Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.В. Сикан

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ГИДРОЛОГИИ

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Учебник

Направление подготовки 05.04.05 – Прикладная гидрометеорология
Профиль подготовки – Прикладная гидрология

Санкт-Петербург
РГГМУ
2020

УДК 556.048(075.8)
ББК 26.222я73

Рецензенты: Государственный гидрологический институт (канд. тех. наук, вед. науч. сотр. А.Г. Лобанова); канд. геогр. наук, доц. Д.Е. Клименко (кафедра гидрологии и охраны водных ресурсов – Пермский государственный национальный исследовательский университет).

Сикан А.В.
С 35 Вероятностные распределения в гидрологии. Специальные главы теории и практики гидрологических расчетов: учебник. – СПб.: РГГМУ, 2020. – 286 с.

Приводятся краткие сведения из теории вероятностей и математической статистики. Рассматриваются методы оценки параметров распределения по эмпирическим данным. Анализируются аналитические кривые распределения, используемые в российской и мировой гидрологической практике. Представлены методы расчета гидрологических характеристик в случае неоднородности и нестационарности гидрологических рядов. В книге содержится большое количество примеров, позволяющих закрепить, излагаемый теоретический материал.

Предназначена для студентов, обучающихся по направлению подготовки – Прикладная гидрометеорология, профиль подготовки – Прикладная гидрология и специалистов, связанных по роду своей деятельности с оценкой гидрологических процессов и явлений.

At the beginning of the book provides a summary of the theory of probability and mathematical statistics. Outlines methods estimate the distribution parameters using empirical data. A description of the distribution functions, which are used in hydrological practice. The methods of calculation of hydrological characteristics in the case of heterogeneity and unsteadiness hydrological series. The book contains a large number of examples that allow to master the theoretical information.

The textbook is designed for students enrolled in the direction of training - Applied hydrometeorology, Profile - Applied Hydrology and specialists studying hydrological phenomena.

УДК 556.048(075.8)
ББК 26.222я73

ISBN 978-5-86813-492-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

В связи с переходом ВУЗов России на двухуровневую систему образования изменились требования к подготовке специалистов-гидрологов. Предполагается, что бакалавриат формирует у студентов базовые профессиональные компетенции, а магистратура готовит специалистов, способных к решению наиболее сложных задач профессиональной и научно-исследовательской деятельности. При этом бакалавриат и магистратура рассматриваются в качестве самостоятельных уровней высшего образования.

При поступлении в магистратуру бакалавр может либо продолжить углублять свои знания по выбранному ранее направлению, либо начать магистерскую подготовку по одному из новых (смежных) направлений. В результате – уровень базовой подготовки у магистров-гидрологов первого года обучения существенно разниться. Учитывая сказанное, для магистратуры требуется разработка учебников и учебных пособий нового типа – позволяющих ликвидировать пробелы в базовой подготовке и одновременно ориентированных на развитие и углубление знаний по изучаемому предмету.

В настоящем учебнике рассматриваются современные методы расчета основных гидрологических характеристик при наличии достаточно продолжительных рядов наблюдений. Анализируются аналитические функции распределения, используемые в российской и мировой гидрологической практике. Излагаются методы расчета гидрологических характеристик при изменении условий формирования стока под влиянием антропогенных факторов и меняющегося климата. При этом первые две главы учебника представляют собой компактное изложение необходимых сведений по базовым дисциплинам: «Статистические методы анализа гидрометеорологической информации» и «Гидрологические расчеты», которые читаются в РГГМУ на третьем и четвертом курсе бакалавриата.

В учебнике достаточно подробно изложены расчетные методы и алгоритмы, представленные в российских нормативной литературе и Руководствах по гидрологической практике Всемирной Метеорологической Организации (ВМО).

Излагаемый в книге материал соответствует программе дисциплины «Специальные главы теории и практики гидрологических расчетов», которая читается студентам гидрологического факультета РГГМУ обучающихся на первом курсе магистратуры по направлению подготовки 05.04.05 – Прикладная гидрометеорология, профиль подготовки – Прикладная гидрология. Вместе с тем она может быть полезной и инженерам-гидрологам, а также другим специалистам, работающим с гидрометеорологическими данными.

Автор выражает искреннюю благодарность Дрегваль Марии Станиславовне за помощь при подготовке рукописи к печати.

Список условных обозначений и сокращений

Условные обозначения

$F(x)$ – интегральная функция распределения
$f(x)$ – дифференциальная функция распределения
(функция плотности вероятности)
p – значение вероятности
$P(x)$ – функция обеспеченностей
Mo – мода
Me – медиана
α_s – начальный момент s-го порядка
μ_s – центральный момент s-го порядка
m_x – математическое ожидание
σ – среднеквадратическое отклонение (стандарт)
σ^* и S – выборочное среднеквадратическое отклонение
D и σ^2 – дисперсия
D^* и S^2 – выборочная дисперсия
C_v – коэффициент вариации
C_s – коэффициент асимметрии
E_x – эксцесс
k – модульный коэффициент
t – стандартная нормированная величина
$\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция
ν – число степеней свободы
$r(1)$ – коэффициент автокорреляции
P – оператор вероятности
M – оператор математического ожидания
D – оператор дисперсии

Сокращения

СВ – случайная величина
МО – математическое ожидание
СКО – среднеквадратическое отклонение
ОДЗ – область допустимых значений

1. ВВЕДЕНИЕ

Гидрологические расчеты: раздел инженерной гидрологии, в задачи которого входит разработка методов, позволяющих рассчитать значения различных характеристик гидрологического режима [18].

К числу наиболее важных гидрологических характеристик относят: среднегодовые, максимальные, минимальные расходы и уровни воды, в также объемы (или слои) стока за половодье или паводок. При этом на практике обычно требуется получить расчетные значения гидрологических характеристик для заданной обеспеченности (вероятности ежегодного превышения).

Так, например, при проектировании гидротехнических сооружений I класса необходимо рассчитать максимальные расходы воды обеспеченностью 0,1% (основной) и 0,01% (поверочный). А при проектировании водозаборных сооружений I класса рассчитывают максимальный уровень обеспеченностью 1% и минимальный уровень обеспеченностью 97%.

Для решения такого рода задач используются методы теории вероятностей и математической статистики, которые позволяют получить количественные характеристики, описывающие гидрологические явления и процессы в ближайшем и отдаленном будущем на основе анализа состояния водных объектов в прошлом и настоящем.

В данной книге рассматриваются методы расчета гидрологических характеристик при наличии достаточно продолжительных рядов гидрометрических наблюдений. Эти методы востребованы как при наличии, так и при отсутствии данных наблюдений в створе проектирования. В последнем случае – такие расчеты выполняются по рекам-аналогам.

Если имеющиеся ряды гидрологических характеристик являются однородными и стационарными, то задача сводится к выбору закона распределения описывающего данную гидрологическую характеристику и оценке параметров распределения по эмпирическим данным. Такую задачу можно назвать стандартной для инженерной гидрологии. Однако «стандартная» не означает «простая».

Учитывая, что гидрологические ряды, как правило, имеют продолжительность всего несколько десятков лет (обычно менее 100) могут возникнуть проблемы и при оценке параметров распределения и при выборе аналитической кривой обеспеченностей.

В современных условиях задача осложняется тем, в результате изменения климата и локальных антропогенных воздействий на речные водосборы многие ряды являются неоднородными и нестационарными.

В настоящей книге представлены методы расчета гидрологических характеристик для широкого круга практических ситуаций, в том числе для неоднородных и нестационарных рядов.

Книга рассчитана на студентов, освоивших дисциплины «Статистические методы анализа гидрометеорологической информации» и «Гидрологические расчеты».

Для усвоения курса студентами, не имеющими базовой гидрологической подготовки необходимо изучить разделы 1 и 2, где в сжатой форме даны основные сведения из теории вероятностей и математической статистики, а также представлены методы построения эмпирических кривых обеспеченностей.

В третьем разделе рассматриваются методы расчета параметров распределения по эмпирическим данным: метод моментов, метод наибольшего правдоподобия, метод L-моментов, метод наименьших квадратов, метод квантилей, графический метод.

В четвертом разделе выполнен сравнительный анализ аналитических функций распределения, используемых в мировой гидрологической практике. Показаны их достоинства, недостатки, границы применимости. Рассмотрены следующие распределения: нормальное, двух- и трехпараметрическое логнормальное, Гумбеля с положительной и отрицательной асимметрией, Пирсона III типа, логарифмическое Пирсона III типа, Крицкого-Менкеля, двух- и трехпараметрическое Вейбулла, SB-Джонсона, Фреше, Парето, обобщенное распределение экстремальных величин. Представлены алгоритмы их построения адаптированные для инженерных расчетов.

В пятом разделе рассматриваются методы построения кривых обеспеченностей при неоднородности и нестационарности гидрологических рядов.

Представлена классификация типов неоднородности для рядов гидрологических характеристик. В рамках этой классификации выделено 6 типов неоднородности. Для каждого типа разработаны алгоритмы построения усеченных кривых обеспеченностей.

Представлены 3 новых метода построения усеченных кривых обеспеченностей в случае неоднородности гидрологических рядов. Показано, что точка усечения не обязательно должна совпадать с медианой. Предложен графоаналитический метод построения усеченной кривой с использованием распределения Пирсона III типа.

Рассмотрены методы построения составных кривых обеспеченностей при наличии в каждом году наблюдений за всеми однородными элементами водного режима и при наличии в каждом году наблюдений только за одним однородным элементом водного режима.

Дан алгоритм построение составной кривой путем объединения двух усеченных кривых обеспеченностей.

Представлен набор алгоритмов для построения кривой обеспеченностей при нарушении естественного гидрологического режима под влиянием локальных антропогенных факторов.

В тексте содержится большое количество примеров, позволяющих практически закрепить теоретический материал.

В приложении представлены таблицы и номограммы необходимые для практического применения изложенных в учебнике методов и алгоритмов расчета.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

При выполнении гидрологических расчетов мы имеем дело с рядами различных гидрометеорологических характеристик, такими как: среднегодовые расходы воды, максимальные и минимальные расходы воды, слои стока за половодье или паводок и. т. д. Для описания вероятностной структуры гидрологических рядов используются различные модели, наиболее простая – модель случайной величины.

Случайная величина (СВ) – это величина, значение которой меняется от опыта к опыту случайным образом.

Эту модель применяют если члены ряда являются независимыми, то есть каждое последующее значение ряда не зависит от предыдущих.

Исчерпывающей характеристикой любой случайной величины является закон распределения. Закон распределения аналитически можно выразить в виде функции распределения интегральной или дифференциальной.

Интегральная функция распределения $F(x)$ случайной величины X показывает вероятность того, что случайная величина не превысит некоторого заданного числа x, то есть:

$$F(x) = \mathbf{P}\{X \le x\}. \tag{1.1}$$

Если функция $F(x)$ дифференцируема для всех значений случайной величины X, то закон распределения вероятностей может быть выражен и в виде дифференциальной функции распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathbf{P}\{x < X \le x + \Delta x\}}{\Delta x}, \tag{1.2}$$

где $\Delta x > 0$.

Таким образом, значение функции $f(x)$ приближенно равно отношению вероятности попадания случайной величины X в интервал $(x, x + \Delta x)$ к длине этого интервала, когда Δx – бесконечно малая величина. Поэтому функцию $f(x)$ называют также функцией плотности распределения вероятностей, или короче – функцией ***плотности вероятности***.

Графики интегральной и дифференциальной функций распределения представлены на рис. 1.1.

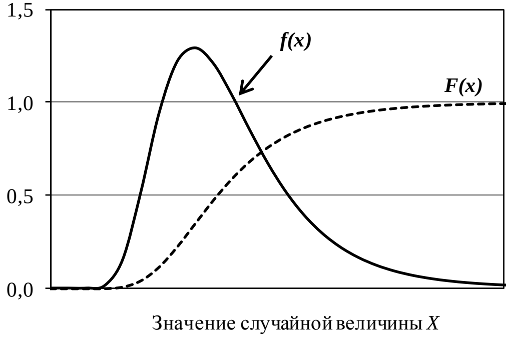


Рис. 1.1. Интегральная и дифференциальная функции распределения.

В российской гидрологической практике вместо функции $F(x)$ чаще используется так называемая ***функция обеспеченностей*** $P(x)$:

$$P(x) = 1 - F(x) = \mathbf{P}\{X > x\}. \tag{1.3}$$

Таким образом, функция обеспеченностей СВ X показывает вероятность превышения некоторого заданного числа x. Вероятность превышения обычно выражают в %. Графики функций $F(x)$ и $P(x)$ представлены на рис. 1.2. Основные свойства функций распределения приведены в табл. 1.1.

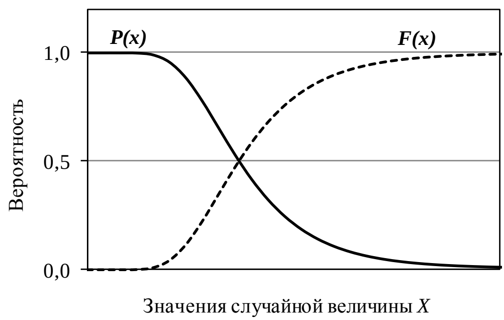


Рис. 1.2. Интегральная функции распределения *F(x)* и функция обеспеченностей *P(x)*.

Таблица 1.1

Основные свойства функций распределения

№	Интегральная функция распределения	Функция обеспеченностей	Функция плотности вероятности
1	$\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} P(x)=1$	$f(x)\ge 0$
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$	$\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)=0$	$\lim\limits_{\lvert x\rvert\to\infty} f(x)=0$
3	$F(x)\ge 0$ для всех x	$P(x)\ge 0$ для всех x	$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$
4	$F(x_2)\ge F(x_1)$ если $x_2>x_1$	$P(x_2)\le P(x_1)$ если $x_2>x_1$	$\int\limits_{-\infty}^{x} f(z)dz=F(x)$

Как отмечалось выше, исчерпывающей характеристикой любой случайной величины является закон распределения. Но основные свойства СВ (хотя и не все) могут быть описаны более компактно с помощью нескольких числовых характеристик, которые делят на три группы: характеристики положения, характеристики рассеяния и характеристики формы.

Характеристики положения

К характеристикам положения относят моду, медиану и математическое ожидание.

Модой *Mo* непрерывной СВ X называется такое ее значение, которому соответствует максимум плотности вероятности.

В случае дискретного распределения модой называется наиболее вероятное значение случайной величины (рис. 1.3). Если распределение имеет более чем один максимум, такое распределение называется многомодальным (полимодальным).

Медианой *Me* непрерывной СВ X называется такое ее значение, при котором

$$\mathbf{P}\{X<Me\}=\mathbf{P}\{X>Me\}=0{,}5\,. \qquad (1.4)$$

Можно также сказать, что *Me* – это такое значение СВ, при котором значение функции обеспеченностей равно значению интегральной функции распределения (рис. 1.4).

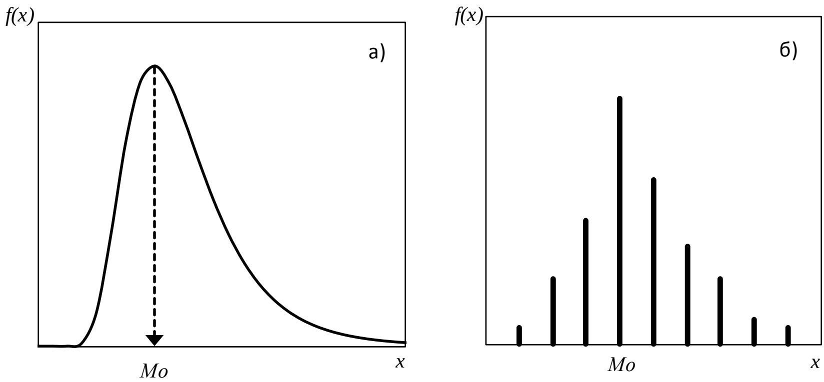


Рис. 1.3. Положение моды на графиках распределения непрерывной (а) и дискретной (б) случайных величин.

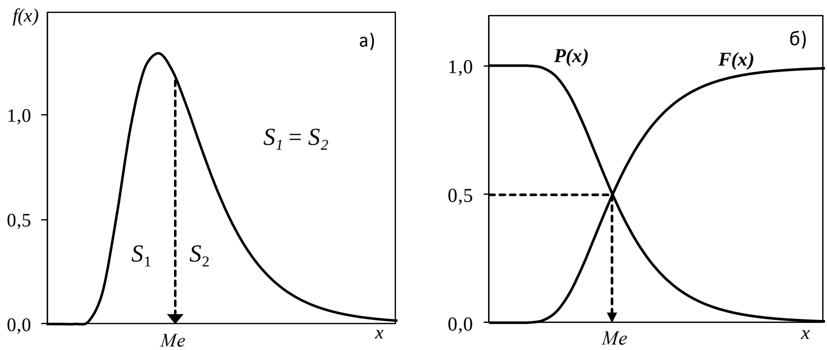


Рис. 1.4. Положение медианы на графиках дифференциальной (а) и интегральной (б) функций распределения.

Математическое ожидание (МО) случайной величины определяется следующими формулами:

для дискретной СВ $$m_x = \sum_i x_i p_i \ , \qquad (1.5)$$

для непрерывной СВ $$m_x = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx , \qquad (1.6)$$

где p_i – вероятность x_i ; $f(x)$ – функция плотности вероятности.

Моменты случайной величины

Большинство числовых характеристик, используемых на практике, связаны с понятием момента СВ. Различают начальные и центральные моменты СВ.

Начальный момент S-го порядка соответственно дискретной и непрерывной СВ определяется формулами

$$\alpha_S = \mathbf{M}[X^S] \ , \qquad (1.7)$$

$$\alpha_S = \int_{-\infty}^{+\infty} x^S f(x)\, dx , \qquad (1.8)$$

где **M**[.] – символ математического ожидания.

Центральный момент S-го порядка дискретной и непрерывной СВ определяется формулами

$$\mu_S = \mathbf{M}[(X - m_x)^S], \qquad (1.9)$$

$$\mu_S = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^S f(x) dx . \qquad (1.10)$$

Из формулы (1.7), в частности, следует, что МО – есть первый начальный момент, т.е. $m_x = \mathbf{M}[X^1] = \alpha_1$.

Начальные и центральные моменты связаны следующими соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_1 = 0 \\ &\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 \\ &\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 \\ &\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 \end{aligned}\right\} \qquad (1.11)$$

Характеристики рассеяния

Вторую группу наиболее часто используемых на практике характеристик составляют параметры, характеризующие степень рассеяния СВ относительно центра распределения. К ним относятся: дисперсия, среднеквадратическое отклонение и коэффициент вариации.

Дисперсия СВ X, представляет собой второй центральный момент, т.е.

$$D_x = \mu_2 = \mathbf{M}[(X - m_x)^2]. \tag{1.12}$$

Для непрерывной СВ X дисперсия определяется формулой

$$D_x = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx. \tag{1.13}$$

Среднеквадратическое отклонение (СКО) СВ X есть квадратный корень из дисперсии

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} \quad \text{или} \quad \sigma_x^2 = D_x. \tag{1.14}$$

Эту величину также называют стандартным отклонением, или стандартом.

Для описания рассеяния положительных СВ можно использовать безразмерную характеристику – коэффициент вариации.

Коэффициент вариации C_v случайной величины X есть отношение СКО к МО:

$$C_v = \frac{\sigma_x}{m_x} = \frac{\sqrt{D_x}}{m_x}. \tag{1.15}$$

Как следует из формул (1.12-1.15), дисперсия, СКО и коэффициент вариации взаимосвязаны, и на практике обычно используется только одна (любая) из перечисленных характеристик. Выбор того или иного параметра зависит от специфики задачи.

Поскольку расходы воды заведомо положительные величины, при их обработке наиболее часто используется коэффициент вариации.

Влияние коэффициента вариации (а, следовательно, дисперсии и СКО) на функцию распределения иллюстрируется на рис. 1.5.

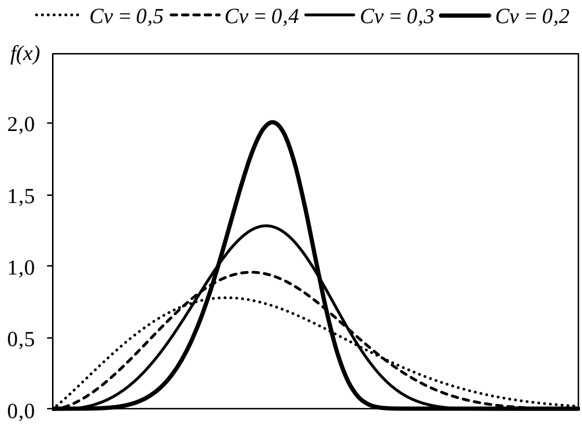


Рис. 1.5. Влияние коэффициента вариации на форму функции плотности вероятности при m_x = const.

Характеристики формы

К числовым характеристикам форы относят коэффициент асимметрии и эксцесс.

Коэффициент асимметрии C_s является безразмерным параметром и характеризует степень симметричности рассеяния относительно математического ожидания (Рис. 1.6). Коэффициент асимметрии определяется формулой

$$C_S = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{\mathbf{M}[(X - m_x)^3]}{\sigma_x^3}, \qquad (1.16)$$

то есть коэффициент асимметрии представляет собой отношение третьего центрального момента к кубу стандартного отклонения.

Для симметричных распределений коэффициент асимметрии равен нулю, а мода, медиана и математическое ожидание совпадают.

Эксцесс E_x также является безразмерным параметром и определяется формулой

$$E_x = \frac{\mu_4}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{\mathbf{M}[(x - m_x)^4]}{\sigma_x^4} - 3. \qquad (1.17)$$

Эксцесс позволяет оценить наличие «островершинности», или наоборот – «туповершинности» функции плотности вероятности СВ X относительно нормального закона распределения (см. п. 4.1), для которого $E_x = 0$ (Рис. 1.7).

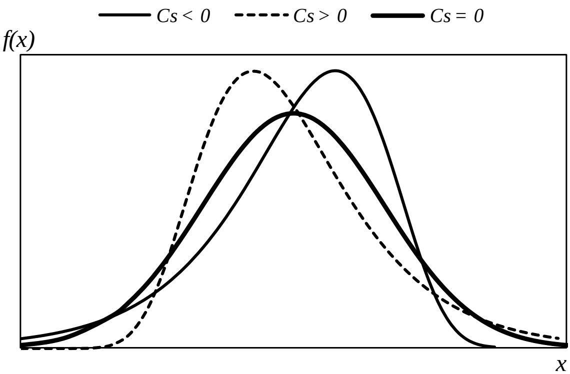


Рис. 1.6. Влияние коэффициента асимметрии на форму функции плотности вероятности при m_x = const.

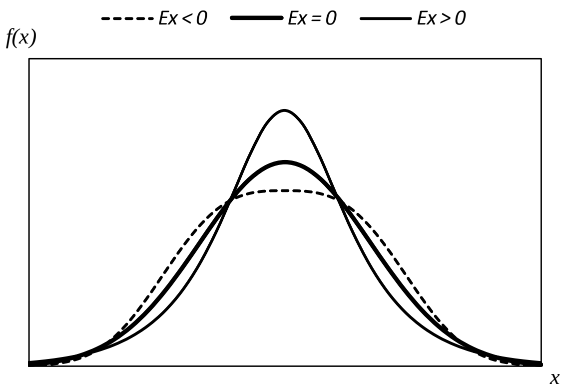


Рис. 1.7. Влияние коэффициента эксцесса на форму функции плотности вероятности при m_x = const и $C_s = 0$.

Свойства числовых характеристик случайной величины

В таблицах 1.2 и 1.3 представлены основные свойства математического ожидания и дисперсии.

Таблица 1.2

Свойства математического ожидания

№	Формула	Описание
1	$\mathbf{M}[c]=c$	Математическое ожидание постоянной величины (c) равно самой этой величине.
2	$\mathbf{M}[cX]=c\mathbf{M}[X]$	Постоянный множитель (c) можно выносить за знак МО.
3	$\mathbf{M}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}[X_i]$	Математическое ожидание суммы независимых случайных величин равно сумме их МО.
4	$\mathbf{M}[X+Y]=\mathbf{M}[X]+\mathbf{M}[Y]$	Частный случай свойства №3
5	$\mathbf{M}[aX+b]=a\mathbf{M}[X]+b$	Формула определяет МО линейной функции (a и b – константы). Данное свойство является следствием свойств 1-3.
6	$\mathbf{M}\left[\prod_{i=1}^{N} X_i\right]=\prod_{i=1}^{N}\mathbf{M}[X_i]$	Математическое ожидание произведения независимых СВ равно произведению их МО.

Таблица 1.3

Свойства дисперсии

№	Формула	Описание
1	$\mathbf{D}[c]=0$	Дисперсия постоянной величины (c) равна нулю.
2	$\mathbf{D}[cX]=c^2\mathbf{D}[X]$	Постоянную величину (c) можно вынести за знак дисперсии, возводя ее в квадрат.
3	$\sigma[cX]=c\cdot\sigma[X]$	Постоянную величину (c) можно вынести за знак среднеквадратического отклонения (следствие свойства №2).
4	$\mathbf{D}\left[\sum_{i=1}^{N} X_i\right]=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{D}[X_i]$	Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий.
5	$\mathbf{D}[aX+b]=a^2\mathbf{D}[X]$	Формула определяет дисперсию линейной функции (a и b – константы). Данное свойство является следствием свойств 1-4.

Коэффициент автокорреляции

Коэффициент автокорреляции характеризует тесноту связи между смежными членами ряда, рассчитывается по формуле

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{i=n-1}(x_i - \bar{x})(x_{i+1} - \bar{x})}{(n-2)\sigma_x^2}, \tag{1.18}$$

где n – длина ряда; $\bar{x}$ – среднее значение; σ_x – среднеквадратическое отклонение.

Если вероятностная структура ряда описывается моделью случайной величины, то $r = 0$, то есть связь между смежными членами ряда отсутствует.

Стандартные преобразования случайной величины

Во многих случаях оказывается удобным рассматривать вместо СВ *X* другую случайную величину, полученную из СВ *X* на основе элементарного преобразования. В гидрологической практике наиболее часто используется замена СВ *X* модульными коэффициентами и замена СВ *X* стандартной нормированной случайной величиной.

Модульным коэффициентом называется отношение значения СВ *X* к ее математическому ожиданию

$$k_i = x_i / m_x . \tag{1.19}$$

Стандартная нормированная величина может быть получена из СВ *X* по формуле

$$t_i = (x_i - m_x)/\sigma_x , \tag{1.20}$$

или с учетом формул (1.15) и (1.19)

$$t_i = (k_i - 1)/C_v . \tag{1.21}$$

Из свойств МО и дисперсии следует, что формула (1.19) преобразует СВ *X* с МО равным m_x, в случайную величину с МО равным единице. У новой переменой СКО будет равно C_v.

Преобразование (1.20) приводит к СВ с нулевым МО, при этом будет иметь место равенство: $\sigma_t = D_t = 1$.

Квантили распределения и связанные с ними характеристики

Ранее мы определили интегральную функцию распределения $F(x)$, по которой для любого x можно установить вероятность его непревышения. Во многих практических случаях необходимо решить обратную задачу: по заданной вероятности непревышения $F(x) = p'$ определить величину x'_p. Для обозначения x'_p, в этом случае в математической статистике используется специальный термин – *квантиль*.

Таким образом, p-квантилем или $p\%$-квантилем (если p в %) называется значение случайной величины x'_p, соответствующее заданному значению вероятности непревышения, т. е. такому значению, при котором $F(x) = p'$.

По аналогии с квантилями, в гидрологической практике используются p-ординаты кривой обеспеченностей.

Ординатой кривой обеспеченностей будем называть, такое значение СВ X (обозначим его x_p), которое соответствует заданной вероятности превышения, когда $P(x) = p$.

Так как $P(x) = 1 - F(x)$, следовательно, p и p' связаны соотношением $p = 1 - p'$ или (если p в %) $p = 100 - p'$.

Например, если речь идет о расходах воды, то 99%-ный квантиль равен расходу 1%-ной обеспеченности, а 20%-ный квантиль – расходу 80%-ной обеспеченности.

Если вероятность непревышения выражена в процентах, то квантили иногда называют *процентилями*.

В статистике также используются термины «квартиль», «интерквартильныый размах» и «дециль».

0,25-квантиль называется первым (или нижним) *квартилем* (от лат. quarta – четверть);

0,5-квантиль называется медианой (от лат. mediana – середина) или вторым *квартилем*;

0,75-квантиль называется третьим (или верхним) *квартилем*.

Интерквартильным размахом (англ. Interquartile range) называется разность между третьим и первым квартилями, то есть $(x_{0,75} - x_{0,25})$. Интерквартильный размах является характеристикой рассеяния случайной величины и при наличии выбросов является более устойчивой характеристикой, чем дисперсия.

Квантили, соответствующие вероятностям непревышения 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,7; 0,8 и 0,9 называются *децилями*; $x_{0,1}$ – первый дециль, $x_{0,2}$ – второй дециль и т. д. Всего децилей девять и они делят (по вероятности) всю совокупность возможных значений случайной величины на 10 равных частей.

Параметры закона распределения

Формулы, задающие закон распределения содержат как минимум один параметр. В гидрологии обычно используются двух- и трехпараметрические законы распределения. Параметры закона распределения принято делить на три вида. Это параметры положения, масштаба и формы.

Параметр положения – это параметр, характеризующий положение функции плотности вероятности на оси абсцисс. Обычно – это математическое ожидание, мода или левая граница области возможных значений случайной величины.

Параметр масштаба – это параметр, определяющий масштаб, в котором изменяется значение случайной величины.

Параметр формы – параметр, определяющий форму графика функции плотности вероятности (и других функций распределения).

Перечисленные параметры называют естественными параметрами закона распределения случайной величины.

Если закон распределения двухпараметрический, то его естественные параметры можно выразить через характеристики связанные с первым и вторым моментами – через математическое ожидание и стандартное отклонение (или коэффициент вариации).

Если распределение трехпараметрическое, то вводится характеристика, связанная с третьим моментом – коэффициент асимметрии.

В этом случае математическое ожидание, коэффициент вариации и коэффициент асимметрии можно также называть параметрами распределения. При этом вид связи естественных параметров распределения с m_x, C_v и C_s зависит от типа используемого закона распределения.

Для того чтобы рассчитать расход заданной обеспеченности нужно по выборке ограниченного объема (по имеющемуся ряду) получить параметры распределения.

Полученные по эмпирическим данным числовые характеристики случайной величины X (такие, как m_x^*, σ_x^*, D_x^* и т. д.) принято называть статистическими оценками числовых характеристик (или эмпирическими, или выборочными характеристиками). Для обозначения статистических оценок обычно используется символ «*».

Требования к оценкам числовых характеристик СВ

При оценивании одного и того же параметра в зависимости от применяемой методики можно получить различные оценки. Для того чтобы выбрать наилучшую из них, необходимо сформулировать некоторые требования к свойствам оценок. Наиболее важными из этих свойств являются состоятельность, несмещенность и эффективность.

Состоятельность. Оценка $G^* = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ неизвестного параметра G называется состоятельной, если по мере роста числа наблюдений n она стремится по вероятности к оцениваемому значению G, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{|G - G^*| < \varepsilon\right\} = 1, \qquad (1.22)$$

где ε – сколь угодно малое число.

Состоятельность оценки гарантирует исследователю увеличение точности оценивания с ростом n и то, что, хотя бы в пределе (при $n \to \infty$) он может получить точное значение G.

Несмещенность. Оценка $G^* = f(x_1, x_2, .x_3, \ldots, x_n)$ неизвестного параметра G называется несмещенной, если при любом объеме выборки n результат ее осреднения по всем возможным выборкам данного объема приводит к точному (истинному) значению оцениваемого параметра, т.е. $\mathbf{M}[G^*] = G$.

Говоря другими словами, несмещенность означает отсутствие систематической погрешности при оценивании параметра.

Если оценка является смещенной, но причина смещенности известна, то ее можно устранить, введя поправку на смещенность в формулу оценки. Полученная на основе такой корректировки оценка будет сходиться к истинному значению оцениваемого параметра только при $n \to \infty$, т.е. будет являться асимптотически несмещенной.

Следует отметить, что асимптотически несмещенные оценки не обязательно более точные, чем смещенные, однако они являются более удобными с математической точки зрения (состоятельность, инвариантность относительно линейных преобразований и т. д.).

Эффективность. Оценка $G^* = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ называется эффективной, если среди всех оценок параметра G она обладает наименьшей мерой случайного разброса относительно истинного значения оцениваемого параметра, т.е. $\boldsymbol{D}[G^*] = D_{\min}$.

Можно также сказать, что степень эффективности оценки зависит от того насколько полно данная оценка использует информацию, содержащуюся в выборке (измерениях).

2. ПОСТРОЕНИЕ ЭМПИРИЧЕСКИХ КРИВЫХ ОБЕСПЕЧЕННОСТЕЙ

В практике строительного, дорожного и водохозяйственного проектирования часто требуется определить расход воды (или иную гидрологическую характеристику) заданной обеспеченности, или, что то же самое, заданной вероятности ежегодного превышения.

Такая задача легко решается, если закон распределения случайной величины известен. Однако в большинстве практических ситуаций закон распределения исследуемой СВ не известен и представление о нем необходимо составить по эмпирическим данным.

Функция обеспеченностей, построенная по эмпирическим данным, называется *эмпирической кривой обеспеченностей*.

Возможны два метода построения эмпирической кривой обеспеченностей:

1. Построение эмпирической кривой обеспеченностей на основе гистограммы эмпирических частот.
2. Построение эмпирической кривой обеспеченностей на основе ранжированного ряда.

Рассмотрим первый способ на примере данных наблюдений за среднегодовыми расходами на р. Воложба – д. Воложба (табл.2.1).

Определяем амплитуду (размах R) колебаний среднегодовых расходов. *Размах* – это разность между наибольшим и наименьшим значением статистического ряда:

$$R = Q_{\max} - Q_{\min} \,. \tag{2.1}$$

В рассматриваемом примере максимальное значение расхода воды 18,1 м^3/с, минимальное значение 6,89 м^3/с, следовательно, R = 18,1 – 6,89 = 11,21.

Разбиваем амплитуду на m равных интервалов. Величину m можно определить по эмпирическим формулам Стерджесса (2.2) или Брукса-Каррузера (2.3):

$$m = 1 + 3{,}322\ \lg(n). \tag{2.2}$$

$$k = 5\lg(n),\qquad(2.3)$$

где n – длина ряда наблюдений.

Полученное значение m округляется до целых значений. В примере длина ряда n = 53, следовательно: $m = 1 + 3{,}322 \lg(53) = 6{,}55 \approx 7$.

Длина расчетного интервала определяется по формуле

$$L = R/m\qquad(2.4)$$

Полученное значение L можно округлить, но так чтобы длина расчетного интервала изменилась не более чем на 10 %. Для реки Воложба – д. Воложба получаем: $L = 11{,}21 / 7 = 1{,}601 \approx 1{,}6$.

Для построения гистограммы эмпирических частот заполняется таблица 2.2. В первый столбец таблицы записываются границы расчетных интервалов.

В качестве левой границы первого интервала примется значение, меньшее или равное $Q_{\min}$. В данном случае $Q_{\min} = 6{,}89$. После округления в меньшую сторону получаем левую границу первого интервала 6,8. Правая граница первого интервала равна 6,8 + 1,6 = 8,4. Таким образом, границы первого интервала определяются неравенством: $6{,}8 \le Q < 8{,}4$, второго: $8{,}4 \le Q < 10$ и. т. д.

Следует отметить, что за счет округлений число интервалов (m) может измениться на единицу в большую или меньшую сторону, что не имеет принципиального значения.

Во второй столбец таблицы 2.2 записывается количество расходов z_i попадающих в конкретный интервал (см. табл.2.1). При этом общее число значений во всех интервалах должно равняться длине ряда n.

В третий столбец таблицы 2.2 записывается относительное число значений в интервале

$$p_i = z_i / n\qquad(2.5)$$

Величину p_i называют эмпирической частотой. Эмпирическую частоту можно выражать либо в долях единицы, либо в процентах (последний столбец таблицы 2.2):

$$p_{i,\%} = \frac{z_i}{n} 100\% .\qquad(2.6)$$

По данным столбцов 1 и 3 таблицы 2.2 строится гистограмма эмпирических частот (рис. 2.1).

Таблица 2.1

Среднегодовые расходы воды; р. Воложба – д. Воложба

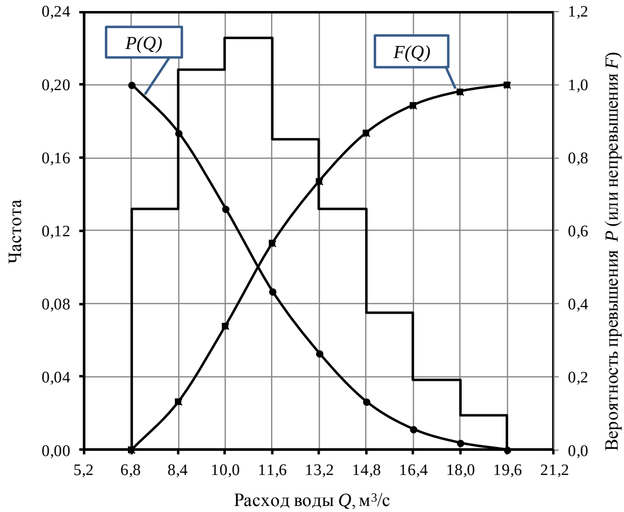
№ п/п	Год	Расходы воды, $м^3/с$		№ расхода в интервале	№ интервала
		исходный ряд	в порядке возраста-ния		
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	1936	9,61	6,89	1	
2	1937	6,89	6,94	2	
3	1938	8,66	7,27	3	
4	1939	7,37	7,37	4	1
5	1940	8,48	7,58	5	
6	1941	8,16	7,86	6	
7	1942	12,4	8,16	7	
8	1943	11,8	8,48	1	
9	1944	6,94	8,62	2	
10	1945	10,7	8,66	3	
11	1946	11,8	8,87	4	
12	1947	8,87	8,99	5	
13	1948	10,4	9,10	6	2
14	1949	10,8	9,30	7	
15	1950	11,2	9,37	8	
16	1951	9,74	9,61	9	
17	1952	16,1	9,70	10	
18	1953	18,1	9,74	11	
19	1954	11,0	10,1	1	
20	1955	15,9	10,4	2	
21	1956	13,1	10,4	3	
22	1957	17,4	10,4	4	
23	1958	14,4	10,7	5	
24	1959	11,0	10,8	6	3
25	1960	7,86	11,0	7	
26	1961	11,5	11,0	8	
27	1962	16,3	11,2	9	
28	1963	9,70	11,2	10	
29	1964	10,1	11,5	11	
30	1965	10,4	11,5	12	
31	1966	17,2	11,8	1	
32	1967	12,1	11,8	2	
33	1968	14,3	12,1	3	
34	1969	15,6	12,4	4	
35	1970	9,1	12,4	5	4
36	1971	9,37	12,5	6	
37	1972	7,58	12,8	7	
38	1973	7,27	13,0	8	
39	1974	10,4	13,1	9	
40	1975	8,62	13,5	1	
41	1976	12,5	13,6	2	
42	1977	13,0	14,2	3	
43	1978	13,5	14,3	4	5
44	1979	8,99	14,4	5	
45	1980	9,30	14,5	6	
46	1981	12,4	14,8	7	
47	1982	14,8	15,6	1	
48	1983	14,2	15,9	2	6
49	1984	14,5	16,1	3	
50	1985	11,2	16,3	4	
51	1986	13,6	17,2	1	7
52	1987	12,8	17,4	2	
53	1988	11,6	18,1	1	8

Средний расход, $Q_{ср} = 11,5$ $м^3/с$.
Максимальный расход, $Q_{max} = 18,1$ $м^3/с$.
Минимальный расход, $Q_{min} = 6,89$ $м^3/с$.

Таблица 2.2

Расчет эмпирических частот для ряда среднегодовых расходов р. Воложба – д. Воложба

Интервал значений расходов воды, м^3/с	Число значений в интервале	Частота, *p*	
		в долях единицы	в процентах
1	*2*	*3*	*4*
6,8-8,4	7	0,132	13,2
8,4 -10,0	11	0,208	20,8
10,0 - 11,6	12	0,226	22,6
11,6 - 13,2	9	0,170	17,0
13,2 - 14,8	7	0,132	13,2
14,8 - 16,4	4	0,075	7,5
16,4 - 18,0	2	0,038	3,8
18,0 - 19,6	1	0,019	1,9
Сумма	53	1	100



F(Q) – интегральная функция распределения; P(Q) – функция обеспеченностей;

Рис.2.1. Гистограмма эмпирических частот и графики эмпирических функций распределения среднегодовых расходов воды, р. Воложба – д. Воложба.

Для расчета интегральной функции распределения и функции обеспеченностей заполняется таблица 2.3. В первый столбец таблицы выписываются расходы воды, соответствующие границам всех использованных интервалов.

Таблица 2.3

Расчет координат интегральной функции распределения и функции обеспеченностей

Значение расхода воды, м^3/с	Число случаев непревышения	Число случаев превышения	Относительное число случаев непревышения, *F(Q)*	Относительное Число случаев превышения, *P(Q)*
1	*2*	*3*	*4*	*5*
6,8	0	53	0	1
8,4	7	46	0,132	0,868
10,0	18	35	0,340	0,660
11,6	30	23	0,566	0,434
13,2	39	14	0,736	0,264
14,8	46	7	0,868	0,132
16,4	50	3	0,943	0,057
18,0	52	1	0,981	0,019
19,6	53	0	1	0

Во второй столбец таблицы 2.3 записывается число случаев непревышения $z_{нп}$ для соответствующего расхода. Число случаев непревышения можно получить, последовательно суммируя значения из столбца 2 таблицы 2.2.

В третий столбец таблицы 2.3 записывается число случаев превышения $z_{пр}$ для соответствующего расхода. Получить эти значения можно, вычитая число случаев превышения из общей длины ряда. Так в примере для расхода 6,8 м^3/с число случаев непревышения равно 0, следовательно, число случаев превышения равно 53 – 0 = 53; для расхода 8,4 м^3/с число случаев непревышения равно 7, следовательно, число случаев превышения равно 53 – 7 = 46 и т. д.

В четвертый столбец таблицы 2.3 записывается относительное число случаев непревышения:

$$F(Q) = z_{нп} / n. \tag{2.7}$$

Полученная таким образом функция *F(Q)*, представляет собой эмпирическую интегральную функцию распределения вероятностей. Эта функция имеет еще одно название: *кумулятивная функция.*

В пятый столбец таблицы записывается относительное число случаев превышения:

$$P(Q) = z_{\text{пр}} / n\,. \qquad (2.8)$$

Функцию *P(Q)* называют эмпирической функцией обеспеченностей. Поскольку функции *F(Q)* и *P(Q)* связаны соотношением

$$P(Q) = 1 - F(Q)\,, \qquad (2.9)$$

то вместо формулы (2.8) можно использовать формулу (2.9).

По данным столбцов 1 и 4 таблицы 2.3 строится график интегральной функции распределения, по данным столбцов 1 и 5 – график функции обеспеченностей (см. рис.2.1).

Изложенный метод построения эмпирической кривой обеспеченностей является довольно простым и наглядным, но требует достаточно продолжительных рядов наблюдений. В российской гидрологической практике этот метод применяется крайне редко, так как реальные ряды наблюдений за гидрологическими характеристиками, как правило, не превышают нескольких десятков лет.

При анализе рядов небольшого объема используется метод №2. При использовании этого метода члены эмпирического ряда ранжируются, т.е. располагаются в убывающем или возрастающем порядке. В гидрологии принято располагать члены ряда в убывающем порядке.

Допустим, имеется ряд величин какой-либо характеристики гидрологического режима, расположенных в убывающем порядке: $x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_m > \ldots > x_N$. Тогда теоретическая вероятность превышения для *m*-го члена ряда может быть выражена формулой

$$\mathbf{P}\{\boldsymbol{X} \geq x_m\} = \lim_{N\to\infty} (m/N). \qquad (2.10)$$

В то же время длина реальной выборки всегда конечна, $n < \infty$. Заменяя *N* на *n* и используя формулу (2.10), можно попытаться приблизительно оценить вероятность превышения для каждого члена имеющейся выборки

$$p_m = \mathbf{P}\{X \geq x_m\} \approx (m/n)100\ \%, \qquad (2.11)$$

где m – порядковый номер x_m в ранжированном ряду; p_m – обеспеченность (в %) m-го члена ранжированного ряда.

В соответствии с формулой (2.11) обеспеченность первого (самого большого) члена ранжированного ряда будет равна $p_1 = (1/n)100\%$, второго – $p_2 = (2/n)100\%$ и т. д. Обеспеченность последнего члена ряда будет равна $p_n = (n/n)100$ = 100 %. Таким образом, если принять данную формулу, получится, что последний член ранжированного ряда представляет собой абсолютный минимум и СВ X никогда не примет значение меньше чем x_n.

Данный парадокс возникает в связи с тем, что мы заменили N на n. В действительности можно получить бесконечное множество выборок из генеральной совокупности длиной n, каждая из которых будет иметь свой максимум и свой минимум. В этом смысле эмпирическая обеспеченность m-го члена ранжированного ряда сама будет являться случайной величиной, и в качестве расчетного значения разумно принять ее математическое ожидание, моду или иную устойчивую характеристику. С учетом сказанного в настоящее время разработано около десятка формул для расчета эмпирической обеспеченности.

Формула А. Хазена:

$$p_m = \frac{m - 0{,}5}{n} 100\%. \qquad (2.12)$$

Формула С.Н. Крицкого – М.Ф. Менкеля (Вейбулла):

$$p_m = \frac{m}{n+1} 100\%. \qquad (2.13)$$

Формула Н.Н. Чегодаева:

$$p_m = \frac{m - 0{,}3}{n + 0{,}4} 100\%. \qquad (2.14)$$

Формула (2.12) предполагает замену ступенчатого графика эмпирических частот сглаженной кривой, проходящей через середины ступенек графика. Обеспеченность первого члена ряда по зависимости (2.12) составит $(1/2n)100\ \%$. Такая оценка недостаточно обоснована, поскольку в этом случае повторяемость наблюденного максимума относится к периоду, вдвое превышающему период наблюдений.

Формула (2.13) соответствует математическому ожиданию эмпирической обеспеченности, а формула (2.14) – медианному значению эмпирической обеспеченности.

Среди перечисленных формул в определенном смысле наилучшей является формула (2.13), так как получаемая по ней оценка эмпирической обеспеченности является состоятельной, несмещенной и эффективной.

Однако при выводе формулы эмпирической обеспеченности допустимо рассуждать и по-иному. Значение СВ, расположенное в ранжированном ряду (длиной n) на m-м месте, тоже является случайной величиной, и можно рассчитать обеспеченность, соответствующую МО или медиане m-го члена. Но в такой постановке задача разрешима лишь в том случае, когда закон распределения исходной СВ X известен. Приведем примеры таких формул.

Для распределения Гумбеля, а также экспоненциального распределения:

$$p_m = \frac{m - 0{,}44}{n + 0{,}12} 100\% ; \qquad (2.15)$$

для нормального распределения:

$$p_m = \frac{m - 3/8}{n + 1/4} 100\% . \qquad (2.16)$$

Таким образом, различие этих двух подходов состоит в том, что в первом случае в качестве СВ мы рассматриваем обеспеченность m-го члена ранжированного ряда, а во втором в качестве СВ рассматривается значение m-го члена и затем вычисляется обеспеченность его МО или медианы. Следует отметить, что оба подхода при выводе формул эмпирической обеспеченности дают одинаковые результаты лишь в том случае, если теоретическая кривая обеспеченности представляет собой линейную зависимость СВ X от обеспеченности, как это имеет место, например, для закона распределения равномерной плотности.

Учитывая сказанное, можно констатировать, что выбор формулы для расчета эмпирической обеспеченности содержит элемент субъективизма и зависит от традиций и специфики решаемых задач. Так, например, в гидротехнической практике за критерий надежности работы сооружений обычно принимается ежегодная вероятность нарушения нормальной работы установки. В этих условиях наиболее приемлемой при расчетах паводочного стока является формула (2.13), поскольку она дает большую надежность, особенно для малых значений обеспеченности. В США эта формула рекомендуется в качестве основной расчетной формулы.

В то же время, например, во Франции используется формула (2.12), а в Англии – формула (2.15).

Грингортен (1963 г.) предложил универсальную формулу для расчета эмпирической обеспеченности:

$$p_m = \frac{m-a}{n+1-2a}100\%. \qquad (2.16)$$

При $a = 0{,}5$ мы получаем формулу (2.12), при $a = 0$ – формулу (2.13), при $a = 0{,}3$ – формулу (2.14), при $a = 0{,}44$ – формулу (2.15) и при $a = 3/8$ – формулу (2.16). Сам же Грингортен рекомендовал устанавливать значение параметра a в зависимости от длины выборки по табл. 2.4.

Таблица 2.4

Зависимость параметра a от длины выборки n по Грингортену

n	10	20	30	40	50	80	90	100
a	0,448	0,443	0,442	0,441	0,440	0,440	0,439	0,439

В России действующие в настоящее время нормативные документы рекомендуют в качестве основной расчетной формулы выражение (2.13).

Пример 2.1. Построить эмпирическую кривую обеспеченностей максимальных паводочных расходов для р. Луга – ст. Толмачево (табл.2.5).

Решение

1. Рассчитываем среднее значение ряда: $\overline{Q} = 58{,}44$ м^3/с.
2. Ранжируем исходный ряд, т.е. располагаем расходы в убывающем порядке (табл. 2.5, столбец 4).

3. Рассчитываем модульные коэффициенты: $k_i = Q_i / \overline{Q}$ (столб. 5).
4. Для каждого расхода воды в ранжированном ряду рассчитываем эмпирическую обеспеченность по формуле (2.13). Так как длина ряда $n = 32$, обеспеченность первого члена ранжированного ряда равна: $p_1 = (1/33)100\% = 3{,}03$;
   второго: $p_1 = (2/33)100\% = 6{,}06$ и т. д. (столб. 6).
5. По данным столбцов 5 и 6 на клетчатке вероятности строим эмпирическую кривую обеспеченностей (рис. 2.2).

В данном случае кривая обеспеченностей строилась в модульных коэффициентах, но ее можно строить и в расходах, т. е. по данным столбцов 4 и 6.

При выполнении гидрологических расчетов кривые обеспеченностей строятся на специальной бумаге – клетчатке вероятностей. Клетчатки вероятностей спрямляют различные законы распределения. Наиболее распространенная клетчатка вероятностей – «клетчатка с умеренной асимметричностью», которая спрямляет нормальный закон распределения (см. п. 4.1).

Клетчатка с умеренной асимметричностью имеет равномерный масштаб по оси ординат и неравномерный масштаб по оси обеспеченностей. Асимметричные кривые обеспеченностей на такой клетчатке полностью не спрямляются. Кривые с положительной асимметрией имеют выпуклость направленную вниз, с отрицательной – выпуклость, направленную вверх.

На рисунке видно, что у исследуемого ряда асимметрия положительная – выпуклость направлена вниз.

Масштаб по оси ординат при построении эмпирической кривой обеспеченностей рекомендуется выбирать так, чтобы точка, соответствующая максимальному значению, располагалась не слишком близко к верхнему краю клетчатки, и имелась возможность экстраполяции кривой в область малых обеспеченностей.

Таблица 2.5

Расчет ординат эмпирической кривой обеспеченностей максимальных расходов дождевых паводков р. Луги – ст. Толмачево

m_i	Годы	Расходы, м^3/с	Ранжированные		Обеспеченность, %
			расходы, м^3/с	модульные коэффициенты	
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	1954	71,4	145	2,48	3,03
2	1955	22,1	130	2,22	6,06
3	1956	32,7	130	2,22	9,09
4	1957	145	121	2,07	12,1
5	1958	46,0	104	1,78	15,2
6	1959	29,9	100	1,71	18,2
7	1960	28,4	84,5	1,45	21,2
8	1961	73,8	84,4	1,44	24,2
9	1962	121	78,1	1,34	27,3
10	1963	25,0	73,8	1,26	30,3
11	1964	31,4	71,4	1,22	33,3
12	1965	17,3	66,0	1,13	36,4
13	1966	54,8	58,7	1,00	39,4
14	1967	29,9	58,2	1,00	42,4
15	1968	104	54,8	0,94	45,5
16	1969	27,5	54,0	0,92	48,5
17	1970	84,5	46,0	0,79	51,5
18	1971	37,5	39,2	0,67	54,6
19	1972	24,0	37,5	0,64	57,6
20	1973	22,1	32,7	0,56	60,6
21	1974	130	31,4	0,54	63,6
22	1975	21,3	29,9	0,51	66,7
23	1976	58,2	29,9	0,51	69,7
24	1977	58,7	28,4	0,49	72,7
25	1978	130	27,5	0,47	75,8
26	1979	22,0	25,0	0,43	78,8
27	1980	54,0	24,0	0,41	81,8
28	1981	100	22,1	0,38	84,9
29	1982	78,1	22,1	0,38	87,9
30	1983	39,2	22,0	0,38	90,9
31	1984	66,0	21,3	0,36	93,9
32	1985	84,4	17,3	0,30	97,0

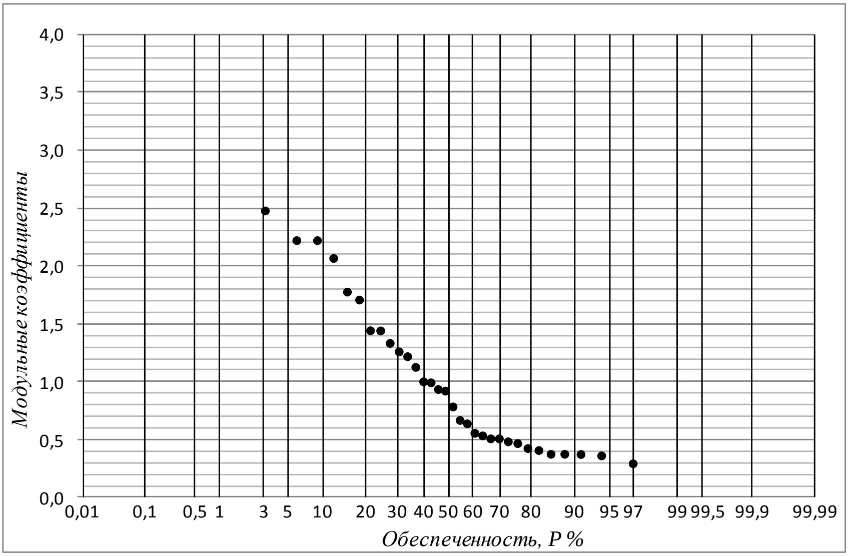


Рис. 2.2. Эмпирическая кривая обеспеченностей максимальных расходов дождевых паводков в модульных коэффициентах на клетчатке с умеренной асимметричностью; р. Луга – ст. Толмачево.

Как видно из приведенного примера, эмпирическая кривая обеспеченностей позволяет составить представление о распределении исследуемой СВ в диапазоне обеспеченностей от $100/(n+1)$ до $(100n)/(n+1)$ % , в данном случае от 3,03 % до 97,0 %. В то же время довольно часто требуется рассчитать значения расходов для обеспеченностей, которые гораздо меньше или гораздо больше указанных.

Например, при проектировании гидротехнических сооружений первого класса требуется иметь расход обеспеченностью 0,01 %. Для решения подобных задач необходимо уметь экстраполировать эмпирическую кривую в область больших и малых значений. Очевидно, что экстраполяция на глаз здесь не возможна, поскольку результаты такой экстраполяции будут носить слишком субъективный характер.

В практике гидротехнических расчетов для сглаживания и экстраполяции эмпирических кривых обеспеченностей используются аналитические кривые, которые удовлетворяют определенному набору требований. Так, например, для расчета расходов воды функция плотности вероятности должна быть одномодальной, иметь в качестве нижнего предела ноль или положительное число, допускать положительную асимметрию и иметь небольшое число параметров (обычно 2 или 3). В России для этих целей наиболее часто используются трехпараметрические кривые обеспеченностей Крицкого-Менкеля и Пирсона III типа.

Выбранная аналитическая кривая по отношению к эмпирической кривой исполняет роль своего рода гидрологического лекала.

В такой постановке задача гидролога сводится к решению двух основных задач:

1. произвести выбор аналитической кривой;
2. оценить по эмпирическим данным параметры распределения. Обычно требуется оценить МО, СКО (или C_v), C_s (или C_s/C_v).

Если обе задачи решены, то на клетчатку вероятности помимо эмпирической кривой обеспеченностей наносится и аналитическая кривая, что позволяет проконтролировать степень согласованности аналитической кривой и эмпирических точек.

Обычно рассматривается несколько вариантов аналитических кривых и выбирается наилучший.

При построении графика аналитической кривой на клетчатку вероятности наносят 20-25 точек (координаты точек определяют по соответствующим таблицам) и затем соединяют точки плавной линией.

Если аналитическая кривая хорошо согласуется с эмпирической кривой обеспеченностей, то в дальнейших расчетах используются ординаты аналитической кривой.

3. МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

При статистической обработке гидрологических данных используются несколько методов расчета оценок параметров распределения. Эти методы можно условно разделить на три группы: аналитические, графоаналитические и графические.

Графические и графоаналитические методы, как видно из названия, сочетают в себе элементы аналитического расчета и графические построения.

В аналитических методах оценки параметров распределения представляют собой числа, полученные путем подстановки выборочных значений x_1, x_2, x_3, ... x_n СВ X в теоретическую формулу оцениваемого параметра. При этом желательно, чтобы оценка удовлетворяла требованиям состоятельности, несмещенности и эффективности.

К числу аналитических методов относятся метод моментов, метод наибольшего правдоподобия, метод наименьших квадратов и метод L-моментов.

3.1. Метод моментов (ММ)

Метод основан на использовании моментов эмпирического распределения, которые являются состоятельными оценками соответствующих теоретических моментов.

При замене теоретических моментов эмпирическими вместо $N \to \infty$ используется конечное число значений случайной величины n, а вероятность (p_i) того, что СВ X примет значение x_i заменяется частотой ($p_i = 1/n$).

Эмпирические начальный $\left(\alpha_s^*\right)$ и центральный $\left(\mu_s^*\right)$ моменты S-го порядка определяются формулами:

$$\alpha_s^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^s \,, \tag{3.1}$$

$$\mu_s^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^s \,. \tag{3.2}$$

Как следует из (3.1), выборочную оценку математического ожидания (выборочное среднее $\bar{x}$) можно вычислить по формуле

$$m_x^* = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \tag{3.3}$$

Эта оценка является состоятельной и несмещенной.

Для обозначения выборочной дисперсии наряду с D^*, используется символ S^2. Выборочная дисперсия представляет собой второй центральный момент и, как следует из (3.2) определяется выражением

$$D^* = S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \,. \tag{3.4}$$

Так как математическое ожидание D^* равно не D, а величине $[(n-1)/n]D$, оценка (3.4) является состоятельной, но смещенной оценкой теоретической дисперсии. В связи с этим рекомендуется применять несмещенную состоятельную оценку дисперсии

$$S_{\text{Н}}^2 = \frac{n}{n-1} S_{\text{С}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 , \tag{3.5}$$

где $S_{\text{Н}}^2$ и $S_{\text{С}}^2$ – соответственно несмещенная и смещенная оценки дисперсии; $n/(n-1)$ – поправка на смещенность. Отсюда несмещенная оценка СКО и коэффициента вариации выражается формулами:

$$\sigma^* = S = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \,, \tag{3.6}$$

$$C_v^* = \frac{S}{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum (k_i - 1)^2}{n-1}} \,. \tag{3.7}$$

Аналогичным образом получены несмещенные оценки для коэффициента асимметрии и эксцесса:

$$C_s^* = \frac{n\sum_{i=1}^{n}\left(k_i - 1\right)^3}{(n-1)(n-2)\left(C_v^*\right)^3} \,, \tag{3.8}$$

$$E_x^* = \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma^*} \right)^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} . \qquad (3.9)$$

При существующей в настоящее время длине гидрологических рядов получить с необходимой точностью можно только оценки первых двух моментов. Коэффициент асимметрии (C_s), который связан с третьим центральным моментом уже имеет погрешность не менее 30%. Поэтому числовые характеристики, связанные с четвертым моментом и моментами более высоких порядков в практике гидрологических расчетов обычно не используются.

К достоинствам метода моментов можно отнести то, что оценки параметров не зависят от закона распределения исследуемой случайной величины; а также то, что расчетные формулы достаточно просты и позволяют получить искомые параметры в явном виде. Поэтому метод моментов получил наибольшее распространение в практике гидрологических расчетов.

В то же время нужно иметь в виду, что оценки дисперсии, коэффициента вариации и коэффициента асимметрии имеют отрицательную смещенность. Это приводит к тому, что при больших значениях коэффициента вариации ($C_v > 0{,}6$) достоверность моментных оценок ощутимо снижается, а введение поправочных коэффициентов становится неэффективным.

Примеры расчета оценок параметров распределения методом моментов приводятся в разделе 4.

3.2. Метод наибольшего правдоподобия (МНП)

Метод также называют методом максимального правдоподобия (maximum likelihood estimation – MLE).

Для нахождения оценки методом наибольшего правдоподобия необходимо, прежде всего, построить *функцию правдоподобия*. Чтобы понять, как это делается, рассмотрим выборку значений случайной величины X объемом в n членов. Предположим, что функция плотности вероятности СВ X имеет достаточно простой вид: $f(x, G)$, т. е. зависит от одного параметра G.

Суть метода состоит в том, чтобы найти такое значение параметра G, при котором вероятность получить в результате n опытов именно данную выборку (x_1, x_2, x_3, … , x_n) являлась бы максимальной. С математической точки зрения эта задача сводится к нахождению максимума некоторой функции $L(x_i, G)$, которая и называется функцией правдоподобия. Функция $L(x_i, G)$ представляет собой совместную плотность вероятности вектора $X = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ при данном G:

$$L(x_i, G) = f(x_1, G)\, f(x_2, G)\, f(x_3, G) \ldots f(x_n, G) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, G). \quad (3.10)$$

Согласно правилам нахождения экстремумов, для определения максимума функции $L(x_i, G)$ нужно решить уравнение

$$\frac{\partial L(x_i, G)}{\partial G} = 0. \quad (3.11)$$

Для упрощения решения обычно используют логарифмическую функцию правдоподобия $\ln[L(x_i, G)]$. Учитывая, что эта функция имеет максимум при том же значении G получаем

$$\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial G} = \frac{\partial \ln L}{\partial G} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial[\ln f(x_i, G)]}{\partial G} = 0. \quad (3.12)$$

Если функция распределения зависит от нескольких параметров, следует взять частные производные по каждому из них

$$\frac{\partial \ln L}{\partial G_j} = 0 \qquad (j = 1, 2, 3, \ldots m). \quad (3.13)$$

В качестве примера рассмотрим оценку методом наибольшего правдоподобия параметров нормального распределения (см. п. 4.1) для которого функция плотности вероятности имеет вид

$$f(x) = [1/(\sigma_x \sqrt{2\pi})]\, \exp[-(x - m_x)^2/(2\sigma_x^2)], \quad (3.14)$$

где m_x и σ_x – искомые параметры распределения.

Образуем функцию правдоподобия, но предварительно найдем логарифм функции $f(x)$:

$$\ln f(x) = -\ln\sigma - 0{,}5\ln(2\pi) - \left(1/2\sigma^2\right)(x_i - m_x)^2, \quad (3.15)$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \ln f(x) = -\sum_{i=1}^{n} \ln\sigma - 0{,}5\sum_{i=1}^{n} \ln(2\pi) - (1/2\sigma^2)\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 . \quad (3.16)$$

Далее находим уравнение правдоподобия применительно к оценке параметра m_x

$$\frac{\partial L}{\partial m_x} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x) = 0 . \quad (3.17)$$

откуда, учитывая, что $\sum_{i=1}^{n} m_x = nm_x$, получаем

$$m_x^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i . \quad (3.18)$$

Таким образом, статистической оценкой параметра m_x (математического ожидания) в данном случае является среднее арифметическое значение ряда (x_1, x_2, x_3, … , x_n).

Для получения оценки параметра $\boldsymbol{\sigma_x}$ образуем новое уравнение правдоподобия

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 - \frac{n}{\sigma} = 0 , \quad (3.19)$$

откуда получим выражение для СКО:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2}{n}} , \quad (3.20)$$

Из приведенного анализа следует, что применительно к нормальному закону распределения оценки параметров, полученные методом наибольшего правдоподобия, совпадают с моментными оценками. Для других распределений такое совпадение не является обязательным.

В качестве особенностей метода наибольшего правдоподобия (МНП) можно отметить то, что в нем наибольший вес придается средним членам выборки, имеющим наибольшую вероятность, в отличие от метода моментов, где самый большой вклад вносят крайние члены. МНП дает состоятельные и наиболее эффективные оценки. Полученные по этому методу оценки могут быть незначительно смещены, но это смещение легко устраняется путем введения соответствующих поправок. Однако перечисленные свойства проявляются только в случае достаточно больших выборок, при малых n с оценкам МНП могут конкурировать другие оценки.

К недостаткам метода можно отнести то, что для его применения необходимо точно знать аналитическое выражение закона распределения, что в гидрологической практике не всегда возможно. К тому же не для всех законов распределений удается получить решение в аналитическом виде и определение максимума функции правдоподобия приходится производить численными методами или строить вспомогательные номограммы.

Примеры расчета оценок параметров распределения методом наибольшего правдоподобия приводятся в разделе 4.

3.3. Метод наименьших квадратов (МНК)

При оценке параметров распределения методом наименьших квадратов необходимо заранее знать тип функции распределения.

Для реализации метода исходный ряд ранжируется в убывающем порядке, и определяются ординаты эмпирической кривой обеспеченностей.

Суть метода наименьших квадратов состоит в том, чтобы найти минимум функционала

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^{n} \left[P_i^* - P(x_i^*, a, b, c) \right]^2 \to \min, \qquad (3.21)$$

где x_i^* – i-тое значение случайной переменной в ранжированном ряду; P_i^* – эмпирическая обеспеченность i-того члена ранжированного ряда; $P(x, a, b, c)$ – аналитическая функция обеспеченностей с неизвестными параметрами a, b и c.

Для того, чтобы найти минимум Φ_1 необходимо рассчитать частные производные Φ_1 по каждому параметру и решить систему уравнений:

$$\partial\Phi_1 / \partial a = 0; \quad \partial\Phi_1 / \partial b = 0; \quad \partial\Phi_1 / \partial c = 0. \qquad (3.22)$$

Найденные таким образом параметры распределения a, b и c будут соответствовать аналитической кривой, для которой сумма квадратов отклонений эмпирических обеспеченностей будет минимальной.

Возможен и другой вариант – можно искать минимум функционала

$$\Phi_2 = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i^* - x(P_i^*, a, b, c) \right]^2 \to \min, \quad (3.23)$$

где $x(P, a, b, c)$ – обратная функция обеспеченностей.

В этом случае необходимо решить систему уравнений:

$$\partial\Phi_2 / \partial a = 0; \;\; \partial\Phi_2 / \partial b = 0; \;\; \partial\Phi_2 / \partial c = 0. \quad (3.24)$$

Найденные с использованием этой системы уравнений параметры a, b и c будут соответствовать аналитической кривой, для которой минимизирована сумма квадратов отклонений выборочных значений исследуемой переменной.

Недостатком метода является то, что для многих распределений системы уравнений (3.22) и (3.24) являются нелинейными и при их решении возникают вычислительные трудности.

Наиболее удобно использовать метод наименьших квадратов для некоторых двухпараметрических распределений, которые можно легко линеаризовать. Например, функция обеспеченностей двухпараметрического распределения Вейбулла (см. п. 4.7) имеет вид:

$$P(x) = \exp\left\{ -\left(x/a \right)^b \right\}, \quad (3.25)$$

где a – коэффициент масштаба, $a > 0$; b – коэффициент формы, $b > 0$; $0 \le x < \infty$.

Логарифмируя левую и правую часть выражения (3.25) получаем

$$(-\ln P)^{1/b} = \frac{x}{a}. \quad (3.26)$$

Вновь логарифмируем левую и правую часть выражения (3.26):

$$\frac{1}{b} \ln(-\ln P) = \ln x - \ln a. \quad (3.27)$$

Из выражения (3.27) следует

$$y = bz - g, \quad (3.28)$$

где y, z и g определяются по формулам:

$$y = \ln(-\ln P), \quad (3.29)$$

$$z = \ln x, \quad (3.30)$$

$$g = b \ln a. \quad (3.31)$$

Как видно из выражения (3.28), для новых переменных y и z связь является линейной и параметры b и g можно легко найти методом наименьших квадратов.

Переход от параметра g к параметру a производится по формуле, которая следует из (3.31):

$$a = \exp(g / b). \tag{3.32}$$

Используя полученные параметры распределения a и b по выражению (3.25) можно построить аналитическую кривую обеспеченностей.

При необходимости от естественных параметров распределения можно перейти к моментным оценкам. Для двухпараметрического распределения Вейбулла математическое ожидание и дисперсия связаны с естественными параметрами распределения формулами

$$m_x = a\Gamma(1+1/b), \tag{3.33}$$

$$D_x = a^2\Gamma(1+2/b) - m_x^2, \tag{3.34}$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

В данном случае мы получили параметры a и b, при которых минимизируется разброс точек относительно аналитической кривой для значений эмпирических обеспеченностей. Если требуется минимизировать разброс самих выборочных значений исследуемой переменной, то вместо зависимости $y = f(z)$ следует рассматривать зависимость $z = f(y)$, в этом случае наибольший вес будут иметь максимальные значения исследуемого ряда.

Метод будет давать хорошие результаты, если выбранная двухпараметрическая кривая хорошо согласуется с эмпирическими данными. Это можно проверить еще на этапе обработки данных, построив эмпирическую кривую обеспеченностей для линеаризованных переменных y^* и z^* – необходимо чтобы после линеаризации эмпирические точки лежали на прямой линии, а сама зависимость имела высокий коэффициент корреляции.

Следует также отметить, что при использовании МНК имеет значение по какой формуле рассчитывались эмпирические обеспеченности (см. раздел 2).

Примеры расчета оценок параметров распределения методом наименьших квадратов приводятся в разделах 4 и 5.

3.4. Метод L-моментов

Подход, основанный на теории *L*-моментов, был впервые предложен в 1989 году Уоллисом [34] и затем развит в работах Хоскинга и Уоллиса [28,29]. В настоящее время оценка параметров распределения с использованием метода *L*-моментов рассматривается многими исследователями как альтернатива классическому методу моментов.

В руководстве ВМО [7] отмечается: «Одним из последних методологических достижений является использование метода *L*-моментных статистик, показавшим существенное улучшение по сравнению с более традиционным методом максимального правдоподобия или методом моментов».

К основным достоинствам метода *L*-моментов относят то, что если распределение имеет первый начальный момент, то *L*-моменты всегда существуют, даже если речь идет о распределениях с «тяжелыми хвостами» (см. п. 4.9, 4.10). Кроме того выборочные оценки *L*-моментов являются несмещенными и более эффективными по сравнению с обычными моментными оценкам, при этом они не зависят от типа распределения.

Выборочные *L*-моменты определяются по формулам:

$$l_1 = b_0 \tag{3.35}$$

$$l_2 = 2b_1 - b_0 \tag{3.36}$$

$$l_3 = 6b_2 - 6b_1 + b_0 \tag{3.37}$$

$$l_4 = 20b_3 - 30b_2 + 12b_1 - b_0 \tag{3.38}$$

где b_0, b_1, b_2, b_3 – выборочные несмещенные оценки вероятностно взвешенных моментов [31], определяемые по ранжированной (в порядке возрастания) выборке длиной n:

$$b_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i \tag{3.39}$$

$$b_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{i=n} \frac{(i-1)}{(n-1)} x_i \tag{3.40}$$

$$b_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=3}^{i=n}\frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)}x_i \qquad (3.41)$$

$$b_r = \frac{1}{n}\sum_{i=r+1}^{i=n}\frac{(i-1)(i-2)...(i-r)}{(n-1)(n-2)...(n-r)}x_i \qquad (3.42)$$

где i – порядковый номер переменной x в ранжированном (по возрастанию) ряду.

В теории L-моментов используются также L-моментные отношения, которые являются аналогами соответственно коэффициента вариации, коэффициента асимметрии и эксцесса:

выборочный коэффициент L-вариации: $t_2 = l_2/l_1$ (3.43)

выборочный коэффициент L-асимметрии: $t_3 = l_3/l_2$ (3.44)

выборочный L-эксцесс: $t_4 = l_4/l_2$ (3.45)

Пример 3.1. Рассчитать выборочные L-моменты и L-моментные отношения для ряда максимальных расходов по реке Льста – д. Глазатово за период с 1967 по 1986 гг. (табл. 3.1, столбцы 2-3).

Решение

1. Ранжируем исходный ряд в порядке возрастания (столб. 4).
2. Для каждого члена ранжированного ряда определяем $\frac{(i-1)}{(n-1)}Q_i$, $\frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)}Q_i$, $\frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}Q_i$ и записываем значения соответственно в столбцы 5,6,7.
3. Находим сумму для столбцов 4, 5, 6 и 7.
4. По формулам (3.39-3.42) определяем параметры b_0, b_1, b_2, b_3. Результаты записываем в последнюю строку таблицы.
5. По формулам (3.35-3.38) рассчитываем выборочные L-моменты. Результаты записываем в столбцы 1, 2, 3, 4 таблицы 3.2.
6. По формулам (3.43-3.45) рассчитываем L-моментные отношения t_2, t_3, t_4 (столб. 5-7 таблицы 3.2).

Таблица 3.1

Пример расчета выборочных оценок вероятностно взвешенных моментов

№	год	*Расход воды, м³/с*		$\frac{(i-1)}{(n-1)}Q_i$	$\frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)}Q_i$	$\frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}Q_i$
		Q	$Q_{\text{ранж}}$			
1	1967	12,2	7,55	0,00	0,00	0,00
2	1968	22,6	7,55	0,40	0,00	0,00
3	1969	13,5	8,33	0,88	0,05	0,00
4	1970	12,5	8,74	1,38	0,15	0,009
5	1971	12,3	8,89	1,87	0,31	0,037
6	1972	8,89	10,5	2,76	0,61	0,11
7	1973	7,55	11,4	3,60	1,00	0,24
8	1974	8,33	11,6	4,27	1,42	0,42
9	1975	7,55	12,2	5,14	2,00	0,71
10	1976	12,7	12,3	5,83	2,59	1,07
11	1977	17,3	12,5	6,58	3,29	1,55
12	1978	14,8	12,7	7,35	4,08	2,16
13	1979	11,6	12,7	8,02	4,90	2,88
14	1980	8,74	13,5	9,24	6,16	3,98
15	1981	10,5	13,8	10,17	7,34	5,18
16	1982	12,7	14,8	11,68	9,09	6,95
17	1983	19,7	16,4	13,81	11,51	9,48
18	1984	13,8	17,3	15,48	13,76	12,14
19	1985	11,4	19,7	18,66	17,63	16,59
20	1986	16,4	22,6	22,60	22,60	22,60
Сумма			$\Sigma_0 = 255{,}1$	$\Sigma_1 = 149{,}7$	$\Sigma_2 = 108{,}5$	$\Sigma_3 = 86{,}10$
$\frac{\Sigma}{n}$			$b_0 = 12{,}75$	$b_1 = 7{,}486$	$b_2 = 5{,}425$	$b_3 = 4{,}305$

Таблица 3.2

Выборочные *L*-моменты и *L*-моментные соотношения

L-моменты				Коэффициенты		
l_1	l_2	l_3	l_4	*L-вариации* t_2	*L-асимметрии* t_3	*L-эксцесса* t_4
12,75	2,219	0,387	0,429	0,174	0,174	0,193

В работе [29] приводятся формулы, связывающие естественные параметры распределения с *L*-моментами для некоторых типов распределений, используемых в гидрологической практике.

Примеры расчета оценок параметров распределения методом *L*-моментов приводятся в разделе 4.

3.5. Метод квантилей (графоаналитический метод)

Суть метода квантилей состоит в том, что мы приравниваем теоретические квантили их эмпирическим значениям.

Для реализации метода строится эмпирическая кривая обеспеченностей, и затем в поле точек проводится сглаженная кривая.

По сглаженной кривой обеспеченностей определяются несколько опорных ординат (рис. 3.1).

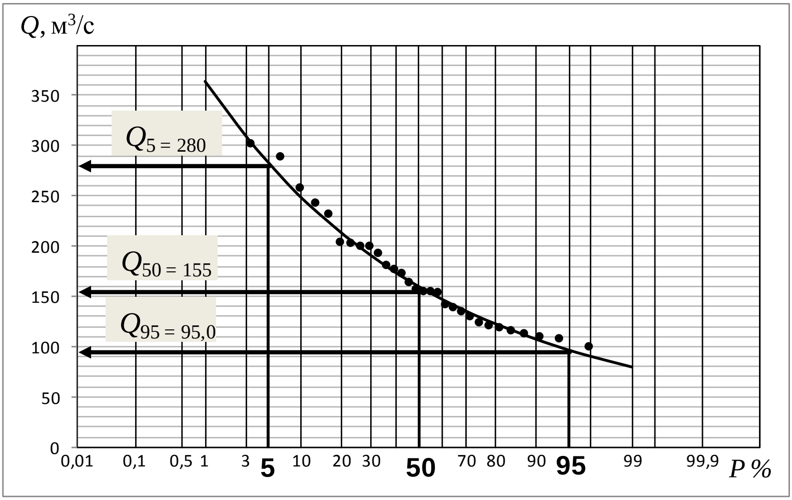


Рис. 3.1. Схема определения опорных ординат по сглаженной эмпирической кривой обеспеченностей.

