

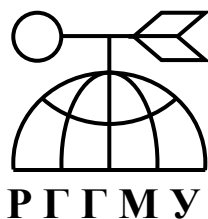
Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. Н. Веретенников

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**



Санкт-Петербург
2017

Одобрено Научно-методическим советом РГГМУ

УДК

ББК

ISBN

Веретенников В. Н. Сборник задач по математике. Аналитическая геометрия. – СПб: РГГМУ, 2017 – 149 с.

Пособие является третьим выпуском учебника по всем разделам курса математики для бакалавров гидрометеорологических направлений, соответствует государственному образовательному стандарту и действующим программам.

Активизация познавательной деятельности студентов, выработка у них способности самостоятельно решать достаточно сложные проблемы может быть достигнута при такой организации учебного процесса, когда каждому студенту выдаются индивидуальные домашние задания (ИДЗ) с обязательным последующим контролем их выполнения и выставлением оценок.

Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи ИДЗ.

Рецензент: *Вагер Б. Г., д-р физ.-мат. наук, проф. СПбГАСУ*

ISBN

© Веретенников В. Н.

© Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2017.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математике в РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие не является сборником задач в обычном смысле слова. Как явствует из его структуры, оно преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункта.

В разделе – «Опорный конспект (основные теоретические сведения)» – приводятся основные теоретические сведения и формулы (разумеется, без доказательства). Иногда после формулировки определения или теоремы даются поясняющие примеры или некоторые комментарии, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий. Там, где это, возможно, дается геометрическая и физическая интерпретация математических понятий.

В разделе – «Опорный конспект» – вводятся и разъясняются все базисные понятия и методы. Даются иллюстрирующие примеры, вопросы для самопроверки, решаются типовые задачи. Материал располагается в той же последовательности, что и на лекциях, но без доказательств. Даются только определения, формулировки и пояснения теорем, их физическая и геометрическая интерпретация, чертежи, выводы, правила. Второстепенные вопросы опущены.

В разделе «Вопросы для самопроверки» – содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют, то или иное теоретическое положение. Назначение этого пункта – помочь студенту в самостоятельной работе над теоретическим материалом, дать ему возможность самому проконтролировать усвоение основных понятий. Многие контрольные вопросы направлены на раскрытие этой сути. Из этого раздела преподаватель может черпать вопросы для проверки готовности студентов к практическому занятию по той или иной теме.

В разделе «Примеры решения задач» – разобраны типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. При этом большое внимание уделяется обсуждению не только «технических приемов», но и различным «тонким местам», например, условиям применимости той или иной теоремы или формулы.

Назначение раздела «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» – определено его названием. При подборе упражнений были использованы различные источники, в том числе широко известные задачники. В конце задачи дается ответ и указание.

Начало и конец доказательства теоремы и решений задач отмечаются соответственно знаками  и .

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Автор надеется, что данное пособие поможет студентам в овладении методами линейной алгебры, в их самостоятельной работе над предметом. Он также выражает надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

Опорный конспект

1. Введение в аналитическую геометрию

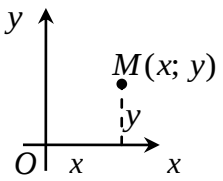
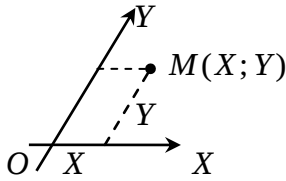
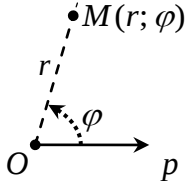
1.1. Простейшие задачи аналитической геометрии

Введение прямоугольной системы координат на плоскости (в пространстве) позволяет установить

**взаимно однозначное соответствие
между множеством всех точек плоскости (пространства) и
множеством упорядоченных пар (троек)
вещественных чисел $(x; y)$ или $(x; y; z)$,**

что дает возможность при решении геометрических задач применять алгебраические методы.

Итак, система координат – способ определения положения точек на плоскости (в пространстве).

		
Прямоугольная система	Косоугольная система координат	Полярная система

Расстояние между двумя точками на координатной оси

Пусть $A(x_A)$ и $B(x_B)$ – две точки координатной оси. Тогда **расстояние** d между ними вычисляется по формуле

$$d = d(A; B) = |x_B - x_A|. \quad (1.1)$$

Расстояние между двумя точками на плоскости

Если на плоскости задана, прямоугольная декартова система координат Oxy , то **расстояние** d между любыми двумя точками $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$ вычисляется по следующей формуле

$$d = d(A; B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}. \quad (1.2)$$

Расстояние между двумя точками в пространстве

Выберем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ с базисом $\{\mathbf{i}; \mathbf{j}; \mathbf{k}\}$. Пусть даны две точки $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$. Соотношение

$$d = d(A; B) = |\mathbf{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \quad (1.3)$$

есть формула для нахождения расстояния между двумя точками пространства, заданными своими координатами.

Расстояние между двумя точками в полярной системе координат

В полярной системе координат расстояние между точками $A(r_A; \varphi_A)$ и $B(r_B; \varphi_B)$ определяется по формуле

$$|\mathbf{AB}| = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_B - \varphi_A)}. \quad (1.4)$$

Деление отрезка в данном отношении

Пусть в прямоугольной системе координат $Oxyz$ даны две **различные** точки, $A(x_A; y_A; z_A)$ и $B(x_B; y_B; z_B)$ (точка A считается первой, точка B – второй). **Проведём** через данные точки прямую, **зафиксируем** на ней положительное направление (т.е. сделаем её осью). Пусть C – любая, принадлежащая этой прямой точка, **отличная** от точки B .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Отношением*, в котором точка C делит **направленный отрезок** $\mathbf{AB}$, ограниченный точками A и B , **называется** число

$$\lambda = \frac{AC}{CB},$$

где AC , CB – **величины направленных отрезков** AC , CB указанной оси.

Координаты точки C , делящей отрезок $[AB]$ в отношении $\lambda \neq 1$, через координаты концов отрезка выражаются по формулам.

$$x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}; y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}; z = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}. \quad (1.5)$$

В частности, если точка C совпадает с серединой $[AB]$, то $\lambda = 1$; тогда равенства (1.5) примут вид:

$$x = \frac{x_A + x_B}{2}; y = \frac{y_A + y_B}{2}; z = \frac{z_A + z_B}{2}, \quad (1.6)$$

т.е.

***координаты середины отрезка равны
полусуммам координат концов этого отрезка.***

Для плоскости в прямоугольной системе координат Oxy при тех же обозначениях формулы (1.5) и (1.6) примут соответственно вид:

$$x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}; y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda} \text{ и } x = \frac{x_A + x_B}{2}; y = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Площадь треугольника

Проще всего площадь треугольника с вершинами $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ вычислять по формуле

$$S_{\Delta} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Знак $\pm$ ставится потому, что площадь треугольника всегда положительна, а определитель может иметь любой знак

$$\left(S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\Delta|, \text{ или } S = \pm \frac{1}{2} \Delta, \text{ где } \Delta = \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} \right).$$

Если три точки $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ лежат на одной

прямой линии, то $S_{\Delta ABC} = 0, \Rightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0.$

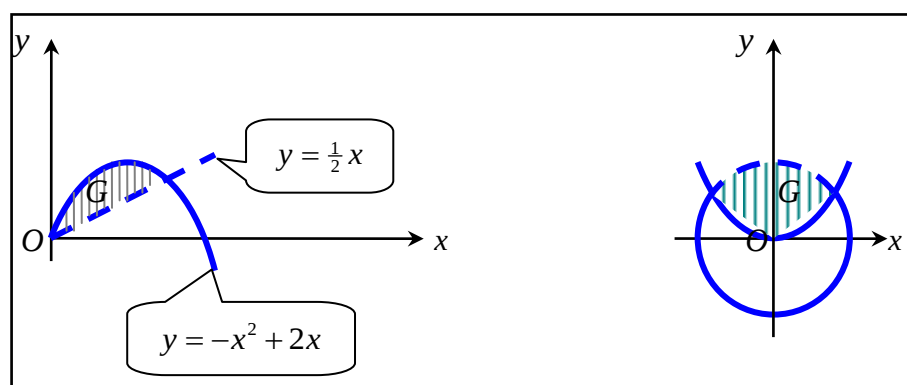
Геометрический смысл неравенств

Метод координат устанавливает соответствие между частями плоскости Oxy и неравенствами или системами неравенств.

Если дана область на чертеже и нужно составить соответствующую ей систему неравенств, то нужно:

1. **Записать** уравнения границ и **посмотреть** по условиям задачи, какая из границ входит в данную область G .
2. **Записать** систему неравенств, соответствующую этой области:

$$y > \frac{x}{2}, y \leq -x^2 + 2x.$$



Если дана система неравенств $x^2 + y^2 < 1$ и $y \geq x^2$, то нужно:

1. **Построить** сначала границы $x^2 + y^2 = 1$, $y = x^2$.
2. **Заштриховать** область G и **отметить** пунктирной линией границы, не входящие в область.

1.2. Полярная система координат

Построение точек в полярной системе координат

Положение точек в полярной системе координат определяется полярным углом φ и полярным радиусом r . Условимся считать, что

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ и } 0 \leq r < \infty.$$

При построении точек в полярной системе координат надо

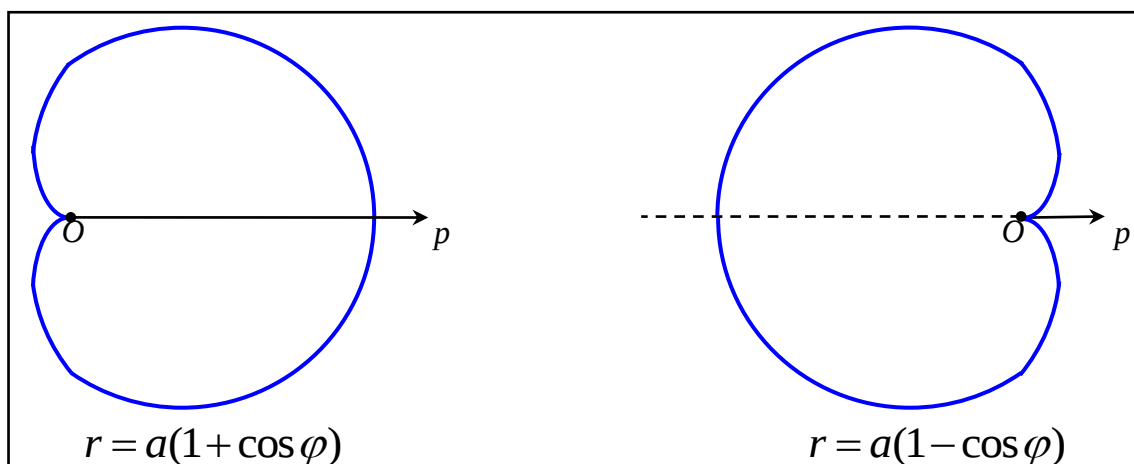
- Сначала **построить** луч под углом φ к оси Op .
- Затем на луче **отложить** полярный радиус r .

Построение линий в полярной системе координат

Линия $r = f(\varphi)$ в полярной системе координат строится по точкам с учётом свойств функции $f(\varphi)$ и условия $r \geq 0$. Полезно помнить на память наиболее часто встречающиеся линии в полярной системе координат.

1. Кардиоида

Уравнение линии $r = a(1 \pm \cos \varphi)$.

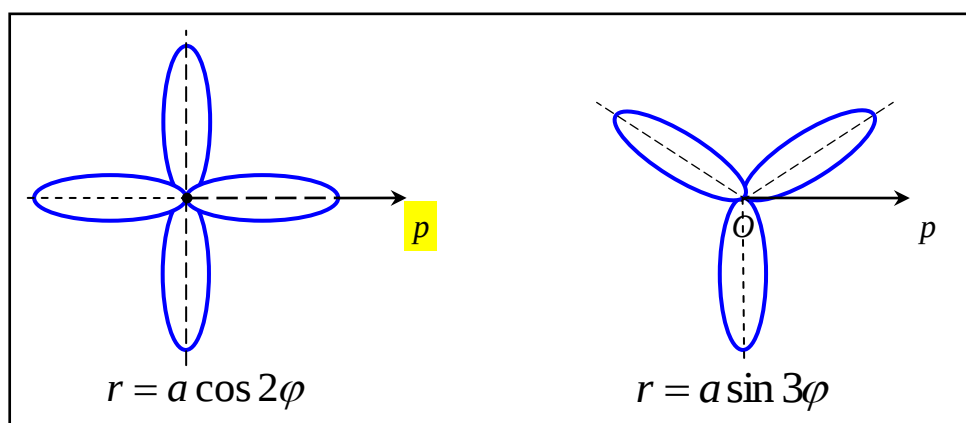


2. Розы

Уравнение линии $r = a \sin k\varphi$; $r = a \cos k\varphi$.

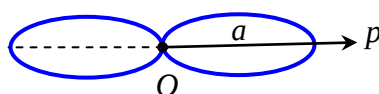
Если $k = 2n + 1$, то число лепестков k .

Если $k = 2n$, то число лепестков $2k$.



3. Лемниската Бернулли

Уравнение линии $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$.



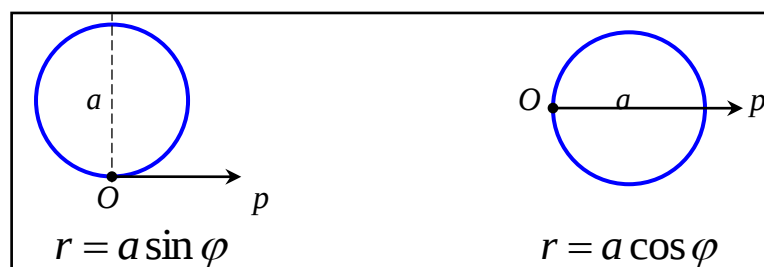
4. Спираль Архимеда

Уравнение линии $r = a\varphi$.



5. Окружности

Уравнения линий $r = a \cos \varphi$; $r = a \sin \varphi$.



При построении линии в полярной системе координат необходимо выполнить следующие действия.

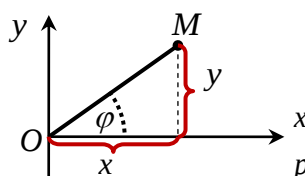
1. **Найти** область определения линии из условия $r \geq 0$.
2. **Составить** таблицу

φ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	...	π
r								

3. **Найти** $r_{\max}$, $r_{\min}$.
4. **Сделать** чертёж, опираясь на таблицу.

Переход от одной системы координат к другой

Если совместить прямоугольную и полярную системы координат так, как это сделано на чертеже, то



$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$ — формулы перехода от полярной системы координат к прямоугольной.

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg \frac{y}{x} \end{cases} \text{ — формулы перехода от прямоугольной системы} \\ \text{координат к полярной.}$$

Чтобы от одной системы координат перейти к другой, надо использовать формулы перехода.

Расстояние между двумя точками **в полярной системе координат**

В полярной системе координат расстояние между точками $A(r_A; \varphi_A)$ и $B(r_B; \varphi_B)$ определяется по формуле

$$|AB| = \sqrt{r_A^2 + r_B^2 - 2r_A r_B \cos(\varphi_B - \varphi_A)}. \quad (1.7)$$

1.3. Уравнение линии на плоскости

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Уравнением линии ℓ (в заданной системе координат) называется уравнение вида

$$F(x; y) = 0 \quad (1.8)$$

такое, что:

- 1) координаты x, y любой точки M , принадлежащей линии ℓ , удовлетворяют этому уравнению, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии;
- 2) любые два числа x и y , удовлетворяющие уравнению (1.8), определяют точку, которая принадлежит линии ℓ .

Координаты x и y (или r и φ), входящие в уравнение линии, называются **текущими координатами**.

Принято говорить, что уравнение $F(x; y) = 0$ (или $F(r; \varphi) = 0$) определяет (или задает) линию ℓ на плоскости.

Уравнение линии ℓ не обязательно брать в виде (2.1). Его можно, **например**, иногда разрешить относительно переменной y (выразить y через переменную x), т.е. привести к виду

$$y = f(x). \quad (1.9)$$

Из определения видно, что линия вполне характеризуется своим уравнением, и именно линия, определяемая уравнением (1.8), — есть **множество** всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению. Короче,

$$\ell \Leftrightarrow \{M(x; y) \mid F(x; y) = 0\}.$$

Таким образом,

линии могут быть определены двумя способами:

- *геометрическим свойством;*
- *уравнением.*

В зависимости от способа задания линии в аналитической геометрии возникают *задачи двух видов.*

1. Линия задана геометрически. Требуется найти её уравнение.

2. Линия задана своим уравнением. Требуется изучить её геометрические свойства.

Практически приходится решать обе задачи: сначала по какому-то одному свойству линии **находить** её уравнение, а затем с помощью этого уравнения **изучать** другие свойства этой линии.

Вычерчивать линию иногда удобнее исходя из геометрического свойства, а иногда – из уравнения.

Нахождение уравнения линии

Уравнение линии, заданной некоторым свойством, можно получить, придерживаясь следующей схемы.

1. Уравнение линии ℓ предполагает, прежде всего, **выбор определенной системы координат.**

После выбора системы надо **найти** (или **обозначить**) **координаты точек, играющих основную роль в задании линии.**

2. Исходя из геометрических свойств, определяющих линию, **ищем условия, связывающие координаты x, y текущей точки линии.**

3. При необходимости **упрощаем полученное уравнение** (освобождаемся от радикалов и т.д.). При этом надо следить, чтобы получающиеся новые уравнения были равносильны исходному уравнению.

Из определения уравнения линии следует решение простой задачи:

выяснить, лежит ли данная точка на заданной линии.

❖ **Если при подстановке координат точки в уравнение линии получается верное числовое равенство (тождество), то точка лежит на данной линии;**

❖ **если же тождество не получается, то точка линии не принадлежит.**

Пересечение линий

Рассмотрим две линии, определяемые уравнениями

$$F_1(x; y) = 0, \quad (1.10)$$

$$F_2(x; y) = 0. \quad (1.11)$$

Требуется найти точку пересечения этих линий.

Точка пересечения данных линий принадлежит первой и второй линии, поэтому её координаты удовлетворяют как первому, так и второму уравнению, т.е. удовлетворяют системе уравнений.

$$\begin{cases} F_1(x; y) = 0, \\ F_2(x; y) = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Обратно, если координаты x_0, y_0 некоторой точки удовлетворяют системе (1.12), то точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на линии (1.10) и на линии (1.11), т.е. является точкой их пересечения.

Следовательно, *чтобы найти точки пересечения линий, необходимо решить систему их уравнений*. Число решений равно числу точек пересечения. Если система (1.12) вещественных решений не имеет, линии (1.10) и (1.11) не пересекаются.

Алгебраическая линия, её порядок

Пусть некоторая линия относительно декартовой системы координат Oxy определяется уравнением

$$F(x; y) = 0. \quad (1.8)$$

Классификация линий в аналитической геометрии производится по характеру функции $F(x; y)$. Если $F(x; y)$ есть многочлен n -ой степени относительно переменных x и y , то линия называется *алгебраической линией n -го порядка*.

Порядком алгебраической линии **называется** показатель степени n многочлена.



2. Прямая и плоскость (геометрические образы первого порядка)

2.1. Прямая на плоскости и ее уравнения

Векторная форма уравнения прямой

Прямая ℓ вполне определяется заданием *одной из её точек* $M_0 \in \ell$ и *произвольного ненулевого вектора* $\mathbf{a}$, которому прямая *линия коллинеарна* (рис. 2.1).

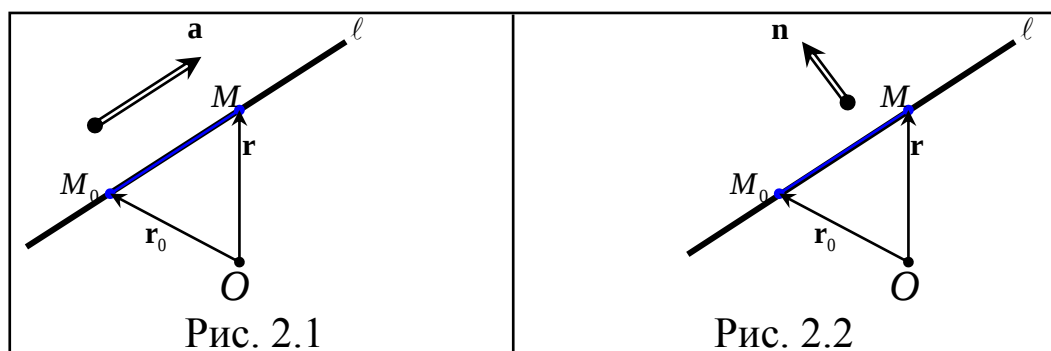
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Направляющим вектором прямой* называется любой вектор, *лежащий на прямой или коллинеарный ей*.

Уравнение прямой, *проходящей через точку* M_0 и *имеющей направляющий вектор* $\mathbf{a}$.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t. \quad (2.1)$$

Если $O \in \ell$, то $\mathbf{r}_0 = \mathbf{o}$ и уравнение (2.1) примет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}t.$$



Уравнение прямой на плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору

Прямая ℓ вполне определяется также заданием одной из её точек $M_0 \in \ell$ и произвольного ненулевого вектора $\mathbf{n}$, которому прямая перпендикулярна (рис. 2.2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Всякий ненулевой вектор (не обязательно единичный), перпендикулярный к данной прямой ℓ , называется *нормальным вектором* этой прямой.

Уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно данному вектору $\mathbf{n}$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + C = 0. \quad (2.2)$$

где $C = -\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0$.

Если $O \in \ell$, то $\mathbf{r}_0 = \mathbf{o}$ и уравнение (2.2) принимает вид

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = 0. \quad (2.3)$$

Уравнения (2.1) – (2.3) являются уравнениями прямой на плоскости в **векторной форме**.

Общее уравнение прямой

Основная теорема. *В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на плоскости любая прямая может быть задана уравнением первой степени относительно x и y :*

$$Ax + By + C = 0, \quad (2.4)$$

где A, B, C – некоторые вещественные числа, причем $A^2 + B^2 > 0$, и наоборот, всякое уравнение вида (2.4) определяет прямую.

Вектор $\mathbf{n} = \{A; B\}$ перпендикулярен прямой (2.4) и называется **нормальным вектором прямой**. Уравнение (2.4) называется **общим уравнением прямой**.

Если $B \neq 0$, то уравнение (2.4) можно **разрешить** относительно y и представить в виде

$$y = kx + b \quad (k = \operatorname{tg} \alpha). \quad (2.5)$$

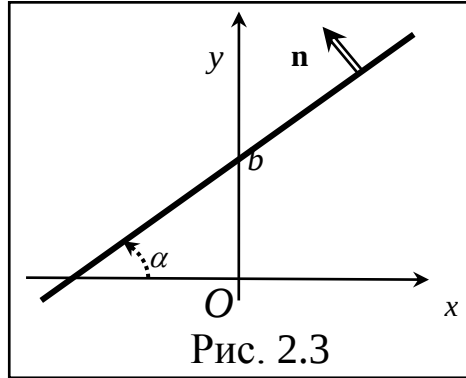
Последнее уравнение называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом k** . Угол α , отсчитываемый от положительного направления оси Ox до прямой против хода часовой стрелки, называется **углом наклона прямой**, число b определяет величину отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy (рис. 2.3).

Если $b = \text{const}$, а α – переменна

$$(0 \leq \alpha < \pi/2, \pi/2 < \alpha < 3\pi/2, 3\pi/2 < \alpha \leq 2\pi),$$

то прямая **вращается** вокруг точки $B(0; b)$.

Если $\alpha = \text{const}$, а b меняется ($-\infty < b < \infty$), то прямая **перемещается** параллельно самой себе, сохраняя постоянный угол наклона.



Существуют и другие виды уравнений прямой на плоскости.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$
в данном направлении

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (2.6)$$

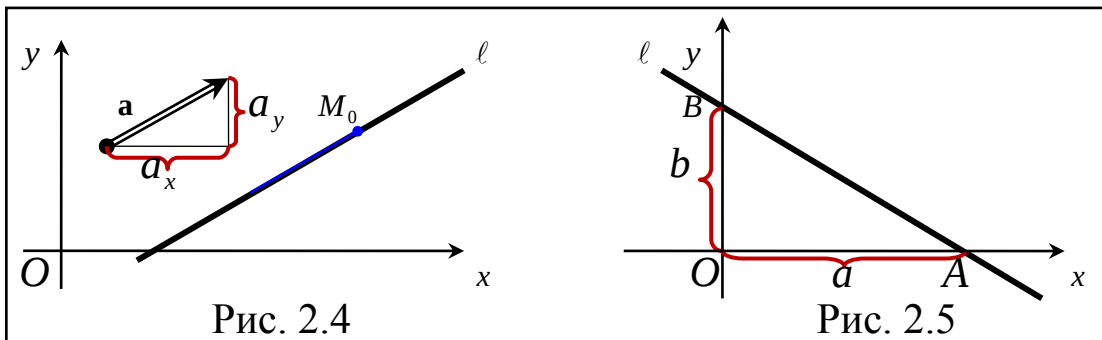
Параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \end{cases} \quad (2.7)$$

где $\mathbf{a} = \{a_x; a_y\}$ – направляющий вектор прямой, а точка $M_0(x_0; y_0)$ лежит на прямой.

Каноническое уравнение прямой (рис. 2.4)

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y}. \quad (2.8)$$



Уравнение прямой в «отрезках» (рис.2.5)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (2.9)$$

Здесь a, b – отрезки, отсекаемые прямой линией на осях Ox, Oy

соответственно.

Если $a = \text{const}$, b – меняется ($-\infty < b < \infty$), то прямая **вращается** вокруг точки $A(a; 0)$.

Если $b = \text{const}$, a – меняется ($-\infty < a < \infty$), то прямая **вращается** вокруг точки $B(0; b)$.

Нормальное уравнение прямой

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0, \quad (2.10)$$

где α – угол наклона нормали прямой, p – расстояние от начала координат до прямой (рис. 2.6).

Если $p = \text{const}$, α – переменна ($0 \leq \alpha < 2\pi$), то прямая **скользит** по окружности радиуса p с центром в начале координат.

Если $\alpha = \text{const}$, p – переменна ($0 \leq p < \infty$), то прямая **перемещается** параллельно самой себе.

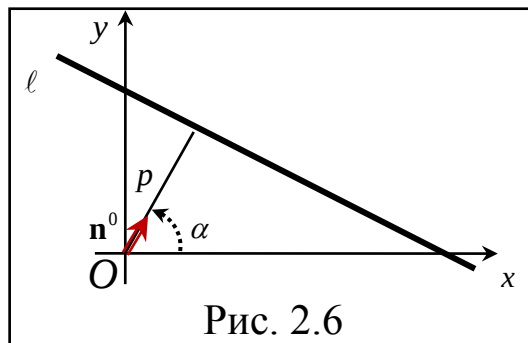


Рис. 2.6

Пучок прямых линий

Если задана точка $M_0(x_0; y_0)$ и направление прямой ($k = \text{tg } \alpha$), то уравнение

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad (2.6)$$

– уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.

Если же k не задано (произвольно), то это же уравнение – уравнение пучка прямых.

Если две прямые заданы уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то уравнение пучка прямых, проходящих через их общую точку, имеет вид

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0.$$

Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Если даны две точки $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, то уравнение прямой, проходящей через эти точки, запишется в виде:

$$\frac{y - y_A}{y_B - y_A} = \frac{x - x_A}{x_B - x_A} \text{ или } \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.11)$$

Последнее уравнение более удобно.

Точка пересечения прямых

Если даны две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то координаты точки пересечения находят как решение системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Угол между прямыми

1. Если прямые заданы общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то угол φ между ними находится из формулы

$$\cos \varphi = \frac{n_1 \cdot n_2}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (2.12)$$

Условие перпендикулярности этих **прямых** имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \quad (2.13)$$

а условие их параллельности

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \quad (2.14)$$

2. Если прямые заданы уравнениями вида (2.5)

$$y_1 = k_1x + b_1 \text{ и } y_2 = k_2x + b_2,$$

то угол φ между ними находится по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \quad (2.15)$$

Для того чтобы прямые были **параллельны**, необходимо, чтобы выполнялось равенство

$$k_1 = k_2, \quad (2.16)$$

а для их **перпендикулярности** необходимо и достаточно, чтобы

$$k_1 k_2 = -1. \quad (2.17)$$

Расстояние от точки до прямой

Чтобы найти расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой

$$Ax + By + C = 0,$$

нужно общее уравнение прямой привести к нормальному виду и в него вместо текущих координат подставить координаты точки $M_0(x_0; y_0)$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (2.18)$$

Если справа убрать модуль, то получится отклонение точки $M_0(x_0; y_0)$ от данной прямой.

Замечание. Чтобы определить расстояние между параллельными прямыми, достаточно на одной из них выбрать произвольную точку и найти расстояние от этой точки до другой прямой.

Чтобы выбрать точку на прямой можно положить $x_0 = 0$ (или любому другому значению), тогда из данного уравнения найдем y_0 .

Уравнение биссектрис

Биссектрисы – прямые, одинаково удалённые от сторон угла. Если уравнения сторон заданы

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

то уравнение биссектрис

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (2.19)$$



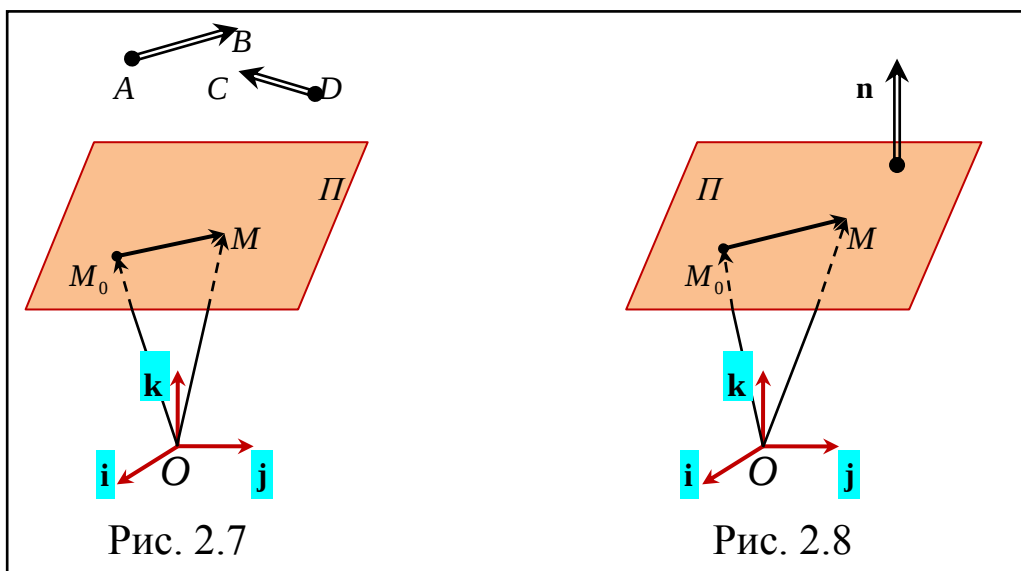
2.2. Плоскость в пространстве

Векторная форма уравнения плоскости

Плоскость в пространстве можно задать различными способами: тремя точками, точкой и вектором, перпендикулярным плоскости, и т.п. В зависимости от этого рассматривают различные виды её уравнения.

Пусть в пространстве заданы: произвольная плоскость Π , два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, коллинеарных плоскости Π ($\mathbf{AB} = \mathbf{a}$, $\mathbf{CD} = \mathbf{b}$, но $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$), и точка $M_0(x_0; y_0; z_0) \in \Pi$ (рис. 2.7). Тогда уравнение плоскости

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}. \quad (2.20)$$



Пусть **заданы**: произвольная плоскость Π , точка $M_0(\mathbf{r}_0) \in \Pi$, вектор $\mathbf{n}$, перпендикулярный плоскости Π (рис. 2.8). Тогда векторное уравнение плоскости

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (2.21)$$

Обозначив $-\mathbf{r}_0 \cdot \mathbf{n} = D$, получим

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + D = 0. \quad (2.22)$$

Общее уравнение плоскости

Основная теорема. В декартовых прямоугольных координатах уравнение плоскости приводится к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (2.23)$$

где A, B, C, D заданные числа, причем $A^2 + B^2 + C^2 > 0$,

и обратно, уравнение (2.23) всегда является уравнением некоторой плоскости.

Уравнение (2.23) называется **общим уравнением плоскости**. Коэффициенты A, B, C являются координатами вектора $\mathbf{n}$, перпендикулярного к плоскости, заданной уравнением (2.23). Он называется **нормальным вектором** этой плоскости и определяет ориентацию плоскости в пространстве относительно системы координат.

Частные случаи общего уравнения

а) $Ax + By + Cz = 0$ – плоскость проходит через точку $O(0; 0; 0)$.

Замечание. Если плоскость параллельна оси координат, то соответствующая координата в уравнении плоскости отсутствует.

$$\begin{array}{l} Ax + By + D = 0, \\ б) Ax + Cz + D = 0, \\ By + Cz + D = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{плоскости, параллельные оси} \\ Oz, Oy, Ox \text{ соответственно.} \end{array} \right.$$

Замечание. Если плоскость параллельна координатной плоскости, то в её уравнении отсутствуют координаты, встречающиеся в названии координатной плоскости.

$$\begin{array}{l} Ax + D = 0, \\ в) By + D = 0, \\ Cz + D = 0 \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{плоскости, параллельные координатным} \\ \text{плоскостям } Oyz, Oxz, Oxy \text{ соответственно.} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} x = 0 - \\ г) y = 0 - \\ z = 0 - \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{уравнение плоскости } Oyz, \\ \text{уравнение плоскости } Oxz, \\ \text{уравнение плоскости } Oxy. \end{array} \right.$$

Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору

Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярна к вектору $\mathbf{n} = \{A; B; C\}$, то её уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0 \text{ или } A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (2.24)$$

Уравнение плоскости в «отрезках»

Если плоскость пересекает оси координат Ox, Oy, Oz в точках $M_1(a; 0; 0), M_2(0; b; 0), M_3(0; 0; c)$ соответственно, то её уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (2.25)$$

где $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$.

