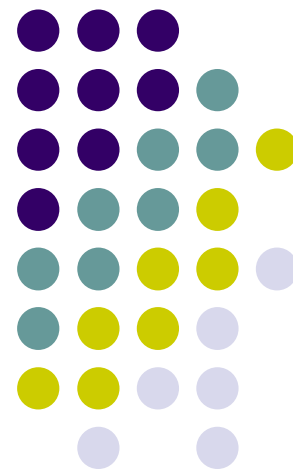
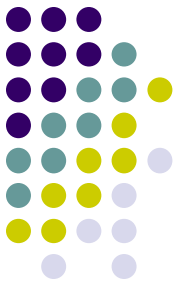


Завгородний В.Н. Методы статистического описания случайных процессов

[электронное учебное пособие]:
курс лекций для магистратуры:
презентации. – СПб: РГГМУ, 2021.
– 214 с.

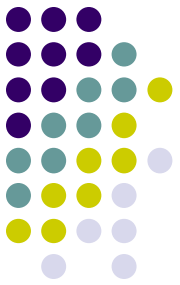


Оглавление



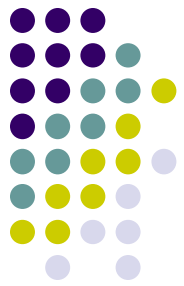
Введение	6
Тема 1. Основы корреляционной теории случайных процессов	17
Тема 2. Стационарные случайные процессы	50
Тема 3. Спектральное разложение стационарного случайного процесса	76
Тема 4. Пространственно-временные характеристики случайного поля	96
Тема 4. Статистические оценки характеристик случайных функций	114

Оглавление



Тема 5. Марковские процессы	132
Тема 5.1. Марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем	162
Тема 5.2. Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем	175
Тема 6. Потоки в процессах с непрерывным временем	182
Тема 7. Модели непрерывных марковских цепей	199

Рекомендованная литература. Основная



1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 2001. – 479с.
2. Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 2001. – 400с.
3. Яглом, А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций.– Л.: Гидрометиздат,1981.– 280с.
4. Лемешко, Б.Ю. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход. – Новосибирск: МГТУ, 2011. – 888с.

Рекомендованная литература.

Дополнительная



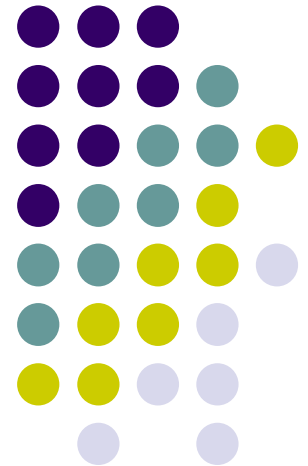
5. Малинин, В.Н. Статистические методы анализа гидрометеорологической информации. Учебник, – СПб.: изд. РГГМУ, 2008. – 408 с.
6. Вентцель, Е.С., Овчаров, Л.А. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. – Учеб. пособие для втузов. – 2-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2000.
7. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – 3-е изд. – М.: Айрес-пресс, 2008. – 288с.

Введение

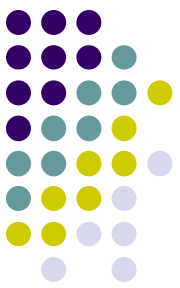
**Классы океанологических
процессов**

Классы случайных процессов

**Специальные типы случайных
функций**

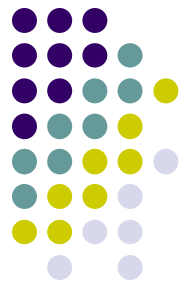


Классы океанологических процессов



- 1. Мелкомасштабные явления** (периоды до десятков минут):
 - поверхностные и внутренние волны, турбулентность и процессы эволюции вертикальной микроструктуры океана.
- 2. Мезомасштабные явления** (периоды от часов до суток):
 - приливные и инерционные колебания сил гравитационного притяжения Луны и Солнца и сил вращательного движения планеты.
- 3. Синоптическая изменчивость** (периоды от суток до месяцев):
 - неперiodическое формирование вихрей порядка размером до 100 км и неустойчивость крупномасштабных океанских течений.
- 4. Сезонные колебания** (годовой период и его гармоники):
 - в высоких широтах, а также в муссонной зоне Индийского океана.
- 5. Межгодовая изменчивость** (периоды в несколько лет)
 - квазидвухлетний цикл температуры воды, интенсивности течений и других процессах взаимодействия океана с атмосферой.
- 6. Внутривековая изменчивость** (в десятки лет):
 - потепление Арктики в 20-40-х годах прошлого столетия.
- 7. Межвековая изменчивость** (периоды в сотни лет):
 - «малый ледниковый период» (XVII-XIX вв.).

Признаки случайности функции



Факторы случайности:

- многократное повторение опытов в однотипных условиях (массовость наблюдений)
- множество однотипных реализаций (статистический ансамбль) $x_1(t)$, $x_2(t)$, ...
- статистическая устойчивость ансамбля однотипных реализаций $x_1(t)$, $x_2(t)$, ...

Факторы нарушения случайности:

- повторение опытов в различных условиях
- наличие лишь одной нерегулярной кривой
- неустойчивость статистического закона

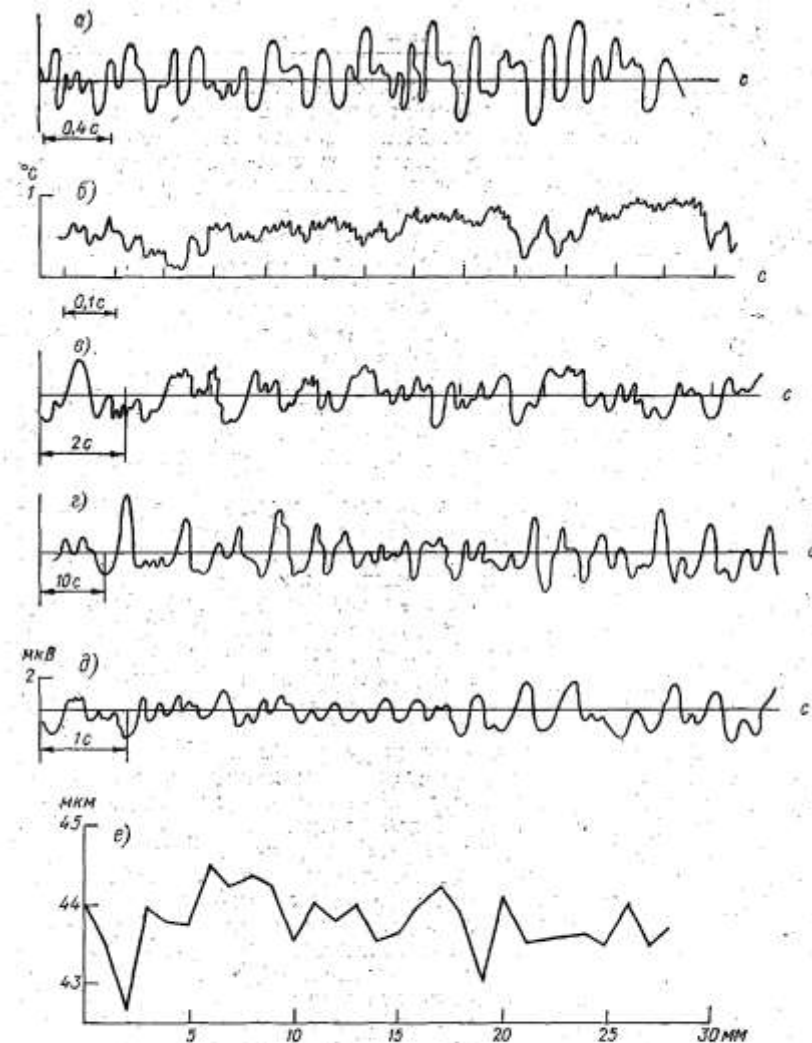
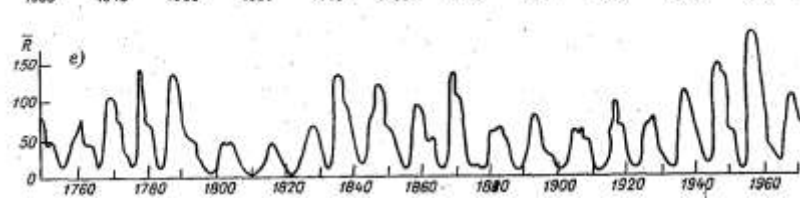
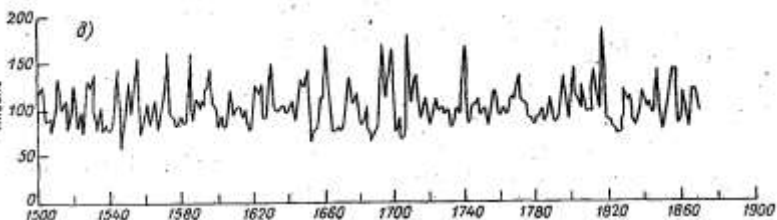
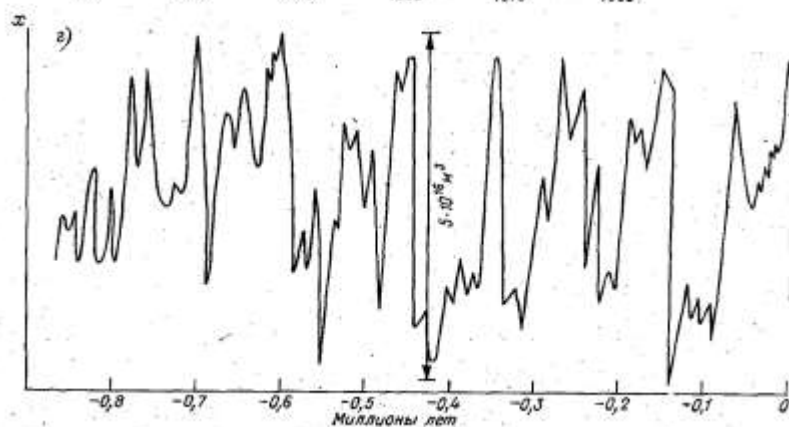
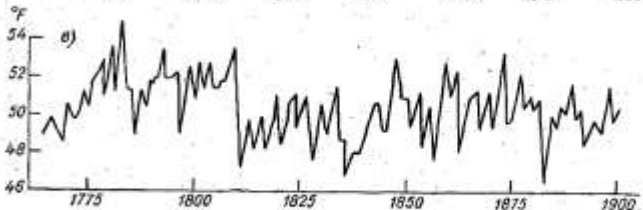
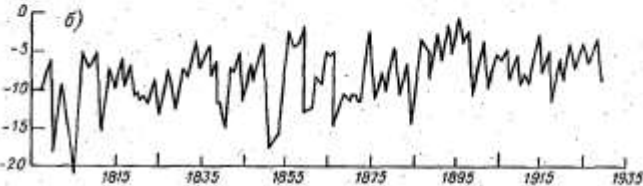
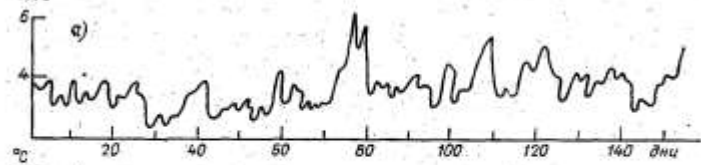


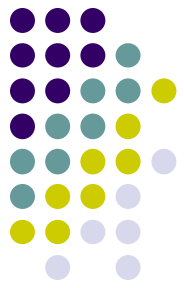
Рис. 1.

а — Флуктуация интенсивности радиолокационного сигнала (по [196]).
б — Турбулентные пульсации температуры в фиксированной точке атмосферы на высоте 2 м над поверхностью Земли (по [147]).
в — Микропульсации уровня Земли (микросейсмы), зарегистрированные сейсмографом на наблюдательной площадке в Восточном Казахстане (по [43]).
г — Изменения высоты поверхности волнующегося моря в фиксированной точке (по [59]).
д — Изменения разности значений биологического потенциала двух участков мозга здорового спящего человека (по [103]).
е — Изменение диаметра нейлонной нити вдоль ее длины (по [190]).



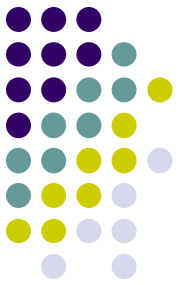
а — Средние суточные значения скорости ветра (метеорологическая обсерватория Кью)
б — Изменчивость средней январской температуры воздуха в Санкт-Петербурге
в — Средние годовые значения температуры воздуха в Лондоне за период с 1763 по 1900 г.
г — Изменения степени оледенения Земли (объема льда на планете) за последний миллион лет
д — Колебания цен на пшеницу на рынках Западной и Центральной Европы за период с 1500 до 1869 г. (ряд Бевериджа)
е — Средние годовые значения числа Вольфа

Типы неопределенности величин

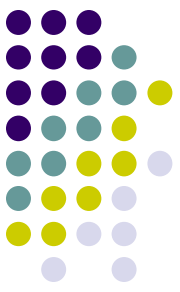


- **Детерминированная** величина принимает единственное значение
- **Случайная** величина может принимать различные значения и каждому значению или множеству значений приписывается некоторая вероятность
- **Нечеткая** величина - величина может принимать различные значения и каждому интервалу значений приписывается некоторая вероятность
- **Интервальная** величина - величина, когда мы можем указать лишь ее принадлежность данному **интервалу**.

Случайная функция (случайный процесс). Понятие



- Случайной функцией называется функция одного или нескольких аргументов, которая при *каждом* повторении опыта в *одинаковых условиях* представляет собой неслучайные функции различного вида.
- Случайный процесс, протекающий в любой физической системе, представляет собой случайные переходы системы *из состояния в состояние*, каждое из которых может быть охарактеризовано с помощью одной (одномерный случайный процесс) или нескольких (многомерный случайный процесс) неслучайных переменных.



Задание случайной функции в бесконечномерном пространстве

- Случайную функцию $X(t)$ на бесконечном множестве T считают заданной, если:

- для каждого t из T определена функция распределения величины $X(t)$

$$F_t(x) = P\{X(t) < x\}$$

- для каждой пары элементов t_1, t_2 множества T определена функция распределения двумерной случайной величины $X(t_1, t_2) = \{X(t_1), X(t_2)\}$

$$F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}$$

- для любого конечного числа n элементов $t_1, t_2, \dots, t_n$ множества T определена n -мерная функция распределения величины $X(t_1, t_2, \dots, t_n) = \{X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)\}$

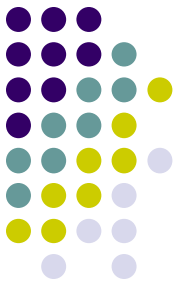
$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n\}$$

- Условия симметрии и согласованности:

- $F_{t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}) = F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$

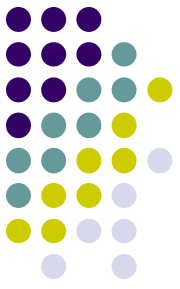
- $F_{t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_m, \infty, \dots, \infty) = F_{t_1, t_2, \dots, t_m}(x_1, x_2, \dots, x_m)$

Классы случайных процессов



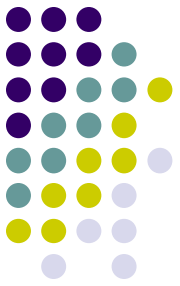
- Случайный процесс $X(t)$ называется **дискретным во времени**, если система, в которой он протекает, меняет свои состояния только в моменты времени $t_1, t_2, \dots$, число которых конечно или счётно.
- Случайный процесс называется **процессом с непрерывным временем**, если переход из состояния в состояние может происходить в любой момент времени.
- Случайный процесс называется **процессом с непрерывными состояниями**, если значением случайного процесса является непрерывная случайная величина.
- Случайный процесс называется **случайным процессом с дискретными состояниями**, если значением случайного процесса является дискретная случайная величина

Классы случайных процессов



- **Случайные функции**
 - **Случайные процессы**
 - временные ряды
 - случайные поля
- **Стационарные случайные процессы**
 - В широком смысле и узком смысле
 - Эргодические
 - Марковские
 - с дискретным временем и дискретными состояниями (марковские цепи):
 - многосвязные, простые, однородные, неоднородные
 - с непрерывным временем и дискретными состояниями
 - с непрерывным временем и непрерывными состояниями
 - с дискретным временем и непрерывными состояниями

Специальные типы случайных функций

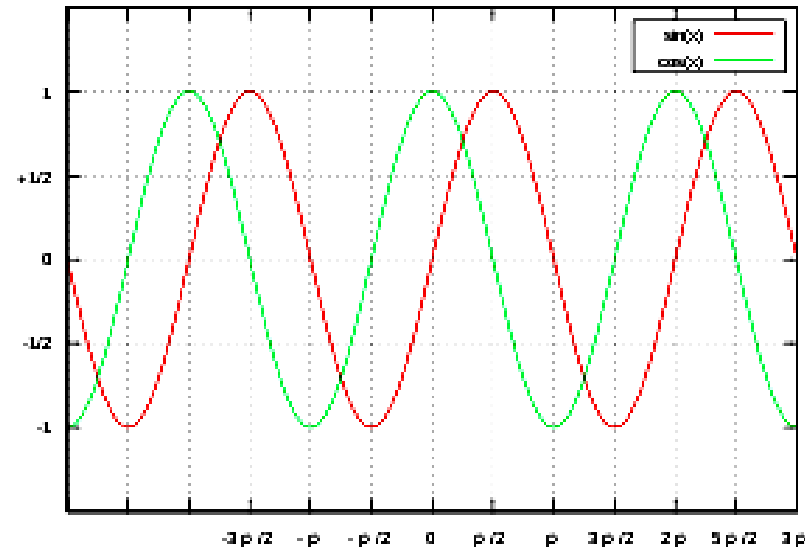


- **Последовательности независимых случайных величин** — случайные функции $X(t)$ дискретного аргумента $t=0,1,2, \dots$:
$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{t_1}(x_1) F_{t_2}(x_2) \dots F_{t_n}(x_n)$$
- **Случайные процессы с независимыми приращениями** — случайные функции с независимыми случайными разностями
$$X(t_2) - X(t_1) \text{ и } X(t_4) - X(t_3) \quad t_1 < t_2 \leq t_3 < t_4$$
- **Марковские случайные процессы** — условное распределение величины $X(t_k)$ зависит только от значения величины $X(t_{k-1})$
- **Нормальные случайные функции** — случайные функции $X(t)$, у которых все конечномерные распределения вероятностей являются нормальными (гауссовскими) распределениями
 - Достаточно знать только одномерные распределения величин $X(t)$ и двумерные распределения пар $\{X(t), X(s)\}$.

Характеристика гармонических колебаний



- Гармонические колебания — колебания, при которых физическая величина изменяется с течением времени по гармоническому закону: синусоидальному $x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$ косинусоидальному $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$



- Д.у. гармонических колебаний $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

x — отклонение величины X от положения равновесия в момент t ;
 A — амплитуда колебания, максимальное отклонение X ;
 ω — циклическая частота, число колебаний за 2π ед. времени;
 $(\omega t + \varphi_0)$ — полная фаза колебания, смещение в момент t ;
 φ_0 — начальная фаза, значение полной фазы колебания в момент времени $t = 0$.

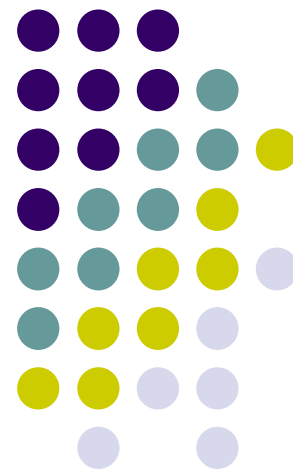
ОСНОВЫ корреляционной теории случайных процессов

Понятие случайной функции
(процесса, поля)

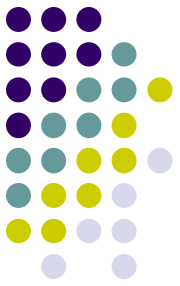
Характеристики случайных процессов
(математическое ожидание, дисперсия,
корреляционная функция)

Стационарный случайный процесс
(с.с.п.) в узком и широком смысле

Эргодический случайный процесс

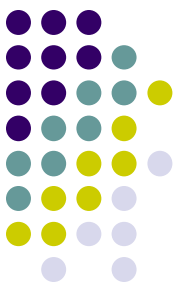


Корреляционная теория случайных функций



- стохастический анализ, основанный на использовании моментов первого и второго порядка
- моменты случайной функции $X(t)$ являются неслучайными функциями и называются характеристиками случайной функции:
 - математическое ожидание (начальный момент первого порядка): $m_x(t) = M[X(t)]$
 - дисперсия (центральный момент второго порядка):
$$D_x(t) = D[X(t)] = M(X(t) - M X(t))^2$$
 - корреляционная функция (смешанный центральный момент второго порядка):
$$K_X(t_1; t_2) = M[(X(t_1) - m_X(t_1))(X(t_2) - m_X(t_2))]$$

Понятие случайной функции.

