

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Н. Малинин

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Том 2. Анализ временных рядов и случайных полей

Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области гидрометеорологии в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлению «Гидрометеорология», и специальности «Океанология»

Издание второе, исправленное и дополненное

Санкт-Петербург
РГГМУ
2020

УДК [551.46+551.5+556]:519.23(075.8)
ББК 26.22/26.23:22.172я73
М19

Рецензенты: Г.В. Алексеев, д.г.н., проф., зав отделом взаимодействия океана и атмосферы ААНИИ; Ю.А. Трапезников, д.ф.-м.н., вед. научн. сотр. Института озерадения РАН.

Малинин В.Н.

М19 Статистические методы анализа гидрометеорологической информации: учебник. В 2 томах: Том 2. Анализ временных рядов и случайных полей. – Издание 2, испр. и доп. – СПб.: РГГМУ, 2020. – 196 с.

Дается систематизированное изложение начальных основ математической статистики применительно к решению гидрометеорологических задач. Теоретические сведения иллюстрируются значительным числом конкретных примеров. Рассматриваются первичный анализ данных, методы построения эмпирических зависимостей, анализ временных рядов и пространственных полей.

Книга предназначена для студентов гидрометеорологических и географических специальностей, а также может быть полезна аспирантам и специалистам указанных профилей.

Given is the systematized enunciation of initial elements of mathematical statistics relating to solution of hydrometeorological problems. Theoretical data is illustrated by significant number of concrete examples. Considered are the primary analysis of data, methods of empirical constraint creation and analysis of temporal series and spatial fields.

The textbook is intended for students of hydrometeorological and geographical specialties as well as it can be useful for post-graduate students and specialists of noted profiles.

УДК [551.46+551.5+556]:519.23(075.8)
ББК 26.22/26.23:22.172я73

© В.Н. Малинин, 2020

© Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2020

Предисловие

Излагаемый в книге материал является продолжением 1 тома учебного пособия «Статистические методы анализа гидрометеорологической информации» и полностью соответствует программе дисциплины «Методы статистической обработки и анализа гидрометеорологической информации», которая на протяжении уже нескольких десятилетий читается автором на океанологическом факультете, а затем в Институте гидрологии и океанологии РГГМУ. Разделение учебного пособия на 2 тома обусловлено тем, что учебным планом предусмотрено изучение дисциплины «Методы статистической обработки и анализа гидрометеорологической информации» в течение двух семестров. Каждому тому пособия соответствует изучение данной дисциплины в течение семестра.

Во второй том входят две части: «Анализ временных рядов» и «Анализ пространственных полей». По сравнению с первым изданием пособия, которое было издано в 2008 г., в главе 11 написан новый раздел, посвященный быстро развивающемуся методу вейвлет-анализа, а также несколько пересмотрена в 12–13 главах в соответствии с положениями геостатистики терминология по анализу случайных полей. Теоретический материал иллюстрируется большим числом оригинальных примеров, многие из которых взяты из научно-исследовательских работ, а некоторая часть подготовлена специально для этого издания.

Автор безмерно благодарен своим многолетним помощникам: доценту, к.г.н. С.М. Гордеевой, подготовившей большинство примеров, и к.г.н., доценту кафедры океанологии О.И. Шевчуку за помощь в вычислениях и компьютерной подготовке рисунков к печати, а также аспирантам и студентам, общение с которыми постоянно стимулирует автора к более доступному изложению даже довольно сложных статистических методов.

Часть 3. Анализ временных рядов

Глава 9. Основные понятия о теории случайных процессов

9.1. Общие сведения о временных рядах

При решении широкого круга гидрометеорологических задач наибольшее распространение получили временные ряды. Под *временным рядом* обычно понимают некоторую конечную реализацию случайной величины, расположенную в хронологическом порядке. При этом его значения могут быть взяты как через равные, так и через неравные промежутки времени. В первом случае временной ряд называется *эквилидистантным*, а во втором – *неэквилидистантным*. В гидрометеорологии в основном рассматриваются эквилидистантные (равноотстоящие) временные ряды. Неэквилидистантные временные ряды имеют распространение в социологии и экономике.

При этом эквилидистантные временные ряды могут быть моментными и интервальными. В моментных рядах значения показателя даются по состоянию на определенные *моменты* времени, т. е. фиксируются для конкретных чисел. Например, на 1 января каждого года. В *интервальных* рядах значения показателя приводятся за определенные интервалы (периоды) времени. Например, средние или суммарные значения за сутки, месяц или год. Так, температура воды и воздуха, атмосферное давление, соленость, морской уровень даются в основном в виде интервальных средних оценок, но иногда могут быть заданы в виде моментных рядов. Атмосферные осадки могут быть как интервальными средними, так и суммарными оценками.

Очевидно, в общем случае все временные ряды могут быть разделены на детерминированные и случайные. *Если значения временного ряда, обусловленные действием одного или, в крайнем случае, нескольких внешних факторов, изменяются по строго определенному, как правило, физическому закону, то такой ряд является детерминированным.* Это означает, что значения временного ряда связаны с внешними факторами функциональными зависимостями. Для детерминированных связей свойственно, что каждому значению

какой-либо одной переменной соответствует одно и только одно значение другой переменной.

Детерминированные процессы могут быть разделены на *периодические* и *непериодические*. Первые свидетельствуют о том, что временные ряды подвержены гармоническим колебаниям. Очевидно, *если все основные параметры колебания (амплитуда, период, фаза) остаются строго постоянными во времени, то оно является гармоническим*. Достаточно корректно гармонические колебания описываются разложением Фурье.

Непериодические процессы характеризуют такие изменения во времени, которые протекают по некоторому закону без образования циклов (например, логарифмическому, экспоненциальному и т.п.). Отметим, что детерминированные процессы изучают, как правило, в рамках физических дисциплин.

Следует иметь в виду, что существуют принципиальные отличия временного ряда от последовательности наблюдений $x_1, x_2, \dots, x_n$, образующих случайную выборку. Эти отличия заключаются в следующем:

- члены временного ряда по сравнению с элементами случайной выборки не являются статистически независимыми;
- члены временного ряда не являются одинаково распределенными.

Это означает, что мы не можем распространять все свойства и правила статистического анализа случайной выборки на временные ряды. Действительно, в случайной выборке все ее значения могут быть представлены уже не в хронологическом, а в произвольном порядке. Вследствие этого происходит нарушение свойства внутренней корреляции (автокоррелированности), во многих случаях характерной для временных рядов. Отсюда вытекают и различия в формировании функции распределения различных сечений временной последовательности.

Промежутки времени, через которые берется временной ряд, называют *интервалом (шагом) дискретизации Δt* . Естественно, что возможен самый широкий спектр значений Δt : минута, час, сутки, месяц, год, сто лет, тысяча лет и т.д. Тогда каждому из интервалов дискретизации соответствует свой временной ряд, описывающий процессы того или иного масштаба (периода).

Колебания во времени гидрометеорологических величин создаются многообразными физическими процессами, протекающими в океане и атмосфере Земли, а также различными геофизическими

силами (например, приливные силы, движение полюса Земли и т.п.). Исходя из понятия о спектрах временных колебаний, А.С. Мониным была предложена классификация океанологических процессов, состоящая из семи интервалов (классов).

1. *Мелкомасштабные явления* (периоды от долей секунды до десятков минут). К ним относятся: поверхностные и внутренние волны, турбулентность и процессы эволюции вертикальной микроструктуры океана.

2. *Мезомасштабные явления* (периоды от часов до суток) – приливные и инерционные колебания, возникающие под воздействием сил гравитационного притяжения Луны и Солнца и сил инерции при вращательном движении планеты.

3. *Синоптическая изменчивость* (периоды от нескольких суток до месяцев), заключающаяся, прежде всего в неперiodическом формировании в океане вихрей с масштабами порядка 100 км и процессами гидродинамической неустойчивости крупномасштабных океанских течений.

4. *Сезонные колебания* (годовой период и его гармоники), которые наиболее отчетливо проявляются в высоких широтах, а также в муссонной зоне Индийского океана.

5. *Межгодовая изменчивость* (периоды в несколько лет). Квазидвухлетний цикл, обнаруженный в колебаниях температуры воды, в интенсивности течений и других процессах взаимодействия океана с атмосферой; автоколебания системы океан – атмосфера, связанные с перемещением тепловых аномалий по гигантским океаническим круговоротам; явление Эль-Ниньо – Южное колебание (ЭНЮК), а также другие явления.

6. *Внутривековая изменчивость* (периоды в десятки лет), взаимосвязанная с внутривековыми колебаниями климата. Пример – потепление Арктики в 1920–40-х годах.

7. *Межвековая изменчивость климата* (периоды в сотни лет и более). Примером может служить так называемый «малый ледниковый период» (XVII–XIX вв.). Эта изменчивость, возможно, обусловлена космогеофизическими факторами.

Разумеется, физические закономерности многих из отмеченных выше явлений и процессов настолько многообразны и сложны, что даже не всегда возможно их точное математическое описание. Однако описание внутренних закономерностей временных рядов не представляет каких-либо принципиальных затруднений и может быть осуществлено на основе статистических методов.

Следует также отметить, что в подавляющем большинстве архивы (базы) гидрометеорологических данных акцентированы на хранение информации в виде временных рядов, что, естественно, имеет принципиальное значение с точки зрения их статистической обработки и анализа.

Основой обработки и статистического анализа временных рядов является теория случайных функций и ее приложения. Именно это будет рассматриваться в последующих разделах данной главы.

9.2. Понятие случайной функции

Вследствие того, что природные процессы протекают во времени и пространстве, на практике мы обычно имеем дело не с отдельными случайными величинами, а с их множеством, зависящим от одного или нескольких параметров. Таким образом, приходим к понятию *случайной функции*, представляющей собой обобщение понятия случайной величины. Как известно, случайная величина в процессе опыта принимает одно, заранее неизвестное значение. Такие случайные величины формируются, если комплекс внешних условий, порождающий их, остается постоянным. Однако в действительности этот комплекс обычно изменяется, что приводит к изменению случайной величины в процессе опытов (наблюдений). Подобные случайные величины, изменяющиеся во времени или в пространстве, являются уже случайными функциями.

Случайной функцией называется такая неслучайная функция, значения которой при каждом значении аргумента представляют случайную величину.

В качестве примера случайной функции рассмотрим распределение среднемесячных значений температуры поверхности океана за 11 лет (1990–2000 гг.) в районе судна погоды «М» (66° с.ш., 2° в.д.), представленное на рис. 9.1. Естественно, что формирование температуры происходит под воздействием большого числа факторов, составляющих комплекс внешних условий. Очевидно, что эти факторы, сложным образом взаимодействуя друг с другом, оказываются непостоянными во времени. Поэтому каждая годовая серия температуры, похожая на любую другую общими закономерностями (минимальными значениями зимой и максимальными летом), в то же время имеет только ей присущий конкретный вид.

Конкретный вид, который случайная функция $X(t)$ принимает в результате испытаний (наблюдений), называется реализацией

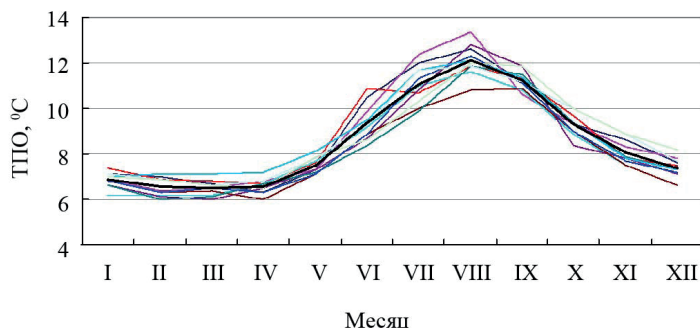


Рис. 9.1. Распределение среднемесячных значений температуры поверхностного слоя воды за 11 лет (1990–2000 гг.) в районе корабля погоды «М»

случайной функции. Хотя каждая отдельная реализация носит неслучайный характер (см. рис. 9.1), однако совокупность всех возможных реализаций образует случайную функцию.

Фактически всякая функция, встречающаяся на практике, является случайной, поскольку всегда существуют воздействующие на нее, но не поддающиеся учету случайные факторы. Случайные функции, изменяющиеся во времени, называются обычно *случайными процессами*, а случайные функции, изменяющиеся в пространстве, – *случайными полями*. Поэтому случайные процессы представляют собой *временные ряды*, в то время как случайные поля легко представить в виде *пространственных карт*. Например, волнограмма, представляющая собой карту поверхности ветрового волнения в фиксированный момент времени, является реализацией случайной функции широты и долготы.

Зафиксируем теперь момент времени $t = t_j$ и проведем прямую, перпендикулярную оси абсцисс. Эта прямая пересечет каждую реализацию в одной точке. В результате в момент t_j получим n значений случайной величины, т. е. $x_1(t_j), x_2(t_j), \dots, x_n(t_j)$. Набор точек пересечения представляет собой совокупность значений случайной величины, которую называют *сечением* случайной функции, соответствующим значению аргумента $t = t_j$. Естественно, что число сечений равно длине реализации случайной функции. В рассматриваемом нами случае (рис. 9.1) сечения представляют собой межгодовую изменчивость температуры для каждого из 12 месяцев.

Обычно случайная функция обозначается большими латинскими буквами с указанием аргумента $X(t), Y(t)$ и т.д., а ее реализация – малыми буквами $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, где индекс указывает номер, при

котором данная реализация получена. Сечение случайной функции, отвечающее значению аргумента t_j , обозначается как $x_i(t_j)$ или X_i .

Аргумент случайной функции может принимать либо любые вещественные значения в заданном интервале (конечном или бесконечном), либо только определенные дискретные значения. В первом случае $X(t)$ называется *случайным процессом*, во втором – случайным процессом с дискретным временем.

Очевидно, случайная функция может рассматриваться как зависимость от четырех аргументов: трех пространственных координат и времени. Такая случайная функция называется *четырёхмерной*. Вследствие сложности ее статистического описания она весьма редко используется в практических расчетах. Наиболее широкое распространение получили *одномерные* и *двухмерные* случайные функции, зависящие соответственно от одного и двух аргументов.

Заметим, что выборочное пространство, связанное с одномерным случайным процессом, дважды бесконечно. Оно простирается для каждого момента времени от $-\infty$ до $+\infty$, причем само время изменяется также от $-\infty$ до $+\infty$. Дважды бесконечное множество функций времени, которое может быть определено на этом выборочном пространстве, называется *ансамблем*.

Случайная функция так же, как и случайная величина, считается заданной, если известна ее функция распределения. Поскольку совокупность сечений случайной функции $X(t)$ можно рассматривать как систему случайных величин, то ее функция распределения будет представлять функцию распределения $X(t)$, т. е.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = p(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n), \quad (9.1)$$

где $X_1, X_2, \dots, X_n$ – n сечений случайной функции.

Естественно, что функция распределения будет тем полнее характеризовать случайный процесс, чем ближе друг к другу расположены значения аргумента t_j и чем больше число их взято.

Одновременно каждое сечение t_j , представляющее случайную величину, может быть охарактеризовано своей функцией распределения:

$$F_{1j}(x; t_j) = p[X(t_j) < x]. \quad (9.2)$$

Эта функция называется одномерной функцией распределения случайного процесса. Поскольку она не учитывает взаимной зависимости между различными сечениями, то вводится двухмерная функция распределения для смежных сечений $F(t)$:

$$F_{2j}(x_j, x_{j+1}; t_j, t_{j+1}) = p(X_j < x_j; X_{j+1} < x_{j+1}). \quad (9.3)$$

Наконец, для n сечений случайного процесса характеристикой служит n -мерная функция распределения, имеющая вид:

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = p(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \quad (9.4)$$

Итак, случайный процесс считается заданным, если для каждого значения t_j определена одномерная функция распределения (9.2), для каждой пары значений t_j и t_{j+1} определена двухмерная функция распределения (9.3) и для любых n значений $t_1, t_2, \dots, t_n$ — n -мерная функция распределения (9.4).

Для непрерывных случайных процессов, каждое сечение которых представляет собой непрерывную случайную величину, можно пользоваться многомерными дифференциальными законами распределения. Если $F_1(x, t)$ имеет частную производную по x :

$$\frac{\partial' F_1(x, t)}{f_1(x, t)}, \quad (9.5)$$

то она называется *одномерной плотностью* распределения или одномерным дифференциальным законом распределения случайного процесса.

Одномерный закон распределения $f_1(x, t)$ есть закон распределения случайной величины — сечения случайного процесса, соответствующего данному значению t . Аналогично определяются многомерные дифференциальные законы распределения случайного процесса. Если существует смешанная частная производная от n -мерной функции распределения:

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (9.6)$$

то она называется n -мерной плотностью распределения случайного процесса.

Вследствие сложности экспериментального определения многомерных законов распределения, а также их громоздкости и трудности использования при решении прикладных задач, они очень редко применяются на практике. Поэтому в большинстве случаев для описания случайных процессов обычно используются не более чем двухмерные законы распределения.

9.3. Числовые характеристики случайных функций

В отличие от числовых характеристик случайных величин, представляющих собой определенные числа, числовые характеристики случайных функций уже являются некоторыми функциями. Так, под *математическим ожиданием случайной функции* $X(t)$ понимается *неслучайная функция* $m_x(t)$, которая при каждом значении аргумента t равна математическому ожиданию от соответствующего сечения случайной функции, т. е.

$$m_x(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)f(x,t)dx, \quad (9.7)$$

где $f(x,t)$ – одномерная плотность вероятности. На рис. 9.1 математическое ожидание функции $X(t)$ выделено жирной линией. Нетрудно видеть, что геометрически $m_x(t)$ представляет некоторую среднюю кривую из всех возможных реализаций случайной функции. При фиксированном значении аргумента математическое ожидание есть среднее значение сечения, вокруг которого расположены его возможные значения.

Свойства математического ожидания случайной функции во многом идентичны свойствам математического ожидания случайной величины.

Свойство 1. Математическое ожидание неслучайной функции $\varphi(t)$ равно самой неслучайной функции:

$$M[\varphi(t)] = \varphi(t).$$

Свойство 2. Неслучайный множитель $\varphi(t)$ можно вынести за знак математического ожидания:

$$M[\varphi(t)X(t)] = \varphi(t)M[X(t)] = \varphi(t)m_x(t).$$

Свойство 3. Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M[X(t) + Y(t)] = m_x(t) + m_y(t).$$

Следствие. Для нахождения математического ожидания суммы случайной и неслучайной функций достаточно к математическому ожиданию случайной функции прибавить неслучайную функцию:

$$M[X(t) + \varphi(t)] = m_x(t) + \varphi(t).$$

Дисперсией случайной функции называется неслучайная функция $D_x(t)$, которая для каждого значения аргумента t равна дисперсии соответствующего сечения случайной функции, т. е.

$$D_x(t) = M[\dot{X}(t)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)]^2 f(x, t) dx. \quad (9.8)$$

Дисперсия характеризует степень рассеяния возможных реализаций (кривых) относительно математического ожидания случайной функции (средней кривой). При фиксированном значении аргумента дисперсия характеризует степень рассеяния возможных значений (ординат) сечения относительно математического ожидания сечения (средней ординаты). Другими характеристиками рассеяния являются среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации, которые определяются как:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}, \quad C_{Vx}(t) = \frac{\sigma_x(t)}{m_x(t)}.$$

Свойства дисперсии случайной функции

Свойство 1. Дисперсия неслучайной функции $\varphi(t)$ равна нулю:

$$D[\varphi(t)] = 0.$$

Свойство 2. Дисперсия суммы случайной функции $X(t)$ и неслучайной функции $\varphi(t)$ равна дисперсии случайной функции:

$$D[X(t) + \varphi(t)] = D_x(t).$$

Свойство 3. Дисперсия произведения случайной функции $X(t)$ на неслучайную функцию $\varphi(t)$ равна произведению квадрата неслучайного множителя на дисперсию случайной функции:

$$D[X(t)\varphi(t)] = \varphi^2(t)D_x(t).$$

Заметим, что на практике иногда используется также среднее значение квадрата случайного процесса, дающее представление об его интенсивности и определяемое как:

$$\Psi_x^2(t) = \int x^2(t) dt.$$

Нетрудно видеть, что дисперсия случайного процесса равна разности между средним значением квадрата и квадратом среднего значения, т. е.

$$D_x(t) = \Psi_x^2(t) - m_x^2(t).$$

Итак, математическое ожидание и дисперсия являются характеристиками каждого сечения случайной функции как некоторой случайной величины и отражают лишь внешние свойства случайного процесса. Однако они совершенно не содержат никакой информации о тесноте связи между отдельными сечениями случайной функции и, следовательно, не дают представления об ее внутренней структуре.

Для описания внутренней структуры случайного процесса используется *автокорреляционная функция, которая представляет собой неслучайную функцию $R_x(t_1, t_2)$ двух независимых фиксированных аргументов t_1 и t_2 , равную корреляционному моменту сечений этих аргументов:*

$$R_x(t_1, t_2) = M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\}. \quad (9.9)$$

Отметим некоторые **свойства автокорреляционной функции.**

Свойство 1. При равенстве аргументов $t_1 = t_2 = t$, автокорреляционная функция обращается в дисперсию случайной функции:

$$R_x(t, t) = M[X(t) - m_x(t)]^2 = D_x(t), \quad (9.10)$$

т. е. дисперсия является частным случаем $R_x(t_1, t_2)$. Это означает, что при описании случайной функции, вообще говоря, отпадает необходимость в учете дисперсии как самостоятельной величины.

Свойство 2. Автокорреляционная функция симметрична относительно своих аргументов t_1 и t_2 , т. е. не изменяется при их перестановке местами: $R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1)$.

Свойство 3. Прибавление к случайной функции $X(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ не изменяет ее автокорреляционной функции: если $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$, то $R_y(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)$.

Свойство 4. Абсолютная величина автокорреляционной функции не превышает среднего геометрического дисперсий соответствующих сечений:

$$|R_x(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}$$

или

$$|R_x(t_1, t_2)| \leq \sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2). \quad (9.11)$$

Свойство 5. При умножении случайной функции $X(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ ее автокорреляционная функция умножается на произведение $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$, т. е.

$$R_y(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2)\varphi(t_1)\varphi(t_2).$$

Следует иметь в виду, что автокорреляционная функция является обычно убывающей функцией времени. Это означает, что по мере увеличения интервала между наблюдениями связь между значениями случайной функции ослабевает.

Отметим, что *при нормальном распределении случайных процессов математическое ожидание и автокорреляционная функция являются их исчерпывающими характеристиками.*

Чтобы иметь возможность сравнивать автокорреляционные функции для случайных функций разной размерности, их обычно нормируют:

$$r(t_1, t_2) = \frac{R(t_1, t_2)}{\sqrt{D_x(t_1)D_x(t_2)}} = \frac{R(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_x(t_2)}. \quad (9.12)$$

Рассчитанная таким образом *нормированная автокорреляционная функция представляет собой безразмерную характеристику линейной связи между сечениями случайной функции.* Из формулы (9.12) следует, что

$$|r(t_1, t_2)| \leq 1. \quad (9.13)$$

Для каждой пары аргументов t_1, t_2 нормированная автокорреляционная функция равна коэффициенту корреляции соответствующих сечений случайной функции.

На практике довольно часто приходится рассматривать несколько случайных процессов совместно. Естественно, при этом, кроме характеристики каждого случайного процесса, необходимо устанавливать наличие связи между различными процессами. Так, для системы из двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ характеристиками ее являются $m_x(t), m_y(t), R_x(t_1, t_2), R_y(t_1, t_2)$, а также корреляционная функция связи:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M \{ [X(t_1) - m_x(t_1)] [Y(t_2) - m_y(t_2)] \}, \quad (9.14)$$

которая показывает степень линейной зависимости между сечениями $X(t_1)$ и $Y(t_2)$. При $t_1 = t_2$ данная функция, называемая также *взаимной корреляционной функцией*, будет характеризовать степень линейной зависимости случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, соответствующих одному и тому же значению аргумента.

В отличие от автокорреляционной функции взаимная корреляционная функция $R_{xy}(t_1, t_2)$ не является симметричной относительно своих аргументов, однако обладает тем свойством, что не изменяется при одновременной перестановке аргументов и индексов, т. е.

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_2, t_1).$$

Нормируя $R_{xy}(t_1, t_2)$, получим безразмерную характеристику тесноты линейной связи между сечениями $X(t_1)$ и $Y(t_2)$, называемую *нормированной взаимной корреляционной функцией*:

$$r_{xy}(t_1, t_2) = \frac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1)\sigma_y(t_2)}. \quad (9.15)$$

При фиксированных значениях t_1 и t_2 данная функция представляет собой коэффициент корреляции сечений $X(t_1)$ и $Y(t_2)$.

Если взаимная корреляционная функция равна нулю при всех значениях своих аргументов t_1 и t_2 , то случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$ являются некоррелированными (несвязанными).

Следует иметь в виду, что в специальной статистической литературе автокорреляционная и нормированная автокорреляционная функции могут называться соответственно как автоковариационная и автокорреляционная функции, а взаимная корреляционная и нормированная взаимная корреляционная функции соответственно взаимной ковариационной и взаимной корреляционной функциями. Мы будем в дальнейшем пользоваться первыми обозначениями.

9.4. Стационарность случайных процессов

В зависимости от устойчивости вероятностных характеристик случайные процессы подразделяются на стационарные и нестационарные.

Стационарные случайные процессы описывают процессы, вероятностные характеристики которых с изменением аргумента практически не изменяются и поэтому не зависят от начала отсчета.

Нестационарные случайные процессы описывают процессы, которые протекают во времени так, что их вероятностные характеристики с изменением аргумента существенно изменяют свои значения и, следовательно, зависят от начала отсчета. Поэтому характеристики нестационарного процесса представляют собой функции времени, которые можно определить только осреднением мгновенных значений по ансамблю выборочных функций, формирующих процесс.

Заметим, что исторически понятие «стационарность» применяется, в основном, в отношении случайных процессов, в то время как применительно к случайным полям более естественным является термин «однородность», означающий постоянство их свойств в пространстве.

Различают стационарность в широком и узком смысле.

Случайный процесс $X(t)$ называется стационарным в широком смысле, если он обладает следующими свойствами: его выборочные оценки среднего и дисперсии постоянны во времени и соответствуют математическому ожиданию и генеральной дисперсии, а его автокорреляционная функция является только функцией интервала времени $\tau = t_2 - t_1$ и не зависит от значения каждого аргумента t_1 и t_2 в отдельности.

Таким образом, стационарность в широком смысле случайного процесса означает, что

$$\bar{X}_x(t) = \text{const}; \sigma_x^2(t) = \text{const}; R_x(t_1, t_2) = f[R_x(\tau)].$$

Заметим, что при более строгом определении стационарности постоянство во времени дисперсии опускается, ибо величина дисперсии представляет значение автокорреляционной функции при нулевом сдвиге, т. е. $\sigma_x^2(t) = R_x(\tau = 0)$.

Случайный процесс $X(t)$ называется стационарным в узком смысле, если его многомерные распределения при одновременном прибавлении ко всем аргументам $t_1, t_2, \dots, t_n$ одного и того же числа τ остаются неизменными, т. е.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = f(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau). \end{aligned}$$

Стационарность в узком смысле подразумевает знание совместного (многомерного) закона распределения, что вызывает в практических расчетах серьезные затруднения.

Для нормального распределения случайных процессов стационарность в широком смысле эквивалентна строгой стационарности. Во всех остальных случаях стационарность в широком смысле является простейшим частным случаем стационарности в узком смысле. В практических расчетах обычно используется понятие стационарности в широком смысле, которое во многих случаях достаточно точно соответствует стационарности в узком смысле, но в тоже время значительно лучше поддается статистическому оцениванию. Отметим, что в гидрометеорологии обычно используется только понятие стационарности в широком смысле.

Следует иметь в виду, что многие нестационарные процессы на некоторых участках, где нет заметных изменений математического ожидания и дисперсии, могут считаться квазистационарными.

Строго говоря, выявление стационарности случайного процесса возможно только в результате его физического анализа. К сожалению, это не всегда оказывается реальным. В этих случаях можно использовать статистические методы, ибо большое число нестационарных процессов может быть приведено к стационарному виду путем некоторых преобразований. К числу наиболее простых относится вычисление аномалий случайного процесса, т. е.

$$\Delta X(t) = X(t) - \bar{X}(t),$$

где $\bar{X}(t)$ – среднее арифметическое выборочного случайного процесса, в качестве которого обычно используется норма гидрометеорологической характеристики. Такой процесс называется *центрированным*. Отметим, что корреляционные функции *центрированного* и исходного случайных процессов совпадают. Действительно, во многих случаях аномалии гидрометеорологических процессов оказываются стационарными на больших временных интервалах.

Если нестационарность функции вызвана изменяющимся во времени средним значением, то для приведения ее к стационарному виду можно, например, использовать первые разности:

$$\Delta'_x(t) = X(t_{i+1}) - X(t_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Данная формула позволяет устранить линейный тренд. В том случае, если первые разности случайного процесса еще носят нестационарный характер, то это свидетельствует о существовании нелинейного тренда. Для его устранения можно рассчитать вторые разности:

$$\Delta''_x(t) = \Delta'_x(t_{i+1}) - \Delta'_x(t_i).$$

Как правило, этого оказывается достаточно для приведения функции с изменяющимся во времени средним значением к стационарному виду. Пример стационарной $X(t)$ и нестационарной $Y(t)$ функций приводится на рис. 9.2. В частности, из рис. 9.2 видно, что для стационарного процесса $X(t)$ характерна неизменность среднего и дисперсии, в то время как процесс $Y(t)$ явно нестационарен по среднему значению и стационарен по дисперсии. Другими словами, для процесса $X(t)$ выборочные средние и дисперсии для всех сечений практически совпадают, в то время как для процесса $Y(t)$, по крайней мере, не выполняется равенство оценок выборочных дисперсий.

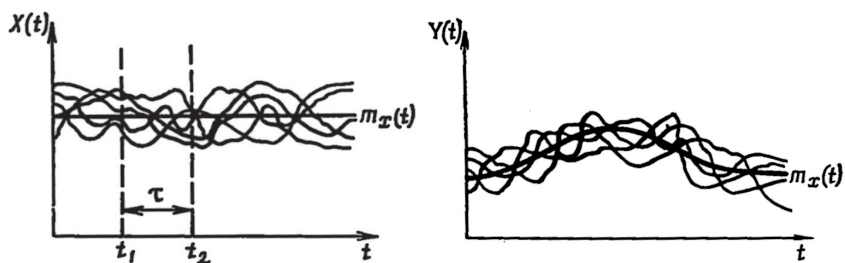


Рис. 9.2. Временной ход реализаций стационарной $X(t)$ и нестационарной $Y(t)$ случайных функций

Отметим, что стационарность – в значительной степени математическая абстракция, ибо ее условия никогда абсолютно точно не выполняются. Но даже если бы эти условия выполнялись, строгая проверка стационарности чрезвычайно затруднена. Поэтому речь может идти только о приближенной проверке устойчивости случайных процессов в природе. Проверка стационарности требует наличия, по крайней мере, нескольких реализаций процесса, которые далеко не всегда имеются в нашем распоряжении. Чаще всего располагают лишь одной реализацией достаточной длины. Предполагая эргодичность процесса, эту реализацию разбивают на отдельные, не обязательно одинаковые по продолжительности интервалы. Затем для каждого из них вычисляются оценки среднего арифметического, дисперсии и автокорреляционной функции.

После этого, используя критерии статистической проверки гипотез, производится сравнение указанных характеристик. Если расхождение между ними для всех интервалов окажется незначимым, то делается вывод, что данная случайная функция является стационарной. Отметим, что разбиение реализации на отдельные интервалы желательно осуществлять исходя из закономерностей внутренней структуры рассматриваемого процесса, ибо каких-либо формальных критериев для этого нет.

Проверка стационарности по автокорреляционной функции требует ее расчета для нескольких реализаций и последующего сравнения их оценок, отличающихся от нуля значимым образом. Если при этом расхождения между оценками превышают удвоенную среднеквадратическую ошибку их определения, то процесс следует считать нестационарным.

Пример 9.1. Понятие стационарности является одним из ключевых при анализе случайных процессов. Для проверки стационарности целесообразно воспользоваться рассмотренными выше статистическими гипотезами о равенстве выборочных средних и дисперсий, причем проверку нужно начинать с равенства дисперсий. Однако прежде необходимо построить графики временных рядов и попытаться осуществить физический анализ его колебаний. После этого каждый временной ряд может быть разделен на две не обязательно равные части, для которых выполняется проверка статистических гипотез.

Оценим указанным образом стационарность для температуры поверхности океана (ТПО) в районе юго-восточной части Тихого океана (ЮВТО), являющегося, как известно, важным районом круглогодичного рыбного промысла. Примем ЮВТО в следующих границах: западная – 105° з.д., восточная – 75° з.д., северная – 30° ю.ш., южная – 41° ю.ш. Для данного района ЮВТО характерно очень плохое покрытие его гидрометеорологическими данными вообще и ТПО в частности. В связи с этим постоянно возникает вопрос о степени репрезентативности тех или иных архивов, содержащих информацию о ТПО и представляющих собой по существу некие «черные ящики». Естественно, для этого необходимы реперные данные, т. е. пространственно-временные ряды ТПО, полученные непосредственно по измерениям ее во время экспедиций. Однако пространственная разрозненность и временная нерегулярность таких наблюдений даже за период массовых экспедиционных работ в течение периода с 1979 по 1991 г. не позволила их систематизировать и использовать для сравнения в качестве эталона. Поэтому, очевидно, единственным вариантом оценки степени репрезентативности этих архивов остается тщательный статистический анализ и сравнение архивов друг с другом.

Основным источником данных послужила система CDAS (Climate Data Assimilation System), являющаяся составной частью глобальной базы гидрометеорологических данных NOAA NCEP/NCAR Reanalysis. Она содержит глобальный архив разнообразных среднемесячных данных (в том числе ТПО) с 1949 г., который оперативно пополняется с очень небольшим запаздыванием во времени. Поскольку исходные данные в системе CDAS заданы в узлах первичной широтно-долготной сетки $1,875^\circ \times 1,875^\circ$, то область ЮВТО разделилась на 109 квадратов. Для этих квадратов из Интернета получен архив среднемесячных значений ТПО за период с 1949 по 2003 г.

Визуальный анализ данных показал, что для многих квадратов характерно резкое изменение размаха колебаний. Например, в одном из квадратов (рис. 9.3) межгодовые колебания ТПО до 1980 г. практически не превышали $0,1\text{ }^{\circ}\text{C}$, но в последующие годы размах колебаний достиг $0,8\text{ }^{\circ}\text{C}$. Аналогичный характер колебаний ТПО свойствен и для других квадратов. Ретроспективный физический анализ показал, что такие резкие изменения в дисперсии и средних значениях ТПО вряд ли можно объяснить переломами в ходе метеорологических процессов. Скорее всего, это связано с технологическими особенностями самой системы CDAS. В частности, с использованием новых систем натурных данных (например, ассимиляцией спутниковых карт ТПО).

Итак, даже предварительный анализ межгодовых колебаний ТПО свидетельствует об явно выраженной нестационарности ТПО по математическому ожиданию и дисперсии. Естественно, что более строгие выводы можно сделать лишь после соответствующей статистической проверки временных рядов на стационарность с помощью критериев Стьюдента и Фишера.

Для проверки выдвинутых нулевых гипотез временные ряды среднегодовых значений ТПО были разбиты на два относительно однородных промежутка: с 1949 по 1980 г. и с 1981 по 2003 г. Распределение рассчитанных значений t и F представлено на рис. 9.4. и 9.5. Укажем, что их критические значения при уровне значимости $\alpha = 0,05$ равны соответственно $t_{\text{кр}} = 1,67$, $F_{\text{кр}} = 1,80$.

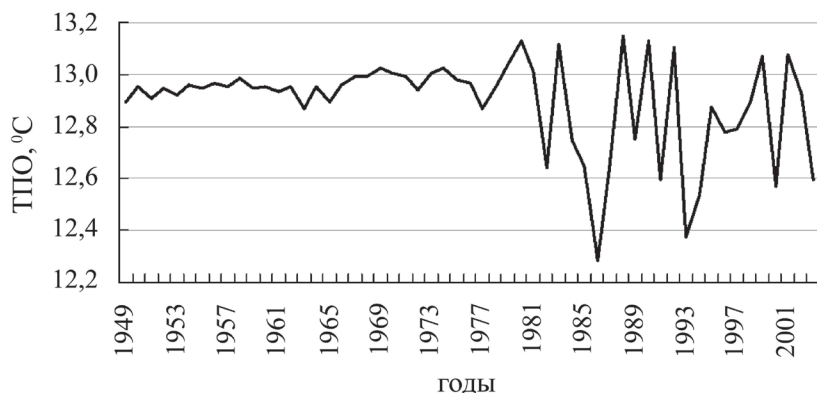


Рис. 9.3. Межгодовой ход температуры поверхности океана в одном из квадратов ЮВТО

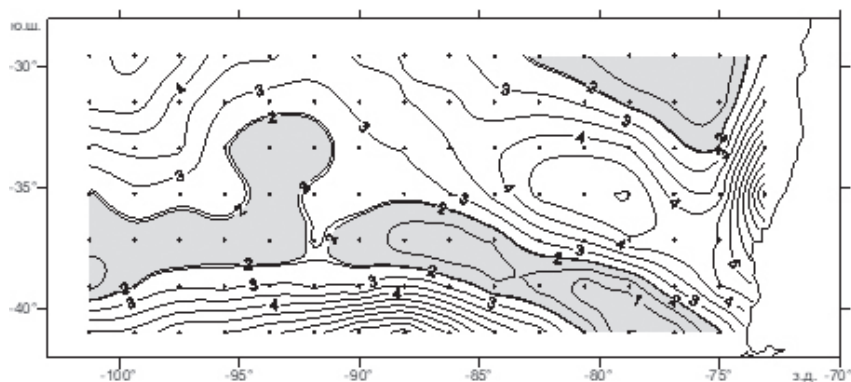


Рис. 9.4. Пространственное распределение критерия Стьюдента для акватории ЮВТО (области значимых величин выделены заливкой)

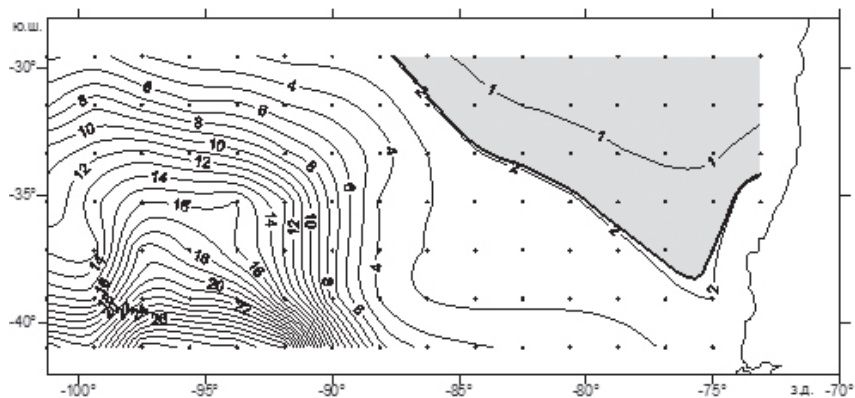


Рис. 9.5. Пространственное распределение критерия Фишера для акватории ЮВТО (области значимых величин выделены заливкой)

Из рис. 9.4 видно, что на большей части акватории $t > t_{кр}$, т. е. здесь расхождения между выборочными средними являются значимыми. И только два сравнительно небольших языка с малыми значениями t ($t < t_{кр}$) вдаются с юга и запада навстречу друг другу. Что касается распределения F (рис. 9.5), то легко видеть, что вся акватория делится на два резко неравнозначных района: северо-западный, где $F < F_{кр}$ и остальной, где $F > F_{кр}$. Заметим, что в юго-западной части акватории оценки F превышают $F_{кр}$ более чем в десять раз.

Таким образом, достаточно очевидный вывод состоит в том, что межгодовые колебания ТПО в рассматриваемый промежуток времени (с 1949 по 2003 г.) являются нестационарными как по среднему арифметическому, так и по дисперсии. Поэтому, учитывая сомнительный характер данных по ТПО до 1981 г., следует, очевидно, их вообще исключить из последующего статистического анализа.

9.5. Эргодичность стационарных случайных процессов

Очень важным свойством стационарной случайной функции является ее эргодичность. Предположим, мы имеем только одну реализацию случайного процесса большой продолжительности. Тогда математическое ожидание для нее определится по формуле:

$$m_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (9.16)$$

где T – интервал осреднения (длина реализации), а автоковариационная функция:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt. \quad (9.17)$$

Возникает вопрос, будут ли эти оценки близки к аналогичным значениям, полученным по множеству реализаций?

Если стационарный случайный процесс, для которого статистические характеристики, полученные осреднением по одной реализации, при увеличении интервала осреднения T с вероятностью сколь угодно близкой к единице приближаются к соответствующим характеристикам, полученным осреднением по всему множеству реализаций, то он обладает эргодическим свойством.

Другими словами, *если одна реализация достаточно большой длины содержит в себе фактически всю информацию об основных свойствах случайного процесса, т. е. может заменить при обработке множество реализаций той же продолжительности, то такой стационарный процесс является эргодическим.* Стационарный случайный процесс, не обладающий таким свойством, называются *неэргодическим*. На рис. 9.6 представлены своими реализациями две стационарные случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$, которые имеют одно и то же математическое ожидание и тот же общий размах

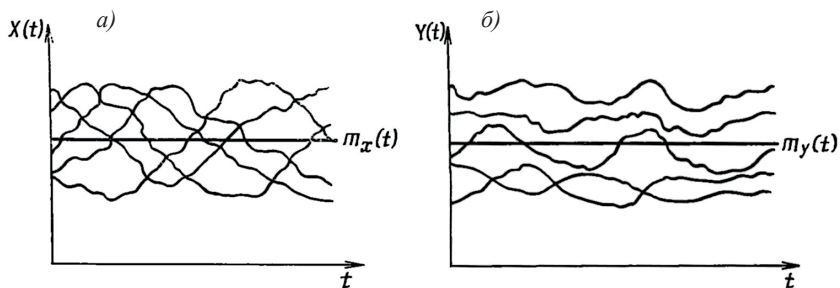


Рис. 9.6. Временной ход реализаций стационарных эргодической $X(t)$ (а) и неэргодической $Y(t)$ (б) случайной функции

колебаний. Однако они заметно отличаются по своей внутренней структуре.

Для случайного процесса $X(t)$ характерно то, что каждая из его реализаций обладает почти одним и тем же средним значением, близким к $m_x(t)$ и почти одним и тем же размахом колебаний, примерно равным размаху колебаний $D_x(t)$ случайного процесса. Другими словами, для каждой реализации случайного процесса ее выборочные средние и выборочные дисперсии примерно соответствуют друг другу и при этом совпадают с математическим ожиданием и генеральной дисперсией процесса $X(t)$, т. е.

$$\begin{aligned}\bar{X}_1(t) &\approx \bar{X}_2(t) \approx \dots \approx \bar{X}_n(t) \approx m_x(t), \\ \sigma_1^2(t) &\approx \sigma_2^2(t) \approx \dots \approx \sigma_n^2(t) \approx D_x(t).\end{aligned}$$

Что касается случайного процесса $Y(t)$, то каждая его реализация имеет свое среднее значение и свой средний размах колебаний, которые могут заметно отличаться от математического ожидания и генеральной дисперсии самого случайного процесса.

Отсюда следует, что оценки соответствующих характеристик случайного процесса $X(t)$, вычисленные по одной достаточно длинной реализации и по множеству реализаций той же общей длины, будут между собой равнозначные. Совершенно очевидно, что для случайного процесса $Y(t)$ этого не наблюдается. Поэтому стационарный процесс $X(t)$ является эргодическим, а процесс $Y(t)$ свойством эргодичности не обладает.

При численных расчетах свойство эргодичности играет большую роль, так как позволяет существенно сократить объемы вычислений. Кроме того, принимая во внимание, что продолжительность

многих гидрометеорологических рядов невелика, то эргодичность есть единственная возможность использования аппарата теории случайных функций применительно к статистическим рядам.

Однако на практике доказать свойство эргодичности очень сложно, поэтому о нем, обычно, судят исходя из физических соображений, связанных с природой изучаемого процесса или же принимают априори. В некоторых случаях в качестве формального признака эргодичности принимается приближение корреляционной функции случайного процесса к нулю при возрастании промежутка τ между сечениями, т. е. $r(\tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

9.6. Классификация временных рядов

В настоящее время известны различные классификации временных рядов, основанные на разных таксономических признаках. Так, в разделе 9.1 уже была рассмотрена классификация природных процессов по временным масштабам их колебаний. Здесь рассмотрим классификацию временных рядов исходя из их свойств и внутренней структуры.

Естественно, нас больше интересует случайный тип временного ряда, который также может быть представлен как результат действия множества внешних и внутренних факторов. Однако их результирующий эффект на изучаемый процесс вследствие разнобразного, подчас противоположного действия вынуждающих факторов, их изменчивости, наличия между ними прямых и обратных связей, а также ошибок измерений и расчетов, является настолько сложным, что он зачастую не поддается физическому описанию. Поэтому такой временной ряд уже можно рассматривать как случайный.

Как было показано выше, случайные процессы можно разделить на стационарные и нестационарные (рис. 9.7). В свою очередь стационарные временные ряды делятся на эргодические и неэргодические. В качестве конкретных проявлений эргодического стационарного случайного процесса можно рассматривать модели временного ряда в виде «белого шума» (БШ), «красного шума» (КШ) и циклического колебания (ЦК).

Белый шум – условное название чисто случайного процесса, представляющего собой практически набор случайных чисел, не коррелированных друг с другом. Более строго, *белый шум – это дискретный стационарный процесс, случайные значения x_i которого*

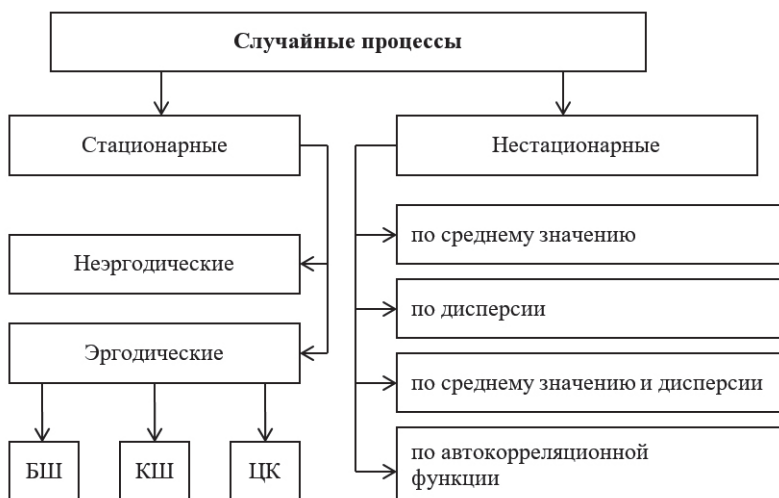


Рис. 9.7. Классификация случайных процессов

взаимно независимы и одинаково распределены с математическим ожиданием, равным нулю, и постоянной дисперсией. Теоретическая модель белого шума описывается автокорреляционной функцией, равной нулю на всех сдвигах, исключая нулевой сдвиг. Естественно, это не более чем математическая абстракция, ибо на практике такие автокорреляционные функции не встречаются. Поэтому обычно принимается условие незначимости коэффициентов автокорреляции. В этом случае говорят о случайном стационарном процессе, развивающемся по типу модели «белый шум».

Красный шум – условное название процесса, которому свойственна корреляция только между смежными (соседними) значениями временного ряда. Это означает, что во временном ряду присутствует инерционность. Более строго, *красный шум – это дискретный стационарный процесс, описывающийся марковской цепью первого порядка.* Теоретическая модель красного шума описывается автокорреляционной функцией, которая на первом сдвиге имеет значимый коэффициент автокорреляции, а на всех остальных сдвигах она равна нулю. Очевидно, для реальных природных процессов такая автокорреляционная функция не встречается. Поэтому на практике принимается условие незначимости коэффициентов автокорреляции, начиная со сдвига $\tau = 2$, что свидетельствует о случайном процессе, развивающемся по типу модели «красный шум».

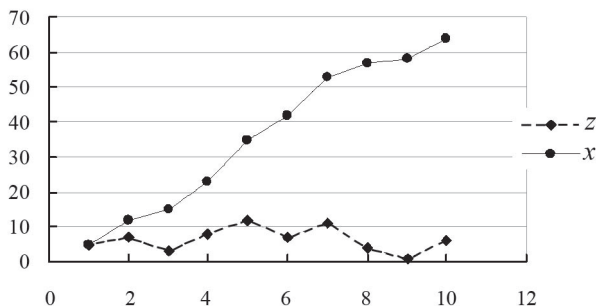


Рис. 9.8. Модель временного ряда в виде «случайного блуждания»: z_i — исходные значения, x_i — преобразованные значения согласно правилу (9.18)

Глава 10. Методы анализа временных рядов

10.1. Общая схема исследования временной изменчивости

Если случайная величина X измерена в m точках пространства, причем длина каждой реализации составляет n , то получим матрицу размером $m \times n$. Использование методов многомерного статистического анализа применительно к этой матрице представляет основную задачу исследования пространственно-временной изменчивости.