Уравнение плоскости по трем точкам

Если плоскость проходит через точки $M_i(x_i; y_i; z_i)$ ($i = 1, 2, 3$), не лежащие на одной прямой, то её уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.26)$$

Если раскрыть данный определитель по элементам первой строки, то придём к уравнению вида (2.24).

Нормальное уравнение плоскости

$$\mathbf{n}^0 \mathbf{r} - p = 0 \text{ или } x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad (2.27)$$

где $\mathbf{n}^0 = \frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|}$ – орт нормали;

$\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы.

Замечание. В задачах выгодно использовать то из уравнений плоскости, какое соответствует условиям.

Удобно пользоваться векторной записью уравнений плоскости – это коротко и ясно!



2.3. Прямая в пространстве

Различные виды уравнение прямой в пространстве

Общие уравнения прямой линии

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

если система совместна и определена.

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z},$$

где точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ принадлежит прямой, $\mathbf{a}(a_x; a_y; a_z)$ – направляющий вектор.

Векторно-параметрические уравнения прямой

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}t,$$

- ❖ где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор произвольной точки прямой,
- ❖ $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор заданной точки прямой,
- ❖ $\mathbf{a}$ – направляющий вектор, t – параметр.

Переход от общих уравнений прямой к каноническим уравнениям

Для перехода от уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

к уравнениям каноническим или векторно-параметрическим надо

- ❖ найти точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащую прямой и
- ❖ направляющий вектор $\mathbf{a}(a_x; a_y; a_z)$ из данных уравнений.

Определение точки M_0 , принадлежащей прямой

В данной системе положим одну из координат равной нулю. Пусть $z_0 = 0$, тогда остаётся система двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + D_2 = 0, \end{cases}$$

из которой и определяются две другие координаты x_0, y_0 .

$$M_0(x_0; y_0; 0).$$

Определение направляющего вектора $\mathbf{a}(a_x; a_y; a_z)$

За направляющий вектор $\mathbf{a}$ можно принять любой вектор коллинеарный прямой, таким вектором будет векторное произведение нормальных векторов данных плоскостей

$$\mathbf{n}_1(A_1; B_1; C_1) \text{ и } \mathbf{n}_2(A_2; B_2; C_2).$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2.$$



2.4. Угол между прямой и плоскостью

Рассмотрим прямую $\ell: \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ и плоскость $\Pi: \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} + D = 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Углом между прямой и плоскостью называется наименьший из углов, образованных прямой с её проекцией на плоскость.

Обозначение $\varphi = (\ell; \Pi)$.

Пусть в некоторой прямоугольной декартовой системе координат прямая ℓ задана уравнениями

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z},$$

а плоскость Π :

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Тогда

$$\sin \varphi = \frac{|Aa_x + Ba_y + Ca_z|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

Если прямая ℓ и плоскость Π параллельны, то это значит, что направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости взаимно перпендикулярны; следовательно,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$$

или

$$Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0.$$

Это условие параллельности прямой и плоскости.

Если прямая ℓ и плоскость Π взаимно перпендикулярны, то направляющий вектор прямой и нормальный вектор плоскости параллельны; следовательно,

$$\mathbf{n} = \lambda \mathbf{a}$$

и

$$A = \lambda a_x; B = \lambda a_y; C = \lambda a_z \Rightarrow \frac{A}{a_x} = \frac{B}{a_y} = \frac{C}{a_z}.$$

Это условие перпендикулярности прямой и плоскости.



3. Геометрические образы второго порядка **(Кривые и поверхности второго порядка)**

3.1. Линии второго порядка

Линией (кривой) второго порядка называется множество M точек плоскости, декартовы координаты x и y , которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0, \quad (3.1)$$

где $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c$ – постоянные вещественные числа. Уравнение (3.1) называется **общим уравнением линии второго порядка**.

Рассмотрим частные случаи уравнения (3.1) (наиболее важные из них), имеющие к тому же простейшие (канонические) уравнения.



3.2. Окружность и её уравнение

Определение. Окружностью называется множество точек, находящихся от *данной точки*, называемой *центром*, на *данном расстоянии*.

Сжатая запись: $K[C; R] = \{M \mid |CM| = R\}$.

Уравнение окружности в векторной форме

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = R. \quad (3.2)$$

Нормальное уравнение окружности – уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad (3.3)$$

где точка $C(x_0; y_0)$ *центр*, а R – *радиус окружности*.

Общее уравнение окружности

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0. \quad (3.4)$$

Признаком *общего уравнения окружности* является:

1) *равенство коэффициентов* перед выражениями x^2 и y^2

$$(a_{11} = a_{22}),$$

2) *отсутствие члена с произведением* xu и

3) *возможность найти* R после приведения общего уравнения к каноническому виду.

Чтобы привести общее уравнение к каноническому виду, нужно из членов, содержащих x и y , выделить полный квадрат.

Если *центр окружности* лежит в начале координат, то это означает, что $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, поэтому уравнение (2.3) принимает вид

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (3.5)$$

Этот вид уравнения *окружности* называется *каноническим* (простейшим).



3.3. Эллипс и его простейшее уравнение.

Определение. Эллипсом называется множество точек плоскости, для которых сумма расстояний от *двух данных точек* есть величина постоянная (большая расстояния между данными точками).

Сжатая запись: $\{M \mid |MF_1| + |MF_2| = 2a\}$.

Две данные точки называются **фокусами эллипса**.

Уравнение эллипса в векторной форме

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| + |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = 2a. \quad (3.6)$$

Каноническое уравнение эллипса –

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.7)$$

Параметры: a – большая полуось, b – малая полуось, c – половина фокусного расстояния.

$a^2 - b^2 = c^2$ – основное соотношение между параметрами a, b, c .

$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$ – эксцентриситет.

$r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$ – расстояния до фокусов точки с абсциссой x .

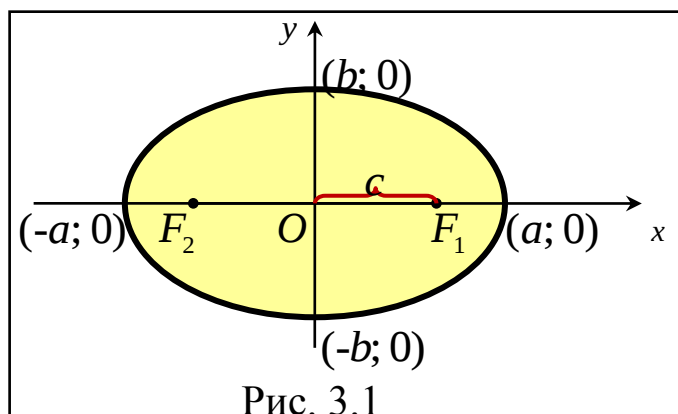


Рис. 3.1

Замечание. Уравнение вида

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

определяет **эллипс**, который параллельно смещен относительно системы координат Oxy таким образом, что **центр эллипса** находится в точке $C(x_0; y_0)$.



3.4. Гипербола и её простейшее уравнение

Определение. Гиперболой называется множество точек плоскости, для которых разность расстояний от *двух данных точек* плоскости по модулю есть величина постоянная (меньшая расстояния между данными точками).

Сжатая запись: $\{M \mid ||MF_1| - |MF_2|| = 2a\}$.

Две данные точки называются **фокусами гиперболы**.

Уравнение гиперболы в векторной форме

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_2| = \pm 2a. \quad (3.8)$$

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.9)$$

Параметры: a – вещественная (действительная) полуось, b – мнимая полуось, c – половина фокусного расстояния.

$c^2 - a^2 = b^2$ – основное соотношение между параметрами a, b, c .

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ – эксцентриситет.

$r_{1,2} = |a \pm \varepsilon x|$ – фокальные радиусы.

$y = \pm \frac{b}{a}x$ – асимптоты.

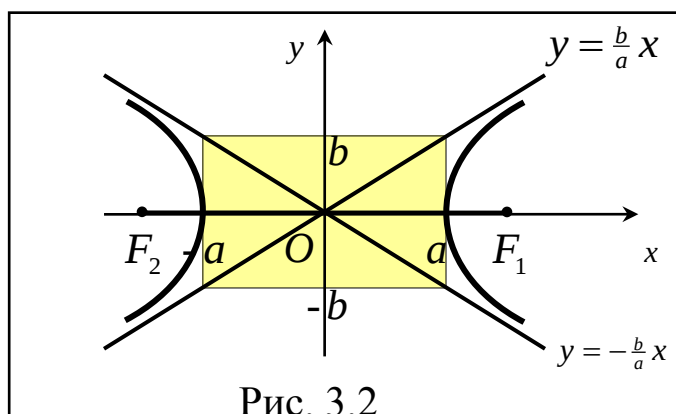


Рис. 3.2

Если $a = b$, то гипербола $x^2 - y^2 = a^2$ называется **равносторонней**.

Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ называются **сопряженными**.

Замечание. Уравнение вида

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

определяет **гиперболу**, которая параллельно смещена относительно системы координат Oxy таким образом, что **центр гиперболы** находится в точке $C(x_0; y_0)$.



3.5. Парабола и ее простейшее уравнение.

Определение. **Парабола** есть **множество** точек плоскости, равноудаленных от **данной прямой и данной точки**, не лежащей на этой прямой.

Сжатая запись: $\{M \mid |MF| = d(M; \ell)\}$.

Данная точка **называется фокусом**, а данная прямая – **директрисой параболы**, при условии, что данная точка не принадлежит данной прямой.

Уравнение искомого множества точек в векторном виде:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1| = p + (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \cdot \mathbf{e}. \quad (3.10)$$

Парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно оси Ox , имеет следующее **каноническое уравнение**

$$y^2 = 2px. \quad (3.11)$$

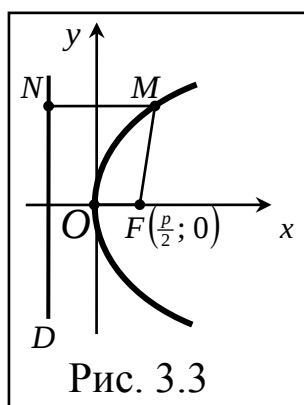


Рис. 3.3

Точка $F(p/2; 0)$ **называется фокусом**, а прямая D , задаваемая уравнением $x = -p/2$, – **директрисой параболы**. Для любой точки M **параболы** верно равенство $FM = MN$. Число $p > 0$ **называется параметром параболы**. Ось Ox является её осью симметрии.

Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2py$, $x^2 = -2py$ определяют **параболы**, иначе ориентированные относительно осей координат.

Замечание. Уравнение вида

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

определяет **параболу**, которая параллельно смещена относительно системы координат Oxy таким образом, что **вершина параболы** находится в точке $C(x_0; y_0)$.

Директрисы, фокусы и точки **эллипса**, **гиперболы** и **параболы** обладают одним замечательным свойством: отношение расстояния от любой точки M кривой до фокуса к расстоянию от этой точки до соответствующей выбранному фокусу директрисы есть величина постоянная, равная **эксцентриситету** кривой. У **параболы эксцентриситет** следует считать равным 1. Это свойство можно принять за определение кривых второго порядка.



3.6. Поверхности второго порядка

Поверхностью в пространстве называется **множество** точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x; y; z) = 0.$$

Если это уравнение можно разрешить относительно z , то **получим** уравнение поверхности в виде $z = f(x; y)$.

Линия в пространстве как пересечение двух поверхностей определяется двумя уравнениями:

$$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0; \\ F_2(x; y; z) = 0. \end{cases}$$

Сфера

Сферой называется **множество** точек пространства, равноудалённых от одной и той же точки, называемой **центром сферы**.

а) Уравнение **сферы** имеет вид

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2.$$

б) Уравнение **сферы** с центром в начале координат

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

Цилиндрические поверхности

Цилиндрической поверхностью, или **цилиндром**, называется поверхность, описанная бесконечной прямой линией (**образующей**), которая движется, оставаясь, всё время параллельной данной прямой линии и пересекая данную кривую (**направляющую**).

Будем рассматривать только такие **цилиндрические поверхности**, у которых **образующие** параллельны одной из координатных осей, а **направляющей** является плоская кривая, лежащая в одной из координатных плоскостей.

Уравнения таких **цилиндрических поверхностей** содержат только две переменные величины. В них будет отсутствовать переменная, одноимённая с той координатной осью, которой параллельны **образующие цилиндрической поверхности**.

Так, всякое уравнение вида

$$F(x; y) = 0 \text{ или } y = f(x),$$

содержащее только две переменные x и y , определяет **цилиндрическую поверхность**, у которой **образующие** параллельны координатной оси Oz , а **направляющая** лежит в плоскости Oxy , причём её уравнение есть одно из уравнений $F(x; y) = 0$ или $y = f(x)$.

Всякое уравнение вида

$$F(x; z) = 0 \text{ или } z = f(x),$$

содержащее только две переменные x и z , не содержащие переменной y , определяет **цилиндрическую поверхность**, у которой **образующие** параллельны оси Oy , а **направляющей** является линия, лежащая в плоскости Oxz своим уравнением одно из приведённых выше уравнений.

Точно так же всякое уравнение вида

$$F(y; z) = 0 \text{ или } z = f(y),$$

содержащее только две переменные y и z , не содержащие переменной x , определяет **цилиндрическую поверхность**, у которой **образующие** параллельны оси Ox , а **направляющей** является линия, лежащая в плоскости Oyz своим уравнением одно из приведённых выше уравнений.

Конические поверхности

Конической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой линией, проходящей через данную точку (*вершину конуса*) и пересекающей данную линию (*направляющую конуса*).

Поверхности второго порядка

Поверхностью второго порядка называется поверхность, определяемая уравнением второй степени относительно текущих координат x, y, z .

При соответствующем выборе прямоугольной декартовой системы координат в пространстве уравнение **поверхности второго порядка** можно привести к одному из видов:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (эллипсоид);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ (однополостный гиперболоид);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \text{ (двуполостный гиперболоид);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \text{ (конус);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z \text{ (эллиптический параболоид);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z \text{ (гиперболический параболоид);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (эллиптический цилиндр);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (гиперболический цилиндр);}$$

$$y^2 = 2px \text{ (параболический цилиндр);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \text{ (пара пересекающихся плоскостей);}$$

$$\frac{x^2}{a^2} = 1 \text{ (пара параллельных плоскостей);}$$

$$x^2 = 0 \text{ (пара совпадающих плоскостей).}$$

Вопросы для самопроверки

1. Чем отличается длина направленного отрезка от его величины?
2. Что называется системой координат?
3. Как определяется декартова система координат (на оси, плоскости и в пространстве)?
4. Как определить координаты точки на оси, плоскости, пространстве?
5. Как найти расстояние между двумя точками на координатной оси, на плоскости, в пространстве, в полярной системе координат?
6. Что называется отношением, в котором точка делит направленный отрезок?
7. Выведите формулы деления отрезка в данном отношении.
8. Центром тяжести треугольника является точка пересечения его медиан. Выведите формулы, выражающие координаты центра тяжести треугольника через координаты его вершин.
9. Сформулируйте определение уравнения линии (в заданной системе координат).
10. Сформулируйте два способа задания линии и соответствующие задачи.
11. Что позволяет установить прямоугольная система координат?
12. Опишите полярную, цилиндрическую и сферическую системы координат.
13. Как можно найти точку пересечения двух линий?
14. Какие поверхности и линии называются алгебраическими?
15. Что называется порядком алгебраической линии и алгебраической поверхности?
16. Что называется направляющим вектором прямой и направляющими векторами плоскости?
17. Что называется нормальным вектором прямой и плоскости?
18. Как записываются векторные уравнения прямой и плоскости?
19. Как записываются параметрические уравнения прямой и плоскости?
20. Какие уравнения прямой и плоскости называются уравнениями в отрезках?
21. Что называется угловым коэффициентом прямой линии на плоскости, и каков его геометрический смысл в декартовой прямоугольной системе координат?

22. Как записываются уравнения прямой линии, проходящей через две точки, в пространстве и на плоскости?

23. Какое уравнение прямой и плоскости называется нормальным?

24. Как называются уравнения $Ax + By + C = 0$, $y = kx + b$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ и каков геометрический смысл входящих в них параметров? Как изменение этих параметров влияет на положение прямой линии?

25. Напишите формулу для определения угла между прямыми линиями.

26. Пусть заданы координаты вершин треугольника.

1) Как найти уравнения и длины сторон?

2) Как найти уравнения и длины медиан?

3) Как найти уравнения и длины биссектрис?

4) Как найти уравнения и длины высот?

5) Как найти внутренние углы треугольника?

6) Как найти центр тяжести и площадь треугольника?

27. Как записывается уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки?

28. Как построить плоскость по её уравнению?

29. Как вычисляются углы между двумя прямыми (на плоскости и в пространстве), между двумя плоскостями, между плоскостью и прямой?

30. Каковы условия параллельности и перпендикулярности двух прямых (на плоскости и в пространстве), двух плоскостей, прямой и плоскости?

31. Как найти расстояние от точки до прямой линии и до плоскости?

32. Среди данных уравнений найти уравнение окружности

1) $x^2 + 2x - y^2 + 7y + 9 = 0$, 2) $x^2 + 2x + y^2 + 7y + 15 = 0$,

3) $x^2 + 2x + y^2 + 7y + 9 = 0$, 4) $x^2 + 2x + y^2 + 7y + 15 = 0$.

33. Каковы признаки общего уравнения окружности?

34. Что называется эллипсом? Как записать его каноническое уравнение?

35. Что называется гиперболой? Как записать её каноническое уравнение?

36. Запишите каноническое уравнение параболы, если её вершина находится в точке $A(-1; 2)$, параметр $p = 2$, а ось симметрии параллельна оси Oy .

Примеры решения задач

1. Введение в аналитическую геометрию

1.1. Простейшие задачи аналитической геометрии

Расстояние между двумя точками на плоскости

Пусть даны две точки $A(x_A; y_A)$ и $B(x_B; y_B)$, тогда

$$AB = d = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Задача 1. Дано $A(2; 4)$, $B(3; 2)$.

▲ Имеем $AB = \sqrt{(3-2)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$. ▼

Если точка B симметрична точке $A(a; b)$ относительно биссектрисы первого – третьего координатных углов, то её координаты легко записать сразу $B(b; a)$. Почему?

Задача 2. Точка B симметрична точке $A(4; -1)$ относительно биссектрисы первого – третьего координатных углов. **Найти AB .**

▲ 1) **Определим** координаты точки B . $B(-1; 4)$.

2) **Воспользуемся** формулой для расстояния между двумя точками на плоскости.

$$AB = \sqrt{(-1-4)^2 + (4-(-1))^2} = \sqrt{25+25} = 5\sqrt{2}. \quad \blacktriangledown$$

Деление отрезка в данном отношении

Если даны концы отрезка $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ и $\lambda = \frac{AM}{MB}$, то

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_M = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda} -$$

формулы, определяющие координаты точки $M(x_M; y_M)$, делящий отрезок AB в данном отношении λ .

Если $\lambda = 1$, то точка M – середина отрезка,

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Найти точку M – значит найти её координаты.

Задача 3. Дано $A(-2; 1)$, $B(3; 6)$, $AM/MB = 3/2$. Найти точку M .

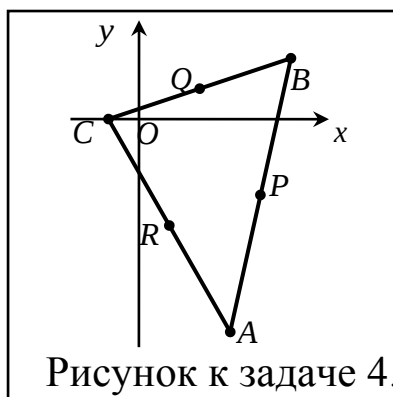
▲ Находим координаты точки M

$$x_M = \frac{-2 + 3/2 \cdot 3}{1 + 3/2} = \frac{(-4 + 9)/2}{5/2} = \frac{5}{5} = 1;$$

$$y_M = \frac{1+3/2 \cdot 6}{1+3/2} = \frac{(2+18)/2}{5/2} = \frac{20}{5} = 4. \quad M(1; 4). \quad \blacktriangledown$$

Задача 4. Даны вершины треугольника $A(3; -7)$, $B(5; 2)$, $C(-1; 0)$.
Найти середины его сторон.

▲ 1. Сделаем чертёж. Обозначим середины сторон буквами P, Q, R в направлении против часовой стрелки (так принято).



2. Подставив соответствующие координаты в формулы, **найдем** искомые точки

$$x_P = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+5}{2} = 4, y_P = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-7+2}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow P\left(4; -\frac{5}{2}\right).$$

$$x_Q = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = 2, y_Q = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{2 + 0}{2} = 1 \Rightarrow Q(2; 1).$$

$$x_R = \frac{x_C + x_A}{2} = \frac{-1+3}{2} = 1, y_R = \frac{y_C + y_A}{2} = \frac{0+(-7)}{2} = -\frac{7}{2} \Rightarrow R\left(1; -\frac{7}{2}\right). \quad \blacktriangledown$$

Задача 5. Даны координаты двух смежных вершин параллелограмма $A(-9/2; -7)$, $B(2; 6)$ и точка пересечения диагоналей $M(3; 3/2)$. Найти координаты двух других вершин.



$\lambda = MD/DB = -1/2$. Следовательно,

$$x_D = \frac{x_M - 1/2 x_B}{1 - 1/2} = 2x_M - x_B, y_D = \frac{y_M - 1/2 y_B}{1 - 1/2} = 2y_M - y_B;$$

$$x_D = 2 \cdot 3 - 2 = 4, y_D = 2 \cdot 3 / 2 - 6 = -3; \underline{D(4; -3)}.$$

Аналогично для точки C :

$$x_C = \frac{x_M - 1/2 x_A}{1 - 1/2} = 2x_M - x_A, \quad y_C = \frac{y_M - 1/2 y_A}{1 - 1/2} = 2y_M - y_A;$$

$$x_C = 2 \cdot 3 - (-9/2) = 1/2, \quad y_C = 2 \cdot 3/2 - (-7) = 10; \quad C(21/2; 10). \quad \blacktriangledown$$

Задача 6. Дан треугольник $A(4; 1), B(7; 5), C(-4; 7)$. Найти точку пересечения биссектрис угла A с противоположной стороной BC .



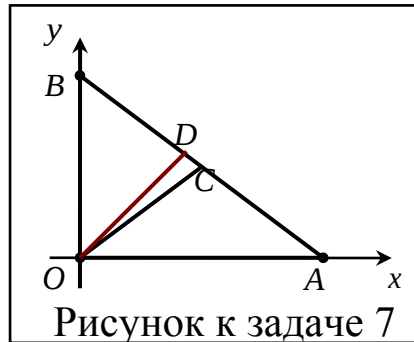
Известно, что биссектриса любого угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, т.е. $\lambda = CD/DB = AC/AB$. **Найдём**

$$\lambda = \frac{AC}{AB} = \frac{\sqrt{(-4-4)^2 + (7-1)^2}}{\sqrt{(7-4)^2 + (5-1)^2}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}} = \frac{10}{5} = 2.$$

Тогда $x_D = \frac{-4 + 2 \cdot 7}{1 + 2} = \frac{10}{3}; y_D = \frac{7 + 2 \cdot 5}{1 + 2} = \frac{17}{3}. \underline{\underline{D\left(\frac{10}{3}; \frac{17}{3}\right)}}$. ▼

Задача 7. В треугольнике с вершинами $O(0; 0)$, $A(8; 0)$, $B(0; 6)$. Определить длину медианы OC и биссектрисы OD .

▲ Сделаем чертёж.



Чтобы найти длины медианы OC и биссектрисы OD , надо найти точки C и D . C – середина отрезка AB , т.е.

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{8 + 0}{2} = 4, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 6}{2} = 3. \quad \underline{\underline{C(4; 3)}}.$$

D – точка пересечения биссектрисы с противоположной стороной,

$$x_D = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_D = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda},$$

где $\lambda = \frac{AD}{DB} = \frac{AO}{OB} = \frac{\sqrt{8^2 + 0^2}}{\sqrt{0^2 + 6^2}} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$

Тогда

$$x_D = \frac{8 + 4/3 \cdot 0}{1 + 4/3} = \frac{24}{7}; \quad y_D = \frac{0 + 4/3 \cdot 6}{1 + 4/3} = \frac{24}{7}. \quad \underline{\underline{D\left(\frac{24}{7}; \frac{24}{7}\right)}}.$$

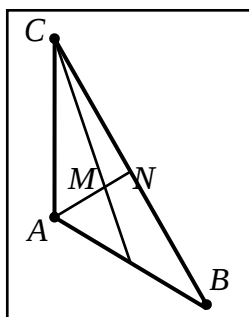
Дальше очевидно:

$$OC = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5; \quad OD = \sqrt{(24/7)^2 + (24/7)^2} = \frac{24\sqrt{2}}{7}. \quad \blacktriangledown$$

Как найти центр тяжести треугольника?

Сведём эту задачу к делению отрезка в данном отношении.

Центр тяжести треугольника – точка пересечения медиан, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от соответствующей вершины.



Чтобы найти центр тяжести треугольника, надо определить координаты точки N как середины стороны BC , а затем найти точку M из условия, что $\lambda = AM/MN = 2/1$:

$$x_M = \frac{x_A + 2x_N}{1+2} = \left\{ x_N = \frac{x_C + x_B}{2} \right\} = \frac{x_A + 2 \frac{x_C + x_B}{2}}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}.$$

Аналогично $y_M = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$

Координаты центра тяжести треугольника – среднее арифметическое из координат его вершин.

Площадь треугольника

Задача 8. Вычислить площадь треугольника с вершинами

$A(2; 3), B(4; -1), C(6; 5).$

▲ $S_{\Delta} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} =$

$$= \pm \frac{1}{2} \cdot 2(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = (14 - 4) = 10. \quad \blacktriangledown$$

Задача 9. Проверить, лежат ли на одной прямой точки $A(1; 3)$, $B(2; 4)$, $C(3; 5)$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \swarrow \quad \searrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, то точки лежат на одной прямой. $\blacktriangledown$

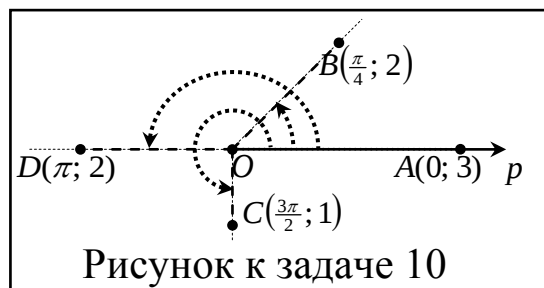
1.2. Полярная система координат

Построение точек в полярной системе координат

При построении точек в полярной системе координат надо

- *сначала построить луч под углом φ к оси $O\rho$,*
- *затем на луче отложить полярный радиус r .*

Задача 10. Построить точки $A(0; 3)$, $B(\pi/4; 2)$, $C(3\pi/2; 1)$, $D(\pi; 2)$.



Построение точек очевидно из чертежа. $\blacktriangledown$

Построение линий в полярной системе координат

Задача 11. Построить линию $r = 2(1 + \cos \varphi)$ и назвать её.

▲ 1) Найдём область расположения линии из условия $r \geq 0$:

$$r \geq 0 \Rightarrow 1 + \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow \text{при любых значениях } \varphi. \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

2) Составим таблицу. Так как данная функция чётная, то в таблице приведены значения $0 \leq \varphi \leq \pi$.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
r	4	3.73	3.41	3	2	1	0.59	0.27	0

3) Поскольку $\cos \varphi$ принимает максимальное значение, равное 1, если аргумент $\varphi = 0, \varphi = 2\pi$, то $r_{\max}(0) = 4$.

Так как $\cos \varphi$ принимает минимальное значение, равное (-1) , если $\varphi = \pi$, то $r_{\min}(\pi) = 0$.

4) Сделаем чертёж, опираясь на таблицу.

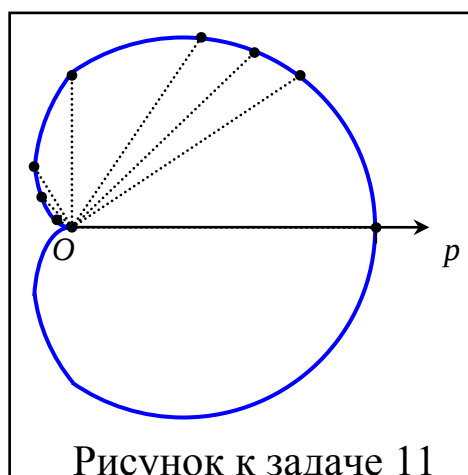


Рисунок к задаче 11

Эта линия – *кардиоида*. ▲

Задача 12. Построить линию $r = a \sin 2\varphi$ ($a > 0$).

▲ 1) Найдём область расположения одного лепестка при условии $r \geq 0$. $r \geq 0 \Rightarrow \sin 2\varphi \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 2\varphi \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \varphi \leq \pi/2$.

2) Форма одного из лепестков определяется $r_{\max} = a$ при значении $\varphi = \pi/4$ и поведением синуса на полупериоде.

3) $k = 2$ (см. Опорный конспект), *роза имеет 4 лепестка*. Лепестки повторяются через угол $2\pi : 4 = \pi/2$. Построим *розу*.

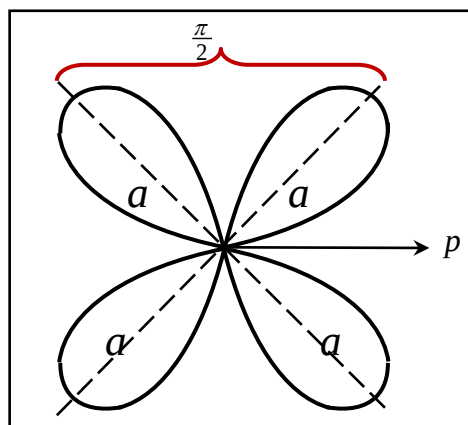


Рисунок к задаче 12. ▼

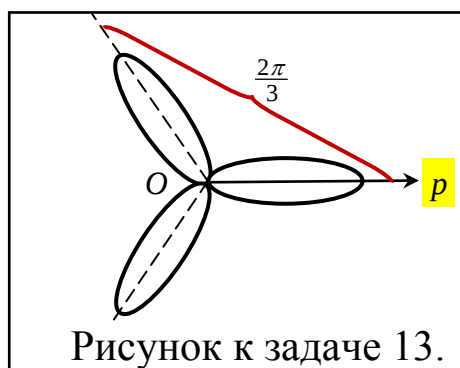
Задача 13. Построить линию $r = 2 \cos 3\varphi$.

▲ 1) Найдём область расположения одного лепестка при условии $r \geq 0$.

$$r \geq 0 \Rightarrow \cos 3\varphi \geq 0 \Rightarrow -\pi/2 \leq 3\varphi \leq \pi/2 \Rightarrow -\pi/6 \leq \varphi \leq \pi/6.$$

2) Форма одного из лепестков определяется $r_{\max} = 2$ при значении $\varphi = 0$ и поведением косинуса на полупериоде.

3) $k = 3$ (см. Опорный конспект), *роза* имеет 3 лепестка. Лепестки повторяются через угол $2\pi : 3 = 2\pi/3$. Построим *розу*.



Переход от одной системы координат к другой

Задача 14. Пусть $r = 2(1 + \cos \varphi)$. Перейти к прямоугольной системе координат.

▲ Используя формулы перехода от прямоугольной системы координат к полярной системе координат

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \end{cases}$$

имеем

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2(\sqrt{x^2 + y^2} + x). \quad \blacktriangledown$$

2. Прямая и плоскость

(геометрические образы первого порядка)

2.1. Основные задачи на прямую линию на плоскости

Приведение общего уравнения прямой к частным видам

Как было установлено, любая прямая линия может быть записана **общим** уравнением

$$Ax + By + C = 0,$$

где A, B, C – вещественные числа, причём A и B не равны одновременно нулю.

Иногда требуется привести это уравнение к одному из частных видов, чаще всего к уравнению **с угловым коэффициентом** $y = kx + b$

или к уравнению **в отрезках** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

1. Приведение **общего** уравнения к уравнению **с угловым коэффициентом**. Если $B \neq 0$, то из **общего** уравнения можно выразить y :

$$By = -Ax - C \mid : B, \quad y = -A/B x - C/B;$$

получим уравнение вида

$$y = kx + b \quad (k = -A/B, b = -C/B).$$

2. Если же $B = 0$, то $A \neq 0$. Разделив на коэффициент A обе части, приведём **общее** уравнение к виду

$$x - a = 0, \quad a = -C/A.$$

3. Приведение **общего** уравнения к уравнению **в отрезках** возможно лишь тогда, когда прямая пересекает обе оси координат, причём в двух различных точках, другими словами, когда ни один из коэффициентов A, B, C в **общем** уравнении не равен нулю. Приведение осуществляем следующим образом:

- **переносим** свободный член в правую часть $Ax + By = -C$;
- **делим** обе части уравнения на коэффициент $(-C)$

$$A/(-C)x + B/(-C)y = 1;$$

- **преобразуем**, уравнение так, чтобы коэффициенты при переменных x и y оказались в знаменателе:

$$\frac{x}{(-C/A)} + \frac{y}{(-C/B)} = 1.$$

Получим уравнение вида

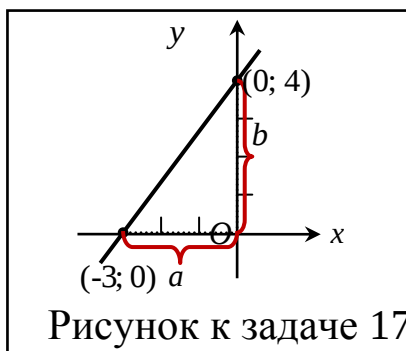
$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ (уравнение прямой в отрезках),}$$

причём $a = -C/A, b = -C/B$.