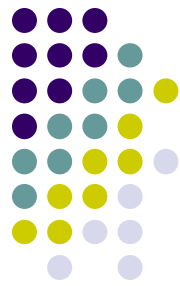


Аксиоматическое определение

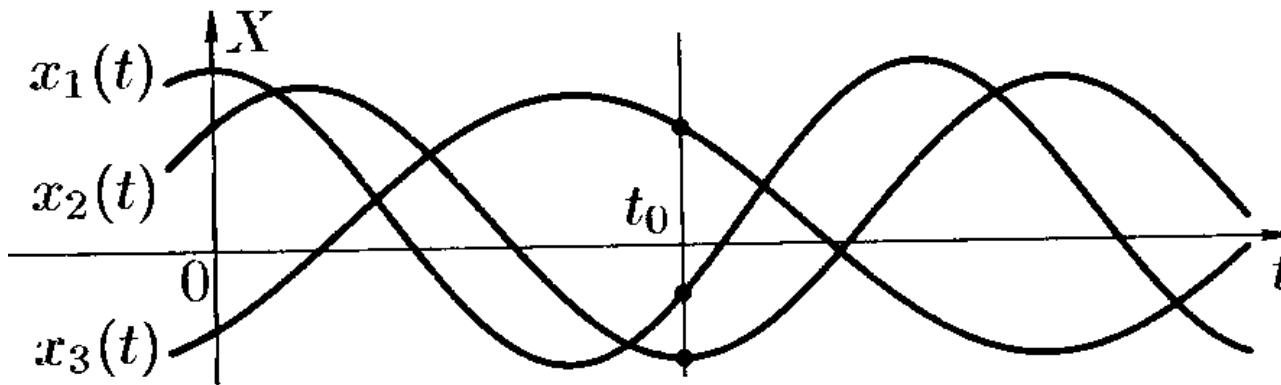
Случайной функцией называют функцию неслучайного аргумента t , которая при каждом фиксированном значении аргумента является случайной величиной. Случайные функции аргумента t обозначают прописными буквами $X(t)$, $Y(t)$ и т. д.

- **Случайную функцию** определяют как функцию $X(\omega, t)$ элементов вероятностного пространства (Ω, A, P) и параметра t , пробегающего произвольное множество T .
 - При фиксированном значении $t_0 \in T$ случайная функция $X(\omega, t)$ будет являться случайной величиной $X(\omega, t_0)$, которую называют сечением $X(t_0)$ случайной функции.
 - При фиксированном значении элементарного исхода опыта $\omega_0 \in \Omega$ случайная функция $X(\omega, t)$ превращается в неслучайную функцию $X(\omega_0, t)$ аргумента $t \in T$, которая соответствует элементарному исходу опыта ω_0 и называется реализацией $x_0(t)$ случайной функции.

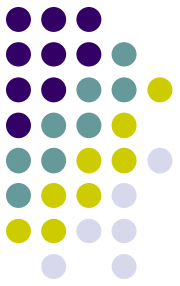
Сечение и реализация случайной функции $X(t)$



- **Сечением** случайной функции $X(t)$ называют случайную величину $X(t_0)$, соответствующую фиксированному значению аргумента t_0 случайной функции $X(t)$.
- **Реализацией** (траекторией, выборочной функцией) случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию $x_i(t)$ аргумента t , полученную в ходе опыта.

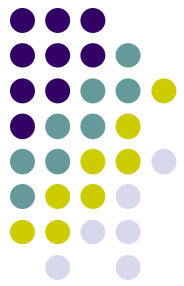


Классы случайных процессов



- **Случайные функции**
 - **Случайные процессы**
 - **временные ряды**
 - **Случайные поля**
 - **пространственные карты**
- **Стационарные случайные процессы**
 - **В широком смысле и узком смысле**
 - **Эргодические**
 - **Марковские**

Сечение и реализация случайной функции. Примеры



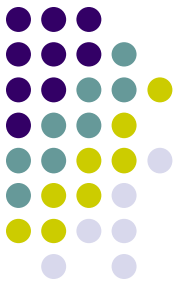
- Случайная функция $X(t) = (t^2 + 1)U$, где U — случайная величина, возможные значения которой принадлежат интервалу $(0, 10)$. Найти реализации функции $X(t)$ в двух испытаниях, в которых величина U приняла значения; а) $u_1 = 2$; б) $u_2 = 3,5$.

- а) $x_1(t) = 2(t^2 + 1)$; б) $x_2(t) = 3,5(t^2 + 1)$.

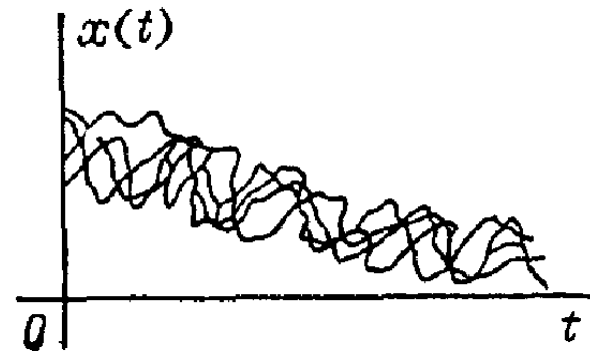
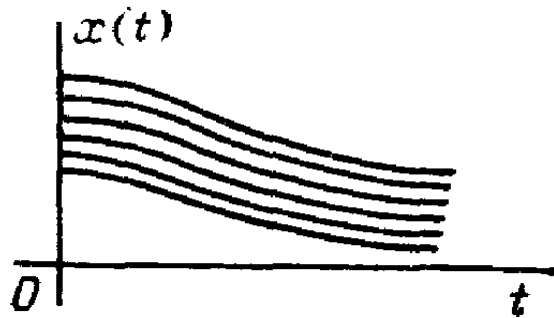
- Случайная функция $X(t) = U \sin t$, где U — случайная величина. Найти сечения $X(t)$, соответствующие фиксированным значениям аргумента: а) $t_1 = \pi/6$; б) $t_2 = \pi/2$.

- а) $X_1 = U/2$; б) $X_2 = U$.

Функция распределения случайной функции



- одномерная функция распределения случайной функции $X(t)$: $F_1(x; t) = P[X(t) < x]$
- совместная n -мерная функция распределения случайной функции $X(t)$:

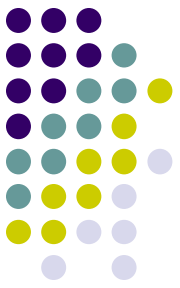


$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2, \dots, X(t_n) < x_n\}$$

- совместная двумерная функция распределения сл.функции $X(t)$:

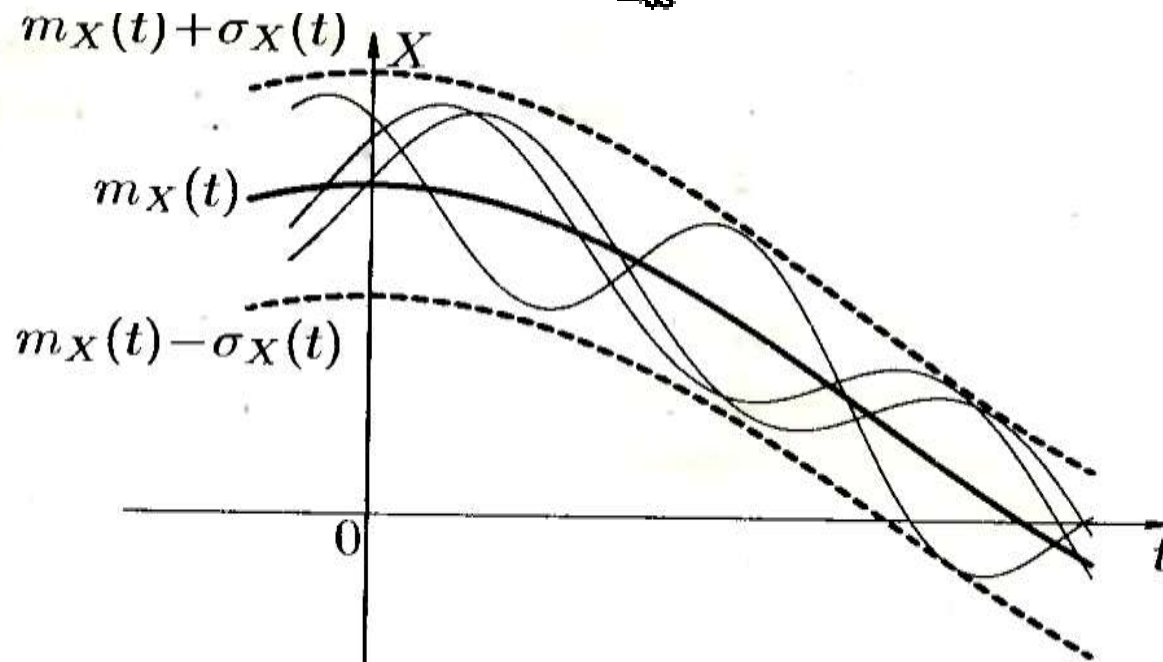
$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) < x_1, X(t_2) < x_2\}$$

Математическое ожидание случайной функции

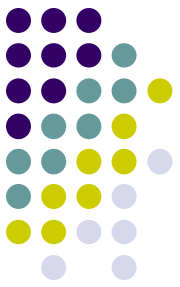


Математическим ожиданием случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию $m_X(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента равно математическому ожиданию сечения, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента:

$$m_X(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) f(x, t) dx$$



Математическое ожидание случайной функции. Свойства

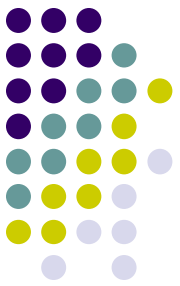


1. Математическое ожидание неслучайной функции равно самой функции $M(f(t)) = f(t)$.
2. Неслучайный множитель можно выносить за знак математического ожидания случайного процесса $M(f(t) \cdot X(t)) = f(t) \cdot m_X(t)$.
3. Математическое ожидание суммы (разности) двух случайных процессов равно сумме (разности) математических ожиданий слагаемых $M(X(t) \pm Y(t)) = m_X(t) \pm m_Y(t)$.

Следствие. Для нахождения математического ожидания суммы случайной и неслучайной функций достаточно к математическому ожиданию случайной функции прибавить неслучайную функцию:

$$M(X(t) \pm f(t)) = m_X(t) \pm f(t).$$

Математическое ожидание случайной функции. Пример

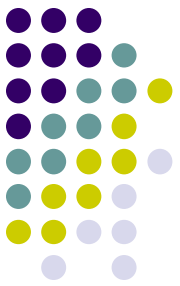


- Случайный процесс определяется формулой $Y(t) = X \cdot e^{-t}$, $t > 0$, $X \sim N(3; 1)$, $f(x) = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \cdot 1^2}}$, т.е. X — с.в., распределена по нормальному закону с $a = 3$, $\sigma = 1$. Найти математическое ожидание случайного процесса $Y(t)$.

$$\begin{aligned}
 m_Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \\
 &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-3+3) \cdot e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2} dx = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-3) \cdot e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2} dx + \right. \\
 &+ 3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2} dx \Big) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}} \left(- \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2\right) + \right. \\
 &+ 3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{2} \Big) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}} \left(\frac{-1}{e^{\frac{(x-3)^2}{2}}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi} \right) \\
 &= \frac{e^{-t}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}} (0 + 3 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\pi}) = 3 \cdot e^{-t}, \text{ т.е. } m_Y(t) = 3 \cdot e^{-t}.
 \end{aligned}$$

согласно свойству 2
 $m_Y(t) = M(X \cdot e^{-t}) =$
 $= e^{-t} \cdot MX,$
 но $X \sim N(3; 1),$
 $MX = 3$ и
 $m_Y(t) = 3e^{-t}.$

Математическое ожидание случайной функции. Д/з



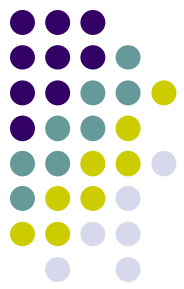
- Найти математическое ожидание случайной функции $X(t) = Ue^t$, где U — случайная величина, причем $M(U) = 5$.

- $m_x(t) = 5e^t.$

- Найти математическое ожидание случайной функции: а) $X(t) = Ut^2 + 2t + 1$; б) $X(t) = U \sin 4t + V \cos 4t$, где U и V — случайные величины, причем $M(U) = M(V) = 1$.

- а) $m_x(t) = (t + 1)^2$; б) $m_x(t) = \sin 4t + \cos 4t.$

Дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной функции. Свойства



● Дисперсией случайной функции $X(t)$ называют неслучайную неотрицательную функцию $D_x(t)$, значение которой при каждом фиксированном значении аргумента t равно дисперсии сечения, соответствующего этому же фиксированному значению аргумента:

$$D_x(t) = D[X(t)] = M(X(t) - M X(t))^2 = M X^2(t) - m_X^2(t).$$

$$D_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) - m_x(t)]^2 f(x, t) dx$$

● $D(f(t)) = 0.$ ● $D_X(t) = \sigma_X^2(t) \geq 0.$

● $D_X(X(t) \pm f(t)) = D_X(t).$

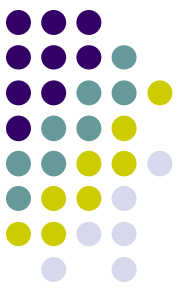
● $D_X(f(t) \cdot X(t)) = f^2(t) \cdot D_X X(t).$

● Средним квадратическим отклонением случайной функции называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}.$$

Дисперсия и стандартное отклонение случайной функции.

Пример



- Случайный процесс определяется формулой $Y(t) = X \cdot e^{-t}, \quad t > 0, \quad X \sim N(3; 1), \quad f(x) = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \cdot 1^2}},$
т. е. X — с. в., распределена по нормальному закону с $a = 3, \sigma = 1$.
Найти дисперсию и ско случайного процесса $Y(t)$.

- Находим дисперсию, используя ее свойство

$$D_X(X(t) \pm f(t)) = D_X(t) :$$

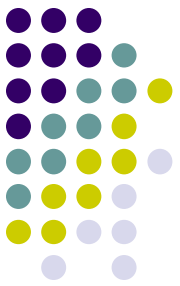
$$D_Y(t) = D(X \cdot e^{-t}) = (e^{-t})^2 \cdot DX = e^{-2t} \cdot DX.$$

$$\text{Но } X \sim N(3, 1), \quad DX = \sigma^2 = 1^2 = 1.$$

$$\text{Поэтому } D_Y(t) = e^{-2t} \cdot 1 = e^{-2t}, \text{ т. е. } D_Y(t) = e^{-2t}.$$

$$\sigma_Y(t) = \sqrt{e^{-2t}} = e^{-t}, \text{ т. е. } \sigma_Y(t) = e^{-t}.$$

Дисперсия случайной функции. Д/з

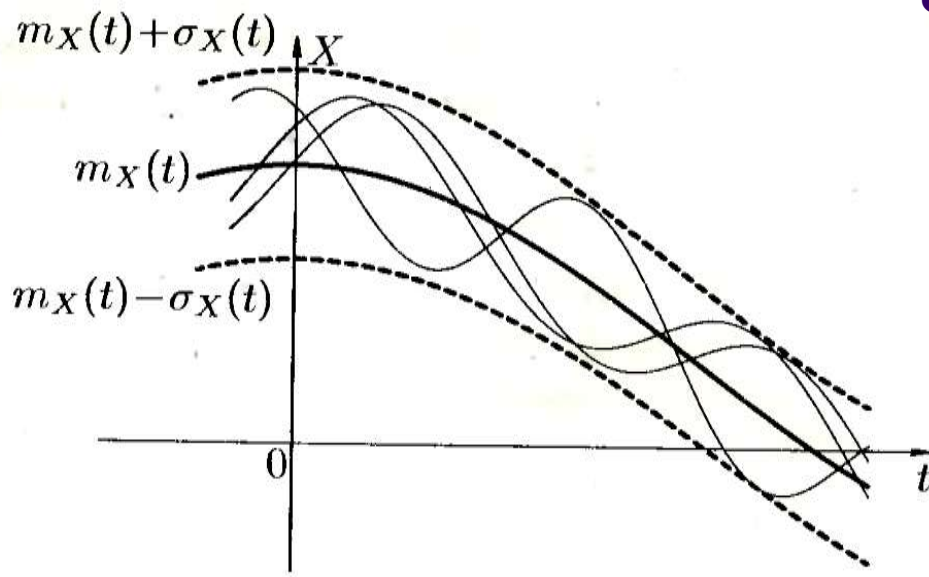


- Известна дисперсия $D_x(t)$ случайной функции $X(t)$. Найти дисперсию случайной функции $Y(t) = X(t) + 2$.
 - $D_y(t) = D_x(t)$.
- Известна дисперсия случайной функции $X(t)$. Найти дисперсию случайной функции $Y(t) = (t + 3) X(t)$.
 - $D_y(t) = (t + 3)^2 D_x(t)$.

Графическое представление функциональных характеристик случайного процесса



- м.о. $m_X(t)$ с.п. $X(t)$ представляет собой неслучайную функцию, около которой варьируются реализации с.п.
- дисперсия $D_X(t)$ с.п. $X(t)$ представляет собой неслучайную неотрицательную функцию, характеризующую степень разброса реализаций около его м.о. $m_X(t)$, т.е. реализаций центрированного с.п.



- среднее квадратическое отклонение $\sigma_X(t)$ с.п. $X(t)$ представляет собой неслучайную неотрицательную функцию взвешенного по вероятностям отклонения реализаций с.п. $X(t)$ от его м.о. $m_X(t)$

Корреляционная (автокорреляционная) функция



- *Центрированной случайной функцией* называют разность между случайной функцией и ее математическим ожиданием:

$$\dot{X}(t) = X(t) - m_X(t).$$

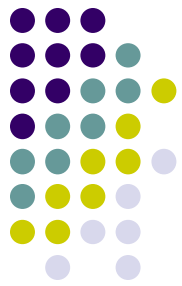
- *Корреляционной функцией* случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию $K_X(t_1, t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2 , значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корреляционному моменту сечений, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$K_X(t_1; t_2) = M(\dot{X}(t_1) \cdot \dot{X}(t_2)) = M(X(t_1) \cdot X(t_2)) - m_X(t_1) \cdot m_X(t_2)$$

- *Нормированной корреляционной функцией* случайной функции $X(t)$ называют неслучайную функцию двух независимых переменных t_1 и t_2 , значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно коэффициенту корреляции сечений, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$r_X(t_1; t_2) = \frac{K_X(t_1; t_2)}{\sigma_X(t_1) \cdot \sigma_X(t_2)} = \frac{K_X(t_1; t_2)}{\sqrt{K_X(t_1; t_1)} \cdot \sqrt{K_X(t_2; t_2)}}.$$

Свойства корреляционной функции случайного процесса



- $K_x(t, t) = D_x(t)$

$$K_X(t; t) = M\left((X(t) - m(t)) \cdot (X(t) - m(t))\right) = M(X(t) - m(t))^2 = D_X(t).$$
- $K_x(t_1, t_2) = K_x(t_2, t_1)$

$$K_x(t_1, t_2) = M[\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_2)] = M[\dot{X}(t_2) \dot{X}(t_1)] = K_x(t_2, t_1)$$
- $K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2)$, если $Y(t) = X(t) + \varphi(t)$

$$m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t), \dot{Y}(t) = [X(t) + \varphi(t)] - [m_x(t) + \varphi(t)] = \dot{X}(t)$$

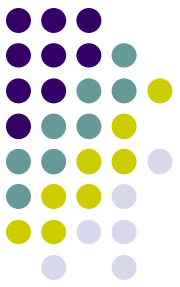
$$K_y(t_1, t_2) = M[\dot{Y}(t_1) \dot{Y}(t_2)] = M[\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_2)] = K_x(t_1, t_2).$$
- $K_y(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) \cdot \varphi(t_1) \varphi(t_2)$, если $Y(t) = X(t) \cdot \varphi(t)$

$$m_y(t) = M[X(t) \varphi(t)] = \varphi(t) m_x(t), \dot{Y}(t) = [X(t) \varphi(t)] - [m_x(t) \varphi(t)] = \varphi(t) \dot{X}(t)$$

$$K_y(t_1, t_2) = M[\dot{Y}(t_1) \dot{Y}(t_2)] = M\{[\dot{X}(t_1) \varphi(t_1)][\dot{X}(t_2) \varphi(t_2)]\} =$$

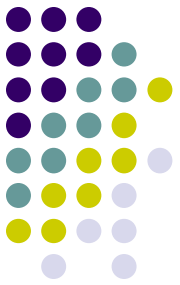
$$= \varphi(t_1) \varphi(t_2) M[\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_2)] = \varphi(t_1) \varphi(t_2) K_x(t_1, t_2).$$

Свойства корреляционной функции случайного процесса



- $K_x(t_1, t_2) \leq \sqrt{D_x(t_1) D_x(t_2)}$
 $K_x(t_1, t_2) = M[\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_2)] = M[\dot{X}\dot{Y}] = \mu_{xy},$
 $Z_1 = \sigma_y X - \sigma_x Y, Z_2 = \sigma_y X + \sigma_x Y$
 $D(Z_1) = M[Z_1 - m_{z_1}]^2 = 2\sigma_x^2\sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y\mu_{xy} \geq 0$
 $D(Z_2) = M[Z_2 + m_{z_2}]^2 = 2\sigma_x^2\sigma_y^2 + 2\sigma_x\sigma_y\mu_{xy} \geq 0$
 $\mu_{xy} \leq \sigma_x\sigma_y$
 $\mu_{xy} \geq -\sigma_x\sigma_y$
 $|\mu_{xy}| \leq \sigma_x\sigma_y = \sqrt{D_x D_y}$
 $|K_x(t_1, t_2)| \leq \sqrt{D_x(t_1) D_x(t_2)}.$