Тогда анализ пространственных полей и анализ временных рядов можно рассматривать как частные случаи исследования пространственно-временной изменчивости. Заметим, что если пространственные поля заданы в узлах регулярной равномерной сетки, то в этом случае к ним применимы практически все методы анализа временных рядов. Однако, учитывая, что гидрометеорологическая сеть станций не является регулярной, анализ пространственных полей обладает целым рядом специфических особенностей.

Что касается временной изменчивости, то для ее исследования, прежде всего, используется теория случайных функций, аппарат которой в настоящее время хорошо разработан. Естественно, что в зависимости от периода осреднения исходных рядов, методы анализа временной изменчивости могут различаться.

Рассмотрим схему исследования крупномасштабных процессов, когда период осреднения исходных данных превышает несколько недель (например, примем $\tau = 1$ мес), т. е. фильтруются синоптические колебания. В этом случае временной ряд может быть представлен как:

$$X(t) = \Phi(t) + Q(t), \quad (10.1)$$

где $\Phi(t)$ – межгодовая (низкочастотная) изменчивость; $Q(t)$ – внутригодовая (высокочастотная) изменчивость.

Задачей разложения (10.1) является разделение разномасштабных составляющих. Это достигается многими приемами и, в частности, методами фильтрации. Если же необходимо выделить лишь межгодовую изменчивость, то для этого достаточно усреднить среднемесячные данные за годовые интервалы времени.

Составляющую $Q(t)$ можно выразить как:

$$Q(t) = G(t) + \varepsilon(t), \quad (10.2)$$

где $G(t)$ – полигармоническая компонента сезонного хода временного ряда; $\varepsilon(t)$ – остатки ряда, представляющие собой стационарный случайный процесс с нулевым средним $\bar{\varepsilon} = 0$ и известной корреляционной функцией $r(\tau)$.

Заметим, что представление ряда в виде (10.2) в определенной степени гипотетично, так как не всегда соблюдается требование к стационарности $\varepsilon(t)$ и взаимнезависимости слагаемых в правой части (10.2).

Анализ ряда $Q(t)$ заключается в том, что вначале методами гармонического анализа или периодограммного анализа производится оценка годового хода. После исключения годового хода исследуется его остаточная часть $\varepsilon(t)$, если в этом есть необходимость.

С практической точки зрения важным представляется нахождение критерия разложения составляющей $Q(t)$ на гармоническую и случайную части. В предположении их независимости (некоррелированности) можно записать:

$$D(Q) = D(G) + D(\varepsilon), \quad (10.3)$$

где дисперсия гармонической части представляется как

$$D(G) = \sum_{i=1}^k D(G)_i, \text{ т. е. суммой дисперсий значимых гармоник.}$$

Рассчитав последовательно гармоники, начиная с первой, будем проверять выполнимость условия:

$$D(G)_i \leq D(\varepsilon), \quad (10.4)$$

где величина $D(\varepsilon)$ определяется из выражения (10.3). Если условие (10.4) выполняется, то можно считать, что произошло разделение $Q(t)$ на гармоническую и случайную части. Величина $D(\varepsilon)$ характеризует степень «зашумленности» годового хода или, другими словами, степень неопределенности, обусловленную воздействием на рассматриваемый ряд множества случайных факторов, а также ошибками измерений и расчетов. Заметим, что для большинства гидрометеорологических рядов достаточно первой или, в крайнем случае, второй (полугодовой) гармоник, чтобы выполнялось условие (10.4).

Рассмотрим теперь структуру межгодовой изменчивости $\Phi(t)$. По аналогии с (10.2) ее можно представить в виде следующего разложения:

$$\Phi(t) = T(t) + C(t) + P(t), \quad (10.5)$$

где $T(t)$ – *трендовая составляющая*; $C(t)$ – *циклическая компонента*, характеризующая регулярные (циклические) межгодовые колебания; $P(t)$ – *остаточная часть*, характеризующая нерегулярные (случайные) межгодовые колебания.

При анализе межгодовой изменчивости, прежде всего, выделяется трендовая составляющая, приемы выделения которой будут рассмотрены в разделе 10.2. После обнаружения и исключения тренда, получим некоторый временной ряд $\Phi'(t)$:

$$\Phi'(t) = \Phi(t) - T(t) = C(t) + P(t), \quad (10.6)$$

который обычно уже отвечает условиям стационарности случайного процесса и по существу является его аддитивной моделью. Напомним, что в статистике под *аддитивной* моделью понимается случайный процесс вида:

$$\varphi(t) = \Psi(t) + \xi(t), \quad (10.7)$$

где $\psi(t)$ – некоторая квазипериодическая функция, $\xi(t)$ – стационарная случайная компонента. *Мультипликативной* моделью называется случайный процесс, представляющий произведение данных компонент, т. е.

$$\varphi(t) = \Psi(t) \times \xi(t). \quad (10.8)$$

Отметим, что исторически модель вида (10.7) трактуется как задача разделения случайного процесса на «сигнал» и «шум». Однако в гидрометеорологии понятия сигнал и шум зачастую весьма условны.

Значительно более сложной задачей является выделение и оценивание циклических колебаний в разложении (10.5). Как уже отмечалось выше, к ним относятся колебания, параметры (период, амплитуда, фаза) которых испытывают нерегулярные изменения во времени в пределах некоторого диапазона. Период циклического колебания (τ) – квазипостоянный промежуток времени, через который повторяются значения временного ряда $X(t)$. Амплитуда (A) – разность между максимальным и минимальным значениями ряда. Фаза (Φ) – временной интервал наступления первого максимума от начала отсчета.

Частным случаем циклического колебания служит гармоническое колебание, параметры которого строго постоянны. Достаточно корректно гармонические колебания описываются разложением Фурье. Другим частным случаем циклических колебаний являются негармонические колебания с постоянными параметрами: периодом, амплитудой и фазой. Поскольку они носят пилообразный характер и встречаются в гидрометеорологических процессах не так уж часто, то рассматривать их далее не будем.

Отметим также, что в чистом виде гармонических колебаний в природной системе практически не существует. Даже приливы не являются строго гармоническими. Если период их во времени практически не меняется, то этого нельзя сказать об амплитуде, которая испытывает определенные изменения, особенно вблизи побережий.

К причинам, вызывающим регулярные (циклические) колебания, относятся приливные силы (например, 19-летний цикл), солнечная активность (11-летний цикл) и другие квазипериодические явления (квазидвухлетний цикл и полюсный прилив). Однако соотношение $C(t) / P(t)$ варьирует в широких пределах и априори неизвестно.

Отметим также, циклические колебания могут формироваться случайным образом. В этом случае они редко фиксируются во временных рядах более нескольких раз. К сожалению, именно случайный характер формирования циклов является наиболее типичной ситуацией для гидрометеорологических процессов. Методы выделения циклических колебаний (спектральный анализ, вейвлет-анализ) будут рассмотрены ниже.

Сумму трендовой и циклической компонент можно условно рассматривать как *детерминированную* часть разложения (10.5), т. е. ту часть дисперсии исходного ряда $X(t)$, которая поддается интерпретации и строго описывается статистическими методами.

Статистическая детерминированность отличается от физической тем, что доверительная вероятность трендовой и циклической компонент не является функциональной.

Случайные колебания – это то, что остается от временного ряда после вычета из него тренда и циклической компоненты. Они отражают суммарное воздействие многочисленных факторов, а также погрешности измерений и расчетов, учесть которые по отдельности не представляется возможным. Со статистической точки зрения ряд $P(t)$ представляет собой набор случайных чисел, либо описывающий инерционные колебания в виде цепи Маркова.

Остаточный ряд $P(t)$, представляющий собой набор случайных чисел, можно идентифицировать в виде модели «белого шума». *Простая цепь Маркова – это последовательность событий, при котором вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в настоящий момент и не зависит от того, каким образом эта система пришла в это состояние.* По сути, простая цепь Маркова тождественна теоретической модели в виде «красного шума», которой свойственна корреляция только между смежными (соседними) значениями временного ряда. *Сложная цепь Маркова – это последовательность событий, при котором вероятность системы в настоящий момент зависит от некоторого множества состояний системы в предшествующие моменты времени.* Отсюда следует, что автокорреляционная функция ряда $P(t)$ должна иметь значимые коэффициенты автокорреляции на сдвигах $\tau \geq 1$.

Это означает наличие в ряду $P(t)$ сильной инерционности. Наиболее адекватным аппаратом описания инерционных колебаний служит модели авторегрессии скользящего среднего.

При условии статистической независимости (некоррелированности) составляющих выражения (10.5), оно может быть записано в дисперсионном виде как:

$$D_X = D_T + D_C + D_P. \quad (10.9)$$

Данное выражение означает, что дисперсия исходного временного ряда $X(t)$ состоит из суммы дисперсий тренда, циклической и случайной составляющих. С помощью формулы (10.9) можно оценивать значимость и определять вклад отдельных компонент в изменчивость исходного ряда $X(t)$.

Таким образом, основные этапы исследования временной изменчивости состоят в следующем (рис. 10.1):

1) разделение временного ряда $X(t)$ на межгодовую и внутригодовую части;

2) выделение гармоник годового хода на основе гармонического анализа;

3) оценка вклада случайных колебаний в годовой ход и их анализ;

4) выделение тренда в межгодовой изменчивости и оценка его вклада в дисперсию исходного ряда;

5) выделение регулярных межгодовых колебаний и их анализ;

6) выделение нерегулярных межгодовых колебаний и их анализ.

Разумеется, анализ временных рядов не ограничивается приведенной выше схемой. Поэтому ее можно рассматривать лишь в качестве стандартной процедуры, состоящей из комплекса методов статистического анализа, которые будут обсуждены в следующих разделах.

10.2. Выделение и анализ трендовой компоненты

В разложении (10.5) *под трендовой составляющей понимается некоторое медленное изменение процесса без образования циклов*. Как видно из разложения (10.5), циклы описываются вторым слагаемым. Следует также иметь в виду, что само существование тренда полностью определяется длиной ряда. При изменении его длины тренд может появляться, исчезать, менять свою интенсивность и форму. Тренд может быть как линейного, так и нелинейного вида. Линейный тренд показывает, в какую сторону (повышения или понижения) идет развитие процесса во времени. Нелинейный тренд может иметь один экстремум (максимум или минимум). В этом случае он одновременно характеризует рост (снижение) и снижение (рост) процесса во времени.

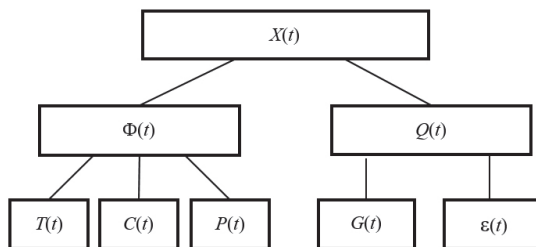


Рис. 10.1. Основные этапы анализа изменчивости временных рядов, интервал дискретизации которых составляет $\Delta t = 1$ месяц

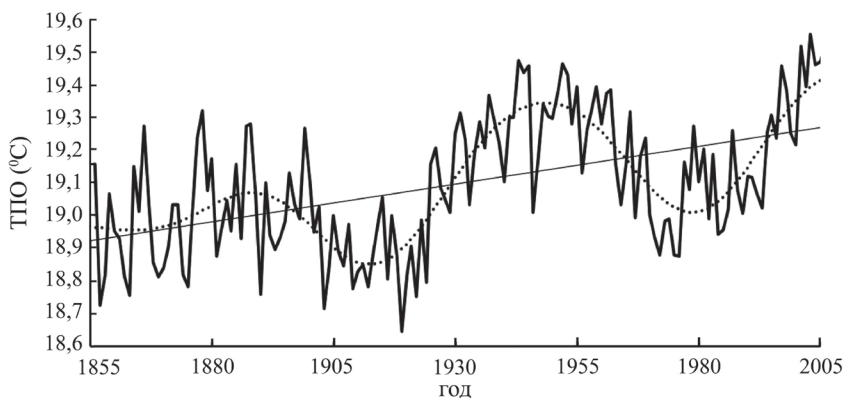


Рис. 10.2. Межгодовая изменчивость температуры поверхности океана в одном из районов Северной Атлантики.

Прямая линия – тренд; пунктирная линия – тенденция

До настоящего времени существует некоторая путаница в понятии тренда. Следует отличать трендовую компоненту от *тенденции* временного ряда, под которой обычно понимают *главные закономерности в развитии случайного процесса*. Поэтому в отличие от тренда, тенденция временного ряда может образовывать циклы. Довольно часто именно долгопериодная изменчивость временного ряда и принимается в качестве его основной тенденции. Кроме того, это означает, что значимый тренд является частным случаем тенденции, но не наоборот.

В качестве примера на рис. 10.2 приводится временной ход средней годовой температуры поверхности океана для одного из районов Северной Атлантики. Как видно из рис. 10.2, главной закономерностью ее межгодовой изменчивости является четко выраженное сложное циклическое колебание (тенденция), которое может быть, например, описано полиномом высокой ($m > 2$) степени. Одновременно с этим мы видим однонаправленный постепенный рост температуры воды (тренд), который легко представить в виде полинома первой степени. Отсюда следует, что тренд – это линейная тенденция, т. е. ее частный случай. В практических целях для выделения тенденции в межгодовой изменчивости временных рядов может быть полезной процедура 11-летнего скользящего осреднения.

Очевидно, в некоторых случаях помимо *основного* (главного) тренда целесообразно выделять и *локальные* тренды. Основным является тренд для всего временного ряда. Если же ряд разбить на

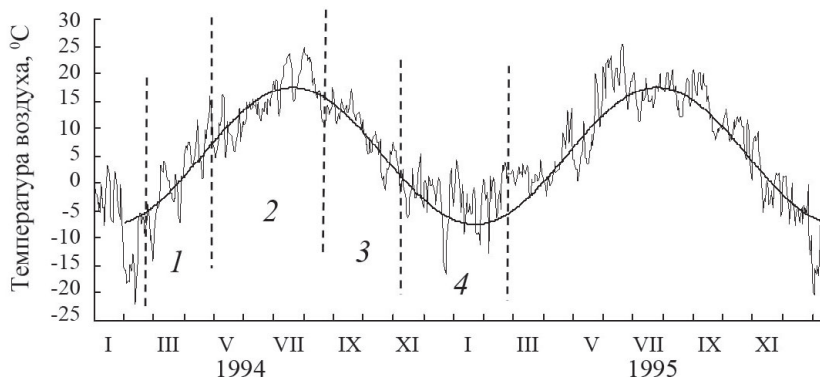


Рис. 10.3. Изменчивость среднесуточных значений температуры воздуха в Санкт-Петербурге за 1994–1995 гг.

отдельные характерные отрезки, отличающиеся друг от друга направленностью временных колебаний, то для каждого из них можно построить свои локальные тренды. Пример подобных трендов будет приведен ниже.

В качестве конкретной иллюстрации того, как в зависимости от длины ряда тренд меняет свои характеристики, обратимся к рис. 10.3, на котором приводятся суточные значения температуры воздуха за два годовых интервала ($N = 730$ сут.) в Санкт-Петербурге. Действительно, если мы рассматриваем весь ряд, то имеем отчетливо выраженный годовой ход температуры, на который накладываются короткопериодные синоптические колебания. Именно годовую гармонику в данном случае можно отождествлять с тенденцией временного ряда. Но поскольку длина исходной реализации позволяет выделить годовой период, то тренд в ряду отсутствует по определению.

В то же время, если на рис. 10.3 мы выберем любой интервал, меньший 365 суток, то в этом случае выделить годовой период уже не удастся, поэтому можно сделать вывод о наличии для данного интервала трендовой составляющей. При этом тренд является частью годовой гармоники и может иметь как линейный, так и нелинейный вид. Из рис. 10.3 видно, что для сравнительно коротких интервалов времени (например, интервалы 1 и 3) трендовая компонента носит линейный характер и, следовательно, может быть аппроксимирована полиномом первой степени:

$$T(t) = a_0 + a_1 t, \quad (10.10)$$

где t – время. В данном случае свободный член a_0 показывает условное значение ряда $X(t)$ при $t = 0$. Угловой коэффициент (коэффициент регрессии) a_1 представляет собой величину тренда (Tr), означающую скорость повышения (понижения) рассматриваемой характеристики в единицу времени.

По мере увеличения длины исходной реализации тренд будет претерпевать определенные изменения и может трансформироваться из линейного в нелинейный (например, для интервалов 2 и 4 на рис. 10.3). В связи с этим он может быть представлен полиномом второй степени:

$$T(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2. \quad (10.11)$$

Коэффициент a_2 показывает ускорение (замедление) скорости изменения рассматриваемой характеристики во времени в квадрате, т. е. параболическая форма тренда соответствует ускоренному или замедленному изменению значений ряда с постоянным ускорением. Если $a_2 < 0$ и $a_1 > 0$, то квадратическая парабола имеет максимум, если $a_2 > 0$ и $a_1 < 0$ – то минимум. Для отыскания экстремума первую производную параболы по t приравнивают нулю и решают уравнение относительно t .

Численные значения коэффициентов в этих формулах определяются методом наименьших квадратов. Разумеется, возможны и другие способы аппроксимации тренда. Различные нелинейные формулы с двумя неизвестными коэффициентами приводятся в таблице 8.1. В этих формулах переменная X должна быть заменена на время t . В некоторых случаях используются более сложные формулы нелинейного тренда, для оценки коэффициентов в которых вместо МНК применяются различные численные методы. Если, например, задать тренд в виде экспоненциальной зависимости:

$$T(t) = a_0 + a_1 \exp(a_2 t), \quad (10.12)$$

то использование метода наименьших квадратов возможно только в частном случае при $a_2 = 1$.

При оценке тренда наиболее важным представляется оценка его значимости, т. е. насколько существен его вклад в изменчивость случайного процесса. Как и раньше, будем для этой цели использовать критерий Стьюдента. Так, при оценке значимости линейного тренда записывается нулевая гипотеза по отношению к коэффициенту

регрессии a_1 и коэффициенту корреляции между временным рядом и трендовой компонентой $r_{(X,T)}$:

$$H_0 : |a_1| = 0, \quad H_0 : |r_{(X,T)}| = 0. \quad (10.13)$$

Для проверки этих гипотез рассчитывается выборочный критерий Стьюдента, причем можно показать, что $t_r = t_{a1}$. Это облегчает оценку значимости тренда. Напомним, что в гл. 6 было показано:

$$t = \frac{|r| \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}.$$

Тренд считается значимым, если оценки критерия Стьюдента превышают его критическое значение при заданном уровне значимости, т. е.

$$t > t_{кр}(\alpha, v = n - 2). \quad (10.14)$$

Приблизительно оценить значимость тренда можно и по критической величине коэффициента корреляции. В соответствии с (6.8) для достаточно длинных временных рядов и уровня значимости $\alpha = 0,05$ имеем $r_{кр} \approx \frac{2}{\sqrt{n+2}}$. Если $r_{(X,T)} > r_{кр}$, то тренд можно считать

значимым. В современных ППСП, как уже указывалось, значимость тренда может быть определена непосредственно по оценке p -level коэффициента a_1 .

При оценке значимости нелинейного тренда рассчитывается корреляционное отношение η , а затем осуществляется проверка нулевой гипотезы как коэффициента корреляции. По величине коэффициента корреляции и корреляционного отношения легко определить коэффициент детерминации, показывающий вклад тренда в описание дисперсии функции отклика. Он определяется в линейном и нелинейном варианте по одной и той же формуле $R^2 = \frac{\sigma_{Tr}^2}{\sigma_y^2}$,

где числитель – дисперсия тренда, знаменатель – дисперсия исходного ряда. Отметим, что по коэффициенту детерминации можно также оценить значимость тренда. Для достаточно длинных временных рядов и уровня значимости $\alpha = 0,05$ имеем $R_{кр}^2 \approx \frac{4}{(n+2)}$.

Другой важной характеристикой тренда является его величина Tr , определяемая в линейном случае как:

$$Tr = \frac{(a_0 + a_1 t_n) - (a_0 + a_1 t_1)}{n} = \frac{a_1 (n-1)}{n} \approx a_1, \quad (10.15)$$

где n – длина ряда. Отсюда видно, что величина линейного тренда определяется коэффициентом регрессии. Аналогичным образом для нелинейного тренда вычисляются его первое и последнее значения по формуле (10.11) и затем разность делится на длину интервала. В результате получаем величину тренда в единицу времени. Следует иметь в виду, что рассчитанный таким образом для нелинейного тренда коэффициент детерминации выше по сравнению с линейным трендом. При этом, чем больше «крутизна» тренда, тем больше различия между линейным и нелинейным трендами.

Итак, *коэффициент детерминации и величина тренда исчерпывающим образом характеризуют поведение тренда*. Однако необходимо помнить, что рассмотренная выше процедура оценивания трендов является параметрической, эффективность которой существенно зависит от того, насколько точно исходный ряд близок к нормальному распределению и от его длины. Действительно, для длинных рядов, даже если исходный ряд не является нормальным, оценка тренда может быть выполнена рассмотренным выше образом довольно точно. Для коротких рядов, особенно когда распределение исходных данных неизвестно, эффективность оценивания тренда по формулам (10.10)–(10.15) снижается. В этом случае для оценки коэффициента детерминации могут быть использованы непараметрические коэффициенты ранговой корреляции Спирмена или Кендалла с последующей приближенной оценкой на значимость по критерию Стьюдента или непараметрические критерии серий по числу экстремумов, по числу повышений и понижений значений случайной величины в исходном ряду. Однако непараметрические критерии позволяют лишь предположить присутствие тренда во временном ряду, но не дают его количественных оценок.

Хотя выделение линейного тренда во временном ряду не представляет каких-либо затруднений, следует иметь в виду, что при изменении длины временного ряда он может не только изменить свою величину, но даже сменить знак. Особенно это касается коротких временных рядов. Поэтому проверка тренда на устойчивость является важной процедурой первичного анализа. Очевидно, для рядов $n < 20$ вряд ли имеет смысл рассчитывать тренд.

Отметим, что приведенные выше формулы (10.10)–(10.12) описывают тренд по среднему арифметическому. Это наиболее часто

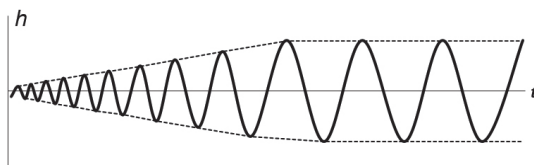


Рис. 10.4. Изменчивость высоты морской поверхности от момента, когда ветер отсутствует, до момента полного развития ветрового волнения

встречающийся вид трендов в природных процессах, хотя в некоторых случаях может встречаться тренд по дисперсии временного ряда. Характерный пример такого тренда – развивающийся характер ветрового волнения. Допустим, в штилевую погоду над морем начал дуть ветер с постоянной скоростью и постоянного направления. Естественно, в этих условиях возникает ветровое волнение, которое постепенно будет усиливаться до стадии полностью развитого (установившегося) волнения, когда параметры волн перестают изменяться во времени. Если мы в течение этого периода будем регистрировать, например, высоту морской поверхности (рис. 10.4), то увидим, что амплитуда колебаний уровня плавно изменяется от нуля (штиль) до наибольших значений, соответствующих установившемуся волнению. Огибающая амплитуды свидетельствует о наличии положительного тренда по дисперсии уровня, в то время как среднее значение остается постоянным. И, наоборот, отрицательный тренд по дисперсии возникает, когда при развитом волнении стихает ветер и волнение переходит в зыбь, которая постепенно затухает.

Очевидно, в общем случае во временном ряду $X(t)$ могут присутствовать 3 вида трендов: по среднему значению, по дисперсии и одновременно по среднему значению и дисперсии.

Итак, исходя из аналитических формул, нетрудно рассчитать трендовую составляющую заданного ряда, определить ее дисперсию и путем последовательного вычитания исключить трендовую составляющую из этого ряда.

Заметим, что в тех случаях, когда аналитическое выражение тренда не представляет для нас интереса, для его исключения из временного ряда могут быть использованы другие приемы. Если, например, тренд аппроксимировать линейным уравнением (10.11), то, обозначая последовательные моменты времени через $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$, исходный временной ряд $\Phi(t)$ можно записать следующим образом:

$$\Phi_1 = a_0 + a_1 + d_1 \quad (t=1),$$

$$\Phi_2 = a_0 + 2a_1 + d_2 \quad (t=2),$$

$$\Phi_3 = a_0 + 3a_1 + d_3 \quad (t=3),$$

..... ,

$$\Phi_n = a_0 + na_1 + d_n \quad (t=n),$$

где $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ – отклонения величин временного ряда от тренда, т. е. $d(t) = \Phi(t) - T(t)$. Найдем первые разности:

$$\Delta'_1 = \Phi_2 - \Phi_1 = a_1 + (d_2 - d_1),$$

$$\Delta'_2 = \Phi_3 - \Phi_2 = a_1 + (d_3 - d_2),$$

..... ,

$$\Delta'_{n-1} = \Phi_n - \Phi_{n-1} = a_1 + (d_n - d_{n-1}).$$

Видно, что во всех разностях присутствует одна и та же константа a_1 . Поэтому колебания рассчитанных разностей $\Delta'(t)$ зависят только от $d(t)$, т. е. при этом механически исключается линейный тренд.

Если тренд аппроксимируется полиномом второй степени, то в этом случае необходимо рассчитывать уже вторые разности Δ'' . Например:

$$\Delta''_1 = \Delta'_2 - \Delta'_1 = 2a_2 + (d_3 - 2d_2 + d_1),$$

$$\Delta''_2 = \Delta'_3 - \Delta'_2 = 2a_2 + (d_4 - 2d_3 + d_2).$$

..... ,

$$\Delta''_{n-2} = \Delta'_{n-1} - \Delta'_{n-2} = 2a_2 + (d_n - 2d_{n-1} + d_{n-2}).$$

Поскольку во вторые разности входит постоянная величина $2a_2$, то колебания $\Delta''(t)$ зависят только от величин $d(t)$.

Пример 10.1. Обратимся к рис. 10.5, на котором представлен межгодовой ход уровня Каспийского моря в г. Баку по инструментальным наблюдениям за 1900–2004 гг. Нетрудно видеть, что в колебаниях уровня довольно четко выделяются три достаточно длительных стабильных периода, в течение которых изменения уровня оказываются относительно однородными. По аналогии с естественными синоптическими периодами они были названы «естественными климатическими периодами» (ЕКП). Первый ЕКП (1900–1929 гг.) характеризуется стоянием уровня, т. е. его колебания носят случайный характер относительно некоторого мало изменяющегося среднего положения. Второй ЕКП (1930–1977 гг.) сопровождается



Рис. 10.5. Межгодовой ход уровня Каспийского моря по инструментальным наблюдениям (за нуль принята отметка –28 м БС)

почти монотонным падением уровня, а третий ЕКП (1978–2004 гг.), наоборот, – таким же почти монотонным подъемом уровня.

Размах колебаний уровня за весь период времени достигает 3 м (таблица 10.1), причем в течение второго ЕКП он понизился на 2,7 м. Безусловно, такие быстрые однонаправленные колебания уровня привели к огромному экономическому ущербу для прибрежной инфраструктуры, выражаемой в миллиардах долларов. Однако отметим, что подобные колебания уровня нельзя назвать выдающимся событием в истории Каспия. Например, как следует из палеоклиматических данных, в IX в. размах колебаний уровня достигал 7 м.

Нелинейный и линейный тренды уровня моря за 1900–2004 гг. (рис. 10.5) могут быть аппроксимированы следующими выражениями:

$$h = 162,76 - 1,800t. \quad (10.10')$$

$$h = 296,77 - 9,385t + 0,0722t^2, \quad (10.11')$$

Линейный тренд описывает 33 % дисперсии исходного ряда, а нелинейный – 75 %, причем, естественно, оба тренда являются значимыми. Характеристики линейных локальных трендов для отдельных ЕКП также даются в таблице 10.1. Хотя для периода 1900–1929 гг. линейный тренд является значимым, однако, учитывая, что его величина на порядок меньше трендов для других ЕКП, целесообразно считать, что для первого ЕКП характерно стояние уровня. Максимальный тренд как по величине, так и по вкладу в дисперсию колебаний уровня наблюдается для третьего ЕКП.

Таблица 10.1

**Первичные статистические характеристики для однородных периодов
изменений уровня Каспийского моря с 1900 по 2004 г.**

Характеристика	1900–1929	1930–1977	1978–2004	1900–2004
Среднее, см/год	175,6	7,5	58,9	68,7
Медиана, см/год	180	–18,5	89	56
Стандартное отклонение, см/год	24,8	68,5	65,7	91,8
Коэффициент эксцесса	–1,01	1,06	–0,73	–1,51
Коэффициент асимметрии	–0,41	1,38	–0,61	0,04
Минимум, см/год	126	–92	–87	–92
Максимум, см/год	211	177	148	211
Величина тренда, мм/год	–2,5	–48	71,5	–17
Коэффициент детерминации тренда	0,465	0,726	0,804	0,326

Пример 10.2. Как известно, в XX столетии отмечалось довольно существенное потепление климата. Наиболее репрезентативным показателем глобального климата является приповерхностная температура воздуха (ПТВ). Поэтому обратимся к рис. 10.6, на котором приводится межгодовой ход аномалий ПТВ для каждого из полушарий за период 1880–2005 гг. При этом аномалии ПТВ отсчитывались от базового периода за 1950–1980 гг. Из рис. 10.6 видно, что в целом отмечается согласованный характер изменений ПТВ в каждом из полушарий. Естественно, что в северном

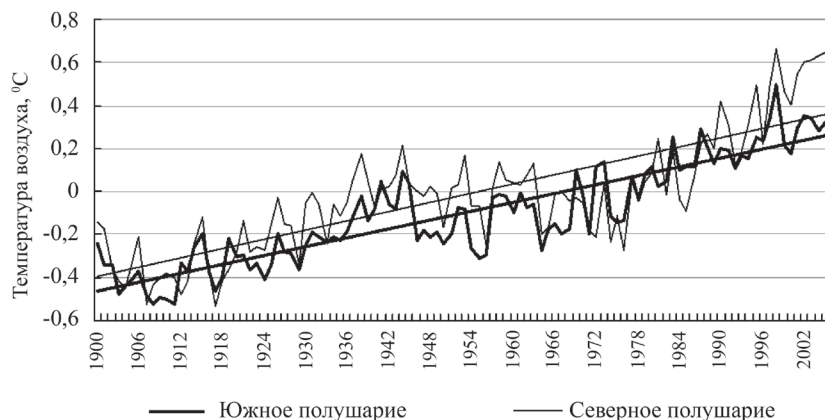


Рис. 10.6. Межгодовой ход приповерхностной температуры воздуха
в северном и южном полушариях за период 1900–2005 гг.

полушарии не только дисперсия колебаний температуры, но и величина ее тренда несколько выше по сравнению с южным полушарием.

Можно отметить, что примерно до начала 1940-х годов наблюдался сравнительно быстрый рост температуры. Особенно ярко он проявлялся в высоких широтах северного полушария. Поэтому 1920–40-е годы получили название «потепление Арктики». Затем вплоть до середины 1970-х годов в северном полушарии отмечалось практически повсеместное похолодание, характеризующееся значимым отрицательным трендом. В данный период времени тренд в южном полушарии отсутствовал. И только после этого произошел резкий рост ПТВ, продолжающийся до настоящего времени.

Итак, за рассматриваемый период времени мы можем выделить три интервала, заметно отличающиеся друг от друга характером колебаний температуры и, следовательно, величиной локальных трендов, характеристики которых приведены в таблице 10.2. Нетрудно видеть, что максимальные оценки, как величины тренда, так и его вклада в дисперсию исходных временных рядов отмечаются в период наиболее сильного потепления, т. е. начиная с 1975 г. и по настоящее время.

Таблица 10.2

Оценки линейных трендов ПТВ за различные периоды времени по данным архива HadCRUTv

Период, годы	Северное полушарие		Южное полушарие		Земной шар	
	R^2	°C/10 лет	R^2	°C/10 лет	R^2	°C/10 лет
1880–2005	0,62	0,072	0,58	0,055	0,64	0,064
1880–1940	0,64	0,109	0,32	0,046	0,59	0,077
1941–1975	0,30	–0,074	0,02	–0,014	0,21	–0,044
1976–2005	0,68	0,252	0,56	0,116	0,65	0,182

Поскольку ПТВ в обоих полушариях имеет практически одинаковый линейный тренд, обусловленный глобальным характером потепления климата, то естественно, что между данными временными рядами отмечается очень высокая корреляция, равная за период 1880–2005 гг. $r = 0,90$. Очевидно, что этот тренд можно трактовать как некоторую третью переменную, вызывающую эффект ложной корреляции. В качестве такой переменной естественно полагать тренд в глобальной температуре воздуха. Для его исключения вычтем из каждого ряда ПТВ линейный тренд. На рис. 10.7

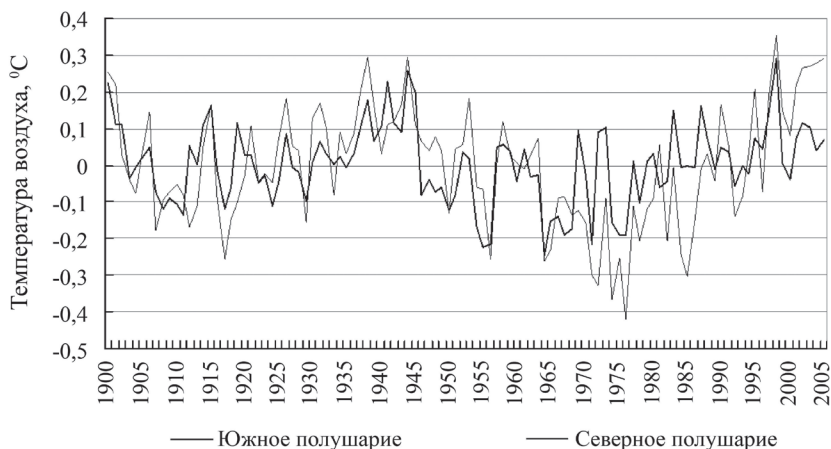


Рис. 10.7. Межгодовой ход приповерхностной температуры воздуха в северном и южном полушариях за 1900–2005 гг. после исключения линейного тренда

приводится межгодовой ход ПТВ для каждого из полушарий после исключения трендовых компонент. Нетрудно видеть, что ход ПТВ уже не является таким согласованным, как на рис. 10.6. В этом случае корреляция между данными рядами составляет $r = 0,66$. Следовательно, $r_{\text{лож}} = 0,90 - 0,66 = 0,24$.

10.3. Гармонический анализ

Для описания периодических и квазипериодических процессов, заданных в виде $G(t)$ и $C(t)$ в разложении (10.1), может быть, например, использован гармонический анализ, представляющий собой разложение в ряд Фурье. Весьма важно также, что разложение в ряд Фурье носит более универсальный характер, поскольку позволяет описать любую реализацию случайной функции с помощью конечного числа гармоник.

Итак, если мы имеем функцию $f(t)$, то ее на бесконечном интервале можно представить в виде ряда Фурье:

$$f(t) = \bar{f} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)], \quad (10.16)$$

где $\bar{f}$ – математическое ожидание функции $f(t)$; ω – частота; a_n и b_n – коэффициенты Фурье. Разложение в ряд Фурье не только точно

представляет функцию $f(t)$ при длине ряда $N \rightarrow \infty$, но и обеспечивает при фиксированной величине N наименьшую среднеквадратическую ошибку по сравнению с любым другим представлением функции $f(t)$ в виде тригонометрического ряда по $\sin(n\omega t)$ и $\cos(n\omega t)$ той же длины N . Поэтому на практике бесконечный интервал может быть заменен на конечный. В этом случае коэффициенты a_n и b_n определяются как:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt. \quad (10.17)$$

Слагаемые ряда Фурье $U_n = a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ называются *гармониками*. Если ввести угол φ_n так, что

$$\cos \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad \sin \varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}},$$

то гармоники можно представить в виде:

$$U_n = A_n \cos(n\omega t - \varphi_n), \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}. \quad (10.18)$$

Величины A_n и φ_n называются соответственно *амплитудой* и *фазой* гармоники. Если физический смысл амплитуды гармоники очевиден ($A = X_{\max} - X_{\min}$), то фаза представляет временной интервал наступления первого максимума от начала отсчета. Если, например, в годовом ходе температуры воздуха ее максимум наступает в июле, то фаза равна $\varphi = 7$ мес.

Заметим, что разложение (10.16) характеризует непрерывный случайный процесс. На практике же обычно имеют дело с дискретными временными рядами. Поэтому разработано несколько численных методов построения дискретного преобразования. К ним, в частности, относятся рекуррентный метод и метод быстрого преобразования Фурье, математическое изложение которых выходит за пределы содержания данной книги. Однако существуют и более простые алгоритмы оценок гармоник. Так, Пановским и Брайером предложена следующая формула для дискретного случайного процесса $X(t)$:

$$X(t) = \bar{x} + \sum_{i=1}^{N/2} \left[a_i \sin\left(\frac{360it}{P}\right) + b_i \cos\left(\frac{360it}{P}\right) \right], \quad (10.19)$$

где P – полный период, выражаемый в единицах времени, N – длина ряда, i – порядковый номер гармоники, t – время, отсчитываемое

от начала периода. Коэффициенты Фурье здесь рассчитываются как:

$$a_i = 0,5N \sum \left[x \sin \left(\frac{360it}{P} \right) \right], \quad b_i = 0,5N \sum \left[x \cos \left(\frac{360it}{P} \right) \right]. \quad (10.20)$$

Для удобства вычислений в зависимости от N и P составляется таблица множителей $0,5N \sin(360it/P)$ и $0,5N \cos(360it/P)$ для всех значений i и t . Для последней гармоники множители равны $N^{-1} \cos(360it/P)$. Значения анализируемого ряда умножаются на соответствующие множители. Их суммы и являются коэффициентами Фурье. Затем синусные и косинусные составляющие i -той гармоники складываются и представляются в виде:

$$A_i = \cos \left[\frac{360(t - t_i)}{P} \right],$$

где

$$A_i = (a_i^2 + b_i^2)^{1/2}, \quad t_i = \left(\frac{P}{360i} \right) \arctg \left(\frac{a_i}{b_i} \right), \quad t = \left(\frac{P}{360i} \right) \arcsin \left(\frac{a_i}{A_i} \right).$$

Здесь A_i – амплитуда i -той гармоники, а t_i – время наступления максимума i -той гармоники. В результате разложения в ряд Фурье, мы имеем постоянную компоненту $\bar{f}$ и сумму гармоник с частотами, кратными основной частоте ω , постоянными амплитудами A_n и начальными фазами φ_n .

Свойства гармонического разложения

Свойство 1. Дисперсия гармоники функционально связана с ее амплитудой следующей зависимостью: $\sigma_n^2 = \frac{A_n^2}{2}$.

Свойство 2. Гармоники независимы (некоррелированы) между собой.

Свойство 3. Число рассчитываемых гармоник равно $N/2$.

Свойство 4. Период первой гармоники равен длине исходного ряда, каждой последующей – кратен первой, вследствие чего последняя гармоника равна удвоенной дискретизации ряда.

Пусть, например, длина исходного ряда $N = 48$ месяцев. Тогда первая гармоника имеет период $\tau = 48$ мес., вторая – $\tau = N/2 = 24$ мес., третья – $\tau = N/3 = 16$ мес., последняя – $\tau = N/24 = 2$ мес. При исследовании годового цикла ($N = 12$ мес.) первая гармоника имеет

период, равный длине всего основного периода (12 месяцев), вторая – период, равный половине основного (6 мес.), третья – период, равный 1/3 основного (4 мес.). Наконец, последняя шестая гармоника имеет период, равный 2 месяцам. Так как гармоники некоррелированы друг с другом, то дисперсия суммы всех гармоник равна сумме дисперсий этих гармоник. Поэтому не составляет большого труда оценить вклад любой гармоники в общую дисперсию процесса, который равен $k_i = \frac{A_i^2}{2\sigma^2}$.

Весьма важным при анализе гармоник представляется отделение значимых гармоник от незначимых. Очевидно, для этой цели удобно использовать дисперсионный анализ. Действительно, вклад гармоники k_i в исходный процесс можно интерпретировать как коэффициент детерминации, т. е. ту часть дисперсии процесса, которая описывается данной гармоникой. Тогда извлекая корень из k_i , получаем коэффициент корреляции между данной гармоникой и исходным процессом, т. е. $r = (k_i)^{1/2}$. Значимость величины r , как мы знаем, оценивается по критерию Стьюдента. Приблизительно оценить вклад гармоники в дисперсию процесса можно и по критической величине коэффициента детерминации. Исходя из формулы (6.8') для достаточно длинных временных рядов и уровня значимости $\alpha = 0,05$, имеем $k_{икр} \approx 4/(n + 2)$. Если $k_i > k_{икр}$, то i -тая гармоника значима.

Определив значимые гармоники и вычтя их суммарную дисперсию из дисперсии временного ряда, находим дисперсию остатков:

$$D_\varepsilon = D_x - \sum_{i=1}^p k_i,$$

где p – число значимых гармоник. В первом приближении D_ε можно трактовать как дисперсию случайного процесса, близкого к модели белого шума.

Процедуру гармонического анализа удобно разбить на пять этапов:

- 1) определение средней арифметической величины;
- 2) оценка коэффициентов Фурье a_p , b_i и построение функции аппроксимации исходных данных;
- 3) оценка вклада отдельных гармоник в общую дисперсию ряда;
- 4) интерпретация значимых гармоник;
- 5) исключение значимых гармоник из исходного ряда с целью анализа остатков.

Гармонический анализ используется для выделения скрытых периодичностей. Однако в природе, вообще говоря, гармонические волны практически не встречаются. Очень близки к строгим гармоникам приливные волны. Действительно, периоды коротких (полусуточных и суточных) приливных волн можно считать практически постоянными. Однако амплитуда даже самых «правильных» полусуточных волн меняется во времени. Причиной этого является полумесячное неравенство приливов. В соответствии с этим неравенством максимальный полусуточный прилив наблюдается в сизигию (момент времени, когда Луна, Земля и Солнце находятся на одной прямой), а минимальный полусуточный прилив отмечается в квадратуру (момент времени, когда Луна, Земля и Солнце составляют угол 90°). В результате во временном ходе уровня моря амплитуда его колебаний плавно изменяется от наибольших значений в сизигию до наименьших в квадратуру.

На формирование амплитуды прилива существенное влияние могут оказывать местные, в том числе береговые условия, которые уменьшают (увеличивают) его величину. Как известно, максимальные приливы, наблюдающиеся в заливе Фанди (атлантическое побережье Канады), могут достигать 16–17 м. Причиной этого является совпадение по фазе сейш (собственных свободных колебаний уровня) и приливных колебаний, вследствие чего возникает явление резонанса и происходит резкое увеличение амплитуды колебаний.

Кроме приливных колебаний, к явлениям с относительно строгой периодичностью для многих районов земного шара можно отнести годовой и суточный ход основных гидрометеорологических характеристик. В этом случае при исследовании временных рядов, длина которых кратна таким периодичностям, выделенные гармоники будут иметь четкий физический смысл.

Следует иметь в виду, что при использовании гармонического анализа нельзя подходить формально к выделению гармоник. Если с физической точки зрения в данном конкретном временном ряду существование квазипериодических компонент маловероятно, то стоит хорошо подумать, есть ли необходимость в использовании гармонического анализа.

Пример 10.3. Рассмотрим особенности годового хода изменений теплосодержания деятельного слоя океана в десятиградусных широтных зонах северного полушария. В таблице 10.3 для первых двух гармоник приводятся амплитуды A_i (Вт/м^2), фазы φ_i (месяцы) первого максимума и суммарный вклад этих гармоник (%)

в дисперсию исходного процесса. Из таблицы 10.3 видно, что максимальная амплитуда 1 гармоники годового хода изменений теплосодержания океана наблюдается в зоне 40–30° с.ш. и быстро уменьшается по направлению к экватору и полюсу от этой зоны. Время наступления максимума изменений теплосодержания океана очень слабо меняется с широтой и почти везде (исключая зону 20–10° с.ш.) отмечается в летний период, когда происходит интенсивное прогревание верхних слоев океана за счет солнечной радиации.

Таблица 10.3

Гармонический анализ изменений теплосодержания деятельного слоя океана в десятиградусных широтных зонах северного полушария в Вт/м²

Параметр	90–80	80–70	70–60	60–50	50–40	40–30	30–20	20–10	10–0
A_1 , Вт/м ²	31	37	27	58	86	109	66	50	16
A_2 , Вт/м ²	6	16	6	2	10	0	19	25	11
φ_1 , месяц	4,9	6,5	5,8	5,7	6,0	5,8	5,7	2,9	4,2
φ_2 , месяц	3,9	4,4	0,4	0,5	3,6	5,1	3,1	3,9	2,6
%	54	78	90	97	99	100	99	92	60

Полугодовая гармоника играет существенную роль в сезонном ходе изменений теплосодержания только в низких широтах, причем в экваториальной зоне (10–0° с.ш.) ее амплитуда сравнима с амплитудой 1 гармоники. Сумма 1 и 2 гармоник с высокой точностью описывают годовой ход изменений теплосодержания океана в пределах 10–70° с.ш., т. е. в большей части акватории океана северного полушария. В экваториальной зоне и в Северном Ледовитом океане уже заметна роль непериодических (случайных) колебаний в формировании годового хода изменений теплосодержания океана.

Пример 10.4. Оценим наличие скрытых периодичностей в колебаниях морского уровня в Онежском заливе Белого моря в районе о. Большой Соловецкий, наблюдения над которым выполнены студентами-океанологами 3 курса РГГМУ в рамках производственной практики. Измерения уровня осуществлялись с 5 по 31 июля 2005 г. с дискретностью 2 часа. Временной ход уровня приведен на рис. 10.8. Горизонтальными черточками отмечены осредненные за сутки значения уровня. Среднее значение уровня за истекший период равно 135,9 см, дисперсия – 514,1 см², размах колебаний – 107 см. Из рис. 10.8 видно, что характерной чертой колебаний уровня является наличие значительного полусуточного прилива. Второй пик принадлежит слабому суточному приливу.



Рис. 10.8. Временная изменчивость
уровня моря в июле 2005 г. в Онежском заливе Белого моря.
Прямые линии – среднесуточные значения уровня

Рассчитаем амплитуды гармоник временного ряда, общее число которых равно $N = 162$ и нанесем их на график, который называется периодограммой (рис. 10.9). Из этого рисунка видно, что действительно наиболее мощной гармоникой является главная лунная полусуточная волна M_2 ($\tau = 12,4$ ч). Характеристики ее приводятся в таблице 10.4. Амплитуда волны $M_2 = 26,1$ см, а вклад в дисперсию исходного процесса достигает 66 %. Отсюда коэффициент корреляции этой волны с исходным процессом $r = (0,661)^{1/2} = 0,813$. Рассчитаем теперь парную корреляцию непосредственно между данной гармоникой и исходным рядом уровня. Получаем $r = 0,812$ и $R^2 = 0,660$, т. е. имеем практически точное соответствие с результатами периодограммы.

Таблица 10.4

**Гармонический анализ морского уровня
в районе о. Большой Соловецкий**

Гармоника	Период, час	Амплитуда, см	Дисперсия, см ²	Коэффициент детерминации	Коэффициент корреляции
Полусуточная волна	12,4	26,1	340,1	0,661	0,813
Суточная волна	24,0	6,6	21,7	0,042	0,21
Сейша	72	3,3	5,4	0,011	0,10

Суточный прилив составляет лунно-солнечная деклинационная волна K_1 . Ее амплитуда почти в 4 раза меньше волны M_2 . Практически в 4 раза меньше и коэффициент корреляции ($r = 0,21$) с исходным рядом. Однако он значим, так как критическое значение коэффициента корреляции при уровне значимости $\alpha = 0,05$ равно $r_{кр} = 0,11$.

Следующая по величине гармоника, которая практически даже не видна на рис. 10.9, соответствует периоду $\tau = 72,0$ ч, а ее вклад

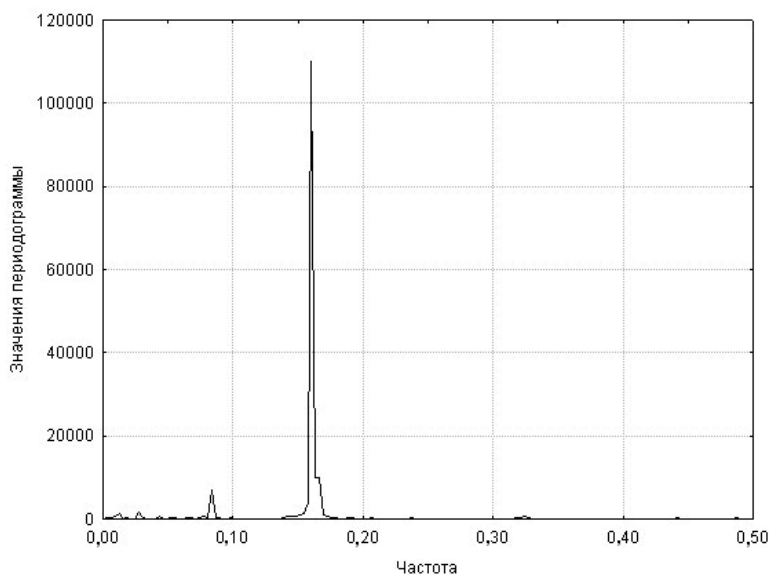


Рис. 10.9. Периодограмма срочных (с дискретностью 2 ч) значений уровня моря за период с 5 по 31 июля 2005 г. ($N=314$)

в дисперсию исходного ряда равен $R^2 = 5,4/514,1 = 0,011$, что соответствует величине $r = 0,10$. Очевидно, ее можно интерпретировать как крупномасштабную сейшу, обусловленную изменениями синоптических процессов в данном районе и, прежде всего, ветровым режимом. Данная гармоника не значима на уровне $\alpha = 0,05$, но значима при $\alpha = 0,10$ ($r_{кр} = 0,09$). Если исключить эти гармоники из исходного ряда, то получим чисто случайный процесс, близкий к модели «белого» шума. Дисперсия его равна 147 см^2 или $28,6 \%$ от исходной дисперсии.