Задача 17. Общее уравнение прямой $4x - 3y + 12 = 0$ представить в виде: 1) с угловым коэффициентом; 2) в отрезках на осях и 3) в нормальном виде. **Построить** эту прямую линию.



x	0	-3
y	4	0



1) Разрешив данное уравнение относительно y , получим

$$3y = 4x + 12 | :3 \Rightarrow y = 4/3x + 4.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $y = kx + b$, находим

$$k = 4/3, b = 4.$$

2) **Перенесём** свободный член данного уравнения в правую часть $4x - 3y = -12$.

Разделим полученное уравнение на (-12)

$$4/(-12)x + (-3)/(-12)y = 1, \frac{x}{-3} + \frac{y}{4} = 1.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, находим:

$$a = -3, b = 4.$$

3) Чтобы привести уравнение к **нормальному** виду, обе его части необходимо умножить на **нормирующий множитель**

$$\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

выбрав перед корнем знак, противоположный знаку свободного члена в **общем** уравнении прямой. В нашем случае свободный член в **общем** уравнении прямой равен (+12), а поэтому перед корнем в **нормирующем множителе** должен быть выбран противоположный знак, т.е. знак минус, и так как

$$A = 4, B = -3, \text{ то } \mu = \frac{1}{-\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Умножая на множитель $(-1/5)$ обе части данного уравнения

$$4x - 3y + 12 = 0,$$

приведём его к виду $-4/5x + 3/5y - 12/5 = 0$. ▼



Построение прямой по её уравнению

Прямая вполне определена, если известны две принадлежащие ей точки. Для того, чтобы построить прямую по её уравнению, надо, пользуясь этим уравнением, найти координаты двух её точек. Одной из координат придают любое значение, тогда другая однозначно определяется уравнением прямой.

Твёрдо следует помнить,

***что если точка принадлежит прямой,
то координаты этой точки удовлетворяют
уравнению прямой.***

При практическом построении прямой по её уравнению наиболее точный график получится тогда, когда координаты взятых для её построения двух точек – целые числа.

1. Прямая определена **общим** уравнением $Ax + By + C = 0, C \neq 0$.

Для построения прямой проще всего определить точки пересечения прямой с координатными осями. Укажем, как определить координаты точек пересечения прямой с координатными осями.

Координаты точки пересечения прямой с осью Ox находят из

следующих соображений: ординаты всех точек, расположенных на оси Ox , равны нулю. В уравнении прямой полагают, что $y = 0$, и из полученного уравнения находят x . Найденное значение x и есть абсцисса точки пересечения прямой с осью Ox . Если окажется, что значение $x = a$, то координаты точки пересечения прямой с осью Ox будут $(a; 0)$.

Чтобы определить координаты точки пересечения прямой с осью Oy , рассуждают так: абсциссы всех точек, расположенных на оси Oy , равны нулю. Взяв в уравнении прямой $x = 0$, из полученного уравнения определяют y . Найденное значение y и будет ординатой точки пересечения прямой с осью Oy . Если окажется, **например**, что значение $y = b$, то точка пересечения прямой с осью Oy имеет координаты $(0; b)$.

Задача 18. Прямая $2x + y - 6 = 0$ пересекает ось Ox в точке $(3; 0)$. Действительно, взяв в этом уравнении $y = 0$, **получим** для определения x уравнение $2x - 6 = 0$, откуда $x = 3$.

Чтобы определить точку пересечения этой прямой с осью Oy , **положим** в уравнении прямой $x = 0$. **Получим** уравнение $y - 6 = 0$, из которого следует, что $y = 6$. Таким образом, прямая пересекает координатные оси в точках $(3; 0)$ и $(0; 6)$

Замечание. В дальнейшем можно это оформлять в виде таблицы, производя вычисления в уме:

x	0	3
y	6	0

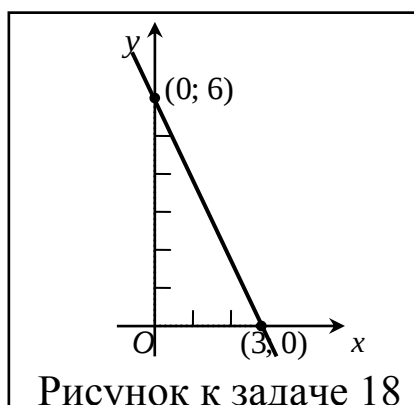


Рисунок к задаче 18

1а. Если в общем уравнении прямой $C = 0$, то прямая, определяемая этим уравнением $Ax + By = 0$, проходит через начало координат. Таким образом, уже известна одна её точка, и для построения прямой остаётся найти ещё одну её точку. Абсциссу x этой точки задают произвольно, а ординату y находят из уравнения прямой.

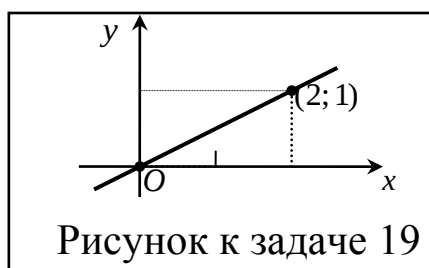
Задача 19. Прямая $2x - 4y = 0$ проходит через начало координат. Вторую точку прямой определим, взяв, $x = 2$. Тогда для определения y получаем уравнение

$$2 \cdot 2 - 4y = 0; 4y = 4; y = 1.$$

Итак, прямая $2x - 4y = 0$ проходит через точки $(0; 0)$ и $(2; 1)$.

Или

x	0	2
y	0	1

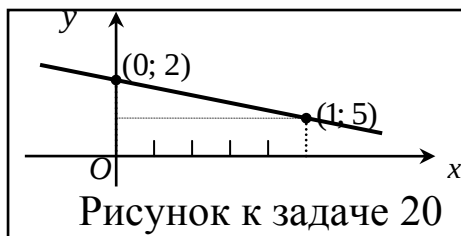


2. Если прямая линия задана уравнением $y = kx + b$ с угловым коэффициентом, то из этого уравнения уже известна величина отрезка b , отсекаемая прямой на оси ординат, и для построения прямой остаётся определить координаты ещё только одной точки, принадлежащей этой прямой.

Если в уравнении $y = kx + b$ $k \neq 0$ и $b \neq 0$, то легче всего определить координаты точки пересечения прямой с осью Ox . Выше было указано, как это сделать.

Задача 20. Построить прямую $y = 3x + 2$.

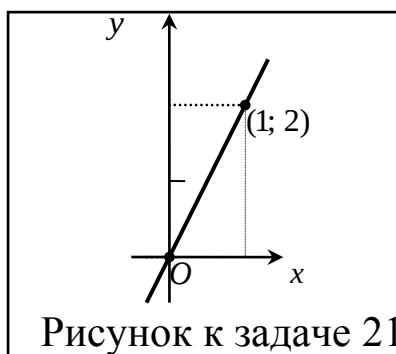
x	0	1
y	2	5



2а. Если же в уравнении $y = kx + b$, $b = 0$, то прямая проходит через начало координат, и тем самым уже известна одна принадлежащая ей точка. Чтобы найти ещё одну точку, следует дать x любое значение и определить из уравнения прямой значение y , соответствующее этому значению x .

Задача 21. Прямая $y = 1/2 x$ проходит через начало координат и точку $(2; 1)$, так как при значении $x = 2$ из её уравнения $y = 1/2 \cdot 2 = 1$.

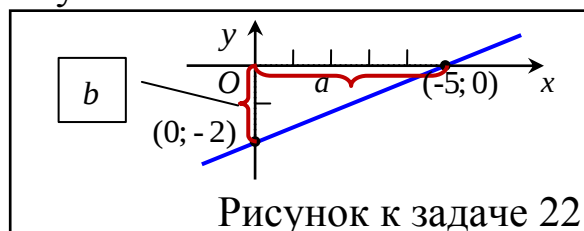
x	0	2
y	0	1



Задача 22. Уравнение $\frac{x}{5} - \frac{y}{2} = 1$ можно переписать в виде

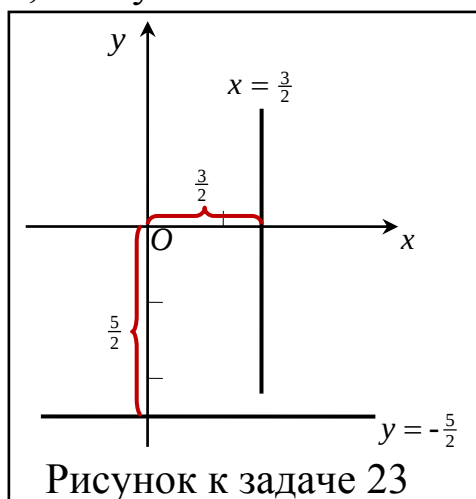
$$\frac{x}{5} + \frac{y}{-2} = 1.$$

Это уравнение прямой в отрезках, причём $a = 5, b = -2$. Откладывая эти отрезки, получим точки $(5; 0), (0; -2)$. Через эти точки проводим прямую.



Задача 23. Уравнение $2x - 3 = 0$ перепишем так $x = 3/2$. Эта прямая параллельна оси Oy и отсекает на оси Ox отрезок, равный $3/2$, справа от оси Oy .

Прямая $2y + 5 = 0$ или $y = -5/2$ параллельна оси Ox , отсекает на оси Oy отрезок, равный $5/2$, книзу от оси Ox .



Точка пересечения прямых

Задача 24. Найти точку пересечения прямых

$$5x - 2y + 13 = 0, x + 3y = 11.$$

▲ Решаем систему
$$\begin{cases} 5x - 2y = -13, \\ x + 3y = 11. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & -2 & -13 \\ 1 & 3 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{-5} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -17 & -68 \\ 1 & 3 & 11 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot (-\frac{1}{17})} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 11 \end{array} \right).$$

$$\begin{cases} y = 4, \\ x + 3y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 4. \end{cases} \underline{\underline{M_0(-1; 4)}}. \blacktriangledown$$

Угол между прямыми

Угол между прямыми определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|,$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты сторон угла, $0 \leq \varphi < \pi/2$
(φ – наименьший из углов между двумя прямыми).

Задача 25. Найти угол между прямыми

$$y = \sqrt{3}x - 5, \quad y = -\sqrt{3}x + 1.$$

▲ 1) Воспользуемся приведённой выше формулой.

2) Найдём угловые коэффициенты сторон угла:

$$k_1 = \sqrt{3}, \quad k_2 = -\sqrt{3}.$$

3) Вычислим

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{1 + (-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}} \right| = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = \frac{\pi}{3}}}. \quad \blacktriangledown$$

Задача 26. Найти угол между прямыми

$$5x - y + 7 = 0, \quad 2x - 3y + 1 = 0.$$

▲ Если прямые заданы в общем виде, то угол между ними определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Угол между данными прямыми

$$\cos \varphi = \frac{5 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3)}{\sqrt{5^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \underline{\underline{\varphi = \pi/4}}. \quad \blacktriangledown$$

ЗАПОМНИТЬ!

Если прямые

$$y = k_1x + b_1, y = k_2x + b_2 \quad (A_1x + B_1y + C_1 = 0, A_2x + B_2y + C_2 = 0)$$

$$\text{параллельны, то } k_1 = k_2 \quad \left(\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \right).$$

Если прямые перпендикулярны, то

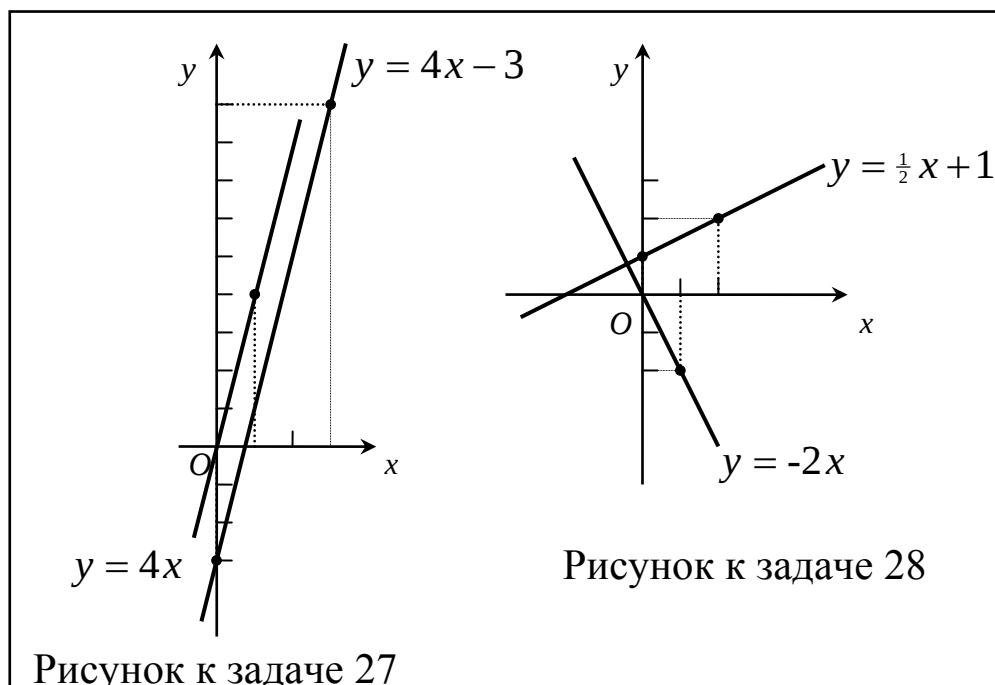
$$k_1 \cdot k_2 = -1 \quad (A_1A_2 + B_1B_2 = 0).$$

Задача 27. Через начало координат провести прямую параллельно прямой $y = 4x - 3$.

- ▲ 1. Определим угловой коэффициент данной прямой $k_1 = 4$
2. Запишем вид уравнения прямой, проходящей через начало координат $y = k_2x$.
3. Найдём угловой коэффициент k_2 из условия параллельности

$$k_1 = k_2, k_2 = 4.$$

4. Уравнение искомой прямой $y = 4x$. ▼



Задача 28. Через начало координат провести прямую линию перпендикулярно прямой $y = 1/2 x + 1$.

- ▲ 1. Определим угловой коэффициент данной прямой $k_1 = 1/2$.

2. **Запишем** вид уравнения прямой, проходящей через начало координат $y = k_2 x$.

3. **Найдём** угловой коэффициент k_2 из условия перпендикулярности $k_1 \cdot k_2 = -1$, $k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{1/2} = -2$.

4. Уравнение искомой прямой $y = -2x$. ▼

Задача 29. Через начало координат провести прямую под углом $\pi/4$ к прямой $y = 2x + 5$.

▲ 1. Определим угловой коэффициент данной прямой $k_1 = 2$.

2. **Запишем** вид уравнения прямой, проходящей через начало координат $y = k_1 x$.

3. Найдём угловой коэффициент k_2 из условий задачи

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|, \quad \varphi = \frac{\pi}{4}, \Rightarrow 1 = \left| \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} \right|,$$

$$\left(\frac{k_2-2}{1+2k_2}\right)^2=1\Rightarrow\left(\frac{k_2-2}{1+2k_2}+1\right)\left(\frac{k_2-2}{1+2k_2}-1\right)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} + 1 = 0, \Rightarrow k_2 - 2 + 1 + 2k_2 = 0 \Rightarrow 3k_2 - 1 = 0 \Rightarrow k_2 = 1/3; \\ \frac{k_2 - 2}{1 + 2k_2} - 1 = 0, \Rightarrow k_2 - 2 - 1 - 2k_2 = 0 \Rightarrow -k_2 - 3 = 0 \Rightarrow k_2 = -3. \end{array} \right.$$

4. Уравнение искомой прямой $y = -3x$ или $y = 1/3x$.

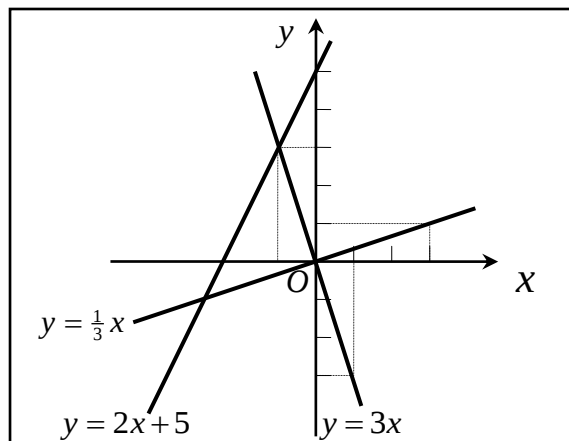


Рисунок к задаче 29. ▼

Пучок прямых

Задача 30. Через точку $M(2; 5)$ провести прямую, перпендикулярную прямой $2x - 3y + 7 = 0$.

▲ 1. Уравнение пучка $y - y_0 = k(x - x_0)$. Центр пучка известен

$$x_0 = 2, y_0 = 5.$$

2. Из условия перпендикулярности $k_1 \cdot k_2 = -1$. **Найдём** угловой коэффициент данной прямой

$$3y = 2x + 7 \mid :3, y = 2/3x + 7/3, k_1 = 2/3.$$

Имеем

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{2/3} = -\frac{3}{2}.$$

3. **Подставим** координаты точки M и k_2 в уравнение пучка:

$$y - 5 = -3/2(x - 2) \Rightarrow \underline{\underline{3x + 2y - 16 = 0.}}$$

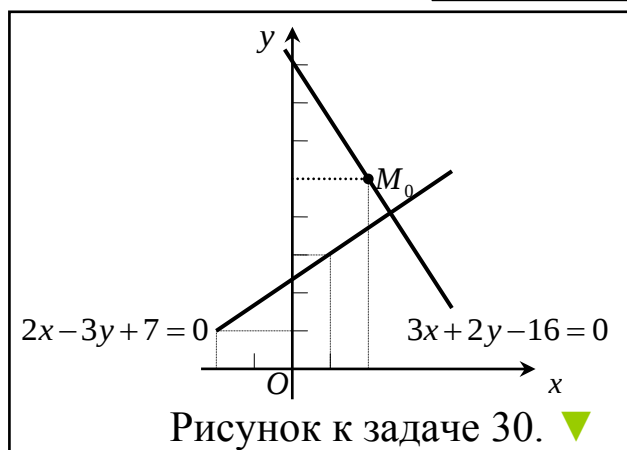


Рисунок к задаче 30. ▼

Задача 31. Найти уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1; 1)$ под углом $\pi/4$ к прямой $2x + 3y = 6$.

СОВЕТ

Решая задачу, содержание операций проговаривайте про себя – это позволит быстрее научиться решать подобные задачи.

▲ 1. Уравнение пучка

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

где $x_0 = -1, y_0 = 1$.

2. Для определения k_2 воспользуемся формулой $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1} \right|$,
где $\varphi = \pi/4$. **Найдём** угловой коэффициент данной прямой

$$3y = 6 - 2x \mid :3, \quad y = -2/3x + 2, \quad k_1 = -2/3.$$

Имеем

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{-2/3} = -\frac{3}{2}.$$

3. Подставим в формулу $\varphi = \pi/4$ и $k_2 = -2/3$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \left| \frac{k_2 - (-2/3)}{1 + (-2/3)k_2} \right|, 1 = \left| \frac{k_2 + 2/3}{1 - 2/3k_2} \right|, 1 - \left(\frac{3k_2 + 2}{3 - 2k_2} \right)^2 = 0,$$

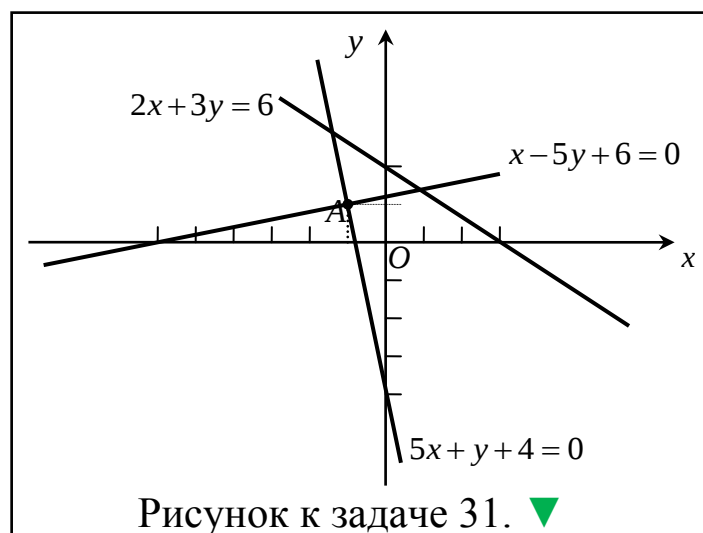
$$\begin{cases} 1 - \left(\frac{3k_2 + 2}{3 - 2k_2} \right) = 0, \\ 1 + \left(\frac{3k_2 + 2}{3 - 2k_2} \right) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 - 2k_2 - (3k_2 + 2) = 0, \\ 3 - 2k_2 + (3k_2 + 2) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -5k_2 + 1 = 0, \\ k_2 + 5 = 0. \end{cases}$$

Имеем $k_2 = 1/5$ и $k_2 = -5$.

4. Подставим $(x_0; y_0)$ и найденные значения k_2 в уравнение пучка

$$y - 1 = 1/5(x - (-1)), \quad x - 5y + 6 = 0,$$

$$y - 1 = -5(x + 1), \quad 5x + y + 4 = 0.$$



Уравнение прямой, проходящей через две точки

Задача 32. Через точки $A(2; -4)$, $B(-9; 3)$ провести прямую.

▲ Задача решается сразу:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + y(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -9 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -9 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x(-4-3) - y(2+9) + (6-36) = 0. \quad \underline{\underline{7x + 11y + 30 = 0.}} \quad \blacktriangledown$$

Расстояние от точки до прямой

Задача 33. Найти расстояние от точки $M(0; 5)$ до прямой $y = \sqrt{3}x + 7$.

▲ Воспользуемся готовой формулой $d = \left| \frac{Ax_M + By_M + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$.

Приводя данное уравнение к общему виду $\sqrt{3}x - y + 7 = 0$, имеем $A = \sqrt{3}$, $B = -1$, $C = 7$. Откуда

$$d = \left| \frac{\sqrt{3} \cdot 0 + (-1) \cdot 5 + 7}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}} \right| = \left| \frac{2}{2} \right| = 1. \quad \blacktriangledown$$

Задача 34. Найти расстояние между параллельными прямыми $2x - 3y = 6$, $4x - 6y = 25$.

▲ 1. То, что прямые параллельны – очевидно $k_1 = k_2 = 2/3$.

Чтобы определить расстояние

между параллельными прямыми, достаточно

❖ *на одной из них выбрать произвольную точку и*

❖ *найти расстояние от этой точки до другой прямой.*

2. **Выберем** точку на прямой $2x - 3y = 6$. Чтобы выбрать точку на прямой, положим $x_0 = 0$ (или любому другому значению), тогда из уравнения $2x - 3y = 6$ найдём $y_0 = -2 \Rightarrow M_0(0; -2)$.

3. Воспользуемся формулой

$$d = \left| \frac{4 \cdot 0 - 6 \cdot (-2) - 25}{\sqrt{4^2 + (-6)^2}} \right| = \left| \frac{-13}{2\sqrt{13}} \right| = \frac{\sqrt{13}}{2}. \quad \blacktriangledown$$

Уравнения биссектрис

Задача 35. Найти уравнение биссектрисы меньшего угла между прямыми $2x + 3y = 12$, $3x + 2y = 12$.

▲ 1. Готовые уравнения $-\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

2. Подставим в них данные задачи:

$$\frac{2x + 3y - 12}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \pm \frac{3x + 2y - 12}{\sqrt{3^2 + 2^2}} \begin{cases} \rightarrow 2x + 3y - 12 = 3x + 2y - 12 \\ \rightarrow 2x + 3y - 12 = -3x - 2y + 12, \end{cases}$$

Уравнения биссектрис $x - y = 0$, $5x + 5y - 24 = 0$.

Чтобы выбрать нужную биссектрису, построим чертёж.

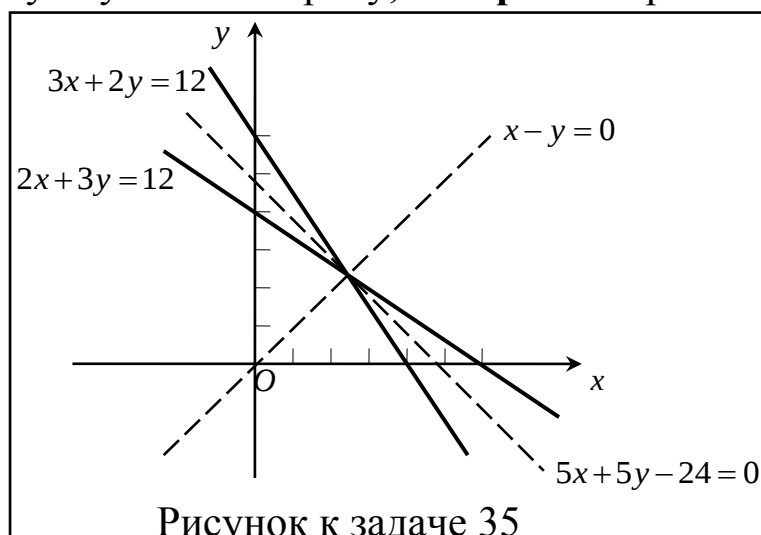


Рисунок к задаче 35

Искомая биссектриса $5x + 5y - 24 = 0$. ▼

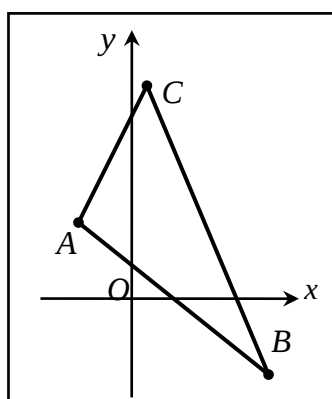
2.1.1. Определение основных элементов в треугольнике

Определение вершин треугольника по уравнениям сторон

Решим задачу в общем виде.

Даны уравнения сторон (AB), (AC), (BC). Найти вершины A, B, C.

▲ 1. Сделать схематический чертёж.



2. Очевидно, что каждая из вершин – точка пересечения соответствующих сторон.

Для определения **вершины** A нужно решить систему $\begin{cases} (AB) \\ (AC) \end{cases}$, **вершины** B – систему $\begin{cases} (AB) \\ (BC) \end{cases}$, **вершины** C – систему $\begin{cases} (AC) \\ (BC) \end{cases}$.

Систему решать с помощью метода Гаусса. ▼



Задача 36. Стороны треугольника заданы уравнениями:

$$(AB): 2x + 4y + 1 = 0, (AC): x - y + 2 = 0, (BC): 3x + 4y - 12 = 0.$$

Найти координаты **вершин** треугольника.

▲ Координаты **вершины** A найдём, решая систему из уравнений сторон AB и AC :

$$\begin{cases} 2x + 4y + 1 = 0, \\ x - y + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = -1, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim (-2) \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{6} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{cases} x - y = -2, \\ y = 1/2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -3/2, \\ y = 1/2. \end{cases}$$

Вершина A имеет координаты $A(-3/2; 1/2)$.

Координаты **вершины** B найдём, решая систему из уравнений сторон AB и BC :

$$\begin{cases} 2x + 4y + 1 = 0, \\ 3x + 4y - 12 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4y = -1, \\ 3x + 4y = 12. \end{cases}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 12 \end{pmatrix} \sim (-1) \begin{pmatrix} 3 & 4 & 12 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \sim (3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & -13 \\ 3 & 4 & 12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -13 \\ 0 & 4 & -27 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{cases} -x = -13, \\ 4x = -27, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 13, \\ y = -27/4. \end{cases}$$

Вершина B имеет координаты $B(13; -27/4)$.

Координаты **вершины C** найдём, решая систему из уравнений сторон BC и AC:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 12 = 0, \\ x - y + 2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 12, \\ x - y = -2. \end{cases}$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 4 & 12 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 7 & 18 \end{pmatrix} \right].$$

$$\begin{cases} x - y = -2, \\ 7y = 18, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4/7, \\ y = 18/7. \end{cases}$$

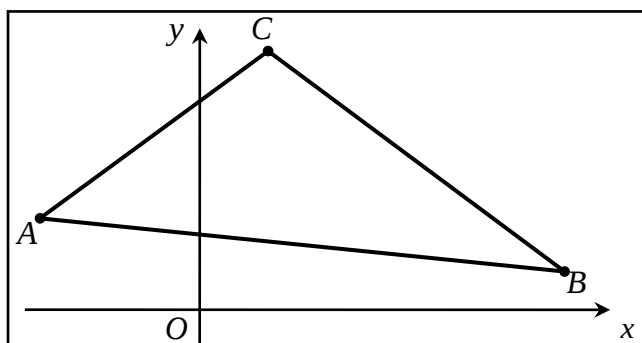
Вершина C имеет координаты $C(4/7; 18/7)$. ▼

**Вычисление длин сторон, медиан, биссектрис и высот
по координатам вершин**

Дано $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$.

I. Найти длины сторон.

▲ 1. Сделать схематический чертёж.



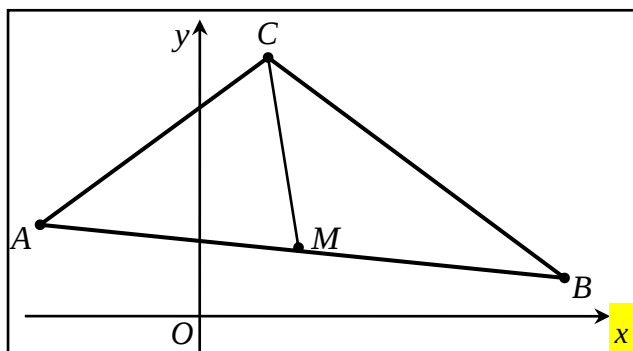
2. Длина каждой из сторон – расстояние между соответствующими вершинами. Это одна из основных задач на метод координат и можно воспользоваться готовой формулой

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}, \quad AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}$$

$$BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}. \quad \blacktriangledown$$

II. Найти длины медиан.

▲ 1. Сделать схематический чертёж.



Длина медианы CM – расстояние CM . Можно воспользоваться формулой расстояния между двумя точками.

2. Сначала нужно найти координаты точки M по формулам деления

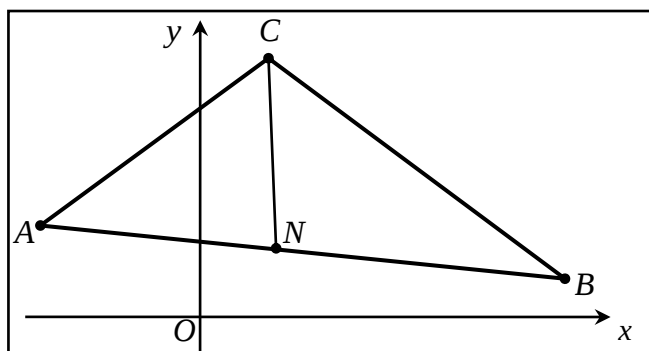
отрезка пополам $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.

3. $CM = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2}$.

Аналогично находятся длины остальных медиан. ▼

III. Найти длины биссектрис.

▲ 1. Сделать схематический чертёж.



Длина биссектрисы CN – расстояние между двумя точками.

2. **Найдём** координаты точки N . По свойству биссектрисы точка N делит сторону AB в отношении пропорциональном длинам прилежащих сторон. Итак, **находим** длины сторон

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}, \quad BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2}.$$

Затем **определяем**

$$\lambda = \frac{AN}{NB} = \frac{AC}{BC}.$$

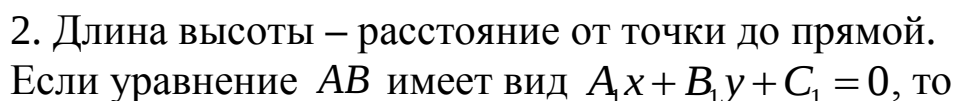
Находим координаты точки N

3. Находим длину биссектрисы

Аналогично находятся длины остальных биссектрис. ▼

IV. Найти длины высот.

▲ 1. Сделать схематический чертёж.



где $C(x_c; y_c)$ вершина, из которой опущена высота CH .

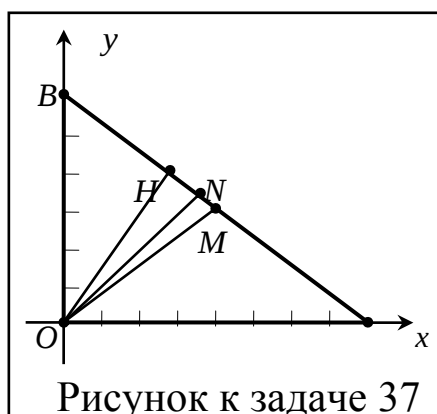
Формулой, определяющей расстояние между двумя точками, для определения длины высоты пользоваться нецелесообразно.

