



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

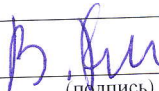
высшего образования

«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра гидрофизики и гидропрогнозов

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему Технологические алгоритмы построения двумерной
плотности вероятности

Исполнитель	Москалюк Максим Александрович (фамилия, имя, отчество)
Руководитель	к.т.н., доцент (ученая степень, ученое звание)
	Гайдукова Екатерина Владимировна (фамилия, имя, отчество)
«К защите допускаю» Заведующий кафедрой	 (подпись)
	д.т.н., профессор (ученая степень, ученое звание)
	Коваленко Виктор Васильевич (фамилия, имя, отчество)

«17» июня 2016 г.

Санкт-Петербург

2016



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра гидрофизики и гидропрогнозов

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему Технологические алгоритмы построения двумерной
плотности вероятности

Исполнитель	Москалюк Максим Александрович
	(фамилия, имя, отчество)
Руководитель	К.Т.Н., доцент
	(ученая степень, ученое звание)
Гайдукова Екатерина Владимировна	
(фамилия, имя, отчество)	

«К защите допускаю» Заведующий кафедрой	
(подпись)	
д.т.н., профессор	
(ученая степень, ученое звание)	
Коваленко Виктор Васильевич	
(фамилия, имя, отчество)	

«17» июня 2016 г.

Санкт–Петербург
2016

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	3
1 Основы частично инфинитного моделирования	4
1.1 Неустойчивость решений модели формирования речного стока	4
1.2 Расширение фазового пространства модели	7
1.3 Практическая польза от двумерной плотности вероятности $p(Q, E)$	10
1.4 Постановка цели и задач исследования	13
2 Формирование базы данных для исследования	14
2.1 Многолетние ряды стока	14
2.2 Многолетние ряды испарения	17
3 Алгоритмы построения $p(Q, E)$	22
3.1 Выбор инструментария	22
3.2 Алгоритм построения двумерной гистограммы	28
3.3 Алгоритм построения поверхности $p(Q, E)$	30
4 Описание программного продукта по построению $p(Q, E)$	35
Заключение	40
Список использованных источников	41
Приложение А – Эмпирические гистограммы стока и испарения	43
Приложение Б – Результаты работы программы	58

ВВЕДЕНИЕ

Темой исследования выпускной работы является построение двумерной плотности вероятности с помощью программного инструментария. В качестве программного инструментария был выбран *Matlab*, так как она довольно функциональный, прост в использовании и строит графические рисунки.

Актуальность данной работы заключается в том, что программный продукт строит, привычную нам, плотность вероятности в 3D модели, используя испарение в качестве третьей оси.

Цель работы заключается в получении технологического алгоритма построения двумерного распределения двух случайных величин и в умении визуализировать их в виде «колокольчика», с помощью компьютерного приложения *MatLab*.

Тема продиктована последними исследованиями, проводимыми на кафедре гидрофизики и гидропрогнозов. Разработано новое научное направление, называемое «частично инфинитное моделирование», которое позволяет моделировать (а, значит, и прогнозировать) развивающиеся объекты (системы). Устойчивое моделирование находящихся в развитии объектов основано на расширении предметной области модели, описывающей процессы, происходящие в рассматриваемой системе. Расширение предметной области влечет за собой увеличение фазовых переменных учитываемых в модели. Возникает технический вопрос об умении получать многомерные характеристики процессов. На решение подобных вопросов направлено выполняемое исследование.

1 ОСНОВЫ ЧАСТИЧНО ИНФИНИТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

1.1 Неустойчивость решений модели формирования речного стока

Все виды многолетнего речного стока описываются асимметричными одномодальными кривыми плотности вероятности, которые укладываются в семейство кривых Пирсона, являющееся решением одноименного уравнения

$$\frac{dp}{dQ} = \frac{Q - a}{b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2} p, \quad (1.1)$$

где p – плотность вероятности речного стока;
 a, b_0, b_1, b_2 – коэффициенты.

На практике считается достаточным аппроксимировать кривую $p(Q)$ тремя начальными моментами $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} Q^n p(Q) dQ$ ($n = 1, 2, 3$) (рисунок 1.1, а).

Каждый из этих моментов имеет определенный геометрический смысл, и в совокупности они, с достаточной для практики полнотой, характеризуют одномодальную кривую.

На практике часто эмпирические кривые не соответствуют подобному описанию. Гистограммы обычно многомодальны (рисунок 1.1, б), а «хвосты» распределений меняются не по экспоненте, а по степенному закону, рисунок 1.1, в. Однако оба эти обстоятельства на практике игнорируют, ссылаясь на «короткие ряды наблюдений».

Однако можно получить генетическую модель формирования стока, которая дает решение в виде кривых плотности вероятности, эволюционирующих во времени:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q}(Ap) + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial Q^2}(Bp). \quad (1.2)$$

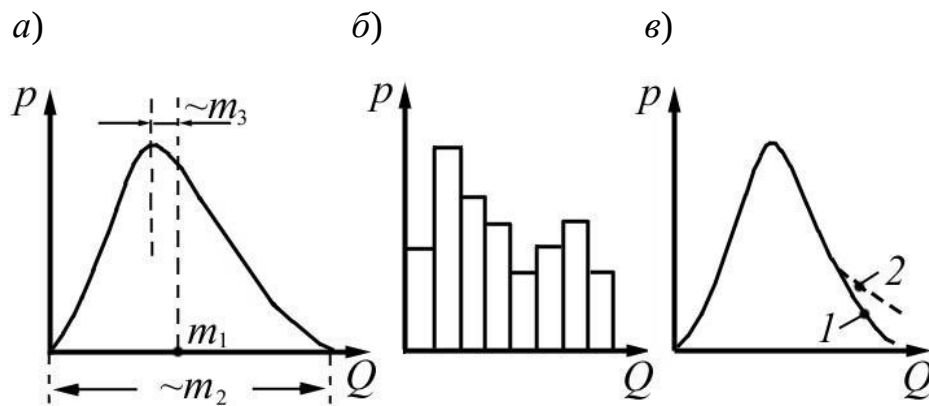


Рисунок 1.1 – Теоретическая (а) и реальные (б и в) распределения плотности вероятности (начальные моменты m_2 и m_3 характеризуют линейные размеры, показанные на рисунке): 1 – экспоненциальная; 2 – степенная.

Таким уравнением является уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, в котором A – коэффициент сноса, B – коэффициент диффузии.

В стационарном случае модель ФПК превращается в уравнение Пирсона (1.1), но его коэффициенты a , b_0 , b_1 , b_2 уже связываются с факторами формирования стока: $a = (G_{\tilde{c}\tilde{N}} + 2\bar{N}) / (2\bar{c} + G_{\tilde{c}})$; $b_0 = -G_{\tilde{N}} / (2\bar{c} + G_{\tilde{c}})$; $b_1 = G_{\tilde{c}\tilde{N}} / (2\bar{c} + G_{\tilde{c}})$; $b_2 = -G_{\tilde{c}} / (2\bar{c} + G_{\tilde{c}})$ (здесь c – коэффициент обратный коэффициенту стока; N – норма осадков; $G_{\tilde{c}}$, $G_{\tilde{N}}$, $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ – интенсивности белых шумов. Уравнение ФПК позволяет решить две гидрологические проблемы: 1) оценить гидрологические последствия изменения климата; 2) оценить влияние антропогенных нагрузок на водный режим бассейнов. И, главное, для наших целей, может объяснить появление толстых хвостов и неустойчивость моментов.

Это объяснение заключается в следующем [1]. Задание плотности вероятности (кривой обеспеченности) равносильно заданию определенного

числа моментов: $p(Q) \sim m_1, m_2, m_3, \dots$ «Известна процедура, позволяющая аппроксимировать уравнение ФПК системой уравнений для моментов:

$$dm_n / dt = (-\bar{c} + 0,5nG_{\tilde{c}})m_n + \dots \quad (n = 1, 2, 3, 4) \quad (1.3)$$

(приведены только те члены правой части, которые необходимы для выяснения условий устойчивости).» [1].

«Из системы (1.3) видно, что при $\bar{c} < 0,5nG_{\tilde{c}}$ производная $dm_n/dt > 0$, т. е. $m_n \rightarrow \infty$. Это и есть формальный признак неустойчивости. Если обозначить $\beta = G_{\tilde{c}} / \bar{c}$, то неустойчивость для момента n -го порядка m_n возникает при $\beta > 2/n$ ($m_3 - \beta > 2/3, m_2 - \beta > 1, m_1 - \beta > 2$).» [1].

Получена практическая формула для вычисления критерия неустойчивости:

$$\beta = 2k \ln(r) + 2, \quad (1.4)$$

где k – коэффициент стока;

r – коэффициент автокорреляции при годовой сдвигке.

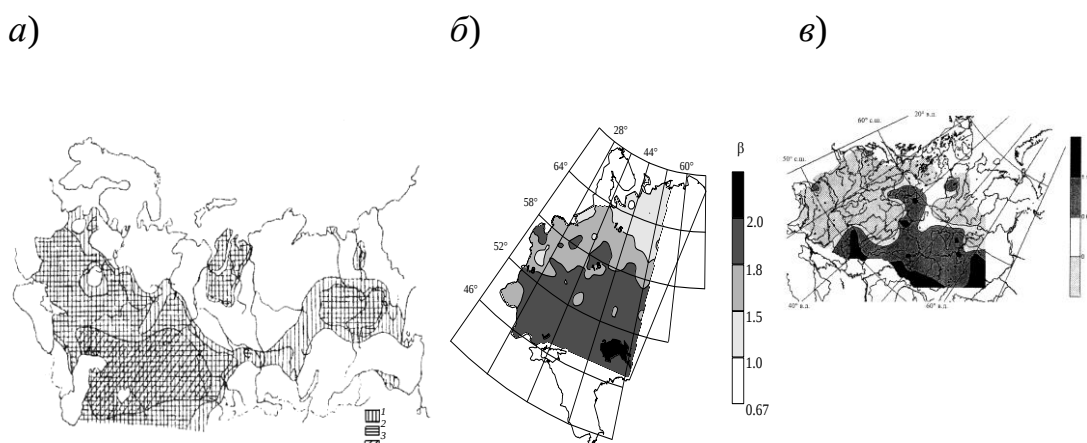


Рисунок 1.2 – Неустойчивость годового стока на территории СНГ (а), минимального летне-осеннего и максимального стока весеннего половодья на ЕТР (б, в): $1 - \beta > 2/3$; $2 - \beta > 1$; $3 - \beta \geq 1,8$ (для годового стока).

По уравнению (1.4) были получены зоны неустойчивости, которые показаны на рисунке 1.2 [1].

1.2 Расширение фазового пространства модели

Фазовое пространство – это матрица переменных, характеризующих состояние объекта. Расширяя фазовое пространство (усложняя модель), можно ликвидировать неустойчивость решения модели. Рассмотрим, как это происходит.

В речном бассейне действует конкурентное взаимодействие между фазовыми переменными Q_i . Известно также, что для большого периода осреднения уравнение водного бассейна имеет вид $\dot{\bar{X}} = \bar{Q} + \bar{E}$, т. е. остается только два конкурента (Q и E) за ресурс ($\dot{X}$). Гидрологи интересуются в основном расходом воды. Стохастически обобщая динамическую модель $dQ/dt = -(1/k\tau)Q + \dot{X}/\tau$, они приходят к уравнению ФПК и семейству кривых Пирсона (его стационарному решению). Но аналогичное уравнение можно записать и для испарения:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{k_E \tau_E} E + \frac{\dot{X}}{\tau_E}, \quad (1.5)$$

где $k_E = E / \dot{X}$ – коэффициент испарения;

τ_E – время релаксации испарительной емкости бассейна.

Стохастически обобщая это уравнение, приходим к уравнению ФПК для $p(E)$ с коэффициентами сноса и диффузии:

$$A_E = -(\bar{c}_E - 0,5G_{\tilde{c}_E})E - 0,5G_{\tilde{c}_E\tilde{N}} + \bar{N}; \quad (1.6)$$

$$B_E = G_{\tilde{c}_E} E^2 - 2G_{\tilde{c}_E\tilde{N}} E + G_{\tilde{N}},$$

где $G_{\tilde{c}_E\tilde{N}}$ больше (видимо) нуля, что приводит к отрицательному (пока это умозрительное предположение) коэффициенту асимметрии для распределения $p(E)$.

Пока $G_{\tilde{c}_E} \ll \bar{c}_E$ и $\bar{c}_Q \gg G_{\tilde{c}_Q}$ обе предметный области (стоковая и испарительная) могут рассматриваться независимо друг от друга, но в случае отсутствия стационарных распределений их надо рассматривать совместно. Так как $c_Q = \dot{X} / Q = (Q + E) / Q$; $c_E = \dot{X} / E = (Q + E) / E$, то получим систему уравнений:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q + E}{\tau_Q} + \frac{\dot{X}}{\tau_Q} + z\xi; \quad (1.7)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{Q + E}{\tau_E} + \frac{\dot{X}}{\tau_E} + z\xi,$$

в которые добавлен аддитивный белый шум с интенсивностью G_z . Мультипликативные шумы исчезли, так как сделано предположение, что они порождались либо стоковой, либо испарительной предметными областями. Таким образом приходим к двумерному уравнению ФПК:

$$\frac{\partial p(Q, E; t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial Q} \left[\frac{1}{\tau_Q} (Q + E - \dot{X}) p(Q, E; t) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{1}{\tau_E} (Q + E - \dot{X}) p(Q, E; t) \right] + \frac{G_z \partial^2 p(Q, E; t)}{\partial Q \partial E} + \\
& + \frac{G_z}{2} \frac{\partial^2 p(Q, E; t)}{\partial Q^2} + \frac{G_z}{2} \frac{\partial^2 p(Q, E; t)}{\partial E^2}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Решение этого уравнения – нормальное распределение («колокольчик») (рисунок 1.3, а) [1].

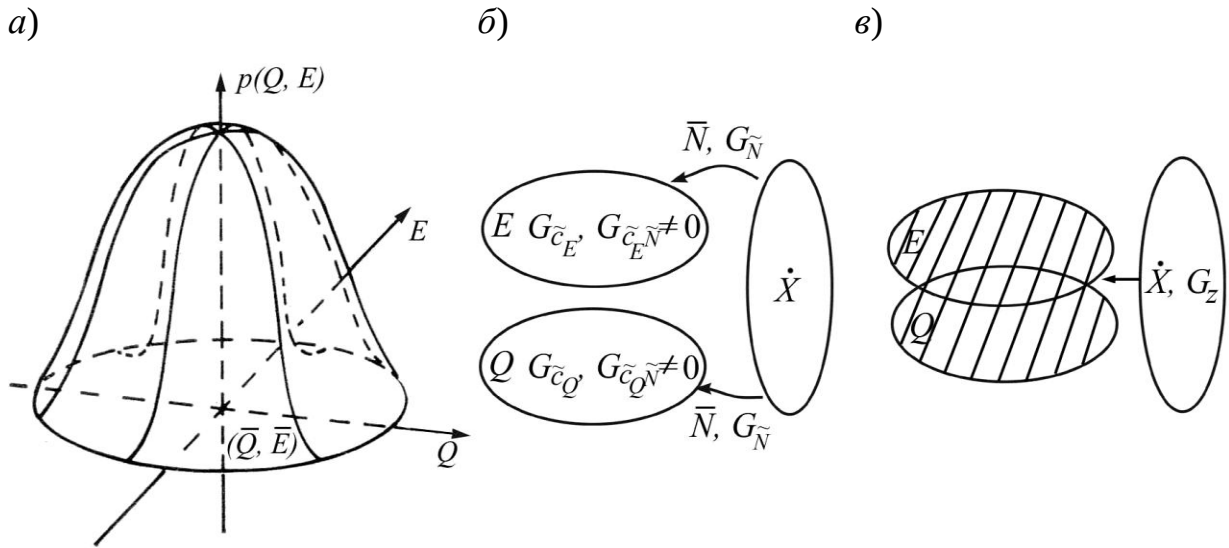


Рисунок 1.3 – Нормализация распределения $p(Q, E)$ при объединении двух предметных областей (а) и учитываемые интенсивности шумов при раздельном (б) и совместном (в) их рассмотрении.

При объединении предметных областей произошла нормализация распределения, а также ликвидирован источник, делающий распределение нестационарным. Мы сделали систему мультипликативно замкнутой от внешнего мира, но оставили ее аддитивно открытой. Тем самым получили возможность иметь устойчивое по моментам, но уже двумерное распределение. В случае одномерного устойчивого распределения нам необходимо было иметь три момента для его описания (в случае кривой Пирсона III типа). Сечение же «колокольчика» будет уже нормальным распределением и для его

описания надо знать два момента. Но это будет условное распределение (для каждого E – «свое»). Следовательно, все равно надо знать три числа для его описания. Однако в случае $p(Q, E; t)$ мы можем работать и с распределениями, которые раньше были неустойчивыми по моментам. Толстые хвосты и низкочастотная расходямость спектра исчезли, но исчезли они только для двумерного случайного процесса (Q, E) (и условного одномерного). Двумерный процесс (для данного случая) полностью заполняет плоскость, его фрактальная размерность совпадает с топологической (безусловный одномерный процесс будет фрактальным).

1.3 Практическая польза от двумерной плотности вероятности $p(Q, E)$

Рассмотрим, какую пользу может дать переход к двумерным распределениям на практике. «Если в рамках линейного формирующего фильтра расход $Q_{1\%}$ «брался» при фиксированных значениях $\bar{c}$, $G_{\bar{c}}$ и $G_{\bar{c}\tilde{N}}$ (которые дает ряд наблюдений, если он стационарный), то теперь выбор обеспеченности становится проблемой. События 1 %-й обеспеченности происходят на окружности определенного радиуса, построенной в координатах (Q, E) , а не на оси расходов, на которой фиксировался $Q_{1\%}$. Можно предположить, что максимальное значение расхода на этой окружности превосходит значение $Q_{1\%}$, снятое с кривой $p(Q)$. Возможно, оно превосходит и увеличенные их значения, приписываемые толстым хвостам за счет введения «гарантийных поправок» (гп). Важно, что $\max_Q (Q, E)_{1\%}$ является однозначной, а следовательно, нормируемой характеристикой (это происходит за счет нормализации, рисунок 1.4). Если при толстом хвосте происходит нарушение предельной теоремы ($S_n / \max \{x_1, x_2, \dots, x_n\} = \text{const}$), то при нормализации мы оказываемся в условиях ее справедливости, но при «застывании» размерности пространства вложения (нормальное распределение «вкладывается» само в себя).» [2].

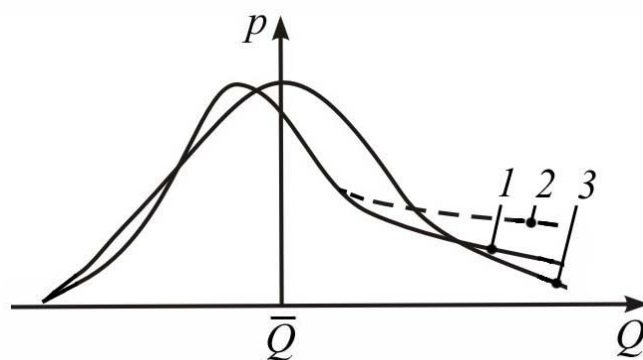


Рисунок 1.4 – Иллюстрация возможного увеличения $Q_{1\%}$ при переходе от устойчивых асимметричных распределений (1) к толстохвостым за счет «гп» (2) и к нормализованным двумерным (3) (в третьем случае под $Q_{1\%}$ понижается максимальное значение расхода, снятое с проекции двумерного распределения $(Q, E)_{1\%}$).

Необходимо найти возможность практически строить двумерные распределения $p(Q, E)$ по данным натурных наблюдений. Но перед этим необходимо пояснить, почему именно испарение (а не биомасса или характеристики подстилающей поверхности водосборов, например) должно рассматриваться как основной конкурент расходу.