10.4. Автокорреляционный анализ

Знание автокорреляционных функций (АФ) позволяет решить широкий круг задач, связанных с исследованием и прогнозированием изменчивости гидрометеорологических условий. К ним относятся: выделение скрытых периодичностей, в том числе регулярных межгодовых колебаний; вычисление оценки спектральной плотности; оценка степени связности ряда; долгосрочный прогноз на основе методов экстраполяции АФ.

Для одной реализации стационарного эргодического процесса АФ показывает степень линейной зависимости значений процесса от предшествующих значений, относящихся к различному сдвигу τ . Таким образом, АФ характеризует внутреннюю структуру процесса, его динамику во временной области.

Коэффициентом автокорреляции называют коэффициент корреляции между значениями данного ряда и его же значениями, относящимися к некоторому сдвигу τ . Следовательно, *автокорреляционная функция представляет последовательность коэффициентов автокорреляции, начиная с $\tau = 0$.*

Для непрерывного стационарного процесса бесконечной продолжительности нормированная автокорреляционная функция имеет вид:

$$r(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)X(t + \tau) d\tau. \quad (10.21)$$

Переходя от (10.14) к дискретному стационарному процессу конечной продолжительности, получаем:

$$r(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} (x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x})}{(N - \tau)\sigma^2}, \quad (10.22)$$

где N – длина реализации, которая предполагается весьма значительной. В действительности на практике условие стационарности выполняется не всегда, вследствие чего при изменении длины ряда значения $\bar{x}$ и σ не остаются постоянными. Поэтому, чтобы не вносить дополнительные ошибки в значения $r(\tau)$, целесообразно на каждом шаге вычислять новые значения $\bar{x}_{i+\tau}$ и $\sigma_{i+\tau}$.

Помимо нормированной автокорреляционной функции, в статистике часто используют понятие автокорреляционной (автоковариационной) функции, также характеризующей внутреннюю структуру процесса и определяемой по формуле:

$$R(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} (x_i - \bar{x})(x_{i+\tau} - \bar{x})}{N - \tau}. \quad (10.23)$$

Из формул (10.22) и (10.23) следует, что

$$\frac{R(\tau)}{r(\tau)} = \sigma^2, \quad (10.24)$$

т. е. нормированная автокорреляционная и автокорреляционная функции отличаются друг от друга на величину дисперсии.

Далее перечислим **свойства автокорреляционной функции** для типичных гидрометеорологических процессов.

Свойство 1. АФ – четная функция, т. е. $r(-\tau) = r(\tau)$, что позволяет сократить процесс вычислений, рассчитывая $r(\tau)$ только для положительных сдвигов.

Свойство 2. АФ – убывающая функция, т. е. $r(\tau = 0) \geq r(\tau)$, причем при $\tau \rightarrow \infty$ $r(\tau) \rightarrow 0$.

Свойство 3. Так как при $\tau = 0$ $r = 1$, то дисперсия АФ $\sigma^2 = 1$.

Свойство 4. Если в процессе присутствует периодическая составляющая, то ее период сохраняется в АФ.

Для характеристики временного сдвига, на котором происходит затухание АФ, в практике анализа стационарных случайных процессов вводится понятие интервала корреляции. *Интервал корреляции* является мерой протяженности линейной связи между ординатами исходного процесса.

Максимальный (абсолютный) интервал корреляции определяется следующим выражением:

$$\tau_{\text{кор}}^{(1)} = \int_0^{\infty} |r(\tau)| d\tau. \quad (10.25)$$

Ординаты процесса, разделенные интервалом, большим $\tau_{\text{кор}}^{(1)}$, можно считать некоррелированными. Поэтому экстраполяция их на время, большее, $\tau_{\text{кор}}^{(1)}$, не имеет смысла. Очевидно, в качестве приближенной оценки максимального интервала корреляции целесообразно принимать сдвиг τ_r , который соответствует последнему значимому коэффициенту автокорреляции.

Существует и другое определение интервала корреляции:

$$\tau_{\text{кор}}^{(2)} = \int_0^{\infty} |r(\tau)|^2 d\tau, \quad (10.26)$$

которое применяется, например, при характеристике эффективности оценок АФ. Величина $\tau_{\text{кор}}^{(2)}$, как правило, не превышает временного сдвига, соответствующего первому пересечению АФ оси τ . Величина $\tau_{\text{кор}}^{(2)}$ часто называется *радиусом корреляции*. Приблизленно радиус корреляции может быть определен по первому пересечению АФ оси τ .

Задача определения интервалов корреляции существенно облегчается, если известно аналитическое выражение, аппроксимирующее АФ исследуемого процесса. Широкий класс физических, в том числе океанологических, процессов описывается АФ вида:

$$r(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad (10.27)$$

$$r(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau, \quad (10.28)$$

где α – коэффициент затухания, β – частота колебания АФ. Подставив (10.27) в (10.25) и (10.26), имеем:

$$\tau_{\text{кор}}^{(1)} = \frac{1}{\alpha}, \quad \tau_{\text{кор}}^{(2)} = \frac{1}{2\alpha}.$$

Таким образом, если АФ выражается экспоненциальной зависимостью, то $\tau_{\text{кор}}^{(1)} = 2\tau_{\text{кор}}^{(2)}$. Подставив (10.28) в (10.25) и (10.26), получим:

$$\tau_{\text{кор}}^{(1)} = \frac{1}{\alpha(1+\mu^2)} \left[1 + \mu \exp\left(\frac{2\pi}{\mu}\right) + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{\exp\left(\frac{2\pi}{\mu} - 1\right)} \left(\exp\left(-\frac{\pi}{2\mu}\right) + 2 \exp\left(\frac{\pi}{2\mu}\right) + \exp\left(\frac{3\pi}{2\mu}\right) \right) \right], \quad (10.29)$$

$$\tau_{\text{кор}}^{(2)} = \frac{2\alpha^2 + \beta^2}{4\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}, \quad (10.30)$$

где $\mu = \frac{\beta}{\alpha}$.

Наиболее точным методом определения параметров α и β является метод наименьших квадратов. Однако во многих случаях можно ограничиться более простыми способами, основанными на определении параметров аппроксимации по нескольким характерным точкам АФ. Например, при аппроксимации АФ зависимостью (10.28) имеем:

$$\alpha = \ln \cos \frac{\beta \tau_2}{r(\tau_\Delta)}, \quad \beta = \frac{\pi}{2\tau_1},$$

где τ_1 – временной сдвиг, соответствующий первому пересечению АФ оси τ ; τ_2 – временной сдвиг, на котором отмечается ближайший к τ_1 экстремум АФ.

Рассмотрим вопрос о необходимой продолжительности наблюдений для надежной оценки ординат АФ, если в исследуемом ряду имеется цикличность. С этой целью представим временной ряд в виде разложения Фурье:

$$X(t) = \sum_{k=1} A_k \sin(\omega_k t + \varphi_k).$$

Задавшись величиной максимального сдвига АФ τ_m , равной периоду самой низкочастотной гармоники, присутствующей в процессе $\tau_m = T_1$, можно получить соотношение между продолжительностью наблюдений N , максимальным сдвигом τ_m и относительной среднеквадратической ошибкой σ :

$$N \geq \tau_m \left(1 + \frac{1}{2\pi\sigma} \right). \quad (10.31)$$

Из (10.31) следует, например, что для вычисления ординат оценки АФ с погрешностью 3 % от общей дисперсии процесса необходимо, чтобы выполнялось условие $N \approx (5-6)\tau_m$, а с погрешностью 2 % – $N \approx 9\tau_m$.

Таким образом, надежное определение ординат оценки АФ возможно лишь для тех составляющих процесса, период которых в 5–10 раз меньше продолжительности наблюдений. Если во временном ряду имеются более низкочастотные компоненты, то при помощи фильтрации их предварительно следует исключать из реализации.

При расчетах АФ для случайного процесса с не очень большой длиной ряда проверить условие стационарности весьма сложно. Понятно, что статистические характеристики ($\bar{x}$, σ), рассчитанные при различных величинах сдвига τ по формуле (10.22) для временного ряда, когда нет уверенности в выполнении условия его стационарности, могут заметно отличаться друг от друга. В этом случае значения АФ целесообразно рассчитывать по формуле:

$$r(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} (x_i - \bar{x}_{1,N-\tau})(x_{i+\tau} - \bar{x}_{\tau+1,N})}{(N-\tau-1)\sigma_{1,N-\tau}\sigma_{\tau+1,N}}. \quad (10.32)$$

Для оценки значимости коэффициентов автокорреляции составляется нулевая гипотеза вида $H_0 : |r(\tau)| = 0$ при $\tau \neq 0$, которая проверяется по критерию Стьюдента. Коэффициент автокорреляции окажется значимым, если будет выполняться следующее условие: $|r(\tau)| / \sigma_{r(\tau)} > t_{кр}$, где $t_{кр}$ – критерий Стьюдента с $N-\tau-1$ степенями свободы при заданном уровне значимости α , $\sigma_{r(\tau)}$ – стандартное отклонение ординат АФ, которое рассчитывается как:

$$\sigma_{r(\tau)} = \frac{1 - r^2(\tau)}{\sqrt{N - \tau - 1}}. \quad (10.33)$$

Если при данном τ ордината $|r(\tau)|$ выходит за пределы величины $t_{\alpha, r(\tau)}$, т. е. отличается от нуля более чем это можно приписать случайной вариации, то нулевая гипотеза отвергается, и отличие ординаты от нуля считается значимым. Недостаток этого критерия в том, что он не учитывает наличие во временном ряду циклических колебаний.

Для построения доверительных интервалов используется тот факт, что при малых величинах $r(\tau)$ отклонение коэффициентов автокорреляции от их истинного значения распределяется по нормальному закону. Тогда для длинных временных рядов при уровне значимости $\alpha = 0,05$ ($t_{\alpha} \approx 2$) доверительные границы для оценки значений АФ могут быть найдены как:

$$r_{\text{н}}(\tau_i) = r(\tau_i) - \frac{2}{\sqrt{N - \tau_i}} [1 - r^2(\tau_i)], \quad (10.34)$$

$$r_{\text{в}}(\tau_i) = r(\tau_i) + \frac{2}{\sqrt{N - \tau_i}} [1 - r^2(\tau_i)], \quad (10.35)$$

где $r_{\text{н}}(\tau_i)$, $r_{\text{в}}(\tau_i)$ – соответственно нижняя и верхняя доверительные границы.

Разновидностью АФ является *частная автокорреляционная функция* (ЧАКФ), которую можно выразить в виде последовательности частных коэффициентов автокорреляции для различных сдвигов τ . Частный коэффициент автокорреляции $r_{\text{част}}(\tau)$ представляет собой обычный коэффициент автокорреляции при устранении

влияния на него всех промежуточных значений временного ряда. По смыслу он идентичен частному коэффициенту корреляции. На первом сдвиге $\tau = 1$ частный коэффициент автокорреляции совпадает с обычным коэффициентом автокорреляции, т. е. $r_{\text{част}}(\tau_1) = r(\tau_1)$. На втором сдвиге $\tau = 2$ он учитывает влияние на него $r(\tau_1)$ и определяется как:

$$r_{\text{част}}(\tau_2) = \frac{r(\tau_2) - r^2(\tau_1)}{1 - r^2(\tau_1)}. \quad (10.36)$$

На третьем сдвиге $\tau = 3$ имеем:

$$r_{\text{част}}(\tau_3) = \frac{r(\tau_1) - r(\tau_2)r(\tau_1)}{\sqrt{1 - r^2(\tau_2)[1 - r^2(\tau_1)]}}. \quad (10.37)$$

В общем случае значения ЧАКФ определяются из матрицы коэффициентов автокорреляции временного ряда:

$$R_{k+1} = \begin{vmatrix} 1 & r_1 & r_2 & r_3 & \dots & r_{k-1} & r_k \\ r_1 & 1 & r_1 & r_2 & \dots & r_{k-2} & r_{k-1} \\ r_2 & r_1 & 1 & r_1 & \dots & r_{k-3} & r_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ r_k & r_{k-1} & r_{k-2} & r_{k-3} & \dots & r_1 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10.38)$$

Тогда конкретные значения ЧАКФ для k -го сдвига находятся из отношения:

$$R(k) = \frac{R_{k+1}^{1k+1}}{R_{k+1}^{11}}, \quad (10.39)$$

где R_{k+1}^{1k+1} – алгебраическое дополнение элемента первой строки и $(k + 1)$ -го столбца, а R_{k+1}^{11} – алгебраическое дополнение элемента первой строки и первого столбца матрицы R_k . ЧАКФ используется для определения вида случайного процесса и идентификации авторегрессионных моделей.

10.5. Автокорреляционные функции различных временных рядов

Большое разнообразие временной изменчивости гидрометеорологических процессов заключено между двумя эталонами: изменчивостью детерминированных процессов и изменчивостью чисто случайного процесса типа «белого шума». При этом во многих случаях гидрометеорологические характеристики не соответствуют какому-либо одному виду процесса, а представляют собой совокупность нескольких составляющих изменчивости. Поэтому практический анализ вычисленных выборочных автокорреляционных оценок состоит в том, чтобы провести их сравнение с известными теоретическими автокорреляционными функциями. Вследствие этого становится возможным определение типа случайного процесса.

Рассмотрим вначале стандартные графики нормированных автокорреляционных функций временных рядов для конкретных видов моделей гидрометеорологических процессов. Исходя из классификации случайных процессов (см. разд. 9.6), в качестве таковых следует рассматривать модели временного ряда в виде «белого шума», «красного шума» и циклического колебания. Как было отмечено в главе 9, теоретическая модель белого шума описывается автокорреляционной функцией, равной нулю на всех сдвигах, исключая сдвиг $\tau = 0$. Следует иметь в виду, что теоретическая модель белого шума не более чем *математическая абстракция*, поэтому на практике такие автокорреляционные функции не встречаются. Поэтому целесообразно от теоретической модели перейти к такому случайному стационарному процессу, о котором можно говорить, что он развивается по типу модели «белый шум». В этом случае автоматически принимается условие, что коэффициенты частной автокорреляции являются незначимыми на всех сдвигах, исключая нулевой (рис. 10.10).

Как видно из рис. 10.10, обычная АФ не может идентифицировать белый шум, т. к. отдельные коэффициенты корреляции превышают $r_{кр} = |0,2|$ при уровне значимости $\alpha = 0,05$. В то же время все значения ЧАКФ оказываются незначимыми на всех сдвигах τ . Подобные автокорреляционные функции являются типичными для многих гидрометеорологических процессов. Конкретных примеров можно привести множество. Например, пространственно-временная изменчивость параметров ветрового волнения при различных

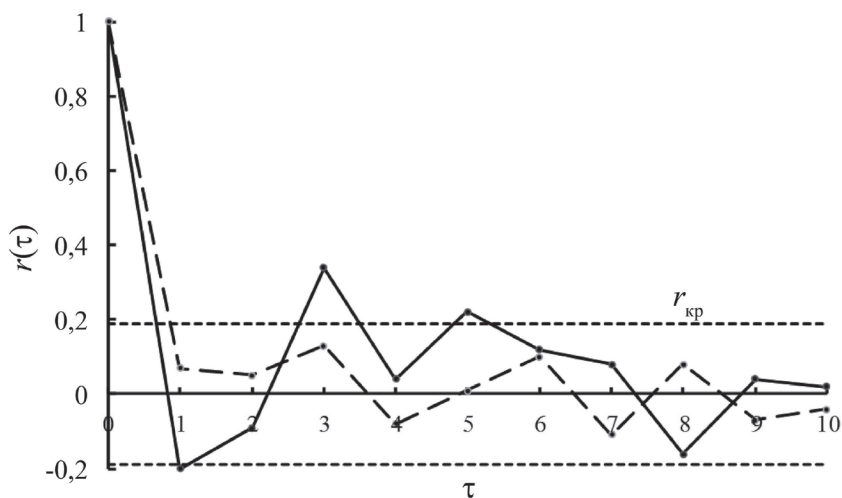


Рис. 10.10. Графики общей (сплошная линия) и частной (пунктирная линия) автокорреляционной функции высоты ветрового волнения в Северном море.

Величина $r_{кр} = |0,2|$

периодах осреднения, исключая зыбь, как правило, близка к белому шуму.

Теоретическая модель «красный шум» описывается автокорреляционной функцией, которая на первом сдвиге имеет значимый коэффициент автокорреляции, а на всех остальных сдвигах она равна нулю. При переходе от теоретической модели к случайному стационарному процессу, который развивается по типу модели «красный шум» принимается условие, что на первом сдвиге коэффициент частной автокорреляции является значимым, а на всех остальных он отклоняется от нуля случайным образом (рис. 10.11). Как видно из рис. 10.11, значения ЧАКФ при $\tau > 1$ лежат внутри критической области, т. е. отличаются от нуля случайным образом, в то время как значения АФ на сдвигах до $\tau = 3$ превышают $r_{кр}$.

Отметим, что АФ на рис. 10.11 может быть приближенно аппроксимирована экспоненциальной формулой вида (10.27). Для многих районов океана межгодовая изменчивость температуры довольно близко соответствует модели красного шума.

Автокорреляционная функция циклического колебания представляет собой затухающую косинусоиду, степень затухания которой зависит от характера нерегулярных изменений параметров

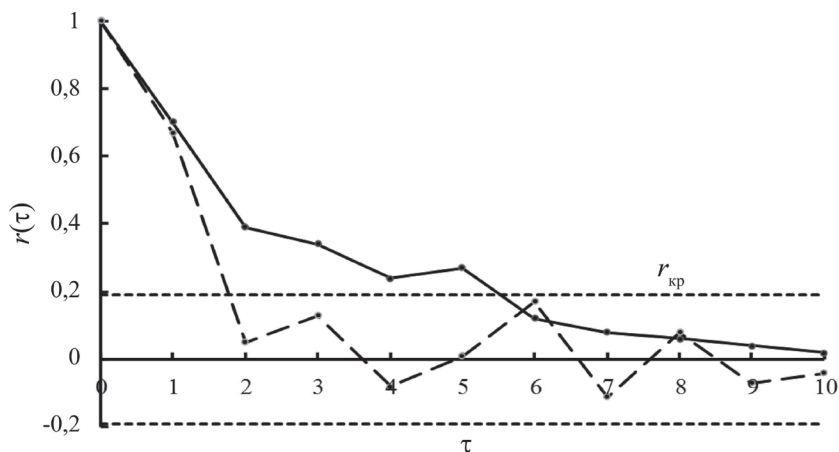


Рис. 10.11. Графики общей (сплошная линия) и частной (пунктирная линия) автокорреляционной функции средних годовых значений температуры воды в Балтийском море

данного колебания, т. е. от его амплитуды и периода. Поэтому если АФ сезонного хода большинства гидрометеорологических процессов вне экваториальной зоны выражается в виде слабо затухающей косинусоиды (рис. 10.12-б), то АФ межгодовой изменчивости солнечной активности уже представляет более быстро затухающую косинусоиду (рис. 10.12-а). Уже на втором максимуме $\tau = 22$ годам $r(\tau) = 0,40$. На практике данный вид АФ можно аппроксимировать формулой вида (10.28).

По существу, циклическое колебание с почти постоянным периодом (например, годовой или суточный циклы) можно рассматривать как совокупность (смесь) двух процессов: квазигармонического колебания и белого шума. Как указывалось выше, для гармонического колебания, представляющего чисто детерминированный процесс, все основные параметры колебания (амплитуда, период, фаза) остаются строго постоянными во времени. Поэтому автокорреляционная функция такого процесса полностью с ним совпадает и имеет вид гармонического косинусоидального незатухающего колебания, изменяющегося в пределах от $r(\tau) = -1$ до $r(\tau) = 1$ с периодом τ_0 . Строго говоря, в чистом виде гармонические колебания в природе не встречаются. Наиболее близкими к ним являются приливы. В качестве примера на рис. 10.13 приводится график АФ

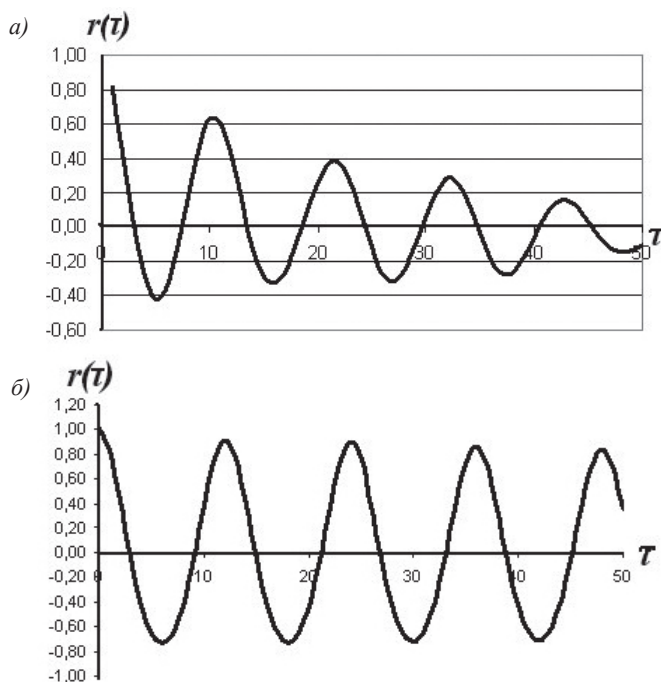


Рис. 10.12. График автокорреляционной функции циклического колебания:
 а) средние годовые значения солнечной активности (чисел Вольфа) за 1750–1996 гг.
 б) среднемесячные значения ТПО в районе корабля погоды М,

ежечасных значений морского уровня с ярко выраженным полусуточным приливом, которые носят квазигармонический характер.

Кроме того, довольно часто в межгодовой изменчивости реальных гидрометеорологических характеристик отмечается наложение случайной изменчивости в виде белого шума на трендовую компоненту. Автокорреляционная функция такого процесса имеет значительный радиус корреляции, который тем больше, чем выше инерционность исходного процесса. Если выполняется условие, что дисперсия тренда меньше дисперсии шума, то после первого пересечения через нуль коэффициенты автокорреляции становятся незначимыми вплоть до точки отсечения АФ (рис. 10.14).

Радиус корреляции АФ, как видно из рис. 10.14, равен 22 годам. Если же дисперсия тренда существенно больше дисперсии шума, то при положительном тренде АФ может превышать $r_{кр}$

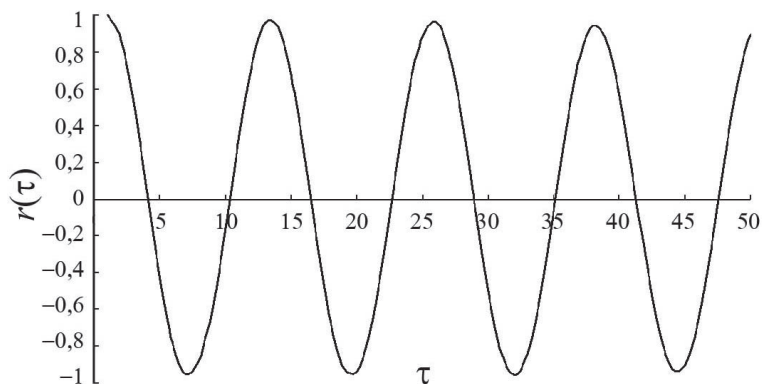


Рис. 10.13. График автокорреляционной функции гармонического колебания (ежечасных значений морского уровня)

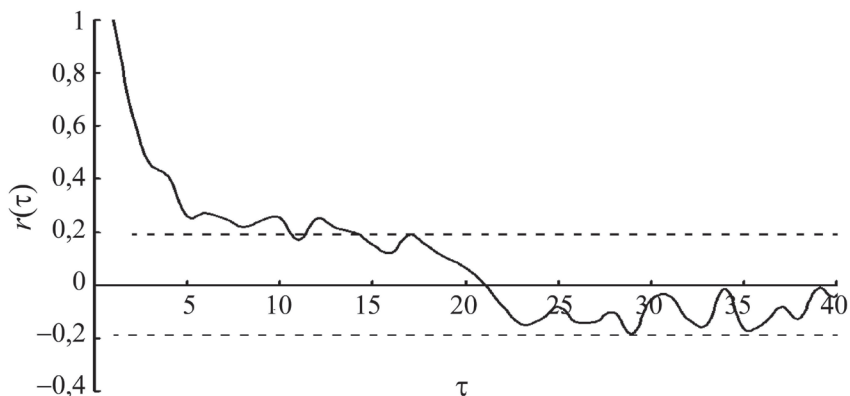


Рис. 10.14. График автокорреляционной функции случайного процесса, состоящего из совокупности белого шума и трендовой компоненты

вплоть до точки ее отсечения, а при отрицательном – после пересечения оси абсцисс уходить в область значимых отрицательных значений АФ.

Пример 10.5. Проанализируем автокорреляционную функцию вертикального градиента температуры в термоклине по годовому ряду среднесуточных наблюдений в пункте, находящемся в районе станции погоды «Танго» ($\varphi = 29^\circ$ с.ш., $\lambda = 135^\circ$ в.д.), рассчитанную Григоркиной, Губером и Фуксом. Исходный ряд центрировался относительно среднегодового значения. Затем вычислялись значения

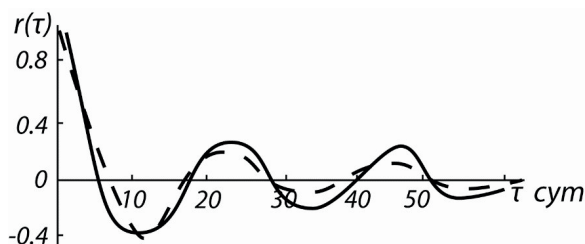


Рис. 10.15. Автокорреляционная функция колебаний вертикального градиента температуры в термокLINE (по Григоркиной, Губеру, Фуксу):
1 – АФ после исключения низкочастотной составляющей;
2 – аппроксимация АФ зависимостью (10.28)

АФ до $\tau = 60$ суткам (рис. 10.15). Одновременно были рассчитаны также нижняя и верхняя доверительные границы.

Как видно из рис. 10.15, график АФ представляет собой затухающую косинусоиду. Это свидетельствует о том, что в исходном процессе присутствует квазипериодическая (циклическая) составляющая, период которой, определенный по коррелограмме, близок к 20–22 сут. Для аппроксимации АФ может быть использована формула вида (10.28). После нахождения численных значений параметров α ($\alpha \approx 0,07$ 1/сут.) и β ($\beta \approx 0,28$ рад/сут.) имеем:

$$r(\tau) = e^{-0,07|\tau|} \cos 0,28\tau.$$

Сравнение экспериментальной и аппроксимированной кривых АФ показало, что между ними наблюдается удовлетворительное соответствие. Это значительно облегчает задачу определения интервалов корреляции. Используя найденные параметры α и β , нетрудно получить $\tau_{\text{кор}}^{(1)} \approx 20$ суток, $\tau_{\text{кор}}^{(2)} \approx 4$ суток.

Заметим, что интервал $\tau_{\text{кор}}^{(1)}$, определенный по числу пересечений реализацией процесса нулевого уровня, оказался равным 22 суткам.

Таким образом, линейная зависимость вертикального градиента температуры от предшествующей ситуации в данном пункте достаточно велика на интервале, не превышающем 4 суток. Через 20–22 суток значения процесса практически не коррелированы.

10.6. Понятие о взаимнокорреляционной функции

При описании гидрометеорологических процессов часто приходится иметь дело не с одной, а с двумя или несколькими функциями времени. В этом случае возникает задача определения статистической связи между различными случайными функциями.

Мерой линейной взаимосвязи двух временных реализаций $X(t)$ и $Y(t)$ является *нормированная взаимнокорреляционная функция* (ВКФ), которая применительно к непрерывным процессам бесконечной продолжительности определяется как:

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X(t)Y(t+\tau)dt. \quad (10.40)$$

Функция $r_{xy}(\tau)$ характеризует степень коррелированности (взаимосвязности) ординаты реализации $X(t)$, взятой в момент времени t_1 и ординаты реализации $Y(t)$, взятой в момент времени t_2 , причем $t_2 - t_1 = \tau$. Величина $r_{xy}(\tau)$ – всегда действительная функция, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В отличие от АФ она не обязательно имеет максимум при $\tau = 0$ и не обязательно является четной функцией.

В общем случае ВКФ несимметрична, т. е. $r_{xy}(\tau) \neq r_{xy}(-\tau)$, поэтому вычисление $r_{xy}(\tau)$ осуществляется как для положительных, так и для отрицательных значений аргумента. Но объем вычислений может быть сокращен на основе следующего свойства ВКФ:

$$\left. \begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= r_{yx}(-\tau) \\ r_{yx}(\tau) &= r_{xy}(-\tau) \end{aligned} \right\}.$$

Функция $r_{xy}(\tau)$ характеризует степень зависимости при опережении $X(t)$ относительно $Y(t)$; $r_{yx}(\tau)$ – при запаздывании $X(t)$ по отношению к $Y(t)$.

При переходе от (10.40) к дискретным процессам большой продолжительности формулы для вычисления ВКФ приобретают вид:

$$r_{xy}(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} (x_i - \bar{x})(y_{i+\tau} - \bar{y})}{(N - \tau)\sigma_x \sigma_y}, \quad (10.41)$$

$$r_{yx}(\tau) = \frac{\sum_{i=1}^{N-\tau} (y_i - \bar{y})(x_{i-\tau} - \bar{x})}{(N - \tau)\sigma_x \sigma_y}. \quad (10.42)$$

Естественно, что при небольших значениях N на точности вычисления ВКФ начинают уже сказываться изменения статистических характеристик: средней арифметической и стандартного отклонения. Учет их изменений производится аналогично (10.32).

Нормированная взаимная корреляционная функция связана с взаимной корреляционной функцией следующим образом:

$$r_{xy}(\tau) = \frac{R_{xy}(\tau)}{\sigma_x(0)\sigma_y(0)}, \quad r_{yx}(\tau) = \frac{R_{yx}(\tau)}{\sigma_x(0)\sigma_y(0)}, \quad (10.43)$$

где произведение $\sigma_x(0) \times \sigma_y(0)$ при нулевом сдвиге представляет *взаимную дисперсию* переменных X и Y .

Приведем два неравенства, которые показывают, как абсолютные значения взаимной корреляционной функции связаны со значениями этих функций при нулевом сдвиге:

$$\begin{aligned} |R_{xy}(\tau)|^2 &\leq R_x(0)R_y(0), \\ |R_{xy}(\tau)| &\leq 0,5[R_x(0) + R_y(0)]. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что если $R_{xy}(\tau) = 0$, то функции $X(t)$ и $Y(t)$ являются некоррелированными.

Перечислим **свойства взаимной корреляционной функции**.

Свойство 1. При одновременной перестановке индексов и аргументов взаимная корреляционная функция не изменяется:

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_2, t_1).$$

Свойство 2. Прибавление к случайным функциям $X(t)$ и $Y(t)$ неслучайных слагаемых $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, не изменяет их взаимной корреляционной функции. Так, если

$$X_1(t) = X(t) + \varphi(t) \text{ и } Y_1(t) = Y(t) + \psi(t),$$

то

$$R_{x_1y_1}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2).$$

Свойство 3. При умножении случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ на неслучайные множители $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, взаимная корреляционная функция умножается на произведение $\varphi(t_1)\psi(t_2)$. Так, если

$$X_1(t) = X(t)\varphi(t) \text{ и } Y_1(t) = Y(t)\psi(t),$$

то

$$R_{x_1y_1}(t_1, t_2) = R_{xy}(t_1, t_2)\varphi(t_1)\psi(t_2).$$

Свойство 4. Абсолютная величина взаимной корреляционной функции двух случайных функций не превышает среднего геометрического их дисперсий:

$$|R_{xy}(t_1, t_2)| \leq [D_x(t_1)D_y(t_2)]^{1/2}.$$

Следствие. Абсолютная величина нормированной взаимной корреляционной функции двух случайных функций не превышает единицы:

$$|r_{xy}(t_1, t_2)| \leq 1.$$

ВКФ является более информативной по сравнению с АФ в том смысле, что она дает возможность получить также разность фаз процессов $X(t)$ и $Y(t)$. Временной сдвиг τ_r , соответствующий максимуму функции взаимной корреляции, определяет среднюю разность фаз исследуемых процессов. Этот сдвиг называют иногда *оптимальным сдвигом*.

Симметрия ВКФ относительно нулевого сдвига $\tau = 0$, т. е. максимум ВКФ при $\tau = 0$, означает, что процессы протекают синфазно. Асимметрия ВКФ (максимум при $\tau \neq 0$) свидетельствует о том, что процессы протекают с некоторой разностью фаз, соответствующей τ_r . Кроме того, если исследуемые ряды содержат основное колебание с одной и той же частотой, то их функция взаимной корреляции содержит основное колебание с той же частотой.

По абсолютной величине ВКФ судят о степени взаимосвязи процессов, а по ее знаку – об их прямой или обратной зависимости. Так, если два процесса протекают в известной степени однородно, то независимо от того, обусловлена ли эта однородность взаимным влиянием $X(t)$ и $Y(t)$ или зависимостью обоих процессов от некоторого третьего, в любом случае будут иметь место одинаково направленные отклонения от средней величины.

Взаимнокорреляционный анализ широко используется при решении многих задач, связанных с изучением взаимосвязей океанологических процессов во временной области. К их числу относятся:

- 1) определение величины и знака взаимосвязи двух стационарных процессов;
- 2) определение средней разности фаз по сдвигу;
- 3) установление временных масштабов, в которых статистическая связь процессов является наиболее сильной;
- 4) выделение периодических составляющих, присущих обоим статистическим рядам;
- 5) выяснение возможной заблаговременности прогноза и выбор оптимальных предикторов.

Пример 10.6. Как известно, изменение в развитии многих атмосферных процессов происходит раньше, чем в океане. В частности,

это относится к тепловым процессам. Действительно, вследствие инерционности океана наступление экстремумов сезонного хода в компонентах притока солнечной радиации к океану опережает годовой ход температуры поверхностного слоя воды в зависимости от географических условий на 1–3 месяца. В качестве конкретного примера обратимся к району Канарского апвеллинга, расположенному вдоль берега Африки между широтами 15 и 25° с.ш. и долготой 20° з.д. Его замечательной особенностью является то, что он обладает исключительно высокой биологической и промысловой продуктивностью вод и поэтому служит областью интенсивного рыбного промысла.

Для среднемесячных значений результирующего радиационного притока тепла (радиационного баланса R) и температуры поверхности океана (ТПО) за период 1981–2000 гг. ($n = 240$) рассчитана нормированная взаимнокорреляционная функция до максимального сдвига $\tau_{\max} = 25$ (рис. 10.16). Нетрудно видеть, что указанные процессы протекают асинхронно.

Действительно, значения R опережают значения ТПО на 3 мес. Коэффициент взаимной корреляции при $\tau = 3$ мес. равен $r = 0,92$. Таким образом, сдвиг 3 мес. – это период адаптации температуры поверхности океана, её естественная реакция на климатический сигнал, внешнее возмущение. Кроме того, отметим, что через 9 мес. связь возобновляется, но уже с противоположным знаком.

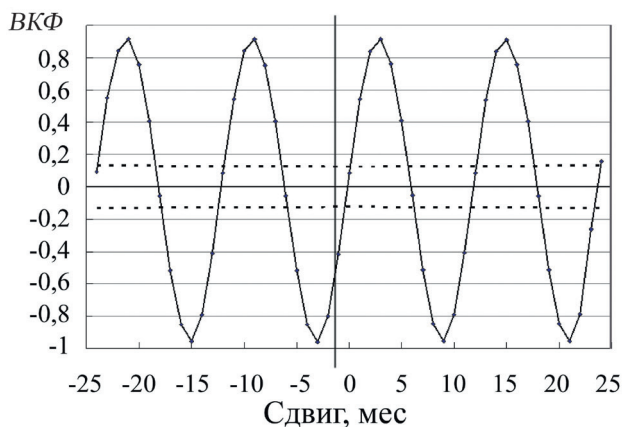


Рис. 10.16. Функция взаимной корреляции между среднемесячными значениями радиационного баланса R и температурой поверхности океана (ТПО) за период 1981–2000 гг. ($n = 240$) в районе Канарского апвеллинга до сдвига $\tau_{\max} = 25$ мес.

Естественно, поскольку оба случайных процесса содержат колебание с одной и той же частотой, то их функция взаимной корреляции также содержит основное колебание с той же частотой. В данном случае это годовой период, равный 12 мес.

Выше отмечалось, что взаимнокорреляционный анализ может быть использован для прогноза гидрометеорологических характеристик. В данном случае сдвиг 3 мес. представляет собой естественную (природную) заблаговременность прогноза ТПО, что может быть положено в основу построения физико-статистической модели прогноза. Кроме того, другим важным прогностическим сдвигом является полупериод (9 мес.) между сезонными изменениями ТПО и R , причем при сдвиге $\tau = 9$ мес. коэффициент взаимной корреляции даже несколько выше ($r = -0,95$).

10.7. Авторегрессионные модели временных рядов

При моделировании и прогнозе стационарных случайных процессов, особенно при наличии в них значительной инерционности, целесообразно использовать так называемые параметрические модели, которые включают малое число параметров, зависящих исключительно от предшествующих значений исходного процесса. Наибольшее распространение получили *модели авторегрессии* (АР), *модели скользящего среднего* (СС) и *смешанные модели авторегрессии – скользящего среднего* (АРСС).

В модели АР текущее значение случайного процесса выражается как конечная линейная комбинация предыдущих его значений и случайного импульса. Пусть $X(t)$, $X(t-1)$, $X(t-2)$, ... есть значения стационарного случайного процесса $X(t)$ в равноотстоящие моменты $t, t-1, t-2, \dots$, а $Z(t)$ – белый шум. Обозначим через $X^\circ(t) = X(t) - \bar{X}$ центрированный случайный процесс. Тогда выражение:

$$X^\circ(t) = \alpha_1 X^\circ(t-1) + \alpha_2 X^\circ(t-2) + \dots + \alpha_p X^\circ(t-p) + Z(t) \quad (10.44)$$

называется процессом авторегрессии порядка p .

Данная модель содержит $p + 2$ параметров: $\bar{X}$, α_1 , α_2 , ..., α_p ; σ_z^2 , где σ_z^2 – дисперсия белого шума $Z(t)$. Нетрудно видеть, что при $p = 1$ мы получаем марковский процесс первого порядка или другими словами «красный шум». При $p = 0$ модель АР вырождается в «белый шум».

В модели СС текущее значение случайного процесса $X(t)$ выражается через предыдущие значения $Z(t-1)$, $Z(t-2)$, ... белого шума $Z(t)$. В этом случае выражение:

$$X^o(t) = Z(t) + \beta_1 Z(t-1) + \beta_2 Z(t-2) + \dots + \beta_q Z(t-q) \quad (10.45)$$

называется процессом скользящего среднего порядка q . Данная модель содержит $q + 2$ параметров: $\bar{x}$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$; σ_z^2 .

Наконец, в тех случаях, когда использование этих моделей не приводит к желаемой точности в описании случайного процесса, целесообразно объединить в одной модели авторегрессию и скользящее среднее. В результате приходим к комбинированной модели АРСС, т. е.

$$X^o(t) = \alpha_1 X^o(t-1) + \dots + \alpha_p X^o(t-p) + Z(t) + \beta_1 Z(t-1) + \dots + \beta_q Z(t-q). \quad (10.46)$$

Эта модель содержит уже $p + q + 2$ параметров: $\bar{x}$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$; σ_z^2 .

Заметим, что данная модель имеет физический смысл, поскольку она является дискретным аналогом линейного дифференциального уравнения, используемого для описания линейных систем. Отсюда следует, что эта модель представляет собой временной ряд в виде выходного сигнала линейной системы, на вход которой подается белый шум.

Моделям (10.44)–(10.46) свойственна сравнительно высокая мощность и экономичность, которая заключается в том, что имеющиеся наблюдения расходуются на оценивание сравнительно малого числа параметров. Однако они требуют более полной априорной информации о физической сущности рассматриваемых процессов.

Построение параметрической модели включает в себя три этапа:

- 1) идентификация моделей,
- 2) оценивание параметров моделей,
- 3) проверка точности построенных моделей.

Рассмотрим вкратце каждый из этапов.

Идентификация модели. Суть первого этапа состоит в выборе типа модели, который заключается в том, чтобы из общего класса линейных моделей отобрать одну из трех моделей (АР, СС или АРСС) наилучшим образом описывающую исходный случайный стационарный процесс. Основой метода идентификации является

сравнение теоретической автокорреляционной функции с эмпирической, полученной в результате обработки натуральных данных. Действительно, если теоретические автокорреляционные функции для рассматриваемых нами моделей известны, то в результате сравнения их с выборочными автокорреляционными функциями можно выбрать наилучшую модель. Относительно просто это сделать для моделей первого и второго порядка. Так, автокорреляционные функции для данных моделей первого порядка имеют вид:

– модель авторегрессии:

$$R(\tau) = \sigma^2 \alpha_1^\tau; \quad (10.47)$$

– модель скользящего среднего:

$$R(\tau) = \sigma_z^2 \sum_{i=0}^{q-\tau} \beta_i \beta_{j+\tau}; \quad (10.48)$$

– модель авторегрессии – скользящего среднего:

$$R(\tau) = \frac{\sigma_z^2 (1 - \alpha_1 \beta_1)(\alpha_1 - \beta_1)}{1 - \alpha_1^2}. \quad (10.49)$$

Из формулы (10.48) видно, что автокорреляционная функция процесса скользящего среднего обрывается при $\tau = q$. Заметим, что на практике довольно редко используются модели более высокого порядка, чем второй.

Оценивание параметров модели. На данном этапе решаются две следующие задачи: нахождение оптимального порядка выбранной модели и оценка неизвестных коэффициентов модели.

Заметим, что универсального метода нахождения порядка модели не существует. Считается, что наиболее точным методом оценивания параметров является метод максимального правдоподобия. Вследствие его сложности, рассмотрим более простые методы. На наш взгляд, вполне удовлетворительные результаты могут быть достигнуты при минимизации дисперсии остатков (D_ε) выбранной параметрической модели методом наименьших квадратов, т. е. $D_\varepsilon \rightarrow \min$.

Нахождение экстремума D_ε может быть осуществлено пошаговым путем, т. е. последовательно выполняется их расчет, начиная с модели первого порядка. Кроме того, для оценки порядка модели могут быть использованы те или иные критерии. К ним относятся критерии Акаике, Парзена, Шварца-Риссана и др. Приведем в качестве примера критерий Акаике (FRE):

$$FPE(M) = \frac{N + M + 1}{N - M - 1} \left(\frac{P_M}{2(N - M)} \right). \quad (10.50)$$

Следует иметь в виду, что указанные критерии применимы преимущественно в идеализированных условиях, т. е. для очень длинных выборок. К тому же полученные с их помощью оценки порядка модели могут противоречить друг другу.

Проверка точности построенной модели. После оценки всех параметров выбранной модели, необходимо проверить насколько хорошо она согласуется с данными наблюдений, т. е. по существу оценить ее адекватность. С этой целью может быть использован критерий Фишера точно таким же образом, как при проверке адекватности, например, регрессионных моделей (см. разд. 7.4). Кроме того, осуществляется анализ остатков построенной модели по схеме, рассмотренной в разд. 7.5.

Пример 10.7. Одним из наиболее распространенных индексов солнечной активности являются числа Вольфа, которые определяют количество солнечных пятен в видимой полусфере Солнца. Наблюдения за изменениями числа солнечных пятен продолжаются уже более 300 лет. Было установлено, что их изменения имеют циклический характер со средней продолжительностью 11,2 года, причем самый короткий период равен 9 годам, а самый длинный – 13,5 годам. На рис. 10.17 представлен межгодовой ход чисел Вольфа за весь период наблюдений. Нетрудно видеть, что в течение 70 лет вплоть до 1715 г. на Солнце практически полностью отсутствовали пятна. Этот период впоследствии назван в честь его первооткрывателя минимумом Маундера. Кроме того, достаточно четко выделяется положительный тренд в максимумах 11-летнего цикла чисел Вольфа.

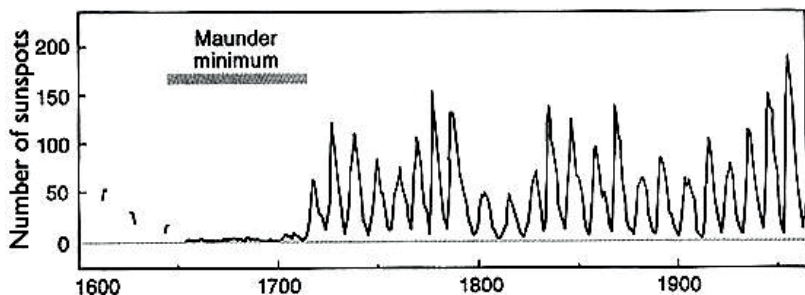


Рис. 10.17. Межгодовой ход чисел Вольфа (числа солнечных пятен)

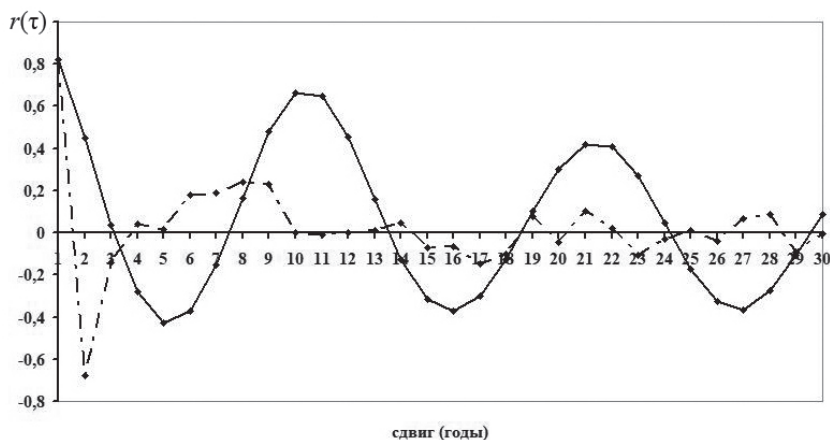


Рис. 10.18. График автокорреляционной (черная кривая) и частной автокорреляционной функций (пунктирная кривая) временного ряда средних годовых чисел Вольфа до сдвига $\tau = 30$ лет

Рассмотрим возможность аппроксимации чисел Вольфа с помощью авторегрессионных моделей за период 1870–2000 гг. ($n = 131$). Среднее значение этого ряда равно 56,7, а среднеквадратическое отклонение $\sigma = 45,3$, т. е. межгодовая изменчивость чисел Вольфа весьма значительна. Вначале этот ряд был подвергнут автокорреляционному анализу. Как видно из рис. 10.18, автокорреляционная функция представляет собой затухающую косинусоиду с периодом 11 лет.

Иной характер имеет частная автокорреляционная функция, которая принципиально отличается от обычной АФ. Ее максимумы отмечаются на сдвигах $\tau = 2$ и $\tau = 9$ лет, причем 11-летний цикл отсутствует. Очевидно сильное влияние предшествующих значений коэффициентов автокорреляции на их последующие оценки. Далее для временного ряда чисел Вольфа рассчитывались авторегрессионные модели (10.38) до 11-го порядка включительно. Коэффициенты в этих моделях определялись методом наименьших квадратов. В таблице 10.5 приводятся среднеквадратические ошибки моделей σ_{AP} и оценки коэффициента детерминации R^2_{AP} характеризующего степень приближения вычисленных значений чисел Вольфа к исходным данным.