Аналогично определяются длины остальных высот. ▼

Замечание. Запомните, что длина высоты определяется иначе, чем длины сторон, медиан, биссектрис.

Задача 37. Дан треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $A(8; 0)$, $B(0; 6)$.

Найти длины стороны AB , медианы OM , биссектрисы ON и высоты OH .



1. Для определения длины стороны AB воспользуемся формулой

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$AB = \sqrt{(8-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{64+36} = 10.$$

2. Для определения длины медианы OM надо **найти** сначала координаты точки M ,

$$x_M = \frac{8+0}{2} = 4, y_M = \frac{0+6}{2} = 3, M(4; 3).$$

$$OM = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

3. Для определения длины биссектрисы ON **найдем** координаты точки N , для чего **определим** сначала

$$\lambda = AN/NB = OA/OB = 8/6 = 4/3,$$

тогда

$$x_N = \frac{8 + 4/3 \cdot 0}{1 + 4/3} = 24/7, y_N = \frac{0 + 4/3 \cdot 6}{1 + 4/3} = 24/7, N(24/7; 24/7),$$

$$ON = \sqrt{(24/7-0)^2 + (24/7-0)^2} = 24\sqrt{2}/7.$$

4. Длина высоты OH – расстояние от точки O до прямой AB . Уравнение AB **найдем** по отрезкам, которые прямая отсекает на осях координат

$$\frac{x}{8} + \frac{y}{6} = 1 \Rightarrow 6x + 8y = 48 \Rightarrow 3x + 4y - 24 = 0.$$

Тогда

$$d = OH = \frac{|3x_0 + 4y_0 - 24|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{24}{5},$$

где $O(x_0; y_0)$ вершина, из которой опущена высота OH . ▼

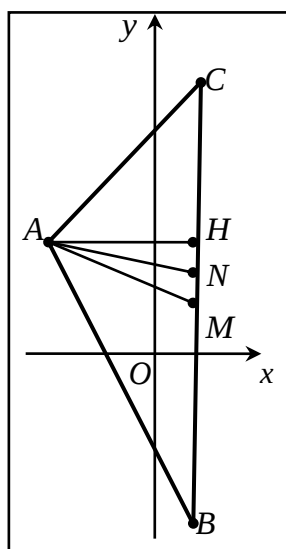


Определение уравнений сторон, медиан, биссектрис и высот по координатам вершин

Дано $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$.

Найти $(AB), (AM), (AN), (AH)$.

▲ 1. Сделаем схематический чертёж.



2. Уравнение стороны AB – уравнение прямой, проходящей через точки A и B

$$(AB): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение медианы AM **определяется** уравнением прямой, проходящей через точки A и M

$$(AM): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \end{vmatrix} = 0$$

но координаты точки M ещё нужно найти по формулам деления отрезка пополам.

Уравнение биссектрисы AN также **определяется** уравнением

$$(AN): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_N & y_N & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Координаты точки N можно найти по формулам деления отрезка в отношении

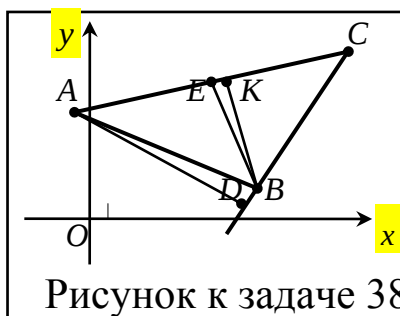
$$\lambda = \frac{AN}{NB} = \frac{AC}{BC}$$

Уравнение высоты AH . Высота – прямая, проходящая через вершину A перпендикулярно стороне BC . Итак, **находим** уравнение стороны BC , **приводим** его к виду $y = k_{BC}x + b$, **определяем** $k_{AH} = -\frac{1}{k_{BC}}$, **пишем** уравнение AH

$$(AH): y - y_A = k_{AH}(x - x_A). \quad \blacktriangledown$$

Замечание. Запомните, что длина и уравнение высоты определяется иначе, чем длины и уравнения сторон, медиан и биссектрис.

Задача 38. В треугольнике с вершинами $A(-1; 7)$, $B(11; 2)$, $C(17; 10)$. Найти уравнения: а) стороны BC ; б) медианы BE ; в) биссектрисы BK ; г) высоты AD .



а) **Найдём** уравнение стороны BC :

$$(BC): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 17 & 10 & 1 \\ 11 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x(-1)^{1+1}(10-2) + y(-1)^{1+2}(17-11) + 1(-1)^{1+3}(34-110) = 0,$$

$$8x - 6y - 76 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{4x - 3y - 38 = 0.}}$$

б) Для нахождения уравнения медианы BE надо **найти** сначала координаты точки E ,

$$x_E = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1 + 17}{2} = 8, \quad y_E = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{7 + 10}{2} = \frac{17}{2}, \quad E\left(8; \frac{17}{2}\right).$$

Тогда уравнение медианы будет

$$(BE): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 11 & 2 & 1 \\ 8 & \frac{17}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x\left(2 - \frac{17}{2}\right) - y(11 - 8) + \left(\frac{187}{2} - 16\right) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{13x + 6y - 155 = 0.}}$$

в) При вычислении биссектрисы часто бывают очень громоздкие вычисления. **Найдём** сначала координаты точки K

$$x_K = \frac{x_A + \lambda x_C}{1 + \lambda}, \quad y_K = \frac{y_A + \lambda y_C}{1 + \lambda}, \quad \text{где } \lambda = \frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC},$$

$$AB = \sqrt{(11 - (-1))^2 + (2 - 7)^2} = \sqrt{144 + 25} = 13,$$

$$BC = \sqrt{(17 - 11)^2 + (10 - 2)^2} = \sqrt{36 + 64} = 10, \quad \lambda = \frac{13}{10}.$$

$$x_K = \frac{-1 + \frac{13}{10} \cdot 17}{1 + \frac{13}{10}} = \frac{211}{23}, \quad y_K = \frac{7 + \frac{13}{10} \cdot 10}{1 + \frac{13}{10}} = \frac{200}{23}, \quad K\left(\frac{211}{23}; \frac{200}{23}\right).$$

Получим уравнение биссектрисы:

$$(BK): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 11 & 2 & 1 \\ \frac{211}{23} & \frac{200}{23} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x\left(2 - \frac{200}{23}\right) - y\left(11 - \frac{211}{23}\right) + \left(11 \cdot \frac{200}{23} - 2 \cdot \frac{211}{23}\right) = 0,$$

$$\underline{\underline{11x + 3y - 127 = 0.}}$$

г) Уравнение высоты нельзя **найти** аналогично уравнениям сторон, медиан, биссектрис. Это – **совсем другая задача**.

$$(AD): y - y_A = k_{AD}(x - x_A).$$

$$k_{AD} = -\frac{1}{k_{BC}}; \quad k_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{10 - 2}{17 - 11} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

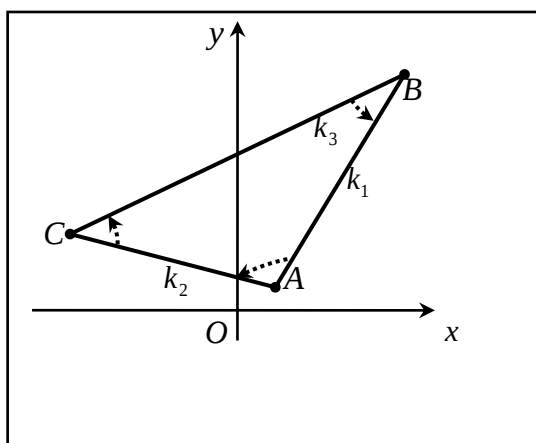
$$k_{AD} = -\frac{3}{4}, \quad (AD): y - 7 = -\frac{3}{4}(x - (-1)), \Rightarrow \underline{\underline{3x + 4y - 25 = 0.}}$$

ЗАПОМНИТЕ,

что длина и уравнение высоты определяется иначе, чем длины и уравнение сторон, медиан и биссектрис.

Вычисление внутренних углов треугольника

- ▲ 1. Сделать *точный* чертеж треугольника в системе Oxy .



2. **Определить** угловые коэффициенты сторон.

- ❖ Если заданы координаты вершин, то $k_i = \Delta y_i / \Delta x_i$;
- ❖ если заданы уравнения сторон вида $A_i x + B_i y + C_i = 0$, то

$$k_i = -A_i / B_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

3. **Составить** формулы для определения тангенсов внутренних углов. Пусть k_1, k_2, k_3 – угловые коэффициенты сторон (чертеж).

Отметим для каждого угла *положительное направление* его измерения дугой со стрелкой (*против часовой стрелки*), тогда

$$\operatorname{tg} A = \frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3}.$$

Замечание. В каждой формуле в числителе уменьшаемым является угловой коэффициент той стороны, к которой обращена стрелка.

4. По тангенсам **найти** углы как арктангенсы.

Задача 39. Найти внутренние углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x + 2y = 0$, $x + 4y = 6$, $x - 4y = 6$.

▲ 1. Сделаем чертёж по уравнениям сторон и отметим *стрелками положительное направление измерения углов*.

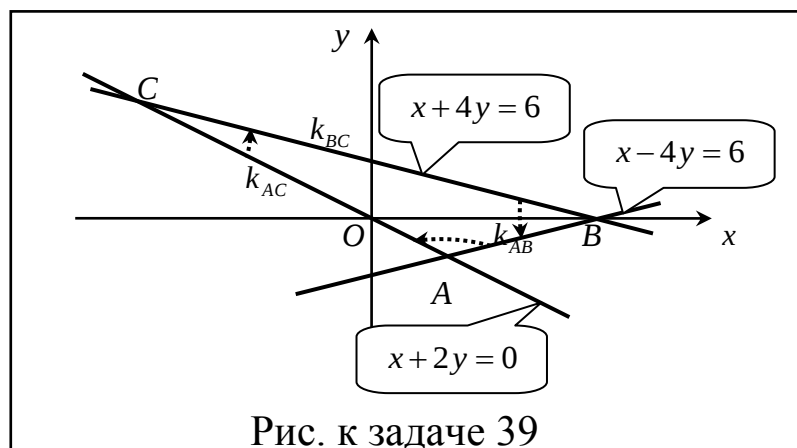


Рис. к задаче 39

2. Найдём угловые коэффициенты сторон по их уравнениям:

$$(AB): x - 4y = 6 \Rightarrow -4y = -x + 6 | :(-4) \Rightarrow y = 1/4 x - 3/2, k_{AB} = 1/4;$$

$$(BC): x + 4y = 6 \Rightarrow 4y = -x + 6 | :4 \Rightarrow y = -1/4 x + 3/2, k_{BC} = -1/4;$$

$$(AC): x + 2y = 0 \Rightarrow 2y = -x | :2 \Rightarrow y = -1/2 x, k_{AC} = -1/2.$$

3. Составим формулы для определения внутренних углов треугольника:

$$\operatorname{tg} A = \frac{k_{AC} - k_{AB}}{1 + k_{AC} k_{AB}}; \operatorname{tg} B = \frac{k_{AB} - k_{BC}}{1 + k_{AB} k_{BC}}; \operatorname{tg} C = \frac{k_{BC} - k_{AC}}{1 + k_{BC} k_{AC}}.$$

4. Вычислим тангенсы углов:

$$\operatorname{tg} A = \frac{-1/2 - 1/4}{1 + (-1/2) \cdot 1/4} = -\frac{6}{7}; \operatorname{tg} B = \frac{1/4 - (-1/4)}{1 + 1/4(-1/4)} = \frac{8}{15};$$

$$\operatorname{tg} C = \frac{-1/4(-1/2)}{1 + (-1/4)(-1/2)} = \frac{2}{9}.$$

5. Найдём углы:

$$\hat{A} = \operatorname{arctg}(-6/7); \hat{B} = \operatorname{arctg} 8/15; \hat{C} = \operatorname{arctg} 2/9. \blacktriangledown$$



Вычисление различных элементов треугольника по трём данным элементам

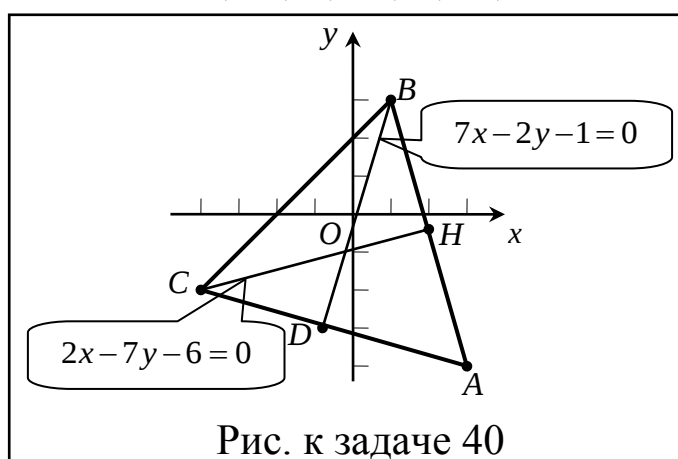
Задача 40. Дана вершина треугольника $A(3; -4)$ и уравнения двух высот $7x - 2y - 1 = 0$, $2x - 7y - 5 = 0$. Найти стороны.

КАК РЕШАТЬ ЗАДАЧУ?

- **Сделать** точный (в системе Oxy) или схематический чертёж и записать кратко, что **дано** и, что нужно **найти** в обозначениях, соответствующих чертежу.
- **Подобрать** метод определения неизвестных, сведя нахождение каждого из них к одной из основных задач метода координат или задач на прямую.
- **Выписать** необходимые для определения неизвестных формулы, уравнения и **выяснить**, что в них не хватает.

▲ 1. Дано $A(3; -4)$, (CH) и (BD) – уравнения высот.

Найти уравнения сторон (AB) , (AC) , (CB) .



2. Проверим, что высоты не проходят через точку A :

$$2 \cdot 3 - 7 \cdot (-4) - 6 = 28 \neq 0; \quad 7 \cdot 3 - 2 \cdot (-4) - 1 = 28 \neq 0.$$

Т.к. стороны AB и AC перпендикулярны высотам, то их можно найти как прямые, проходящие через точку A перпендикулярно данным прямым по уравнению

$$y - y_A = k(x - x_A),$$

где k находится из условия перпендикулярности.

Найдём уравнение стороны AB : $(AB \perp CH)$

$$A(3; -4); \quad k_{AB} \cdot k_{CH} = -1;$$

$$(CH): 2x - 7y - 6 = 0 \Rightarrow 7y = 2x - 6 \mid : 7 \Rightarrow y = 2/7 x - 6/7; \quad k_{CH} = 2/7;$$

$$k_{AB} = -\frac{1}{2/7} = -7/2.$$

Тогда $y - (-4) = -7/2(x - 3) \Rightarrow \underline{7x + 2y - 13 = 0}$.

Найдём уравнение стороны AC : $(AC \perp BD)$

$$A(3; -4); k_{AC} \cdot k_{BD} = -1;$$

$$(BD): 7x - 2y - 1 = 0 \Rightarrow 2y = 7x - 1 : 2 \Rightarrow y = 7/2 x - 1/2; k_{BD} = 7/2;$$

$$k_{AC} = -\frac{1}{7/2} = -2/7.$$

Тогда $y + 4 = -2/7(x - 3) \Rightarrow \underline{2x + 7y + 22 = 0}$.

Найдём уравнение стороны CB :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_C & y_C & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Координаты точек C и B **найдем** из линейных систем как координаты точек пересечения соответствующих линий.

$$(x_B; y_B): \begin{cases} (BD) \\ (AB) \end{cases}; \begin{cases} 7x + 2y - 13 = 0, \\ 7x - 2y - 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x + 2y = 13, \\ 7x - 2y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 13 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 2 & 13 \\ 0 & -4 & -12 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \sim \begin{pmatrix} 7 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 7x + 2y = 13, \\ y = 3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 3, \end{cases} \underline{B(1; 3)}.$$

$$(x_C; y_C): \begin{cases} (CH) \\ (AC) \end{cases}; \begin{cases} 2x - 7y - 6 = 0, \\ 2x + 7y + 22 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 7y = 6, \\ 2x + 7y = -22. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 & 6 \\ 2 & 7 & -22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -7 & 6 \\ 4 & 0 & -16 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \sim \begin{pmatrix} 2 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} 2x - 7y = 6, \\ x = -4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4, \\ y = -2. \end{cases} \underline{C(-4; -2)}.$$

$$(CB): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -4 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(-2-3) - y(-4-1) + 1 \cdot (-12+2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x - y + 2 = 0.}} \quad \blacktriangledown$$

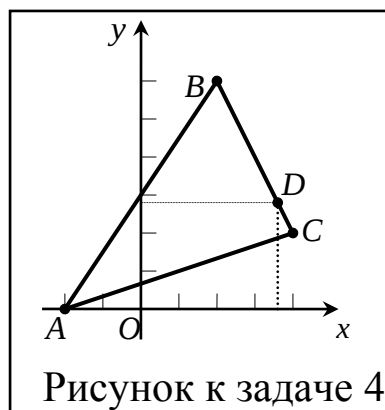
Задача 41. Найти уравнение третьей стороны треугольника, если даны уравнения двух его сторон

$$(AC): x - 3y + 2 = 0, \quad (AB): 3x - 2y + 6 = 0$$

и основание $D(18/5; 14/5)$ высоты AD .

▲ 1. Дано $D(18/5; 14/5)$, $(AC): x - 3y + 2 = 0$,
 $(AB): 3x - 2y + 6 = 0$.

Найти (BC) .



2. BC – сторона, перпендикулярная AD . Её можно **найти** как прямую, проходящую через точку D перпендикулярно AD по уравнению $y - y_D = k_{BC}(x - x_D)$, где $k_{BC} = -1/k_{AD}$.

3. **Найдём** k_{AD} : $k_{AD} = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A}$.

Координаты точки A можно найти из системы

$$\begin{cases} (AC) \\ (AB) \end{cases}; \begin{cases} x - 3y + 2 = 0, \\ 3x - 2y + 6 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -2, \\ 3x - 2y = -6. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-3)} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 7 & 0 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{7} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

$$\begin{cases} x - 3y = -2, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2, \\ y = 0. \end{cases} \underline{A(-2; 0)}.$$

$$k_{AD} = \frac{14/5 - 0}{18/5 - (-2)} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}, k_{BC} = -\frac{1}{1/2} = -2.$$

$$4. (BC): y - 14/5 = -2(x - 18/5) \Rightarrow 5y - 14 = -2(5x - 18) \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{\underline{2x + y - 10 = 0.}} \quad \blacktriangledown$$

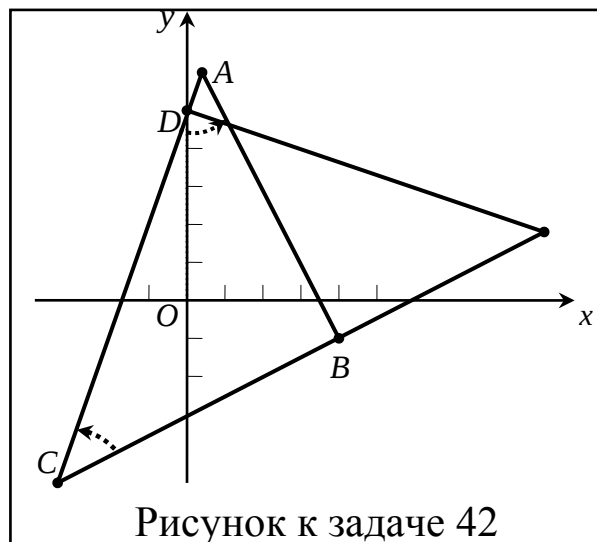
Задача 42. Даны уравнения сторон равнобедренного треугольника $2x + y - 7 = 0$, $x - 2y - 6 = 0$ и точка $(0; 5)$ на его основании.

Найти уравнение основания треугольника.

▲ Дано $D(0; 5)$, $(AB): 2x + y - 7 = 0$, $(BC): x - 2y - 6 = 0$.

Найти (AC) .

1. Сделаем чертёж.



2. Сторону AC найдём как прямую, проходящую через точку D и образующую равные углы $(\hat{A} = \hat{C})$ с данными прямыми

$$y - y_D = k_{AC}(x - x_D).$$

Угловой коэффициент k_{AC} найдём из условия $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} C$

$$\frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB} \cdot k_{AC}} = \frac{k_{AC} - k_{BC}}{1 + k_{AC} \cdot k_{BC}}.$$

Так как $(AB): 2x + y - 7 = 0 \Rightarrow y = -2x + 7, k_{AB} = -2,$

$(BC): x - 2y - 6 = 0 \Rightarrow 2y = x - 6 \mid : 2 \Rightarrow y = 1/2 x - 3, k_{BC} = 1/2,$

то

$$\begin{aligned} \frac{-2 - k_{AC}}{1 + (-2)k_{AC}} &= \frac{k_{AC} - 1/2}{1 + 1/2 k_{AC}} \Rightarrow -\frac{2 + k_{AC}}{1 - 2k_{AC}} = \frac{2k_{AC} - 1}{2 + k_{AC}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2 + k_{AC})^2 = (2k_{AC} - 1)^2 \Rightarrow \\ &(2 + k_{AC} - (2k_{AC} - 1))(2 + k_{AC} + (2k_{AC} - 1)) = 0 \Rightarrow \\ &(3 - k_{AC})(3k_{AC} + 1) = 0 \Rightarrow k_{AC} = 3 \vee k_{AC} = -1/3. \end{aligned}$$

3. Имеем $(AC): y - 5 = 3(x - 0)$ и $y - 5 = -1/3(x - 0)$ или

$$\underline{3x - y + 5 = 0} \text{ и } \underline{x + 3y - 15 = 0.} \quad \blacktriangledown$$

Разные задачи на прямую

Рассмотрим несколько задач на прямую, не связанных с треугольником, но методика их решения остаётся той, же самой.

Задача 43. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями

$$x - y - 1 = 0 \text{ и } x - 2y = 0.$$

Диагонали его пересекаются в точке $M(3; -1)$. **Найти** уравнения двух других сторон параллелограмма.

▲ **Дано** $M(3; -1)$ – точка пересечения диагоналей.

$$(AD): x - y - 1 = 0, (AC): x - 2y = 0.$$

Найти $(BC), (CD)$.

1. Сделаем чертёж. Из чертежа видно, что данные стороны AB и AD не параллельны, они – смежные стороны.

2. Чтобы определить (BC) и (CD) нужно **найти** координаты точки C и через эту точку провести прямые параллельные данным.

Найдём координаты точки C из условия, что точка M делит отрезок AC в отношении $\lambda = \frac{AM}{MC} = 1; x_M = \frac{x_A + x_C}{2}, y_M = \frac{y_A + y_C}{2}.$

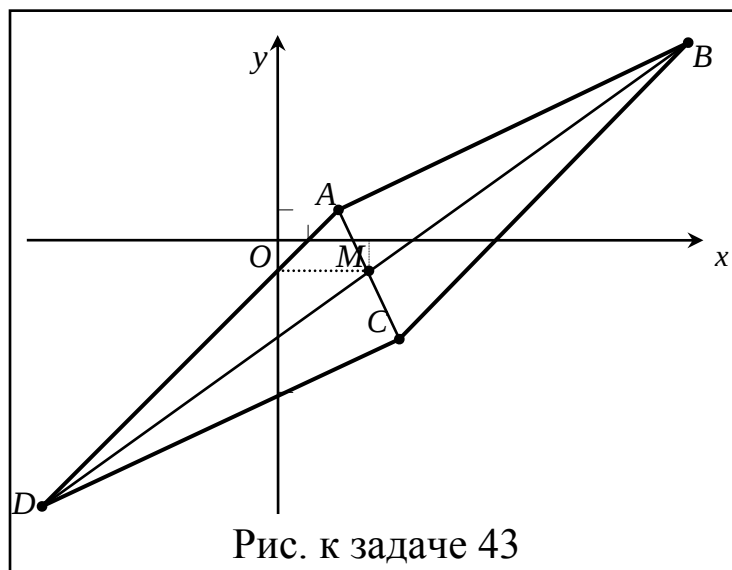


Рис. к задаче 43

Для того чтобы это сделать, надо найти координаты точки A из системы

$$\begin{cases} (AB) \\ (AD) \end{cases} \begin{cases} x - y - 1 = 0, \\ x - 2y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 1, \\ x - 2y = 0. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ y = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \quad \underline{A(2; 1)}.$$

Далее имеем

$$\begin{cases} 2x_M = 2 + x_C, \\ 2y_M = 1 + y_C, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 2 \cdot 3 - 2 = 4, \\ y_C = 2 \cdot (-1) - 1 = -3. \end{cases} \quad \underline{C(4; -3)}.$$

Напишем уравнения прямых (BC) и (CD) .

$$(BC): y - y_C = k_{BC}(x - x_C); \quad k_{BC} = k_{AD};$$

$$(AD): x - y - 1 = 0 \Rightarrow y = x - 1; \quad k_{AD} = 1;$$

$$(BC): y - (-3) = 1 \cdot (x - 4) \Rightarrow \underline{\underline{x - y - 7 = 0}}.$$

$$(CD): y - y_C = k_{CD}(x - x_C); \quad k_{CD} = k_{AB};$$

$$(AB): x - 2y = 0 \Rightarrow y = 1/2 x; \quad k_{AB} = 1/2.$$

$$(CD): y - (-3) = 1/2 \cdot (x - 4) \Rightarrow \underline{\underline{x - 2y - 10 = 0}}. \quad \blacktriangledown$$

2.2. Плоскость в пространстве

2.2.1. Простейшие задачи

Задача 44. Проверить, лежат ли точки $A(2; 1; 6)$, $B(5; -1; 3)$ и $C(3; -2; 0)$ на плоскости $3x + 5y - 2z + 1 = 0$.

***Если точка лежит на плоскости,
то её координаты обращают
уравнение плоскости в верное равенство.***

▲ **Подставим** координаты точек A, B , и C в данное уравнение плоскости

$$A(2; 1; 6): 3 \cdot 2 + 5 \cdot 1 - 2 \cdot 6 + 1 = 6 + 5 - 12 + 1 = 0;$$

$$B(5; -3; 1) : 3 \cdot 5 + 5 \cdot (-3) - 2 \cdot 1 + 1 = 15 - 15 - 2 + 1 = -1 \neq 0;$$

$$C(3; -2; 0) : 3 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) - 2 \cdot 0 + 1 = 9 - 10 + 1 = 0.$$

Убеждаемся, что точки A и C лежат на плоскости, а точка B – не лежит. ▼

Задача 45. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -7; 3)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

▲ Дано $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $A(2; -7; 3)$. Найти уравнение плоскости.
Плоскость, проходящая через данную точку $A(\mathbf{r}_0)$ перпендикулярно к вектору $\mathbf{n}$, имеет уравнение $\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$

$$4(x-2)+5(y+7)-1(z-3)=0 \Rightarrow 4x+5y-z+30=0. \quad \blacktriangledown$$

Задача 46. Какие отрезки на координатных осях отсекает плоскость $2x + 3y - 5z + 30 = 0$?

▲ Приведём уравнение к виду $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Для этого **перенесём** в правую часть равенства свободный член. Данное уравнение **запишется** в виде $2x + 3y - 5z = -30$.

Разделим теперь обе части на число (-30) и получим

$$\frac{2x}{-30} + \frac{3y}{-30} - \frac{5z}{-30} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-15} + \frac{y}{-10} + \frac{z}{6} = 1.$$

Величины отрезков, отсекаемых на координатных осях, **равны:**

$$a = -15; b = -10, c = 6. \quad \blacktriangledown$$

Задача 47. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(1; -3; 5)$ и отсекающей на осях Oy и Oz вдвое большие отрезки, чем на оси Ox .

▲ 1. Уравнение *в отрезках* $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$

2. По условию $b = 2a, c = 2a.$

3. Воспользуемся тем, что точка $M_1(1; -3; 5)$ принадлежит плоскости:

$$\frac{1}{a} + \frac{-3}{2a} + \frac{5}{2a} = 1 \Rightarrow \frac{4}{2a} = 1 \Rightarrow a = 2.$$

Тогда

$$\underline{\underline{\frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1. \quad \blacktriangledown}}$$

Задача 48. Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M_0(2; 1; 3).$

▲ 1. Запишем в общем виде уравнение плоскости, проходящей через ось Ox ($A = 0, D = 0$)

$$By + Cz = 0.$$

2. Так как точка M_0 принадлежит плоскости, то её координаты обращают уравнение плоскости в верное равенство и из этого условия можно найти коэффициенты уравнения плоскости

$$B \cdot 1 + C \cdot 3 = 0 \Rightarrow B = -3C,$$

$$-3Cy + Cz = 0.$$

Так как $C \neq 0$, то $\underline{\underline{-3y + z = 0. \quad \blacktriangledown}}$

Задача 49. Через точку $M_0(5; -3; 2)$ провести плоскость параллельную координатной плоскости Oxy .

▲ 1. Запишем в общем случае уравнение плоскости параллельной Oxy : $Cz + D = 0.$

2. Так как точка M_0 принадлежит плоскости, то

$$C \cdot 2 + D = 0 \Rightarrow D = -2C,$$

тогда

$$Cz - 2C = 0, C \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{z = 2}}. \quad \blacktriangledown$$

Задача 50. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox (параллельной плоскости Oyz) и проходящей через точку $M_0(3; 7; -1)$.

▲ 1. Уравнение плоскости перпендикулярной оси Ox (параллельной плоскости $Oyz : Ax + D = 0$).

2. Так как точка M_0 принадлежит плоскости, то

$$3A + D = 0 \Rightarrow D = -3A,$$

тогда $Ax - 3A = 0, A \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 3}}. \quad \blacktriangledown$

Задача 51. Найти уравнение плоскости параллельной оси Oz и проходящей через точки $M_1(2; 3; -1)$ и $M_2(-1; 2; 4)$.

▲ 1. Запишем в общем виде уравнение плоскости, параллельной оси $Oz : Ax + By + D = 0$.

2. Коэффициенты уравнения искомой плоскости **найдем** из условия, что точки M_1, M_2 принадлежат плоскости.

$$M_1(2; 3; -1) : A \cdot 2 + B \cdot 3 + D = 0;$$

$$M_2(-1; 2; 4) : A \cdot (-1) + B \cdot 2 + D = 0.$$

$$\begin{cases} 2A/D + 3B/D = -1, \\ -A/D + 2B/D = -1. \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \begin{array}{c} (2) \\ \rightarrow \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -3 \end{array} \right).$$

$$\begin{cases} -A/D + 2B/D = -1, \\ 7B/D = -3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A/D = 1/7, \\ B/D = -3/7. \end{cases}$$

$$Ax + By + D = 0, D \neq 0 \Rightarrow A/D x + B/D y + 1 = 0 \Rightarrow 1/7 x - 3/7 y + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x - 3y + 7 = 0}}. \quad \blacktriangledown$$

Задача 52. Уравнение плоскости $5x + 7y - 34z + 5 = 0$ привести к нормальному виду.

▲ Для приведения общего уравнения плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

к нормальному виду

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0,$$

надо обе его части умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

выбрав перед корнем знак, противоположный знаку свободного члена в общем уравнении плоскости.

В нашем случае перед корнем следует выбрать знак минус.

У нас $A = 5$, $B = 7$, $C = -34$, и для нормирующего множителя μ получаем

$$\mu = \frac{1}{-\sqrt{5^2 + 7^2 + (-34)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1230}},$$

а уравнение принимает вид

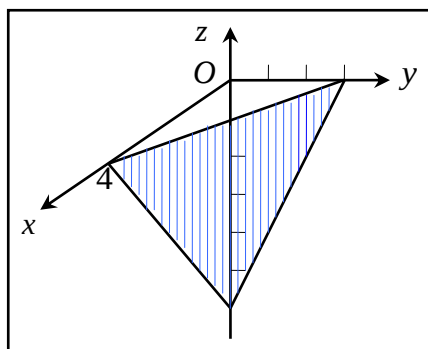
$$-\frac{5}{\sqrt{1230}}x - \frac{7}{\sqrt{1230}}y + \frac{34}{\sqrt{1230}}z - \frac{5}{\sqrt{1230}} = 0. \quad \blacktriangledown$$

2.2.2. Основные задачи на плоскость

Построение плоскости по данному уравнению

Если в общем уравнении плоскости свободный член не равен нулю ($D \neq 0$), то плоскость строится по уравнению в отрезках.

Например,



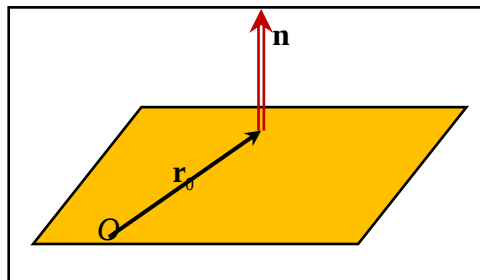
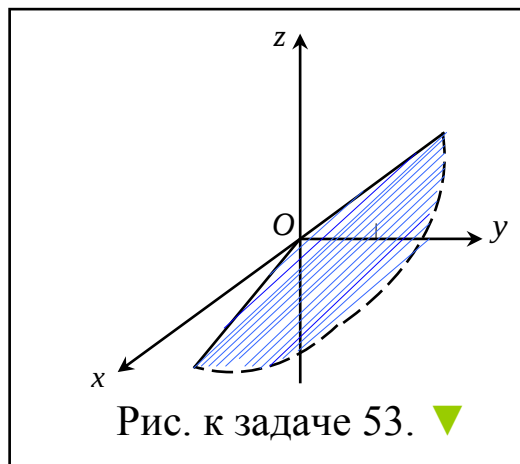
$$3x + 4y - 2z - 12 = 0 \Rightarrow 3x + 4y - 2z = 12 \mid :12 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-6} = 1.$$

Если в **общем уравнении плоскости** отсутствует свободный член ($D=0$), то плоскость **строится по следам**, которые она оставляет на координатных плоскостях.
Для **определения следа** в плоскости Oxy (Oxz или Oyz) достаточно в уравнении плоскости **положить** $z=0$ ($y=0$ или $x=0$).