Свойства нормированной корреляционной функции

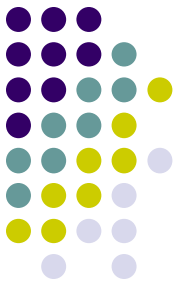


- Нормированная корреляционная функция представляет собой безразмерную характеристику линейной связи между сечениями случайной функции:

$$r_X(t_1; t_2) = \frac{K_X(t_1; t_2)}{\sigma_X(t_1) \cdot \sigma_X(t_2)} = \frac{K_X(t_1; t_2)}{\sqrt{K_X(t_1; t_1)} \cdot \sqrt{K_X(t_2; t_2)}}.$$

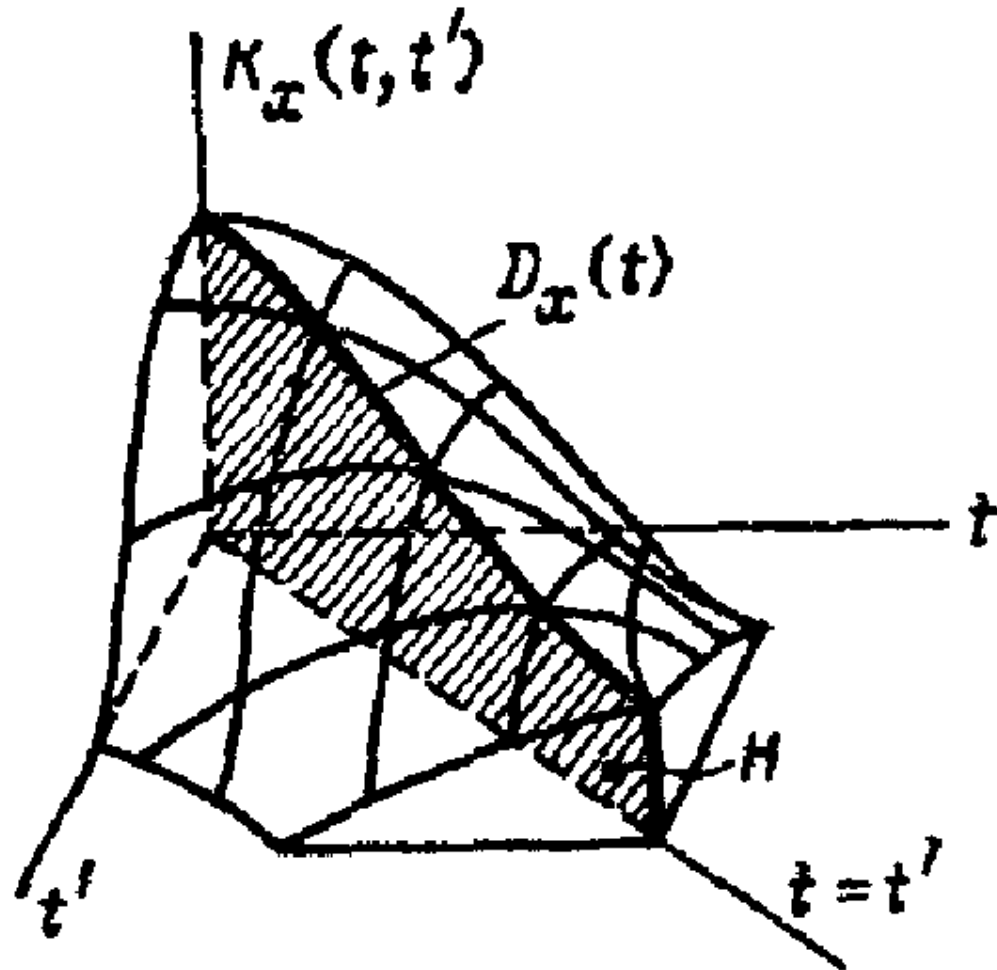
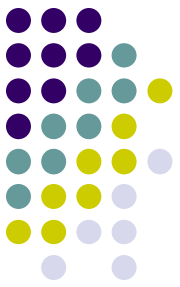
- $|r_X(t_1; t_2)| \leq 1;$
- $r_X(t; t) = 1;$
- $r_X(t_1; t_2) = r_X(t_2; t_1).$

Интерпретация характеристик случайных функций

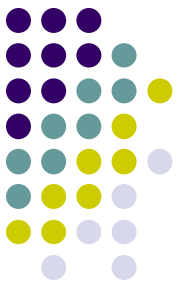


- Математическое ожидание $m_x(t)$ при каждом фиксированном значении аргумента t определяет центр распределения каждого сечения случайного процесса.
- Корреляционная функция $R_x\{t_1, t_2\}$, превращаясь при одинаковых значениях $t_1 = t_2 = t$ в дисперсию, характеризует разброс случайных значений данного сечения около своего центра распределения.
- При различных значениях t_1 и t_2 корреляционная функция характеризует степень линейной зависимости между каждой парой сечений случайного процесса.
- М.о. $m_x(t)$ и к.ф. $R_x\{t_1, t_2\}$ являются полными характеристиками случайного процесса $X(t) \sim N$.
 - Случайный процесс называется нормально распределенным, если любая система его сечений $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n) \sim N$.

Графическое представление корреляционной функции и дисперсии случайного процесса



Корреляционная функция случайной функции. Пример



- Случайный процесс определяется формулой
$$Y(t) = X \cdot e^{-t}, \quad t > 0, \quad X \sim N(3; 1), \quad f(x) = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{2 \cdot 1^2}},$$

т. е. X — с. в., распределена по нормальному закону с $a = 3$, $\sigma = 1$.

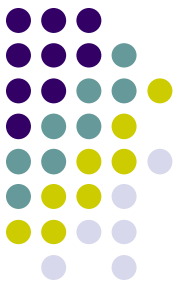
Найти корреляционную и нормированную корреляционную функций с. п. $Y(t)$.

$$\begin{aligned} K_Y(t_1; t_2) &= M((X \cdot e^{-t_1} - 3 \cdot e^{-t_1}) \cdot (X \cdot e^{-t_2} - 3 \cdot e^{-t_2})) = \\ &= M(X^2 \cdot e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} - 6X \cdot e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} + 9e^{-t_1} \cdot e^{-t_2}) = \\ &= M(e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} \cdot (X - 3)^2) = e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} \cdot DX = e^{-t_1} \cdot e^{-t_2} \cdot 1^2 = e^{-(t_1+t_2)}, \end{aligned}$$

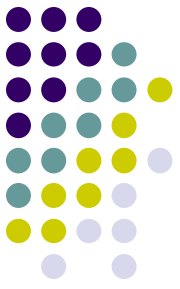
т. е. $K_Y(t_1; t_2) = e^{-(t_1+t_2)}.$

Тогда $r_Y(t_1; t_2) = \frac{e^{-t_1} \cdot e^{-t_2}}{e^{-t_1} \cdot e^{-t_2}} = 1$, т. е. $r_Y(t_1; t_2) = 1$.

Корреляционная функция случайной функции. Д/з



- Известна корреляционная функция K_x случайной функции $X(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции $Y(t) = X(t) + t^2$.
 - $K_y = K_x$.
- Известна корреляционная функция K_x случайной функции $X(t)$. Найти корреляционную функцию случайной функции: а) $Y(t) = X(t) \cdot (t + 1)$; б) $Z(t) = CX(t)$, где C — постоянная.
 - а) $K_y = (t_1 + 1)(t_2 + 1)K_x$;
 - б) $K_z = C^2 K_x$.



Статистические оценки характеристик случайного процесса

- Оценка математического ожидания $m_X(t)$ с.п. $X(t)$

$$\overline{X(t)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad n — \text{количество всех реализаций}$$

- Оценка корреляционной функции $K_X(t_1, t_2)$ с.п. $X(t)$

$$\begin{aligned} \overline{K_X(t_1, t_2)} &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_1) - \overline{X(t_1)}] [x_i(t_2) - \overline{X(t_2)}] \\ &= \overline{[X(t_1) - \overline{X(t_1)}] [X(t_2) - \overline{X(t_2)}]} \end{aligned}$$

- **Климатическая норма** – оценка м.о. гидрометеорологического процесса, полученная осреднением по всем реализациям (средняя многолетняя, средняя месячная, средняя суточная норма)
- **Аномалия** – отклонение случайной реализации от нормы, характеризующая изменчивость процесса.

Взаимная корреляционная функция двух случайных функций



- Взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию $R_{XY}(t_1, t_2)$ двух независимых аргументов t_1 и t_2 , значение которой при каждой паре фиксированных значений аргументов равно корреляционному моменту сечений обеих функций, соответствующих этим же фиксированным значениям аргументов:

$$R_{XY}(t_1; t_2) = M\left((X(t_1) - m_X(t_1)) \cdot (Y(t_2) - m_Y(t_2))\right) = M(\dot{X}(t_1) \cdot \dot{Y}(t_2)).$$

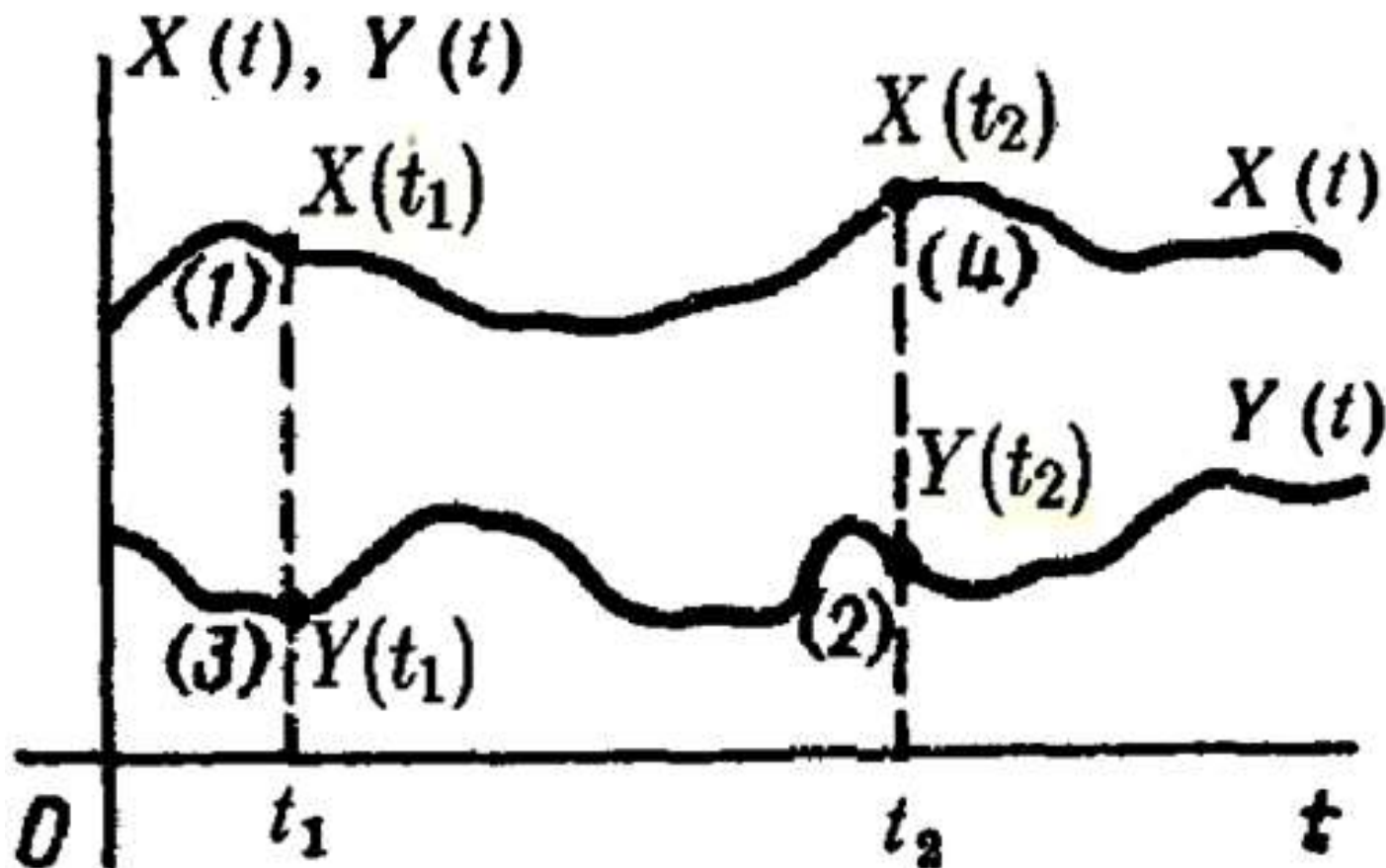
- Нормированной взаимной корреляционной функцией двух случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$ называют неслучайную функцию двух независимых аргументов t_1 и t_2 :

$$r_{XY}(t_1; t_2) = \frac{R_{XY}(t_1; t_2)}{\sqrt{D_X(t_1) \cdot D_Y(t_2)}} = \frac{R_{XY}(t_1; t_2)}{\sqrt{K_X(t_1; t_1)} \cdot \sqrt{K_Y(t_2; t_2)}}.$$

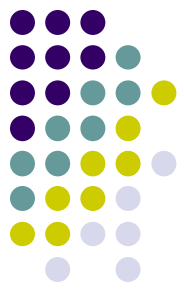
Взаимная корреляционная функция векторного с.п.



$\vec{X}(t) = \{X_1(t), X_2(t), \dots, X_k(t)\}$ - векторный с. п.

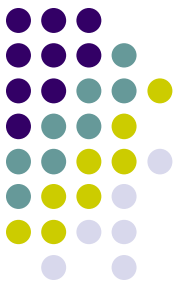


Свойства взаимной корреляционной функции двух случайных функций



1. $R_{XY}(t_1; t_2) = R_{YX}(t_2; t_1).$
2. $|R_{XY}(t_1; t_2)| \leq \sigma_X(t_1) \cdot \sigma_Y(t_2), |r_{XY}(t_1; t_2)| \leq 1$
3. $R_{X_1Y_1}(t_1; t_2) = R_{XY}(t_1; t_2),$
где $X_1(t) = X(t) + f(t), Y_1(t) = Y(t) + \varphi(t).$
4. $R_{X_1Y_1}(t_1; t_2) = f(t_1) \cdot \varphi(t_2) R_{XY}(t_1; t_2)$
если $X_1(t) = f(t) \cdot X(t), Y_1(t) = \varphi(t) \cdot Y(t).$
5. $K_X(t_1; t_2) = K_{X_1}(t_1; t_2) + K_{X_2}(t_1; t_2) + R_{X_1X_2}(t_1; t_2) + R_{X_2X_1}(t_1; t_2)$
если $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$
6. $K_X(t_1; t_2) = K_{X_1}(t_1; t_2) + K_{X_2}(t_1; t_2).$

Взаимная корреляционная функция. Пример



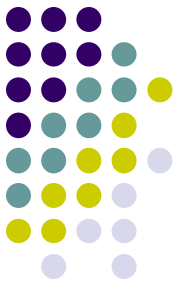
- **Пример.** Найти взаимную корреляционную функцию двух с.п. $X(t) = t \cdot V$ и $Y(t) = (t + 2)V$, где V — с.в., причем $DV = 3$.

○ Так как $m_X(t) = M(t \cdot V) = t \cdot MV = t \cdot m_V$, а $m_Y(t) = M((t+2) \cdot V) = (t+2) \cdot m_V$, то

$$\begin{aligned} R_{XY}(t_1; t_2) &= M(t_1 V - t_1 m_V)((t_2 + 2)V - (t_2 + 2)m_V) = \\ &= M(t_1(V - m_V))((t_2 + 2)(V - m_V)) = t_1 \cdot (t_2 + 2) \cdot M(V - m_V)^2 = \\ &= t_1 \cdot (t_2 + 2)DV = 3t_1 \cdot (t_2 + 2), \end{aligned}$$

т.е. $R_{XY}(t_1; t_2) = 3t_1 \cdot (t_2 + 2)$. ●

Характеристики системы случайных процессов



- Система n случайных процессов $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$
 - $m_{x_i}(t)$ – n математических ожиданий с.п. $X_i(t)$
 - $R_{x_i}(t_1, t_2)$ – n корреляционных функций с.п. $X_i(t)$
 - $R_{x_i x_j}(t_1, t_2)$ – $n(n-1)/2$ взаимных корреляционных функций связи для с.п. $X_i(t)$, с.п. $X_j(t)$

- Случайный процесс $Z(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t)$

- $m_z(t) = \sum_{i=1}^n m_{x_i}(t)$

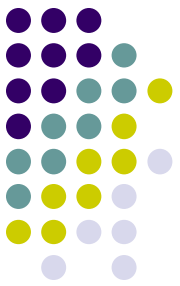
- $R_z(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n R_{x_i}(t_1, t_2) + \sum_{i < j} R_{x_i x_j}(t_1, t_2)$

- для попарно не связанных процессов $X_i(t), X_j(t)$

$$R_z(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n R_{x_i}(t_1, t_2)$$

Корреляционная матрица

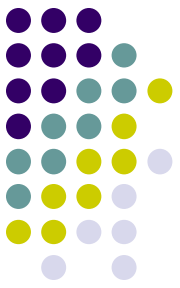
$$\|R_{ij}(t_1, t_2)\|$$



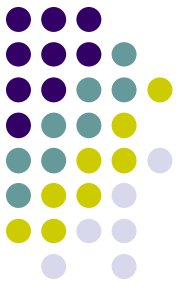
$$\|R_{ij}(t_1, t_2)\| = \begin{pmatrix} R_{11}(t_1, t_2) & R_{12}(t_1, t_2) & \dots & R_{1n}(t_1, t_2) \\ & R_{22}(t_1, t_2) & \dots & R_{2n}(t_1, t_2) \\ & & \ddots & \\ & & & R_{nn}(t_1, t_2) \end{pmatrix}$$

- $R_{ij}(t_1, t_2)$ - автокорреляционная или взаимная корреляционная функция аргументов t_1 и t_2

Характеристики системы случайных процессов. Д/з



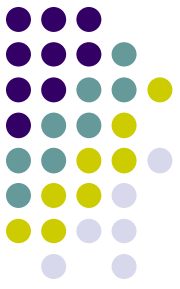
- Система с.п. $X(t)$ и с.п. $Y(t)$: $Z(t) = X(t) + Y(t)$
 - $m_z(t) = m_x(t) + m_y(t)$
 - $\overset{0}{Z}(t) = Z(t) - m_z(t) = [X(t) - m_x(t)] + [Y(t) - m_y(t)] = \overset{0}{X}(t) + \overset{0}{Y}(t)$
 $R_z(t_1, t_2) = M[\overset{0}{Z}(t_1) \overset{0}{Z}(t_2)] = M\{[\overset{0}{X}(t_1) + \overset{0}{Y}(t_1)][\overset{0}{X}(t_2) + \overset{0}{Y}(t_2)]\}$
 $= M[\overset{0}{X}(t_1) \overset{0}{X}(t_2)] + M[\overset{0}{Y}(t_1) \overset{0}{Y}(t_2)] + M[\overset{0}{X}(t_1) \overset{0}{Y}(t_2)] + M[\overset{0}{Y}(t_1) \overset{0}{X}(t_2)]$
 $= R_x(t_1, t_2) + R_y(t_1, t_2) + R_{xy}(t_1, t_2) + R_{yx}(t_1, t_2)$
- Система с.п. $X(t)$ и с.в. Y : $Z(t) = X(t) + Y$
 - $m_z(t) = m_x(t) + m_y(t) = m_x(t) + m_y, \quad m_y(t) = m_y$
 - $R_z(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) + D_y, \quad R_y(t_1, t_2) = R_y(t, t) = D_y$



Некоррелированный векторный случайный процесс

- Случайные процессы $X_i(t)$ и $X_j(t)$ называются некоррелированными, если их в.к.ф. $R_{ij}(t_1, t_2) = 0$ для любых t_1, t_2 при $i \neq j$
 - Система с.п. $Z(t) = X(t) + Y(t)$:
$$R_z(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) + R_y(t_1, t_2), \quad R_{xy}(t_1, t_2) = 0, \quad R_{yx}(t_1, t_2) = 0$$
- Векторный случайный процесс $X(t)$ называется процессом с некоррелированными составляющими, если матрица в.к.ф. является диагональной, т. е. $R_{ij}(t_1, t_2) = 0$ при $i \neq j$.

Классификация математических моделей случайных процессов



- 1) зависимость характеристик случайных процессов от времени (начала отсчета аргумента):
 - нестационарные и стационарные
 - стационарные в широком и узком смысле
- 2) соответствие между характеристиками по аргументу и характеристиками по множеству реализаций:
 - эргодические и неэргодические;
- 3) закон распределения значений случайной функции в каждом сечении:
 - гауссовские (нормальные) , пуассоновские, Пирсона и другие случайные функции;
- 4) вид корреляционных функций:
 - по максимальному сдвигу между связанными сечениями случайной функции.