Если в качестве аналитической кривой используется двухпараметрический закон распределения – требуется получить две ординаты. Если в качестве аналитической кривой используется трехпараметрический закон распределения – требуется получить три ординаты.

Если требуется две опорные ординаты, то обычно берут значения для обеспеченностей p% и (100 – p%), например: 5% и 95%, или 10% и 90%.

Если требуется три опорные ординаты, то дополнительно, как правило, берут медиану ($x_{50\%}$).

Дальнейший расчет сводится к тому, чтобы найти такие значения параметров распределения, при которых аналитическая кривая будет проходить через точки $x_{p\%}$, $x_{50\%}$, $x_{(100-p)\%}$.

Основным недостатком метода является, то, что при проведении сглаженной кривой обеспеченностей имеет место элемент субъективизма.

Оценку эмпирических квантилей иногда выполняют и без построения сглаженной эмпирической кривой обеспеченностей. В этом случае эмпирические квантили определяются на основе формальной интерполяции по эмпирическим данным. Такая процедура может быть выполнена, например, с помощью статистической функции табличного редактора Excel: ПЕРСЕНТИЛЬ(XN:XK; P), где XN:XK – диапазон ячеек, где расположен анализируемый ряд; P – вероятность непревышения. Однако такой подход может приводить к значительным ошибкам, так как крайние точки ранжированной выборки (например, $x_{5\%}$ и $x_{95\%}$) могут существенно отклоняться от аналитической кривой обеспеченностей, а при формальной интерполяции аналитическая кривая искусственно подтягивается к этим точкам.

Действующие в настоящее время нормативные документы, допускают использование метода квантилей только на ранних стадиях проектирования.

Примеры расчета оценок параметров распределения методом квантилей приводятся в разделе 4.

3.6. Графический метод

При использовании графического метода для расчета оценок параметров распределения необходимо заранее знать, какая из аналитических кривых будет использована для аппроксимации закона распределения исследуемой СВ.

Этот метод может применяться как для двухпараметрических, так и для трехпараметрических кривых распределения.

При использовании трехпараметрической кривой на первом этапе применяется набор спрямляющих клетчаток выбранного теоретического распределения для различных сочетаний C_s и C_v.

На каждой клетчатке строится эмпирическая кривая обеспеченностей в модульных коэффициентах. В качестве расчетного значения принимается такое соотношение C_s/C_v, при котором на соответствующей клетчатке эмпирическая кривая обеспеченностей превращается в прямую линию (рис. 3.2).

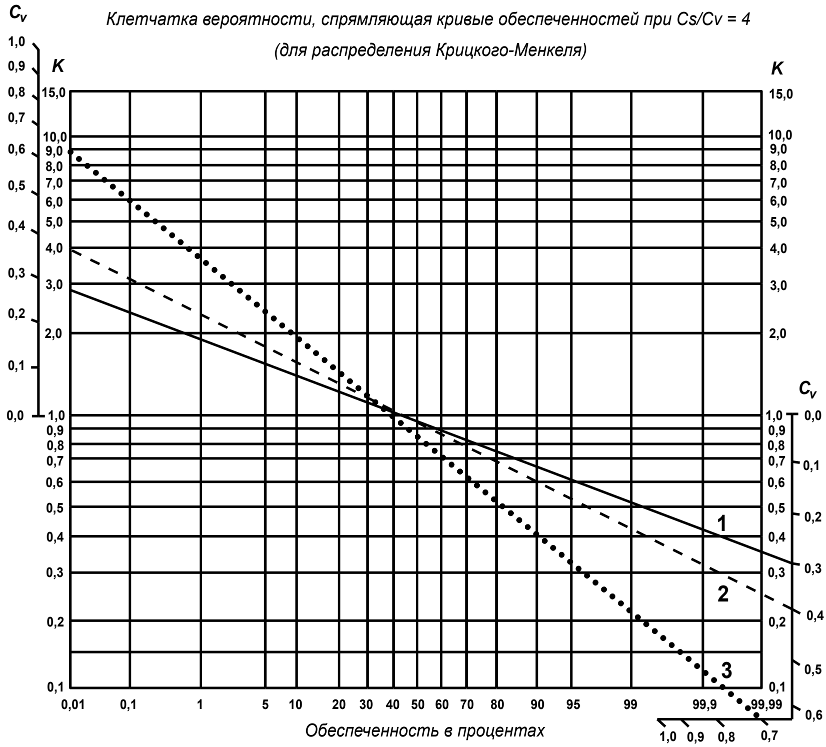


Рис. 3.2. Положение кривых обеспеченностей на спрямляющей клетчатке при различных значениях коэффициента вариации;
1 – $C_v = 0{,}30$; 2 – $C_v = 0{,}40$; 3 – $C_v = 0{,}70$.

Наклон прямой линии, в которую превращается кривая обеспеченностей на спрямляющей клетчатке, зависит от коэффициента вариации. С учетом этого на клетчатке вероятности можно построить шкалу C_v. Обычно для контроля такая шкала наносится в левом верхнем и правом нижнем углах клетчатки. В качестве расчетного C_v^* принимается такое значение, при котором отсчеты по верхней и нижней шкалам совпадают и при этом аппроксимирующая прямая достаточно хорошо соответствует эмпирическим точкам.

Таким образом, графический метод позволяет найти оценки коэффициента вариации и соотношения C_s/C_v. Оценка МО рассчитывается аналитически по формуле (3.3).

Метод позволяет оценить C_v с меньшей точностью, чем аналитические методы. В то же время оценка C_s/C_v может оказаться более надежной, поскольку при использовании аналитических методов в случае короткой выборки несколько «тяжелых» точек могут существенно исказить оценку отношения C_s/C_v.

При использовании двухпараметрических распределений C_s либо однозначно определяется коэффициентом вариации, либо является константой и требуется только одна клетчатка. Если эмпирические точки на такой клетчатке лягут в виде прямой линии, расчет C_v производится по изложенной выше схеме. Если точки будут образовывать вогнутую или выпуклую линии, то следует сделать вывод о том, что данная двухпараметрическая кривая не подходит для аппроксимации закона распределения исследуемой случайной величины.

3.7. Оценка погрешностей параметров распределения

Оценка параметра распределения некоторой СВ X, полученная по выборке тем или иным методом, сама представляет собой случайную величину, обладающую определенным разбросом. Имеется в виду, что можно получить сколько угодно выборок объемом n из одной и той же генеральной совокупности, и все они будут давать различные значения оцениваемого параметра. Поэтому точечная оценка параметра G в виде конкретного значения G^* не дает полного представления об искомом параметре без оценки погрешности ее вычисления. Мерой случайной погрешности для выборочного параметра G^* может служить среднеквадратическое отклонение – σ_G (абсолютная погрешность) или относительная погрешность $\varepsilon_G = (\sigma_G/G)100\%$. Заметим, что иногда вместо термина «погрешность» используется термин «ошибка», а также термины «стандартная погрешность» и «стандартная ошибка»

Формулы для расчета погрешностей зависят от того, каким методом производилась оценка параметра. Рассмотрим формулы, которые используются при расчете числовых характеристик методом моментов.

Абсолютная погрешность выборочного среднего определяется по формуле

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma \big/ \sqrt{n}\ , \tag{3.46}$$

где σ – СКО выборки; n – объем выборки (длина ряда).

Относительная погрешность выборочного среднего:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{\sigma_{\bar{x}}}{x} \cdot 100 = \frac{\sigma}{x\sqrt{n}} \cdot 100 = \frac{C_v}{\sqrt{n}} \cdot 100\ \%\ , \tag{3.47}$$

где C_v – выборочный коэффициент вариации.

Для расчета абсолютной и относительной погрешностей коэффициента вариации используются формулы

$$\sigma_{C_v}\ \frac{C_v \sqrt{1 + aC_v^2}}{\sqrt{2n}}\ , \tag{3.48}$$

$$\varepsilon_{C_v} = \frac{\sqrt{1 + aC_v}}{\sqrt{2n}} \cdot 100\ \%\ , \tag{3.49}$$

где $a = 2$ для нормального распределения и $a = 1$ для двухпараметрического гамма-распределения.

Напомним, что у двухпараметрического гамма-распределения соотношение $C_s/C_v = 2$, а у нормального распределения $C_s = 0$. Так как гидрологические ряды имеют, как правило, умеренную положительную асимметрию, эти формулы рекомендуется использовать при $a = 1$.

Помимо формулы (3.48) в российской гидрологической практике достаточно широкое распространение получила формула Е.Г. Блохинова:

$$\sigma_{C_v} = \frac{C_v}{n + 4C_v^2} \sqrt{\frac{n(1 + C_v^2)}{2}}\ , \tag{3.50}$$

$$\varepsilon_{c_v} = \frac{1}{n+4C_v^2}\sqrt{\frac{n(1+C_v^2)}{2}}100\% . \qquad (3.51)$$

Данная формула также получена для двухпараметрического гамма-распределения путем введения эмпирической поправки в формулу (3.48).

Для оценки погрешности коэффициента асимметрии предложены следующие формулы.

Формула С. Н. Крицкого и М. Ф. Менкеля

$$\sigma_{c_s} = \sqrt{(6/n)(1+6C_v^2+5C_v^4)} , \qquad (3.52)$$

$$\varepsilon_{c_s} = \frac{1}{C_s}\sqrt{(6/n)(1+6C_v^2+5C_v^4)}100\ \% ; \qquad (3.53)$$

Формула А. Ш. Резниковского

$$\sigma_{c_s} = \sqrt{(6/n)(1+C_v^2)} , \qquad (3.54)$$

$$\varepsilon_{c_s} = \frac{1}{C_s}\sqrt{(6/n)(1+C_v^2)}100\ \% . \qquad (3.55)$$

Формулы (3.52) и (3.54) разработаны для случая $C_s = 2C_v$, причем формула (3.52) получена теоретическим путем, а формула (3.54) на основании материалов статистического моделирования.

Для распределений, у которых коэффициент асимметрии близок к нулю, формулы (3.53) и (3.55) не применимы, так как множитель $1/C_s$ стремится к бесконечности. В этом случае относительная погрешность C_s вообще не вычисляется.

Если заранее известно, что гидрологическая характеристика имеет асимметрию близкую к нулю для расчета стандартной ошибки коэффициента асимметрии можно рекомендовать формулу:

$$\sigma_{C_s} = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n+3)(n+1)(n-2)}} . \qquad (3.56)$$

Стандартная ошибка эксцесса в первом приближении может быть рассчитана по формуле, разработанной для нормального распределения:

$$\sigma_э = \sqrt{\frac{24n(n-1)^2}{(n+5)(n+3)(n-2)(n-3)}}\,. \qquad (3.57)$$

Следует подчеркнуть, что все представленные формулы, за исключением формул (3.46-3.47), следует рассматривать как приближенные, так они не являются универсальными, а получены для конкретных законов распределения (либо нормального, либо гамма-распределения).

Если гидрологический ряд соответствует модели случайной величины, то действующие в настоящее время нормативные документы рекомендуют для оценки погрешностей среднего значения и коэффициента вариации формулы (3.46-3.47) и (3.50-3.51).

Если для описания вероятностной структуры гидрологического ряда используется модель авто-регрессии I порядка, то формулы (3.47) и (3.51) приобретают вид [11]:

$$\varepsilon_{\bar{x}} = \frac{C_v}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{1+r}{1-r}}100\%\,, \qquad (3.58)$$

$$\varepsilon_{Cv} = \frac{1}{n+4C_v^2}\sqrt{\frac{n(1+C_v^2)}{2}}\left(1+\frac{3C_v r^2}{1+r}\right)100\%\,. \qquad (3.59)$$

где r – коэффициент автокорреляции.

В случае если расчет числовых характеристик выполнялся методом наибольшего правдоподобия, для приближенной оценки погрешности коэффициента вариации в настоящее время рекомендуется применять формулы:

$$\sigma_{Cv} = \frac{C_v}{\sqrt{2n}}\sqrt{\frac{3}{3+C_v^2}}\,, \qquad (3.60)$$

$$\varepsilon_{Cv} = \sqrt{\frac{3}{2n(3+C_v^2)}}\,100\,\%\,. \qquad (3.61)$$

В гидрологической практике принято считать, что расчет параметров распределения выполнен надежно, если погрешности среднего значения и коэффициента вариации для характеристик годового стока не превышают 10%, а для характеристик экстремального стока 20%.

При использовании метода квантилей абсолютные и относительные погрешности параметров распределения не рассчитываются. Критерием правильности подбора аналитической кривой в этом случае служит условие выполнения неравенства

$$\left|\bar{x} - \bar{x}_{\text{г}}\right| < 0{,}02\bar{x}, \tag{3.62}$$

где x – среднее значение ряда, полученное по выборке; $x_{\text{г}}$ – среднее значение, полученное путем расчета графоаналитическим методом.

При выполнении неравенства (3.62) предполагается, что оценка параметров аналитической кривой обеспеченностей произведена с достаточной точностью.

4. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ КРИВЫХ ОБЕСПЕЧЕННОСТЕЙ

Во многих случаях в качестве математической модели для описания гидрометеорологических явлений может использоваться случайная величина. В частности, в качестве СВ можно рассматривать среднегодовой расход воды, тогда среднегодовые расходы за отдельные годы, например за 30 лет, следует трактовать как последовательность значений СВ, полученную в результате 30 природных опытов.

Точно так в качестве СВ могут рассматриваться максимальный и минимальный расходы воды, годовая сумма осадков, снегозапасы на водосборе и т. д. Кроме того, в качестве случайных величин рассматриваются погрешности измерений гидрометеорологических характеристик (уровня воды, расхода, слоя осадков и т. д.), а также ошибки расчета различных числовых параметров, определяемых по эмпирическим данным.

Как уже отмечалось, каждая случайная величина исчерпывающим образом характеризуется своим законом распределения. Аналитическим выражением закона распределения является функция распределения (дифференциальная или интегральная), которую записывают в виде параметрического выражения, где в качестве параметров обычно используют числовые характеристики случайной величины (МО, СКО и т.д.). При такой записи для каждого значения СВ соответствующее значение функции распределения однозначно определяется параметрами аналитического выражения (параметрами распределения).

В гидрологической практике, как правило, рассматриваются случайные величины, функции распределения которых, зависят от небольшого числа параметров – обычно двух или трех.

При этом в одних ситуациях, закон распределения можно вывести из теоретических соображений, в других – он неизвестен, и аналитическое выражение функции распределения является лишь аппроксимацией истинного распределения. В последнем случае можно предложить несколько аналитических выражений, и исследователь вынужден производить выбор подходящего, опираясь на практический опыт и некоторые априорные соображения.

Ниже рассматриваются аналитические функции распределения, наиболее часто используемые в практике гидрологических расчетов.

4.1. Нормальное распределение (распределение Гаусса)

В природе и различных областях человеческой деятельности весьма распространены СВ, которые представляют собой сумму большого числа независимых или слабо зависимых СВ, дисперсии которых малы по сравнению с дисперсией всей суммы. Как следует из центральной предельной теоремы [1,5], распределение таких СВ при весьма общих дополнительных условиях хорошо аппроксимируется нормальным распределением. Этим объясняется весьма широкое распространение последнего. Нормальное распределение применяется и в тех случаях, когда истинный закон распределения известен, но вычисления по этому закону затруднены, а аппроксимация его нормальным законом не приводит к большим ошибкам.

Функция плотности вероятности нормального распределения определяется выражением

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right], \tag{4.1}$$

где π – число Пи. Таким образом, в общем случае нормальное распределение является двухпараметрическим, т. е. зависит от двух параметров : математического ожидания (m_x) и среднеквадратического отклонения (σ_x).

График плотности вероятности нормального распределения представлен на рис. 4.1. Как видно на рисунке, нормальное распределение является симметричным и, следовательно, для него коэффициент асимметрии равен нулю ($C_s = 0$), а мода, медиана и МО совпадают. Область возможных значений СВ, подчиняющейся нормальному распределению – интервал (– ∞, + ∞).

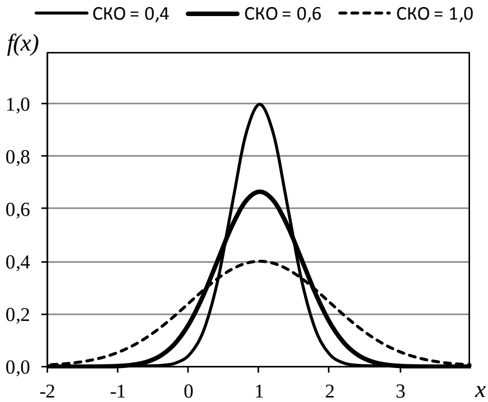


Рис. 4.1. Вид функции плотности вероятности нормального закона распределения при различных значениях среднеквадратического отклонения и $m_x = 1$.

Интегральная функция распределения нормального закона имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\exp\frac{-(z-m_x)^2}{2\sigma_x^2}dz\,. \qquad (4.2)$$

где z – переменная интегрирования.

Интеграл, стоящий в правой части выражения (4.2), нельзя выразить через элементарные функции, поэтому ординаты нормального закона распределения обычно представляют в виде таблиц. Чтобы не публиковать множество таблиц, для различных сочетаний m_x и σ_x**,** вместо СВ X рассматривают нормированную СВ t (табл. 4.1), значения которой связаны со значениями X формулой (1.20).

Так как у нормированной СВ t : $m_t = 0$ и $\sigma_t = 1$, функции распределения для нее с учетом формул (4.1) – (4.2), будут определяться выражениями

$$f(x) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\exp\left(-t^2/2\right), \qquad (4.3)$$

$$F(x) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\int_{-\infty}^{t}\exp(-z^2/2)dz\,. \qquad (4.4)$$

Таблица 4.1

Квантили нормированной нормально распределенной случайной величины *t* (значения *F*(*t*) даны в %)

F(t)	*t*	*F(t)*	*t*	*F(t)*	*t*
0,01	–3,72	20	–0,84	90	1,28
0,1	–3,09	25	–0,67	95	1,64
0,5	–2,58	30	–0,52	97	1,88
1	–2,33	40	–0,25	97,5	1,96
2	–2,02	50	0,00	98	2,02
2,5	–1,96	60	0,25	99	2,33
3	–1,88	70	0,52	99,5	2,58
5	–1,64	75	0,67	99,9	3,09
10	–1,28	80	0,84	99,99	3,72

Переход от нормированных значений случайной величины к исходным в соответствии с выражением (1.20) производится по формуле

$$x_p = t_p \sigma_p + m_x, \tag{4.5}$$

а для модульных коэффициентов по формуле

$$k_p = t_p C_v + 1. \tag{4.6}$$

Пример 4.1. Известно, что СВ *X* подчиняется нормальному распределению с параметрами m_x = 10, σ_x = 5. Требуется определить значение x'_p, соответствующее вероятности непревышения 95% (т.е. при *F*(*x*) = 95 %).

Решение.

1. По табл. 4.1 определяем 95%-ный квантиль нормированной СВ *t*: t'_{95} = 1,64.
2. По формуле (4.5) определяем x'_{95} = 1,64 · 5 + 10 = 18,2.

Пример 4.2. Для СВ *X* из предыдущего примера требуется определить значение x_p, соответствующее вероятности превышения 1 % (при *P*(*x*) = 1 %).

Решение.

1. Так как в табл. 4.1 приводятся ординаты интегральной функции распределения (а не функции обеспеченностей), сначала определяем соответствующую вероятность непревышения для нормированной СВ *t*: $F(t) = 100 - P(t) = 100 - 1 = 99\,\%$.

2. По табл. 4.1 определяем 99%-ный квантиль нормированной СВ t: $t'_{99} = 2{,}33$.

3. По формуле (4.5) определяем: $x_1 = x'_{99} = 2{,}33 \cdot 5 + 10 = 21{,}65$.

Несмотря на широкое распространение, нормальное распределение не универсально. В частности, если в качестве СВ рассматривать среднегодовые расходы воды, то налицо два несоответствия.

Расходы воды всегда положительны, а область возможных значений для нормальной СВ определяется интервалом ($-\infty$, $+\infty$).

Для нормального закона распределения $C_s = 0$, а распределение среднегодовых расходов воды (и целого ряда других гидрологических характеристик), как правило, имеет умеренную положительную асимметрию.

Тем не менее, некоторые гидрологические характеристики неплохо аппроксимируются нормальным распределением, например – среднегодовые уровни некоторых озер (рис. 4.2).

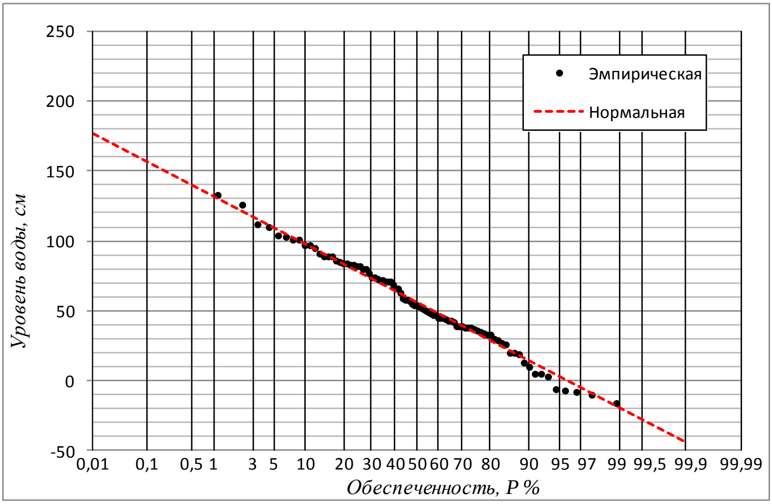


Рис. 4.2. Кривая обеспеченностей среднегодовых уровней Чудского озера на клетчатке с умеренной асимметричностью («0» графика 30 м. БС).

Как уже отмечалось (п. 3.2) для нормального закона распределения оценки параметров для метода моментов и метода наибольшего правдоподобия совпадают. Поэтому при использовании нормальной кривой обеспеченностей расчет параметров распределения производится по формулам (3.3), (3.6).

4.2. Логнормальное распределение

Многие гидрологические переменные, которые можно рассматривать как случайные величины, обладают правой, т.е. положительной асимметрией. Это объясняется тем, что гидрологические величины обычно превышают ноль либо некоторый другой нижний предел, но теоретически не ограничены верхним пределом. В таких случаях распределение случайной величины не соответствует нормальному закону.

Однако часто асимметричное распределение можно привести к нормальному путем замены переменной на ее логарифм.

Неотрицательная СВ X называется распределенной логарифмически нормально, если ее логарифм $Z = \ln(X)$ распределен по нормальному закону.

Интегральная функция распределения для СВ X в этом случае имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ F(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{u} \exp \dfrac{-s^2}{2} ds & \text{при} \quad x > 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

где $u = (z - m_z)/\sigma_z$; $z = \ln(x)$; s – переменная интегрирования.

Дифференцируя выражение (4.7), получим функцию плотности вероятности логнормального распределения (рис.4.3):

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0 \\ \dfrac{1}{\sigma_z x} f(u) = \dfrac{1}{\sigma_z x\sqrt{2\pi}} \exp\left(\dfrac{-u^2}{2}\right) & \text{при} \quad x > 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Таким образом, данное распределение определяется двумя параметрами: m_z и σ_z. Величина m_z представляет собой МО случайной величины Z, а σ_z – ее среднеквадратическое отклонение.

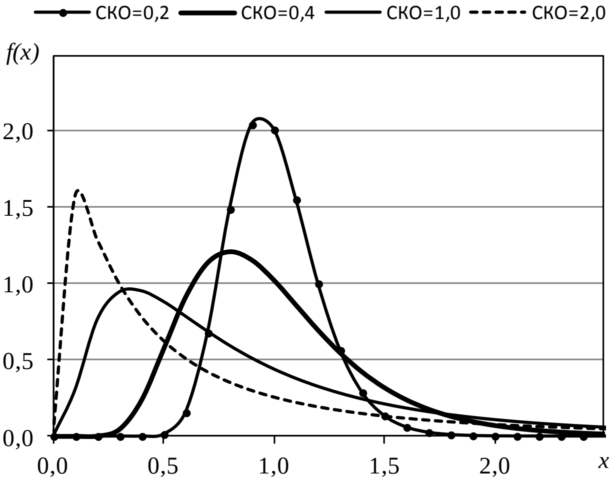


Рис. 4.3. Вид функции плотности вероятности логнормального закона распределения при различных значениях СКО и $m_x = 1$.

Дисперсия, СКО и МО случайных величин X и Z связаны соотношениями

$$D_z = \sigma_z^2 = \ln\left(\frac{\sigma_x^2}{m_x^2} + 1\right) \tag{4.9}$$

$$m_z = \ln(m_x) - \frac{\sigma_z^2}{2} = \ln(m_x) - \frac{\ln\left(\sigma_x^2 / m_x^2 + 1\right)}{2}. \tag{4.10}$$

Если закон распределения СВ X неизвестен и логнормальное распределение используется для аппроксимации истинного распределения X, то значения m_z и σ_z для СВ Z могут отличаться от m_z и σ_z , полученных по формулам (4.9), (4.10) через m_x и σ_x. При этом расхождение будет тем больше, чем больше отклонение истинного распределения СВ X от логнормального.

Поскольку в гидрологической практике истинное распределение анализируемой СВ, как правило, не известно, то допускается два варианта расчета:

1. оценка m_z и σ_z производится по ряду значений СВ Z;
2. по ряду значений СВ X производится оценка m_x и σ_x, а затем по формулам (4.9), (4.10) определяются m_z и σ_z.

Коэффициент асимметрии логарифмически нормального распределения определяется по формуле

$$C_s = 3C_v + C_v^3, \tag{4.11}$$

где $C_v = \sigma/m_x$. Так как для большинства гидрологических переменных $C_v < 1$, то наиболее хорошего соответствия эмпирических данных с логнормальным распределением можно ожидать при C_s/C_v = 3,0-3,5.

Мода и медиана для СВ X, имеющей логнормальное распределение, определяются равенствами

$$Mo = \exp(m_z - \sigma_z^2), \tag{4.12}$$

$$Me = \exp(m_z). \tag{4.13}$$

Для определения ординат кривой обеспеченностей логнормального закона используют таблицы стандартного нормального распределения, но в качестве случайной величины рассматривают $Z = \ln(X)$.

В практике гидрологических исследований логнормальное распределение наиболее часто используется при расчетах максимального паводочного стока. Такая практика имеет место в Болгарии, Великобритании, России, США, Японии и ряде других стран.

Пример 4.3. Определить максимальный расход весеннего половодья однопроцентной обеспеченности (Q_1) на реке Паша в створе д. Дубово (табл. 4.2.), используя логнормальный закон распределения. Привести два варианта решения.

Таблица 4.2

Год	Q	$\ln(Q)$
1941	244	5,497
1942	272	5,606
1943	800	6,685
1944	302	5,710
1945	300	5,704
1946	736	6,601
1947	786	6,667
1948	412	6,021
1949	309	5,733
1950	228	5,429
1951	329	5,796
1952	417	6,033
1953	391	5,969
1954	267	5,587
1955	587	6,375
1956	488	6,190
1957	446	6,100
1958	395	5,979
1959	440	6,087
1960	268	5,591
1961	370	5,914
1962	452	6,114
1963	332	5,805
1964	418	6,035
1965	374	5,924
1966	569	6,344
1967	239	5,476
1968	260	5,561
1969	385	5,953
1970	407	6,009
1971	288	5,663
1972	500	6,215
$\overline{Q}$	407	5,949
σ	152	0,339
C_s	1,30	

Решение 1.

1. Проводим преобразование исходного ряда по формуле: $z_i = \ln Q_i$.
2. По ряду значений СВ Z рассчитываем оценки m_z и σ_z (в примере расчет выполнен методом моментов). Получаем: $m_z \approx 5{,}949$; $\sigma_z \approx 0{,}339$.
3. Так как таблица стандартного нормального распределения (см. табл.4.1) приводится для интегральной функции распределения, заменяем обеспеченность на вероятность непревышения: $F(t) = 100 - P(t) = 100 - 1 = 99$ % .
4. По табл. 4.1 определяем 99 %-ный квантиль нормированной нормально распределенной СВ t: $t'_{99} = 2{,}33$.
5. По формуле (4.5) определяем z_1: $z_1 = z'_{99} = \sigma_z t'_{99} + m_z = 2{,}33 \cdot 0{,}339 + 5{,}949 = 6{,}739$.
6. Так как $z_1 = \ln Q_1$, то $Q_1 = \exp(z_1) = \exp(6{,}739) = 845$ м^3/с.

Решение 2.

1. Непосредственно по исходному ряду рассчитываем оценки m_Q и σ_Q , получаем: $m_Q \approx \overline{Q} = 407$; $\sigma_Q \approx 152$.
2. По формулам (4.9-4.10) вычисляем m_z и σ_z:
$$\sigma_z^2 = \ln\left[(152)^2 / (407)^2 + 1\right] = 0{,}13;$$
$$\sigma_z = 0{,}36;\ m_z = \ln(407) - 0{,}13/2 = 5{,}94.$$
3. Дальнейший расчет ведется аналогично первому варианту:
$t'_{99} = 2{,}33$; $z_1 = z'_{99} = 2{,}33 \cdot 0{,}36 + 5{,}94 = 6{,}78$;
$Q_1 = \exp(6{,}78) = 880$ м^3/с.

Заметим, что полученные по формулам (4.9), (4,10) значения m_z и σ_z несколько отличаются от значений этих параметров, полученных по первому варианту, но расчетные расходы (845 и 880) отличаются всего на 4 % . Это косвенным образом подтверждает, что в данном случае истинное распределение может быть аппроксимировано логнормальным.

Оценку параметров двухпараметрического логнормального распределения можно также выполнить методом квантилей с использованием следующих формул:

$$\bar{z} = \ln\left(x_{0,50}\right), \tag{4.14}$$

$$\sigma_z = 0{,}303978 \cdot \ln\left(\frac{x_{0,95}}{x_{0,05}}\right), \tag{4.15}$$

где $z = \ln(x)$; $x_{0,50}$ – выборочная медиана исходного ряда; $x_{0,95}$ и $x_{0,05}$ – выборочные квантили соответственно для вероятностей непревышения p = 95% и p = 5%.

Используя статистические функции Excel, для ряда рассмотренного в примере 4.3 получаем: $Q_{0,50}$ = 388; $Q_{0,95}$ = 758,5; $Q_{0,05}$ = 242, и далее по формулам (4.14-4.15): $\bar{z}$ = 5,96; σ_z = 0,35.

Трехпараметрическое логнормальное распределение

Наряду со стандартным логнормальным распределением используются различные его модификации. В частности, Г. А. Алексеев (1960 г.) предложил вместо преобразования $Z = \ln(X)$, использовать преобразование $Z = \ln(X - a)$, где a – дополнительный (третий) параметр.

Полученное на основе этого преобразования распределение, иногда называют трехпараметрическим логнормальным распределением. В отличие от стандартного логнормального распределения, которое имеет нулевой нижний предел, это распределение имеет нижний предел, равный a.

Параметр a связан с коэффициентом асимметрии соотношением

$$C_{s,x} = \frac{3C_{v,x}}{1-k_0} + \left(\frac{C_{v,x}}{1-k_0}\right)^3, \tag{4.16}$$

где k_0 – минимальный модульный коэффициент, $k_0 = a/m_x$. При $k_0 = 0$ выражение (4.16) превращается в (4.11).

Поскольку из формулы (4.16) нельзя получить в явном виде формулу для расчета параметра k_0, в настоящей работе представлен двухэтапный алгоритм определения минимального модульного коэффициента.

На первом этапе по таблицам 4.3-4.4 в зависимости от C_s определяется параметр g, где

$$g = \frac{C_v}{1 - k_0} \tag{4.17}$$

Затем в зависимости от C_v определяется параметр k_0

$$k_0 = \frac{g - C_v}{g} \tag{4.18}$$

Таблица 4.3

Значения параметра g в зависимости от коэффициента асимметрии (C_s) для трехпараметрического логнормального распределения, где $g = C_v/(1 - k_0)$

$C_s \geq 3$

C_s	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
3	0,82	0,84	0,86	0,88	0,90	0,91	0,93	0,95	0,97	0,98
4	1,00	1,02	1,03	1,05	1,07	1,08	1,10	1,11	1,13	1,14
5	1,16	1,17	1,18	1,20	1,21	1,22	1,24	1,25	1,26	1,28
6	1,29	1,30	1,31	1,32	1,34	1,35	1,36	1,37	1,38	1,39
7	1,40	1,41	1,43	1,44	1,45	1,46	1,47	1,48	1,49	1,50
8	1,51	1,52	1,53	1,54	1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	1,60
9	1,61	1,62	1,63	1,64	1,65	1,66	1,66	1,67	1,68	1,69
10	1,70	1,71	1,72	1,72	1,73	1,74	1,75	1,76	1,77	1,77
11	1,78	1,79	1,80	1,81	1,81	1,82	1,83	1,84	1,84	1,85
12	1,86	1,87	1,87	1,88	1,89	1,90	1,90	1,91	1,92	1,92
13	1,93	1,94	1,95	1,95	1,96	1,97	1,97	1,98	1,99	1,99
14	2,00	2,01	2,01	2,02	2,03	2,03	2,04	2,05	2,05	2,06
15	2,07	2,07	2,08	2,08	2,09	2,10	2,10	2,11	2,11	2,12

Таблица 4.4

Значения параметра g в зависимости от коэффициента асимметрии (C_s) для трехпараметрического логнормального распределения, где $g = C_v/(1 - k_0)$; $0 < C_s < 3$

Cs	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,000	0,003	0,007	0,010	0,013	0,017	0,020	0,023	0,027	0,030
0,1	0,033	0,037	0,040	0,043	0,047	0,050	0,053	0,057	0,060	0,063
0,2	0,067	0,070	0,073	0,077	0,080	0,083	0,087	0,090	0,093	0,097
0,3	0,100	0,103	0,106	0,110	0,113	0,116	0,120	0,123	0,126	0,129
0,4	0,133	0,136	0,139	0,142	0,146	0,149	0,152	0,155	0,159	0,162
0,5	0,165	0,168	0,172	0,175	0,178	0,181	0,185	0,188	0,191	0,194
0,6	0,197	0,201	0,204	0,207	0,210	0,213	0,216	0,220	0,223	0,226
0,7	0,229	0,232	0,235	0,239	0,242	0,245	0,248	0,251	0,254	0,257
0,8	0,261	0,264	0,267	0,270	0,273	0,276	0,279	0,282	0,285	0,289
0,9	0,292	0,295	0,298	0,301	0,304	0,307	0,310	0,313	0,316	0,319
1,0	0,322	0,325	0,328	0,331	0,334	0,337	0,340	0,343	0,346	0,349
1,1	0,352	0,355	0,358	0,361	0,364	0,367	0,370	0,373	0,376	0,379
1,2	0,382	0,385	0,387	0,390	0,393	0,396	0,399	0,402	0,405	0,408
1,3	0,410	0,413	0,416	0,419	0,422	0,425	0,427	0,430	0,433	0,436
1,4	0,439	0,442	0,444	0,447	0,450	0,453	0,455	0,458	0,461	0,464
1,5	0,466	0,469	0,472	0,474	0,477	0,480	0,483	0,485	0,488	0,491
1,6	0,493	0,496	0,499	0,501	0,504	0,506	0,510	0,512	0,515	0,518
1,7	0,520	0,523	0,525	0,528	0,531	0,533	0,536	0,538	0,541	0,543
1,8	0,546	0,549	0,551	0,554	0,556	0,559	0,561	0,564	0,566	0,569
1,9	0,571	0,574	0,576	0,579	0,581	0,584	0,586	0,589	0,591	0,594
2,0	0,596	0,599	0,601	0,603	0,606	0,608	0,611	0,613	0,616	0,618
2,1	0,620	0,623	0,625	0,627	0,630	0,632	0,635	0,637	0,639	0,642
2,2	0,644	0,646	0,649	0,651	0,653	0,656	0,658	0,660	0,663	0,665
2,3	0,667	0,670	0,672	0,674	0,677	0,679	0,681	0,683	0,686	0,688
2,4	0,690	0,692	0,695	0,697	0,699	0,701	0,704	0,706	0,708	0,710
2,5	0,713	0,715	0,717	0,719	0,721	0,724	0,726	0,728	0,730	0,732
2,6	0,734	0,737	0,739	0,741	0,743	0,745	0,747	0,749	0,752	0,754
2,7	0,756	0,758	0,760	0,762	0,764	0,766	0,769	0,771	0,773	0,775
2,8	0,777	0,779	0,781	0,783	0,785	0,787	0,789	0,791	0,793	0,796
2,9	0,798	0,800	0,802	0,804	0,806	0,808	0,810	0,812	0,814	0,816

Распределение является более гибким по сравнению со стандартным, однако возможности его применения в гидрологии ограничены. Действительно, для того чтобы кривая распределения не уходила в область отрицательных значений, необходимо, чтобы значение k_0 удовлетворяло условию $k_0 \ge 0$. В то же время минимальный модульный коэффициент всегда меньше единицы. Окончательно получаем $0 \le k_0 < 1$. Таким образом, как видно из (4.16), логнормальное распределение с положительным нижним пределом ($a > 0$) будет иметь более высокую асимметрию, чем обычное логнормальное, т.е.

$$C_s > 3C_v + C_v^3. \tag{4.19}$$

С учетом сказанного это распределение можно рекомендовать только для случайных величин с достаточно большой асимметрией ($C_s > 3C_v$).

Пример 4.4. Определить максимальный расход весеннего половодья однопроцентной обеспеченности Q_1 на р. Паша в створе д. Дубово (см. табл. 4.2), используя трехпараметрическое логнормальное распределение. Расчет вести по второму варианту.

Решение.

1. Непосредственно по исходному ряду приближенно определяем МО, СКО, коэффициент вариации и коэффициент асимметрии:
   $\overline{Q} = 407$; $\sigma_Q = 152$; $C_v = 0{,}373$; $C_s = 1{,}30$.
2. В зависимости от C_s по таблице 4.4 определяем параметр g:
   $g = 0{,}41$.
3. В зависимости от C_v по формуле (4.18) определяем минимальный модульный коэффициент: $k_0 = (0{,}41 - 0{,}373)/0{,}41 = 0{,}09$.
4. Находим параметр a (минимум): $a = k_0\ \overline{Q} = 0{,}09 \cdot 407 = 37$.
5. Для СВ U, которая связана с Q соотношением $u_i = Q_i - a$, рассчитываем числовые характеристики:
   $\overline{U} = \overline{Q} - a = 407 - 37 = 370;\ \sigma_u = \sigma_x = 152.$
6. По формулам (4.9) и (4.10) вычисляем m_z и σ_z**,** где $Z = \ln(U)$:
   $\sigma_z^2 = \ln[(152)^2/(370)^2 + 1] = 0{,}156;\quad \sigma_z = 0{,}39;$
   $m_z = \ln(370) - (0{,}156/2) = 5{,}84.$
7. По табл. 4.1 определяем 99 %-ный квантиль нормированной нормально распределённой СВ t: $t'_{99} = 2{,}33$.

8. По формуле (4.5) определяем

$$z_1 = z'_{99} = \sigma_z t'_{99} + m_z = 2{,}33 \cdot 0{,}39 + 5{,}84 = 6{,}75.$$

9. Так как $z_1 = \ln(Q_1 - a)$, то

$Q_1 = \exp(z_1) + a = \exp(6{,}75) + 37 = 891$ м^3/с.

На рис. 4.4 представлены двух- и трехпараметрические кривые логнормального распределения для ряда, рассмотренного в примерах 4.3 и 4.4.

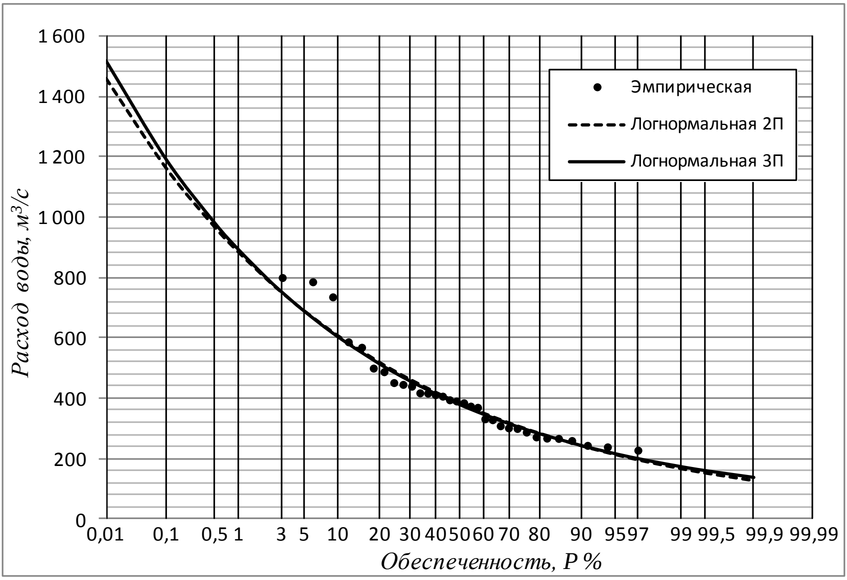


Рис. 4.4. Кривая обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья; р. Паша – д. Дубовское; $Q_{ср} = 407$ м^3/с; $C_v = 0{,}37$; $C_s = 1{,}30$. Показаны кривые двух- и трехпараметрического логнормального распределения.

Как видно на рисунке двух- и трехпараметрические кривые почти совпадают, так как в данном случае коэффициент асимметрии несущественно отличается от ($3C_v + C_v^3$) и, как следствие, параметр сдвига очень небольшой ($k_0 = 0{,}09$).

Параметр a можно также определить методом квантилей (см. п.3.5). В этом случае параметр a рассчитывается по формуле:

$$a = \frac{x_p x_{1-p} - x_{0,5}^2}{x_p + x_{1-p} - 2x_{0,5}}, \qquad (4.20)$$

где x_p и x_{1-p} – выборочные квантили, $x_{0,5}$ – выборочная медиана; p – вероятность непревышения в долях единицы.

Значение p рекомендуется принимать равным 0,05 или 0,10, тогда $(1-p)$ будет равно соответственно 0,95 или 0,90.

4.3. Распределение Гумбеля (распределение экстремальных значений I типа)

Распределение Гумбеля имеет две модификации – с положительной асимметрией и с отрицательной асимметрией. Распределение с положительной асимметрией называют распределением «максимальных» значений, с отрицательной – распределением «минимальных» значений (рис.4.5). Оба распределения являются двухпараметрическими, т. е. однозначно определяются параметрами m_x и σ_x (МО и СКО).

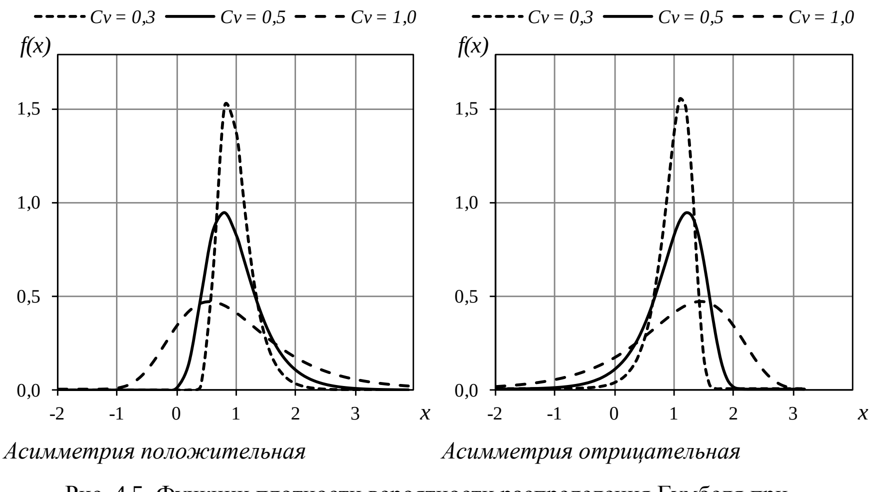


Рис. 4.5. Функции плотности вероятности распределения Гумбеля при фиксированном математическом ожидании ($m_x = 1$) и различных значениях коэффициента вариации.

Распределение Гумбеля для максимальных значений (тип I-A)

Функция плотности вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\exp[-y - \exp(-y)], \tag{4.21}$$

y – безразмерная величина, которая связана с x соотношением

$$y = \frac{x-\mu}{\lambda}, \tag{4.22}$$

где μ – мода случайной величины X; λ – параметр масштаба; $\lambda > 0$; $-\infty < x < +\infty$.

Интегральная функция распределения и функция обеспеченностей выражаются формулами

$$F(x) = \exp[-\exp(-y)], \tag{4.23}$$

$$P(x) = 1 - \exp[-\exp(-y)]. \tag{4.24}$$

Основные статистические характеристики связаны с параметрами распределения следующими соотношениями:

математическое ожидание	$m_x = \mu + 0{,}577\lambda$	(4.25)
медиана	$Me = \mu - \lambda\ln(\ln 2) = \mu + 0{,}3665\lambda$	(4.26)
мода	$Mo = \mu$	(4.27)
СКО	$\sigma_x = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\lambda = 1{,}28\lambda$	(4.28)
коэффициент асимметрии	$C_s = 1{,}14$	(4.29)
эксцесс	$E_x = 2{,}4$	(4.30)

Из выражения (4.24) следует, что значения переменной y заданной обеспеченности можно рассчитать по формуле

$$y_p = -\ln\left[-\ln\left(\frac{100-P}{100}\right)\right], \tag{4.31}$$

где P – расчетная обеспеченность в процентах. В табл. 4.5 приводятся значения y_p для основных опорных обеспеченностей.

Ординаты кривой обеспеченностей с учетом выражения (4.22) определяются по формуле

$$x_{p\%} = \mu + \lambda y_{p\%} \qquad (4.32)$$

При использовании метода моментов оценки параметров распределения μ и λ находятся из выражений (4.28) и (4.25):

$$\lambda = \sigma_x \frac{\sqrt{6}}{\pi} = 0{,}78\sigma_x \qquad (4.33)$$

$$\mu = \bar{x} - 0{,}577\lambda = \bar{x} - 0{,}45\sigma \qquad (4.34)$$

Формулы (4.33) и (4.34) связывают параметры (μ и λ) с ($\bar{x}$ и σ_x) при $n \to \infty$. Для конечных выборок из n членов Гумбель предложил следующие формулы

$$\lambda = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad (4.35)$$

$$\mu = \bar{x} - \bar{y}\lambda \qquad (4.36)$$

где $\bar{y}$ и σ_y определяются в зависимости от длины анализируемого ряда по табл. 4.6.

Таблица 4.5

Значения y_p для различных обеспеченностей (распределение Гумбеля, тип I-А)

$P\%$	y_p	$P\%$	y_p	$P\%$	y_p
0,01	9,21	10	2,25	75	–0,33
0,1	6,91	20	1,50	80	–0,48
0,3	5,81	25	1,25	90	–0,83
0,5	5,30	30	1,03	95	–1,10
1	4,60	40	0,67	97	–1,25
2	3,90	50	0,37	99	–1,53
3	3,49	60	0,09	99,7	–1,76
5	2,97	70	–0,19	99,9	–1,93

Теоретически доказано, что третий центральный момент для распределения экстремальных значений типа I-*А* выражается формулой

$$\mu_3 = 2{,}404\lambda^3, \qquad (4.37)$$

следовательно: $$C_s = \frac{\mu_3}{\sigma_x^3} = \frac{2{,}404\lambda^3}{(1{,}282\lambda)^3} = 1{,}14. \qquad (4.38)$$

Таблица 4.6

Средние и стандартные отклонения приведенных экстремальных значений

n	$\bar{y}$	σ_y	n	$\bar{y}$	σ_y	n	$\bar{y}$	σ_y
8	0,4843	0,9043	35	0,54034	1,12847	64	0,5533	1,1793
9	0,4902	0,9288	36	0,5410	1,1313	66	0,5538	1,1814
10	0,4952	0,9497	37	0,5418	1,1339	68	0,5543	1,1834
11	0,4996	0,9676	38	0,5424	1,1363	70	0,55477	1,18536
12	0,5035	0,9833	39	0,5430	1,1388	72	0,5552	1,1873
13	0,5070	0,9972	40	0,54362	1,14132	74	0,5557	1,1890
14	0,5100	1,0095	41	0,5442	1,1436	76	0,5561	1,1906
15	0,5128	1,02057	42	0,5448	1,1458	78	0,5565	1,1923
16	0,5157	1,0316	43	0,5453	1,1480	80	0,55688	1,19382
17	0,5181	1,0411	44	0,5458	1,1499	82	0,5572	1,1953
18	0,5202	1,0493	45	0,5463	1,15185	84	0,5576	1,1967
19	0,5220	1,0566	46	0,5468	1,1538	86	0,558	1,1980
20	0,52355	1,06283	47	0,5473	1,1557	88	0,5583	1,1994
21	0,5252	1,0696	48	0,5477	1,1574	90	0,5586	1,20073
22	0,5268	1,0754	49	0,5481	1,159	92	0,5589	1,2020
23	0,5283	1,0811	50	0,54854	1,16066	94	0,5592	1,2032
24	0,5296	1,0864	51	0,5489	1,1623	96	0,5595	1,2044
25	0,53086	1,09145	52	0,5493	1,1638	98	0,5598	1,2055
26	0,5320	1,0961	53	0,5497	1,1653	100	0,56002	1,20649
27	0,5332	1,1004	54	0,5501	1,1667	150	0,56461	1,22534
28	0,5343	1,1047	55	0,5504	1,1681	200	0,56715	1,23598
29	0,5353	1,1086	56	0,5508	1,1696	250	0,56878	1,24292
30	0,53622	1,11238	57	0,5511	1,1708	300	0,56993	1,24786
31	0,5371	1,1159	58	0,5515	1,1721	400	0,57144	1,2545
32	0,5380	1,1193	59	0,5518	1,1734	500	0,5724	1,2588
33	0,5388	1,1226	60	0,55208	1,17467	750	0,57377	1,26506
34	0,5396	1,1255	62	0,5527	1,1770	1000	0,5745	1,26851

Таким образом, коэффициент асимметрии для распределения Гумбеля является постоянным. Это обстоятельство и то, что график функции $P(x)$ при больших значениях обеспеченностей уходит в область отрицательных значений, значительно ограничивает возможности применения распределения Гумбеля в практике гидрологических расчетов.

Хорошая сходимость эмпирической и аналитической кривой Гумбеля имеет место только в тех случаях, когда выборочный коэффициент асимметрии ряда близок к 1,14, т. е. (1,0 < C_s < 1,3).

Пример 4.5.

Дано: Ряд максимальных расходов весеннего половодья на реке Тихвинка – д. Горелуха, длина ряда 101 год. (Табл. 4.7).

Таблица 4.7

Максимальные расходы весеннего половодья; р. Тихвинка – д. Горелуха

№	Год	Q, м^3/с	№	Год	Q, м^3/с	№	Год	Q, м^3/с	№	Год	Q, м^3/с
1	1881	446	27	1907	144	53	1933	86,4	79	1960	178
2	1882	156	28	1908	135	54	1934	152	80	1961	131
3	1883	117	29	1909	154	55	1935	224	81	1962	290
4	1884	154	30	1910	169	56	1936	188	82	1963	174
5	1885	191	31	1911	367	57	1938	141	83	1964	182
6	1886	118	32	1912	146	58	1939	135	84	1965	205
7	1887	218	33	1913	156	59	1940	136	85	1966	259
8	1888	169	34	1914	180	60	1941	136	86	1967	122
9	1889	214	35	1915	233	61	1942	218	87	1968	165
10	1890	86	36	1916	160	62	1943	254	88	1969	194
11	1891	72,5	37	1917	276	63	1944	125	89	1970	125
12	1892	247	38	1918	183	64	1945	104	90	1971	120
13	1893	192	39	1919	301	65	1946	305	91	1972	303
14	1894	184	40	1920	214	66	1947	165	92	1973	156
15	1895	228	41	1921	188	67	1948	185	93	1974	143
16	1896	111	42	1922	247	68	1949	125	94	1975	136
17	1897	120	43	1923	153	69	1950	97,4	95	1976	201
18	1898	120	44	1924	221	70	1951	158	96	1977	109
19	1899	247	45	1925	125	71	1952	160	97	1978	201
20	1900	158	46	1926	324	72	1953	156	98	1979	111
21	1901	307	47	1927	132	73	1954	101	99	1980	140
22	1902	196	48	1928	130	74	1955	244	100	1981	114
23	1903	236	49	1929	231	75	1956	204	101	1982	117
24	1904	104	50	1930	133	76	1957	155	Среднее		181
25	1905	361	51	1931	252	77	1958	158	СКО		67,5
26	1906	256	52	1932	133	78	1959	233	C_v		0,37
									C_s		1,21

Требуется: Определить максимальный расход однопроцентной обеспеченности ($Q_{1\%}$), используя закон распределения Гумбеля типа I-*A*.

Решение.

1. По имеющемуся ряду приближенно определяем МО и СКО: $m_X \approx \overline{Q} = 181$; $\sigma_Q = 67{,}5$
2. По формуле (4.30) или по табл.4.5 определяем $y_р$: $y_{1\%} = 4{,}60$.
3. В зависимости от длины ряда n по табл.4.6 определяем $\overline{y}$ и σ_y.

   Так как в данном случае $n = 101$, то $\overline{y} = 0{,}56$; $\sigma_y = 1{,}207$.
4. По формулам (4.34) и (4.35) вычисляем параметры λ и μ: λ = 55,9; μ = 150.
5. По формуле (4.31) вычисляем расчётный расход воды: $Q_{1\%} = 407$ м^3/с.

Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей для исследуемого ряда представлены на рис. 4.6.

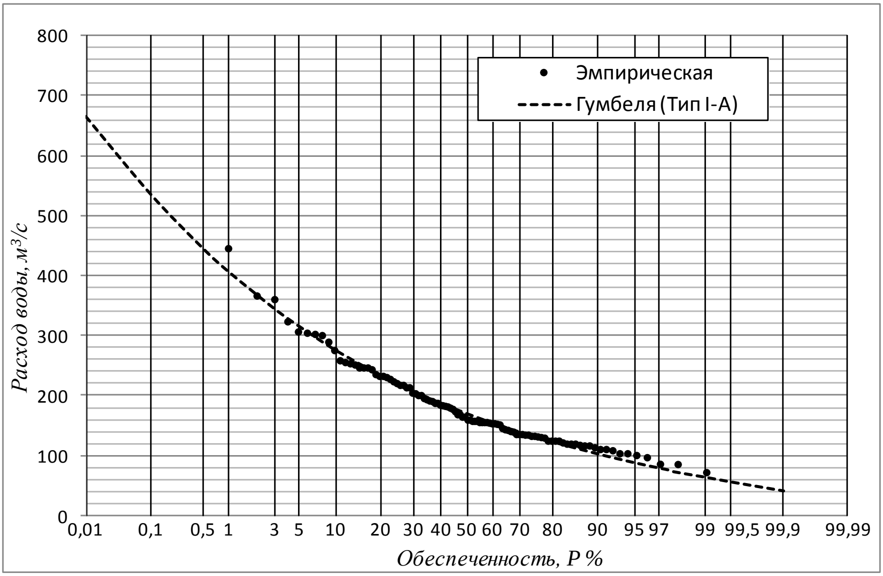


Рис. 4.6. Эмпирическая и аналитическая (Гумбеля типа I-*A*) кривые обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья; р. Тихвинка – д. Горелуха.

Так как в данном случае выборочное значения коэффициента асимметрии (C_s = 1,21) не существенно отличается от 1,14, аналитическая кривая Гумбеля хорошо соответствует эмпирическим точкам.

В гидрологии распределение Гумбеля типа I-*A* используется главным образом при расчетах максимальных расходов дождевых паводков. Такая практика, в частности, существует в США, Франции, Японии, Нидерландах и ряде других стран.

В строительном проектировании распределение Гумбеля применяется для расчета месячных или годовых максимумов скорости ветра.

Оценка параметров распределения Гумбеля типа I-А методом наименьших квадратов

Из формул (4.22) и (4.24) следует:

$$\frac{x-\mu}{\lambda} = -\ln\left[-\ln(1-P)\right], \tag{4.39}$$

$$x_p = \lambda\, g_p + \mu \,, \tag{4.40}$$

где: $g_p = -\ln\left[-\ln(1-P)\right]$; P – обеспеченность в долях единицы.

Как видно из выражения (4.40) зависимость $x = f(g)$ является линейной и параметры λ и μ можно легко найти методом наименьших квадратов. При этом последовательность действий следующая.

1. Рассчитываются координаты эмпирической кривой обеспеченностей (см. пример 2.1): $x_{\text{р}}$ и P (здесь P не в %, а в долях единицы).
2. Для каждого P рассчитывается значение $g = –\ln[–\ln(1–P)]$.
3. Строится график связи $x_p = f(g_p)$. Если зависимость имеет линейный характер, то можно использовать распределение Гумбеля типа I-*A* (рис.4.7).
4. Методом наименьших квадратов определяются параметры выражения $x_p = \lambda\, g_p + \mu$.

На рис. 4.7 в качестве примера представлена зависимость $Q_p = \lambda\, g_p + \mu$ для ряда максимальных расходов весеннего половодья в створе р. Тихвинка – д. Горелуха. Как видно на рисунке в данном случае λ = 55,3; μ = 150. Полученные параметры не существенно отличаются от параметров, полученных методом моментов (см. пример 4.5).

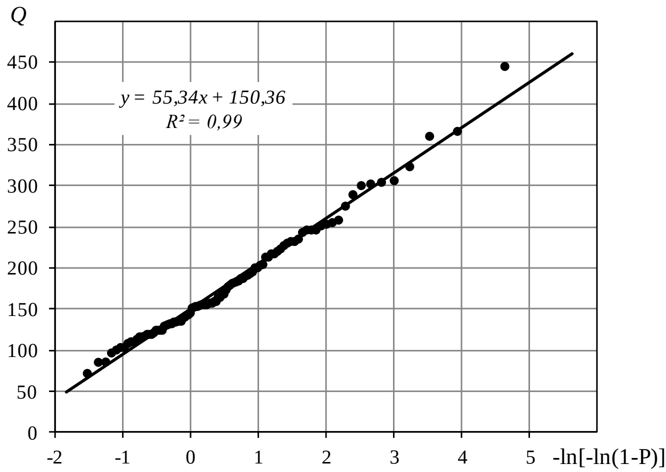


Рис. 4.7. Зависимость $Q = f\{-\ln[-\ln(1-P)]\}$ для максимальных расходов весеннего половодья; р. Тихвинка – д. Горелуха.

Распределение Гумбеля для минимальных значений (тип I-Б)

Функция плотности вероятности имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\lambda}\exp[y - \exp(y)], \tag{4.41}$$

y – безразмерная величина, которая связана с *x* соотношением

$$y = \frac{x - \mu}{\lambda}, \tag{4.42}$$

где μ – мода случайной величины X; λ – параметр масштаба; $\lambda > 0$; $-\infty < x < +\infty$.

Интегральная функция распределения и функция обеспеченностей выражаются формулами

$$F(x) = 1 - \exp[-\exp(y)], \tag{4.43}$$

$$P(x) = \exp[-\exp(y)] \tag{4.44}$$

Основные статистические характеристики связаны с параметрами распределения следующими соотношениями:

мат. ожидание $\quad m_x = \mu - 0{,}577\lambda \quad (4.45)$

медиана $\quad Me = \mu + \lambda \ln(\ln 2) = \mu - 0{,}3665\lambda \quad (4.46)$

мода $\quad Mo = \mu \quad (4.47)$

СКО $\quad \sigma_x = \dfrac{\pi}{\sqrt{6}}\lambda = 1{,}28\lambda \quad (4.48)$

коэфф. асимметрии $\quad C_s = -1{,}14 \quad (4.49)$

эксцесс $\quad E_x = 2{,}4 \quad (4.50)$

Из выражения (4.44) следует, что значения переменной y заданной обеспеченности можно рассчитать по формуле

$$y_p = \ln\left[-\ln\left(\frac{P}{100}\right)\right], \tag{4.51}$$

где P – расчетная обеспеченность в процентах. В табл. 4.8 приводятся значения y_p для основных опорных обеспеченностей.

Таблица 4.8

Значения y_p для различных обеспеченностей (распределение Гумбеля, тип I-Б)

P%	y_p	P%	y_p	P%	y_p
0,01	2,22	10	0,83	75	–1,25
0,1	1,93	20	0,48	80	–1,50
0,3	1,76	25	0,33	90	–2,25
0,5	1,67	30	0,19	95	–2,97
1	1,53	40	–0,09	97	–3,49
2	1,36	50	–0,37	99	–4,60
3	1,25	60	–0,67	99,7	–5,81
5	1,10	70	–1,03	99,9	–6,91

Ординаты кривой обеспеченностей с учетом выражения (4.42) определяются по формуле

$$x_{p\%} = \mu + \lambda y_{p\%} \tag{4.52}$$

При использовании метода моментов оценки параметров распределения μ и λ находятся из выражений (4.48) и (4.45):

$$\lambda = \sigma_x \frac{\sqrt{6}}{\pi} = 0{,}78\sigma_x \qquad (4.53)$$

$$\mu = \bar{x} + 0{,}577\lambda = \bar{x} + 0{,}45\sigma \qquad (4.54)$$

Формулы (4.53) и (4.54) связывают параметры (μ и λ) с ($\bar{x}$ и σ_x) при $n \to \infty$. Для конечных выборок из n членов Гумбель рекомендовал следующие формулы:

$$\lambda = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad (4.55)$$

$$\mu = \bar{x} + \bar{y}\lambda \qquad (4.56)$$

где $\bar{y}$ и σ_y определяются в зависимости от длины анализируемого ряда по табл.4.6.

Данное распределение имеет постоянный коэффициент асимметрии $C_s = -1{,}14$ и может быть использовано для рядов с отрицательной асимметрией при ($-1{,}3 < C_s < -1{,}0$).

В частности умеренную отрицательную асимметрию могут иметь ряды минимальных расходов воды и ряды максимальных уровней воды.

Пример 4.6.

Дано: Ряд максимальных уровней весеннего половодья реки Тигода – ст. Любань. Длина ряда 34 года. Отметка «0» графика 28,90 м БС (Табл.4.9).

Требуется: Определить максимальный уровень однопроцентной обеспеченности ($H_{1\%}$), используя закон распределения Гумбеля типа I-Б.

Решение:

1. По имеющемуся ряду приближенно определяем МО и СКО:
   $m_x \approx \overline{H} = 479$; $\sigma_H = 87{,}2$.
2. По формуле (4.51) или по табл. 4.8 определяем $y_р$: $y_{1\%} = 1{,}53$.
3. В зависимости от длины ряда n по табл. 4.6 определяем $\bar{y}$ и σ_y.
   Так как в данном случае $n = 34$, то $\bar{y} = 0{,}5396$; $\sigma_y = 1{,}1255$.
4. По формулам (4.54) и (4.55) вычисляем параметры λ и μ:
   λ = 77,5; μ = 521.

5. По формуле (4.51) вычисляем расчётный уровень воды:
   $H_{1\%} = 521 + 77{,}5 \cdot 1{,}53 = 640$ см.
6. Определяем уровень в абсолютных отметках:
   28,90 + 6,40 = 35,30 м БС.

Таблица 4.9

Максимальные уровни весеннего половодья; р. Тигода – ст. Любань, отметка нуля поста 28,90 м БС

№	Год	Q, м^3/с	№	Год	Q, м^3/с	№	Год	Q, м^3/с	№	Год	Q, м^3/с
1	1947	400	10	1956	595	19	1965	537	28	1974	391
2	1948	501	11	1957	490	20	1966	613	29	1975	406
3	1949	400	12	1958	516	21	1967	489	30	1976	481
4	1950	350	13	1959	580	22	1968	472	31	1977	510
5	1951	522	14	1960	502	23	1969	536	32	1978	540
6	1952	426	15	1961	432	24	1970	441	33	1979	452
7	1953	466	16	1962	586	25	1971	532	34	1980	546
8	1954	272	17	1963	484	26	1972	524	Среднее		479
9	1955	596	18	1964	483	27	1973	221	СКО		87,2
									C_s		-1,05

Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей для исследуемого ряда представлены на рис.4.8. Так как в данном случае выборочное значения коэффициента асимметрии (C_s = – 1,05) не существенно отличается от (–1,14), аналитическая кривая Гумбеля хорошо соответствует эмпирическим точкам.

Оценка параметров распределения Гумбеля типа I-Б методом наименьших квадратов

Из формул (4.42) и (4.44) следует:

$$\frac{x-\mu}{\lambda} = \ln[-\ln(P)], \tag{4.57}$$

$$x_p = \lambda\, g_p + \mu\ , \tag{4.58}$$

где: $g_p = \ln[-\ln(P)]$; P – обеспеченность в долях единицы.

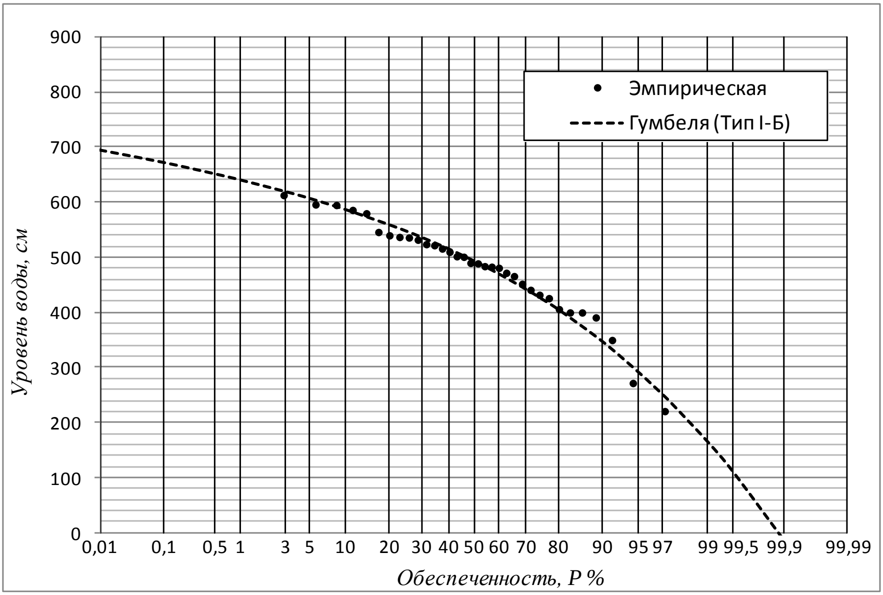


Рис. 4.8. Эмпирическая и аналитическая (Гумбеля типа I-Б) кривые обеспеченностей максимальных уровней воды; р. Тигода – ст. Любань, «0» графика поста 28,90 м БС.

Как видно из выражения (4.58) зависимость $x = f(g)$ является линейной и параметры λ и μ можно найти методом наименьших квадратов. При этом последовательность действий следующая.

1. Рассчитываются координаты эмпирической кривой обеспеченностей (см. пример 2.1): $x_{\text{р}}$ и P (здесь P не в %, а в долях единицы).
2. Для каждого P рассчитывается значение $g = \ln[-\ln(P)]$.
3. Строится график связи $x_p = f(g_p)$. Если зависимость имеет линейный характер, то можно использовать распределение Гумбеля типа I-*Б*.
4. Методом наименьших квадратов определяются параметры выражения $x_p = \lambda g_p + \mu$.

На рис. 4.9 в качестве примера представлена зависимость $H_p = \lambda g_p + \mu$ для ряда максимальных уровней воды в створе р. Тигода – ст. Любань.

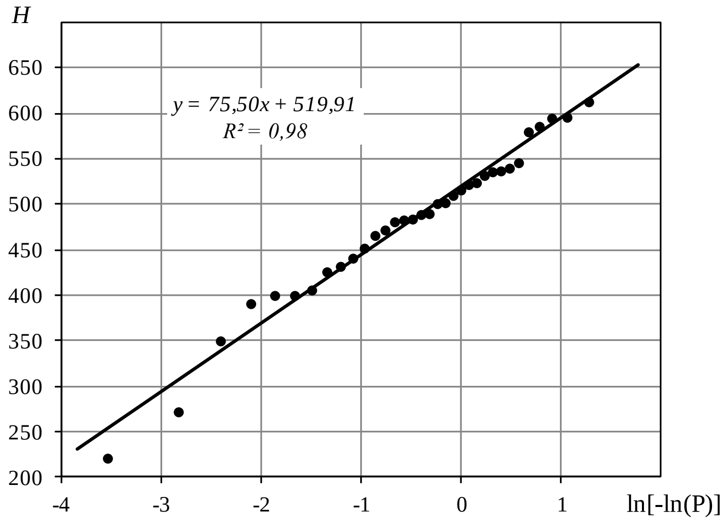


Рис. 4.9. Зависимость $H = f\left\{\ln[-\ln(P)]\right\}$ для максимальных уровней воды; р. Тигода – ст. Любань,.

Как видно на рисунке в данном случае λ = 75,5; μ = 520. Полученные параметры не существенно отличаются от параметров, полученных методом моментов (см. пример 4.6).

4.4. Распределение Пирсона III типа

В прикладной статистике широко используется семейство непрерывных распределений Пирсона, функции плотности вероятностей которых удовлетворяют дифференциальному уравнению:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(x-\alpha)}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}, \tag{4.59}$$

где y – функция плотности вероятности СВ X; α, b_0, b_1, b_2 – параметры (действительные числа), изменяя которые можно получить различные типы кривых распределения. Семейство кривых Пирсона включает 12 типов и нормальное распределение.

Из уравнения (4.59) с помощью преобразований можно получить многие известные распределения математической статистики, в том числе:

- нормальное распределение;
- равномерное распределение;
- распределение Стьюдента (t-распределение);
- распределение Фишера (F-распределение);
- распределение хи-квадрат (χ^2-распределение);
- показательное распределение (экспоненциальное);
- гамма-распределение;
- бета-распределение 1-го и 2-го рода;
- распределение Парето.

В практике гидрологических расчетов наибольшее распространение получила кривая Пирсона III типа, для которой $b_2 = 0$. В этом случае уравнение (4.59) можно записать в виде:

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y(z+a)}{b_0 + b_1 z}, \tag{4.60}$$

где Z – случайная величина, связанная с исходной СВ X соотношением:

$$z = k - 1; \tag{4.61}$$

k – модульный коэффициент; y – ордината функции плотности вероятности СВ Z; a – расстояние от центра распределения (m_k) до моды (Mo) (рис. 4.10).

Данному уравнению соответствует целое семейство функций. Для того чтобы $y(z)$ действительно являлась искомой функцией плотности вероятности, необходимо ввести ряд дополнительных условий:

$$\begin{cases} 1. \quad \int\limits_{z_{\min}}^{\infty} y(z)dz = 1; \\ 2. \quad y(z) = 0 \quad \text{при}\, z = z_{\min}; \\ 3. \quad y(z) = 0 \quad \text{при}\, z \to \infty. \end{cases} \tag{4.62}$$

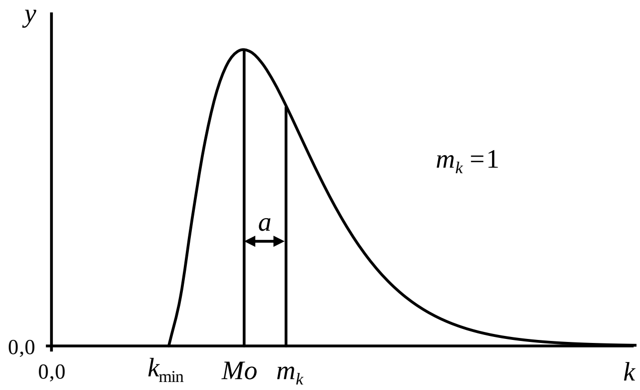


Рис. 4.10. Схема построения функции плотности вероятности Пирсона III типа для случая $C_s / C_v > 2$; ($k_{\min} > 0$).

Интегрируя (4.60) и переходя от СВ Z к модульным коэффициентам, после ряда преобразований можно получить выражение для функции плотности вероятности с положительной асимметрией:

$$y(k)\begin{cases} 0 & \text{при } \ k \le k_{\min} \\ \dfrac{\beta^{\alpha}(k-k_{\min})^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\exp\left[-\beta(k-k_{\min})\right] & \text{при } \ k > k_{\min} \end{cases}, \qquad (4.63)$$

где $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция; α и β – параметры распределения, связанные с C_v и C_s случайной величины X соотношениями

$$\alpha = (2/C_s)^2; \qquad (4.64)$$

$$\beta = 2/(C_s \cdot C_v). \qquad (4.65)$$

Заметим, что коэффициенты вариации и асимметрии не изменяются при замене значений СВ X на модульные коэффициенты.

Минимальное значение модульного коэффициента в выражении (4.62) определяется формулой

$$k_{\min} = 1 - 2C_v/C_s. \qquad (4.66)$$

Из (4.66) следует, что

$$C_s = 2C_v \quad \text{при} \quad k_{\min} = 0,$$
$$C_s > 2C_v \quad \text{при} \quad k_{\min} > 0,$$
$$C_s < 2C_v \quad \text{при} \quad k_{\min} < 0.$$

Таким образом, дифференциальная кривая распределения Пирсона III типа при $C_s = 2C_v$ начинается от нуля; при $C_s > 2C_v$ – с некоторого положительного числа и, наконец, при $C_s < 2C_v$ – уходит в область отрицательных чисел.

Мода функции (4.62) при $C_s < 2$ выражается формулой

$$Mo = 1 - (C_s\, C_v)/2. \qquad (4.67)$$

При больших значениях C_s кривая Пирсона Ш типа имеет весьма специфический вид. Из (4.63) следует, что при $C_s = 2$ $\alpha = 1$ и функция (4.63) превращается в экспоненту, а при $C_s > 2$ $\alpha < 1$ и функция (4.63) превращается в гиперболу.

Зная C_v и C_s, можно получить численные значения параметров $k_{\min}$, α, β и записать выражение для вычисления обеспеченностей модульных коэффициентов

$$P(k) = \int_k^\infty y(s)ds = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_k^\infty (s - k_{\min})^{\alpha-1} \exp\left[-\beta(s - k_{\min})\right] ds, \qquad (4.68)$$

где s – переменная интегрирования.

В случае $C_s = 2C_v$ имеем: $k_{\min} = 0,\ \alpha = 1/C_v^2,\ \beta = 1/C_v^2$ и выражения (4.63) и (4.68) существенно упрощаются

$$y(k) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} k^{\alpha-1} \exp(-\alpha k), \qquad (4.69)$$

$$P(k) = \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_k^\infty s^{\alpha-1} \exp(-\alpha s) ds. \qquad (4.70)$$

Выражение (4.69) называют двухпараметрическим гамма-распределением, или просто Γ- распределением.

Кривая обеспеченностей Пирсона Ш типа (4.68) в общем случае является трехпараметрической и однозначно определяется параметрами C_v и C_s; третий параметр – m_x необходимо знать для перехода от модульных коэффициентов к значениям СВ X.

Кривая имеет нижний предел k_{min} и не ограничена верхним пределом. При $C_s \to 0$, кривая Пирсона Ш типа стремится к нормальному распределению. Влияние параметров распределения на форму кривой Пирсона III типа показано на рис. 4.11.

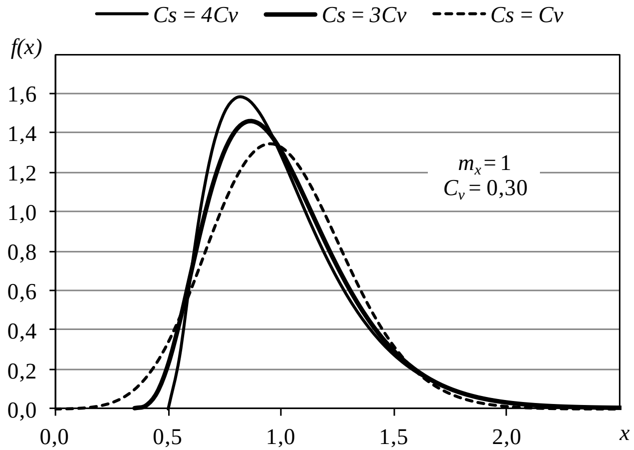


Рис. 4.11. Функции плотности вероятности распределения Пирсона III типа с положительной асимметрией при различных значениях C_s/C_v (m_x и C_v – const).

Выше была рассмотрена ситуация, когда при интегрировании уравнения (4.59) накладывались ограничения (4.61). В этом случае кривая обеспеченностей имеет положительную асимметрию.

В настоящее время используется расширенная трактовка кривой Пирсона III типа, когда C_s может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В этом случае функция плотности вероятности имеет вид:

если $C_s > 0$, то $\gamma \le x < \infty$ и $$f(x) = \frac{(x-\gamma)^{\alpha-1} e^{-(x-\gamma)/\eta}}{\eta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, \tag{4.71}$$

если $C_s < 0$, то $-\infty < x \le \gamma$ и $$f(x) = \frac{(\gamma-x)^{\alpha-1} e^{-(\gamma-x)/\eta}}{\eta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, \tag{4.72}$$

если $C_s = 0$, то $-\infty < x < \infty$, и $f(x) = \dfrac{e^{-(x-m_x)^2/2\sigma^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$, (4.73)

где γ – параметр положения; η – параметр масштаба; α – параметр формы; m_x – математическое ожидание; σ – среднеквадратическое отклонение.