Как следует из таблицы 10.5, модель $AP(p = 1)$ описывает уже более половины дисперсии исходного ряда, причем резкий скачок в точности происходит для модели $AP(p = 2)$, для которой

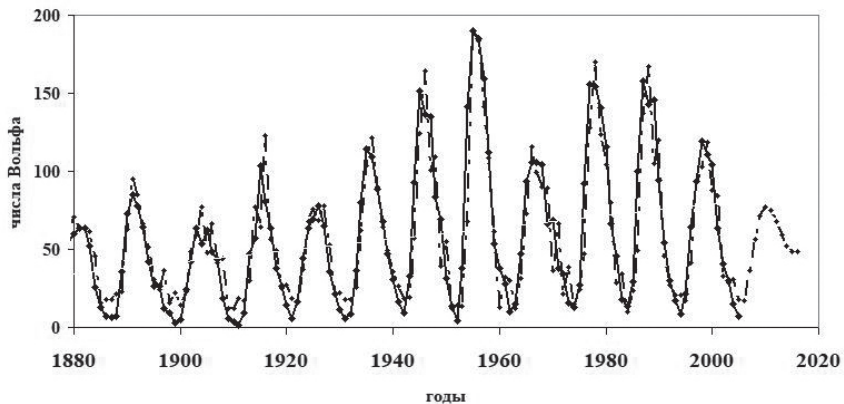
Таблица 10.5.

**Оценки статистических параметров авторегрессионных моделей
(среднеквадратической ошибки σ_{AP} и коэффициента детерминации R^2_{AP})
от 1 до 11 порядка**

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R^2_{AP}	0,67	0,87	0,85	0,85	0,85	0,85	0,86	0,87	0,89	0,89	0,90
σ_{AP}	25,8	15,1	17,6	17,6	17,6	17,5	16,9	16,5	15,1	15,1	15,0

среднеквадратическая ошибка уменьшается до $\sigma_{AP} = 15,1$, а коэффициент детерминации, наоборот, повышается до $R^2_{AP} = 0,87$. Далее точность описания чисел Вольфа несколько ухудшается и только к 9-му шагу она выходит на уровень $AP(p = 2)$. На рис. 10.19 дается сопоставление исходного ряда чисел Вольфа с их вычисленными

а)



б)

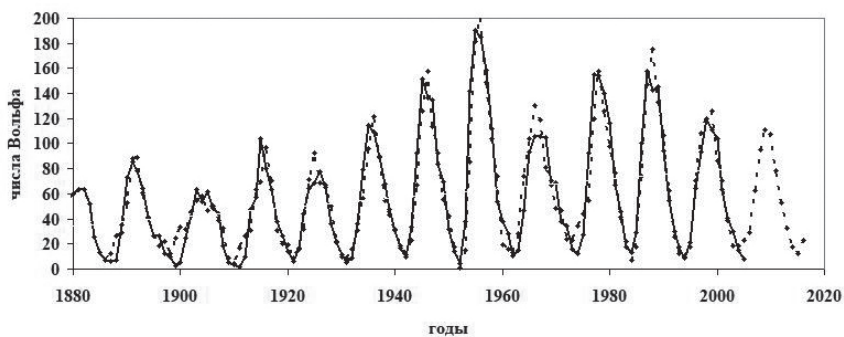


Рис. 10.19. Сопоставление исходного ряда чисел Вольфа с их вычисленными значениями по моделям $AP(p = 2)$ (а) и $AP(p = 11)$ (б)

значениями по моделям $AP(p = 2)$ и $AP(p = 11)$. Нетрудно видеть, что вычисленные значения чисел Вольфа по обоим моделям почти не отличаются друг от друга.

В диагностических расчетах с достаточной для практических целей точностью можно ограничиться использованием $AP(p = 2)$. Однако с точки зрения прогноза модели $AP(p = 2)$ недостаточно. Как видно из рис. 10.19-а, модель $AP(p = 2)$ существенно занижает прогностические значения чисел Вольфа. Более точно описывает их модель $AP(p = 11)$.

10.8. Понятие о цепях Маркова

Рассмотрим случайные процессы с дискретным временем и конечным множеством состояний. При этом под множеством состояний будем иметь в виду определенные классы (градации, типы, группы и т.п.), на которые могут быть подразделены гидрометеорологические процессы или явления. Так, многие характеристики нетрудно разбить на 3 градации: норма, выше нормы, ниже нормы. Легко выделяется также такое естественное множество состояний как типы атмосферной циркуляции, типы ледового режима и т.д.

Последовательность событий $A_i^{(t)}$ называют цепью Маркова k -того порядка, если для каждого момента времени t условная вероятность события $A_i^{(t+1)}$ зависит только от того, какие события произошли в k предыдущих моментах времени и не зависит от поведения последовательности до момента $t - k + 1$, т. е.

$$P\{A_j^{(t+1)} | A_i^{(t)}, A_{i_1}^{(t-1)}, A_{i_2}^{(t-2)}, \dots\} = \{A_j^{(t+1)} | A_i^{(t)}, \dots, A_{i_{k-1}}^{(t-k+1)}\}. \quad (10.51)$$

Отсюда следует, что для цепи Маркова первого порядка, называемой *простой марковской цепью*, для каждого момента времени t справедливо равенство:

$$P\{A_j^{(t+1)} | A_i^{(t)}, A_{i_1}^{(t-1)}, A_{i_2}^{(t-2)}, \dots\} = P\{A_j^{(t+1)} | A_i^{(t)}\}. \quad (10.52)$$

Это означает, что для *простой цепи Маркова* вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в настоящий момент и не зависит от того, каким образом система пришла в это состояние. Для такой случайной последовательности имеется автокорреляционная связь только между соседними членами ряда. Если вероятность системы в настоящий момент зависит от некоторого множества состояний системы в предшествующие

моменты времени, то имеем *сложную цепь Маркова*. Это означает, что существует автокорреляционная связь между различными сечениями рассматриваемого процесса, начиная со сдвига $\tau = 1$.

В общем случае свойство случайного процесса зависеть только от ближайшего прошлого называют *марковским*. Простейшим объектом, обладающим таким свойством, является *однородная простая цепь Маркова*, у которой условная вероятность не зависит от времени:

$$P\{A_j^{(t+1)} | A_i^{(t)}\} = P\{A_j^{(t+1+\Delta t)} | A_i^{(t+\Delta t)}\}. \quad (10.53)$$

Другими словами, однородной называют такую цепь Маркова, если условная вероятность перехода из состояния i в состояние j не зависит от номера испытания. Эту условную вероятность перехода за один шаг из i -го состояния в j -е обозначают P_{ij} . Переходные вероятности P_{ij} образуют матрицу перехода системы за один шаг:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} P_{11}, & P_{12}, & \dots, & P_{1k} \\ P_{21}, & P_{22}, & \dots, & P_{2k} \\ \dots & \dots & \dots, & \dots \\ P_{k1}, & P_{k2}, & \dots, & P_{kk} \end{pmatrix}. \quad (10.54)$$

Отметим, что в обозначении переходной вероятности P_{ij} первый индекс указывает номер предшествующего, а второй – номер последующего состояния. Тогда P_{11} означает вероятность «перехода» из первого состояния в первое, а P_{12} – вероятность перехода из первого состояния во второе.

Можно показать, что матрица перехода за два шага из i -того состояния в j -тое равна произведению двух матриц π_1 перехода за один шаг, т. е.

$$\pi_2 = \pi_1 \times \pi_1 = \pi_1^2. \quad (10.55)$$

Тогда при переходе за n шагов имеем следующую матрицу перехода:

$$\pi_n = \pi_1^n. \quad (10.56)$$

Итак, зная матрицу переходов за один шаг, нетрудно найти вероятности перехода между состояниями за любое количество шагов.

Матрицы перехода обладают тем свойством, что все их элементы неотрицательны, а суммы вероятностей по любой строке равны единице, т. е.

$$\sum_{j=1}^k P_{ij} = 1 \quad (i=1,2,\dots,k).$$

Иногда матрицы, обладающие таким свойством, называются *стохастическими*. Зная матрицу перехода за n шагов и начальное положение A_i , можно найти вероятность находиться на шаге n в состоянии A_j . Обозначим через e_i вектор-строку, состоящую из нулей и единиц, которая находится на i -том месте. Тогда для каждого i можно получить в матричной форме следующее соотношение:

$$e_i \pi_{(n-1)} \pi_1 = e_i \pi_n = e_i \pi_1^i, \quad (10.57)$$

которое определяет распределение цепи Маркова по состояниям A_j через n шагов после выхода из состояния A_i . При этом если для некоторого n все элементы матрицы π_1^i положительны, то вероятность находиться в состоянии A_j для цепи Маркова при $n \rightarrow \infty$ не зависит от начального состояния A_i и удовлетворяет уравнению $p = p\pi_1$, где

p_j – вектор-строка с неотрицательными элементами $p_j \left(\sum_{j=1}^k p_j = 1 \right)$.

Вектор p называют *предельным распределением*, смысл которого состоит в следующем. При $n \rightarrow \infty$ цепь Маркова входит в устойчивый режим, характеризующийся следующими свойствами:

1) среднее время пребывания в состоянии A_j равно $p_j T$, где T – достаточно длительный промежуток времени;

2) среднее время возвращения в состояние A_j равно $1/p_j$.

Пример 10.8. В зоне переменного увлажнения межгодовая изменчивость речного стока практически полностью определяется количеством выпавших осадков. Поскольку чередование засушливых и дождливых лет обычно крайне нерегулярно и не поддается оценке стандартными статистическими методами, то воспользуемся для этой цели построением цепи Маркова. Прежде всего, была выбрана одна из рек в бассейне Дона, межгодовую изменчивость стока которой было решено разделить на четыре устойчивых состояния: экстремально низкий сток, сток ниже нормы, сток выше нормы, экстремально высокий сток. Из анализа экспериментальных данных было установлено, что за первой градацией (экстремально низкий сток) никогда не следует четвертая (экстремально высокий сток), а за четвертой – первая. Все остальные переходы возможны, причем:

– из первой градации можно попасть в каждую из средних градаций вдвое чаще, чем опять в первую. Следовательно, вероятности

переходов из первой градации составляет $P_{11} = 0,2, P_{12} = 0,4, P_{13} = 0,4, P_{14} = 0$;

– из четвертой градации переходы во вторую и третью бывают в четыре и пять раз чаще, чем возвращение в четвертую градацию, поэтому $P_{41} = 0, P_{42} = 0,4, P_{43} = 0,5, P_{44} = 0,1$;

– из второй градации переход в другие градации может быть только реже: в первую – в два раза, в третью – на 25 %, в четвертую – в четыре раза, чем переход во вторую. В результате имеем $P_{21} = 0,2, P_{22} = 0,4, P_{23} = 0,3, P_{24} = 0,1$;

– из третьей градации переход во вторую столь же вероятен, как и возвращение в третью, а переходы в первую и четвертую градацию случаются в четыре раза реже, поэтому $P_{31} = 0,1, P_{32} = 0,4, P_{33} = 0,4, P_{34} = 0,1$.

Таким образом, матрица вероятностей переходов для речного стока имеет вид:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,4 & 0 \\ 0,2 & 0,4 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,4 & 0,4 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,5 & 0,1 \end{pmatrix}. \quad (10.51)$$

Действительно, как мы видим из формулы (10.51), сумма вероятностей события в каждой строке равна 1. Найдем теперь среднее время между засухами, определяющими экстремально низкий сток, и избыточным увлажнением, формирующим экстремально высокий сток. Для этого определим предельное распределение для цепи Маркова с матрицей вероятностей переходов (10.51). Очень засушливые и дождливые годы, как правило, не повторяются, поэтому $P_{14} = P_{41} = 0$. Нетрудно проверить, что все элементы матрицы π_1^2 положительны.

Предельные вероятности засушливых и дождливых лет составляют 0,15 и 0,08. Учитывая, что периодичность возвращения системы в состояние A_j равна $1/p_j$, получаем, что периодичность засушливых лет в среднем составляет 6–7 лет, а дождливых – 12–13 лет.

Глава 11. Спектральный анализ

11.1. Понятие спектральной плотности

Понятие спектра нашло широкое применение в различных областях науки, особенно в физике и радиотехнике. Так, например, оптический спектр показывает вклад волн различной частоты или длины в энергию источника света. В гидрометеорологии понятие спектра широко используется для выделения скрытых периодичностей временного ряда, для исследования закономерностей его частотной структуры, при моделировании и прогнозе стационарных процессов.

Спектральное представление случайного стационарного процесса является обобщением гармонического анализа периодических функций на случайные процессы. Большой вклад в развитие этого метода внесли Винер, Колмогоров, Хинчин, Яглом и другие исследователи.

Как было показано А.Я. Хинчиным, если применять преобразование Фурье не к реализации случайного процесса, а к его автокорреляционной функции, которая является строго затухающей, то получается математически корректное выражение для пары преобразований Фурье:

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (11.1)$$

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (11.2)$$

где $S_x(\omega)$ – *спектральная плотность* (энергетический спектр, плотность спектра мощности и т.п.); $e^{-i\omega\tau}$ – показательная функция мнимого аргумента. Формула (11.1) – *прямое преобразование Фурье*, формула (11.2) – *обратное преобразование Фурье*.

Физический смысл $S(\omega)$ состоит в том, что она означает *плотность дисперсии стационарной случайной функции на данной частоте*, т. е.

$$S(\omega_k) = \frac{\sigma^2}{\omega_k}.$$

Сказанное можно пояснить следующим образом. Если исследуемый процесс представляет собой гармоническую функцию

времени с частотой ω и амплитудой A , то в этом случае дисперсия процесса равна $A^2/2$. В более общем случае, когда процесс представляет собой совокупность (смесь) нескольких гармоник с частотами ω_i и амплитудами A_i , то дисперсия такого процесса запишется выражением:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n A_i^2, \quad (11.3)$$

где n – число гармоник. Такое разложение общей дисперсии процесса на ее отдельные составляющие, соответствующие выделенным частотам, и оценка их значимости представляют собой сущность спектрального анализа.

Полагая в формуле (11.2) $\tau = 0$, получаем выражение для дисперсии случайной функции:

$$D_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (11.4)$$

Довольно часто вместо спектральной плотности в расчетах используется *нормированная спектральная плотность, представляющая распределение плотности дисперсии по частотам в долях единицы*, т. е.

$$s_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega} = \frac{S_x(\omega)}{D_x}$$

или

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (11.5)$$

Естественно, нормированная корреляционная функция и нормированная спектральная плотность также являются взаимными преобразованиями Фурье. Заметим, что спектральная плотность – величина размерная, ее размерность соответствует квадрату случайной величины. В то же время нормированная спектральная плотность уже представляет безразмерную величину.

Свойства спектральной плотности (СП)

Свойство 1. СП – четная функция, т. е. $S_x(\omega) = S_x(-\omega)$.

Свойство 2. СП является неотрицательной величиной, т. е. $S_x(\omega) \geq 0$.

Используя формулу Эйлера $e^{-i\omega\tau} = \cos\omega\tau - i\sin\omega\tau$ и учитывая четность $S_x(\omega)$ и $R_x(\tau)$, для стационарного случайного процесса можно записать:

$$R_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (11.6)$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (11.7)$$

Аналогичные формулы могут быть записаны для $s_x(\omega)$ и $r_x(\tau)$. Если нанести значения $S_x(\omega)$ на график, ось абсцисс которого представляют частоты ω , то получим кривую спектральной плотности. При этом сам график обычно называется *спектрограммой*. Так как $D_x = R_x(0)$, то дисперсия есть удвоенная площадь, ограниченная кривой СП при $\omega \geq 0$ или площадь, ограниченная кривой СП на всем интервале $(-\infty, \infty)$. Для кривой нормированной спектральной плотности площадь, лежащая под ней на интервале $(-\infty, \infty)$, равна единице.

11.2. Аналитическое оценивание спектральной плотности

В общем случае возможно аналитическое и численное оценивание спектральной плотности (рис. 11.1). Аналитическое вычисление СП используется, если известно соответствующее истинное выражение автокорреляционной функции (АФ).

Рассмотрим спектральные плотности для некоторых простых вариантов задания АФ.

1. Нормированная автокорреляционная функция имеет вид $r(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ при $\alpha > 0$, где α — коэффициент затухания. График этой функции приведен на рис. 11.2-а для трех значений $\alpha = 0,5; 1; 3$. Нетрудно видеть, что АФ представляет собой монотонно затухающую положительно определенную кривую, убывание которой зависит от величины α . Это означает, что корреляционная связь между сечениями случайной функции $X(t)$ и $X(t + \tau)$ при одном и том же интервале τ уменьшается с ростом α . Интервал корреляции, равный $\tau_{\text{кор}}^{(1)} = \alpha^{-1}$, характеризует скорость затухания корреляционной связи. Подставив выражение для АФ в формулу (11.5), получим:

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}. \quad (11.8)$$



Рис. 11.1. Способы оценивания спектральной плотности

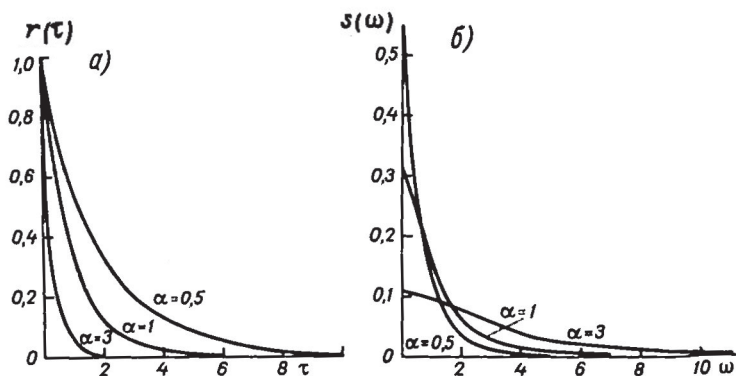


Рис. 11.2. График автокорреляционной функции $r(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}$ (а) и ее спектральной плотности (б)

Спектр вида (11.8) характерен для случайных процессов, интенсивность которых монотонно убывает с увеличением частоты (рис. 11.2-б), причем, чем меньше α , тем быстрее убывает кривая СП. Это означает, что преобладающее значение в спектре имеют малые частоты. Случайный процесс такого типа называется *узкополосным*, так как его энергия сосредоточена в узкой полосе частот. Для больших значений α СП с увеличением частоты убывает уже весьма медленно. Такой процесс называется *широкополосным*. Максимум спектральной плотности (11.8) находится на частоте $\omega = 0$ и равен $1/\pi\alpha$. При $\alpha \gg \omega$ кривая спектральной плотности выравнивается и переходит в прямую линию, параллельную оси частот и находящуюся от нее на расстоянии $1/\pi\alpha$.

Стационарный случайный процесс, для которого СП постоянна во всем диапазоне частот $s_x(\omega) = \text{const}$, представляет «белый шум» по аналогии с белым светом, у которого спектральный состав примерно однороден.

2. Нормированная автокорреляционная функция задана по затухающему косинусоидальному типу $r(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta \tau$ при $\alpha > 0$, $\beta > 0$, где β – частота колебания АФ. График этой функции представлен на рис. 11.3-а для трех случаев: кривая I – $\alpha = 0,5$, $\beta = 2$; кривая II – $\alpha = 1$, $\beta = 1$; кривая III – $\alpha = 2$, $\beta = 0,5$. Из данного рисунка видно, что при малой величине отношения α/β (кривая I, $\alpha/\beta = 0,25$) график АФ близок к гармоническим колебаниям частоты ω . Если подставить данное выражение АФ в формулу (11.5), то после некоторых преобразований получим:

$$s_x(\omega) = \frac{\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{\pi \left[(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)^2 - 4\omega^2\beta^2 \right]}. \quad (11.9)$$

Спектр вида (11.9) существенно зависит от отношения α/β . При малой величине отношения $\alpha/\beta = 0,25$ спектральная плотность имеет ярко выраженный максимум на частоте $\omega = \beta$ (рис. 11.3-б). При $\alpha \rightarrow 0$ максимум сужается, и в предельном случае при $\alpha = 0$ спектр представляет прямую линию бесконечной длины, параллельную оси ординат.

Процесс, характеризуемый таким спектром, является гармоническим колебанием бесконечной длительности. С увеличением α/β ускоряется затухание корреляционной функции, вследствие чего максимум СП становится более размытым. При больших значениях α/β (кривая III, $\alpha/\beta = 4$) корреляционная функция отличается от нуля

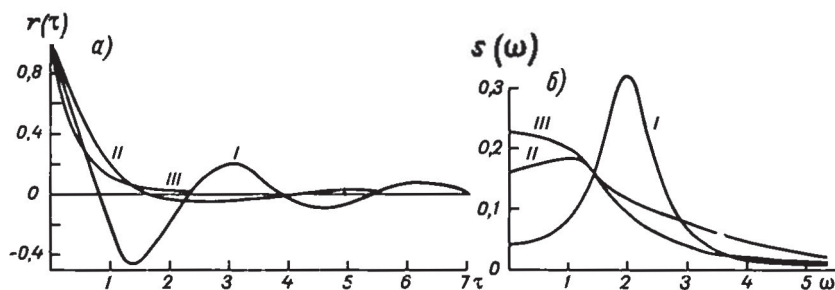


Рис. 11.3. График автокорреляционной функции $r(\tau) = e^{-a|\tau|}\cos\beta\tau$ (а) и ее спектральной плотности (б)

только при малых значениях τ . Поэтому СП с ростом частоты изменяется медленно, оставаясь на значительном диапазоне близкой к начальному значению $s_x(\omega) = 0$.

К сожалению, во многих случаях не представляется возможным получить аналитические оценки СП, поскольку истинные оценки АФ, как правило, либо вообще неизвестны, либо имеют настолько сложный вид, что не поддаются интегрированию.

11.3. Понятие о частотной весовой функции

Так как на практике мы обычно имеем дело с выборочными оценками АФ, то соответственно оценки СП также являются выборочными, т. е.

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^T R_x^*(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (11.10)$$

где $S_x^*(\omega)$ – выборочная оценка СП, T – конечная реализация случайного процесса.

Можно показать, что выборочная оценка $S_x^*(\omega)$ является несмещенной, но оказывается несостоятельной, поскольку дисперсия этой оценки не стремится к нулю при стремлении T к бесконечности. Поэтому возникает задача устранения несостоятельности оценок $S_x^*(\omega)$, которая в общем случае не имеет аналитического решения и обычно сводится к каким-либо методам оптимизации. Вследствие этого возникает необходимость в построении оптимальных оценок СП, которые могут быть получены, например, методами, основанными на предварительном сглаживании оценок АФ.

Проанализируем выборочную функцию $R_x^*(\tau)$, равную истинному значению $R_x(\tau)$ при $|\tau| \leq \tau_m$ и равную нулю при $|\tau| > \tau_m$, где τ_m – точка отсечения АФ. Другими словами, точка отсечения АФ – это максимальный сдвиг τ , до которого осуществляется расчет АФ. Функцию $R_x^*(\tau)$ можно рассматривать как произведение истинной функции $R_x(\tau)$ на некоторую функцию $\lambda(\tau)$, называемую частотной весовой функцией (временным или корреляционным окном):

$$R_x^*(\tau) = \lambda(\tau)R_x(\tau). \quad (11.11)$$

При этом идеальная частотная весовая функция должна обладать следующим свойством:

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\tau| \leq \tau_m \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_m \end{cases}. \quad (11.12)$$

Подставив (11.11) в (11.10), получим:

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^T \lambda(\tau) R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (11.13)$$

Нетрудно показать, что выборочная оценка СП может быть представлена как произведение истинных оценок СП на спектр весовой функции, т. е.

$$S_x^*(\omega) = S_{\lambda(\tau)} S_x(\omega), \quad (11.14)$$

где спектр функции $\lambda(\tau)$, называемый иногда спектральным окном, определяется по следующей формуле:

$$S_{\lambda(\tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_m}^{\tau_m} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sin \omega \tau_m}{\pi \omega}. \quad (11.15)$$

Итак, смысл функции $\lambda(\tau)$ состоит в том, что с ее помощью осуществляется сглаживание оценок АФ. При этом способ сглаживания определяется только выбором функции $\lambda(\tau)$. В связи с этим возникает задача такого подбора $\lambda(\tau)$, чтобы выборочные оценки СП были бы наиболее близкими к истинным оценкам СП. К сожалению, данная задача осложняется тем, что истинный вид АФ в формуле (11.13) обычно неизвестен. Поэтому на практике выборочную оценку СП приходится рассчитывать по выборочной оценке АФ:

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_m}^{\tau_m} \lambda(\tau) R_x^*(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (11.16)$$

В формуле (11.16) частотная функция $\lambda(\tau)$ и точка отсечения (среза) АФ τ_m подбираются таким образом, чтобы удовлетворять некоторому выбранному критерию оптимальности. В качестве критерия используется, например, минимизация средней квадратической ошибки $S_x^*(\omega)$, характеризующей разброс оценок СП около их математического ожидания. Однако осуществить это довольно сложно уже по той причине, что истинные значения СП, как упоминалось выше, обычно неизвестны.

Другим осложняющим обстоятельством является тот факт, что формула (11.12) характеризует идеальную частотную функцию. К сожалению, в действительности добиться выполнения этого условия практически не удастся. В настоящее время известно значительное число различных видов весовых функций, получивших применение в практических расчетах. В гидрометеорологии, например, довольно часто используются функции Парзена, Бартлетта, Тьюки, Хэмминга.

Функция Бартлетта:

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} \frac{1-|\tau|}{\tau_m} & \text{при } |\tau| \leq \tau_m \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_m \end{cases} \quad (11.17)$$

Функция Хемминга:

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 0,54 + \frac{0,46 \cos \pi \tau}{\tau_m} & \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_m \\ 0 & \text{при } \tau > \tau_m \end{cases} . \quad (11.18)$$

Функция Парзена:

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{6\tau^2}{\tau_m} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_m}\right) & \text{при } 0 \leq \tau < \frac{\tau_m}{2} \\ 2 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_m}\right)^3 & \text{при } \frac{\tau_m}{2} \leq \tau \leq \tau_m \\ 0 & \text{при } \tau > \tau_m \end{cases} . \quad (11.19)$$

Существует также целый ряд других весовых функций, сведения о которых можно найти в специальной литературе.

Как видно из приведенных формул, значения $\lambda(\tau)$, а, следовательно, и оценки СП определяются выбором τ_m . При этом в зависимости от выбора величины τ_m будет происходить смещение оценок СП при малых значениях τ_m и существенное увеличение дисперсии оценок при больших значениях τ_m . Очевидно, при малых значениях τ_m в формуле (11.18) выборочные оценки АФ не очень заметно отличаются от истинных оценок АФ. При $|\tau| > \tau_m$ принимается условие $R_x^*(\tau) = 0$, хотя в действительности АФ может существенно отличаться от нуля. В результате происходит появление систематической ошибки, вызывающей смещение оценки $S_x^*(\omega)$.

Увеличение τ_m приводит к уменьшению этой систематической ошибки, однако при этом одновременно происходит увеличение различий между выборочными и истинными оценками АФ. Вследствие этого повышается дисперсия оценок $S_x^*(\omega)$, что особенно заметно при уменьшении длины исходного ряда. В результате возникает очевидное противоречие, обусловленное выбором величины τ_m при неизменной длине выборки. Так, с уменьшением τ_m возрастает достоверность (эффективность) оценки спектра, но увеличивается его сглаженность и, следовательно, уменьшается подробность описания исходного процесса. Наоборот, с увеличением τ_m увеличивается количество пиков, т. е. возрастает степень подробности описания исходного процесса, однако при этом уменьшается эффективность оценок спектра. Таким образом, выигрывая в одном, мы всегда проигрываем в другом.

Характерной особенностью практически всех частотных весовых функций является то, что вследствие сглаживания автокорреляционных оценок (весовая функция Хэмминга может приводить даже к появлению отрицательных ординат спектра) происходит искажение оценок спектральной плотности, которое в некоторых случаях может быть весьма существенным. Но поскольку истинные оценки спектра, как правило, неизвестны, то очень трудно определить и возможные погрешности за счет введения весовой функции.

Из результатов численных расчетов следует, что оценки спектральной плотности значительно больше зависят от величины τ_m , чем от вида корреляционного окна. Однако выбор τ_m , вообще говоря, представляет собой не такую уж простую задачу. Естественно, что τ_m должна зависеть от длины реализации случайного процесса. Для получения надежных ошибок $s(\omega)$ обычно принимается

$\tau_m = (0,1-0,3)N$. Но поскольку заранее нельзя указать оптимальное значение τ_m , то на практике этот вопрос решается экспериментальным путем, т. е. заданием различных значений τ_m и сравнением полученных спектров. Это позволяет определить, какие особенности спектра являются закономерными, т. е. присущими исследуемому процессу.

11.4. Численное оценивание спектральной плотности

В настоящее время известно довольно много численных методов оценки СП. Рассмотрим здесь только наиболее часто используемые методы в практических расчетах.

1. Прежде всего, это метод, предложенный Блэкманом и Тьюки (1958), который заключается в последовательном оценивании автокорреляционной функции и преобразовании Фурье достоверной части коррелограммы с какой-либо из весовых функций, обеспечивающей получение статистически значимых оценок СП. Данный метод в настоящее время представляет собой в основном исторический интерес.

Поскольку в большинстве случаев автокорреляционная функция реальных гидрометеорологических процессов очень трудно поддается точной аппроксимации, то в практических расчетах интеграл (11.3) обычно заменяют суммированием с некоторым верхним пределом m , называемым длиной реализации спектра или *максимальным сдвигом*:

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=1}^m r(\tau) \cos(\omega\tau) \Delta\tau. \quad (11.20)$$

Существует целый ряд численных методов аппроксимации выражения (11.20). Например, официальное признание получил метод, рекомендованный Всемирной метеорологической организацией, согласно которому:

$$s(i) = \frac{r_0}{m} + \frac{2}{m} \sum_{\tau=1}^{m-1} \left[r_{\tau} \cos\left(\frac{360}{2m} i\tau\right) \right] + (-1)^m \frac{r_m}{m}, \quad (11.21)$$

где i – номер гармоники ($i = 1, 2, \dots, n$); m – максимальный сдвиг; r_0 и r_m – значения $r(\tau)$ при $\tau = 0$ и $\tau = m$. Значения s_0 и s_m нужно уменьшить в 2 раза. Заметим, что период колебаний и номер гармоники связаны между собой соотношением $\theta = 2m/i$. Отсюда период

первой гармоники принимается равным $2m$, второй – m , третий – $2m/3$ и т.д.

При оценках спектральной плотности приходится считаться с тем, что каждая ее ордината рассчитывается со значительной ошибкой. Это обусловлено, с одной стороны, ошибками расчета АФ, в том числе выбором точки ее среза, а с другой – неопределенностью выбора частотной весовой функции, ее ошибками и ошибками численной реализации спектра.

Заметим, что должна существовать взаимосвязь между m и τ_m , причем $m \leq \tau_m$. В численных расчетах обычно принимается $m = \tau_m$. В этом случае, задавая лишь один параметр (более удобным представляется τ_m), нетрудно рассчитать оценки спектральной плотности с использованием любой частотной функции.

Следует иметь в виду, что кривые СП, рассчитанные по рядам наблюдений, обычно имеют много пиков, из которых большая часть является чисто случайной и должна быть исключена из анализа. Поэтому весьма важной является задача выделения достоверных пиков.

В качестве первого приближения при построении доверительных интервалов для значений спектральной плотности используется метод Тьюки. Им было показано, что для случайной выборки, подчиняющейся нормальному закону, распределение выборочных спектральных оценок по отношению к спектру соответствующей генеральной совокупности должно соответствовать распределению χ^2 , деленному на число степеней свободы v . Величина v определяется как:

$$v = \frac{2N - \frac{m}{2}}{m}. \quad (11.22)$$

Для нахождения χ^2/v составлена специальная таблица, входными параметрами для которой являются уровень значимости и число степеней свободы (таблица 11.1). Доверительные интервалы составляют относительно среднего спектра:

$$S_0(\omega) = \sum_{\omega=0,01}^{2\pi} \frac{S(\omega)}{N} \quad (11.23)$$

по следующей формуле:

$$S_0(\omega) - \frac{\chi^2}{v} < S(\omega) < S_0(\omega) + \frac{\chi^2}{v}. \quad (11.24)$$

Доверительные границы χ^2/ν оценок спектральной плотности

Число степеней свободы, ν	5 %	10 %	90 %	95 %
2	2,99	2,30	0,10	0,05
3	2,60	2,08	0,20	0,12
4	2,37	1,94	0,26	0,18
5	2,21	1,85	0,32	0,23
6	2,10	1,77	0,37	0,27
8	1,94	1,68	0,44	0,34
10	1,88	1,60	0,49	0,39
12	1,75	1,53	0,53	0,43
15	1,66	1,48	0,57	0,48
20	1,51	1,42	0,62	0,54
30	1,46	1,34	0,69	0,62
50	1,34	1,26	0,75	0,69
100	1,22	1,18	0,82	0,77
200	1,16	1,14	0,87	0,83

В качестве уровня значимости используют обычно $\alpha = 5 \%$ и $\alpha = 10 \%$. Как показывают результаты расчетов, чем выше оценка СП и чем длиннее исходный ряд, тем более узким становится доверительный интервал.

Кроме того, целесообразно дополнительно на график наносить оценки СП белого и красного шумов. Как известно, белый шум нормированной спектральной плотности определяется по формуле:

$$s_{\text{бш}}(\omega) = \frac{\Delta t}{2\pi}. \quad (11.25)$$

Для СП, рассчитанной по $R(\tau)$, необходимо данное выражение умножать на величину дисперсии.

Кривая СП для красного шума вычисляется по формуле:

$$s_{\text{кш}}(\omega) = s_0(\omega) \frac{1 - r_1^2}{1 + r_1^2 - 2r_1 \cos\left(\frac{\pi}{m}\right)}, \quad (11.26)$$

где r_1 – значение автокорреляционной функции при сдвиге $\tau = 1$. Как видно из формулы (11.26), кривая СП представляет затухающую экспоненту.

Поведение выборочной кривой СП относительно теоретических оценок позволяет дать более полную интерпретацию частотной структуры исследуемого случайного процесса.

На рис. 11.4 представлены графики СП, рассчитанные для вертикальных смещений морского уровня в северо-восточной части Черного моря вблизи г. Геленджик, исходные данные для которого получены с помощью измерений на волномерном буре с дискретностью 0,78 с. Всего длина исходного ряда составляет $N = 1500$ значений уровня. Оценки СП основаны на двух реализациях АКФ: первая – $\tau_m = 250$ (рис. 11.4-а), вторая – $\tau_m = 50$ (рис. 11.4-б). Как видно из рис. 11.4-а, спектрограмма характеризуется ярко выраженным пиком на частоте $\omega = 0,112$ цикл/0,78 с, что соответствует периоду $\tau = (1/0,112)0,78 = 6,96$ с, а также еще 2 значительно более мелкими пиками. С уменьшением длины АКФ, как было указано выше, должна возрастать достоверность оценки спектра и увеличиваться его сглаженность. Действительно, из рис. 11.4-б видно, что кривая СП является более сглаженной по сравнению с рис. 11.4-а. При этом значение СП основного колебания уровня возросло более, чем в полтора раза, но период его почти не изменился ($\tau = 6,50$ с).

2. Вторая вычислительная схема оценивания СП, предложенная Кули и Тьюки в 1965 г., заключается в предварительном вычислении *периодограммы* и последующем ее сглаживании с помощью той или иной весовой функции. Периодограмма рассчитывается непосредственно по исходной реализации эргодического стационарного процесса $X(t)$, заданного на промежутке $[0, T]$, следующим образом:

$$S_x^*(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T X(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2. \quad (11.27)$$

Рассчитанная таким образом периодограмма представляет собой выборочную спектральную плотность, которая получается преобразованием Фурье самой реализации исходного процесса $X(t)$. Доказано, что выборочная оценка $S_x^*(\omega)$ относится к классу несмещенных оценок, но при этом она не является состоятельной, поскольку ее дисперсия не стремится к нулю при стремлении T к бесконечности. При больших значениях T периодограмма носит крайне нерегулярный характер, причем ее значения могут резко меняться даже при малых изменениях длины ряда. Для получения состоятельной оценки периодограммы необходимо произвести ее сглаживание с помощью частотной весовой функции:

$$S_x^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) Q(\omega - \omega_1) d\omega_1 = S_{\lambda(\tau)} S_x(\omega), \quad (11.28)$$

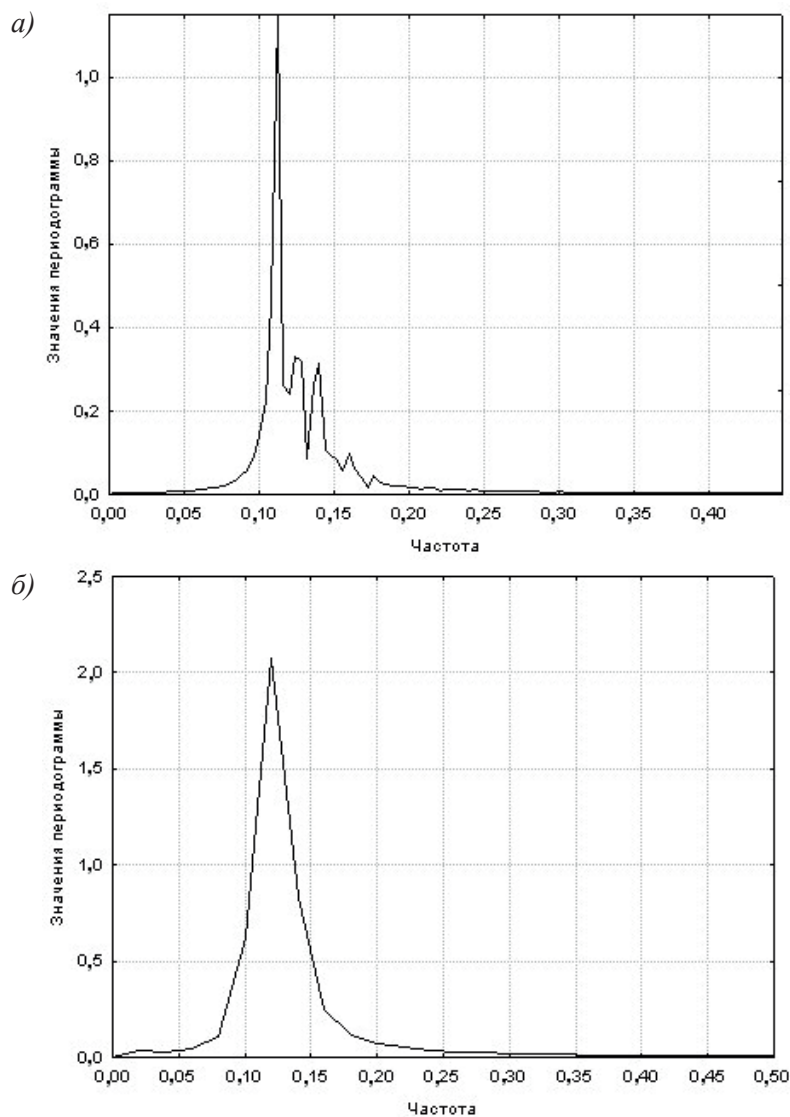


Рис. 11.4. Спектральная плотность уровня моря, рассчитанная по волнограмме с дискретностью 0,78 с ($N = 1500$) при различной длине АКФ (τ_m): а) $\tau_m = 250$, б) $\tau_m = 50$

где $Q(\omega)$ – спектр частотной функции $\lambda(\tau)$. Нетрудно видеть, что выборочные оценки СП, рассчитанные по автокорреляционной функции и периодограмме исходного процесса полностью совпадают. Широкое распространение данной вычислительной схемы стало возможным благодаря предложенному Кули и Тьюки методу дискретного преобразования Фурье, который сводит к минимуму необходимое число операций и обеспечивает наиболее высокую точность. Эта схема, названная *быстрым преобразованием Фурье*, особенно эффективна при анализе очень длинных временных рядов, превышающих несколько сотен или даже тысячу значений. В большинстве ППСП при оценивании СП применяется данный метод.

На рис. 11.5 приводятся периодограмма и оценки спектральной плотности среднегодовых значений температуры воздуха в Центральной Англии за 315 лет (1669–1973 гг.) рассчитанные И.И. Поляком. Оценки периодограммы даны в процентах от оценки дисперсии ряда. Нетрудно видеть, что периодограмма содержит довольно много флуктуаций, имеющих различную мощность на отдельных

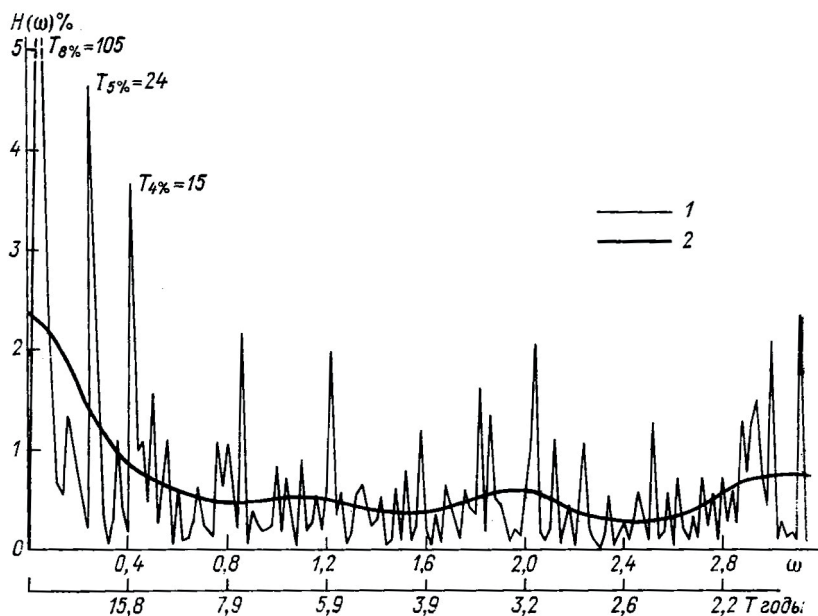


Рис. 11.5. Периодограмма (1) и оценки спектральной плотности (2) среднегодовых значений температуры воздуха в Центральной Англии за период 1669–1973 гг. (по И.И. Поляку)

частотных интервалах. Наиболее мощные из них находятся в низкочастотной части и имеют периоды 105 лет (8 %), 24 года (5 %) и 15 лет (4 %). Вклад в дисперсию остальных флуктуаций еще меньше. Естественно, прежде всего, возникает вопрос об устойчивости выделенных флуктуаций во времени. Длина данного временного ряда позволяет осуществить такую проверку. Как оказалось, при уменьшении длины ряда происходит почти полная перестройка внутренней структуры ряда температуры. Только период 15 лет является относительно устойчивым. Поэтому можно заключить, что отдельные всплески на периодограмме носят в основном случайный характер, их появление и исчезновение во времени обусловлены выборочной изменчивостью изучаемых реализаций. Что касается кривой СП, то она имеет весьма сглаженный вид, обусловленный тем, что используемый интервал предварительной фильтрации временного ряда на основе регрессионного фильтра составлял 35 лет.

На практике вместо оценок СП можно дополнительно воспользоваться *спектральной функцией*, которая представляет собой функцию, характеризующую интегральную долю дисперсии, приходящейся на этот интервал частот, т. е.

$$i_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} S_x(\omega') d\omega' = 2 \int_0^{\omega} S_x(\omega') d\omega'. \quad (11.29)$$

Отсюда легко перейти к нормированной спектральной функции:

$$i_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} s_x(\omega') d\omega' = 2 \int_0^{\omega} s_x(\omega') d\omega'. \quad (11.30)$$

Как следует из формулы (11.30), $i_x(0) = 0$ и, следовательно:

$$i_x(\infty) = 2 \int_0^{\infty} s_x(\omega') d\omega' = 1. \quad (11.31)$$

Таким образом, каждой гармонике $a_k \cos \omega_k \tau$ разложения Фурье корреляционной функции соответствует скачок величины a_k на графике нормированной спектральной функции. Если величину (11.29) умножить на 100, то она будет представлять долю дисперсии, приходящейся на частоты $|\omega'| \leq \omega$, в процентах от общей дисперсии σ^2 . Нормированная спектральная функция белого шума имеет вид:

$$i_x(\omega) = \frac{\Delta t \omega}{\pi} \quad \left(0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{\Delta t} \right). \quad (11.32)$$

Если функцию (11.32) нанести на график, то она будет представлять прямую, соединяющую точки $(0,0)$ и $(\pi/\Delta t, 1)$. Чем больше оценки периодограммы, наносимые на этот график, отклоняются от теоретической прямой белого шума, тем больше вероятность того, что анализируемая реализация случайного процесса не соответствует модели белого шума. При этом степень отклонения от модели белого шума определяется с помощью критерия значимости Колмогорова – Смирнова. С этой целью вокруг теоретической прямой

строится двусторонняя критическая область шириной $\pm \frac{\lambda}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)^{1/2}}$,

где величина λ легко может быть определена из таблицы 4.1 по числу степеней свободы.

Из графика спектральной функции, полученной по тем же наблюдениям температуры воздуха в Центральной Англии за 315 лет (рис. 11.6) видно, что рассчитанные значения спектра выходят за

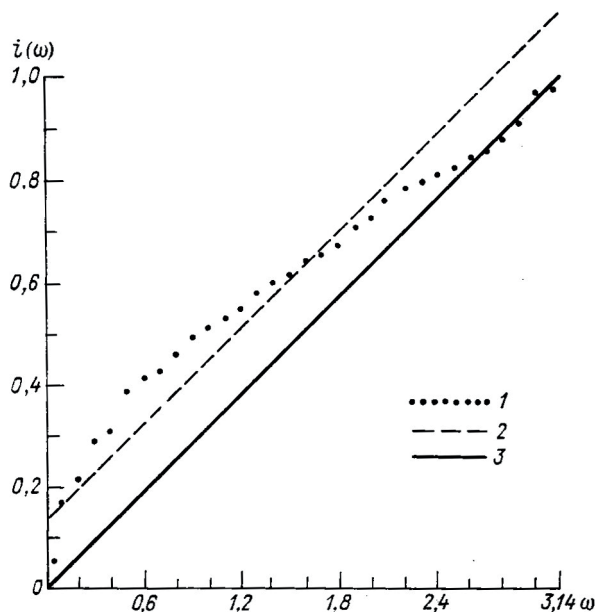


Рис. 11.6. График спектральной функции (1) среднегодовых значений температуры воздуха в Центральной Англии за период 1669–1973 гг. и 99%-ный доверительный интервал (2) для белого шума (3) (по И.И. Поляку)

границы 99%-ного доверительного интервала для белого шума в области низких частот, т. е. данный ряд температуры не является полностью случайным. Отметим, что анализ других временных рядов температуры воздуха также свидетельствует наличие в них низкочастотной изменчивости, очевидно, обусловленной трендовой компонентой. Однако основная доля изменчивости температуры обусловлена белым шумом.

3. В последнее время все большее распространение при оценивании СП получает *метод наибольшей энтропии*, предложенный, очевидно, впервые Бургом в 1967 г. Суть метода заключается в том, что между удельной энтропией и автокорреляционной функцией нормально распределенного стационарного случайного процесса, заданного на конечном промежутке, существует функциональная зависимость. Это позволяет получить оценки СП «методом наибольшей энтропии» (МНЭ), которые таким образом выражают максимум неопределенности по отношению к отсутствующей информации и вместе с тем соответствуют уже имеющейся информации. Было установлено, что МНЭ-оценки СП функционально связаны с параметрической моделью случайного процесса, заданной в виде модели авторегрессии порядка p следующим образом:

$$S(\omega)_{\text{МНЭ}} = \frac{2\sigma_{\alpha}^2}{\left[1 - \sum_{j=1}^p \alpha_j \exp(-2\pi\omega ij)\right]^2}. \quad (11.33)$$

Здесь σ_{α}^2 – дисперсия белого шума в модели АР (10.38); α_j – коэффициенты авторегрессии; p – порядок модели АР. Отсюда следует, что МНЭ-оценка СП сводится к подгонке к исходному временному ряду процесса авторегрессии, определению порядка модели p , ее коэффициентов α_j и дисперсии белого шума в формуле (10.38). Для расчета коэффициентов авторегрессии используются численные схемы Юла-Уокера, Бурга, Бокса-Дженкинса и др. Так, в соответствии со схемой Юла-Уокера:

$$a_{p,p} = \frac{R(p) - \sum_{\tau=1}^{p-1} a_{p-1,\tau} R(p-\tau)}{1 - \sum_{\tau=1}^{p-1} a_{p,\tau} R(\tau)}, \quad (11.34)$$

где $R(\tau)$ – коэффициенты автокорреляции, рассчитанные по традиционной формуле (10.23). Первый коэффициент авторегрессии

принимается равным выборочному коэффициенту автокорреляции с единичным сдвигом, т. е. $a_{1,1} = R(1)$. Для оценки порядка моделей авторегрессии могут применяться критерии Акаике, Парзена и других, приведенные в разделе 10.7.

Достоинством данного метода является возможность оценки СП по сравнительно коротким реализациям. При этом разрешающая способность, т. е. способность разделять близкие по частоте пики СП, превышает разрешающую способность таких методов оценивания СП, как сглаживание периодограммы и максимального правдоподобия. Однако «расплатой» за это является жесткое ограничение временного ряда на стационарность и нормальность, а также неопределенность в выборе порядка авторегрессионной модели. При изменении ее порядка оценки спектра могут существенно меняться.