Задача 53. Построить плоскость $x - 3y + 4z = 0$.

▲ След в плоскости Oxy : $\begin{cases} x - 3y + 4z = 0, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow x = 3y.$

След в плоскости Oyz : $\begin{cases} x - 3y + 4z = 0, \\ x = 0, \end{cases} \Rightarrow z = 3/4 y.$



Если плоскость задана в векторной форме $\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$,

*то сначала строится $\mathbf{r}_0$,
затем в конец $\mathbf{r}_0$ помещается начало вектора $\mathbf{n}$
и через конец $\mathbf{r}_0$ перпендикулярно к вектору $\mathbf{n}$
проводится плоскость.*

В задачах на плоскость используется аппарат векторной алгебры.
Вспомните определение скалярного произведения

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

и **векторного произведения**, выражение того и другого через координаты сомножителей:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z; \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$$

условие **коллинеарности** и **перпендикулярности** двух векторов, условие **компланарности** трёх векторов.

Угол между плоскостями $\mathbf{n}_1 \mathbf{r} + D_1 = 0$ и $\mathbf{n}_2 \mathbf{r} + D_2 = 0$

Угол между плоскостями – это угол между **нормальными векторами** этих плоскостей

$$\cos \varphi = \cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}.$$

Задача 54. Вычислить угол между плоскостями $5x + 5y - 4 = 0$ и $7y - z - 9 = 0$.



$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_1 = \{5; 5; 0\} \\ \mathbf{n}_2 = \{0; 7; -1\} \end{array} \right\} = \\ &= \frac{5 \cdot 0 + 5 \cdot 7 + 0 \cdot (-1)}{\sqrt{5^2 + 5^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 7^2 + (-1)^2}} = \frac{35}{50} = 0.7, \\ \varphi &= \arccos 0.7. \end{aligned}$$

Даны две плоскости $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$.

Условие их **параллельности** $\mathbf{n}_1 \parallel \mathbf{n}_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.

Условие **перпендикулярности**:

$$\mathbf{n}_1 \perp \mathbf{n}_2 \Rightarrow \cos(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0, A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Задача 55. Через точку $M_0(5; -3; 2)$ провести плоскость параллельно плоскости $3x - 8y + z - 3 = 0$.

▲ 1. Уравнение искомой плоскости $\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$, где $\mathbf{r}_0 = \{5; -3; 2\}$ – известно.

2. Вектор $\mathbf{n}$ найдём из условия **параллельности** $\mathbf{n} \parallel \mathbf{n}_1$, где $\mathbf{n}_1 = \{3; -8; 1\}$. Можно положить $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1$, так как при записи уравнения $\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$ за вектор $\mathbf{n}$ можно принять любой нормальный вектор.

$$\{3; -8; 1\} \cdot (x - 5; y - (-3); z - 2) = 0 \Rightarrow 3(x - 5) - 8(y + 3) + z - 2 = 0,$$

$$\underline{\underline{3x - 8y + z - 41 = 0. \quad \blacktriangledown}}$$

Задача 56. Через точку $M_0(0; -3; 0)$ провести плоскость, перпендикулярную к двум плоскостям

$$x + 2y + 3z - 5 = 0 \text{ и } 3x - 5y + 4z - 12 = 0.$$

▲ Нормальный вектор искомой плоскости можно **найти** из условия **перпендикулярности** $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_1\{1; 2; 3\}$ и $\mathbf{n} \perp \mathbf{n}_2\{3; -5; 4\}$.

За вектор $\mathbf{n}$ можно принять

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= 23\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 11\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Уравнение искомой плоскости

$$11(x - 0) + 5(y - (-3)) - 11(z - 0) = 0, \quad \underline{\underline{23x + 5y - 11z + 15 = 0. \quad \blacktriangledown}}$$

Задача 57. Через точки $M_1(1; 2; 3)$ и $M_2(-2; -1; 3)$ провести плоскость, перпендикулярную плоскости $x + 4y - 2z + 5 = 0$.

▲ 1. Уравнение искомой плоскости $\mathbf{n}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0, \mathbf{r}_0 \{1; 2; 3\}$.

2. Вектор $\mathbf{n} = \{A; B; C\}$ найдём из условия перпендикулярности данной плоскости к искомой плоскости:

$$\{A; B; C\} \cdot \{1; 4; -2\} = 0 \Rightarrow A + 4B - 2C = 0$$

и условия, что точка M_2 принадлежит искомой плоскости

$$A(-2-1) + B(-1-2) + C(3-3) = 0 \Rightarrow -3A - 3B = 0 \Rightarrow A + B = 0.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ A + 4B - 2C = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \rightarrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. **Базисные переменные** A и B , **свободная переменная** C . Пусть $C = \alpha, \alpha \in \mathbf{R}$. Имеем

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ 3B = 2\alpha, \\ C = \alpha, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -2/3\alpha, \\ B = 2/3\alpha, \\ C = \alpha. \end{cases}$$

3. Подставим A, B и C в уравнение

$$A(x-1) + B(y-2) + C(z-3) = 0:$$

$$-2/3\alpha(x-1) + 2/3\alpha(y-2) + \alpha(z-3) = 0,$$

откуда $2x - 2y - 3z + 11 = 0$. ▼



Расстояние от точки до плоскости

Задача 58. Найти расстояние от точки $A(2; -1; 3)$ до плоскости

$$5x + 2y + z - 7 = 0.$$

▲ Задача решается так:

- уравнение плоскости **приводится** к нормальному виду и

- в него вместо текущих координат **подставляются** координаты данной точки.

$$d = \frac{|Ax_A + By_A + Cz_A + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

$$d = \frac{|5 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 - 7|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{30}}. \quad \blacktriangledown$$

Задача 59. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$5x + 3y - 4z + 15 = 0 \text{ и } 15x + 9y - 12z - 5 = 0.$$

▲ 1. Возьмём на первой плоскости произвольную точку. Положим, например, $y = 0, z = 0$ и найдём x из условия

$$5x + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 15 = 0 \Rightarrow x = -3.$$

2. Найдём расстояние от этой точки до второй плоскости

$$d = \frac{|15 \cdot (-3) + 9 \cdot 0 - 12 \cdot 0 - 5|}{\sqrt{15^2 + 9^2 + (-12)^2}} = \frac{|-50|}{3\sqrt{25 + 9 + 16}} = \frac{5}{3}\sqrt{2}. \quad \blacktriangledown$$

Задача 60. Найти уравнение плоскости, проходящей через три точки $A(1; 2; -1), B(-1; 0; 4), C(-2; -1; 1)$.

Если три точки M_1, M_2, M_3 лежат в одной плоскости, то векторы $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ удовлетворяют условию компланарности.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-(-1) \\ -1-1 & 0-2 & 4-(-1) \\ -2-1 & -1-2 & 1-(-1) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ -2 & -2 & 5 \\ -3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(x-1) \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + (z+1) \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$11(x-1) - 11(y-2) = 0 \Rightarrow \underline{x - y + 1 = 0}. \quad \blacktriangledown$$

2.3. Прямая в пространстве

2.3.1. Различные виды уравнения прямой в пространстве

Задача 61. Уравнение прямой

$$\begin{cases} 2x + y + 8z - 16 = 0, \\ x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

написать в канонической форме.

▲ 1. Найдём точку M_0 : пусть $z_0 = 0$, тогда $\begin{cases} 2x_0 + y_0 = 16, \\ x_0 - 2y_0 = -2 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 16 \\ 1 & -2 & -2 \end{array} \right) \sim (-2) \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 5 & 20 \end{array} \right) \cdot \frac{1}{5} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right).$$

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 = -2, \\ y_0 = 4, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 6, \\ y_0 = 4. \end{cases} \quad \underline{M_0(6; 4; 0)}.$$

2. Найдём направляющий вектор

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_1 = \{2; 1; 8\} \\ \mathbf{n}_2 = \{1; -2; -1\} \end{Bmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 1 & 8 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 15\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$$

или

$$\underline{\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}}.$$

3. $\underline{\underline{\frac{x-6}{3} = \frac{y-4}{2} = \frac{z}{-1}}}$. ▼

2.3.2. Основные задачи на прямую в пространстве

Уравнение прямой, проходящей через две точки

Задача 62. Найти прямую, проходящую через точки

$$A(2; -1; 3) \text{ и } B(2; 3; 3).$$

▲ 1. Будем искать уравнение прямой в виде

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z}.$$

Координаты одной из данных точек **возьмём** $x_0 = 2, y_0 = -1, z_0 = 3$.

2. Направляющий вектор $\mathbf{a} = \mathbf{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, тогда

$$a_x = 2 - 2 = 0, a_y = 3 - (-1) = 4, a_z = 3 - 3 = 0.$$

$$\mathbf{a} = \{0; 4; 0\}.$$

3. $\frac{x-2}{0} = \frac{y-(-1)}{4} = \frac{z-3}{0}$ или $\begin{cases} x = 2, \\ z = 3. \end{cases}$ ▼

В канонических уравнениях моно писать ноль в знаменателе и это означает, что соответствующая координата направляющего вектора равна 0.

Задача 63. Написать параметрические уравнения прямой, проходящей через точки $A(3; 0; 4)$ и $B(-1; -2; 3)$.

Каждому векторно-параметрическому уравнению $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}t$ соответствуют параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \\ z = z_0 + a_z t. \end{cases}$$

▲ 1. Будем искать уравнение в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$. За радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ можно взять радиус-вектор любой из заданных точек.

Пусть $\mathbf{r}_0 = \{3; 0; 4\}$.

2. Направляющий вектор $\mathbf{a}$ *коллинеарен* вектору $\mathbf{AB}$:

$$\mathbf{AB} = \{-1-3; -2-0; 3-4\} = \{-4; -2; -1\}, \quad \mathbf{a} = \{4; 2; 1\}.$$

3. Уравнению $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ соответствуют параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + a_x t, \\ y = y_0 + a_y t, \\ z = z_0 + a_z t. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 4t, \\ y = 0 + 2t, \\ z = 4 + t. \end{cases} \quad \text{▼}$$

Задача 64. Определить следы прямой

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4z + 8 = 0, \\ x - y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

на координатных плоскостях (*след прямой на плоскости – точка пересечения прямой с плоскостью*).

▲ Чтобы найти след прямой в плоскости Oxy , надо **положить** в общих уравнениях прямой $z = 0$, тогда **получится** система

$$\begin{cases} 5x + 3y + 8 = 0, \\ x - y + 5 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y = -8, \\ x - y = -5. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -8 \\ 1 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 5 & 3 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 8 & 17 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{8} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & \frac{17}{8} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x - y = -5, \\ y = 17/8, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -23/8, \\ y = 17/8. \end{cases} \underline{\underline{A(-23/8; 17/8)}}.$$

Аналогично для других плоскостей. ▼

Задача 65. Найти угол между прямыми

$$\begin{cases} x - y + z - 4 = 0, \\ 2x + y - 2z + 5 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x + 3y - z - 6 = 0. \end{cases}$$

*Угол между прямыми –
угол между их направляющими векторами.*

▲ 1. Для первой прямой $\mathbf{n}_1 = \{1; -1; 1\}$, $\mathbf{n}_2 = \{2; 1; -2\}$ – нормальные векторы данных плоскостей. Направляющий вектор первой прямой

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

2. Для второй прямой $\mathbf{n}'_1 = \{1; 1; 1\}$, $\mathbf{n}'_2 = \{2; 3; -1\}$.

$$\mathbf{a}_2 = \mathbf{n}'_1 \times \mathbf{n}'_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

$$3. \cos \varphi = \cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2|} =$$

$$= \frac{1 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{11}{26}, \quad \varphi = \arccos \frac{11}{26}. \quad \blacktriangledown$$

Задача 66. Найти угол между прямыми

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}.$$

▲ 1. Для первой прямой $\mathbf{a}_1 = \{3; -1; 2\}$.

2. Для второй прямой $\mathbf{a}_2 = \{1; 2; -1\}$.

$$3. \cos \varphi = \cos(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \frac{\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1| \cdot |\mathbf{a}_2|} =$$

$$= \frac{3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{-1}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{6}}, \quad \varphi = \arccos \left(-\frac{1}{\sqrt{78}} \right). \quad \blacktriangledown$$

Задача 67. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $A(3; -4; 7)$ и параллельно прямой линии

$$\begin{cases} x + 3y - 4z + 5 = 0, \\ 2x - y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

▲ 1. Воспользуемся каноническими уравнениями прямой

$$\frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z},$$

причём $x_0 = 3, y_0 = -4, z_0 = 7$.

2. Направляющий вектор $\mathbf{a}$ искомой прямой найдём из общих уравнений данной прямой по векторам

$$\mathbf{n}_1 = \{1; 3; -4\}, \mathbf{n}_2 = \{2; -1; 1\}:$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - 9\mathbf{j} - 7\mathbf{k}.$$

$$3. \frac{x-3}{-1} = \frac{y-(-4)}{-9} = \frac{z-7}{-7} \Rightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{9} = \frac{z-7}{7}. \quad \blacktriangledown$$

Задача 68. Через точку $A(1; 2; 5)$ провести прямую, перпендикулярную двум данным прямым

$$\frac{x-7}{5} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-6}{4} \text{ и } \frac{x-1}{2} = \frac{y-9}{1} = \frac{z+5}{1}.$$

▲ 1. Будем искать канонические уравнения прямой, тогда известны $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = 5$.

2. Направляющий вектор **a** найдём из условия перпендикулярности искомой и данных прямых:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{a}_1 = \{5; 1; 4\}, \mathbf{a} \perp \mathbf{a}_2 = \{2; 1; 1\}.$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \text{ или } \mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

$$3. \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{-1}. \quad \blacktriangledown$$

2.4. Основные задачи на прямую и плоскость в пространстве

2.4.1. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости

При решении этих задач прямую следует задавать каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$ (или параметрическими), а плоскость общим уравнением.

Задача 69. Найти угол между прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-1}{3}$ и плоскостью $2x + y - z + 4 = 0$.

▲ Направление прямой определяет вектор $\mathbf{a} = \{2; 1; 3\}$.

Положение плоскости – нормальный вектор $\mathbf{n} = \{2; 1; -1\}$.

Угол между прямой и плоскостью – угол между прямой и её проекцией на плоскость. Формула для определения угла

$$\sin \varphi = \frac{|Aa_x + Ba_y + Ca_z|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Имеем

$$\sin \varphi = \frac{|2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2}} = \frac{2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{21}, \quad \varphi = \arcsin \frac{1}{21}. \quad \blacktriangledown$$

Задача 70. Найти угол прямой $\begin{cases} y = 3x - 1, \\ 2z = -3x + 2 \end{cases}$ с плоскостью $2x + y + z - 4 = 0$.

▲ 1. Запишем систему в стандартной форме $\begin{cases} 3x - y - 1 = 0, \\ 3x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$.

Найдём $\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, где $\mathbf{n}_1 = \{3; -1; 0\}$, $\mathbf{n}_2 = \{3; 0; 2\}$.

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.$$

2. Нормальный вектор данной плоскости $\mathbf{n} = \{2; 1; 1\}$.

3. **Вычисляем**

$$\sin \varphi = \frac{|-2 \cdot 2 + (-6) \cdot 1 + 3 \cdot 1|}{\sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{49} \cdot \sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}},$$

$$\varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{6}}. \quad \blacktriangledown$$

Задача 71. При каких значениях α и β плоскость

$$\alpha x + \beta y + 6z - 7 = 0$$

перпендикулярна к прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z}{3}$?

▲ Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{a_x} = \frac{B}{a_y} = \frac{C}{a_z}$$

имеем

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{-4} = \frac{6}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 4, \beta = -8. \blacktriangledown}}$$

Задача 72. Через точку $A(5; 1; 4)$ провести плоскость так, чтобы она была параллельна данным прямым

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-17}{-1} \text{ и } \frac{x+4}{1} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z+11}{8}.$$

▲ 1. Будем искать уравнение плоскости в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

где $\mathbf{n} = \{A; B; C\}$, $x_0 = 5$, $y_0 = 1$, $z_0 = 4$.

2. Нормальный вектор $\mathbf{n} = \{A; B; C\}$ найдём из условия перпендикулярности искомой плоскости двум данным прямым:

$$\mathbf{n} \perp \mathbf{a}_1 = \{2; 3; -1\}, \quad \mathbf{n} \perp \mathbf{a}_2 = \{1; -1; 8\},$$

$$\mathbf{n} = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 23\mathbf{i} - 17\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

3. Уравнение искомой плоскости

$$23(x - 5) - 17(y - 1) - 5(z - 4) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{23x - 17y - 5z - 78 = 0. \blacktriangledown}}$$

Задача 73. При каком значении k плоскость $2x + ky - 2z - 2 = 0$ параллельна прямой $\begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0, \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$?

▲ 1. Если плоскость параллельна прямой, то

$$\mathbf{n} = \{2; k; -2\} \perp \mathbf{a} = \{a_x; a_y; a_z\},$$

$$2a_x + ka_y - 2a_z = 0. \quad (\text{a})$$

2. Найдём вектор $\mathbf{a}$ по общим уравнениям прямой:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{n}_1 \{3; -2; 1\}, \quad \mathbf{a} \perp \mathbf{n}_2 \{4; -3; 4\},$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 4 \end{vmatrix} = -5\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

3. Подставляя $a_x = -5$, $a_y = -8$, $a_z = -1$ в равенство (а) получим

$$2 \cdot (-5) + k \cdot (-8) - 2 \cdot (-1) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{k = -1}}. \quad \blacktriangledown$$

Задача 74. Через начало координат **провести** плоскость, перпендикулярную прямой $\frac{x-7}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{-3}$.

▲ 1. Уравнение плоскости, проходящей через начало координат

$$Ax + By + Cz = 0.$$

2. Из условий перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{a_x} = \frac{B}{a_y} = \frac{C}{a_z},$$

где $a_x = 1$, $a_y = 1$, $a_z = -3$. **Имеем**

$$\frac{A}{1} = \frac{B}{1} = \frac{C}{-3}, \quad B = A, \quad C = -3A.$$

3. $Ax + Ay - 3Az = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x + y - 3z = 0}}. \quad \blacktriangledown$

Задача 75. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(-7; 8; 9)$ перпендикулярно к плоскости $3x - y + 9z - 14 = 0$.

▲ 1. Будем искать уравнение прямой в виде

$$\frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z},$$

где $x_0 = -7$, $y_0 = 8$, $z_0 = 9$. Вектор $\mathbf{a} = \{a_x; a_y; a_z\}$ неизвестен.

2. Условие перпендикулярности прямой и плоскости

$$\frac{A}{a_x} = \frac{B}{a_y} = \frac{C}{a_z}, \quad \text{где } A = 3, B = -1, C = 9.$$

Получили однородную систему

$$\frac{3}{a_x} = \frac{-1}{a_y} = \frac{9}{a_z}, \quad \begin{cases} \frac{3}{a_x} = \frac{-1}{a_y}, \\ \frac{3}{a_x} = \frac{9}{a_z}, \\ \frac{-1}{a_y} = \frac{9}{a_z}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x + 3a_y = 0, \\ 3a_x - a_z = 0, \\ 9a_y + a_z = 0. \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 9 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -9 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ранг равен 2. **Базисный минор** $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$. **Базисные переменные** a_x, a_z . **Свободная переменная** a_y .

$$\begin{cases} a_x = -3a_y, \\ -a_z = 9a_y, \\ a_y = \alpha \in R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_x = -3\alpha, \\ a_z = -\alpha, \\ a_y = \alpha \end{cases} \text{ Пусть } \alpha = -1. \text{ Тогда } \begin{cases} a_x = 3, \\ a_y = -1, \\ a_z = 9. \end{cases}$$

3. Уравнение искомой прямой $\frac{x+7}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-9}{9}$. ▼



2.4.2. Точка пересечения прямой с плоскостью

Задача 76. Найти уравнение перпендикуляра к плоскости

$$x + 3y - 4z - 13 = 0,$$

проходящего через точку $A(2; -1; 3)$ и определить координаты основания этого перпендикуляра.

▲ Направляющий вектор перпендикуляра можно принять равным нормальному вектору данной плоскости $\mathbf{a} = \mathbf{n} = \{1; 3; -4\}$.

Тогда уравнение перпендикуляра, проходящего через точку A

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-3}{-4}.$$

Запишем уравнение перпендикуляра в параметрической форме

$$\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = 3 - 4t. \end{cases} \quad (a)$$

Основание перпендикуляра – точка пересечения прямой (a) с плоскостью

$$x + 3y - 4z - 13 = 0. \quad (б)$$

Чтобы решить эту задачу, из уравнений (a) x, y, z **подставить** в уравнение (б)

$$2 + t + 3(-1 + 3t) - 4(3 - 4t) - 13 = 0 \Rightarrow 26t - 26 = 0 \Rightarrow t = 1.$$

Подставляя $t = 1$ в уравнения (a) получим $x = 3, y = 2, z = -1$.

$$\underline{\underline{M_0(3; 2; -1)}}. \quad \blacktriangledown$$

3. Геометрические образы второго порядка

Кривые второго порядка

Запомнить канонические уравнения линий второго порядка, геометрический смысл входящих в них параметров.

Научиться решать задачи на элементарные свойства линий второго порядка.

Познакомиться с методикой решения задач на геометрическое место точек.

Усвоить, как правильно построить линию второго порядка по её каноническому уравнению.

3.1. Окружность

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (3.1)$$

Задача 77. Написать уравнение *окружности* с центром в точке $C(2; -3)$ и радиусом, равным 6.

▲ По уравнению (1), полагая в нём $a = 2, b = -3, R = 6$, сразу имеем

$$(x - 2)^2 + (y - (-3))^2 = 6^2 \Rightarrow \underline{\underline{(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36}}. \quad \blacktriangledown$$

Задача 78. Найти центр и радиус окружности

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 = 0.$$

▲ В данном уравнении коэффициенты при выражениях x^2 и y^2 равны 1 и отсутствует член, содержащий произведение xy .

Приведём данное уравнение *окружности* к нормальному виду (1).

Выпишем члены, содержащие только x , и члены, содержащие только y .

Легко, выделяя полный квадрат, **проверить**, что

$$x^2 - 6x = x^2 - 6x + 9 - 9 = (x - 3)^2 - 9,$$

$$y^2 + 4y = y^2 + 4y + 4 - 4 = (y + 2)^2 - 4.$$

Левая часть уравнения **имеет** вид

$$\underbrace{(x - 3)^2 - 9}_{x^2 - 6x} + \underbrace{(y + 2)^2 - 4}_{y^2 + 4y} - 23 = 0$$

или отсюда

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 36.$$

Сравнивая полученное уравнение с (1), **заключаем**, что это уравнение определяет *окружность*, центр которой имеет координаты $C(3; -2)$, $R^2 = 36$, а радиус *окружности* $R = 6$. ▼

Задача 79. Найти центр и радиус окружности

$$2x^2 - 6x + 2y^2 + 8y = 3.$$

▲ Сначала **поделим** левую и правую часть уравнения *окружности* на 2 (коэффициент при выражениях x^2 и y^2).

$$x^2 - 3x + y^2 + 4y = 3/2.$$

Дополняя до полных квадратов, **находим**

$$(x^2 - 2 \cdot 3/2 x + 9/4 - 9/4) + (y^2 + 2 \cdot 2y + 4 - 4) = 3/2$$

или

$$(x - 3/2)^2 + (y + 2)^2 = 31/4.$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением (1), **заключаем**, что $C(3/2; -2)$, $R = \sqrt{31}/2$. ▼

3.2. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.2)$$

Каноническое уравнение **эллипса** – уравнение (3.2).
 Параметры: a – большая полуось, b – малая полуось, c – половина фокусного расстояния, $c^2 = a^2 - b^2$ – основное соотношение между a , b , c , $\varepsilon = c/a < 1$ – **эксцентриситет**, $r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$ – расстояния до фокусов точки с абсциссой x .

Основные задачи на элементарные свойства эллипса

Основные задачи на элементарные свойства **эллипса** состоят в отыскании одного из параметров **эллипса** по некоторой совокупности других.

Задача 80. Написать каноническое уравнение **эллипса**, зная, что расстояние между фокусами равно 8, а малая полуось равна 3. Сделать чертёж.

▲ Дано $2c = 8$, $b = 3$. Найти уравнение **эллипса**.

Из условий $c = 4$, $b = 3$, $a^2 = b^2 + c^2$, $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

Каноническое уравнение **эллипса** будет таким

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

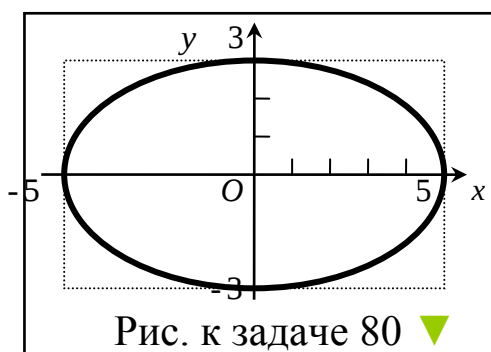


Рис. к задаче 80 ▼

Задача 81. **Эллипс**, симметричный относительно осей координат, проходит через точки, $M(2; \sqrt{3})$ и $B(0; 2)$. Написать его уравнение и найти расстояние точки M от фокусов.

▲ 1. **Эллипс**, симметричный относительно осей координат, **имеет** уравнение $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Найдём параметры a и b из условия, что **эллипс** проходит через точки M и B .

Точка M принадлежит **эллипсу**, следовательно,

$$\frac{4}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1.$$

Точка B принадлежит **эллипсу**, следовательно,

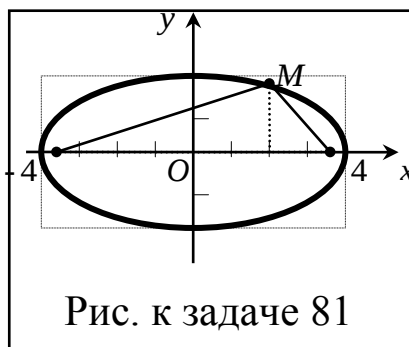
$$\frac{0}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1.$$

Решая систему относительно a^2 и b^2 , **получим**

$$\begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1, \\ \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{3}{4} = 1, \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16, \\ b^2 = 4. \end{cases}$$

Искомое уравнение **эллипса**

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$



2. По формуле $r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$ **найдем** расстояние точки $M(2; \sqrt{3})$ от фокусов. Для этого сначала **найдем эксцентриситет**

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}, \varepsilon = \frac{\sqrt{16 - 4}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$r_{1,2} = 4 \pm \sqrt{3}/2 \cdot 2 = 4 \pm \sqrt{3}. \quad \blacktriangledown$$

Задача 82. Дано уравнение **эллипса** $25x^2 + 169y^2 = 4225$.

Вычислить длину его осей, координаты фокусов и *эксцентриситет*. **Построить эллипс.**

▲ **Преобразуем** данное уравнение к каноническому виду. Разделив обе части заданного уравнения на 4225, **получим**

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

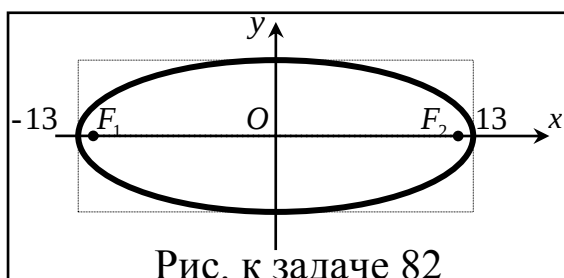
Отсюда **заключаем**, что $a^2 = 169, b^2 = 25$. Значит,

$$a = 13, 2a = 26; b = 5, 2b = 10.$$

Таким образом, длины осей равны 26 и 10. Зная a и b , из соотношения $b^2 = a^2 - c^2$ **найдем** c .

Подставим $a = 13; b = 5$ и **получим**, что

$$c = \sqrt{169 - 25} = 12.$$



Координаты фокусов будут $(-12; 0)$ и $(12; 0)$.

Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = c/a = 12/13$. ▼

3.3. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.3)$$

Каноническое уравнение *гиперболы* – уравнение (3.3).
 Параметры a – вещественная (действительная) полуось, b – мнимая полуось, c – половина фокусного расстояния, $b^2 = c^2 - a^2$ – основное соотношение между a, b, c .

$\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$ – *эксцентриситет*.

Фокальные радиусы $r_{1,2} = |a \pm \varepsilon x|$. Асимптоты $y = \pm b/a \cdot x$.

Основные задачи на элементарные свойства гиперболы

Задача 83. Найти полуоси, координаты фокусов, *эксцентриситет*, уравнения асимптот и директрис гиперболы $9x^2 - 16y^2 = 144$.

▲ **Приведём** данное уравнение к каноническому виду, для чего необходимо разделить обе части его на 144.

Выполняя деление, получим $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Сравнивая это уравнение с уравнением (3.3), заключаем, что

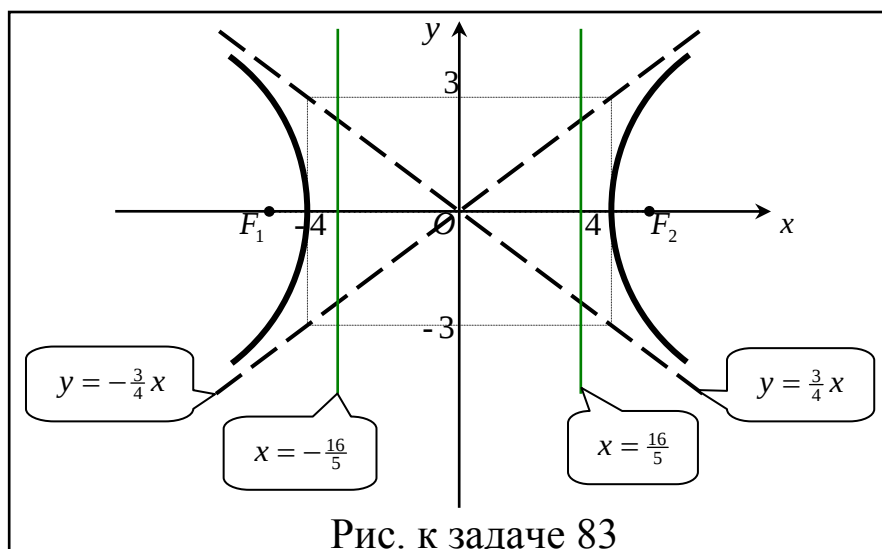
$$a^2 = 16, b^2 = 9.$$

Таким образом, $a=4$ есть вещественная полуось, $b=3$ – мнимая полуось. Далее

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, c = \sqrt{16 + 9} = 5, \text{ фокусы } F_1(-5; 0), F_2(5; 0).$$

Эксцентриситет $\varepsilon = c/a = 5/4$.

Подставляя значения a и b в формулу $y = \pm b/a \cdot x$, получим уравнения асимптот $y = \pm 3/4 \cdot x$.



В соответствии с формулой $x = \pm a/\varepsilon$ **находим** уравнения директрис $x = \pm 16/5$. ▼

Задача 84. Зная уравнения асимптот гиперболы $y = \pm 1/2 \cdot x$ и одну из её точек $M(12; 3\sqrt{3})$, **составить уравнение гиперболы** и **найти её эксцентриситет**. Сделать чертёж.

▲ 1. Будем искать уравнение *гиперболы* в виде $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Точка M принадлежит гиперболе, следовательно,

$$\frac{144}{a^2} - \frac{27}{b^2} = 1.$$

Кроме того, $y = \pm b/a \cdot x$, $y = \pm 1/2 \cdot x \Rightarrow b/a = 1/2$.

Имеем систему

$$\begin{cases} \frac{144}{a^2} - \frac{27}{b^2} = 1, \\ a = 2b, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{144}{4b^2} - \frac{27}{b^2} = 1, \\ a = 2b, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9}{b^2} = 1, \\ a = 2b, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b^2 = 9, \\ a = 2b, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3, \\ a = 6. \end{cases}$$

Уравнение искомой *гиперболы* $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$.

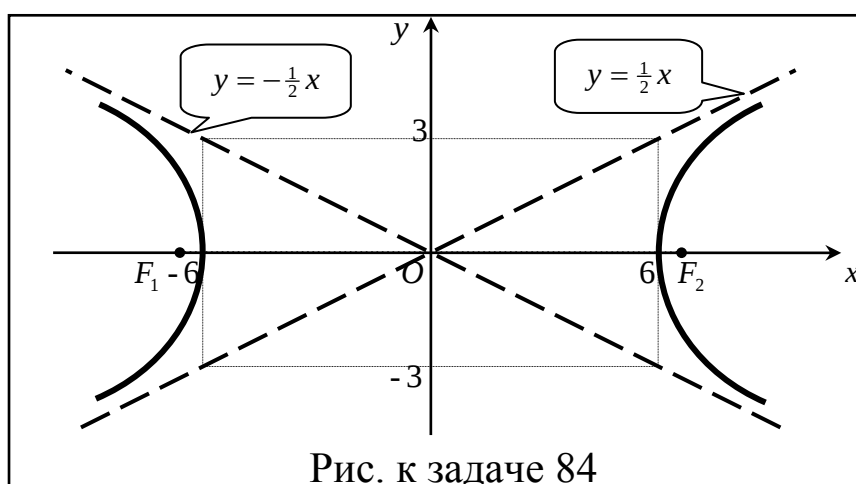


Рис. к задаче 84

3. $\varepsilon = c/a$, $c^2 = a^2 + b^2$, $c^2 = 36 + 9 = 45$, $c = 3\sqrt{5}$, $\varepsilon = 3\sqrt{5}/6 = \sqrt{5}/2$. ▼

Задача 85. Составить каноническое уравнение *гиперболы* и уравнение асимптот, зная, что вещественная полуось равна 4, а *эксцентриситет* 1.25.