В выражении (4.71) γ – это минимальное значение, в выражении (4.72) γ – максимальное значение.

Выражение (4.71) называют трехпараметрическим гамма-распределением.

При $C_s = 2$ Кривая Пирсона III типа превращается в экспоненциальное распределение, при $C_s = -2$ – в обратное экспоненциальное распределение, при $C_s = 0$ – в нормальное распределение, при $C_s = 2\,C_v$ – в двухпараметрическое гамма-распределение.

Если $C_s \neq 0$, то естественные параметры распределения связаны со стандартными числовыми характеристиками соотношениями:

$$\alpha = 4/C_s^2\,, \tag{4.74}$$

$$\eta = (1/2)\sigma\,|\,C_s\,|, \tag{4.75}$$

$$\gamma = m_x - 2\sigma / C_s\,. \tag{4.76}$$

На рис. 4.12 показаны кривые распределения Пирсона III типа при различных значениях коэффициента асимметрии.

Интегрируя (4.71-4.73) можно получить выражения для интегральной функции распределения Пирсона III типа $F(x)$. Однако обратная функция $x(F)$ во всех случаях не имеет аналитической формы, поэтому ординаты кривой обеспеченности Пирсона III типа обычно представляют в виде таблиц (Прил.1).

В таблицах даны значения нормированной случайной величины в зависимости от обеспеченности и коэффициента асимметрии. Переход от нормированных ординат к значениям искомой величины производится по формулам (1.20), (1.21).

Кривая распределения Пирсона III типа имеет особое значение для гидрологов как первая кривая, широко внедренная в практику гидрологических расчетов. Впервые таблицы распределения Пирсона III типа были опубликованы А. Фостером в 1924 г.

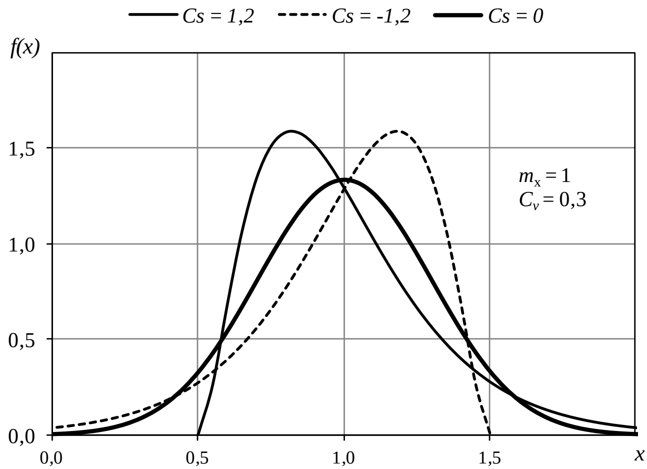


Рис. 4.12. Функции плотности вероятности распределения Пирсона III типа при различных значениях коэффициента асимметрии (m_x и C_v – const).

В России приоритет внедрения этой кривой принадлежит Д. Л. Соколовскому (1930 г.). Таблицы А. Фостера были уточнены и расширены С. И. Рыбкиным (1938 г.), а затем и другими авторами.

В настоящее время кривая Пирсона остается одной из наиболее популярных в мировой гидрологической практике.

Если говорить исключительно о расходах воды, то к недостаткам кривой Пирсона III типа можно отнести следующее.

При малых значениях отношения C_s/C_v (когда $C_s/C_v < 2$) кривая в зоне больших обеспеченностей уходит в отрицательную область (а расходы воды заведомо положительные величины).

С увеличением положительной асимметрии увеличивается значение параметра сдвига ($k_{\min}$). В результате – при больших значениях C_s может возникнуть ситуация, когда $k_{\min}$ превышает эмпирический минимум исследуемого ряда.

Даже если $k_{\min}$ меньше эмпирического минимума, но близок к нему, аналитическая кривая начинает выполаживаться, и эмпирические точки могут существенно отклоняться от нее в области больших обеспеченностей.

Пример 4.7.

Дано: Ряд максимальных расходов весеннего половодья на реке Паша – д. Поречье, длина ряда 48 лет (табл. 4.10).

Требуется: определить максимальный расход однопроцентной обеспеченности ($Q_{1\%}$), используя закон распределения Пирсона III типа.

Таблица 4.10

Максимальные расходы весеннего половодья; р. Паша – д. Поречье.

№	Год	Q, м^3/с	№	Год	Q, м^3/с	№	Год	Q, м^3/с	№	Год	Q, м^3/с
1	1935	101	13	1947	134	25	1959	127	37	1971	97,2
2	1936	121	14	1948	115	26	1960	86	38	1972	137
3	1937	80,9	15	1949	85,6	27	1961	149	39	1973	85,1
4	1938	100	16	1950	68,2	28	1962	136	40	1974	142
5	1939	98,0	17	1951	93,3	29	1963	111	41	1975	103
6	1940	63,5	18	1952	116	30	1964	109	42	1976	160
7	1941	79,6	19	1953	112	31	1965	103	43	1977	109
8	1942	75,7	20	1954	69,5	32	1966	185	44	1978	109
9	1943	219	21	1955	169	33	1967	88,4	45	1979	84,9
10	1944	97,3	22	1956	148	34	1968	83,3	46	1980	177
11	1945	89,3	23	1957	151	35	1969	121	47	1981	158
12	1946	166	24	1958	117	36	1970	133	48	1982	144
$\overline{Q}$ = 117; σ = 34,1; C_v = 0,29; C_s = 0,77 (метод моментов).											

Решение.

1. По имеющемуся ряду определяем статистические характеристики: $\overline{Q}$ =117; σ = 34,1; C_v = 0,29; C_s = 0,77.
2. В зависимости от коэффициента асимметрии по таблице (прил.1) определяем нормированную ординату кривой обеспеченности Пирсона III типа: $t_{1\%}$ = 2,87.
3. По формуле (1.20) переходим от $t_{1\%}$ к $Q_{1\%}$: $Q_{1\%} = t_{1\%}\sigma_Q + \overline{Q}$ = = 2,87 · 34,1 + 117 = 215 м^3/с.

   Можно действовать и иначе. Сначала по формуле (1.21) получаем модульный коэффициент $k_{1\%} = t_{1\%}C_v + 1 =$ 2,87 · 0,29 +1 = 1,83.

   Затем, умножая его на среднее значение, переходим к расходу: $Q_{1\%} = k_{1\%}\overline{Q}$ = 1,83 · 117 = 214 м^3/с.

Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей для исследуемого ряда представлены на рис. 4.13.

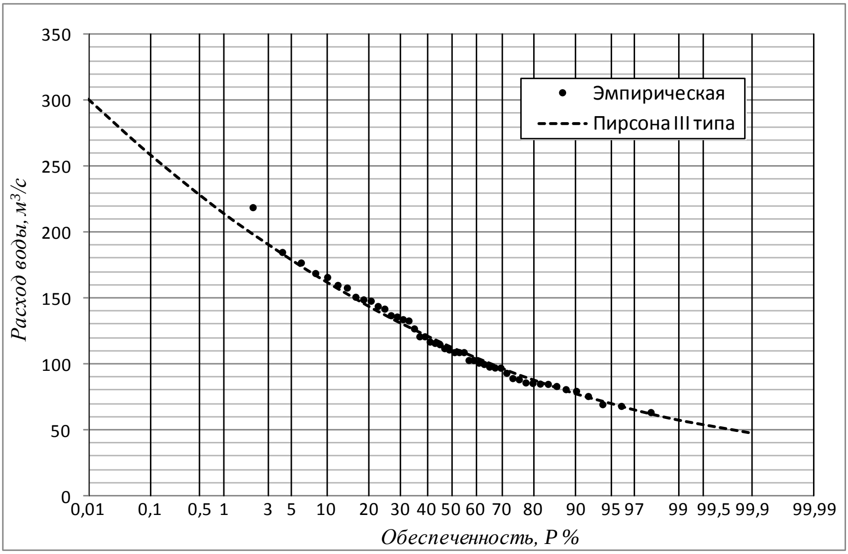


Рис. 4.13. Эмпирическая и аналитическая (Пирсона III типа) кривые обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья; р. Паша – д. Поречье.

Оценка параметров распределения

Метод моментов

Оценки основных статистических характеристик рассчитываются по формулам (3.3, 3.6-3.8). Переход к естественным параметрам распределения можно произвести по формулам (4.74-4.76).

Метод наибольшего правдоподобия

В случае если $C_s > 0$ оценки наибольшего правдоподобия являются решениями системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\lambda)=\alpha\eta, \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-\lambda)=\psi(\alpha)-\ln\left(\dfrac{1}{\eta}\right), \\ \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{x_i-\lambda}=\dfrac{1}{\eta(\alpha-1)}. \end{cases} \quad (4.77)$$

где $\psi(\alpha)$ – логарифмическая производная гамма-функции, ее называют пси-функция или диагамма-функция:

$$\psi(\alpha)=\frac{d[\ln\Gamma(\alpha)]}{d(\alpha)}=\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}. \quad (4.78)$$

Систему уравнений (4.77) можно использовать только при $\alpha > 1$ (т. е. при $C_s < 2$). При α близких к единице система дает нестабильные результаты (см. третье уравнение системы), поэтому ее рекомендуется использовать при $\alpha > 2{,}5$ (т. е. при $C_s < 1{,}27$).

Если $C_s < 0$, аналогичные проблемы возникают при $C_s < (-2)$.

В российской гидрологической практике обычно используется упрощенный метод наибольшего правдоподобия при фиксированном соотношении C_s/C_v. Последовательность действий следующая.

1. По исходному ряду рассчитывается статистика

$$\lambda_2=\frac{\sum_{i=1}^{n}\lg k_i}{n-1}, \quad (4.79)$$

где k_i – модульные коэффициенты; n – длина исследуемого ряда.

2. В зависимости от λ_2 при фиксированном C_s/C_v по таблице (прил. 4) определяется коэффициент вариации (C_v).

В качестве расчетного C_s/C_v можно принять среднее районное значение. Либо при полученном значении λ_2 проверить несколько вариантов значений C_s/C_v и принять такие значения параметров, при которых имеет место наилучшее соответствие эмпирической и аналитической кривых обеспеченностей.

Метод L-моментов

Для распределения Пирсона III типа параметры α, η и γ в выражениях (4.70-4.71) связаны с L-моментами следующими соотношениями [29]:

если $0 < |t_3| < 1/3$

$$\alpha \approx \frac{1 + 0{,}2906 z_1}{z_1 + 0{,}1882 z_1^2 + 0{,}0442 z_1^3}, \tag{4.80}$$

если $1/3 < |t_3| < 1$

$$\alpha \approx \frac{0{,}36067\, z_2 - 0{,}59567\, z_2^2 + 0{,}25361\, z_2^3}{1 - 2{,}78861\, z_2 + 2{,}56096\, z_2^2 - 0{,}77045\, z_2^3}, \tag{4.81}$$

где $z_1 = 3\pi(t_3)^2$; $z_2 = 1 - |t_3|$

$$\eta = \frac{l_2 \Gamma(\alpha) \pi^{0,5}}{\Gamma(\alpha + 0{,}5)}, \tag{4.82}$$

$$\gamma = l_1 - \alpha\eta, \tag{4.83}$$

здесь: l_1, l_2, l_3 – выборочные L-моменты; t_1, t_2, t_3 – L-моментные отношения. Методика расчета выборочных L-моментов и L-моментных отношений описана в разделе 3.4.

От параметров распределения, полученных методом L-моментов можно перейти к обычным моментным характеристикам распределения Пирсона III типа.

Среднее значение $$\bar{x} = \gamma + \sigma\sqrt{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n} x_i, \tag{4.84}$$

Стандартное отклонение $$\sigma = \eta\sqrt{\alpha}, \tag{4.85}$$

Коэффициент вариации $$C_v = \sigma / \bar{x}, \tag{4.86}$$

Коэффициент асимметрии $$C_s = \sqrt{(4/\alpha)}, \tag{4.87}$$

Такой переход позволяет использовать для построения аналитических кривых обеспеченностей традиционные таблицы распределения Пирсона III, где квантили распределения представлены, как функция от $\bar{x}$, C_v и C_s.

Пример 4.8. Рассчитать параметры распределения ряда максимальных расходов весеннего половодья реки Паша – д. Поречье (см. табл. 4.10) для кривой обеспеченностей Пирсона III типа методом L-моментов.

Решение.

1. Ранжируем исходный ряд в порядке возрастания (табл. 411).
2. Для каждого члена ранжированного ряда определяем $\frac{(i-1)}{(n-1)}Q_i$, $\frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)}Q_i$, $\frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}Q_i$ и записываем значения соответственно в столбцы 5,6,7.
3. Находим сумму для столбцов 4, 5, 6 и 7.
4. По формулам (3.39-3.42) определяем параметры b_0, b_1, b_2, b_3. Результаты записываем в последнюю строку таблицы.

Таблица 4.11

Расчет выборочных оценок вероятностно взвешенных моментов ряда максимальных расходов весеннего половодья; р. Паша – д. Поречье

№	год	*Расход воды, м³/с*		$\frac{(i-1)}{(n-1)}Q_i$	$\frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)}Q_i$	$\frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}Q_i$
		Q	$Q_{\text{ранж}}$			
1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
1	1935	101	63,5	0,00	0,00	0,00
2	1936	121	68,2	1,45	0,00	0,00
3	1937	80,9	69,5	2,96	0,06	0,00
4	1938	100	75,7	4,83	0,21	0,005
5	1939	98,0	79,6	6,77	0,44	0,020
6	1940	63,5	80,9	8,61	0,75	0,05
7	1941	79,6	83,3	10,63	1,16	0,10
8	1942	75,7	84,9	12,64	1,65	0,18
9	1943	219	85,1	14,49	2,20	0,29
10	1944	97,3	85,6	16,39	2,85	0,44
11	1945	89,3	86	18,30	3,58	0,64
12	1946	166	88,4	20,69	4,50	0,90
13	1947	134	89,3	22,80	5,45	1,21
14	1948	115	93,3	25,81	6,73	1,65
15	1949	85,6	97,2	28,95	8,18	2,18
16	1950	68,2	97,3	31,05	9,45	2,73

Продолжение таблицы 4.11

№	год	*Расход воды, м³/с*		$\frac{(i-1)}{(n-1)}Q_i$	$\frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)}Q_i$	$\frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)}Q_i$
		Q	$Q_{\text{ранж}}$			
1	***2***	***3***	***4***	***5***	***6***	***7***
17	1951	93,3	98	33,36	10,88	3,38
18	1952	116	100	36,17	12,58	4,19
19	1953	112	101	38,68	14,30	5,08
20	1954	69,5	103	41,64	16,29	6,16
21	1955	169	103	43,83	18,10	7,24
22	1956	148	109	48,70	21,17	8,94
23	1957	151	109	51,02	23,29	10,35
24	1958	117	109	53,34	25,51	11,90
25	1959	127	111	56,68	28,34	13,86
26	1960	86	112	59,57	31,08	15,89
27	1961	149	115	63,62	34,57	18,44
28	1962	136	116	66,64	37,67	20,93
29	1963	111	117	69,70	40,91	23,64
30	1964	109	121	74,66	45,44	27,27
31	1965	103	121	77,23	48,69	30,30
32	1966	185	127	83,77	54,63	35,21
33	1967	88,4	133	90,55	61,02	40,68
34	1968	83,3	134	94,09	65,45	45,09
35	1969	121	136	98,38	70,58	50,19
36	1970	133	137	102,02	75,41	55,30
37	1971	97,2	142	108,77	82,76	62,53
38	1972	137	144	113,36	88,72	69,00
39	1973	85,1	148	119,66	96,25	77,00
40	1974	142	149	123,64	102,14	83,98
41	1975	103	151	128,51	108,95	92,01
42	1976	160	158	137,83	119,85	103,87
43	1977	109	160	142,98	127,44	113,28
44	1978	109	166	151,87	138,67	126,34
45	1979	84,9	169	158,21	147,89	138,03
46	1980	177	177	169,47	162,10	154,90
47	1981	158	185	181,06	177,13	173,19
48	1982	144	219	219,00	219,00	219,00
Сумма			$\Sigma_0 = 5608$	$\Sigma_1 = 3264$	$\Sigma_2 = 2354$	$\Sigma_3 = 1858$
$\frac{\Sigma}{n}$			$b_0 = 116{,}8$	$b_1 = 68{,}0$	$b_2 = 49{,}0$	$b_3 = 38{,}7$

5. По формулам (3.35-3.38) рассчитываем выборочные L-моменты. Результаты записываем в колонки 1, 2, 3, 4 таблицы 4.12.
6. По формулам (3.43-3.45) рассчитываем L-моментные отношения t_2, t_3, t_4 (колонки 5-7 таблицы 4.12).
7. По формулам (4.80-4.83) рассчитываем параметры распределения Пирсона III типа α, η и γ (табл.4.13).
8. По формулам 4.84-4.87 определяем среднее значение, СКО, коэффициент вариации и коэффициент асимметрии (табл.4.14)

Таблица 4.12

Выборочные *L*-моменты и *L*-моментные соотношения ряда максимальных расходов весеннего половодья; р. Паша – д. Поречье

L-моменты				Коэффициенты		
l_1	l_2	l_3	l_4	*L-вариации* t_2	*L-асимметрии* t_3	*L-эксцесса* t_4
116,8	19,19	3,03	1,98	0,164	0,158	0,103

Таблица 4.13

Расчетные параметры распределения Пирсона III типа ряда максимальных расходов весеннего половодья; р. Паша – д. Поречье

t_3	z	l_2	$\Gamma(\alpha)$	$\Gamma(\alpha+0{,}5)$	l_1	Параметры распределения		
						α	η	γ
0,158	0,236	19,19	9,211	18,621	116,8	4,329	16,823	44,0

Таблица 4.14

Значения статистических характеристик, полученные разными методами ряда максимальных расходов весеннего половодья; р. Паша – д. Поречье

метод	Статистические характеристики				
	среднее значение	стандартное отклонение, σ	коэффициент вариации, C_v	коэффициент асимметрии, C_s	C_s/C_v
моментов	117	34,1	0,29	0,77	2,64
L-моментов	117	35,0	0,30	0,96	3,21
ММП	117	34,9	0,30	1,12	3,74

В таблице 4.14 для сравнения представлены также статистические характеристики исследуемого ряда, полученные методом моментов и методом максимального правдоподобия (ММП).

На рис. 4.14 показаны аналитические кривые обеспеченностей, построенные с использованием параметров полученных методом моментов и методом L-моментов.

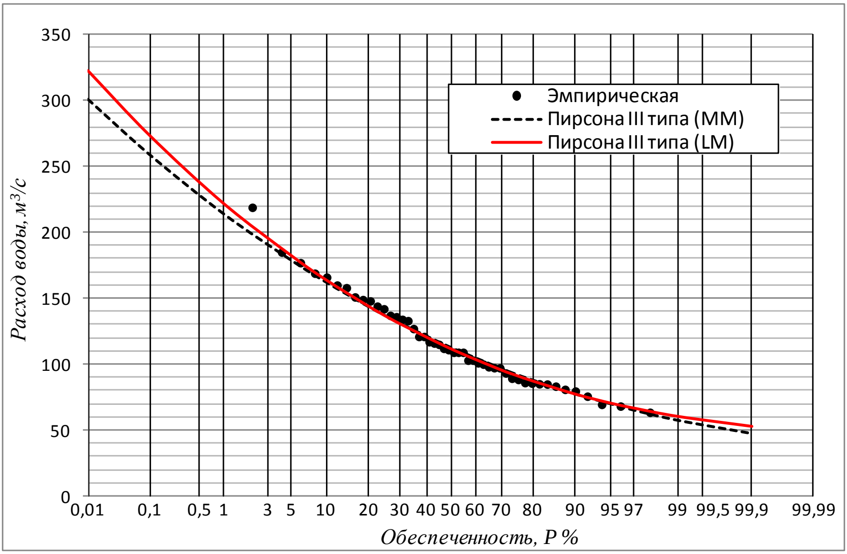


Рис. 4.14. Эмпирическая и аналитические кривые обеспеченностей Пирсона III типа, построенные при с использованием параметров, полученных методом моментов (MM) и методом L-моментов (LM), для ряда максимальных расходов весеннего половодья; р. Паша – д. Поречье.

При больших коэффициентах вариации, когда метод моментов дает существенно смещенные оценки параметров, а при использовании метода наибольшего правдоподобия начинает проявляться нестабильность системы (4.77), метод L-моментов является наиболее предпочтительным для оценки параметров распределения Пирсона III типа. Конечно при условии, что кривая Пирсона III типа в принципе способна аппроксимировать имеющиеся эмпирические данные.

Графоаналитический метод (метод квантилей)

Методика, применяемая в настоящее время в России, была разработана Г. А. Алексеевым (1960 г.) и предполагает использование именно кривой Пирсона III типа. Рассмотрим основные этапы расчета.

Сначала на клетчатку вероятности наносятся точки эмпирической кривой обеспеченностей (рис. 4.15). При этом по оси ординат рекомендуется откладывать значения исследуемой СВ, а не модульные коэффициенты. Затем в поле точек проводится сглаженная кривая.

По сглаженной кривой определяются три опорные ординаты (для обеспеченностей: 5, 50 и 95 %): x_5, x_{50}, x_{95}.

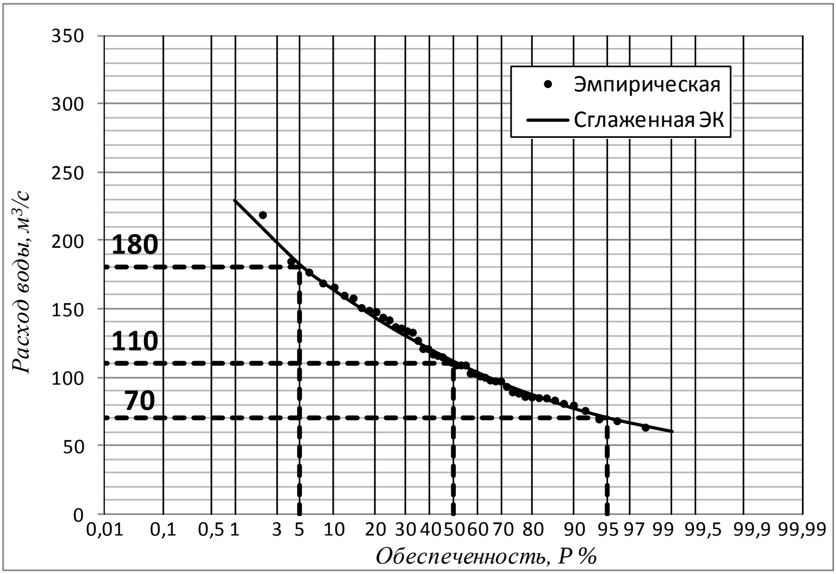


Рис. 4.15. Схема определения опорных ординат по сглаженной эмпирической кривой обеспеченностей для ряда максимальных расходов весеннего половодья; р. Паша – д. Поречье.

Дальнейший расчет сводится к тому, чтобы найти такие значения параметров распределения ($\bar{x}, C_v^*, C_s^*$), при которых аналитическая кривая будет проходить через точки x_5, x_{50}, x_{95}. Для решения этой задачи трижды воспользуемся формулой (4.5)

$$x_5 = \sigma_x^* t_5 + \bar{x}, \qquad (4.88)$$

$$x_{50} = \sigma_x^* t_{50} + \bar{x}, \qquad (4.89)$$

$$x_{95} = \sigma_x^* t_{95} + \bar{x}, \qquad (4.90)$$

где t_5, t_{50}, t_{95} – нормированные ординаты кривой обеспеченностей Пирсона III типа (см. прил.1). Таким образом, мы имеем три неизвестных параметра и три уравнения.

Для расчета оценки коэффициента асимметрии сначала рассчитаем так называемый коэффициент скошенности *S*:

$$S = \left(x_p + x_{100-p} - 2x_{50}\right) / \left(x_p - x_{100-p}\right). \qquad (4.91)$$

В нашем случае обеспеченность первой ординаты p = 5%, следовательно:

$$S^* = \left(x_5 + x_{95} - 2x_{50}\right) / \left(x_5 - x_{95}\right). \qquad (4.92)$$

Подставляя выражения (4.88) – (4.90) в формулу (4.91), получим

$$S^* = \left(t_5 + t_{95} - 2t_{50}\right) / \left(t_5 - t_{95}\right), \qquad (4.93)$$

т. е. коэффициент скошенности не изменится при замене x_5, x_{50}, x_{95} на нормированные ординаты. Но при фиксированном значении p для нормированного распределения Пирсона III типа имеет место однозначная зависимость коэффициента скошенности от коэффициента асимметрии (см. прил.1).

Следовательно, зная коэффициент скошенности (4.92), по прил.1 можно определить C_s^*.

Вычитая из уравнения (4.88) соответственно левую и правую части уравнения (4.90), получим выражение для оценки СКО

$$\sigma_x^* = \left(x_5 - x_{95}\right) / \left(t_5 - t_{95}\right). \qquad (4.94)$$

Оценку МО находим из уравнения (4.89)

$$\bar{x} = x_{50} - \sigma_x^* t_{50}. \qquad (4.95)$$

С учетом формулы (1.15) находим коэффициент вариации

$$C_v^* = \sigma_x^* / \bar{x}. \qquad (4.96)$$

Таким образом, аналитическая часть расчета сводится к последовательному использованию формул (4.92), (4.94) – (4.96).

Пример 4.9. По ряду наблюдений за максимальными расходами весеннего половодья на реке Паша – д. Поречье (см. табл. 4.11) оценить параметры распределения графоаналитическим методом. В качестве аналитической кривой обеспеченностей использовать кривую Пирсона III типа.

Решение.

1. Ранжируем ряд и по формуле (2.12) и рассчитываем ординаты эмпирической кривой обеспеченностей (см. раздел 2).
2. На клетчатке с умеренной асимметричностью строим эмпирическую кривую обеспеченностей (см. рис.4.15).
3. По сглаженной эмпирической кривой обеспеченностей определяем опорные ординаты $Q_5^* = 180$; $Q_{50}^* = 110$; $Q_{95}^* = 70$.
4. По формуле (4.92) рассчитываем коэффициент скошенности $S^* =(180 +70 - 2\cdot110)/(180 - 70) = 0{,}27$.
5. В зависимости от коэффициента скошенности по прил.1 определяем коэффициент асимметрии и три нормированные ординаты кривой Пирсона III типа: $C_s^* = 0{,}97$; $t_5 = 1{,}87$; $t_{50} = -0{,}16$; $t_{95} = -1{,}33$.
6. По формуле (4.94) вычисляем оценку СКО: $\sigma^* = (180 - 70)/(1{,}87 + 0{,}16) = 34{,}4$.
7. По формуле (4.95) вычисляем оценку МО: $\overline{Q} = 110 - 34{,}4\cdot(- 0{,}16) = 116$.
8. По формуле (4.96) вычисляем оценку C_v: $C_v^* = 34{,}4/116 = 0{,}30$.
9. В результате получаем: $\overline{Q} = 116$; $C_v^* = 0{,}30$; $C_s^* = 0{,}97$; $C_s^*/C_v^* = 3{,}23$.

Как видно из таблицы 4.14, в данном случае полученные характеристики не существенно отличаются от характеристик, рассчитанных другими методами.

4.5. Логарифмическое распределение Пирсона III типа

Наряду с обычной кривой Пирсона III типа в США и ряде других стран используется логарифмическая кривая Пирсона III типа. В этом случае считается, что распределению Пирсона подчиняется не исходная СВ X, а ее логарифм $\ln(X)$.

Функция плотности вероятностей определяется выражением:

$$f(x) = \frac{(\ln x - \gamma)^{\alpha-1} e^{-(\ln x - \gamma)/\eta}}{x\eta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, \qquad (4.97)$$

где γ, α, η – параметры распределения; $\alpha > 0$, $\eta > 0$, $e^{\gamma} < x < \infty$.

Числовые характеристики связаны с естественными параметрами распределения следующими соотношениями.

Математическое ожидание:
$$m_x = e^{\gamma}\left(\frac{1}{1-\eta}\right)^{\alpha}, \quad \eta < 1. \qquad (4.98)$$

Дисперсия:
$$D_x = e^{2\gamma}\left[\left(\frac{1}{1-2\eta}\right)^{\alpha} - \left(\frac{1}{1-\eta}\right)^{2\alpha}\right], \ \eta < 0{,}5. \qquad (4.99)$$

Начальный момент s-того порядка:
$$\mathring{\mu}_s = e^{s\gamma}\left(\frac{1}{1-s\eta}\right)^{\alpha}, \quad \eta < 1/s. \qquad (4.100)$$

Как видно из выражения (4.100) для того, чтобы функция (4.97) имела первый начальный момент параметр η должен быть меньше единицы, второй – меньше 1/2, третий – меньше 1/3.

Определение параметров логарифмического распределения Пирсона III типа методами моментов и наибольшего правдоподобия вызывает определенные вычислительные затруднения, поэтому на практике обычно используется метод моментов для логарифмов. В этом случае метод моментов применяется не к исходной выборке X, а к выборке Z, где $z_i = \ln(x_i)$:

$$\alpha = 4\big/C_{s(z)}^2, \qquad (4.101)$$

$$\eta = (1/2)\sigma_{(z)}\,|C_{s(z)}|, \qquad (4.102)$$

$$\gamma = m_{(z)} - 2\sigma_{(z)}/C_{s(z)}. \qquad (4.103)$$

При использовании таблиц нет необходимости вычислять параметры γ, α, η. Достаточно рассчитать только $m_{(z)}$, $\sigma_{(z)}$ и $C_{s(z)}$. В этом случае в зависимости от $C_{s(z)}$ для заданных обеспеченностей p_i по таблице определяются нормированные ординаты t_p. Затем рассчитываются значения z_p

$$z_p = t_p \sigma_{(z)} + m_{(z)} . \tag{4.104}$$

Переход к искомым значениям x_p производится по формуле:

$$x_p = \exp(z_p) . \tag{4.105}$$

Влияние параметров распределения на вид функции плотности вероятности логарифмического распределения Пирсона III типа при η < 1/3 показано на рис.4.15.

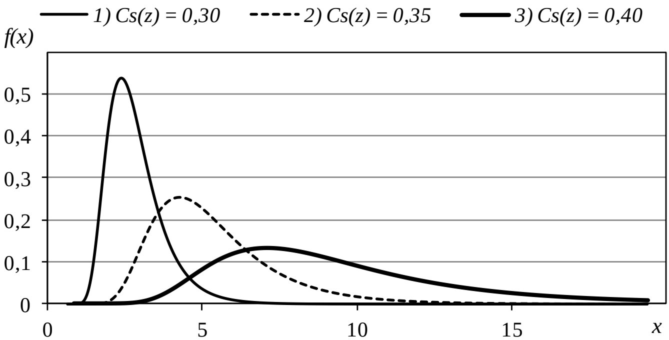


Рис. 4.15. Вид функции плотности вероятности логарифмического распределения Пирсона III типа при различных значениях коэффициента асимметрии $C_s(z)$ при постоянных $m_{(z)}$ и $\sigma_{(z)}$: $m_{(z)} = 1$, $\sigma_{(z)} = 0{,}30$; $z = \ln(x)$.

Графикам представленным на рис. 4.15 соответствуют следующие параметры переменной X: 1) $m_x = 2{,}85$, $C_v = 0{,}32$, $C_s = 1{,}41$; 2) $m_x = 5{,}38$, $C_v = 0{,}38$, $C_s = 1{,}65$; 3) $m_x = 9{,}49$, $C_v = 0{,}45$, $C_s = 1{,}93$.

Пример 4.9. Рассчитать минимальный летне-осенний суточный расход воды 90 %-ной обеспеченности реки Устья – д. Бестужево (табл. 4.15), используя кривую обеспеченностей Лог-Пирсона III типа.

Решение.

1. Логарифмируем значения исходного ряда (берем натуральный логарифм).
2. Определяем статистические характеристики исходного ряда и ряда логарифмов (среднее значение, СКО, C_v, C_s).

Таблица 4.15

Минимальные летне-осенние суточные расходы воды;
р. Устья – д. Бестужево

№	Год	Q м^3/с	ln(Q)	№	Год	Q м^3/с	ln(Q)	№	Год	Q м^3/с	ln(Q)
1	1943	5,00	1,609	25	1967	8,98	2,195	49	1991	9,35	2,235
2	1944	4,00	1,386	26	1968	15,0	2,708	50	1992	9,00	2,197
3	1945	4,00	1,386	27	1969	15,5	2,741	51	1993	25,8	3,250
4	1946	4,67	1,541	28	1970	8,98	2,195	52	1994	10,5	2,351
5	1947	19,6	2,976	29	1971	9,56	2,258	53	1995	8,60	2,152
6	1948	18,4	2,912	30	1972	7,75	2,048	54	1996	8,60	2,152
7	1949	9,80	2,282	31	1973	6,96	1,940	55	1997	6,77	1,913
8	1950	10,2	2,322	32	1974	6,81	1,918	56	1998	18,1	2,896
9	1951	7,40	2,001	33	1975	6,70	1,902	57	1999	6,44	1,863
10	1952	23,8	3,170	34	1976	11,5	2,442	58	2000	8,50	2,140
11	1953	12,0	2,485	35	1977	6,80	1,917	59	2001	8,30	2,116
12	1954	8,83	2,178	36	1978	21,9	3,086	60	2002	7,98	2,077
13	1955	7,72	2,044	37	1979	13,0	2,565	61	2003	9,26	2,226
14	1956	17,0	2,833	38	1980	11,2	2,416	62	2004	11,5	2,442
15	1957	12,5	2,526	39	1981	8,19	2,103	63	2005	8,83	2,178
16	1958	11,1	2,407	40	1982	8,98	2,195	64	2006	5,47	1,699
17	1959	7,05	1,953	41	1983	8,61	2,153	65	2007	11,2	2,416
18	1960	6,52	1,875	42	1984	24,8	3,211	66	2008	11,3	2,425
19	1961	15,0	2,708	43	1985	13,1	2,573	67	2009	8,10	2,092
20	1962	12,2	2,501	44	1986	8,98	2,195	68	2010	6,00	1,792
21	1963	9,72	2,274	45	1987	29,1	3,371	Среднее		10,95	2,30
22	1964	10,5	2,351	46	1988	11,2	2,416	СКО		5,21	0,42
23	1965	13,1	2,573	47	1989	12,0	2,485	C_v		0,48	0,18
24	1966	8,48	2,138	48	1990	10,5	2,351	C_s		1,62	0,40

3. По таблице ординат Пирсона III типа (прил.1) в зависимости от коэффициента асимметрии ряда логарифмов ($C_{s(z)}$ =0,40) для обеспеченности p = 90% определяется нормированная ордината $t_{90\%}$ = –1,23.
4. По формуле (4.95) рассчитывается значение $z_{90\%}$:
   $z_{90\%} = t_{90\%}\ \sigma_{(z)} + m_z = -1{,}23 \cdot 0{,}42 + 2{,}30 = 1{,}78.$
5. По формуле (4.96) определяем расчетный расход:
   $Q_{90\%} = \exp(z_{90\%}) = \exp(1{,}78) = 5{,}95.$

Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей для этого ряда представлены на рис. 4.16.

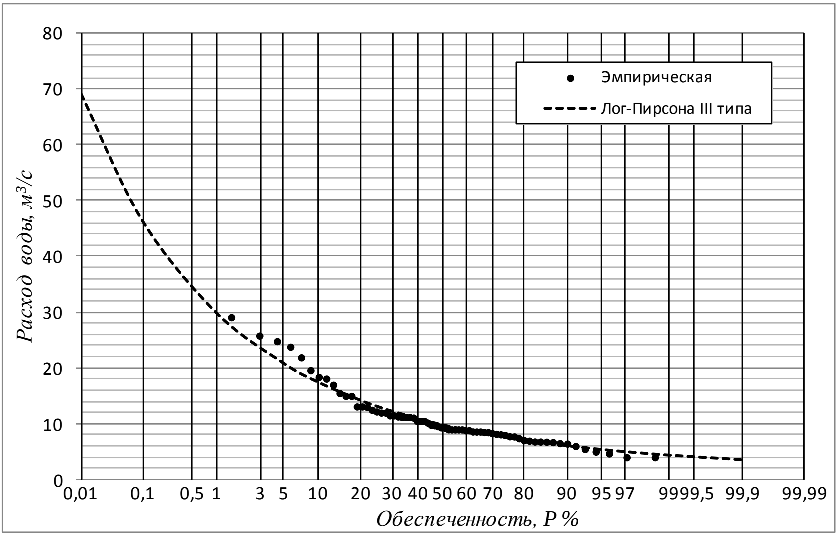


Рис. 4.16. Эмпирическая и аналитическая кривая обеспеченностей Лог-Пирсона III типа для минимальных летне-осенних суточных расходов воды; р. Устья – д. Бестужево.

Описанный в примере вариант расчета (с использованием таблиц) можно применять как при положительной, так и при отрицательной асимметрии. Если $C_{s(z)}$ положительное, то распределение Лог-Пирсона III типа называют трехпараметрическим логарифмическим гамма-распределением. При отрицательной асимметрии: $-\infty < x < e^{\gamma}$. При $C_{s(z)} = 0$ распределение Лог-Пирсона III типа превращается в лог-нормальное распределение.

4.6. Распределение Крицкого-Менкеля (трехпараметрическое степенное гамма-распределение)

Кривая распределения вероятностей Пирсона III типа, широко используемая в практике гидрологических расчетов, обладает одним существенным недостатком: при $C_s < 2C_v$ она уходит в область отрицательных значений, что при расчетах расходов воды накладывает на ее использование определенные ограничения.

В середине сороковых годов 20-го века российские гидрологи С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель разработали распределение с диапазоном изменения случайной переменной: $(0 \le x < \infty)$, и пригодное для всех реально встречающихся на практике положительных соотношений C_s и C_v.

В качестве исходной модели они приняли кривую Пирсона III типа при $C_s = 2C_v$ (двухпараметрическое Г-распределение). Интегральная функция Г-распределения для модульных коэффициентов имеет вид:

$$G(z) = \frac{\gamma^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \int_0^z s^{\gamma-1} e^{-\gamma s} ds, \qquad (4.106)$$

где Г(.) – гамма-функция; $\bar{z} = 1$; $C_s = 2C_v$; $\gamma = 1/C_{v,z}$; s – переменная интегрирования;

Авторы трансформировали аргумент z в новую переменную

$$k = az^b, \qquad (4.107)$$

где a и b – параметры. При этом предполагалось, что математическое ожидание новой переменной равно единице, т.е.

$$\mathbf{M}[k] = \mathbf{M}[az^b] = 1. \qquad (4.108)$$

Подставляя в выражение (4.106) $z = (k/a)^{1/b}$ и имея ввиду, что $f(k) = dG(k)/d(k)$ – получаем выражение для функции плотности вероятности нового распределения:

$$f(k) = \frac{\gamma^{\gamma}}{a^{\gamma/b}\Gamma(\gamma)b} e^{-\gamma(k/a)^{1/b}} k^{(\gamma/b)-1}. \qquad (4.109)$$

Начальный момент i-го порядка этого распределения связан с параметрами γ, a и b соотношением:

$$\mu_i^{\circ} = \frac{\Gamma(\gamma + ib)a^i}{\Gamma(\gamma)\gamma^{ib}}. \qquad (4.110)$$

Из выражения (4.110), в частности, следует, что

$$\mathbf{M}[k] = \mu_1^{\circ} = \frac{\Gamma(\gamma + b)a}{\Gamma(\gamma)\gamma^b}. \qquad (4.111)$$

А так как по условию $\mathbf{M}[k] = 1$, то, приравняв (4.111) единице, получаем выражение для параметра a:

$$a = \frac{\Gamma(\gamma)\gamma^b}{\Gamma(\gamma + b)}. \qquad (4.112)$$

Подставляя (4.112) в (4.109), можно получить выражение кривой плотности вероятности Крицкого-Менкеля, записанное через Г-функцию:

$$f(k)=\left[\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{\gamma/b}\frac{1}{\Gamma(\gamma)|b|}k^{\frac{\gamma}{b}-1}\exp\left\{-\left[k\frac{\Gamma(\gamma+b)}{\Gamma(\gamma)}\right]^{1/b}\right\}. \quad (4.113)$$

Это выражение определяется двумя параметрами γ и b, которые с учетом (4.110) могут быть выражены через второй и третий начальные моменты. В свою очередь μ_2° и μ_3° можно выразить через C_v и C_s:

$$C_v=\sqrt{\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+2b)}{\Gamma^2(\gamma+b)}-1}\,, \quad (4.114)$$

$$C_s=\frac{\dfrac{\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\gamma+3b)}{\Gamma^3(\gamma+b)}-3\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+2b)}{\Gamma^2(\gamma+b)}+2}{\left[\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma+2b)}{\Gamma^2(\gamma+b)}-1\right]^{3/2}}. \quad (4.115)$$

Заметим, что при $b = 1$ $C_s = 2C_v$, если при этом $\gamma = 1$, то $C_v = 1$.

Полученное распределение является двухпараметрическим, однако для того, чтобы в дальнейшем перейти от модульных коэффициентов (k) к искомой СВ X, необходимо знать третий параметр – математическое ожидание (m_x). Примеры кривых распределения Крицкого-Менкеля для различных сочетаний C_s и C_v представлены на рис. 4.17-4.20.

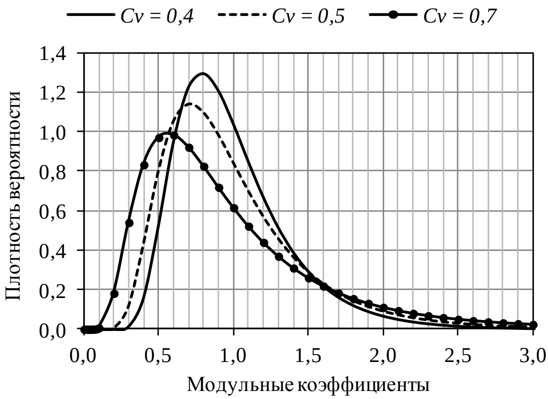


Рис.4.17. Функции плотности вероятности распределения Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах при $C_s/C_v = 4$ и различных значениях C_v.

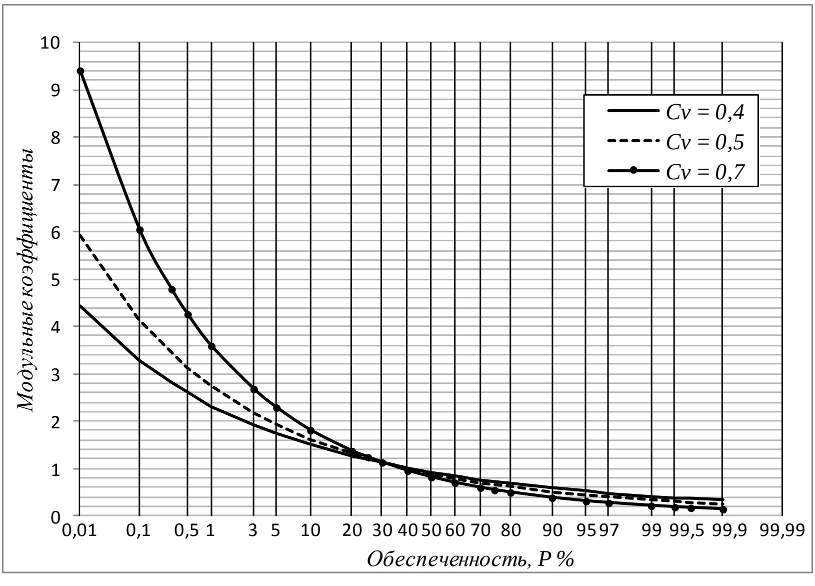


Рис.4.18. Кривые обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах при $C_s/C_v = 4$ и различных значениях коэффициента вариации.

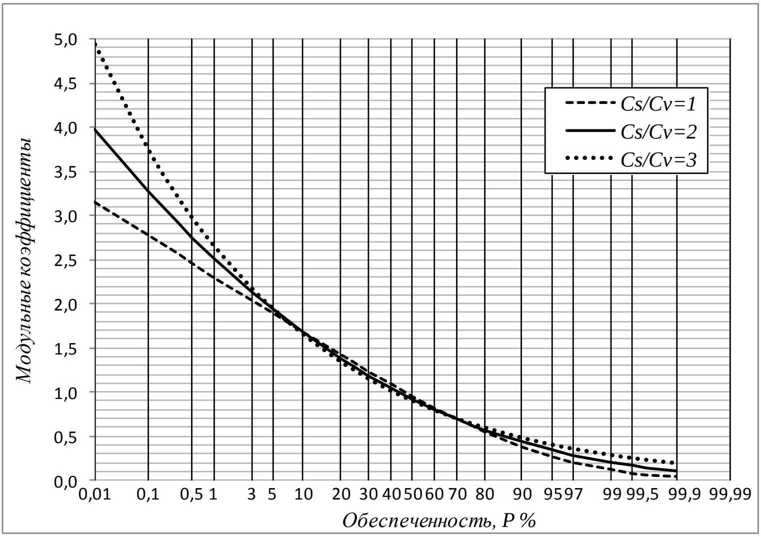


Рис.4.19. Кривые обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах при $C_v = 0{,}5$ и различных значениях C_s/C_v.

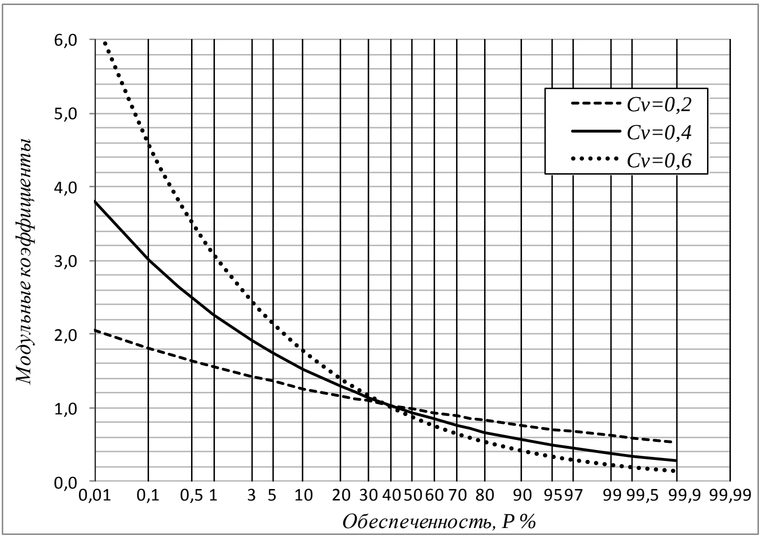


Рис.4.20. Кривые обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах при $C_s/C_v = 3$ и различных значениях коэффициента вариации.

В российской гидрологической литературе имеет место некоторая терминологическая путаница. Распределение Крицкого-Менкеля иногда называют «трехпараметрическим гамма-распределением», в то же время в литературе по прикладной статистике этот термин применяют к классическому гамма-распределению с дополнительным (третьим) параметром сдвига. Таким образом, трехпараметрическое гамма-распределение – это распределение Пирсона III типа с положительной асимметрией, а распределение Крицкого-Менкеля сами авторы называли трехпараметрическим *степенным* гамма-распределением.

К недостаткам данного распределения следует отнести то, что существуют определенные вычислительные трудности при расчете параметров b и γ по заданным значениям C_s и C_v. В частности в работе [15] отмечается, что система уравнений (4.114-4.115) не имеет решения вдоль линии

$$C_s = 3C_v + C_v^3, \tag{4.116}$$

и приходится пользоваться приближенными решениями. При этом действуют следующие ограничения для параметров:

$$\begin{cases} \gamma > 0, \quad b \neq 0, \quad \gamma + 3b > 0, \\ \text{если } C_s < 3C_v + C_v^3, \text{ то } b > 0, \\ \text{если } C_s > 3C_v + C_v^3, \text{ то } b < 0. \end{cases} \tag{4.117}$$

Поскольку функцию обеспеченностей Крицкого-Менкеля нельзя выразить через элементарные функции, ее ординаты представляют в виде таблиц (прил. 2). Таблицы составлены в модульных коэффициентах и позволяют определить значение $k_р$ в зависимости от (C_s/C_v), C_v и расчетной обеспеченности $P(\%)$. Значения $k_р$ получены путем численного интегрирования выражения (4.113). Впервые такие таблицы были опубликованы Д. В. Коренистовым (1948 г.). Наиболее полные таблицы кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля даны в [11]. Они охватывают диапазон изменения C_s/C_v от 0,5 до 6,0 (с шагом 0,5) и достаточно широкий диапазон значений C_v.

В Российской практике дорожного и строительного проектирования кривая Крицкого-Менкеля в течение многих лет используется в качестве основной аналитической кривой обеспеченностей при расчетах среднегодовых и максимальных расходов воды, обеспечивая высокую надежность получаемых результатов.

В заключение еще раз перечислим основные особенности данной кривой.

1. Кривая является трехпараметрической, для ее построения необходимо знать: среднее значение, коэффициент вариации (C_v) и соотношение (C_s/C_v).
2. Кривая плотности вероятности является одномодальной с положительной асимметрией.
3. Нижним пределом кривой всегда является ноль.
4. Кривая Крицкого-Менкеля не ограничена верхним пределом.
5. При $C_s = 2C_v$ кривая превращается в двухпараметрическое Г-распределение и совпадает с кривой Пирсона III типа.

Оценка параметров распределения

Метод моментов

Оценки параметров распределения рассчитываются по формулам (3.3, 3.7-3.8). Однако при больших значениях коэффициентов вариации ($C_v \geq 0,6$) начинает сказываться отрицательная смещенность моментных оценок. В этом случае рекомендуется выполнять расчет методом наибольшего правдоподобия.

Метод наибольшего правдоподобия

На практике параметры распределения Крицкого-Менкеля C_v и C_s определяются на основе приближенного метода наибольшего правдоподобия, разработанного Е. Г. Блохиновым. Оценка параметров производится в два этапа.

На первом этапе рассчитываются вспомогательные статистики λ_2 и λ_3 :

$$\lambda_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \lg k_i}{n-1}, \qquad \lambda_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \lg k_i}{n-1}, \tag{4.118}$$

где $k_i = x_i / \bar{x}$ – модульные коэффициенты; $\bar{x}$ – среднее арифметическое ряда.

На втором этапе по специально разработанным номограммам определяются значения C_v и (C_s /C_v). Фрагмент такой номограммы представлен на рис.4.21.

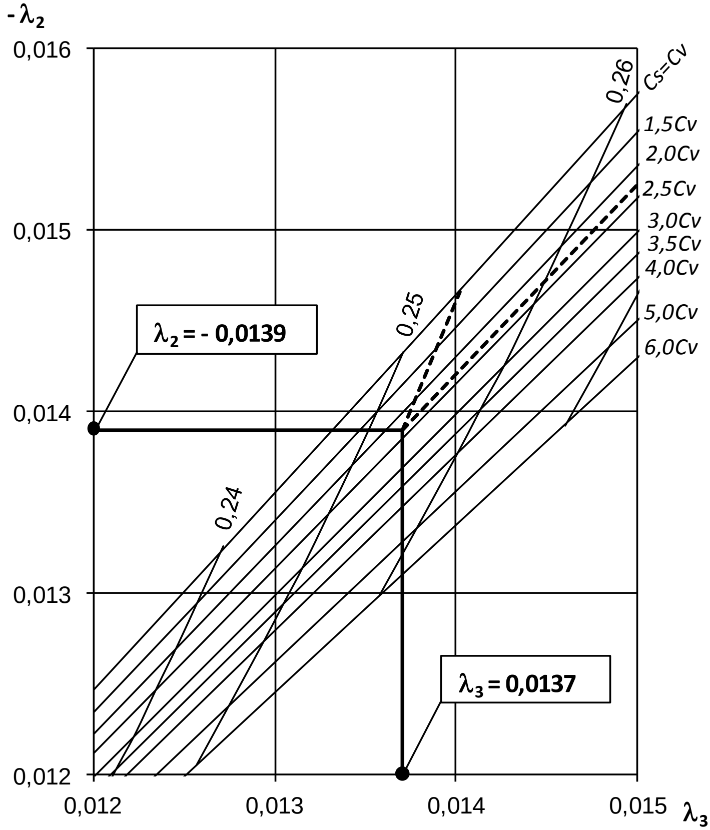


Рис.4.21. Фрагмент номограммы для вычисления параметров распределения Крицкого-Менкеля C_v и C_s методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от λ_2 и λ_3. При $\lambda_2 = -0{,}0139$ и $\lambda_3 = 0{,}0137$ получаем: $C_v = 0{,}25$(с округлением до сотых); (C_s /C_v) = 2,5 (с округлением до 0,5).

Полный набор номограмм дан в приложении 3. Крупноформатные номограммы входят в комплект «Атласа расчетных гидрологических карт и номограмм» (Л.: Гидрометеоиздат 1986).

Считается, что полученные таким образом оценки C_v и C_s являются состоятельными, эффективными и имеют меньшую смещенность по сравнению с моментными оценками.

Однако на практике не редки ситуации, когда выборочные λ_2 и λ_3 приводят к выходу за пределы номограмм, т. е. решение отсутствует. В этом случае можно использовать сокращенный метод наибольшего правдоподобия.

При реализации сокращенного метода статистика λ_3 не рассчитывается, а вместо нее используется районное соотношение C_s/C_v. Зная λ_2 и C_s/C_v, по номограмме можно определить коэффициент вариации.

Следует подчеркнуть, что вариант с подбором отношения C_s/C_v на практике применяется и в тех случаях, когда решение методом приближенного наибольшего правдоподобия получено, но имеется существенное отклонение эмпирических точек от аналитической кривой в области больших или малых обеспеченностей. В результате – обеспеченность крайней точки, полученная сносом на аналитическую кривую, может давать вероятность превышения порядка 1 раз в 1000 лет, что в большинстве случаев не соответствует действительности. Если ряд однороден, то отклонение точек обычно связывают с погрешностью определения коэффициента асимметрии, которая при имеющейся длине выборок составляет не менее 30%, что и дает основание корректировать отношение C_s/C_v. Однако при больших C_v значительную погрешность может иметь не только коэффициент асимметрии, но и коэффициент вариации (прядка 10-20%).

Один из вариантов решения проблемы – оптимизация не только отношения C_s/C_v, но и коэффициента вариации. При этом скорректированные значения C_s и C_v не должны выходить за пределы их интервальной оценки при некотором заданном уровне значимости.

Целесообразно применять следующие интервальные оценки:

$$(C_v^* - \sigma_{Cv}) \le C_v < (C_v^* + \sigma_{Cv}), \tag{4.119}$$

$$(C_s^* - \sigma_{Cs}) \le C_s < (C_s^* + \sigma_{Cs}), \tag{4.120}$$

где C_v^* и C_s^* – эмпирические оценки коэффициентов вариации и асимметрии; σ_{Cv} и σ_{Cs} – стандартные ошибки коэффициентов вариации и асимметрии.

В данном случае предполагается, что истинные значения параметров с вероятностью примерно 68,3% не выходят за пределы их среднеквадратической погрешности, что соответствует уровню значимости $2\alpha = 31{,}7\%$.

Рассмотрим в качестве примера ряд максимальных дождевых расходов воды реки Костромы в створе д. Гнездиково. В табл.4.16 представлены основные статистические характеристики этого ряда, полученные методом приближенного наибольшего правдоподобия с использованием кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля.

Как видно из таблицы ряд имеет высокий коэффициент вариации, но при этом гипотеза об однородности ряда не опровергается, ни по критерию Стьюдента, ни по критерию Фишера.

Высокая вариация ряда объясняется тем, что в этом регионе крупные дождевые паводки в многоводные годы могут превосходить паводки засушливых лет в несколько десятков раз.

Таблица 4.16

Статистические характеристики ряда максимальных расходов дождевых паводков; р. Кострома – д. Гнездиково; *n* = 75 лет

$\overline{Q}$, м^3/с	λ_2	λ_3	C_v	C_s	C_s/C_v	σ_Q	σ_{Cv}	σ_{Cs}
44,5	-0,25	0,20	1,10	2,75	2,5	5,65	0,13	1,12

Используя данные табл. 4.16 получаем интервальные оценки параметров

$$0{,}97 \le C_v < 1{,}23, \qquad (4.121)$$

$$1{,}63 \le C_s < 3{,}87. \qquad (4.122)$$

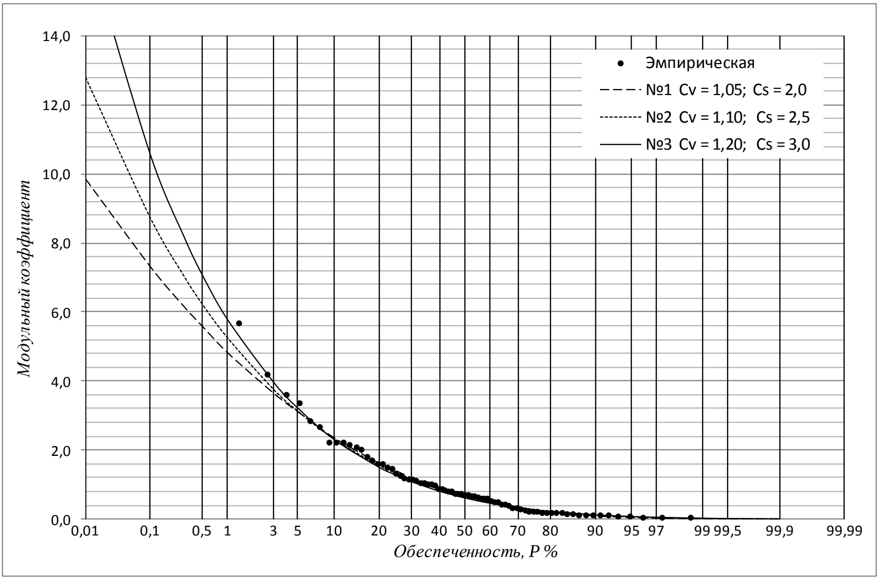
В рамках принятого алгоритма в дальнейших расчетах статистика λ_3 не используется, а значение C_v определяется в зависимости от λ_2 и отношения C_s/C_v. При фиксированном λ_2 изменение C_s/C_v приводит и к изменению коэффициента вариации (табл.4.17).

Как видно из табл.4.17, условиям (4.121-4.122) удовлетворяют только варианты №2 и №3. На рис.4.22 представлены аналитические кривые обеспеченностей, построенные с использованием параметров для вариантов 2 и 3 (соответственно кривые 2 и 3 на рис. 4.22). Кроме того на рисунке представлена аналитическая кривая обеспеченностей, построенная с использованием параметров полученных методом моментов (кривая №1; C_v = 1,05; C_s = 2,0).

Таблица 4.17

Значения параметров C_v и C_s при различных C_s/C_v и фиксированном λ_2 для максимальных расходов дождевых паводков; р. Кострома – д. Гнездиково

№ варианта	Входные параметры		Результат расчета	
	λ_2	C_s/C_v	C_v	C_s
1	-0,25	2	0,96	1,92
2	-0,25	2,5	1,10	2,75
3	-0,25	3	1,20	3,60
4	-0,25	3,5	1,25	4,38



№1 – расчет методом моментов; №2 – расчет методом наибольшего правдоподобия; №3 – расчет методом наибольшего правдоподобия с корректировкой параметров.

Рис.4.22. Эмпирическая и аналитические кривые обеспеченностей максимальных расходов дождевых паводков; р. Кострома – д. Гнездиково.

Как видно на рисунке, вариант №3 дает наилучшее соответствие эмпирической и аналитической кривых обеспеченностей в их верхней части. То есть наилучшая сходимость получена при небольшой корректировке C_v и C_s. Кривая, построенная с использованием моментных оценок, ожидаемо хуже других соответствует эмпирическим точкам, так как при больших Cv смещённость этих оценок становится существенной.

Графоаналитический метод (метод квантилей)

Хотя кривая Крицкого-Менкеля рекомендуется нормативными документами как основная расчетная кривая, до последнего времени она не использовалась для оценки параметров распределения методом квантилей. Причиной этого является отсутствие для распределения Крицкого-Менкеля однозначной зависимости между коэффициентом асимметрии и коэффициентом скошенности S.

На кафедре гидрологии суши РГГМУ была разработана методика, учитывающая специфику данной кривой [23]. В отличие от стандартной схемы здесь наряду с обычным коэффициентом скошенности S, рассчитывается коэффициент S_2:

$$S = \left(x_5 + x_{95} - 2x_{50}\right) / \left(x_5 - x_{95}\right), \tag{4.123}$$

$$S_2 = 2x_{50} / \left(x_5 - x_{95}\right), \tag{4.124}$$

где x_5, x_{50}, x_{95} – ординаты сглаженной эмпирической кривой для обеспеченностей соответственно P = 5%, P = 50%, P = 95%.

Как показали исследования, при фиксированном значении C_s/C_v коэффициент S_2 однозначно зависит от S (при $0{,}5 \le C_s/C_v \le 6$).

Для удобства использования этого метода разработаны номограммы, позволяющие получить значения C_v и C_s/C_v в зависимости от коэффициента скошенности S и параметра $\ln(S_2)$ (рис.4.23-4.24). При построении номограмм использовались ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля, опубликованные в [11].

Схема работы с номограммами следующая: значение C_v снимается с номограммы в зависимости от параметров S и $\ln(S_2)$, а полученное по номограмме значение C_s/C_v округляется до 0,5.

Значение C_s/C_v можно определять и методом подбора. В этом случае параметр S не используется, а значение C_v определяется в зависимости от $\ln(S_2)$ и отношения C_s/C_v.

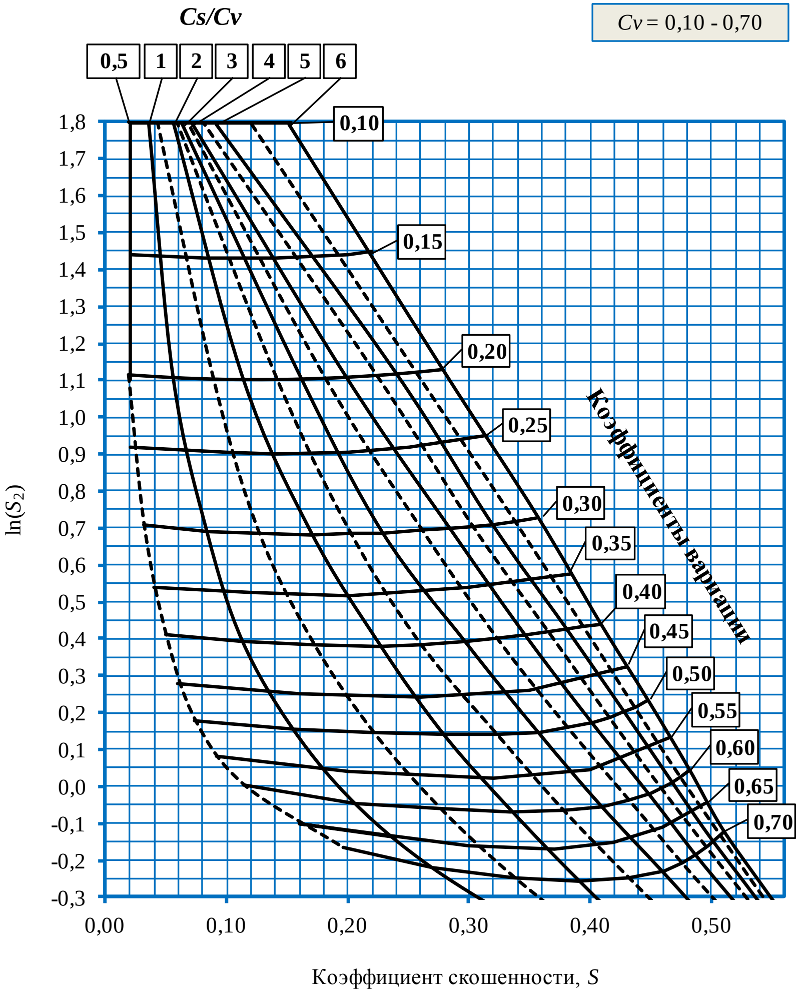
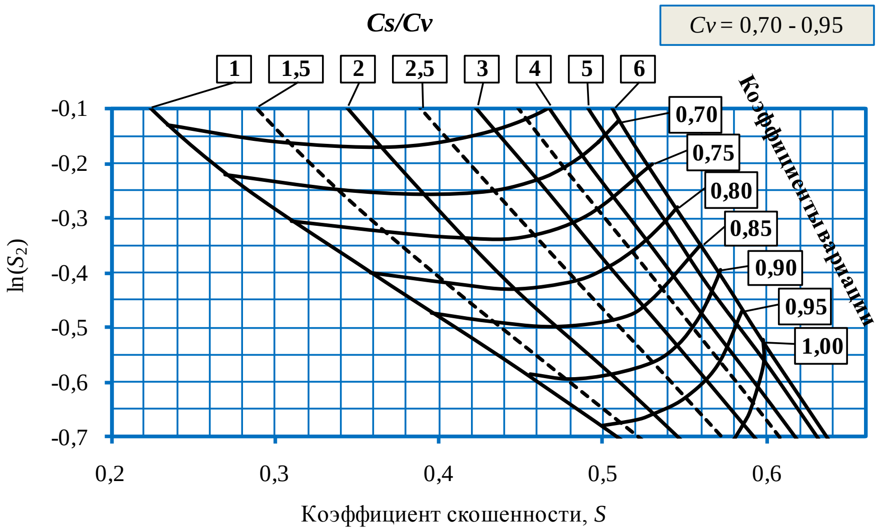


Рис.4.23. Номограмма для определения C_v и C_s/C_v методом квантилей при использовании кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля (C_v = 0,10-0,70).



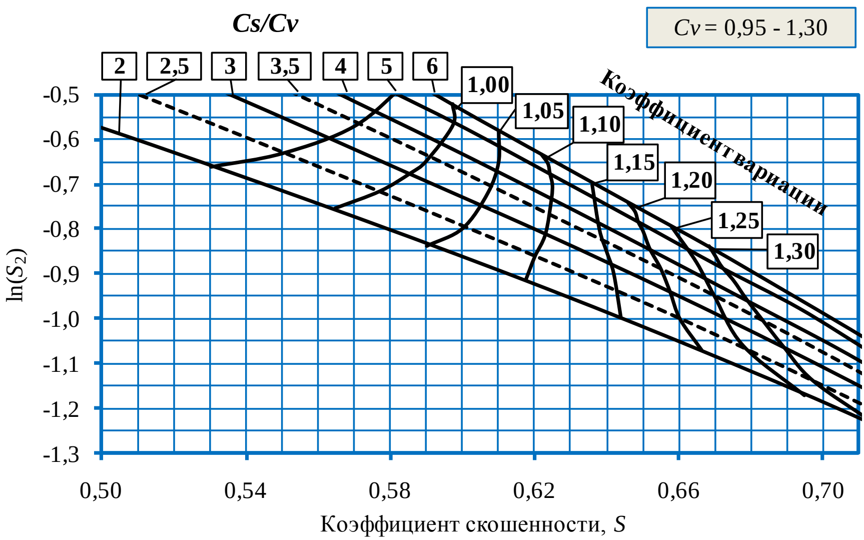


Рис.4.24. Номограммы для определения C_v и C_s/C_v методом квантилей при использовании кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля (C_v = 0,70-0,95; C_v = 0,95-1,30).

В процессе подбора проверяется несколько вариантов значений C_s/C_v . В качестве расчетных принимаются такие значения C_s/C_v и C_v , при которых имеет место наилучшее соответствие эмпирической и аналитической кривых обеспеченностей.

В целом схема работы с номограммами аналогична той, которая применяется для расчета параметров распределения методом приближенного наибольшего правдоподобия.

При использовании графоаналитического метода следует учитывать особенности кривой Крицкого-Менкеля. В частности то, что данная кривая имеет положительную асимметрию и сглаженная эмпирическая кривая на нормальной клетчатке должна иметь выпуклость направленную вниз. Для рядов с отрицательной асимметрией следует использовать другие типы кривых.

Графический метод

Для кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля разработан набор спрямляющих клетчаток вероятностей для различных значений соотношения C_s/C_v – от $C_s/C_v = 0{,}5$ до $C_s/C_v = 6{,}0$. Клетчатки входят в комплект «Атласа расчетных гидрологических карт и номограмм» (Л.: Гидрометеоиздат 1986).

При использовании этого метода по имеющемуся ряду рассчитывается среднее значение и ординаты эмпирической кривой обеспеченностей в модульных коэффициентах.

В процессе исследований выбирается клетчатка вероятностей, на которой эмпирическая кривая обеспеченностей принимает вид прямой линии.

Метод позволяет определить соотношение C_s/C_v и C_v (см. раздел 3.6) однако точность оценки коэффициента вариации ниже, чем при использовании аналитических методов.

Графический метод обычно используется для подбора (или контроля) соотношения C_s/C_v .

Пример 4.10. Определить максимальный расход весеннего половодья 1%-ной обеспеченности $Q_{1\%}$ на р. Березайка – с. Устье (табл.4.18), используя кривую обеспеченностей Крицкого-Менкеля. Расчет параметров распределения выполнить: 1) методом моментов; 2) методом наибольшего правдоподобия; 3) методом квантилей.

Таблица 4.18

Максимальные расходы весеннего половодья; р. Березайка – с. Устье

№	Год	Q, м^3/с	k	lg(k)	k·lg(k)	№	Год	Q, м^3/с	k	lg(k)	k·lg(k)
1	1952	40,7	0,428	–0,369	–0,158	16	1967	64,8	0,681	–0,167	–0,114
2	1953	114	1,199	0,079	0,094	17	1968	77,0	0,810	–0,092	–0,074
3	1954	34,8	0,366	–0,437	–0,160	18	1969	64,8	0,681	–0,167	–0,114
4	1955	196	2,061	0,314	0,647	19	1970	62,7	0,659	–0,181	–0,119
5	1956	136	1,430	0,155	0,222	20	1981	66,4	0,698	–0,156	–0,109
6	1957	115	1,209	0,082	0,100	21	1982	77,4	0,814	–0,090	–0,073
7	1958	145	1,524	0,183	0,279	22	1983	81,2	0,854	–0,069	–0,059
8	1959	146	1,535	0,186	0,286	23	1984	87,0	0,915	–0,039	–0,035
9	1960	82,0	0,862	–0,064	–0,056	24	1985	82,0	0,862	–0,064	–0,056
10	1961	79,9	0,840	–0,076	–0,064	25	1986	128	1,346	0,129	0,174
11	1962	113	1,188	0,075	0,089	26	1987	106	1,114	0,047	0,052
12	1963	64,2	0,675	–0,171	–0,115	27	1988	84,8	0,892	–0,050	–0,044
13	1964	49,5	0,520	–0,284	–0,148	Среднее:		95,12	Сумма:	–0,978	0,958
14	1965	87,0	0,915	–0,039	–0,035					λ_2	λ_3
15	1966	183	1,924	0,284	0,547					–0,038	0,037

Решение 1 (метод моментов).

1. По эмпирическим данным методом моментов (по формулам 3.3, 3.6-3.8) определяем: $\overline{Q}$ = 95,1; C_v = 0,42; C_s = 0,93.
2. По рассчитанным C_v и C_s определяем C_s/C_v = 0,93/0,42 = 2,2.

   Полученное значение округляем до 0,5 в большую сторону, получаем C_s/C_v = 2,5. Заметим, что при расчете минимального стока округление следует проводить в меньшую сторону.
3. По таблицам (прил. 2) при C_s/C_v = 2,5 в зависимости от C_v определяем модульный коэффициент 1%-ной обеспеченности. Интерполяция по C_v выполняется до сотых. В данном случае при C_v = 0,40 $k_{1\%}$ = 2,21, а при C_v = 0,50 $k_{1\%}$ = 2,59, следовательно для расчетного C_v = 0,42 $k_{1\%}$ = 2,29.
4. Умножая модульный коэффициент на $\overline{Q}$, получаем расчетный расход: $Q_{1\%} = k_{1\%} \cdot \overline{Q}$ = 2,29·95,1 = 218 м^3/с.

Решение 2 (метод наибольшего правдоподобия).

1. По формулам (4.118) определяем статистики λ_2 и λ_3 (см. табл.4.18): λ_2 = –0,038; λ_3 = 0,037.
2. По номограмме (прил.3) в зависимости от λ_2 и λ_3 определяем значения искомых статистических характеристик (рис.4.25): C_v = 0,42 (с округлением до сотых); C_s/C_v = 2,5 (с округлением до 0,5); В данном случае результаты расчета методом моментов и методом наибольшего правдоподобия практически совпадают, чего и следовало ожидать. Заметные различия будут иметь место только при больших значениях коэффициента вариации (C_v > 0,6).
3. Дальнейший расчет выполняется также, как в решении №1 (пункты 3-4).

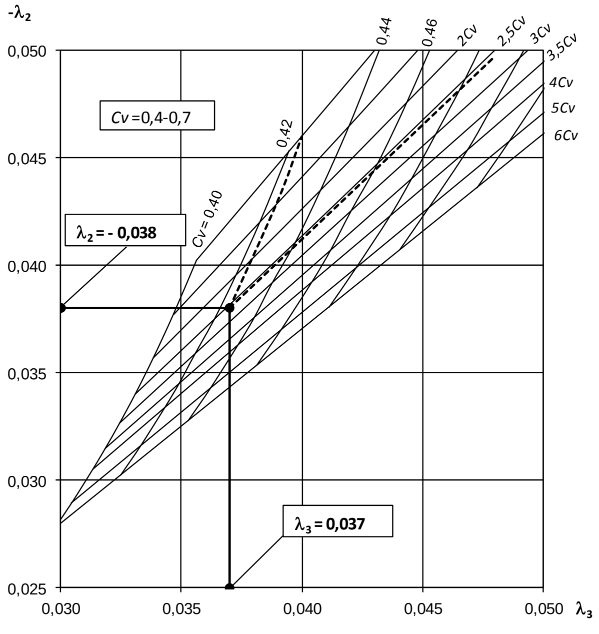


Рис.4.25. Фрагмент номограммы для вычисления параметров распределения Крицкого-Менкеля C_v и C_s методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от λ_2 и λ_3 для максимальных расходов весеннего половодья; р. Березайка – с. Устье.

Решение 3 (метод квантилей).

1. Стоим эмпирическую кривую обеспеченностей (см. раздел 2).
2. В поле точек проводим сглаженную кривую обеспеченностей.
3. По сглаженной кривой обеспеченностей определяем значения опорных ординат (рис.4.26): $Q_{5\%} = 180$, $Q_{50\%} = 87$, $Q_{95\%} = 37$.

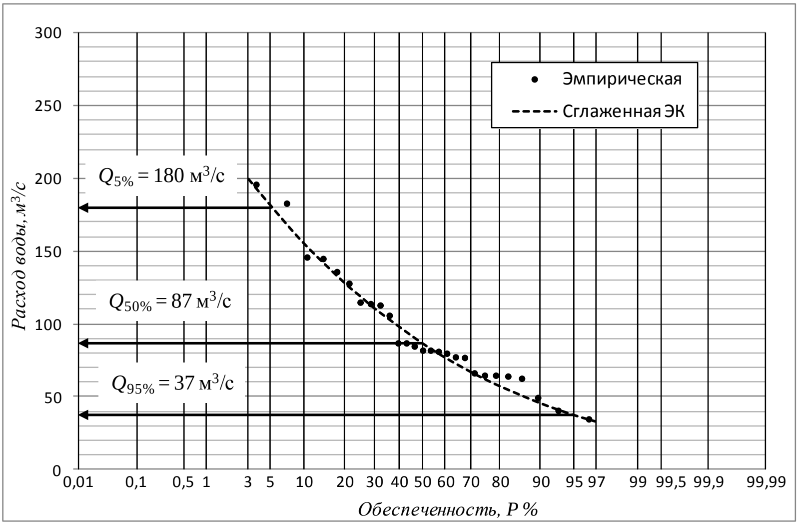


Рис. 4.26. Схема определения опорных ординат по сглаженной эмпирической кривой обеспеченностей для ряда максимальных расходов весеннего половодья; р. Березайка – с. Устье.

4. По формуле (4.123) определяем коэффициент скошенности: $S = (180 + 37 - 2 \cdot 87)/(180-37) = 0{,}30$.
5. По формуле (4.124) определяем коэффициент S_2 и его натуральный логарифм: $S_2 = (2 \cdot 87)/(180-37) = 1{,}22$; $\ln(S_2) = 0{,}20$.
6. В зависимости от S и $\ln(S_2)$ по номограмме (рис.4.23) определяем значения искомых статистических характеристик (рис.4.25): $C_v = 0{,}47$ (с округлением до сотых); $C_s/C_v = 2{,}5$ (с округлением до 0,5);
7. По таблицам (прил. 2) при $C_s/C_v = 2{,}5$ в зависимости от C_v определяем модульный коэффициент 1%-ной обеспеченности. В данном случае при $C_v = 0{,}40$ $k_{1\%} = 2{,}21$, а при $C_v = 0{,}50$ $k_{1\%} = 2{,}59$, следовательно для расчетного $C_v = 0{,}47$ $k_{1\%} = 2{,}48$.