В качестве примера приведем МНЭ-оценки СП, рассчитанные С.Г. Добровольским для временного ряда среднемесячных аномалий ТПО, полученного на буйковой станции в пункте с координатами 110° з.д. и 0° с.ш. за 1980–1999 гг. (рис. 11.7). Данный ряд относится к числу наиболее важных индексов, характеризующих явление Эль-Ниньо. Действительно, как видно из рис. 11.7, отчетливо выделяется несколько пиков значительных положительных аномалий ТПО: 1982–1983 гг., 1987–1988 гг. и 1998 г., соответствующих развитию явления Эль-Ниньо.

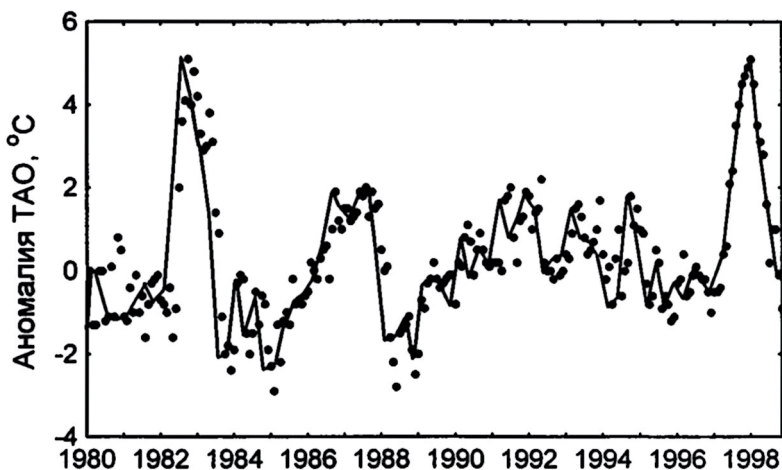


Рис. 11.7. Временной ряд среднемесячных аномалий температуры поверхности океана, полученный на буйковой станции в пункте с координатами 110° з.д. и 0° с.ш. за 1980–1999 гг.



Рис. 11.8. МНЭ-оценки спектральной плотности для временного ряда среднемесячных аномалий температуры поверхности океана с разрешением 3 месяца. Кривая 1 соответствует модели авторегрессии 1-го порядка («красный шум»), кривая 2 – модели 8-го порядка

На рис. 11.8 приведены МНЭ-оценки СП для данного ряда с разрешением 3 месяца. Кривая 1 соответствует модели авторегрессии 1-го порядка («красный шум»), кривая 2 – модели 8-го порядка. Мы видим, что изменение порядка модели довольно существенно изменяет характер СП. Появляются хорошо различимые пики спектральной плотности. Один из них составляет 50 месяцев, а другой – 19 месяцев. Однако оба они не являются статистически значимыми, ибо оказываются меньше ширины 95%-го доверительного интервала относительно кривой красного шума.

МНЭ-анализ СП для временного ряда январских значений индекса Южного колебания за 112 лет, выполненный С.Г. Добровольским (рис. 11.9), также показал, что какие-либо отчетливо выраженные пики СП, выходящие за пределы доверительного интервала, отсутствуют. Таким, образом, если судить о межгодовой изменчивости явления «Южное колебание – Эль-Ниньо» только по результатам МНЭ-оценок СП, то она не имеет каких-либо циклических колебаний и представляет собой чисто стохастический процесс. В то же время расчет спектра методом БПФ уже показывает наличие значимых гармоник.

Разумеется, есть и другие методы оценки СП. Например, метод наибольшего правдоподобия. Но вследствие его довольно сложной вычислительной схемы он на практике используется довольно редко.



Рис. 11.9. МНЭ-анализ спектральной плотности для временного ряда январских значений индекса Южного колебания за 112 лет: 1 – модель «белый шум»; 2 – модель авторегрессии 1-го порядка; 3 – модель авторегрессии 5-го порядка; 4 – модель авторегрессии 7-го порядка

11.5. Виды спектральной плотности временных рядов

В разделе 10.5 были рассмотрены стандартные графики нормированных автокорреляционных функций временных рядов для различных типов гидрометеорологических процессов. Поэтому целесообразно теперь обратиться к анализу выборочных оценок спектральной плотности, вычисленных по этим автокорреляционным функциям. Выборочная оценка нормированной СП теоретической модели белого шума, как уже отмечалось выше, представляет собой прямую линию, параллельную оси ординат и находящуюся от нее на расстоянии $1/\pi$ (рис. 11.10). Это означает, что плотность дисперсии постоянна для всех частот. Поскольку на практике такие спектральные плотности не встречаются, то переходим от теоретической модели к случайному стационарному процессу, развивающемуся по типу модели «белый шум». В этом случае мы получаем такую кривую СП, которая может быть аппроксимирована прямой линией.

Противоположным случаем для модели белого шума является гармоническое колебание, которое представляет собой уже детерминированный процесс. Его спектральная плотность имеет

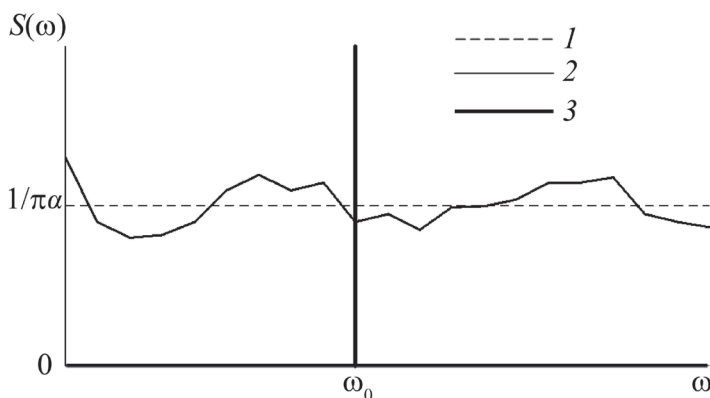


Рис. 11.10. График спектральной плотности теоретической (1) и реальной (2) моделей «белого шума» и гармонического колебания (3)

вид прямой линии, перпендикулярной оси частот и устремленной в бесконечность (рис. 11.10). Естественно, что подобный вид спектральной плотности для гидрометеорологических процессов невозможен. Поэтому даже выборочные оценки спектральной плотности короткопериодных приливных колебаний уровня представляют очень острый пик с узкой шириной.

Для теоретической модели красного шума кривая спектральной плотности имеет вид убывающей экспоненты, причем степень ее «вогнутости» зависит от коэффициента затухания α автокорреляционной функции. Чем меньше величина α , тем быстрее приближается СП к оси частот (рис. 11.11). Переходя от теоретической модели к случайному стационарному процессу, который развивается по типу модели «красный шум», получаем кривую спектральной плотности с множеством мелких пиков, которая аппроксимируется убывающей экспонентой.

Спектральная плотность циклического колебания представляет собой острый пик, соответствующий основной частоте этого колебания. Естественно, чем «сильнее» циклическое колебание, тем острее пик СП. В предельном случае оно стремится к гармоническому колебанию, т. е. к прямой линии. Для слабовыраженного циклического колебания пик спектральной плотности становится размытым (рис. 11.12).

Как уже отмечалось выше, во многих случаях гидрометеорологические характеристики представляют собой совокупность нескольких элементарных составляющих изменчивости. В частности, для

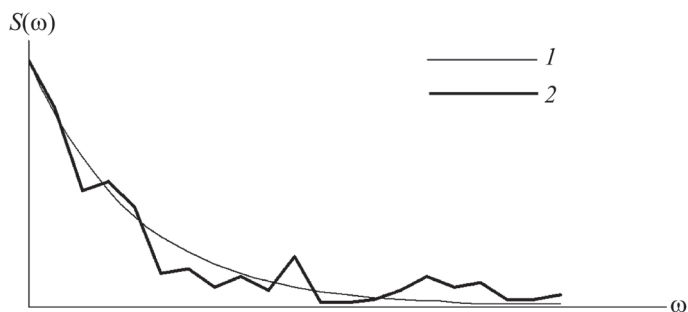


Рис. 11.11. График спектральной плотности теоретической (1) и реальной (2) моделей «красного шума»

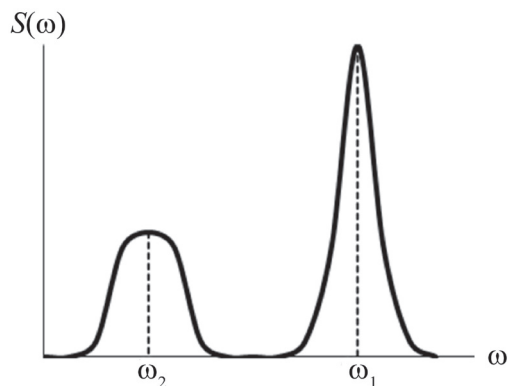


Рис. 11.12. График спектральной плотности циклического колебания

межгодовой изменчивости реальных гидрометеорологических величин характерно наложение случайной изменчивости в виде белого шума на трендовую компоненту. Спектральная плотность трендовой компоненты выражается в виде плавной кривой в области низких частот, затухающей по мере увеличения частоты колебаний, которая постепенно переходит в случайно меняющуюся кривую приблизительно параллельную оси абсцисс (рис. 11.13). Пожалуй, единственное существенное отличие ее от спектральной плотности в виде модели красного шума состоит в том, что затухание кривой спектральной плотности происходит медленнее модели красного шума.

Довольно часто реальная межгодовая изменчивость гидрометеорологических процессов выражается как совокупность тренда, белого шума и циклического колебания. В этом случае выборочная

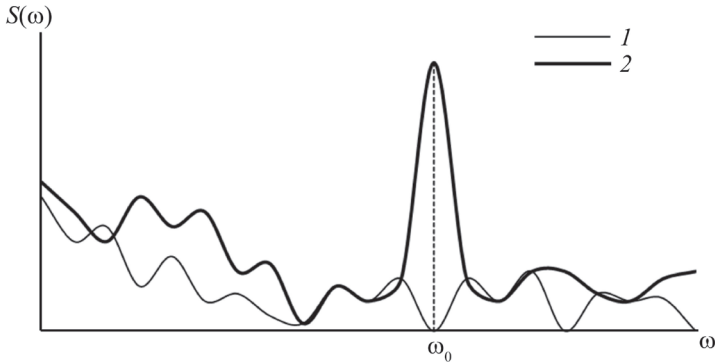


Рис. 11.13. График спектральной плотности совокупности нескольких элементарных составляющих случайного процесса:
 1 – случайный процесс в виде белого шума и трендовой компоненты;
 2 – случайный процесс в виде белого шума, тренда и циклического колебания

спектральная плотность имеет вид плавной кривой, переходящей в ненулевой спектр на более высоких частотах, на фоне которого выделяется «горб», соответствующий основной частоте циклического колебания (рис. 11.13).

11.6. Понятие о взаимной спектральной плотности

Нормированная взаимная спектральная плотность (ВСП) связана с взаимной корреляционной функцией (ВКФ) двух стационарных случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ прямым преобразованием Фурье, т. е.

$$s_{xy}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (11.35)$$

Естественно, что взаимная корреляционная функция выражается через ВСП с помощью обратного преобразования Фурье:

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (11.36)$$

Как отмечалось выше, ВКФ не обладает свойством четности. Обозначим через $r_{xy}^+(\tau)$ четную часть, а через $r_{xy}^-(\tau)$ – нечетную часть ВКФ. Тогда мы можем записать:

$$r_{xy}(\tau) = r_{xy}^+(t) + r_{xy}^-(\tau).$$



Рис. 11.14. Компоненты взаимной спектральной плотности

В общем случае ВСП (рис. 11.14) представляет собой комплексную величину, состоящую из вещественной части, называемой коспектром $C_{xy}(\omega)$, и мнимой части – квадратурного спектра $Q_{xy}(\omega)$, т. е.

$$s_{xy}(\omega) = C_{xy}(\omega) + iQ_{xy}(\omega). \quad (11.37)$$

Вещественная часть ВСП (косинус-спектр) находится как косинус преобразования Фурье четной части функции взаимной корреляции:

$$C_{xy}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} r_{xy}^+(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (11.38)$$

где $r_{xy}^+(\tau) = \frac{r_{xy}(\tau) + r_{xy}(-\tau)}{2}$. Так как $r_{xy}^+(\tau)$ – четная функция, то коспектр является четной функцией и его называют четной (симметричной) частью ВСП.

Операцией (11.38) осуществляется сглаживание эффекта асимметрии функции взаимной корреляции $r_{xy}(\tau)$. Симметрия $r_{xy}^+(\tau)$ относительно нулевого сдвига означает, что разность фаз между процессами равна нулю, т. е. процессы происходят синхронно. *Коспектр характеризует вклад энергии колебаний различных частот в общую взаимную корреляцию при нулевом сдвиге двух временных рядов, т. е. является мерой взаимной энергии двух процессов.*

Мнимая часть взаимного спектра находится как синус-преобразование Фурье нечетной части взаимной корреляции:

$$Q_{xy}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} r_{xy}^-(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau, \quad (11.39)$$

$$\text{где } r_{xy}^-(\tau) = \frac{[r_{xy}(\tau) - r_{xy}(-\tau)]}{2}.$$

Данным преобразованием осуществляется усиление эффекта асимметрии функции $r_{xy}(\tau)$. Поскольку $r_{xy}^-(\tau)$ является нечетной функцией ($r_{xy}^-(\tau) = -r_{xy}^-(\tau)$), то асимметрия функции $r_{xy}(\tau)$ проявляется в смещении максимума $r_{xy}(\tau)$ на некоторый сдвиг $\tau \neq 0$. Это означает, что процессы имеют некоторую разность фаз, т. е. протекают во времени несинхронно.

Квадратурный спектр характеризует распределение по частотам энергии несинхронного взаимодействия. Другими словами, он характеризует вклад в общую взаимную корреляцию пары случайных процессов содержащихся в них гармоник различной частоты при сдвиге фаз этих гармоник на четверть периода T .

Подставляя (11.37) в (11.36) и полагая $\tau = 0$, нетрудно получить выражение для взаимной дисперсии случайных процессов:

$$r_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{xy}(\omega) d\omega. \quad (11.40)$$

При частотном представлении взаимной энергии процессов полезно сравнивать взаимную энергию на фиксированной частоте с энергиями каждого из процессов на той же частоте путем вычисления отношения:

$$F^2(\omega) = \frac{|s_{xy}^2(\omega)|}{s_x(\omega)s_y(\omega)} = \frac{C_{xy}^2(\omega) + Q_{xy}^2(\omega)}{s_x(\omega)s_y(\omega)}. \quad (11.41)$$

Функция $F^2(\omega)$ называется *когерентностью* и характеризует линейную статистическую связь спектральных компонент одинаковой частоты. По смыслу она аналогична коэффициенту детерминации, но в отличие от него зависит от частоты. Заметим, что по своей сути функция когерентности аналогична квадрату нормированной взаимной корреляционной функции $r_{xy}(\tau)$, определяемой по формуле (10.28).

Вследствие того, что всегда справедливо неравенство:

$$C_{xy}^2(\omega) + Q_{xy}^2(\omega) \leq s_x(\omega)s_y(\omega), \quad (11.42)$$

называемое *неравенством когерентности*, то величина $F^2(\omega)$ изменяется в пределах от 0 до 1. Отметим, что когерентность служит

мерой устойчивости разности фаз. Если разность фаз двух процессов постоянна, то $F^2(\omega) = 1$, если разность фаз неустойчива, то должно выполняться условие $F^2(\omega) \rightarrow 0$.

Из (11.41) следует, что при $Q_{xy}(\omega_i) = 0$, $C_{xy}(\omega_i) \neq 0$ разность фаз колебаний на частоте ω_i должна быть равна нулю, так как взаимосвязь процессов будет существовать только за счет их синхронного взаимодействия. При $C_{xy}(\omega_i) = 0$, $Q_{xy}(\omega_i) \neq 0$ разность фаз спектральных компонент на частоте ω_i равна 90° , так как взаимосвязь процессов на частоте ω_i имеет место лишь за счет энергии несинхронного взаимодействия. Во всех остальных случаях, т. е. при $C_{xy}(\omega_i) \neq 0$, $Q_{xy}(\omega_i) \neq 0$ разность фаз спектральных компонент фиксированной частоты вычисляется по формуле:

$$\varphi_y(\omega) - \varphi_x(\omega) = \theta_{xy}(\omega) = \arctg \frac{Q_{xy}(\omega)}{C_{xy}(\omega)}. \quad (11.43)$$

Исходя из геометрической интерпретации ВСП, величину $\theta_{xy}(\omega)$ называют *фазовым спектром*. Он характеризует отставание по фазе процесса $Y(t)$ от процесса $X(t)$, при условии, что Q_{xy} считают положительным от 0 до 180° и отрицательным от 180 до 360° . Тогда в соответствии с геометрической интерпретацией ВСП величину $S_{xy}(\omega)$ можно назвать *амплитудным спектром*, который представляет модуль ВСП и определяется следующим выражением:

$$|S_{xy}(\omega)| = \sqrt{C_{xy}^2(\omega) + Q_{xy}^2(\omega)}. \quad (11.44)$$

Типовой график взаимной спектральной плотности приведен на рис. 11.15. Нетрудно видеть, что он состоит из двух кривых, одна

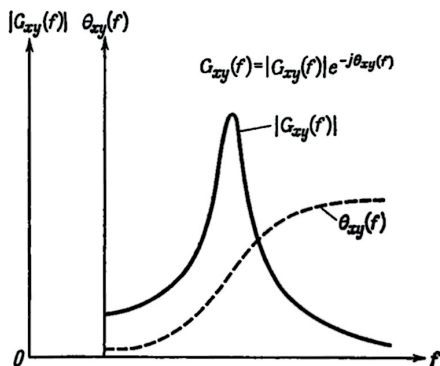


Рис. 11.15. Типовой график взаимной спектральной плотности

из которых является амплитудным спектром, а другая – фазовым спектром.

11.7. Фильтрация временных рядов

В спектральном анализе, а также при решении некоторых других задач, связанных с выделением тех или иных колебаний, часто возникает задача фильтрации исходных рядов. Эта операция позволяет значительно уменьшить роль случайных ошибок и подавить те колебания, которые не представляют интереса для решаемой задачи.

Фильтрация осуществляется с помощью следующего преобразования:

$$\tilde{X}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) X(t + \tau) d\tau, \quad (11.45)$$

где $h(\tau)$ – весовая функция фильтра.

Любая фильтрация предусматривает изменение амплитуд колебаний процесса $X(t)$. Функция, определяющая характер изменения амплитуд исходного процесса при прохождении ряда через фильтр, называется *частотной характеристикой фильтра*. При условии, что начальные фазы гармоник после фильтрации должны остаться неизменными, частотная характеристика $c(\omega)$ будет иметь вид:

$$c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \cos(2\pi\omega\tau) d\tau. \quad (11.46)$$

Как следует из выражения (10.46), весовая функция $h(\tau)$ такого четного фильтра связана с частотной характеристикой обратным преобразованием Фурье:

$$h(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \cos(2\pi\omega\tau) d\omega. \quad (11.47)$$

Таким образом, для фильтрации процесса $X(t)$ следует вначале задать частотную характеристику $c(\omega)$, а затем из выражения (11.47) найти весовую функцию и выполнить преобразование (11.45).

Задача фильтрации решается наилучшим образом, если гармоники с частотами $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ на выходе фильтра сохраняются неизменными, а амплитуды всех остальных гармоник обратятся в нуль. Частотная характеристика такого идеального фильтра имеет вид:

$$c(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ 0 & \text{при } \omega < \omega_1, \omega > \omega_2 \end{cases}. \quad (11.48)$$

Подставив характеристику (11.48) в уравнение (11.47), можно найти весовую функцию идеального фильтра:

$$h(\tau) = \frac{\cos \pi \tau (\omega_1 + \omega_2) \sin \pi \tau (\omega_2 - \omega_1)}{\pi \tau}. \quad (11.49)$$

Величина спектра после фильтрации определяется как:

$$\hat{S}(\omega) = c(\omega) \tilde{S}(\omega).$$

Однако частотная характеристика (10.48) может быть реализована только в том случае, если весовая функция (10.49), а значит, и сам процесс $X(t)$ заданы на бесконечном интервале. Поскольку на практике интервал задания исходного ряда $X(t)$ всегда конечен, то, следовательно, также должен быть конечен интервал задания весовой функции $h(\tau)$. В этом случае амплитуды гармоник, лежащих в диапазоне $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$, умножаются на величины, отличные от единицы, а амплитуды гармоник с частотами вне этого диапазона – на величины, отличные от нуля.

Поскольку реализация идеального фильтра на ограниченном интервале в виде (11.48) невозможна, то задачей фильтрации являются нахождение таких $c(\omega)$ и $h(\tau)$, которые бы обеспечили выделение гармоник в заданном диапазоне оптимальным образом, т. е. с минимальными искажениями.

Следует иметь в виду, что решение данной задачи возможно лишь при условии, что спектр исходного процесса известен или есть физические основания предполагать наличие определенных гармоник в исследуемом интервале частот. Последнее обстоятельство может в значительной степени способствовать правильному выбору как вида фильтра, так и интервалов его задания.

Переходя от интеграла к сумме по конечному интервалу $(2M + 1)$, выражение (11.45) запишем в виде:

$$\tilde{X}_i = \sum_{j=-M}^M h_j X_{i+j}. \quad (11.50)$$

В зависимости от выделяемого диапазона частот фильтры подразделяются на *низкочастотные* или *сглаживающие* ($0 < \omega < \omega_2$), *высокочастотные* ($\omega_1 < \omega < \infty$) и *полосовые* ($\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$). Их

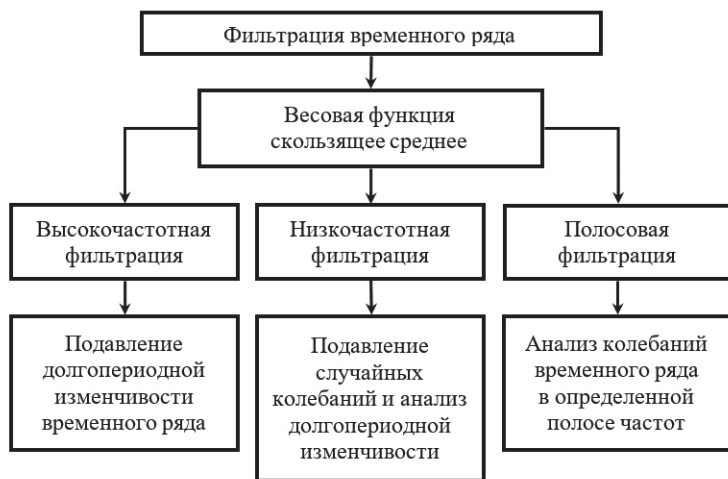


Рис. 11.16. Типы фильтрации временного ряда

назначение приводится на рис. 11.16. Первые применяются в случае необходимости исследования долгопериодных колебаний и тенденции в исходном ряду, а также для подавления случайных колебаний, связанных с ошибками измерений. Высокочастотные фильтры позволяют стационаривать ряд и исследовать высокочастотные колебания до определенного задаваемого предела частоты. Полосовые фильтры применяются для изучения колебаний в определенной полосе частот.

Фильтров, различающихся своей весовой функцией, предложено в настоящее время большое количество. К их числу, например, относятся скользящее среднее, треугольный фильтр (фильтр Бартлетта), фильтр Тьюки, нормальный фильтр и др. Основной задачей большинства фильтров является подавление шума, выделение и усиление полезного сигнала из исходного процесса, что приводит к искажению структуры временного ряда. Если, например, в радиотехнике данная задача является рутинной, методы решения которой отработаны, то в гидрометеорологии разделение временного ряда на шум (случайную компоненту) и сигнал (детерминированную компоненту) уже может вызывать серьезные затруднения.

Простейшим и, очевидно, наиболее широко применяемым в гидрометеорологии видом фильтрации является *скользящее осреднение*. Весовая функция этого фильтра имеет вид:

$$h_j = \begin{cases} \frac{1}{2M+1} & \text{при } |j| \leq M \\ 0 & \text{при } |j| > M \end{cases}, \quad (11.51)$$

где $(2M+1)$ – интервал сглаживания.

Общая формула для отфильтрованного ряда при низкочастотной фильтрации может быть записана как:

$$\tilde{X}_i = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^M X_{i+j}. \quad (11.52)$$

При использовании скользящего осреднения в качестве высокочастотного фильтра общее выражение для $\tilde{X}_i$ приобретает вид:

$$\tilde{X}_i = X_i - \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^M X_{i+j}. \quad (11.53)$$

И, наконец, для полосового фильтра общую формулу для ряда X_i можно представить как:

$$\tilde{X}_i = \frac{1}{2M_1+1} \sum_{j=-M_1}^{M_1} X_{i+j} - \frac{1}{2M_2+1} \sum_{j=-M_2}^{M_2} X_{i+j}, \quad (11.54)$$

где $M_2 > M_1$.

Частотная характеристика высокочастотного фильтра, определяемая выражением:

$$c_i(\omega) = \frac{\sin \pi \omega (2M+1)}{\pi \omega (2M+1)},$$

приводится на рис. 11.17-а.

Частотную характеристику низкочастотного фильтра $c_h(\omega)$ можно получить через частотную характеристику сглаживающего фильтра $c_h(\omega) = 1 - c_i(\omega)$ (рис. 11.17-б).

Наконец, частотная характеристика полосового фильтра может быть представлена как разность частотных характеристик двух сглаживающих фильтров (рис. 11.17-в), т. е. $c(\omega) = c_i(\omega, M_1) - c_i(\omega, M_2)$.

Рассмотрим, например, частотную характеристику сглаживающего фильтра. Как видно из рис. 11.18, величина $c_i(\omega)$ на участке главного лепестка (от значения $\omega = 0$ до первого перехода кривой $c(\omega)$ через нуль) быстро убывает. Однако значения частотной

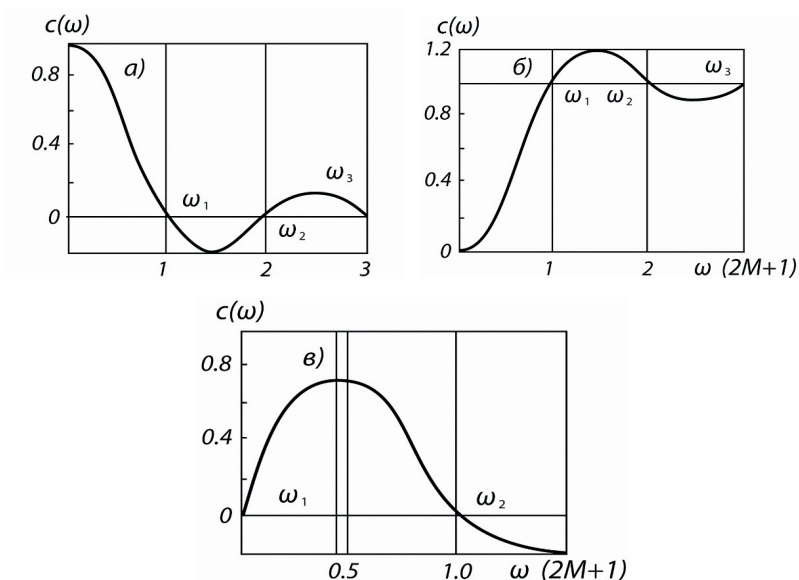


Рис. 11.17. Частотная характеристика различных фильтров:
 а) высокочастотный фильтр; б) низкочастотный фильтр; в) полосовой фильтр

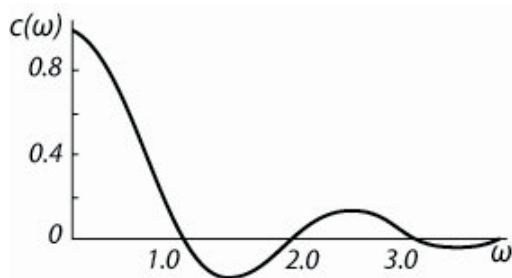


Рис. 11.18. Частотная характеристика фильтра скользящего среднего

характеристики на боковых лепестках (участках между соседними переходами $c(\omega)$ через нуль) довольно велики. Так, экстремум первого бокового лепестка составляет более 0,2. К тому же гармоники с частотами от $\frac{p}{(2M+1)}$ до $\frac{(p+1)}{(2M+1)}$, где $p = 1, 3, 5, \dots$, в процессе $X(t)$ на выходе фильтра меняют фазу на 180° .

В общем случае можно указать три следующих свойства фильтрации рядов.

1) Длина отфильтрованного ряда сокращается по сравнению с исходной на $2M$ ординат. Это накладывает ограничение на выбор интервала задания весовой функции, так как должно быть соблюдено условие $2(N - M) < \frac{1}{\omega_m}$, где ω_m – наиболее низкая частота в исходном ряду.

2) Диапазон исследуемых частот ограничен сверху частотой $\omega_N = 0,5$ цикла на интервал дискретности. Поэтому, располагая рядом с числом членов $2N + 1$, можно фильтровать частоты в диапазоне:

$$\frac{1}{2(N - M)} < \omega \leq \frac{1}{2}$$

или с периодами в диапазоне $2 \leq p < 2(N - M)$, где p выражается через число интервалов дискретности.

3) Средние арифметические значения рядов X_i и $\tilde{X}_i$ связаны между собой соотношением:

$$\frac{\sum_i^N \tilde{X}_i}{\sum_i^N X_i} = \sum_{j=-M}^M h_j.$$

Поэтому низкочастотные фильтры строят обычно таким образом, чтобы сумма их весов равнялась единице. Для высокочастотных и полосовых фильтров сумма весов равна нулю, поэтому при их использовании среднее арифметическое значение полученного ряда равно нулю.

Итак, очевидными недостатками фильтра «скользящее среднее» являются:

- уменьшение длины исходного ряда, которое может быть заметным при значительном интервале сглаживания;
- дисперсия сглаженного ряда всегда меньше дисперсии исходного ряда;
- наличие возможного сдвига по фазе между сглаженным и исходным процессами.

Использование предварительной фильтрации ряда при расчете спектра приводит к искажению его вида практически при любом

типе фильтра. Особенно значительны искажения для полосовых фильтров, так как при этом происходит изменение амплитуд не только вне заданной полосы пропускания, но и внутри ее, причем отмечается резкое завышение амплитуды колебаний именно внутри полосы пропускания. Но в силу того, что истинные оценки СП, как правило, неизвестны, то и исправление выборочных значений СП оказывается очень сложным делом. Кроме того, статистическая значимость полученных спектральных оценок с предварительной фильтрацией ряда всегда будет завышена, особенно при узкой полосе пропускания частот и малой длине ряда.

Пример 11.1. На рис. 11.19 представлен межгодовой ход фактических значений температуры воздуха в Санкт-Петербурге за период 1880–1996 гг. Кроме того, на этом же рисунке нанесены скользящие средние температуры воздуха с интервалами сглаживания $CC = 2M + 1 = 7$ и $CC = 21$. Обычно низкочастотное осреднение применяют, как уже указывалось выше, с целью подавить случайные ошибки и мелкомасштабные флуктуации. Действительно, из рис. 11.16 отчетливо видно, что уже 7-летние скользящие средние существенно искажают структуру временного ряда температуры. Так, стандартное отклонение исходных данных равно $\sigma = 1,11^\circ\text{C}$, а отфильтрованного ряда при $CC = 7$ $\sigma = 0,50^\circ\text{C}$. Следовательно, дисперсия отфильтрованного ряда занижается более чем в четыре раза. Еще больше уменьшается дисперсия ряда при скользящем осреднении $CC = 21$. Так как в этом случае $\sigma = 0,29^\circ\text{C}$, то дисперсия

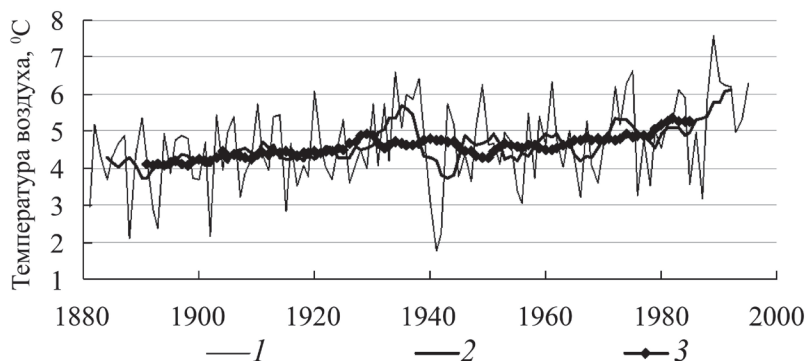


Рис. 11.19. Межгодовой ход температуры воздуха в Санкт-Петербурге:
 1 – фактические значения, 2 – скользящие средние температуры воздуха
 с интервалом сглаживания $(2M + 1) = 7$, 3 – скользящие средние температуры
 воздуха с интервалом сглаживания $(2M + 1) = 21$

отфильтрованного ряда занижается уже более чем на порядок (в 14 раз).

Очевидно, использование скользящего осреднения целесообразно при анализе тенденции изменения временного ряда. Из данного рисунка нетрудно видеть, что температура воздуха в Санкт-Петербурге имеет довольно устойчивую тенденцию к повышению. При этом тенденция не является полностью монотонной. Так, примерно до начала 1930-х годов отмечался устойчивый рост температуры, затем до начала 1970-х годов она практически не изменялась, а после этого опять начался ее достаточно быстрый рост, который продолжается и до настоящего времени.

Пример 11.2. При анализе межгодовой изменчивости гидрометеорологических характеристик многими исследователями обычно предварительно выполняется скользящее осреднение исходных рядов с целью сглаживания случайных ошибок и мелкомасштабных флуктуаций. Наиболее часто применяется интервал сглаживания $CC = 5$. Воспользуемся для этой цели данными из примера 7.4. В таблице 11.2 приводятся оценки корреляции между средними годовыми значениями различных гидрометеорологических характеристик в районе Норвежского течения за 1949–2001 гг. (верхний треугольник) и их скользящими 5-летними средними (нижний треугольник). Отметим, что значимые коэффициенты корреляции на уровне $\alpha = 0,05$ ($r_{кр} = 0,26$) выделены полужирным шрифтом.

Таблица 11.2

Корреляционная матрица между средними годовыми значениями различных гидрометеорологических характеристик в районе Норвежского течения за 1949–2001 гг. (верхний треугольник) и их скользящими 5-летними средними (нижний треугольник)

Хар-ка	T_W	T_A	U	V	P	$Prec$	$Cloud$	R	TB
T_W	1	0,84	0,12	0,30	–0,19	0,07	–0,03	0,55	0,28
T_A	0,88	1	0,25	0,59	–0,22	0,06	0,05	0,77	0,67
U	0,30	0,39	1	0,29	–0,28	0,65	0,27	0,19	0,04
V	0,28	0,46	0,72	1	–0,27	0,00	–0,07	0,45	0,43
P	–0,25	–0,38	–0,55	–0,60	1	–0,43	–0,17	0,08	0,06
$Prec$	0,23	0,18	0,32	–0,05	–0,17	1	0,78	0,05	0,04
$Cloud$	0,05	0,01	–0,21	–0,49	0,19	0,80	1	0,10	0,30
R	0,72	0,82	0,25	0,20	–0,19	0,34	0,22	1	0,69
TB	0,29	0,58	–0,17	–0,07	–0,06	0,24	0,46	0,67	1

Прежде всего, обратившись к анализу исходных гидрометеорологических характеристик (верхний треугольник), отметим, что довольно высокая корреляция между некоторыми переменными является очевидной. Например, между температурами поверхности океана и воздуха (T_w и T_a), между облачностью и осадками ($Prec$ и $Cloud$), между радиационным и тепловым балансом (R и TB). Именно между этими характеристиками корреляция максимальна. Менее очевидной, например, является корреляция между радиационным балансом поверхности океана и температурой воздуха и совсем она неочевидна между радиационным балансом и меридиональной компонентой скорости ветра. Всего значимых коэффициентов корреляции – 18.

Обратимся теперь к анализу стохастических связей между 5-летними скользящими средними гидрометеорологических характеристик (нижний треугольник). Если само число значимых коэффициентов корреляции практически не изменилось (19), то вот оценки многих из них изменились весьма заметно. При этом почти постоянными остались оценки коэффициентов корреляции между теми переменными, связь для которых является физически обусловленной. Так, очень мало изменились коэффициенты корреляции $r_{(T_w, T_a)} = 0,84-0,88$, $r_{(Prec, Cloud)} = 0,78-0,80$, $r_{(R, TB)} = 0,67-0,69$. В то же время связь между переменными, когда связь между ними неочевидна, обычно приводит к завышению оценок коэффициентов корреляции, причем в некоторых случаях это завышение весьма значительно. Например, корреляция между P и V увеличилась от $r = -0,27$ для исходных данных до $r = -0,60$ для скользящих средних. Еще более значительным оказывается увеличение корреляции для компонент скорости ветра U и V (соответственно $r = 0,29$ и $r = 0,72$). Правда, в некоторых случаях связь занижается. Например, корреляция между TB и V составляет $r = 0,43$ для исходных данных и $r = -0,07$ для скользящих средних.

Итак, не вызывает сомнения, что скользящее осреднение может приводить к заметному искажению стохастических связей между переменными, особенно в том случае, когда она является неочевидной.

11.8. Понятие об вейвлет-анализе

Хотя спектральный анализ получил широкое распространение для исследования циклических колебаний, недостатки его достаточно очевидны. В частности, чем сильнее циклическое колебание

отличается от гармонического, тем менее эффективным оказывается спектральный анализ. Кроме того, даже после удаления тренда временные ряды зачастую остаются нестационарными. В связи с этим для выделения и оценивания циклических колебаний, целесообразно использовать вейвлет-анализ, который в значительной степени устраняет недостатки спектрального анализа и позволяет исследовать каждый масштаб колебаний (интенсивность, изменения периода, локализацию во времени) с необходимой и достаточной разрешающей способностью.

Дословно вейвлет (wavelet) – «маленькая волна». *Вейвлеты – это семейство функций, которые локальны во времени и по частоте, и в которых все функции получаются из одной посредством её сдвигов и растяжений по оси времени.* Основы вейвлет-анализа были разработаны в середине 80-х годов прошлого столетия А. Гроссманом и Ж. Морле как альтернатива преобразованию Фурье для исследования временных или пространственных рядов с выраженной неоднородностью. В отличие от преобразования Фурье, локализуя частоты, но не дающего временного разрешения процесса, вейвлет-преобразование, обладающее самонастраивающимся подвижным частотно-временным окном, одинаково хорошо выявляет как низкочастотные, так и высокочастотные характеристики сигнала на разных временных масштабах. По этой причине вейвлет-анализ часто сравнивают с «математическим микроскопом», вскрывающим внутреннюю структуру существенно неоднородных объектов, поскольку он позволяет исследовать каждый масштаб с необходимой и достаточной для него разрешающей способностью.

Указанная универсальность обеспечила вейвлет-анализу широкое использование в самых различных областях знаний и на сегодняшний день он является одной из самых перспективных технологий анализа данных. Отметим, что в 1997 г. два самых знаменитых немецких математика, Мюллер и Хирцебрух, написали статью о развитии математики за последние десять лет. За это время, по их мнению, произошло два важнейших события – доказательство великой теоремы Ферма и появление вейвлет-анализа. Поскольку оба автора – чистейшие теоретики, то их оценка вейвлет-анализа представляется весьма важной. Хотя его роль в самой математике пока что не слишком велика, однако в последние годы не было другой математической концепции, которая бы так стремительно проникла во все естественные науки, многие области техники, экономики и финансы.

Принцип вейвлет-преобразования одномерного сигнала состоит в его разложении по базису, сконструированному из обладающей определенными свойствами солитоноподобной функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов вдоль оси времени. Если проводить аналогию с классическим спектральным анализом, то в вейвлет-анализе вейвлеты играют роль простых колебаний, а понятие частоты здесь заменено масштабом. В отличие от традиционного преобразования Фурье, вейвлет-преобразование обеспечивает двумерное представление исследуемого одномерного сигнала в частотной плоскости «частота–положение». Аналогом частоты при этом является масштаб аргумента базисной функции, а положение характеризуется ее сдвигом. Это позволяет локализовать крупные и мелкие детали сигналов, одновременно локализуя их на временной шкале. Иными словами, вейвлет-анализ, представляющий собой обобщение спектрального анализа, иногда называют как локализованный спектральный анализ или спектральный анализ локальных возмущений.

По сравнению с разложением Фурье, который позволяет получать конечный набор гармонических колебаний со строго постоянными характеристиками, вейвлет-разложение обеспечивает получение набора циклических колебаний, параметры которых могут меняться во времени.

Вейвлет-преобразование сигнала $f(t)$ заключается в его разложении в виде:

$$f(t) = c_0 \psi(t) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=0}^{2^j-1} c_{jk} \Phi_{jk}(t), \quad (11.55)$$

где $\psi(t)$ – называют *отцовским вейвлетом*, являющийся аналогом константы; $\Phi_{jk}(t)$ – функции, полученные из материнского вейвлета $\varphi(t)$ путем двух основных операций: *сжатия* (scaling) и *сдвига* (shifting), при этом производится временное сжатие в 2^j раз и сдвиг полученной функции на $2^{-j}k$: $\Phi_{jk}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k)$, например $\Phi_{10}(t) = \sqrt{2} \varphi(2t)$.

При конструировании базисной анализирующей функции $\psi(t)$ должны выполняться следующие условия.

– *Локализация* – вейвлет должен быть локализован вблизи нуля аргумента как во временном, так и в частотном пространстве.

– *Нулевое среднее*: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$. Отсюда следует, что вейвлет должен быть знакопеременной функцией.

– *Ограниченность*: $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)^2 dt < \infty$. Это означает, что вейвлет

должен быть достаточно быстро убывающей функцией временной или пространственной переменной.

Базис одномерного дискретного вейвлет-преобразования (ДВП) строится на основе вейвлета $\psi(t)$ посредством операций сдвигов и растяжений вдоль оси t . Вводя аналог синусоидальной частоты и принимая для простоты в качестве ее значений степени двойки, получаем для функций базиса $\psi_{jk}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$. Базис нормирован, если вейвлет имеет единичную норму.

Вейвлет называется ортогональным, если семейство $\{\psi_{jk}\}$ представляет ортонормированный базис функционального пространства $L^2(R)$, т. е. $\langle \psi_{jk}, \psi_{lm} \rangle = \delta_{jl} \delta_{km}$. В этом случае любая функция $f \in L^2(R)$ может быть представлена в виде ряда:

$$f(t) = \sum_{j,k=-\infty}^{\infty} c_{jk} \psi_{jk}(t), \quad (11.56)$$

где

$$c_{jk} = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi(2^j t - k) dt. \quad (11.57)$$

Непрерывное вейвлет-преобразование (НВП) строится аналогичным образом с помощью непрерывных масштабных преобразований и переносов вейвлета $\psi(t)$ с произвольными значениями масштабного коэффициента a и параметра сдвига b :

$$W(a, b) = \frac{1}{|a|^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt, \quad (11.58)$$

где $a, b \in R$, $a \neq 0$, а символ $*$ обозначает операцию комплексного сопряжения.

Параметр a определяет размер вейвлета и называется *масштабом (scale)*. Его аналогом в Фурье-анализе является период или частота гармонического колебания. Следует сказать, что понятие масштаба – более широкое, хотя и менее наглядное, чем понятие периода. Связано это с тем, что в Фурье-преобразовании функциональный вид ядра преобразования зафиксирован раз и навсегда, в то время как вейвлет-преобразование одной и той же функции можно получить с помощью различных базисных вейвлетов, т. е.

в разных системах масштабов. Параметр b задает временную локализацию вейвлета и называется *сдвигом* (*shift*). Этот параметр не имеет аналога в Фурье-преобразовании. Чтобы обеспечить обратимость вейвлет-преобразования, его нулевой момент должен быть равным нулю. Для практических приложений бывает важно, чтобы не только нулевой момент, но и m старших моментов тоже были равны нулю. Вейвлеты, обладающие таким свойством, оказываются полезными при анализе временных рядов с полиномиальными трендами. Игнорируя тренд, они сразу позволяют исследовать высокочастотные компоненты ряда.

Обратное интегральное вейвлет-преобразование для функций $f(t)$ из $L^2(R)$ задается выражением:

$$f(t) = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty W(a, b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{dad b}{a^2}. \quad (11.59)$$

Таким образом, любая функция из $L^2(R)$ может быть представлена суперпозицией масштабных преобразований и сдвигов базисного вейвлета с коэффициентами, зависящими от масштаба и параметра сдвига. Помимо интегральных вейвлет-преобразований в отдельных приложениях, таких как численное моделирование, сжатие изображений и т.д., нашли широкое применение *дискретные вейвлет-преобразования*, основанные на использовании целочисленных сдвигов и задании масштабов степенями двойки. Однако опыт показал, что для анализа временных рядов непрерывные преобразования более удобны, чем дискретные.

Двухпараметрическая функция $W(a, b)$ дает информацию об изменении относительного вклада компонент разного масштаба во времени и называется спектром коэффициентов вейвлет-преобразования. Располагая вейвлет-спектром, можно рассчитать полную энергию сигнала:

$$E_f = \int f^2(t) dt = \iint W^2(a, b) \frac{dad b}{a^2} \quad (11.60)$$

и глобальный спектр энергии – распределение полной энергии по масштабам, т. е. скейлограмму вейвлет-преобразования:

$$E_w(a) = \int W^2(a, b) db. \quad (11.61)$$

Скейлограмма соответствует спектру мощности Фурье-преобразования сигнала, сглаженному на каждом масштабе спектром Фурье анализирующего вейвлета:

$$E_W(a) = \int |\hat{f}(\omega) \hat{\psi}(a\omega)|^2 d\omega, \quad (11.62)$$

где знак $\hat{}$ обозначает Фурье-образ функции.

На рис. 11.20 приводятся характеристики конкретных вейвлетов, применяемых на практике. Выбор того или вейвлета диктуется спецификой задачи и тем, какую информацию нужно извлечь из сигнала. Опыт использования вейвлетов применительно к изучению частотной структуры гидрометеорологических рядов показал, что лучше всего этой задаче соответствует вейвлет Морле, представляющий собой уединенную плоскую волну, модулированную гауссианой. Параметр a задает ширину гауссианы, параметр k_0 – частоту плоской волны. Обычно выбирают $a = 2$ и $k_0 = 2\pi$. При этих значениях с достаточной точностью можно принять: $\psi(t) = e^{-t^2/a^2} e^{i2\pi t}$.

Введенными выше определениями интегрального вейвлет-преобразования, локального и глобального энергетического спектра нельзя воспользоваться на практике, поскольку при обработке результатов измерений основными объектами преобразования являются не функции, заданные на всей оси времени, а временные ряды, длина которых всегда конечна. По этой причине вместо указанных выше теоретических понятий следует ввести их практические аналоги. Тогда для оценки вейвлет-преобразования можно воспользоваться следующим выражением:

$$W_A(a, b) = \frac{1}{n(a, b)} \sum_{k=0}^{N-1} f_k \psi^* \left(\frac{t_k - b}{a} \right), \quad (11.63)$$

где

$$n(a, b) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-\frac{1}{B} \left(\frac{t_k - b}{a} \right)^2}, \quad (11.64)$$

причем $B = 2$ для МНАТ-вейвлета и $B = a^2$ для вейвлета Морле. Фостер назвал оценку (11.63) *амплитудной вейвлет-функцией*.

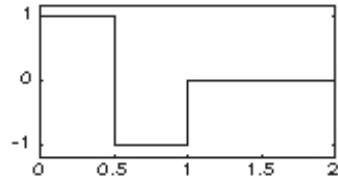
Используя (11.63), введем оценку локального спектра энергии:

$$S(a_i, b_j) = |W_A(a_i, b_j)|^2. \quad (11.65)$$

Эту функцию обычно называют *скалограммой (scalogram)*, подчеркивая тем самым ее способность описывать распределение энергии по масштабам. Поскольку это распределение локализовано во времени с помощью параметра сдвига b , уместно называть его

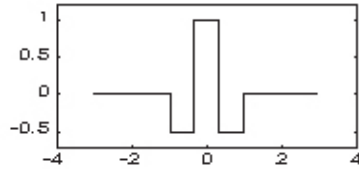
HAAR-вейвлет

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0, & t < 0, t \geq 1 \end{cases}$$



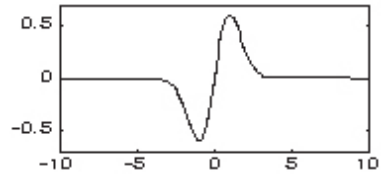
FHAT-вейвлет («Французская шляпа» – French hat)

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{3} \\ -1/2, & \frac{1}{3} < |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$



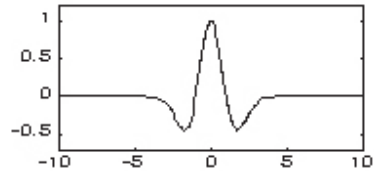
Wave-вейвлет

$$\psi(t) = t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$



MHAT-вейвлет («Мексиканская шляпа» – Mexican hat)

$$\psi(t) = (1 - t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$



Вейвлет Морле (образует комплексный базис)

$$\psi(r) = \exp\left(ik_0 r - \frac{r^2}{2}\right)$$

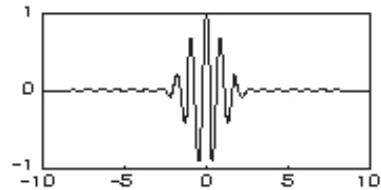


Рис. 11.20. Характеристики наиболее часто используемых вейвлетов

локальной скалограммой, однако такой термин не нашел широкого распространения.