▲ 1. Будем искать уравнение *гиперболы* в виде $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. $a = 4$; $\varepsilon = c/a$, $c = a \cdot \varepsilon = 4 \cdot 1.25 = 5$; $b^2 = c^2 - a^2$, $b^2 = 25 - 16 = 9$.

3. Искомое уравнение *гиперболы* $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$.

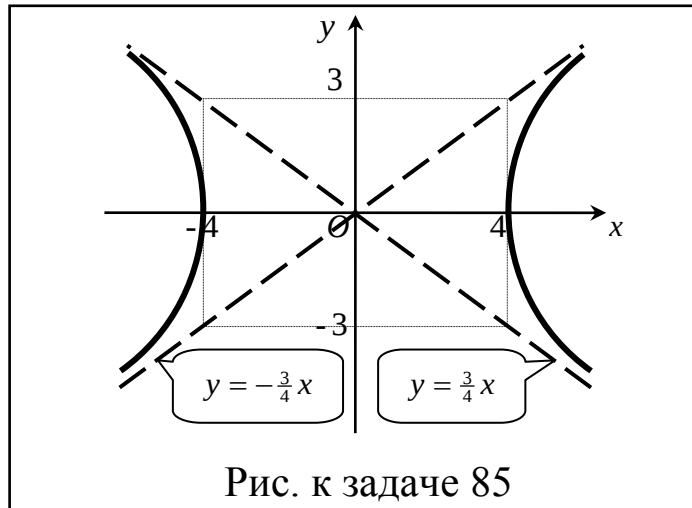


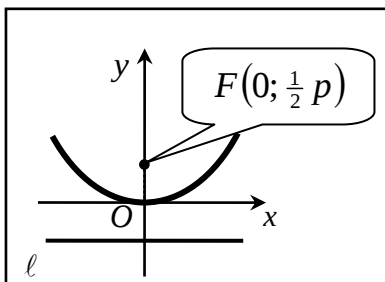
Рис. к задаче 85

Уравнения асимптот $y = \pm b/a \cdot x = \pm 3/4 \cdot x$. ▼

3.4. Парабола

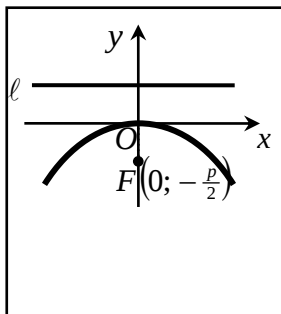
$$x^2 = 2py \quad (3.4.1)$$

$$(\ell): y = -1/2 p \quad (3.4.1.a)$$



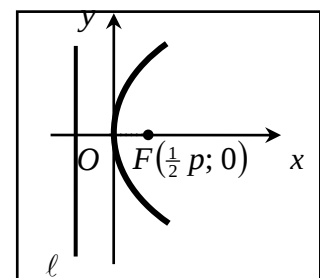
$$x^2 = -2py \quad (3.4.2)$$

$$(\ell): y = 1/2 p \quad (3.4.2.a)$$



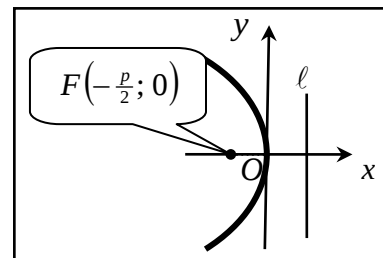
$$y^2 = 2px \quad (3.4.3)$$

$$(\ell): x = -1/2 p \quad (3.4.3.a)$$



$$y^2 = -2px \quad (3.4.4)$$

$$(\ell): x = 1/2 p \quad (3.4.4)$$



Если **парабола** симметрична относительно оси Oy (Ox) и её вершина находится в начале координат, то её уравнение имеет вид 3.4.1, 3.4.2 (3.4.3, 3.4.4), где p – параметр **параболы**.

Запомните!

Фокус параболы лежит на её оси симметрии.

Если ось симметрии **параболы** параллельна оси Oy (Ox) и её вершина находится в точке $A(x_0; y_0)$, то её уравнение будет иметь вид

$$(x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0) \quad ((y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0)).$$

Последнее уравнение после раскрытия скобок приобретает вид

$$x = ay^2 + by + c \quad (y = ax^2 + bx + c).$$

Для построения **параболы**, являющейся графиком квадратного трехчлена нужно справа **выделить** полный квадрат по переменной $x(y)$ и **найти** координаты вершины, затем **найти** точку пересечения **параболы** с осью Oy (Ox) и точку, симметричную ей относительно оси **параболы**.

Основные задачи на элементарные свойства параболы

Задача 86. Парабола $y^2 = 2px$ проходит через точку $A(2; 4)$. Определить её параметр p .

▲ Подставляем в уравнение **параболы** вместо текущих координат координаты точки $A(2; 4)$. Получаем

$$4^2 = 2p \cdot 2 \Rightarrow 16 = 4p \Rightarrow p = 4. \quad \blacktriangledown$$

Задача 87. Составить уравнение **параболы**, зная, что вершина её находится в начале координат и расстояние от фокуса до вершины равно 4 единицам длины, а осью симметрии служит ось Ox .

▲ Так как осью симметрии **параболы** служит ось Ox , а вершиной – начало координат, то **парабола** может быть определена одним из уравнений $y^2 = 2px$ и $y^2 = -2px$.

Параметр **параболы** p есть расстояние от директрисы **параболы** до фокуса.

Расстояние от фокуса до вершины равно половине параметра. Значит, у нас $1/2 \cdot p = 4 \Rightarrow p = 4$. Подставляя это значение p в каждое из только что написанных уравнений, **получим**

$$y^2 = 16x \text{ и } y^2 = -16x.$$

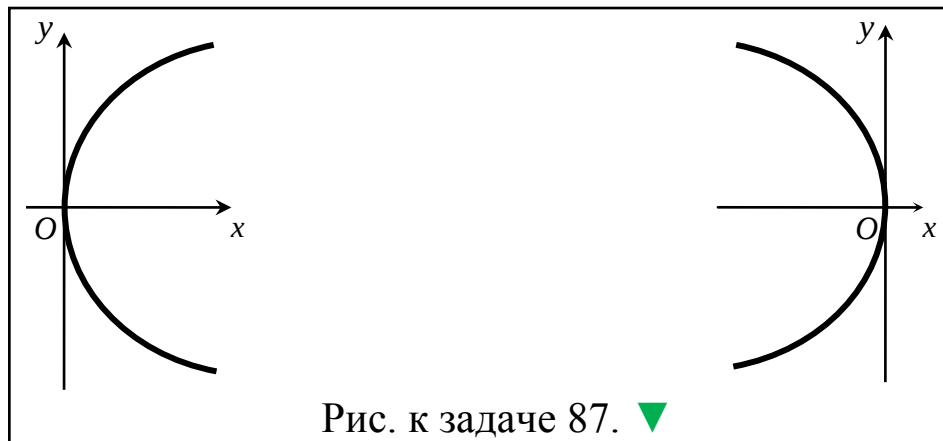


Рис. к задаче 87. ▼

3.5. Задачи на нахождение уравнения линии

Уравнение линии, заданной некоторым свойством

$$L = \{M \mid P(M)\},$$

можно получить, придерживаясь следующей схемы.

1. Уравнение линии L предполагает, прежде всего, **выбор определённой системы координат**.

Иногда система координат считается выбранной, а линия задаётся геометрическими свойствами, связывающими её с этой системой.

Выбирая различные системы координат, мы для одной и той же линии будем получать, как правило, различные уравнения.

После выбора системы надо **найти** (или обозначить) **координаты точек, играющих основную роль в задании линии**.

2. Исходя из геометрических свойств, определяющих линию, **ищем** условия, связывающие координаты x, y текущей точки линии. Ход рассуждений здесь в общих чертах таков.

Пусть M – некоторая произвольная точка линии L и переменные x, y – её координаты в выбранной системе координат.

Запишем в координатах условие принадлежности этой точки линии L , для чего используем подходящие теоремы школьного курса геометрии, а также известные нам формулы аналитической геометрии (формулы расстояния, отношения отрезков и др.).

В результате **получаем** некоторое уравнение. Это и есть уравнение линии L .

3. При необходимости **упрощаем** полученное уравнение (приводим к виду $F(x; y) = 0$, освобождаемся от радикалов и т. п.).

При этом надо следить, чтобы получающиеся новые уравнения были равносильны исходному уравнению.

Итак, для решения этих задач можно записать следующую последовательность операций:

1. Выбирают на плоскости систему координат. Сделать чертёж по условиям задачи и выбрать произвольную точку, принадлежащую искомому множеству точек.
2. Записать в виде формулы основное условие, определяющее искомое множество точек.
3. Ввести в предыдущую формулу текущие координаты и все параметры из условий задачи.
4. Упростить уравнение, которое получилось после предыдущей операции.

Задача 88. Точка $M(x; y)$ движется так, что сумма квадратов расстояний от начала координат и от точки $A(-a; 0)$ остаётся равной a^2 . **Определить** траекторию точки M .

▲ 1. Сделаем чертёж и **выберем** точку $M(x; y)$, принадлежащую исходному **множеству** точек.

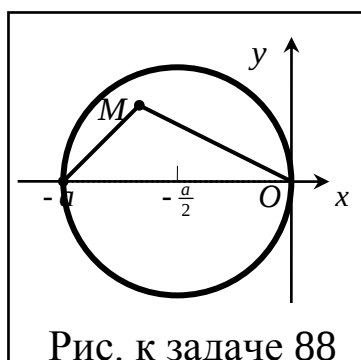


Рис. к задаче 88

2. $AM^2 + MO^2 = a^2$.

3. $AM^2 = (x - (-a))^2 + y^2$, $MO^2 = x^2 + y^2$,

следовательно, из условия п.2. можно записать так:

$$(x + a)^2 + y^2 + x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + ax = 0 - \text{окружность.}$$

4. Выделяя полный квадрат относительно переменной x , получаем $(x + 1/2 \cdot a^2)^2 + y^2 = 1/4 \cdot a^2$. ▼

Задача 89. Определить траекторию точки $M(x; y)$, которая при своём движении остаётся в два раза ближе к точке $F(-1; 0)$, чем к прямой $x = -4$.

▲ 1. Сделаем чертёж и выберем точку $M(x; y)$, принадлежащую исходному *множеству* точек.

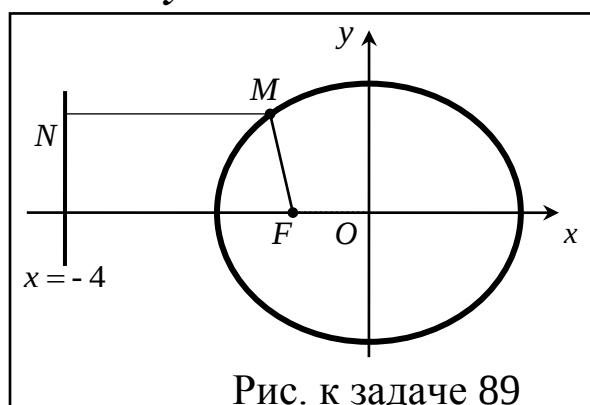


Рис. к задаче 89

2. $2MF = MN$.

3. $MF = \sqrt{(x - (-1))^2 + y^2}$; $N(-4; y)$;

$$MN = \sqrt{(x - (-4))^2 + (y - y)^2}; \quad MN = x + 4;$$

$$2\sqrt{(x + 1)^2 + y^2} = x + 4.$$

4. $4(x^2 + 2x + 1) + 4y^2 = x^2 + 8x + 16 \Rightarrow 3x^2 + 4y^2 = 12$,

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 - \text{эллипс.} \quad \blacktriangle$$

3.6. Поверхности второго порядка

Сфера

Задача 90. Составить уравнение *сферы* радиуса $R = 5$ с центром в начале координат.

▲ Подставляя в уравнение *сферы* $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ значение $R = 5$, получим $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. ▼

Цилиндрические поверхности

Задача 93. Какие поверхности определяют уравнения

$$1) x^2 + z^2 = 16; 2) \frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1; 3) x = 2z^2; 4) \frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{7} = 1?$$

▲ Каждое из этих уравнений содержит только две переменные x и z , и определяют на плоскости Oxz кривые: 1) *окружность*; 2) *эллипс*; 3) *параболу*; 4) *гиперболу*.

В пространстве же каждое из них определяет *цилиндрическую поверхность с образующими*, параллельными оси Oy , так как эти уравнения не содержат переменной y . *Направляющими* этих *цилиндрических поверхностей* служат указанные кривые:

1) $x^2 + z^2 = 16$ – уравнение *прямого кругового цилиндра*;

2) $\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$ – уравнение *эллиптического цилиндра*;

3) $x = 2z^2$ – уравнение *параболического цилиндра*;

4) $\frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{7} = 1$ – уравнение *гиперболического цилиндра*. ▼

Поверхность вращения

В инженерных задачах часто встречаются различные *поверхности вращения*. Эти поверхности получаются вращением некоторой плоской линии вокруг заданной прямой (называемой *осью поверхности вращения*), лежащей с этой линией в одной плоскости.

Если линия лежит в плоскости Oyz и имеет уравнение

$$f(y; z) = 0, \quad x = 0,$$

то при вращении её вокруг оси Oz получаем поверхность вращения, уравнение которой имеет вид

$$F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}; z) = 0.$$

Если вращение совершать вокруг оси Oy , то уравнение поверхности вращения (другой!) запишется в виде

$$F(y; \pm \sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

Правило

Чтобы получить уравнение поверхности, образованной вращением линии L , лежащей в плоскости Oyz , вокруг оси Oy , нужно в уравнении этой линии заменить z выражением $\pm \sqrt{x^2 + z^2}$.

Уравнение вращающейся линии надо преобразовать так, чтобы оно стало уравнением поверхности вращения. Правило указывает, что в уравнении вращающейся линии $f(y; z) = 0$ текущая координата z должна быть заменена на выражение $\pm \sqrt{x^2 + z^2}$. Это надо понимать так, что в этом уравнении вторая текущая **координата y , одноимённая с осью вращения Oy , должна быть оставлена без изменения.**

Таким образом, преобразованное уравнение в общем случае будет содержать три текущих координаты x, y, z .

Если бы вращение линии $f(y; z) = 0$ происходило не вокруг оси Oy , а вокруг оси Oz , то, чтобы получить уравнение поверхности вращения, следовало бы в уравнении кривой текущую **координату z , соответствующую оси вращения Oz , оставить без изменения**, две же другие текущие координаты x и y ввести, заменив в уравнении кривой y на выражение $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аналогично поступают в случаях, когда происходит вращение линии, лежащей в плоскостях Oxy и Oxz .


Задача 94. Окружность $x^2 + y^2 = R^2$ вращается вокруг оси Ox . Найти уравнение поверхности вращения (сферы).

▲ Чтобы написать уравнение поверхности вращения, полученной от вращения заданной окружности вокруг оси Ox , следует в уравнении **окружности** переменную x , соответствующую оси вращения, оставить без изменения. Вторую же переменную y в уравнении **окружности** заменить $\pm$ корнем квадратным из суммы квадратов остальных переменных – y и z , т.е. на выражение $\pm \sqrt{y^2 + z^2}$; тогда уравнение **поверхности вращения** запишется так:

$$x^2 + \left(\pm \sqrt{y^2 + z^2} \right)^2 = R^2, \text{ т.е. в виде } x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ (сфера).} \quad \blacktriangledown$$

Задача 95. Прямая $x = z$ вращается вокруг оси Oz . **Найти уравнение поверхности вращения (конуса).**

▲ Так как в уравнение линии входят только переменные x и z , то линия лежит в плоскости Oxz .

Для написания уравнения поверхности вращения в уравнении прямой переменная z должна остаться без изменения, так как она соответствует оси вращения Oz . Вторая же переменная x в уравнении прямой должна быть заменена $\pm$ корнем квадратным из суммы квадратов двух остальных переменных x и y , т.е. $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$. Уравнение **поверхности вращения** запишется так:

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = z.$$

Возведя обе части последнего равенства в квадрат, **получим** окончательно уравнение **поверхности вращения** в виде

$$x^2 + y^2 = z^2 \text{ или } x^2 + y^2 - z^2 = 0 \text{ (конус)}.$$

Осью этого **конуса** является ось Oz .

Если бы вращение прямой $x = z$ происходило не вокруг оси Oz , а вокруг оси Ox , то мы получили бы уравнение **поверхности вращения**, оставив в этом уравнении без изменения переменную x и заменив переменную z выражением $\pm \sqrt{y^2 + z^2}$.

Уравнение поверхности вращения приняло бы вид $x = \pm \sqrt{y^2 + z^2}$, а после возведения обеих частей равенства в квадрат $x^2 = y^2 + z^2$, или окончательно $y^2 + z^2 - x^2 = 0$. ▼



3.7. Метод сечений

Задача 96. Исследовать **методом сечений** и построить поверхность $z = 4x^2 + 9y^2$.

▲ 1. Название секущей плоскости: плоскость Oxy .

$$\text{Сечение данной поверхности: } \begin{cases} z = 0, \\ 4x^2 + 9y^2 = 0. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: точка $O(0; 0; 0)$.

2. Название секущей плоскости: плоскость параллельная плоскости Oxy .

$$\text{Сечение данной поверхности: } \begin{cases} z = h, h > 0 \\ 4x^2 + 9y^2 = h. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: эллипс, полуоси эллипса увеличиваются с ростом h .

3. Название секущей плоскости: плоскость Oxz .

$$\text{Сечение данной поверхности: } \begin{cases} y = 0, \\ z = 4x^2. \end{cases}$$

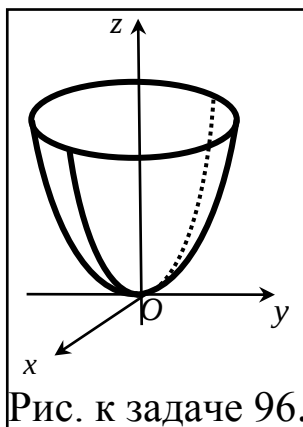
Название сечения и его свойства: парабола.

4. Название секущей плоскости: плоскость Oyz .

$$\text{Сечение данной поверхности: } \begin{cases} x = 0, \\ z = 9y^2. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: парабола.

Замечание. Если в сечении поверхности координатной плоскостью получаются прямые линии или точка, то нужно получить сечение поверхности плоскостью, параллельной этой координатной плоскости.



3.8. Как получить название поверхности, пользуясь методом сечений?

Задача 97. Назвать поверхность $4x^2 - 3y^2 = 12z$.

▲ Находим сечения поверхности координатными плоскостями.

1. Название секущей плоскости: плоскость Oxy .

Сечение данной поверхности:

$$\begin{aligned} \begin{cases} z = 0, \\ 4x^2 - 3y^2 = 0, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} z = 0, \\ (2x - \sqrt{3}y)(2x + \sqrt{3}y) = 0, \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} z = 0, \\ 2x - \sqrt{3}y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} z = 0, \\ 2x + \sqrt{3}y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Название сечения и его свойства: сечения выродились в **прямые линии**.

2. Название секущей плоскости: плоскость параллельная плоскости Oxy .

Сечение данной поверхности:

$$\begin{cases} z = h, h > 0 \\ 4x^2 - 3y^2 = 12h, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = h, \\ \frac{x^2}{3h} - \frac{y^2}{4h} = 1 \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **гипербола**.

3. Название секущей плоскости: плоскость Oxz .

Сечение данной поверхности:
$$\begin{cases} y = 0, \\ 4x^2 = 12z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0, \\ z = \frac{1}{3}x^2. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **парабола**.

4. Название секущей плоскости: плоскость Oyz .

Сечение данной поверхности:
$$\begin{cases} x = 0, \\ -3y^2 = 12z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ z = -\frac{1}{4}y^2. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **парабола**.

Два сечения – **параболы**, одно сечение – **гипербола**.

Название поверхности – **гиперболический параболоид**. ▼



Задача 98. Определить по методу сечений поверхность

$$4z^2 - 9x^2 + 4y^2 = 12.$$

▲ **Находим сечения поверхности координатными плоскостями.**

1. Название секущей плоскости: плоскость Oxy .

Сечение данной поверхности:

$$\begin{cases} z = 0, \\ -9x^2 + 4y^2 = 12, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0, \\ -\frac{x^2}{\frac{4}{3}} + \frac{y^2}{3} = 1. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **гипербола**.

2. Название секущей плоскости: плоскость Oxz .

$$\text{Сечение данной поверхности: } \begin{cases} y = 0, \\ 4z^2 - 9x^2 = 12, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0, \\ \frac{z^2}{3} - \frac{x^2}{\frac{4}{3}} = 1. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **гипербола**.

3. Название секущей плоскости: плоскость Oyz .

$$\text{Сечение данной поверхности: } \begin{cases} x = 0, \\ 4z^2 + 4y^2 = 12, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y^2 + z^2 = 3. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **окружность**.

Два сечения – **гиперболы**, одно сечение – **окружность**. Не пересекает ось Ox . Название поверхности – **однополостный гиперболоид**. ▼

Если гиперболоид не пересекает одну (две) координатную (ые) ось (и), то он имеет одну (две) полость (и), что соответствует одному (двум) минусам в левой части его уравнения при условии, что справа стоит только свободный член и он положителен. Минус перед членом, содержащим координату x (y или z), означает, что поверхность не пересекает ось Ox (Oy или Oz).

Задача 99. Определить по методу сечений поверхность

$$x^2 + 2x + y^2 + 2y + z^2 = 0.$$

▲ Выделим полные квадраты относительно x и y .

$$(x^2 + 2x + 1) + (y^2 + 2y + 1) - 1 - 1 + z^2 = 0,$$

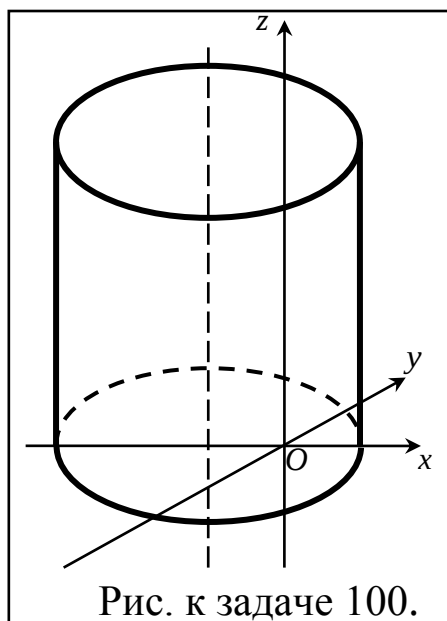
$$(x+1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 2 - \text{сфера.} \quad \blacktriangle$$

Задача 100. Определить по методу сечений поверхность

$$x^2 + 2x + y^2 = 3.$$

▲ Эта поверхность – **цилиндр** (нет z).

Строим **цилиндр** по **образующей** $(x+1)^2 + y^2 = 4$ и **направляющим** параллельным оси Oz .



Задача 101. Построить конус $x^2 - y^2 + z^2 = 0$.

▲ Находим сечения поверхности координатными плоскостями.

1. Название секущей плоскости: плоскость Oxy .

Сечение данной поверхности:

$$\begin{cases} z = 0, \\ x^2 - y^2 =, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 0, \\ (x-y)(x+y) = 0. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **прямые**.

2. Название секущей плоскости: плоскость параллельная плоскости Oxy .

Сечение данной поверхности:

$$\begin{cases} z = \pm h, \\ y^2 - x^2 = h^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = \pm h, \\ \frac{y^2}{h^2} - \frac{x^2}{h^2} = 1. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **гиперболы**.

3. Название секущей плоскости: плоскость Oxz .

Сечение данной поверхности:
$$\begin{cases} y = 0, \\ x^2 + z^2 = 0. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **точка**.

4. Название секущей плоскости: плоскость параллельная плоскости Oxz .

Сечение данной поверхности:

$$\begin{cases} y = \pm h, \\ x^2 + z^2 = h^2. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **окружности**.

5. Название секущей плоскости: плоскость Oyz .

Сечение данной поверхности:

$$\begin{cases} x = 0, \\ z^2 - y^2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ (z - y)(z + y) = 0. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **прямые**.

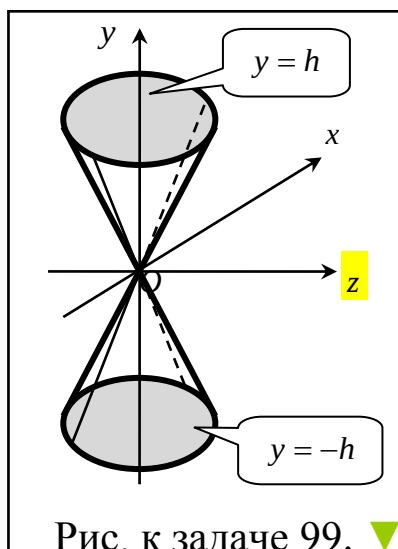
5. Название секущей плоскости: плоскость параллельная плоскости Oyz .

Сечение данной поверхности:

$$\begin{cases} x = \pm h, \\ y^2 - z^2 = h^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ \frac{y^2}{h^2} - \frac{z^2}{h^2} = 1. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **гиперболы**.

Строим *конус*.



Задача 96. Что изображает поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

▲ Поверхность изображает точку $O(0; 0; 0)$. ▼

Признаки некоторых поверхностей 2-го порядка

1. Признак *цилиндра* – отсутствие одной из координат в его уравнении.
2. Признак *конуса* – однородность уравнения (нет свободного члена и все члены одной степени).
3. Признак *сферы*: одинаковые коэффициенты перед членами x^2 , y^2 , z^2 , отсутствие членов с произведением xu , uz , xz .

Обратите внимание!

Оси координат на всех чертежах располагаются так, чтобы было удобно сделать чертёж и разглядеть поверхность. Чтобы система координат осталась правой, наикратчайший поворот от оси Ox к оси Oy с конца оси Oz должен казаться направленным против часовой стрелки.

Для определения названия поверхности нужно сначала проверить, не является ли данная поверхность *сферой*, *конусом* или *цилиндром* (по признакам), если не является, то воспользоваться *методом сечений*.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Даны вершины треугольника $ABC : A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$.

Найти: а) уравнение стороны AB ;

б) уравнение высоты CH ;

в) уравнение медианы AM ;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH ;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ;

е) расстояние от точки C до прямой AB .

2. Даны четыре точки $A_1(x_1; y_1), A_2(x_2; y_2), A_3(x_3; y_3), A_4(x_4; y_4)$.

Составить уравнения:

а) плоскости $A_1A_2A_3$; б) прямой A_1A_2 ;

в) прямой A_4M , перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;

г) прямой A_3N , параллельной прямой A_1A_2 ;

д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно к прямой A_1A_2 .

Вычислить:

е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;

ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

3. **Составить** канонические уравнения: а) *эллипса*; б) *гиперболы*; в) *параболы*.

A, B – точки, лежащие на кривой линии,

F – фокус,

a – большая (вещественная) полуось, b – малая (мнимая) полуось,

ε – эксцентриситет,

$y = \pm kx$ – уравнения асимптот *гиперболы*,

D – директриса кривой,

$2c$ – фокусное расстояние.

4. **Записать** уравнение *окружности*, проходящей через указанные точки и имеющей центр в точке A .

5. **Составить** уравнение линии, каждая точка M которой удовлетворяет заданным условиям.

Вариант 1 1. $A(-2; 4), B(3; 1), C(10; 7)$. 2. $A_1(3; 1; 4), A_2(-1; 6; 1), A_3(-1; 1; 6), A_4(0; 4; -1)$. 3. а) $b=15, F(-10; 0)$; б) $a=13, \varepsilon=13/14$; в) $D: x = -4$. 4. Вершины гиперболы $12x^2 - 13y^2 = 156, A(0; -2)$. 5. Отстоит от прямой $x=6$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(1; 3)$.	Вариант 2 1. $A(-3; -2), B(14; 4), C(6; 8)$. 2. $A_1(3; -1; 2), A_2(-1; 0; 1), A_3(1; 7; 3), A_4(8; 5; 8)$. 3. а) $b=2, F(4\sqrt{2}; 0)$; б) $a=7, \varepsilon=\sqrt{85}/7$; в) $D: x=5$. 4. Вершины гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36, A(0; 4)$. 5. Отстоит от прямой $x=-2$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(4; 0)$.
Вариант 3 1. $A(1; 7), B(-3; -1), C(11; -3)$. 2. $A_1(3; 5; 4), A_2(5; 8; 3), A_3(1; 2; -2), A_4(-1; 0; 2)$. 3. а) $A(3; 0), B(2; \sqrt{5}/3)$; б) $k=3/4, c=\sqrt{7}$; в) параболы $D: y=-2$. 4. Фокусы гиперболы $24y^2 - 25x^2 = 600, A(-8; 0)$. 5. Отстоит от прямой $y=-2$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(5; 0)$.	Вариант 4 1. $A(1; 0), B(-1; 4), C(9; 5)$. 2. $A_1(2; 4; 3), A_2(1; 1; 5), A_3(4; 9; 3), A_4(3; 6; 7)$. 3. а) $\varepsilon=\sqrt{21}/2, A(-5; 0)$; б) $A(\sqrt{80}; 3), B(4\sqrt{6}; 3\sqrt{2})$; в) $D: y=1$. 4. $O(0; 0)$, A – вершину параболы $y^2 = 3(x-4)$. 5. Отношение расстояний от точки M до точек $A(2; 3)$ и $B(-1; 2)$ равно $3/4$.
Вариант 5 1. $A(1; -2), B(7; 1), C(3; 7)$. 2. $A_1(9; 5; 5), A_2(-3; 7; 1), A_3(5; 7; 8), A_4(6; 9; 2)$. 3. а) $2a=22, \varepsilon=\sqrt{57}/11$; б) $k=2/3, c=10\sqrt{13}$; в) ось симметрии Ox и $A(27; 9)$.	Вариант 6 1. $A(-2; -3), B(1; 6), C(6; 1)$. 2. $A_1(0; 7; 1), A_2(2; -1; 5), A_3(1; 6; 3), A_4(3; -9; 8)$. 3. а) $b=\sqrt{15}, \varepsilon=\sqrt{10}/25$; б) $k=3/4, 2a=16$; в) ось симметрии Ox и $A(4; -8)$. 4. Левый фокус гиперболы

4. Фокусы эллипса $9x^2 + 25y^2 = 1$, $A(0; 6)$. 5. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(4; 0)$ и $B(-2; 2)$ равна 28.	$3x^2 - 4y^2 = 12$, $A(0; -3)$. 5. Отстоит от точки $A(1; 0)$ на расстоянии, в пять раз меньшем, чем от прямой $x = 8$.
Вариант 7 1. $A(-4; 2)$, $B(-6; 6)$, $C(6; 2)$. 2. $A_1(5; 5; 4)$, $A_2(1; -1; 4)$, $A_3(3; 5; 1)$, $A_4(5; 8; -1)$. 3. а) $a = 4$, $F(3; 0)$; б) $b = 2\sqrt{10}$, $F(-11; 0)$; в) $D: x = -2$. 4. Фокусы эллипса $3x^2 + 4y^2 = 12$ A – его верхняя вершина. 5. Отстоит от точки $A(4; 1)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2; -1)$.	Вариант 8 1. $A(4; -3)$, $B(7; 3)$, $C(1; 10)$. 2. $A_1(6; 1; 1)$, $A_2(4; 6; 6)$, $A_3(4; 2; 0)$, $A_4(1; 2; 6)$. 3. а) $b = 4$, $F(9; 0)$; б) $a = 5$, $\varepsilon = 7/5$; в) $D: x = 6$. 4. Вершину гиперболы $x^2 - 16y^2 = 64$, $A(0; -2)$. 5. Отстоит от прямой $x = -5$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $A(6; 1)$.
Вариант 9 1. $A(4; -4)$, $B(8; 2)$, $C(3; 8)$. 2. $A_1(7; 5; 3)$, $A_2(9; 4; 4)$, $A_3(4; 5; 7)$, $A_4(7; 9; 6)$. 3. а) $A(0; \sqrt{3})$, $B(\sqrt{14/3}; 1)$; б) $c = 11$, $k = \sqrt{21}/10$; в) $D: y = -4$. 4. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 80$, $A(0; -4)$. 5. Отстоит от прямой $y = 7$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4; -3)$.	Вариант 10 1. $A(-3; -3)$, $B(5; -7)$, $C(7; 7)$. 2. $A_1(6; 8; 2)$, $A_2(5; 4; 7)$, $A_3(2; 4; 7)$, $A_4(7; 3; 7)$. 3. а) $\varepsilon = 7/8$, $A(8; 0)$; б) $A(3; -\sqrt{3/5})$, $B(6; \sqrt{13/5})$; в) $D: y = 4$. 4. $O(0; 0)$, A – вершина параболы $y^2 = -1/2 \cdot (x + 5)$. 5. Отношение расстояний от точки M до точек $A(-3; 5)$ и $B(4; 2)$ равно $1/3$.
Вариант 11 1. $A(1; -6)$, $B(3; 4)$, $C(-3; 3)$. 2. $A_1(4; 2; 5)$, $A_2(0; 7; 1)$,	Вариант 12 1. $A(-4; 2)$, $B(8; -6)$, $C(2; 6)$. 2. $A_1(4; 4; 10)$, $A_2(7; 10; 2)$,