8. Умножая модульный коэффициент на $\overline{Q}$, получаем расчетный расход: $Q_{1\%} = k_{1\%} \cdot \overline{Q}$ = 2,48·95,1 = 236 м^3/с.

В данном случае расход, рассчитанный методом квантилей оказался больше расхода, полученного аналитическими методами на 8% из-за более высокого коэффициента вариации (0,47 против 0,42). Это объясняется тем, что при проведении сглаженной кривой, мы прежде всего ориентировались на экстремальные расходы. Здесь как раз проявляется субъективизм метода. При коротких выборках подтягивание кривой обеспеченностей к максимальным значениям может привести к некоторому завышению расчетных расходов. Для сравнения на рис. 4.27 показаны аналитические кривые обеспеченностей при C_v = 0,42 и C_v = 0,47.

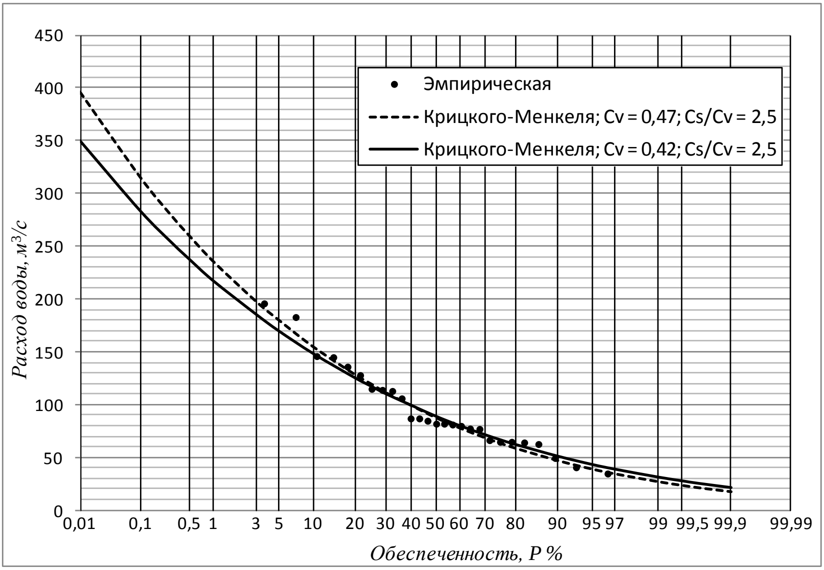


Рис. 4.27. Эмпирическая и аналитические (Крицкого-Менкеля) кривые обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья; р. Березайка – с. Устье.

4.7. Распределение Вейбулла

Распределение Вейбулла используется в статистической теории надежности для анализа интенсивности отказов различного оборудования. Во многих странах распределение Вейбулла применяется и для гидрологических расчетов. Однако в российской гидрологической практике распределение Вейбулла широкого распространения не получило.

Для классического двухпараметрического распределения Вейбулла функция плотности вероятности и функция обеспеченностей описываются выражениями

$$f(x) = (b/a)(x/a)^{(b-1)} \exp\left\{-(x/a)^b\right\}, \qquad (4.125)$$

$$P(x) = \exp\left\{-(x/a)^b\right\}, \qquad (4.126)$$

где: a – коэффициент масштаба, $a > 0$; b – коэффициент формы; $b > 0$; $0 \le x < \infty$.

Стандартные числовые характеристики и параметры распределения Вейбулла связаны следующими соотношениями:

$$m_x = a\Gamma(1 + 1/b), \qquad (4.127)$$

$$D_x = a^2\Gamma(1 + 2/b) - m_x^2, \qquad (4.128)$$

$$C_s = \frac{\Gamma(1+3/b)a^3 - 3m_x\Gamma(1+2/b)a^2 + 2m_x^3}{\sigma_x^3}, \qquad (4.129)$$

$$M_o = \frac{a(b-1)^{1/b}}{b^{1/b}},\ b > 1, \qquad (4.130)$$

$$M_e = a\ln(2)^{1/b}, \qquad (4.131)$$

где m_x – математическое ожидание; D_x – дисперсия; C_s – коэффициент асимметрии; M_o – мода; M_e – медиана; $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция.

При $b = 1$ распределение Вейбулла превращается в экспоненциальное распределение, при $b = 2$ – в распределение Релея.

Влияние коэффициента вариации на форму кривой плотности вероятности распределения Вейбулла показано на рис. 4.28.

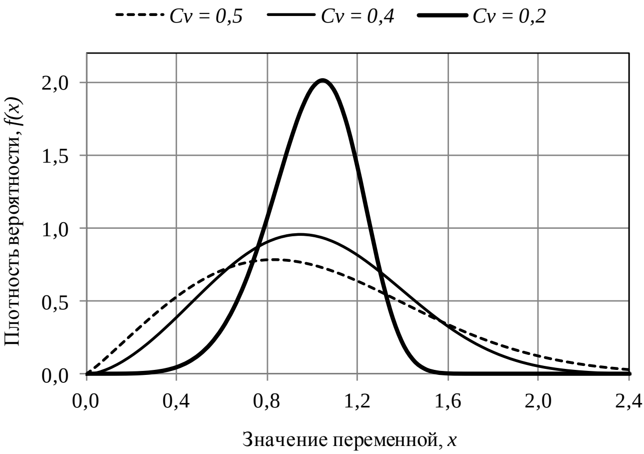


Рис. 4.28. Функция плотности вероятности двухпараметрического распределения Вейбулла при различных значениях коэффициента вариации при $m_x = 1$.

Для распределения Вейбулла параметры a и b аналитически не выражаются через статистические моменты. Для упрощения расчетов зависимость параметров a и b от коэффициента вариации (C_v) при $m_x = 1$ в настоящей работе представлена в графическом и табличном виде (рис. 4.29, табл.4.19).

Схема расчета ординат кривой обеспеченностей Вейбулла включает следующие этапы:

1. По исходному ряду определяются выборочное среднее ($\bar{x}$) и коэффициент вариации (C_v).
2. В зависимости от C_v по табл. 4.19 или графику 4.29 определяются параметры a и b.
3. Для заданных обеспеченностей рассчитываются модульные коэффициенты. Расчет производится по формуле, полученной из формулы (4.126):

$$k_{P\%} = \left[-\ln\left(P/100\right)a^b\right]^{1/b} \tag{4.132}$$

4. Расчетные значения переменной X определяются по формуле:

$$x_{P\%} = k_{P\%}\bar{x} \, . \tag{4.133}$$

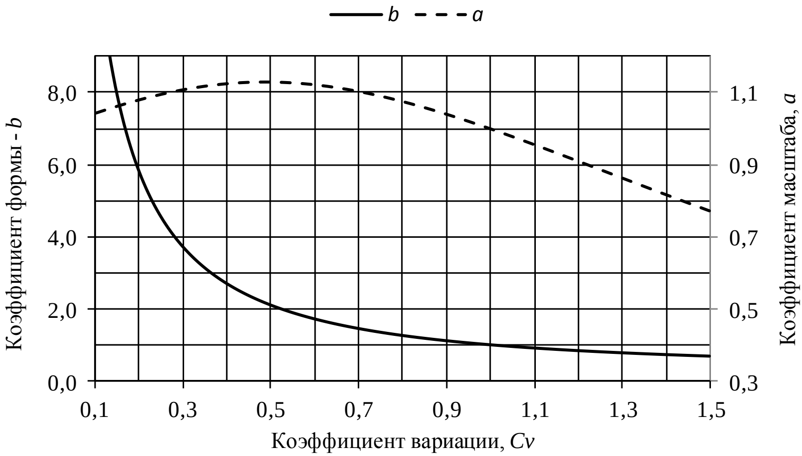


Рис. 4.29. Зависимость параметров двухпараметрического распределения Вейбулла (a и b) от коэффициента вариации при $m_x = 1$.

Двухпараметрическое распределение Вейбулла можно использовать для выборок с малой асимметрией. Как видно на рис. 4.30, при характерных для гидрологических рядов коэффициентах вариации ($0{,}31 < C_v < 1$) отношение $C_s/C_v < 2$, а при $C_v < 0{,}31$ отношение C_s/C_v отрицательное.

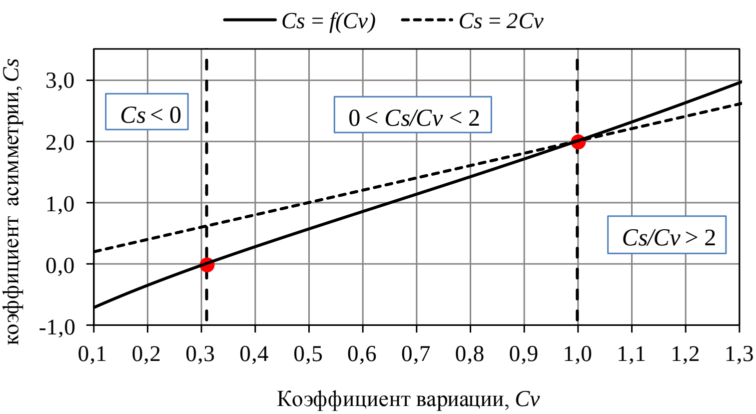


Рис. 4.30. Зависимость коэффициента асимметрии от коэффициента вариации для двухпараметрического распределения Вейбулла при $m_x = 1$.

Таблица 4.19

Значения параметров распределения Вейбулла в зависимости от коэффициента вариации при m_x = 1

C_v = 0,07-0,41

C_v	a	b	C_s
0,07	1,031	17,63	-0,83
0,08	1,035	15,35	-0,79
0,09	1,039	13,58	-0,75
0,10	1,043	12,15	-0,72
0,11	1,047	10,99	-0,68
0,12	1,051	10,03	-0,64
0,13	1,055	9,210	-0,60
0,14	1,059	8,510	-0,56
0,15	1,063	7,900	-0,53
0,16	1,066	7,380	-0,49
0,17	1,070	6,910	-0,46
0,18	1,073	6,500	-0,42
0,19	1,077	6,130	-0,39
0,20	1,080	5,800	-0,35
0,21	1,083	5,500	-0,32
0,22	1,086	5,220	-0,28
0,23	1,089	4,980	-0,25
0,24	1,092	4,750	-0,22
0,25	1,095	4,540	-0,18
0,26	1,098	4,350	-0,15
0,27	1,101	4,170	-0,12
0,28	1,103	4,010	-0,09
0,29	1,105	3,860	-0,06
0,30	1,108	3,710	-0,03
0,31	1,110	3,580	0,01
0,32	1,112	3,460	0,04
0,33	1,114	3,340	0,07
0,34	1,116	3,230	0,10
0,35	1,118	3,130	0,13
0,36	1,119	3,030	0,16
0,37	1,121	2,940	0,19
0,38	1,122	2,850	0,22
0,39	1,123	2,770	0,25
0,40	1,125	2,700	0,28
0,41	1,126	2,620	0,31

C_v = 0,42-0,76

C_v	a	b	C_s
0,42	1,126	2,550	0,34
0,43	1,127	2,490	0,36
0,44	1,128	2,420	0,40
0,45	1,128	2,360	0,42
0,46	1,129	2,310	0,45
0,47	1,129	2,250	0,48
0,48	1,129	2,200	0,51
0,49	1,129	2,150	0,54
0,50	1,129	2,100	0,57
0,51	1,129	2,060	0,59
0,52	1,128	2,010	0,62
0,53	1,128	1,970	0,65
0,54	1,127	1,930	0,68
0,55	1,127	1,890	0,71
0,56	1,126	1,850	0,74
0,57	1,125	1,820	0,76
0,58	1,124	1,780	0,80
0,59	1,123	1,750	0,82
0,60	1,122	1,720	0,85
0,61	1,120	1,690	0,87
0,62	1,119	1,660	0,90
0,63	1,117	1,630	0,93
0,64	1,115	1,600	0,96
0,65	1,113	1,570	0,99
0,66	1,112	1,550	1,02
0,67	1,109	1,520	1,05
0,68	1,108	1,500	1,07
0,69	1,105	1,470	1,11
0,70	1,103	1,450	1,13
0,71	1,101	1,430	1,16
0,72	1,098	1,410	1,18
0,73	1,096	1,390	1,21
0,74	1,093	1,370	1,24
0,75	1,091	1,350	1,27
0,76	1,088	1,330	1,30

Таблица 4.19 (продолжение)

Значения параметров распределения Вейбулла в зависимости от коэффициента вариации при m_x = 1

C_v = 0,77-1,11

C_v	a	b	C_s
0,77	1,084	1,310	1,33
0,78	1,081	1,290	1,36
0,79	1,079	1,280	1,38
0,80	1,076	1,260	1,41
0,81	1,072	1,240	1,45
0,82	1,070	1,230	1,47
0,83	1,065	1,210	1,50
0,84	1,063	1,200	1,52
0,85	1,058	1,180	1,56
0,86	1,056	1,170	1,58
0,87	1,051	1,150	1,62
0,88	1,048	1,140	1,64
0,89	1,045	1,130	1,67
0,90	1,039	1,110	1,71
0,91	1,036	1,100	1,73
0,92	1,033	1,090	1,76
0,93	1,030	1,080	1,78
0,94	1,027	1,070	1,81
0,95	1,020	1,050	1,86
0,96	1,016	1,040	1,89
0,97	1,012	1,030	1,91
0,98	1,008	1,020	1,94
0,99	1,004	1,010	1,97
1,00	1,000	1,000	2,00
1,01	0,996	0,990	2,03
1,02	0,991	0,980	2,06
1,03	0,987	0,971	2,09
1,04	0,983	0,962	2,12
1,05	0,979	0,953	2,15
1,06	0,974	0,944	2,18
1,07	0,970	0,935	2,21
1,08	0,965	0,927	2,24
1,09	0,961	0,918	2,28
1,10	0,956	0,910	2,31
1,11	0,952	0,902	2,34

C_v = 1,12-1,46

C_v	a	b	C_s
1,12	0,947	0,894	2,37
1,13	0,943	0,887	2,40
1,14	0,938	0,879	2,43
1,15	0,934	0,872	2,46
1,16	0,929	0,865	2,49
1,17	0,924	0,858	2,52
1,18	0,920	0,851	2,56
1,19	0,915	0,844	2,59
1,20	0,910	0,837	2,62
1,21	0,906	0,831	2,65
1,22	0,902	0,825	2,68
1,23	0,896	0,818	2,72
1,24	0,892	0,812	2,75
1,25	0,887	0,806	2,78
1,26	0,883	0,800	2,81
1,27	0,878	0,794	2,85
1,28	0,874	0,789	2,88
1,29	0,869	0,783	2,91
1,30	0,864	0,777	2,95
1,31	0,860	0,772	2,98
1,32	0,855	0,767	3,01
1,33	0,850	0,761	3,05
1,34	0,845	0,756	3,08
1,35	0,841	0,751	3,11
1,36	0,836	0,746	3,15
1,37	0,831	0,741	3,18
1,38	0,828	0,737	3,21
1,39	0,823	0,732	3,25
1,40	0,818	0,727	3,28
1,41	0,814	0,723	3,31
1,42	0,809	0,718	3,35
1,43	0,805	0,714	3,38
1,44	0,800	0,709	3,42
1,45	0,795	0,705	3,46
1,46	0,791	0,701	3,49

Таблица 4.19 (продолжение)

Значения параметров распределения Вейбулла в зависимости от коэффициента вариации при m_x = 1

C_v = 1,47-1,73

C_v	a	b	C_s
1,47	0,787	0,697	3,52
1,48	0,782	0,693	3,56
1,49	0,778	0,689	3,59
1,50	0,773	0,685	3,63
1,51	0,769	0,681	3,67
1,52	0,764	0,677	3,70
1,53	0,760	0,673	3,74
1,54	0,755	0,669	3,78
1,55	0,751	0,666	3,81
1,56	0,747	0,662	3,85
1,57	0,743	0,659	3,88
1,58	0,738	0,655	3,92
1,59	0,734	0,652	3,95
1,60	0,729	0,648	4,00
1,61	0,726	0,645	4,03
1,62	0,722	0,642	4,06
1,63	0,717	0,638	4,11
1,64	0,713	0,635	4,14
1,65	0,709	0,632	4,18
1,66	0,705	0,629	4,21
1,67	0,701	0,626	4,25
1,68	0,697	0,623	4,29
1,69	0,693	0,620	4,32
1,70	0,689	0,617	4,36
1,71	0,684	0,614	4,40
1,72	0,680	0,611	4,44
1,73	0,676	0,608	4,48

C_v = 1,74-2,0

C_v	a	b	C_s
1,74	0,672	0,605	4,52
1,75	0,668	0,602	4,57
1,76	0,663	0,599	4,61
1,77	0,660	0,597	4,64
1,78	0,656	0,594	4,68
1,79	0,651	0,591	4,73
1,80	0,649	0,589	4,76
1,81	0,644	0,586	4,80
1,82	0,641	0,584	4,83
1,83	0,636	0,581	4,88
1,84	0,633	0,579	4,91
1,85	0,629	0,576	4,96
1,86	0,626	0,574	5,00
1,87	0,621	0,571	5,05
1,88	0,618	0,569	5,08
1,89	0,615	0,567	5,11
1,90	0,610	0,564	5,17
1,91	0,607	0,562	5,20
1,92	0,604	0,560	5,24
1,93	0,600	0,558	5,28
1,94	0,596	0,555	5,33
1,95	0,592	0,553	5,37
1,96	0,589	0,551	5,41
1,97	0,586	0,549	5,45
1,98	0,582	0,547	5,49
1,99	0,579	0,545	5,53
2,00	0,576	0,543	5,57

Для рядов с более высокой асимметрией можно использовать трехпараметрическое распределение Вейбулла. Для этого распределения функция плотности вероятности и функция обеспеченностей имеют вид:

$$f(x)=\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{x-c}{a}\right)^{(b-1)}\exp\left[-\left(\frac{x-c}{a}\right)^{b}\right], \tag{4.134}$$

$$P(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-c}{a}\right)^b\right], \tag{4.135}$$

где: a – коэффициент масштаба, $a > 0$; b – коэффициент формы, $b > 0$; c – коэффициент сдвига, $0 \le c \le x_{\min}$; $c \le x < \infty$.

При использовании трехпараметрического распределения Вейбулла можно рекомендовать следующую схему расчета.

1. По исходному ряду X оцениваются числовые характеристики: среднее значение $\bar{x}$, стандартное отклонение σ_x, коэффициент вариации C_v, коэффициент асимметрии C_s и минимальное значение $x_{\min}$.
2. В зависимости от C_s исходного ряда по табл. 4.19 определяется значение коэффициента вариации C_v^* ряда Y. Ряды X и Y связаны соотношением: $y_i = x_i - c$.
3. Значение параметра сдвига определяется по формуле

$$c = \bar{x} - \frac{\sigma_x}{C_v^*}. \tag{4.136}$$

   Полученное по формуле (4.136) значение параметра c используется если $c < x_{\min.}$ Если $c > x_{\min}$ принимаем: $c = x_{\min}$, а C_v^* определяем по формуле:

$$C_v^* = C_v / (1 - k_{\min}) \tag{4.137}$$

   где $k_{\min}$ – минимальный модульный коэффициент. В этом случае асимметрия у аналитической кривой Вейбулла будет меньше эмпирической, и аппроксимация может быть далеко не идеальной.
4. Определяется среднее значение ряда Y по формуле:

$$\bar{y} = \bar{x} - c \tag{4.138}$$

5. В зависимости от C_v^* по табл. 4.19 определяются параметры распределения Вейбулла a и b.
6. Определяются модульные коэффициенты распределения Вейбулла для ряда Y:

$$k_{y,P\%} = \left[-\ln(P/100)a^b\right]^{1/b} \tag{4.139}$$

7. Расчетные значения переменной X вычисляются по формуле:

$$x_{P\%} = k_{y,P\%}\,\overline{y} + c \qquad (4.140)$$

8. Модульные коэффициенты для ряда X определяются по формуле:

$$k_{x,P\%} = (x_{P\%}) / (\overline{x}) \qquad (4.141)$$

Пример 4.11. Определить среднегодовой расход 99%-ной обеспеченности $Q_{99\%}$ на р. Вьюн – д. Запорожское (табл.4.19) с использованием двух- и трехпараметрической кривой обеспеченностей Вейбулла. Расчет параметров распределения выполнить методом моментов.

Таблица 4.19

Среднегодовые расходы воды; р. Вьюн – д. Запорожское

№	Год	Q, м^3/с	№	Год	Q, м^3/с	№	Год	Q, м^3/с	№	Год	Q, м^3/с
1	1955	6,73	13	1967	4,37	25	1979	4,09	37	1991	6,53
2	1956	5,70	14	1968	4,90	26	1980	5,32	38	1992	5,38
3	1957	6,51	15	1969	4,86	27	1981	7,49	39	1993	4,67
4	1958	5,33	16	1970	4,48	28	1982	6,35	40	1994	5,03
5	1959	4,31	17	1971	5,07	29	1983	5,95	41	1995	8,24
6	1960	3,36	18	1972	2,74	30	1984	7,24	42	1996	7,25
7	1961	4,21	19	1973	2,59	31	1985	5,03	43	1997	5,64
8	1962	7,53	20	1974	4,93	32	1986	6,59	44	1998	6,13
9	1963	4,24	21	1975	4,40	33	1987	8,18	45	1999	5,18
10	1964	3,60	22	1976	4,55	34	1988	7,15	46	2000	5,96
11	1965	3,56	23	1977	5,20	35	1989	6,47			
12	1966	5,54	24	1978	4,29	36	1990	6,16			

Среднее значение = 5,41; СКО = 1,35; C_v = 0,25; C_s = 0,13 (метод моментов).

Решение 1 (для распределения Вейбулла 2п.)

1. Методом моментов определяем выборочное среднее и коэффициент вариации $\overline{Q}$ = 5,41; C_v = 0,25.
2. В зависимости от C_v по табл. 4.19 определяем параметры двухпараметрического распределения Вейбулла a = 1,095; b =4,54.
3. По формуле (4.132) рассчитываем модульный коэффициент 99%-ной обеспеченности $k_{99\%}$ = 0,40.

4. Определяем расход 99%-ной обеспеченности: $Q_{99\%} = k_{99\%}\overline{Q}$ = 0,40·5,41 = 2,16 м^3/с.

Решение 2 (для распределения Вейбулла 3п.)

1. По исходному ряду рассчитываем: среднее значение, коэффициент вариации, коэффициент асимметрии и минимальное значение: $\overline{Q}$ = 5,41; C_v = 0,25; C_s = 0,13; $Q_{\min}$ = 2,59.
2. В зависимости от C_s по табл. 4.19 определяем значение коэффициента вариации C_v^* ряда Y: C_v^* = 0,35.
3. По формуле (4.136) определяем значение параметра сдвига: c = 5,41 – 1,35/0,35 = 1,55. Так как $c < Q_{\min}$, полученное значение параметра c принимаем в качестве расчетного.
4. По формуле (4.138) определяем среднее значение ряда Y: $\bar{y} =$5,41 – 1,55 = 3,86.
5. В зависимости от C_v^* по табл.4.19 определяем параметры распределения Вейбулла a и b: a = 1,118 ; b = 3,13.
6. По формуле (4.139) определяем модульный коэффициент 99%-ной обеспеченности для ряда Y: $k_{y,99\%}$ = 0,26.
7. По формуле (4.140) определяем расход 99%-ной обеспеченности: $Q_{99\%} = k_{y,99\%}\overline{y} + c$ = 0,26·3,86 + 1,55 = 2,55 м^3/с.

Кривые обеспеченностей двух- и трехпараметрического распределения Вейбулла для исследуемого ряда представлены на рис. 4.31. Как видно на рисунке, обе кривые хорошо согласуются с эмпирическими точками. При этом в области малых обеспеченностей трехпараметрическая кривая Вейбулла выглядит предпочтительнее.

Приведенный пример показывает, что в ряде случаев кривая обеспеченностей Вейбулла может быть хорошей альтернативой для используемых в российской гидрологической практике кривых Пирсона III типа и Крицкого-Менкеля. Однако следует учитывать, что кривая Вейбулла обладает меньшей гибкостью, чем названные кривые. Для выборок с высокой асимметрией даже трехпараметрическое распределение Вейбулла может давать заниженную асимметрию и плохо аппроксимировать эмпирические точки, так как значение коэффициента асимметрии для распределения Вейбулла лимитируется коэффициентом вариации и параметром сдвига c, значение которого не должно превышать минимальное значение исходного ряда (см. формулу 4.136).

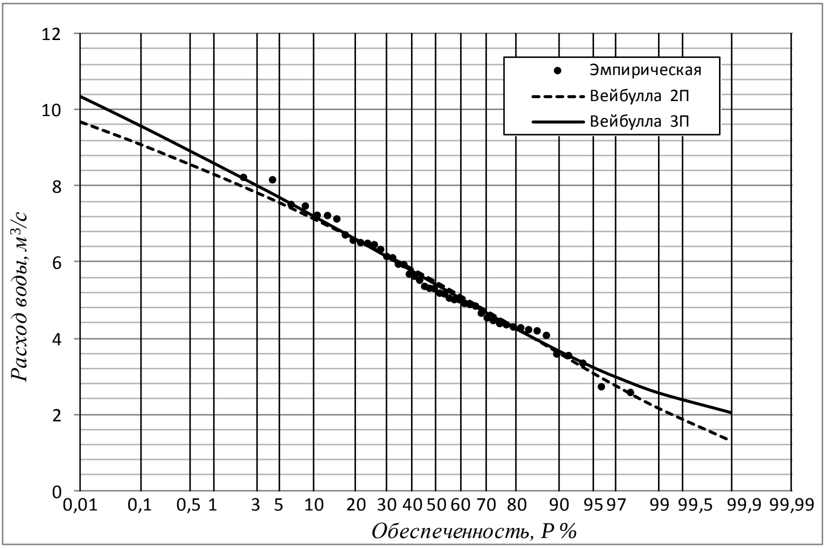


Рис. 4.31. Эмпирическая и аналитические (Вейбулла) кривые обеспеченностей среднегодовых расходов воды; р. Вьюн – д. Запорожское.

Таким образом, в практике гидрологических расчетов распределение Вейбулла целесообразно применять для выборок с умеренной положительной и отрицательной асимметрией.

4.8. Распределение S_b Джонсона

Для аппроксимации эмпирических распределений Н.Л. Джонсон [27, 30] предложил выполнять нормализацию анализируемой случайной величины путем ее преобразования. В общем случае преобразование для случайной величины X по Джонсону имеет вид

$$Z = \gamma + \eta\tau(X; \varepsilon, \lambda), \tag{4.142}$$

где Z – нормированная случайная величина, распределенная по нормальному закону; τ – произвольная функция; γ, η, ε, λ – параметры распределения, удовлетворяющие условиям: η > 0, λ > 0,

$-\infty < \gamma < \infty,\ -\infty < \varepsilon < \infty.$

В зависимости от вида функции τ можно получить три типа распределений:

$$1)\quad \tau_1(X,\varepsilon,\lambda) = \ln\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right), \qquad x \ge \varepsilon, \tag{4.143}$$

$$2)\quad \tau_2(X,\varepsilon,\lambda) = \ln\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda+\varepsilon-x}\right), \qquad \varepsilon \le x \le \varepsilon+\lambda, \tag{4.144}$$

$$3)\quad \tau_3(X,\varepsilon,\lambda) = \mathrm{Arsh}\left(\frac{x-\varepsilon}{\lambda}\right), \qquad -\infty \le x \le \infty, \tag{4.145}$$

где Arsh – гиперболический арксинус, $\mathrm{Arsh}(k) = \ln\left(k+\sqrt{1+k^2}\right)$.

Преобразование №1 дает трехпараметрическое логнормальное распределение, описанное в разделе 4.2, которое также называют распределением S_L Джонсона.

Преобразование №3 приводит к распределению, которое называют распределением S_U Джонсона. Функция плотности вероятности этого распределения не ограничена ни левым, ни правым пределами и в российской гидрологической практике не используется.

Наибольший интерес для практической гидрологии представляет распределение S_B Джонсона, которое получается в результате преобразования №2. Это распределение имеет верхний и нижний пределы, а всего содержит четыре параметра.

Распределение этого типа может использоваться, например, при построении кривых обеспеченностей коэффициентов стока или дат наступления характерных фаз водного режима.

Функция плотности вероятности распределение S_B Джонсона имеет вид

$$f(x) = \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}}\frac{\lambda}{(x-\varepsilon)(\varepsilon+\lambda-x)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[\gamma+\eta\ln\left(\frac{x-\varepsilon}{\varepsilon+\lambda-x}\right)\right]^2\right\}, \tag{4.146}$$

где $\varepsilon \le x \le \varepsilon+\lambda$, $\eta > 0$, $-\infty < \gamma < \infty$, $\lambda > 0$, $-\infty < \varepsilon < \infty$.

Таким образом, распределение S_B Джонсона имеет два параметра формы (η и γ), один параметр положения (ε) и один параметр масштаба (λ).

Для предварительной проверки соответствия распределения S_B Джонсона эмпирическим данным используется график, представленный на рис. 4.32.

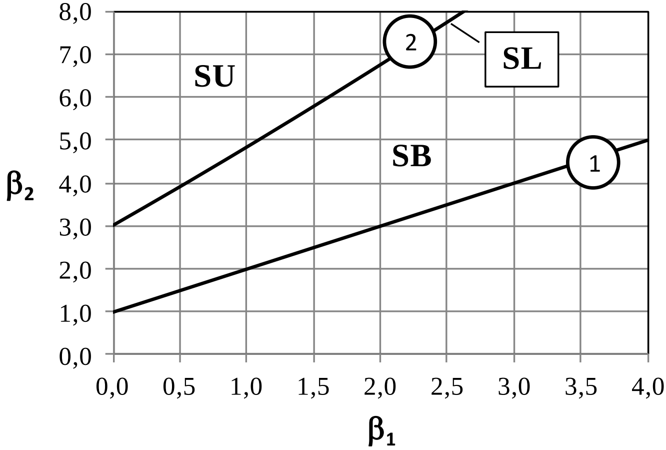


Рис.4.32. График для выбора типа распределения Джонсона.

Для применения этого графика необходимо по эмпирическим данным рассчитать параметры β_1 и β_2:

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = C_s^2, \tag{4.147}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = E_x - 3, \tag{4.148}$$

где μ_i – выборочные центральные моменты i-того порядка; C_s и E_x – выборочные коэффициент асимметрии и эксцесс.

Распределение S_B – Джонсона можно использовать, если точка с координатами (β_1,β_2) попадает в зону расположенную между линиями 1 и 2.

Влияние параметров на вид функции распределения S_B Джонсона показано на рисунках 4.33-4.34. Как видно на рисунках данное распределение может принимать более разнообразные формы, чем распределения, рассмотренные в предыдущих параграфах.

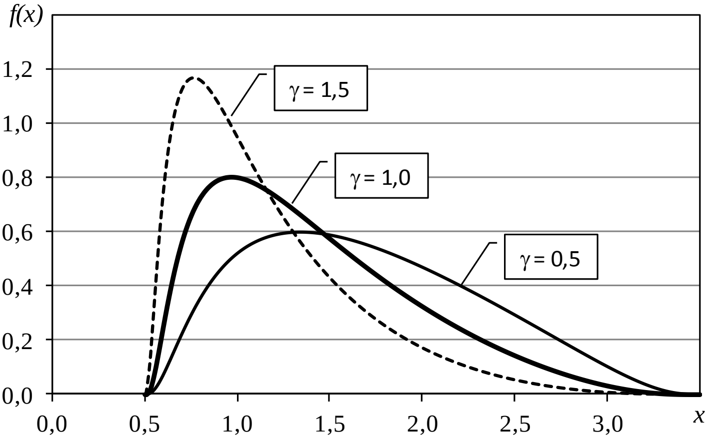


Рис. 4.33. Вид функции плотности вероятности распределения S_B Джонсона при различных значениях параметра γ и постоянных ε, λ и η ($\varepsilon = 0{,}5$; $\lambda = 3$; $\eta = 1$).

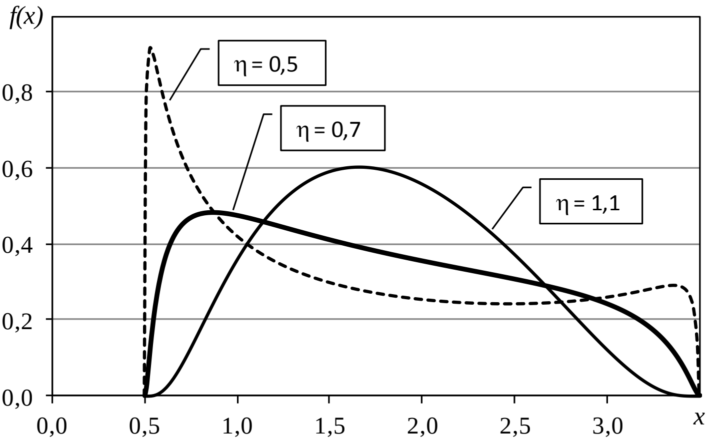


Рис. 4.34. Вид функции плотности вероятности распределения S_B Джонсона при различных значениях параметра η и постоянных ε, λ и γ ($\varepsilon = 0{,}5$; $\lambda = 3$; $\gamma = 0{,}3$).

Делая замены в выражении (4.146) : $a = \varepsilon$; $b = \varepsilon + \lambda$ и учитывая, что

$$\gamma = -\frac{m_y}{\sigma_y}, \tag{4.149}$$

$$\eta = \frac{1}{\sigma_y} \qquad (4.150)$$

получаем

$$f(x) = \frac{b-a}{\sigma_y \sqrt{2\pi}(x-a)(b-x)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_y^2}\left[\ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right) - m_y\right]^2\right\}, \qquad (1.151)$$

где a – абсолютный минимум исходной переменной X ; b – абсолютный максимум исходной переменной X ; m_y – математическое ожидание переменной Y; σ_y – среднеквадратическое отклонение переменной Y; Y – случайная величина, распределенная по нормальному закону и связанная с параметрами a и b выражением

$$y = \ln\left(\frac{x-a}{b-x}\right). \qquad (4.152)$$

Для оценки параметров распределения S_B Джонсона можно рекомендовать метод, основанный на использовании выборочных моментов переменной Y в сочетании с оптимизационной процедурой для параметров a и b. Метод применяется если предварительный анализ с использованием графика, представленного на рис. 4.32, показывает, что распределение S_B Джонсона можно использовать для аппроксимации эмпирических данных. Последовательность действий в этом случае следующая.

1. Устанавливаются диапазоны возможных значений параметров a и b

   $$0 \le a < x_{\min} \qquad (4.153)$$

   $$x_{\max} < b < M \qquad (4.154)$$

   где x_{min} и x_{max} – соответственно минимальное и максимальное наблюденные значения. В качестве M принимается такое значение, которое заведомо никогда не будет превышено. Например, можно принять $M = 10x_{\max}$. Эта процедура необходима, чтобы заранее отсечь физически не обоснованные решения.

   Расчет ведется в модульных коэффициентах в этом случае выражения (4.153-4.154) принимают вид

   $$0 \le a < k_{\min} \qquad (4.155)$$

   $$k_{\max} < b < k_M \qquad (4.156)$$

2. С шагом Δ задаются значения параметра a, например: $a_0 = 0$; $a_1 = \Delta$; $a_2 = 2\Delta$; $a_3 = 2\Delta$; и т. д. – до k_{min}. Затем для каждого значения параметра a_i подбирается такое значение b_i, при котором коэффициент асимметрии ряда $\ln(y)$ будет равен нулю. При этом для некоторых a_i решение может отсутствовать.
3. Для каждой пары параметров a_i и b_i формируется ряд $\ln(y)$ и рассчитывается эксцесс. В качестве расчетной принимается пара a_i и b_i для которой эксцесс наиболее близок к нулю (рис. 4.35).

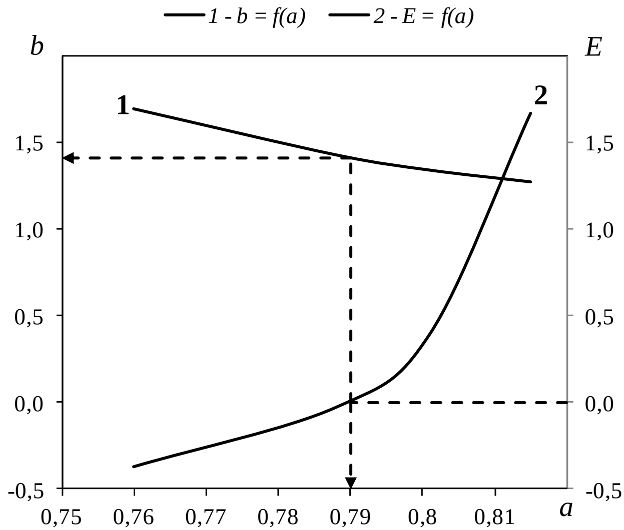


Рис. 4.35. График зависимостей $b = f(a)$ при $C_s = 0$ (1) и $E_z = f(a)$ при $C_s = 0$ (2) распределения SB-Джонсона для ряда дат начала осеннего ледохода на р. Неве – д. Новосаратовка. Пунктиром показана схема выбора расчетных a и b по нулевому эксцессу E_z

4. С использованием выбранной пары параметров a_i и b_i формируется ряд $\ln(y)$, по которому методом моментов рассчитываются параметры $\bar{y}$ и σ_y.
5. Для заданных обеспеченностей по табл.4.1 определяются нормированные ординаты нормального закона распределения t_p.

6. Рассчитываются значения y_p:

$$y_p = t_p \sigma_y + \bar{y} \tag{4.157}$$

7. По формуле, которая следует из (4.152), рассчитываются модульные коэффициенты расчетной обеспеченности переменной X:

$$k_p = \frac{b \exp(y_p) + a}{\exp(y_p) + 1} \tag{4.158}$$

8. Определяются расчетные значения x: $x_p = k_p \bar{x}$.

Если расчет ординат кривой обеспеченностей выполняется с использованием методов численного интегрирования, то параметры γ и η определяются по формулам (4.149)-(4.150) в зависимости от полученных по эмпирическим данным $\bar{y}$ и σ_y.

Если один параметр известен (a или b), то в качестве расчетного второго параметра принимается такое его значение, при котором коэффициент асимметрии ряда $\ln(y)$ будет наиболее близок к нулю. Затем методом моментов выполняется расчет $\bar{y}$ и σ_y.

Если параметры a и b заранее известны, то просто формируется ряд $\ln(y)$ и по нему рассчитываются $\bar{y}$ и σ_y.

Примеры кривых обеспеченностей, построенных с использованием изложенного метода представлены на рис.4.35-4.37.

Следует отметить, что в литературе приводятся формулы для расчета параметров распределения S_B Джонсона методом квантилей. Однако, как показывает практический анализ, в условиях коротких выборок этот метод менее ненадежен, поскольку он очень чувствителен к изменению опорных квантилей. Кроме того, используя метод квантилей можно получить значение параметра a, которое будет больше наблюденного минимума или значение параметра b меньшее наблюденного максимума.

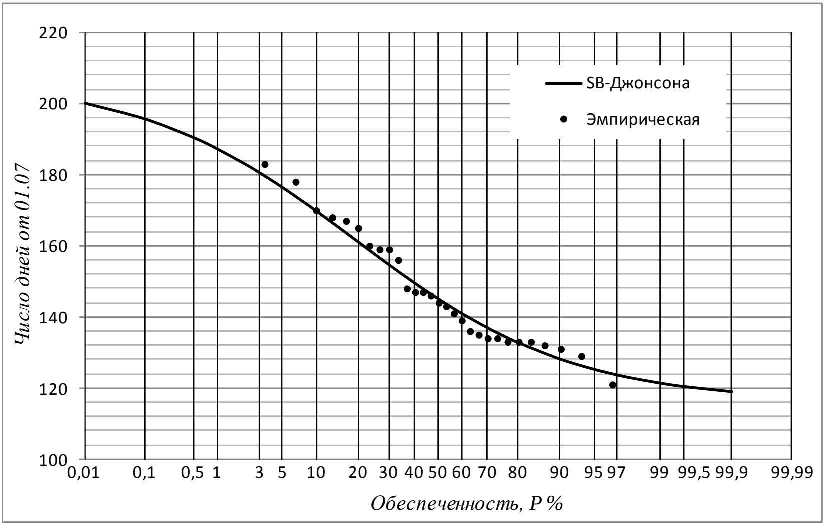


Рис. 4.36. Эмпирическая и аналитическая (*SB*-Джонсона) кривые обеспеченностей дат начала осеннего ледохода на р. Неве – д. Новосаратовка.

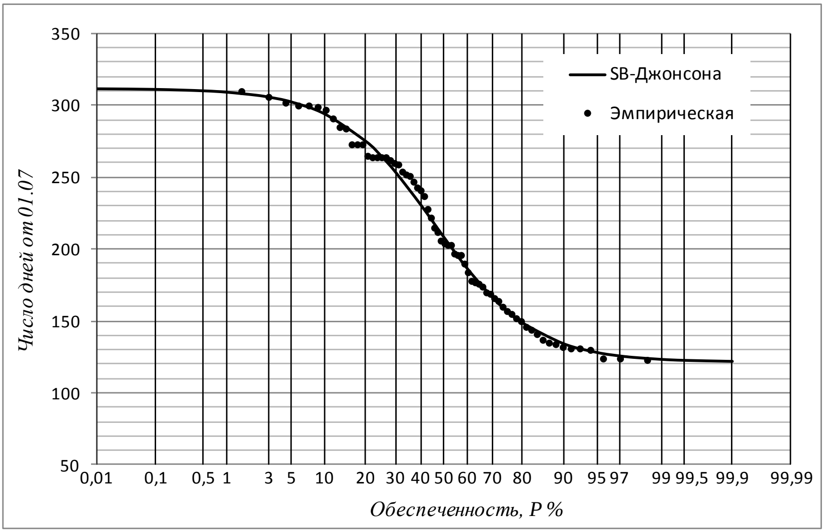


Рис. 4.37. Эмпирическая и аналитическая (*SB*-Джонсона) кривые обеспеченностей дат наступления минимального зимнего уровня воды на р. Неве – д. Новосаратовка

Преимуществом метода квантилей является только то, что оценки параметров распределения можно получить в явном виде (без использования оптимизационных процедур). В настоящее время применяются две разновидности метода квантилей: метод Слифкера – Шапиро (Slifker and Shapiro’s method) [33] и метод Мейджа (Mage’s method) [32].

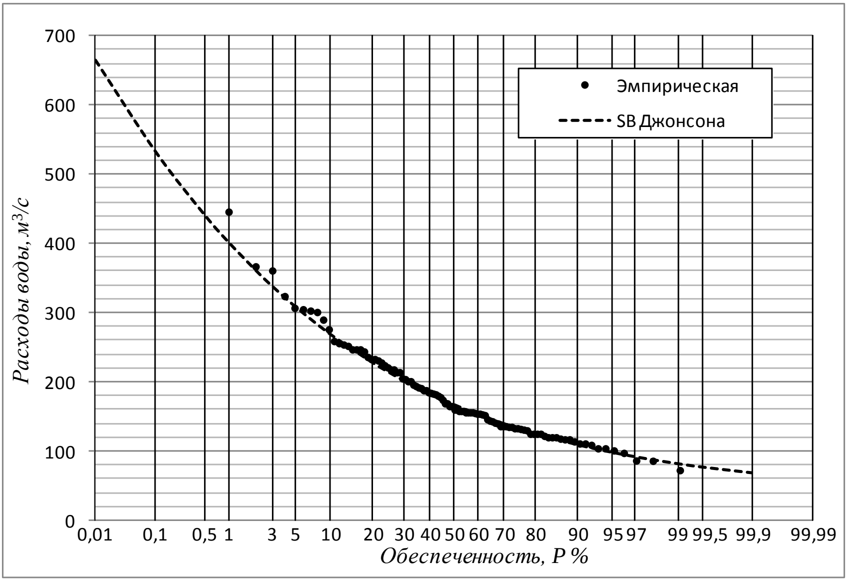


Рис. 4.38. Эмпирическая и аналитическая (*SB*-Джонсона) кривые обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья; р. Тихвинка – д. Горелуха.

Семейство кривых *SB* Джонсона обладает достаточной гибкостью и может использоваться не только при расчете характеристик имеющих четко выраженные пределы, но, например, и для расчета расходов воды (рис. 4.38). Однако это не очень рационально, так как кривая *SB* Джонсона является 4х-параметрической и оценка ее параметров вызывает определенные трудности.

4.9. Распределение Фреше

Распределение Фреше относится к семейству распределений экстремальных значений, поэтому его также называют распределением экстремальных значений II типа.

Функция плотности вероятности, интегральная функция распределения и функция обеспеченностей распределения Фреше выражаются формулами:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{-(\alpha+1)} \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{-\alpha}\right], \qquad (4.159)$$

$$F(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{-\alpha}\right], \qquad (4.160)$$

$$P(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{-\alpha}\right], \qquad (4.161)$$

где: $\gamma < x < +\infty$; α – параметр формы ($\alpha > 0$); β – параметр масштаба ($\beta > 0$); γ – параметр положения ($-\infty < \gamma < +\infty$). Параметр γ представляет собой нижний предел распределения.

Распределение Фреше относится к классу распределений с «тяжелыми хвостами». Для таких распределений отсутствуют некоторые статистические моменты. Термин «отсутствуют» означает, что:

$$M_S = \int_{-\infty}^{+\infty} x^S f(x)dx \to \infty, \qquad (4.162)$$

где M_S – начальный момент S-того порядка.

Для распределения Фреше при $\alpha < 1$ отсутствуют все моменты включая математическое ожидание (первый начальный момент). Наличие первого момента будет иметь место при $\alpha > 1$, второго – при $\alpha > 2$, третьего – при $\alpha > 3$ и т. д. Ниже представлены формулы, связывающие основные статистические характеристики с естественными параметрами распределения Фреше (α, β, γ).

Мода $$Mo = \gamma + \beta\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{1/\alpha}, \qquad (4.163)$$

Медиана $$Me = \gamma + \frac{\beta}{(\ln 2)^{1/\alpha}}, \qquad (4.164)$$

Математическое ожидание (при α > 2) $$m_x = \gamma + \beta\,\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right), \qquad (4.165)$$

Дисперсия (при α > 2) $$D_x = \beta^2\left\{\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)-\left[\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}, \qquad (4.166)$$

Стандартное отклонение (при α > 2) $$\sigma_x = \beta\left\{\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)-\left[\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2\right\}^{1/2}, \qquad (4.167)$$

Коэффициент асимметрии при α > 3

$$C_s = \frac{\Gamma\left(1-\frac{3}{\alpha}\right)-3\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)+2\Gamma^3\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)}{\left[\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)-\Gamma^2\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right]^{3/2}}. \qquad (4.168)$$

Наряду с трехпараметрическим распределением Фреше используется и двухпараметрическое распределение Фреше, в этом случае $\gamma \equiv 0$. При нулевом нижнем пределе функция плотности вероятности, интегральная функция распределения и функция обеспеченностей распределения Фреше выражаются формулами:

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-(\alpha+1)}\exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}\right], \qquad (4.169)$$

$$F(x) = \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}\right], \qquad (4.170)$$

$$P(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-\alpha}\right]. \qquad (4.171)$$

Ординаты кривой обеспеченностей двухпараметрического распределения Фреше рассчитываются по формуле, которая следует из (4.171):

$$x_{P\%} = \beta\left[-\ln\left(1 - \frac{P}{100}\right)\right]^{\frac{1}{-\alpha}} \qquad (4.172)$$

На рис. 4.39. показан вид функции плотности вероятности распределения Фреше при различных значениях коэффициента вариации ($\alpha > 2$).

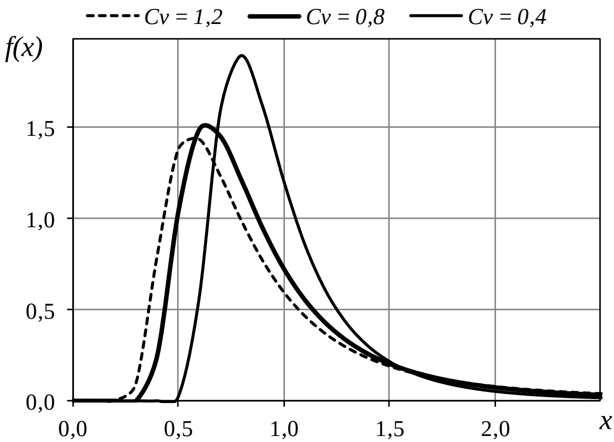


Рис. 4.39. Вид функции плотности вероятности распределения Фреше при различных значениях коэффициента вариации ($\gamma = 0$; $m_x = 1$).

Если значения случайной величины представлены в модульных коэффициентах и $\alpha > 2$, то параметры двухпараметрического распределения Фреше α и β однозначно определяются коэффициентом вариации (табл. 4.21). А при $\alpha > 3$ имеет место однозначная зависимость между C_v и C_s (табл. 4.20).

Таблица 4.20

Значения параметров α, β и C_s в зависимости от коэффициента вариации для двухпараметрического распределения Фреше при m_x = 1 и α > 3

C_v	α	β	C_s	C_v	α	β	C_s
0,68	3,00	0,74	-	0,34	4,70	0,85	3,90
0,66	3,05	0,74	86,6	0,33	4,81	0,85	3,75
0,64	3,10	0,75	41,9	0,32	4,93	0,86	3,61
0,62	3,15	0,75	27,4	0,31	5,05	0,86	3,48
0,60	3,21	0,76	20,3	0,30	5,19	0,86	3,35
0,58	3,27	0,77	16,0	0,29	5,33	0,87	3,23
0,56	3,34	0,77	13,2	0,28	5,48	0,87	3,12
0,54	3,42	0,78	11,1	0,27	5,64	0,88	3,01
0,52	3,50	0,78	9,62	0,26	5,82	0,88	2,90
0,50	3,58	0,79	8,44	0,25	6,01	0,89	2,80
0,49	3,63	0,79	7,91	0,24	6,22	0,89	2,70
0,48	3,68	0,80	7,47	0,23	6,45	0,89	2,61
0,47	3,73	0,80	7,06	0,22	6,69	0,90	2,52
0,46	3,79	0,80	6,69	0,21	6,96	0,90	2,44
0,45	3,84	0,81	6,35	0,20	7,26	0,91	2,35
0,44	3,90	0,81	6,04	0,19	7,59	0,91	2,27
0,43	3,96	0,81	5,75	0,18	7,96	0,92	2,20
0,42	4,03	0,82	5,49	0,17	8,37	0,92	2,12
0,41	4,10	0,82	5,24	0,16	8,84	0,93	2,05
0,40	4,17	0,83	5,01	0,15	9,37	0,93	1,98
0,39	4,25	0,83	4,80	0,14	9,97	0,94	1,91
0,38	4,33	0,83	4,59	0,13	10,67	0,94	1,85
0,37	4,41	0,84	4,41	0,12	11,49	0,94	1,78
0,36	4,51	0,84	4,23	0,11	12,45	0,95	1,72
0,35	4,60	0,84	4,06	0,10	13,61	0,95	1,66

Как видно из табл. 4.20, распределение Фреше имеет очень высокую асимметрию и может применяться только в тех случаях, когда эмпирическая кривая обеспеченностей круто уходит вверх в области малых обеспеченностей. Например такая ситуация возможна при расчете максимальных расходов дождевых паводков, когда ряд содержит несколько максимумов тайфунного происхождения, которые могут на порядок превосходить обычные максимумы.

Таблица 4.21

Значения параметров α, β в зависимости от коэффициента вариации для двухпараметрического распределения Фреше при $m_x = 1$ и α > 2

C_v	α	β	C_v	α	β
2,0	2,15	0,60	0,94	2,59	0,69
1,9	2,17	0,61	0,92	2,61	0,69
1,8	2,18	0,61	0,90	2,63	0,69
1,7	2,20	0,61	0,88	2,66	0,70
1,6	2,23	0,62	0,86	2,68	0,70
1,5	2,26	0,63	0,84	2,71	0,70
1,4	2,29	0,63	0,82	2,74	0,71
1,3	2,33	0,64	0,80	2,77	0,71
1,2	2,39	0,65	0,78	2,80	0,72
1,1	2,45	0,66	0,76	2,84	0,72
1,0	2,53	0,68	0,74	2,87	0,72
0,98	2,55	0,68	0,72	2,91	0,73
0,96	2,57	0,68	0,70	2,95	0,73

На рисунках 4.40 и 4.41 представлены хронологический график и кривая обеспеченностей для искусственного ряда, полученного методом Монте-Карло с использованием двухпараметрического распределения Фреше.

Рис.4.40. Искусственный ряд, полученный методом Монте-Карло с использованием двухпараметрического распределения Фреше при $C_v = 0{,}4$ и $m_x = 1{,}0$ (γ ≡ 0; α = 4,17; β = 0,83).

На рис. 4.41 помимо аналитической кривой обеспеченностей Фреше приведена для сравнения кривая обеспеченностей Крицкого-Менкеля при предельном соотношении $C_s/C_v = 6$.

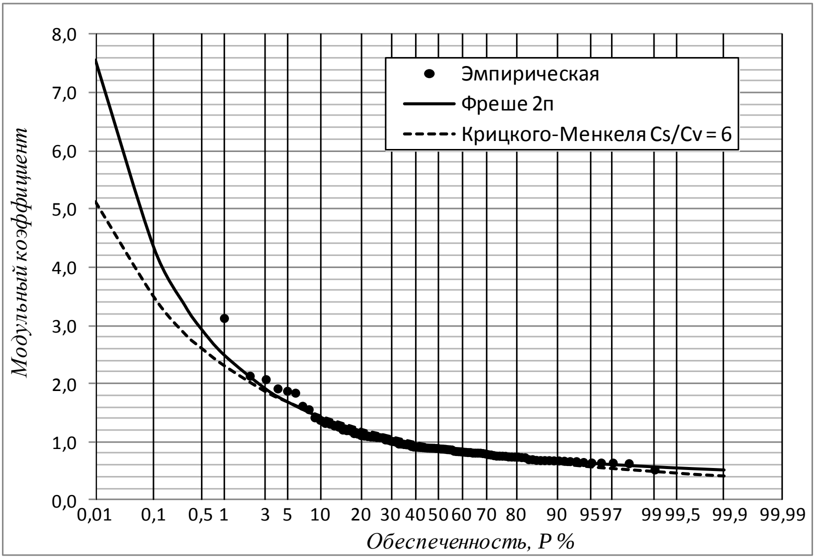


Рис.4.41. Эмпирическая и аналитические кривые обеспеченностей для искусственного ряда, полученного методом Монте-Карло с использованием двухпараметрического распределения Фреше при $C_v = 0{,}4$ и $m_x = 1{,}0$.

У распределения Фреше с увеличением коэффициента вариации параметр α уменьшается, а отношение C_s/C_v резко возрастает и при $\alpha = 3$ $C_s = \infty$, то есть распределение Фреше не имеет третьего момента (рис. 4.42).

Использовать распределение Фреше при $\alpha < 3$ для расчета максимальных расходов воды следует крайне осторожно, так как при малых обеспеченностях ($P < 0{,}5\%$) можно получить необоснованно завышенные расходы. Дополнительным источником ошибок в этом случае может стать также неточность оценок параметров распределения в условиях коротких выборок.

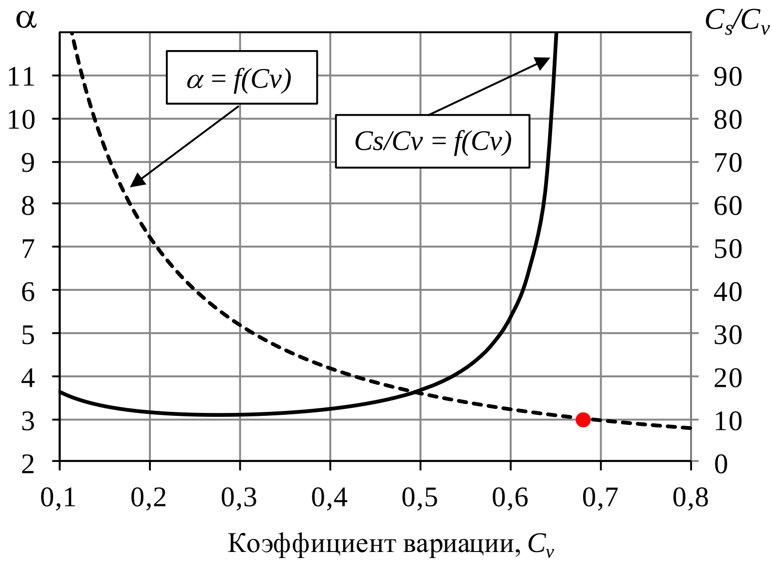


Рис.4.42. Зависимости отношения C_s/C_v и параметра α от коэффициента вариации для двухпараметрического распределения Фреше.

При использовании метода моментов расчет ординат двухпараметрического распределения Фреше при α > 2 выполняется следующим образом.

1. По имеющейся выборке методом моментов определяются среднее значение ($\overline{Q}$) и коэффициент вариации (C_v).
2. В зависимости от C_v по таблицам 4.20-4.21 определяются параметры α и β.
3. Для заданных обеспеченностей рассчитываются модульные коэффициенты по формуле

$$k_{P\%} = \beta\left[-\ln\left(1-\frac{P}{100}\right)\right]^{\frac{1}{-\alpha}}. \qquad (4.173)$$

4. Определяются расчетные расходы воды:

$$Q_{P\%} = k_{P\%}\overline{Q} \qquad (4.174)$$

Пример 4.12.

По выборке рассчитаны параметры: $\overline{Q}$ = 12,4 м3/с; C_v = 0,40. Требуется: с использованием двухпараметрического распределения Фреше рассчитать расход обеспеченностью P = 1%.

Решение:

Дано		По таблице 4.20			По формуле (4.173)	По формуле (4.174)
$\overline{Q}$	C_v	α	β	C_s	$k_{1\%}$	$Q_{1\%}$
12,4	0,40	4,17	0,83	5,01	2,50	31,0
Примечание: кривая обеспеченностей с этими параметрами приведена на рис. 4.41.						

4.10. Распределение Парето

Распределение Парето относится с категории непрерывных степенных распределений. Названо в честь итальянского экономиста и социолога Вилфредо Парето. Наиболее часто применяется в экономических исследованиях, в теории катастроф и теории надежности.

Характерной особенностью выборок описываемых распределением Парето является наличие в них небольшого числа (около 20%), но очень мощных выбросов (рис.4.43).

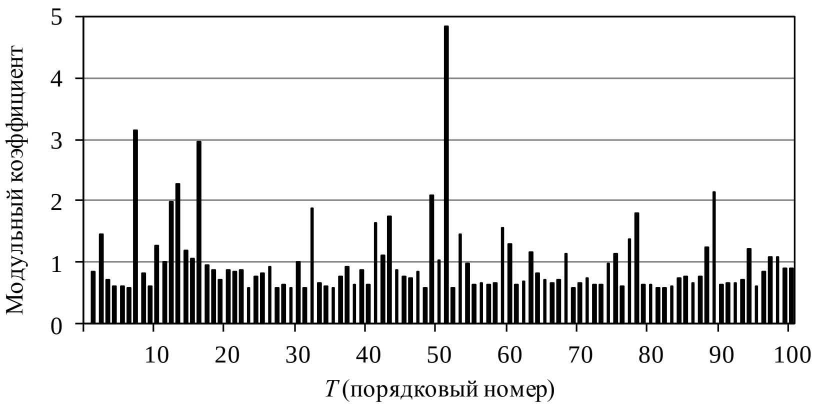


Рис.4.43. Искусственный ряд, полученный методом Монте-Карло по закону Парето (при n = 100; α = 2,5; x_0 = 0,6).

Функция плотности вероятности для закона Парето определяется выражением:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\alpha}{x_0}\left(\dfrac{x_0}{x}\right)^{\alpha+1}, \quad x > x_0 \\ f(x) = 0, \quad x \le 0. \end{cases}, \tag{4.175}$$

где α и x_0 – параметры распределения; α > 0; x_0 > 0; параметр x_0 – абсолютный минимум.

Интегральная функция распределения и функция обеспеченностей имеют вид:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, \quad x > x_0, \tag{4.176}$$

$$P(x) = \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\alpha}, \quad x > x_0. \tag{4.177}$$

Графики функций *f(x)* и *P(x)* представлены на рисунках 4.44, 4.45.

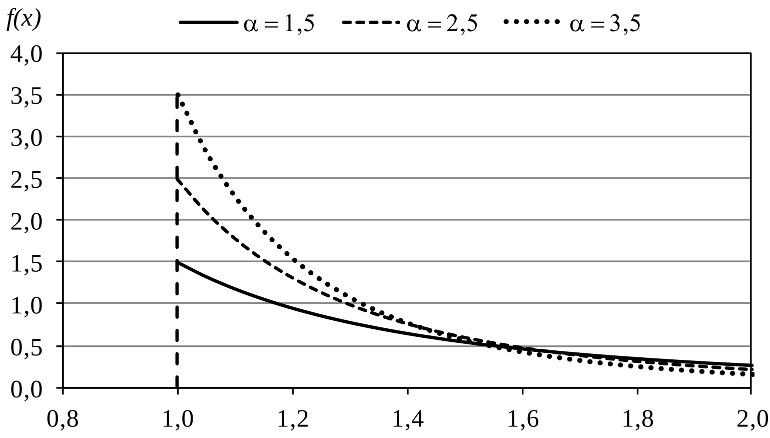


Рис.4.44. Графики функции плотности вероятности распределения Парето при различных значениях параметра α и фиксированном x_0 = 1.

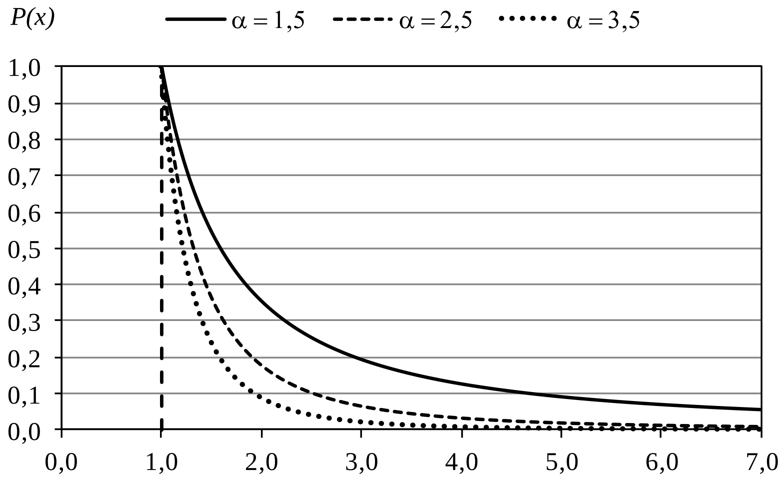


Рис.4.45. Кривые обеспеченностей распределения Парето при различных значениях параметра α и фиксированном $x_0 = 1$.

Распределение Парето относится к классу распределений с «тяжелыми хвостами». Для таких распределений отсутствуют некоторые статистические моменты. Термин «отсутствуют» означает, что:

$$M_S = \int_{-\infty}^{+\infty} x^S f(x) dx \to \infty, \qquad (4.178)$$

где M_S – начальный момент S-того порядка.

Для распределения Парето при α <1 отсутствуют все моменты включая математическое ожидание (первый начальный момент); Наличие первого момента будет иметь место при $\alpha > 1$, второго – при $\alpha > 2$, третьего – при $\alpha > 3$ и т. д. Минимальное значение отношения C_s/C_v для распределения Парето $C_s/C_v = 18$ (рис. 4.46).

Ниже представлены формулы, связывающие основные статистические характеристики с естественными параметрами распределения Парето (α и x_0).

Мода	$Mo = x_0$	(4.179)
Медиана	$Me = x_0 2^{1/\alpha}$	(4.180)
Математическое ожидание	$m_x = \dfrac{\alpha}{\alpha - 1} x_0, \quad \alpha > 1$	(4.181)
Дисперсия	$D_x = \dfrac{\alpha x_0^2}{(\alpha - 1)^2 (\alpha - 2)}, \quad \alpha > 2$	(4.182)
Среднеквадратическое отклонение	$\sigma_x = \dfrac{x_0}{\alpha - 1} \sqrt{\dfrac{\alpha}{\alpha - 2}}, \quad \alpha > 2$	(4.183)
Коэффициент вариации	$C_v = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha(\alpha - 2)}}, \quad \alpha > 2$	(4.184)
Коэффициент асимметрии	$C_s = \dfrac{2(\alpha + 1)}{\alpha - 3} \sqrt{\dfrac{\alpha - 2}{\alpha}}, \quad \alpha > 3$	(4.185)
Эксцесс	$E_x = \dfrac{6(\alpha^3 + \alpha^2 - 6\alpha - 2)}{\alpha(\alpha - 3)(\alpha - 4)}, \quad \alpha > 4$	(4.186)

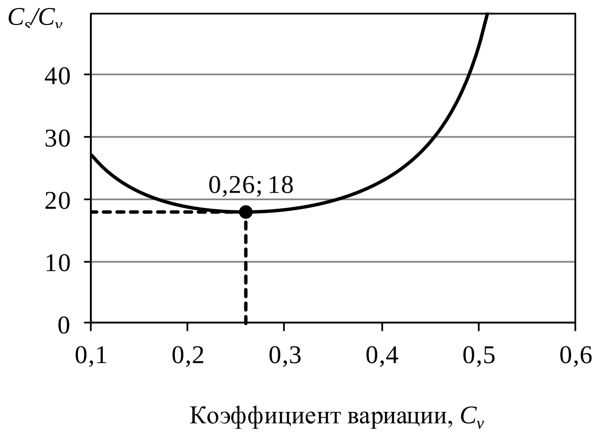


Рис.4.46. Зависимость отношения C_s/C_v от коэффициента вариации для распределения Парето.

Оценивание параметров

Если заранее известно, что конкретная выборка описывается распределением Парето, то оценку параметров распределения можно выполнить с использованием метода моментов или метода наибольшего правдоподобия.

Метод моментов в классическом варианте применяется только при $\alpha > 2$. Расчетные формулы имеют вид:

$$\alpha^* = 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{x}}{\sigma^*}\right)^2} = 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{C_v^2}}\,, \qquad (4.187)$$

$$x_0^* = \frac{(\alpha^* - 1)\bar{x}}{\alpha^*}\,, \qquad (4.188)$$

где $\bar{x}, \sigma^*, C_v$ – соответственно: выборочное среднее, выборочное СКО и выборочный коэффициент вариации.

Метод наибольшего правдоподобия

$$\alpha^* = n\left[\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_{\min}}\right)\right]^{-1}, \qquad (4.189)$$

$$x_0^* = x_{\min}\,, \qquad (4.190)$$

где $x_{\min}$ – минимальное элемент выборки; n – длина выборки.

Если закон распределения неизвестен, а распределение Парето используется лишь в качестве аппроксимирующей кривой, то вместо методов моментов и наибольшего правдоподобия лучше использовать метод *наименьших квадратов*:

$$\alpha^* = \frac{-n\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(x_i)\ln P^*(x_i)\right] + \sum_{i=1}^{n}\left[\ln(x_i)\right]\sum_{i=1}^{n}\left[P^*(x_i)\right]}{n\sum_{i=1}^{n}\left[\ln(x_i)\right]^2 - \left[\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right]^2}\,, \qquad (4.191)$$

$$x_0^* = \exp\left\{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\alpha^*}\sum_{i=1}^{n}\ln\left[P^*(x_i)\right] + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)\right]\right\}, \qquad (4.192)$$

где $P^*(x_i)$ – эмпирическая обеспеченность i-того члена в ранжированном ряду, выраженная в долях единицы; обычно определяется по формуле: $m/(n+1)$.

Практический анализ

При работе с гидрологическими рядами на первом этапе целесообразно построить эмпирическую кривую обеспеченностей с использованием логарифмических шкал по осям абсцисс и ординат. Если выборка соответствует распределению Парето, то в таком масштабе она будет представлять собой прямую линию. В качестве примера на рисунке 4.47 показаны эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей для ряда, смоделированного методом Монте-Карло по распределению Парето.

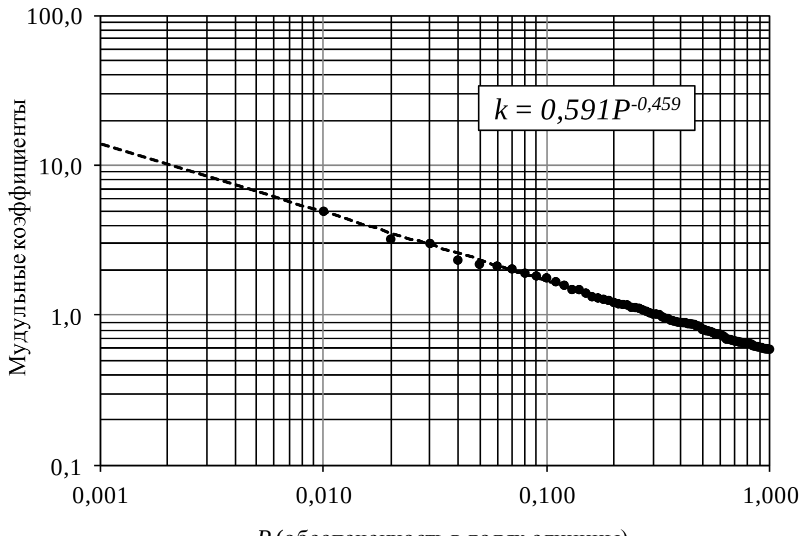


Рисунок 4.47. Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей ряда, смоделированного методом Монте-Карло по распределению Парето (n = 100).

Из выражения (4.177) следует:

$$x = x_0 P^{-(1/\alpha)}\,, \tag{4.193}$$

где P – обеспеченность в долях единицы. Для модульных коэффициентов выражение (4.193) принимает вид:

$$k = k_0 P^{-(1/\alpha)}\,. \tag{4.194}$$

Если эмпирическая кривая обеспеченностей аппроксимируется выражением $k = aP^b$, то $x_0 = a$; $\alpha = -1/b$.

В приведенном примере $k = 0{,}591P^{-0{,}459}$, следовательно: $x_0 = 0{,}591$; $\alpha = -\,1/(-0{,}459) = 2{,}18$.

Кривую обеспеченностей, представленную на рисунке 4.47 можно считать «идеальной». В практике гидрологических расчетов такие кривые не встречаются. Однако возможны ситуации, когда эмпирическая кривая обеспеченностей имеет вид прямой линии (в лог. масштабе) не во всем диапазоне, а только в области средних и малых обеспеченностей. В этом случае кривую Парето можно использовать для аппроксимации только верхней части кривой, т. е. строить усеченную кривую обеспеченностей (см. раздел 5.1). Однако, как и в случае с распределением Фреше, экстраполировать кривую Парето в область обеспеченностей менее 0,5% крайне рискованно, так как она очень круто уходит вверх, что может привести к необоснованному завышению расчетных характеристик.

4.11. Обобщенное распределение экстремальных значений

В англоязычной литературе это распределение называют Generalized extreme value (GEV) distribution. Распределение рекомендуется ВМО [8] для расчетов максимального и минимального стока.

Пусть имеется N выборок из одной генеральной совокупности. Если из каждой выборки взять максимальное (или минимальное) значение, то получится новая выборка, состоящая из N значений. Теоретически доказано, что эта выборка будет подчиняться обобщенному распределению экстремальных значений, которое иногда называют распределением Фишера-Типпета-Гнеденко.

Функция плотности вероятности GEV-распределения имеет вид:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\alpha}\exp\left[-\left(\dfrac{x-\mu}{\alpha}\right) - \exp\left(-\dfrac{x-\mu}{\alpha}\right)\right] & \text{при}\,\xi = 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{\alpha}\left[1+\xi\left(\dfrac{x-\mu}{\alpha}\right)\right]^{(-1/\xi)-1} \exp\left\{-\left[1+\xi\left(\dfrac{x-\mu}{\alpha}\right)\right]^{-1/\xi}\right\} & \text{при}\,\xi \neq 0, \end{cases} \qquad (4.195)$$

где μ – параметр положения; ξ – параметр формы; α – параметр масштаба (α > 0).

Область определения переменной *x* зависит от коэффициента формы ξ:

$$\begin{cases} -\infty < x < +\infty & \text{при}\,\xi = 0 \\ 1+\xi\dfrac{(x-\mu)}{\alpha} > 0 & \text{при}\,\xi \neq 0 \end{cases} \qquad (4.196)$$

Интегральная функция GEV-распределения имеет вид:

$$\begin{cases} F(x) = \exp\left[-\exp\left(-\dfrac{x-\mu}{\alpha}\right)\right] & \text{при}\,\xi = 0; \\ F(x) = \exp\left\{-\left[1+\xi\left(\dfrac{x-\mu}{\alpha}\right)\right]^{-1/\xi}\right\} & \text{при}\,\xi \neq 0 \end{cases} \qquad (4.197)$$

В зависимости от значения ξ из системы (4.195) можно получить три семейства распределений:

- тип I (при $\xi = 0$) – распределение Гумбеля;
- тип II (при $\xi > 0$) – распределение Фреше;
- тип III (при $\xi < 0$) обратное распределение Вейбулла.

При этом действуют следующие ограничения:

- если ξ = 0, то $-\infty < x < +\infty$.
- если ξ > 0, то $x > \mu - \alpha/\xi$;
- если ξ < 0, то $x < \mu + \alpha/(-\xi)$;

Распределения Гумбеля и Фреше рассмотрены соответственно в разделах 4.3 и 4.9. Обратное распределение Вейбулла не имеет нижнего предела, но ограничено сверху (рис.4.48). Однако при замене (*x*) на (–*x*) распределение III типа превращается в распределение Вейбулла, которое описано в разделе 4.7.

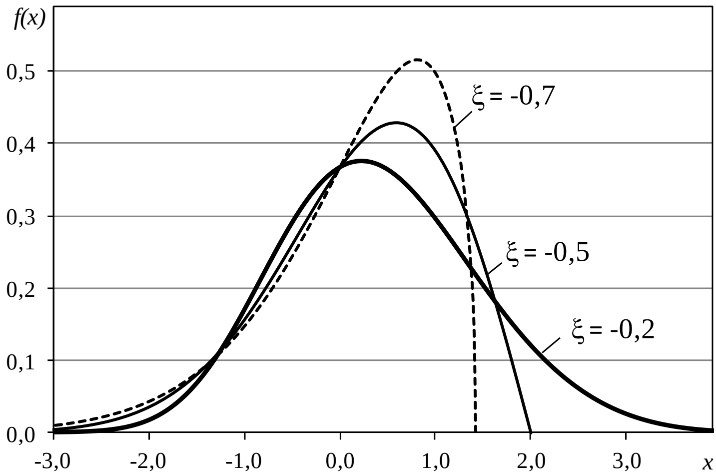


Рис.4.48. Функция плотности вероятности обратного распределения Вейбулла при различных значениях параметра формы ξ; ($\mu = 0$, $\alpha = 1$).

GEV-распределение основано на предположении, что ряд сформирован из максимумов (или минимумов), полученных из N выборок, удовлетворяющих следующим условиям.

- Все выборки имеют одинаковую длину.
- Все выборки относятся к одной генеральной совокупности.
- Все выборки состоят из независимых значений.

Однако применительно к гидрологическим рядам эти условия не выполняются. Например, годовые максимумы весеннего половодья выбираются за каждый год из срочных расходов за половодье. В этом случае все три условия не выполняются, так как продолжительность половодья не постоянна, условия формирования стока в период половодья могут из года могут существенно различаться, и наконец – условие независимости расходов в период половодья тоже не выполняется.

Учитывая сказанное, GEV-распределение, как универсальное распределение для расчета экстремальных характеристик речного стока, в России применяется достаточно редко. Наибольшее распространение из семейства GEV-распределений в отечественной гидрологической практике получило распределение Гумбеля, которое используется для расчета максимальных расходов дождевых паводков и других гидрологических характеристик с коэффициентом асимметрии близким к 1,14.

Ординаты аналитической кривой обеспеченностей GEV-распределения рассчитываются по формулам, которые следуют из (4.197):

$$x = \mu - \alpha \ln\left[-\ln(1-P)\right] \text{ при } \xi = 0 , \qquad (4.198)$$

$$x = \mu + \frac{\alpha}{\xi}\left\{\left[-\ln(1-P)\right]^{-\xi} - 1\right\} \text{ при } \xi \neq 0 , \qquad (4.199)$$

где P обеспеченность в долях единицы.

Оценку параметров GEV-распределения можно выполнить методом L-моментов (см. п.3.3) с использованием формул Хоскинга [29]:

$$k \approx 7{,}8590\, c + 2{,}9554\, c^2 , \qquad (4.200)$$

$$c = \frac{2}{3+t_3} - \frac{\ln 2}{\ln 3} , \qquad (4.201)$$

$$\xi = -k, \qquad (4.202)$$

$$\alpha = \frac{l_2 k}{(1-2^{-k})\Gamma(1+k)} , \qquad (4.203)$$

$$\mu = l_1 - \alpha \frac{1-\Gamma(1+k)}{k} , \qquad (4.204)$$

где, l_1 и l_2 – выборочные L-моменты, определяемые по формулам (3.35-3.36); t_3 – выборочный коэффициент L-асимметрии, определяемый по формуле (3.44); $\Gamma(.)$ – гамма функция. Формулы (4.200-4.204) рекомендуется применять при $-0{,}5 < t_3 < +0{,}5$.