Очевидно, на основе скалограммы $S(a_i, b_j)$ можно ввести также оценку глобального спектра энергии как:

$$G(a_j) = \frac{1}{N^*} \sum_j S(a_i, b_j), \quad (11.66)$$

где N^* – число точек, по которому осуществляется осреднение. Функцию (11.66) называют *скейлограммой* (scalegram). Скейлограмма в вейвлет-анализе является прямым аналогом сглаженной периодограммы в Фурье-анализе.

В общем случае анализ сигналов производится в плоскости вейвлет-коэффициентов (масштаб–время–уровень) (Scale–Time–Amplitude). При этом по одной оси откладываются сдвиги вейвлета или ось времени, а по другой – масштабы, т. е. ось масштабов. Затем «раскрашиваются» точки получившейся схемы в зависимости от величины соответствующих коэффициентов: чем больше значение коэффициента, тем ярче цвет. Получившееся изображение называют результатом вейвлет-преобразования или вейвлет-изображением. Вейвлет-изображение – это «рентгеновский снимок» исследуемого процесса. На нем видны все его характерные особенности: масштабы и интенсивность периодических изменений, направление и величина трендов, наличие, расположение и длительность скачков – то есть все факторы, определяющие изменчивость исследуемой характеристики. Кроме того, целесообразно проводить линии локальных экстремумов поверхностей $W(a, b)$ с помощью «скелетона» (skeleton), позволяющего более четко выявлять структуру анализируемого процесса.

Картина интегрального вейвлет-преобразования зависит от выбранного вейвлета. Например, модуль коэффициентов преобразования с помощью вейвлетов Морле, примененного к гармоническому сигналу, на интегральном вейвлет-преобразовании отображается в виде непрерывной линии параллельной оси времени, центр которой расположен на частоте сигнала и соответствует номеру строки в матрице коэффициентов $a = N \left(\log_2 \left(\frac{\pi T_0}{k_0 T} \right) - 1 \right)$. При этом толщи-

на линии определяется параметром k_0 и уменьшается при его увеличении. Модуль коэффициентов преобразования с помощью вейвлетов МНАТ в этом случае на интегральном вейвлет-преобразовании

отобразится в виде периодически повторяющихся отрезков, параллельных друг другу и оси a , центр которых расположен на частоте сигнала и соответствует номеру строки в матрице коэффициентов:

$$a = N \left(\log_2 \left(\frac{\pi T_0}{T} \right) - 1,5 \right).$$

Центр расположения отрезков по времени соответствует положениям экстремумов коэффициентов гармонического сигнала.

Информация об особенностях исходного ряда заключена в асимптотическом поведении коэффициентов $W(a,b)$ при малых значениях a . Если коэффициенты на малых масштабах расходятся, то в данной точке имеется особенность. При использовании интегрального вейвлет-преобразования необходимо учитывать, что каждое значение $W(a,b)$ вычисляется по отрезку исходного ряда, длина которого увеличивается с увеличением масштаба a и определяется размером вейвлета на каждой строке матрицы. Для строки

с номером a длина анализирующего вейвлета $L = T_0 2^{\left(1 - \frac{a}{N}\right)}$. Начальные и конечные по времени участки массива имеют расширяющиеся области, в которых достоверность коэффициентов $W(a,b)$ постепенно уменьшается при приближении к краям, поскольку коэффициенты вычисляются по отрезкам, выходящим за границы исходного ряда.

Методология оценивания циклических колебаний на основе вейвлет-анализа состоит в следующем. Вначале для временного ряда рассчитываются теоретические модели «белого» и «красного» шума, их 95%-ные доверительные вероятности, которые наносятся на график глобального вейвлет-спектра. Затем для глобального вейвлет-спектра строится доверительный интервал на основе критерия χ^2 . В результате этого становится возможным сделать корректные статистические выводы относительно значимости циклических колебаний.

Пример 11.3. Обратимся к анализу циклических колебаний среднегодовых значений аномалий глобальной приповерхностной температуры воздуха ($\Delta\text{ПТВ}_{\text{пл}}$), по данным архива HadCRUTv. В примере 10.2 было показано, что коэффициент детерминации линейного тренда данного ряда за период 1880–2005 гг. составляет $R^2 = 0,64$. При удлинении этого ряда до 1855 г. вклад тренда в дисперсию исходного ряда не изменился. После исключения линейного тренда для указанного временного ряда было выполнено

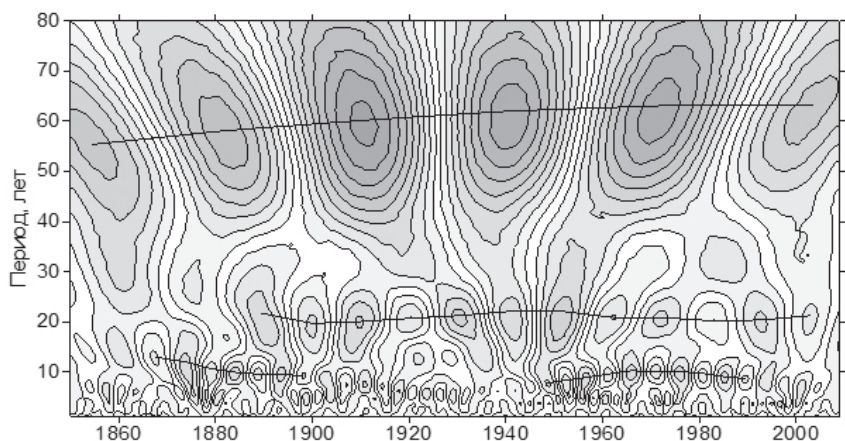


Рис. 11.21. Вейвлет-разложение ряда среднегодовых аномалий глобальной температуры воздуха по данным архива HadCRUT3

вейвлет-преобразование на основе вейвлета Морле с помощью программы MATLAB (рис. 11.21). Как видно из рис. 11.21, наиболее мощным по амплитуде и мало меняющимся в течение всего периода наблюдений является 60-летний цикл. В XIX столетии его период составлял около 57 лет, который к началу нашего столетия увеличился до 62 лет. В среднем, его продолжительность близка к 60 годам. При этом в течение всего рассматриваемого периода времени мощность его изменялась мало. Первый максимум 60-летнего цикла отмечался в 1880 г., следующий – в 1940 г., третий – в 2000 г. Значительно слабее выражено 20-летнее колебание, которое отмечается лишь в XX столетии. Кроме того, в отдельные промежутки времени (1870–1900 и 1950–1990 гг.) проявляется слабое 10-летнее колебание.

Оценим значимость выделенных циклов в стационарном приближении. В результате спектрального анализа было установлено, что вклад 60-летнего цикла в дисперсию ряда, характеризуемый коэффициентом детерминации, составляет почти $R^2 = 0,33$. В пересчете на общую дисперсию исходного процесса вклад 60-летнего цикла равен $R^2 = 0,12$. Что касается 20-летнего и 9–11-летнего циклов, то, несмотря на их малость, они являются значимыми по критерию Стьюдента, а их вклад в общую дисперсию исходного ряда составляет соответственно 3 и 2 %. Понятно, что для интервалов времени, когда эти циклы выражены сильнее, их вклад становится выше.

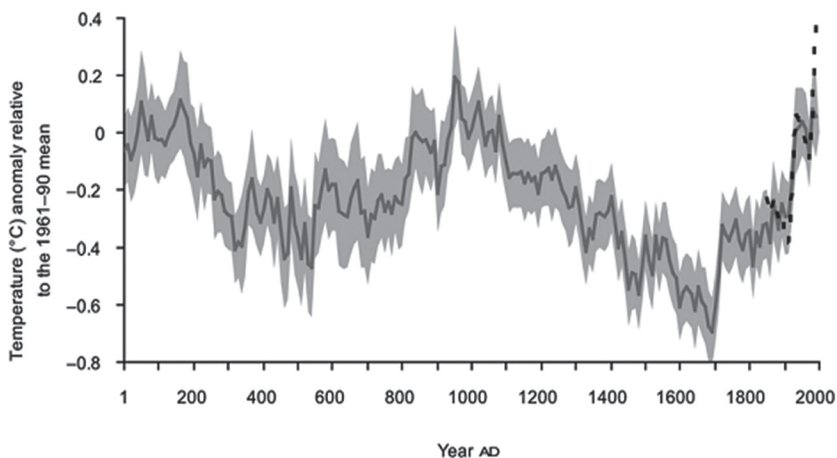


Рис. 11.22. Временной ход аномалий средних десятилетних значений температуры воздуха северного полушария (30–90° с.ш.) относительно базового периода 1961–1990 гг.

В результате суммарный вклад тренда и цикличностей в дисперсию глобальной ПТВ составляет $R^2 = 0,64 + 0,12 + 0,03 + 0,02 = 0,81$. Итак, примерно 80 % дисперсии межгодовой изменчивости $\Delta ПТВ_{\text{гл}}$ за период 1885–2005 гг. описывается детерминированными составляющими (линейным трендом и циклическими колебаниями). На долю случайных колебаний приходится около 20 % дисперсии исходного ряда.

Пример 11.4. Рассмотрим изменчивость температуры внетропических широт северного полушария (30–90° с.ш.) за последние 2000 лет, которая была получена в результате тщательной реконструкции колец деревьев (рис. 11.22). Как видно из этого рисунка, очень четко выделяются средневековый теплый период (X–XI вв.), малый ледниковый период (XVI–XVII вв.) и современное потепление в XX веке. Значения температуры имеют разрешение в десятилетие.

Было выявлено, что данному временному ряду присущ линейный тренд, который описывает 19 % дисперсии ряда. После удаления тренда был выполнен гармонический анализ, который показал, наличие 1075-летней гармоник, амплитуда которой превышает следующую за ней гармонику с периодом 444 лет почти в 5 раз. Кроме того, в значениях температуры отмечаются гармоники продолжительностью в 227 и 112 лет. Вклад указанных циклов в дисперсию исходного ряда приводится в таблице 11.3.

Таблица 11.3

Статистические характеристики различных компонент уравнения (10.5)

Компонента	Дисперсия, $(\Delta \text{ }^{\circ}\text{C})^2$	Вклад в дисперсию исходного ряда, %
Исходный ряд	0,0337	100
Линейный тренд	0,0063	18,7
1075-летняя гармоника	0,0194	57,8
444-летняя гармоника	0,0011	3,3
227-летняя гармоника	0,0013	3,9
112-летняя гармоника	0,0007	2,0
Случайная компонента	0,0049	14,3

После дополнительного удаления из ряда 1075-летней гармоник было выполнено вейвлет-разложение методом Морле (рис. 11.23). Как видно из рис. 11.23, указанные в таблице 11.3 циклы отчетливо проявляются также при вейвлет-разложении. Но при этом они нестационарны по амплитуде и частоте (периоду). Особенно значительные изменения периода свойственны квазистолетнему циклу, который меняется в диапазоне 90–130 лет. Менее выражены изменения по частоте квазидвухсотлетнего и квазичетырехсотлетнего циклов. На первый взгляд, изменения циклов по амплитуде незначительны.

Однако в действительности это не так. В этом легко убедиться, если обратиться к рис. 11.24, на котором приводится временной

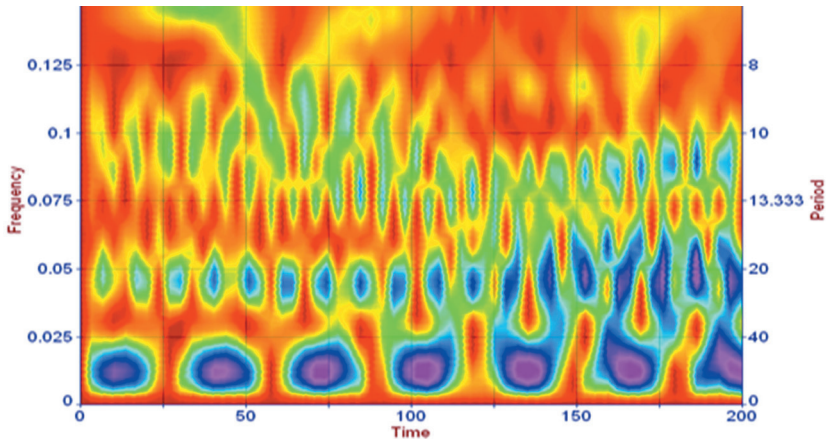


Рис. 11.23. Вейвлет-разложение методом Морле аномалий средних десятилетних значений температуры воздуха северного полушария за период 0–2000 гг. Годы и периоды даны в десятилетиях

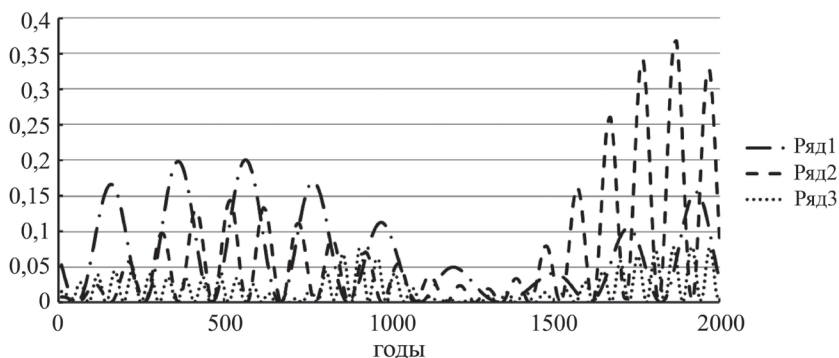


Рис. 11.24. Временной ход стандартизованных вейвлет-коэффициентов ряда аномалий температуры воздуха за 0–2000 гг. для частот, соответствующих периодам 444 лет (сплошная линия), 227 лет (пунктирная линия) и 112 лет (кривая в виде точек)

ход вейвлет-коэффициентов, соответствующих указанным в таблице 11.3 циклам. Временной ход вейвлет-коэффициентов разительно отличается от гармоник. Квазичетырехсотлетний цикл наиболее ярко был выражен в первое тысячелетие. Затем вплоть до XVI в. он практически не наблюдался. Максимальная интенсивность квазидвухсотлетнего цикла отмечалась, наоборот, начиная с XVI в., а его минимальная интенсивность – в XI–XV вв. Максимальные амплитуды столетнего цикла приурочены к IX–X и XIX–XX вв.

Отметим, что периоды циклов также не оставались постоянными. Например, в первое тысячелетие период квазидвухсотлетнего цикла был несколько больше 200 лет (~240–250 лет), а когда он появился в XVI в. вновь, то его период стал близким к 200 годам. Отсюда следует, что изменчивость периода циклов существенно ниже изменчивости их амплитуд.

Итак, вейвлет-разложение позволяет получить принципиально более важные в научном плане результаты по сравнению с гармоническим анализом.

Часть 4. Анализ случайных полей

Глава 12.

Статистические характеристики и свойства случайного поля

12.1. Первичные характеристики случайного поля

Изучению пространственных полей посвящен специальный раздел прикладной статистики, называемый геостатистикой, главной целью которой является анализ, обработка, моделирование и прогнозирование пространственно распределенной информации. Основы геостатистики впервые были сформулированы французским ученым Ж. Матероном в начале 1960-х гг. применительно к задачам геологии и в течение многих десятилетий она развивалась именно в этом направлении. При этом была сформирована своя методология и терминология, которая существенно отличается от терминологии традиционной статистики. Поэтому в этой и следующей главах будут использованы, в том числе термины, принятые в геостатистике. Следует отметить, что до последнего времени геостатистика не получила широкого распространения в России.

Понятно, что *случайное поле* – это случайная функция, изменяющаяся в пространстве. В общем виде случайное поле можно представить как $U(x, y, z, t)$, где x, y, z – пространственные координаты, t – время. Такое поле называется четырехмерным. Если случайное поле не зависит от времени $U(x, y, z)$, то имеем трехмерное поле и т.д. Классическим примером двумерного поля служит пространственная карта.

Учитывая векторный характер пространственных координат, случайное поле можно рассматривать в виде $U(\mathbf{p})$, где $\mathbf{p}$ – k -мерный вектор ($k = 2-4$). По аналогии со случайными процессами, случайное поле представляется как совокупность всех его реализаций или как совокупность всех его сечений. При этом *сечением случайного*

поля будем называть случайную величину, получающуюся при фиксированных значениях всех аргументов, т. е. при фиксированном значении вектора $\mathbf{p}$. Тогда единичной реализацией случайного поля будет являться неслучайное поле, полученное в результате наблюдений или опытов.

В этом случае простой заменой времени t на $\mathbf{p}$ все формулы по оценке вероятностных характеристик случайных процессов могут быть распространены на случайные поля. Однако существует два важных ограничения: во-первых, случайное поле должно быть задано в узлах регулярной сети точек таким образом, чтобы шаг пространственной дискретизации по всем направлениям был одинаковым; во-вторых, если случайный процесс является скалярным, то случайное поле – векторным.

Отметим, что важной особенностью случайных полей является то, что они носят, как правило, нерегулярный характер. Действительно, сеть стационарных метеорологических, гидрологических и иных станций на территории суши находится преимущественно в населенных пунктах, никак не связанных с узлами географической сетки.

По аналогии со случайными процессами для исчерпывающего описания случайного поля необходимо знание n -мерной функции распределения:

$$\begin{aligned} F_u(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) &= \\ &= P(U_1 < u_1, U_2 < u_2, \dots, U_n < u_n) \end{aligned} \quad (12.1)$$

и n -мерной плотности распределения:

$$\begin{aligned} f_n(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) &= \\ &= \frac{\partial^n F_n(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n}. \end{aligned} \quad (12.2)$$

Поскольку на практике определить n -мерные функции распределения или плотности распределения чрезвычайно сложно, то обычно ограничиваются анализом моментов распределения. Так, момент первого порядка называется математическим ожиданием случайного поля и может быть записан в виде:

$$\mu_1(\mathbf{p}) = M[U(\mathbf{p})] = m_u(\mathbf{p}). \quad (12.3)$$

Его выборочной характеристикой является пространственное среднее, обычно обозначаемое как $\langle x \rangle$.

Отклонение случайного поля от его математического ожидания называют центрированным случайным полем:

$$U^*(\mathbf{p}) = U(\mathbf{p}) - m_u(\mathbf{p}).$$

Дисперсией случайного поля называется одноточечный центральный момент второго порядка:

$$\mu_2(\mathbf{p}) = M\{[U(\mathbf{p}) - m_u(\mathbf{p})]^2\} = D_u(\mathbf{p}). \quad (12.4)$$

Двухточечный центральный момент второго порядка:

$$\mu_{1,1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = M\{[U(\mathbf{p}_1) - m_u(\mathbf{p}_1)][U(\mathbf{p}_2) - m_u(\mathbf{p}_2)]\} = R_u(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \quad (12.5)$$

называется пространственной (кросс) корреляционной функцией случайного поля.

При равенстве векторных аргументов $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}$, $t_1 = t_2 = t$, кросскорреляционная функция обращается в дисперсию случайного поля:

$$R_u(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = D_u(\mathbf{p}). \quad (12.6)$$

Чтобы иметь возможность сравнивать кросскорреляционные функции для случайных функций разной размерности, их обычно нормируют:

$$r_u(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{R_u(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)}{[D_u(\mathbf{p}_1)D_u(\mathbf{p}_2)]^{1/2}}. \quad (12.7)$$

Нормированная кросскорреляционная функция для каждой фиксированной пары $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ представляет коэффициент корреляции между сечениями случайного поля.

В общем случае кросскорреляционная функция характеризует связь между значениями случайного поля в различные моменты времени. Поэтому, фиксируя пространство или время, мы получаем различные корреляционные функции. Например, при фиксировании пространственных координат точек поля изучается временная изменчивость в данной конкретной точке путем расчета автокорреляционной функции. Наоборот, фиксируя моменты времени, можно изучать пространственную структуру случайного поля и, в частности, вычислять пространственные корреляционные функции. Выборочный коэффициент пространственной корреляции, характеризующий меру линейной связи точек пространства в моменты времени p и q , определяется как:

$$r_u = \frac{\sum_i^n (x_{ip} - \langle x_p \rangle)(x_{iq} - \langle x_q \rangle)}{n\sigma_p \sigma_q}, \quad (12.8)$$

где $\langle x_p \rangle$ и $\langle x_q \rangle$ – выборочные пространственные средние, а σ_p и σ_q – выборочные стандартные отклонения параметра x_i в моменты времени p и q , n – число точек. Все свойства коэффициента пространственной корреляции совпадают со свойствами коэффициента временной парной корреляции, перечисленными в главе 6. Аналогичным образом также оцениваются его стандартная ошибка и значимость.

12.2. Однородность и изотропность случайного поля

Как было показано выше, принципиальное отличие случайного процесса от случайного поля заключается в том, что первый является скалярным, а второй – векторным. Данное обстоятельство следует иметь в виду при анализе свойств случайного поля. Понятие стационарности, используемое для случайных процессов, эквивалентно понятию однородности случайного поля (рис. 12.1). *Случайное поле называют однородным, если все n -мерные законы распределения не изменяются при переносе системы точек $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ на один и тот же вектор, т. е. если функция распределения не изменяется при замене сечения, соответствующих точкам $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ сечениями, которые соответствуют точкам $\rho_1 + \rho_0, \rho_2 + \rho_0, \dots, \rho_n + \rho_0$ при любом векторе ρ_0 .*

Указанные условия однородности можно называть строгой однородностью (однородностью в узком смысле). *Полем однородным в широком смысле называют такое поле, для которого пространственное среднее является постоянной величиной, а корреляционная функция зависит только от одного аргумента – разности векторов $l = \rho_2 - \rho_1$.*

Вследствие векторного характера случайного поля дополнительно вводится понятие изотропности. Случайное однородное поле называется *изотропным*, если все его n -мерные законы распределения не изменяются при всевозможных вращениях системы точек $N_1(\rho_1), N_2(\rho_2), \dots, N_n(\rho_n)$ вокруг любой оси, проходящей через начало координат, и при зеркальном их отражении относительно любой плоскости, проходящей через начало координат.

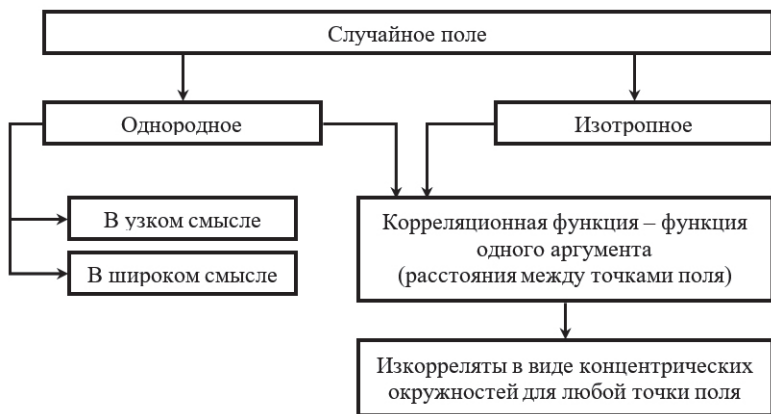


Рис. 12.1. Свойства случайного поля

Таким образом, для однородного изотропного поля n -мерные плотности распределения $f_N(u_1, u_2, \dots, u_n; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n)$ не изменяются при параллельном переносе, вращении и зеркальном отображении системы точек $N_1(\mathbf{p}_1), N_2(\mathbf{p}_2), \dots, N_n(\mathbf{p}_n)$. При этом корреляционная функция $R_U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ должна принимать одни и те же значения для любой пары точек $N_1(\mathbf{p}_1), N_2(\mathbf{p}_2)$, для которых одинаков модуль разности $l = |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1|$, поскольку такие пары точек всегда могут быть совмещены друг с другом с помощью параллельного переноса, вращения и зеркального отражения. Следовательно, корреляционная функция однородного и изотропного поля является функцией одного скалярного аргумента l , представляющего собой расстояние между точками $N_1(\mathbf{p}_1)$ и $N_2(\mathbf{p}_2)$.

Поэтому *характеристикой однородности и изотропности могут служить концентрические окружности – изокорреляты, относительно любой заданной точки $N_1(\mathbf{p}_1), N_2(\mathbf{p}_2), \dots, N_n(\mathbf{p}_n)$* . Пример однородного и изотропного поля приведен на рис. 12.2.

Для однородного и изотропного поля математическое ожидание есть величина постоянная, т. е. $M_U(l) = M_U$, а корреляционная функция является функцией только одного скалярного аргумента l , т. е. $R_U(l) = R_U(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, где l :

$$l = |\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

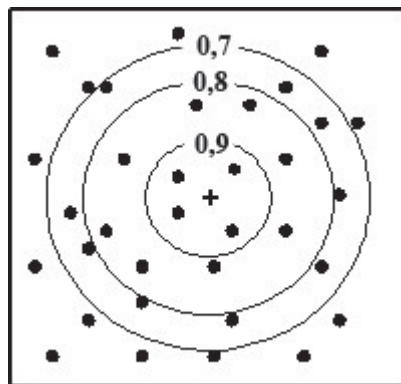


Рис. 12.2. Распределение изокоррелят для однородного и изотропного случайного поля

Многочисленные исследования гидрометеорологических полей указывают на существенное различие изменений гидрометеорологических характеристик в горизонтальном и вертикальном направлениях, поэтому при изучении статистической структуры крупномасштабных полей допустимой можно считать изотропность и однородность лишь применительно к двумерному горизонтальному полю. При этом однородность принимается относительно централизованного случайного поля, т. е. рассматривается поле отклонений от его среднего арифметического, которое, как правило, нельзя считать постоянным.

В предположении об эргодичности однородного и изотропного поля, которое обычно не доказывается, а принимается априори, математическое ожидание и корреляционную функцию можно находить осреднением по одной реализации, взятой по одной большой пространственной области. В этом случае для трехмерной области математическое ожидание вычисляется следующим образом:

$$m_u = \frac{1}{v} \iiint_{(D)} u(x, y, z) dx dy dz, \quad (12.9)$$

где D – поверхность, стягивающая объем v , а для плоской области:

$$m_u = \frac{1}{S} \iint_{(D)} u(x, y) dx dy, \quad (12.10)$$

где S – площадь плоской области D .

Корреляционная функция для трехмерного поля определяется по следующей формуле:

$$R_U(l) = \frac{1}{V} \iiint_{(D)} [u(x, y, z) - m_u] \times \\ \times [u(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - m_u] dx dy dz. \quad (12.11)$$

Заметим, что при переходе от генеральной совокупности к выборочной интегралы в указанных выше формулах заменяются на суммирование. Из формулы (12.11) видно, что если $R_U(l)$ разделить на значения стандартного отклонения поля $u(x, y, z)$, то получим нормированную кросскорреляционную функцию. Таким образом, *однородное изотропное поле обладает эргодическим свойством, если пространственное среднее и корреляционная функция, полученная осреднением по одной реализации при безграничном увеличении диаметра области, могут быть с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, приближены к соответствующим характеристикам, полученным осреднением по всему множеству реализаций.* Поскольку, как правило, на практике мы не имеем множества реализаций, то эргодичность представляет важнейшее условие обработки пространственных полей.

Отметим, что существует важное отличие пространственной корреляционной функции от автокорреляционной. Установлено, что в отличие от временных рядов пространственная корреляционная функция при стягивании области в точку стремится не к единице, а к величине:

$$r_u(0) = \frac{1}{(1 + \eta^2)}, \quad (12.12)$$

где $\eta^2 = \delta^2/\sigma^2$ – мера случайных погрешностей исходных данных в отдельной точке; δ^2 – дисперсия случайных погрешностей; σ^2 – дисперсия поля. При этом ошибки измерений неотделимы от отклонений, вызванных локальными нарушениями однородности поля. При некоторых упрощающих предположениях, используя равенство $\eta^2 = \frac{[1 - r_u(0)]}{r_u(0)}$, получаем расчетную формулу для оценки дисперсии случайных погрешностей:

$$\delta^2 = \frac{[1 - r_u(0)]\sigma^2}{r_u(0)}. \quad (12.13)$$

На практике оценка $r_u(0)$ осуществляется экстраполяцией эмпирической пространственной корреляционной функции в точку $l = 0$.

В некоторых случаях для однородного изотропного поля наряду с корреляционной функцией используется структурная функция:

$$B_u(l) = M\left\{[U(\rho+1) - U(\rho)]^2\right\}. \quad (12.14)$$

По аналогии со случайным процессом структурная функция случайного поля однозначно определяется через ее корреляционную функцию:

$$B_u(l) = 2[R_u(0) - R_u(l)]. \quad (12.15)$$

Естественно, что существует и обратное преобразование, выражающее зависимость корреляционной функции от структурной функции:

$$R_u(l) = 0,5[B_u(\infty) - B_u(l)]. \quad (12.16)$$

Отсюда следует, что при анализе статистической структуры случайных полей в принципе безразлично какую из этих функций использовать. Отметим, что в практических приложениях структурная функция используется довольно часто. Кроме того, следует иметь в виду, что все приведенные выше формулы для статистических характеристик выборочной совокупности полностью справедливы и для генеральной совокупности.

К основным задачам анализа случайных полей относится, прежде всего, изучение их статистической структуры, которая включает определение статистических характеристик (пространственное среднее, корреляционная функция, дисперсия и т.д.). Кроме того, важной задачей анализа случайных полей является объективный анализ, т. е. перевод данных из нерегулярной сети точек в регулярную.

К другим задачам относятся:

- построение пространственных изолиний или карт;
- сглаживание и фильтрация исходных данных;
- восстановление полей с приведением их к одному моменту времени и т.д.

12.3. Анализ схем размещения точек на карте

Известный статистик и геолог Дж. Девис сказал, что «карты в науках о Земле играют ту же роль, что и ноты в музыке, будучи компактным и эффективным средством выражения зависимостей и различных деталей». Как уже отмечалось выше, карта это двумерное представление некоторой пространственной области. Зависимости, изучаемые на карте, почти всегда изображаются с помощью точек, которые представляют собой некоторые числовые оценки случайной величины, непосредственно измеренные или рассчитанные тем или иным способом.

Существующие схемы расположения точек на карте можно условно разделить на три категории: равномерные, регулярные и случайные. *Схема расположения точек называется равномерной, если плотность точек в любой подобласти равна плотности точек во всех других подобластях* (рис. 12.3). Как видно из рис. 12.3, на каждый квадрат приходится 1–2 точки. При неравномерном размещении точек плотность их в пространстве существенно различна. Другими словами, в одних подобластях точек может быть густо, а в других – пусто.

Схема называется регулярной, если точки образуют какой-либо вид сети. Это значит, что расстояния между любыми точками i и j подчиняются какому-либо закону, причем не обязательно он должен быть одинаков по осям абсцисс и ординат. Принимая, например, равенство расстояний по обеим осям, получаем регулярную сеть в декартовой системе координат (рис. 12.4). Если расстояние

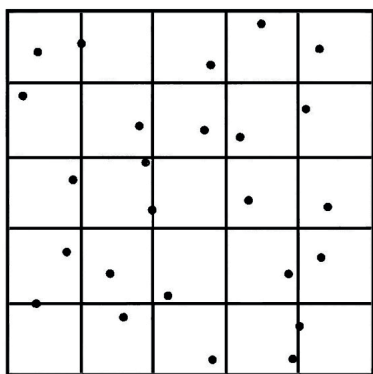


Рис. 12.3. Схема равномерного размещения точек на карте

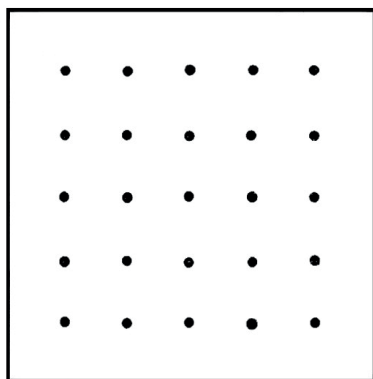


Рис. 12.4. Схема регулярной сети точек на карте в декартовой системе координат

постоянно по оси ординат, но меняется вдоль оси абсцисс, то имеем географическую сеть точек, образованную пересечением широт и долгот. При изучении крупномасштабных гидрометеорологических процессов географическая сетка используется наиболее часто. Значение регулярной сети точек, как при вероятностном описании полей, так и при численном моделировании гидрометеорологических процессов, трудно переоценить. Однако реальная сеть наблюдений таковой обычно не является.

Схема называется случайной, если точки в пространстве размещены совершенно произвольным образом и появление (исключение) одной или нескольких точек никак не сказывается на характере распределения всей совокупности точек в целом. Это означает, что их распределение не поддается каким-либо закономерностям.

Таким образом, по аналогии с классификацией зависимостей (см. разд. 6.1) регулярную схему точек мы можем считать детерминированной, а равномерную – стохастической, которая в предельных случаях может вырождаться в регулярную или в случайную схему. Например, если из регулярной сети точек случайным образом исключить ряд точек, то она превращается в равномерную схему.

Естественно, в реальных условиях большинство гидрометеорологических станций наблюдений занимает некоторое промежуточное положение между равномерной и случайной схемами расположения точек. Регулярная сеть точек наблюдений обычно выдерживается только при проведении специально спланированных натурных экспериментов. Например, гидрологическая съемка акватории моря может быть выполнена даже одним судном в узлах регулярной сети точек.

Если регулярная сеть точек на карте видна сразу и вряд ли нуждается в дополнительной проверке, то не так просто отличить равномерную схему от неравномерной или от случайной. Для этого используется довольно много различных способов и критериев, описание которых можно найти в специальной литературе. Отметим, что требование равномерного размещения измерительной сети является весьма важным при решении многих задач, даже такой простой, как оценка пространственной средней. Действительно, при крайне неравномерной сети точек, как будет показано ниже, задача оценки пространственной средней становится уже нетривиальной.

Степень равномерности размещения точек на карте может быть, например, проверена в рамках статистической проверки гипотез. С этой целью вся карта делится на ряд одинаковых подобластей

(например, квадратов). При этом число их должно быть не меньше 5, а число точек в каждой из подобластей также не должно быть меньше 5.

Если каждая подобласть содержит примерно одно и то же число точек, то естественно считать, что система расположения точек является равномерной. Проверка гипотезы равномерности осуществляется с помощью критерия Пирсона χ^2 , который теоретически не зависит от формы или ориентировки подобластей. Ожидаемое («теоретическое») число точек для каждой подобласти будет равно:

$$E = n/k, \quad (12.17)$$

где n – общее число точек наблюдения, k – число подобластей.

Далее рассчитывается критерий Пирсона по следующей формуле:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (O_i - E)^2}{E}, \quad (12.18)$$

где O_i – фактическое число точек в каждой подобласти, причем ожидаемое число точек в каждой подобласти одинаково.

После этого проверяется неравенство $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, v = k - 2)$. Если данное неравенство выполняется, то нулевая гипотеза отвергается и делается вывод о неравномерном распределении точек. Если данное неравенство не выполняется, то у нас есть основания полагать равномерное распределение точек в пространстве. Очевидный недостаток такого подхода состоит в произвольном разбиении области на подобласти. Существует вероятность того, что при варьировании числа подобластей результаты не всегда будут совпадать.

Другим критерием пространственной структуры точек служит индекс Моришита, который вычисляется для области, разбитой на произвольное число квадратов (ячеек) равного размера, по следующей формуле:

$$I = Q \frac{\sum_{i=1}^Q n_i (n_i - 1)}{N(N - 1)}, \quad (12.19)$$

где N — суммарное число точек в рассматриваемой области; Q — число ячеек разбиения; n_i ($i = 1, 2, \dots, Q$) — число точек сети, попавших в i -ю ячейку. Этот индекс характеризует вероятность того, что при выборе двух случайных точек они окажутся в одной ячейке.

Далее строится диаграмма Моришита, которая представляет собой зависимость этого индекса от размера ячейки разбиения. Существуют три типа характерного поведения данной диаграммы:

- величина индекса Моришита с ростом размера ячейки растет от нуля и стремится к 1 (в этом случае распределение точек можно считать регулярным);

- величина индекса Моришита не зависит от размера ячейки и колеблется около 1 (это означает, что распределение точек случайно и носит равномерный характер);

- величина индекса Моришита с ростом размера ячейки уменьшается и стремится к 1 (распределение точек сети является неравномерным и состоит из сгущений (разрежений), т. е. образует кластеры).

На рис. 12.5 приведены примеры диаграмм Моришита для различных типов размещения точек в пространстве. Так, для регулярной сети диаграмма имеет вид гладкой кривой логарифмического типа, стремящейся к единице (рис. 12.5-а). При наличии многочисленных кластеров в плотной сети мониторинга кривая Моришита изобилует точками перегиба, которые характеризуют размеры различных кластеров (рис. 12.5-б). В случае произвольного мониторинга с несколькими четко выраженными кластерами кривая Моришита имеет более гладкий вид и уменьшается, стремясь к единице (рис. 12.5-в). Размер кластеров характеризуют в этом случае точки изменения кривизны.

Очень простыми критериями проверки сети точек на случайность являются непараметрические тесты по числу экстремумов (смены знака) или числу скачков. Эти тесты являются универсальными в том смысле, что значения исследуемой характеристики в точках могут быть представлены в выборке в любом произвольном порядке.

Как известно, *экстремумом называется точка, в которой производная функции имеет разрыв*. Другими словами, это точка, в которой знак приращения рассматриваемой характеристики изменяется на противоположный: с убывания на возрастание или наоборот. Это означает, что должно выполняться одно из следующих неравенств:

$$x_{i-1} < x_i > x_{i+1} \text{ или } x_{i-1} > x_i < x_{i+1}.$$

В первом случае x_i – максимум, во втором – минимум. Естественно полагать, что число смены знаков в случайной выборке должно зависеть только от ее объема n . Установлено, что если

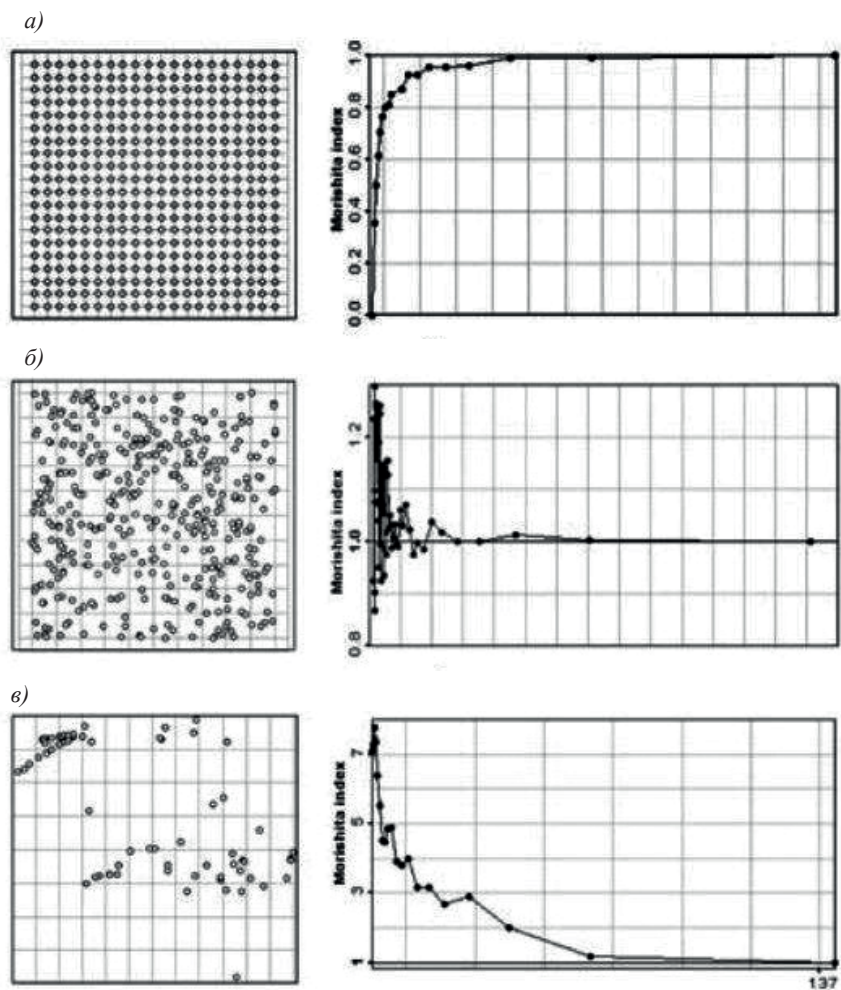


Рис. 12.5. Диаграммы Моришита для различных типов размещения точек на карте: регулярная сеть (а), случайная равномерная сеть (б), случайная неравномерная сеть (в)

$n > 10$, то статистическое распределение числа экстремумов близко к нормальному с математическим ожиданием:

$$M(\xi) = \frac{(2n - 4)}{3} \quad (12.20)$$

и генеральной дисперсией:

$$D(\xi) = \frac{(16n - 29)}{90}. \quad (12.21)$$

Проверка гипотезы о случайном характере распределения точек основана на сравнении фактического значения числа точек экстремумов $\Sigma \xi$, полученного по исследуемой карте, с теоретическим его значением $M(\xi)$, рассчитанным по формуле (12.20). Далее определяется нормированное число экстремумов:

$$Z = \frac{\Sigma \xi - M(\xi)}{\sqrt{D(\xi)}}, \quad (12.22)$$

которое сравнивается с нормированным значением нормального закона распределения $Z_{кр}$ при заданном уровне значимости α . Если $Z > Z_{кр}$, то гипотеза о случайном характере точек отвергается и делается вывод, что их распределение применительно к рассматриваемой характеристике обладает определенными закономерностями, в том числе оно может носить равномерный характер. Если $Z < Z_{кр}$, то значения $\Sigma \xi$ и $M(\xi)$ не существенно отличаются друг от друга и можно полагать, что рассматриваемая выборка является совершенно случайной.

Суть непараметрического теста проверки сети точек на случайность по числу скачков или по числу повышений (понижений) ряда сводится к следующему. Пусть у нас имеется выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$. Переход $x_{i-1} < x_i$ будем называть повышением и обозначать знаком (+), а переход $x_i > x_{i-1}$ – понижением и обозначать знаком (–). Установлено, что общее число повышений (понижений) значений случайной величины в выборке при ее объеме более $n > 10$ распределено асимптотически нормально с математическим ожиданием:

$$m_+ = m_- = \frac{n}{2} \quad (12.23)$$

и генеральной дисперсией:

$$D_+ = D_- = \frac{(n+1)}{12}. \quad (12.24)$$

Определив число повышений (n_+) и понижений (n_-) ряда, рассчитываем нормированную (стандартизированную) величину числа понижений (повышений):

$$t_+ = \frac{(n_+ - m_+)}{(D_+)^{1/2}}, \quad t_- = \frac{(n_- - m_-)}{(D_-)^{1/2}}. \quad (12.25)$$

Далее сравниваем t_+ или t_- со значениями нормированных ординат таблицы нормального закона распределения. Если вероятность рассчитанных значений t_+ или t_- по таблице окажется меньше заданного уровня значимости, то гипотеза о случайном характере распределения точек отвергается и считается, что оно имеет устойчивую тенденцию к закономерным изменениям в пространстве.

Пример 12.1. На рис. 12.6 представлено распределение 123 артезианских скважин в одном из районов США. Вся область была разделена на 12 равных квадратов и для каждого из них подсчитано число скважин (таблице 12.1). Затем рассчитывался критерий Пирсона, который оказался равным $\chi^2 = 15,2$. Критическое значение данного критерия при $\alpha = 0,05$ и $\nu = 10$ составляет $\chi^2_{кр} = 18,3$. Поскольку $\chi^2 < \chi^2_{кр}$, то делаем вывод, что сеть скважин размещена по территории довольно равномерно.

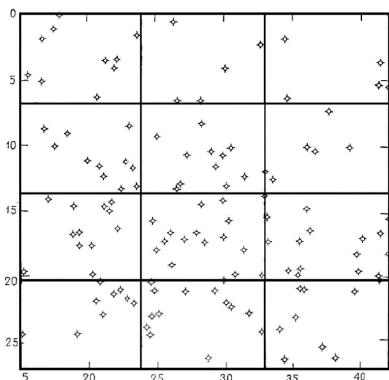


Рис. 12.6. Пространственное распределение 123 артезианских скважин, пробуренных в одном из районов США (по Девису)

Таблица 12.1

Размещение скважин по 12 квадратам карты

Характеристика	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число точек	10	5	5	11	12	6	12	16	15	9	14	8
$\frac{(O - E)^2}{E}$	0,00	2,60	2,60	0,06	0,32	1,73	0,32	3,30	2,26	0,14	1,42	0,48

12.4. Понятие о регионализированной переменной

В общем случае любая характеристика, заданная в некоторой пространственной области, в терминах геостатистики может быть представлена суммой трех компонент:

- 1) дрейф, описывающий поверхность тренда в определенном направлении;
- 2) регионализированная переменная, обладающая пространственной корреляцией;
- 3) случайная переменная, пространственно бессвязная и аналогичная процессу «белого шума» в модели временного ряда.

Нетрудно видеть, что подобное представление довольно хорошо соответствует разложению временного ряда в виде (10.5). Дрейф считается детерминированной переменной и оценивается как полиномиальная функция от пространственных координат в линейном или квадратичном приближении, т. е. эквивалентен тренду временного ряда. Регионализированная переменная занимает некоторое промежуточное положение между полностью случайной и полностью детерминированной переменными. В отличие от случайной компоненты, регионализированная переменная непрерывна от точки к точке, однако ее изменения настолько сложны, что они не могут быть описаны какой-либо детерминированной функцией. В то же время регионализированная переменная имеет пространственную корреляцию на коротких расстояниях. Если точки расположены далеко друг от друга, то они становятся уже статистически независимыми. *Степень пространственной непрерывности регионализированной переменной может быть выражена вариограммой.*

Важнейшей характеристикой регионализированной переменной является *величина полудисперсии, служащая мерой степени пространственной зависимости между ее отдельными значениями вдоль заданного направления.* Для простоты положим, что значения рассматриваемой характеристики равномерно расположены в пространстве вдоль прямых линий, т. е. образуют равномерную сетку. Приняв постоянное расстояние вдоль прямой равным Δ , полудисперсия γ_h может быть вычислена для расстояний, кратных Δ :

$$\gamma_h = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n-k} (x_i - x_{i+h})^2, \quad (12.26)$$

где x_i – значение регионализированной переменной, взятой в точке i , x_{i+h} – ее значение, взятое через h интервалов, n – число точек.

Если вычислить значения полудисперсии для различных интервалов h и нанести результаты на график, то полученная кривая, отражающая зависимость γ_h от расстояния, будет называться полувариограммой (рис. 12.7). Очевидно, что полувариограмма является аналогом коррелограммы. Но в отличие от автокорреляционной функции, которая равна 1 при сдвиге $\tau = 0$, при расстоянии равным нулю значение рассматриваемой характеристики сравнивается с самой собой. В результате все разности равны нулю и величина γ_h также обращается в нуль.

С увеличением расстояния Δh сравниваемые точки становятся слабее связанными друг с другом, вследствие чего значения γ_h увеличиваются. Если предположить, что на некотором расстоянии сравниваемые точки уже никак не связаны друг с другом, то квадраты их разностей будут равны по величине дисперсии относительно среднего значения. Полудисперсия более не растет и полувариограмма начинает колебаться возле некоторого значения, называемого порогом. *Расстояние, на котором полудисперсия приближается к дисперсии, называется размахом (рангом) регионализированной переменной.*

Для произвольной точки в пространстве можно построить симметричный интервал равный двойной величине размаха. Если регионализированная переменная однородна (всюду имеет одно и то

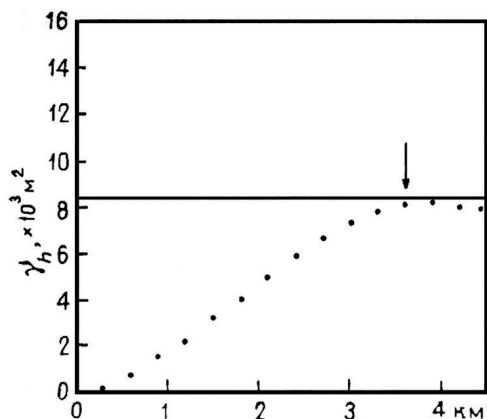


Рис. 12.7. Схематическое представление полувариограммы (по Девису)

же среднее значение), то любое положение точки вне этого интервала совершенно независимо от центральной точки. И только внутри интервала значения регионализированной переменной в любой точке определенным образом связаны с центральной точкой. Следовательно, они могут быть использованы для оценки центральной точки. Например, в виде весов, которые должны быть приписаны каждому измерению.

Можно показать, что между полудисперсией и другими статистиками (автоковариацией и автокорреляцией) имеются определенная взаимосвязь. Для однородной регионализированной переменной полудисперсия для расстояния Δh равна разности между дисперсией и автоковариацией для того же расстояния, т. е.

$$\gamma_h = R_u(0) - R_u(h).$$

Для стандартизированной однородной регионализированной переменной полувариограмма будет зеркальным отражением автокорреляционной функции (рис. 12.8).

Для аппроксимации вариограммы используются нижеследующие модели.