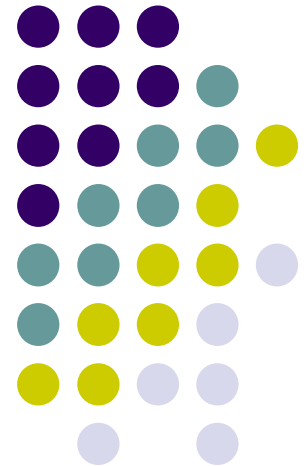
Стационарные случайные процессы

Связь основных классов
случайных процессов

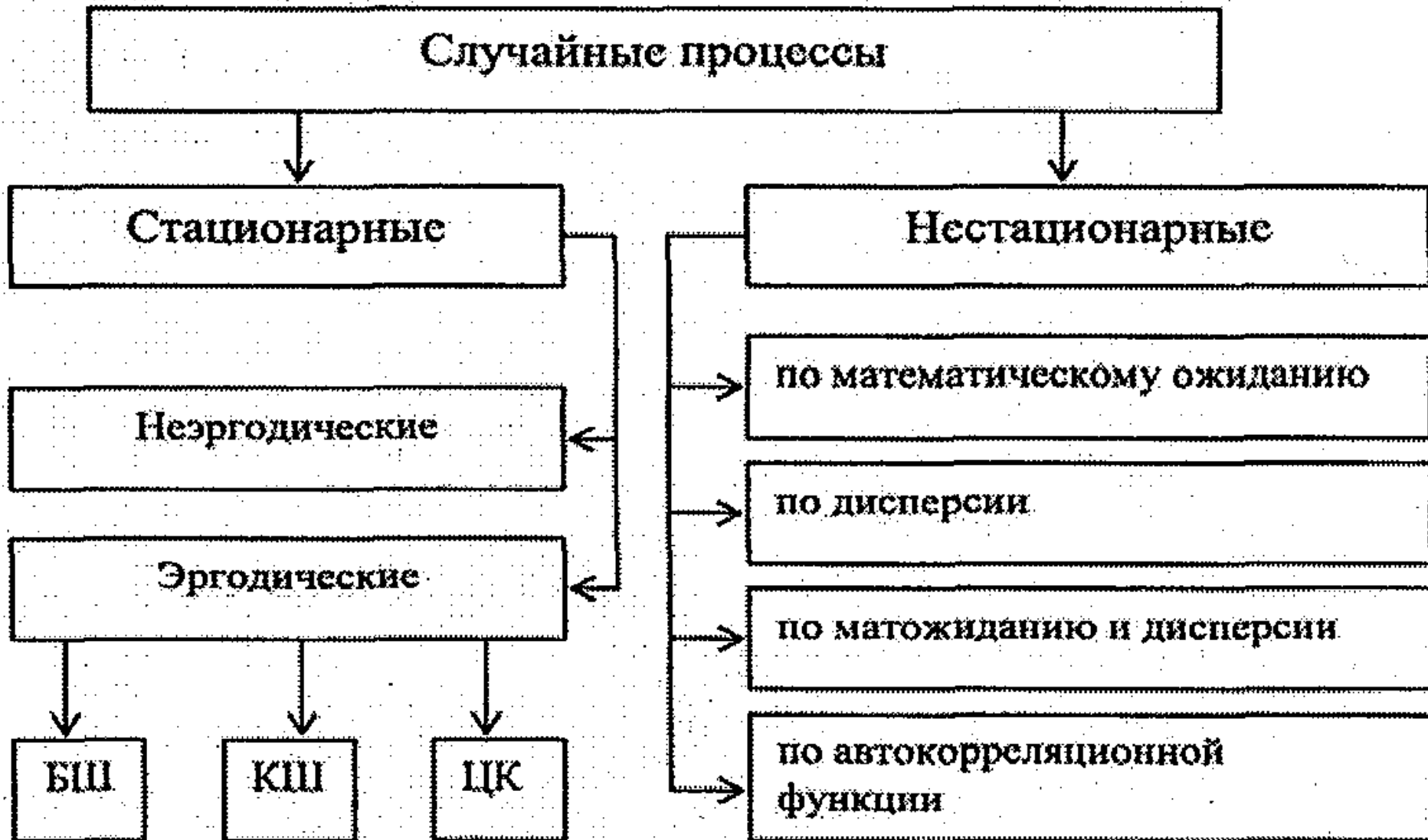
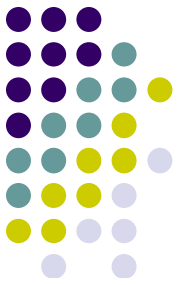
Стационарные случайные процессы
(с.с.п.) в узком и широком смысле

Эргодическое свойство
случайного процесса

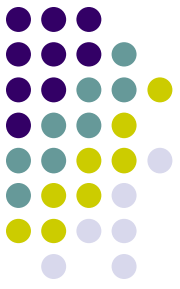
Дифференцирование и
интегрирование случайных процессов



Классификация случайных процессов

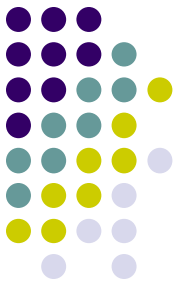


Классификация математических моделей случайных процессов

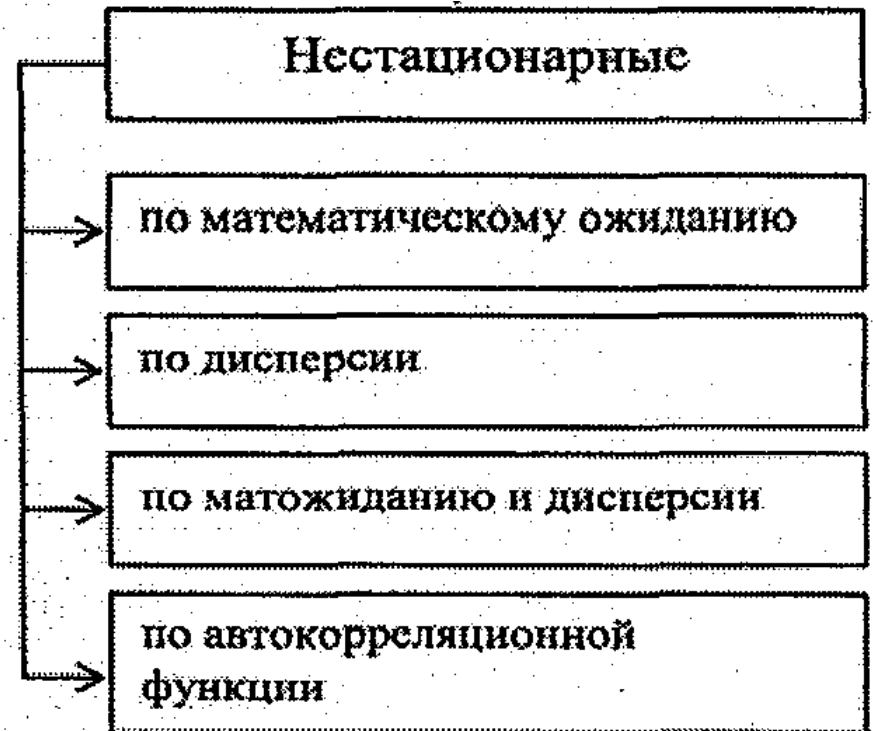
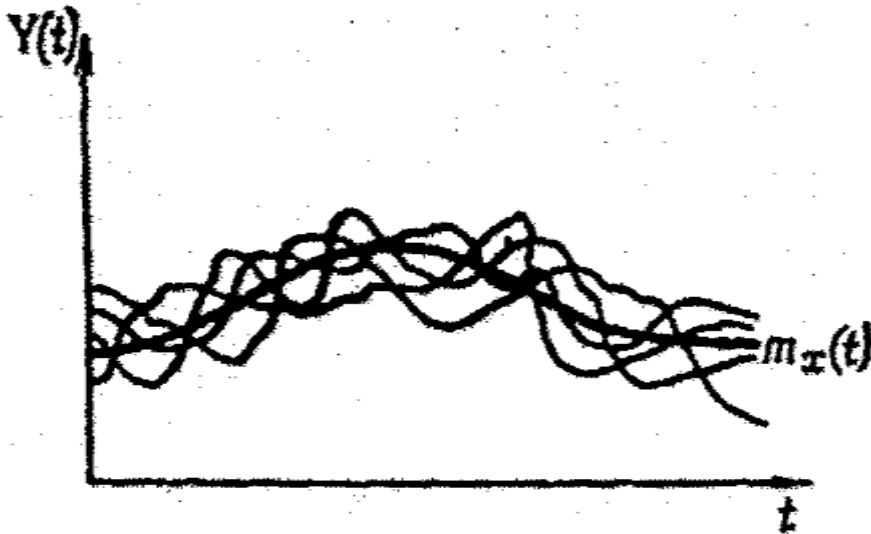


- 1) зависимость характеристик случайных процессов от времени (начала отсчета аргумента):
 - нестационарные и стационарные
 - стационарные в широком и узком смысле
- 2) соответствие между характеристиками по аргументу и характеристиками по множеству реализаций:
 - эргодические и неэргодические;
- 3) закон распределения значений случайной функции в каждом сечении:
 - гауссовские (нормальные), пуассоновские, Пирсона и другие случайные функции;
- 4) тип корреляционных функций по максимальному сдвигу между связанными сечениями случайной функции:
 - без последствия и с последствием

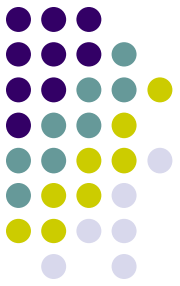
Нестационарность случайных функций



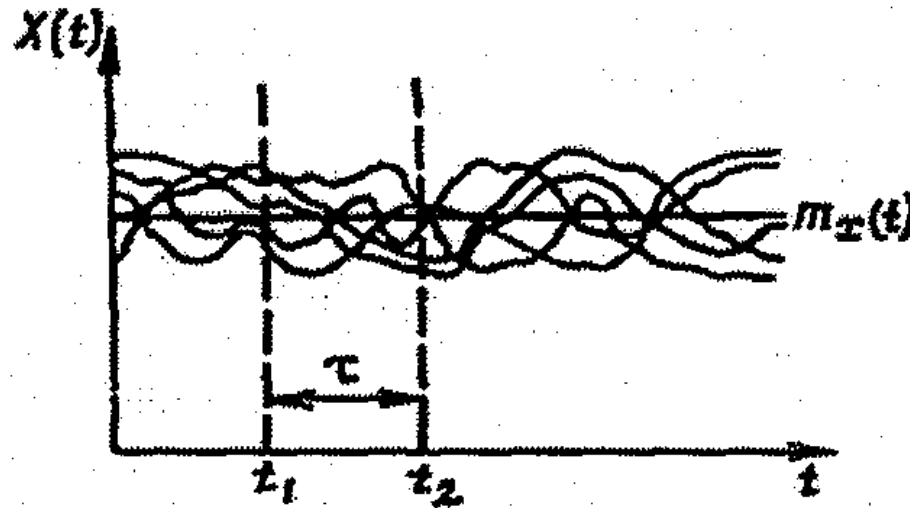
- Нестационарные случайные функции – процессы, у которых вероятностные характеристики существенно изменяют свои значения с изменением аргумента.



Понятие стационарности случайных функций

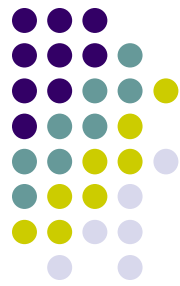


- Стационарные случайные функции не изменяют значения своих вероятностных характеристик с изменением аргумента.
- стационарные случайные процессы описывают процессы, которые протекают во времени почти однородно.



- однородные случайные поля описывают процессы, которые протекают в пространстве почти однородно.

Стационарный случайный процесс (с.с.п.) в узком смысле

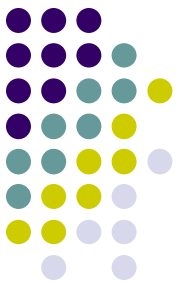


- Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в узком смысле*, если его многомерные распределения при одновременном прибавлении ко всем аргументам $t_1, t_2, \dots, t_n$ одного и того же числа t_0 остаются неизменными:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \dots \\ = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1 + t_0, t_2 + t_0, \dots, t_n + t_0)$$

- $f_1(x; t) = f_1(x; t - t_0) = f_1(x; 0) = f_1(x)$, при $t_0 = -t$
- $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_2(x_1, x_2; 0, t_2 - t_1) = \dots \\ = f_2(x_1, x_2; t_2 - t_1) = f_2(x_1, x_2; \tau)$, при $t_0 = -t_1$

Стационарный случайный процесс (с.с.п.) в широком смысле



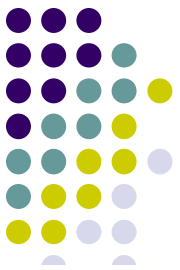
- Случайный процесс $X(t)$ называется *стационарным в широком смысле*, если его математическое ожидание $m_X(t)$ постоянно, а корреляционная функция $K_X(t_1; t_2)$ зависит только от разности аргументов

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_1(x) dx = m_X = \text{const},$$

$$K_X(t_1; t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_X) (x_2 - m_X) \times \\ \times f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = K_X(t_2 - t_1) = K_X(\tau).$$

- Для нормальных случайных процессов стационарность в широком смысле эквивалентна строгой стационарности, так как все n -мерные плотности распределения в этом случае полностью определяются математическим ожиданием и корреляционной функцией

Свойства корреляционной функции с.с.п.



1. Дисперсия с.с.п. постоянна и равна значению корреляционной функции в нуле, т.е.

$$D_X(t) = K_X(0) = \text{const}$$

- (т.е. в начале координат $D_X(t) = K_X(t; t) = K_X(t - t) = K_X(0)$).
2. Корреляционная функция с.с.п. является четной, т.е.

$$K_X(\tau) = K_X(-\tau).$$

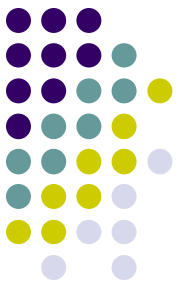
3. Модуль корреляционной функции с.с.п. не превышает ее значения при $\tau = 0$, т.е.

$$|K_X(\tau)| \leq K_X(0).$$

Нормированная корреляционная функция с.с.п. есть неслучайная функция аргумента τ :

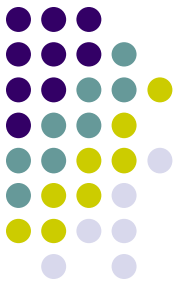
$$r_X(\tau) = \frac{K_X(\tau)}{K_X(0)} = \frac{K_X(\tau)}{\sigma_X^2}, \text{ при этом } |r_X(\tau)| \leq 1.$$

Стационарный случайный процесс. Пример*



- Случайный процесс имеет вид:
$$X(t) = \cos(t + \varphi), \quad f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{при } \varphi \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{при } \varphi \notin [0, 2\pi]. \end{cases}$$
- Решение.** Найдем математическое ожидание $X(t)$:
$$m_x(t) = M[\cos(t + \varphi)] = M[\cos t \cos \varphi - \sin t \sin \varphi] = \cos t \cdot M[\cos \varphi] - \sin t \cdot M[\sin \varphi] = 0.$$
$$M[\cos \varphi] = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \cos \varphi \, d\varphi = 0, \quad M[\sin \varphi] = (1/2\pi) \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi = 0$$
- $\dot{X}(t) = X(t) - m_x(t) = X(t) - \cos(t + \varphi),$
$$K_x = M[\dot{X}(t_1) \dot{X}(t_2)] = M[\cos(t_1 + \varphi) \cos(t_2 + \varphi)] = (1/2) \cos(t_2 - t_1) + (1/2) M[\cos(t_2 + t_1 + 2\varphi)] = (1/2) \cos(t_2 - t_1).$$

Стационарный случайный процесс. Д/з*



- Найти м.о. случайного процесса вида:

$$X(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{при } \varphi \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{при } \varphi \notin [0, 2\pi]. \end{cases}$$

- $$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x; t) dx = \int_0^{2\pi} A \sin(\omega t + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi =$$
$$= -\frac{A}{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0.$$

Стационарная система случайных процессов



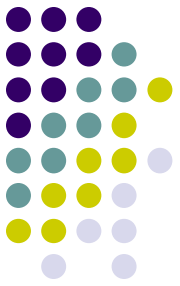
- Система случайных процессов $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ называется стационарной системой в широком смысле, если каждый из случайных процессов $X_i(t)$ является стационарным и, кроме того, корреляционные функции связи $R_{x_i x_j}(t_1, t_2)$ являются функциями только одного аргумента $t_0 = t_2 - t_1$:

$$R_{x_i x_j}(t_1, t_2) = R_{x_i x_j}(t_0) .$$

- *Стационарно связанными* называют две случайные функции $X(t)$ и $Y(t)$, взаимная корреляционная функция которых зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$: $R_{xy} = r(\tau)$.

Не всякие две стационарные функции стационарно связаны; с другой стороны, две нестационарные функции могут быть стационарно связанными.

Приведение с.п. к стационарному виду



- **вычисление аномалий случайного процесса (центрирование):**

$$\Delta X(t) = X(t) - M^*X(t)$$

- *$M^*X(t)$ - среднее арифметическое выборочного случайного процесса*

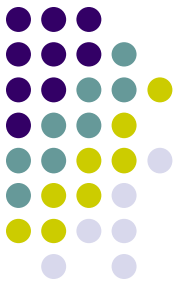
- **использовать первые разности для устранения линейного тренда (при $MX(t) \neq \text{const}$):**

$$\Delta'_x(t) = X(t_{i+l}) - X(t_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

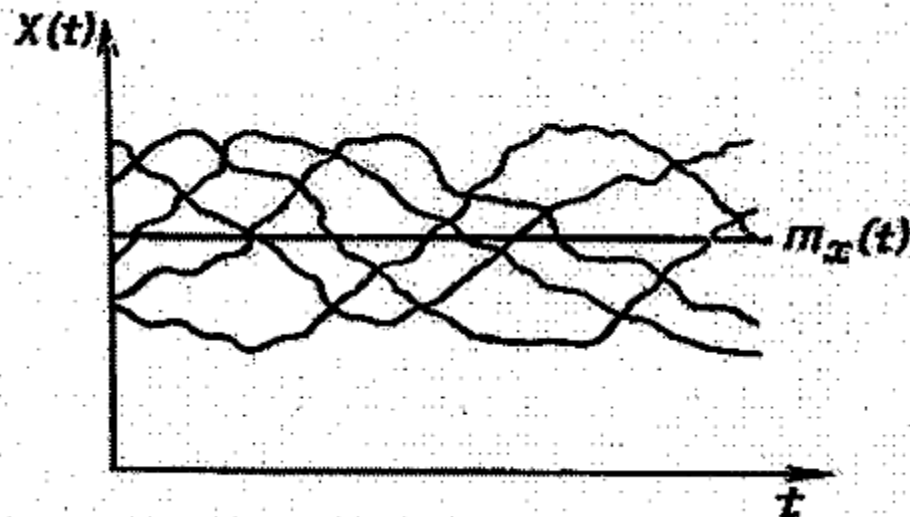
- **использовать вторые разности для устранения нелинейного тренда:**

$$\Delta''_x(t) = \Delta'_x(t_{i+l}) - \Delta'_x(t_i) .$$

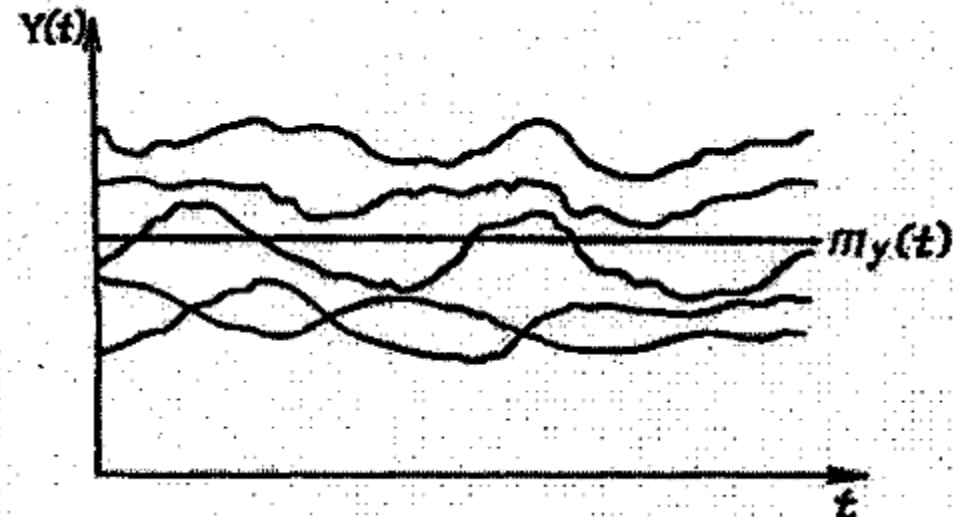
Понятие эргодического стационарного процесса



- Стационарный процесс является эргодическим, если одна реализация достаточно большой длины содержит всю информацию об основных характеристиках случайного процесса и может заменить множество реализаций той же продолжительности.