При расчете в MS Excel для вычисления Γ-функции можно воспользоваться функциями: =EXP(ГАММАНЛОГ(ячейка)).

Рассмотрим схему расчета параметров GEV-распределения методом L-моментов на примере ряда максимальных расходов весеннего половодья реки Шуя – д. Бесовец.

1. Исходный ряд ранжируется в возрастающем порядке.
2. По формулам (3.39-3.41) рассчитываются оценки вероятностно взвешенных моментов: b_0, b_1, b_2 (табл.4.22)

Таблица 4.22

Расчет выборочных оценок вероятностно взвешенных моментов ряда максимальных расходов весеннего половодья; р. Шуя – д. Бесовец

№	год	*Расход воды, м³/с*		$\frac{(i-1)}{(n-1)}Q_i$	$\frac{(i-1)(i-2)}{(n-1)(n-2)}Q_i$
		Q	$Q_{ранж}$		
1	1926	460	119	0,00	0,00
2	1927	399	157	2,617	0,00
3	1928	172	158	5,267	0,089
4	1929	419	172	8,600	0,292
5	1930	204	181	12,07	0,614
…	…	…	…	…	…
59	1998	372	486	469,80	453,87
60	1999	247	527	518,22	509,43
61	2000	402	577	577,00	577,00
Сумма			$\Sigma_0 = 18949$	$\Sigma_1 = 11333$	$\Sigma_2 = 8246$
$\frac{\Sigma}{n}$			$b_0 = 310{,}6$	$b_1 = 185{,}8$	$b_2 = 135{,}2$

3. По формулам (3.35) - (3.36) рассчитываются выборочные L-моменты: l_1, l_2, l_3.
4. По формуле (3.44) определяется выборочный коэффициент L-асимметрии: t_3.
5. По формулам (4.200) - (4.204) определяются параметры GEV-распределения: ξ, α, μ (табл.4.23).
6. По формулам (4.198) - (4.199) определяются ординаты аналитической кривой обеспеченностей GEV-распределения (табл. 4.24). Кривая обеспеченностей представлена на рис. 4.49.

Таблица 4.23

Выборочные L-моменты, L-моментные соотношения и параметры GEV-распределения ряда максимальных расходов весеннего половодья; р. Шуя – д. Бесовец

L-моменты			Коэффициенты		Параметры распределения		
l_1	l_2	l_3	*L-вариации* t_2	*L-асимметрии* t_3	ξ	α	μ
310,6	60,92	7,06	0,196	0,116	–0,086	94,6	263,5

Таблица 4.24

Ординаты аналитической кривой обеспеченностей GEV-распределения максимальных расходов весеннего половодья; р. Шуя – д. Бесовец

Обеспеченность в %																
0,01	0,1	1	5	10	20	25	30	50	70	75	80	90	95	97	99	99,9
864	756	623	511	457	397	375	357	298	246	232	218	182	155	138	109	64,5

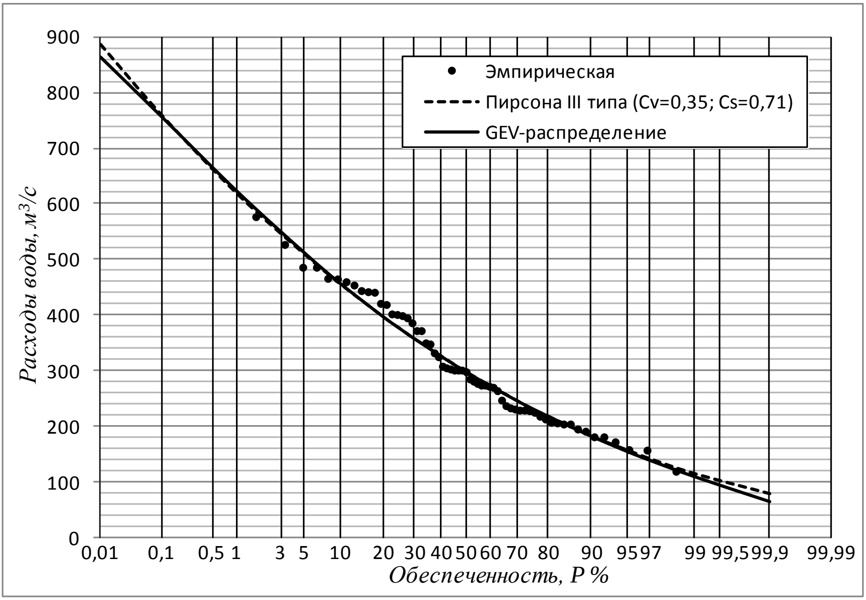


Рис.4.49. Эмпирическая и аналитические кривые обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья; р. Шуя – д. Бесовец.

В рассмотренном примере значение параметра ξ – отрицательное. В этом случае выражение (4.197) сводится к обратному распределению Вейбулла, которое имеет верхний предел и не ограничено снизу. В нашем случае $x_{\max} = \mu + \alpha/(-\xi)$ =1358 м^3/с. Однако в диапазоне используемых обеспеченностей кривая GEV-распределения практически совпадает с кривой Пирсона III типа, которая не имеет верхнего предела.

4.12. Выбор аналитической кривой обеспеченностей при выполнении инженерных расчетов

При выполнении инженерных расчетов выбирать аналитическую кривую обеспеченностей следует из числа тех, которые рекомендуются действующими международными, национальными и ведомственными нормативными документами. Использовать другие типы распределений имеет смысл только в том случае, когда рекомендуемое распределение плохо согласуется с эмпирическими данными.

В России при производстве инженерно-гидрологических изысканий в качестве основных кривых обеспеченностей, как правило, используются кривые Крицкого-Менкеля, Пирсона III типа и трехпараметрического логнормального распределения.

В США наиболее часто используются логарифмическое распределение Пирсона III типа, стандартное распределение Пирсона III типа, распределение Вейбулла и распределение Гумбеля.

МАГАТЕ рекомендует для расчета экстремальных годовых значений метеорологических переменных использовать GEV-распределение.

Однако нужно иметь ввиду, что все используемые аналитические кривые имеют как достоинства, так и недостатки. И нужно учитывать это при работе с эмпирическими данными.

Так кривая Крицкого-Менкеля имеет нулевой нижний предел. Поэтому если эмпирическая кривая обеспеченностей выполаживается в области больших обеспеченностей, а кривая Крицкого-Менкеля резко приближается к нулю, можно получить в качестве расчетных заниженные минимальные значения.

Кривая Пирсона III типа при $C_s/C_v < 2$ в зоне больших обеспеченностей уходит в отрицательную область, а при большой асимметрии может иметь нижний предел, превышающий наблюденный минимум.

Трехпараметрическая логнормальная кривая обеспеченностей применима только при $C_s \geq 3C_v + C_v^3$.

У двухпараметрических распределений коэффициент асимметрии либо зависит от моментов более низких порядков (от МО и дисперсии), либо является константой, что существенно снижает возможности применения этих распределений.

При положительной асимметрии диапазон реально встречающихся на практике значений C_s и C_v покрывают распределения Крицкого-Менкеля, Пирсона III типа, логарифмическое распределение Пирсона III типа и GEV-распределение. В большинстве случаев расчет с использованием этих распределений дает очень близкие результаты.

При отрицательной асимметрии используются логарифмическое и стандартное распределения Пирсона III типа, трехпараметрическое распределение Вейбулла и GEV-распределение.

При экстремально высокой асимметрии для аппроксимации эмпирических данных можно попытаться использовать кривые распределения Парето или Фреше. Но применять эти кривые нужно с большой осторожностью, так как они очень круто уходят вверх в зоне малых обеспеченностей. И при обеспеченностях порядка P = 0,1-0,01 % можно получить существенно завышенные значения. Сказанное в определенной степени относится и GEV-распределению, так как оно включает в себя распределение Фреше (II тип).

Для гидрологических переменных с выраженными нижним и верхним пределами хорошо зарекомендовала себя кривая S_b Джонсона. В частности применять кривую S_b Джонсона можно для рядов коэффициентов стока, дат наступления характерных фаз водного режима, максимальных уровней воды на реках с широкой поймой и. т. п. При этом нужно иметь ввиду, что наличие физически обоснованных пределов, как правило, не дает возможности заранее назначить пределы для распределения S_b Джонсона. Так, например, при построении кривой обеспеченностей коэффициентов годового стока, известно, что $0 \leq \alpha \leq 1$, но на реальных водосборах нижний предел больше нуля, а верхний меньше единицы. И эти пределы приходится определять по эмпирическим данным.

Следует отметить, что некоторые из рассмотренных ранее распределений являются частным случаем боле общих распределений. Так, например, распределение Пирсона III типа включает в себя двух- и трехпараметрическое гамма-распределения. А обобщенное распределение экстремальных значений (GEV) включает распределения Гумбеля, Фреше и обратное распределение Вейбулла.

Произвести выбор аналитических кривых обеспеченностей, с учетом их особенностей, можно ориентируясь на таблицу 4.24.

Таблица 4.24

Основные характеристики распределений, используемых в гидрологии

Тип распределения	Число пара-метров	Область изменения аргумента	Асимметрия и ограничения
Нормальное	2	$(-\infty, +\infty)$	$C_s = 0$
Логнормальное 2П	2	$[0, +\infty)$	$C_s = 3C_v + C_v^3$
Логнормальное 3П (S_L распределение Джонсона)	3	$[x_{\min}, +\infty)$, $x_{\min} \geq 0$	$C_s \geq 3C_v + C_v^3$
Гумбеля для максимальных значений (тип I-A GEV)	2	$(-\infty, +\infty)$	$C_s = 1{,}14$
Гумбеля для минимальных значений (тип I-Б GEV)	2	$(-\infty, +\infty)$	$C_s = -1{,}14$
Гамма распределение 2П (частный случай распределения Пирсона III типа и Крицкого - Менкеля при $C_s = 2C_v$)	2	$[0, +\infty)$	$C_s = 2C_v$
Гамма распределение 3П (частный случай распределения Пирсона III типа при $C_s \geq 0$)	3	$[x_{\min}, +\infty)$	$C_s \geq 0$
Распределение S_b Джонсона	4	$[x_{\min}, x_{\max}]$	*Используется для величин имеющих верхний и нижний пределы*
Обратное Вейбулла 3П (тип III GEV)	3	$(-\infty, x_{\max}]$	$C_s < 0$
Тип распределения	Число пара-метров	Область изменения аргумента	Асимметрия и ограничения
Вейбулла 2П*	2	$[0, +\infty)$	$C_s = A_1$ ($A_1 = 3{,}2C_v - 1{,}1$)
Вейбулла 3П* (совпадает с III типом GEV-распределения при замене x на $-x$)	3	$[x_{\min}, \infty)$	$A_1 < C_s < A_2$ $\left(A_2 = \dfrac{3{,}2C_v}{1-k_{\min}} - 1{,}1\right)$

Таблица 4.24(продолжение)

Основные характеристики распределений используемых в гидрологии

Распределение Пирсона III типа; используются таблицы для $-4 \le C_s \le 6{,}4$	3	$[x_{\min}, +\infty)$ $(-\infty, x_{\max}]$ $(-\infty, +\infty)$	$C_s > 0$ $C_s < 0$ $C_s = 0$
Логарифмическое распределение Пирсона III типа; используются таблицы распределения Пирсона III типа для $-4 \le C_{s,\ln(x)} \le 6{,}4$	3	$[x_{\min}, +\infty)$, $x_{\min} > 0$	*Используется во всем диапазоне реально встречающихся C_s и C_v*
Крицкого-Менкеля; используются таблицы для $0{,}5 \le (C_s/C_v) \le 6{,}0$ и $0 < C_v \le 2$	3	$[0, +\infty)$	$C_s > 0$
Распределение Фреше 2П	2	$[0, +\infty)$	$C_s/C_v > 11$; при $C_v > 0{,}68$ $C_s = \infty$
Распределение Фреше 3П (тип II GEV)	3	$[x_{\min}, \infty)$	$C_s/C_v > 11$; при $\alpha < 3$ $C_s = \infty$; α- параметр формы
Распределение Парето	2	$[x_{\min}, \infty)$, $x_{\min} > 0$	$C_s/C_v > 18$; при $C_v > 0{,}58$ $C_s = \infty$
Обобщенное распределение экстремальных значений (GEV- распределение)	3	I тип: $(-\infty, +\infty)$ II тип: $[x_{\min}, \infty)$ III тип: $(-\infty, x_{\max}]$	*Используется во всем диапазоне реально встречающихся C_s и C_v*

* – Для двух- и трехпараметрического распределений Вейбулла даны приближенные формулы границ применимости этих распределений A_1 и A_2. Ниже приводятся более точные формулы.

$A_i = 1{,}013\, C^3 - 1{,}985\, C^2 + 4{,}081\, C - 1{,}101$ если $0{,}07 \le C \le 1{,}00$;

$A_i = 2{,}0\, C^{1{,}475}$ если $1{,}00 \le C \le 2{,}00$;

для A_1: $C = C_v$; для A_2: $C = C_v/(1 - k_{\min})$,

где $k_{\min}$ – минимальный (эмпирический) модульный коэффициент.

При выборе типа распределения существует два подхода. В рамках первого подхода для аппроксимации эмпирической кривой обеспеченностей рассматривается набор из нескольких кривых обеспеченностей (иногда из нескольких десятков). И в качестве расчетной принимается кривая, которая наилучшим образом соответствует эмпирическим данным. При этом соответствие оценивается с использованием одного или нескольких критериев согласия.

При таком подходе может сложиться ситуация, когда при расчете одной и той же гидрологической характеристики (например, годового стока) на реках одного гидрологического района на каждой реке будет использован свой, отличный от других, тип распределения. Но это противоречит принципу географической зональности, и практически делает невозможными любые пространственные обобщения.

При втором подходе при расчете конкретной гидрологической характеристики назначается базовый тип кривой обеспеченностей, который используется для всего гидрологически однородного района. В России в качестве базовой кривой наиболее часто используют либо кривую Крицкого-Менкеля, либо кривую Пирсона III типа. Однако для отдельных рек района, на которых базовая кривая плохо согласуется с эмпирическими данными, можно использовать и другие типы распределений, но это скорее исключение, чем правило.

Особый вид кривые обеспеченностей могут иметь на малых реках, где сказывается влияние азональных факторов, и на больших реках, режим которых, как правило, индивидуален.

Кривые Крицкого-Менкеля и Пирсона III типа используются, прежде всего, при расчетах расходов воды. При расчете других гидрологических характеристик в качестве базового типа можно применять и другие типы распределений.

Безусловно, выбор базового типа кривой обеспеченностей при выполнении инженерных расчетов обосновывается не только накопленным эмпирическим опытом, но и гидрологическими традициями той или иной страны. Например, в США для расчетов максимального паводочного стока в качестве базовой успешно используется логарифмическая кривая Пирсона III типа. Поэтому в пределах конкретного гидрологического района и для конкретной гидрологической характеристики кривые Крицкого-Менкеля и Пирсона III типа не являются безальтернативными, но при работе в России отказываться от них следует только при наличии веских оснований.

В заключение несколько слов об автоматизации процесса вычислений. В настоящее время имеется достаточно много компьютерных программ для расчета параметров распределения и построения эмпирических и аналитических кривых обеспеченностей. Безусловно, применение программных комплексов позволяет существенно ускорить процесс статистической обработки гидрометеорологической информации. Однако при использовании компьютерных программ следует иметь в виду следующее.

- Качество расчета зависит от используемого в программе алгоритма (который нередко скрыт). Полезно провести расчет с применением стандартных таблиц и номограмм и расчет с использованием компьютерной программы, оценить надежность ее работы в реальном диапазоне значений C_s и C_v.
- Любая программа ориентирована на использование репрезентативных выборок. Если выборка имеет какие-то особенности, например, содержит один или несколько расходов редкой повторяемости, то формальный расчет с использованием компьютерной программы может дать значительные ошибки оцениваемых величин, особенно в тех случаях, когда речь идет о расчетах характеристик максимального и минимального стока.
- Большинство программ имеют ограниченные возможности для корректировки параметров распределения. А если такие возможности имеются, то корректировка производится в ручном режиме и носит субъективный характер.
- Большинство программ не в полной мере соответствуют требованиям российских нормативных документов, как в методическом плане, так и в плане представления результатов расчетов.
- При расчетах гидротехнических сооружений I и II класса параллельно с расчетом по программе целесообразно выполнить контрольный расчет в ручном режиме с учетом всех особенностей конкретного водного объекта и с учетом рекомендаций действующих нормативных документов.

5. ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ ОБЕСПЕЧЕННОСТЕЙ ПРИ НЕОДНОРОДНОСТИ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ

В настоящее время многие гидрологические ряды являются неоднородными. Основные причины неоднородности: изменение климата, влияние антропогенных факторов и так называемая генетическая неоднородность, когда в отдельные годы условия формирования стока резко отличаются от типовых условий. Например, в рядах минимального летне-осеннего стока могут встречаться очень дождливые годы, когда межень практически отсутствует и минимумы этих лет могут в десятки раз превосходить минимумы засушливых лет.

В этой ситуации, действующие в России нормативные документы, допускают использовать при выполнении инженерных расчетов усеченные и составные кривые обеспеченностей [11,19]. При этом термины и «усеченные» и «составные» здесь используются как сугубо гидрологические термины в трактовке характерной именно для российской гидрологической традиции.

Усеченными называют кривые обеспеченностей, аппроксимирующие не всю эмпирическую кривую, а только ее часть [11,19]. Например, при расчете максимальных расходов строится только верхняя часть кривой обеспеченностей, а при расчете минимальных расходов – только нижняя. Методы построения усеченных кривых обеспеченностей рассматриваются в разделе 5.1.

При построении *составной* кривой обеспеченностей гидрологический ряд разбивается на несколько однородных выборок, каждая из которых описывается своим законом распределения. Затем строится объединенная кривая, которую и принято называть составной кривой обеспеченностей. Учитывая относительно небольшую длину гидрологических рядов, из ряда выделяют обычно две, реже – три однородные выборки.

К классу составных кривых обеспеченностей относят и кривые, которые строят, когда имеются два (или три) ряда относящихся к разным генеральным совокупностям и из них формируется новый ряд. При этом каждое отдельное значение нового ряда может принадлежать только к одной из совокупностей. В качестве примера здесь можно привести ряд наибольших в году расходов воды, когда годовой максимум может сформироваться либо в период весеннего половодья, либо в период дождевых паводков.

Методы построения составных кривых обеспеченностей рассматриваются в разделе 5.2.

Если неоднородность ряда вызвана изменением естественного гидрологического режима под влиянием локальных антропогенных факторов, то возможен вариант приведения ряда к однородным условиям.

В этом случае действующие в Росси нормативные документы [11,19] рекомендуют две расчетные схемы. Первая расчетная схема предполагает приведение гидрологических рядов к естественным однородным условиям, вторая – приведение рядов к нарушенным условиям.

В разделе 5.3 рассматривается один из вариантов приведения гидрологического ряда к однородным условиям с использованием регрессионных методов.

5.1. Построение усеченных кривых обеспеченностей

При построении усеченных кривых обеспеченностей можно выделить 6 типовых ситуаций. Три – при построении верхней части кривой обеспеченностей (рис.5.1), и три – при построении нижней части кривой обеспеченностей (рис.5.2).

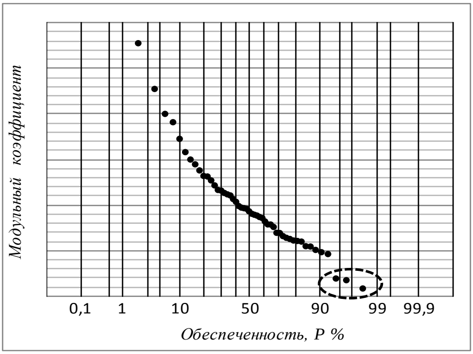
Для удобства изложения кривую для верхней части будем называть усеченной кривой обеспеченностей для максимумов, кривую для нижней части – усеченной кривой обеспеченностей для минимумов.

В данной книге для построения усеченных кривых обеспеченностей используются 4 метода, краткое описание которых дано в табл.5.1.

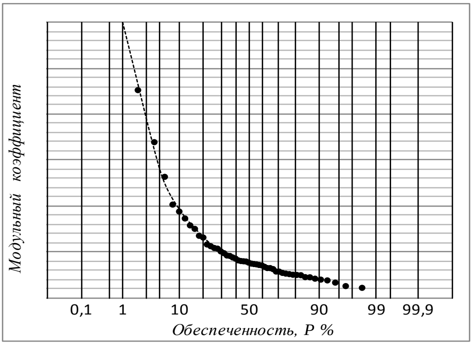
Таблица 5.1

Методы построения усеченных кривых обеспеченностей

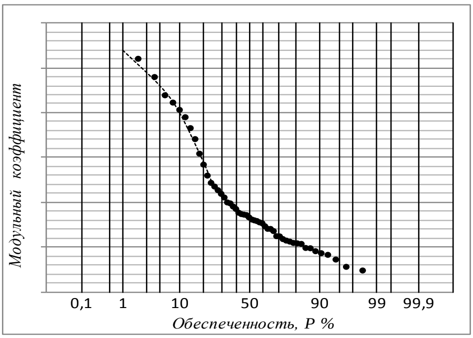
Индекс метода	Краткое описание метода
М-1	Метод применяется если длина части ранжированной выборки, для которой строится усеченная кривая обеспеченностей, имеет продолжительность достаточную для надежной оценки параметров распределения. В этом случае для укороченной выборки строится аналитическая кривая обеспеченностей, а затем на ее основе строится усеченная кривая путем пересчета обеспеченностей по соответствующей формуле.
М-2	При использовании этого метода для построения усеченной кривой используются двухпараметрические распределения, которые можно линеаризовать путем простых алгебраических преобразований. Для линеаризованных переменных строится кривая обеспеченностей, по которой определяется точка перелома (усечения). Затем по усеченной части методом наименьших квадратов находятся параметры распределения усеченной кривой обеспеченностей.
М-3	Этот метод представляет собой модификацию классического графоаналитического метода с использованием кривой обеспеченностей Пирсона III типа.
М-4	Метод, рекомендованный СП 33-101-2003. Применяется для построения усеченной кривой обеспеченностей для максимумов. Метод подразумевает усечение строго по медиане. Параметры усеченной кривой находятся методом приближенного наибольшего правдоподобия.



Тип Т1. Имеются выбросы в нижней части кривой обеспеченностей, которые выявляются с помощью критериев типа Граббса для минимумов.

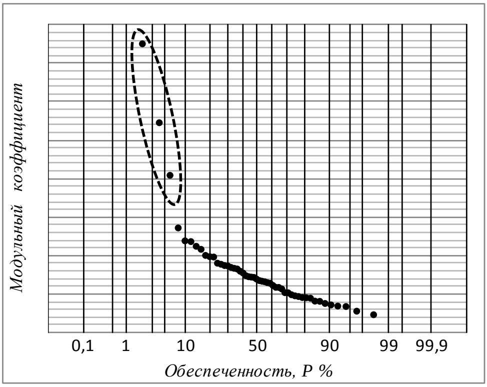


Тип Т2. Кривая обеспеченностей имеет хорошо выраженный перелом. Точка перелома может находиться как левее, так и правее медианы. Верхняя часть ряда имеет положительную асимметрию.

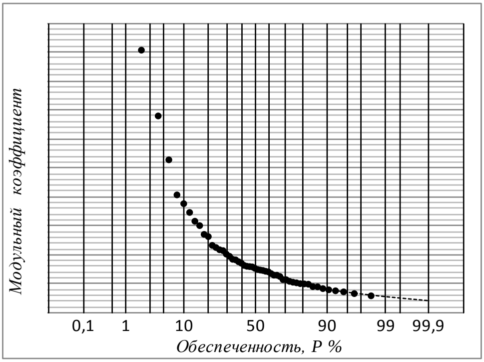


Тип Т3. Кривая обеспеченностей имеет хорошо выраженный перелом. Точка перелома может находиться как левее, так и правее медианы. Верхняя часть ряда имеет отрицательную асимметрию.

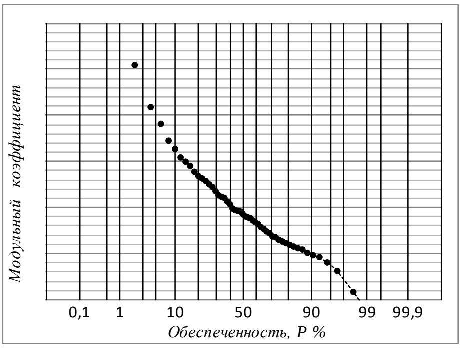
Рис. 5.1. Типовые кривые обеспеченностей при неоднородности ряда в случае построения усеченной кривой для максимумов.



Тип Т4. Имеются выбросы в верхней части кривой, которые выявляются с помощью критериев типа Граббса для максимумов.



Тип Т5. Кривая обеспеченностей имеет хорошо выраженный перелом. Точка перелома может находиться как левее, так и правее медианы. Нижняя часть ряда имеет положительную асимметрию.



Тип Т6. Кривая обеспеченностей имеет хорошо выраженный перелом при $P \geq 50\%$. Нижняя часть ряда имеет отрицательную асимметрию.

Рис. 5.2. Типовые кривые обеспеченностей при неоднородности ряда в случае построения усеченной кривой для минимумов.

5.1.1. Тип неоднородности *T1*. *Строится усеченная кривая для максимумов. Имеются выбросы в нижней части кривой обеспеченностей, которые выявляются с помощью критериев типа Граббса для минимумов.*

Метод М-1(Т1)

Рассмотрим схему построения усеченной кривой обеспеченностей на примере ряда максимальных дождевых расходов.

1. Из исходной выборки исключаются k штук экстремальных значений, порождающих неоднородность ряда. В результате получаем выборку объемом $n_1 = (n - k)$. В данном примере длина ряда $n = 38$. Исключены два наиболее низких расхода ($k = 2$), следовательно: $n_1 = 38 - 2 = 36$.
2. Для укороченной выборки рассчитываются оценки параметров распределения, и на клетчатке вероятностей строятся эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей.

   В данном примере: $\overline{Q} = 311$ м^3/с; $C_v = 0,40$; $C_s/C_v = 3$.

   В качестве аналитической кривой использована кривая Крицкого-Менкеля (рис.5.3). Координаты этой кривой представлены в первых двух строках таблицы 5.2.
3. Если кривая хорошо соответствует эмпирическим точкам, то на её базе строится усеченная кривая обеспеченностей для исходной выборки объемом n. Переход от обеспеченностей укороченной выборки (P_1) к обеспеченностям исходной выборки (P) производится по формуле

$$P = \frac{P_1(n-k)}{n}\% \qquad (5.1)$$

   Расчет по формуле (5.1) представлен в третьей строке табл. 5.2.
4. По данным второй и третьей строки таблицы 5.2 путем интерполяции рассчитываем ординаты усеченной кривой для опорных обеспеченностей (табл.5.3).
5. В качестве точки усечения можно принять любую точку с обеспеченностью $P < [(n - k)/n]100\%$, но так как строится усеченная кривая только для максимумов, то в качестве такой точки логично принять точку с $P \leq 50\%$.
6. По данным табл.5.3 строится усеченная кривая обеспеченностей (рис.5.4).

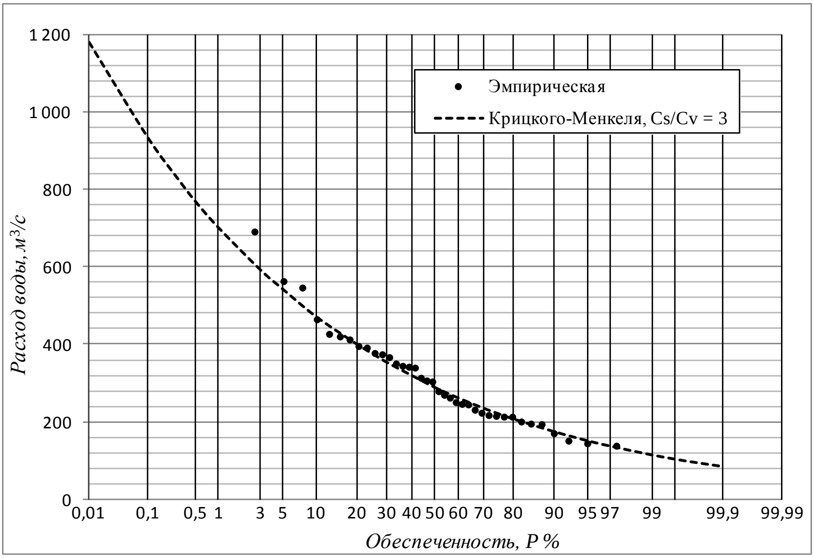


Рис. 5.3. Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей после удаления двух наименьших значений.

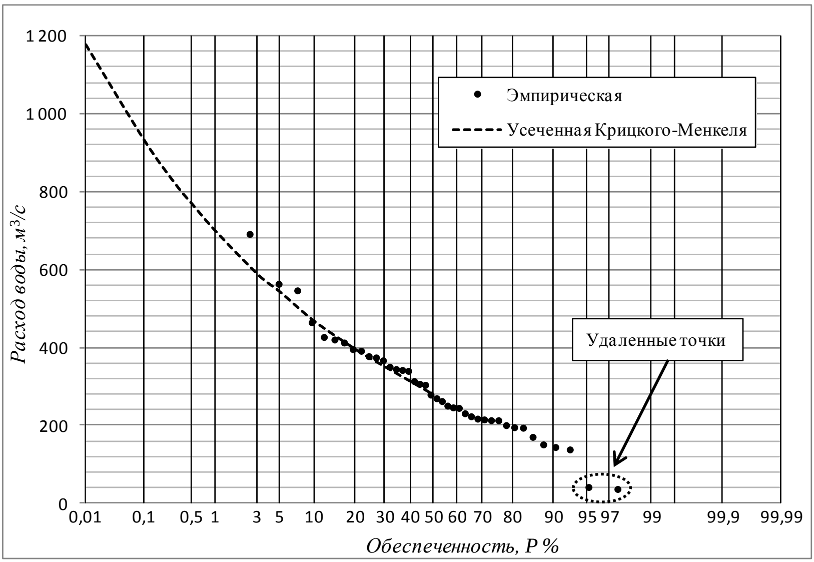


Рис.5.4. Усеченная кривая обеспеченностей.

Таблица 5.2

Координаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля

Обеспеченность *P*% для укороченной выборки	0,01	0,1	0,3	0,5	1	3	5	10	20	25	50
Расход воды, м^3/с	1181	935	823	770	702	593	544	472	401	376	289
Обеспеченность *P*% для исходной выборки; расчет по формуле (5.1).	0,009	0,095	0,28	0,47	0,95	2,84	4,74	9,47	18,9	23,7	47,4

Таблица 5.3

Координаты усеченной кривой обеспеченностей

Обеспеченность *P*% для исходной выборки	0,01	0,1	0,3	0,5	1	3	5	10	20	25	50
Расход воды, м^3/с	1179	931	816	768	698	587	541	467	395	370	277

5.1.2. Тип неоднородности *T2*. *Строится усеченная кривая для максимумов. Исходная кривая обеспеченностей имеет хорошо выраженный перелом. Точка перелома может находиться как левее, так и правее медианы. Верхняя часть ряда имеет положительную асимметрию.*

Для этого типа можно использовать несколько методов построения усеченной кривой обеспеченностей.

Метод М-1(Т2)

Если после разделения ряда по точке перелома верхняя часть ранжированного ряда имеет продолжительность (n_1) достаточную для того, чтобы надежно оценить параметры укороченной выборки, то можно применить метод *М-1(Т1)*. При этом в качестве *k* принимается длина нижней части ранжированной выборки.

Методы М-2.1(Т2), М-2.2(Т2), М-2.3(Т2)

Так как усеченная кривая аппроксимирует не всю ранжированную выборку, а только ее верхнюю часть, то при выборе аналитической кривой обеспеченностей можно ограничить выбор двухпараметрическими распределениями. При этом наиболее удобными являются распределения, которые можно линеаризовать с помощью обычных алгебраических преобразований. К числу таких распределений относятся в частности двухпараметрическое распределение Вейбулла, распределение Гумбеля и распределение Парето. После линеаризации параметры распределения находятся методом наименьших квадратов.

Метод М-2.1(Т2). *Построение усеченной кривой с применением двухпараметрического распределения Вейбулла*

Для двухпараметрического распределения Вейбулла функция обеспеченностей определяется выражением (см. п. 4.7):

$$P(x) = \exp\left\{-\left(x/a\right)^b\right\}, \qquad (5.2)$$

где a – коэффициент масштаба, $a > 0$; b – коэффициент формы; $b > 0$; $0 \le x < \infty$. Из формулы (5.2) следует:

$$z = g \cdot y + c\,, \qquad (5.3)$$

где

$$\begin{cases} z = \ln(x) \\ y = \ln(-\ln P), \end{cases} \qquad (5.4)$$

P – обеспеченность в долях единицы. Параметры g и c связаны с параметрами распределения Вейбулла формулами:

$$\begin{cases} g = 1/b \\ c = \ln a. \end{cases} \qquad (5.5)$$

Как видно из выражения (5.3), для новых переменных z и y связь является линейной и параметры g и c можно легко найти методом наименьших квадратов.

Порядок построения усеченной кривой следующий.

1. Исходный ряд ранжируется и для каждого члена ранжированного ряда рассчитывается эмпирическая обеспеченность в долях единицы: $P = m/(n + 1)$.
2. Для каждого значения P по формулам (5.4) определяются значения z_p и $y_{\text{р}}$.
3. Строится зависимость $z_p = f(y_p)$, по которой определяется точка усечения. За точку усечения принимается точка перелома на графике, после которой связь становится линейной (рис.5.5).
4. Для верхней части зависимости строится отдельный график и для неё методом наименьших квадратов определяются параметры g и c (рис. 5.6)

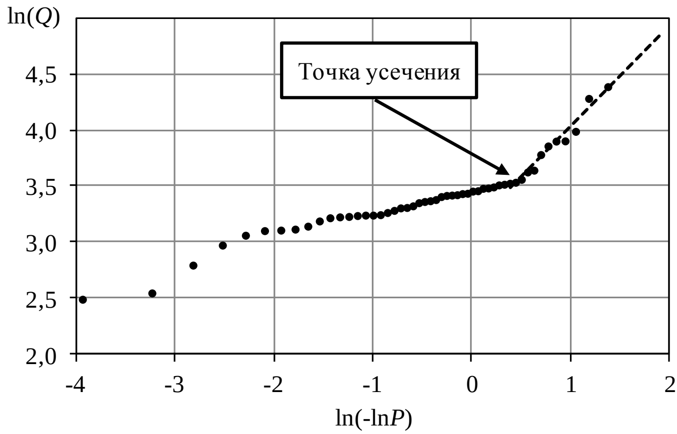


Рис. 5.5. Зависимость $\ln(Q) = f\{\ln[-\ln(P)]\}$ для максимальных расходов весеннего половодья; р. Сестра – ст. Белоостров (определение точки усечения).

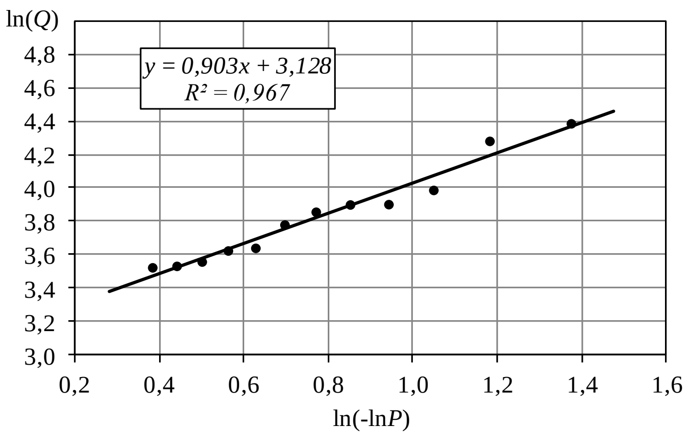


Рис. 5.6. Зависимость $\ln(Q) = f\{\ln[-\ln(P)]\}$ для максимальных расходов весеннего половодья; р. Сестра – ст. Белоостров; верхняя (линейная) часть зависимости; (g = 0,903; c = 3,128).

5. С использованием полученных параметров g и c рассчитываются ординаты верхней части кривой обеспеченностей от точки усечения до P = 0,01%. Расчет выполняется по формуле, которая следует из (5.3):

$$x_p = \exp\{g[\ln(-\ln P)] + c\}, \qquad (5.6)$$

в формуле (5.6) P – в долях единицы.

6. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей для максимумов (рис. 5.7).

Если требуется, можно перейти от параметров g и c к естественным параметрам распределения Вейбулла a и b.

В представленном на рисунках 5.5-5.6 примере g = 0,903; c = 3,128, следовательно, с учетом формул (5.5) естественные параметры распределения Вейбулла следующие: $b = 1/g = 1/0{,}903 = 1{,}11$; $a = \exp(c) = \exp(3{,}128) = 22{,}83$.

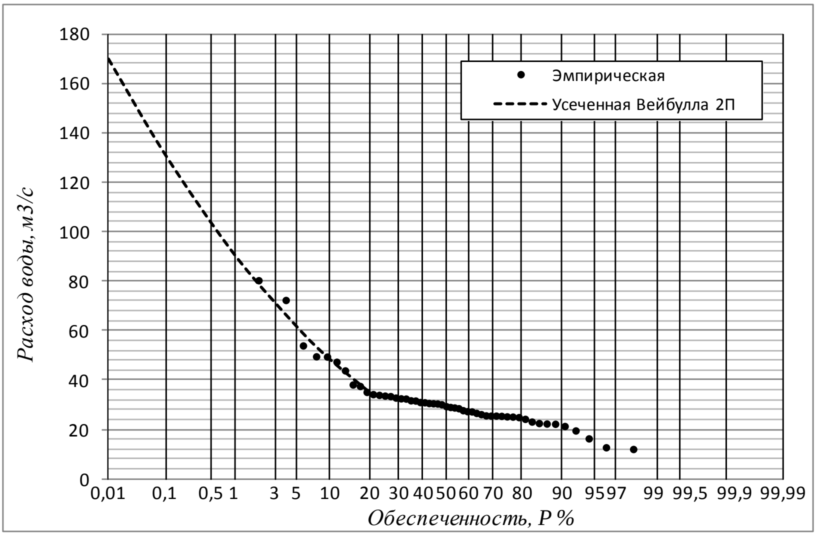


Рис. 5.7. Усеченная кривая обеспеченностей для максимальных расходов весеннего половодья; р. Сестра – ст. Белоостров.

Метод М-2.2(Т2). *Построение усеченной кривой с применением распределения Гумбеля с положительной асимметрией*

В рамках этого подхода верхняя часть кривой обеспеченностей аппроксимируется распределением Гумбеля с положительной асимметрией (см. п. 4.3), функция обеспеченностей которого определяется выражением:

$$P(x) = 1 - \exp[-\exp(-y)], \qquad (5.7)$$

где $y = (x - \mu)/\lambda$; μ – мода случайной величины X; λ – параметр масштаба. Из (5.7) следует:

$$x_p = \lambda g_p + \mu \qquad (5.8)$$

где: $g_p = -\ln[-\ln(1-P)]$; P – обеспеченность в долях единицы.

Таким образом, если выборка описывается распределением Гумбеля, то зависимость между x_p и g_p является линейной и параметры λ и μ легко находятся методом наименьших квадратов.

Порядок построения усеченной кривой следующий.

1. Исходный ряд ранжируется и для каждого члена ранжированного ряда рассчитывается эмпирическая обеспеченность в долях единицы: $P = m/(n + 1)$.
2. Для каждого значения P определяется g_p.
3. Строится зависимость $x_p = f(g_p)$, по которой определяется точка усечения. За точку усечения принимается точка перелома на графике, после которой связь становится линейной (рис.5.8)
4. Для верхней части зависимости строится отдельный график и для неё методом наименьших квадратов определяются параметры λ и μ (рис. 5.9)
5. С использованием полученных параметров λ и μ по формуле (5.8) рассчитываются ординаты верхней части кривой обеспеченностей от точки усечения до P = 0,01%.
6. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей для максимумов (рис. 5.10).

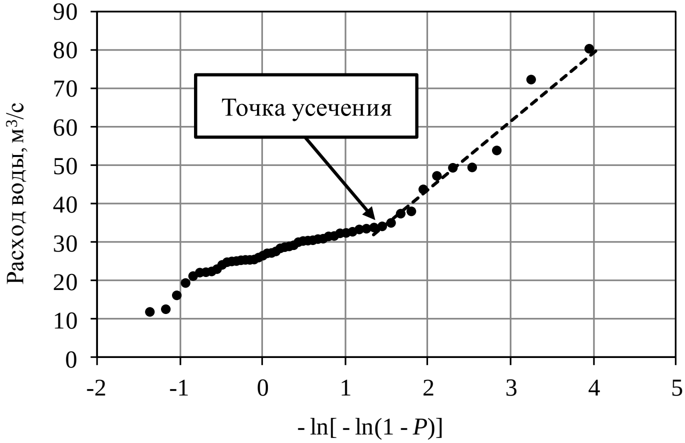


Рис. 5.8. Зависимость $Q = f\left\{-\ln[-\ln(1-P)]\right\}$ для максимальных расходов весеннего половодья; р. Сестра – ст. Белоостров (определение точки усечения).

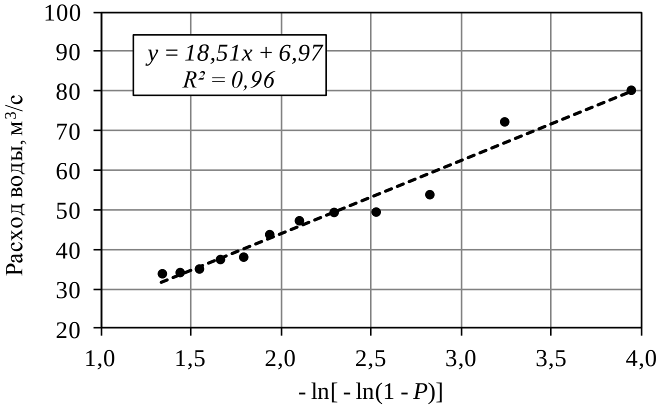


Рис. 5.9. Зависимость $Q = f\{-\ln[-\ln(1-P)]\}$ для максимальных расходов весеннего половодья; р. Сестра – ст. Белоостров; верхняя (линейная) часть зависимости (λ = 18,5; и μ = 6,97).

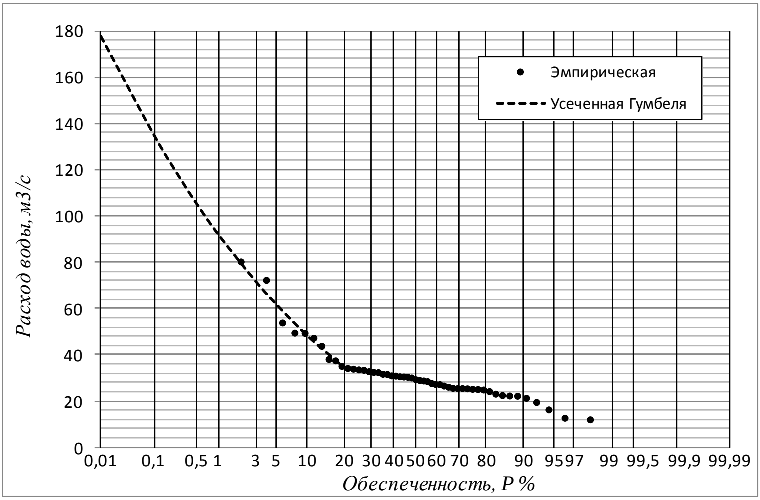


Рис. 5.10. Усеченная кривая обеспеченностей для максимальных расходов весеннего половодья; р. Сестра – ст. Белоостров.

Метод М-2.3(Т2). *Построение усеченной кривой с использованием распределения Парето*

Если эмпирическая кривая в области малых обеспеченностей очень круто уходит вверх, то для построения усеченной кривой обеспеченностей можно попытаться использовать распределение Парето. Однако, как уже отмечалось, делать это нужно с большой осторожностью, особенно если требуется экстраполяция кривой в область очень малых обеспеченностей ($P \leq 0{,}1\%$) (см. п. 4.10).

Функция обеспеченностей Парето определяется выражением:

$$P(x) = \left(x_0 / x\right)^{\alpha}, \quad x > x_0, \tag{5.9}$$

следовательно:

$$x = x_0 P^{-(1/\alpha)}, \tag{5.10}$$

где P – обеспеченность в долях единицы.

Логарифмируя левую и правую части выражения (5.10) получаем:

$$\ln x = -a \ln P + b, \tag{5.11}$$

где $a = 1/\alpha$; $b = \ln(x_0)$. Таким образом, если выборка описывается распределением Парето, то зависимость между $\ln(x)$ и $\ln(P)$ является линейной, а параметры a и b легко находятся методом наименьших квадратов. При этом переход от параметров a и b к параметрам распределения Парето производится по формулам:

$$\alpha = 1/a\,; \qquad x_0 = \exp(b)\,. \tag{5.12}$$

Порядок построения усеченной кривой обеспеченностей в этом случае следующий.

1. Исходный ряд ранжируется и для каждого члена ранжированного ряда рассчитывается эмпирическая обеспеченность в долях единицы: $P = m/(n + 1)$.
2. Строится зависимость $\ln(x_p) = f(\ln P)$, по которой определяется точка усечения. За точку усечения принимается точка перелома на графике, после которой связь становится линейной (рис.5.11)
3. Для верхней части зависимости строится отдельный график, и для неё методом наименьших квадратов определяются параметры выражения (5.11) a и b (рис. 5.12).
4. По формулам (5.12) определяются параметры распределения Парето α и x_0.

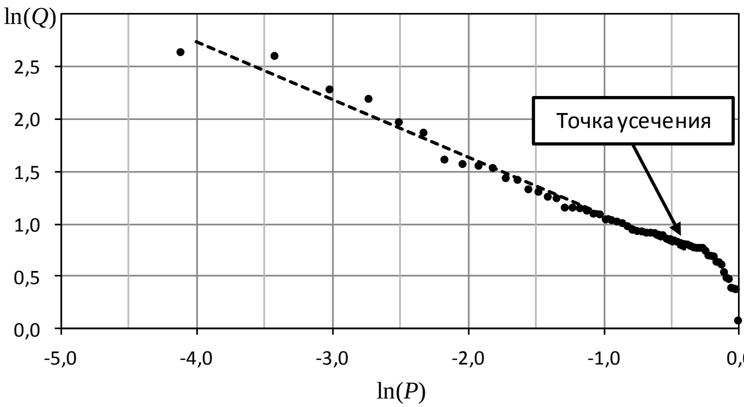


Рис. 5.11. Зависимость $\ln Q = f(\ln P)$ для минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское (определение точки усечения).

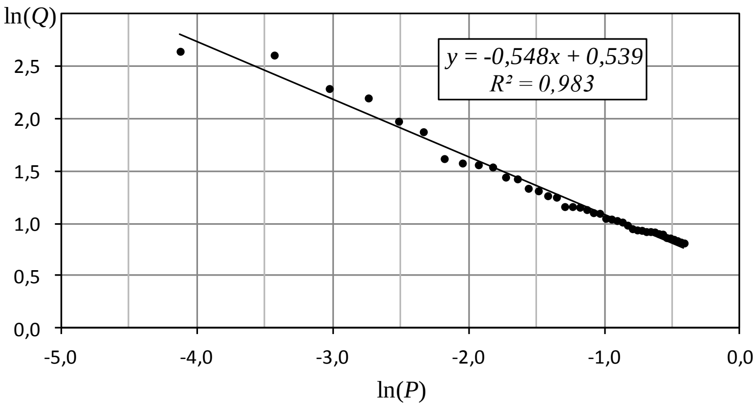


Рис. 5.12. Зависимость ln$Q$ = f(ln$P$) для минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; верхняя (линейная) часть зависимости; р. Пежма – д. Шелюбинское; α = 1/(0,548) = 1,82; x_0 = exp(0,539) = 1,71.

5. С использованием полученных параметров α и x_0 по формуле (5.10) рассчитываются ординаты верхней части кривой обеспеченностей от точки усечения до P = 0,1%.
6. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей для максимумов (рис. 5.13).

С формальной точки зрения построенная аналитическая кривая Парето (рис.5.13) хорошо аппроксимирует верхнюю часть эмпирической кривой. Однако затем она очень круто уходит вверх. Это связано с тем, что полученное значение параметра $\alpha < 2$. В этом случае у распределения Парето отсутствует не только третий, но и второй момент (см. п. 4.10). Как следствие – экстраполяция усеченной кривой Парето в зону обеспеченностей менее 1% будет приводить к необоснованному завышению расходов.

Для сравнения на этом же графике построена усеченная кривая Гумбеля, которая уже при обеспеченности 0,5% дает расход на 40% меньше, чем распределение Парето.

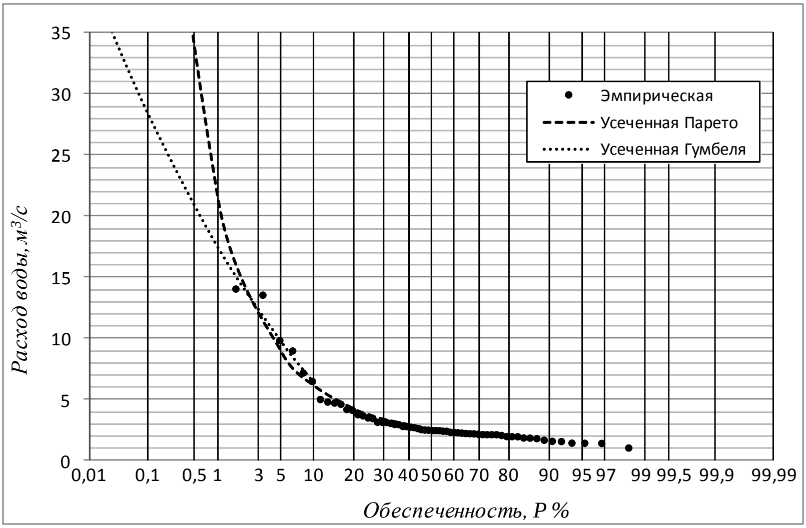


Рис. 5.13. Кривая обеспеченностей минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское. Усеченные кривые для максимумов построены с использованием распределений Парето и Гумбеля.

Метод М-3(Т2). *Графоаналитический метод с использованием кривой Пирсона III типа.*

Используется методика аналогичная той, которая применяется для построения кривой Пирсона III типа графоаналитическим методом в случае однородного ряда (см. п. 4.4). Отличие состоит в том, что здесь используется не классический коэффициент скошенности, а коэффициент скошенности (назовем его $S_{\max}$) определяемый по ординатам верхней части кривой обеспеченностей:

$$S_{\max} = \left(x_5 + x_{50} - 2x_{25}\right)/\left(x_5 - x_{50}\right). \qquad (5.13)$$

Для распределения Пирсона III типа коэффициент $S_{\max}$, как и обычный коэффициент скошенности, однозначно зависит от коэффициента асимметрии (прил. 1).

Рассмотрим порядок построения усеченной кривой обеспеченностей на примере ряда максимальных расходов весеннего половодья реки Сестра – ст. Белоостров.

1. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей.
2. Для верхней части ряда проводится сглаженная эмпирическая кривая обеспеченностей от максимального значения до медианы. Сглаженная кривая должна лежать в поле эмпирических точек от максимального значения до точки усечения. Если точка усечения на кривой обеспеченностей расположена левее медианы, то правее точки усечения сглаженная кривая может отклоняться от эмпирических точек, чтобы сохранить плавность очертаний (рис.5.14).
3. По сглаженной эмпирической кривой определяются ординаты $x_{5\%}$, $x_{25\%}$, $x_{50\%}$: $Q_{5\%}$ = 60 м^3/с; $Q_{25\%}$ = 30 м^3/с; $Q_{50\%}$ = 15 м^3/с.
4. По формуле (5.13) рассчитывается коэффициент $S_{\max}$:
   $S_{\max} = (60 + 15 - 2 \cdot 30)/(60 - 15) = 0{,}333$.
5. В зависимости от $S_{\max}$ по таблице (прил.1) определяются коэффициент асимметрии и нормированные ординаты распределения Пирсона III типа для усеченной кривой (C_s, $t_{5\%}$, $t_{25\%}$, $t_{50\%}$): $C_s = 1{,}30$; $t_{5\%} = 1{,}93$; $t_{25\%} = 0{,}50$; $t_{50\%} = -0{,}22$.
6. По формулам рассчитываются среднеквадратическое отклонение, среднее значение и коэффициент вариации:

$$\sigma = \left(x_5 - x_{50}\right)/\left(t_5 - t_{50}\right) \tag{5.14}$$

$$\bar{x} = x_{25} - \sigma\, t_{25} \tag{5.15}$$

$$C_v = \sigma / \bar{x} \tag{5.16}$$

   $\sigma = (60 - 15)/(1{,}93 + 0{,}22) = 20{,}93$; $\bar{x} = 30 - 20{,}93 \cdot 0{,}50 = 19{,}5$; $C_v = 1{,}07$.
7. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей Пирсона III типа для максимумов (рис.5.15).

Основным недостатком графоаналитического метода является то, что при проведении сглаженной кривой имеет место элемент субъективизма.

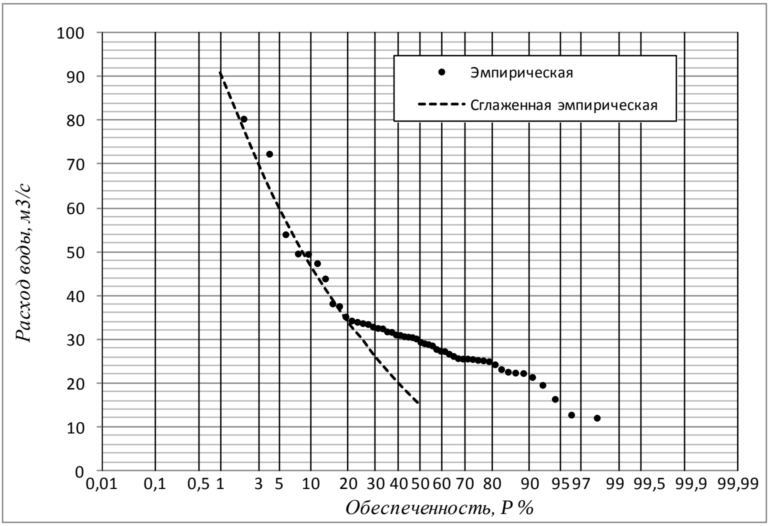


Рис. 5.14. Эмпирическая кривая обеспеченностей и сглаженная эмпирическая кривая обеспеченностей для верхней части ряда; р. Сестра – ст. Белоостров (максимальные расходы весеннего половодья).

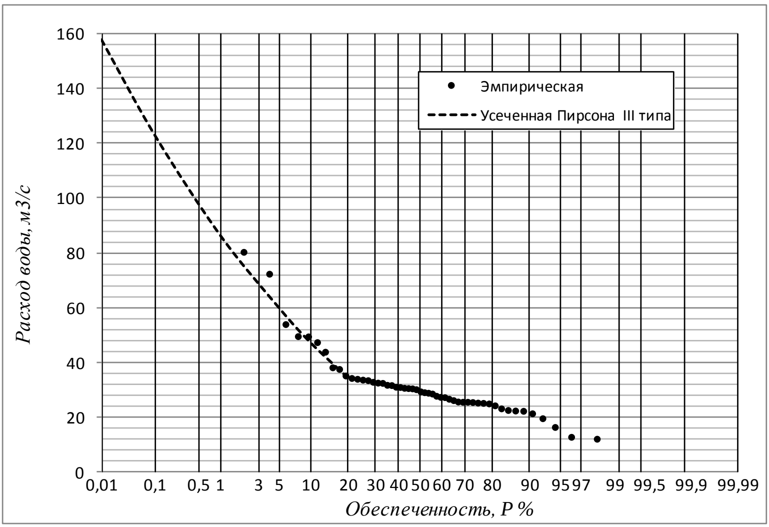


Рис. 5.15. Усеченная кривая обеспеченностей для максимальных расходов весеннего половодья; р. Сестра – ст. Белоостров.

Метод М-4(Т2). *Метод СП 33-101-2003.*

При использовании этого метода исходный ряд ранжируется в порядке убывания и затем делится на две части по медиане. В дальнейшем рассматривают только верхнюю часть ряда.

При построении усеченной кривой обеспеченностей используется двухпараметрическое гамма-распределение (см. п. 4.4). Оценка параметров распределения выполняется методом приближенного наибольшего правдоподобия.

Рассмотрим порядок расчета на примере ряда максимальных расходов весеннего половодья реки Белая – г. Уфа [19].

1. По первой половине ранжированного ряда рассчитывается среднее значение и статистика $\lambda_{2,n/2}$:

$$\bar{x}_{n/2} = \frac{1}{(n/2)} \sum_{1}^{n/2} x_i \qquad (5.17)$$

$$\lambda_{2,n/2} = \frac{1}{(n/2)} \sum_{1}^{n/2} \lg\left(\frac{x_i}{\bar{x}_{n/2}} \right) \qquad (5.18)$$

Для р. Белая – г. Уфа: $\bar{x}_{n/2}$ = 8132 м^3/с; $\lambda_{2,n/2}$ = – 0,0176.

2. В зависимости от $\lambda_{2,n/2}$ по таблице (прил. 5) определяется коэффициент вариации усеченного гамма-распределения: C_v^* = 0,52; значения $\lambda_{2,n/2}$ в таблице отрицательные (рис.5.16).

C_v	0	1	**2**	3	4
0,1	0,0005	0,0007	0,0009	0,0011	0,0013
0,2	0,0025	0,00281	0,00321	0,0343	0,00374
0,3	0,0056	0,00608	0,00656	0,00704	0,00752
0,4	0,0104	0,0109	0,0114	0,0119	0,0124
0,5	0,0161	0,0168	**0,0176**	0,0183	0,0191
0,6	0,0235	0,0243	0,025	0,0259	0,0267
0,7	0,0314	0,0324	0,0328	0,0335	0,0342

Рис. 5.16. Фрагмент таблицы для определения коэффициента вариации усеченного гамма-распределения (C_v^*) в зависимости от $\lambda_{2,n/2}$ ($\lambda_{2,n/2}$ = – 0,0176; C_v^* = 0,52)

3. В зависимости от полученного C_v^* по таблице (прил. 6) определяется параметр $\varphi(C_v^*) = 0,715$ (рис.5.17).

C_v	0	1	**2**	3	4
0,1	0,925	0,919	0,913	0,906	0,900
0,2	0,863	0,856	0,852	0,847	0,841
0,3	0,809	0,805	0,800	0,795	0,791
0,4	0,764	0,760	0,756	0,751	0,747
0,5	0,722	0,719	$\boxed{\mathbf{0,715}}$	0,712	0,708
0,6	0,688	0,685	0,681	0,678	0,674
0,7	0,654	0,652	0,649	0,647	0,645

Рис. 5.17. Фрагмент таблицы для определения параметра $\varphi(C_v^*)$ ($C_v^* = 0,52$; $\varphi(C_v^*) = 0,715$).

4. Рассчитывается среднее значение усеченного гамма-распределения по формуле:

$$x_0 = \varphi(C_v^*) \cdot \bar{x}_{n/2} \tag{5.19}$$

Для р. Белая – г. Уфа: $x_0 = 0,715 \cdot 8132 = 5814$ м^3/с.

5. Для диапазона обеспеченностей от 0,01% до 50% строится аналитическая кривая гамма-распределения с параметрами: среднее значение $x_0 = 5814$; коэффициент вариации $C_v^* = 0,52$; $C_s/C_v = 2$ (рис. 5.18). Напомним, при $C_s/C_v = 2$ распределения Крицкого-Менкеля и Пирсона III типа совпадают с двухпараметрическим гамма-распределением.

Основным недостатком этого метода является, то, что точка усечения здесь строго фиксированная. И если реальная точка перелома эмпирической кривой обеспеченностей значительно отклоняется от медианы – расчет будет неэффективным.

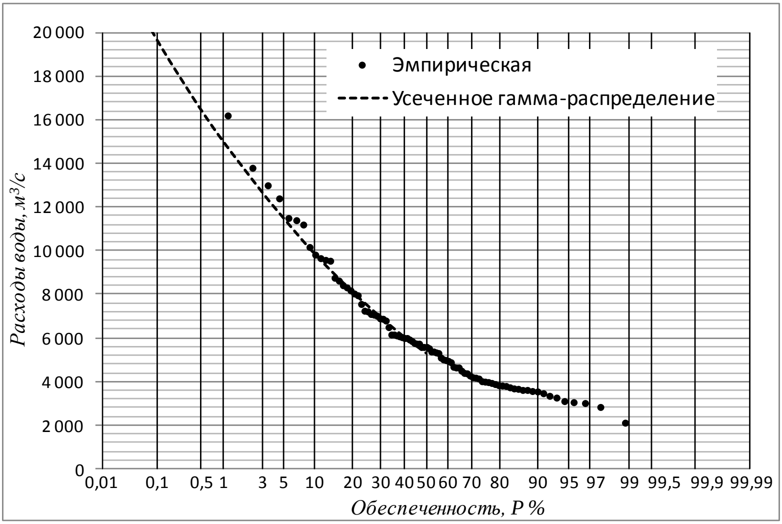


Рис. 5.18. Усеченная кривая обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья; р. Белая – г. Уфа.

5.1.3. Тип неоднородности *Т3*. *Строится усеченная кривая для максимумов. Исходная Кривая обеспеченностей имеет хорошо выраженный перелом. Точка перелома может находиться как левее, так и правее медианы. Верхняя часть ряда имеет отрицательную асимметрию.*

Метод М-1(Т3).

Если после разделения ряда по точке перелома верхняя часть ранжированного ряда имеет продолжительность (n_1) достаточную для того, чтобы надежно оценить параметры укороченной выборки, то можно применить метод *М-1(А1)*. При этом в качестве k принимается длина нижней части ранжированной выборки. Особенность лишь в том, что при построении усеченной кривой используются аналитические кривые, допускающие отрицательную асимметрию: обычное и логарифмическое распределения Пирсона III типа, двух- и трехпараметрическое распределения Вейбулла, распределение Гумбеля с отрицательной асимметрией.

Метод М-2.1(Т3). *Построение усеченной кривой с применением двухпараметрического распределения Вейбулла*

Поскольку распределение Вейбулла допускает как положительную, так и отрицательную асимметрию, схема расчета полностью совпадает с той, которая использовалась в методе *М-2.1(Т2).*

Рассмотрим построение усеченной кривой обеспеченностей на примере ряда максимальных уровней весеннего половодья на реке Коваши – д. Лендовщина.

1. Исходный ряд ранжируется и для каждого члена ранжированного ряда рассчитывается эмпирическая обеспеченность в долях единицы: $P = m/(n + 1)$.
2. Для каждого значения P по формулам (5.4) определяются значения z_p и y_p.
3. Строится зависимость $z_p = f(y_p)$, по которой определяется точка усечения. За точку усечения принимается точка перелома на графике, после которой связь становится линейной (рис.5.19).
4. Для верхней части зависимости строится отдельный график и для неё методом наименьших квадратов определяются параметры g и c (рис. 5.20)

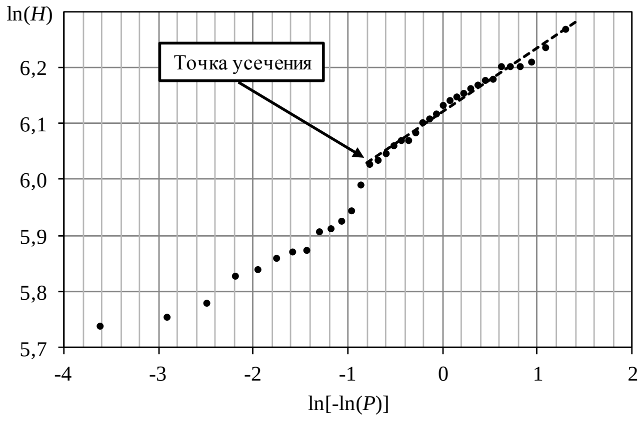


Рис. 5.19. Зависимость $\ln(H) = f\{\ln[-\ln(P)]\}$ для максимальных уровней весеннего половодья; р. Коваши – д. Лендовщина (определение точки усечения).

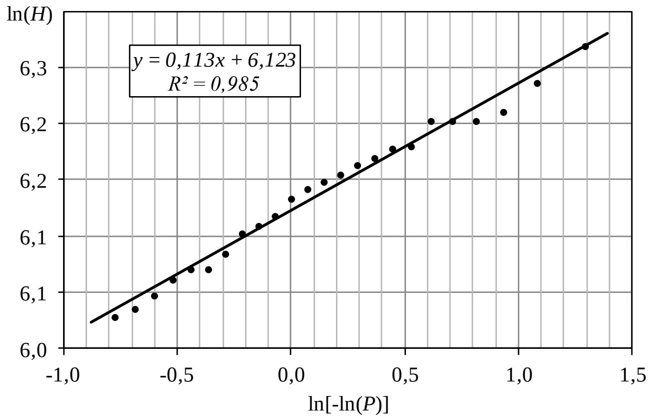


Рис. 5.20. Зависимость $\ln(H) = f\left\{\ln[-\ln(P)]\right\}$ для максимальных уровней весеннего половодья; р. Коваши – д. Лендовщина; верхняя (линейная) часть зависимости; ($g = 0{,}113$; $c = 6{,}123$).

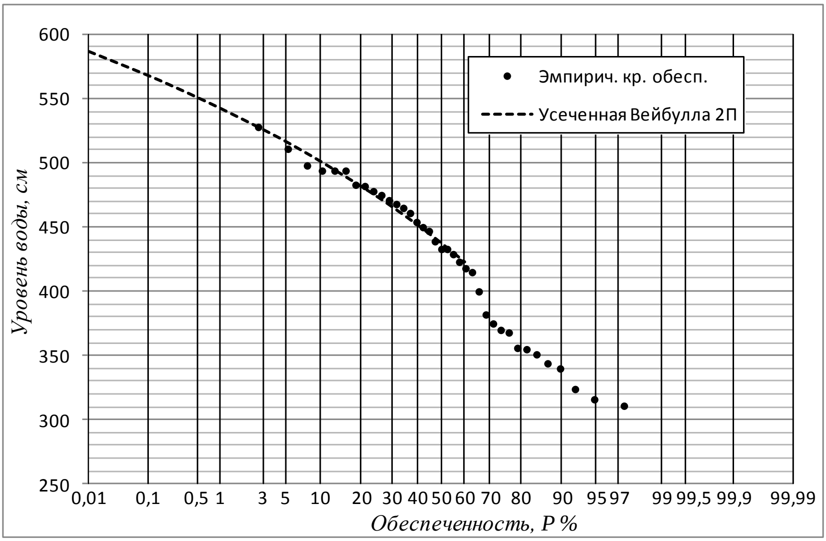


Рис. 5.21. Усеченная кривая обеспеченностей для максимальных уровней весеннего половодья; р. Коваши – д. Лендовщина.

5. С использованием полученных параметров g и c рассчитываются ординаты верхней части кривой обеспеченностей от точки усечения до P = 0,01%. Расчет выполняется по формуле (5.6).
6. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей для максимумов (рис. 5.21).

Метод М-2.2(Т3). *Построение усеченной кривой с применением распределения Гумбеля с отрицательной асимметрией*

В рамках этого подхода верхняя часть кривой обеспеченностей аппроксимируется распределением Гумбеля с отрицательной асимметрией (см. п. 4.3), функция обеспеченностей которого определяется выражением:

$$P(x) = \exp[-\exp(y)], \tag{5.20}$$

где $y = (x - \mu)/\lambda$; μ – мода случайной величины X; λ – параметр масштаба.

Из (5.20) следует:

$$x_p = \lambda\, g_p + \mu \tag{5.21}$$

где: $g_p = \ln[-\ln(P)]$; P – обеспеченность в долях единицы.

Таким образом, если выборка описывается распределением Гумбеля, то зависимость между x_p и g_p является линейной и параметры λ и μ легко находятся методом наименьших квадратов.

Рассмотрим построение усеченной кривой обеспеченностей на примере ряда максимальных уровней весеннего половодья на реке Коваши – д. Лендовщина.

1. Исходный ряд ранжируется и для каждого члена ранжированного ряда рассчитывается эмпирическая обеспеченность в долях единицы: $P = m/(n + 1)$.
2. Для каждого значения P определяется g_p.
3. Строится зависимость $x_p = f(g_p)$, по которой определяется точка усечения. За точку усечения принимается точка перелома на графике, после которой связь становится линейной (рис.5.22)

4. Для верхней части зависимости строится отдельный график и для неё методом наименьших квадратов определяются параметры λ и μ (рис. 5.23)

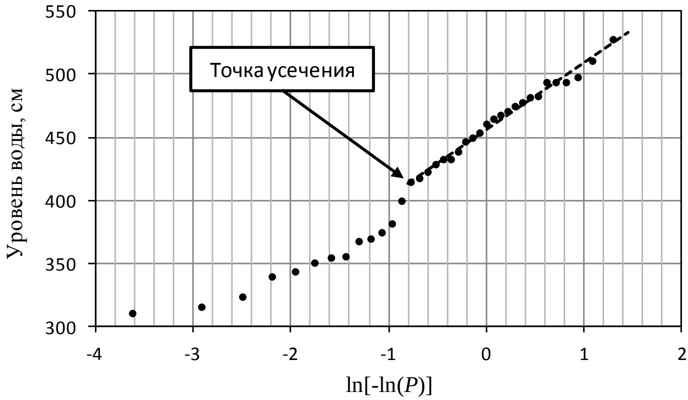


Рис. 5.22. Зависимость $H = f\{\ln[-\ln(P)]\}$ для максимальных уровней весеннего половодья; р. Коваши – д. Лендовщина (определение точки усечения).

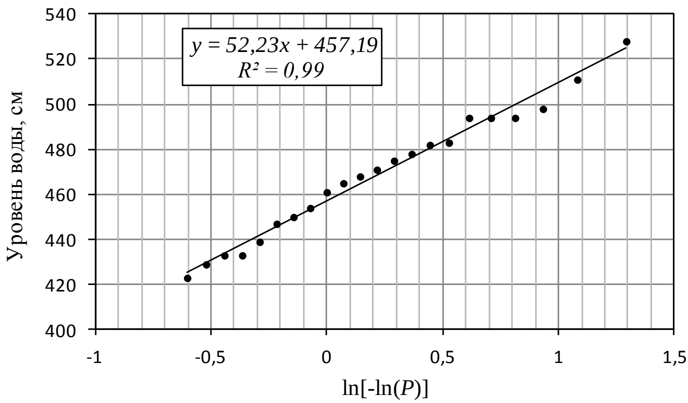


Рис. 5.23. Зависимость $H = f\{\ln[-\ln(P)]\}$ для максимальных уровней весеннего половодья; р. Коваши – д. Лендовщина; верхняя (линейная) часть зависимости (λ = 52,2; и μ = 457,2).

5. С использованием полученных параметров λ и μ по формуле (5.21) рассчитываются ординаты верхней части кривой обеспеченностей от точки усечения до P = 0,01%.
6. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей для максимумов (рис. 5.24).

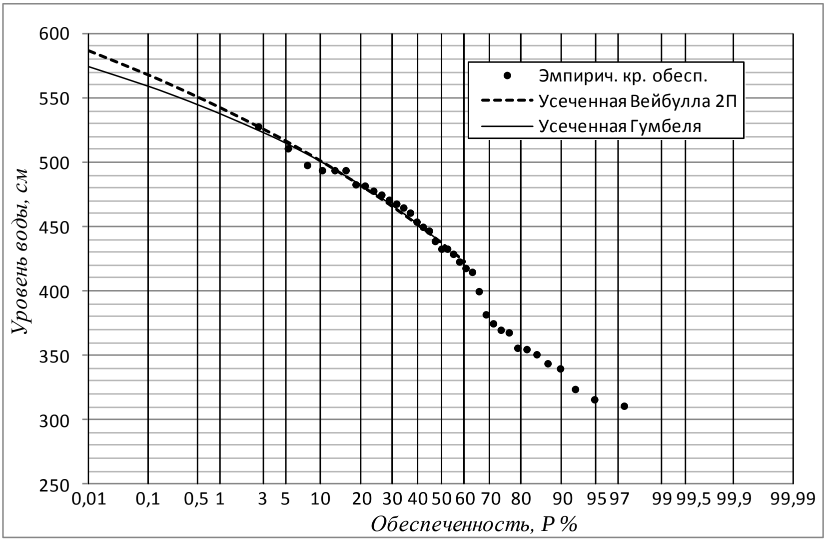


Рис. 5.24. Кривая обеспеченностей максимальных уровней весеннего половодья. Представлены усеченные кривые двухпараметрического распределения Вейбулла и распределения Гумбеля с отрицательной асимметрией;
р. Коваши – д. Лендовщина.

На рис. 5.22 помимо усеченной кривой Гумбеля представлена усеченная кривая двухпараметрического распределения Вейбулла. Как видно на рисунке, представленные кривые дают близкие результаты. При этом следует иметь ввиду, что кривая Гумбеля с отрицательной асимметрией имеет верхний предел, а двухпараметрическая кривая Вейбулла верхнего предела не имеет.

Метод М-3(Т3). *Графоаналитический метод с использованием кривой Пирсона III типа.*

Поскольку распределение Пирсона III типа допускает как положительную, так и отрицательную асимметрию, схема расчета полностью совпадает с той, которая использовалась в методе *М-3(А2)*.

Рассмотрим порядок построения усеченной кривой обеспеченностей на примере ряда максимальных уровней весеннего половодья реки Коваши – д. Лендовщина.

1. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей (см. п. 2).
2. Для верхней части ряда проводится сглаженная эмпирическая кривая обеспеченностей от максимального значения до медианы. Сглаженная кривая должна лежать в поле эмпирических точек от максимального значения до точки усечения. Если точка усечения на кривой обеспеченностей расположена левее медианы, то правее точки усечения сглаженная кривая может отклоняться от эмпирических точек, чтобы сохранить плавность очертаний (рис. 5.25).
3. По сглаженной эмпирической кривой определяются ординаты $x_{5\%}$, $x_{25\%}$, $x_{50\%}$: $H_{5\%}$ = 515 см; $H_{25\%}$ = 476 см; $H_{50\%}$ = 438 см.
4. По формуле (5.13) рассчитывается коэффициент $S_{\max}$:
   $S_{\max}$ = (515 + 438 – 2·476)/(515 – 438) = 0,013.
5. В зависимости от $S_{\max}$ по таблице (прил.1) определяются коэффициент асимметрии и нормированные ординаты распределения Пирсона III типа для усеченной кривой (C_s, $t_{5\%}$, $t_{25\%}$, $t_{50\%}$): C_s = –1,03; $t_{5\%}$ = 1,31; $t_{25\%}$ = 0,73; $t_{50\%}$ = 0,16.
6. По формулам (5.14)-(5.16) рассчитываются среднеквадратическое отклонение, среднее значение и коэффициент вариации:
   $\sigma = (x_5 - x_{50})/(t_5 - t_{50})$ = (515 – 438)/(1,31 – 0,16) = 67,0.
   $\bar{x} = x_{25} - \sigma\, t_{25}$ = 476 – 67·0,73 = 427.
   $C_v = \sigma/\bar{x}$ = 67,0/427 = 0,16.
7. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей Пирсона III типа для максимумов (рис.5.26).

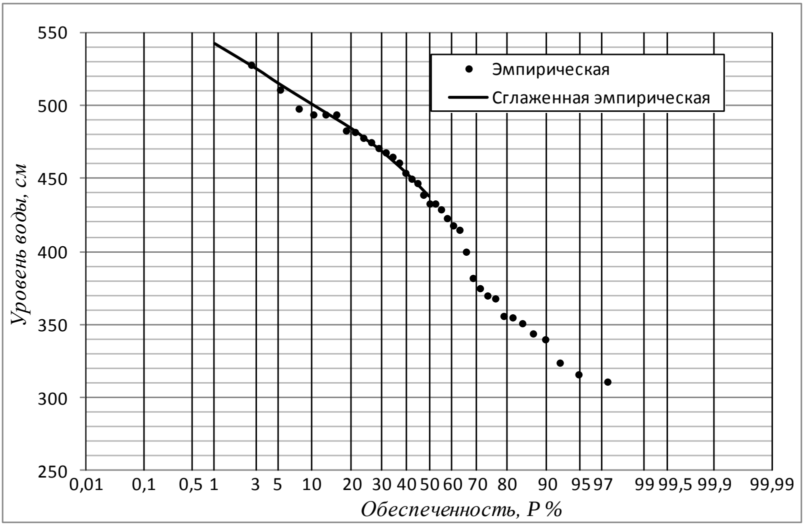


Рис. 5.25. Эмпирическая кривая обеспеченностей и сглаженная эмпирическая кривая обеспеченностей для верхней части ряда; р. Коваши – д. Лендовщина (максимальные уровни весеннего половодья).