Была оценена размерность пространства вложения для многолетнего годового стока ЕТР. Оказалось, что для устойчивого описания формирования стока достаточно 2–3-х фазовых переменных (хотя были створы, их немного, на которых размерность пространства вложения больше).

Пока временные интервалы, на которых рассматривается процесс, малы (месяц, год), конкурентов расходу за ресурс осадки может быть несколько. Однако при переходе к многолетним нормам статистически значимое влияние на фрактальную размерность оказывает только испарение (а также температура воздуха). Характеристики подстилающей поверхности влияния не оказывают [2]. Этот результат не явился неожиданностью, так как в гидрологии хорошо известно, что уравнение водного баланса для многолетних норм имеет вид: $\bar{X} = \bar{E} + \bar{Q}$. Однако испарение (так же как и расход) от года к году будет меняться, образуя (устойчивую или неустойчивую) статистическую со-

вокупность. На интервалах времени, на которых уместно употреблять климатическую терминологию (несколько десятилетий), вариации стока и испарения создаются за счет осадков, температуры, запасов влаги в почвогрунтах.

В общем случае, когда необходимо изучать и прогнозировать эволюцию формирования стока на любых временных интервалах надо уметь строить эмпирические «ежики» $p(Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots)$. При осреднении такого многомерного случайного процесса по фазовым переменным, оказывающим влияние на интервалах времени много меньших «климатического интервала», приходим к двумерному распределению $p(Q, E)$, рисунок 1.5. Получение подобных распределений актуально как для максимального стока (который используется в строительном проектировании), так и для минимального стока (являющегося лимитирующим для многих водозависимых отраслей экономики и экологии).

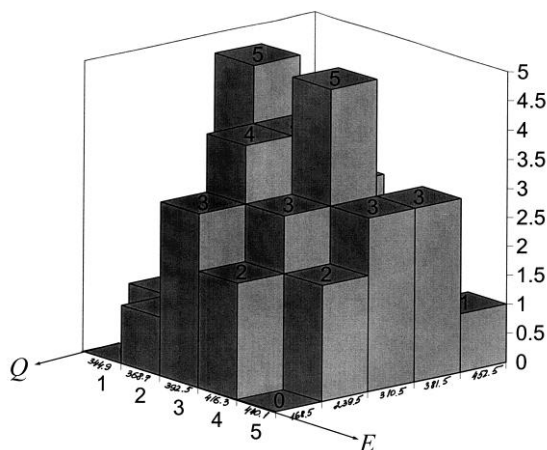


Рисунок 1.5 – Гистограмма двумерного распределения $p(Q, E)$, р. Сухона – г. Тотьма, $F = 34800 \text{ км}^2$.

Делается одно замечание. «Статистические методы используются для упрощения описания (а значит, и управления) процесса: вместо того, чтобы отслеживать каждый индивидуальный расход (в ряду их несколько десятков), информацию о них «свертывают» в вероятностном распределении и оперируют только несколькими числами (моментами). При неустойчивости подобная свертка (только одних расходов) не срабатывает. Переходя к двумерному распределению $p(Q, E)$ и надеясь на его устойчивость, фактически одновре-

менно «свертывается» информация с двух смежных областей (стоковой и испарительной). Тем самым заменяется нейтрализм конкурентным типом взаимодействия испарения и расхода. Ситуация становится более финитной и статистически управляемой. Но сами управляющие воздействия носят уже другой качественный характер – это вероятностные моменты уже двумерных распределений.» [2].

Учет второй фазовой переменной не всегда нормализует распределение. «Это происходит для линейных моделей, если игнорировать влияние других (скрытых) переменных, создающих мультипликативные шумы, коррелирующиеся с шумами осадков. В нелинейном случае возможно появление асимметрии и многомодальности.» [2]

1.4 Постановка цели и задач исследования

Целью данного исследования является разработка технологического алгоритма построения двумерного распределения двух случайных величин в виде «колокольчика» с помощью компьютерного приложения *MatLab*.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

- а) сформировать базу данных для исследования;
- б) разработать алгоритм построения $p(Q, E)$ и гистограмм в компьютерном приложении *Excel*;
- в) обосновать выбор инструментария для построения двумерной поверхности;
- г) разработать программный продукт для построения двумерных эмпирических гистограмм и теоретических поверхностей.

2 ФОРМИРОВАНИЕ БАЗЫ ДАННЫХ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

2.1 Многолетние ряды стока

При формировании базы данных для исследования было выбрано 15 водосборов. Критерии выбора водосборов заключались в следующем: площади водосбора должны находиться в зональных пределах (от 1000 до 50000 км²); водосборы должны находиться в разных зонах устойчивости, т. е. располагаться и в северных, и в южных районах; ряды наблюдений за стоком на выбранных водосборах должны иметь достаточную продолжительность для надежной статистической оценки.

Местоположение выбранных водосборов (центров водосборов) показано на рисунке 2.1.

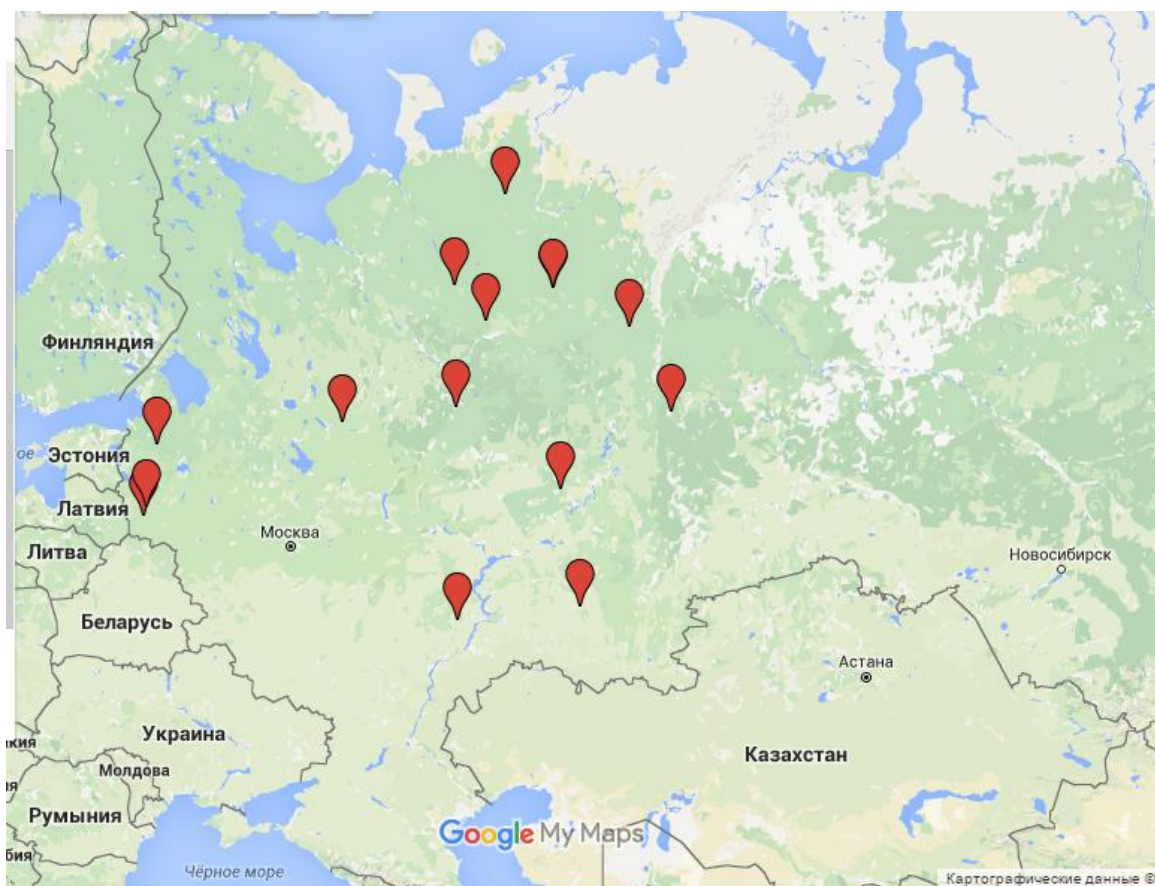


Рисунок 2.1 – Местоположение центров выбранных водосборов.

На рисунке 2.1 видно, что выбранные водосборы расположены в Европейской части России достаточно равномерно. Подобное расположение водосборов обусловлено попыткой охватить все зоны по критерию устойчивости: север более устойчив, чем юг. Выбранные водосборы находятся в умеренно-континентальном типе климата страны и разбросаны на несколько зон увлажнения, преимущественно в зоне избыточного увлажнения, там находится 13 водосборов и 2 водосбора находятся в зоне достаточного увлажнения.

В таблице 2.1 представлены характеристики отобранных водосборов.

Таблица 2.1 – Характеристика выбранных водосборов

Река – пункт	Координаты центров водосборов, град.		F, км ²
	широта	долгота	
р. Паша – с. Часовенское	60,02	60,02	5710
р. Луга – г. Кингисепп	59,06	29,81	12800
р. Великая – д. Гуйтово	56,79	29,04	13400
р. Сороть – д. Осинкино	57,1	29,2	3170
р. Сухона – г. Тотьма	59,71	40,68	34800
Юг – д. Гаврино	60,17	47,35	34800
Яренга – с. Тохта	62,60	49,14	4930
Вашка – д. Решельская	63,54	47,33	19000
Сызранка – с. Репьевка	53,28	47,49	4380
Дема – д. Бочкарева	53,77	54,67	12500
Чепца – с. Полом	57,64	53,55	5930
Печора – с. Троицко-Печорск	62,45	57,61	35600
Ижма – с. Усть-Ухта	63,48	53,06	15000
Ухта – г. Ухта	63,50	53,06	4290
Цильма – с. Трусово	65,83	50,29	20900

Из таблицы 2.1 видно, что самый большой водосбор реки (Печора – с. Троицко-Печорск), он равен 35600 км². Находится в умеренно-континентальном климате в северной части страны. Самый маленький водосбор (река Сухона – г. Тотьма) находится рядом с границей с Латвией, климат так же умеренно-континентальный.

В таблице 2.2 представлена информация статистических характеристик рядов стока. Рассчитаны модули стока (q), слои стока (h), среднеквадратическое отклонение (ско), коэффициент вариации (C_v) и коэффициент асимметрии (C_s).

Таблица 2.2 – Статистическая характеристика гидрологических рядов

Река – пункт	Период наблюдений, гг.	Q , м ³ /с	h , мм	ско, м ⁶ /с ²	C_v	C_s
Паша – с. Часовенское	1951–1988	62,0	354	13	0,19	0,12
Луга – г. Кингисепп	1951–1988	94,7	233	21	0,23	0,39
Великая – д. Гуйтово	1951–1988	90,4	213	23	0,25	0,39
Сороть – д. Осинкино	1951–1988	20,9	207	5	0,26	0,32
Сухона – г. Тотьма	1951–1988	300	272	66	0,22	0,22
Юг – д. Гаврино	1951–1988	285	258	56	0,20	0,65
Яренга – с. Тохта	1951–1988	42,6	272	11	0,26	–0,17
Вашка – д. Рещельская	1951–1988	188	312	27	0,15	0,25
Сызранка – с. Репьевка	1951–1988	13,5	97	2	0,17	0,83
Дема – д. Бочкарева	1951–1988	44,7	113	13	0,30	0,67
Чепца – с. Полом	1951–1988	36,3	193	7	0,20	0,23
Печора – с. Троицко-Печорск	1951–1988	532	471	55	0,10	0,40
Ижма – с. Усть-Ухта	1951–1988	149	313	18	0,12	0,34
Ухта – г. Ухта	1951–1988	45,3	333	6	0,12	0,33
Цильма – с. Трусово	1951–1988	227	342	33	0,15	–0,24

Из таблицы 2.2 видно, что самый маленький слой стока у р. Сызранка – с. Репьевка, он равен $h = 97$ [мм]. У этой же станции и самое маленькое среднеквадратическое отклонение, $\text{ско} = 2$ [мм²]. Самое большое значение коэффициента вариации у р. Сорочь – д. Осинкино, $C_v = 0,26$.

Самый большой слой стока у Печора – с. Троицко-Печорск, он равен $h = 471$ [мм]. Так же можно предположить, что у него самое большое среднеквадратическое отклонение, $\text{ско} = 55$ и самый маленький коэффициент вариации $C_v = 0,1$.

2.2 Многолетние ряды испарения

Измерение испарения с водной поверхности осуществляется с помощью плавучих и грунтовых испарителей, испарительных бассейнов, представляющих собой цилиндрические резервуары определенной площади и емкости. В России используются испарители ГГИ-3000 (площадь испаряющей поверхности 3000 см²). Этот прибор вместе с дождемером помещается как в грунт на специальной испарительной площадке, так и на воду на специальном плоту. Количество испарившейся воды определяется по снижению уровня в испарителе, а выпавшие осадки учитываются дождемером.

Испарение между сроками наблюдений вычисляется по уравнению водного баланса

$$E = P + (h_1 + h_2)K, \quad (2.1)$$

где E – слой испарившейся воды, мм;

P – слой выпавших атмосферных осадков, мм;

h_1 и h_2 – высота стояния уровня воды, отсчитываемая от некоторой постоянной отметки в первый и второй сроки наблюдений соответственно;

K – поправочный коэффициент к измерительному устройству.

Аналогичным образом ведутся наблюдения на испарительных бассейнах, которые имеют площади испаряющей поверхности 100 и 20 м². По ре-

шению Всемирной метеорологической организации (ВМО) в качестве эталона выбран бассейн 20 м², испарение с которого используется для получения значений испарения с естественных водоемов больших размеров.

По данным А. Р. Константинова, пересчет на водную поверхность площадью до 40 км² можно выполнить по формуле:

$$E = K_H + K_3 E_{20}, \quad (1.2)$$

где K_H – коэффициент, характеризующий влияние глубины водоема на испарение (K_H меняется от 1,0 до 0,92 и определяется по специальной таблице);

K_3 – коэффициент, характеризующий защищенность водоема от ветра берегами, деревьями, строениями и другими препятствиями (изменяется от 0,96 до 0,51);

E_{20} – слой испарившейся воды в испарительном бассейне;

P – коэффициент, характеризующий влияние размеров водоема (A_v) на испарение. Значения этого коэффициента для водоемов, расположенных в зонах избыточного и достаточного увлажнения (гумидного климата).

Прямые измерения испарения, как описано выше, не производятся (за исключением эпизодических наблюдений или систематических измерений на экспериментальных водосборах, например на территории Валдайской лаборатории). Однако существуют эмпирические формулы, связывающие испарение с температурой и влажностью. Есть рекомендации [3], пользуясь которыми можно сгенерировать ряды годовых испарений.

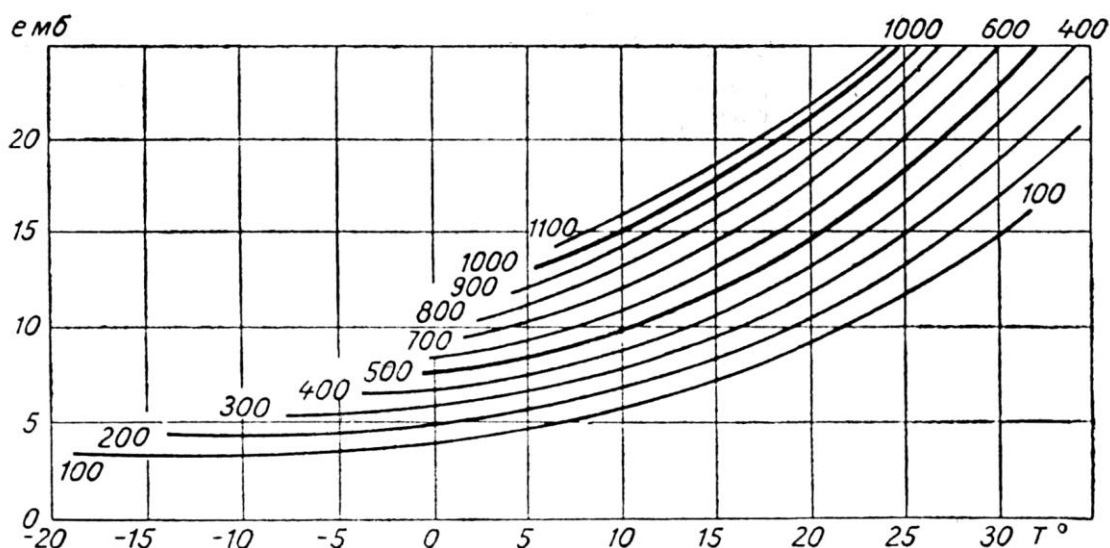


Рисунок 2.2 – График для расчета годового испарения (мм/год) по среднегодовой температуре (T°) и влажности воздуха (e мбар).

В частности, предлагается определять испарение по температуре и влажности воздуха, измеряемых на существующей сети метеорологических станций (см. рисунок 2.2). Номограмма на рисунке 2.2 разработана Константиновым А. Р. по эмпирическим данным, что делает данный метод наиболее достоверным.

По номограмме Константинова были сгенерированы ряды испарения. Данные по температуре и влажности воздуха были взяты из источников Всемирной метеорологической организации [4].

В таблице 2.3 представлены рассчитанные статистические характеристики рядов испарения. Рассчитаны средние значения испарения (E), среднее квадратическое отклонение (ско), коэффициент вариации (C_v) и коэффициент асимметрии (C_s) рядов испарения.

Таблица 2.3 – Статистическая характеристика рядов испарения

Река – пункт	Период наблюдений, гг.	E , мм	ско, мм	C_v	C_s
р. Паша – с. Часовенское	1951–1988	435	35	0,08	0,09
р. Луга – г. Кингисепп	1951–1988	476	36	0,08	0,15
р. Великая – д. Гуйтово	1951–1988	514	32	0,06	0,042
р. Сороть – д. Осинкино	1951–1988	512	33	0,06	0,39
р. Сухона – г. Тотьма	1951–1988	401	34	0,09	0,13
Юг – д. Гаврино	1951–1988	362	33	0,09	0,04
Яренга – с. Тохта	1951–1988	300	35	0,12	–0,18
Вашка – д. Рещельская	1951–1988	286	37	0,13	–0,2
Сызранка – с. Репьевка	1951–1988	515	34	0,07	–0,42
Дема – д. Бочкарева	1951–1988	450	33	0,07	–0,16
Чепца – с. Полом	1951–1988	408	30	0,07	–0,06
Печора – с. Троицко-Печорск	1951–1988	260	32	0,12	0,18
Ижма – с. Усть-Ухта	1951–1988	273	35	0,13	–0,06
Ухта – г. Ухта	1951–1988	272	35	0,13	–0,06
Цильма – с. Трусово	1951–1988	244	34	0,14	–0,03

Из таблицы 2.3 видно, что самое маленькое испарение, $E = 244$ [мм], у р. Цильма – с. Трусово, это связано с самым северным расположением водосбора. Так же из-за географического положения среднеквадратическое отклонение довольно большое, $ско = 34$ [мм], и большой коэффициент вариации, $C_v = 0,14$.

Самое большое значение нормы испарения, $E = 515$ [мм], у р. Сызранка – с. Репьевка. Это так же связано с географическим положением, водосбор находится южнее всех.

Из-за большого испарения, так же высоко и среднеквадратическое отклонение, $\sigma = 34$ [мм], и маленький коэффициент вариации, $C_v = 0,07$.

Надо отметить, что для рядов испарения характерны малые величины среднеквадратического отклонения, а, следовательно, и коэффициентов вариации по сравнению с рядами расходов воды с водосборов, находящихся в тех же географических зонах. Это, вероятно, связано с инертностью системы под названием испарительная предметная область. Внешнее воздействие оказывает меньшее влияние на испарение.