эргодический случайный процесс $X(t)$



неэргодический случайный процесс $Y(t)$

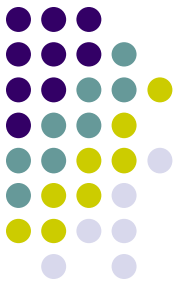
Эргодическое свойство случайного процесса



- Стационарную случайную функцию $X(t)$ называют *эргодической*, если ее характеристики, найденные усреднением множества реализаций, совпадают с соответствующими характеристиками, полученными усреднением по времени одной реализации $x(t)$, которая наблюдалась на интервале $(0, T)$ достаточно большой длительности.
- Достаточное условие эргодичности стационарной случайной функции $X(t)$ относительно математического ожидания и относительно корреляционной функции состоит в том, что корреляционная функция при $\tau \rightarrow \infty$ стремится к нулю:

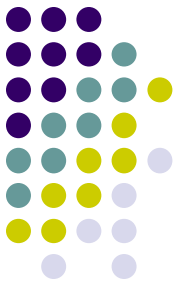
$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} K_X(\tau) = 0.$$

Типы эргодического стационарного случайного процесса

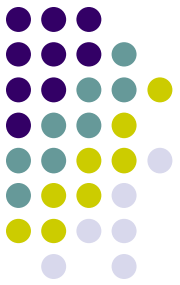


- **Белый шум** – дискретный стационарный процесс, случайные значения x_i , которого взаимно независимы и одинаково распределены с $MX(t)=0$ $DX(t)=const$.
- **Красный шум** – дискретный стационарный процесс, описывающийся марковской цепью первого порядка с корреляцией только между смежными (соседними) значениями временного ряда.
- **Циклическое колебание** – параметры колебания (период, амплитуда, фаза) испытывают нерегулярные изменения во времени в пределах некоторого диапазона: годовой ход природных процессов.

Связь основных классов стационарных процессов



Характеристики эргодического с.с.п.



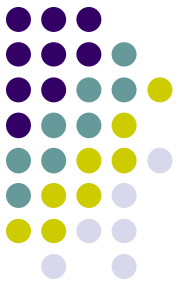
- Математическое ожидание эргодического с.с.п:

$$m_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$$

- Корреляционная функция эргодического с.с.п:

$$K_X(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} [x(t) - m_x] [x(t + \tau) - m_x] dt$$

Оценка характеристик эргодического с.с.п.



- Оценка математического ожидания эргодического с.с.п:

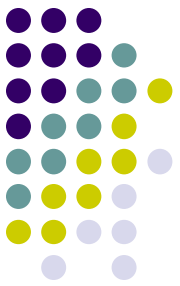
$$\begin{aligned} m_x^* &= \frac{1}{T} [x(t_1) \Delta t + x(t_2) \Delta t + \dots + x(t_n) \Delta t] = \\ &= \frac{\Delta t}{T} \sum_{i=1}^n x(t_i) = \left[\sum_{i=1}^n x(t_i) \right] / n. \end{aligned}$$

- Оценка корреляционной функции эргодического с.с.п:

$$k_x^* \left(l \frac{T}{n} \right) = \frac{1}{n-l} \sum_{i=1}^{n-l} x(t_i) x(t_{i+l}) - [m_x^*]^2,$$

где $l = 1, 2, \dots, n-1$.

Эргодический случайный процесс. Пример*



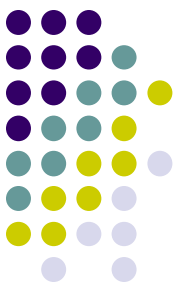
- Найти м.о. и к.ф. случайного процесса вида:

$$X(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{при } \varphi \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{при } \varphi \notin [0, 2\pi]. \end{cases}$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{m}_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{A}{T\omega} [\cos \varphi - \cos(\omega T + \varphi)] = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \hat{k}_x^*(\tau) &= \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t+\tau) X(t) dt = \frac{A^2}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \sin[\omega(t+\tau) + \varphi] \sin(\omega t + \varphi) dt = \\ &= \frac{A^2}{T-\tau} \left[\cos \omega \tau \int_0^{T-\tau} \sin^2(\omega t + \varphi) dt + \sin \omega \tau \int_0^{T-\tau} \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) dt \right] = \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau + \frac{A^2}{T-\tau} \left\{ \frac{1}{4} \sin 2\varphi \cos \omega \tau - \frac{1}{4} \sin 2[\omega(T-\tau) + \varphi] \cos \omega \tau + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \cos \omega \tau + \frac{1}{2} \sin \omega \tau [\sin^2(\omega(T-\tau) + \varphi) - \sin^2 \varphi] \right\} = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau = K_X(\tau). \end{aligned}$$

Линейные и нелинейные преобразования (операторы) случайных процессов

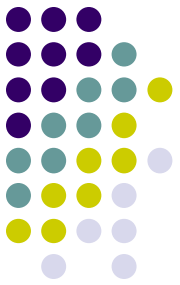


- $Y(t) = A\{X(t)\}$, где A - преобразование (оператор)
 - с. п. $X(t)$: $x(t) = \sin 2t$, оператор $A = \int_0^t x(\tau) d\tau$, то $y(t) = A\{\sin 2t\} = \int_0^t \sin 2V dV = -\frac{1}{2} \cos 2V \Big|_0^t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)$.
- линейные однородные L_0
 1. Оператор суммы функций (с. п.) равен сумме операторов от каждой функции, т. е. $L_0\{X_1(t) + X_2(t)\} = L_0\{X_1(t)\} + L_0\{X_2(t)\}$.
 2. Постоянную можно выносить за оператор $L_0\{c \cdot X(t)\} = cL_0\{X(t)\}$.
- линейные неоднородные L

Преобразование L_H называется *линейным неоднородным*, если оно состоит из линейного однородного преобразования L_0 с прибавлением заданной неслучайной функции $f(t)$, т. е. $L_H\{X(t)\} = L_0\{X(t)\} + f(t)$.
- нелинейные

Все преобразования, не являющиеся линейными, называются *нелинейными*.

Основные виды преобразований (операторов) случайных процессов



- линейные однородные

- оператор сложения

- $Z(t) = X(t) + Y(t)$

- оператор умножения

- $Y(t) = f(t) \cdot X(t)$

- оператор дифференцирования

- $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$

- оператор интегрирования

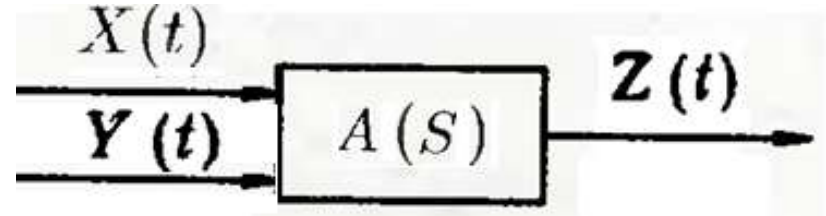
$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$$

- линейные неоднородные

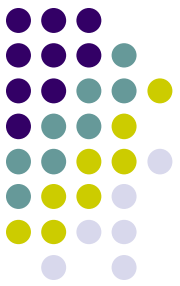
- $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt} + f(t), \quad Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau + f(t), \quad Y(t) = f(t) \cdot X(t) + \varphi(t)$

- нелинейные

$$Y(t) = X^2(t), \quad Y(t) = \frac{dX(t)}{dt} + \cos X(t).$$



Дифференцирование случайных процессов



Пусть с. п. $X(t)$, характеристики которого $m_X(t)$ и $K_X(t_1; t_2)$ заданы, подвергается дифференцированию $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$. Требуется найти характеристики $m_Y(t)$ и $K_Y(t_1; t_2)$ «выходного сигнала» — с. п. $Y(t)$.

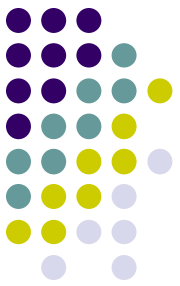
- математическое ожидание производной с. п. равно производной от ее м. о.: $m_{\dot{X}}(t) = m'_X(t)$ или $M(X'(t)) = (MX(t))'$

$$MY(t) = m_{\dot{X}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_X(t + \Delta t) - m_X(t)}{\Delta t}, \text{ т. е. } m_Y(t) = \frac{dm_X(t)}{dt}.$$

- корреляционная функция производной от с. п. $X(t)$ равна второй смешанной частной производной от корреляционной функции с. п.

$$K_Y(t_1; t_2) = \frac{\partial K_X(t_1; t_2)}{\partial t_1 \cdot \partial t_2}.$$

Дифференцирование случайных процессов. Пример*



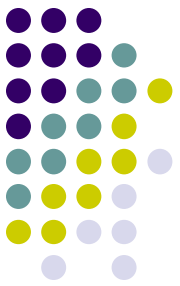
- Случайный процесс определяется формулой $Y(t) = X \cdot e^{-t}$, $t > 0$, $X \sim N(3; 1)$, найти м. о. и корреляционную функцию с. п. $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

○ м. о. есть $M(Y(t)) = M(X'(t)) = \left(M(X(t))\right)' = (3e^{-t})' = -3e^{-t}$.

Находим корреляционную функцию с. п. $Y(t)$:

$$\begin{aligned} K_Y(t_1; t_2) &= \frac{\partial K_X(t_1; t_2)}{\partial t_1 \cdot \partial t_2} = \frac{\partial e^{-t_1-t_2}}{\partial t_1 \cdot \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2} (e^{-t_1-t_2})'_{t_1} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} (-e^{-t_1-t_2}) = (-e^{-t_1-t_2})'_{t_2} = e^{-t_1-t_2} = e^{-(t_1+t_2)}. \end{aligned}$$

Интегрирование случайных процессов



Пусть известны характеристики $m_X(t)$ и $K_X(t_1; t_2)$ с. п. $X(t)$, а линейное преобразование с. п. состоит в его интегрировании: $Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$.

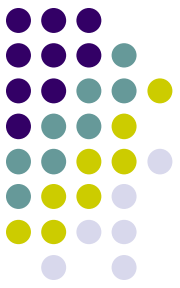
- математическое ожидание интеграла от с. п. равно интегралу от м. о. этого с. п., т. е. $m_Y(t) = \int_0^t m_X(\tau) d\tau$:

$$M\left(\int_0^t X(\tau) d\tau\right) = \int_0^t M X(\tau) d\tau.$$

- Корреляционная функция интеграла от с. п. равна двойному интегралу от корреляционной функции с. п., т. е.

$$K_Y(t_1; t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} K_X(\tau_1; \tau_2) d\tau_1 d\tau_2.$$

Интегрирование случайных процессов. Пример*



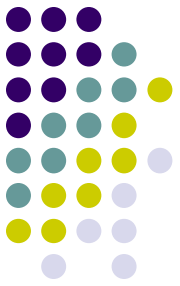
- Зная м.о. $m_X(t) = 3 \cdot e^{-t}$ и корреляционную функцию $K_X(t_1; t_2) = e^{-t_1 - t_2}$, найти м.о. и корреляционную функцию с.п. $Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau$.

Искомое м.о. есть $m_Y(t) = \int_0^t 3 \cdot e^{-\tau} d\tau = -3 \cdot e^{-\tau} \Big|_0^t = 3 - 3e^{-t}$.

Далее: $K_Y(t_1; t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} e^{-\tau_1 - \tau_2} d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1} e^{-\tau_1} d\tau_1 \int_0^{t_2} e^{-\tau_2} d\tau_2 =$

$$= \int_0^{t_1} e^{-\tau_1} \left(-e^{-\tau_2} \Big|_0^{t_2} \right) d\tau_1 = (1 - e^{-t_2}) \cdot (-e^{-\tau_1}) \Big|_0^{t_1} = (1 - e^{-t_2})(1 - e^{-t_1}).$$

Модели одномерных стационарных процессов



- линейный циклический процесс, A - амплитуда, ω - основная угловая частота (рад/ед.времени) :

$$X(t) = A \cos \omega t + \xi(t)$$

- процесс скользящего осреднения, α - весовой коэффициент связи прошлых значений процесса с текущими значениями:

$$X(t) = \xi(t) + \alpha \xi(t-1)$$

- простой авторегрессионный процесс (марковский процесс 1-го порядка, простая инерционность)

$$X(t) + \beta X(t-1) = \xi(t)$$

- временной процесс (ряд), $p(t)$ и $q(t)$ - полиномы по t

$$X(t) = p(t) + q(t) \xi(t)$$

Спектральное разложение стационарного случайного процесса

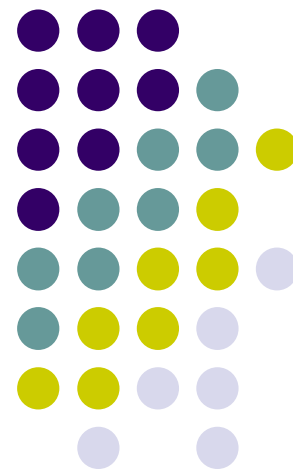
Гармонические колебания
периодической функции

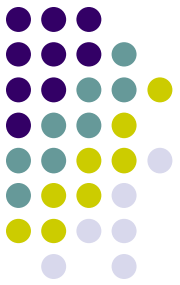
Стационарность гармонического
случайного процесса.

Спектральное разложение с.с.п.

Спектральная плотность с.с.п.

Теорема Винера-Хинчин





Гармонический анализ

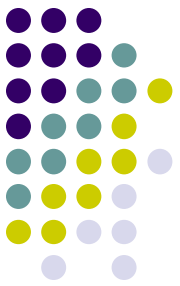
- **Ряд Фурье** – разложение произвольной (периодической непрерывной) функции в бесконечную линейную комбинацию гармонических (синусоидальных и косинусных) слагаемых (тригонометрический ряд) для задач дифференцирования, интегрирования, сдвига функции по аргументу и свёртки функций

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

- **Преобразование Фурье** – операция, сопоставляющая функции в виде временного ряда вещественной переменной комплексную функцию переменной круговой частоты.

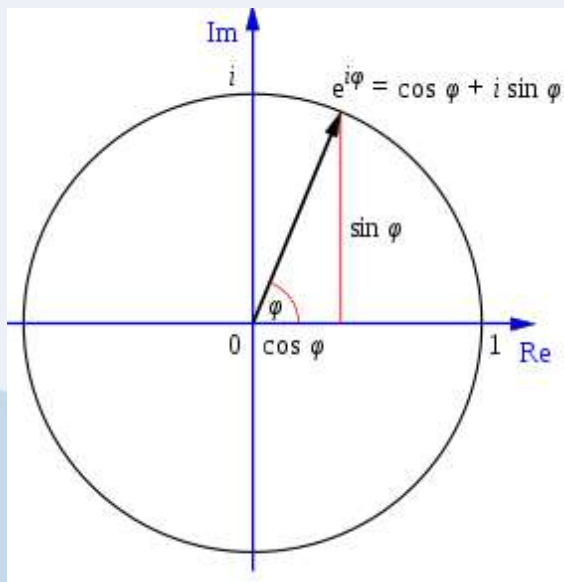
$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx$$

- **круговая частота** – число колебаний с периодом T за 2π единиц времени: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

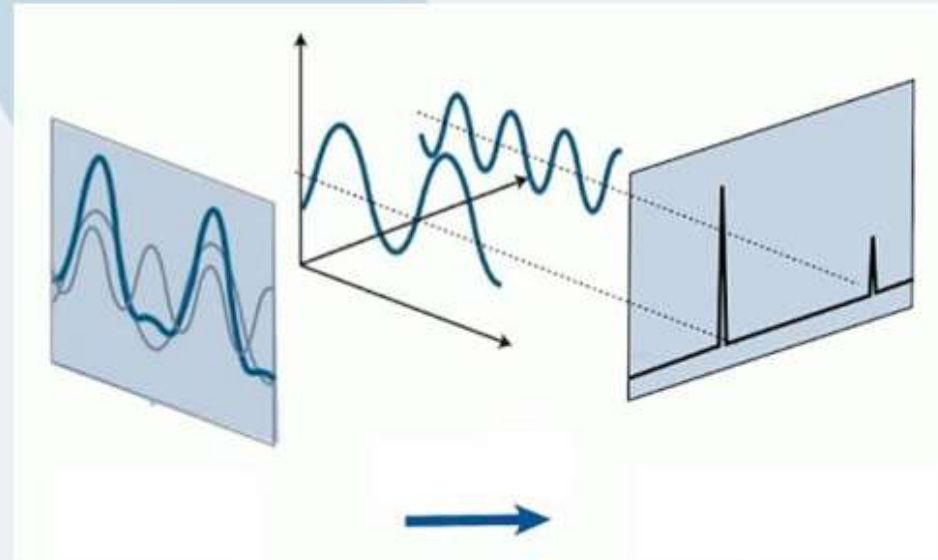


Преобразование Фурье

Преобразование Фурье



$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\omega} dx.$$

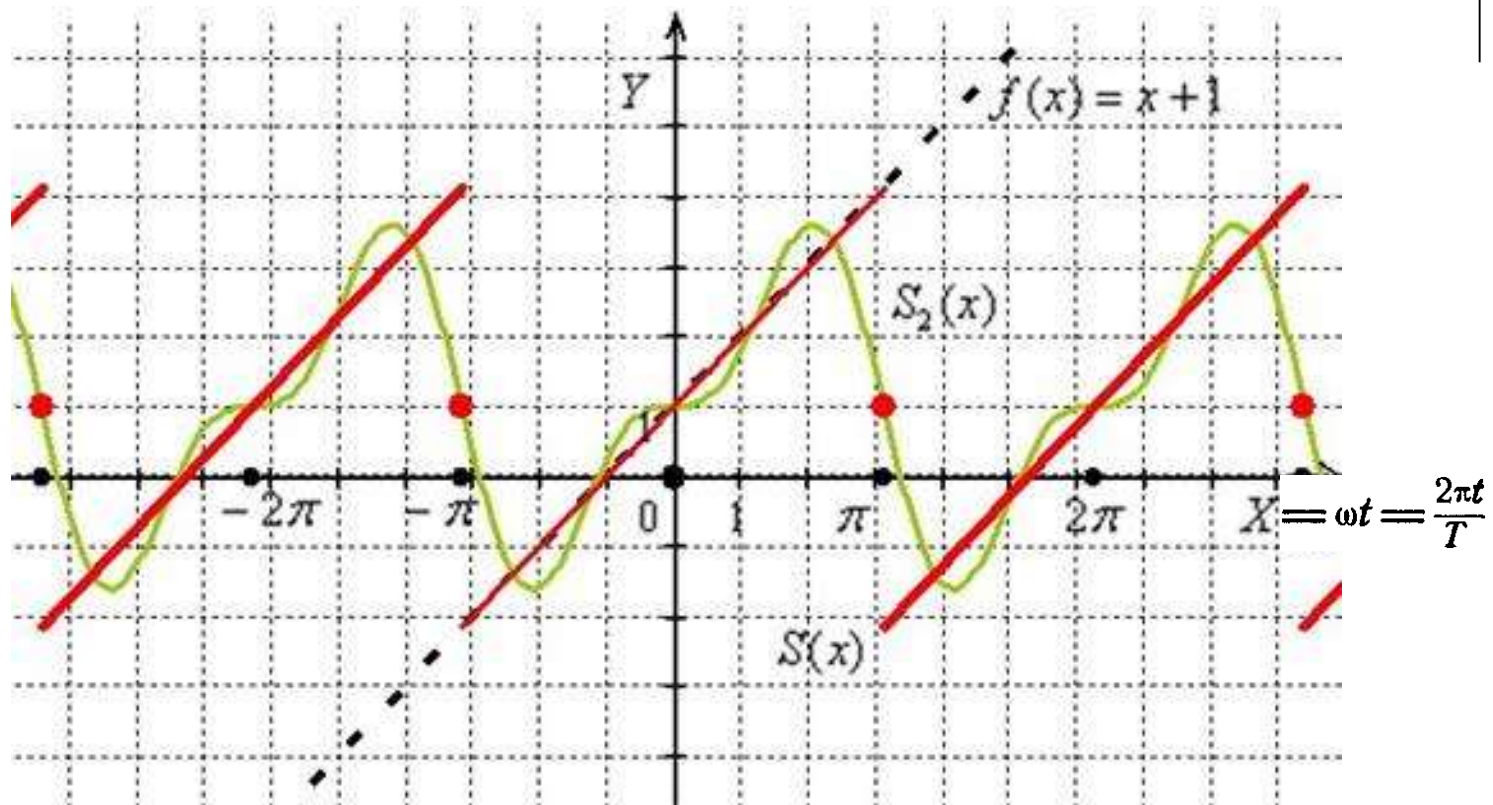
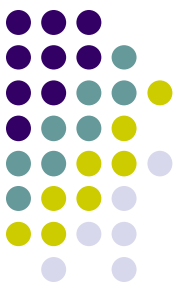


$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z$$

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Гармонические колебания периодической функции

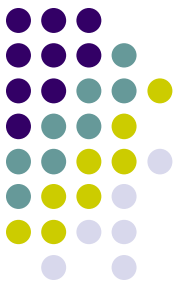


$$f(-\pi) = -\pi + 1$$

$$S_2(x) = 1 + 2\sin x - \sin 2x$$

$$S(x) = 1 - 2 \cdot \left(-\sin x + \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} - \dots \right)$$

Стационарность гармонического случайного процесса



- Элементарный гармонический случайный процесс:

$$X(t) = U \cos \omega t + V \sin \omega t$$

- U и V — некоррелированные случайные величины

$$K_{UV} = M(\overset{\circ}{U} \cdot \overset{\circ}{V}) = 0$$

- случайные величины с м.о., равными нулю $m_U = m_V = 0$
и одинаковыми дисперсиями $D_U = D_V = D$

- Находим $X(t)$ — с.с.п.:

- $M(X(t)) = m_X(t) = MU \cdot \cos \omega t + MV \cdot \sin \omega t = 0$

- $X(t)$ — центрированный случайный процесс $X(t) = \overset{\circ}{X}(t)$

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_X(t)$$

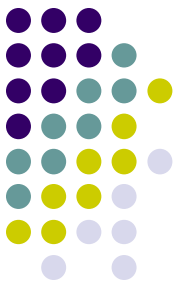
$$\begin{aligned} K_X(t_1; t_2) &= M(\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)) = M(X(t_1) \cdot X(t_2)) = \\ &= M(U \cdot \cos \omega t_1 + V \cdot \sin \omega t_1) \cdot (U \cdot \cos \omega t_2 + V \cdot \sin \omega t_2) = \\ &= M(U^2) \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 + M(V^2) \sin \omega t_1 \cdot \sin \omega t_2 + 0 = \\ &= D(U) \cos \omega t_1 \cdot \cos \omega t_2 + D(V) \sin \omega t_1 \cdot \sin \omega t_2 = D \cdot \cos \omega(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

Стационарность суммы гармонических с.п.