$A_3(0; 2; 7), A_4(1; 5; 0).$ 3. а) $2a = 24, \varepsilon = \sqrt{22}/6;$ б) $2c = 10, k = \sqrt{2/3};$ в) ось симметрии Ox и $A(-7; -7).$ 4. Правый фокус эллипса $33x^2 + 49y^2 = 1617, A(1; 7).$ 5. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5; -1)$ и $B(3; 2)$ равна 40.5.	$A_3(2; 8; 4), A_4(9; 6; 9).$ 3. а) $b = 2, \varepsilon = 5/\sqrt{29};$ б) $2a = 26, k = 12/13;$ в) ось симметрии Ox и $A(-5; 15).$ 4. Левый фокус гиперболы $3x^2 - 5y^2 = 30, A(0; 6).$ 5. Отстоит от точки $A(2; 1)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = -5.$
Вариант 13 1. $A(-5; 2), B(0; -4), C(5; 7).$ 2. $A_1(4; 6; 5), A_2(6; 9; 4),$ $A_3(2; 10; 10), A_4(7; 5; 9).$ 3. а) $a = 6, F(-4; 0);$ б) $b = 3, F(7; 0);$ в) $D: x = -7.$ 4. Фокусы эллипса $16x^2 + 41y^2 = 656,$ A – его нижняя вершина. 5. Отстоит от точки $A(-3; 3)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(5; 1).$	Вариант 14 1. $A(4; -4), B(6; 2), C(-1; 8).$ 2. $A_1(3; 5; 4), A_2(8; 7; 4),$ $A_3(5; 10; 4), A_4(4; 7; 8).$ 3. а) $b = 7, F(5; 0);$ б) $a = 11, \varepsilon = 12/11;$ в) $D: x = 10.$ 4. Вершину гиперболы $2x^2 - 9y^2 = 18, A(0; 4).$ 5. Отстоит от прямой $x = 8$ на расстоянии, в два раза большем, чем от точки $A(-1; 7).$
Вариант 15 1. $A(-3; 8), B(-6; 2), C(0; -5).$ 2. $A_1(10; 9; 6), A_2(2; 8; 2),$ $A_3(9; 8; 9), A_4(7; 10; 3).$ 3. а) $A(-\sqrt{17/3}; 1/3), B(\sqrt{21}/2; 1/2);$ б) $k = 1/3, c = \sqrt{5};$ в) $D: y = -1.$ 4. Фокусы гиперболы $5x^2 - 11y^2 = 55, A(0; 5).$ 5. Отстоит от прямой $x = 9$ на расстоянии, в четыре раза мень-	Вариант 16 1. $A(6; -9), B(10; -1), C(-4; 1).$ 2. $A_1(1; 8; 2), A_2(5; 2; 6),$ $A_3(5; 7; 4), A_4(4; 10; 9).$ 3. а) $\varepsilon = 3/5, A(0; 8);$ б) $A(\sqrt{6}; 0), B(-2\sqrt{2}; 1);$ в) $D: y = 9.$ 4. $B(1; 4), A$ – вершина параболы $y^2 = 1/3 \cdot (x - 4).$ 5. Отношение расстояний от точки M до

шем, чем от точки $A(-1; 2)$. Вариант 17 1. $A(4; 1)$, $B(-3; -1)$, $C(7; -3)$. 2. $A_1(6; 6; 5)$, $A_2(4; 9; 5)$, $A_3(4; 6; 11)$, $A_4(6; 9; 3)$. 3. а) $2a = 22$, $\varepsilon = 10/11$; б) $k = \sqrt{11}/5$, $2c = 12$; в) ось симметрии Ox и $A(-7; 5)$. 4. Левый фокус эллипса $3x^2 + 7y^2 = 21$, $A(-1; -3)$. 5. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-3; 3)$ и $B(4; 1)$ равна 31.	чек $A(2; -4)$ и $B(3; 5)$ равно $2/3$. Вариант 18 1. $A(-4; 2)$, $B(6; -4)$, $C(4; 10)$. 2. $A_1(7; 2; 2)$, $A_2(-5; 7; -7)$, $A_3(5; -3; 1)$, $A_4(2; 3; 7)$. 3. а) $b = 5$, $\varepsilon = 12/13$; б) $2a = 6$, $k = 1/3$; в) ось симметрии Oy и $A(-9; 6)$. 4. Левую вершину гиперболы $5x^2 - 9y^2 = 45$, $A(0; -6)$. 5. Отстоит от точки $A(0; -5)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от прямой $x = 3$.
Вариант 19 1. $A(3; -1)$, $B(11; 3)$, $C(-6; 2)$. 2. $A_1(8; -6; 4)$, $A_2(10; 5; -5)$, $A_3(5; 6; -8)$, $A_4(8; 10; 7)$. 3. а) $a = 9$, $F(7; 0)$; б) $b = 6$, $F(12; 0)$; в) $D: x = -1/4$. 4. Фокусы эллипса $24x^2 + 25y^2 = 600$, A – его верхняя вершина. 5. Отстоит от точки $A(4; -2)$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от прямой $x = 3$.	Вариант 20 1. $A(-7; -2)$, $B(-7; 4)$, $C(5; -5)$. 2. $A_1(1; -1; 3)$, $A_2(6; 5; 8)$, $A_3(3; 5; 8)$, $A_4(8; 4; 1)$. 3. а) $b = 5$, $F(-10; 0)$; б) $a = 9$, $\varepsilon = 4/3$; в) $D: x = 12$. 4. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 16y^2 = 48$, $A(1; 3)$. 5. Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(1; 4)$.
Вариант 21 1. $A(-1; -4)$, $B(9; 6)$, $C(-5; 4)$. 2. $A_1(1; -2; 7)$, $A_2(4; 2; 10)$, $A_3(2; 3; 5)$, $A_4(5; 3; 7)$. 3. а) $A(0; -2)$, $B(\sqrt{15}/2; 1)$; б) $c = 11$, $k = 2\sqrt{10}/9$; в) $D: y = 5$.	Вариант 22 1. $A(10; -2)$, $B(4; -5)$, $C(-3; 1)$. 2. $A_1(4; 2; 10)$, $A_2(1; 2; 0)$, $A_3(3; 5; 7)$, $A_4(2; -3; 5)$. 3. а) $\varepsilon = 2/3$, $A(-6; 0)$; б) $A(\sqrt{2}; 0)$, $B(\sqrt{20}/3; 2)$; в) $D: y = 1$.

4. Левый фокус гиперболы $7x^2 - 9y^2 = 63$, $A(-1; -2)$. 5. Отстоит от прямой $x=14$ на расстоянии, в два раза меньшем, чем от точки $A(2; 3)$.	4. $B(2; -5)$, A – вершина параболы $x^2 = -2(y+1)$. 5. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3; -2)$ и $B(4; 6)$ равно $3/5$.
Вариант 23 1. $A(-3; -1)$, $B(-4; -5)$, $C(8; 1)$. 2. $A_1(2; 3; 5)$, $A_2(5; 3; -7)$, $A_3(1; 2; 7)$, $A_4(4; 2; 0)$. 3. а) $2a = 50$, $\varepsilon = 3/5$; б) $2c = 30$, $k = \sqrt{29}/14$; в) ось симметрии Oy и $A(4; 1)$. 4. Правый фокус эллипса $x^2 + 4y^2 = 12$, $A(2; -7)$. 5. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-5; 3)$ и $B(2; -4)$ равна 65.	Вариант 24 1. $A(-2; -6)$, $B(-3; 5)$, $C(4; 0)$. 2. $A_1(5; 3; 7)$, $A_2(-2; 3; 5)$, $A_3(4; 2; 10)$, $A_4(1; 2; 7)$. 3. а) $b = 2\sqrt{15}$, $\varepsilon = 7/8$; б) $2a = 12$, $k = 5/6$; в) ось симметрии Oy, $A(-2; 3\sqrt{2})$. 4. Правую вершину гиперболы $40x^2 - 81y^2 = 3240$, $A(-2; 5)$. 5. Отстоит от точки $A(3; -4)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от прямой $x = 5$.
Вариант 25 1. $A(-7; -2)$, $B(3; -8)$, $C(-4; 6)$. 2. $A_1(4; 3; 5)$, $A_2(1; 9; 7)$, $A_3(0; 2; 0)$, $A_4(5; 3; 10)$. 3. а) $a = 13$, $F(-5; 0)$; б) $b = 4.4$, $F(-7; 0)$; в) $D: x = -3/8$. 4. Фокусы эллипса $x^2 + 10y^2 = 90$, A – его нижняя вершина. 5. Отстоит от точки $A(5; 7)$ на расстоянии, в четыре раза большем, чем от точки $B(-2; 1)$.	Вариант 26 1. $A(0; 2)$, $B(-7; -4)$, $C(3; 2)$. 2. $A_1(3; 2; 5)$, $A_2(4; 0; 6)$, $A_3(2; 6; 5)$, $A_4(6; 4; -1)$. 3. а) $b = 7$, $F(13; 0)$; б) $b = 4$, $F(-11; 0)$; в) $D: x = 13$. 4. Правую вершину гиперболы $3x^2 - 25y^2 = 75$, $A(-5; -2)$. 5. Отстоит от прямой $x = 2$ на расстоянии, в пять раз большем, чем от точки $A(4; -3)$.
Вариант 27 1. $A(7; 0)$, $B(1; 4)$, $C(-8; -4)$. 2. $A_1(2; 1; 6)$, $A_2(1; 4; 9)$,	Вариант 28 1. $A(1; -3)$, $B(0; 7)$, $C(-2; 4)$. 2. $A_1(2; 1; 7)$, $A_2(3; 3; 6)$,

$A_3(2; -5; 8), A_4(5; 4; 2).$ 3. а) $A(-3; 0), B(1; \sqrt{40}/3);$ б) $c = \sqrt{15}, k = \sqrt{2/3};$ в) $D: y = 4.$ 4. Фокусы гиперболы $4x^2 - 5y^2 = 20, A(0; -6).$ 5. Отстоит от прямой $x = -7$ на расстоянии, в три раза меньшем, чем от точки $A(3; 1).$	$A_3(2; -3; 9), A_4(1; 2; 5).$ 3. а) $\varepsilon = 5/6, A(0; -\sqrt{11});$ б) $A(\sqrt{32}/3; 1), B(\sqrt{8}; 0);$ в) $D: y = -3.$ 4. $B(3; 4), A$ – вершина параболы $4y^2 = x + 7.$ 5. Отношение расстояний от точки M до точек $A(3; -5)$ и $B(4; 1)$ равно $1/4.$
Вариант 29 1. $A(-5; 1), B(8; -2), C(1; 4).$ 2. $A_1(2; -1; 7), A_2(6; 3; 1),$ $A_3(3; 2; 8), A_4(2; -3; 7).$ 3. а) $2a = 34, \varepsilon = 7/15;$ б) $2c = 18, k = \sqrt{17}/8;$ в) ось симметрии Oy и $A(4; -10).$ 4. Левый фокус эллипса $13x^2 + 49y^2 = 837, A(1; 8).$ 5. Сумма квадратов расстояний от точки M до точек $A(-1; 2)$ и $B(3; -1)$ равна 18.5.	Вариант 30 1. $A(2; 5), B(-3; 1), C(0; 4).$ 2. $A_1(0; 4; 5), A_2(3; -2; 1),$ $A_3(4; 5; 6), A_4(3; 3; 2).$ 3. а) $b = 2\sqrt{2}, \varepsilon = 7/9;$ б) $2a = 12, k = \sqrt{2}/2;$ в) ось симметрии Oy и $A(-45; 15).$ 4. Правый фокус гиперболы $57x^2 - 64y^2 = 3648, A(2; 8).$ 5. Отстоит от точки $A(1; 5)$ на расстоянии, в четыре раза меньшем, чем от прямой $x = -1$

Решение типового варианта

1. Даны вершины треугольника $ABC: A(4; 3), B(-3; -3), C(2; 7).$

Найти: а) уравнение стороны AB ;

б) уравнение высоты CH ;

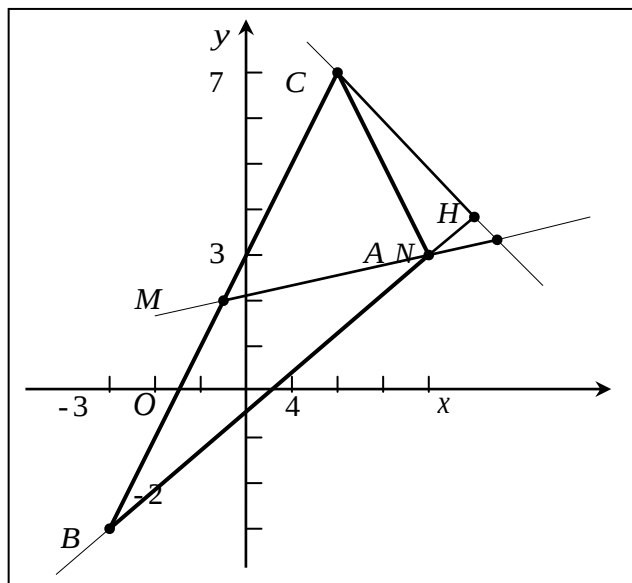
в) уравнение медианы AM ;

г) точку N пересечения медианы AM и высоты CH ;

д) уравнение прямой, проходящей через вершину C параллельно стороне AB ;

е) расстояние от точки C до прямой AB .

▲ Сделаем чертеж:



▲ а) Воспользовавшись уравнением прямой, проходящей через *две точки*, $\frac{x-x_A}{x_B-x_A} = \frac{y-y_A}{y_B-y_A}$ получим уравнение стороны AB :

$$(AB): \frac{x-4}{-3-4} = \frac{y-3}{-3-3} \Leftrightarrow 6(x-4) = 7(y-3) \Leftrightarrow \underline{6x-7y-3=0}$$

или

$$(AB): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow x(3+3) - y(4+3) + 1(-12+9) = 0 \Leftrightarrow \underline{6x-7y-3=0}.$$

б) Приведем уравнение стороны AB к виду *с угловым коэффициентом*

$$(AB): y = 6/7 \cdot x - 3/7; k_{AB} = 6/7.$$

С учетом условия перпендикулярности прямых AB и CH угловой коэффициент высоты CH

$$k_{CH} = -1/k_{AB}; k_{CH} = -6/7.$$

По точке $C(2; 7)$ и угловому коэффициенту k_{CH} составляем уравнение высоты CH :

$$y - y_c = k_{CH} (x - x_c)$$

$$(CH): y - 7 = -\frac{7}{6}(x - 2) \Leftrightarrow \underline{7x + 6y - 56 = 0}.$$

$$в) \quad (AM): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_M & y_M & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

По известным формулам **находим** координаты точки $M(x_M; y_M)$ середины отрезка BC :

$$x_M = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}, y_M = \frac{-3+7}{2} = 2; M(-1/2; 2).$$

Тогда уравнение медианы будет

$$(AM): \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1/2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(3-2) - y(4+1/2) + 1 \cdot (8+3/2) = 0 \Leftrightarrow x - 9/2 \cdot y + 19/2 = 0 \Leftrightarrow \underline{2x - 9y + 19 = 0}.$$

г) Для нахождения координат точки N пересечения медианы AM ; и высоты CH составляем систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + 6y - 56 = 0, \\ 2x - 9y + 19 = 0. \end{cases}$$

Решая её **методом Гаусса**, получаем

$$\begin{aligned} \xrightarrow{-3} \begin{pmatrix} 7 & 6 & 56 \\ 2 & -9 & -19 \end{pmatrix} &\sim \xrightarrow{-2} \begin{pmatrix} 1 & 33 & 113 \\ 2 & -9 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 33 & 113 \\ 0 & -75 & -245 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} x + 33y = 113, \\ -75y = -245, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 26/5, \\ y = 49/15. \end{cases} \quad \underline{N(26/5; 49/15)}. \end{aligned}$$

д) Так как прямая, проходящая через вершину C , параллельна стороне AB , то их угловые коэффициенты равны $k_{AB} = k_\ell = 6/7$.

Тогда, согласно уравнению $y - y_c = k_\ell(x - x_c)$ по точке C и угловому коэффициенту k_ℓ **составляем** уравнение прямой ℓ :

$$(\ell): y - 7 = 6/7 \cdot (x - 2) \Leftrightarrow 6x - 7y + 37 = 0.$$

е) Расстояние от точки C до прямой AB **вычисляем** по формуле:

$$d = \frac{|Ax_c + By_c + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Поскольку $C(2; 7)$, $(AB): 6x - 7y - 3 = 0$, то **имеем**

$$d = |CH| = \frac{|6 \cdot 2 - 7 \cdot 7 - 3|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2}} = \frac{40}{\sqrt{85}} \approx 4.4. \quad \blacktriangledown$$

2. **Даны** четыре точки $A_1(4; 7; 8)$, $A_2(-1; 13; 0)$, $A_3(2; 4; 9)$, $A_4(1; 8; 9)$.

Составить уравнения:

- а) плоскости $A_1A_2A_3$;
- б) прямой A_1A_2 ;
- в) прямой A_4M , перпендикулярной к плоскости $A_1A_2A_3$;
- г) прямой A_4N , параллельной прямой A_1A_2 ;
- д) плоскости, проходящей через точку A_4 перпендикулярно прямой A_1A_2 .

Вычислить:

- е) синус угла между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$;
- ж) косинус угла между координатной плоскостью Oxy и плоскостью $A_1A_2A_3$.

▲ а) Используя уравнение плоскости **по трем точкам**,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

составляем уравнение плоскости $A_1A_2A_3$:

$$(A_1A_2A_3): \begin{vmatrix} x - 4 & y - 7 & z - 8 \\ -1 - 4 & 13 - 7 & 0 - 8 \\ 2 - 4 & 4 - 7 & 9 - 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x - 4 & y - 7 & z - 8 \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $(x-4) \cdot (6-24) - (y-7) \cdot (-5-16) + (z-8) \cdot (15+12) = 0$.

Окончательно, **имеем** $(A_1A_2A_3): 6x - 7y - 9z + 97 = 0$.

б) Учитывая уравнения прямой в пространстве, проходящей **через две точки** $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$,

уравнения прямой A_1A_2 можно записать в виде

$$(A_1A_2): \frac{x-4}{-1-4} = \frac{y-7}{13-7} = \frac{z-8}{0-8} \Rightarrow \frac{x-4}{-5} = \frac{y-7}{6} = \frac{z-8}{-8}.$$

в) Из условия перпендикулярности прямой A_4M и плоскости $A_1A_2A_3$ следует, что в качестве **направляющего вектора** прямой **a** можно взять нормальный вектор $\mathbf{n} = \{6; -7; -9\}$ плоскости $A_1A_2A_3$. Тогда уравнение прямой A_4M с учетом канонических уравнений

$$\frac{x-x_0}{a_x} = \frac{y-y_0}{a_y} = \frac{z-z_0}{a_z}$$

запишется в виде

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y-8}{-7} = \frac{z-9}{-9}.$$

г) Так как прямая A_4N параллельна прямой A_1A_2 , то их **направляющие векторы** $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ можно считать совпадающими:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 = \{-5; 6; -8\}.$$

Следовательно, уравнение прямой A_4N имеет вид

$$\frac{x-1}{-5} = \frac{y-8}{6} = \frac{z-9}{-8}.$$

д) Так как плоскость перпендикулярна прямой A_1A_2 , то **нормальный вектор** $\mathbf{n} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2 = \{-5; 6; -8\}$.

Тогда, используя уравнение плоскости **по точке и нормальному вектору**

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0,$$

имеем:

$$-5(x-1)+6(y-8)-8(z-9)=0 \Rightarrow \underline{5x-6y+8z-16=0}.$$

е) По формуле

$$\sin \varphi = \frac{|Aa_x + Ba_y + Ca_z|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}},$$

где $\mathbf{n} = \{A; B; C\} = \{6; -7; -9\}$,

$$\mathbf{A}_1\mathbf{A}_4 = \{1-4; 8-7; 9-8\} = \{-3; 1; 1\}$$

$$\sin \varphi = \frac{|6 \cdot (-3) + (-7) \cdot 1 + (-9) \cdot 1|}{\sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-9)^2} \sqrt{(-3)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{34}{\sqrt{166} \sqrt{11}} \approx 0.8.$$

ж) Так как **нормальный вектор** к плоскости $A_1A_2A_3$ $\mathbf{n}_1 = \{6; -7; -9\}$, а орт плоскости $Oxy - \{0; 0; 1\}$, то в соответствии с формулой

$$\cos \varphi = \cos(\mathbf{n}_1; \mathbf{n}_2) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

получим

$$\cos \varphi = \frac{6 \cdot 0 + (-7) \cdot 0 + (-9) \cdot 1}{\sqrt{6^2 + (-7)^2 + (-9)^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{-9}{\sqrt{166}} \approx -0.7. \quad \blacktriangledown$$

3. Составить канонические уравнения:

а) **эллипса**, большая полуось которого равна 3, а фокус находится в точке $F(\sqrt{5}; 0)$;

б) **гиперболы** с мнимой полуосью, равной 2, и фокусом $F(-\sqrt{13}; 0)$;

в) **параболы**, имеющей директрису $x = -3$.

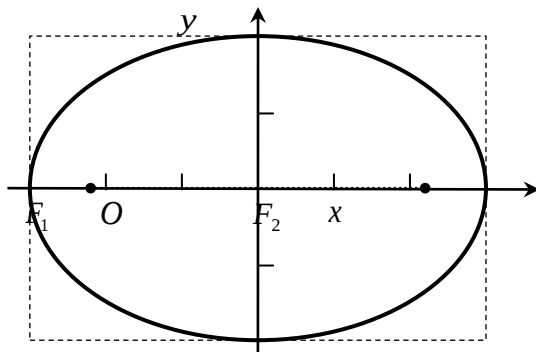
▲ а) Каноническое уравнение **эллипса** имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

По условию задачи большая полуось $a = 3, c = \sqrt{5}$.

Основное соотношение между величинами a, b, c для **эллипса** $b^2 = a^2 - c^2$. Подставив в него значения a и c , **найдем**

$$b^2 = 3^2 - (\sqrt{5})^2 = 4.$$

Искомое уравнение *эллипса* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Сделаем чертеж.



б) Каноническое уравнение *гиперболы* имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

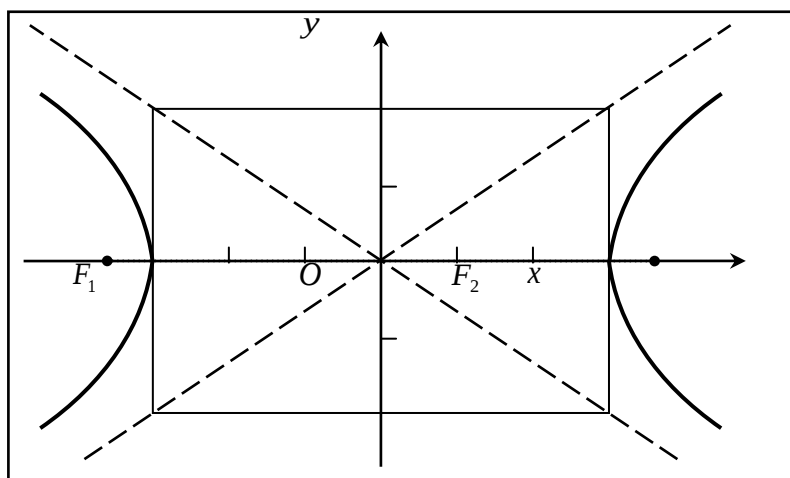
По условию мнимая полуось $b = 2$, а $c = \sqrt{13}$.

Основное соотношение между параметрами a, b, c для *гиперболы* $b^2 = c^2 - a^2$. Поэтому

$$a^2 = c^2 - b^2 = (\sqrt{13})^2 - 2^2 = 9.$$

Записываем искомое уравнение *гиперболы* $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Сделаем чертеж.



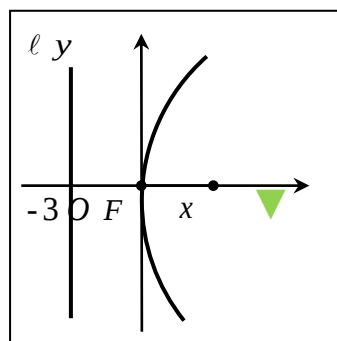
в) каноническое уравнение *параболы* в данном случае должно иметь вид $y^2 = 2px$, а уравнение её директрисы $x = -p/2$.

Но по условию задачи уравнение директрисы $x = -3$. Поэтому

$$-p/2 = -3 \Rightarrow p = 6$$

и искомое каноническое уравнение **параболы** имеет вид $y^2 = 12x$.

Сделаем чертеж.



4. Записать уравнение окружности, проходящей через фокусы эллипса $x^2 + 4y^2 = 4$ и имеющей центр в его верхней вершине.

▲ Для данного **эллипса** канонический вид уравнения $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Верхняя вершина $B(0; 1)$, большая полуось $a = 2$, малая полуось $b = 1$. Поэтому $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ и фокусы находятся в точках $F_1(\sqrt{3}; 0)$, $F_2(-\sqrt{3}; 0)$.

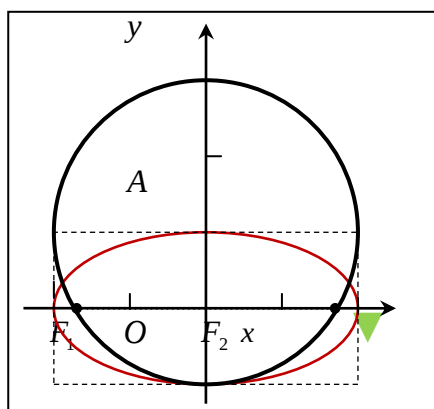
Радиус R искомой **окружности** вычисляем по формуле расстояния между двумя точками:

$$R = |BF_1| = |BF_2| = \sqrt{(\pm \sqrt{3} - 0)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2.$$

В соответствии с каноническим уравнением **окружности** записываем искомое уравнение **окружности**:

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 2^2 \text{ или } \underline{x^2 + (y - 1)^2 = 4}.$$

Сделаем чертеж



5. Составить уравнение *линии*, каждая точка M которой отстоит от точки $A(3; 2)$ на расстоянии, в три раза большем, чем от точки $B(-1; 0)$

▲ 1) **Выбираем** декартову прямоугольную систему координат Oxy . Пусть $M(x; y)$ – любая точка искомой *линии*.

2) Тогда по условию задачи $|AM| = 3|BM|$. Так как

$$|AM| = \sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}, \quad |BM| = \sqrt{(x+1)^2 + y^2},$$

то уравнение искомой *линии*

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2} = 3\sqrt{(x+1)^2 + y^2}.$$

3) **Преобразуем** полученное уравнение, возведя обе части в квадрат. **Имеем:**

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = 9x^2 + 18x + 9 + 9y^2,$$

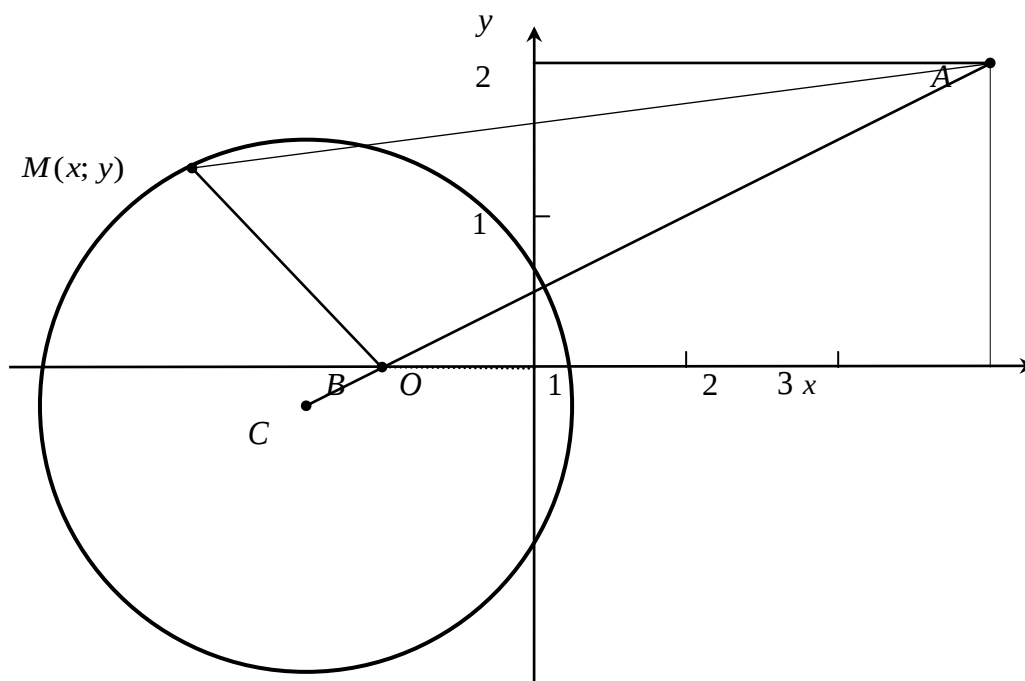
$$8x^2 + 24x + 8y^2 + 4y - 4 = 0.$$

Это уравнение *окружности*, так как коэффициенты выражениях x^2 и y^2 **равны** и **отсутствует** слагаемое с произведением xu .

Выделив полные квадраты в последнем уравнении, придем к уравнению вида

$$\begin{aligned} 8(x^2 + 3x) + 8(y^2 + 1/2 \cdot y) &= 4 \Rightarrow \\ \Rightarrow 8(x^2 + 2 \cdot 3/2 \cdot x + 9/4 - 9/4) + 8(y^2 + 2 \cdot 1/4 \cdot y + 1/16 - 1/16) &= 4 \Rightarrow \\ 8(x + 3/2)^2 + 8(y + 1/4)^2 &= 4 + 18 + 1/2 \Rightarrow \underline{(x + 3/2)^2 + (y + 1/4)^2 = 45/16}. \end{aligned}$$

Это уравнение является уравнением *окружности* с центром в точке $C(-3/2; -1/4)$ и радиусом $R = 3\sqrt{5}/4$. Сделаем чертеж.



ДОПОЛНЕНИЕ

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

1. Построить поверхности и определить их вид (название).
2. Построить тело, ограниченное указанными поверхностями.