3 АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ $p(Q, E)$

3.1 Выбор инструментария

Система *Matlab* была разработана Молером (С. В. *Moler*) и с конца 70-х гг. широко использовалась на больших ЭВМ. В начале 80-х гг. Джон Литл (*John Little*) из фирмы *Math Works, Inc.* разработал версии системы *PC MATLAB* для компьютеров класса *IBM PC*, *VAX* и *Macintosh*. В дальнейшем были созданы версии для рабочих станций *Sun*, компьютеров с операционной системой *UNIX* и многих других типов больших и малых ЭВМ. Сейчас свыше десятка популярных компьютерных платформ могут работать с системой *Matlab*. К расширению системы были привлечены крупнейшие научные школы мира в области математики, программирования и естествознания. Система *Matlab 6.0* появилась в конце 2000 г., а система *Matlab 6.1* (в которой весьма существенно переработаны пакеты расширения, но в ядро системы добавлены лишь две команды для работы со звуком и команда *strfind*, дополняющая возможности функции *findstr*) – в июле 2001 года. В новой реализации расширены возможности системы, радикально переработан и улучшен интерфейс пользователя, существенно обновлен состав пакетов расширений. Одной из основных задач системы *Matlab 6* было предоставление пользователям мощного языка программирования, ориентированного на математические расчеты и способного превзойти возможности традиционных языков программирования, которые многие годы использовались для реализации численных методов. При этом особое внимание уделялось как повышению скорости вычислений, так и адаптации системы к решению самых разнообразных задач пользователей.

Matlab поставляется как комплекс *Matlab + Simulink + Toolbox + Blockset*, где разделами системы *Toolbox* и *Blockset* корпорация *Math Works* называет пакеты расширения для систем *Matlab* и *Simulink*, соответственно.

Одной из основных задач системы *Matlab* всегда было предоставление пользователям мощного языка программирования, ориентированного на технические и математические расчеты и способного превзойти возможности традиционных языков программирования, которые многие годы использовались для реализации численных методов. При этом особое внимание уделялось как повышению скорости вычислений, так и адаптации системы к решению самых разнообразных задач пользователей.

Легкость модификации системы и возможность ее адаптации к решению специфических задач науки и техники привели к созданию десятков пакетов прикладных программ (*Toolbox*), намного расширивших сферы применения системы. Это особенно характерно для новых реализаций системы. Некоторые из пакетов расширения, например *Simulink* (моделирование динамических систем и устройств, заданных в виде системы блоков), *Notebook* (интеграция с текстовым процессором *Word* и подготовка «живых» электронных книг) и *Symbolic* (символьные вычисления с применением ядра системы *Maple*), настолько органично интегрировались с системой *Matlab*, что стали ее составными частями.

Достоинства системы *Matlab*.

а Важными достоинствами системы являются ее открытость и расширяемость. Большинство команд и функций системы реализовано в виде m-файлов текстового формата (с расширением .m) и файлов на языке Си, причем все файлы доступны для модификации. Пользователю дана возможность создавать не только отдельные файлы, но и библиотеки файлов для реализации специфических задач.

В *Matlab* организован модульный принцип построения системы. С момента своего зарождения, когда основным назначением системы был вызов модулей, написанных на языках высокого уровня, и по настоящее время последовательное проведение этого принципа в жизнь способствовало созданию большого числа пакетов прикладных программ (ППП). В создании этих ППП принимают участие как разработчики системы *Matlab*, так и многочис-

ленные партнеры. В результате современное семейство продуктов *Matlab* включает более 50 ППП, а также свыше 250 приложений, разработанных более чем 170 партнерами фирмы, что существенно расширяет функциональные возможности системы.

б Многие математические системы создавались исходя из предположения, что пользователь будет решать свои задачи, практически не занимаясь программированием. Однако с самого начала было ясно, что подобный путь имеет недостатки. Многие задачи нуждаются в развитых средствах программирования, которые упрощают запись алгоритмов задач и порой открывают новые методы создания алгоритмов.

Система *Matlab* имеет входной язык, напоминающий Бейсик (с примесью Фортрана и Паскаля). Запись программ в системе традиционна и потому привычна для большинства пользователей компьютеров. К тому же система дает возможность редактировать программы с помощью любого привычного для пользователя текстового редактора, например, *Microsoft Word*. Имеет она и собственный редактор с отладчиком. Отказ от присущего системе *Mathcad* принципа – задания задач в виде формул – компенсируется заметным увеличением скорости вычислений – при прочих равных условиях она почти на порядок выше, чем у системы *Mathcad*.

Благодаря текстовому формату m-файлов пользователь может ввести в систему любую новую команду, оператор или функцию и затем пользоваться ими столь же просто, как и встроенными операторами или функциями. При этом в отличие от таких языков программирования, как Бейсик, Си или Паскаль не требуется никакого объявления этих новых функций. Это роднит *Matlab* с языками Лого и Форт, имеющими словарную организацию операторов и функций и возможности пополнения словаря новыми определениями-словами. Но, поскольку новые определения в системе *Matlab* хранятся в виде файлов на диске, это делает набор операторов и функций практически неограниченным.

в Реализуются, причем с повышенной скоростью, построения графиков практически всех известных в науке и технике типов. Широко практикуется функциональная закрашка сложных поверхностей, в том числе с интерполяцией по цвету. Возможен учет всевозможных световых эффектов – вплоть до бликов на поверхности сложных фигур при освещении их различными источниками света и с учетом свойств материалов отражающих поверхностей. Применение дескрипторной графики позволяет создавать и типовые элементы пользовательского интерфейса – кнопки, меню, информационные и инструментальные панели и т. д., то есть реализовать элементы визуально-ориентированного программирования.

Графики выводятся отдельно от текстов в отдельных окнах. На одном графике можно представить множество кривых, отличающихся цветом и отличительными символами (кружками, крестиками, прямоугольниками и т. д.). Графики можно выводить в одно или в несколько окон. В статьях и книгах формата *Notebook*, реализованных при совместной работе системы *Matlab* с текстовым процессором *Microsoft Word 95/97/2000*, графики могут располагаться вместе с текстом, формулами и результатами вычислений (числами, векторами и матрицами, таблицами и т. д.). В этом случае степень визуализации оказывается особенно высокой, поскольку документы класса *Notebook* по существу являются превосходно оформленными электронными книгами с действующими (вычисляемыми) примерами.

Особенно привлекательной выглядит возможность построения трехмерных поверхностей и фигур. Если в *Matlab 4* рендеринг трехмерных фигур осуществлялся только при помощи фирменного механизма *painters*, а в *Matlab 5* был добавлен программный рендеринг при помощи Z-буфера, то в *Matlab 6* основным является индустриальный стандарт *Open GL*. Он может поддерживаться аппаратно графическими ускорителями. Система автоматически подбирает наиболее оптимальный механизм рендеринга. По сравнению с системой *Mathcad* построение трехмерных фигур средствами *Matlab* происходит почти на порядок быстрее. Кроме того, при построении таких графи-

ков используется достаточно совершенный алгоритм удаления невидимых линий, что наряду с большими размерами графиков и возможностью интерполяции по цвету делает построенные трехмерные поверхности и фигуры весьма эстетичными и наглядными. Фигуры могут быть прозрачными. Уже в ранних версиях была введена эффектная возможность быстрого вращения графиков в любом направлении. В *Matlab 5.3.1* и 6 она улучшена – теперь вращать в пространстве можно даже плоскость с двумерными графиками.

г Важнейшую роль во всех версиях выполняет подсистема технических расчетов. Следует отметить ту уникальную особенность системы *Matlab*, что все вычислительные операции в ней выполняются над векторами или наборами векторов. Таким образом, система *Matlab* по своей сути является эмулятором векторных вычислений, и это существенно отличает ее от других систем, таких, как *Mathcad*, *Maple*. Векторная обработка данных обеспечивает высокую скорость вычислений, избавляет пользователя от написания циклов и гарантирует непревзойденную точность.

д В составе системы *Matlab* можно теперь обнаружить ряд инструментальных средств (ИС) разработки приложений *Application Development Tools*. Это ИС *Notebook* для написания живых М-книг, ИС *Excel Link* для работы с электронными таблицами *MS ExceJ*, ИС *GUIDE* для создания GUI-приложений, ИС *Runtime Server* для создания независимо исполняемых приложений *Standalone Applications*, ИС *Web Server* для работы с приложениями *Matlab* в сети *Internet*. Инструментальные средства доступа к данным *Data Access Tools* включают программное обеспечение для работы с базами данных, сбора информации в режиме реального времени (блок *Data Sources*).

е Помимо перечисленных выше компонентов в состав семейства *Matlab* входит подсистема моделирования динамических процессов *Simulink*. Для пользователя это конструктор, с помощью которого он может объединять блоки, соответствующие отдельным элементам динамической системы в единое целое и изучать их поведение во времени. При этом пользователь по-

лучает доступ ко всем наборам блоков *Blocksets*, относящимся к различным приложениям.

Возможности моделирования, предоставляемые продуктами семейства *Matlab*, не ограничены только анализом динамического поведения систем во времени, а допускают также моделирование событий (блок *State-flow*), что позволяет имитировать различные ситуации, возникающие при эксплуатации технической системы. Это повышает роль математического моделирования, поскольку позволяет формировать архивы событий, которые могут иметь неопределимое значение при анализе нештатных ситуаций. В этой связи следует обратить внимание, что в состав программных продуктов включены генераторы отчетов для вычислительных работ *Matlab Report Generator* и процедур моделирования *Simulink Report Generator*.

ж В составе продуктов семейства *Matlab / Simulink* имеются инструментальные средства генерации кодов *Code Generation Tools*. Это позволяет не только создавать независимо исполняемые коды на языках *C* или *Ada*, но и выполнять их аппаратную реализацию на различных типах микропроцессоров.

и В состав системы *Matlab* входит ядро одной из самых мощных, популярных и хорошо апробированных систем символьной математики (компьютерной алгебры) *Maple V Release 5*. Оно используется пакетами расширения *Symbolic Math Toolbox* и *Extended Symbolic Math Toolbox*, благодаря которым в среде *Matlab* стали доступны принципиально новые возможности символьных и аналитических вычислений. Для этого используется функция *maple* в той или иной форме: *maple (STATEMENT)* – устанавливает выражение *STATEMENT* для ядра *Maple*. *STATEMENT* является строкой, записанной в формате команд *Maple*. Возвращает результат в форме строки с нотацией системы *Maple*.

В свою очередь, математические системы *Mathcad* и *Maple* допускают установление объектных и динамических связей с системой *Matlab*, что позволяет использовать в них эффективные средства *Matlab* для работы с мат-

рицами. Эта прогрессивная тенденция интегрирования компьютерных математических систем, несомненно, будет продолжена.

к Использование пакетов прикладных программ: *Curve Fitting Toolbox* и *Spline Toolbox* предназначены для аппроксимации и сглаживания экспериментальных данных. Раздел математики, связанный с решением уравнений в частных производных, поддержан пакетом программ *Partial Differential Equation Toolbox*. Набор методов безусловной и условной оптимизации реализован в виде пакета программ оптимизации *Optimization Toolbox*. Статистическая обработка данных поддерживается специализированным пакетом программ *Statistics Toolbox*.

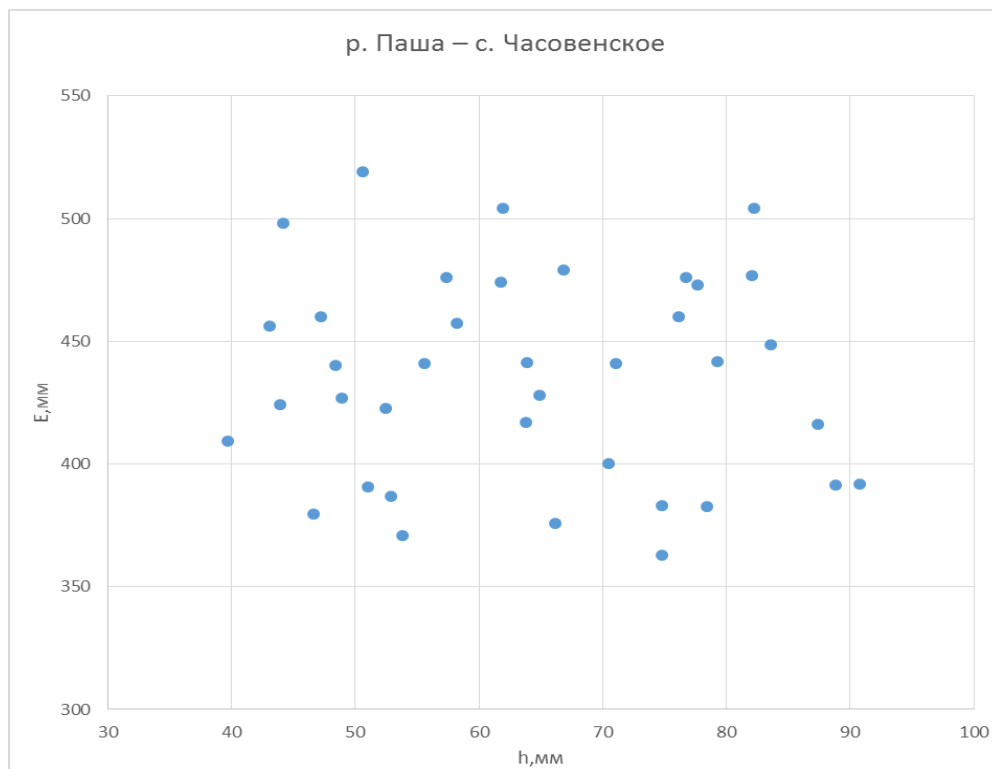
Итак, система *Matlab* отличается от *Mathcad* (математического калькулятора) быстроедействием, имеет встроенное ядро *Maple*, простой язык программирования, средства визуализации и моделирования. В математическом пакете *Matlab* само моделирование и дальнейшее исследование моделей можно осуществить, по крайней мере, тремя способами: функциями из раздела системы *Toolbox*, использованием расширения пакета *Simulink* и непосредственно программированием.

3.2 Алгоритм построения двумерной гистограммы

По рядам расходов воды и испарения высчитываем: коэффициенты вариации (C_v), асимметрии (C_s), среднеквадратическое отклонение (ско) расхода и испарений, а так же коэффициент корреляции между рядами стока и испарения, за каждый пост каждого года. По этим данным строим точечную зависимость расхода от испарения $Q = f(E)$. Делим на равные участки и подсчитываем число точек в этих участках, заносим число в таблицу. По таблице строим гистограмму.

Пример эмпирической гистограммы показан на рисунке 3.1.

a)



б)

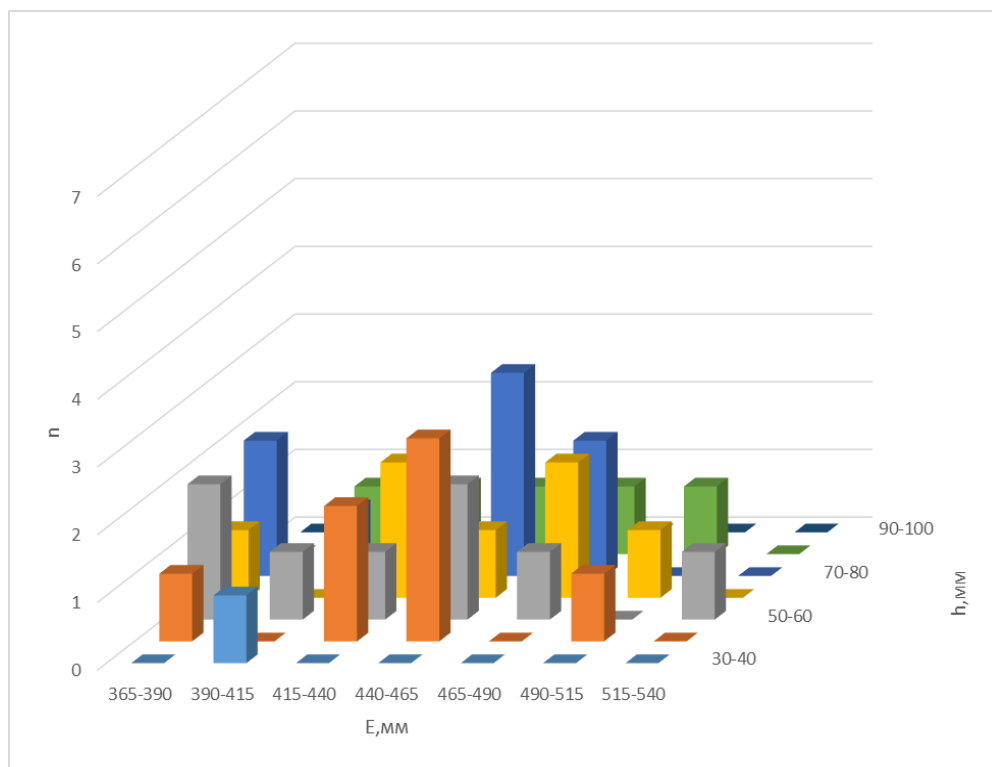


Рисунок 3.1 – Эллипс рассеивания (a), эмпирическая гистограмма (б).

На рисунке 3.1 видно, что эллипс рассеивания (a) получился равномерным, точки сильно не разбросаны. Это так же видно и на гистограмме (столбы более-менее тоже равномерны по высоте).

Для остальных водосборов эллипсы рассеивания и эмпирические гистограммы представлены в приложении А.

3.3 Алгоритм построения поверхности $p(Q, E)$

Встает вопрос об аналитической аппроксимации эмпирических гистограмм, типа представленных на рисунке 1.5. В общем случае, аппроксимируют решение уравнения (1.8), для трехмерной плотности вероятности или даже более общее n -мерное, которое можно записать так [4]:

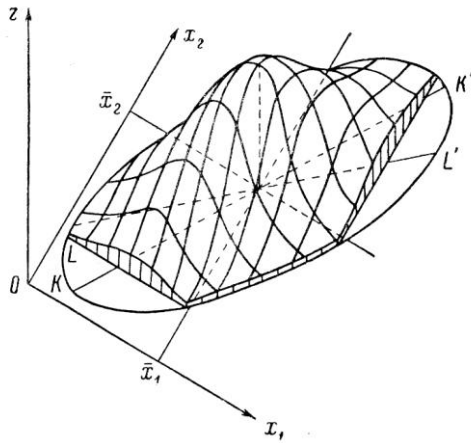
$$\partial p(\vec{x}, t) / \partial t = -\vec{\nabla}' [\vec{A}(\vec{x}, t) p(\vec{x}, t)] + 0,5 \text{Sp}[\vec{\nabla} \vec{\nabla}' \vec{B}(\vec{x}, t) p(\vec{x}, t)], \quad (3.1)$$

где $\vec{x}$ – вектор, характеризующий фазовые переменные исходной системы динамических моделей; $\vec{\nabla} = |\partial / \partial \vec{x}|$; штрих и Sp означают операции транспонирования и взятия следа.

Соотношение (3.1) является уравнением неразрывности $(\partial p(\vec{x}, t) / \partial t = -\text{div } \vec{\Pi}(\vec{x}, t))$ потока вероятности $\vec{\Pi}(\vec{x}, t) = \vec{A}(\vec{x}, t) p(\vec{x}, t) - 0,5 \text{div } \vec{B}(\vec{x}, t) p(\vec{x}, t)$, который для стационарного распределения $(\partial p(\vec{x}, t) / \partial t = 0)$ является величиной постоянной, а учитывая, что на границах $p(\pm \infty, t) = 0$ – нулевой (на границах). Исходя из этого, получают искомое уравнение:

$$\vec{\nabla} [\vec{B}(\vec{x}, t) p(\vec{x}, t)] - 2 \vec{A}(\vec{x}, t) p(\vec{x}, t) = 0. \quad (3.2)$$

a)



б)

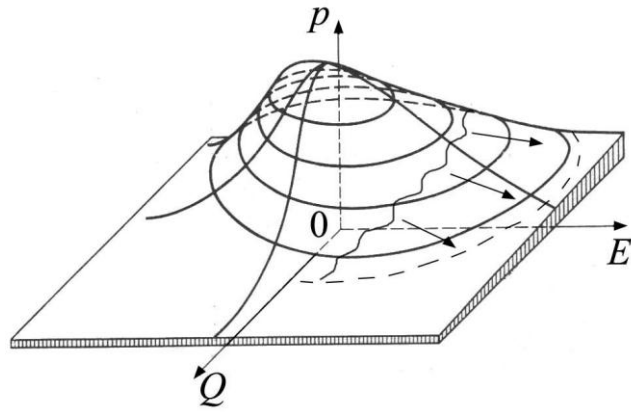


Рисунок 3.2 – Нормальная поверхность (а) и экстраполяция многомерного «хвоста» в зону малых обеспеченностей (б).