1. *Сферическая* модель имеет вид:

$$\gamma_h = \sigma^2 \left[\left(\frac{3h}{2a} \right) - \left(\frac{h^3}{2a^3} \right) \right] \text{ для } h < a,$$

$$\gamma_h = \sigma^2 \text{ для } h > a, \quad (12.27)$$

где σ^2 – дисперсия регионализированной переменной; a – размах регионализированной переменной.

2. *Экспоненциальная* модель:

$$\gamma_h = \sigma^2 (1 - e^{-h/a}). \quad (12.28)$$

3. *Кусочно-линейная* модель:

$$\gamma_h = \alpha h \quad h < a,$$

$$\gamma_h = \sigma^2 \quad h \geq a, \quad (12.29)$$

где α – угловой коэффициент.

Заметим, что параметр a , входящий в сферическую и экспоненциальную модели, довольно часто интерпретируется как радиус пространственной корреляции исходных данных.

На рис. 12.9 приводится сравнение первых двух моделей. Нетрудно видеть, что сферическая модель довольно быстро достигает некоторого *порога* (критического расстояния), в то время как

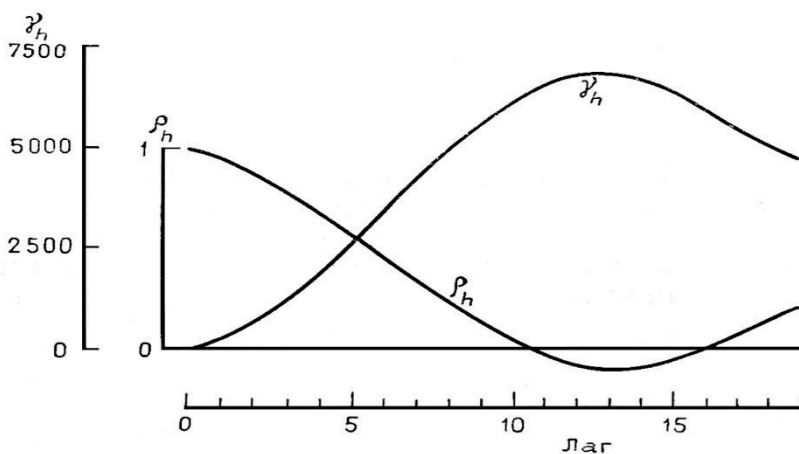


Рис. 12.8. Соотношение между полудисперсией и автокорреляцией для стандартизированной однородной регионализованной переменной

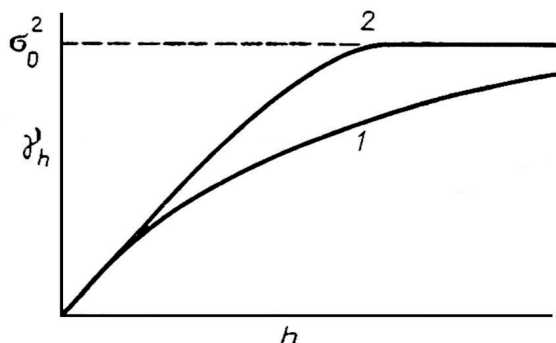


Рис. 12.9. Сравнение экспоненциальной и сферической моделей полувариограммы: 1 – экспоненциальная модель, 2 – сферическая модель

экспоненциальная модель никогда не достигает своего предельного значения, а лишь приближается к нему асимптотически. Следовательно, полудисперсия второй модели всегда меньше, чем первой. Отметим, что вблизи начала координат обе модели совпадают, и график их имеет вид прямой линии, описываемой кусочно-линейной моделью. Поэтому для расстояний, значительно меньших порога, последняя модель может служить уже хорошим приближением.

Глава 13. Методы анализа случайных полей

13.1. Построение и анализ карт

Одной из важных практических задач является построение карт в изолиниях. Как известно, изолинии на карте связывают точки равных значений, вследствие чего пространство между двумя последовательными изолиниями содержит только точки, значения в которых попадают внутрь интервала, определенного этими изолиниями. Карты служат обобщением эмпирической информации или результатов теоретических расчетов. Понятно, что практическая значимость их не вызывает сомнения. В то же время карты, особенно объединенные какой-либо тематической идеей, могут представлять значительную научную ценность. В частности, «Атлас океанов», содержащий несколько тысяч самых разнообразных карт о физических, химических, метеорологических, геоформологических, биологических и иных полях в океанах и в атмосфере над ними, опубликованный в начале 1980-х годов, еще многие десятилетия считался фундаментальным научным трудом.

Построение карт включает в себя несколько этапов:

- оценка репрезентативности данных;
- выбор гипсометрической основы и масштаба карты;
- выбор интервала между изолиниями;
- проведение изолиний.

Оценка репрезентативности данных, по существу, означает их первичный анализ, который рассмотрен в разделе 1. Дополнительно оценивается степень репрезентативности самих станций, что особенно важно при построении метеорологических карт. Речь идет о характере ландшафта, где расположена станция. Например, при картировании элементов климата вряд ли можно пользоваться данными станции, находящейся в пределах крупного города. Известно, что города служат дополнительными очагами тепла. Так, количество тепла, выделяемое крупными промышленными городами, по некоторым оценкам может даже превышать естественный приток от солнца. Особенно значительными различия в температуре в городе и вне его пределов оказываются в зимний период. Например, в Москве эти различия зимой в отдельные дни могут достигать 8–10 °С, среднемесячные значения составляют порядка

4 °С, а средние годовые температуры внутри города выше более чем на 1 °С.

Приведем другой пример. Если станция расположена в узкой долине, то в зависимости от преобладающего направления ветра ее данные (характеристики ветра, осадков, температуры и др.) могут существенно отличаться от аналогичных данных, измеренных вне этой долины. Следовательно, данные указанной станции отражают локальные (мезомасштабные) условия колебаний метеорологических характеристик и при построении климатических карт они могут внести серьезные искажения.

При построении океанологических карт или метеорологических карт над океанами основные проблемы заключаются в катастрофическом отсутствии данных. Кроме того, при построении метеорологических карт следует принимать во внимание искажение характеристик вблизи берегов крупных островов и материков. Известно, например, что количество осадков, выпадающих в прибрежной зоне, обычно существенно выше, чем над открытой акваторией.

Что касается выбора масштаба карты, то для этого можно использовать следующее соотношение:

$$M = \frac{\delta}{\delta_k}, \quad (13.1)$$

где δ_k – предельно допустимый градиент на карте в единицах измерения картируемого элемента на 1 мм расстояния, δ – наибольший пространственный градиент на местности, выраженный в тех же единицах.

Примем в качестве допустимой ошибки, порождаемой картографическим процессом, $1/3$ среднеквадратической ошибки σ картируемой величины и будем считать суммарную среднеквадратическую погрешность, обусловленную погрешностями оформления издательских оригиналов, неточности снятия данных с карты и др., близкой к 0,6 мм. Тогда формула (13.1) примет вид:

$$M = \frac{\delta}{0,55\delta}. \quad (13.2)$$

Выбор интервала между изолиниями определяется исходя как из формальных, так и неформальных соображений. Интервал между изолиниями, с одной стороны, должен обеспечивать необходимую точность карты, а с другой – должен быть увязан с избранным масштабом карты. При большом интервале между изолиниями

(недостаточном количестве изолиний) возникает необходимость сложной графической интерполяции при снятии значений в каждой заданной точке карты, что приводит к потере точности. При избыточном количестве изолиний они в отдельных местах карты могут сливаться, вследствие чего создается неверное впечатление о большой точности карты.

При выборе интервала следует исходить из того, что изолинии должны проводиться так, чтобы погрешности, возникающие при интерполяции между ними, не сказывались на точности получаемых результатов. Поэтому интервал выбирается с таким расчетом, чтобы колебания картируемого элемента по отдельным станциям укладывались между изолиниями, не превышая двойной среднеквадратической ошибки его средних значений.

Проведение изолиний может осуществляться вручную, как это делалось ранее, или с помощью ЭВМ. Например, в течение многих десятилетий синоптические карты погоды строились непосредственно синоптиками. Затем эта работа была «поручена» ЭВМ. Сравнение синоптических карт, полученных автоматизированным и ручным способами, показало, что в некоторых случаях благодаря опыту и знаниям синоптик может провести изолинии на неосвещенной измерениями территории более правильно, чем ЭВМ. В то же время синоптик может серьезно и ошибиться. Специально проведенный эксперимент сравнения нескольких сотен синоптических карт, построенных ЭВМ и вручную, показал, что усредненные карты почти совпали друг с другом. Это означает, что ЭВМ вела себя как «усредненный» синоптик.

Естественно, что построение изолиний ЭВМ происходит на основе каких-либо геометрических соотношений, причем не всегда они вытекают из строгих теоретических закономерностей, а могут основываться на соображениях здравого смысла и практического опыта. Поэтому те допущения, которые заложены в расчетную схему, переносятся на результаты картирования.

Кроме того, любая расчетная схема должна предусматривать непрерывность картируемой характеристики всюду в пределах данного пространства, однозначность ее в любой точке и коррелированность на расстоянии, большем типичного расстояния между исходными точками. Последнее условие означает, что в соседних точках картируемая характеристика должна иметь близкие значения, вследствие чего построенные изолинии будут носить более закономерный и плавный характер. И, наоборот, при малой

коррелированности значения в соседних точках начинают сильно различаться, поэтому проведение изолиний в значительной степени носит уже случайный характер и имеет много локальных, зачастую плохо интерпретируемых экстремумов.

По-видимому, универсального алгоритма построения изолиний, пригодного для любых условий, просто не существует. В зависимости от характера исходных данных, их точности, размещения точек на карте, рельефа местности и некоторых других факторов результаты картирования могут существенно различаться. Достаточно просто выполнять построение изолиний в рамках статистико-графического пакета «Серфер», одна из последних версий которого (8-я версия) содержит 12 различных методов интерполяции и проведения изолиний. Причем определить априори, какой из них лучше практически невозможно. Поэтому важным является оценка качества построенных карт по независимым данным, т. е. данным, не вошедшим в исходный архив, используемый для построения карты.

13.2. Пространственное осреднение гидрометеорологических данных

На первый взгляд, задача оценки пространственной средней относится к числу рутинных операций. Однако это не совсем так. Поскольку случайные поля обычно заданы на нерегулярной сети точек, то задача их пространственного осреднения в отличие от временного осреднения носит уже нетривиальный характер. Действительно, не во всех случаях простое арифметическое осреднение позволяет получить корректную оценку пространственной средней. Предположим, нам требуется выполнить осреднение значений осадков для предгорной части Кавказа. На равнинной части этой территории осадкомерная сеть станций существенно более плотная, чем в предгорной части. Однако хорошо известно, что вследствие топографического эффекта в предгорной части осадков выпадает заметно больше, чем на равнине. По существу, это означает невыполнимость условий однородности и изотропности. Поэтому простое арифметическое осреднение по существенно неравномерной сети приведет к явному занижению пространственной средней.

Можно привести также другой пример, связанный с определением осадков над водными акваториями. Известно, что над открытыми водными акваториями осадков выпадает существенно ниже, чем над крупными островами и прибрежными районами. Особенно

большие погрешности могут возникать в условиях значительной пространственной неоднородности осадков. Так, на юго-западном побережье Каспийского моря, во влажном субтропическом климате выпадает до 2000 мм осадков в год, в то время как буквально через 200 км, у восточного берега, – всего лишь около 100 мм. Понятно, что пространственное осреднение осадков по акватории Каспийского моря по данным островных и береговых станций будет неминуемо приводить к значительным искажениям их осредненной величины.

Весьма важной данная задача оказывается также в связи с внедрением в практику спутниковых и радиолокационных наблюдений. Как известно, получаемые с их помощью гидрометеорологические характеристики уже изначально являются осредненными по пространству. Для идентификации дистанционных параметров приходится решать обратные задачи. Простейшая из них – это сравнение пространственных средних, полученных по наземной сети станций и дистанционными методами.

Если случайные поля имеют ансамбль (множество) реализаций, то это позволяет решить задачу оценки пространственной средней при условии однородности и изотропности на основе известной статистической структуры поля методом оптимальной интерполяции. Однако во многих случаях производить осреднение приходится по единственной реализации и тогда решение данной задачи с помощью оптимальной интерполяции уже невозможно. В настоящее время известно значительное число методов, реализующих процедуру пространственного осреднения исходных данных, однако почти все они могут быть использованы при выполнении условия однородности, изотропности и эргодичности случайного поля, принимаемых обычно априори.

Как известно, среднее арифметическое для некоторой пространственной области S определяется следующим образом:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{S} \iint_{(S)} f dx dy. \quad (13.3)$$

При достаточно густом равномерном распределении точек обычно ограничиваются пространственным осреднением вида:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i, \quad (13.4)$$

где n – число точек.

Как уже отмечалось выше, при неравномерном распределении точек и невыполнении условия однородности и изотропности данная формула может приводить к серьезным погрешностям. Например, используя данные по среднемесячным осадкам в выделенных узлах на рис. 13.1, получим по формуле (13.4) $\langle P \rangle = 52$ мм/мес. Если же мы предварительно проведем изолинии осадков, например, с помощью рассмотренного ниже метода конечных элементов, а затем снимем их значения в узлах регулярной квадратной сетки и выполним осреднение, то имеем $\langle P \rangle = 60$ мм/мес. Различие между указанными оценками осадков оказывается значимым при уровне значимости $\alpha = 0,05$.

К числу наиболее простых методов осреднения относится *метод квадратов*. Суть его состоит в следующем. Вся рассматриваемая территория (акватория) делится на определенное число квадратов (рис. 13.2) таким образом, чтобы число пустых квадратов было бы минимальным. Для каждого квадрата путем простого арифметического осреднения находится локальная (частная) пространственная средняя. Для «пустых» квадратов, т. е. там, где отсутствуют данные наблюдений, для определения средней могут привлекаться данные соседних квадратов. После этого путем арифметического осреднения частных средних определяется средняя по всей территории. Если число точек в квадратах существенно различается, то для повышения точности следует вводить весовые множители, учитывающие их число.

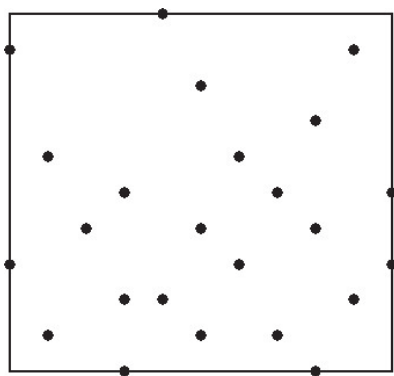


Рис. 13.1. Пространственное распределение осадкомерной сети станций

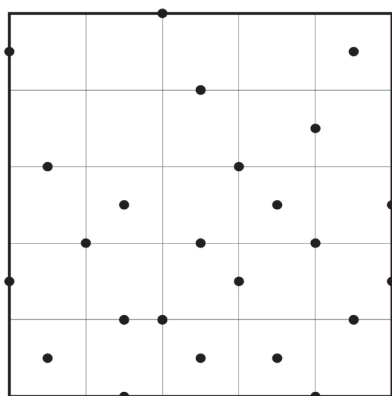


Рис. 13.2. Осреднение по площади методом квадратов.
Точки – пункты наблюдений

Примем, что рассматриваемая область на рис. 13.1 разбита на M квадратов, в каждом из которых находится n точек наблюдения (рис. 13.2). Общее число точек составляет N . Тогда общая пространственная средняя рассчитывается как:

$$\langle f \rangle = \sum_{i=1}^N f_i p_i,$$

где $p_i = \frac{1}{n_i M}$, причем $N = M \sum n_i$.

Безусловным достоинством метода квадратов является его простота. К очевидным недостаткам относятся неоднозначность разбиения площади на квадраты и неравномерное освещение квадратов данными.

Заметим, что данный принцип использован при обработке гидрометеорологических наблюдений попутных (коммерческих) судов в Северной Атлантике. Как известно, дважды в сутки (0 и 12 ч по Гринвичу) радисты передавали в Центры погоды радиосводки с данными о температуре воды и воздуха, скорости ветра, атмосферном давлении. Во ВНИГМИ-МЦД бывшего СССР эти данные обрабатывались. При этом вся акватория Северной Атлантики была разделена на пятиградусные «квадраты», границами которых являлись широты и долготы, кратные пяти. По координатам судна гидрометеорологические данные относились к тому или иному квадрату. Накопленные за месяц наблюдения усреднялись и затем по истечению годового интервала времени публиковались атласы. Таким образом, начиная с 1977 г. в течение более чем 10 лет была издана серия атласов и справочников с характеристиками крупномасштабного взаимодействия океана и атмосферы, которые затем активно использовались в научных и практических целях.

Другой достаточно простой способ осреднения – это *метод треугольников*. В соответствии с этим методом рассматриваемая область разбивается на треугольники, в вершинах каждого из которых расположены станции (рис. 13.3). Полагая линейный характер изменения элемента между вершинами треугольника, находим значение его в центре тяжести треугольника, который представляет среднее арифметическое от данных в вершинах треугольника:

$$f_i = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 f_j. \quad (13.5)$$

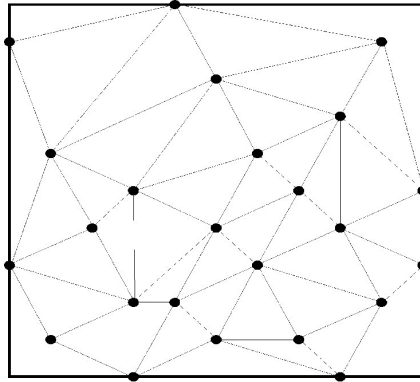


Рис. 13.3. Осреднение по площади методом треугольников.
Точки – пункты наблюдений

Отметим, что центр тяжести находится на пересечении медиан треугольника. После этого выполняется осреднение с весами, пропорциональными площадям треугольников (всего m треугольников):

$$\langle f \rangle = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^m f_i S_i, \quad (13.6)$$

где S_i – площадь треугольника, S – площадь пространственной области осреднения. Данный метод имеет те же достоинства и недостатки, что и метод квадратов. Сравнение оценок пространственной средней по обоим методам показывает, что расхождения обычно невелики.

В качестве обобщения данного метода можно рассматривать *метод конечных элементов*, в соответствии с которым вначале производится разбиение всей площади на треугольники; затем внутри треугольника может быть произведена интерполяция в любую точку треугольника по данным из вершин (из окружающих станций). Интерполяционная формула при этом имеет вид:

$$f = N_i f_i + N_j f_j + N_k f_k, \quad (13.7)$$

где

$$N_i = \frac{[(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y]}{2S},$$

$$N_j = \frac{[(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y]}{2S},$$

$$N_k = \frac{[(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y]}{2S}.$$

Здесь i, j, k – вершины треугольника, x, y – координаты интерполируемого узла, S – площадь треугольника. Данная интерполяционная формула обеспечивает гладкость поля при переходе от одной подобласти к другой. Поэтому она легко может быть использована для получения данных в регулярной сетке. Недостаток – определенный произвол в разбиении области на треугольники. Следует помнить, что точность любого способа разбиения на треугольники зависит от соотношения сторон. Наибольшая точность достигается для равносторонних треугольников. Используя формулу (13.7), осуществляем интерполяцию в узлы регулярной сетки, а далее выполняем обычное арифметическое осреднение. На наш взгляд, именно предварительная интерполяция в узлы регулярной сетки с последующим арифметическим осреднением является наиболее оптимальным вариантом нахождения пространственной средней.

Пример 13.1. Рассмотрим модельный пример. По изначально густой сети станций в узлы регулярной квадратной сетки интерполировались значения осадков. Затем случайным образом сеть была разрежена (см. рис. 13.1). Далее данная территория разбита на 25 квадратов и 35 треугольников. После этого указанными выше методами рассчитывалась пространственная средняя осадков. В результате были получены следующие оценки:

- 1) метод квадратов: $\langle P \rangle = 55$ мм/мес.;
- 2) метод треугольников: $\langle P \rangle = 57$ мм/мес.;
- 3) метод конечных элементов: $\langle P \rangle = 60$ мм/мес.;
- 4) среднее арифметическое по 24 точкам: $\langle P \rangle = 52$ мм/мес.;
- 5) среднее арифметическое по всем узлам квадрата: $\langle P \rangle = 62$ мм/мес.

Итак, практически все методы осреднения несколько занизили величину пространственной средней. Естественно, возникает вопрос, насколько значимы эти расхождения? Использование критерия Стьюдента показало, что значимыми при $\alpha = 0,05$ являются расхождения только между 1 и 5, 3 и 4, 4 и 5 методами осреднения. На наш взгляд, наиболее точными представляются результаты осреднения методом конечных элементов.

13.3. Построение и анализ кросскорреляционной функции

Как уже отмечалось выше, кросскорреляционная функция принципиально отличается от автокорреляционной и чисто пространственной корреляционной функции, ибо синтезирует в себе их свойства, вместе взятые. Действительно, АФ рассчитывается по временной реализации характеристики в 1 точке поля, а пространственная корреляционная функция – по реализации случайного поля в заданный момент времени.

Естественно, что построение кросскорреляционной функции сочетает в себе элементы расчета той и другой функций. При расчете кросскорреляционной функции весьма важным является выполнимость условия однородности и изотропности случайного поля, а также нормального закона распределения для временных реализаций рассматриваемой характеристики в каждой точке пространства. Последнее условие связано с параметрическим характером коэффициента корреляции.

До построения кросскорреляционной функции необходимо проверить выполнимость условия однородности и изотропности случайного поля. Самый простой способ – это анализ изокоррелят, построенных относительно различных пунктов – центров корреляции. Если изокорреляты представляют собой концентрические окружности, то рассматриваемое поле можно считать однородным и изотропным. Естественно данный вывод будет справедлив только относительно той точки, для которой строилось поле изокоррелят. В принципе, при переходе к другой точке пространства все расчеты необходимо повторять. И таких «повторов» может оказаться много. Кроме того, для точек вблизи края карты построение изокоррелят становится вообще невозможным.

Поэтому в ГГО был разработан метод, который позволяет строить лишь одну карту изокоррелят для всего поля. В соответствии с ним одновременно выполняется осреднение коэффициентов корреляции как по грациям расстояния, так и в зависимости от направления между станциями, которое отсчитывается от параллели или меридиана. После этого строится единое поле изокоррелят. Таким образом, осуществляется учет векторного характера поля. Другое преимущество указанного метода состоит в том, что он сглаживает несущественные мелкомасштабные детали, в результате чего изолинии носят более закономерный характер.

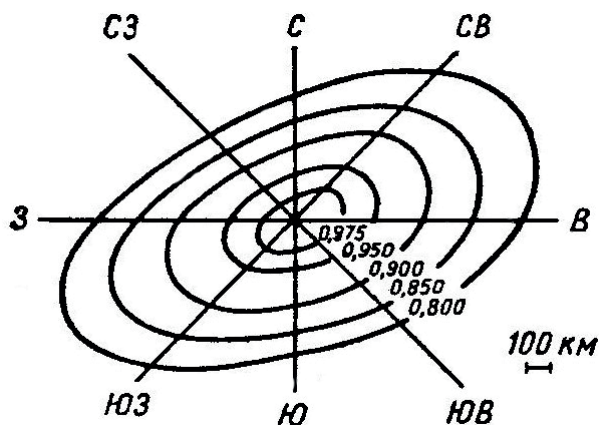


Рис. 13.4. Карта изокоррелят средней месячной температуры воздуха в феврале на Европейской территории России

На рис. 13.4 приводится карта изокоррелят средней февральской температуры воздуха для центральной части Европейской территории России, полученная по данным 172 метеорологических станций. Нетрудно видеть, что поле изокоррелят имеет вид эллипсов, ориентированных вдоль преобладающего переноса воздушных масс, т. е. поле февральской температуры является анизотропным. Правда, на малых расстояниях анизотропия проявляется слабо и только с их увеличением она усиливается. Отметим, что в поле аномалий температуры воздуха анизотропия уже практически не выражена.

После анализа поля изокоррелят переходят к построению кросс-корреляционной функции, процедура расчета которой обычно сводится к следующему. Для всех пар точек рассчитываются выборочные оценки коэффициента корреляции. Далее составляется пространственный вариационный ряд в порядке возрастания расстояния между станциями. Естественно, чем длиннее полученный ряд, тем надежнее будут результаты оценки. Вариационный ряд коэффициентов корреляции разбивается на градации, например по формуле Стерджесса $k \approx 1 + 3,32 \lg n$. Затем определяется ширина градаций. Заметим, что данная формула служит только ориентиром выбора числа градаций, которое обычно корректируется так, чтобы получить более «круглое» значение ширины градации. После этого для каждой градации осуществляется осреднение коэффициентов корреляции. Далее строится график зависимости средних коэффициентов корреляции от расстояния. Для полученной таким образом

кросскорреляционной функции подбирается та или иная аппроксимационная формула.

Пример 13.2. Обратимся к рис. 13.5, на котором приводятся графики кросскорреляционных функций температуры воздуха для лета Европейской территории России при различных периодах осреднения, построенных в предположении однородности и изотропности рассматриваемого поля. Нетрудно видеть, что с увеличением периода осреднения пространственная связность температуры воздуха возрастает.

При всех масштабах осреднения высокая корреляция ($r(l) > 0,6$) сохраняется на довольно значительных расстояниях. Так, для суточного периода $r(l) > 0,6$ она соответствует расстоянию $l \approx 500$ км, для месяца – $l \approx 900$ – 1000 км. Вне зависимости от периода осреднения все корреляционные функции могут быть аппроксимированы выражением вида:

$$r(l) = r(0) \exp \left(\frac{-l}{l_0} \right)^\alpha,$$

где $r(0)$ – значение корреляции, получаемое экстраполяцией корреляционной функции $r(l)$ на нулевой сдвиг $l = 0$; l_0 – радиус корреляции, за который принимается расстояние, на котором $r(0)$ убывает в e раз; α – подгоночный коэффициент. Отметим, что в отличие от автокорреляционной функции величина $r(0)$ обычно меньше

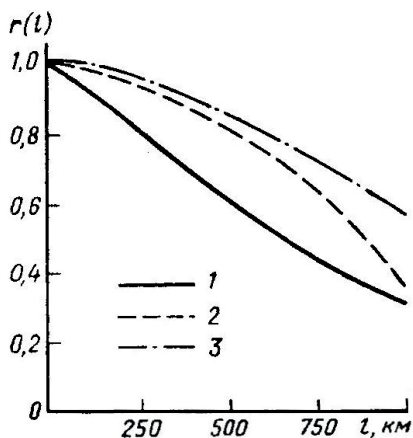


Рис. 13.5. Кросскорреляционная функция температуры воздуха для лета на ЕТР при различных периодах осреднения: 1 – сутки, 2 – декада, 3 – месяц

единицы. Например, для месячных значений температуры воздуха в соответствии с рис. 13.5 величина $r(0) = 0,99$.

13.4. Понятие об объективном анализе

Как уже отмечалось выше, в узком смысле, *объективный анализ* – это процедура перевода данных из нерегулярной сети точек в регулярную сеть. Однако в метеорологии объективный анализ (ОА) обычно понимается более широко и включает в себя комплекс автоматических методов анализа информации в целях численного моделирования и прогноза. При этом основными задачами ОА являются:

- 1) исключение грубых ошибок наблюдений;
- 2) автоматизация сбора и подготовки информации;
- 3) интерполяция данных в узлы регулярной сетки;
- 4) согласование полей отдельных элементов;
- 5) построение пространственных карт;
- 6) построение четырехмерных полей данных.

Задачи ОА в океанологии и экологии отличаются от метеорологических задач из-за отсутствия постоянной сети станций мониторинга, вследствие чего ОА в этих науках понимается в основном в узком смысле. В общем случае восстановление поля любого элемента производится в четырехмерном пространстве. Если обозначить через r радиус-вектор точки такого пространства, то тогда интерполяция элемента g в точку r_0 выполняется по известным значениям в точках $r_1, r_2, \dots, r_n$ по следующей формуле:

$$g^*(r_0) = F\{g(r_1), g(r_2), \dots, g(r_n)\}. \quad (13.8)$$

Вид функции F определяется способом интерполяции, причем в некоторых случаях она может зависеть от взаимного расположения точек $r_1, r_2, \dots, r_n$. Естественно, что результат интерполяции в точке r_0 обычно отличается от его исходного значения $g(r_0)$, вследствие чего возникает ошибка интерполяции:

$$\delta(r_0) = g^*(r_0) - g(r_0).$$

Обычно функцию F представляют в виде линейной функции своих аргументов:

$$f(r_0) = \sum_{i=1}^n a_i g(r_i), \quad (13.9)$$

где a_i – веса, связанные с системой расположения точек в пространстве.

Данное представление называется линейной интерполяцией, поскольку описывает характеристику в виде ее некоторой линейной комбинации. Из-за своей простоты методы линейной интерполяции получили довольно широкое распространение на практике.

Полиномиальная интерполяция. Одним из первых методов ОА, получивших распространение в США в 50-е годы прошлого столетия при численном анализе метеорологических полей, был метод полиномиальной интерполяции. Суть его заключается в следующем. В предположении однородности и изотропности исходное поле принимается как полиномиальная функция от пространственных координат. Тогда разложение поля по некоторой базисной системе координат можно представить как:

$$f = \sum_{k=1}^m b_k \varphi(r), \quad (13.10)$$

где $\varphi(r)$ – известная функция координат; b_k – коэффициенты разложения, которые подлежат определению.

Если функция координат аппроксимируется, например, полиномом второй степени, то имеем:

$$f(r_0) = f(x, y) = b_1 + b_2 x_i + b_3 y_i + b_4 x_i^2 + b_5 y_i^2 + b_6 x_i y_i, \quad (13.11)$$

где x_i, y_i – координаты i -той станции.

Отсюда видно, чтобы получить систему из шести уравнений с шестью неизвестными, должно быть известно значение элемента не менее чем в шести точках. Решая систему линейных уравнений каким-либо численным методом, получаем оценки неизвестных коэффициентов $b_1, b_2, \dots, b_6$. Это позволяет вычислить значение рассматриваемого элемента в заданном узле интерполяции. Аналогичным образом для каждого узла регулярной сети точек составляется своя система уравнений. Естественно, что данный метод может быть применен только в случае густой и достаточно равномерной сети станций наблюдений.

Недостатки:

- 1) недостаточная точность интерполяции при неравномерном распределении точек в пространстве;
- 2) в случае изменения системы точек или отсутствия наблюдений на некоторых станциях необходим пересчет коэффициентов.

Метод полиномиальной регрессии. Данный метод является обобщением предыдущего. Он практически полностью дублирует двухмерную полиномиальную регрессию (раздел 8.5). Запишем ее до второго порядка:

$$G(x, y) = \sum \sum a_{ij} x^i y^j + \varepsilon = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + a_{11}xy + \varepsilon. \quad (13.12)$$

Неизвестные коэффициенты a_{ij} в данной формуле могут определяться разными способами. Укажем здесь способ их оценки, несколько отличный от приведенного в разд. 8.5. Если осуществить замену переменных: $z_1 = x^2$, $z_2 = y^2$, $z_3 = xy$, то получим уравнение классической множественной линейной регрессии:

$$G(x, y) = a_0 + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}z_1 + a_{02}z_2 + a_{11}z_3 + \varepsilon.$$

С помощью МНК нетрудно определить коэффициенты регрессии. После этого задавая значения пространственных координат x и y в узлах регулярной сетки, рассчитываются оценки параметра G .

После расчета коэффициентов статистической регрессии осуществляется интерполяция в любую точку области. Отличие ее от метода математической полиномиальной интерполяции состоит в том, что вычисляется лишь одно уравнение, с помощью которого можно сразу же вычислить значения интерполируемой величины для всей пространственной области. Кроме того, данный метод позволяет провести детальную статистическую оценку точности результатов интерполяции. Наконец, с помощью использования пошаговых алгоритмов можно оптимизировать получение «наилучшего» уравнения регрессии.

Пример 13.3. Рассмотрим задачу объективного анализа температуры поверхности океана в Северной Атлантике. На рис. 13.6 представлено поле ТПО в узлах географической сетки 5° широты на 10° долготы для сентября 1991 г. Общая длина выборки составила $N = 64$ точки. Нетрудно видеть, что в распределении изолиний ТПО достаточно четко прослеживается широтная зональность, т. е. постепенное уменьшение ТПО от низких широт к высоким. Это означает, что для интерполяции можно применить метод двухмерной полиномиальной регрессии.

Разобьем акваторию Северной Атлантики на 2 примерно равноценные части. Для одной из них (крестики на рис. 13.7) будем считать, что значения ТПО в ней известны. А для другой части (точки на рис. 13.7), наоборот, значения ТПО неизвестны. Таким образом, первая – это зависимая выборка, длина которой составляет $n_1 = 33$ значения ТПО, а другая – независимая выборка длиной

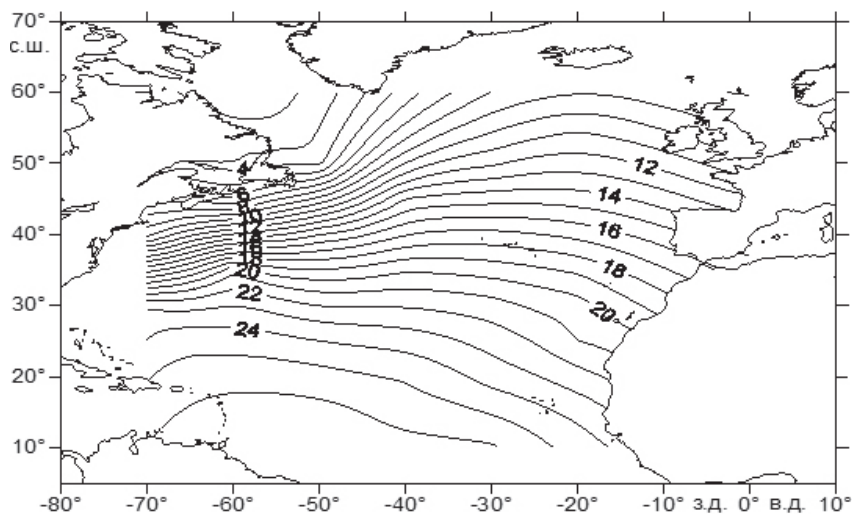


Рис. 13.6. Пространственное распределение температуры поверхности океана в сентябре 1991 г. на акватории Северной Атлантики

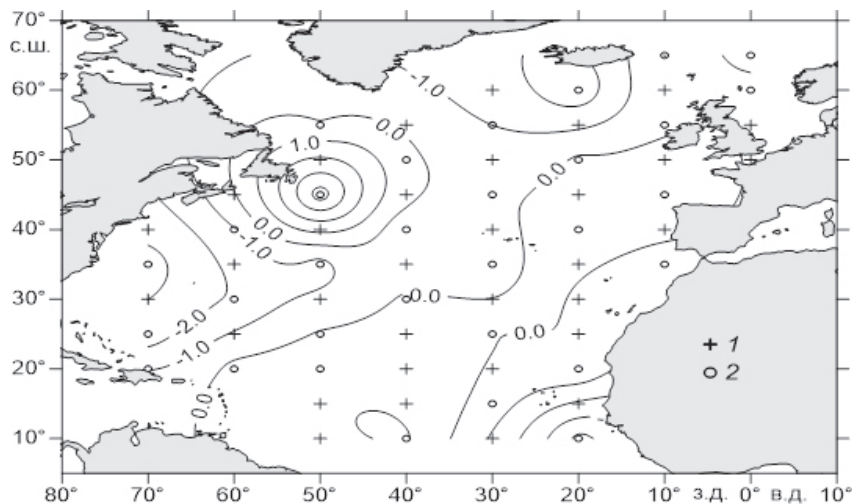


Рис. 13.7. Пространственное распределение ошибок восстановления температуры поверхности океана в сентябре 1991 г. на акватории Северной Атлантики:
1 – точки зависимой выборки, 2 – точки независимой выборки

$n_2 = 31$. Присвоим западной долготе знак минус и рассчитаем для зависимой выборки уравнение второй степени:

$$\text{ТПО} = 8,869 + 0,418\varphi - 0,638\lambda - 0,007\varphi^2 - 0,004\lambda^2 + 0,010\varphi \times \lambda.$$

Стандартизированное уравнение регрессии будет иметь вид:

$$Z_{\text{ТПО}} = 0,89z_1 - 1,74z_2 - 1,11z_3 - 0,78z_4 + 1,15z_5.$$

В этом уравнении z_1 соответствует переменной φ , z_2 – переменной λ и т.д. Итак, мы видим, что наибольший вклад в описание изменчивости функции отклика принадлежит λ , следующий – произведению $\varphi \times \lambda$ и т.д. Коэффициент детерминации данной модели равен $R^2 = 0,94$, критерий Фишера $F = 84,9$, стандартная ошибка модели $\sigma_{y(x)} = 1,85^\circ\text{C}$, а максимальное значение критерия $p\text{-level}$, которое принадлежит свободному члену, составляет $p\text{-level}_{(b_0)} = 0,06$. Следовательно, модель регрессии в статистическом смысле является очень «хорошей». Даже довольно большая ошибка $\sigma_{y(x)}$ по отношению к стандартному отклонению ТПО зависимой выборки ($\sigma_{\text{ТПО}} = 6,95^\circ\text{C}$) оказывается малой величиной. Следовательно, можно ожидать, что точность интерполяции для независимой выборки также должна быть весьма высокой.

Действительно, для большинства сеточных узлов (24 из 31) ошибка интерполяции оказалась меньше среднеквадратической ошибки, которая для независимой выборки равна $\sigma_{y(x)} = 1,60^\circ\text{C}$, т. е. даже ниже, чем для зависимой выборки. Пространственное распределение ошибок приводится на рис. 13.7.

Как и следовало ожидать, максимальные ошибки интерполяции отмечаются в наиболее мощной фронтальной зоне, находящейся в дельте Гольфстрима, где на это течение натекает холодное Лабрадорское течение. Ошибка интерполяции в точке 45° с.ш. и 50° з.д. превышает 4°C . Отметим, что данный очаг максимальных ошибок является стационарным, т. е. он существует во все сезоны и для любого года. Наличие его связано с тем, что гидрометеорологические процессы здесь носят подсеточный характер. Другими словами, масштаб их существенно меньше по сравнению с масштабом заданной географической сетки. Вследствие этого избежать больших ошибок интерполяции при заданной географической сетке вряд ли возможно, к каким бы совершенным методам мы не прибегали. Второй очаг существенных ошибок находится в зоне действия теплого течения Гольфстрим. С правой стороны Гольфстрима формируются мезомасштабные вихри (ринги), наличие которых и приводит к ошибкам при интерполяции ТПО. Итак, можно считать, что в целом интерполяция ТПО для сентября 1991 г. методом полиномиальной регрессии является успешной.

13.5. Использование статистического пакета «Серфер» (Serfer) для объективного анализа полей

Одним из наиболее простых и доступных способов двухмерной интерполяции является использование пакета «Серфер», который позволяет производить интерполяцию данных, заданных в произвольной сети точек в узлы регулярной сетки и выполнять проведение изолиний. При этом число используемых алгоритмов зависит от версии пакета. Так, в седьмой версии таких алгоритмов 9, а в восьмой версии – 12. Естественно, что получаемые результаты могут очень сильно зависеть от метода интерполяции. Поэтому очень кратко перечислим характерные особенности методов интерполяции восьмой версии пакета «Серфер».

1. Метод обратных расстояний (Inverse Distance to a Power) позволяет производить последовательную интерполяцию данных от одной точки к другой относительно узлов сетки. В результате происходит сглаживание истинных значений, и чем дальше удалено значение от узла сетки, тем больше оно искажается. С помощью данного метода осуществляется взвешивание расстояния, так что влияние одной точки относительно другой уменьшается с увеличением расстояния от узла сетки. Вычисляя узел сетки, всем точкам присваиваются веса. Когда конкретное наблюдение совпадает с узлом сетки, расстояние между наблюдением и узлом сетки равно 0,0, поэтому такому наблюдению присваивается вес равный 1,0 (в данном случае значение является узлом сетки), в то время как всем другим наблюдениям назначаются веса 0,0. Поэтому метод имеет тенденцию интерполировать данные таким образом, что вокруг узла образуются concentрические изолинии. Метод не экстраполирует значения вне диапазона данных.

2. Метод крайкинга (Kriging) – один из наиболее гибких методов, который может использоваться для любого набора данных, причем он наиболее эффективен для линейно изменяющихся данных. С его помощью осуществляется построение визуально привлекательных карт даже для весьма нерегулярных полей данных. Метод крайкинга позволяет связать экстремальные значения между собой, а не изолировать их контурами от остальных значений. Применяется для создания точной сетки данных. Имеет оптимальные статистические свойства и может экстраполировать значения вне диапазона данных.

3. Метод минимальной кривизны (Minimum Curvature) формирует плавные изолинии, но может создать искажение (завышать, занижать) значения в областях, где данные отсутствуют. Искажение данных не превышает величины крайних значений ряда (максимального и минимального). С помощью метода интерполируются данные с минимальным искривлением, что способствует сохранению структуры данных. В основе метода лежит взвешенный метод наименьших квадратов. Данные могут экстраполироваться за пределами заданных значений.

4. Модифицированный метод Шеппарда (Modified Shepard's Method) подобен методу обратных расстояний. Используется метод наименьших квадратов, что предотвращает появление замкнутых изолиний и позволяет объединять соседние значения при минимальном расстоянии между данными. Можно экстраполировать значения вне диапазона данных.

5. Метод дальнего соседа (Natural Neighbor) позволяет хорошо интерполировать только значения с полным набором данных, без пропусков в ряду, не экстраполируются пропуски в данных. В результате интерполяции вся область данных разбивается на многоугольники. Изолинии проводятся с учетом взвешенного среднего числа соседних наблюдений через центры многоугольников.

6. Метод ближайшего соседа (Nearest Neighbor) позволяет приспособить данные наблюдений к узлам регулярной сетки. Данный метод используется для полного набора данных.

7. Метод полиномиальной регрессии (Polynomial Regression) отображает основные, ярко выраженные тенденции в ряду, не учитывая внутренние локальные особенности. Позволяет заполнить пропуски в наблюдениях.

8. Метод радиальных базисных функций (Radial Basis Functions) наиболее гибкий метод, результаты подобны методу Kriging, подходит для большого набора данных. В методе определяется оптимальный набор весов таким образом, чтобы значения ряда интерполировались в узел сетки.

9. Метод линейной интерполяции (Triangulation with Linear Interpolation). Триангуляция, т. е. разбивка на треугольники с линейной интерполяцией, эффективна для небольшого набора данных. Создаются хорошие треугольные образы между точками данных. Не интерполируются данные вне диапазона исходного поля. Алгоритм метода позволяет строить треугольники, вершинами которых служат исходные точки, причем узлы сетки оказываются внутри

каждого треугольника. Кроме того, точки связываются так, что грани треугольников не пересекаются между собой. Лучшие результаты получаются при относительно равномерном распределении точек по области сетки.

10. Метод скользящего среднего (Moving Average) применим к очень большим рядам наблюдений (> 1000 наблюдений). Метод извлекает промежуточные, скрытые тенденции в ряду.

11. Метод меры данных (Data Metrics) используется, чтобы получить информацию о данных в узлах сетки.

12. Местный полиномиальный метод (Local Polynomial) применим к монотонным, линейно изменяющимся наборам данных, без резких перепадов в структуре ряда. В основе алгоритма лежит метод взвешенных наименьших квадратов, который стремится присвоить интерполированным данным значения в узлах сетки. Вычислительная скорость метода не зависит от размера данных.

Безусловно, каждый из перечисленных методов обладает как определенными достоинствами, так и недостатками. Априори нельзя сказать, какой из них лучше, а какой хуже. Просто в зависимости от специфики исходных данных лучшие (худшие) результаты интерполяции могут относиться к любому из них. Указанные методы являются формальными в том смысле, что не учитывают специфические особенности исходного поля. Практически все они дают наилучший результат для нормально распределенных пространственных данных. Если же распределение их отличается от нормального, то желательно предварительное приведение их к нормальному виду.

Кроме того, многими методами интерполяции принимается равномерное изменение рассматриваемой характеристики от точки к точке. В действительности, это выполняется далеко не всегда. Так, на территории суши она может быть подвержена влиянию локальных условий: особенностям орографии, степени залесенности, наличию водоемов и т.п. В океане локальное влияние на гидрометеорологические характеристики оказывают острова, побережья, фронтальные зоны, холодные (теплые) течения и др.

Таким образом, в зависимости от характера исходных данных результаты интерполяции в каждом конкретном случае могут быть различными. В тех случаях, когда существует возможность проверки результатов интерполяции, обязательно следует использовать все методы и по минимуму среднеквадратической ошибки находить лучший вариант.

Если плотность точек (станций) в пространстве существенно различается, то это может привести к завышению роли точек, образующих сгущения. В этом случае может быть применена так называемая *декластеризация*. Суть ее состоит в том, что точкам, находящимся в области разреженной плотности сети, присваивается больший вес, а точкам в области сгущений – меньший вес. При этом вся область интерполяции разбивается на ряд элементарных ячеек, а затем на нее накладывается регулярная сетка. Вес принимается обычно обратно пропорциональный числу точечных измерений каждой из ячеек сетки.

Наконец, необходимо принимать во внимание дополнительные моменты. Как известно, расположение сети исходных станций (точек) обычно задается в географической системе координат. Но поскольку декартовая система координат удобнее в практических расчетах, то для пространственных областей не очень больших размеров целесообразно использовать именно ее. С этой целью при переходе от географической системы координат к декартовой, могут быть применены следующие формулы:

$$x = a \cos \bar{\varphi} (\lambda - \lambda_{\min}), \quad y = a (\varphi - \varphi_{\min}),$$

где x и y – декартовы координаты в км, причем ось x направлена на восток, ось y – на север; φ – широта; λ – долгота точки в градусах; $\varphi_{\min}$ и $\lambda_{\min}$ – минимальные из значений широты и долготы для точек контура; $\bar{\varphi}$ – средняя широта, определяемая как полусумма минимальной и максимальной широт контура; a – средняя длина градуса меридиана ($a = 111,2$ км). Для пространственных областей больших размеров следует уже учитывать изменения длины одного градуса по широте. Кроме того, представляется удобным перейти от исходных координат, задаваемых в километрах, к безразмерным координатам, которые можно задать следующим образом:

$$x_{\text{без}} = \frac{(x - x_{\min})}{Lx}, \quad y_{\text{без}} = \frac{(y - y_{\min})}{Ly},$$

где $x_{\min}$ и $y_{\min}$ – минимальные из значений абсцисс и ординат точек контура, $Lx = x_{\max} - x_{\min}$ – поперечник контура в направлении оси абсцисс ($x_{\max}$ – максимальное из значений абсцисс точек контура), аналогично $Ly = y_{\max} - y_{\min}$. В безразмерных координатах на площади осреднения значения абсцисс изменяются в пределах от 0 до 1, ординат – от 0 до $l = Ly/Lx$.

Пример 13.4. Корректный статистический анализ невозможен, если в матрице исходных данных имеются пропуски. Восстановление исходных данных в тех случаях, когда они отсутствуют, представляет собой необходимый и одновременно самый сложный этап первичного анализа информации. При единичных пропусках их заполнение, вообще говоря, является стандартной операцией и не представляет особых затруднений. Однако с увеличением числа пропусков задача их заполнения становится все более сложной. Причем в общем случае данная задача не имеет единственного решения, ибо в зависимости от количества пропусков, точности данных, их изменчивости и других факторов могут применяться различные методы восстановления.

Однако принципиальная сложность заключается в том, что мы не можем непосредственно оценить точность восстановления. В то же время некорректность в заполнении пропущенных данных приводит, как правило, к искаженным статистическим выводам. Было бы прекрасно, если бы удалось найти такой способ заполнения пропусков, при котором анализ полученных полных данных оказывался бы корректным. Особенно опасно искажение структуры исходных рядов при прогнозе гидрометеорологических процессов и явлений.

Хотя по своей сути задача восстановления носит явно неформальный характер, тем не менее, ее решение должно осуществляться на основе формальных методов. Поэтому рассмотрим задачу восстановления исходных данных на основе алгоритмов пакета «Серфер». Отметим, что восстановление пропусков временного ряда по существу тождественно задаче объективного анализа пространственных полей.

Воспользуемся для этого среднемесячными данными по температуре поверхностной воды на станции Малые Кармакулы ($72^{\circ}23'N$; $52^{\circ}44'E$) с 1977 по 2003 г., т. е. длина ряда составляет $n = 27$. Число пропусков данных на станции для каждого месяца составляет от 6 до 7 случаев или от 22 до 26 % (таблица 13.1). При этом полностью отсутствуют данные за 1978, 1982, 1983, 1988, 1992 и 1995 гг. Учитывая сравнительно высокий процент отсутствующих данных, достаточно очевидно, что любое восстановление неизбежно приведет к искажению структуры временного ряда. Поэтому речь идет лишь о нахождении такого метода, который обеспечивал бы минимальное искажение структуры данных.

Таблица 13.1.