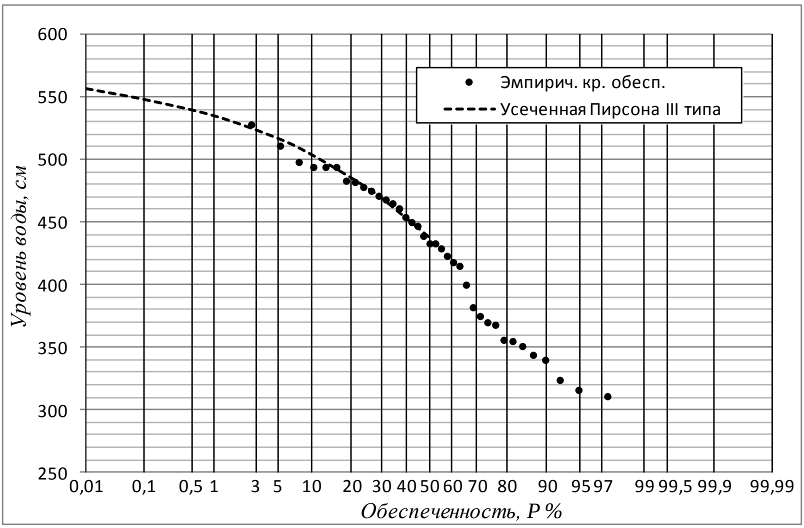


Рис. 5.26. Усеченная кривая обеспеченностей максимальных уровней весеннего половодья; р. Коваши – д. Лендовщина.

5.1.4. Тип неоднородности *T4.* *Строится усеченная кривая для минимумов. Имеются выбросы в верхней части кривой, которые выявляются с помощью критериев типа Граббса для максимумов.*

Метод М-1(Т4)

Рассмотрим схему построения усеченной кривой обеспеченностей на примере ряда минимальных 30-суточных летне-осенних расходов на реке Устья – с. Бестужево.

1. Из исходной выборки исключаются k штук экстремальных значений, порождающих неоднородность ряда. В результате получаем выборку объемом $n_1 = (n - k)$. В данном примере длина ряда $n = 68$. Исключены 6 наиболее крупных расходов ($k = 6$), следовательно: $n_1 = 68 - 6 = 62$.
2. Для укороченной выборки рассчитываются оценки параметров распределения, и на клетчатке вероятностей строятся эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей.

   В данном примере: $\overline{Q} = 12{,}35$ м^3/с; $C_v = 0{,}38$; $C_s/C_v = 2{,}5$.

   В качестве аналитической кривой использована кривая обеспеченностей Крицкого-Менкеля (рис.5.27). Ординаты этой кривой представлены в первых двух строках таблицы 5.1.
3. Если кривая хорошо соответствует эмпирическим точкам, то на её базе строится усеченная кривая обеспеченностей для исходной выборки объемом n. Переход от обеспеченностей укороченной выборки (P_1) к обеспеченностям исходной выборки (P) производится по формуле

$$P = \frac{n_1 P_1/100 + k}{n} 100\% \qquad (5.22)$$

   Расчет по формуле (5.22) представлен в третьей строке таблицы 5.4.
4. По данным второй и третьей строки таблицы 5.4 путем интерполяции рассчитываем ординаты усеченной кривой для опорных обеспеченностей (табл.5.5).
5. В качестве точки усечения можно принять любую точку с обеспеченностью $P > (k/n)100\%$, но так как строится усеченная кривая только для минимумов, то в качестве такой точки логично принять точку с $P \geq 50\%$ (рис.5.28).

6. По данным табл.5.5 строится усеченная кривая обеспеченностей от точки усечения до P = 99,9% (рис.5.28).

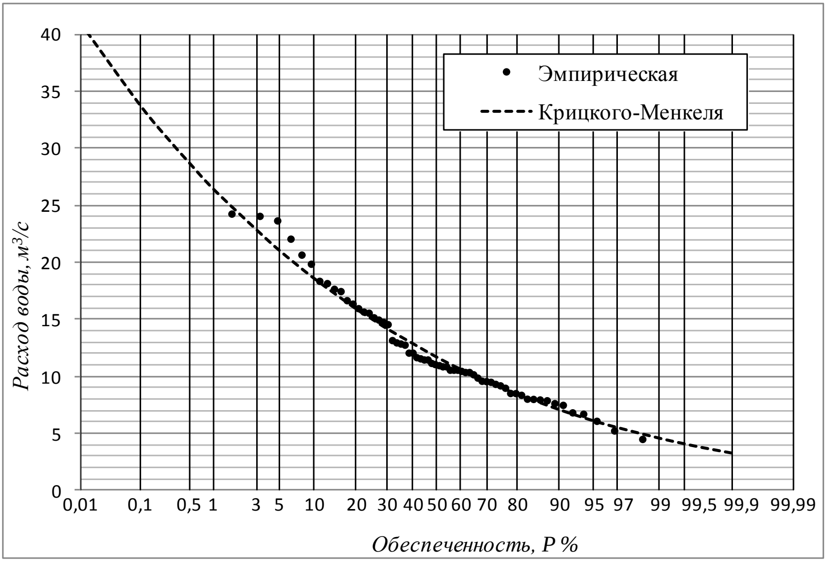


Рис. 5.27. Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды после удаления 6 наибольших значений; р. Устья – с. Бестужево.

Таблица 5.4

Координаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля для минимальных 30-суточных летне-осенних расходов; р. Устья – с. Бестужево.

Обеспеченность P% для укороченной выборки	20	30	50	70	80	90	95	97	99	99,5	99,9
Расход воды, м^3/с	15,9	14,2	11,7	9,52	8,39	7,03	6,04	5,47	4,50	4,04	3,19
Обеспеченность P% для исходной выборки; расчет по формуле (5.22).	27,1	36,2	54,4	72,6	81,8	90,88	95,44	97,26	99,09	99,54	99,91

Таблица 5.5

Координаты усеченной кривой обеспеченностей для минимальных 30-суточных летне-осенних расходов; р. Устья – с. Бестужево

Обеспеченность *P*% для исходной выборки	50	70	75	80	90	95	97	99	99,5	99,7	99,9
Расход воды, м^3/с	12,2	9,83	9,24	8,62	7,15	6,13	5,55	4,55	4,08	3,78	3,22

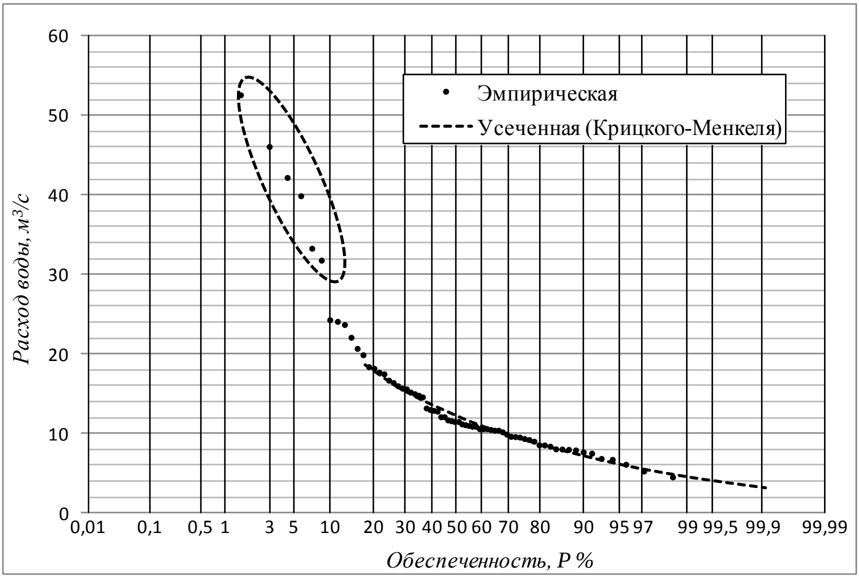


Рис.5.28. Усеченная кривая обеспеченностей минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Устья – с. Бестужево.

5.1.5. Тип неоднородности *T5*. *Строится усеченная кривая для минимумов. Кривая обеспеченностей имеет хорошо выраженный перелом. Точка перелома может находиться как левее, так и правее медианы. Нижняя часть ряда имеет положительную асимметрию.*

Метод М-1(Т5)

Если после разделения ряда по точке перелома нижняя часть ранжированного ряда имеет продолжительность (n_1) достаточную для того, чтобы надежно оценить параметры укороченной выборки, то можно применить методику, рекомендованную для типа

М-1(Т4). При этом в качестве k принимается длина верхней части ранжированной выборки.

Методы М-2.1(Т5), М-2.2(Т5)

Так как усеченная кривая аппроксимирует не всю ранжированную выборку, а только ее нижнюю часть, то при выборе аналитической кривой обеспеченностей можно ограничить выбор двухпараметрическими распределениями. При этом наиболее удобными являются распределения, которые можно линеаризовать с помощью обычных алгебраических преобразований. К числу таких распределений относятся в частности двухпараметрическое распределение Вейбулла и распределение Гумбеля. После линеаризации параметры распределения находятся методом наименьших квадратов.

Метод М-2.1(Т5). *Построение усеченной кривой с использованием двухпараметрического распределения Вейбулла*

Методика расчета аналогична той, которая описана для метода *М-2.1(Т2)*. Порядок расчета следующий.

1. Исходный ряд ранжируется и для каждого члена ранжированного ряда рассчитывается эмпирическая обеспеченность в долях единицы: $P = m/(n + 1)$.
2. Для каждого значения P по формулам (5.4) определяются значения z_p и $y_\text{р}$, где $z_p = \ln(x_\text{р})$; $y_\text{р} = \ln(-\ln P)$.
3. Строится зависимость $z_p = f(y_p)$, по которой определяется точка усечения. За точку усечения принимается точка перелома на графике, после которой связь становится линейной (рис.5.29).
4. Для нижней части зависимости строится отдельный график и для неё методом наименьших квадратов определяются параметры g и c уравнения $z = g \cdot y + c$ (рис. 5.30)
5. С использованием полученных параметров g и c рассчитываются ординаты нижней части кривой обеспеченностей от точки усечения до P = 99,9%. Расчет выполняется по формуле $x_p = \exp\{g[\ln(-\ln P)] + c\}$, где P – в долях единицы.

6. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей для минимумов (рис. 5.31).

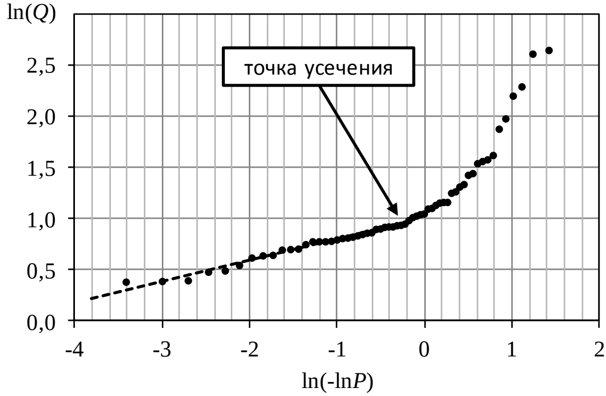


Рис. 5.29. Зависимость ln(Q) = f {ln[–ln(P)]} для минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское. (определение точки усечения).

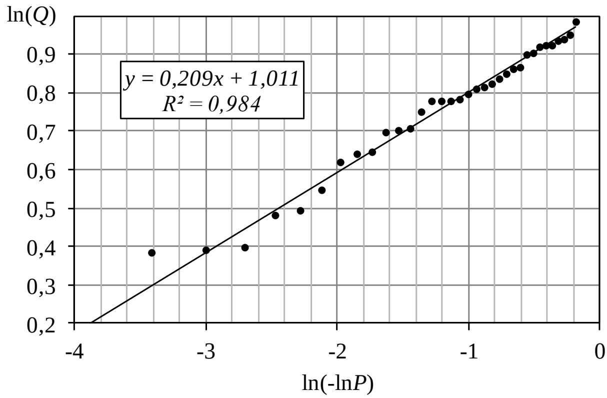


Рис. 5.30. Зависимость ln(Q) = f {ln[–ln(P)]} для минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское; нижняя (линейная) часть зависимости; (g = 0,209; c = 1,011).

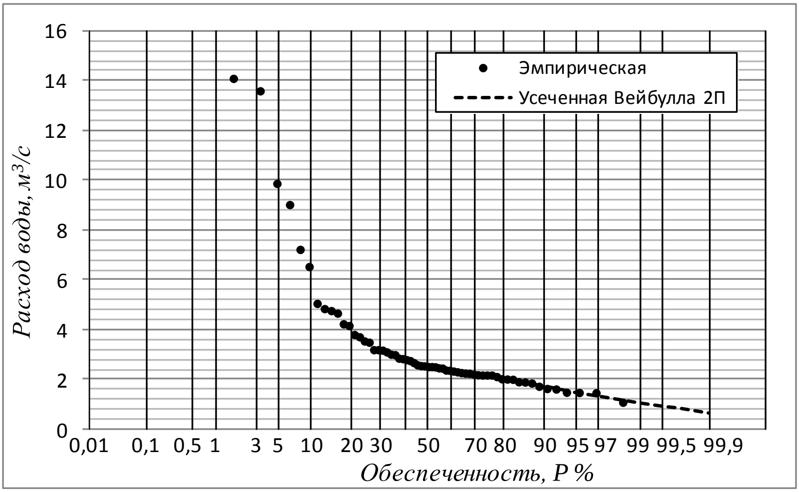


Рис. 5.31. Усеченная кривая обеспеченностей минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское.

Метод М-2.2(Т5). *Построение усеченной кривой с использованием распределения Гумбеля*

Методика расчета аналогична той, которая описана для метода *М-2.2(Т2)*. Порядок расчета следующий.

1. Исходный ряд ранжируется и для каждого члена ранжированного ряда рассчитывается эмпирическая обеспеченность в долях единицы: $P = m/(n + 1)$.
2. Для каждого значения P определяется g_p.
   где: $g_p = -\ln[-\ln(1-P)]$.
3. Строится зависимость $x_p = f(g_p)$, по которой определяется точка усечения. За точку усечения принимается точка перелома на графике, после которой связь становится линейной (рис.5.32)
4. Для нижней части зависимости строится отдельный график и для неё методом наименьших квадратов определяются параметры λ и μ выражения $x_p = \lambda g_p + \mu$ (рис. 5.33).

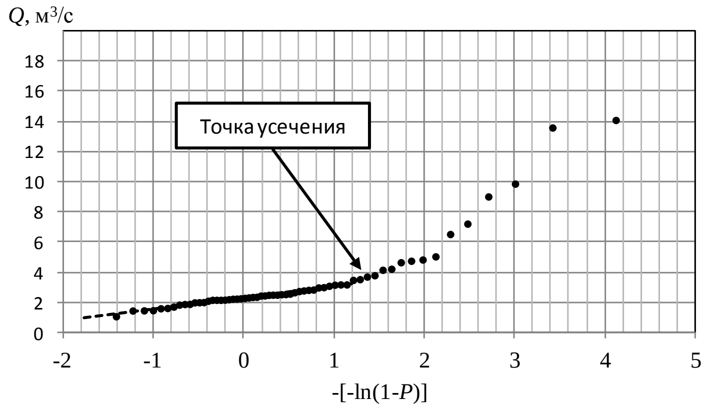


Рис. 5.32. Зависимость $Q = f\ \{-\ln[-\ln(1-P)]\}$ для минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское. (определение точки усечения).

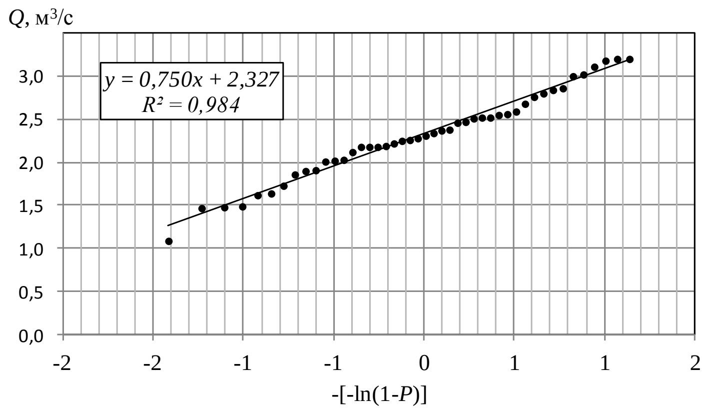


Рис. 5.33. Зависимость $Q = f\ \{-\ln[-\ln(1-P)]\}$ для минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское; нижняя (линейная) часть зависимости (λ = 18,5; и μ = 6,97).

5. С использованием полученных параметров λ и μ по формуле $x_p = \lambda g_p + \mu$ рассчитываются ординаты нижней части кривой обеспеченностей от точки усечения до P = 99,9%.

6. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей для минимумов (рис. 5.34).

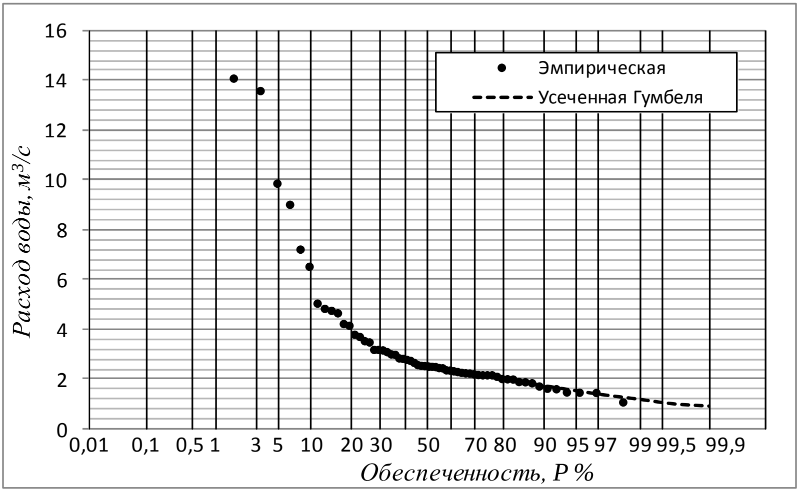


Рис. 5.34. Усеченная кривая обеспеченностей минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское;

Метод М-3(Т5). *Графоаналитический метод с использованием кривой Пирсона III типа.*

Используется методика аналогичная, той, которая применяется для построения кривой Пирсона III типа графоаналитическим методом в случае однородного ряда (см. п. 4.4). Отличие состоит в том, что здесь используется не классический коэффициент скошенности, а коэффициент скошенности определяемый по ординатам нижней части кривой обеспеченностей:

$$S_{\min} = (x_{50} + x_{95} - 2x_{75})/(x_{50} - x_{95}) . \qquad (5.23)$$

Для распределения Пирсона III типа коэффициент $S_{\min}$, как и обычный коэффициент скошенности, однозначно зависит от коэффициента асимметрии (прил. 1).

Рассмотрим порядок построения усеченной кривой обеспеченностей на примере ряда минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды реки Пежма – д. Шелюбинское.

1. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей.
2. Для нижней части ряда проводится сглаженная эмпирическая кривая обеспеченностей от минимального значения до медианы. Сглаженная кривая должна лежать в поле эмпирических точек от минимального значения до точки усечения. Если точка усечения на кривой обеспеченностей расположена правее медианы, то левее точки усечения сглаженная кривая может отклоняться от эмпирических точек, чтобы сохранить плавность очертаний (рис.5.35).
3. По сглаженной эмпирической кривой определяются ординаты $x_{50\%}$, $x_{75\%}$, $x_{95\%}$:
   $Q_{50\%}$ = 2,55 м^3/с; $Q_{75\%}$ = 2,10 м^3/с; $Q_{95\%}$ = 1,50 м^3/с.
4. По формуле (5.23) рассчитывается коэффициент $S_{\min}$:
   $S_{\min}$ = (2,55 + 1,50 – 2·2,10)/(2,55 – 1,50) = –0,14.
5. В зависимости от $S_{\min}$ по таблице (прил.1) определяются коэффициент асимметрии и нормированные ординаты распределения Пирсона III типа для усеченной кривой (C_s, $t_{50\%}$, $t_{75\%}$, $t_{95\%}$):
   C_s = 0,3; $t_{50\%}$ = –0,05; $t_{75\%}$ = –0,70; $t_{95\%}$ = –1,56.
6. По формулам рассчитываются среднеквадратическое отклонение, среднее значение и коэффициент вариации:
   $$\sigma = \left(x_{50} - x_{95}\right) / \left(t_{50} - t_{95}\right) \tag{5.24}$$
   $$\bar{x} = x_{75} - \sigma\, t_{75} \tag{5.25}$$
   $$C_v = \sigma / \bar{x} \tag{5.26}$$
   σ = (2,55 – 1,50)/(–0,05 + 1,56) = 0,70; $\bar{x}$ = 2,10 – 0,70·(–0,70) = 2,59; C_v = 0,70/2,59 = 0,27.
7. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей Пирсона III типа для минимумов (рис.5.36).

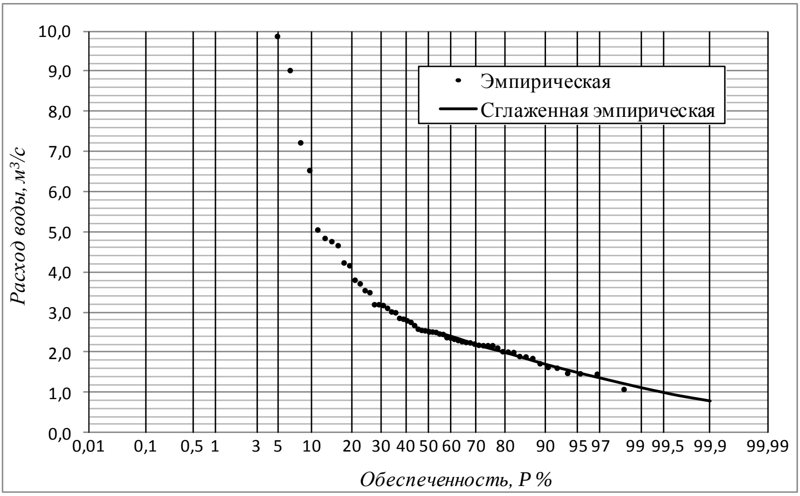


Рис. 5.35. Эмпирическая кривая обеспеченностей и сглаженная эмпирическая кривая обеспеченностей для верхней части ряда; р. Пежма – д. Шелюбинское (минимальные 30-суточные летне-осенние расходов воды).

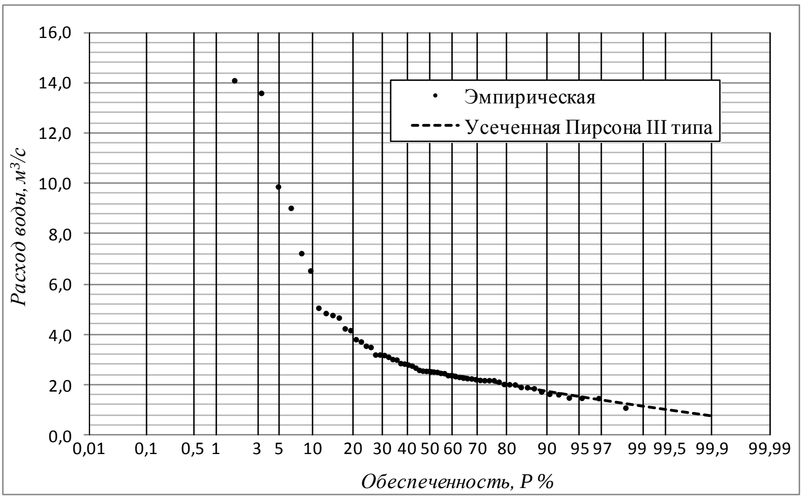


Рис. 5.36. Усеченная кривая обеспеченностей минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское.

5.1.6. Тип неоднородности *Т6*. *Строится усеченная кривая для минимумов. Кривая обеспеченностей имеет хорошо выраженный перелом при Р ≥ 50%. Нижняя часть ряда имеет отрицательную асимметрию.*

Метод М-1(Т6)

Если после разделения ряда по точке перелома нижняя часть ранжированного ряда имеет продолжительность (n_1) достаточную для того, чтобы надежно оценить параметры укороченной выборки, то можно применить методику, рекомендованную для типа *М-1(Т4)*. При этом в качестве k принимается длина верхней части ранжированной выборки, а в качестве аналитических кривых обеспеченностей используются кривые, допускающие отрицательную асимметрию.

Метод М-2(Т6). *Построение усеченной кривой с использованием распределения Гумбеля с отрицательной асимметрией.*

Методика расчета аналогична той, которая описана для метода *М-2.2(Т3)*.

Рассмотрим построение усеченной кривой обеспеченностей на примере ряда минимальных 30-суточных зимних расходов воды реки Суна – пгт Поросозеро.

1. Исходный ряд ранжируется и для каждого члена ранжированного ряда рассчитывается эмпирическая обеспеченность в долях единицы: $P = m/(n + 1)$.
2. Для каждого значения P определяется g_p по формуле $g_p = \ln[-\ln(P)]$.
3. Строится зависимость $x_p = f(g_p)$, по которой определяется точка усечения. За точку усечения принимается точка перелома на графике, после которой связь становится линейной (рис.5.37).
4. Для нижней части зависимости строится отдельный график и для неё методом наименьших квадратов определяются параметры λ и μ выражения $x_p = \lambda g_p + \mu$ (рис. 5.38).
5. С использованием полученных параметров λ и μ по формуле $x_p = \lambda \ln[-\ln(P)] + \mu$ рассчитываются ординаты нижней части кривой обеспеченностей от точки усечения до P = 99,9%.

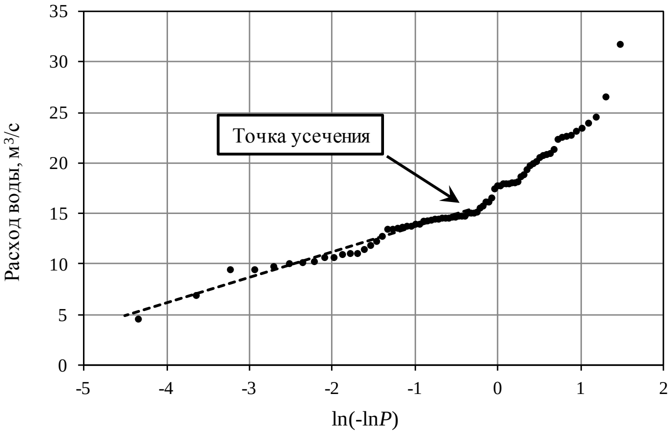


Рис. 5.37. Зависимость $Q = f\,\{\ln[-\ln(P)]\}$ для минимальных 30-суточных зимних расходов воды; р. Суна – пгт Поросозеро (определение точки усечения).

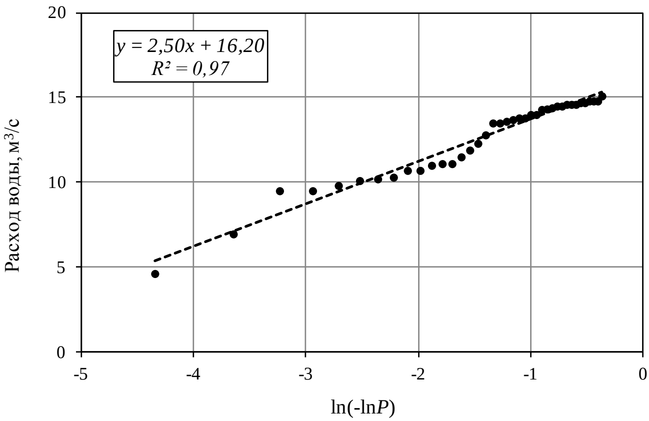


Рис. 5.38. Зависимость $Q = f\,\{\ln[-\ln(P)]\}$ для минимальных 30-суточных зимних расходов воды; р. Суна – пгт Поросозеро; нижняя (линейная) часть зависимости ($\lambda = 2{,}50$; и $\mu = 16{,}2$).

6. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей для минимумов (рис. 5.39).

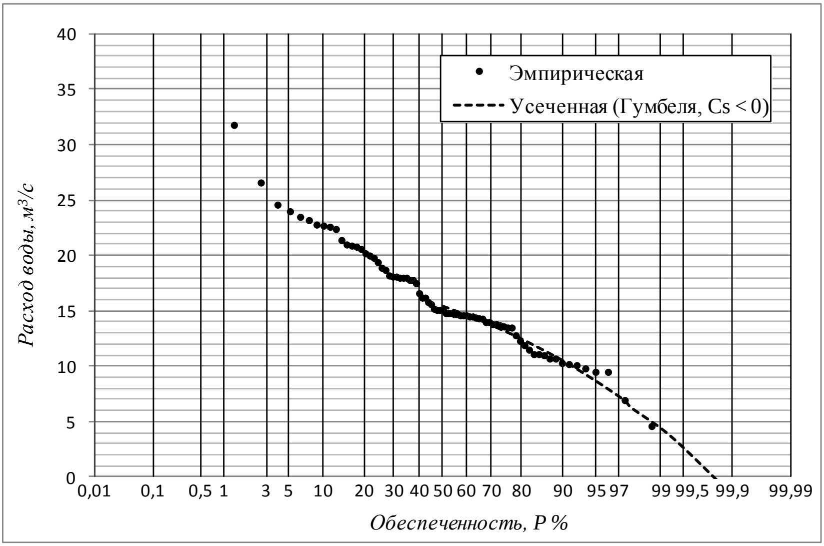


Рис. 5.39. Усеченная кривая обеспеченностей минимальных 30-суточных зимних расходов воды; р. Суна – пгт Поросозеро.

Метод М-3(Т6). *Графоаналитический метод с использованием кривой Пирсона III типа.*

Применяется алгоритм такой же, как и в методе *М-3(Т5).*

Рассмотрим порядок построения усеченной кривой обеспеченностей на примере ряда минимальных 30-суточных зимних расходов воды реки Суна – пгт Поросозеро.

1. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей.
2. Для нижней части ряда проводится сглаженная эмпирическая кривая обеспеченностей от минимального значения до медианы. Сглаженная кривая должна лежать в поле эмпирических точек от минимального значения до точки усечения. Если точка усечения на кривой обеспеченностей расположена правее медианы, то левее точки усечения сглаженная кривая может отклоняться от эмпирических точек, чтобы сохранить плавность очертаний (рис.5.40).

3. По сглаженной эмпирической кривой определяются ординаты $x_{50\%}$, $x_{75\%}$, $x_{95\%}$:
   $Q_{50\%}$ = 15,0 м^3/с; $Q_{75\%}$ = 13,5 м^3/с; $Q_{95\%}$ = 9,00 м^3/с.
4. По формуле (5.23) рассчитывается коэффициент $S_{\min}$:
   $S_{\min}$ = (15,0 + 9,00 – 2·13,5)/(15,0 – 9,00) = –0,50.
5. В зависимости от $S_{\min}$ по таблице (прил.1) определяются коэффициент асимметрии и нормированные ординаты распределения Пирсона III типа для усеченной кривой (C_s, $t_{50\%}$, $t_{75\%}$, $t_{95\%}$):
   C_s = –2,87; $t_{50\%}$ = 0,39; $t_{75\%}$ = –0,21; $t_{95\%}$ = –1,99.
6. По формулам (5.24)-(5.26) рассчитываются среднеквадратическое отклонение, среднее значение и коэффициент вариации:
   σ = (15,0 – 9,00)/(0,39 + 1,99) = 2,52; $\bar{x}$ = 13,5 – 2,52·(–0,21) = 14,0; C_v = 2,52/14,0 = 0,18.
7. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей Пирсона III типа для минимумов (рис.5.41).

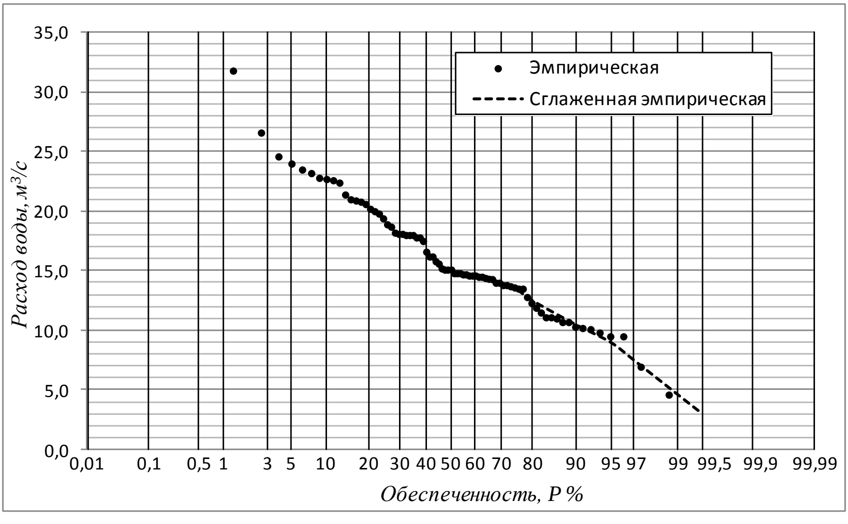


Рис. 5.40. Эмпирическая кривая обеспеченностей и сглаженная эмпирическая кривая обеспеченностей для нижней части ряда; р. Суна– пгт Поросозеро (минимальные 30-суточные зимние расходов воды).

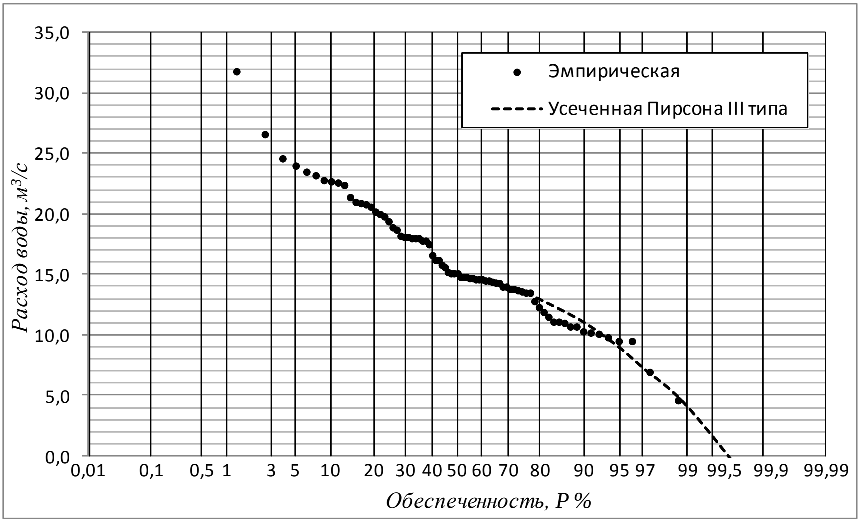


Рис. 5.41. Усеченная кривая обеспеченностей минимальных 30-суточных зимних расходов воды; р. Суна– пгт Поросозеро.

Из рассмотренных в данном разделе методов наиболее универсальными являются методы *М*-1 и *М*-2. Метод *М*-1 можно применять при наличии любых типов неоднородности при условии, что длина аппроксимируемой части ранжированного ряда является достаточной для надежной оценки параметров распределения укороченной выборки. Преимуществом метода является то, что при построении усеченной кривой можно применять как двухпараметрические, так и трехпараметрические законы распределения.

Метод *М*-2 можно применять при любой длине аппроксимируемой части ранжированного ряда (но не менее 6 значений). При этом в качестве базовой кривой целесообразно использовать распределение Гумбеля с положительной, либо отрицательной асимметрией (в зависимости от вида аппроксимируемой части эмпирической кривой обеспеченностей) или двухпараметрическое распределение Вейбулла.

Следует отметить, что при использовании метода *М*-1 при построении усеченной кривой для максимумов вместо формулы (5.1) можно использовать формулу

$$P = P_1 \cdot P_0, \tag{5.27}$$

а при использовании метода M-1 при построении усеченной кривой для минимумов вместо формулы (5.22) можно использовать формулу

$$P = P_1(1 - P_0) + P_0, \tag{5.28}$$

где P – обеспеченность Q по полной выборке; P_1– обеспеченность Q по укороченной выборке; P_0 – обеспеченность Q в точке усечения (константа).

5.2. Построение составных кривых обеспеченностей

5.2.1. Построение составной кривой обеспеченностей при наличии в каждом году наблюдений за всеми однородными элементами водного режима

Этот тип составной кривой обеспеченностей строится в том случае, когда имеются параллельные наблюдения за каждым однородным элементом водного режима. Если таких элементов два то $n_1 = n_2$, если три, то $n_1 = n_2 = n_3$ (n_i – длина рядов наблюдений за однородными элементами водного режима).

Например, требуется построить кривую обеспеченностей наибольших в году максимальных расходов воды. При этом годовой максимум может наблюдаться в одни годы – в период весеннего половодья, в другие – в период дождевых паводков.

Аналогичная ситуация имеет место если требуется построить кривую обеспеченностей наименьших в году минимальных расходов воды, а годовой минимум может наблюдаться как зимой, так и в период летне-осенней межени.

В этих случаях строится кривая обеспеченностей для каждого однородного элемента водного режима, например, для максимальных расходов дождевых паводков и максимальных расходов весеннего половодья. Затем на основе этих кривых строится составная кривая. При этом обеспеченность любого расхода может быть рассчитана по формуле

$$P_{\%} = [1–(1–P_1)\,(1–P_2)\ldots(1–P_k)]100, \qquad (5.29)$$

где P_1, P_2, … P_k – обеспеченности однородных элементов водного режима в долях единицы.

Если число однородных элементов водного режима равно двум

$$P_{\%} = (P_1 + P_2 – P_1P_2)100; \qquad (5.30)$$

если P_1 и P_2 вваржены в процентах, то формула (5.30) принимает вид

$$P_{\%} = P_1 + P_2 – (P_1P_2)/100. \qquad (5.31)$$

Пример.

Дано: ряд максимальных расходов весеннего половодья и ряд максимальных расходов дождевых паводков за совместный период наблюдений; продолжительность рядов 100 лет (рис.5.42).

Требуется: построить составную кривую обеспеченностей для наибольших в году максимальных расходов воды (хронологический график наибольших в году максимальных расходов представлен на рис.5.43).

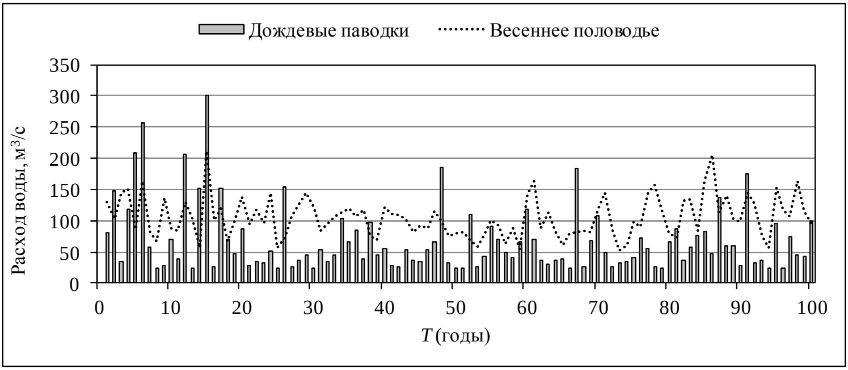


Рис. 5.42. Хронологические графики максимальных расходов дождевых паводков и максимальных расходов весеннего половодья.

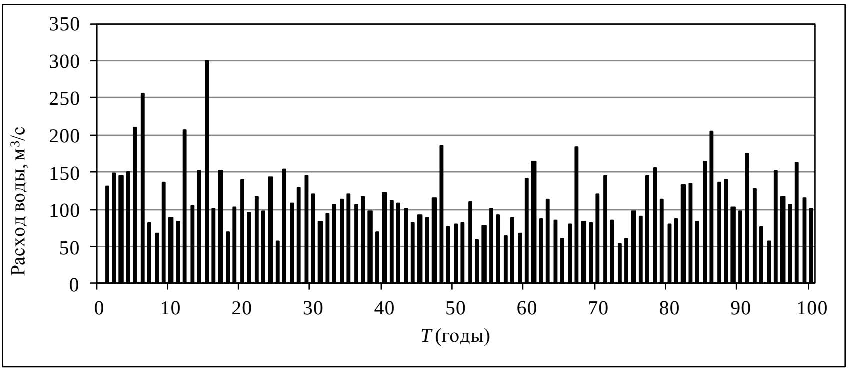


Рис. 5.43. Хронологический график наибольших в году расходов воды.

Решение.

1. Рассчитываются оцеки параметров распределения для ряда максимальных расходов весеннего половодья.

   На клетчатке вероятностей строятся эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей.

   Учитывая большую погрешность коэффициента асимметрии, можно выполнить его корректировку, чтобы добиться наилучшего соответствия эмпирических точек и аналитической кривой обеспеченностей. Рекомендации по выбору аналитической кривой даны в п.4.12.

   В данном примере использована кривая обеспеченностей Пирсона III типа. В качестве расчетных приняты параметры: $Q_{ср}$ = 105 м^3/с; C_v = 0,31; C_s = 0,76 (рис.5.44).

2. Рассчитываются оцеки параметров распределения для ряда максимальных расходов дождевых паводков.

   На клетчатке вероятностей строятся эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей.

   Учитывая большую погрешность коэффициента асимметрии, можно выполнить его корректировку, чтобы добиться наилучшего соответствия эмпирических точек и аналитической кривой обеспеченностей.

   В данном примере использована кривая обеспеченностей Пирсона III типа. В качестве расчетных приняты параметры: $Q_{ср}$ = 67,5 м^3/с; C_v = 0,79; C_s = 2,06 (рис.5.45).

3. По полученным аналитическим кривым обеспеченностей определяются абсолютные годовые максимумы обеспеченностью P = 99,9% и обеспеченностью P = 0,01%.

   В настоящем примере $Q_{99,9}$ = 38 м^3/с – определен по кривой обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья; $Q_{0,01}$ = 607 м^3/с – определен по кривой обеспеченностей максимальных расходов дождевых паводков.

4. Задаемся шагом ΔQ (который можен быть и переменным) и формируем ряд расходов для диапазона значений от 38 до 607. В примере: 38, 40, 50, 60, …, 300, 350, 400, 443, 607 (колонка 1 таблицы 5.6).

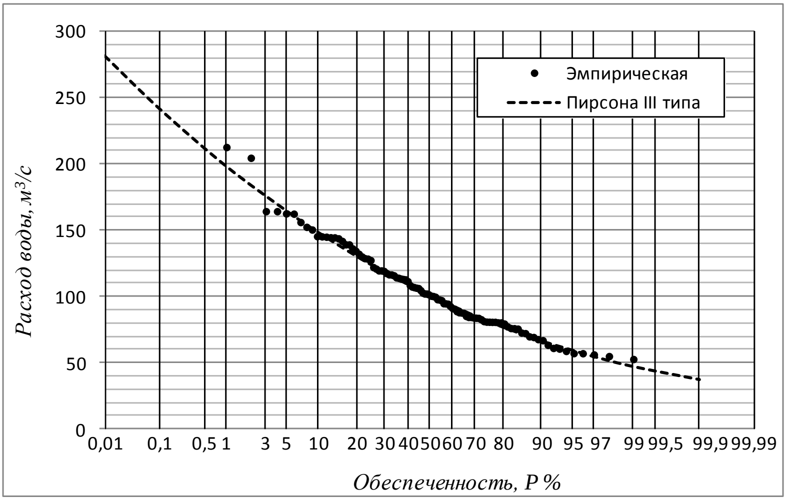


Рис. 5.44. Эмпирическая и аналитическая (Пирсона III типа) кривые обеспеченностей максимальных расходов весеннего половодья ($Q_{ср}$ = 105 м^3/с; C_v = 0,31; C_s = 0,76)

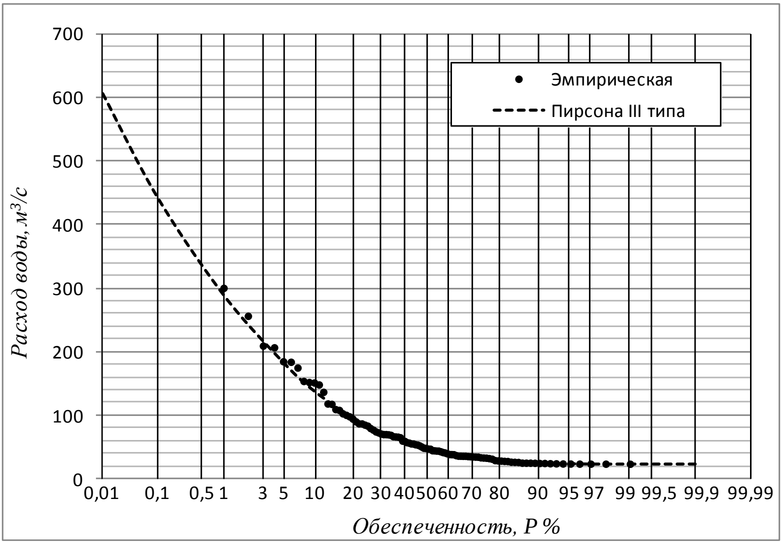


Рис. 5.45. Эмпирическая и аналитическая (Пирсона III типа) кривые обеспеченностей максимальных расходов дождевых паводков ($Q_{ср}$ = 67,5 м^3/с; C_v = 0,79; C_s = 2,06)

5. Для каждого расхода определяется обеспеченность по аналитичеким кривым для весеннего половодья и дождевых паводков. Результаты записываем в колонки 2 и 3 таблицы 5.6.

6. По формуле (5.31) рассчитывается обеспеченность расхода для составной кривой (колонка 4 табл.5.6).

Таблица 5.6

Расчет координат составной кривой обеспеченностей

Расход воды, $м^3/с$	Обеспеченность максимального расхода, %		
	весеннее половодье P_1	дождевой паводок P_2	составная кривая $P = P_1 + P_2 – (P_1\, P_2)/100$
38	99,90	62,43	99,96
50	98,47	47,01	99,2
60	94,83	39,04	96,8
70	87,43	32,49	91,5
80	76,88	27,10	83,1
90	64,48	22,66	72,5
100	55,35	18,99	63,8
110	40,04	15,95	49,6
120	28,46	13,43	38,1
130	19,87	11,34	29,0
140	13,63	9,589	21,9
150	9,183	8,131	16,6
160	6,079	6,910	12,6
170	3,954	5,887	9,61
180	2,526	5,026	7,43
190	1,586	4,302	5,82
200	0,978	3,690	4,63
220	0,353	2,735	3,08
240	0,118	2,046	2,16
260	0,037	1,544	1,58
280	0,011	1,177	1,19
300	0,0029	0,846	0,85
350	0,0001	0,396	0,40
400	0,000	0,188	0,19
443	0,000	0,100	0,10
607	0,000	0,010	0,01

7. По данным колонок 1 и 4 таблицы 5.6, рассчитываются (путем интерполяции) расходы воды составной кривой обеспеченностей для опорных обеспеченностей (табл.5.7).

Таблица 5.7

Координаты составной кривой обеспеченностей

Обеспеченность, *P*%													
0,01	0,1	1	5	10	25	50	75	90	95	97	99	99,7	99,9
607	443	289	197	169	135	110	88	72	64	59	51	43	39

8. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей наибольших в году максимальных расходов воды и по данным табл.5.7 – составная кривая обеспеченностей (рис. 5.46).

   Дополнительно на рис.5.47 представлена эмпирическая кривая обеспеченностей наибольших в году расходов воды и аналитические кривые для максимальных расходов весеннего половодья и дождевых паводков.

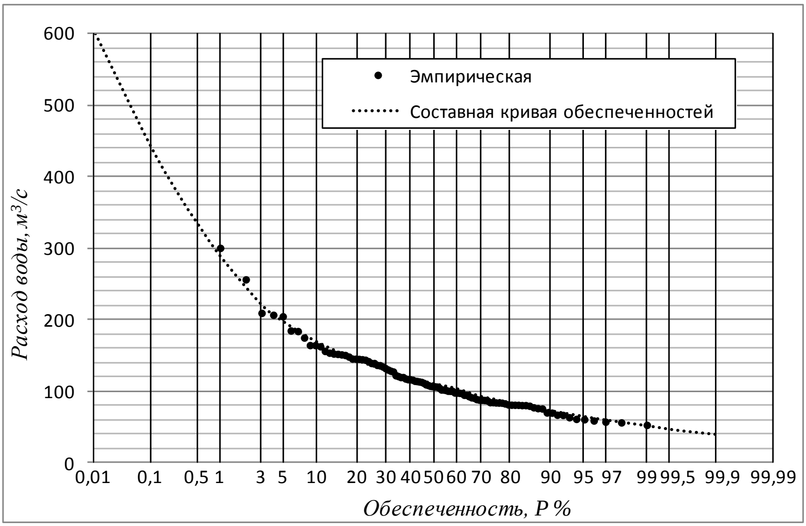


Рис. 5.46. Эмпирическая кривая обеспеченностей наибольших в году максимальных расходов воды и составная кривая обеспеченностей.

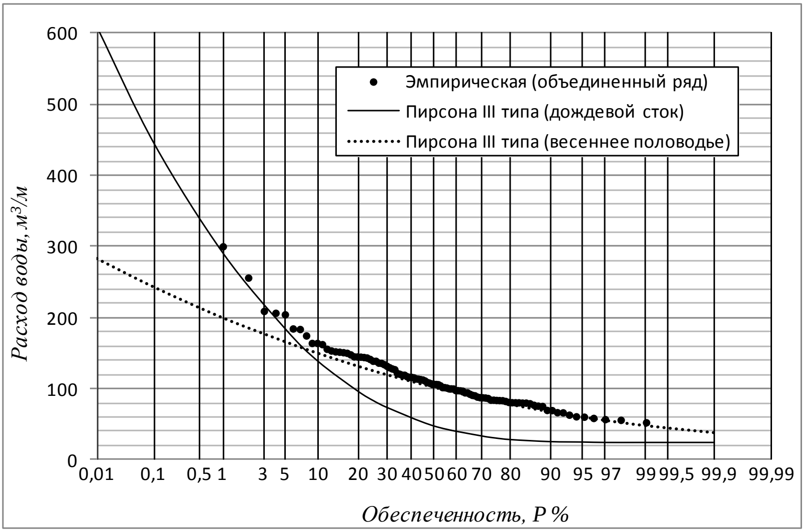


Рис. 5.47. Эмпирическая кривая наибольших в году максимальных расходов воды (объединенный ряд) и аналитические кривые максимумов весеннего половодья и дождевых паводков.

5.2.2. Построение составной кривой обеспеченностей при наличии в каждом году наблюдений только за одним однородным элементом водного режима

Составные кривые этого типа строятся в следующих случаях:

1. *Случай нестационарного ряда.*
   Если ряд включает два квазистационарных периода. Например, в результате изменений климата одна часть ряда имеет статистические характеристики, существенно отличающиеся от статистических характеристик другой части ряда. При этом можно достаточно точно указать дату нарушения условий формирования стока, по которой ряд делится на две выборки. Использование составной кривой в данном случае означает, что мы придерживаемся сценария, по которому через некоторое время возможен возврат к первоначальным условиям формирования стока. Если ряд имеет продолжительность порядка 80 лет или более аналогичным образом можно разделить ряд на три выборки.

2. *Случай генетической неоднородности.*
   Ряд содержит расходы различного генетического происхождения. Например, ряд минимального 30-суточнного летне-осеннего стока содержит расходы, сформированные при наличии выраженной межени и расходы, сформированные в дождливые годы, когда межень практически отсутствует. В этом случае ряд делится на две однородные выборки по точке перелома на эмпирической кривой обеспеченностей, построенной за весь период наблюдений.
3. Ряд содержит несколько нулевых значений. В качестве примера здесь можно привести ряды минимального стока малых рек, где в отдельные годы может наблюдаться пересыхание или перемерзание.

В первых двух случаях строится кривая обеспеченностей для каждой однородной выборки. Затем на основе этих кривых строится составная кривая. При этом обеспеченность любого расхода может быть рассчитана по формуле:

$$P_{\%} = \frac{n_1 P_1 + n_2 P_2 + ... + n_j P_j}{n_1 + n_2 + ... + n_j}, \qquad (5.32)$$

где j – число однородных выборок; n_1, n_2,…, n_j – длины однородных выборок ($n_1 + n_2 + … + n_j = N$); N – общая длина ряда.

Если число однородных выборок равно двум, то

$$P_{\%} = \frac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2}. \qquad (5.33)$$

Если ряд содержит нулевые значения, то кривая обеспеченностей строится для ряда без нулей, а обеспеченность расходов составной кривой определяется по формуле:

$$P_{\%} = \frac{n_1 P_1}{n_1 + n_2}, \qquad (5.34)$$

где n_2 – число нулевых значений.

Случай нестационарного ряда

Рассмотрим вариант построения составной кривой обеспеченностей, при котором ряд содержит несколько квазистационарных периодов на примере ряда минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды реки Оки – г. Калуга (1882-2007 гг.).

1. По имеющемуся ряду наблюдений устанавливаются точки нарушения условий формирования стока. Наиболее удобно это делать с использованием интегральных кривых, ординаты которых рассчитываются по формуле (5.35) или (5.36):

$$\sum_{i=1}^{t} Q_i = f(t) \tag{5.35}$$

$$\sum_{i=1}^{k} Q_i = f(k) \tag{5.36}$$

где t – время (годы); k – порядковый номер расхода (в неранжированном ряду). Если в ряду имеются пропуски, то формула (5.36) предпочтительнее.

   На рис.5.48 представлен такой график. Как видно на рисунке, для исследуемого ряда можно выделить две точки нарушения стока: 1948 и 1978 гг.

   Таким образом, в исследуемом ряду имеется три квазистационарных периода: с 1882 по 1947, с 1948 по 1977 и с 1978 по 2007 гг. (рис.5.49).
2. Для каждого квазистационарного периода рассчитываются параметры распределения и строятся эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей.

   В рассматриваемом примере во всех случаях была использована аналитическая кривая Крицкого-Менкеля (рис.5.50).

   Ординаты кривых представлены в табл.5.8.
3. По таблице 5.8 определяется наибольшее значение расхода для обеспеченности P = 0,01% и наименьшее для обеспеченности P = 99,9%. В примере: $Q_{0,01\%(\max)} = 396$; $Q_{99,9\%(\min)} = 35,9$.
4. Задаваясь шагом ΔQ (который можен быть и переменным) формируем ряд расходов для диапазона значений от 35,9 до 396. В примере: 35,9; 39,8; 50; 60; …, 210; 220;…347; 396 (колонка 1 табл.5.9).
5. Для каждого расхода определяется обеспеченность по каждой из трех аналитических кривых. Результаты записываем в колонки 2, 3,4 табицы.5.9.
6. По формуле (5.32) рассчитывается обеспеченность расхода для составной кривой (колонка 5 табл.5.9).

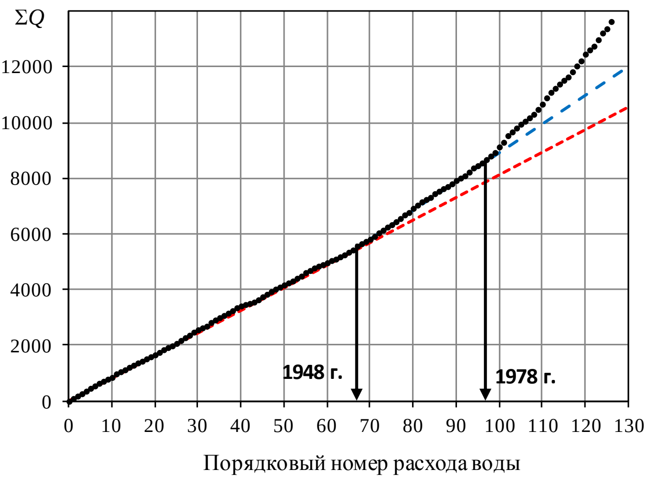


Рис. 5.48. Интегральная кривая минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Ока – г. Калуга (порядковый номер 67 соответствует 1948 году, порядковый номер 97 соответствует 1978 году).

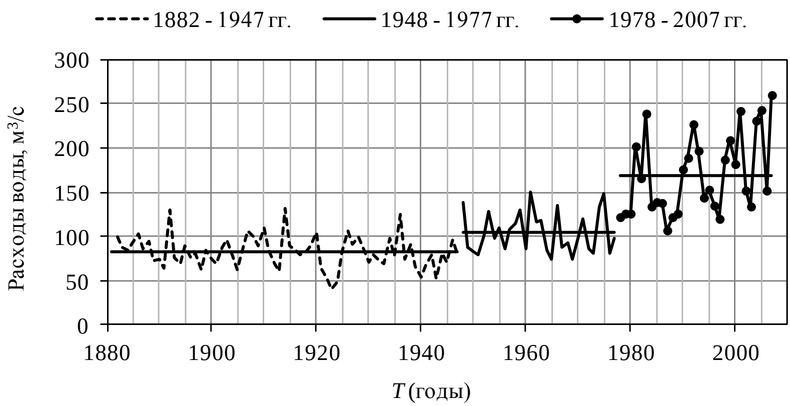


Рис. 5.49. Хронологический график минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды: р. Ока – г. Калуга.

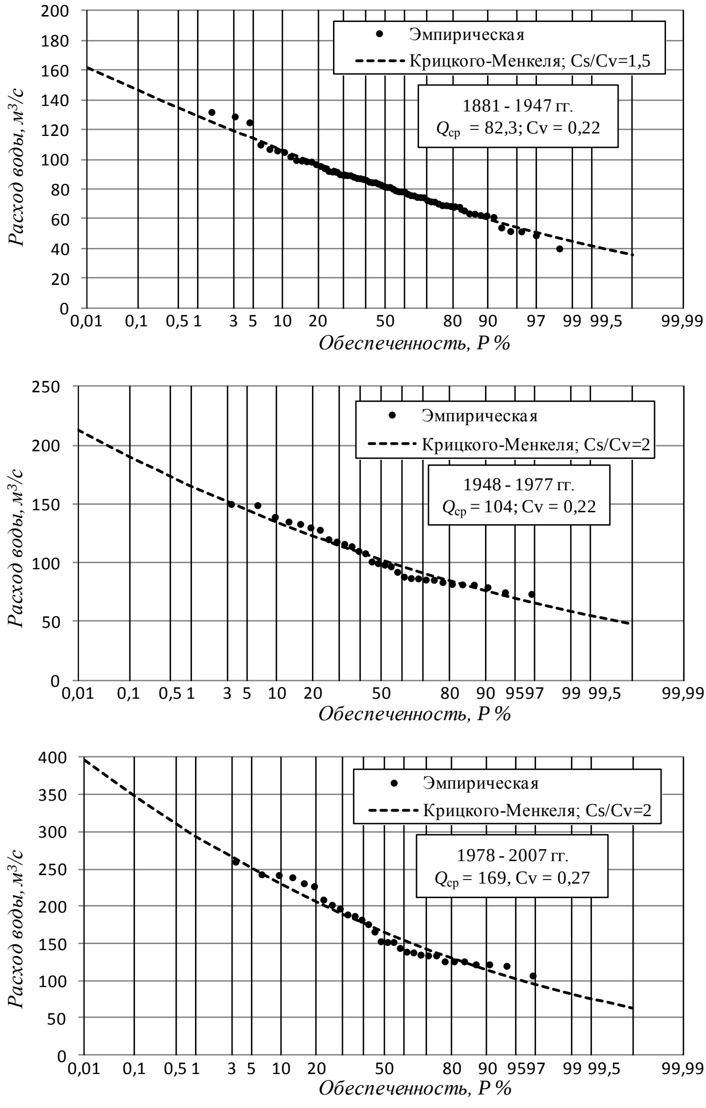


Рис. 5.50. Эмпирические и аналитические кривые обеспеченностей минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды за однородные периоды; р. Ока – г. Калуга.

7. По данным колонок 1 и 5 таблицы 5.9, рассчитываются (путем интерполяции) расходы воды составной кривой для опорных обеспеченностей (табл.5.10).
8. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей для всего ряда и по данным табл.5.10 – составная кривая обеспеченностей (рис. 5.51).

Таблица 5.8

Ординаты кривых обеспеченностей однородных выборок

P%		0,01	0,1	1	5	10	25	50	75	90	95	99	99,9
Q, м^3/с	1882-1947	162	147	129	114	106	94,0	81,3	69,6	59,9	54,4	45,0	35,9
	1948-1977	213	190	165	145	134	119	102	87,9	76,2	69,8	58,6	47,7
	1978-2007	396	347	293	251	230	197	165	137	114	102	81,9	62,8

Таблица 5.9

Расчет координат составной кривой обеспеченностей

Расход воды, м^3/с	Обеспеченность минимального расхода, %			
	P_1 (1882-1947)	P_2 (1948-1977)	P_3 (1978-2007)	Составная кривая $P_{\%}=\dfrac{n_1P_1+n_2P_2+n_3P_3}{n_1+n_2+n_3}$
35,9	99,90	100	100	99,95
39,8	99,70	99,99	100	99,84
50	97,22	99,84	100	98,5
60	90,40	98,87	100	94,7
70	75,0	95,0	99,8	85,7
80	54,2	86,3	99,2	72,5
90	32,0	71,6	98,0	57,1
100	16,3	54,4	95,7	44,3
110	7,24	37,4	92,0	34,6
120	2,54	23,0	86,8	27,5
140	0,14	6,84	72,2	18,9
160	0,02	1,44	54,7	13,4
180	0	0,24	37,8	9,0
190	0	0,10	29,5	7,1
200	0	0,06	23,4	5,6
210	0	0,02	18,0	4,3
220	0	0	13,6	3,2

Продолжение таблицы 5.9

Расход воды, м^3/с	Обеспеченность минимального расхода, %			
	P_1 (1882-1947)	P_2 (1948-1977)	P_3 (1978-2007)	Составная кривая $P_{\%} = \dfrac{n_1P_1 + n_2P_2 + n_3P_3}{n_1 + n_2 + n_3}$
230	0	0	10,0	2,4
251	0	0	5,0	1,2
266	0	0	3,0	0,714
293	0	0	1,0	0,238
311	0	0	0,5	0,119
323	0	0	0,3	0,071
347	0	0	0,10	0,024
396	0	0	0,01	0,0024

Таблица 5.10

Ординаты составной кривой обеспеченностей, $Q_{p\%}$ м^3/с

Обеспеченность, *P*%													
0,01	0,1	1	5	10	25	50	75	90	95	97	99	99,7	99,9
379	316	257	204	175	125	95,6	78,1	65,2	59,2	54,0	46,2	41,0	37,7

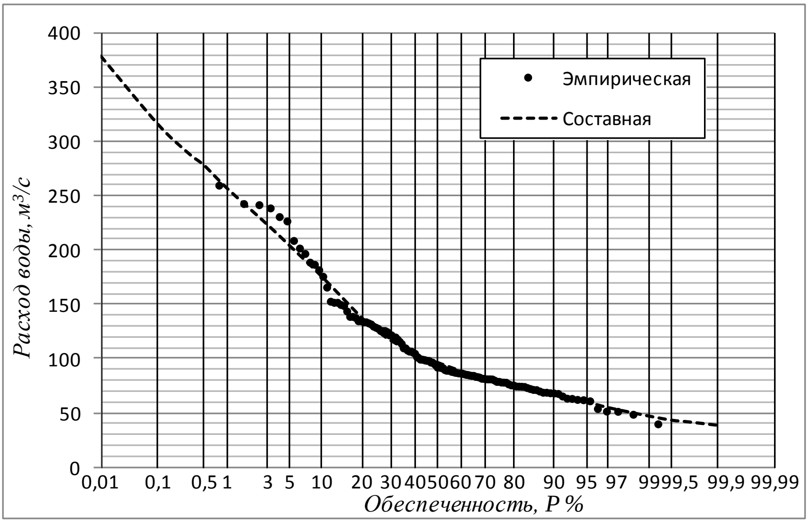


Рис. 5.51. Составная кривая обеспеченностей минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды: р. Ока – г. Калуга.

Случай генетической неоднородности ряда

Рассмотрим вариант построения составной кривой обеспеченностей, при котором ряд содержит расходы различного генетического происхождения. Например, дождевые максимумы дождливых лет и максимумы, сформированные изолированными паводками в засушливые годы, когда значительную часть выпавших осадков составляют потери.

Порядок расчета следующий:

1. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей, по которой определяется точка перелома (рис. 5.52). На рисунке 5.53 показан хронологический график рассматриваемого ряда.
2. Ранжированный ряд по полученной точке перелома делится на две выборки. Для каждой выборки рассчитываются параметры распределения и строятся эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей. В рассматриваемом примере в обоих случаях была использована аналитическая кривая Крицкого-Менкеля (рис. 5.54, 5.55). Ординаты кривых представлены в табл.5.11.

Таблица 5.11

Ординаты кривых обеспеченностей однородных выборок, м³/с
(Q_1 – маловодные годы; Q_2 – многоводные годы)

P%	0,01	0,1	1	5	10	25	50	75	90	95	99	99,9
Q_1	56,0	47,4	38,0	30,7	27,3	21,9	17,0	12,8	9,70	8,22	5,67	3,66
Q_2	308	258	205	163	144	114	86,4	63,6	47,0	39,2	26,1	16,1

3. По таблице 5.11 определяется наибольшее значение расхода для обеспеченности P = 0,01% и наименьшее для обеспеченности P = 99,9%. В примере: $Q_{0,01\%(\max)}$ = 308; $Q_{99,9\%(\min)}$ = 3,66.
4. Задаясь шагом ΔQ (который можен быть и переменным) формируем ряд расходов для диапазона значений от 3,66 до 308. В примере: 3,66; 5,67; 10; 15; … 220; 250; 300; 308 (колонка 1 табл.5.12).
5. Для каждого расхода определяется обеспеченность по каждой из двух аналитических кривых. Результаты записываем в колонки 2, 3 табицы.5.12.

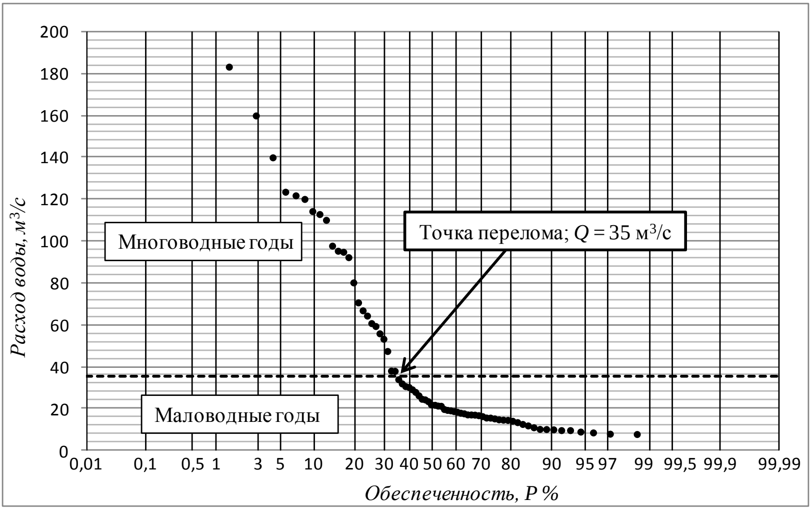


Рис. 5.52. Эмпирическая кривая обеспеченностей максимальных расходов дождевых паводков; точка перелома на графике определяет пороговое значение, разделяющее расходы различного генетического происхождения.

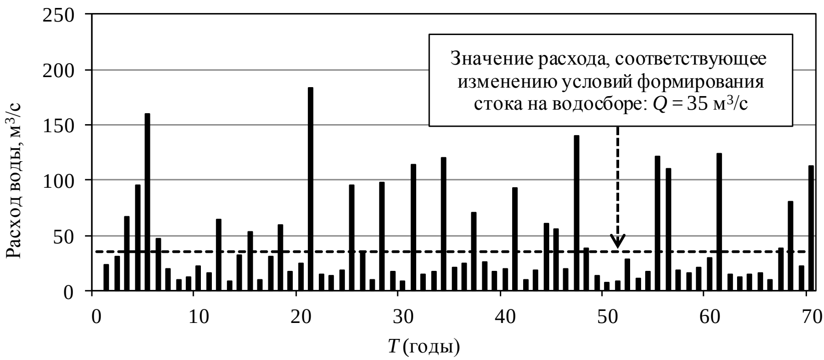


Рис. 5.53. Хронологический график максимальных расходов дождевых паводков.

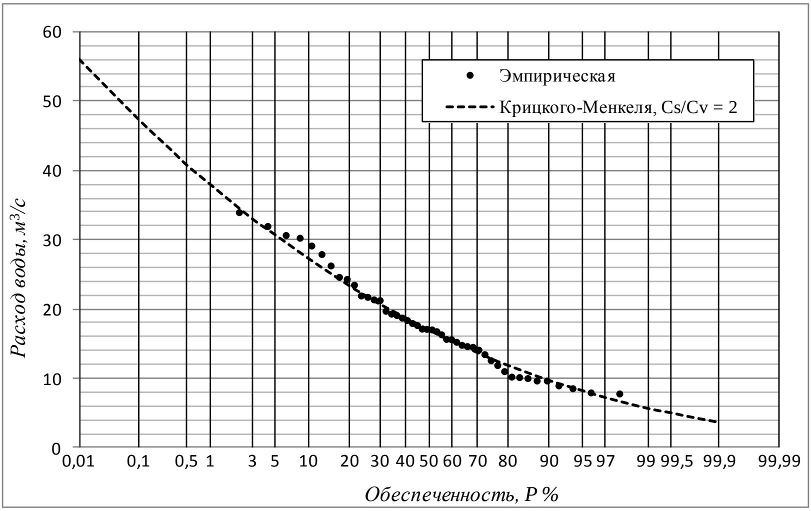


Рис. 5.54. Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей для маловодных лет.

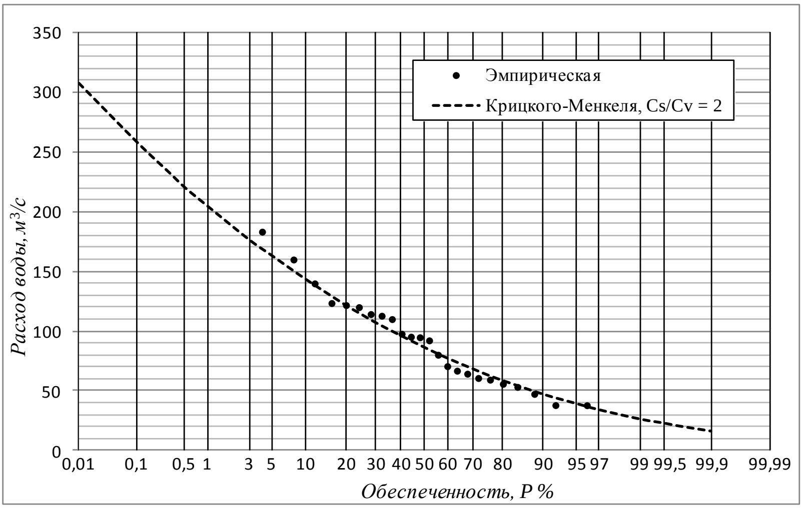


Рис. 5.55. Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей для многоводных лет.

Таблица 5.12

Расчет координат составной кривой обеспеченностей

Расход воды, м^3/с	Обеспеченность максимального расхода, %		
	для маловодных лет, P_1	для многоводных лет, P_2	составная кривая $P = \dfrac{n_1 P_1 + n_2 P_2}{n_1 + n_2}$
3,66	99,9	100	99,9
5,67	99,0	100	99,3
10	88,64	99,99	92,5
15	61,94	99,93	75,0
20	33,57	99,71	56,2
25	15,72	99,17	44,3
30	6,08	98,02	37,6
40	0,64	94,47	32,8
50	0,072	87,46	30,0
75	0	62,57	21,5
100	0	36,4	12,5
120	0	20,95	7,18
140	0	11,65	3,99
160	0	5,84	2,00
180	0	2,74	0,94
200	0	1,32	0,45
220	0	0,52	0,18
250	0	0,17	0,06
300	0	0,024	0,008
308	0	0,01	0,003

6. По формуле (5.33) рассчитывается обеспеченность расхода для составной кривой (колонка 4 табл.5.12).
7. По данным колонок 1 и 4 таблицы 5.12, рассчитываются (путем интерполяции) расходы воды составной кривой для опорных обеспеченностей (табл.5.13).

Таблица 5.13

Ординаты составной кривой обеспеченностей, $Q_{p\%}$ м^3/с

Обеспеченность, P%													
0,01	0,1	1	5	10	25	50	75	90	95	97	99	99,7	99,9
298	240	179	134	109	65	22,6	15	10,7	8,43	7,16	5,89	4,88	3,84

8. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей для всего ряда и по данным табл.5.13 – составная кривая обеспеченностей (рис. 5.56).

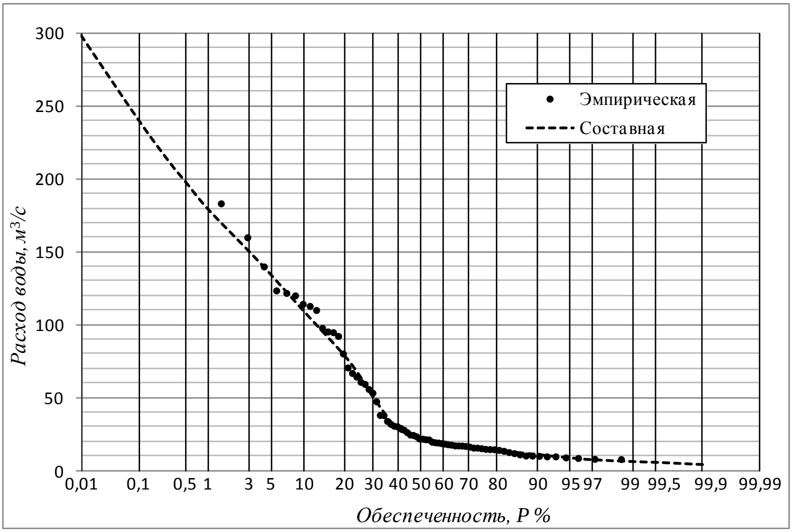


Рис. 5.56. Составная кривая обеспеченностей максимальных расходов дождевых паводков.

Расчет при наличии в ряду нулевых значений

Рассмотрим методику построения составной кривой обеспеченностей на примере ряда минимальных зимних 30-суточных расходов воды р. Петровки – пос. Дружноселье (F = 78,6 км^2) за 47 лет, n = 47 (табл.5.14).

Порядок расчета следующий:

1. Из исходного ряда удаляются нулевые значения. В данном примере число нулей n_2 = 7, следовательно: n_1 = 47 – 7 = 40.
2. По полученной укороченной выборке рассчитываются оценки параметров распределения. В примере: $Q_{ср}$= 0,16 м^3/с; C_v = 0,59; C_s/C_v = 3.

Таблица 5.14

Минимальные 30-суточные зимние расходы воды; р. Петровка – пос. Дружноселье.

Год	Q, м^3/с	Год	Q, м^3/с	Год	Q, м^3/с	Год	Q, м^3/с	Год	Q, м^3/с
1952	0,14	1962	0,17	1972	0	1982	0,24	1994	0,17
1953	0,16	1963	0,05	1973	0,098	1983	0,093	1995	0,47
1954	0,082	1964	0	1974	0,17	1984	0,22	1996	0
1955	0,22	1965	0,15	1975	0,38	1985	0,049	1997	0,10
1956	0,11	1966	0	1976	0,06	1987	0,085	1998	0,12
1957	0,21	1967	0,083	1977	0,14	1989	0,28	1999	0,12
1958	0,13	1968	0	1978	0,09	1990	0,09	2000	0,24
1959	0,13	1969	0	1979	0,088	1991	0,13		
1960	0	1970	0,13	1980	0,13	1992	0,28		
1961	0,43	1971	0,13	1981	0,21	1993	0,14		

3. На клетчатке вероятностей строятся эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей. В настоящем примере в качестве аналитической кривой обеспеченностей использована кривая Крицкого-Менкеля (рис. 5.57). Координаты этой кривой представлены в первых двух строках таблицы 5.15.
4. Если кривая хорошо соответствует эмпирическим точкам, то на её базе строится составная кривая обеспеченностей для исходной выборки объемом n. Переход от обеспеченностей укороченной выборки (P_1) к обеспеченностям исходной выборки (P) производится по формуле (5.34) (3-я строка табл.5.15).

Таблица 5.15

Координаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля для минимальных 30-суточных зимних расходов воды; р. Петровка – пос. Дружноселье

Обеспеченность для укороченной выборки P_1 (%)	0,01	0,1	1	5	10	25	50	75	90	95	99	99,9
Расход воды, м^3/с	1,00	0,73	0,49	0,35	0,28	0,20	0,14	0,10	0,07	0,05	0,04	0,02
Обеспеченность для исходной выборки P (%); $P = (n_1P_1)/(n_1+n_2)$	0,0085	0,085	0,85	4,3	8,5	21,3	42,6	63,8	76,6	80,9	84,3	85,0

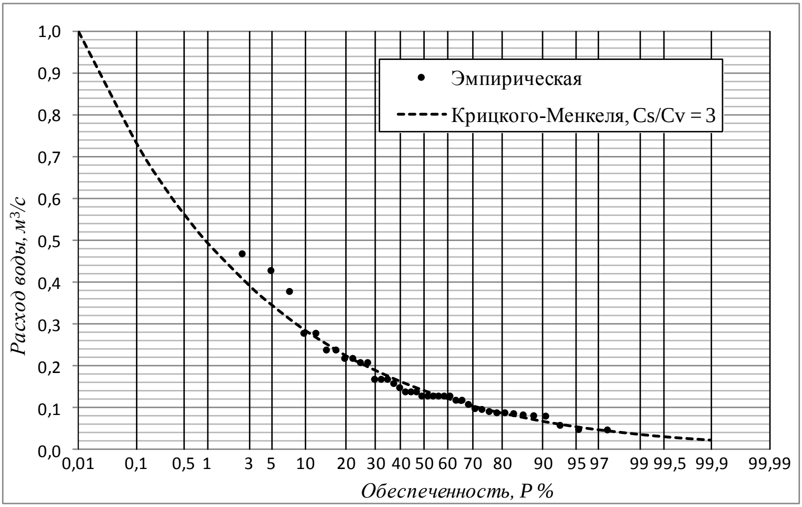


Рис. 5.57. Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей минимальных 30-суточных зимних расходов воды без нулевых значений;
р. Петровка – пос. Дружноселье.