- Сумма гармонических с.п.: $X(t) = \sum_{k=0}^n [U_k \cdot \cos \omega_k t + V_k \cdot \sin \omega_k t]$
 - где $MU_k = MV_k = 0$, $DU_k = DV_k = D_k$, $M(U_k \cdot V_k) = 0$,
 $M(V_k \cdot V_l) = M(U_k \cdot U_l) = 0$ при $k \neq l$, ω_k — константы.
- $M(X(t)) = M\left(\sum_{k=0}^n U_k \cdot \cos \omega_k t + V_k \cdot \sin \omega_k t\right) = 0$
- $K_x(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n D_i \cos \omega_i (t_2 - t_1) = \sum_{i=1}^n D_i \cos \omega_i \tau$, где $\tau = t_2 - t_1$
 - $K_X(t_1; t_2) = K_{X_1}(t_1; t_2) + K_{X_2}(t_1; t_2) + R_{X_1 X_2}(t_1; t_2) + R_{X_2 X_1}(t_1; t_2)$
 - $R_{x_1 x_2}(t_1, t_2) = M[\dot{X}_1(t_1) \dot{X}_2(t_2)] = M[X_1(t_1) X_2(t_2)] =$
 $= M[(U_1 \cos \omega_1 t_1 + V_1 \sin \omega_1 t_1)(U_2 \cos \omega_2 t_2 + V_2 \sin \omega_2 t_2)] = 0$
 - $K_X(t_1; t_2) = D \cdot \cos \omega(t_1 - t_2)$

Спектральное разложение стационарного с.п.



- Спектральным разложением стационарного случайного процесса $X(t)$ называется его представление в виде суммы

где $X(t) = \sum_{i=1}^n [U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t] = \sum_{i=1}^n \sqrt{U_i^2 + V_i^2} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ от со стороны аргумента и со стороны фазы $X_i(t) = \sqrt{U_i^2 + V_i^2} \sin(\omega_i t + \varphi_i)$, где $\varphi_i = \arctg(U_i/V_i)$

$$X_i(t) = V_i \left(\frac{U_i}{V_i} \cos \omega_i t + \sin \omega_i t \right), \quad U_i/V_i = \tg \varphi_i$$

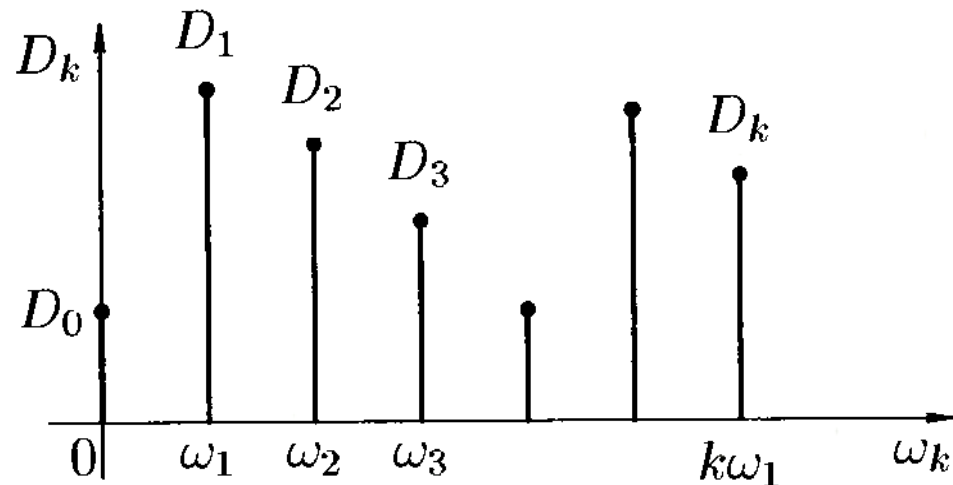
$$\sqrt{U_i^2 + V_i^2} \sin(\omega_i t + \arctg(U_i/V_i))$$

$$\omega_i$$

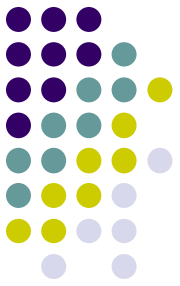
Дискретный спектр стационарного с.п.



- Количество частот ω_i ко $X(t) = \sum_{i=1}^n X_i(t) = \sum_{i=1}^n [U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t]$
- Дисперсия одной гармонии $D[X_i(t)] = D_i$
 - $D(U_i) = D(V_i) = D_i$; $D[X_i(t)] = D[U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t] = D[U_i \cos \omega_i t] + D[V_i \sin \omega_i t] = \cos^2 \omega_i t D(U_i) + \sin^2 \omega_i t D(V_i) = (\cos^2 \omega_i t + \sin^2 \omega_i t) D_i = D_i$.
- Совокупность дисперсий D_k называют **дискретным (линейчатым) спектром** с.с.п., а ординаты D_k — **спектральными линиями** частот ω_k



Спектральное разложение к.ф. с.с.п.



- Спектральным разложением корреляционной функции с.п. $X(t)$

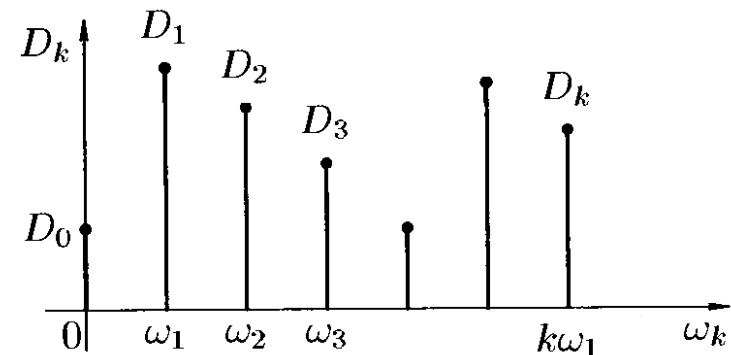
называется разложение корреляционной

ф $K_X(t_1, t_2) = \sum_{i=1}^n D_i \cos \omega_i (t_2 - t_1) = \sum_{i=1}^n D_i \cos \omega_i \tau$, [где $\tau = t_2 - t_1$, ряд

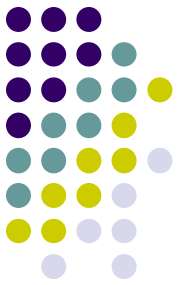
Фурье по косинусам:

$$D_X = [K_X(t; t)] = K_X(0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos(\omega_k \cdot 0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k$$

- Дисперсия с.с.п. $X(t)$ равна сумме гармоник его спектрального разл
- Совокупность дисперсий D_k называют спектром с.с.п., а ординаты D_k – спектральными линиями частот ω_k



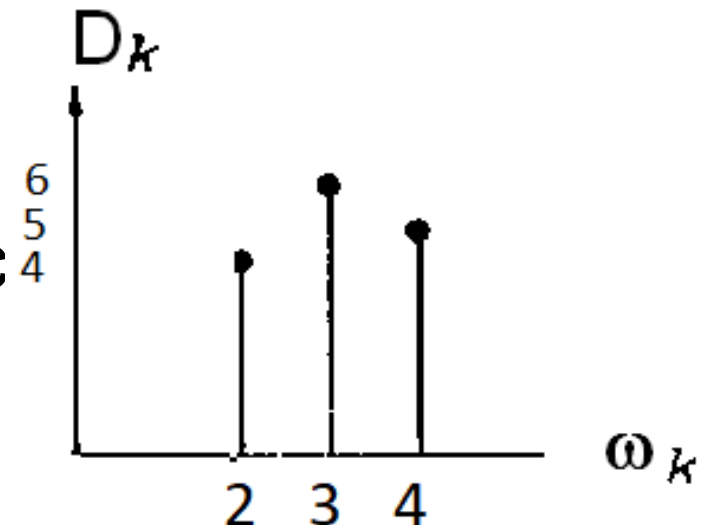
Дискретный спектр стационарного с.п. Пример



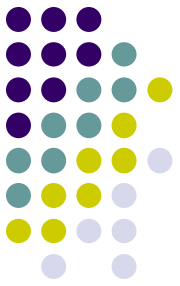
- Построить дискретный спектр стационарной
случ. $X(t) = [U_1 \cos 2t + V_1 \sin 2t] + [U_2 \cos 3t + V_2 \sin 3t] + [U_3 \cos 4t + V_3 \sin 4t],$

$U_1, U_2, U_3; V_1, V_2, V_3$ не коррелированы,
их математические ожидания равны нулю и заданы дисперсии:
 $D(U_1) = D(V_1) = 5, D(U_2) = D(V_2) = 6, D(U_3) = D(V_3) = 4.$

- Решение. График искомого с
на горизонтальной оси –
частоты $\omega_1 = 2, \omega_2 = 3, \omega_3 = 4,$
на вертикальной оси –
ординаты $D_1 = 4, D_2 = 6, D_3 = 5.$



Бесконечный дискретный спектр стационарного с.п.



$\Delta\omega = \omega_{i+1} - \omega_i = \pi/T$ ($i = 1, 2, \dots$) — число равноотстоящих

$$X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} [U_i \cos \omega_i t + V_i \sin \omega_i t], \quad \omega_1 = \frac{\pi}{T}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi}{T}, \quad \dots, \quad \omega_i = \frac{\pi i}{T}, \quad \dots$$

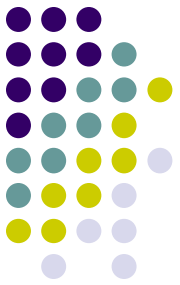
$$K_x(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos \omega_i \tau = \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cos \frac{\pi i}{T} \tau, \quad \omega_i = \pi i/T, \quad n = \infty$$

- Корреляционная функция с.с.п.:

- Дисперсия $K_x(\tau=0) = D_x = \sum_{i=1}^{\infty} D_i$ — сумма дисперсий слагаемых гармоник (сумма существует,

$$D_i = \frac{1}{T} \int_{-T}^T K_x(\tau) \cos \frac{\pi i}{T} \tau d\tau, \quad \text{к.ф. } K_x(\tau) \text{ — четная, с периодом } 2T$$

Непрерывный спектр стационарного с.п.



- Корреляционная функция с.с.п.:

$$K_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{D_k}{\Delta \omega} (\cos k \Delta \omega \tau) \Delta \omega$$

$$D_k / \Delta \omega = D_k / \omega_1 = S_x(\omega_k)$$

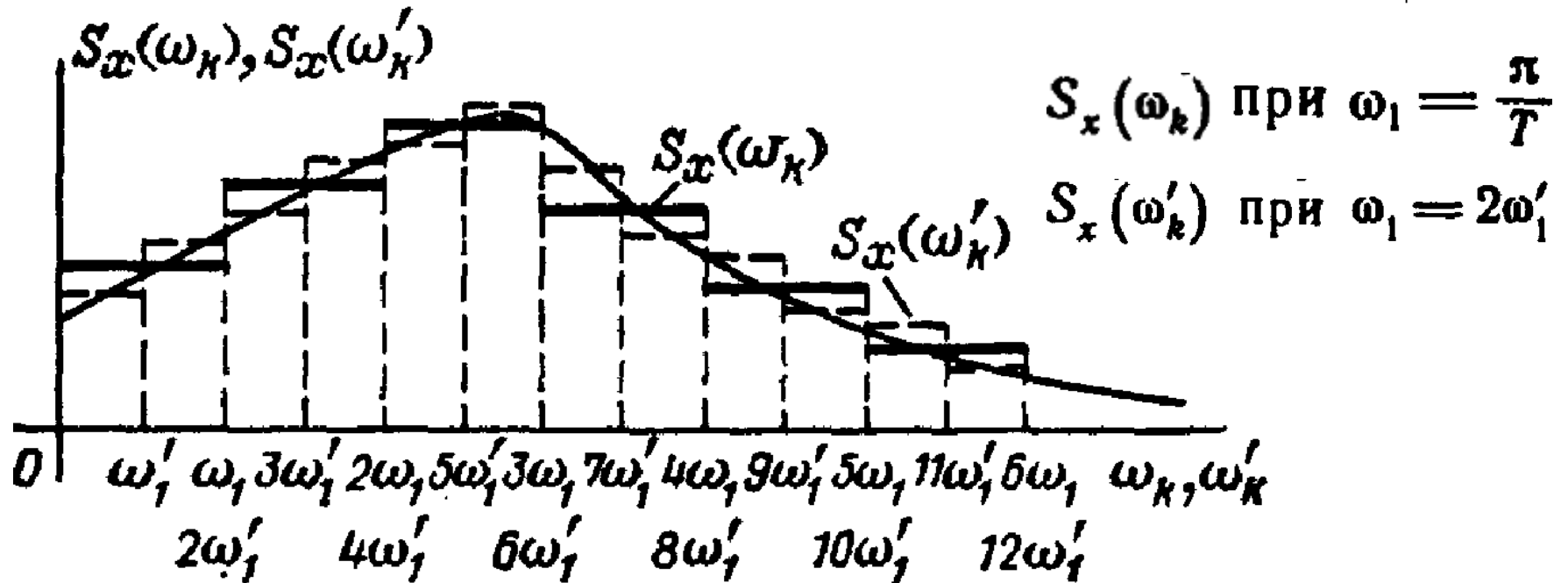
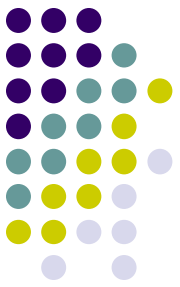
$$S_x(\omega_k) \Delta \omega = D_k$$

- Для непрерывного спектра $T \rightarrow \infty$, тогда $\Delta \omega = \pi/T \rightarrow 0$:
плотность дисперсии $\frac{D_k}{\Delta \omega} \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{\Delta \omega \rightarrow 0} S_X(\omega_k)$

Спектральной плотностью $S_X(\omega)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ называется предел отношения дисперсии, приходящийся на интервал частот $\Delta \omega$ к длине этого интервала, когда последняя стремится к нулю:

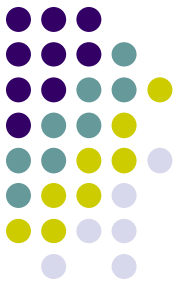
$$S_X(\omega) = \lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \frac{D_k}{\Delta \omega},$$

Графическое представление плотности распределения



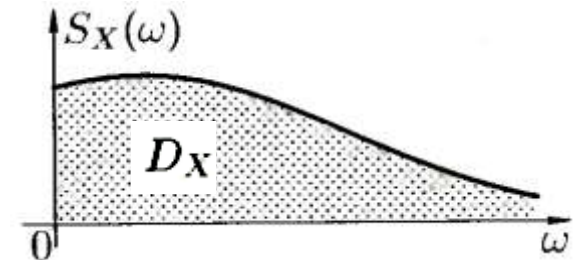
$$K_x(\tau) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\Delta\omega} (\cos k\Delta\omega\tau) \Delta\omega = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega\tau d\omega$$

Свойства спектральной плотности



1. Спектральная плотность — неотрицательная функция $S_X(\omega) \geq 0$.

- $S_X(\omega) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{D_k}{\Delta\omega}$, где $D_k \geq 0$, $\Delta\omega > 0$



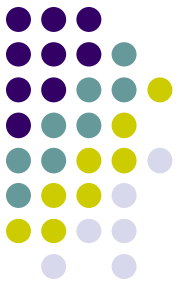
2. Интеграл от спектральной плотности в пределах от 0 до ∞ равен дисперсии с. с. п., т. е.

$$\int_0^{\infty} S_X(\omega) d\omega = D_X.$$

$$D_X = K_X(0) = \int_0^{\infty} S_X(\omega) \cos(\omega \cdot 0) \cdot d\omega = \int_0^{\infty} S_X(\omega) d\omega$$



Нормированная спектральная плотность



- Нормированной спектральной плотностью стационарного с.п. называется отношение спектральной плотности к дисперсии случайного процесса:

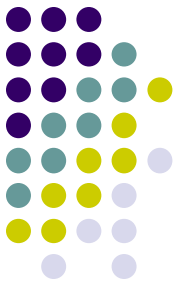
$$s_x(\omega) = S_x(\omega) / D_x$$

- Нормированная спектральная плотность СВХ связана с автокорреляционной функцией с помощью преобразования Фурье:

$$r_x(\tau) = \int_0^{\infty} s_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega,$$

$$s_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} r_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

связи корреляционной функции и спектральной плотности с.с.п.



- **Теорема Винера-Хинчина.** Корреляционная функция и спектральная плотность стационарного случайного процесса

СВЯЗ КОСИ $K_x(\tau) = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega$, **И** $S_x(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau$ **МИ**

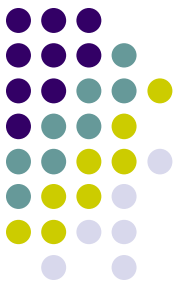
$$K_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos \omega_k \tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\Delta \omega} (\cos k \Delta \omega \tau) \Delta \omega, \quad D_k / \Delta \omega = S_x(\omega_k)$$

$$K_x(\tau) = \lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D_k}{\Delta \omega} (\cos k \Delta \omega \tau) \Delta \omega = \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega$$

$$S_x(\omega) = \lim_{\Delta \omega \rightarrow 0} \frac{D_k}{\Delta \omega} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{D_k}{\pi/T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi/T} \cdot \frac{1}{T} \int_{-T}^T K_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \cdot 2 \int_0^T K_x(\tau) \cos \omega_k \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau$$

Формулы Винера-Хинчина в комплексной форме



Корреляционная функция с.с.п.

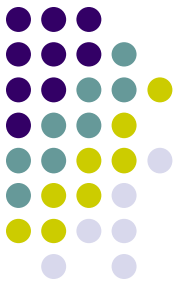
$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z, \quad \text{где } i = \sqrt{-1}$$

$$\begin{aligned} K_x(\tau) &= \int_0^\infty S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega = \int_0^\infty S_x(\omega) (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}) d\omega / 2 = \int_0^\infty \frac{S_x(\omega)}{2} e^{i\omega\tau} d\omega - \\ &- \int_0^\infty \frac{S_x(-\omega)}{2} e^{i(-\omega)\tau} d(-\omega) = \int_0^\infty S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega + \int_{-\infty}^0 S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^\infty S_x^*(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \end{aligned}$$

С

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_x(\tau) \frac{e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}}{2} d\tau = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\infty K_x(-\tau) e^{i\omega\tau} d(-\tau) (-1) + \int_0^\infty K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\infty}^0 K_x(\tau) e^{i\omega\tau} d(-\tau) + \int_0^\infty K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ S_x^*(\omega) &= S_x(\omega)/2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty K_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (-\infty < \omega < \infty) \end{aligned}$$

Спектральная плотность с.с.п. в комплексной форме



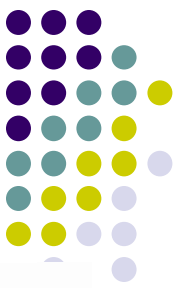
- Спектральной плотностью стационарного с.п. в комплексной форме называется функция

$$S_X^*(\omega) = \frac{1}{2} \cdot S_X(|\omega|) = \begin{cases} S_x^*(\omega) = S_x(\omega)/2 & \text{при } \omega \geq 0 \\ S_x^*(\omega) = S_x(-\omega)/2 & \text{при } \omega < 0 \end{cases}$$

- 1°. $S_x^*(\omega) \geq 0$ при $-\infty < \omega < \infty$ (неотрицательная функция);
- 2°. $\int_{-\infty}^{\infty} S_x^*(\omega) d\omega = D_x$ (т. е. интеграл от спектральной плотности в бесконечных пределах равен дисперсии с. п.);
- 3°. $S_x^*(\omega) = S_x^*(-\omega)$ (четная функция).