**Первичные статистические характеристики температуры воды
на станции Малые Кармакулы (72°23'N; 52°44'E) с 1977 по 2003 г. ($n = 27$)**

Месяц	Число пропусков	Среднее	Медиана	$X_{\min}$	$X_{\max}$	Стандартное отклонение
I	6	-1,8	-1,8	-1,9	-1,7	–
II	6	-1,8	-1,8	-1,9	-1,7	–
III	6	-1,8	-1,8	-1,9	-1,7	–
IV	6	-1,8	-1,8	-1,9	-1,4	–
V	6	-1,7	-1,7	-1,8	-1,5	–
VI	6	-0,3	-0,7	-1,5	2,3	0,98
VII	6	5,2	4,7	1,2	8,8	1,84
VIII	6	6,8	6,9	4,6	9,7	1,42
IX	6	4,5	4,3	2,3	6,2	1,11
X	7	0,9	0,8	-0,8	3,6	1,23
XI	7	-1,3	-1,5	-1,8	-0,4	0,45
XII	7	-1,7	-1,8	-1,8	-1,5	–

Из таблицы 13.1 отчетливо видно, что зимой (с декабря по май) температура поверхности моря (ТПМ) практически постоянна. Очевидно, заполнение пропусков в данных для этих месяцев может быть осуществлено подстановкой средних значений. Следовательно, в интерполяции нуждаются лишь оценки температуры воды за период с июня по ноябрь. Учитывая, что максимальная изменчивость температуры отмечается в июле и августе, то естественно ожидать наибольшей ошибки восстановления именно в эти месяцы. Кроме того, анализ первичных статистических характеристик за отдельные месяцы свидетельствует о том, что исходные данные имеют резко асимметричное распределение. Естественно, это тоже затрудняет задачу восстановления данных.

Поскольку априори неизвестно, какой из методов пакета «Серфер» наилучшим образом отвечает задаче восстановления данных температуры воды, то будем использовать все восемь методов его седьмой версии.

Суть интерполяции заключалась в следующем. По осям координат (x – месяцы, y – годы) размещаются исходные данные. Затем выбирается метод интерполяции и осуществляется оценка значений ТПМ в пустых узлах сетки. После этого остается только оценить точность восстановленных значений температуры. Но это как раз самое сложное. Поэтому вначале были отсеяны те методы, которые заведомо искажали сезонный ход температуры и завышали ее

крайние ($X_{\max}$ и $X_{\min}$) значения. В результате были исключены три метода (методы обратных расстояний, полиномиальной регрессии и радиальных базисных функций), и в таблице 13.2 приводятся сезонные изменения температуры по фактическим и проинтерполированным данным для отсутствующих месяцев для ст. Малые Кармакулы. Очевидно, можно полагать, что восстановленные за шесть лет значения температуры должны быть близки к фактическим оценкам.

Таблица 13.2

Сравнение сезонного хода температуры воды на ст. Малые Кармакулы с восстановленными за 6–7 лет различными методами

Месяц	Фактические значения	Метод				
		крайкинг	минимальной кривизны	Шеппарда	ближайшего соседа	линейной интерполяции
I	–1,82	–1,85	–1,77	–1,82	–1,83	–1,82
II	–1,82	–1,85	–1,82	–1,83	–1,83	–1,82
III	–1,82	–1,88	–1,87	–1,85	–1,83	–1,82
IV	–1,79	–1,84	–1,85	–1,91	–1,80	–1,80
V	–1,72	–1,39	–1,55	–1,85	–1,73	–1,71
VI	–0,27	0,56	0,17	0,20	–0,33	–0,44
VII	5,23	4,71	5,09	6,08	5,19	5,33
VIII	6,82	6,58	7,08	8,66	7,71	7,39
IX	4,42	4,80	4,95	5,68	4,81	4,84
X	0,95	1,56	1,30	1,25	0,74	1,04
XI	–1,33	–0,70	–1,22	–1,40	–1,40	–1,27
XII	–1,75	–1,68	–2,46	–1,86	–1,79	–1,74
σ	–	1,43	1,11	2,46	1,00	0,74

Поскольку визуально определить какой из методов оказывается наилучшим весьма сложно, то в качестве критерия «близости» будем использовать среднеквадратическое отклонение восстановленных значений ТПМ от их фактических значений σ . Из таблицы 13.2 видно, что наименьшее значение величины σ дает метод линейной интерполяции ($\sigma = 0,74$), вторым по точности является метод ближайшего соседа.

Естественно, полученные оценки σ еще не дают полной уверенности в расстановке приоритетов методов интерполяции, ибо мы не знаем, насколько точно осредненные за семь лет данные должны соответствовать осредненным значениям температуры за более длительный период времени. Поэтому был проведен следующий модельный эксперимент. Из матрицы исходных данных X случайным

образом исключалась часть фактических значений ТПМ, и затем эти пропуски заполнялись тем или иным методом. При этом в качестве меры точности опять использовались оценки среднеквадратического отклонения проинтерполированных значений от фактических. Из исходного ряда температуры на ст. Малые Кармакулы было исключено произвольным образом семь лет (1980, 1981, 1987, 1991, 1994, 1998, 2002 гг.).

После восстановления искусственных пропусков различными методами интерполяции, оценивалась среднеквадратическая ошибка для всего периода в целом ($n = 84$) и для каждого месяца в отдельности ($n = 7$). Результаты расчетов приведены в таблице 13.3. Наименьшую ошибку восстановления температуры за семилетний период опять дает метод линейной интерполяции. Вторым по точности является метод минимальной кривизны.

Итак, в обоих случаях, линейная интерполяция дает более точные результаты, поэтому примем ее за основу. Этот алгоритм реализует оптимальную триангуляцию Деланая. Главный недостаток метода – разрывы на границах. Поэтому, если исходные данные отсутствуют на границах, их нужно восстанавливать другими методами.

Таблица 13.3

Оценки среднеквадратической ошибки восстановления температуры воды для станции Малые Кармакулы различными методами, в °C

Месяц	Метод				
	крайкинг	минимальной кривизны	Шеппарда	ближайшего соседа	линейной интерполяции
I	0,06	0,09	0,03	0,00	0,03
II	0,06	0,03	0,05	0,04	0,04
III	0,09	0,09	0,12	0,16	0,05
IV	0,07	0,09	0,17	0,12	0,09
V	0,55	0,26	0,40	1,92	0,07
VI	1,82	1,36	1,36	1,35	0,82
VII	1,02	1,21	1,44	1,82	1,47
VIII	1,59	1,37	1,87	1,66	1,44
IX	0,93	0,94	1,13	1,24	1,19
X	1,19	1,03	1,26	1,57	1,08
XI	0,65	0,17	0,27	0,22	0,30
XII	0,19	0,88	0,17	0,14	0,01
Весь период	0,91	0,82	0,94	1,00	0,79

Примечание. Выделены минимальные ошибки восстановления.

Заметим, что если, исходя из таблицы 13.3, для каждого месяца выбирать свой собственный наилучший метод восстановления, то в этом случае среднеквадратическая ошибка в целом за весь период окажется равной $\sigma = 0,63$ °C, т. е. она становится заметно ниже аналогичной ошибки метода линейной интерполяции. Но несмотря на это, она достаточно высокая. Поэтому, еще раз подчеркнем, что в связи с высокими ошибками интерполяции возможны искажения внутренней структуры ряда, что необходимо учитывать при дальнейшем статистическом анализе температуры.

Дополнительная проверка точности интерполяции может быть осуществлена с помощью гармонического анализа. Рассмотрим данный подход на примере августовских значений ТПМ за 1977–2003 гг. С довольно высокой точностью (90 % дисперсии от исходного процесса) временной ряд может быть аппроксимирован семью наиболее значимыми гармониками. На рис. 13.8 приводится исходный ряд, в котором квадратиками отмечены значения ТПМ, полученные методом линейной интерполяции для 6 указанных выше лет с пропусками, а также аппроксимация его с помощью 7 гармоник. Нетрудно видеть, что только в 1988 г. расхождение в оценке ТПМ двух разных методов интерполяции составляет 0,42 °C, в остальные годы оно существенно меньше. Таким образом, это подтверждает достаточно высокую точность интерполяции значений ТПМ на ст. Малые Кармакулы.

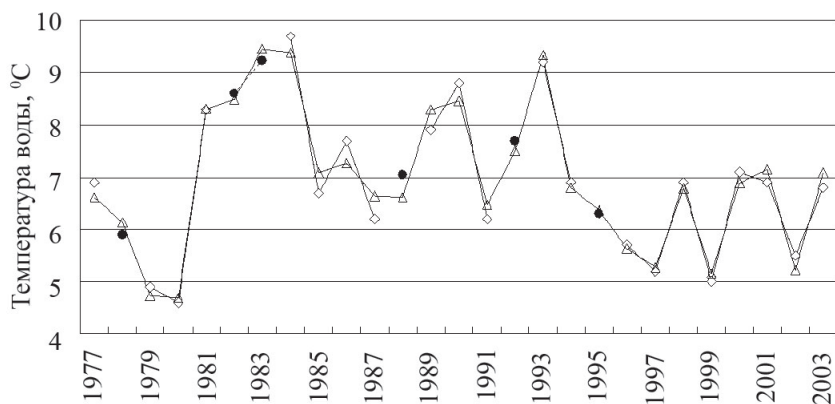


Рис. 13.8. Межгодовой ход температуры воды в августе на ст. Малые Кармакулы. Квадратики – исходные значения ТПМ, кружки – линейная интерполяция ТПМ, треугольники – аппроксимация ТПМ гармоническим анализом

13.6. Понятие о крайгинге

Одним из наиболее теоретически разработанных в статистическом отношении методов двухмерной интерполяции является метод крайгинга, названный в честь южноафриканского горного инженера и пионера применения статистических методов в геологии Д.Г. Крайга (Krige). В литературе этот метод называется также кригингом. На наш взгляд, первое название его является более точным.

Метод крайгинга можно использовать для построения карт в изолиниях, но, в отличие от обычных алгоритмов оконтуривания, он имеет статистически оптимальные свойства. В частности, он имеет два больших преимущества перед обычными процедурами оценивания, которые используются при построении карт в изолиниях. Одно заключается в том, что оценки процедур в среднем имеют наименьшую возможную ошибку, а также обеспечивают явное выражение величины этой ошибки. Другое преимущество сводится к использованию информации из полувариограммы для нахождения оптимального множества весов с целью оценки поверхности в точках, отличных от точек опробования. Так как полувариограмма является функцией расстояния, то веса изменяются в соответствии с географическим положением точек опробования.

В общем случае можно выделить три вида крайкинга:

- 1) точечный (простой) крайкинг (simple kriging);
- 2) ординарный крайкинг (ordinary kriging);
- 3) универсальный крайкинг (universal kriging).

Точечный крайкинг. Точечный крайкинг – простейшая форма крайгинга, в котором наблюдения состоят из измерений, взятых в безразмерных точках, и оценки проводятся в других местах, которые сами также являются безразмерными точками. Для упрощения задачи принимается, что картируемая переменная статистически однородна или свободна от дрефта. Значение в точке, не принадлежащей выборке, может быть оценено как взвешенное среднее известных наблюдений, причем не выдвигается жесткое условие равенства единице суммы весовых коэффициентов. Система линейных уравнений простого крайкинга для нахождения весов интерполяции λ_β может быть представлена в виде:

$$\sum_{\beta} \lambda_{\beta} \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha 0}, \quad (13.13)$$

где $\gamma_{\alpha\beta}$ – значение вариограммы для пар точек наблюдений, $\gamma_{\alpha 0}$ – значение вариограммы для узла интерполяции, β – количество

измерений. Тогда значение в сеточном узле определяется как линейная комбинация наблюдений:

$$Z^* = \sum \lambda_{\beta} Z_{\beta} + \lambda_0, \quad (13.14)$$

где $\lambda_0 = m(1 - \sum \lambda_{\beta}) = m\lambda_m$; m – среднее значение внутри заданной пространственной области. В этом случае средняя квадратическая ошибка интерполяции будет определяться как:

$$\sigma^2(\varepsilon) = R_u(0) - \sum \lambda_{\beta} R_{u\beta 0}, \quad (13.15)$$

где $R_u(0)$ – дисперсия пространственного поля.

Естественно, что при «хорошем» качестве интерполяции последнее слагаемое в правой части выражения (13.14) должно стремиться к нулю. Отклонения суммы весовых коэффициентов от единицы может служить критерием качества интерполяции в конкретном узле. Чем больше сумма коэффициентов отклоняется от единицы, тем хуже интерполяция в заданный узел. Кроме того, для оценки точности используется обычная средняя квадратическая ошибка интерполяции. Если все точки расположены далеко от интерполируемого узла, то погрешность метода будет практически равна средней квадратической ошибке внутри области интерполяции.

Ординарный крайкинг. Недостатков, связанных с изменениями среднего значения внутри области интерполяции, лишен метод ординарного крайкинга:

$$\sum \lambda_{\beta} \gamma_{\alpha\beta} + m = g_{\alpha 0}, \quad (13.16)$$

$$\sum \lambda_{\beta} = 1, \quad (13.17)$$

$$Z^* = \sum \lambda_{\beta} Z_{\beta}, \quad (13.18)$$

$$\sigma^2(\varepsilon) = R_u(0) - \sum \lambda_{\beta} R_{u\beta 0} - \mu, \quad (13.19)$$

где μ – подгоночный параметр, вводимый в исходную систему весов крайкинга, чтобы выполнялось условие (13.17).

Универсальный крайкинг. Хотя ординарный крайкинг более точен, чем простой крайкинг, тем не менее, он не учитывает наличие пространственного тренда в исходных данных. В этом случае может быть применен метод универсального крайкинга. Такой подход оправдан, когда интерполяция проводится для больших пространственных областей с явно выраженной тенденцией к повышению (понижению) рассматриваемой характеристики вдоль какого-либо

направления. Однако следует помнить, что универсальный крайкинг очень чувствителен к неравномерной сети станций. При использовании его в областях с редкой сетью наблюдений могут возникать серьезные ошибки, связанные с экстраполяцией тренда на большие расстояния.

Универсальный крайкинг можно считать состоящим из трех операций: первая – оценка и устранение дрефта; затем остатки крайгируются с целью получения необходимых оценок. Наконец, оцененные остатки комбинируются с дрефтом с целью получения истинной поверхности. Оценка дрефта может быть осуществлена, например, с помощью полинома первой или второй степени (13.11).

Список литературы

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ, 1998. – 1022 с.
2. Вайновский П.А., Малинин В.Н. Методы обработки и анализа океанологической информации. – Ч. 1. Одномерный анализ. – Л.: РГГМИ, 1991. – 136 с.
3. Вайновский П.А., Малинин В.Н. Методы обработки и анализа океанологической информации. – Ч. 2. Многомерный анализ. – СПб.: РГГМИ, 1992. – 96 с.
4. Григоркина Р.Г., Губер П.К., Фукс В.Р. Прикладные методы корреляционного и спектрального анализа крупномасштабных океанологических процессов. – Л.: ЛГУ, 1973. – 172 с.
5. Вуколов Э.И. Основы статистического анализа. Практикум по статистическим методам и исследованию операций с использованием пакетов STATISTICA и EXCEL. – М.: ФОРУМ, 2008. – 464 с.
6. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2002. – 479 с.
7. Девис Дж.С. Статистический анализ данных в геологии. – М.: Недра. 1990. – Кн. 1. – 319 с.; Кн. 2 – 427 с.
8. Дегтярев А.С., Драбенко В.А., Драбенко В.А. Статистические методы обработки метеорологической информации: учебник. – СПб: ООО «Андреевский издательский дом», 2015. – 225 с.
9. Демьянов В.В., Савельева Е.А. Гео статистика: теория и практика. – М.: Наука, 2010. – 329 с.
10. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. – Вып. 1. – М.: Мир, 1971. – 316 с.; Вып. 2. – М.: Мир, 1972. – 287 с.
11. Добровольский С.Г. Климатические изменения в системе «гидросфера–атмосфера». – М.: Геос, 2002. – 231 с.
12. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Кн. 1. – М.: Финансы и статистика, 1986. – 366 с.; Кн. 2 – 1987. – 351 с.
13. Казакевич Д.Л. Основы теории случайных функций в задачах гидрометеорологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 230 с.
14. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: ЮНИТИ, 2003. – 543 с.
15. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул. – М.: Высшая школа, 1982. – 224 с.
16. Макарова Н.В., Трофимец В.Я. Статистика в Excel. – М.: Финансы и статистика, 2002. – 365 с.
17. Малинин В.Н., Гордеева С.М. Физико-статистический метод прогноза океанологических характеристик. – Мурманск, Изд-во ПИНРО, 2003. – 164 с.
18. Матерон Ж. Основы прикладной геостатистики. М., 1968. – 407 с.
19. Мюллер П., Нойман П., Шторм Р. Таблицы по математической статистике. – М.: Финансы и статистика, 1982. – 272 с.
20. Носач В.В. Решение задач аппроксимации с помощью персональных компьютеров. – М.: МИКАП, 1994. – 382 с.
21. Пановский Г.А., Брайер Г.В. Статистические методы в метеорологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1967. – 242 с.
22. Поляк И.И. Методы анализа случайных процессов и полей в климатологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – 255 с.

23. Привальский В.Е., Панченко В.А., Асарина Е.Ю. Модели временных рядов с приложениями в гидрометеорологии. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. – 226 с.
24. Пузаченко Ю.Г. Математические методы в экологических и географических исследованиях. – М.: Академия, 2004. – 407 с.
25. Рожков В.А. Теория и методы статистического оценивания вероятностных характеристик случайных величин и функций с гидрометеорологическими приложениями. Кн. 1. – СПб.: Гидрометеоиздат, 2001. – 340 с.; Кн. 2 – 2002. – 440 с.
26. Сикан А.В. Методы статистической обработки гидрометеорологической информации. Учебник. – СПб.: РГГМУ, 2007. – 279 с.
27. Смирнов Н.П., Вайновский П.А., Титов Ю.Э. Статистический диагноз и прогноз океанологических процессов. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1992. – 199 с.
28. Смоленцев Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MATLAB. – Изд. 2-е, доп. и перераб. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 304 с.
29. Тьюки Дж. Анализ результатов наблюдений. Разведочный анализ. – М.: Мир, 1981. – 693 с.
30. Тюрин Ю.Н., Макаров А.А. Статистический анализ данных на компьютере. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 528 с.
31. Хьюбер П. Робастность в статистике. – М.: Мир, 1984. – 303 с.

Приложения

Приложение 1. Функция Лапласа

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,33	0,1293	0,66	0,2454
0,01	0,0040	0,34	0,1331	0,67	0,2486
0,02	0,0080	0,35	0,1368	0,68	0,2517
0,03	0,0120	0,36	0,1406	0,69	0,2549
0,04	0,0160	0,37	0,1443	0,70	0,2580
0,05	0,0199	0,38	0,1480	0,71	0,2611
0,06	0,0239	0,39	0,1517	0,72	0,2642
0,07	0,0279	0,40	0,1554	0,73	0,2673
0,08	0,0319	0,41	0,1591	0,74	0,2703
0,09	0,0359	0,42	0,1628	0,75	0,2734
0,10	0,0398	0,43	0,1664	0,76	0,2764
0,11	0,0438	0,44	0,1700	0,77	0,2794
0,12	0,0478	0,45	0,1736	0,78	0,2823
0,13	0,0517	0,46	0,1772	0,79	0,2852
0,14	0,0557	0,47	0,1808	0,80	0,2881
0,15	0,0596	0,48	0,1844	0,81	0,2910
0,16	0,0636	0,49	0,1879	0,82	0,2939
0,17	0,0675	0,50	0,1915	0,83	0,2967
0,18	0,0714	0,51	0,1950	0,84	0,2995
0,19	0,0753	0,52	0,1985	0,85	0,3023
0,20	0,0793	0,53	0,2019	0,86	0,3051
0,21	0,0832	0,54	0,2054	0,87	0,3078
0,22	0,0871	0,55	0,2088	0,88	0,3106
0,23	0,0910	0,56	0,2123	0,89	0,3133
0,24	0,0948	0,57	0,2157	0,90	0,3159
0,25	0,0987	0,58	0,2190	0,91	0,3186
0,26	0,1026	0,59	0,2224	0,92	0,3212
0,27	0,1064	0,60	0,2257	0,93	0,3238
0,28	0,1103	0,61	0,2291	0,94	0,3264
0,29	0,1141	0,62	0,2324	0,95	0,3289
0,30	0,1179	0,63	0,2357	0,96	0,3315
0,31	0,1217	0,64	0,2389	0,97	0,3340
0,32	0,1255	0,65	0,2422	0,98	0,3365

x	$\Phi(x)$
0,99	0,3389
1,00	0,3413
1,01	0,3438
1,02	0,3461
1,03	0,3485
1,04	0,3508
1,05	0,3531
1,06	0,3554
1,07	0,3577
1,08	0,3599
1,09	0,3621
1,10	0,3643
1,11	0,3665
1,12	0,3686
1,13	0,3708
1,14	0,3729
1,15	0,3749
1,16	0,3770
1,17	0,3790
1,18	0,3810
1,19	0,3830
1,20	0,3849
1,21	0,3869
1,22	0,3883
1,23	0,3907
1,24	0,3925
1,25	0,3944
1,26	0,3962
1,27	0,398
1,28	0,3997
1,29	0,4015
1,30	0,4032
1,31	0,4049
1,32	0,4066
1,33	0,4082
1,34	0,4099
1,35	0,4115

x	$\Phi(x)$
1,36	0,4131
1,37	0,4147
1,38	0,4162
1,39	0,4177
1,40	0,4192
1,41	0,4207
1,42	0,4222
1,43	0,4236
1,44	0,43
1,45	0,4265
1,46	0,4279
1,47	0,4292
1,48	0,4306
1,49	0,4319
1,50	0,4332
1,51	0,4345
1,52	0,4357
1,53	0,437
1,54	0,4382
1,55	0,4394
1,56	0,4406
1,57	0,4418
1,58	0,4429
1,59	0,4441
1,60	0,4452
1,61	0,4463
1,62	0,4474
1,63	0,4484
1,64	0,4495
1,65	0,4505
1,66	0,4515
1,67	0,4525
1,68	0,4535
1,69	0,4545
1,70	0,4554
1,71	0,4564
1,72	0,4573

x	$\Phi(x)$
1,73	0,4582
1,74	0,4591
1,75	0,4599
1,76	0,4608
1,77	0,4616
1,78	0,4625
1,79	0,4633
1,80	0,4641
1,81	0,4649
1,82	0,4656
1,83	0,4664
1,84	0,4671
1,85	0,4678
1,86	0,4686
1,87	0,4693
1,88	0,4699
1,89	0,4706
1,90	0,4713
1,91	0,4719
1,92	0,4726
1,93	0,4732
1,94	0,4738
1,95	0,4744
1,96	0,475
1,97	0,4756
1,98	0,4761
1,99	0,4767
2,00	0,4772
2,02	0,4783
2,04	0,4793
2,06	0,4803
2,08	0,4812
2,10	0,4821
2,12	0,483
2,14	0,4838
2,16	0,4846
2,18	0,4854

x	$\Phi(x)$
2,20	0,4861
2,22	0,4868
2,24	0,4875
2,26	0,4881
2,28	0,4887
2,30	0,4893
2,32	0,4898
2,34	0,4904
2,36	0,4909
2,38	0,4913
2,40	0,4918
2,42	0,4922
2,44	0,4927
2,46	0,4931
2,48	0,4934
2,50	0,4938

x	$\Phi(x)$
2,52	0,4941
2,54	0,4945
2,56	0,4948
2,58	0,4951
2,60	0,4953
2,62	0,4956
2,64	0,4959
2,66	0,4961
2,68	0,4963
2,70	0,4965
2,72	0,4967
2,74	0,4969
2,76	0,4971
2,78	0,4973
2,80	0,4974
2,82	0,4976

x	$\Phi(x)$
2,84	0,4977
2,86	0,4979
2,88	0,498
2,90	0,4981
2,92	0,4982
2,94	0,4984
2,96	0,4985
2,98	0,4986
3,00	0,49865
3,20	0,49931
3,40	0,49966
3,60	0,499841
3,80	0,499928
4,00	0,499968
4,50	0,499997
5,00	0,499997

Приложение 2. Распределение Пирсона χ^2

Число степеней свободы ν	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,3	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 3. Распределение Стьюдента

Число степеней свободы ν	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)					
	0,1	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,71	31,82	63,66	318,31	636,62
2	2,92	4,30	6,96	9,92	22,33	31,60
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,21	12,92
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	5,89	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,02	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,50	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,48	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,43	3,71
27	1,70	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,41	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,16	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Приложение 4. Распределение Фишера

$\backslash v_2$	v_1	Уровень значимости $\alpha = 0,05$															
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	30	40	60
1	161	199	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	250	251	252	
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,62	8,59	8,57	
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,75	5,72	5,69	
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,50	4,46	4,43	
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,81	3,77	3,74	
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,38	3,34	3,30	
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,08	3,04	3,01	
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,86	2,83	2,79	
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,70	2,66	2,62	
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,57	2,53	2,49	
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,47	2,43	2,38	
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,38	2,34	2,30	
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,31	2,27	2,22	
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,25	2,20	2,16	
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,19	2,15	2,11	
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,15	2,10	2,06	
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,11	2,06	2,02	
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,07	2,03	1,98	
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,04	1,99	1,95	
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	1,98	1,94	1,89	
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,94	1,89	1,84	
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,90	1,85	1,80	
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,87	1,82	1,77	
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,84	1,79	1,74	
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,75	1,69	1,64	
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,65	1,59	1,53	
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,55	1,50	1,43	
∞	3,84	3,00	3,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,46	1,39	1,32	

**Приложение 5. Значения величины z
для значений коэффициента корреляции r
от 0,00 до 0,99**

r	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,000	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060	0,070	0,080	0,090
1	0,100	0,110	0,121	0,131	0,141	0,151	0,161	0,172	0,182	0,192
2	0,203	0,213	0,224	0,234	0,245	0,255	0,266	0,277	0,288	0,299
3	0,309	0,321	0,332	0,343	0,354	0,365	0,377	0,388	0,400	0,412
4	0,424	0,436	0,448	0,460	0,472	0,485	0,497	0,510	0,523	0,536
5	0,549	0,563	0,576	0,590	0,604	0,618	0,633	0,647	0,662	0,678
6	0,693	0,709	0,725	0,741	0,758	0,775	0,793	0,811	0,829	0,848
7	0,867	0,887	0,908	0,929	0,950	1,973	0,996	1,020	1,045	1,071
8	1,099	1,127	1,157	1,188	1,221	1,256	1,293	1,333	1,376	1,422
9	1,472	1,527	1,589	1,658	1,738	1,832	1,946	2,092	2,298	2,647

Приложение 6. Словарь статистических терминов

Амплитуда гармоник – разность между максимальным и минимальным значениями гармоник.

Анализ объективный – процедура перевода данных из нерегулярной сети точек в регулярную сетку.

Вариограмма – статистический момент второго порядка, использующийся в геостатистике для анализа и моделирования пространственной корреляции.

Величина случайная – переменная величина, которая в результате испытания (измерения) в одинаковых условиях может принимать то или иное заранее неизвестное значение.

Величина случайная количественная – случайная величина, выражаемая в метрической шкале.

Величина случайная ординальная – случайная величина, соответствующая порядковой (ординальной) шкале.

Величина случайная номинальная – случайная величина, соответствующая номинальной шкале

Величина случайная стандартизированная – величина, полученная преобразованием $t = (x - m_x)/s_x$, имеющая математическое ожидание равное нулю и дисперсию равную 1.

Величина случайная центрированная – отклонение от математического ожидания (среднего арифметического).

Вероятность доверительная – степень надежности определения истинной оценки по выборочной оценке.

Вероятность теоретическая – частота события, свойственная генеральной совокупности.

Вероятность эмпирическая – частота события, свойственная выборочной совокупности

Выборка (выборочная совокупность) – любая последовательность конечного объема, извлеченная из генеральной совокупности.

Выборка представительная – выборка, достаточно точно отражающая основные закономерности генеральной совокупности.

Выборочное среднее – сумма значений выборки, деленная на ее длину.

Выброс – резко отличающееся от других значение временного ряда.

Гармоника – слагаемое в разложении Фурье.

Генеральная совокупность – весь мыслимо возможный набор случайной величины.

Гетероскедастичность – непостоянство дисперсии остатков в регрессионной модели.

Гипотеза нулевая – предположение об отсутствии различий в тех или иных свойствах случайного процесса.

Гипотеза альтернативная – логическое отрицание нулевой гипотезы.

Гистограмма распределения – график, представляющий распределение частот по интервалам вариационного ряда.

Гомоскедастичность – постоянство дисперсии остатков в регрессионной модели.

Дециль – квантиль, соответствующий одной из вероятностей 0,10; 0,20; ...; 0,90.

Дисперсия генеральная (выборочная) – мера изменчивости случайной величины в генеральной (выборочной) совокупности, имеющая размерность ее квадрата.

Доверительный интервал – область значений случайной величины внутри доверительных границ.

Закон распределения – любое соотношение, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями.

Закон распределения теоретический – распределение истинных значений вероятностей случайной величины.

Закон распределения эмпирический – распределение вероятностей, полученных из опытных (эмпирических) данных достаточно большого объема.

Изокорреляты – линии равной корреляции.

Интервал дискретизации – промежуток времени, через который берется временной ряд.

Интерквартильное расстояние – разность между верхним $x_{0,75}$ и нижним $x_{0,25}$ квантилями.

Информация – любые сведения (в количественной и качественной форме) об исследуемом объекте.

Информация первичная – результаты непосредственного измерения характеристик природной среды.

Информация вторичная – результаты расчетов, выполненных на основе первичной информации.

Квантиль – элемент ряда, при котором функция распределения принимает значение, равное вероятности p .

Квантильный анализ – непараметрический метод анализа малых выборок, основанный на использовании квантилей.

Квартиль – квантиль, соответствующий одной из вероятностей: 0,25, 0,50, 0,75.

Когерентность – характеристика линейной статистической связи спектральных компонент одинаковой частоты.

Колебание циклическое – колебание, параметры которого (период, амплитуда, фаза) испытывают нерегулярные изменения во времени в пределах некоторого диапазона.

Коррелограмма – график автокорреляционной функции.

Корреляционное отношение – безразмерная мера нелинейной связи двух случайных величин.

Корреляционное поле – график двух случайных величин в декартовой системе координат.

Корреляция ложная – линейная стохастическая связь между двумя переменными, если они связаны с третьей переменной.

Корреляция ранговая – линейная стохастическая связь между порядковыми переменными.

Корреляция сериальная – линейная стохастическая связь между остатками в регрессионной модели.

Корреляция частная – корреляция зависимой переменной с какой-либо независимой переменной после исключения влияния на нее присутствующих в модели переменных.

Косинус-спектр – вещественная часть взаимной спектральной функции.

Коэффициент автокорреляции – коэффициент корреляции между значениями данного ряда и его же значениями, относящимися к некоторому сдвигу τ .

Коэффициент автокорреляции частный – коэффициент корреляции между значениями данного ряда и его же значениями, относящимися к некоторому сдвигу τ после исключения влияния на него присутствующих в модели переменных.

Коэффициент асимметрии – безразмерная характеристика скошенности кривой плотности распределения случайной величины.

Коэффициент вариации – безразмерная мера изменчивости случайной величины в генеральной (выборочной) совокупности.

Коэффициент взаимной корреляции – коэффициент корреляции двух переменных при некотором сдвиге одной из них относительно другой.

Коэффициент детерминации линейный – доля объясненной дисперсии функции отклика в уравнении линейной парной (множественной) регрессии.

- Коэффициент детерминации нелинейный** – доля объясненной дисперсии функции отклика в уравнении нелинейной (полиномиальной) регрессии.
- Коэффициент детерминации частный** – доля остаточной дисперсии функции отклика в уравнении множественной регрессии, объясненная включением дополнительной переменной в модель.
- Коэффициент корреляции бисериальный** – непараметрическая безразмерная характеристика линейной взаимосвязи качественной альтернативной (да, нет) и количественной переменных.
- Коэффициент корреляции Кендалла** – непараметрическая безразмерная характеристика линейной взаимосвязи двух случайных величин.
- Коэффициент корреляции множественный** – безразмерная параметрическая характеристика линейной взаимосвязи фактических и вычисленных по модели множественной регрессии функции отклика
- Коэффициент корреляции парный** – безразмерная параметрическая характеристика линейной взаимосвязи двух случайных величин.
- Коэффициент корреляции Спирмена** – непараметрическая безразмерная характеристика линейной взаимосвязи двух случайных величин.
- Коэффициент корреляции частный** – мера линейной связи функции отклика с независимой переменной в модели множественной регрессии после исключения влияния на нее остальных переменных.
- Коэффициент регрессии** – коэффициент пропорциональности между зависимой и независимой переменными.
- Коэффициент эксцесса** – характеристика крутости кривой плотности распределения случайной величины.
- Критерий Дарбина-Уотсона** – безразмерная характеристика взаимосвязи между смежными значениями остатков функции отклика.
- Критерий статистический** – свод правил, указывающих, при каких результатах наблюдений нулевая гипотеза отклоняется.
- Критерий Стьюдента регрессионный** – критерий для оценки значимости параметров модели регрессии.
- Критерий Фишера регрессионный** – критерий для оценки адекватности (значимости) модели регрессии.
- Критерий Фишера частный** – обычный F -критерий для каждой переменной при условии, что она оказывается последней переменной, включенной в модель регрессии.

- Критическая область статистики** – область значений статистики, вероятность которых меньше заданного уровня значимости.
- Кумулятивная кривая** – сумма накопленных частот, показывающая степень приближения к 1 или 100 % ряда распределения.
- Линеаризация** – процедура перевода нелинейной зависимости к линейному виду.
- Медиана** – величина, занимающая среднее положение вариационного ряда.
- Математическое ожидание** – центр распределения генеральной совокупности случайной величины.
- Метод наименьших квадратов** – метод отыскания неизвестных коэффициентов эмпирической зависимости.
- Мода** – наиболее часто встречающаяся в данном статистическом ряду величина.
- Модель авторегрессионная** – модель временного ряда, в которой его значения в данный момент времени линейно зависят от предыдущих значений этого же ряда.
- Момент начальный порядка k** – математическое ожидание случайной величины x^k .
- Момент центральный порядка k** – математическое ожидание централизованной величины $(x - m_x)^k$.
- Мощность критерия** – вероятность попадания заданной статистики в критическую область, когда верна альтернативная гипотеза.
- Мультиколлинеарность реальная** – корреляционная матрица, в которой между большинством исходных переменных отмечается высокая коррелированность.
- Мультиколлинеарность строгая** – корреляционная матрица, в которой имеет место линейная функциональная связь хотя бы между двумя переменными.
- Невязка (дисбаланс)** – суммарная погрешность определения всех компонент какого-либо уравнения.
- Область допустимых значений статистики** – область значений статистики, вероятность которых больше заданного уровня значимости.
- Огива** – кривая суммы накопленных частот, обратная кумулятивной кривой.
- Оценка** – любое числовое значение случайной величины или случайной функции.
- Оценка адекватности регрессионной модели** – проверка значимости регрессионной модели по критерию Фишера.

- Оценка значимости коэффициента корреляции** – проверка нулевой гипотезы на равенство коэффициента корреляции нулю.
- Оценка несмещенная** – оценка, для которой ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру.
- Оценка робастная** – оценка, которая является устойчивой к существенным отклонениям в значениях данных.
- Оценка состоятельная** – оценка, которая при неограниченном возрастании объема выборки сходится по вероятности к оцениваемому параметру.
- Оценка эффективная** – оценка, которая при заданном объеме выборки имеет наименьшую дисперсию среди всех возможных несмещенных оценок.
- Оценивание** – определение числовых характеристик или свойств случайной величины или случайной функции.
- Оценивание точечное** – определение конкретных оценок выборочного параметра, около которого находятся его истинные значения.
- Оценивание интервальное** – определение диапазона оценок выборочного параметра, внутри которого с большой заданной вероятностью находится его истинное неизвестное значение.
- Оценивание гипотез параметрическое** – проверка гипотез, когда предполагается известным вид функции распределения и отдельные параметры, а проверка относится к неизвестному параметру.
- Оценивание гипотез непараметрическое** – проверка гипотез, когда знание законов распределения случайной величины не требуется.
- Персентиль** – квантиль, соответствующий одной из вероятностей 0,01; 0,02; ...; 0,99.
- Погрешность** – ошибка измерений или расчетов.
- Погрешность грубая** – погрешность, резко выделяющаяся от всех других.
- Погрешность косвенная** – погрешность, которая может быть вычислена через измеряемые параметры.
- Погрешность модели среднеквадратическая** – случайная ошибка описания функции отклика в регрессионной модели.
- Погрешность систематическая** – погрешность, изменяющаяся по определенному закону.
- Погрешность случайная** – погрешность, которая при испытаниях в одинаковых условиях меняется произвольным образом.
- Поле случайное** – случайная функция, изменяющаяся в пространстве.

Поле случайное однородное (в широком смысле) – поле, для которого математическое ожидание является постоянной величиной, а корреляционная функция зависит только от одного аргумента – разности векторов $l = \rho_2 - \rho_1$.

Поле случайное однородное (в узком смысле) – поле, для которого все его n -мерные законы распределения не изменяются при переносе системы точек $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ на один и тот же вектор.

Поле случайное однородное изотропное – поле, для которого все его n -мерные законы распределения не изменяются при всевозможных вращениях системы точек $N_1(\rho_1), N_2(\rho_2), \dots, N_n(\rho_n)$ вокруг любой оси, проходящей через начало координат, и при зеркальном их отражении относительно любой плоскости, проходящей через начало координат.

Поле случайное однородное изотропное, обладающее эргодическим свойством – поле, для которого пространственное среднее и корреляционная функция, полученная осреднением по одной реализации поля при безграничном увеличении диаметра области, может быть с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, приближены к соответствующим характеристикам, полученным осреднением по всему множеству реализаций.

Полигон распределения – ломаная линия, соединяющая частоты вариационного ряда.

Преобразование Фишера – функциональное преобразование вида $z = 0,5 \times \ln(1 + r) / (1 - r)$, позволяющее нормализовать коэффициенты корреляции при их большой величине и малой длине выборки.

Процесс гармонический – колебание, все основные параметры которого (амплитуда, период, фаза) остаются строго постоянными во времени.

Процесс детерминированный – временной ряд, значения которого изменяются по строго определенному, как правило, физическому закону.

Процесс случайный – случайная функция, изменяющаяся во времени.

Процесс случайный стационарный (в широком смысле) – процесс, у которого выборочные оценки среднего и дисперсии случайного процесса постоянны во времени и соответствуют математическому ожиданию и генеральной дисперсии, а его автокорреляционная функция является только функцией интервала времени $\tau = t_2 - t_1$ и не зависит от значения каждого аргумента t_1 и t_2 в отдельности.

Процесс случайный стационарный (в узком смысле) – процесс, у которого многомерные распределения при одновременном прибавлении ко всем аргументам $t_1, t_2, \dots, t_n$ одного и того же сдвига τ остаются неизменными.

Процесс случайный стационарный эргодический – процесс, одна реализация которого достаточно большой длины содержит в себе фактически всю информацию об основных свойствах случайного процесса, т. е. может заменить при обработке множество реализаций той же продолжительности.

Разложение Фурье – представление в виде тригонометрического ряда по синусам и косинусам, обеспечивающее при его фиксированной длине наименьшую среднеквадратическую ошибку.

Разложение Чебышева – представление в виде ортогональных многочленов, позволяющее производить добавление новых слагаемых более высокого порядка, не изменяя при этом вычисленные ранее коэффициенты.

Размах – разность между максимальным и минимальным значениями выборки (ряда).

Ранг матрицы – наибольший порядок ее отличного от нуля минора, совпадающий с максимальным числом линейно независимых столбцов матрицы.

Ранг случайной величины – порядковый номер значения признака ранжированного ряда.

Реализация случайной функции – конкретный вид, который случайная функция принимает в результате испытаний или наблюдений.

Регрессионный анализ – совокупность статистических методов исследования влияния одной или нескольких независимых переменных на зависимую переменную.

Регрессия множественная линейная – уравнение, описывающее линейную зависимость функции отклика от множества факторов.

Регрессия парная линейная – уравнение линейной зависимости между двумя случайными переменными.

Регрессия полиномиальная одномерная – уравнение, описывающее нелинейную зависимость функции отклика от одного фактора.

Регрессия полиномиальная двумерная – уравнение, описывающее нелинейную зависимость функции отклика от двух факторов.

Регрессия пошаговая – процедура отбора наиболее существенных переменных в многофакторной регрессионной модели.

Регрессия робастная – регрессия, устойчивая к выбросам в исходных данных.

Ряд временной – конечная реализация случайной величины, расположенная в хронологическом порядке.

Ряд распределения атрибутивный – ряд распределения, построенный по качественному признаку.

Ряд распределения вариационный – ряд распределения, построенный в порядке возрастания по количественному признаку.

Ряд распределения статистический – упорядоченное распределение единиц совокупности на группы по определенному варьирующему признаку.

Серия – участок двух совмещенных вариационных рядов, состоящий из идущих подряд одинаковых кодов и ограниченный с обеих сторон противоположными кодами

Связь случайная – если каждому значению одной переменной может соответствовать практически любое значение другой переменной.

Связь стохастическая – если каждому значению одной переменной с определенной вероятностью соответствует значение другой переменной.

Связь функциональная – если каждому значению одной переменной соответствует единственное значение другой переменной.

Скользящее осреднение – вид фильтрации временного ряда, основанный на последовательном осреднении членов ряда за интервал сглаживания.

Спектр амплитудный – модуль взаимной спектральной плотности.

Спектр квадратурный – мнимая часть взаимной спектральной функции.

Спектр фазовый – характеристика отставания по фазе одного случайного процесса от другого.

Спектральная плотность – прямое преобразование Фурье автокорреляционной функции.

Спектральная плотность взаимная – прямое преобразование Фурье взаимной корреляционной функцией двух стационарных случайных процессов.

Спектральная плотность нормированная – прямое преобразование Фурье нормированной автокорреляционной функции.

Спектральная плотность взаимная нормированная – прямое преобразование Фурье нормированной взаимной корреляционной функцией двух стационарных случайных процессов.

Спектрограмма – график кривой спектральной плотности.

- Среднеквадратическое (стандартное) отклонение генеральное (выборочное)** – мера изменчивости случайной величины в генеральной (выборочной) совокупности, имеющая размерность случайной величины.
- Статистика параметрическая** – статистика, требующая предварительного знания теоретического закона распределения при проверке свойств случайной величины.
- Статистика непараметрическая** – статистика, не требующая предварительного знания теоретического закона распределения при проверке свойств случайной величины.
- Статистика порядковая** – каждый член вариационного ряда.
- Схема расположения точек равномерная** – плотность точек в любой подобласти пространства равна плотности точек во всех других подобластях.
- Схема расположения точек регулярная** – точки образуют в пространстве какой-либо вид сети, расстояния в которой между любыми точками подчиняются определенному закону.
- Схема расположения точек случайная** – точки в пространстве размещены совершенно произвольным образом и появление (исключение) одной или нескольких точек никак не сказывается на характере распределения всей совокупности точек в целом.
- Точка отсечения автокорреляционной функции** – максимальный сдвиг, до которого осуществляется расчет автокорреляционной функции.
- Тренд** – медленное изменение случайного процесса без образования циклов.
- Тренд линейный** – линейное уравнение, описывающее зависимость искомого параметра от времени.
- Тренд нелинейный** – нелинейное уравнение, описывающее зависимость искомого параметра от времени.
- Уровень значимости** – вероятность события, которым решено пренебречь в данном исследовании.
- Фаза гармоник** – временной интервал наступления первого максимума от начала отсчета.
- Фильтрация ряда высокочастотная** – подавление долгопериодных колебаний и выделение высокочастотных колебаний временного ряда до определенного предела частоты.
- Фильтрация ряда низкочастотная** – выделение долгопериодных колебаний и подавление высокочастотных колебаний временного ряда.

Фильтрация ряда полосовая – выделение колебаний в определенном диапазоне частот временного ряда.

Функция автокорреляционная – неслучайная функция двух независимых фиксированных аргументов, равная корреляционному моменту сечений этих аргументов.

Функция автокорреляционная нормированная – безразмерная функция линейной связи между сечениями случайной функции.

Функция корреляционная взаимная – неслучайная функция двух случайных процессов, соответствующих одному и тому же значению аргумента.

Функция корреляционная взаимная нормированная – безразмерная характеристика линейной связи между сечениями двух случайных функций.

Функция кросскорреляционная – безразмерная характеристика линейной связи между значениями случайного поля в различных точках пространства и в различные моменты времени.

Функция обеспеченности эмпирическая – закон изменения частоты события $X \geq x$ в статистической выборке.

Функция распределения дифференциальная – предел отношения вероятности попадания случайной величины X в интервал $[x, x + \Delta x]$ к величине Δx при $\Delta x \rightarrow 0$.

Функция распределения интегральная – вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x .

Функция распределения эмпирическая – закон изменения частоты события $X < x$ в статистической выборке.

Функция случайная – функция, значения которой при каждом значении аргумента представляют случайную величину.

Функция спектральная – функция, характеризующую интегральную долю дисперсии, приходящейся на некоторый интервал частот.

Функция частотная весовая – функция, которая уравнивает выборочные и истинные оценки автокорреляционной функции.

Характеристика фильтра частотная – функция, определяющая характер изменения амплитуд случайного процесса при прохождении ряда через фильтр.

Цепь Маркова – последовательность событий $A_i^{(t)}$ называется цепью Маркова k -того порядка, если для каждого момента времени t условная вероятность события $A_i^{(t+1)}$ зависит только от

того, какие события произошли в k предыдущих моментах времени и не зависит от поведения последовательности до момента $t - k + 1$.

Цепь Маркова простая – последовательность событий, при котором вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в настоящий момент и не зависит от того, каким образом эта система пришла в это состояние.

Цепь Маркова сложная – последовательность событий, при котором вероятность системы в настоящий момент зависит от некоторого множества состояний системы в предшествующие моменты времени.

Частота – эмпирическая повторяемость, выражаемая суммой значений случайной величины в каждой группе вариационного ряда.

Частость – относительная частота (в долях единицы).

Число степеней свободы – количество значений выборки, функционально не связанных между собой.

Шум белый – случайный процесс, представляющий набор случайных чисел, некоррелированных друг с другом.

Шум красный – случайный процесс, которому свойственна корреляция только между смежными (соседними) значениями временного ряда.

Содержание

Предисловие	3
-------------------	---

Часть 3. Анализ временных рядов

Глава 9. Основные понятия о теории случайных процессов	4
9.1. Общие сведения о временных рядах	4
9.2. Понятие случайной функции	7
9.3. Числовые характеристики случайных функций	11
9.4. Стационарность случайных процессов	15
9.5. Эргодичность стационарных случайных процессов	22
9.6. Классификация временных рядов	24
Глава 10. Методы анализа временных рядов	27
10.1. Общая схема исследования временной изменчивости	27
10.2. Выделение и анализ трендовой компоненты	32
10.3. Гармонический анализ	43
10.4. Автокорреляционный анализ	50
10.5. Автокорреляционные функции различных временных рядов	57
10.6. Понятие о взаимокорреляционной функции	63
10.7. Авторегрессионные модели временных рядов	67
10.8. Понятие о цепях Маркова	73
Глава 11. Спектральный анализ	77
11.1. Понятие спектральной плотности	77
11.2. Аналитическое оценивание спектральной плотности	79
11.3. Понятие о частотной весовой функции	82
11.4. Численное оценивание спектральной плотности	86
11.5. Виды спектральной плотности временных рядов	97
11.6. Понятие о взаимной спектральной плотности	100
11.7. Фильтрация временных рядов	104
11.8. Понятие об вейвлет-анализе	112

Часть 4. Анализ случайных полей

Глава 12. Статистические характеристики и свойства случайного поля	125
12.1. Первичные характеристики случайного поля	125
12.2. Однородность и изотропность случайного поля	128
12.3. Анализ схем размещения точек на карте	133

12.4. Понятие о регионализированной переменной	140
Глава 13. Методы анализа случайных полей	144
13.1. Построение и анализ карт	144
13.2. Пространственное осреднение гидрометеорологических данных	147
13.3. Построение и анализ кросскорреляционной функции . . .	153
13.4. Понятие об объективном анализе	156
13.5. Использование статистического пакета «Серфер» (Serfer) для объективного анализа полей	161
13.6. Понятие о крайгинге	170
Список литературы	173

Приложения

Приложение 1. Функция Лапласа	175
Приложение 2. Распределение Пирсона χ^2	178
Приложение 3. Распределение Стьюдента	179
Приложение 4. Распределение Фишера	180
Приложение 5. Значения величины z для значений коэффициента корреляции r от 0,00 до 0,99	181
Приложение 6. Словарь статистических терминов	182

Учебное издание

Малинин Валерий Николаевич, д.г.н., проф.

Статистические методы анализа
гидрометеорологической информации

Том 2. Анализ временных рядов и случайных полей

Начальник РИО А.В. Ляхтейнен

Редактор Л.Ю. Кладова

Верстка М.В. Ивановой

Подписано в печать 14.10.2020. Формат 60×90 $\frac{1}{16}$. Гарнитура Times New Roman.

Печать цифровая. Усл. печ. л. 12,25. Тираж 50 экз. Заказ № 961/2.

РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская ул., 79.