5. По данным второй и третьей строки таблицы 5.15 путем интерполяции рассчитываем ординаты составной кривой для опорных обеспеченностей (табл.5.16).
   При этом отдельно рассчитывается обеспеченность нуля:
   $P_0 = (n_1 100)/(n_1 + n_2) = 40 \cdot 100/47 = 85{,}1\%$.
6. По данным табл.5.16 строится составная кривая обеспеченностей (рис.5.58).

Таблица 5.16

Координаты составной кривой обеспеченностей для минимальных 30-суточных зимних расходов воды; р. Петровка – пос. Дружноселье

Обеспеченность для исходной выборки, *P*%	0,01	0,1	1	5	10	25	50	75	80	85	85,1-99,9
Расход воды, м^3/с	0,99	0,72	0,48	0,34	0,27	0,19	0,13	0,071	0,057	0,02	0

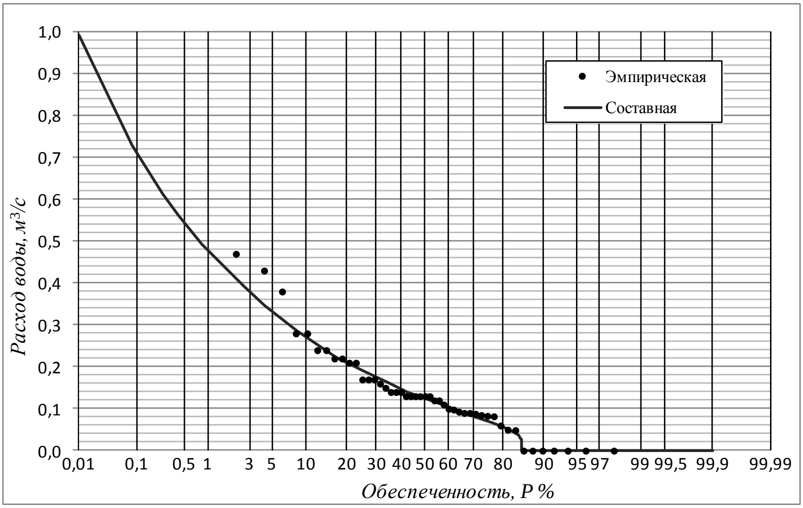


Рис. 5.58. Составная кривая обеспеченностей минимальных 30-суточных зимних расходов воды; р. Петровка – пос. Дружноселье.

5.2.3. Построение составной кривой путем объединения двух усеченных кривых обеспеченностей

Если эмпирическая кривая обеспеченностей имеет хорошо выраженный перелом, но одна из частей ряда имеет продолжительность недостаточную для надежной оценки параметров распределения традиционными аналитическими методами, то можно построить составную кривую путем объединения двух усеченных кривых обеспеченностей. В этом случае для более короткой выборки следует использовать метод М2, а для более продолжительной – метод М1 (см. табл.5.1).

Рассмотрим алгоритм построения составной кривой на примере ряда минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды реки Пежма – д. Шелюбинское.

На эмпирической кривой обеспеченностей имеется перелом в районе 5 м^3/с (рис.5.59). Попытаемся аппроксимировать верхнюю часть кривой обеспеченностей распределением Гумбеля с положительной асимметрией (см. п.4.3).

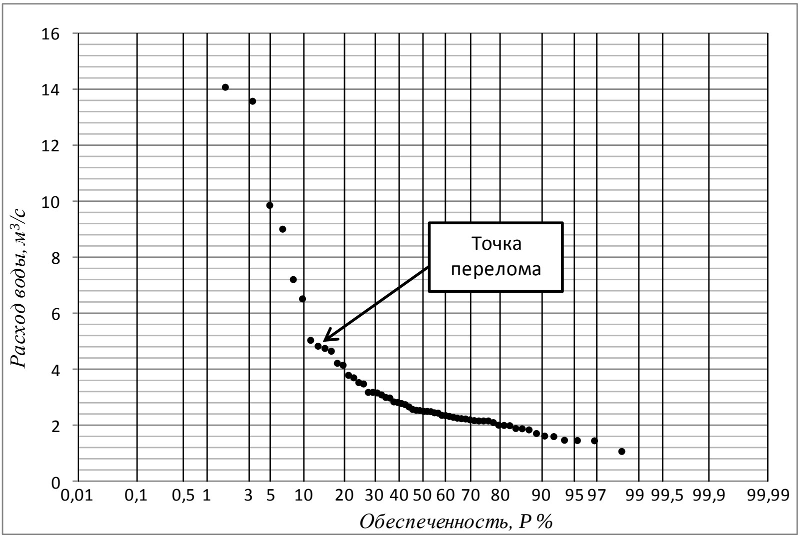


Рис. 5.59. Эмпирическая кривая обеспеченностей для минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское.

.

Функция обеспеченностей Гумбеля определяется выражением:

$$P(x) = 1 - \exp[-\exp(-y)], \tag{5.37}$$

где $y = (x - \mu)/\lambda$; μ – мода случайной величины X; λ – параметр масштаба. Из (5.37) следует:

$$x_p = \lambda g_p + \mu \tag{5.38}$$

где: $g_p = -\ln[-\ln(1 - P)]$; P – обеспеченность в долях единицы.

Таким образом, если выборка описывается распределением Гумбеля, то зависимость между x_p и g_p является линейной и параметры λ и μ легко находятся методом наименьших квадратов.

Порядок построения усеченной кривой следующий.

1. Исходный ряд ранжируется и для каждого члена ранжированного ряда рассчитывается эмпирическая обеспеченность в долях единицы: $P = m/(n + 1)$.
2. Для каждого значения P определяется g_p.

3. Строится зависимость $x_p = f(g_p)$, по которой определяется точка усечения. За точку усечения принимается точка перелома на графике, после которой связь становится линейной (рис.5.60)
4. Для верхней части зависимости строится отдельный график и для неё методом наименьших квадратов определяются параметры λ и μ (рис. 5.61)

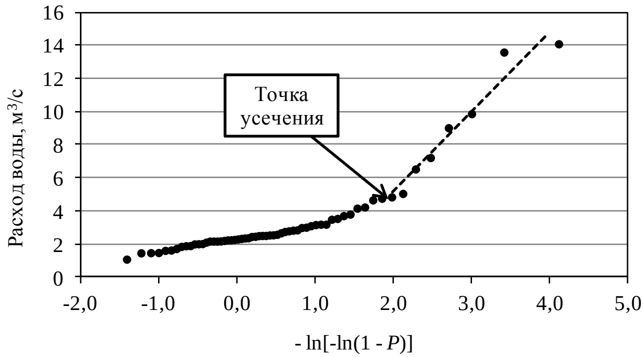


Рис. 5.60. Зависимость $Q = f\ \{-\ln[-\ln(1-P)]\}$ для минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское.

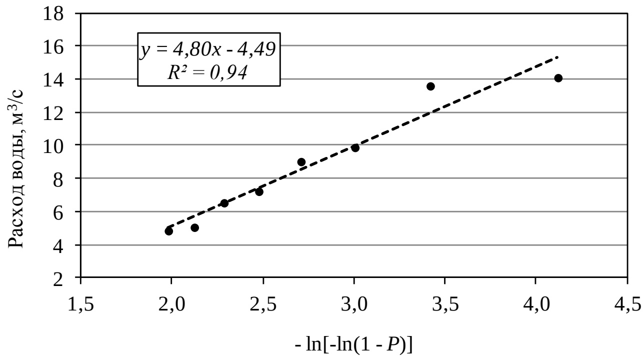


Рис. 5.61. Зависимость $Q = f\ \{-\ln[-\ln(1-P)]\}$ для минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; верхняя (линейная) часть зависимости; р. Пежма – д. Шелюбинское; (λ = 4,80; и μ = – 4,49).

5. С использованием полученных параметров λ = 4,80 и μ = –4,49 по формуле (5.38) рассчитываются ординаты верхней части кривой обеспеченностей от точки усечения до P = 0,01% (табл. 5.17)

Таблица 5.17

Расчет координат усеченной кривой обеспеченностей минимальных 30-суточных летне-осних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское (верхняя часть)

P, в %	0,01	0,1	0,5	1	3	5	10	15
P, в долях единицы	0,0001	0,001	0,005	0,01	0,03	0,05	0,1	0,15
g_p	9,21	6,91	5,30	4,60	3,49	2,97	2,25	1,82
Q, $м^3/с$	39,7	28,7	20,9	17,6	12,3	9,78	6,32	4,24

6. На клетчатке вероятностей строится эмпирическая кривая обеспеченностей и усеченная кривая обеспеченностей для максимумов (рис. 5.62).

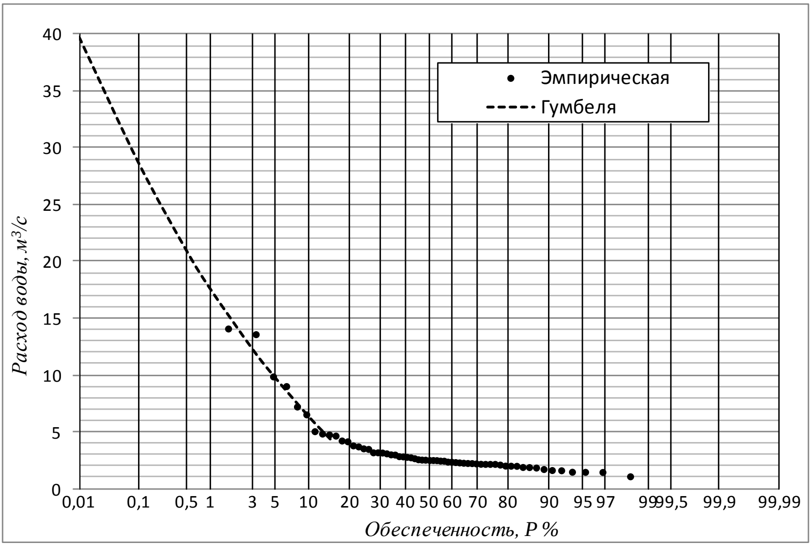


Рис. 5.62. Усеченная кривая обеспеченностей для максимумов минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское.

7. Для построения нижней части кривой обеспеченностей из исходного ряда исключим k наибольших значений, по которым строилась зависимость, представленная на рисунке 5.61. Таких значений в данном примере 8, т. е. k = 8. Заметим, что если точка усечения выражена не четко, можно исключить меньше значений, чтобы усеченная кривая для минимумов строилась с небольшим перекрытием. В данном случае принято k = 6.
8. По укороченной выборке длиной (n – k) оцениваются параметры распределения, строятся эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей. В данном примере расчет параметров распределения выполнен методом моментов, а в качестве аналитической кривой обеспеченностей использовалась кривая Крицкого-Менкеля (рис.5.63). Координаты этой кривой представлены в первых двух строках таблицы 5.18.

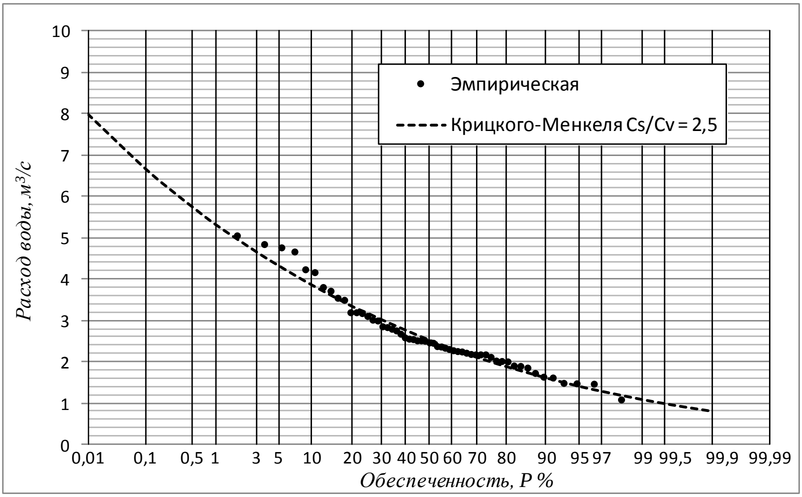


Рис. 5.63. Кривая обеспеченностей для минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды после исключения 6 наибольших значений;
р. Пежма – д. Шелюбинское ($Q_{ср}$ = 2,67; C_v = 0,34; C_s/C_v = 2,5).

Таблица 5.18

Координаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля

Обеспеченность P% для укороченной выборки	3	5	10	30	50	70	90	95	97	99	99,9
Расход воды, м^3/с	4,67	4,34	3,87	3,03	2,54	2,12	1,62	1,42	1,30	1,10	0,82
Обеспеченность P% для исходной выборки; расчет по формуле (5.39).	12,5	14,3	18,9	36,9	54,9	73,0	91,0	95,5	97,3	99,1	99,9

9. Если кривая хорошо соответствует эмпирическим точкам, то на её базе строится усеченная кривая обеспеченностей для исходной выборки объемом n. Переход от обеспеченностей укороченной выборки (P_1) к обеспеченностям исходной выборки (P) производится по формуле

$$P = \frac{n_1 P_1 / 100 + k}{n} 100\% \tag{5.39}$$

   Расчет по формуле (5.39) представлен в третьей строке табл. 5.18.
10. По данным второй и третьей строки таблицы 5.18 путем интерполяции рассчитываем ординаты усеченной кривой для опорных обеспеченностей (табл.5.19).
11. По данным табл.5.19 строится усеченная кривая обеспеченностей для минимумов (рис.5.64).
12. Объединяя данные таблиц 5.17 и 5.19, строим составную кривую обеспеченностей (рис.5.65).

Таблица 5.19

Координаты усеченной кривой обеспеченностей для минимумов

Обеспеченность P% для исходной выборки	15	25	30	50	70	80	90	95	97	99	99,9
Расход воды, м^3/с	4,2	3,55	3,31	2,67	2,2	1,93	1,66	1,44	1,31	1,1	0,82

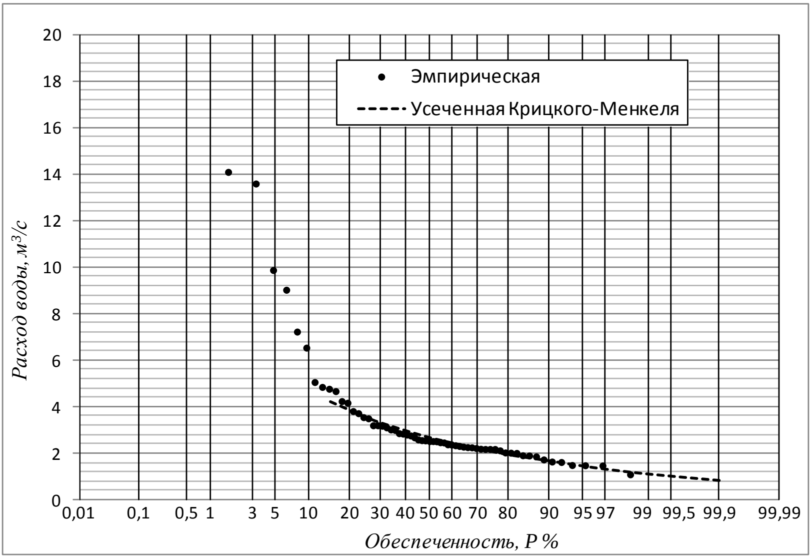


Рис. 5.64. Усеченная кривая обеспеченностей для минимумов минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское.

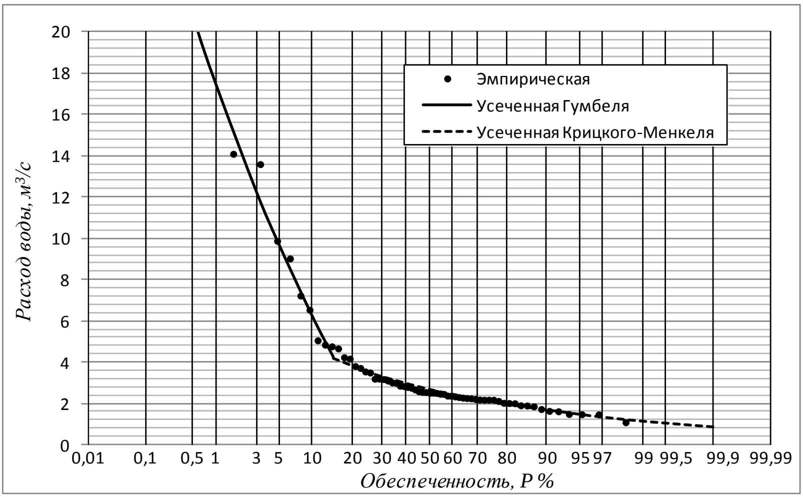


Рис. 5.65. Составная кривая обеспеченностей минимальных 30-суточных летне-осенних расходов воды; р. Пежма – д. Шелюбинское.

При построении составной кривой обеспеченностей на базе двух усеченных можно использовать и другие методы, описанные в разделе 5.1. Но при этом должно соблюдаться условие – после разбиения ряда на две выборки наиболее короткая из них должна содержать не менее 6 значений.

5.3. Построение кривой обеспеченностей при нарушении естественного гидрологического режима под влиянием локальных антропогенных факторов

Рассмотрим достаточно типичную ситуацию. На гидрологическом посту ведутся регулярные наблюдения за элементами водного режима. Начиная с какого-то момента времени под влиянием антропогенных факторов условия формирования стока на водосборе существенно изменились. При этом длина ряда за период нарушенного стока недостаточная для надежной оценки параметров распределения. В этом случае можно рекомендовать два варианта расчета.

Рассмотрим варианты расчета на примере ряда среднегодовых расходов воды за 1951-1985 гг. представленного на рис.5.66. Как видно на рисунке с 1973 года условия формирования стока на водосборе существенно изменились.

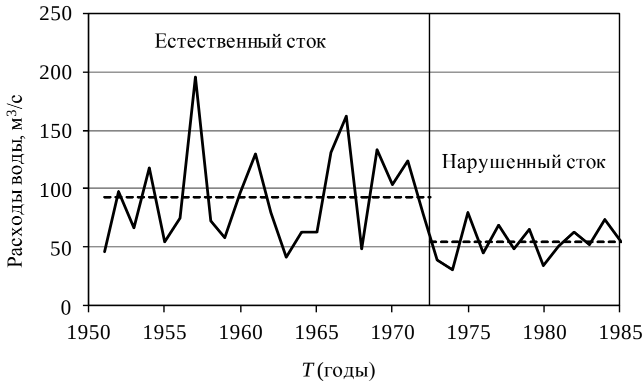


Рис.5.66. Хронологический график среднегодовых расходов на расчетной реке.

Вариант 1. Расчет с восстановлением естественного стока

1. Подбирается река-аналог, режим которой не подвергся существенному антропогенному воздействию (табл.5.20).
2. За период ненарушенного стока (1951-1972 гг.) строится график связи расходов расчетной реки и реки-аналога; оцениваются параметры уравнения линейной регрессии (рис.5.67).
   В данном примере:

$$Q_{\text{р.р}} = 0{,}183Q_{\text{р.а}} + 14{,}69 \qquad (5.40)$$

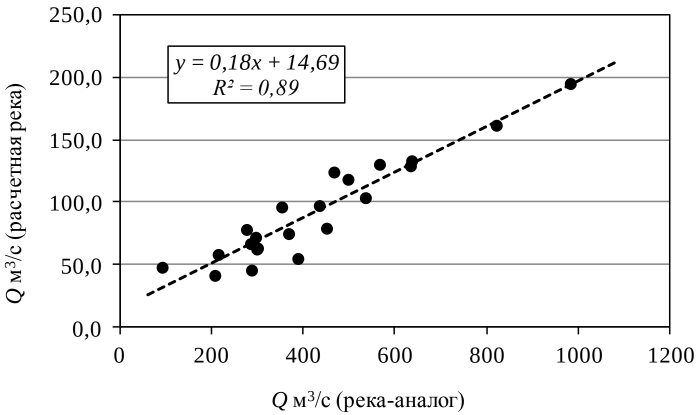


Рис.5.67. График связи среднегодовых расходов расчетной реки и реки-аналога в естественных условиях (1951-1972 гг.).

3. Если уравнение регрессии является надежным, восстанавливается ряд естественного стока расчетной реки за период нарушенного стока (1973-1985 гг.) (столб.3 табл.5.20).
4. Для расчетной реки строится график связи естественных и нарушенных расходов воды (за 1973-1985 гг.) (рис.5.68).
   Уравнение регрессии в данном примере имеет вид:

$$Q_{\text{нар}} = 0{,}256Q_{\text{ест}} + 23{,}88 \qquad (5.41)$$

5. По восстановленному ряду расчетной реки (столб. 3 табл. 5.20) строятся эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей естественного стока (рис.5.69).

Таблица 5.20

Среднегодовые расходы воды, м³/с

Годы		Фактические расходы воды	Естественный сток (за 1971-1985 гг. восстановлен)	Расходы реки-аналога
1		*2*	*3*	*4*
Период естественного стока	1951	46,0	46,0	287
	1952	97,5	97,5	435
	1953	67,1	67,1	285
	1954	118	118	498
	1955	55,2	55,2	388
	1956	75,1	75,1	368
	1957	195	195	982
	1958	72,2	72,2	296
	1959	58,5	58,5	215
	1960	96,3	96,3	353
	1961	129	129	634
	1962	79,4	79,4	451
	1963	41,8	41,8	207
	1964	63,5	63,5	300
	1965	62,8	62,8	299
	1966	130	130	566
	1967	162	162	821
	1968	48,3	48,3	92,5
	1969	133	133	636
	1970	104	104	536
Период нарушенного стока	1971	54,3	(98,1)	467
	1972	41,0	(63,1)	276
	1973	39,1	(53,1)	222
	1974	30,3	(53,0)	222
	1975	80,0	(232)	1194
	1976	45,7	(104)	501
	1977	45,8	(94,3)	446
	1978	48,5	(118)	574
	1979	65,3	(172)	866
	1980	34,6	(53,5)	225
	1981	51,2	(103)	493
	1982	63,1	(137)	677
	1983	52,2	(105)	504
	1984	74,2	(179)	906
	1985	56,4	(129)	636

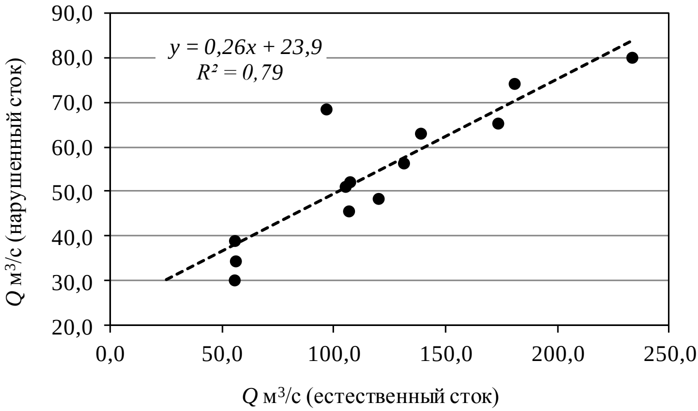


Рис.5.68. График связи естественных (восстановленных) и нарушенных расходов расчетной реки за период с 1973 по 1985 гг.

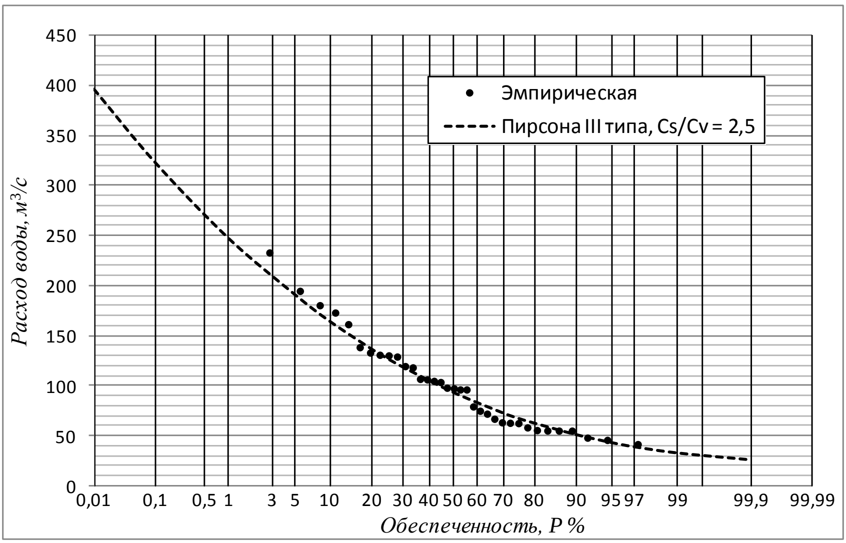


Рис.5.69. Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей среднегодовых расходов расчетной реки, приведенных к естественным условиям ($Q_{ср}$ = 102; C_v = 0,46; C_s/C_v = 2,5).

6. По аналитической кривой определяются расходы заданной обеспеченности для естественных условий. В данном примере $Q_{1\%}$ = 247 м^3/с; $Q_{50\%}$ = 93,0 м^3/с; $Q_{90\%}$ =50,5 м^3/с.
7. По уравнению связи естественного и нарушенного стока (5.41) определяются расходы заданной обеспеченности для нарушенных условий. В примере:
   $Q_{1\%}$ = 87,1 м^3/с; $Q_{50\%}$ = 47,7 м^3/с; $Q_{90\%}$ =36,8 м^3/с.

Следует отметить, связь естественных и нарушенных расходов на расчетной реке не всегда имеет высокий коэффициент корреляции. Такая ситуация возникает если антропогенные факторы превалируют над естественно-природными факторами.

Так как в данном случае зависимость $Q_{i,\text{нар}} = f(Q_{i,\text{ест}})$ используется не для погодичного приведения ряда к нарушенным условиям, а для получения равнообеспеченных расходов воды – допустимо использовать зависимость $Q_{i,\text{нар}} = f(Q_{i,\text{ест}})$ для ранжированных рядов, что, как правило, приводит к существенному повышению коэффициента корреляции.

При таком подходе этапы расчета 1-3 аналогичны тем, что представлены в примере. Далее алгоритм выглядит следующим образом.

4. Фактические и естественные расходы воды расчетной реки за период нарушенного стока ранжируются (табл.5.21).
5. По ранжированным выборкам для расчетной реки строится график связи естественных и нарушенных расходов воды (за 1973-1985 гг.) (рис.5.70). Уравнение регрессии в данном случае имеет вид:

$$Q_{\text{нар}} = 0{,}28Q_{\text{ест}} + 21{,}06 \qquad (5.42)$$

6. По восстановленному ряду расчетной реки (столб.3 табл.5.20) строятся эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей естественного стока (рис.5.69).
7. По аналитической кривой определяются расходы заданной обеспеченности для естественных условий. В данном примере $Q_1\%$ = 245 м^3/с; $Q_{50\%}$ = 92,4 м^3/с; $Q_{90\%}$ =50,2 м^3/с.
8. По уравнению связи равнообеспеченных естественных и нарушенных расходов воды (5.42) определяются расходы заданной обеспеченности для нарушенных условий:
   $Q_1\%$ = 90,2 м^3/с; $Q_{50\%}$ = 47,1 м^3/с; $Q_{90\%}$ =35,2 м^3/с.

Блок схема расчета представлена на рис.5.70.

Таблица 5.21

Среднегодовые расходы воды расчетной реки за период нарушенного стока

Годы	Фактические расходы воды	Естественные расходы воды (восстановлены)	Ранжированные фактические расходы воды	Ранжированные естественные расходы воды (восстановлены)
1972	41,0	63,1	74,2	179
1973	39,1	53,1	65,3	172
1974	30,3	53,0	63,1	137
1975	80,0	232	56,4	129
1976	45,7	104	54,3	118
1977	45,8	94,3	52,2	105
1978	48,5	118	51,2	104
1979	65,3	172	48,5	103
1980	34,6	53,5	45,8	98,1
1981	51,2	103	45,7	94,3
1982	63,1	137	41,0	63,1
1983	52,2	105	39,1	53,5
1984	74,2	179	34,6	53,1
1985	56,4	129	30,3	53,0

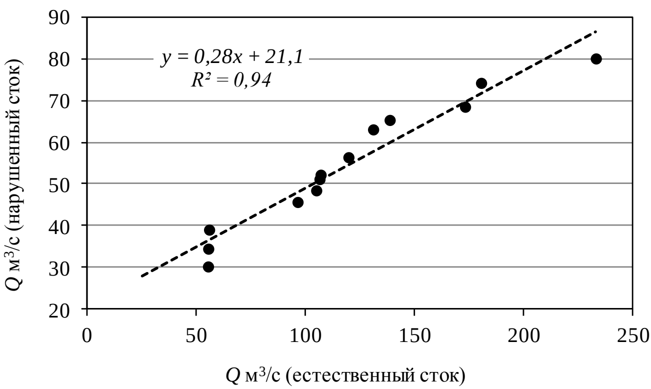


Рис.5.70. График связи равнообеспеченных естественных и нарушенных расходов расчетной реки за период с 1973 по 1985 гг.

Рис. 5.70. Блок-схема расчета расходов воды для нарушенных условий (вариант с восстановлением естественного стока).

Вариант 2. Расчет с приведением ряда к нарушенным условиям

1. Подбирается река-аналог, режим которой не подвергся существенному антропогенному воздействию (табл.5.22).
2. За период ненарушенного стока (1951-1972 гг.) строится график связи расходов расчетной реки и реки-аналога; оцениваются параметры уравнения линейной регрессии (см. рис.5.67); формула (5.40).
3. Если уравнение регрессии является надежным, восстанавливается ряд естественного стока расчетной реки за период нарушенного стока (1973-1985 гг.) (столбец 3 табл.5.22).
4. Для расчетной реки строится график связи естественных и нарушенных расходов воды (1973-1985 гг.) (см. рис.5.68); формула (5.41).
5. По графику связи $Q_{i,\text{нар}} = f(Q_{i,\text{ест}})$ определяются нарушенные расходы для периода естественного стока (1951-1972) (табл.5.22).
6. По восстановленному ряду (столбец 5 табл.22) расчетной реки строятся эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей нарушенного стока (рис.5.71).

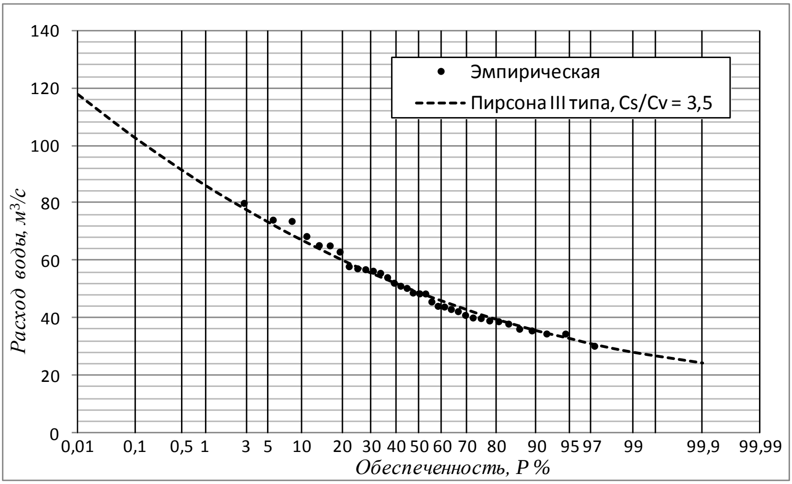


Рис.5.71. Эмпирическая и аналитическая кривые обеспеченностей среднегодовых расходов расчетной реки, приведенных к нарушенным условиям ($Q_{\text{ср}}$ = 50,2; C_v = 0,25; C_s/C_v = 3,5).

Таблица 5.22

Среднегодовые расходы воды

Годы		Расходы на расчетной реке, $м^3/с$			Расходы реки-аналога, $м^3/с$
		Фактические расходы воды	Естественный сток; *за 1973-1985 гг. восстановлен*	Нарушенный сток; *за 1951-1972 гг. восстановлен*	
1		*2*	*3*	*4*	*5*
Период естественного стока	1951	46,0	46,0	(35,7)	287
	1952	97,5	97,5	(48,8)	435
	1953	67,1	67,1	(41,1)	285
	1954	118	118	(54,2)	498
	1955	55,2	55,2	(38,0)	388
	1956	75,1	75,1	(43,1)	368
	1957	195	195	(73,8)	982
	1958	72,2	72,2	(42,4)	296
	1959	58,5	58,5	(38,9)	215
	1960	96,3	96,3	(48,5)	353
	1961	129	129	(57,0)	634
	1962	79,4	79,4	(44,2)	451
	1963	41,8	41,8	(34,6)	207
	1964	63,5	63,5	(40,1)	300
	1965	62,8	62,8	(39,9)	299
	1966	130	130	(57,3)	566
	1967	162	162	(65,2)	821
	1968	48,3	48,3	(36,2)	92,5
	1969	133	133	(58,0)	636
	1970	104	104	(50,4)	536
	1971	124	98,1	(55,7)	467
	1972	78,4	63,1	(44,0)	276
Период нарушенного стока	1973	39,1	(55,4)	39,1	222
	1974	30,3	(55,3)	30,3	222
	1975	80,0	(233)	80,0	1194
	1976	45,7	(106)	45,7	501
	1977	68,5	(96,4)	68,5	446
	1978	48,5	(120)	48,5	574
	1979	65,3	(173)	65,3	866
	1980	34,6	(55,8)	34,6	225
	1981	51,2	(105)	51,2	493
	1982	63,1	(139)	63,1	677
	1983	52,2	(107)	52,2	504
	1984	74,2	(181)	74,2	906
	1985	56,4	(131)	56,4	636

7. По аналитической кривой определяются расходы заданной обеспеченности для нарушенных условий. В данном примере: $Q_{1\%}$ = 86,0 м^3/с; $Q_{50\%}$ = 48,6 м^3/с; $Q_{90\%}$ = 35,4 м^3/с.
   В данном случае расходы отличаются от расходов, полученных по первому варианту расчета на 2-5%.
   Блок схема расчета представлена на рис.5.72.

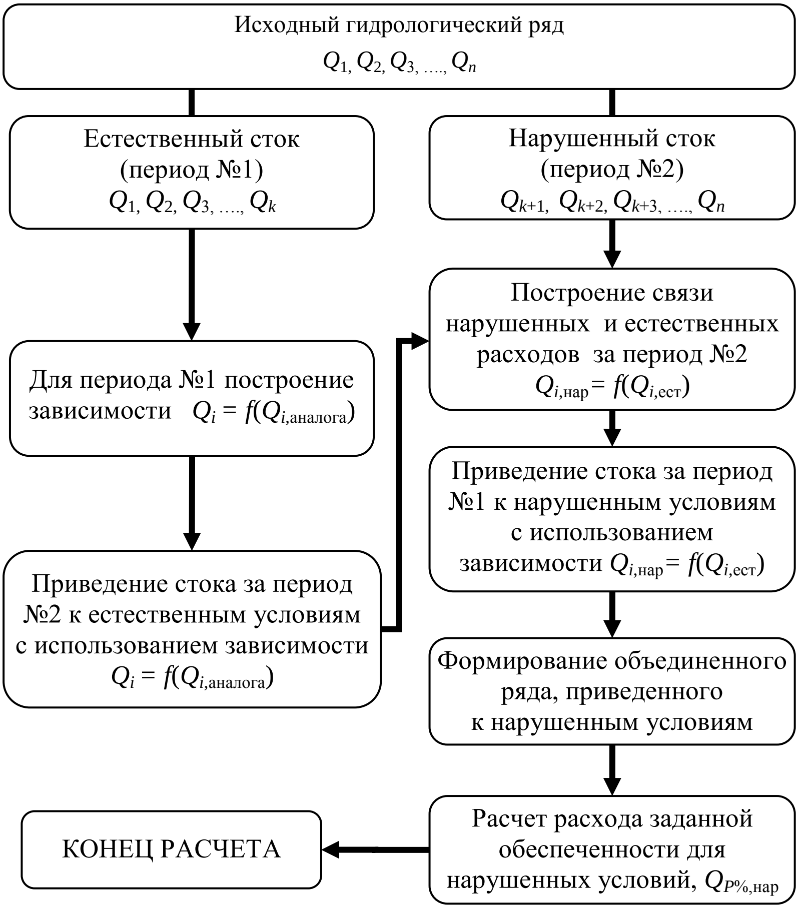


Рис. 5.72. Блок-схема расчета расходов воды для нарушенных условий (вариант с приведением ряда к нарушенным условиям).

Из рассмотренных вариантов расчета первый является более предпочтительным, так как эмпирическая кривая обеспеченностей для нарушенных условий не всегда хорошо аппроксимируется традиционными для гидрологии аналитическими кривыми. Особенно в тех случаях, когда связь естественных и нарушенных расходов является нелинейной.

В случае если коэффициент корреляции связи естественных и нарушенных расходов менее 0,7 второй метод расчета вообще не применим, так как невозможно с достаточной точностью получить ежегодные «нарушенные» расходы за период естественного стока.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Айвазян С.А., Мхитарян В.С.* Теория вероятностей и прикладная статистика. – М., ЮНИТИ, 2001. – 656 с.
2. *Блохинов Е.Г.* Усеченное распределение вероятностей для расчета максимального стока рек.//Проблемы регулирования и использования водных ресурсов. М.: Наука, 1973. С.30-55.
3. *Блохинов Е.Г.* Распределение вероятностей величин речного стока. М.: Наука, 1974. -169 с
4. *Болгов М.В.* Усеченное трехпараметрическое гамма-распределение С.Н. Крицкого и М.Ф. Менкеля и некоторые его приложения к гидрологическим расчетам / М.В. Болгов, И.О. Сарманов // Водные ресурсы. – 1988. – № 2. – С. 24–29
5. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Наука, 1988. – 480 с.
6. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности.– М.: Наука, 1965.– 524 с.
7. Документ ВМО №168. Руководство по гидрологической практике. Сбор и обработка данных, анализ, прогнозирование и другие применения, 1994.
8. Документ ВМО №168. Руководство по гидрологической практике. Том 2. Управление водными ресурсами и практика применения гидрологических методов, 2012.
9. *Крицкий С.Н., Менкель М.Ф.* Гидрологические основы управления речным стоком. – М.: Наука, 1981. 270 с.
10. Международное руководство по методам расчета основных гидрологических характеристик.– Л.: Гидрометеоиздат, 1984.– 247 с.
11. Методические рекомендации по определению расчетных гидрологических характеристик при наличии данных гидрометрических наблюдений. – Нижний Новгород: Вектор-ТиС. 2007. – 134 с.
12. Методические рекомендации по определению расчетных гидрологических характеристик при недостаточности данных гидрометрических наблюдений / Ротопринт ГМЦ РФ ААНИИ, СПб, 2007, 66 с.
13. Методические указания по оценке влияния хозяйственной деятельности на сток средних и больших рек и восстановлению его характеристик. – Л.: Гидрометеоиздат, 1986. – 130 с.
14. *Митропольский А. К.* Техника статистических вычислений. – М.: Наука, 1971. – 576 с.
15. *Поляков М.М., Вязлов Л.Х.* О применении метода наибольшего правдоподобия к трехпараметрическому гамма-распределению. //Вод. ресурсы. 1981. №1. С.23-33.
16. Пособие по определению расчетных гидрологических характеристик. Л.:1984. – 448 с.
17. *Рождественский А. В., Ежов А. В., Сахарюк А. В.* Оценка точности гидрологических расчетов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1990. – 273 с.
18. *Рождественский А.В., Чеботарев А. И.* Статистические методы в гидрологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 424с.

19. Свод правил СП 33-101-2003. Определение основных расчетных гидрологических характеристик. Издание официальное. – М.: Госстрой России, 2004. -73 с.
20. Серия норм МАГАТЭ по безопасности. Учет метеорологических явлений при оценке площадок для атомных электростанций. Руководство по безопасности № NS-G-3.4.– Вена, 2003.
21. *Сикан А.В.* Методика построения усеченных кривых обеспеченностей при расчете минимальных расходов и уровней воды //Уч. Зап. РГГМУ, 2014, №37, с.19-27.
22. *Сикан А.В.* Методы статистической обработки гидрометеорологической информации. СПб.: изд. РГГМУ, 2007. – 279 с.
23. *Сикан А.В.* Оптимизация параметров распределения при построении кривых обеспеченностей экстремальных расходов воды. //Уч. Зап. РГГМУ, 2012, №24, с.26-32.
24. *Сикан А.В.* Практические приемы оценки параметров распределения Вейбулла при выполнении гидрологических расчетов // Уч. Зап. РГГМУ, 2011, №19, с.37-45.
25. *Сикан А.В., Винокуров И.О., Тесленко Д.Д.* Использование метода *L*-моментов для оценки параметров распределения максимальных расходов весеннего половодья рек Северо-Запада России //Уч. Зап. РГГМУ, 2015, №38, с.21-27.
26. *Сикан А.В., Малышева Н.Г., Винокуров И.О.* Статистические методы анализа гидрометеорологической информации. Лабораторный практикум. СПб.: изд. РГГМУ, 2014. – 76 с.
27. *Хан Г., Шапиро С.* Статистические модели в инженерных задачах.– М.: Мир, 1969, 395 с.
28. Hosking, J. R. M. 1990. L-moments: analysis and estimation of distributions using linear combinations of ordered statistics. J. R. Statis. Soc. Ser. B52(1): 105-124.
29. Hosking, J.K.M. and Wallis, J.R. 1997. Regional frequency analysis, an approach based on L-moments, Cambridge university press.
30. Johnson N.L. Systems of frequency curves generated by methods of translation. Biometrika 1949: 36: 149–176.
31. Landwehr J.M., Matalas N.C., Wallis J.R. Probabilityweighted moments compared with some traditional techniques in estimating Gumbel parameters and quantiles // Water Res. Research. 1979. V. 15. № 5. P. 1055–1064.
32. Mage D.T. An explicit solution for SB parameters using four percentile points. Technometrics 1980: 22: 247–251.
33. Slifker J.F., and Shapiro S.S. The Johnson system: selection and parameter estimation. Technometrics 1980: 22: 239–246.
34 Wallis, J. R.1989. Regional frequency studies using L-moments. IBM Research Report RC14597, p. 17.

Приложение 1

Нормированные ординаты распределения Пирсона III типа в зависимости от обеспеченности и коэффициента асимметрии

$$t_P = (x_p - \bar{x})/\sigma = (k_p - 1)/C_v = f(C_s, P\%).$$

Переход к значениям x_p заданной обеспеченности и модульным коэффициентам k_p заданной обеспеченности производится по формулам:

$$x_p = t_p\sigma + \bar{x},$$

$$k_p = t_p C_v + 1.$$

Коэффициенты скошенности рассчитываются по формулам:

$$S = (x_5^* + x_{95}^* - 2x_{50}^*)/(x_5^* - x_{95}^*),$$

$$S_{\max} = (x_5^* + x_{50}^* - 2x_{25}^*)/(x_5^* - x_{50}^*),$$

$$S_{\min} = (x_{50}^* + x_{90}^* - 2x_{75}^*)/(x_{50}^* - x_{90}^*),$$

где $x_5^*, x_{25}^*, x_{50}^*, x_{75}^*, x_{95}^*$ – ординаты сглаженной эмпирической кривой обеспеченностей.

Таблица П.1

Нормированные ординаты кривой обеспеченностей Пирсона III типа

P%	Коэффициент асимметрии, C_s											
	-4,0	**-3,8**	**-3,6**	**-3,4**	**-3,2**	**-3,0**	**-2,80**	**-2,60**	**-2,40**	**-2,20**	**-2,00**	**-1,80**
0,01	0,50	0,53	0,56	0,59	0,62	0,67	0,71	0,77	0,83	0,91	1,00	1,11
0,1	0,50	0,53	0,56	0,59	0,62	0,67	0,71	0,77	0,83	0,91	1,00	1,11
1	0,50	0,53	0,56	0,59	0,62	0,67	0,71	0,77	0,83	0,91	0,99	1,09
3	0,50	0,53	0,56	0,59	0,62	0,67	0,71	0,77	0,83	0,89	0,97	1,05
5	0,50	0,53	0,56	0,59	0,62	0,67	0,71	0,76	0,82	0,88	0,95	1,02
10	0,50	0,53	0,55	0,59	0,62	0,66	0,70	0,75	0,79	0,84	0,89	0,94
20	0,50	0,52	0,55	0,58	0,61	0,64	0,67	0,70	0,72	0,75	0,78	0,80
25	0,49	0,52	0,54	0,57	0,59	0,62	0,64	0,66	0,68	0,70	0,71	0,72
30	0,49	0,51	0,53	0,55	0,57	0,59	0,60	0,62	0,63	0,64	0,64	0,64
40	0,46	0,48	0,49	0,50	0,51	0,51	0,51	0,51	0,51	0,50	0,49	0,48
50	0,41	0,41	0,41	0,41	0,40	0,40	0,38	0,37	0,35	0,33	0,31	0,28
60	0,31	0,30	0,29	0,27	0,25	0,23	0,20	0,18	0,15	0,12	0,08	0,05
70	0,13	0,10	0,07	0,04	0,01	-0,02	-0,06	-0,09	-0,13	-0,17	-0,20	-0,24
75	-0,02	-0,05	-0,09	-0,12	-0,16	-0,20	-0,23	-0,27	-0,31	-0,35	-0,39	-0,42
80	-0,23	-0,26	-0,30	-0,34	-0,38	-0,42	-0,46	-0,50	-0,54	-0,57	-0,61	-0,64
90	-1,00	-1,04	-1,08	-1,11	-1,15	-1,18	-1,21	-1,24	-1,26	-1,28	-1,30	-1,32
95	-1,92	-1,94	-1,96	-1,98	-1,99	-2,00	-2,01	-2,01	-2,01	-2,01	-2,00	-1,98
97	-2,66	-2,66	-2,66	-2,66	-2,65	-2,64	-2,62	-2,60	-2,57	-2,54	-2,51	-2,47
99	-4,37	-4,31	-4,26	-4,19	-4,12	-4,05	-3,97	-3,89	-3,80	-3,71	-3,61	-3,50
99,9	-8,25	-8,04	-7,83	-7,61	-7,38	-7,15	-6,92	-6,67	-6,42	-6,17	-5,91	-5,64
99,99	-12,4	-12,0	-11,6	-11,2	-10,8	-10,4	-9,94	-9,51	-9,08	-8,65	-8,21	-7,77
S	-0,93	-0,91	-0,89	-0,86	-0,83	-0,80	-0,76	-0,72	-0,67	-0,62	-0,56	-0,51
S_{max}	-0,88	-0,84	-0,80	-0,75	-0,69	-0,63	-0,56	-0,48	-0,41	-0,33	-0,26	-0,20
S_{min}	-0,63	-0,60	-0,58	-0,55	-0,53	-0,51	-0,48	-0,46	-0,44	-0,42	-0,40	-0,38

Таблица П.1 (продолжение)

Нормированные ординаты кривой обеспеченностей Пирсона III типа

P%	Коэффициент асимметрии, C_s											
	-1,8	**-1,6**	**-1,4**	**-1,2**	**-1,0**	**-0,8**	**-0,6**	**-0,4**	**-0,2**	**-0,0**	**0,2**	**0,4**
0,01	1,11	1,25	1,42	1,63	1,88	2,18	2,53	2,90	3,30	3,72	4,15	4,60
0,1	1,11	1,24	1,39	1,58	1,79	2,02	2,27	2,53	2,81	3,09	3,38	3,67
1	1,09	1,20	1,32	1,45	1,59	1,73	1,88	2,03	2,18	2,33	2,47	2,62
3	1,05	1,14	1,23	1,33	1,42	1,52	1,61	1,70	1,79	1,88	1,96	2,04
5	1,02	1,09	1,17	1,24	1,32	1,39	1,46	1,52	1,59	1,64	1,70	1,75
10	0,94	0,99	1,04	1,09	1,13	1,17	1,20	1,23	1,26	1,28	1,30	1,32
20	0,80	0,82	0,83	0,84	0,85	0,86	0,86	0,86	0,85	0,84	0,83	0,82
25	0,72	0,73	0,73	0,74	0,73	0,73	0,72	0,71	0,69	0,67	0,66	0,63
30	0,64	0,64	0,64	0,63	0,62	0,60	0,59	0,57	0,55	0,52	0,50	0,47
40	0,48	0,46	0,44	0,42	0,39	0,37	0,34	0,31	0,28	0,25	0,22	0,19
50	0,28	0,25	0,23	0,20	0,16	0,13	0,10	0,07	0,03	0,00	-0,03	-0,07
60	0,05	0,02	-0,02	-0,05	-0,09	-0,12	-0,16	-0,19	-0,22	-0,25	-0,28	-0,31
70	-0,24	-0,28	-0,31	-0,35	-0,38	-0,41	-0,44	-0,47	-0,50	-0,52	-0,55	-0,57
75	-0,42	-0,46	-0,49	-0,52	-0,55	-0,58	-0,61	-0,63	-0,66	-0,67	-0,69	-0,71
80	-0,64	-0,68	-0,71	-0,73	-0,76	-0,78	-0,80	-0,82	-0,83	-0,84	-0,85	-0,86
90	-1,32	-1,33	-1,34	-1,34	-1,34	-1,34	-1,33	-1,32	-1,30	-1,28	-1,26	-1,23
95	-1,98	-1,96	-1,94	-1,91	-1,88	-1,84	-1,80	-1,75	-1,70	-1,64	-1,59	-1,52
97	-2,47	-2,42	-2,37	-2,31	-2,25	-2,19	-2,12	-2,04	-1,96	-1,88	-1,79	-1,70
99	-3,50	-3,39	-3,27	-3,15	-3,02	-2,89	-2,76	-2,62	-2,47	-2,33	-2,18	-2,03
99,9	-5,64	-5,37	-5,10	-4,81	-4,53	-4,24	-3,96	-3,67	-3,38	-3,09	-2,81	-2,53
99,99	-7,77	-7,32	-6,87	-6,41	-5,96	-5,50	-5,05	-4,60	-4,15	-3,72	-3,30	-2,90
S	-0,51	-0,45	-0,39	-0,34	-0,28	-0,22	-0,17	-0,11	-0,05	0,00	0,05	0,11
S_{max}	-0,20	-0,14	-0,080	-0,031	0,014	0,054	0,090	0,12	0,15	0,18	0,21	0,23
S_{min}	-0,38	-0,36	-0,34	-0,32	-0,30	-0,27	-0,25	-0,23	-0,21	-0,18	-0,15	-0,12

Таблица П.1 (продолжение)

Нормированные ординаты кривой обеспеченностей Пирсона III типа

P%	Коэффициент асимметрии, C_s											
	0,4	**0,6**	**0,8**	**1,0**	**1,2**	**1,4**	**1,6**	**1,8**	**2,0**	**2,2**	**2,4**	**2,6**
0,01	4,60	5,05	5,50	5,96	6,41	6,87	7,32	7,77	8,21	8,65	9,08	9,51
0,1	3,67	3,96	4,24	4,53	4,81	5,10	5,37	5,64	5,91	6,17	6,42	6,67
1	2,62	2,76	2,89	3,02	3,15	3,27	3,39	3,50	3,61	3,71	3,80	3,89
3	2,04	2,12	2,19	2,25	2,31	2,37	2,42	2,47	2,51	2,54	2,57	2,60
5	1,75	1,80	1,84	1,88	1,91	1,94	1,96	1,98	2,00	2,01	2,01	2,01
10	1,32	1,33	1,34	1,34	1,34	1,34	1,33	1,32	1,30	1,28	1,26	1,24
20	0,82	0,80	0,78	0,76	0,73	0,71	0,68	0,64	0,61	0,57	0,54	0,50
25	0,63	0,61	0,58	0,55	0,52	0,49	0,46	0,42	0,39	0,35	0,31	0,27
30	0,47	0,44	0,41	0,38	0,35	0,31	0,28	0,24	0,20	0,17	0,13	0,09
40	0,19	0,16	0,12	0,09	0,05	0,02	-0,02	-0,05	-0,08	-0,12	-0,15	-0,18
50	-0,07	-0,10	-0,13	-0,16	-0,20	-0,23	-0,25	-0,28	-0,31	-0,33	-0,35	-0,37
60	-0,31	-0,34	-0,37	-0,39	-0,42	-0,44	-0,46	-0,48	-0,49	-0,50	-0,51	-0,51
70	-0,57	-0,59	-0,60	-0,62	-0,63	-0,64	-0,64	-0,64	-0,64	-0,64	-0,63	-0,62
75	-0,71	-0,72	-0,73	-0,73	-0,74	-0,73	-0,73	-0,72	-0,71	-0,70	-0,68	-0,66
80	-0,86	-0,86	-0,86	-0,85	-0,84	-0,83	-0,82	-0,80	-0,78	-0,75	-0,72	-0,70
90	-1,23	-1,20	-1,17	-1,13	-1,09	-1,04	-0,99	-0,94	-0,89	-0,84	-0,79	-0,75
95	-1,52	-1,46	-1,39	-1,32	-1,24	-1,17	-1,09	-1,02	-0,95	-0,88	-0,82	-0,76
97	-1,70	-1,61	-1,52	-1,42	-1,33	-1,23	-1,14	-1,05	-0,97	-0,89	-0,83	-0,77
99	-2,03	-1,88	-1,73	-1,59	-1,45	-1,32	-1,20	-1,09	-0,99	-0,91	-0,83	-0,77
99,9	-2,53	-2,27	-2,02	-1,79	-1,58	-1,39	-1,24	-1,11	-1,00	-0,91	-0,83	-0,77
99,99	-2,90	-2,53	-2,18	-1,88	-1,63	-1,42	-1,25	-1,11	-1,00	-0,91	-0,83	-0,77
S	0,11	0,17	0,22	0,28	0,34	0,39	0,45	0,51	0,56	0,62	0,67	0,72
S_{max}	0,23	0,25	0,27	0,30	0,32	0,34	0,36	0,38	0,40	0,42	0,44	0,46
S_{min}	-0,12	-0,09	-0,05	-0,01	0,03	0,08	0,14	0,20	0,26	0,33	0,41	0,48

Таблица П.1 (продолжение)

Нормированные ординаты кривой обеспеченностей Пирсона III типа

P%	Коэффициент асимметрии, C_s										
	2,60	**2,80**	**3,00**	**3,20**	**3,40**	**3,60**	**3,80**	**4,00**	**4,20**	**4,40**	**4,60**
0,01	9,51	9,94	10,35	10,77	11,17	11,57	11,97	12,36	12,74	13,12	13,49
0,1	6,67	6,92	7,15	7,38	7,61	7,83	8,04	8,25	8,46	8,65	8,85
1	3,89	3,97	4,05	4,12	4,19	4,26	4,31	4,37	4,42	4,46	4,50
3	2,60	2,62	2,64	2,65	2,66	2,66	2,66	2,66	2,65	2,64	2,63
5	2,01	2,01	2,00	1,99	1,98	1,96	1,94	1,92	1,90	1,87	1,84
10	1,24	1,21	1,18	1,15	1,11	1,08	1,04	1,00	0,96	0,92	0,88
20	0,50	0,46	0,42	0,38	0,34	0,30	0,26	0,23	0,19	0,15	0,12
25	0,27	0,23	0,20	0,16	0,12	0,09	0,05	0,02	-0,01	-0,04	-0,06
30	0,09	0,06	0,02	-0,01	-0,04	-0,07	-0,10	-0,13	-0,15	-0,17	-0,19
40	-0,18	-0,20	-0,23	-0,25	-0,27	-0,29	-0,30	-0,31	-0,32	-0,33	-0,33
50	-0,37	-0,38	-0,40	-0,40	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,40	-0,40
60	-0,51	-0,51	-0,51	-0,51	-0,50	-0,49	-0,48	-0,46	-0,45	-0,44	-0,42
70	-0,62	-0,60	-0,59	-0,57	-0,55	-0,53	-0,51	-0,49	-0,47	-0,45	-0,43
75	-0,66	-0,64	-0,62	-0,59	-0,57	-0,54	-0,52	-0,49	-0,47	-0,45	-0,43
80	-0,70	-0,67	-0,64	-0,61	-0,58	-0,55	-0,52	-0,50	-0,48	-0,45	-0,43
90	-0,75	-0,70	-0,66	-0,62	-0,59	-0,55	-0,53	-0,50	-0,48	-0,45	-0,43
95	-0,76	-0,71	-0,67	-0,62	-0,59	-0,56	-0,53	-0,50	-0,48	-0,45	-0,43
97	-0,77	-0,71	-0,67	-0,62	-0,59	-0,56	-0,53	-0,50	-0,48	-0,45	-0,43
99	-0,77	-0,71	-0,67	-0,62	-0,59	-0,56	-0,53	-0,50	-0,48	-0,45	-0,43
99,9	-0,77	-0,71	-0,67	-0,62	-0,59	-0,56	-0,53	-0,50	-0,48	-0,45	-0,43
99,99	-0,77	-0,71	-0,67	-0,62	-0,59	-0,56	-0,53	-0,50	-0,48	-0,45	-0,43
S	0,72	0,76	0,80	0,83	0,86	0,89	0,91	0,93	0,94	0,956	0,966
S_{max}	0,46	0,48	0,51	0,53	0,55	0,58	0,60	0,63	0,65	0,68	0,70
S_{min}	0,48	0,56	0,63	0,69	0,75	0,80	0,84	0,88	0,91	0,93	0,95

Таблица П.1 (продолжение)

Нормированные ординаты кривой обеспеченностей Пирсона III типа

$P\%$	Коэффициент асимметрии, C_s									
	4,60	**4,80**	**5,00**	**5,20**	**5,40**	**5,60**	**5,80**	**6,00**	**6,20**	**6,40**
0,01	13,49	13,86	14,22	14,58	14,93	15,28	15,62	15,96	16,29	16,62
0,1	8,85	9,04	9,22	9,40	9,57	9,74	9,91	10,07	10,22	10,38
1	4,50	4,54	4,57	4,60	4,63	4,65	4,67	4,69	4,70	4,71
3	2,63	2,62	2,60	2,58	2,56	2,53	2,50	2,48	2,44	2,41
5	1,84	1,81	1,77	1,74	1,70	1,66	1,63	1,59	1,54	1,50
10	0,88	0,84	0,80	0,75	0,71	0,67	0,63	0,59	0,55	0,51
20	0,12	0,09	0,06	0,03	0,00	-0,02	-0,05	-0,07	-0,09	-0,10
25	-0,06	-0,09	-0,11	-0,13	-0,15	-0,16	-0,18	-0,19	-0,20	-0,21
30	-0,19	-0,20	-0,22	-0,23	-0,24	-0,25	-0,25	-0,26	-0,26	-0,26
40	-0,33	-0,33	-0,33	-0,33	-0,33	-0,33	-0,32	-0,31	-0,31	-0,30
50	-0,40	-0,39	-0,38	-0,37	-0,36	-0,35	-0,34	-0,33	-0,32	-0,31
60	-0,42	-0,41	-0,39	-0,38	-0,37	-0,36	-0,34	-0,33	-0,32	-0,31
70	-0,43	-0,42	-0,40	-0,38	-0,37	-0,36	-0,34	-0,33	-0,32	-0,31
75	-0,43	-0,42	-0,40	-0,38	-0,37	-0,36	-0,34	-0,33	-0,32	-0,31
80	-0,43	-0,42	-0,40	-0,38	-0,37	-0,36	-0,34	-0,33	-0,32	-0,31
90	-0,43	-0,42	-0,40	-0,38	-0,37	-0,36	-0,34	-0,33	-0,32	-0,31
95	-0,43	-0,42	-0,40	-0,38	-0,37	-0,36	-0,34	-0,33	-0,32	-0,31
97	-0,43	-0,42	-0,40	-0,38	-0,37	-0,36	-0,34	-0,33	-0,32	-0,31
99	-0,43	-0,42	-0,40	-0,38	-0,37	-0,36	-0,34	-0,33	-0,32	-0,31
99,9	-0,43	-0,42	-0,40	-0,38	-0,37	-0,36	-0,34	-0,33	-0,32	-0,31
99,99	-0,43	-0,42	-0,40	-0,38	-0,37	-0,36	-0,34	-0,33	-0,32	-0,31
S	0,966	0,974	0,981	0,986	0,990	0,992	0,995	0,996	0,997	0,998
S_{max}	0,703	0,727	0,750	0,773	0,795	0,816	0,835	0,853	0,870	0,886
S_{min}	0,950	0,963	0,974	0,982	0,987	0,991	0,994	0,996	0,997	0,998

Приложение **2**

ОРДИНАТЫ КРИВОЙ ОБЕСПЕЧЕННОСТЕЙ КРИЦКОГО-МЕНКЕЛЯ

Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах, $k = f(C_v, P)$

C_s/C_v = 0,5

P %	Коэффициент вариации, C_v							
	0	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**
0,01	1	1,38	1,76	2,13	2,47	2,74	2,91	2,89
0,1	1	1,31	1,63	1,95	2,25	2,50	2,69	2,74
0,3	1	1,28	1,56	1,85	2,12	2,36	2,55	2,64
0,5	1	1,26	1,53	1,79	2,05	2,28	2,48	2,59
1	1	1,24	1,48	1,72	1,95	2,17	2,37	2,5
3	1	1,19	1,38	1,58	1,78	1,97	2,16	2,33
5	1	1,17	1,33	1,51	1,68	1,86	2,03	2,22
10	1	1,13	1,26	1,39	1,53	1,67	1,83	2,01
20	1	1,08	1,17	1,25	1,35	1,44	1,56	1,7
25	1	1,065	1,130	1,200	1,270	1,350	1,450	1,560
30	1	1,050	1,100	1,160	1,210	1,270	1,340	1,420
40	1	1,020	1,050	1,070	1,100	1,120	1,150	1,160
50	1	0,999	0,997	0,993	0,988	0,980	0,962	0,920
60	1	0,974	0,946	0,915	0,881	0,839	0,780	0,690
70	1	0,947	0,888	0,834	0,769	0,693	0,596	0,476
75	1	0,932	0,862	0,789	0,709	0,615	0,503	0,376
80	1	0,915	0,829	0,740	0,643	0,533	0,409	0,282
90	1	0,872	0,744	0,615	0,480	0,343	0,215	0,115
95	1	0,837	0,676	0,517	0,362	0,221	0,113	0,047
97	1	0,814	0,633	0,458	0,295	0,160	0,070	0,024
99	1	0,772	0,554	0,354	0,189	0,080	0,025	0,006
99,5	1	0,748	0,511	0,302	0,144	0,051	0,013	0,002
99,7	1	0,732	0,482	0,269	0,117	0,037	0,008	0,001
99,9	1	0,700	0,428	0,210	0,076	0,019	0,003	0,000

Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах, $k = f(C_v, P)$;

C_s/C_v = 1,0

P %	Коэффициент вариации, C_v																			
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**2,0**
0,01	1,38	1,81	2,26	2,70	3,15	3,57	3,95	4,31	4,64	4,92	5,16	5,34	5,46	5,58	5,68	5,76	5,82	5,88	5,92	5,96
0,1	1,32	1,67	2,03	2,40	2,77	3,13	3,48	3,82	4,13	4,42	4,69	4,92	5,06	5,18	5,29	5,37	5,44	5,49	5,54	5,58
0,3	1,28	1,59	1,91	2,23	2,56	2,89	3,21	3,53	3,84	4,14	4,44	4,74	4,92	5,06	5,16	5,24	5,31	5,36	5,42	5,46
0,5	1,27	1,55	1,84	2,15	2,46	2,77	3,08	3,38	3,69	3,99	4,29	4,58	4,75	4,91	5,02	5,11	5,18	5,24	5,28	5,32
1	1,24	1,49	1,76	2,03	2,30	2,59	2,88	3,16	3,46	3,75	4,06	4,36	4,55	4,72	4,84	4,94	5,00	5,07	5,12	5,16
3	1,19	1,39	1,60	1,82	2,04	2,27	2,50	2,75	3,01	3,29	3,59	3,92	4,14	4,33	4,46	4,58	4,68	4,76	4,84	4,92
5	1,17	1,34	1,52	1,70	1,90	2,10	2,30	2,53	2,76	3,02	3,31	3,63	3,84	4,02	4,16	4,28	4,40	4,50	4,60	4,69
10	1,13	1,26	1,40	1,54	1,68	1,83	1,99	2,16	2,35	2,55	2,78	3,03	3,26	3,46	3,64	3,81	3,94	4,05	4,15	4,25
20	1,08	1,17	1,25	1,34	1,42	1,51	1,60	1,70	1,80	1,90	2,00	2,10	2,20	2,32	2,44	2,56	2,67	2,80	2,92	3,03
25	1,065	1,130	1,200	1,260	1,330	1,390	1,460	1,520	1,590	1,640	1,680	1,690	1,700	1,700	1,680	1,660	1,610	1,560	1,510	1,46
30	1,050	1,100	1,150	1,200	1,240	1,290	1,330	1,370	1,390	1,400	1,390	1,340	1,260	1,170	1,070	0,960	0,840	0,720	0,600	0,45
40	1,020	1,040	1,060	1,080	1,090	1,100	1,100	1,080	1,050	0,995	0,916	0,808	0,720	0,600	0,500	0,380	0,280	0,200	0,110	0,04
50	0,998	0,993	0,985	0,972	0,954	0,928	0,891	0,836	0,760	0,665	0,559	0,446	0,340	0,260	0,200	0,150	0,105	0,070	0,040	0,01
60	0,973	0,943	0,909	0,870	0,824	0,768	0,698	0,613	0,512	0,406	0,306	0,216	0,190	0,130	0,100	0,075	0,055	0,035	0,015	0
70	0,946	0,890	0,830	0,764	0,692	0,609	0,515	0,413	0,309	0,215	0,141	0,085	0,060	0,045	0,035	0,025	0,015	0,010	0	0
75	0,932	0,861	0,787	0,708	0,622	0,528	0,426	0,321	0,224	0,144	0,086	0,046	0,025	0,020	0,010	0,005	0	0	0	0
80	0,915	0,829	0,740	0,648	0,549	0,445	0,338	0,237	0,151	0,088	0,047	0,023	0,015	0,005	0	0	0	0	0	0
90	0,873	0,748	0,623	0,500	0,378	0,264	0,165	0,092	0,045	0,019	0,007	0,002	0	0	0	0	0	0	0	0
95	0,838	0,683	0,533	0,392	0,263	0,157	0,081	0,036	0,013	0,004	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0	0
97	0,816	0,642	0,478	0,329	0,202	0,107	0,048	0,018	0,005	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
99	0,775	0,568	0,383	0,229	0,115	0,047	0,015	0,004	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
99,5	0,752	0,528	0,335	0,182	0,081	0,028	0,008	0,002	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
99,7	0,737	0,502	0,303	0,154	0,062	0,019	0,004	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
99,9	0,707	0,451	0,247	0,108	0,036	0,008	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах, $k = f(C_v, P)$

C_s/C_v = 1,5

P %	Коэффициент вариации, C_v														
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**
0,01	1,40	1,86	2,38	2,94	3,55	4,19	4,88	5,61	6,38	7,19	8,03	8,92	9,83	10,80	11,80
0,1	1,33	1,70	2,11	2,54	3,02	3,52	4,06	4,62	5,22	5,84	6,50	7,18	7,88	8,61	9,38
0,3	1,29	1,61	1,97	2,34	2,74	3,17	3,62	4,10	4,61	5,14	5,72	6,32	6,95	7,60	8,25
0,5	1,27	1,57	1,90	2,24	2,61	3,00	3,41	3,85	4,31	4,80	5,32	5,87	6,44	7,04	7,66
1	1,24	1,51	1,79	2,09	2,42	2,76	3,11	3,49	3,89	4,30	4,74	5,21	5,70	6,24	6,78
3	1,19	1,40	1,62	1,85	2,09	2,34	2,60	2,88	3,16	3,46	3,78	4,12	4,48	4,86	5,27
5	1,17	1,35	1,53	1,72	1,92	2,13	2,34	2,57	2,80	3,03	3,28	3,55	3,83	4,12	4,44
10	1,13	1,26	1,40	1,54	1,68	1,82	1,97	2,11	2,26	2,41	2,56	2,71	2,86	3,00	3,13
20	1,08	1,16	1,25	1,32	1,40	1,47	1,54	1,61	1,67	1,72	1,76	1,80	1,82	1,83	1,83
25	1,07	1,13	1,19	1,25	1,30	1,35	1,39	1,43	1,46	1,48	1,49	1,49	1,48	1,46	1,43
30	1,05	1,10	1,14	1,18	1,21	1,24	1,27	1,28	1,28	1,28	1,26	1,24	1,20	1,16	1,10
40	1,02	1,04	1,06	1,06	1,06	1,06	1,05	1,03	0,994	0,952	0,901	0,840	0,766	0,692	1
50	0,998	0,990	0,977	0,958	0,934	0,902	0,862	0,814	0,756	0,690	0,618	0,541	0,463	0,388	0
60	0,972	0,940	0,903	0,860	0,812	0,757	0,695	0,627	0,553	0,475	0,398	0,324	0,253	0,193	0
70	0,946	0,888	0,826	0,760	0,690	0,616	0,538	0,457	0,376	0,298	0,228	0,168	0,118	0,079	0
75	0,931	0,860	0,785	0,708	0,630	0,545	0,460	0,377	0,297	0,223	0,161	0,111	0,072	0,045	0
80	0,915	0,829	0,741	0,652	0,562	0,472	0,384	0,299	0,223	0,156	0,105	0,067	0,039	0,022	0
90	0,874	0,751	0,632	0,518	0,409	0,310	0,222	0,148	0,092	0,053	0,028	0,014	0,006	0,003	0
95	0,840	0,689	0,548	0,419	0,305	0,207	0,130	0,074	0,038	0,018	0,008	0,003	0,001	0	0
97	0,819	0,651	0,498	0,363	0,247	0,155	0,088	0,045	0,020	0,008	0,003	0,001	0	0	0
99	0,780	0,581	0,410	0,268	0,160	0,084	0,038	0,015	0,005	0,001	0	0	0	0	0
99,5	0,758	0,545	0,366	0,223	0,122	0,057	0,023	0,008	0,002	0	0	0	0	0	0
99,7	0,744	0,520	0,337	0,205	0,108	0,043	0,016	0,005	0,001	0	0	0	0	0	0
99,9	0,714	0,474	0,284	0,152	0,066	0,024	0,007	0,001	0	0	0	0	0	0	0

Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах, $k = f(C_v, P)$

$C_s/C_v = 2$

P %	Коэффициент вариации, C_v																			
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**2,0**
0,01	1,42	1,92	2,52	3,20	3,98	4,85	5,81	6,85	7,98	9,21	10,5	11,8	13,2	14,7	16,4	18,2	20,2	22,2	24,4	26,6
0,1	1,34	1,73	2,19	2,70	3,27	3,87	4,56	5,30	6,08	6,91	7,75	8,65	9,60	10,6	11,6	12,5	13,5	14,6	15,8	17,0
0,3	1,30	1,64	2,02	2,45	2,91	3,42	3,96	4,55	5,16	5,81	6,47	7,10	7,98	8,70	9,50	10,5	11,0	11,9	12,7	13,6
0,5	1,28	1,59	1,94	2,32	2,74	3,20	3,68	4,19	4,74	5,30	5,90	6,50	7,13	7,80	8,42	9,00	9,50	10,1	10,8	11,4
1	1,25	1,52	1,82	2,16	2,51	2,89	3,29	3,71	4,15	4,60	5,05	5,53	6,02	6,55	7,08	7,50	8,00	8,60	9,20	9,80
3	1,20	1,41	1,64	1,87	2,13	2,39	2,66	2,94	3,21	3,51	3,80	4,12	4,42	4,71	4,98	5,20	5,50	5,80	6,20	6,50
5	1,17	1,35	1,54	1,74	1,94	2,15	2,36	2,57	2,78	3,00	3,22	3,40	3,60	3,80	3,96	4,00	4,30	4,50	4,70	5,00
10	1,13	1,26	1,40	1,54	1,67	1,80	1,94	2,06	2,19	2,30	2,40	2,50	2,57	2,64	2,70	2,70	2,60	2,60	2,60	2,60
20	1,08	1,16	1,24	1,31	1,38	1,44	1,50	1,54	1,58	1,61	1,62	1,63	1,62	1,61	1,59	1,60	1,60	1,56	1,50	1,50
25	1,06	1,13	1,18	1,23	1,28	1,31	1,34	1,37	1,38	1,39	1,39	1,35	1,33	1,31	1,28	1,26	1,24	1,22	1,20	1,18
30	1,05	1,09	1,13	1,16	1,19	1,21	1,22	1,22	1,22	1,20	1,18	1,14	1,11	1,08	1,04	1,015	0,980	0,950	0,920	0,890
40	1,02	1,04	1,05	1,05	1,04	1,03	1,01	0,984	0,955	0,916	0,870	0,830	0,770	0,725	0,670	0,625	0,580	0,530	0,480	0,440
50	0,997	0,986	0,970	0,948	0,918	0,886	0,846	0,800	0,748	0,693	0,640	0,580	0,520	0,460	0,405	0,355	0,310	0,265	0,230	0,200
60	0,972	0,938	0,898	0,852	0,803	0,748	0,692	0,632	0,568	0,511	0,450	0,390	0,334	0,283	0,234	0,190	0,160	0,130	0,105	0,085
70	0,945	0,886	0,823	0,760	0,691	0,622	0,552	0,488	0,424	0,357	0,300	0,250	0,203	0,155	0,120	0,090	0,070	0,060	0,050	0,045
75	0,931	0,858	0,784	0,708	0,634	0,556	0,489	0,416	0,352	0,288	0,241	0,193	0,146	0,106	0,077	0,060	0,050	0,040	0,030	0,025
80	0,915	0,830	0,745	0,656	0,574	0,496	0,419	0,352	0,280	0,223	0,175	0,130	0,094	0,065	0,046	0,035	0,027	0,020	0,015	0,010
90	0,873	0,754	0,640	0,532	0,436	0,352	0,272	0,208	0,154	0,105	0,074	0,049	0,030	0,016	0,009	0,005	0,004	0,003	0,002	0,001
95	0,842	0,696	0,565	0,448	0,342	0,256	0,181	0,120	0,082	0,051	0,030	0,016	0,009	0,004	0,002	0,001	0	0	0	0
97	0,821	0,660	0,517	0,392	0,288	0,202	0,139	0,088	0,046	0,030	0,016	0,008	0,004	0,002	0,001	0	0	0	0	0
99	0,782	0,594	0,436	0,304	0,206	0,130	0,076	0,040	0,019	0,010	0,005	0,002	0,001	0	0	0	0	0	0	0
99,5	0,761	0,560	0,394	0,269	0,166	0,099	0,054	0,027	0,012	0,005	0,002	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0
99,7	0,748	0,537	0,374	0,240	0,144	0,082	0,042	0,019	0,008	0,003	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0	0
99,9	0,719	0,492	0,319	0,192	0,107	0,052	0,027	0,008	0,004	0,001	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах, $k = f(C_v, P)$