Спектральная плотность с.с.п.

Пример



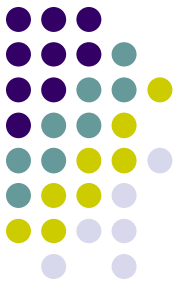
Найти спектральную плотность стационарного с. п. $X(t)$, зная его корреляционную функцию $K_X(\tau) = D \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|}$, $\alpha > 0$.

в комплексной форме $S_X^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_X(\tau) \cdot e^{-i\omega\tau} \cdot d\tau$

$$\begin{aligned} S_X^*(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} D \cdot e^{-\alpha \cdot |\tau|} \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{D}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 e^{\alpha \cdot \tau} \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\alpha \cdot \tau} \cdot e^{-i\omega\tau} d\tau \right) = \\ &= \frac{D}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + i\omega)\tau} d\tau \right) = \frac{D}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha - i\omega} \cdot e^{(\alpha - i\omega)\tau} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{\alpha + i\omega} \cdot e^{-(\alpha + i\omega)\tau} \Big|_0^{\infty} \right) = \\ &= \frac{D}{2\pi} \left(\frac{1}{\alpha - i\omega} - \frac{1}{\alpha + i\omega} (0 - 1) \right) = \frac{D}{2\pi} \cdot \frac{\alpha + i\omega + \alpha - i\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{D}{2\pi} \cdot \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \end{aligned}$$

$$\text{т. е. } S_X^*(\omega) = \frac{D \cdot \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)} \text{ или } S_X(\omega) = \frac{2D \cdot \alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}.$$

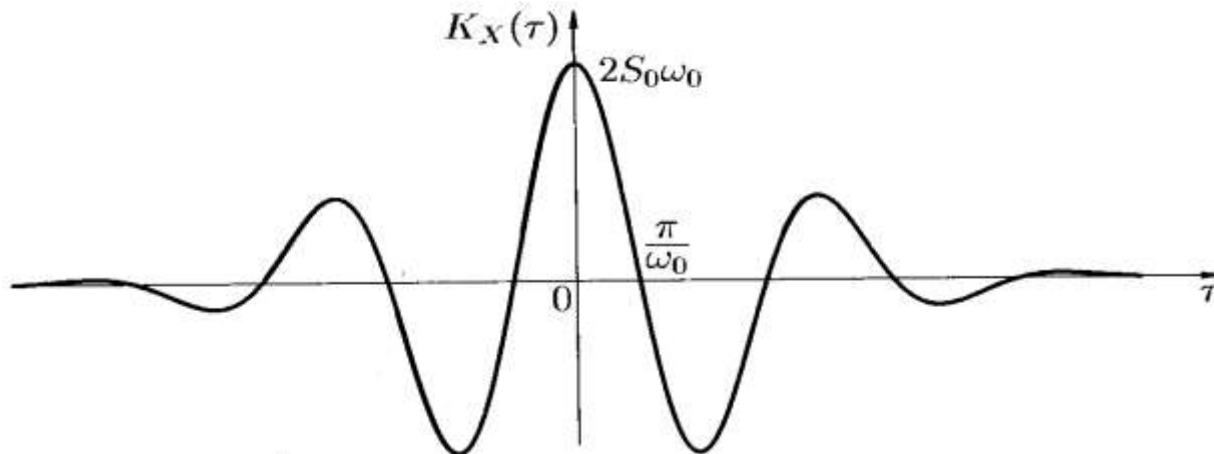
Корреляционная функция с.с.п. Пример



Найти корреляционную функцию с. п. со спектральной плотностью

$$S_X^*(\omega) = \begin{cases} S_0, & |\omega| \leq \omega_0, \\ 0, & |\omega| > \omega_0. \end{cases}$$

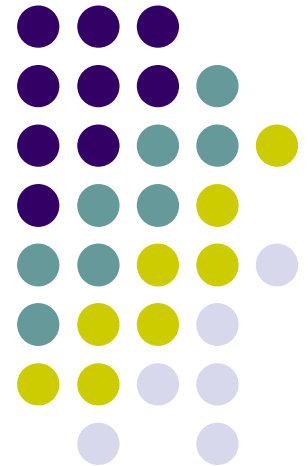
$$\begin{aligned} K_X(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_X^*(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} \cdot d\omega = \int_{-\omega_0}^{\omega_0} S_0 \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = S_0 \cdot \frac{1}{i\tau} \cdot e^{i\omega\tau} \Big|_{-\omega_0}^{\omega_0} = \\ &= \frac{S_0}{\tau} \cdot \frac{e^{i\omega_0\tau} - e^{-i\omega_0\tau}}{2i} \cdot 2 = 2 \cdot S_0 \cdot \omega_0 \cdot \frac{\sin \omega_0\tau}{\omega_0\tau} \end{aligned}$$



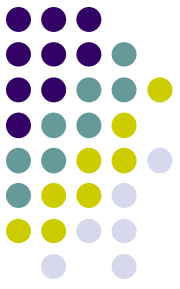
Пространственно- временные характеристики случайного поля

Математическое ожидание,
дисперсия и корреляционная
функция случайного поля

Однородное и изотропное
случайное поле

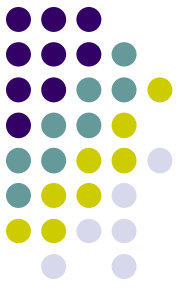


Случайное поле и его характеристики



- Случайные функции $U(x, y, z, t)$ от нескольких независимых переменных называют случайными полями, если:
 - x, y, z — пространственные координаты точки
 - t — время
 - $U(\rho)$ – случайное поле 4-хмерного вектора $\rho=(x, y, z, t)$.
- Сечение случайного поля – с.в. при фиксированном значении вектора ρ .
- Реализация случайного поля – неслучайное поле, полученное в результате данного опыта.

Функция распределения случайного поля



- Функцией распределения случайного поля $U(x,y,z,t)=U(\rho)$ называют n -мерную функцию распределения системы случайных величин:

$$F_n(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) = \\ = P(U_1 < u_1, U_2 < u_2, \dots, U_n < u_n).$$

- Смешанные частные производные от функции распределения $F_n(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ называют n -мерными плотностями распределения случайного

поля $U(\rho)$:

$$f_n(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) = \\ = \frac{\partial^n F_n(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)}{\partial \rho_1 \partial \rho_2 \dots \partial \rho_n}.$$

Пространственно-временные моменты от случайного поля



- Математическим ожиданием случайного поля называется момент первого порядка:

$$m_1(\rho) = M[U(\rho)] = m_u(\rho)$$

- Отклонение случайного поля от его математического ожидания называют центрированным случайным полем:

$$U^0(\rho) = U(\rho) - m_u(\rho).$$

- Одноточечный центральный момент второго порядка

$$\mu_2(\rho) = M\{[U(\rho) - m_u(\rho)]^2\} = D_u(\rho)$$

называется дисперсией случайного поля.

- Математическое ожидание и дисперсия случайного поля являются неслучайными функциями координат точек пространственно-временной области:

$$m_u(\rho) = m_u(x, y, z, t),$$

$$D_u(\rho) = D_u(x, y, z, t).$$

Корреляционная функция случайного поля

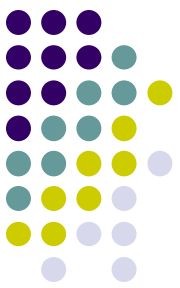


- Двухточечный центральный момент второго порядка $\mu_{1,1}(\rho_1, \rho_2) = M \{ [U(\rho_1) - m_u(\rho_1)] [U(\rho_2) - m_u(\rho_2)] \} = R_u(\rho_1, \rho_2)$ называется корреляционной функцией случайного поля.
- Корреляционная функция $R_u(\rho_1, \rho_2)$ является функцией координат двух точек пространственно-временной области:

$$R_u(\rho_1, \rho_2) = R_u(x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_2).$$

- Дисперсия случайного поля $R_u(\rho, \rho) = D_u(\rho)$.
- Нормированная корреляционная функция случайного поля представляет собой коэффициент корреляции между сечениями случайного поля для каждой фиксированной пары точек ρ_1, ρ_2 :

$$r_u(\rho_1, \rho_2) = \frac{R_u(\rho_1, \rho_2)}{\sqrt{D_u(\rho_1)} \sqrt{D_u(\rho_2)}}$$



Однородное случайное поле

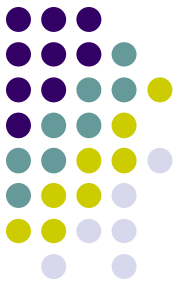
- Случайное поле называется однородным, если все n -мерные законы распределения не изменятся при переносе системы точек $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ на один и тот же вектор
 - если функции распределения (плотности распределения) не изменяются при замене сечений в точках $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ сечениями $\rho_1 + \rho_0, \rho_2 + \rho_0, \dots, \rho_n + \rho_0$ при любом векторе ρ_0 (условие строгой однородности):

$$f(u_1, u_2; \rho_1, \rho_2) = f(u_1, u_2; \rho_1 + \rho_0, \rho_2 + \rho_0).$$

- Однородным в широком смысле называют такое поле, для которого м.о. является постоянной величиной, а корреляционная функция зависит только от разности векторов:

$$m_u(\rho) = m_u,$$

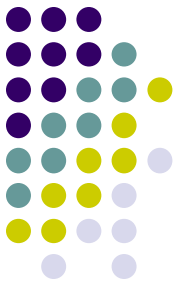
$$R_u(\rho_1, \rho_2) = R_u(\rho_2 - \rho_1) = R_u(l), \quad l = \rho_2 - \rho_1$$



Изотропное случайное поле

- Случайное однородное поле называют изотропным, если все его n -мерные законы распределения $f_n(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ не изменяются при всевозможных вращениях системы точек $N_1(\rho_1), N_2(\rho_2), \dots, N_n(\rho_n)$ вокруг любой оси, проходящей через начало координат, и при зеркальном отражении относительно любой плоскости, проходящей через начало координат.
- в широком смысле: $m_u(\rho) = m_u; \quad R_u(\rho_1, \rho_2) = R_u(l)$,
где $l = |\rho_2 - \rho_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.
- однородным изотропным является центрированное СП отклонений метеозлемента от его мат.ожидания, при этом мат.ожидание нельзя считать постоянным.
- эргодическое свойство СП: $m_u(\rho)$ и $R_u(\rho_1, \rho_2)$ можно находить осреднением по одной реализации в пределах области D.

Оценка среднего значения поля

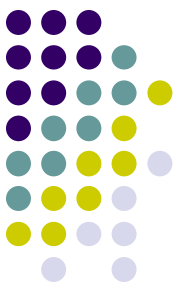


- **Осреднение** - способ получения фоновых показателей г/м параметра в отдельных районах на больших пространствах для сравнения результатов его изменения
 - методы среднего арифметического взвешивания по площадям, квадратов, изолиний, оптимального осреднения

$$\bar{x}_s = \sum_{i=1}^n a_i x_i(\varphi_i, \lambda_i),$$

- где x_s – среднее по площади,
- $x_i(\varphi_i, \lambda_i)$ – значение элемента в точке с координатами (φ_i, λ_i) ,
- a_i – весовой коэффициент пропорциональности осреднения
- n – число элементов осреднения (объём выборки)

Оценка пространственной дисперсии и показателя аномальности поля



- Оценка дисперсии

$$\sigma_s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_s)^2}{n},$$

- где $\bar{x}_s$ – среднее по площади,
- $x_i(\varphi_i, \lambda_i)$ – значение элемента в точке с координатами (φ_i, λ_i) ,
- n – число элементов осреднения (объём выборки)

- Оценка аномальности $x_i - \bar{x}_i$ · отклонение значений элемента от средней:

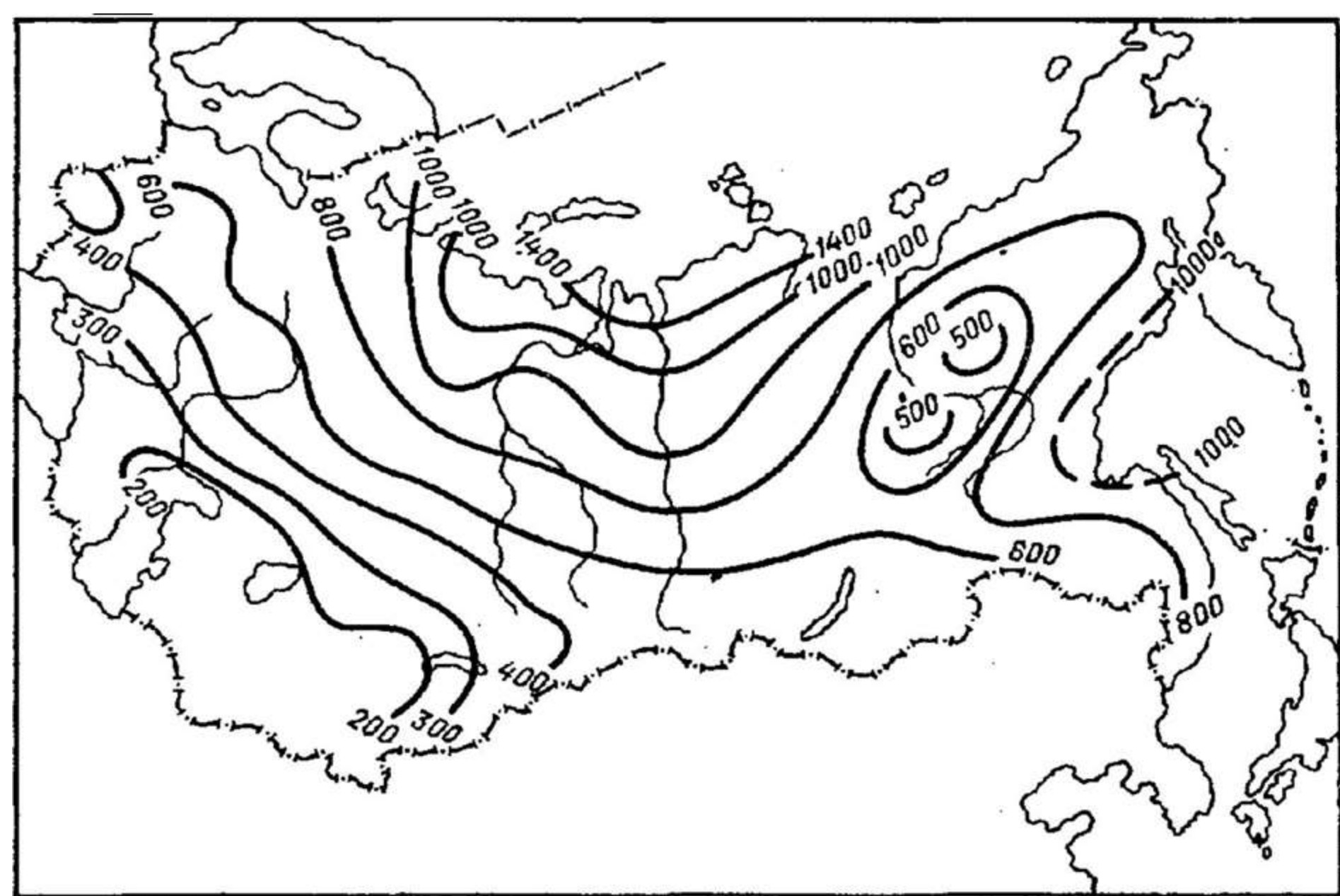
- в отдельных точках поля (аномалий), по повторяемости аномалий, по весу площади, занимаемой аномалией

$$A = \frac{1}{n} \sum \frac{(x_i - \bar{x}_i)^2}{\sigma_i^2}$$

Картирование основных элементов пространственного поля

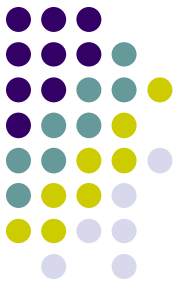


- **Картирование** – это описание г/м процесса посредством формирования карт текущего и целевого состояния:
 - 1) выбор гипсометрической основы и соответствующего масштаба;
 - 2) нанесение цифрового материала;
 - 3) анализ репрезентативности данных
 - по местоположению и паспортам станций;
 - 4) построение (при необходимости) графиков связи между гидрометеорологическими элементами и элементами рельефа и введение поправок;
 - 5) выбор интервала изолиний и проведение изолиний;
 - 6) подготовка к изданию

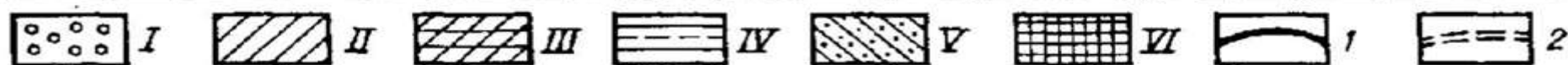
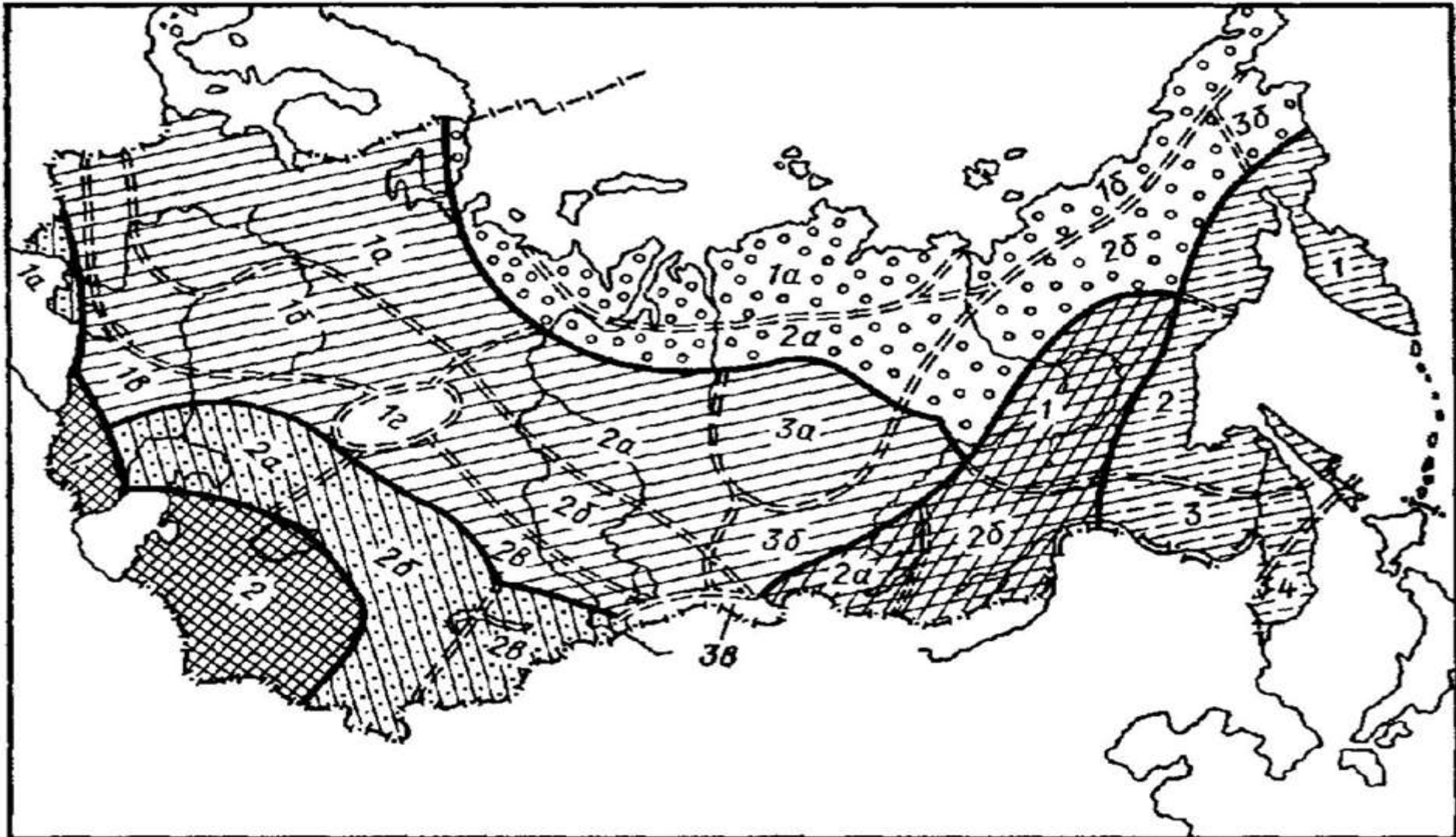


Параметры пространственных корреляционных функций месячных летних осадков на территории СССР

Районирование пространственного поля



- ***Районирование*** – выявление типичных характеристик, присущих отдельным районам, определение границ их распространения и выявление районов с различными или сходными условиями
- **Алгоритмы классификации (распознавания образов)**
 - физический анализ процессов
 - параметрические статистические критерии: известна функция распределения признаков (по нормальному закону, закону равномерной плотности)
 - непараметрические статистические критерии



Карта-схема типизации распределения аномалий летних осадков на территории СССР. 1 — зоны преобладания переноса: I — арктического, II — атлантического, III — внутриконтинентального центральносибирского, IV — тихоокеанского, V — субтропического и атлантического, VI — субтропического. Границы: 1 — зон, 2 — областей и подобластей. Индексы: I, II ... VI — зоны; 1, 2, 3, 4 — областей; а, б, в, г — подобластей

Равномерная и регулярная схемы расположения точек на карте

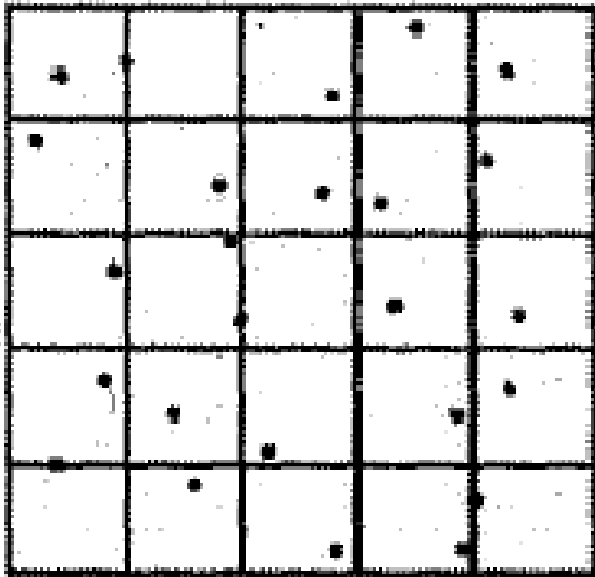
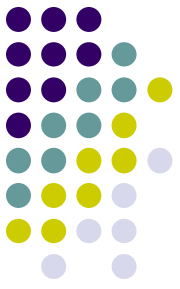


Схема равномерного размещения точек на карте.