«В отличие от одномерного распределения, для которого справедливо уравнение Пирсона, в многомерном случае возможны вихревые движения в потоке вероятности. Поэтому соотношение (3.2) справедливо при существовании скалярного поля для потенциала $V(\vec{x})$.» [2].

Уравнениями в частных производных первого порядка, подобными (3.2), описываются всевозможные поверхности. При отсутствии параметрических шумов их решением является n -мерное нормальное распределение (рисунок 3.2, а), эллипсоид рассеяния которого позволяет определять вероятность нахождения вектора $\vec{x}$ внутри него.

В двумерном случае ($\vec{x} = (Q, E)$),

$$p(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q\sigma_E\sqrt{1-r_{QE}^2}} \exp(-\lambda^2)$$

Вероятность попадания вектора $\vec{x}$ внутрь эллипса равных вероятностей равна $1 - e^{-\lambda^2}$, где

$$\frac{1}{2(1-r_{QE}^2)} \left[\frac{(Q-\bar{Q})^2}{\sigma_Q^2} - \frac{2r_{QE}(Q-\bar{Q})(E-\bar{E})}{\sigma_Q\sigma_E} + \frac{(E-\bar{E})^2}{\sigma_E^2} \right] = \lambda^2.$$

«В случае явного учета параметрических шумов решение уравнения (3.2) будет асимметричным (рисунок 3.2, б), и нужны определенные усилия, чтобы в полном виде проанализировать двумерный аналог уравнения Пирсона. Если ограничиться эмпирическими построениями, то первым шагом на пути перехода от нормальных многомерных распределений к асимметричным может быть использование так называемых распределений типа А, основанных на использовании ряда Грама-Шарлье, приводящего (в одномерном случае) к выражению:

$$p_A(x) = p(x) + \frac{r_3}{6} p^{(3)}(x) + \frac{r_4 - 3}{24} p^{(4)}(x), \quad (3.3)$$

где x – нормированная случайная величина;

r_3, r_4 – основные моменты ($r_3 = \mu_3/\sigma^3$, $r_4 = \mu_4/\sigma^4$).» [2].

Первый член $p(x)$ разложения (3.3) дает нормальное распределение, которое деформируется за счет учета асимметрии и эксцесса (последующие члены в ряду (3.3)). Распределение (3.3) обобщается на двумерный случай [2]:

$$\begin{aligned}
p_A(x, y) = & p(x) \left[p(y) - \frac{r_{0|3}}{6} p^{(3)}(y) + \frac{r_{0|4} - 3}{24} p^{(4)}(y) \right] + \\
& + p'(x) \left[-\frac{r_{1|2}}{2} p''(y) + \frac{r_{1|3} - 3r_{1|1}}{6} p^{(3)}(y) \right] + \\
& + p''(x) \left[-\frac{r_{2|1}}{6} p'(y) + \frac{r_{2|2} - 2r_{1|1}^2 - 1}{4} p''(y) \right] + \\
& + p^{(3)}(x) \left[-\frac{r_{3|0}}{6} p(y) + \frac{r_{3|1} - 3r_{1|1} - 1}{6} p'(y) \right] + p^{(4)}(x) \left[-\frac{r_{4|0} - 3}{24} p(y) \right] \quad (3.4)
\end{aligned}$$

(здесь $r_{1|2}$ и т. д. – смешанные основные моменты), приводящий к асимметричному распределению типа, изображенного на рисунке 3.2, б.

Были вычислены модули 10 %-ной обеспеченности по безусловным и условным распределениям [2]. Последние – при значениях испарения, соответствующих расходам $\max_E Q$, определенных по двумерному нормальному распределению. Получено, что для зон с устойчивой и неустойчивой дисперсиями результаты различны. Если в первом случае среднее отклонение $\delta_{\text{ср}}$, вычисленное по безусловному ($Q_{10\%}$) и условному ($Q_{10\%}^{\text{усл}}$) распределениям ($\delta = (Q_{10\%}^{\text{усл}} - Q_{10\%}) / Q_{10\%}$), не превосходит 2 % (при максимальном отклонении 3,7 %), то во втором случае оно почти на порядок больше. (Такие же результаты дают и кривые Крицкого–Менкеля.)

Аналогичные расчеты для меньших обеспеченностей (1 %; 0,1 %; 0,01 % – это «стандартные» значения, для которых составляются таблицы) показали, что для обеих зон практически всегда $\delta \% > 0$, т. е. $Q_{P\%}^{\text{усл}} > Q_{P\%}$. Значения $\delta_{\text{ср}}$ составляют 1–2 % (при максимальных отклонениях 5 %).

Подобные результаты можно объяснить тем, что, с одной стороны, условные распределения сдвинуты вправо по сравнению с безусловными, а с другой – их дисперсии меньше (хвосты более прижаты к оси расходов или

модулей). Результат варьирует в зависимости от соотношения между σ_Q , σ_E и r_{QE} .

В данной работе были использованы следующие формулы:

$$\text{а) } p(\vec{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q\sigma_E\sqrt{1-r_{QE}^2}} \exp(-\lambda^2);$$

$$\text{б) } \lambda^2 = \frac{1}{2(1-r_{QE}^2)} \left[\frac{(Q-\bar{Q})^2}{\sigma_Q^2} - \frac{2r_{QE}(Q-\bar{Q})(E-\bar{E})}{\sigma_Q\sigma_E} + \frac{(E-\bar{E})^2}{\sigma_E^2} \right].$$

4 ОПИСАНИЕ ПРОГРАММНОГО ПРОДУКТА ПО ПОСТРОЕНИЮ

$p(Q, E)$

Исходные данные для программы.

Для работы программы нужны исходные данные расхода и испарения.

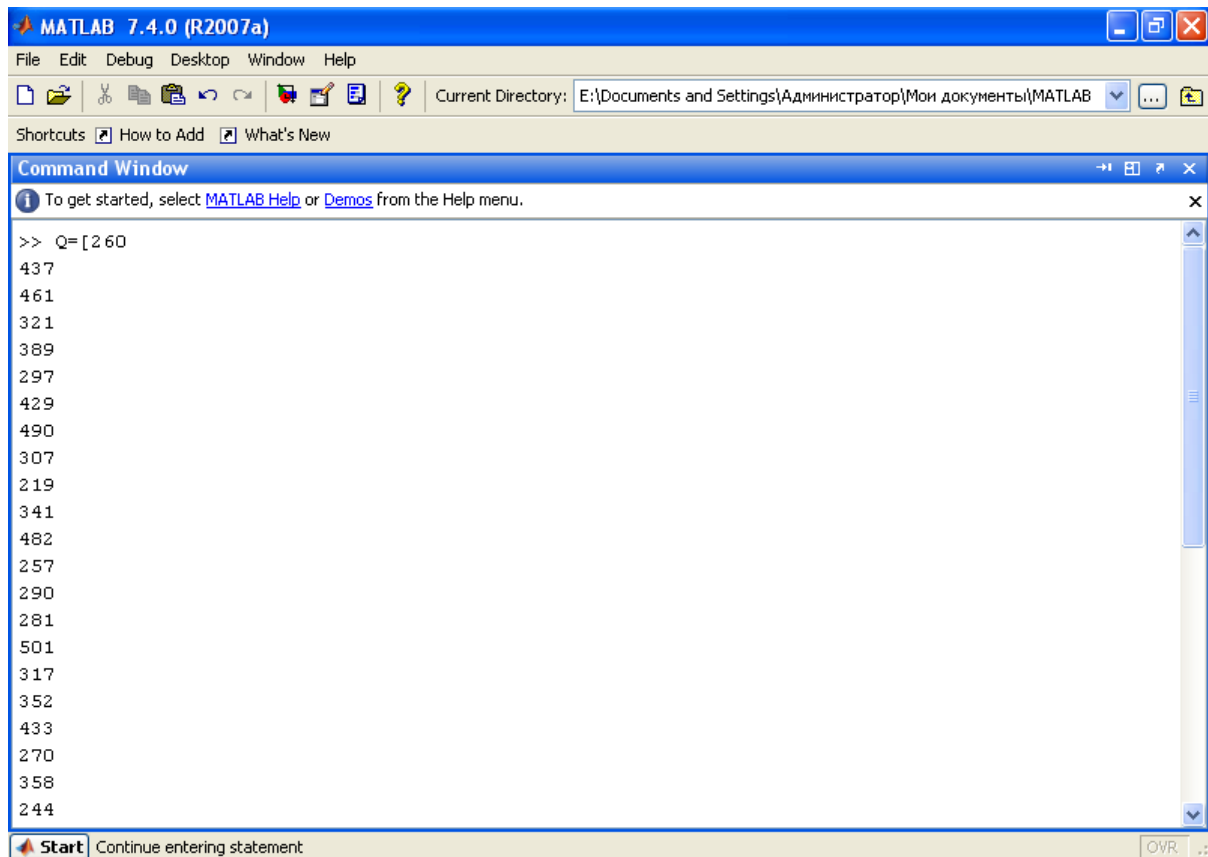
E , мм	Q , мм
460	260
442	437
449	461
457	321
400	389
371	297
473	429
392	490
441	307
409	219
474	341
416	482
380	257
423	290
391	281
392	501
476	317
417	352
383	433
427	270
428	358
498	244
456	238
504	341
519	279
363	413
441	392
383	413
440	267
424	242
477	453
460	420
504	453
476	423
387	292
441	353
376	365
479	369

В качестве исходных данных могут выступать значения величин в любых размерностях, которые необходимы для конкретных целей.

Интерфейс программы.

Программа вызывается из командной строки, но для начала вводим данные.

Делаем мы это подобным образом:



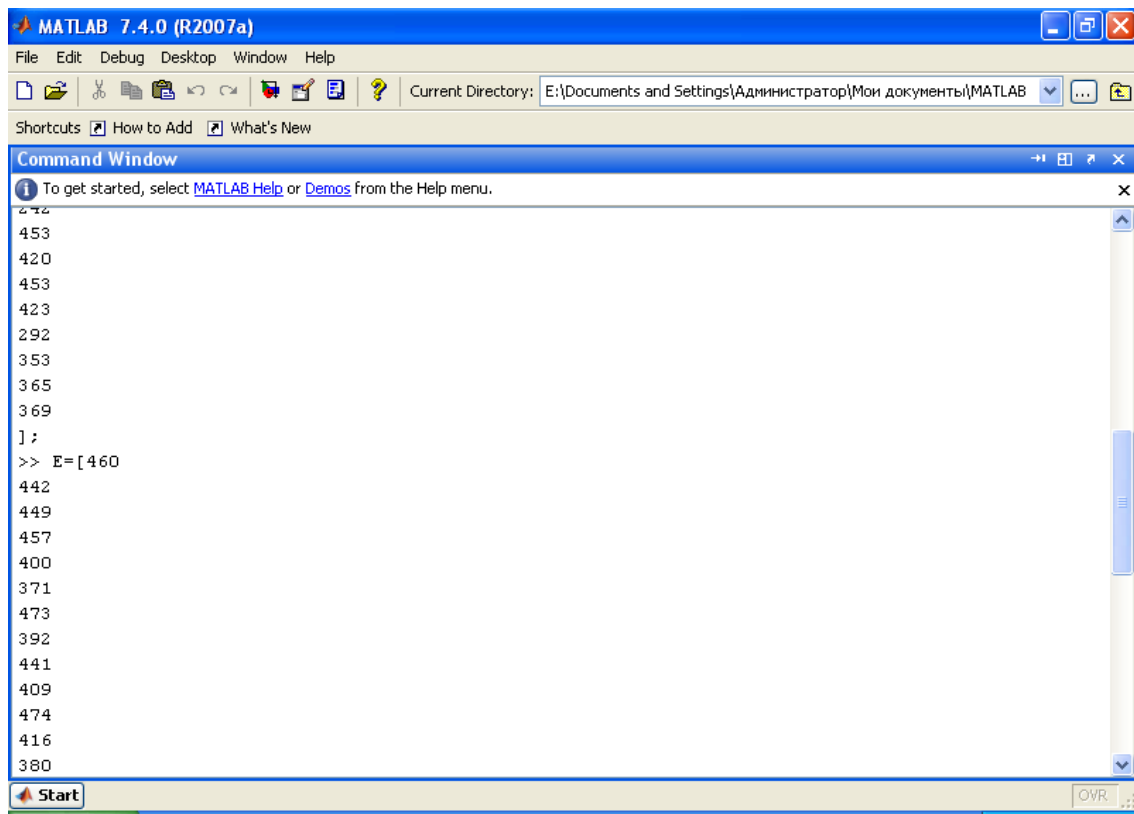


Рисунок 4.1 – Исходные данные для программы.

После ввода исходных данных вводим имя программы «gydra».

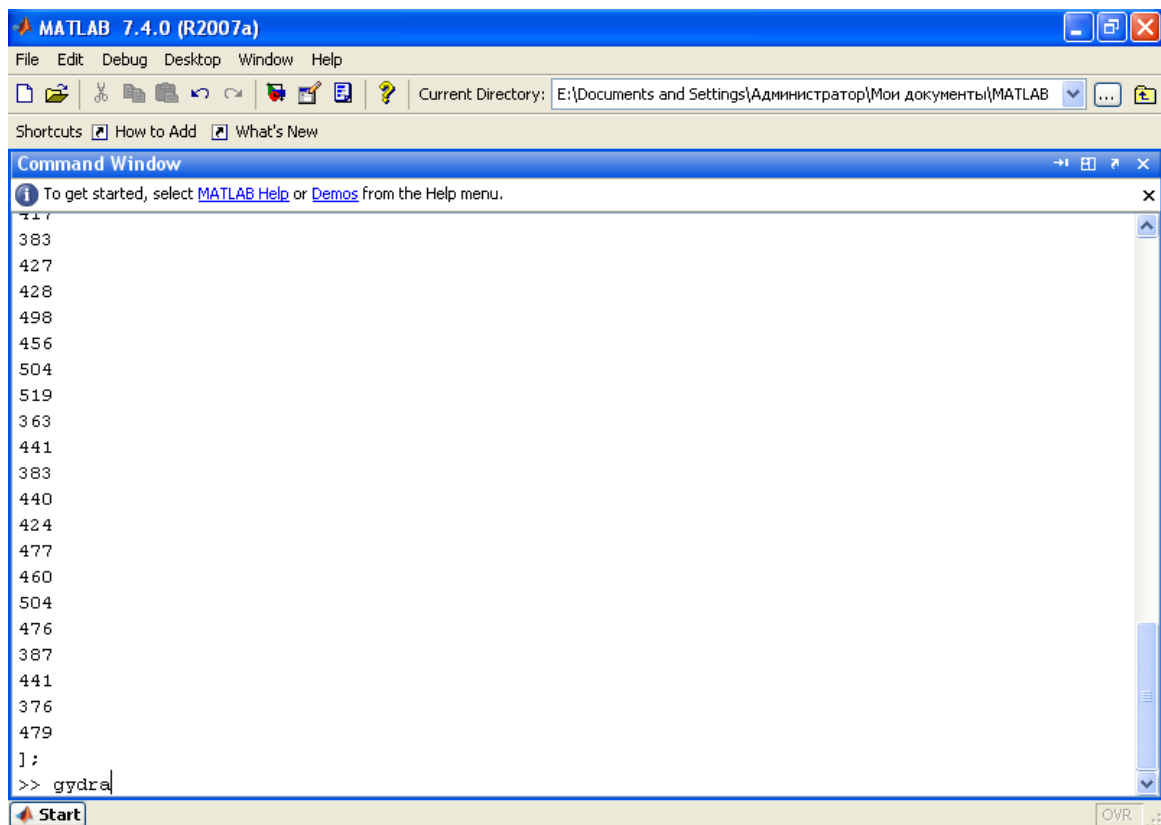


Рисунок 4.2 – Вызов программы.

Результат работы программы.

Результаты работы программы получается в виде трех графиков: Плотности вероятности, Эллипса рассеивания и Гистограммы.

Вот как это будет выглядеть:

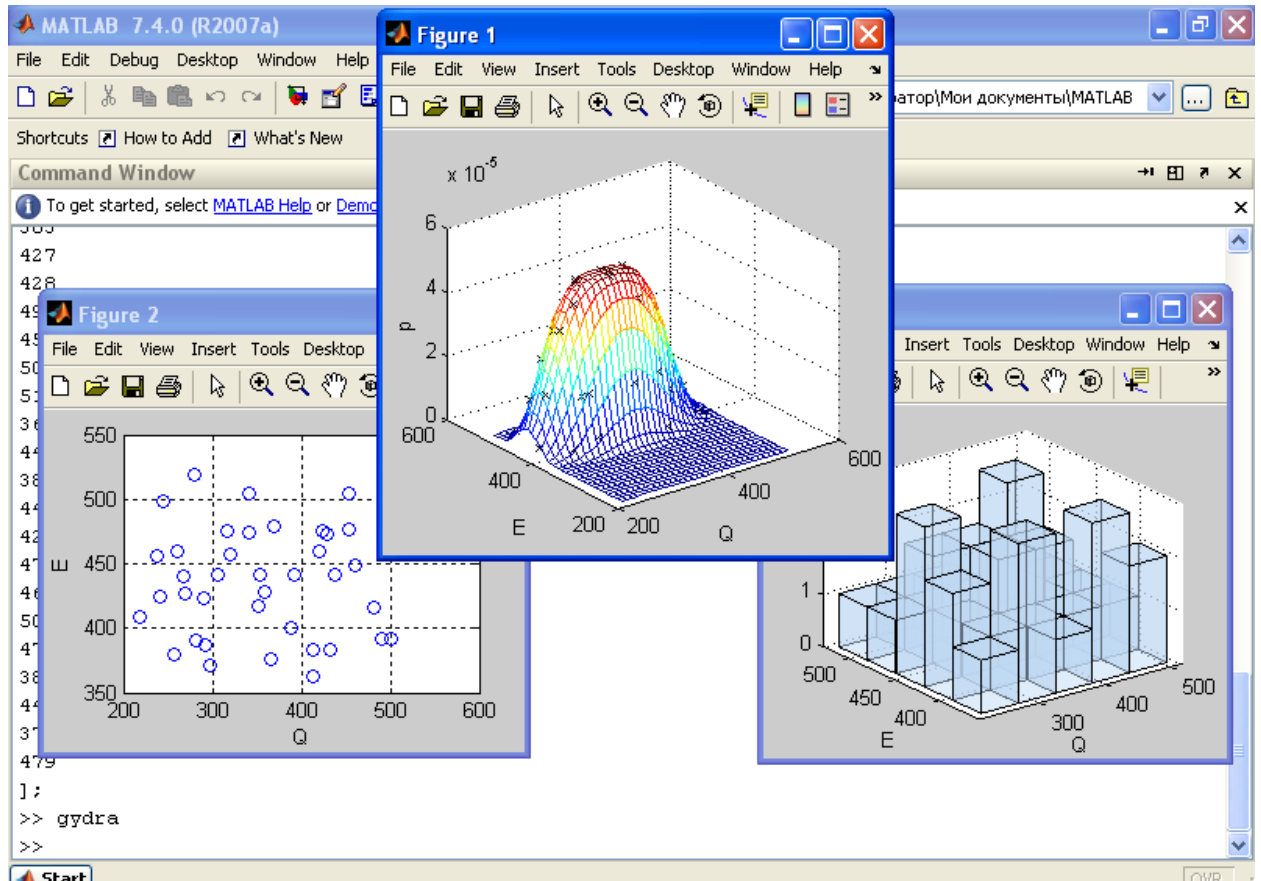


Рисунок 4.4 – Результат работы программы.

В результатах работы программы на поверхности вероятности видны эмпирические точки двумерной вероятности. Кроме того, программа позволяет рассматривать графики в разных углах.