$C_s/C_v = 2{,}5$

P %	Коэффициент вариации, C_v																			
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**2,0**
0,01	1,44	1,98	2,67	3,49	4,45	5,54	6,76	8,10	9,55	11,10	12,8	14,6	16,4	18,4	20,4	22,5	24,7	27,0	29,3	31,9
0,1	1,35	1,77	2,27	2,85	3,51	4,24	5,04	5,90	6,80	7,76	8,76	9,81	10,9	12,0	13,2	14,4	15,7	17,0	18,4	19,8
0,3	1,30	1,66	2,08	2,55	3,07	3,64	4,26	4,91	5,58	6,28	7,02	7,78	8,56	9,36	10,2	11,1	12,0	13,0	14,1	15,2
0,5	1,28	1,61	1,99	2,41	2,87	3,36	3,90	4,46	5,03	5,63	6,25	6,89	7,54	8,20	8,88	9,56	10,3	11,0	11,8	12,6
1	1,25	1,54	1,86	2,21	2,59	3,00	3,42	3,87	4,32	4,78	5,26	5,73	6,22	6,71	7,20	7,70	8,20	8,71	9,22	9,74
3	1,20	1,42	1,65	1,90	2,15	2,42	2,69	2,96	3,23	3,50	3,77	4,04	4,30	4,56	4,81	5,06	5,30	5,54	5,78	6,01
5	1,17	1,35	1,55	1,74	1,95	2,15	2,35	2,55	2,75	2,94	3,13	3,31	3,48	3,65	3,81	3,96	4,10	4,26	4,39	4,52
10	1,13	1,26	1,40	1,53	1,66	1,78	1,90	2,01	2,12	2,22	2,31	2,39	2,46	2,53	2,59	2,64	2,69	2,73	2,76	2,79
20	1,08	1,16	1,23	1,30	1,36	1,41	1,45	1,49	1,52	1,54	1,55	1,56	1,56	1,55	1,54	1,52	1,50	1,47	1,44	1,41
25	1,07	1,12	1,18	1,22	1,26	1,28	1,31	1,32	1,33	1,33	1,32	1,31	1,29	1,27	1,24	1,21	1,17	1,14	1,10	1,05
30	1,05	1,09	1,13	1,15	1,17	1,18	1,18	1,18	1,17	1,16	1,14	1,11	1,08	1,05	1,01	0,972	0,931	0,888	0,843	0,797
40	1,02	1,04	1,04	1,04	1,03	1,01	0,989	0,962	0,930	0,895	0,857	0,816	0,773	0,729	0,684	0,638	0,592	0,545	0,497	0,447
50	0,997	0,984	0,964	0,938	0,906	0,870	0,830	0,787	0,742	0,695	0,648	0,600	0,552	0,505	0,459	0,415	0,373	0,332	0,295	0,259
60	0,972	0,935	0,893	0,847	0,797	0,745	0,692	0,639	0,586	0,533	0,482	0,432	0,385	0,340	0,298	0,259	0,224	0,191	0,162	0,136
70	0,945	0,885	0,822	0,758	0,693	0,629	0,567	0,506	0,449	0,395	0,344	0,297	0,254	0,215	0,180	0,149	0,122	0,099	0,079	0,062
75	0,931	0,858	0,785	0,712	0,640	0,571	0,505	0,443	0,385	0,332	0,283	0,238	0,199	0,164	0,133	0,107	0,085	0,066	0,051	0,039
80	0,915	0,830	0,745	0,663	0,585	0,512	0,444	0,381	0,324	0,272	0,226	0,185	0,149	0,119	0,094	0,072	0,055	0,041	0,030	0,022
90	0,875	0,757	0,648	0,549	0,459	0,381	0,310	0,250	0,198	0,155	0,118	0,089	0,066	0,047	0,033	0,023	0,015	0,010	0,006	0,004
95	0,843	0,702	0,576	0,467	0,373	0,293	0,227	0,172	0,128	0,093	0,066	0,046	0,030	0,020	0,012	0,008	0,004	0,002	0,001	0,001
97	0,823	0,667	0,533	0,420	0,325	0,247	0,184	0,134	0,095	0,065	0,044	0,028	0,018	0,011	0,006	0,003	0,002	0,001	0	0
99	0,784	0,606	0,459	0,341	0,248	0,175	0,120	0,080	0,052	0,032	0,019	0,011	0,006	0,003	0,001	0,001	0	0	0	0
99,5	0,765	0,574	0,422	0,303	0,212	0,143	0,094	0,059	0,036	0,020	0,011	0,006	0,003	0,001	0,001	0	0	0	0	0
99,7	0,752	0,558	0,398	0,278	0,189	0,123	0,078	0,047	0,028	0,015	0,008	0,004	0,002	0,0007	0	0	0	0	0	0
99,9	0,727	0,513	0,353	0,235	0,151	0,093	0,055	0,030	0,016	0,008	0,004	0,001	0,001	0	0	0	0	0	0	0

Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах, $k = f(C_v, P)$

C_s/C_v = 3,0

P %	Коэффициент вариации, C_v																			
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**2,0**
0,01	1,46	2,05	2,83	3,80	4,94	6,26	7,70	9,30	11,0	12,8	14,8	16,8	19,0	21,2	23,5	25,9	28,4	31,0	33,7	36,5
0,1	1,36	1,81	2,35	3,01	3,74	4,56	5,44	6,38	7,37	8,41	9,49	10,6	11,8	13,0	14,2	15,4	16,7	18,0	19,4	20,8
0,3	1,31	1,69	2,12	2,65	3,21	3,82	4,48	5,17	5,88	6,61	7,37	8,15	8,94	9,75	10,6	11,4	12,3	13,1	14,0	14,8
0,5	1,28	1,63	2,03	2,48	2,97	3,50	4,06	4,64	5,24	5,84	6,47	7,1	7,75	8,41	9,07	9,74	10,4	11,1	11,8	12,4
1	1,25	1,55	1,90	2,26	2,66	3,07	3,50	3,96	4,41	4,87	5,33	5,79	6,26	6,74	7,21	7,68	8,14	8,61	9,07	9,53
3	1,20	1,42	1,66	1,91	2,17	2,43	2,69	2,95	3,21	3,47	3,73	3,98	4,20	4,44	4,67	4,89	5,10	5,31	5,51	5,70
5	1,17	1,36	1,55	1,75	1,95	2,14	2,34	2,52	2,70	2,88	3,05	3,22	3,37	3,52	3,66	3,80	3,92	4,04	4,15	4,26
10	1,13	1,26	1,40	1,52	1,65	1,76	1,87	1,97	2,06	2,15	2,23	2,30	2,36	2,42	2,47	2,51	2,55	2,58	2,60	2,62
20	1,08	1,16	1,23	1,29	1,34	1,38	1,42	1,45	1,47	1,49	1,50	1,50	1,50	1,49	1,48	1,46	1,45	1,42	1,40	1,37
25	1,07	1,12	1,17	1,21	1,24	1,26	1,28	1,28	1,29	1,29	1,28	1,27	1,25	1,23	1,20	1,18	1,15	1,12	1,08	1,05
30	1,05	1,09	1,12	1,14	1,15	1,16	1,16	1,15	1,14	1,13	1,11	1,08	1,06	1,03	0,997	0,964	0,929	0,892	0,855	0,818
40	1,02	1,03	1,03	1,03	1,01	0,995	0,972	0,946	0,915	0,883	0,848	0,812	0,775	0,736	0,697	0,659	0,620	0,581	0,544	0,507
50	0,997	0,981	0,959	0,930	0,898	0,862	0,823	0,783	0,741	0,699	0,656	0,614	0,572	0,531	0,491	0,452	0,415	0,379	0,345	0,313
60	0,972	0,933	0,890	0,843	0,794	0,745	0,695	0,646	0,597	0,549	0,503	0,459	0,417	0,377	0,339	0,304	0,271	0,240	0,212	0,186
70	0,945	0,884	0,822	0,758	0,696	0,636	0,578	0,523	0,471	0,422	0,375	0,333	0,293	0,257	0,224	0,194	0,166	0,142	0,121	0,102
75	0,931	0,858	0,786	0,715	0,647	0,583	0,522	0,465	0,412	0,363	0,318	0,277	0,239	0,206	0,176	0,149	0,125	0,105	0,087	0,071
80	0,915	0,830	0,748	0,669	0,596	0,528	0,465	0,407	0,354	0,306	0,263	0,224	0,190	0,160	0,133	0,110	0,090	0,073	0,059	0,047
90	0,876	0,761	0,656	0,563	0,479	0,406	0,341	0,284	0,235	0,193	0,156	0,126	0,100	0,078	0,061	0,047	0,035	0,026	0,019	0,014
95	0,844	0,708	0,588	0,487	0,400	0,326	0,263	0,210	0,166	0,129	0,100	0,076	0,057	0,042	0,030	0,022	0,015	0,010	0,007	0,004
97	0,825	0,675	0,548	0,443	0,355	0,282	0,221	0,171	0,131	0,099	0,073	0,054	0,038	0,027	0,018	0,012	0,008	0,005	0,003	0,002
99	0,786	0,618	0,484	0,369	0,283	0,213	0,158	0,116	0,083	0,058	0,040	0,027	0,017	0,011	0,007	0,004	0,002	0,001	0,001	0
99,5	0,769	0,588	0,446	0,334	0,249	0,182	0,131	0,092	0,064	0,043	0,028	0,018	0,011	0,006	0,004	0,002	0,001	0	0	0
99,7	0,756	0,568	0,422	0,312	0,228	0,163	0,114	0,079	0,053	0,034	0,022	0,014	0,008	0,004	0,002	0,001	0	0	0	0
99,9	0,732	0,531	0,381	0,273	0,192	0,131	0,088	0,057	0,036	0,022	0,013	0,007	0,004	0,002	0,001	0	0	0	0	0

Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах, $k = f(C_v, P)$

C_s/C_v = 3,5

P %	Коэффициент вариации, C_v																			
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**2,0**
0,01	1,48	2,12	2,99	4,12	5,46	6,94	8,60	10,4	12,3	14,4	16,5	18,8	21,1	23,5	26,0	28,6	31,3	34,0	36,8	39,9
0,1	1,37	1,84	2,43	3,14	3,93	4,79	5,75	6,77	7,82	8,90	10,0	11,2	12,4	13,6	14,9	16,1	17,4	18,8	20,1	21,4
0,3	1,31	1,71	2,16	2,75	3,36	4,00	4,67	5,36	6,08	6,83	7,59	8,37	9,17	9,97	10,8	11,6	12,4	13,3	14,1	15,0
0,5	1,29	1,65	2,07	2,55	3,06	3,62	4,18	4,76	5,35	5,97	6,59	7,22	7,86	8,50	9,14	9,79	10,4	11,1	11,8	12,4
1	1,25	1,57	1,93	2,31	2,71	3,13	3,56	4,00	4,45	4,90	5,36	5,80	6,26	6,71	7,16	7,61	8,05	8,49	8,92	9,36
3	1,20	1,43	1,68	1,93	2,18	2,43	2,68	2,94	3,19	3,43	3,67	3,90	4,12	4,34	4,55	4,75	4,95	5,14	5,32	5,50
5	1,17	1,36	1,56	1,75	1,94	2,13	2,31	2,49	2,66	2,83	2,98	3,14	3,28	3,42	3,55	3,67	3,78	3,89	3,99	4,08
10	1,13	1,26	1,39	1,52	1,63	1,74	1,84	1,93	2,02	2,10	2,17	2,23	2,29	2,34	2,38	2,42	2,46	2,48	2,51	2,52
20	1,08	1,16	1,22	1,28	1,32	1,36	1,39	1,42	1,44	1,45	1,46	1,46	1,46	1,45	1,44	1,43	1,41	1,39	1,37	1,35
25	1,065	1,12	1,16	1,20	1,22	1,24	1,25	1,26	1,26	1,26	1,25	1,24	1,22	1,21	1,18	1,16	1,14	1,11	1,08	1,05
30	1,05	1,08	1,11	1,13	1,14	1,14	1,14	1,13	1,12	1,11	1,09	1,07	1,04	1,02	0,989	0,960	0,929	0,897	0,864	0,831
40	1,02	1,03	1,03	1,02	1,00	0,984	0,960	0,935	0,907	0,877	0,845	0,812	0,777	0,743	0,708	0,673	0,638	0,604	0,570	0,537
50	0,997	0,978	0,954	0,925	0,892	0,856	0,819	0,781	0,742	0,703	0,664	0,625	0,587	0,549	0,513	0,477	0,443	0,410	0,379	0,350
60	0,972	0,931	0,887	0,841	0,793	0,745	0,698	0,652	0,606	0,562	0,520	0,479	0,440	0,403	0,368	0,335	0,303	0,274	0,247	0,222
70	0,945	0,883	0,821	0,760	0,700	0,643	0,588	0,537	0,488	0,442	0,398	0,358	0,321	0,286	0,254	0,225	0,199	0,175	0,153	0,134
75	0,931	0,858	0,787	0,719	0,654	0,593	0,536	0,482	0,432	0,386	0,343	0,304	0,268	0,236	0,206	0,180	0,156	0,135	0,116	0,099
80	0,915	0,831	0,751	0,676	0,606	0,541	0,482	0,427	0,377	0,332	0,290	0,253	0,219	0,189	0,163	0,139	0,118	0,100	0,084	0,070
90	0,877	0,764	0,664	0,576	0,496	0,427	0,366	0,311	0,263	0,221	0,185	0,154	0,127	0,104	0,085	0,069	0,055	0,044	0,035	0,027
95	0,840	0,713	0,600	0,504	0,422	0,351	0,290	0,239	0,195	0,158	0,127	0,101	0,080	0,062	0,048	0,037	0,028	0,021	0,016	0,011
97	0,827	0,683	0,563	0,463	0,380	0,309	0,249	0,201	0,160	0,126	0,098	0,076	0,058	0,044	0,033	0,024	0,018	0,013	0,009	0,006
99	0,788	0,629	0,499	0,396	0,312	0,244	0,186	0,145	0,110	0,082	0,061	0,044	0,032	0,022	0,016	0,011	0,007	0,005	0,003	0,002
99,5	0,773	0,601	0,467	0,362	0,280	0,214	0,160	0,121	0,089	0,064	0,046	0,032	0,022	0,015	0,010	0,006	0,004	0,003	0,002	0,001
99,7	0,759	0,582	0,446	0,341	0,260	0,196	0,146	0,106	0,077	0,054	0,038	0,026	0,017	0,011	0,007	0,004	0,003	0,002	0,001	0
99,9	0,737	0,548	0,408	0,303	0,224	0,165	0,118	0,083	0,057	0,039	0,026	0,016	0,010	0,006	0,004	0,002	0,001	0,001	0	0

Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах, $k = f(C_v, P)$

C_s/C_v = 4,0

P %	Коэффициент вариации, C_v																			
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**2,0**
0,01	1,50	2,18	3,17	4,43	5,91	7,58	9,41	11,4	13,4	15,5	17,9	20,3	22,8	25,4	28,0	30,8	33,6	36,5	39,4	42,4
0,1	1,38	1,88	2,53	3,29	4,15	5,07	6,05	7,08	8,15	9,26	10,4	11,6	12,8	14	15,3	16,6	17,9	19,2	20,6	21,9
0,3	1,32	1,74	2,24	2,82	3,44	4,09	4,79	5,50	6,22	6,96	7,73	8,53	9,31	10,1	10,9	11,7	12,5	13,3	14,2	15,0
0,5	1,29	1,67	2,12	2,61	3,13	3,68	4,26	4,85	5,43	6,03	6,65	7,29	7,91	8,53	9,16	9,79	10,4	11,0	11,7	12,3
1	1,25	1,58	1,94	2,31	2,75	3,17	3,59	4,03	4,47	4,91	5,34	5,79	6,22	6,66	7,09	7,52	7,95	8,37	8,78	9,19
3	1,20	1,44	1,68	1,93	2,18	2,43	2,68	2,92	3,16	3,39	3,62	3,83	4,04	4,25	4,45	4,64	4,83	5,01	5,18	5,34
5	1,17	1,36	1,56	1,75	1,94	2,12	2,29	2,46	2,62	2,78	2,93	3,07	3,21	3,34	3,46	3,57	3,68	3,78	3,87	3,96
10	1,13	1,26	1,39	1,51	1,62	1,72	1,81	1,90	1,98	2,05	2,12	2,18	2,24	2,28	2,32	2,36	2,39	2,42	2,44	2,45
20	1,08	1,15	1,22	1,27	1,31	1,34	1,37	1,40	1,41	1,42	1,43	1,44	1,43	1,43	1,42	1,41	1,39	1,38	1,36	1,33
25	1,07	1,12	1,16	1,19	1,21	1,23	1,24	1,24	1,24	1,24	1,23	1,22	1,21	1,19	1,17	1,15	1,13	1,10	1,08	1,05
30	1,05	1,08	1,11	1,12	1,13	1,13	1,13	1,12	1,11	1,10	1,08	1,06	1,04	1,01	0,985	0,958	0,929	0,900	0,871	0,841
40	1,02	1,02	1,02	1,01	0,996	0,976	0,954	0,929	0,902	0,873	0,843	0,812	0,781	0,748	0,716	0,684	0,652	0,620	0,588	0,558
50	0,997	0,976	0,950	0,920	0,888	0,853	0,818	0,781	0,744	0,707	0,670	0,634	0,598	0,562	0,529	0,495	0,464	0,433	0,403	0,375
60	0,972	0,929	0,885	0,839	0,793	0,747	0,702	0,658	0,614	0,572	0,532	0,494	0,457	0,421	0,388	0,356	0,327	0,299	0,273	0,249
70	0,945	0,883	0,821	0,761	0,704	0,649	0,597	0,548	0,501	0,457	0,416	0,377	0,341	0,308	0,277	0,248	0,223	0,199	0,177	0,157
75	0,931	0,858	0,788	0,722	0,660	0,601	0,546	0,495	0,448	0,403	0,362	0,325	0,290	0,258	0,230	0,203	0,179	0,158	0,139	0,121
80	0,915	0,832	0,754	0,681	0,614	0,553	0,496	0,443	0,395	0,351	0,311	0,274	0,242	0,212	0,185	0,162	0,140	0,122	0,105	0,090
90	0,877	0,767	0,671	0,586	0,511	0,444	0,384	0,331	0,284	0,243	0,207	0,176	0,148	0,125	0,104	0,087	0,072	0,060	0,049	0,040
95	0,846	0,719	0,611	0,519	0,440	0,372	0,312	0,261	0,217	0,180	0,148	0,121	0,098	0,080	0,064	0,051	0,041	0,032	0,025	0,019
97	0,829	0,690	0,576	0,481	0,400	0,332	0,274	0,224	0,182	0,147	0,119	0,095	0,075	0,059	0,046	0,036	0,028	0,021	0,016	0,012
99	0,790	0,638	0,516	0,417	0,336	0,269	0,214	0,168	0,132	0,102	0,078	0,060	0,045	0,034	0,025	0,018	0,013	0,009	0,006	0,004
99,5	0,776	0,612	0,485	0,386	0,035	0,239	0,186	0,144	0,110	0,083	0,062	0,046	0,034	0,024	0,017	0,012	0,008	0,006	0,004	0,003
99,7	0,762	0,594	0,466	0,366	0,286	0,221	0,170	0,129	0,097	0,072	0,053	0,038	0,027	0,019	0,013	0,009	0,006	0,004	0,003	0,002
99,9	0,742	0,561	0,430	0,331	0,252	0,189	0,141	0,104	0,075	0,054	0,038	0,026	0,018	0,012	0,008	0,005	0,003	0,002	0,001	0,001

Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах, $k = f(C_v, P)$

C_s/C_v = 4,5

P %	Коэффициент вариации, C_v																			
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**2,0**
0,01	1,48	2,26	3,53	4,74	6,36	8,15	10,1	12,2	14,4	16,7	19,1	21,8	24,3	26,9	29,6	32,5	35,4	38,4	41,4	44,5
0,1	1,38	1,92	2,61	3,41	4,30	5,25	6,26	7,31	8,40	9,53	10,7	11,9	13,1	14,3	15,6	16,9	18,2	19,5	20,8	22,2
0,3	1,33	1,76	2,29	2,88	3,52	4,18	4,87	5,58	6,31	7,06	7,82	8,60	9,31	10,2	10,9	11,7	12,5	13,3	14,1	14,9
0,5	1,30	1,69	2,15	2,66	3,19	3,74	4,31	4,89	5,48	6,08	6,68	7,30	7,88	8,53	9,14	9,76	10,4	11,0	11,6	12,2
1	1,27	1,59	1,97	2,36	2,77	3,19	3,61	4,04	4,47	4,90	5,33	5,75	6,17	6,61	7,03	7,44	7,85	8,26	8,66	9,05
3	1,21	1,44	1,69	1,93	2,18	2,42	2,66	2,90	3,12	3,35	3,57	3,77	3,98	4,18	4,37	4,55	4,73	4,90	5,06	5,22
5	1,18	1,37	1,56	1,75	1,93	2,10	2,27	2,44	2,59	2,74	2,89	3,01	3,15	3,27	3,39	3,50	3,60	3,69	3,78	3,86
10	1,13	1,26	1,39	1,50	1,60	1,70	1,79	1,88	1,95	2,02	2,09	2,14	2,19	2,24	2,28	2,31	2,34	2,37	2,39	2,40
20	1,08	1,15	1,21	1,26	1,30	1,33	1,36	1,38	1,40	1,41	1,41	1,41	1,41	1,41	1,40	1,39	1,38	1,36	1,34	1,32
25	1,06	1,11	1,15	1,18	1,20	1,21	1,22	1,23	1,23	1,23	1,22	1,21	1,20	1,18	1,16	1,14	1,12	1,10	1,07	1,05
30	1,05	1,08	1,10	1,11	1,12	1,12	1,12	1,11	1,10	1,09	1,07	1,05	1,03	1,01	0,982	0,957	0,930	0,903	0,876	0,848
40	1,02	1,02	1,02	1,01	0,989	0,97	0,949	0,925	0,899	0,871	0,843	0,814	0,783	0,753	0,722	0,692	0,662	0,632	0,602	0,573
50	0,993	0,974	0,947	0,917	0,885	0,851	0,817	0,782	0,746	0,711	0,676	0,642	0,607	0,573	0,541	0,509	0,479	0,449	0,421	0,394
60	0,968	0,928	0,883	0,838	0,793	0,749	0,705	0,663	0,621	0,581	0,542	0,507	0,470	0,436	0,404	0,373	0,345	0,318	0,292	0,269
70	0,943	0,882	0,822	0,763	0,708	0,655	0,605	0,557	0,512	0,469	0,429	0,394	0,357	0,324	0,294	0,267	0,241	0,218	0,196	0,176
75	0,930	0,858	0,790	0,726	0,666	0,609	0,556	0,506	0,460	0,417	0,377	0,343	0,306	0,275	0,247	0,221	0,197	0,176	0,156	0,139
80	0,915	0,833	0,757	0,687	0,622	0,562	0,507	0,456	0,409	0,366	0,327	0,294	0,258	0,229	0,203	0,179	0,158	0,138	0,121	0,106
90	0,878	0,771	0,677	0,596	0,523	0,458	0,399	0,347	0,301	0,260	0,224	0,195	0,165	0,141	0,120	0,102	0,086	0,073	0,061	0,051
95	0,848	0,724	0,620	0,532	0,455	0,388	0,330	0,279	0,235	0,197	0,165	0,140	0,114	0,094	0,077	0,063	0,052	0,042	0,034	0,027
97	0,831	0,696	0,587	0,495	0,417	0,350	0,292	0,242	0,200	0,165	0,135	0,113	0,089	0,072	0,058	0,046	0,037	0,029	0,023	0,018
99	0,798	0,648	0,530	0,435	0,355	0,289	0,233	0,187	0,149	0,118	0,093	0,075	0,056	0,043	0,033	0,025	0,019	0,014	0,011	0,008
99,5	0,781	0,622	0,502	0,405	0,326	0,260	0,206	0,162	0,127	0,098	0,075	0,060	0,044	0,033	0,024	0,018	0,013	0,010	0,007	0,005
99,7	0,769	0,606	0,483	0,386	0,307	0,242	0,190	0,147	0,113	0,086	0,065	0,051	0,036	0,027	0,020	0,014	0,010	0,007	0,005	0,003
99,9	0,746	0,575	0,449	0,352	0,274	0,211	0,161	0,122	0,091	0,067	0,049	0,038	0,025	0,018	0,013	0,009	0,006	0,004	0,003	0,002

Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах, $k = f(C_v, P)$

$C_s/C_v = 5,0$

P %	Коэффициент вариации, C_v																			
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**2,0**
0,01	1,54	2,34	3,43	4,91	6,65	8,70	10,70	12,71	15,05	17,5	20,0	22,6	25,4	28,3	31,2	34,1	37,1	40,1	43,2	46,3
0,1	1,40	1,95	2,66	3,51	4,44	5,40	6,43	7,54	8,64	9,73	10,9	12,1	13,3	14,6	15,8	17,1	18,4	19,7	21,0	22,4
0,3	1,34	1,78	2,31	2,92	3,52	4,22	4,91	5,69	6,41	7,12	7,87	8,63	9,40	10,2	11,0	11,7	12,5	13,3	14,1	14,9
0,5	1,31	1,70	2,16	2,69	3,21	3,77	4,34	4,93	5,52	6,10	6,70	7,30	7,90	8,50	9,12	9,71	10,3	10,9	11,6	12,1
1	1,27	1,61	1,98	2,38	2,79	3,21	3,65	4,06	4,50	4,89	5,31	5,73	6,14	6,54	6,97	7,37	7,77	8,16	8,54	8,92
3	1,20	1,44	1,67	1,93	2,17	2,42	2,62	2,88	3,10	3,32	3,53	3,73	3,93	4,10	4,30	4,48	4,65	4,61	4,97	5,12
5	1,17	1,36	1,55	1,74	1,90	2,08	2,22	2,41	2,54	2,71	2,85	2,98	3,10	3,21	3,33	3,44	3,53	3,62	3,71	3,79
10	1,13	1,26	1,37	1,49	1,60	1,70	1,79	1,86	1,94	2,00	2,06	2,11	2,16	2,20	2,24	2,28	2,31	2,33	2,35	2,36
20	1,08	1,15	1,21	1,25	1,30	1,32	1,34	1,36	1,36	1,39	1,40	1,40	1,40	1,39	1,39	1,38	1,37	1,35	1,33	1,32
25	1,06	1,11	1,15	1,17	1,20	1,20	1,20	1,22	1,22	1,12	1,21	1,20	1,19	1,17	1,16	1,14	1,12	1,10	1,07	1,05
30	1,05	1,08	1,09	1,10	1,10	1,11	1,10	1,10	1,09	1,08	1,06	1,04	1,03	1,00	0,981	0,957	0,932	0,906	0,88	0,854
40	1,02	1,02	1,01	1,00	0,98	0,97	0,94	0,92	0,90	0,87	0,843	0,815	0,786	0,758	0,728	0,699	0,670	0,641	0,613	0,586
50	0,99	0,97	0,94	0,92	0,88	0,85	0,82	0,78	0,75	0,714	0,680	0,647	0,614	0,584	0,551	0,520	0,491	0,463	0,435	0,409
60	0,97	0,93	0,88	0,84	0,79	0,75	0,71	0,67	0,63	0,588	0,550	0,514	0,480	0,450	0,416	0,387	0,359	0,323	0,308	0,284
70	0,94	0,88	0,82	0,77	0,71	0,66	0,61	0,56	0,52	0,479	0,440	0,403	0,369	0,341	0,303	0,281	0,256	0,232	0,211	0,191
75	0,93	0,86	0,79	0,73	0,67	0,62	0,56	0,51	0,47	0,428	0,389	0,353	0,319	0,292	0,261	0,235	0,212	0,190	0,171	0,153
80	0,91	0,83	0,75	0,69	0,63	0,57	0,52	0,47	0,42	0,378	0,339	0,304	0,272	0,246	0,217	0,193	0,171	0,152	0,135	0,119
90	0,88	0,77	0,68	0,61	0,53	0,47	0,41	0,36	0,32	0,274	0,238	0,206	0,178	0,157	0,133	0,114	0,098	0,084	0,071	0,061
95	0,84	0,73	0,63	0,55	0,47	0,40	0,34	0,29	0,25	0,211	0,178	0,150	0,126	0,109	0,088	0,073	0,061	0,050	0,042	0,034
97	0,82	0,70	0,60	0,51	0,43	0,36	0,31	0,26	0,22	0,178	0,148	0,122	0,101	0,085	0,068	0,055	0,045	0,036	0,029	0,023
99	0,78	0,66	0,55	0,45	0,37	0,31	0,25	0,20	0,16	0,131	0,105	0,083	0,066	0,054	0,041	0,032	0,025	0,019	0,015	0,011
99,5	0,76	0,635	0,525	0,42	0,34	0,28	0,23	0,18	0,14	0,110	0,087	0,067	0,052	0,042	0,031	0,023	0,018	0,013	0,010	0,007
99,7	0,75	0,62	0,51	0,405	0,32	0,26	0,21	0,16	0,125	0,098	0,076	0,058	0,044	0,035	0,025	0,019	0,014	0,010	0,008	0,005
99,9	0,73	0,59	0,47	0,37	0,29	0,23	0,18	0,14	0,10	0,078	0,059	0,044	0,032	0,025	0,017	0,012	0,009	0,006	0,004	0,003

Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах, $k = f(C_v, P)$

$C_s/C_v = 5{,}5$

P %	Коэффициент вариации, C_v																			
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**2,0**
0,01	1,52	2,41	3,70	5,30	7,12	9,10	11,2	13,4	15,8	18,2	20,8	23,4	26,1	29	31,9	34,9	38	41,2	44,4	47,6
0,1	1,40	1,99	2,75	3,62	4,55	5,54	6,56	7,63	8,73	9,87	11,0	12,2	13,4	14,7	16,0	17,3	18,6	19,9	21,2	22,5
0,3	1,34	1,81	2,37	2,99	3,64	4,31	4,99	5,70	6,42	7,15	7,90	8,66	9,42	10,2	11,0	11,7	12,5	13,3	14,0	14,8
0,5	1,31	1,73	2,21	2,73	3,26	3,81	4,37	4,94	5,52	6,11	6,70	7,29	7,89	8,48	9,07	9,65	10,2	10,8	11,4	12,0
1	1,27	1,62	2,00	2,40	2,81	3,21	3,63	4,04	4,46	4,87	5,28	5,70	6,10	6,51	6,91	7,81	7,68	8,07	8,44	8,81
3	1,21	1,45	1,69	1,93	2,17	2,40	2,63	2,86	3,08	3,29	3,49	3,69	3,88	4,07	4,25	4,44	4,58	4,74	4,89	5,04
5	1,18	1,37	1,56	1,74	1,91	2,08	2,24	2,39	2,54	2,68	2,82	2,95	3,07	3,18	3,29	3,40	3,48	3,57	3,65	3,73
10	1,13	1,26	1,38	1,48	1,58	1,68	1,76	1,84	1,91	1,98	2,04	2,09	2,14	2,18	2,22	2,26	2,28	2,30	2,32	2,33
20	1,08	1,15	1,20	1,24	1,28	1,31	1,33	1,36	1,37	1,38	1,39	1,39	1,39	1,39	1,38	1,37	1,36	1,34	1,33	1,31
25	1,06	1,11	1,14	1,16	1,18	1,20	1,21	1,21	1,21	1,21	1,20	1,19	1,18	1,17	1,15	1,13	1,11	1,09	1,07	1,05
30	1,04	1,07	1,09	1,10	1,10	1,11	1,10	1,10	1,09	1,07	1,06	1,04	1,02	1,00	0,98	0,96	0,933	0,909	0,884	0,859
40	1,015	1,02	1,01	0,997	0,981	0,963	0,942	0,920	0,896	0,870	0,844	0,816	0,789	0,761	0,732	0,703	0,677	0,649	0,622	0,596
50	0,991	0,970	0,942	0,912	0,881	0,850	0,817	0,784	0,751	0,717	0,684	0,652	0,620	0,589	0,558	0,526	0,501	0,473	0,447	0,422
60	0,967	0,925	0,882	0,838	0,795	0,753	0,711	0,671	0,632	0,594	0,557	0,522	0,488	0,456	0,426	0,394	0,370	0,344	0,320	0,297
70	0,943	0,882	0,823	0,768	0,715	0,664	0,616	0,570	0,527	0,486	0,448	0,412	0,379	0,348	0,319	0,289	0,267	0,244	0,223	0,204
75	0,929	0,859	0,794	0,732	0,675	0,621	0,570	0,522	0,478	0,436	0,398	0,362	0,330	0,300	0,272	0,243	0,223	0,202	0,183	0,165
80	0,915	0,835	0,762	0,696	0,634	0,577	0,523	0,474	0,429	0,387	0,349	0,314	0,283	0,254	0,228	0,200	0,183	0,163	0,146	0,130
90	0,880	0,777	0,689	0,612	0,542	0,479	0,422	0,370	0,325	0,284	0,249	0,217	0,189	0,164	0,143	0,121	0,107	0,093	0,080	0,069
95	0,852	0,734	0,637	0,553	0,479	0,413	0,355	0,304	0,260	0,222	0,189	0,161	0,136	0,115	0,097	0,079	0,069	0,058	0,049	0,041
97	0,835	0,708	0,606	0,520	0,444	0,377	0,319	0,269	0,226	0,190	0,159	0,132	0,110	0,092	0,076	0,060	0,052	0,043	0,035	0,029
99	0,804	0,664	0,555	0,464	0,386	0,319	0,262	0,214	0,175	0,142	0,115	0,092	0,074	0,060	0,047	0,036	0,030	0,024	0,019	0,015
99,5	0,788	0,641	0,529	0,437	0,358	0,291	0,236	0,189	0,152	0,121	0,096	0,076	0,060	0,047	0,036	0,027	0,022	0,017	0,013	0,010
99,7	0,777	0,626	0,513	0,419	0,340	0,274	0,219	0,174	0,138	0,108	0,085	0,066	0,051	0,040	0,030	0,022	0,018	0,014	0,010	0,008
99,9	0,757	0,599	0,482	0,388	0,309	0,244	0,191	0,148	0,114	0,088	0,067	0,051	0,038	0,029	0,021	0,015	0,012	0,009	0,006	0,004

Ординаты кривой обеспеченностей Крицкого-Менкеля в модульных коэффициентах, $k = f(C_v, P)$

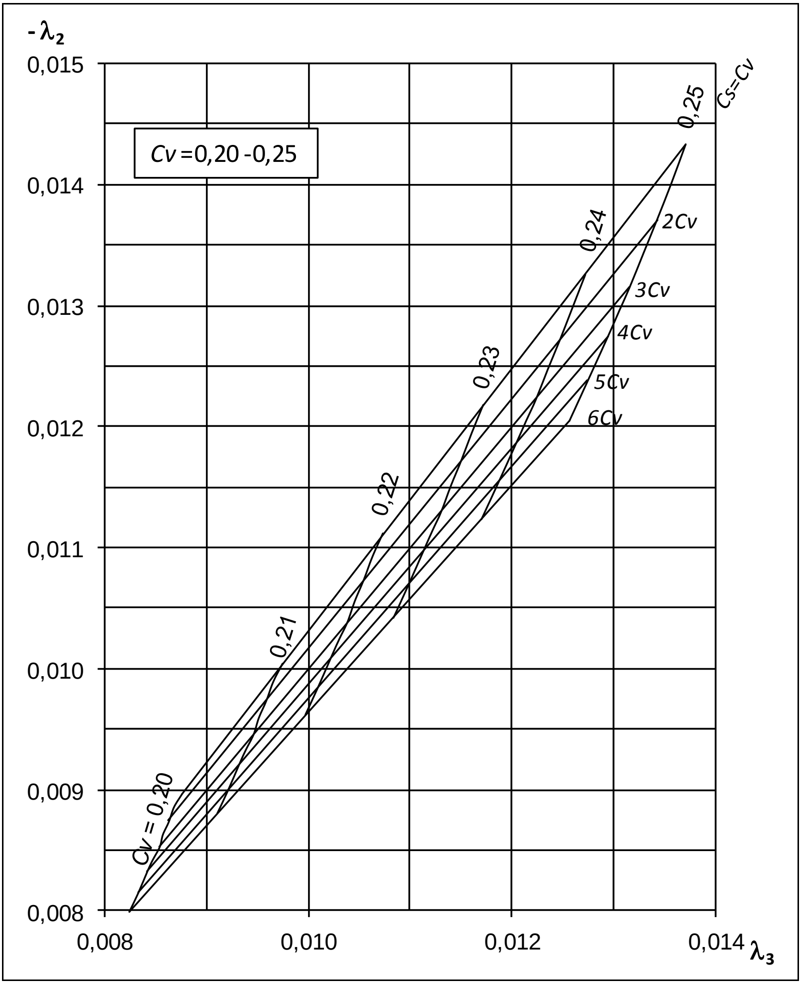
$C_s/C_v = 6{,}0$

P %	Коэффициент вариации, C_v																			
	0,1	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	**1,1**	**1,2**	**1,3**	**1,4**	**1,5**	**1,6**	**1,7**	**1,8**	**1,9**	**2,0**
0,01	1,6	2,48	3,75	5,48	7,30	9,39	11,50	13,80	16,40	18,8	21,4	24,0	26,8	29,6	32,6	35,7	39,1	41,9	45,1	48,4
0,1	1,41	2,02	2,80	3,68	4,58	5,54	6,57	7,63	8,79	9,97	11,1	12,3	13,6	14,8	16,0	17,3	18,6	19,9	21,2	22,5
0,3	1,35	1,83	2,38	2,98	3,64	4,31	5,00	5,66	6,38	7,18	7,92	8,67	9,42	10,2	10,9	11,7	12,5	13,0	14,0	14,7
0,5	1,32	1,74	2,22	2,73	3,26	3,82	4,38	4,93	5,51	6,11	6,69	7,28	7,86	8,45	9,04	9,61	10,2	10,7	11,3	11,9
1	1,29	1,63	2,01	2,40	2,81	3,22	3,63	4,03	4,44	4,85	5,26	5,67	6,07	6,46	6,85	7,24	7,59	7,96	8,35	8,71
3	1,21	1,45	1,68	1,92	2,14	2,38	2,60	2,82	3,04	3,26	3,46	3,66	3,85	4,03	4,20	4,37	4,51	4,68	4,83	4,97
5	1,18	1,37	1,55	1,73	1,89	2,05	2,20	2,36	2,51	2,66	2,79	2,92	3,04	3,15	3,25	3,35	3,43	3,53	3,60	3,68
10	1,14	1,26	1,37	1,47	1,56	1,66	1,73	1,82	1,90	1,96	2,02	2,07	2,12	2,16	2,2	2,23	2,25	2,28	2,29	2,31
20	1,08	1,14	1,19	1,23	1,27	1,30	1,32	1,34	1,36	1,37	1,38	1,38	1,38	1,38	1,37	1,36	1,35	1,34	1,32	1,31
25	1,06	1,10	1,13	1,16	1,18	1,19	1,20	1,21	1,20	1,20	1,20	1,19	1,18	1,16	1,15	1,13	1,11	1,09	1,07	1,05
30	1,045	1,07	1,08	1,10	1,10	1,10	1,10	1,09	1,08	1,07	1,06	1,04	1,02	1,00	0,973	0,957	0,935	0,91	0,887	0,863
40	1,015	1,02	1,01	0,99	0,98	0,96	0,94	0,92	0,89	0,87	0,844	0,818	0,791	0,764	0,736	0,703	0,684	0,655	0,630	0,604
50	0,99	0,97	0,94	0,91	0,88	0,85	0,82	0,79	0,75	0,72	0,688	0,656	0,625	0,594	0,565	0,536	0,511	0,481	0,456	0,432
60	0,965	0,92	0,88	0,84	0,80	0,76	0,72	0,68	0,64	0,598	0,562	0,528	0,495	0,464	0,434	0,406	0,382	0,353	0,330	0,308
70	0,94	0,88	0,83	0,77	0,72	0,67	0,63	0,58	0,54	0,493	0,455	0,420	0,387	0,357	0,328	0,302	0,280	0,253	0,233	0,214
75	0,925	0,86	0,80	0,74	0,68	0,63	0,58	0,53	0,49	0,443	0,406	0,371	0,338	0,309	0,281	0,256	0,236	0,211	0,192	0,175
80	0,91	0,84	0,77	0,70	0,64	0,58	0,53	0,48	0,44	0,395	0,357	0,323	0,291	0,263	0,237	0,213	0,195	0,172	0,155	0,139
90	0,88	0,78	0,70	0,62	0,55	0,49	0,43	0,38	0,33	0,293	0,257	0,226	0,198	0,173	0,152	0,132	0,118	0,100	0,088	0,076
95	0,85	0,74	0,65	0,56	0,49	0,43	0,37	0,32	0,27	0,231	0,198	0,169	0,145	0,123	0,105	0,089	0,078	0,064	0,055	0,046
97	0,83	0,72	0,62	0,53	0,46	0,39	0,33	0,28	0,24	0,199	0,167	0,141	0,118	0,099	0,083	0,069	0,060	0,048	0,040	0,033
99	0,8	0,67	0,57	0,48	0,40	0,33	0,28	0,23	0,19	0,151	0,123	0,100	0,081	0,066	0,053	0,043	0,036	0,027	0,022	0,018
99,5	0,78	0,65	0,55	0,45	0,37	0,31	0,25	0,20	0,17	0,129	0,104	0,083	0,066	0,053	0,042	0,033	0,027	0,020	0,016	0,012
99,7	0,76	0,64	0,53	0,43	0,36	0,29	0,24	0,19	0,15	0,117	0,092	0,073	0,057	0,045	0,035	0,027	0,022	0,016	0,013	0,010
99,9	0,75	0,61	0,50	0,40	0,33	0,26	0,21	0,16	0,12	0,096	0,074	0,057	0,044	0,033	0,025	0,019	0,015	0,011	0,008	0,006

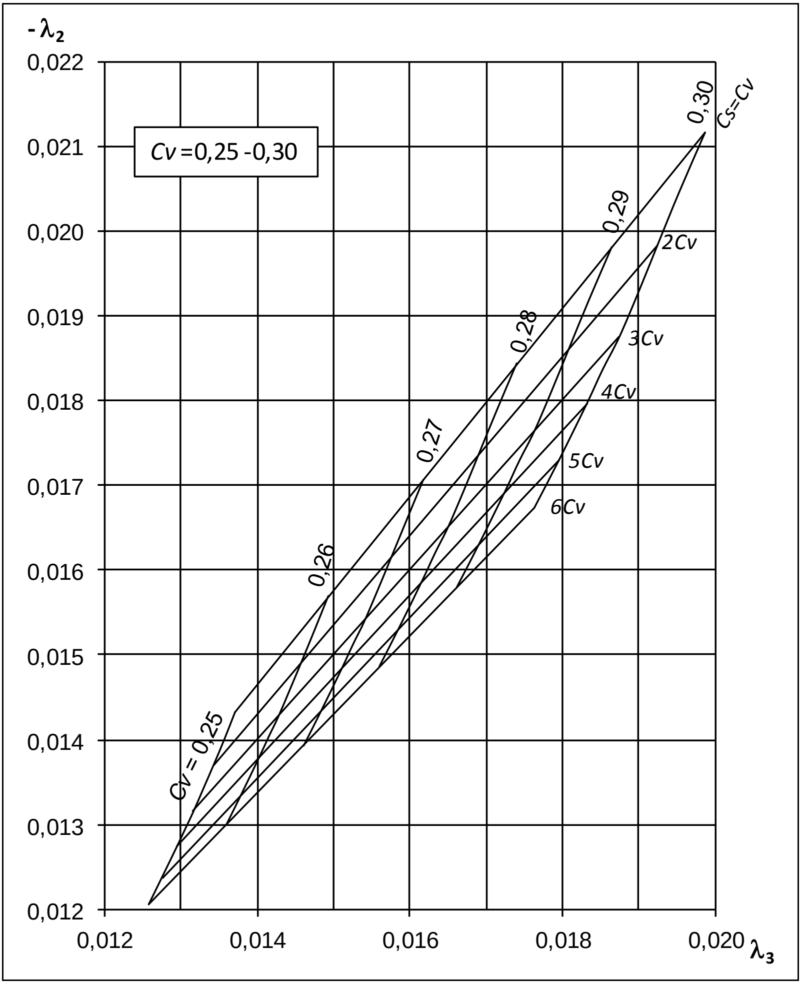
Приложение 3

НОМОГРАММЫ

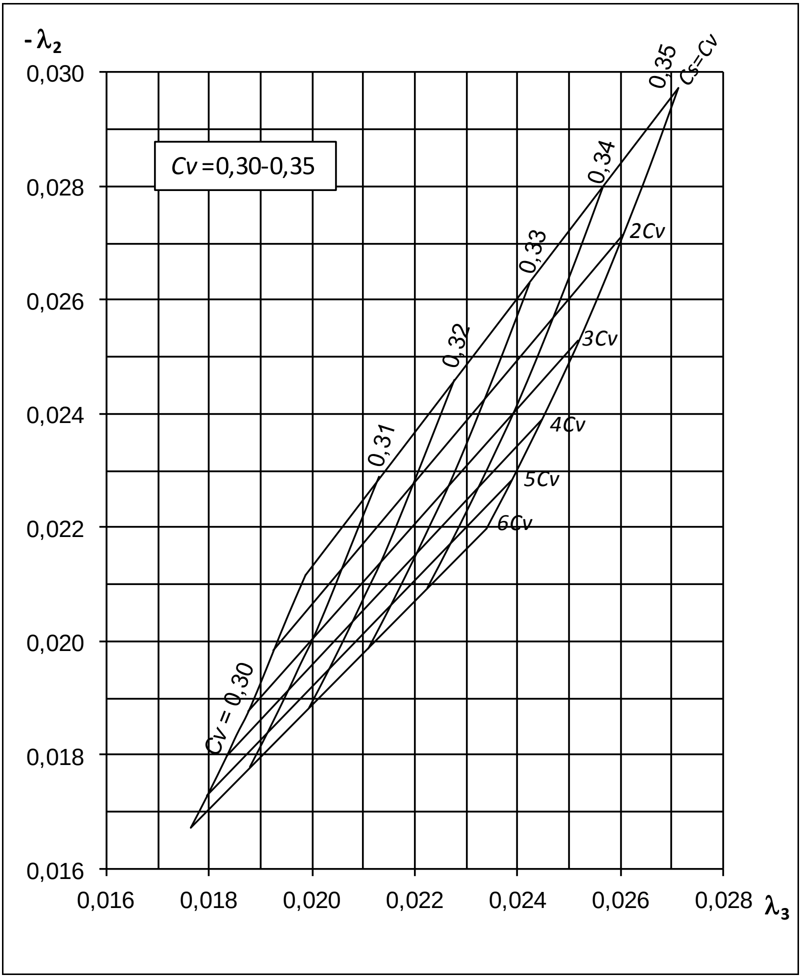
для определения параметров распределения Крицкого-Менкеля *Cv* и *Cs* методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от статистик λ2 и λ3



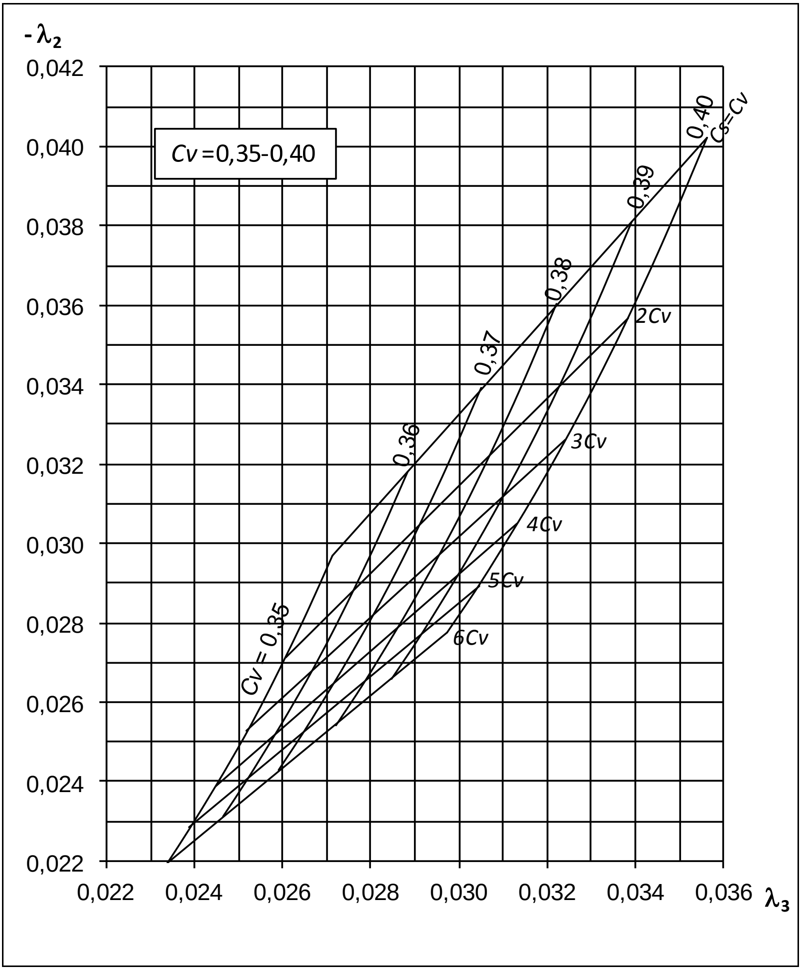
Номограмма для определения параметров распределения Крицкого-Менкеля *Cv* и *Cs* методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от статистик λ2 и λ3 при *Cv* = 0,25-0,30



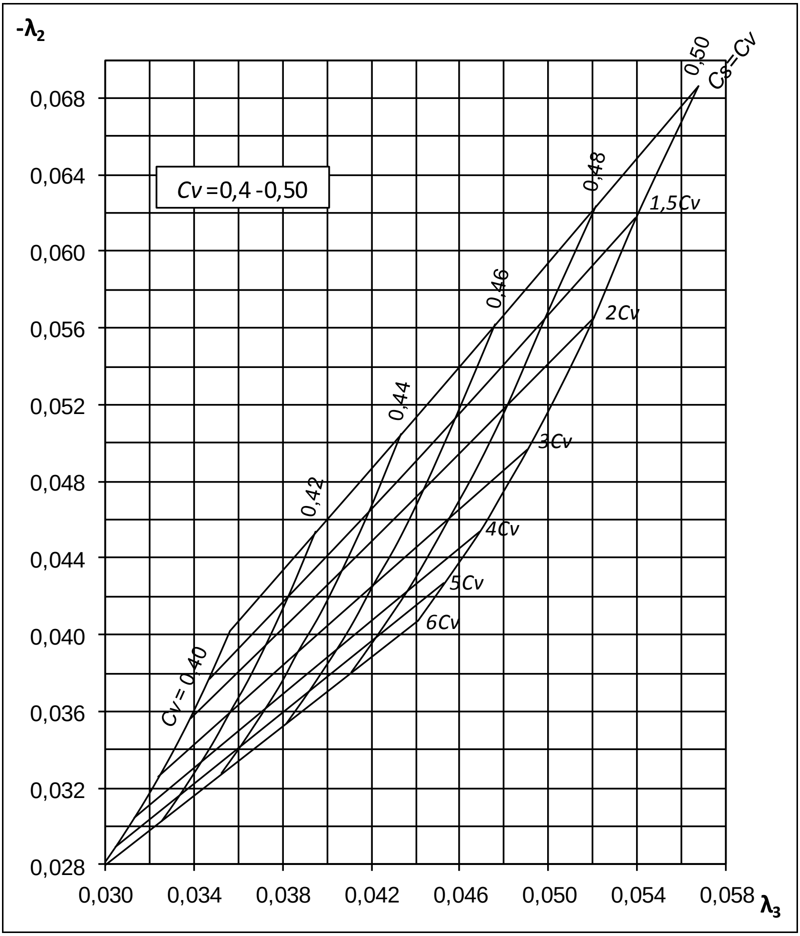
Номограмма для определения параметров распределения Крицкого-Менкеля *Cv* и *Cs* методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от статистик λ2 и λ3 при *Cv* = 0,30-0,35



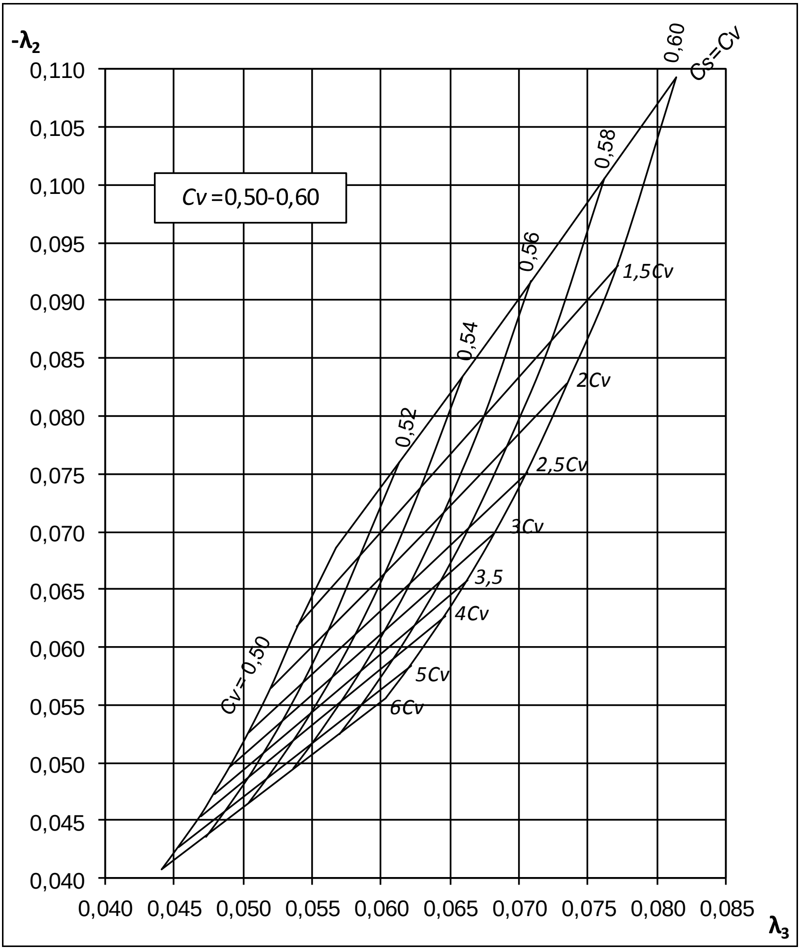
Номограмма для определения параметров распределения Крицкого-Менкеля *Cv* и *Cs* методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от статистик λ2 и λ3 при *Cv* = 0,35-0,40



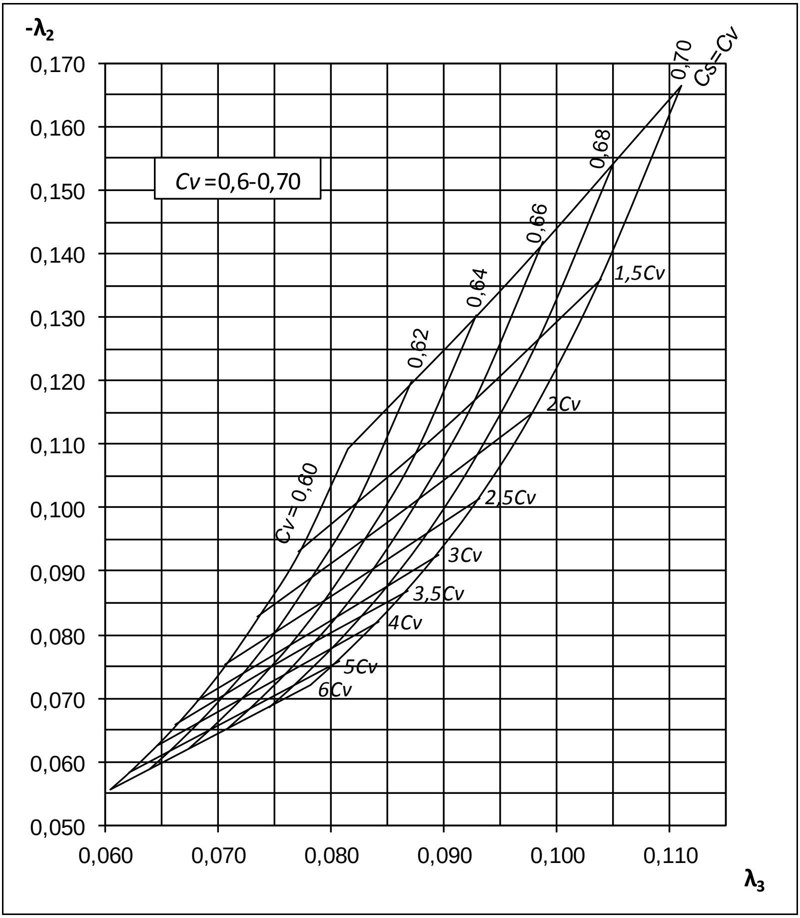
Номограмма для определения параметров распределения Крицкого-Менкеля *Cv* и *Cs* методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от статистик λ2 и λ3 при *Cv* = 0,40-0,50



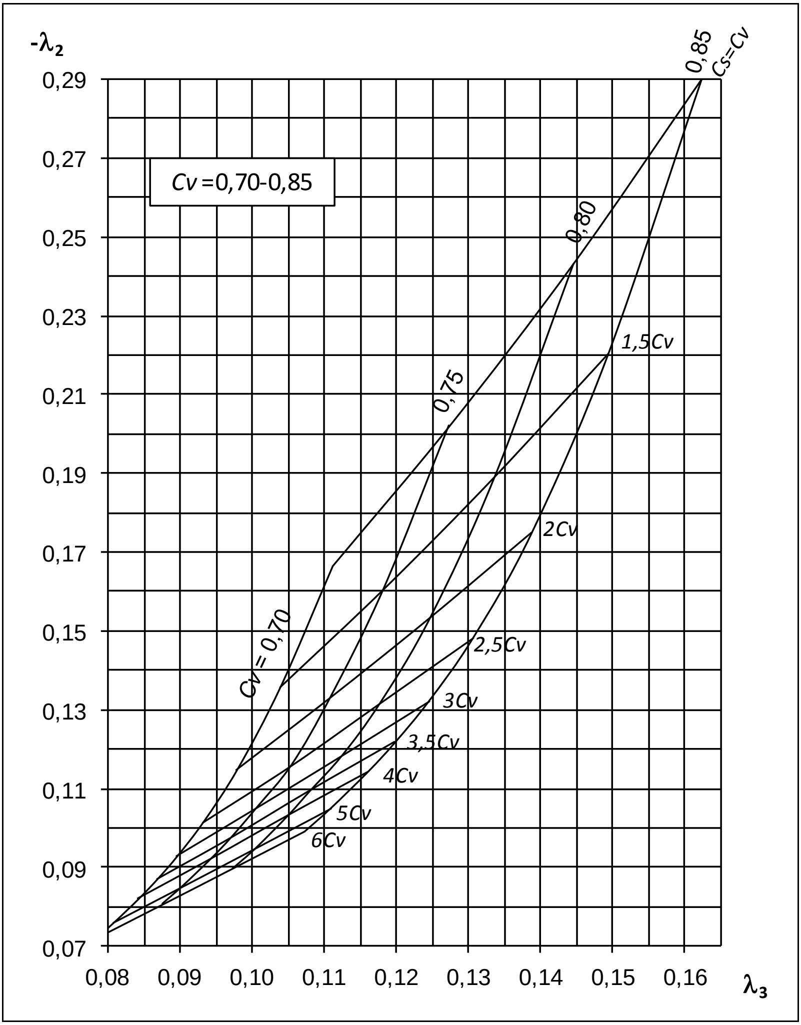
Номограмма для определения параметров распределения Крицкого-Менкеля *Cv* и *Cs* методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от статистик λ2 и λ3 при *Cv* = 0,50-0,60



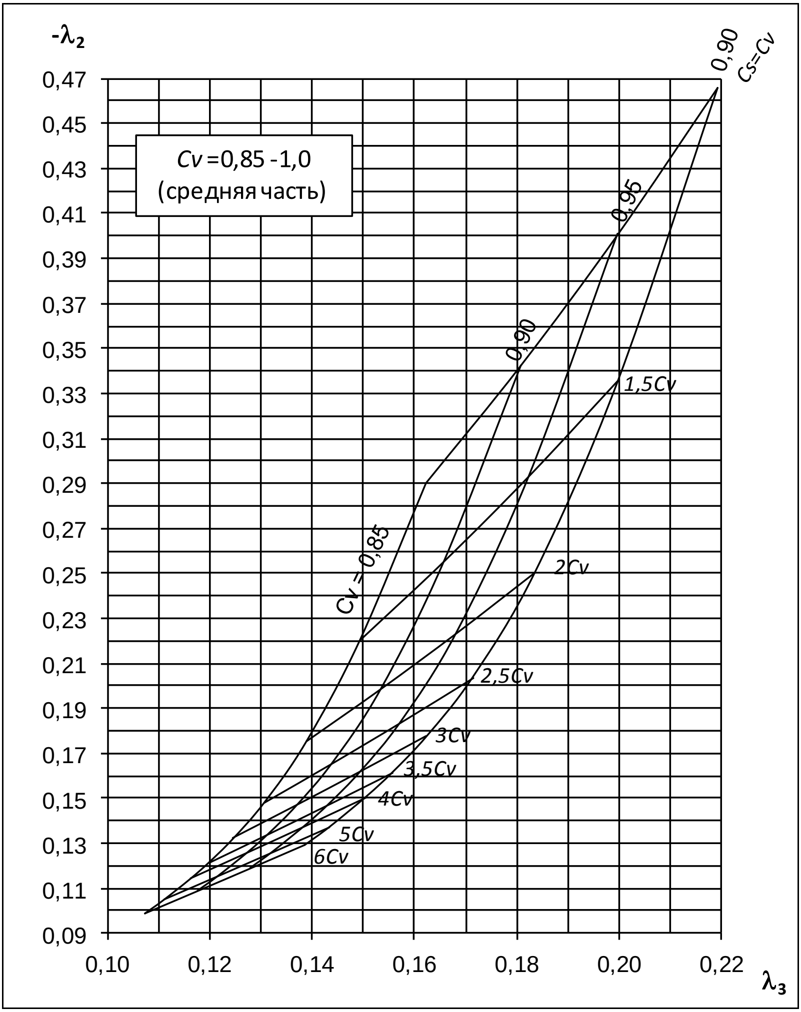
Номограмма для определения параметров распределения Крицкого-Менкеля *Cv* и *Cs* методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от статистик λ2 и λ3 при *Cv* = 0,60-0,70



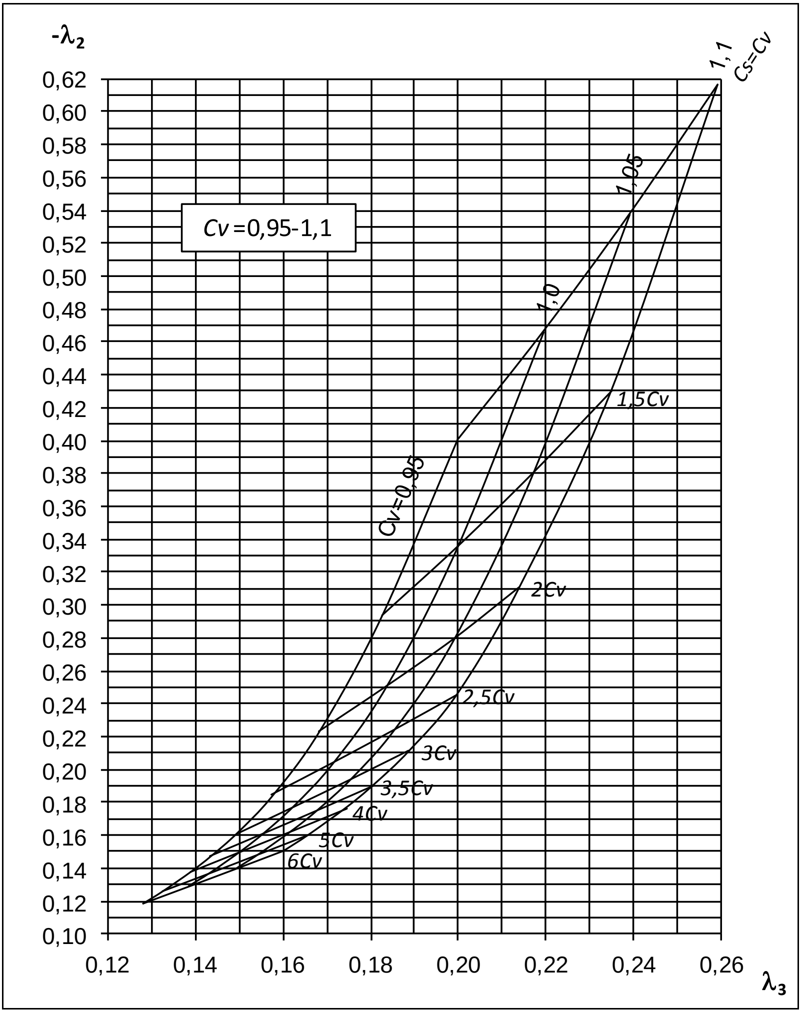
Номограмма для определения параметров распределения Крицкого-Менкеля *Cv* и *Cs* методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от статистик λ2 и λ3 при *Cv* = 0,70-0,85



Номограмма для определения параметров распределения Крицкого-Менкеля *Cv* и *Cs* методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от статистик λ2 и λ3 при *Cv* = 0,85-1,0



Номограмма для определения параметров распределения Крицкого-Менкеля *Cv* и *Cs* методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от статистик λ2 и λ3 при *Cv* = 0,95-1,1



Приложение 4

Таблицы для определения коэффициента вариации C_v методом приближенного наибольшего правдоподобия в зависимости от статистики (- λ2) при фиксированном значении (C_s/C_v) для кривой обеспеченностей Пирсона III типа (значения λ2 отрицательные)

$C_v = f$ (λ2) при $\boldsymbol{C_s/C_v}$ **= 1,0**

C_v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,1	0,0022	0,0026	0,0032	0,0038	0,0044	0,0050	0,0058	0,0066	0,0074	0,0082
0,2	0,0090	0,0100	0,0111	0,0122	0,0132	0,0143	0,0157	0,0171	0,0184	0,0199
0,3	0,0212	0,0229	0,0246	0,0263	0,0280	0,0297	0,0318	0,0339	0,0360	0,0381
0,4	0,0402	0,0428	0,0454	0,0479	0,0505	0,0530	0,0562	0,0593	0,0624	0,0655
0,5	0,0686	0,0723	0,0760	0,0797	0,0835	0,0872	0,0916	0,0961	0,101	0,105
0,6	0,109	0,115	0,120	0,125	0,130	0,136	0,142	0,148	0,154	0,160
0,7	0,166	0,173	0,181	0,188	0,195	0,202	0,210	0,218	0,227	0,235
0,8	0,243	0,252	0,262	0,271	0,281	0,290	0,300	0,311	0,321	0,332
0,9	0,342	0,354	0,366	0,377	0,389	0,401	0,414	0,427	0,440	0,435
1,0	0,466	0,480	0,495	0,509	0,523	0,538	0,553	0,569	0,585	0,600
1,1	0,616	0,633	0,650	0,668	0,684	0,701	0,719	0,737	0,755	0,774

$C_v = f$ (λ2) при $\boldsymbol{C_s/C_v}$ **= 2,0**

C_v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,1	0,0022	0,0026	0,0031	0,0037	0,0043	0,0049	0,0056	0,0063	0,0071	0,0079
0,2	0,0087	0,0096	0,0106	0,0116	0,0126	0,0137	0,0148	0,0160	0,0172	0,0185
0,3	0,0198	0,0212	0,0296	0,0241	0,0256	0,0271	0,0287	0,0304	0,0321	0,0339
0,4	0,0357	0,0375	0,0394	0,0414	0,0434	0,0454	0,0476	0,0497	0,0519	0,0542
0,5	0,0565	0,0589	0,0613	0,0638	0,0664	0,0690	0,0716	0,0743	0,0771	0,0799
0,6	0,0828	0,0858	0,0887	0,0918	0,0949	0,0981	0,101	0,105	0,108	0,111
0,7	0,115	0,118	0,122	0,126	0,129	0,133	0,137	0,141	0,145	0,149
0,8	0,153	0,157	0,162	0,166	0,170	0,175	0,180	0,184	0,189	0,194
0,9	0,198	0,203	0,208	0,213	0,218	0,224	0,229	0,234	0,240	0,245
1,0	0,251	0,256	0,262	0,268	0,274	0,280	0,286	0,292	0,298	0,304
1,1	0,311	0,317	0,323	0,330	0,337	0,343	0,350	0,357	0,364	0,371
1,2	0,378	0,386	0,393	0,400	0,408	0,415	0,423	0,431	0,438	0,446
1,3	0,454	0,462	0,471	0,479	0,487	0,496	0,504	0,513	0,521	0,530
1,4	0,539	0,548	0,557	0,566	0,575	0,584	0,594	0,603	0,613	0,623
1,5	0,632	0,642	0,652	0,662	0,672	0,682	0,692	0,703	0,713	0,724
1,6	0,734	0,745	0,756	0,767	0,778	0,789	0,800	0,811	0,823	0,824
1,7	0,846	0,857	0,860	0,881	0,893	0,905	0,917	0,929	0,911	0,953
1,8	0,966	0,978	0,991	1,004	1,016	1,029	1,042	1,055	1,069	1,082
1,9	1,095	1,109	1,122	1,136	1,150	1,163	1,177	1,191	1,205	1,220

$C_v = f\,(\lambda 2)$ при $\boldsymbol{C_s/C_v}$ **= 3,0**

C_v	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,1	0,0022	0,0026	0,0031	0,0037	0,0043	0,0048	0,0055	0,0062	0,0070	0,0078
0,2	0,0085	0,0094	0,0104	0,0113	0,0122	0,0132	0,0143	0,0154	0,0165	0,0176
0,3	0,0188	0,0201	0,0214	0,0227	0,0240	0,0253	0,0267	0,0282	0,0297	0,0311
0,4	0,0326	0,0342	0,0359	0,0375	0,0391	0,0408	0,0425	0,0443	0,0461	0,0479
0,5	0,0497	0,0526	0,0535	0,0555	0,0574	0,0594	0,0614	0,0635	0,0656	0,0677
0,6	0,0698	0,0720	0,0742	0,0764	0,0786	0,0808	0,0832	0,0856	0,0879	0,0903
0,7	0,0926	0,0951	0,0976	0,100	0,103	0,105	0,108	0,110	0,113	0,116
0,8	0,118	0,121	0,124	0,127	0,129	0,132	0,135	0,138	0,141	0,144
0,9	0,147	0,150	0,153	0,156	0,159	0,162	0,165	0,168	0,171	0,174
1,0	0,177	0,181	0,184	0,187	0,191	0,194	0,197	0,201	0,204	0,208
1,1	0,211	0,215	0,218	0,222	0,225	0,229	0,232	0,236	0,240	0,243
1,2	0,247	0,251	0,255	0,258	0,262	0,266	0,270	0,274	0,277	0,281
1,3	0,286	0,289	0,294	0,298	0,302	0,306	0,311	0,315	0,319	0,323
1,4	0,327	0,332	0,336	0,340	0,345	0,349	0,354	0,358	0,363	0,367
1,5	0,372	0,376	0,381	0,386	0,390	0,395	0,400	0,404	0,409	0,414
1,6	0,419	0,424	0,428	0,433	0,438	0,443	0,448	0,453	0,458	0,463
1,7	0,468	0,474	0,479	0,484	0,489	0,495	0,500	0,505	0,511	0,516
1,8	0,521	0,527	0,532	0,538	0,543	0,549	0,555	0,560	0,566	0,572
1,9	0,578	0,584	0,589	0,595	0,600	0,606	0,612	0,618	0,624	0,630

$C_v = f\,(\lambda 2)$ при $\boldsymbol{C_s/C_v}$ **= 4,0**

C_v	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
0,1	0,0022	0,0026	0,0031	0,0037	0,0043	0,0048	0,0055	0,0062	0,0069	0,0076
0,2	0,0083	0,0092	0,0101	0,0110	0,0119	0,0128	0,0138	0,0148	0,0159	0,0169
0,3	0,0180	0,0192	0,0203	0,0215	0,0227	0,0239	0,0252	0,0265	0,0279	0,0292
0,4	0,0305	0,0319	0,0334	0,0348	0,0363	0,0377	0,0392	0,0408	0,0423	0,0439
0,5	0,0454	0,0471	0,0488	0,0505	0,0522	0,0538	0,0556	0,0574	0,0592	0,0609
0,6	0,0627	0,0646	0,0665	0,0683	0,0702	0,0721	0,0741	0,0760	0,0780	0,0800
0,7	0,0820	0,0840	0,0861	0,0882	0,0903	0,0923	0,0946	0,0966	0,0989	0,101
0,8	0,103	0,105	0,108	0,110	0,112	0,114	0,117	0,119	0,121	0,124
0,9	0,126	0,128	0,131	0,133	0,136	0,138	0,141	0,143	0,146	0,148
1,0	0,151	0,153	0,156	0,158	0,161	0,163	0,166	0,169	0,171	0,174
1,1	0,177	0,179	0,182	0,185	0,188	0,190	0,193	0,196	0,199	0,201
1,2	0,204	0,207	0,210	0,213	0,216	0,219	0,222	0,224	0,227	0,230
1,3	0,233	0,236	0,239	0,242	0,245	0,248	0,251	0,254	0,258	0,261
1,4	0,264	0,267	0,270	0,273	0,276	0,279	0,283	0,286	0,289	0,292
1,5	0,296	0,299	0,302	0,305	0,309	0,312	0,315	0,319	0,322	0,325
1,6	0,329	0,332	0,336	0,339	0,342	0,346	0,349	0,353	0,356	0,360
1,7	0,363	0,367	0,370	0,374	0,377	0,381	0,384	0,388	0,392	0,395
1,8	0,399	0,403	0,406	0,410	0,414	0,417	0,421	0,425	0,429	0,432
1,9	0,436	0,440	0,444	0,447	0,451	0,455	0,459	0,463	0,467	0,471

Приложение 5

Значения зависимости $C_v = f(\lambda_{2,n/2})$ для вычисления коэффициента вариации C_v усеченного гамма-распределения

(значения $\lambda_{2,n/2}$ отрицательные)

Cv	**0,00**	**0,01**	**0,02**	**0,03**	**0,04**	**0,05**	**0,06**	**0,07**	**0,08**	**0,09**
0,1	0,00050	0,00070	0,0090	0,00110	0,00130	0,00150	0,00170	0,00190	0,00210	0,00230
0,2	0,00250	0,00281	0,00321	0,0343	0,00374	0,00405	0,00436	0,00467	0,00498	0,00529
0,3	0,00560	0,00608	0,00656	0,00704	0,00752	0,00800	0,00848	0,00896	0,00944	0,00992
0,4	0,0104	0,0109	0,0114	0,0119	0,0124	0,0129	0,0135	0,0142	0,0148	0,0154
0,5	0,0161	0,0168	0,0176	0,0183	0,0191	0,0198	0,0206	0,0231	0,0220	0,0228
0,6	0,0235	0,0243	0,0250	0,0259	0,0267	0,0275	0,0282	0,0290	0,0298	0,0306
0,7	0,0314	0,0324	0,0328	0,0335	0,0342	0,0349	0,0358	0,0366	0,0375	0,0383
0,8	0,0392	0,0400	0,0409	0,0417	0,0426	0,0434	0,0444	0,0453	0,0463	0,0473
0,9	0,0482	0,0493	0,0503	0,0514	0,0524	0,0534	0,0545	0,0556	0,0568	0,0579
1,0	0,0590	0,0601	0,0613	0,0624	0,0636	0,0647	0,0659	0,0670	0,0682	0,0693
1,1	0,0704	0,0718	0,0731	0,0744	0,758	0,0771	0,0785	0,0799	0,0813	0,0828
1,2	0,0842	0,0856	0,0871	0,0886	0,0901	0,0916	0,0932	0,0948	0,0964	0,0980
1,3	0,0995	0,101	0,103	0,105	0,106	0,108	0,110	0,112	0,113	0,115
1,4	0,117	0,119	0,121	0,122	0,124	0,126	0,128	0,130	0,132	0,134
1,5	0,136	0,137	0,139	0,141	0,143	0,145	0,147	0,149	0,151	0,154
1,6	0,156	0,158	0,160	0,162	0,164	0,166	0,168	0,170	0,173	0,175
1,7	0,177	0,180	0,183	0,185	0,188	0,190	0,193	0,195	0,197	0,200
1,8	0,202	0,205	0,207	0,210	0,213	0,215	0,217	0,220	0,222	0,224
1,9	0,227	0,229	0,231	0,234	0,236	0,238	0,241	0,245	0,248	0,251

Приложение 6

Значения функции $\varphi(C_v)$ для вычисления среднего значения x_0 усеченного гамма-распределения

Cv	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,1	0,925	0,919	0,913	0,906	0,900	0,894	0,887	0,882	0,875	0,869
0,2	0,863	0,856	0,852	0,847	0,841	0,836	0,831	0,825	0,820	0,814
0,3	0,809	0,805	0,800	0,795	0,791	0,787	0,782	0,777	0,773	0,769
0,4	0,764	0,760	0,756	0,751	0,747	0,743	0,739	0,735	0,730	0,726
0,5	0,722	0,719	0,715	0,712	0,708	0,705	0,702	0,698	0,695	0,691
0,6	0,688	0,685	0,681	0,678	0,674	0,671	0,668	0,664	0,661	0,657
0,7	0,654	0,652	0,649	0,647	0,645	0,643	0,640	0,638	0,636	0,633
0,8	0,631	0,629	0,627	0,624	0,622	0,620	0,618	0,616	0,613	0,611
0,9	0,609	0,607	0,605	0,604	0,602	0,600	0,598	0,596	0,595	0,593
1,0	0,591	0,589	0,588	0,586	0,585	0,583	0,581	0,580	0,578	0,577
1,1	0,575	0,574	0,572	0,571	0,569	0,568	0,567	0,565	0,564	0,562
1,2	0,561	0,560	0,559	0,558	0,557	0,556	0,554	0,553	0,552	0,551
1,3	0,550	0,549	0,548	0,547	0,546	0,545	0,544	0,543	0,542	0,541
1,4	0,540	0,539	0,538	0,538	0,537	0,536	0,535	0,534	0,534	0,533
1,5	0,532	0,531	0,530	0,530	0,529	0,528	0,528	0,527	0,526	0,526
1,6	0,526	0,525	0,525	0,524	0,524	0,523	0,522	0,522	0,521	0,521
1,7	0,520	0,520	0,519	0,519	0,518	0,518	0,518	0,517	0,517	0,516
1,8	0,516	0,516	0,155	0,515	0,514	0,514	0,513	0,513	0,513	0,512
1,9	0,512	0,512	0,511	0,511	0,511	0,511	0,510	0,510	0,510	0,509

СОДЕРЖАНИЕ

TABLE OF CONTENTS

Учебное издание

А.В. Сикан

ВЕРОЯТНОСТНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ГИДРОЛОГИИ

Учебник

Печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 22.07.2020. Формат 60×90 1/16.

Гарнитура Times New Roman.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 17,9. Тираж 30 экз. Заказ № 887.

РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская, 79.