометрический ряд Фурье:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Позже аналогичные обобщённые равенства для различных функциональных пространств вывели другие математики, среди которых были русские математики Ляпунов А.М. (1845 – 1918) и Стеклов В.А. (1864–1926).

Пикар Эмиль (1856 – 1941) – французский математик и философ.

Он говорил шутя: «Математик флиртует с философией, и это идёт на пользу самой философии». Основные его достижения – в теории многочленов, интегральных функций и теории линейных дифференциальных уравнений, которую он строил аналогично теории алгебраических уравнений.

Р

Ритц Вальтер (1878-1909) немецко-швейцарский математик и физик.

В 1908 г. Ритц разработал эффективный метод нахождения приближённых решений вариационных задач. Теоретическое обоснование метода Ритца было сделано только в 1929 г. русскими математиками Н. Крыловым и Н. Боголюбовым.

С

Сильвестр Джемс Джозеф (1814 – 1897) – англо-американский математик.

Был не только математиком, поэтом, остряком, но и наряду с Лейбницем, непревзойдённым за всю историю математики создателем новых терминов. Он с юмором называл себя математическим Адамом. Используя латинское слово *discriminans*, что означает *разделяющий*, Сильвестр придумал термин *дискриминант*.

Сильвестр преподавал в военной академии. Дважды работал в Америке и там вошёл в группу математиков, которые заложили основы математических исследований в американских университетах

Ф

Фурье Жан Батист Жозеф (1768 – 1830) – французский математик и физик. Почётный член Петербургской академии наук.

Фурье родился в семье портного. В 8 лет остался сиротой. Окончил военную школу и работал там учителем. Его научные интересы были связаны с алгеброй, математической физикой и дифференциальными уравнениями.

В 1798 г. Наполеон возглавил военный поход в Египет. В его свиту входили 165 учёных, среди них был Фурье. Во время пребывания в этой стране он изучал египетские древности и занимался дипломатической работой. После возвращения во Францию Фурье руководил осушением болот и восстановлением дорог.

Он первый представил распределение температуры в виде суммы гармоник.

Вывел формулы для вычисления коэффициентов в разложении функции в ряд по тригонометрическим функциям. Для математиков XIX в. этот факт казался очень странным. Даже великий Эйлер не мог принять идеи Фурье, хотя сам умел раскладывать некоторые функции в ряд по синусам. Работа Фурье «Аналитическая теория тепла» (1822) послужила основой создания теории тригонометрических рядов. Вопрос о сходимости тригонометрического ряда изучался достаточно долго. В настоящее время благодаря работам немецкого математика Гильберта (1862 – 1943) теория тригонометрических рядов Фурье стала частью общей теории разложения функций в ортогональные ряды.

Ч

Чебышев Пафнутий Львович (1821 – 1894) – русский математик.

В 1852 г. Чебышев уехал в командировку во Францию. Там он изучил конструкцию парового двигателя, который в те времена был основой передовой французской промышленности. В паровых двигателях тогда использовали шарнирные механизмы. Эти механизмы двигали поршень. Движение поршня должно минимально отличаться от прямолинейного движения. Изучение поведения таких шарнирных механизмов привело Чебышева к созданию знаменитых полиномов, наименее уклоняющихся от нуля. Многие математические открытия Чебышева связаны с прикладными работами. Он считал, что большая часть вопросов практики сводится к задачам о нахождении наибольших и наименьших величин. Так, например, он разработал проекцию карты Европейской части России, для которой искажение масштаба было минимальным.

В 1847 г. Чебышев переехал из Москвы в Петербург и 35 лет читал лекции в Петербургском университете.

Заслуги П. Л. Чебышева в области математики признал весь научный мир ещё при его жизни. Чебышева избрали иностранным членом Парижской и Итальянской академий наук. Он оставил после себя много учеников, среди которых такие известные во всём мире выдающиеся русские математики как Ляпунов и Марков.

Я

Якоби Карл Густав (1804 – 1851) – немецкий математик.