Для примера возьмем плотность вероятности:

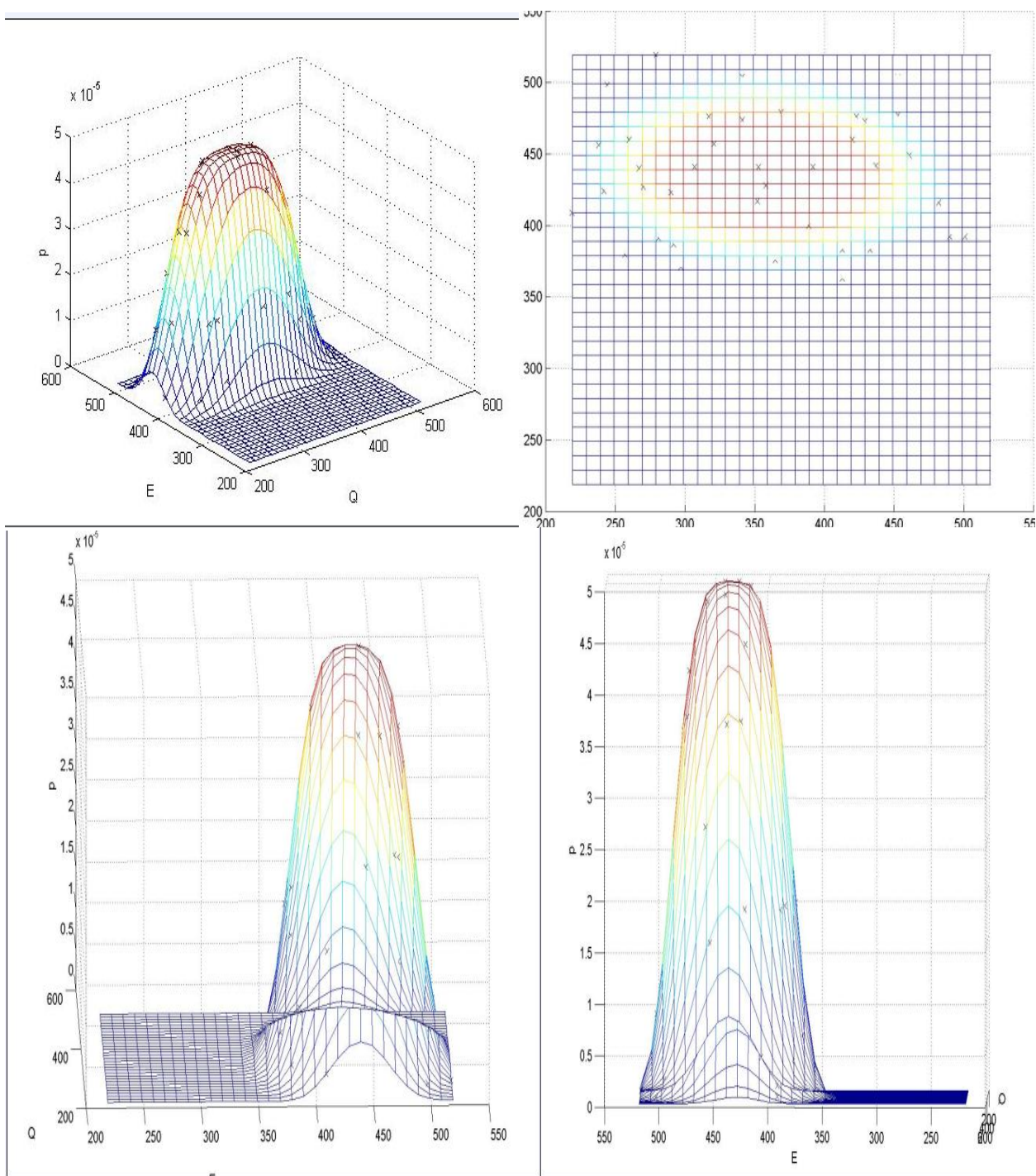


Рисунок 4.5 – Пример возможностей программы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения работы были получены следующие результаты:

- а) сформирована база данных для исследования;
- б) разработан алгоритм построения $p(Q, E)$ и гистограмм в компьютерном приложении *Excel*;
- в) обоснован выбор инструментария для построения двумерной поверхности;
- г) разработан программный продукт для построения двумерных эмпирических гистограмм и теоретических поверхностей.

Целью данного исследования достигнута: разработан технологический алгоритм построения двумерного распределения двух случайных величин в виде «колокольчика» с помощью компьютерного приложения *MatLab*.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Коваленко, В. В. Частично инфинитный механизм турбулизации природных и социальных процессов. [Текст] / В. В. Коваленко. – СПб.: изд. РГГМУ, 2006. – 164 с.
- 2 Коваленко, В. В. Гидрологическое обеспечение надежности строительных проектов при изменении климата. [Текст] / В. В. Коваленко. – СПб., изд. РГГМУ, 2009. – 100 с.
- 3 Коваленко, В. В. Новые явления и закономерности формирования речного стока. [Текст] / В. В. Коваленко. – СПб., изд. РГГМУ, 2013. – 172 с.
- 4 Коваленко, В. В. Частично инфинитная гидрология. [Текст] / В. В. Коваленко. – СПб., изд. РГГМУ, 2007. – 230 с.
- 5 Коваленко, В. В. Теория катастроф и эволюция дифференцируемых многообразий в частично инфинитной гидрологии. [Текст] / В. В. Коваленко. – СПб., изд. РГГМУ, 2008. – 178 с.
- 6 Коваленко, В. В. Метод характеристик в частично инфинитной гидрологии. [Текст] / В. В. Коваленко. – СПб., изд. РГГМУ, 2012. – 136 с.
- 7 Коваленко, В. В. Модальная неустойчивость при формировании речного стока. [Текст] / В. В. Коваленко. – СПб., изд. РГГМУ, 2014. – 150 с.
- 8 Коваленко, В. В. Частично инфинитное моделирование и прогнозирование процесса формирования речного стока. [Текст] / В. В. Коваленко. – СПб.: изд. РГГМУ, 2004. – 198 с.
- 9 Коваленко, В.В. Практикум по дисциплине «Моделирование гидрологических процессов. Часть I. Динамические модели». [Текст] / В.В. Коваленко, Е. В. Гайдукова. – СПб.: изд. РГГМУ, 2010. – 150 с.
- 10 В наши дни компьютерная математика получила должную известность и интенсивно развивается как передовое научное направление на стыке математики и информатики. [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://lib2.podelise.ru/docs/70202/index-8535.html>

11 Повышение устойчивости вероятностных распределений многолетнего годового стока при прогнозировании долгосрочных его изменений [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://dlib.rsl.ru/rsl01004000000/rsl01004591000/rsl01004591000/rls01004591815/rls01004591815.pdf>

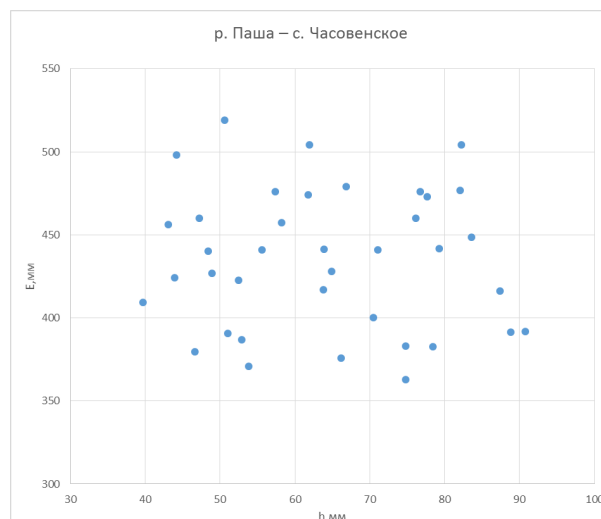
12 Применение программы MATLAB при изучении курса электротехники. [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://publ.lib.ru/ARCHIVES/L/LUR'E_Mihail_Semenovich/Primen.pdf

Приложение А – Эмпирические гистограммы стока и испарения

1) р. Паша – д. Часовенское

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
47,2	460
79,3	442
83,6	449
58,2	457
70,5	400
53,8	371
77,7	473
88,8	392
55,6	441
39,7	409
61,8	474
87,4	416
46,6	380
52,5	423
51,0	391
90,8	392
57,4	476
63,8	417
78,4	383
48,9	427
64,9	428
44,2	498
43,1	456
61,9	504
50,6	519
74,8	363
71,1	441
74,8	383
48,4	440
43,9	424
82,1	477
76,1	460
82,2	504
76,7	476
52,9	387
63,9	441
66,2	376
66,8	479

а)



б)

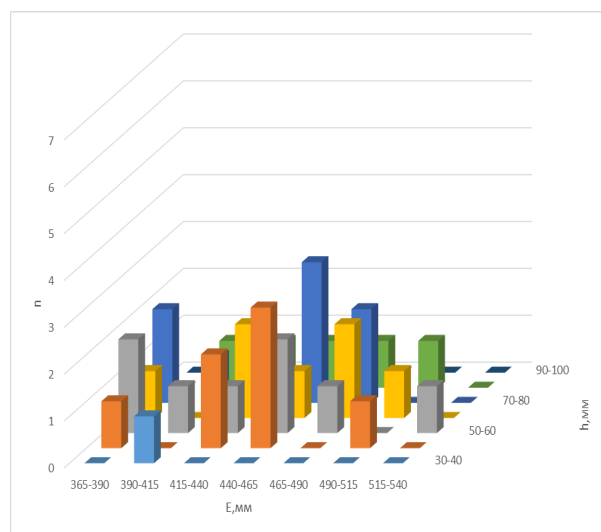
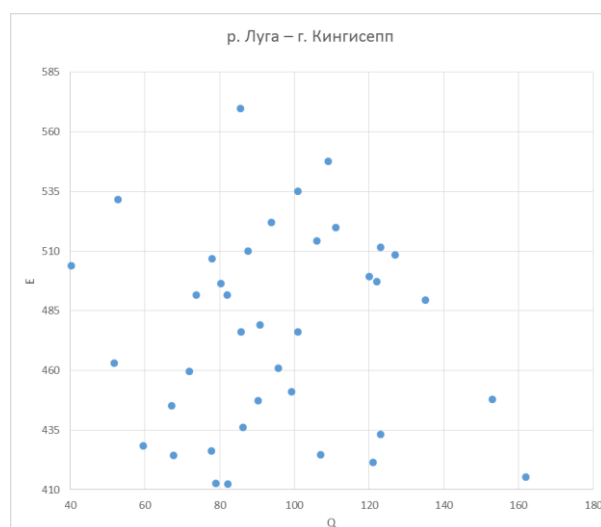


Рисунок А.1 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

2) р. Луга – г. Кингисепп

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
77,9	507
101	476
122	497
73,7	492
90,2	447
82,1	413
127	508
86,3	436
80,3	496
67,1	445
93,9	522
153	448
67,7	424
51,8	463
59,6	428
123	433
87,6	510
99,3	451
77,8	426
71,9	460
82	492
52,7	532
40,2	504
101	535
85,6	570
79	413
85,7	476
121	421
90,8	479
95,7	461
120	499
123	512
109	548
106	514
107	425
135	489
162	415
111	520

а)



б)

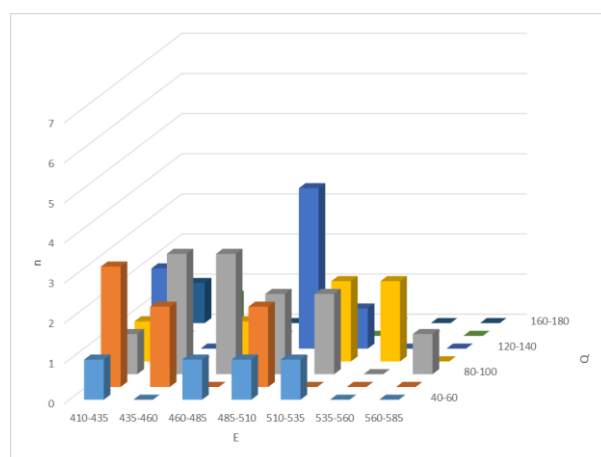
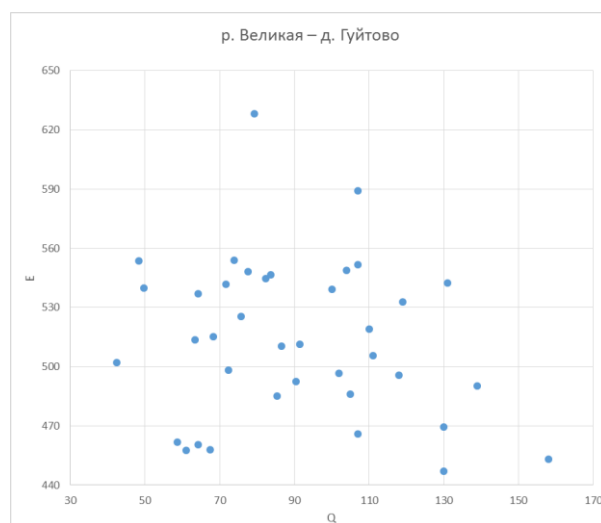


Рисунок А.2 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

3) р. Великая – д. Гуйтово

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
82,3	545
91,5	511
110	519
63,4	514
111	506
130	447
131	542
118	496
75,8	526
90,4	492
77,5	548
139	490
64,3	461
42,4	502
67,5	458
102	497
83,6	547
105	486
61,1	458
72,3	498
64,3	537
48,3	553
49,7	540
73,8	554
79,2	628
58,6	462
68,3	515
130	469
86,5	510
85,3	485
100	539
104	549
107	589
71,7	542
107	466
119	533
158	453
107	552

а)



б)

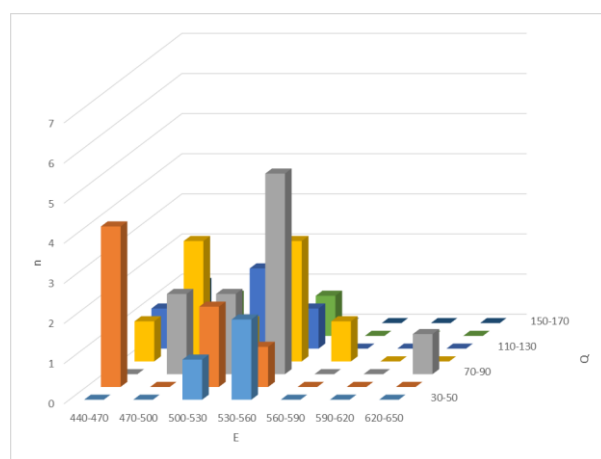
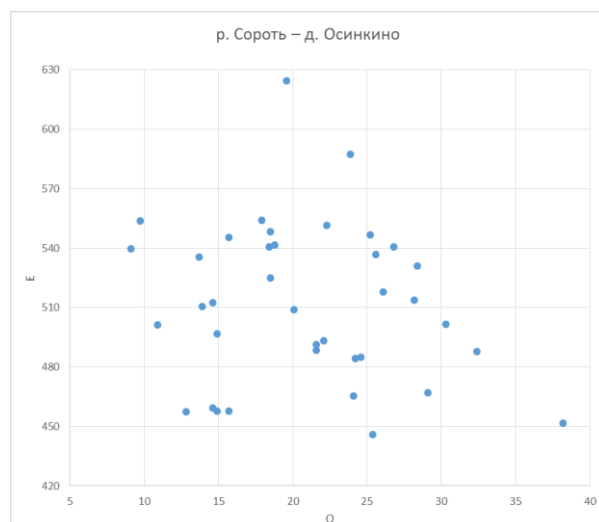


Рисунок А.3 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

4) р. Сороть – д. Осинкино

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
26,8	541
13,9	510
26,1	518
28,2	514
30,3	502
25,4	446
18,4	541
21,6	491
18,5	525
21,6	489
18,5	548
32,4	488
14,6	460
10,9	501
15,7	458
22,1	493
15,7	546
24,2	484
12,8	458
14,9	497
13,7	536
9,73	554
9,08	540
17,9	554
19,6	625
14,9	458
14,6	513
29,1	467
20,1	509
24,6	485
25,6	537
25,2	547
23,9	587
18,8	542
24,1	465
28,4	531
38,2	452
22,3	551

а)



б)

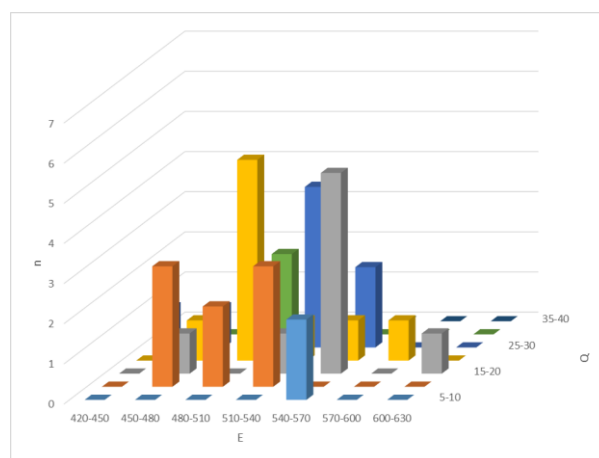
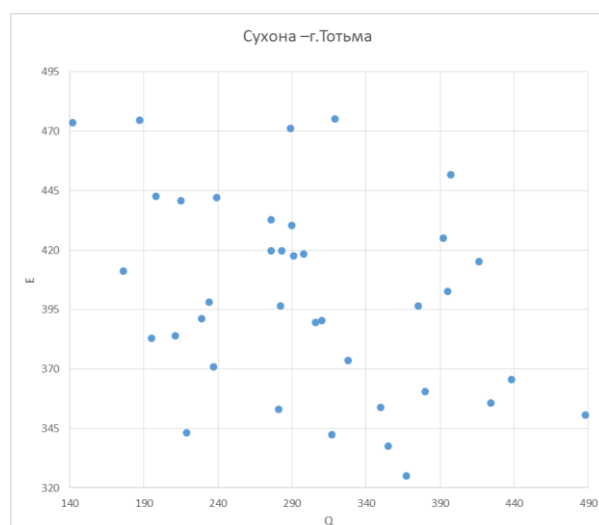


Рисунок А.4 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

5) р. Сухона – г. Тотьма

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
276	420
298	418
416	415
283	420
438	366
317	342
397	452
380	361
310	390
195	383
392	425
375	397
219	343
229	391
281	353
424	356
215	441
328	374
367	325
234	398
211	384
198	443
176	411
142	474
187	475
355	337
291	418
488	351
282	397
306	390
319	475
290	430
289	471
276	433
237	371
395	403
350	354
239	442

а)



б)

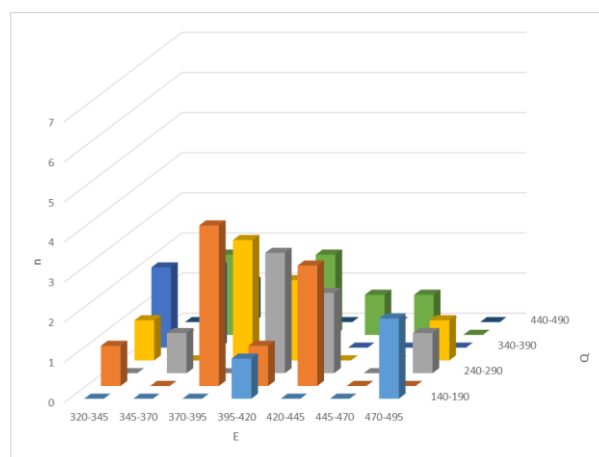
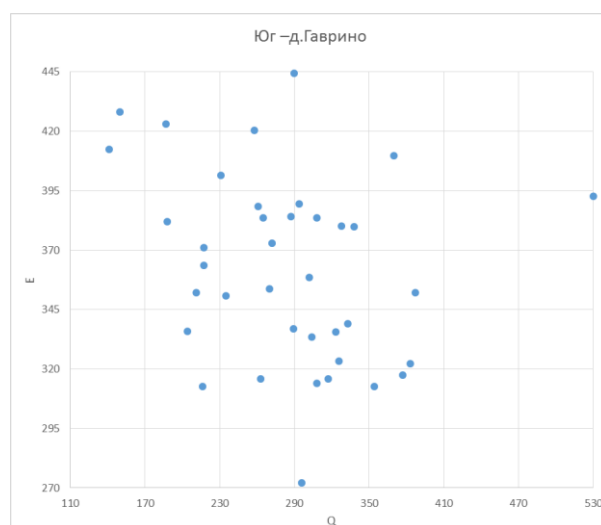