Вариант 1 1. а) $4x^2 - y^2 - 16z^2 + 16 = 0$; б) $x^2 + 4z = 0$. 2. а) $z = x^2 + y^2, z = 0,$ $x = 1, y = 2, x = 0, y = 0$; б) $x^2 + y^2 = 2x, z = 0, z = x$	Вариант 2 1. а) $3x^2 + y^2 + 9z^2 - 9 = 0$; б) $x^2 + 2y^2 - 2z = 0$. 2. а) $x^2 + y^2 = z^2, z = 0, (z > 0)$; $y = 2x, y = 4x, x = 3, y = 0$; б) $x^2 + y^2 = 4y, z = 0, y + z = 5$
Вариант 3 1. а) $-5x^2 + 10y^2 - z^2 + 20 = 0$; б) $y^2 + 4z^2 = 5x^2$. 2. а) $y^2 + 3z^2 = 6, z = 0, z \geq 0,$ $3x^2 - 25y^2 = 75$; $x = 4, y = 2, x + 2y + 3z = 12,$ б) $x = 0, y = 0, z \geq 0$	Вариант 4 1. а) $4x^2 - 8y^2 + z^2 + 24 = 0$; б) $x^2 - y = -9z^2$. 2. а) $z = 5y, z = 0,$ $x^2 + y^2 = 16$; $x + y + z = 5, 3x + y = 5,$ б) $2x + y = 5, y = 0, z = 0$
Вариант 5 1. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 = 0$; б) $7x^2 - 3y^2 - z^2 = 21$. 2. а) $y = 3x, y = 0, x = 2,$ $z = xy, z = 0$; б) $8(x^2 + y^2) = z^2, z \geq 0, y \geq 0,$ $x^2 + y^2 = 1$	Вариант 6 1. а) $z = 8 - x^2 - 4y^2$; б) $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 72$. 2. а) $z = x^2 + 5y^2, z = 0,$ $y = x, y = 0, x = 1$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 9,$ $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0$

Вариант 7 1. а) $4x^2 + 6y^2 - 24z^2 = 96$; б) $y^2 + 8z^2 = -20x^2$. 2. а) $z = \sqrt{xy}, z = 0$, $y = x, y = 0, x = 1$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2$, $x \geq 0, z \geq 0$	Вариант 8 1. а) $4x^2 - 5y^2 - 5z^2 + 40 = 0$; б) $y = 5x^2 + 3z^2 = 0$. $z = xy, z = 0$, 2.а) $y = 2x, y = 0, x = 2$; б) $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$, $x^2 + y^2 = 1, y \geq 0$
Вариант 9 1. а) $x^2 = 8(y^2 + z^2)$; б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 18$. $z = x^2 + 3y^2, z = 0$, 2. а) $y = x, y = 0, x = 1, y = 0$; б) $z = 8(x^2 + y^2) + 3$, $z = 16x + 3$	Вариант 10 1. а) $5z^2 + 2y^2 = 10x$; б) $4z^2 - 3y^2 - 5x^2 + 60 = 0$. $z = \sqrt{xy}, z = 0$, 2.а) $y = 4x, y = 0, x = 1$; б) $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 2 - x^2 - y^2$.
Вариант 11 1. а) $x^2 - 7y^2 - 14z^2 - 21 = 0$; б) $2y = x^2 + 4z^2$. $z = 3x^2 + 2y^2, z = 0$, 2. а) $y = x, y = 0, x = 1$; б) $z = 10(x^2 + y^2) + 1$, $z = 1 - 20y$	Вариант 12 1. а) $6x^2 - y^2 + 3z^2 - 12 = 0$; б) $8y^2 + 2z^2 = x$. $z = \sqrt{xy}, z = 0$, 2.а) $y = x, y = 0, x = 1$; б) $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}$, $z = 0, x + z = 2$
Вариант 13 1. а) $-16x^2 + y^2 + 4z^2 - 32 = 0$; б) $6x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$. 2. а) $z = 0, y = x, y = 0, x = 2$; б) $x + y = 2, x = \sqrt{y}$, $z = 2x, z = 0$	Вариант 14 1. а) $5x^2 - y^2 - 15z^2 + 15 = 0$; б) $x^2 + 3z = 0$. 2.а) $2z = x^2 + y^2, z = 0$, $y = x, y = 0, x = 2$; б) $x + y = 2, x = \sqrt{y}, z = 2x, z = 0$
Вариант 15 1. а) $6x^2 + y^2 + 6z^2 - 18 = 0$;	Вариант 16 1. а) $-7x^2 + 14y^2 - z^2 + 21 = 0$;

б) $3x^2 + y^2 - 3z = 0$. 2. а) $x^2 + y^2 = 4z^2, z \geq 0$; $y = x, y = 8x, x = 2$ б) $x^2 + y^2 = 8y, z = 0$, $y + z = 6$	б) $y^2 + 2z^2 = 6x^2$. 2.а) $y^2 + 4z = 8^2, z \geq 0$; $16x^2 - 49y^2 = 784$ б) $x + 5y + 10z = 20, z \geq 0$, $x = 1, y = 3, x = 0, y = 0$
Вариант 17 1. а) $-3x^2 + 6y^2 - z^2 - 18 = 0$; б) $x^2 - 2y = -z^2$. 2. а) $z = 3y^2, z = 0$; $x^2 + y^2 = 4$ б) $x + 2y + 3z = 6, z = 0$, $2x = y, 2x + 3y = 6, y = 0$	Вариант 18 1. а) $4x^2 - 6y^2 + 3z^2 = 0$; б) $4x^2 - y^2 - 3z^2 = 12$. 2.а) $z = xy, z = 0$, $y = 4x, y = 0, x = 1$; б) $4(x^2 + y^2) = z, x^2 + y^2 = 4$, $y \geq 0, z \geq 0$
Вариант 19 1. а) $z = 4 - x^2 - y^2$; б) $3x^2 + 12y^2 + 4z^2 = 48$. 2. а) $z = 2x^2 + y^2, z = 0$; $y = 2x, y = 0, x = 2$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0$	Вариант 20 1. а) $4x^2 + 5y^2 - 10z^2 = 60$; б) $7y^2 + z^2 = 14x^2$. 2.а) $z = \sqrt{xy}, z = 0$, $y = 4x, y = 0, x = 4$; б) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z \geq 0$, $x^2 + z^2 = y^2, x \geq 0, y \geq 0$
Вариант 21 1. а) $9x^2 - 6y^2 - 6z^2 + 1 = 0$; б) $15y = 10x^2 + 6y^2$. 2. а) $z = xy, z = 0$, $y = 3x, y = 0, x = 3$; б) $4(x^2 + y^2) = z^2, z \geq 0$, $4(x^2 + y^2) = 1, y \geq 0$	Вариант 22 1. а) $4x^2 + 5y^2 - 10z^2 = 60$; б) $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 36$. 2.а) $z = 16x^2 + y^2, z = 0$; $y = 2x, y = 0, x = 1$; б) $z - 4 = 6(x^2 + y^2)$, $z = 4x + 1$
Вариант 23 1. а) $4x^2 + 3y^2 = 12x$; б) $3x^2 - 4y^2 - 2z^2 + 12 = 0$.	Вариант 24 1. а) $8x^2 - y^2 - 2z^2 - 32 = 0$; б) $y - 4z^2 = 3x^2$.

2. а) $z = \sqrt{xy}, z = 0,$ $y = 3x, y = 0, x = 3$; б) $z = 4\sqrt{x^2 + y^2}, z = 5 - x^2 - y^2$	2. а) $z = x^2 + y^2, z = 0,$; $y = 3x, y = 0, x = 2$; б) $z - 2 = 6(x^2 + y^2), z = 1 - 4y$
Вариант 25 1. а) $x^2 - 6y^2 + z^2 - 12 = 0$; б) $x - 3z^2 = 9y^2$. 2. а) $z = \sqrt{xy}, z = 0,$; $y = 2x, y = 0, x = 4$; $x + y = 2, z = 0,$ б) $y = \sqrt{x}, z = 12y, x = 0$	Вариант 26 1. а) $2x^2 - 3y^2 - 5z^2 + 30 = 0$; б) $2x^2 + 3z = 0$. 2. а) $z = 2x^2 + 3y^2, z = 0,$ $x = 2, y = 1, x = 0, y = 0$; б) $x^2 + y^2 = 6x, z = 0,$ $z = 2x$
Вариант 27 1. а) $7x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 42 = 0$; б) $2x^2 + 4y^2 - 5z = 0$. 2. а) $4(x^2 + y^2) = z^2, z \geq 0,$; $y = x, y = 4x, x = 2$; б) $x^2 + y^2 = 4y, z = 0,$ $x + z = 6$	Вариант 28 1. а) $-4x^2 + 12y^2 - 3z^2 + 24 = 0$; б) $2y^2 + 6z^2 = 3x$. 2. а) $2y^2 + z^2 = 4, z \geq 0,$; $3x^2 - 8y^2 = 48$; б) $x + 2y + 4z = 24, z \geq 0,$ $x = 1, y = 3, x = 0, y = 0$
Вариант 29 1. а) $3x^2 - 9y^2 + z^2 + 27 = 0$; б) $z^2 - 2y = -4x^2$. 2. а) $z = 3y^2, z = 0, x^2 + y^2 = 9$; $x + y + z = 8, z = 0,$ б) $x + 2y = 4, x + 4y = 4, y = 0$	Вариант 30 1. а) $27x^2 - 63y^2 + 21z^2 = 0$; б) $3x^2 - 7y^2 - 2z^2 = 42$. 2. а) $z = 0, y = 5x, y = 0, x = 3$; б) $4(x^2 + y^2) = z^2, z \geq 0,$ $x^2 + y^2 = 4, y \geq 0$

Решение типового варианта

1. **Построить** данные поверхности и **определить** их вид (название):

а) $-1/6 \cdot x^2 + 4y^2 + 1/2 \cdot z^2 - 2 = 0$; б) $3x^2 + 1/2 \cdot y^2 - 1/4 \cdot z^2 = 0$.

▲ а) **Приведём** уравнение к каноническому виду

$$-1/6 \cdot x^2 + 4y^2 + 1/2 \cdot z^2 = 2 \mid : 2 \Rightarrow -\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{1/2} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Находим сечения поверхности координатными плоскостями.

1. Название секущей плоскости: плоскость Oxy .

$$\text{Сечение данной поверхности: } \begin{cases} z = 0, \\ -\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{1/2} = 1. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **гипербола**.

2. Название секущей плоскости: плоскость Oxz .

$$\text{Сечение данной поверхности: } \begin{cases} y = 0, \\ \frac{z^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **гипербола**.

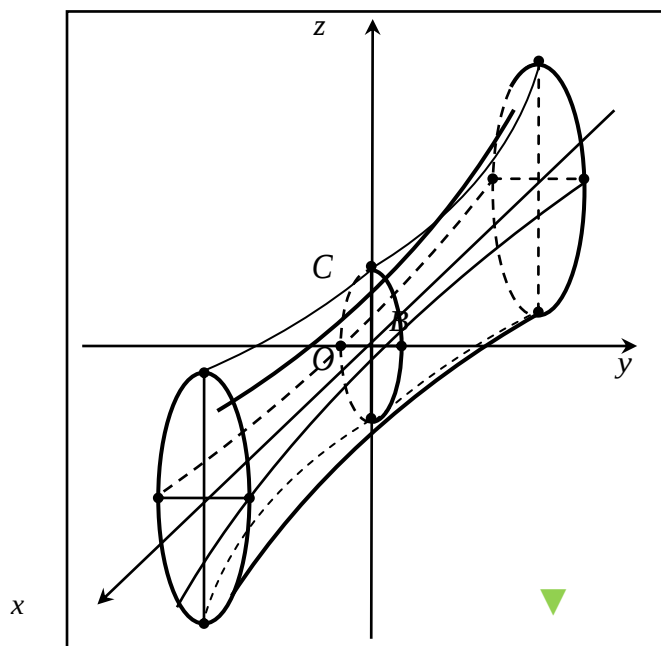
3. Название секущей плоскости: плоскость Oyz

$$\text{Сечение данной поверхности: } \begin{cases} x = 0, \\ \frac{y^2}{1/2} + \frac{z^2}{4} = 1. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **эллипс**.

Два сечения – **гиперболы**, одно сечение – **эллипс**. Не пересекает ось Ox . Название поверхности – **одноплостный гиперболоид**. Полуоси его «горлового» **эллипса** $OB = \sqrt{2}/2$, $OC = 2$.

Строим гиперболоид.



б) Приведём уравнение к каноническому виду

$$3x^2 + 1/2 \cdot y^2 - 1/4 z^2 = 0 \mid : 3 \Rightarrow \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{6} - \frac{z^2}{12} = 0.$$

Это уравнение **конуса**, так как уравнение однородное (нет свободного члена и все члены одной степени).

Находим сечения **поверхности** координатными плоскостями.

1. Название секущей плоскости: плоскость Oxy .

$$\text{Сечение данной поверхности: } \begin{cases} z = 0, \\ 6x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **точка**

2. Название секущей плоскости: плоскость параллельная плоскости Oxy .

$$\text{Сечение данной поверхности: } \begin{cases} z = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}, \\ \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{6} = 1. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **эллипсы**.

3. Название секущей плоскости: плоскость Oxz .

Сечение данной поверхности:

$$\begin{cases} y = 0, \\ 12x^2 - z^2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0, \\ (2\sqrt{3}x - z)(2\sqrt{3}x + z) = 0. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **прямые**.

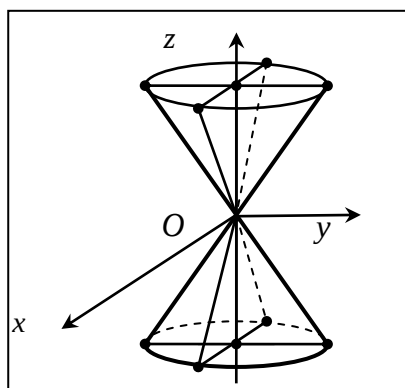
4. Название секущей плоскости: плоскость Oyz .

Сечение данной поверхности:

$$\begin{cases} x = 0, \\ 2y^2 - z^2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ (\sqrt{2}y - z)(\sqrt{2}y + z) = 0. \end{cases}$$

Название сечения и его свойства: **прямые**.

Строим конус.



2. Построить тело, ограниченное данными поверхностями:

а) $y = x, x = 1, z = 0, z = xy$;

б) $x + y = 4, x = \sqrt{2y}, 3x = 2z, z = 0$.

▲ а) Найдём пересечение *гиперболического параболоида* $z = xy$ с *плоскостью* $x = y$

$$\begin{cases} z = xy, \\ x = y, \end{cases} \Rightarrow z = y^2 - \text{парабола.}$$

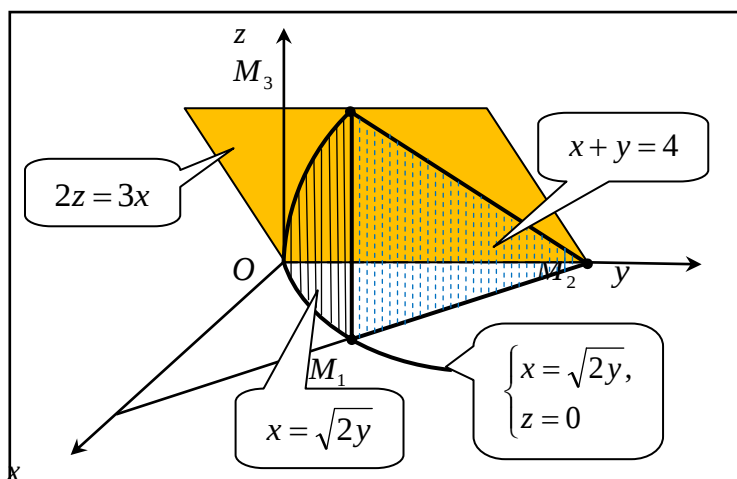
Пересечение *поверхности* $z = xy$ с *плоскостью* $z = 0$

$$\begin{cases} z = xy, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow xy = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$$

– прямые (координатные оси). Найдём характерные точки тела. Начало координат $O(0; 0; 0)$.

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0, \end{cases} M_1(1; 0; 0); \begin{cases} x = 1, \\ y = x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \end{cases} z = xy \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1}} = 1, M_3(1; 1; 1);$$

$$\begin{cases} z = 0, \\ x = y, \\ x = 1, \end{cases} M_2(1; 1; 0).$$



б) **Найдём** пересечение двух плоскостей

$$\begin{cases} z = 0, \\ 2z = 3x, \end{cases} \quad x = 0\text{-} \textit{прямая} \text{ (координатная ось } Oy \text{)}.$$

Найдём характерные точки тела:

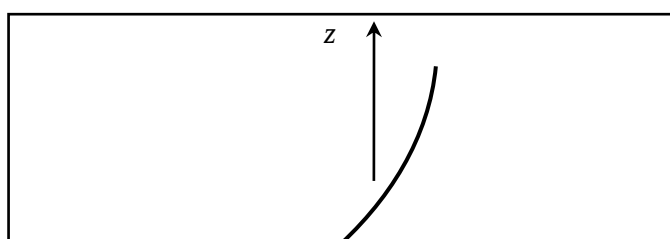
$$\begin{cases} z = 0, \\ x + y = 4, \\ x = \sqrt{2y}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 4, \\ 2y = x^2, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x^2, \\ x + \frac{1}{2}x^2 = 4, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 8 = 0, \\ y = \frac{1}{2}x^2, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = -4 \vee x_2 = 2, \\ y = \frac{1}{2}x^2, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 2, \\ z = 0 \end{cases} \quad M_1(2; 2; 0) \quad (x \geq 0),$$

$$\begin{cases} x = 0, \\ x + y = 4, \\ z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 4, \\ z = 0 \end{cases} \quad M_2(0; 4; 0),$$

$$\begin{cases} x = \sqrt{2y}, \\ x + y = 4, \\ z = 3/2 \cdot x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 2, \\ z = 3, \end{cases} \quad M_3(2; 2; 3).$$

Сделаем чертёж.



$B(1; -1; -5), C(-2; 1; -3).$ 3. $4x - 5y + 3z - 1 = 0,$ $x - 4y - z + 9 = 0.$ 4. $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-1}{2},$ $x - 3y + 7z - 24 = 0.$ 5. $A(1; 7), B(-3; -1), C(11; -3).$	$B(-3; 2; 4), C(-1; 4; 5).$ 3. $3x - y + 2z + 15 = 0,$ $5x + 9y - 3z - 1 = 0.$ 4. $\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{2},$ $2x - y + 4z = 0.$ 5. $A(1; 0), B(-1; 4), C(9; 5).$
Вариант 5 1. $M_0(2; -1; 4), M_1(1; 2; 0),$ $M_2(1; -1; 2), M_3(0; 1; -1).$ 2. $A(7; -5; 1)$ $B(5; -1; -3), C(3; 0; -4).$ 3. $6x + 2y - 4z + 17 = 0,$ $x + 3y - 6z - 4 = 0.$ 4. $\frac{x-5}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{0},$ $3x + y - 5z - 12 = 0.$ 5. $A(1; -2), B(7; 1), C(3; 7).$	Вариант 6 1. $M_0(-5; -9; 1), M_1(1; 0; 2),$ $M_2(1; 2; -1), M_3(2; -2; 1).$ 2. $A(-3; 5; -2)$ $B(-4; 0; 3), C(-3; 2; 5).$ 3. $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0,$ $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0.$ 4. $\frac{x+1}{-3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{-2},$ $x + 3y - 5z + 9 = 0.$ 5. $A(-2; -3), B(1; 6), C(6; 1).$
Вариант 7 1. $M_0(3; -2; -9), M_1(1; 2; -3),$ $M_2(1; 0; 1), M_3(-2; -1; 6).$ 2. $A(1; -1; 8)$ $B(-4; -3; 10), C(-1; -1; 7).$ 3. $3y - z = 0,$ $2y + z = 0.$ 4. $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1},$ $x - 2y + 5z + 17 = 0.$ 5. $A(-4; 2), B(-6; 6), C(6; 2).$	Вариант 8 1. $M_0(-6; 7; -10), M_1(3; 10; -1),$ $M_2(-2; 3; -5), M_3(-6; 0; -3).$ 2. $A(-2; 0; -5)$ $B(2; 7; -3), C(1; 10; -1).$ 3. $6x + 3y - 2z = 0,$ $x + 2y + 6z - 12 = 0.$ 4. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-4}{1},$ $x - 2y + 4z - 19 = 0.$ 5. $A(4; -3), B(7; 3), C(1; 10).$
Вариант 9 1. $M_0(-2; 3; 5), M_1(-1; 2; 4),$ $M_2(-1; -2; -4), M_3(3; 0; -1).$ 2. $A(1; 9; -4)$	Вариант 10 1. $M_0(-3; 4; -5), M_1(0; -3; 1),$ $M_2(-4; 1; 2), M_3(2; -1; 5).$ 2. $A(-7; 0; 3)$

$B(5; 7; 1), C(3; 5; 0).$ 3. $x + 2y + 2z - 3 = 0$ $16x + 12y - 15z - 1 = 0.$ 4. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+4}{-1},$ $2x - y + 3z + 23 = 0.$ 5. $A(4; -4), B(8; 2), C(3; 8).$	$B(1; -5; -4), C(2; -3; 0).$ 3. $2x - y + 5z + 16 = 0,$ $x + 2y + 3z + 8 = 0.$ 4. $\frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+3}{0},$ $2x - 3y - 5z - 7 = 0.$ 5. $A(-3; -3), B(5; -7), C(7; 7).$
Вариант 11 1. $M_0(4; 3; 0), M_1(1; 3; 0),$ $M_2(4; -1; 2), M_3(3; 0; 1).$ 2. $A(0; -3; 5)$ $B(-7; 2; 6), C(-3; 2; 4).$ 3. $2x + 2y + z - 1 = 0,$ $x + z - 1 = 0.$ 4. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{3},$ $4x + 2y - z - 11 = 0.$ 5. $A(1; -6), B(3; 4), C(-3; 3).$	Вариант 12 1. $M_0(-21; 20; -16), M_1(-2; -1; -1)$ $M_2(0; 3; 2), M_3(3; 1; -4).$ 2. $A(5; -1; 2)$ $B(2; -4; 3), C(4; -1; 3).$ 3. $3x + y + z - 4 = 0,$ $y + z + 5 = 0.$ 4. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-1}{-1},$ $3x - 2y - 4z - 8 = 0.$ 5. $A(-4; 2), B(8; -6), C(2; 6).$
Вариант 13 1. $M_0(3; 6; 8), M_1(-3; -5; 6),$ $M_2(2; 1; -4), M_3(0; -3; -1).$ 2. $A(-3; 7; 2)$ $B(3; 5; 1), C(4; 5; 3).$ 3. $3x - 2y - 2z - 16 = 0,$ $x + y - 3z - 7 = 0.$ 4. $\frac{x+2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2},$ $x + 2y - z - 2 = 0.$ 5. $A(-5; 2), B(0; -4), C(5; 7).$	Вариант 14 1. $M_0(2; -10; 8), M_1(2; -4; -3)$ $M_2(5; -6; 0), M_3(-1; 3; -3).$ 2. $A(0; -2; 8)$ $B(4; 3; 2), C(1; 4; 3).$ 3. $2x + 2y + z + 9 = 0,$ $x - y + 3z - 1 = 0.$ 4. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+2}{3},$ $5x - y + 4z + 3 = 0.$ 5. $A(4; -4), B(6; 2), C(-1; 8).$
Вариант 15 1. $M_0(-3; 2; 7), M_1(1; -1; 2),$ $M_2(2; 1; 2), M_3(1; 1; 4).$ 2. $A(1; -1; 5)$	Вариант 16 1. $M_0(5; -4; 5), M_1(1; 3; 6),$ $M_2(2; 2; 1), M_3(-1; 0; 1).$ 2. $A(-10; 0; 9)$

$B(-; 7; 8), C(-1; 3; 8).$ 3. $x + 2y + 2z - 3 = 0,$ $2x - y + 2z + 5 = 0.$ 4. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-4}{3},$ $x + 3y + 5z - 42 = 0.$ 5. $A(-3; 8), B(-6; 2), C(0; -5).$	$B(12; 4; 11), C(8; 5; 15).$ 3. $3x + 2y - 3z - 1 = 0,$ $x + y + z - 7 = 0.$ 4. $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-4}{2},$ $7x + y + 4z - 47 = 0.$ 5. $A(6; -9), B(10; -1), C(-4; 1).$
Вариант 17 1. $M_0(-12; 1; 8), M_1(-4; 2; 6),$ $M_2(2; -3; 0), M_3(-10; 5; 8).$ 2. $A(3; -3; -6)$ $B(1; 9; -5), C(6; 6; -4).$ 3. $x - 3y - 2z - 8 = 0,$ $x + y - z + 3 = 0.$ 4. $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-1}{5},$ $2x + 3y + 7z - 52 = 0.$ 5. $A(4; 1), B(-3; -1), C(7; -3).$	Вариант 18 1. $M_0(10; 1; 8), M_1(7; 2; 4),$ $M_2(7; -1; -2), M_3(-5; -2; -1).$ 2. $A(2; 1; 7)$ $B(9; 0; 2), C(9; 2; 3).$ 3. $3x - 2y + 3z + 23 = 0,$ $y + z + 5 = 0.$ 4. $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{2},$ $3x + 4y + 7z - 16 = 0.$ 5. $A(-4; 2), B(6; -4), C(4; 10).$
Вариант 19 1. $M_0(-3; 1; 8), M_1(2; 1; 4),$ $M_2(3; 5; -2), M_3(-7; -3; 2).$ 2. $A(-7; 1; -4)$ $B(8; 11; -3), C(9; 9; -1).$ 3. $x + y + 3z - 7 = 0,$ $y + z - 1 = 0.$ 4. $\frac{x-5}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z+4}{-1},$ $2x - 5y + 4z + 24 = 0.$ 5. $A(3; -1), B(11; 3), C(-6; 2).$	Вариант 20 1. $M_0(10; -8; -7), M_1(-1; -5; 2)$ $M_2(-6; 0; -3), M_3(3; 6; -3).$ 2. $A(1; 0; -6)$ $B(-7; 2; 1), C(-9; 6; 1).$ 3. $x - 2y + 2z + 17 = 0,$ $x - 2y - 1 = 0.$ 4. $\frac{x-1}{8} = \frac{y-8}{-5} = \frac{z+5}{12},$ $x - 2y - 3z + 18 = 0.$ 5. $A(-7; -2), B(-7; 4), C(5; -5).$
Вариант 21 1. $M_0(-4; -13; 6), M_1(0; -1; -1),$ $M_2(-2; 3; 5), M_3(1; -5; -9).$ 2. $A(-3; 1; 0)$	Вариант 22 1. $M_0(-3; -6; -8), M_1(5; 2; 0)$ $M_2(2; 5; 0), M_3(1; 2; 4).$ 2. $A(-4; -2; 5)$

$B(6; 3; 3), C(9; 4; -2).$ 3. $x + 2y - 1 = 0,$ $x + y + 6 = 0.$ 4. $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0},$ $x + 7y + 3z + 11 = 0.$ 5. $A(-1; -4), B(9; 6), C(-5; 4).$	$B(3; -3; -7), C(9; 3; -7).$ 3. $2x - z + 5 = 0,$ $2x + 3y - 7 = 0.$ 4. $\frac{x-5}{-1} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2},$ $3x + 7y - 5z - 11 = 0.$ 5. $A(10; -2), B(4; -5), C(-3; 1).$
Вариант 23 1. $M_0(14; -3; 7), M_1(2; -1; -2)$ $M_2(1; 2; 1), M_3(5; 0; -6).$ 2. $A(0; -8; 10)$ $B(-5; 5; 7), C(-8; 0; 4).$ 3. $5x + 3y + z - 18 = 0,$ $2y + z - 9 = 0.$ 4. $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-1},$ $4x + y - 6z - 5 = 0.$ 5. $A(-3; -1), B(-4; -5), C(8; 1).$	Вариант 24 1. $M_0(-6; 5; 5), M_1(-2; 0; -4),$ $M_2(-1; 7; 1), M_3(4; -8; -4).$ 2. $A(1; -5; -2)$ $B(6; -2; 1), C(2; -2; -2).$ 3. $4x + 3z - 2 = 0,$ $x + 2y + 2z + 5 = 0.$ 4. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-8}{0},$ $5x + 9y + 4z - 25 = 0.$ 5. $A(-2; -6), B(-3; 5), C(4; 0).$
Вариант 25 1. $M_0(-1; -8; 7), M_1(14; 4; 5),$ $M_2(-5; -3; 2), M_3(-2; -6; -3).$ 2. $A(0; 7; -9)$ $B(-1; 8; -11), C(-4; 3; -12).$ 3. $x + 4y - z + 1 = 0,$ $2x + y + 4z - 3 = 0.$ 4. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{3},$ $x + 4y + 13z - 23 = 0.$ 5. $A(-7; -2), B(3; -8), C(-4; 6).$	Вариант 26 1. $M_0(-13; -8; 16), M_1(1; 2; 0),$ $M_2(3; 0; -3), M_3(5; 2; 6).$ 2. $A(-3; -1; 7)$ $B(0; 2; -6), C(2; 3; -5).$ 3. $2y + z - 9 = 0,$ $x - y + 2z - 1 = 0.$ 4. $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+5}{3},$ $3x - 2y + 5z - 3 = 0.$ 5. $A(0; 2), B(-7; -4), C(3; 2).$
Вариант 27 1. $M_0(-5; 3; 7), M_1(2; -1; 2),$ $M_2(1; 2; 1), M_3(3; 2; 1).$ 2. $A(5; 3; -1)$	Вариант 28 1. $M_0(2; 3; 8), M_1(1; 1; 2),$ $M_2(-1; 1; 3), M_3(2; -2; 4).$ 2. $A(-1; 2; -2)$

$B(0; 0; -3), C(5; -1; 0).$ 3. $2x - 6y + 14z - 1 = 0,$ $5x - 15y + 35z - 3 = 0.$ 4. $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2},$ $3x - y + 4z = 0.$ 5. $A(7; 0), B(1; 4), C(-8; -4).$	$B(13; 14; 1), C(14; 15; 2).$ 3. $x - y + 7z - 1 = 0,$ $2x - 2y - 5 = 0.$ 4. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z-3}{-2},$ $x + 2y - 5z + 16 = 0.$ 5. $A(1; -3), B(0; 7), C(-2; 4).$
Вариант 29 1. $M_0(-5; -4; 8), M_1(2; 3; 1),$ $M_2(4; 1; -2), M_3(6; 3; 7).$ 2. $A(7; -5; 0)$ $B(8; 3; -1), C(8; 5; 1).$ 3. $3x - y - 5 = 0,$ $2x + y - 3 = 0.$ 4. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+2}{-2},$ $3x - 7y - 2z + 7 = 0.$ 5. $A(-5; 1), B(8; -2), C(1; 4).$	Вариант 30 1. $M_0(-3; -7; 6), M_1(1; 1; -1),$ $M_2(2; 3; 1), M_3(3; 2; 1).$ 2. $A(-3; 6; 4)$ $B(8; -3; 5), C(0; -3; 7).$ 3. $x + y + \sqrt{2}z - 3 = 0,$ $x - y + \sqrt{2}z - 1 = 0.$ 4. $\frac{x+3}{0} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+5}{11},$ $5x + 7y + 9z - 32 = 0.$ 5. $A(2; 5), B(-3; 1), C(0; 4).$

Знания и умения, которыми должен владеть студент

Знания на уровне понятий,

определений, описаний, формулировок

1. Различные уравнения прямой линии (типовые задачи по составлению уравнения прямой линии).
2. Пучок прямых линий.
3. Кривые второго порядка – эллипс, гипербола, парабола (канонические уравнения).
4. Общее уравнение кривых 2-го порядка.
5. Полярная система координат, её связь с декартовой.
6. Плоскость. Различные уравнения плоскости (типовые задачи по составлению уравнения плоскости).
7. Цилиндрические поверхности.
8. Поверхности вращения.
9. Поверхности 2-го порядка. Метод сечений.

Знания на уровне доказательств и выводов

1. Прямая линия с угловым коэффициентом.
2. Общее уравнение прямой на плоскости; его исследование.
3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
4. Угол между прямыми линиями. Условия параллельности и перпендикулярности прямых линий.
5. Вывод канонического уравнения эллипса.
6. Переход от одной системы прямоугольных декартовых координат к другой (на плоскости).
7. Плоскость. Векторное уравнение плоскости.
8. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.
9. Векторное уравнение, канонические уравнения и параметрические уравнения прямой линии в пространстве.

Умения в решении задач

Студент должен уметь:

1. Составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, через одну точку в заданном направлении (на плоскости и в пространстве).
2. Составить уравнение плоскости, проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору.
3. Находить точку пересечения прямой и плоскости.
4. Находить углы между прямыми и плоскостями.
5. Приводить уравнения кривой 2-го порядка к каноническому виду (при отсутствии членов с произведением координат), строить кривую.
6. Строить (по точкам) стандартные кривые, заданные уравнениями в полярных координатах.
7. Делать приближенные чертежи поверхностей 2-го порядка, заданные каноническими уравнениями.
8. Делать приближенные чертежи цилиндрических поверхностей вида $f(x; y) = 0$, $f(x; z) = 0$, $f(y; z) = 0$, и поверхностей вращения.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Веретенников В. Н.* Методические указания. Аналитическая геометрия. Индивидуальное домашнее задание. – СПб: изд. РГГМУ, 2004 – 29с.
2. *Веретенников В. Н.* Высшая математика. Множества. Элементы линейной алгебры. – СПб: изд. РГГМУ, 2004 – 90с.
3. *Веретенников В. Н.* Элементы векторной алгебры. – СПб: изд. РГГМУ 2004 – 140с.
4. *Гусак А. А.* Пособие к решению задач по высшей математике. Мн.: Изд. БГУ, 1973. – 532 с.
5. *Дадаян А. А., Масалова Е. С.* Аналитическая геометрия и элементы линейной алгебры. – Мн.: Выш. школа, 1981. – 224 с.
6. *Добротин ДА.* Основы линейной алгебры и аналитической геометрии. – Л.: Изд. Ленингр. Ун-та, 1976. – 120 с.
7. *Каплан И. А.* Практические занятия по высшей математике. Ч. 1. Аналитическая геометрия на плоскости и в пространстве. – Харьков: Изд. Харьковского Ун-та, 1973. – 204 с.
8. *Козлов В. Н., Максимов Ю. Д., Хватов Ю. А.* Математика. Структурированная программа (базис). Типовые задачи для контроля, требования к знаниям и умениям студентов. – СПб: Изд. СПбГТУ, 2001. – 55 с.
9. *Краснов М. Л. и др.* Вся высшая математика: Учебник. Т.1. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 328 с.
10. *Рябушко А. П. И др.* Сб. индивидуальных заданий по высшей математике: Учеб. Пособие. Ч. 1. – Мн.: Выш. школа, 1990. – 270 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Опорный конспект.....	5
Вопросы для самопроверки.....	33
Примеры решения задач.....	36
Индивидуальные домашние задания	117
Решение типового варианта.....	123
Дополнение. Индивидуальные домашние задания.....	131
Решение типового варианта.....	135
Контрольная работа.....	140
Знания и умения, которыми должен владеть студент.....	145
Использованная литература.....	147
Содержание.....	148

Учебное издание

Веретенников Валентин Николаевич

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ
ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ**

Редактор И. Г. Максимова

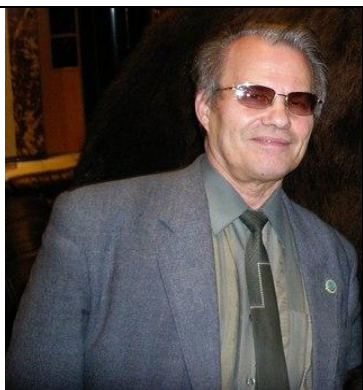
ЛР № 020309 от 30.12.96

Подписано в печать 00.00.14. Формат 60×90 1/16. Гарнитура NimesNewRoman.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 0.0. Тираж 300 экз. Заказ № 000.

РГГМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98

Отпечатано в ЦОП РГГУ



Веретенников Валентин Николаевич
профессор кафедры высшей математики и
теоретической механики РГГМУ,
Почетный работник высшего профессио-
нального образования РФ,
Заслуженный работник высшей школы РФ,
член-корреспондент Международной ака-
демии наук высшей школы.