После учёбы в Берлинском университете он стал молодым профессором в Кенигсберге и возглавил там кружок талантливых учеников, куда входили впоследствии известные математики Людвиг Гессе и Феликс Клейн.

Якоби отличался пылким и страстным характером. Клейн вспоминал, что его влияние на учеников было исключительным. Все подчинялись его образу мышления. Появлялся огромный интерес к очередной, поставленной им задаче. Якоби внёс большой вклад в развитие «Вариационного исчисления».

Знак Δ для обозначения определителя придумал Якоби. Слово *element* в определителях впервые использовал Якоби. Его старший брат известен как русский физик Борис Якоби. Он жил в Петербурге. Один из первых в России стал изучать электричество и изобрёл гальванопластику.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

- Аппроксимация 1-й производной
 - левосторонняя 80
 - правосторонняя 80
 - центральная 81
- Аппроксимация 2-й производной
 - центральная 81

В

- Вековое уравнение 60, 120
- Вронскиан 37, 59

Г

- Граничные условия 12

Д

- Дифференциальное уравнение
 - в нормальной форме 6
 - линейное 6
 - нелинейное 6
 - неоднородное 6

И

- Изоклина 8, 131
- Интеграл общий 6
- Интегральная кривая,
 - линия 7
- Интегрирующий множитель 25, 30

К

- Конечные элементы 97
- Координатные функции 87
- Корректность 118
- Коэффициенты
 - переменные 7
 - постоянные 7
- Краевые условия 12, 53, 55, 82, 83, 84
- Кратность корня 39

Л

- Линейная
 - комбинация векторов 35, 122
 - комбинация функций 35, 88
 - независимость векторов 35, 88
 - независимость функций 87
- Локальный порядок точности 74

М

- Метод
 - Бернулли 23
 - вариации произвольных
 - постоянных 24, 44
 - Лагранжа 24, 44, 67
 - неопределённых коэффициентов 24, 48
 - Эйлера 25, 38, 73
 - фиктивных областей 86

Н

- Начальное условие 8, 9
- Невязка 89
- Нормальная система уравнений 57

О

- Общее решение уравнения 6
- Общее решение системы 57
- Общий интеграл 6
- Огибающая 8
- Однородная функция степени m 18
- Однород. ур.-ие относительно x, y 19
- Определитель Вронского 37
- Особая точка 11
- Особое решение 7

П

- Полная проблема собственных
 - значений (чисел) 124, 128
- Полная система функций 88, 147
- Порядок дифферен. уравнения 7
- Порядок системы дифф. урав-ия 57
- Постоянная Липшица 10
- Почти ортогональность 98
- Прогоночные коэффициенты 117

Р

Разностная аппроксимация
дифференциального уравнения 82

Решение

- в форме Коши 13, 23, 25
- общее 6, 57
- особое 8
- частное 6

С

Седло 34

Сеточные методы 81

Собственные

- значения (числа) 60, 120,
- векторы 60, 120

Т

Теорема

- Пеано 9
- Пикара 9

Тривиальное решение 23

Трёхдиагональная матрица 116

Точка

- обыкновенная 11
- особая 11

У

Узел 8, 18, 33

Узлы разбиения 79

Уравнение

- вековое 121
- в нормальной форме 7
- в полных дифференциалах 29
- в форме Коши 25
- линейное 7
- нелинейное 7
- неоднородное 7
- обыкновенное 7
- однородное 7
- перевёрнутое 11, 13
- характеристическое 37, 121
- Эйлера 93

Устойчивость 118

Ф

Финитные функции 96

Фокус 33

Формула Эйлера 63, 73

Фундаментальная система

решений 37, 59

Функционал 92

Х

Характеристическое

уравнение 38, 60, 121

Э

Экстремаль 92

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Беликова Галина Иосифовна, Бровкина Екатерина Анатольевна,

Витковская Лариса Валерьевна

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 25.08.2020. Формат 60 x 90/8. Гарнитура Times New Roman. Печать цифровая. Усл. печ. 20,25. Тираж 75 экз. Заказ № 953 .
РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская 79.