Рисунок А.5 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

6) р. Юг – г. Гаврино

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
261	388
530	393
338	380
287	384
323	336
317	316
370	410
326	323
211	352
204	336
272	373
308	384
216	313
235	351
383	322
308	314
141	413
377	317
296	272
217	371
289	337
265	384
217	364
150	428
187	423
263	316
188	382
354	313
270	354
302	359
290	445
294	389
258	420
328	380
333	339
387	352
304	333
231	402

а)



б)

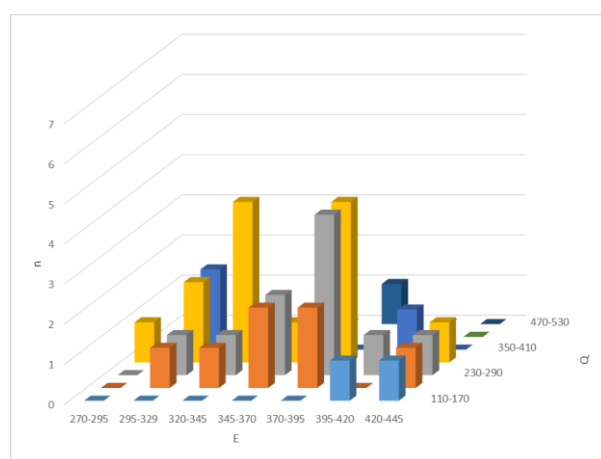
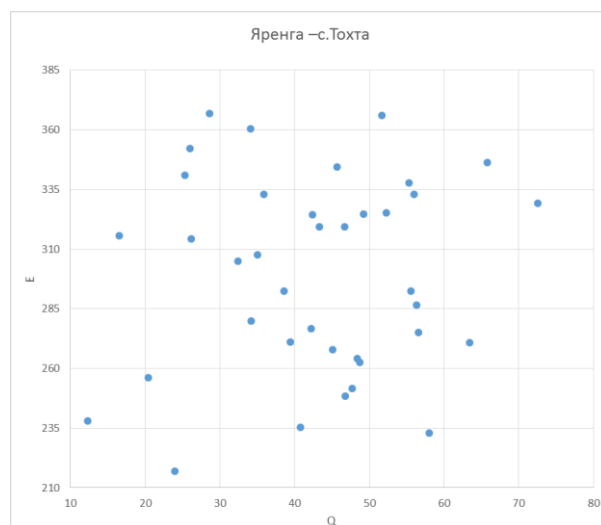


Рисунок А.6 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

7) р. Яренга – д. Тохта

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
35,9	333
72,6	329
49,2	325
45,7	344
56,6	275
45,1	268
65,8	346
47,7	252
35	308
39,4	271
52,3	325
56	333
46,8	248
55,6	292
48,4	264
58	233
34,1	361
12,3	238
24	217
16,5	316
20,4	256
26,2	314
32,4	305
28,6	367
26	352
34,2	280
42,4	324
40,8	235
42,2	277
38,6	292
51,7	366
46,7	319
55,3	338
43,3	319
48,7	263
56,3	286
63,4	271
25,3	341

а)



б)

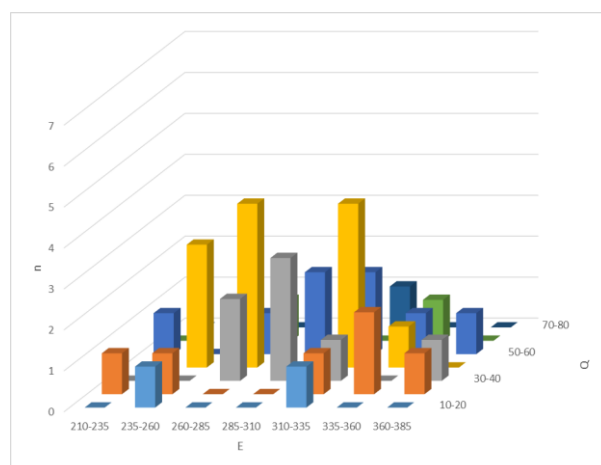
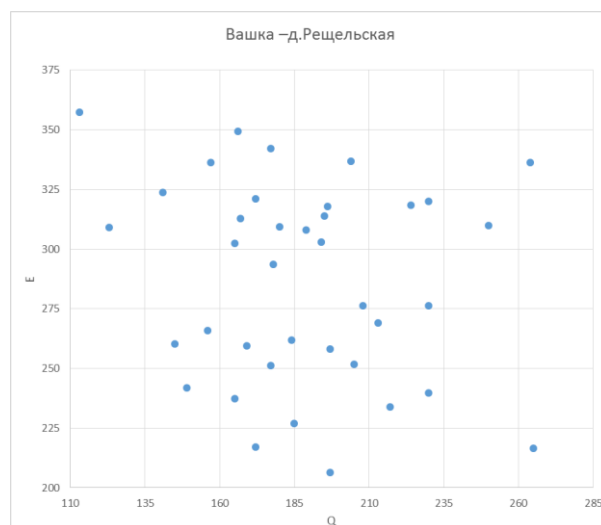


Рисунок А.7 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

8) р. Вашка – д. Рещельская

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
172	321
250	310
195	314
157	336
197	258
169	260
264	336
217	234
165	302
145	260
224	319
196	318
165	237
230	276
177	251
265	217
166	349
185	227
197	206
189	308
230	240
167	313
178	294
113	357
177	342
213	269
123	309
172	217
184	262
156	266
204	337
194	303
230	320
180	309
149	242
208	276
205	252
141	324

а)



б)

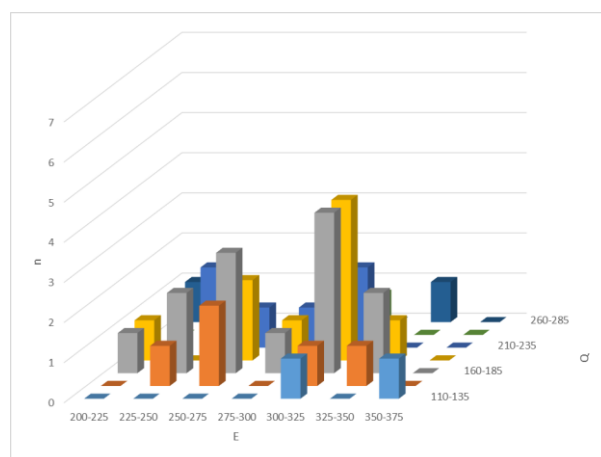
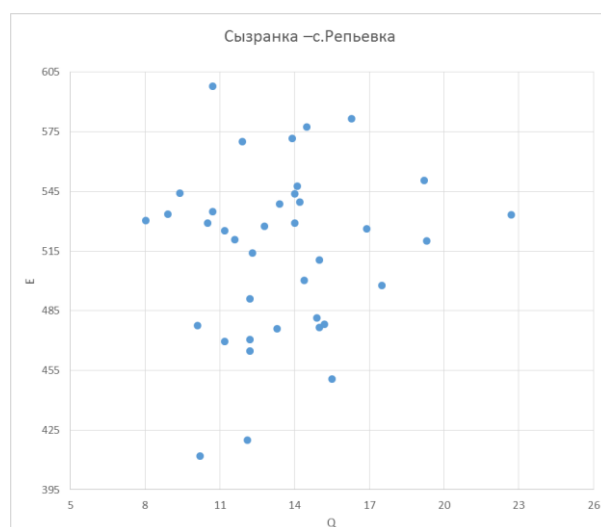


Рисунок А.8 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

9) р. Сызранка – д. Репьевка

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
14,1	548
11,9	570
10,5	529
10,7	535
19,2	551
10,1	478
16,3	582
12,2	491
11,2	469
14,9	481
19,3	520
14	544
12,2	465
15,2	478
12,2	470
11,6	521
9,4	544
13,3	476
10,2	412
14,4	500
12,8	527
8,03	530
11,2	525
14	529
10,7	598
12,1	420
16,9	526
15	477
22,7	533
17,5	498
14,5	577
13,4	539
13,9	572
8,92	533
15	511
12,3	514
15,5	451
14,2	540

а)



б)

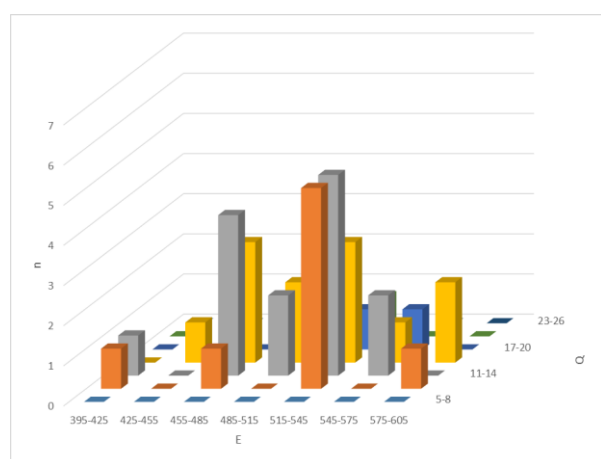
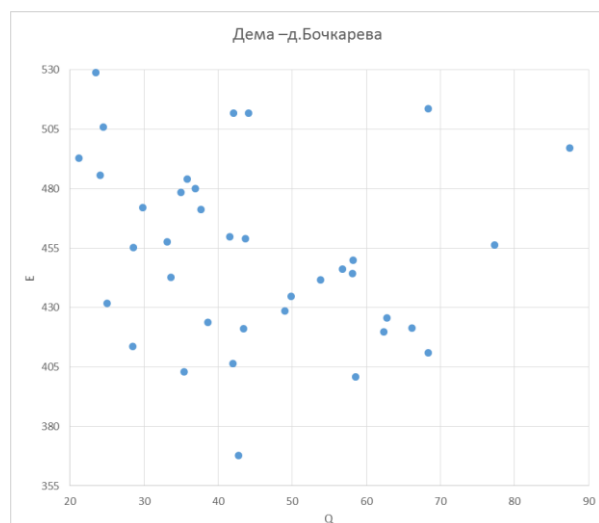


Рисунок А.9 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

10) р. Дема – д. Бочкарева

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
35,8	484
24,5	506
35	478
29,8	472
24,1	486
25	432
68,4	514
58,1	444
42	406
35,4	403
33,1	458
37,7	471
62,8	426
58,6	401
66,2	422
49	429
21,2	493
28,5	414
28,4	350
53,8	442
41,6	460
43,4	421
33,6	443
43,7	459
23,5	529
42,8	368
58,2	450
62,4	420
28,6	455
38,6	424
44,1	512
36,9	480
42,1	512
77,3	456
56,8	446
49,9	435
68,4	411
87,5	497

а)



б)

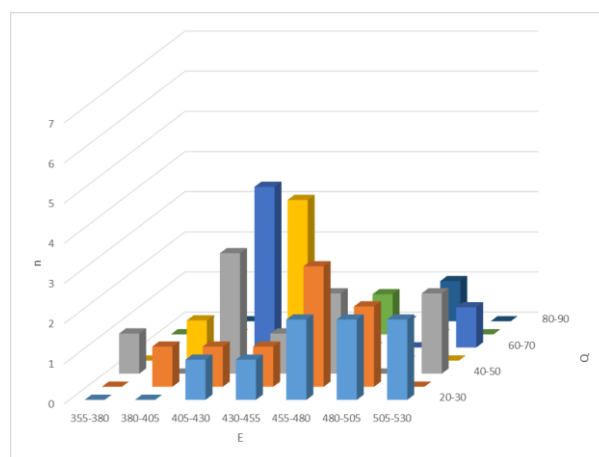
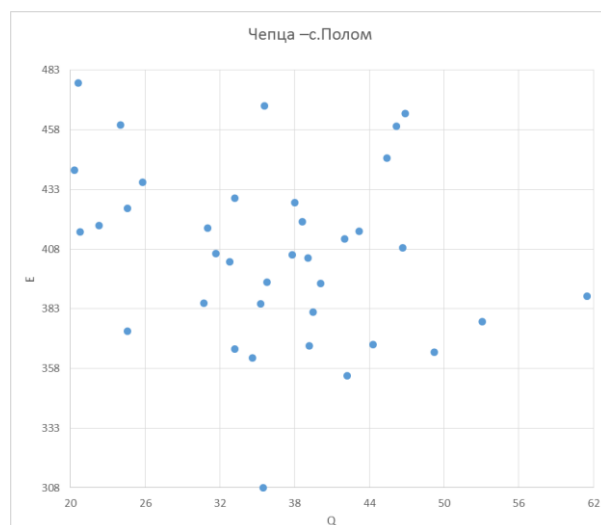


Рисунок А.10 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

11) р. Чепца – д. Полом

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
38	427
20,3	441
24,6	425
22,3	418
42	412
39,2	368
46,2	459
40,1	394
39,5	382
33,2	366
43,2	415
33,2	429
34,6	363
30,7	385
44,3	368
53,1	378
24	460
49,2	365
35,5	308
37,8	406
39,1	404
35,8	394
31	417
45,4	446
20,6	478
42,2	355
38,6	420
24,6	374
20,8	415
32,8	403
35,7	483
25,8	436
35,6	468
46,7	409
31,7	406
35,3	385
61,5	388
46,9	465

а)



б)

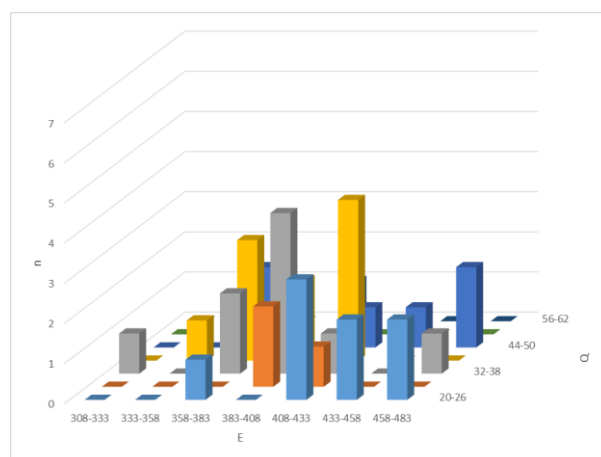
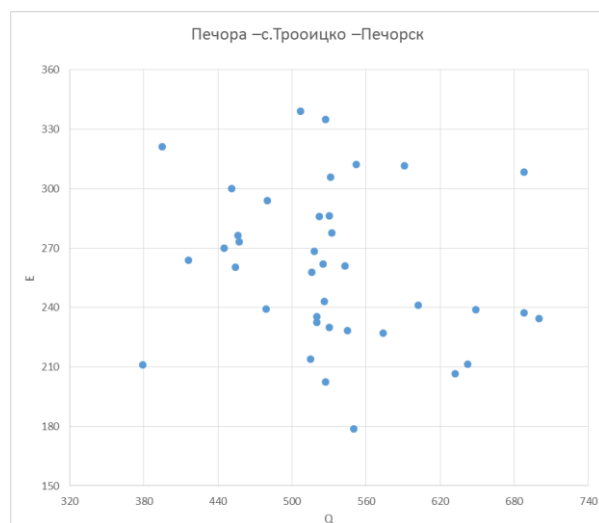


Рисунок А.11 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

12) р .Печора – г.Троицко-Печорск

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
451	300
532	278
456	277
480	294
479	239
520	233
522	286
574	227
525	262
379	211
530	286
591	312
515	214
520	235
688	237
632	207
527	335
527	203
550	179
454	260
545	228
530	230
518	269
552	312
531	306
516	258
457	273
642	212
700	234
416	264
507	339
445	270
688	308
543	261
602	241
649	239
526	243
395	321

а)



б)

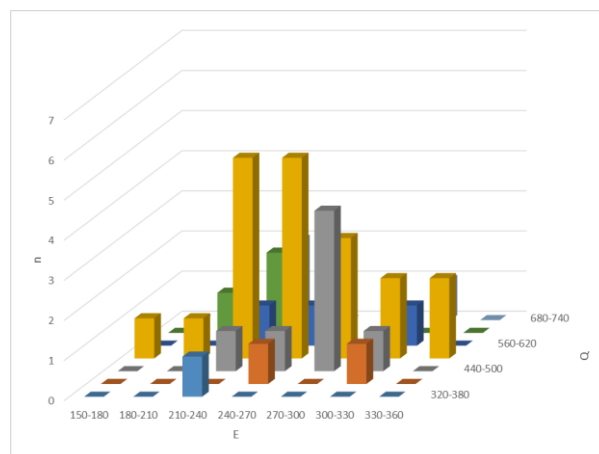
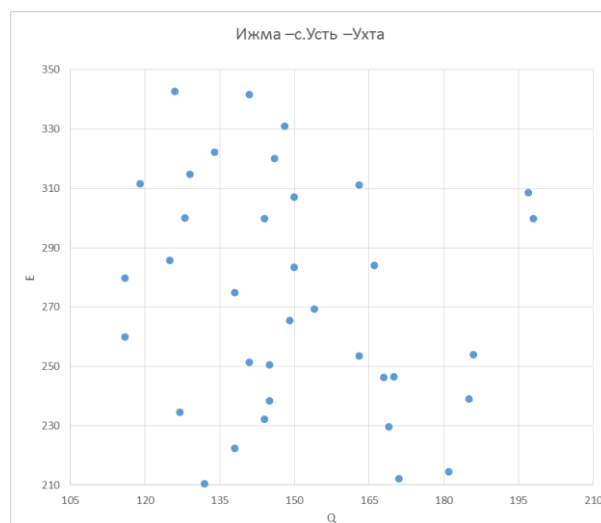


Рисунок А.12 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

13) р. Ижма – г. Усть-Ухта

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
119	311
198	300
144	300
134	322
145	251
141	251
163	311
169	230
125	286
127	234
150	307
146	320
138	222
163	253
185	239
181	214
126	343
132	210
156	190
116	280
144	232
149	266
138	275
148	331
129	315
154	269
128	300
171	212
170	246
116	260
141	342
166	284
197	309
150	283
145	238
186	254
168	246
103	319

а)



б)

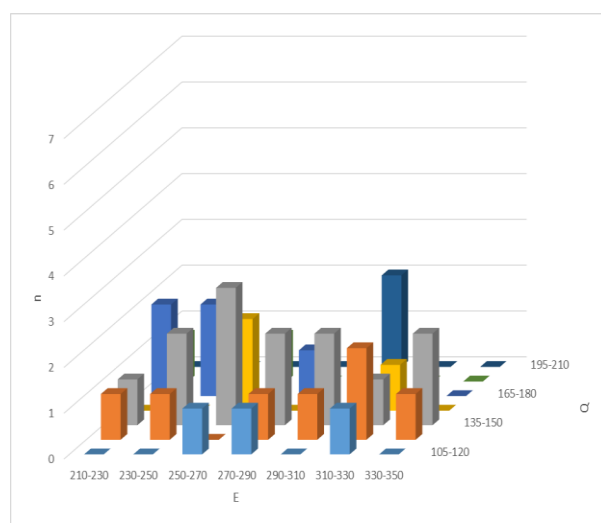
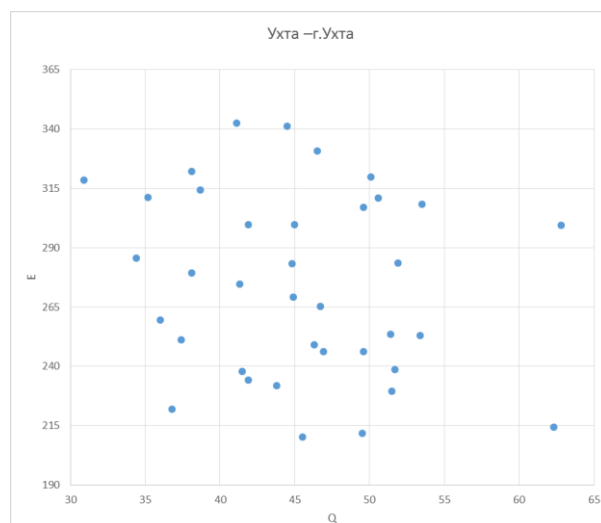


Рисунок А.13 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

14) р. Ухта – г. Ухта

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
35,2	311
62,8	299
45	300
38,1	322
46,3	249
37,4	251
50,6	311
51,5	229
34,4	286
41,9	234
49,6	307
50,1	320
36,8	222
53,4	253
51,7	239
62,3	214
41,1	343
45,5	210
46,4	190
38,1	279
43,8	232
46,7	265
41,3	275
46,5	331
38,7	314
44,9	269
41,9	300
49,5	212
46,9	246
36	259
44,5	341
51,9	284
53,5	308
44,8	283
41,5	238
51,4	254
49,6	246
30,9	318

а)



б)

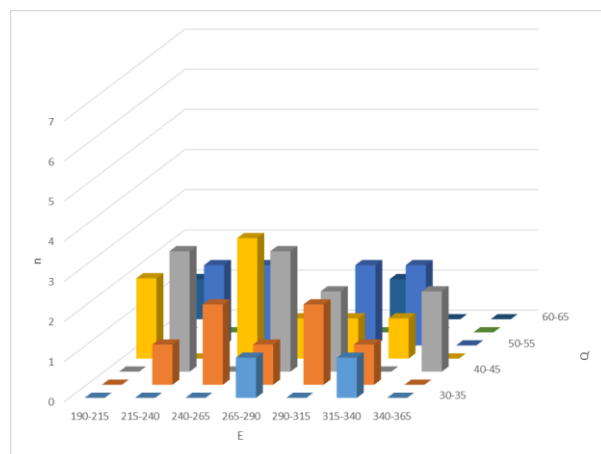
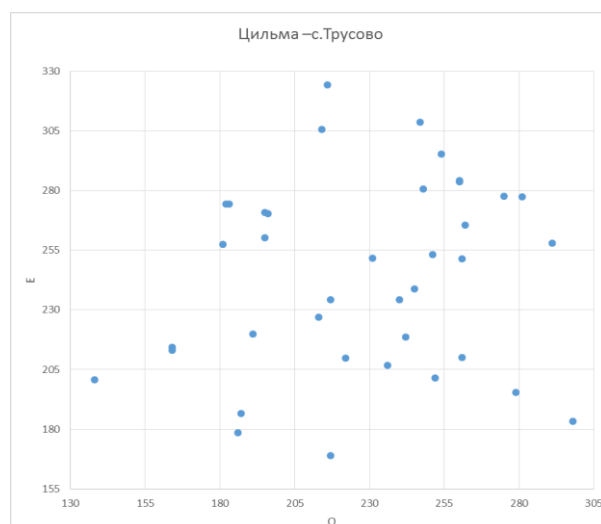


Рисунок А.14 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

15) р. Цильма – д. Трусово

$Q, \text{ м}^3/\text{с}$	$E, \text{ мм}$
275	278
231	252
195	271
214	306
191	220
217	234
281	277
279	196
183	274
164	213
248	281
260	284
252	202
240	234
242	219
298	183
216	324
187	187
217	169
195	260
236	207
262	266
261	251
247	309
254	295
251	253
181	258
186	178
261	210
164	214
260	284
245	239
291	258
196	270
138	201
213	227
222	210
182	274

а)



б)

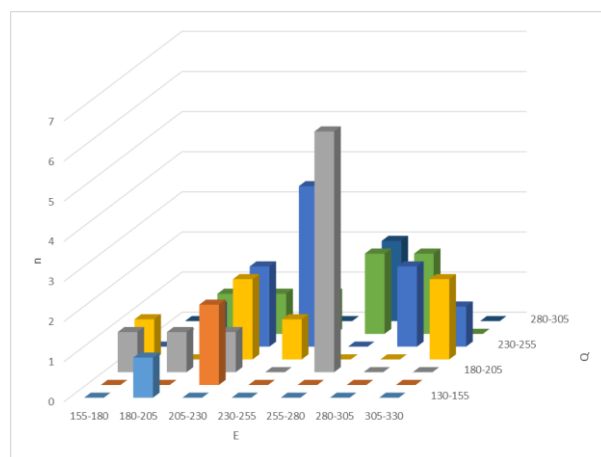


Рисунок А.15 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б).

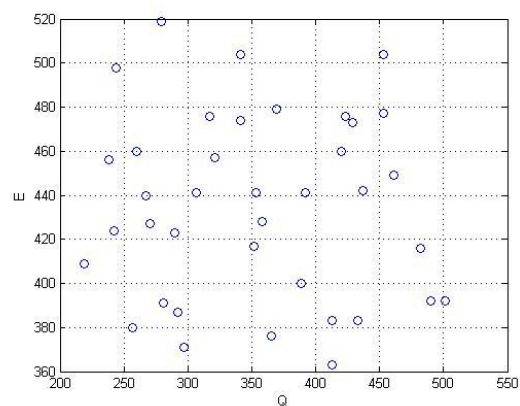
Приложение Б – Результаты работы программы

1) р. Паша – д. Часовенское

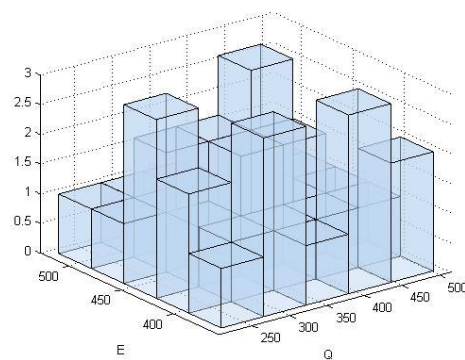
Исходные данные

E , мм	h , мм
460	260
442	437
449	461
457	321
400	389
371	297
473	429
392	490
441	307
409	219
474	341
416	482
380	257
423	290
391	281
392	501
476	317
417	352
383	433
427	270
428	358
498	244
456	238
504	341
519	279
363	413
441	392
383	413
440	267
424	242
477	453
460	420
504	453
476	423
387	292
441	353
376	365
479	369

а)



б)



в)

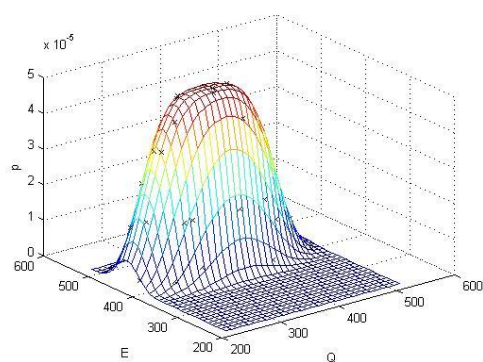


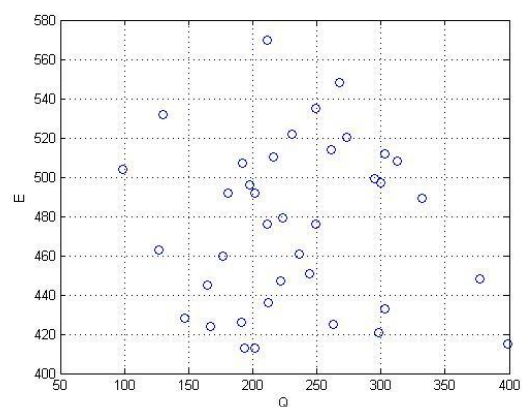
Рисунок Б.1 – Эллипс рассеивания
(а), эмпирическая гистограмма (б),
поверхность вероятности (в).

2) р. Луга – г. Кингисепп

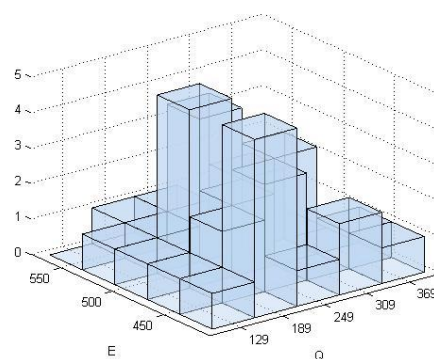
Исходные данные

E , мм	h , мм
507	192
476	249
497	300
492	181
447	222
413	202
508	313
436	212
496	198
445	165
522	231
448	377
424	167
463	127
428	147
433	303
510	216
451	244
426	191
460	177
492	202
532	130
504	99
535	249
570	211
413	194
476	211
421	298
479	223
461	236
499	295
512	303
548	268
514	261
425	263
489	332
415	399
520	273

а)



б)



в)

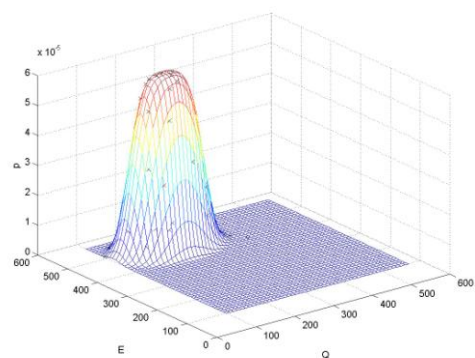


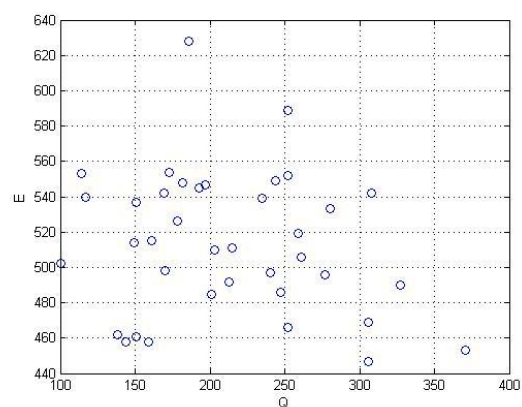
Рисунок Б.2 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б), поверхность вероятности (в).

3) р. Великая – д. Гуйтово

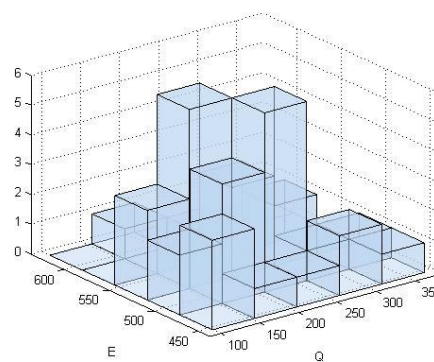
Исходные данные

E , мм	h , мм
545	193
511	215
519	259
514	149
506	261
447	306
542	308
496	277
526	178
492	213
548	182
490	327
461	151
502	100
458	159
497	240
547	197
486	247
458	144
498	170
537	151
553	114
540	117
554	173
628	186
462	138
515	161
469	306
510	203
485	201
539	235
549	244
589	252
542	169
466	252
533	280
453	371
552	252

а)



б)



в)

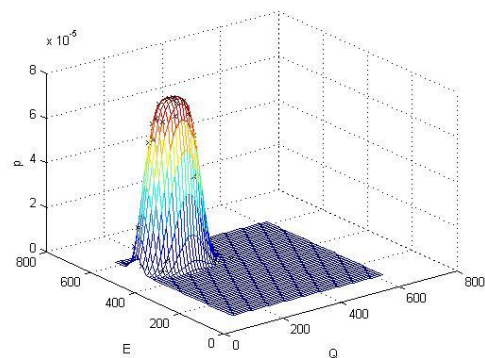


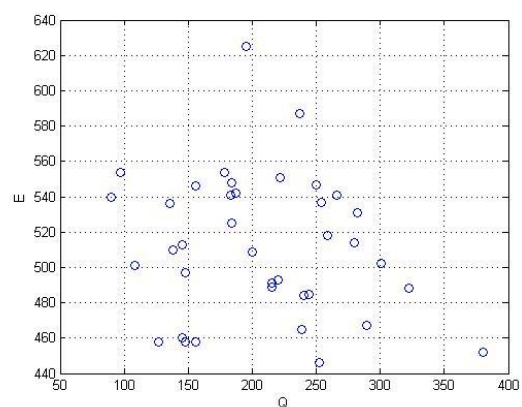
Рисунок Б.3 – Эллипс рассеивания
(а), эмпирическая гистограмма (б),
поверхность вероятности (в).

4) р. Сороть – д.Осинкино

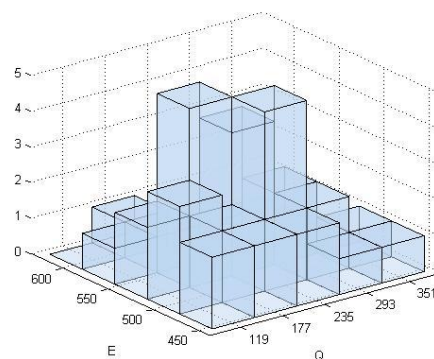
Исходные данные

E , мм	h , мм
541	266
510	138
518	259
514	280
502	301
446	252
541	183
491	215
525	184
489	215
548	184
488	322
460	145
501	108
458	156
493	220
546	156
484	240
458	127
497	148
536	136
554	97
540	90
554	178
625	195
458	148
513	145
467	289
509	200
485	244
537	254
547	250
587	237
542	187
465	239
531	282
452	380
551	222

а)



б)



в)

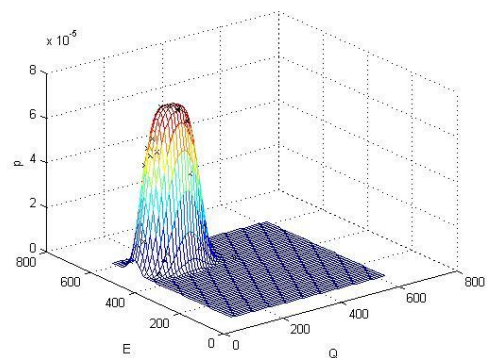


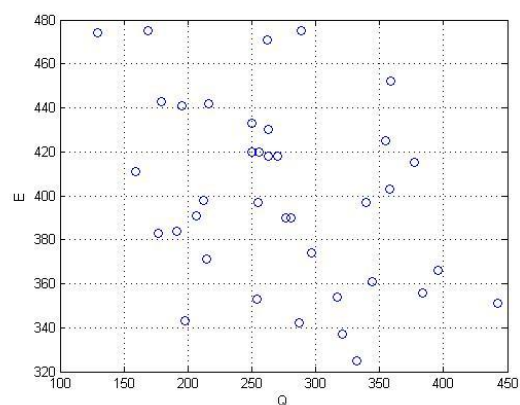
Рисунок Б.4 – Эллипс рассеивания
(а), эмпирическая гистограмма (б),
поверхность вероятности (в).

5) р. Сухона – г. Тотма

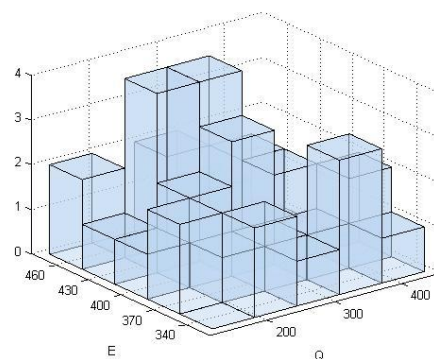
Исходные данные

E , мм	h , мм
420	250
418	270
415	377
420	256
366	396
342	287
452	359
361	344
390	281
383	177
425	355
397	339
343	198
391	207
353	254
356	384
441	195
374	297
325	332
398	212
384	191
443	179
411	159
474	129
475	169
337	321
418	263
351	442
397	255
390	277
475	289
430	263
471	262
433	250
371	215
403	358
354	317
442	216

а)



б)



в)

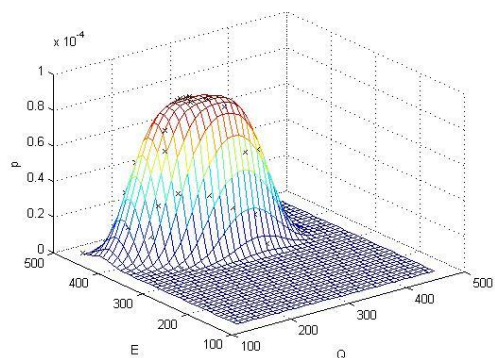


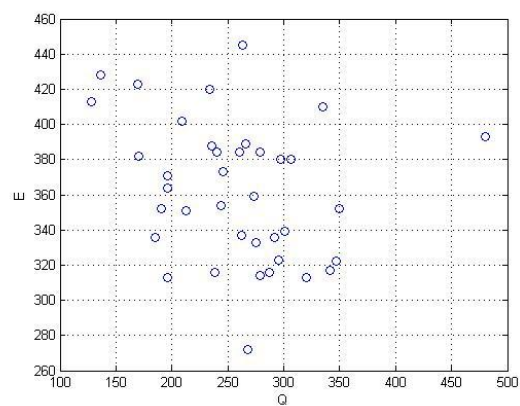
Рисунок Б.5 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б), поверхность вероятности (в).

6) р. Юг – г. Гаврино

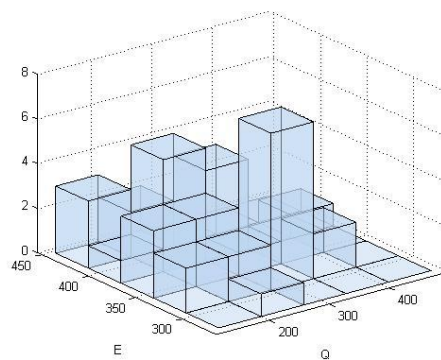
Исходные данные

E , мм	h , мм
388	236
393	480
380	306
384	260
336	292
316	287
410	335
323	295
352	191
336	185
373	246
384	279
313	196
351	213
322	347
314	279
413	128
317	341
272	268
371	196
337	262
384	240
364	196
428	136
423	169
316	238
382	170
313	320
354	244
359	273
445	263
389	266
420	234
380	297
339	301
352	350
333	275
402	209

а)



б)



в)

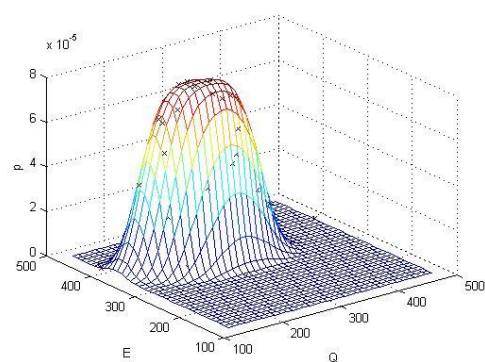


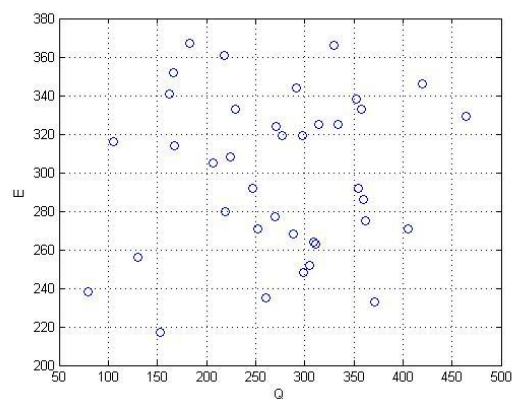
Рисунок Б.6 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б), поверхность вероятности (в).

7) р. Яренга – д. Тохта

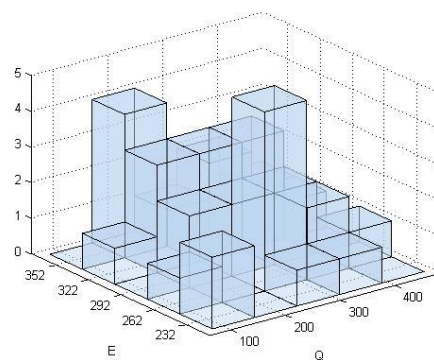
Исходные данные

E , мм	h , мм
333	229
329	464
325	314
344	292
275	362
268	288
346	420
252	305
308	224
271	252
325	334
333	358
248	299
292	355
264	309
233	371
361	218
238	79
217	153
316	105
256	130
314	167
305	207
367	183
352	166
280	219
324	271
235	261
277	270
292	247
366	330
319	298
338	353
319	277
263	311
286	360
271	405
341	162

а)



б)



в)

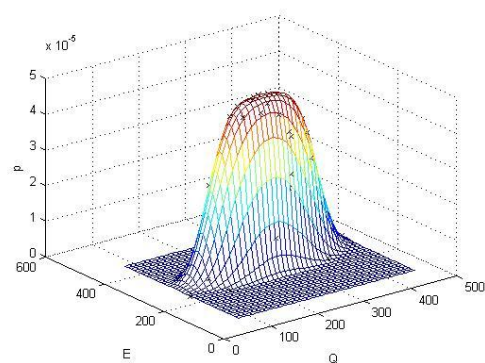


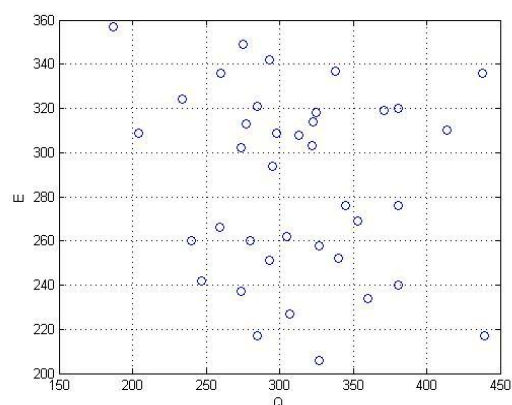
Рисунок Б.7 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б), поверхность вероятности (в).

8) р. Вашка – д. Рещельская

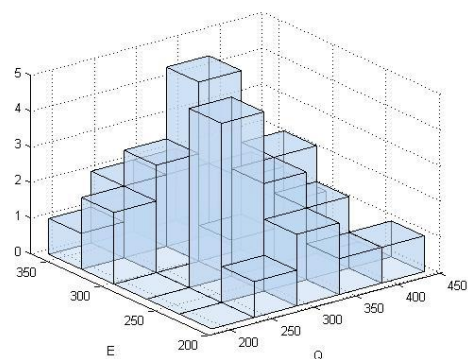
Исходные данные

E , мм	h , мм
321	285
310	414
314	323
336	260
258	327
260	280
336	438
234	360
302	274
260	240
319	371
318	325
237	274
276	381
251	293
217	439
349	275
227	307
206	327
308	313
240	381
313	277
294	295
357	187
342	293
269	353
309	204
217	285
262	305
266	259
337	338
303	322
320	381
309	298
242	247
276	345
252	340
324	234

а)



б)



в)

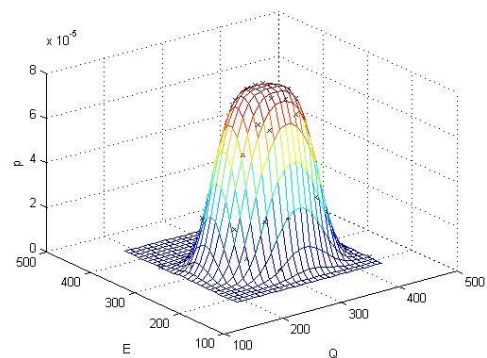


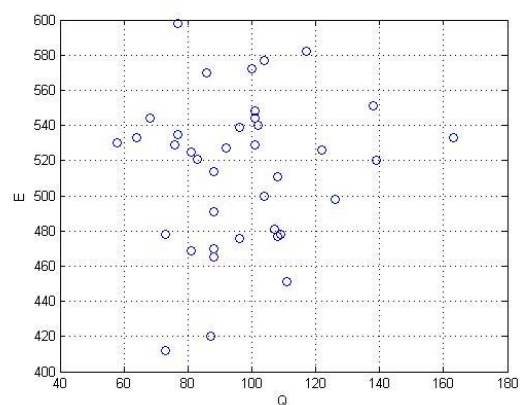
Рисунок Б.8 – Эллипс рассеивания
(а), эмпирическая гистограмма (б),
поверхность вероятности (в).

9) р. Сызранка – д. Репьевка

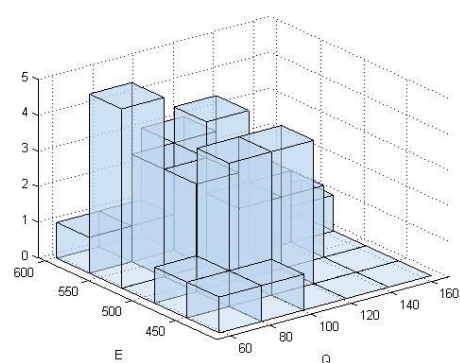
Исходные данные

E , мм	h , мм
548	101
570	86
529	76
535	77
551	138
478	73
582	117
491	88
469	81
481	107
520	139
544	101
465	88
478	109
470	88
521	83
544	68
476	96
412	73
500	104
527	92
530	58
525	81
529	101
598	77
420	87
526	122
477	108
533	163
498	126
577	104
539	96
572	100
533	64
511	108
514	88
451	111
540	102

а)



б)



в)

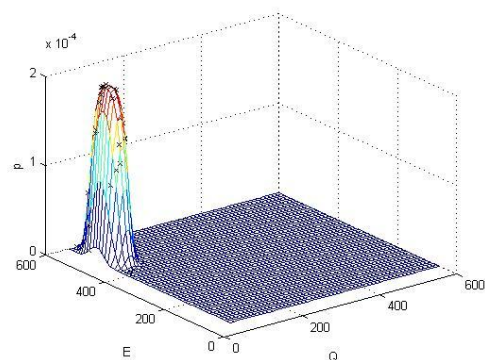


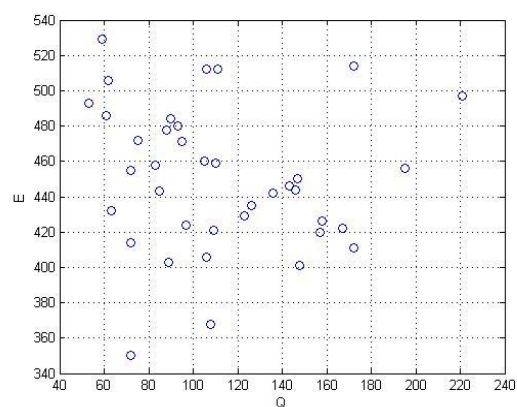
Рисунок Б.9 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б), поверхность вероятности (в).

10) р. Дема – д. Бочкарева

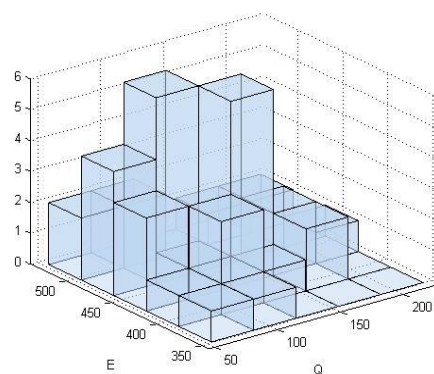
Исходные данные

E , мм	h , мм
484	90
506	62
478	88
472	75
486	61
432	63
514	172
444	146
406	106
403	89
458	83
471	95
426	158
401	148
422	167
429	123
493	53
414	72
350	72
442	136
460	105
421	109
443	85
459	110
529	59
368	108
450	147
420	157
455	72
424	97
512	111
480	93
512	106
456	195
446	143
435	126
411	172
497	221

а)



б)



в)

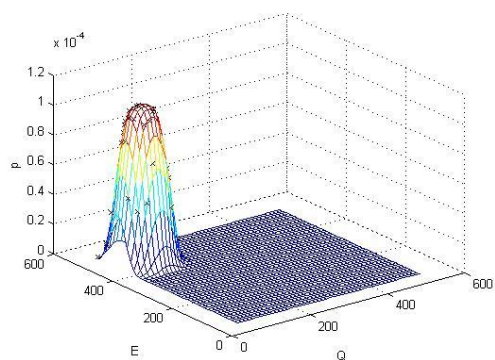


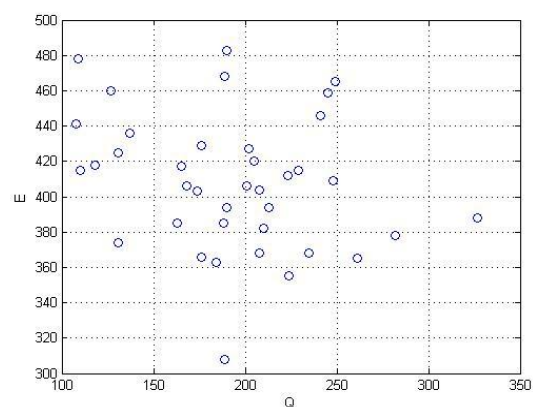
Рисунок Б.10 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б), поверхность вероятности (в).

11) р. Чепца – д. Полом

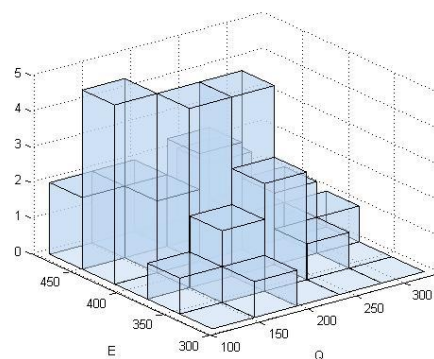
Исходные данные

E , мм	h , мм
427	202
441	108
425	131
418	118
412	223
368	208
459	245
394	213
382	210
366	176
415	229
429	176
363	184
385	163
368	235
378	282
460	127
365	261
308	189
406	201
404	208
394	190
417	165
446	241
478	109
355	224
420	205
374	131
415	110
403	174
483	190
436	137
468	189
409	248
406	168
385	188
388	327
465	249

а)



б)



в)

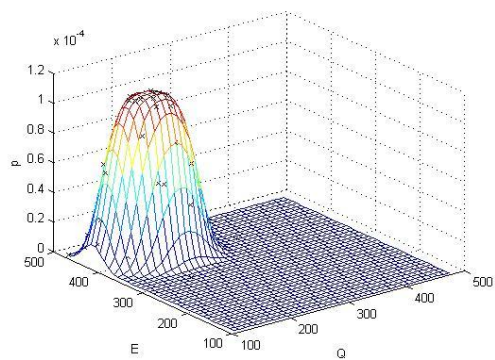


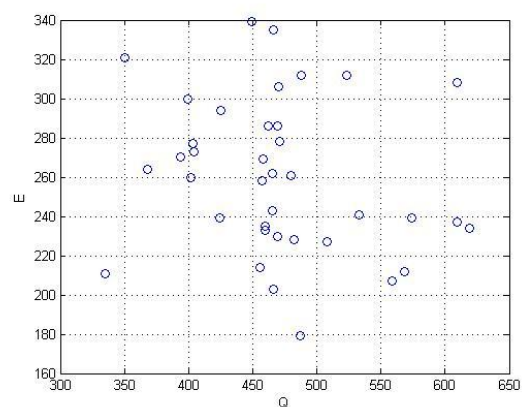
Рисунок Б.11 – Эллипс рассеивания
(а), эмпирическая гистограмма (б),
поверхность вероятности (в).

12) р. Печора – г. Троицко-Печорск

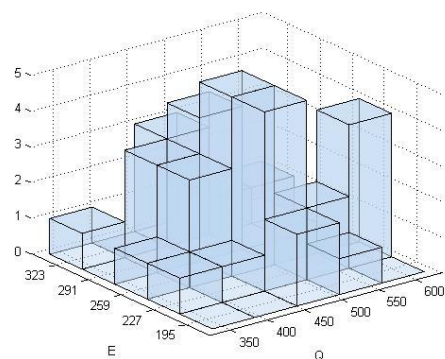
Исходные данные

E , мм	h , мм
300	399
278	471
277	403
294	425
239	424
233	460
286	462
227	508
262	465
211	335
286	469
312	523
214	456
235	460
237	609
207	559
335	466
203	466
179	487
260	402
228	482
230	469
269	458
312	488
306	470
258	457
273	404
212	568
234	619
264	368
339	449
270	394
308	609
261	480
241	533
239	574
243	465
321	350

а)



б)



в)

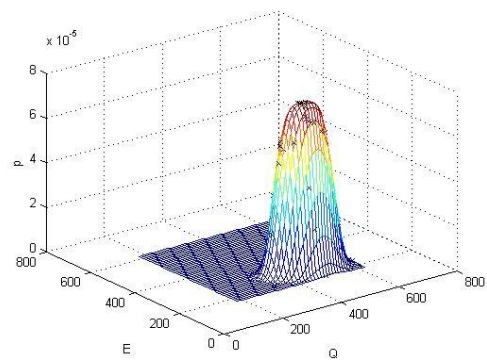


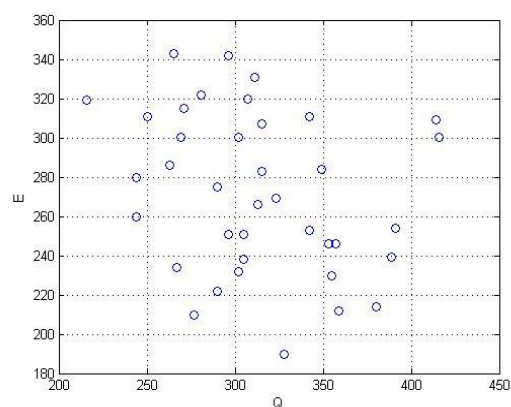
Рисунок Б.12 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б), поверхность вероятности (в).

13) р. Ижма – г. Усть-Ухта

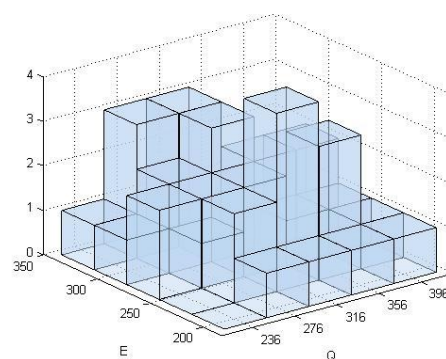
Исходные данные

E , мм	h , мм
311	250
300	416
300	302
322	281
251	305
251	296
311	342
230	355
286	263
234	267
307	315
320	307
222	290
253	342
239	389
214	380
343	265
210	277
190	328
280	244
232	302
266	313
275	290
331	311
315	271
269	323
300	269
212	359
246	357
260	244
342	296
284	349
309	414
283	315
238	305
254	391
246	353
319	216

а)



б)



в)

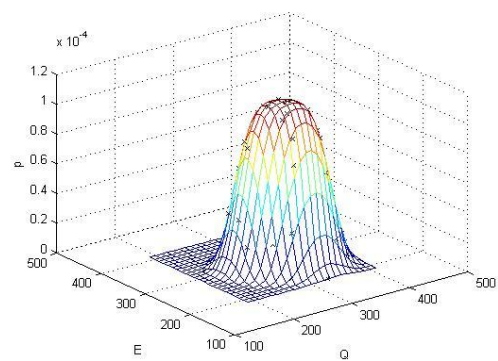


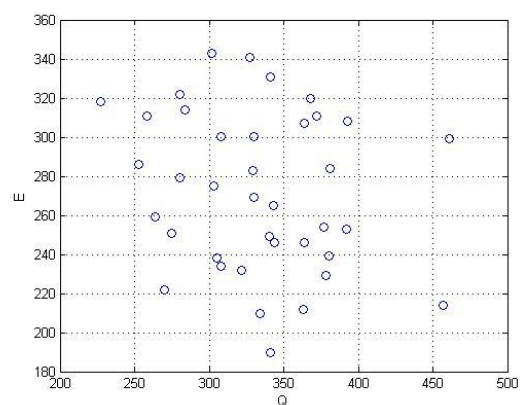
Рисунок Б.13 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б), поверхность вероятности (в).

14) р. Ухта – г. Ухта

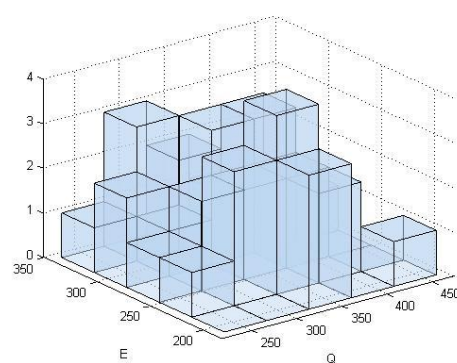
Исходные данные

E , мм	h , мм
311	258
299	461
300	330
322	280
249	340
251	275
311	372
229	378
286	253
234	308
307	364
320	368
222	270
253	392
239	380
214	457
343	302
210	334
190	341
279	280
232	322
265	343
275	303
331	341
314	284
269	330
300	308
212	363
246	344
259	264
341	327
284	381
308	393
283	329
238	305
254	377
246	364
318	227

а)



б)



в)

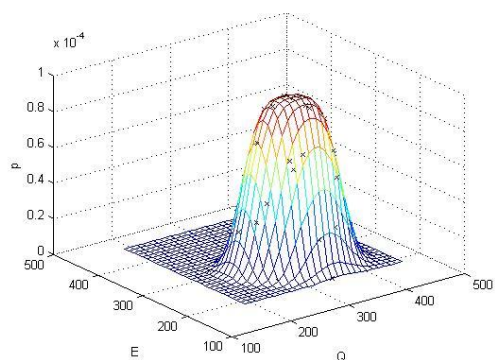


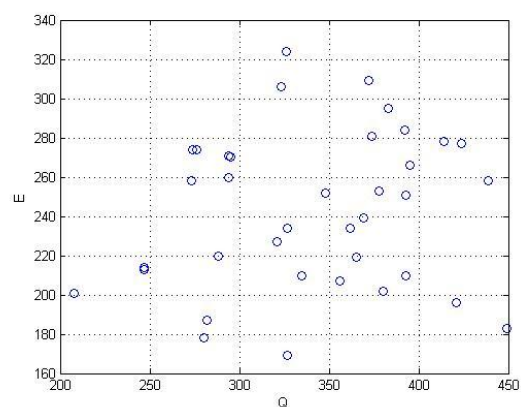
Рисунок Б.14 – Эллипс рассеивания
(а), эмпирическая гистограмма (б),
поверхность вероятности (в).

15) р. Цильма – д. Трусово

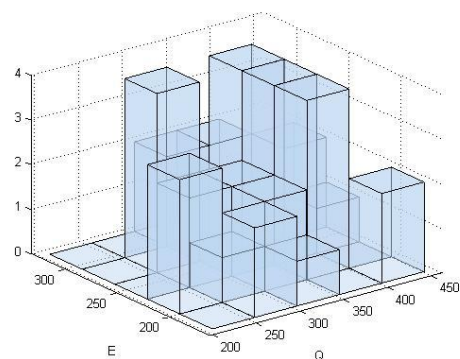
Исходные данные

E , мм	h , мм
278	414
252	348
271	294
306	323
220	288
234	327
277	424
196	421
274	276
213	247
281	374
284	392
202	380
234	362
219	365
183	449
324	326
187	282
169	327
260	294
207	356
266	395
251	393
309	372
295	383
253	378
258	273
178	280
210	393
214	247
284	392
239	369
258	439
270	295
201	208
227	321
210	335
274	274

а)



б)



в)

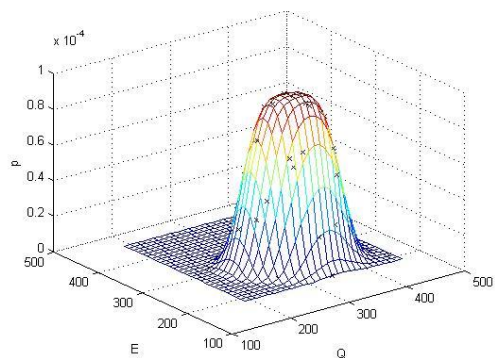


Рисунок Б.15 – Эллипс рассеивания (а), эмпирическая гистограмма (б), поверхность вероятности (в).