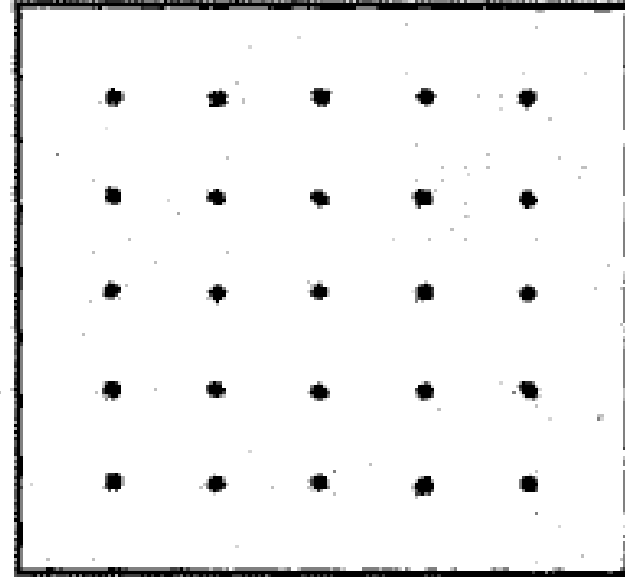
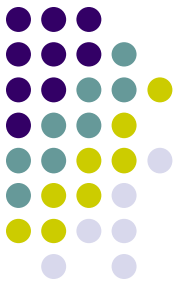


Схема регулярной сети точек на карте в декартовой системе координат.

- Схема называется *регулярной*, если точки образуют вид сети такой, что расстояния между любыми точками подчиняются определенному закону

Проверка гипотезы равномерности сети по критерию Пирсона χ^2



- Ожидаемое («теоретическое») число точек для каждой подобласти:

$$E = n/k,$$

- n - общее число точек наблюдения;
- k - число подобластей.

- критерий Пирсона:
- $$\chi^2 = \sum_{i=1}^k (O_i - E_i)^2 / E_i$$

- O_i - фактическое число точек для каждой подобласти.

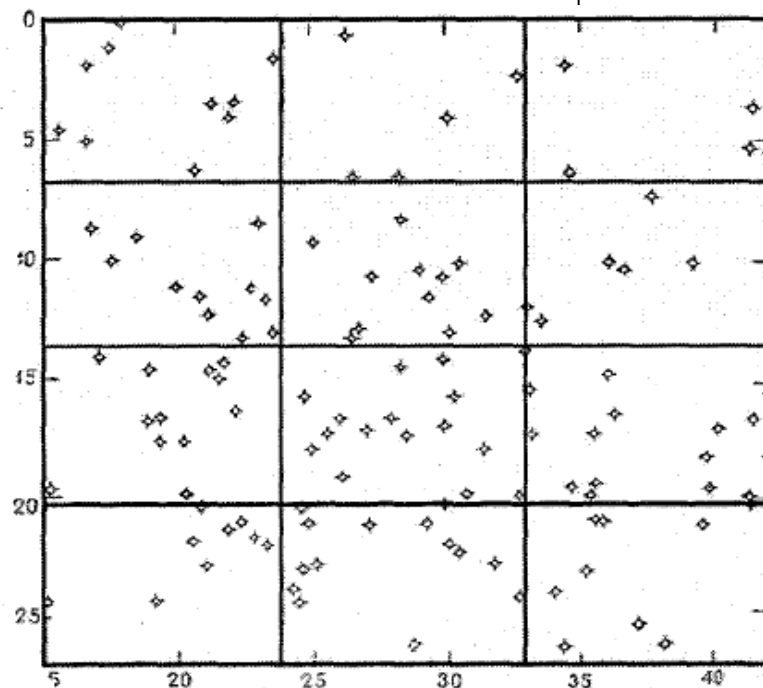
- проверка неравенства:

$$\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}(\alpha, \nu = k-2)$$

Проверка гипотезы равномерности сети. Пример



- Представлено распределение 123 артезианских скважин в США в 12 равных квадратах
- $\chi^2 = 15,2$
- $\chi^2_{кр} = 18,3$ при $\alpha = 0,05$ и $\nu = 10$
- $\chi^2 < \chi^2_{кр}$

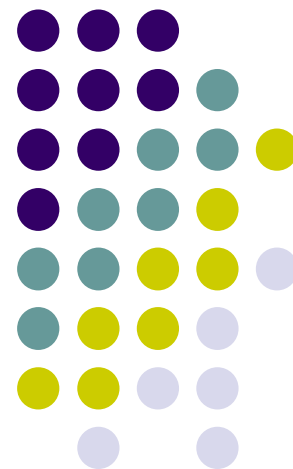


Пространственное распределение 123 артезианских скважин

Размещение скважин по 12 квадратам карты

Хар-ка	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число точек	10	5	5	11	12	6	12	16	15	9	14	8
$\frac{(O-E)^2}{E}$	0,00	2,60	2,60	0,06	0,32	1,73	0,32	3,30	2,26	0,14	1,42	0,48

Пояснения



Пространственно-временные моменты случайного поля



- n -точечным начальным моментом СП $U(\rho) = U(x, y, z, t)$ порядка $i_1 + i_2 + \dots + i_n$ называется математическое ожидание произведения соответствующих степеней n сечений в n точках пространственно-временной области:

$$m_{i_1, i_2, \dots, i_n}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) = M \{ [U(\rho_1)]^{i_1} \cdot [U(\rho_2)]^{i_2} \dots [U(\rho_n)]^{i_n} \}.$$

- Момент первого порядка называется математическим ожиданием случайного поля: $m_1(\rho) = M[U(\rho)] = m_u(\rho)$
 - Отклонение от МО называют центрированным СП $\overset{\circ}{U}(\rho) = U(\rho) - m_u(\rho)$.
- Начальные моменты от центрированного СП называют центральными моментами поля:

$$\mu_{i_1, i_2, \dots, i_n}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) = M \{ [\overset{\circ}{U}(\rho_1)]^{i_1} \cdot [\overset{\circ}{U}(\rho_2)]^{i_2} \dots [\overset{\circ}{U}(\rho_n)]^{i_n} \}$$
- Дисперсией СП называют одноточечный центральный момент 2-го порядка: $\mu_2(\rho) = M \{ [U(\rho) - m_u(\rho)]^2 \} = D_u(\rho)$

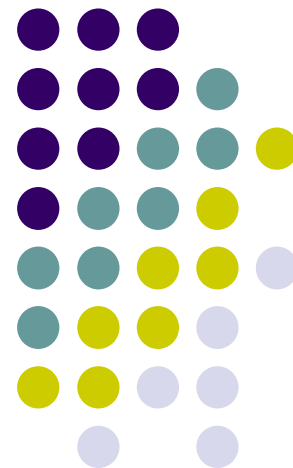
Статистические оценки характеристик случайных функций

Осреднение случайной функции по
множеству реализаций

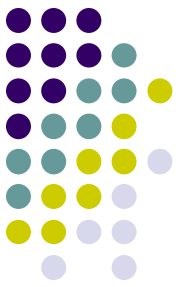
Правила объединения
экспериментальных данных

Свойства оценок. Несмещенность.
Эффективность Состоятельность

Статистические оценки
м.о. и к.ф. случайного процесса

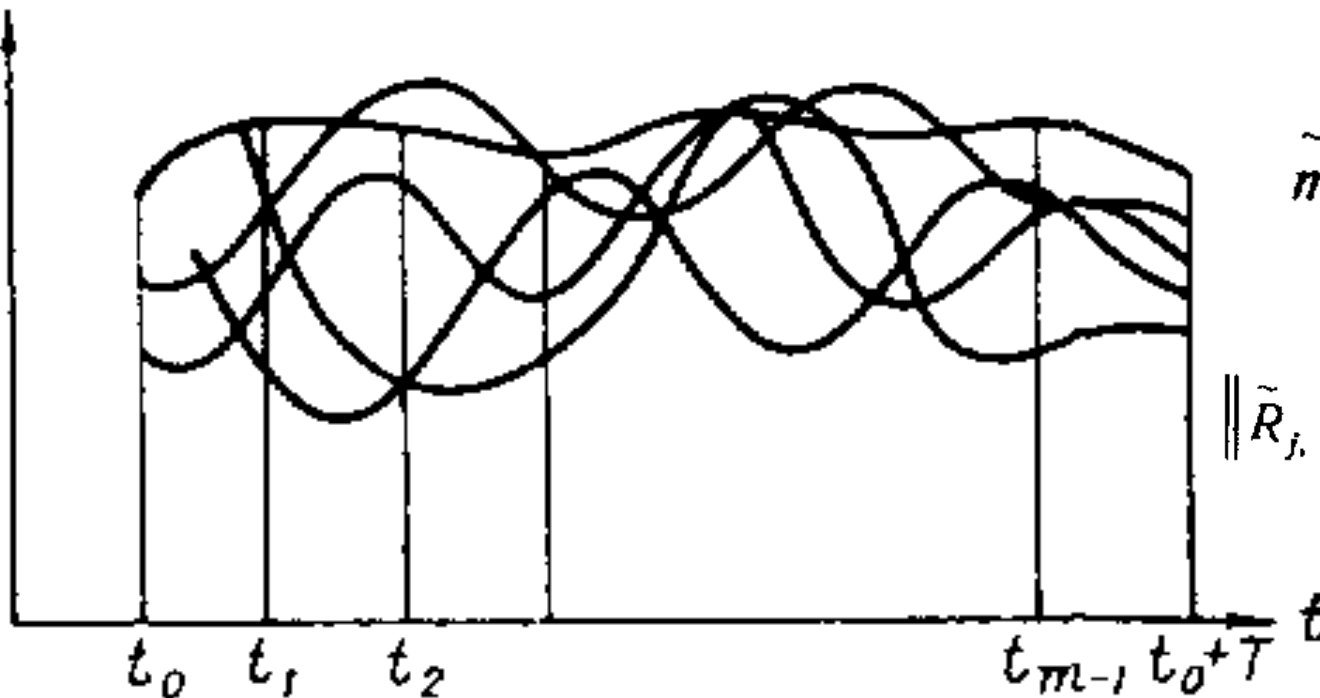


Осреднение случайной функции по множеству реализаций



- $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) - n реализаций случайного процесса $X(t)$ на промежутке $[t_0, t_0 + T]$
- $X(t_j)$ - сечение с.п. $X(t)$ для t_j ($j = 1, 2, \dots, m$)

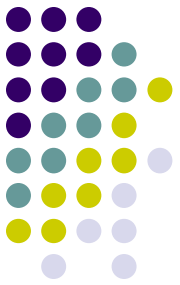
$x_i(t)$



$$\tilde{m}[X_j] = \tilde{m}_x(t_j)$$

$$\|\tilde{R}_{j,1}\| = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{12} & \dots & \tilde{R}_{1m} \\ \tilde{R}_{22} & \dots & \tilde{R}_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{R}_{mm} \end{pmatrix}$$

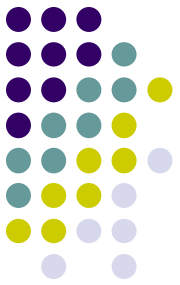
Правила объединения экспериментальных данных



- **Соблюдение условий аналогичности моментов для случайных процессов**
 - Случайные процессы суточного хода: аналогичными считают моменты, относящиеся к одному времени суток.
 - Случайные процессы годового хода: аналогичные моменты – относящиеся к различным сезонам года
- **Соблюдение условий однородности и изотропности для случайных полей с пространственной структурой**
 - Случайные поля ветра: реализации, соответствующие различным типам циркуляции (струйные течения, по скорости ветра и т. д.
 - Случайные поля давления (геопотенциала): разделение по типам циркуляции

Свойства оценок.

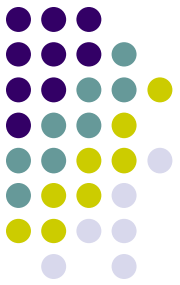
Состоятельность



- **Статистическая оценка** $\theta^*(t)$ характеристики случайной функции $\theta(t)$, определяемая по выборке объема n , называется **состоятельной**, если с увеличением числа наблюдений n с вероятностью сколь угодно близкой к единице оценка θ^* стремится к истинному значению θ , т. е. оценка θ^* сходится к θ по вероятности: $\theta_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \theta$, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ |\theta_n^* - \theta| < \varepsilon \right\} = 1$.
- **Статистическая оценка** $\theta^*(t)$ является **состоятельной**, если ее дисперсия σ^2 с ростом n выборки стремится к нулю:
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^2 [\theta^*(t)] = 0$$
 - Состоятельность не гарантирует **единственность** оценки: существует бесчисленное множество различных оценок, являющихся состоятельными.

Свойства оценок.

Несмещенность. Эффективность

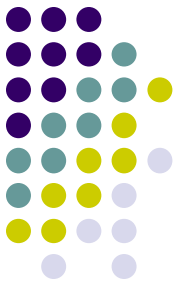


- Оценку называют несмещенной, если ее математическое ожидание для всех выборок равно значению искомой характеристики

$$M[\theta^*(t)] = \theta.$$

- Состоятельная оценка является асимптотически несмещенной, так как ее среднее значение близко к искомому при больших n , *однако она может не являться несмещенной при малом объеме выборки.*
- Оценка, имеющая минимальную дисперсию, называется эффективной.
 - Если оценка имеет минимальную дисперсию для больших выборок, то она называется асимптотически эффективной.

Оценка характеристик случайного процесса



- Оценка математического ожидания $m_x(t_j)$ сечений с.п.

$$\tilde{m}_x(t_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

- Оценка элементов корреляционной матрицы

$$\hat{R}_x(t_j, t_l) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_j) - \hat{m}_x(t_j)][x_i(t_l) - \hat{m}_x(t_l)]$$

$$D_x(t_l) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_l) - \hat{m}_x(t_l)]^2$$

- Оценка элементов нормированной корреляционной матрицы

$$\hat{\rho}_x(t_j, t_l) = \frac{\hat{R}_x(t_j, t_l)}{\hat{\sigma}_x(t_j) \hat{\sigma}_x(t_l)}, \quad \tilde{\sigma}_x(t) = \sqrt{\tilde{D}_x(t)}$$

Нахождение эмпирической оценки автокорреляционной функции. Пример



- Пусть имеется $n=120$ профилограмм поверхности моря и сечения $X(t_1), X(t_2), X(t_3), X(t_4)$ для моментов t_1, t_2, t_3, t_4

Сечения $X(t_1), X(t_2), X(t_3), X(t_4)$

№ реализации по порядку	№ точки			
	t_1	t_2	t_3	t_4
1	3,4	2,2	1,8	2,9
2	2,4	1,2	2,7	3,1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
120	3,1	0,8	0,5	1,7

Таблица сочетаний сечений (t_i, t_j)

$t' \backslash t''$	t_1	t_2	t_3	t_4
t_1	$t_1 t_1$	$t_1 t_2$	$t_1 t_3$	$t_1 t_4$
t_2	$t_2 t_1$	$t_2 t_2$	$t_2 t_3$	$t_2 t_4$
t_3	$t_3 t_1$	$t_3 t_2$	$t_3 t_3$	$t_3 t_4$
t_4	$t_4 t_1$	$t_4 t_2$	$t_4 t_3$	$t_4 t_4$

Нахождение эмпирической оценки автокорреляционной функции. Пример

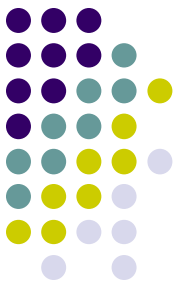


- в таблице сочетаний сечений для t_1, t_2, t_3, t_4 имеется 16 комбинаций (t_i, t_j)
- на диагонали для одинаковых моментов м.б. получены эмпирические дисперсии: $D^*_x(t_i) = R^*_x(t_i, t_i)$
- симметричные относительно диагонали комбинации имеют одинаковые значения корреляционной функции: $R^*_x(t_i, t_j) = R^*_x(t_j, t_i)$
- различные значения корреляционной функции имеют 6 комбинаций: $\binom{k}{2} = C_k^2 = \frac{k!}{2!(k-2)!}$
- столбцы сечений t_i и t_j каждой из 6 комбинаций дают шесть корреляционных матриц:

$$\|\tilde{R}_{j, i}\| = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} & \tilde{R}_{12} & \dots & \tilde{R}_{1m} \\ & \tilde{R}_{22} & \dots & \tilde{R}_{2m} \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{R}_{mm} \end{pmatrix}$$

$$\hat{R}_x(t_j, t_i) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_j) - \hat{m}_x(t_j)][x_i(t_i) - \hat{m}_x(t_i)]$$

Статистические оценки м.о. и к.ф. по реализации стационарного случайного процесса



- осреднение данных по имеющейся реализации (если интервал значений параметра t достаточно большой)
 - на оси t откладываются n равных отрезков $t_1, t_2, \dots, t_n$ и в конце каждого из них определяются значения $x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)$.

- статистическая оценка постоянного математического ожидания:

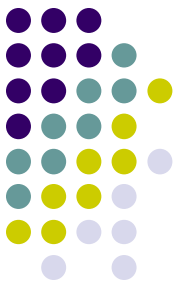
$$m_x(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t)$$

- статистическая оценка автокорреляционной функции

$$R_x(t_1, t_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_1) - m_x(t)] [x_i(t_2) - m_x(t)]$$

- оценка нормированной автокорреляционной функции
- оценки взаимной корреляционной функции двух стационарных случайных процессов

Влияние ошибок в исходных данных

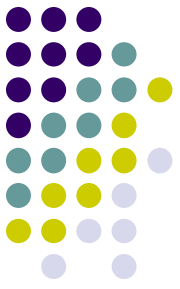


- **Ошибки измерений** – ошибки, зависящие от точности используемых методов наблюдений и приборов измерения, которые представляют собой случайный процесс $Y(t)$ с м.о. $m_y(t)$ и к.ф. $R_y(t_1, t_2)$.

$$z_i(t) = x_i(t) + y_i(t),$$

- $z_i(t)$ – реализация с.п. $Z(t) = X(t) + Y(t)$
- $x_i(t)$ – реализация с.п. $X(t)$
- $y_i(t)$ – ошибка измерения
- оценка м.о. с.п. $Z(t)$ $\hat{m}_z(t_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i(t_j) + y_i(t_j)] = \hat{m}_x(t_j) + \hat{m}_y(t_j)$
- оценка к.ф. с.п. $Z(t)$ $\hat{R}_z(t_j, t_l) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [z_i(t_j) - \hat{m}_z(t_j)][z_i(t_l) - \hat{m}_z(t_l)] =$
 $= R_x(t_j, t_l) + R_y(t_j, t_l) + R_{xy}(t_j, t_l) + R_{yx}(t_j, t_l)$

Гидрометеорологические измерения. Особенности



- ошибка определения оценки математического ожидания равна математическому ожиданию ошибки измерения

$$\hat{m}_x(t_j) = m_x(t_j) + m_y(t_j)$$

- ошибки измерений не зависят от истинного значения измеряемой величины
- ошибки при различных значениях аргумента не связаны между собой

$$\hat{R}_x(t_j, t_l) = \begin{cases} R_x(t_j, t_l) & \text{при } j \neq l, \\ \sigma_x^2(t_j) + \sigma_y^2(t_j) & \text{при } j = l \end{cases}$$

Случайные погрешности



- выборочная оценка среднеквадратического отклонения случайной величины x_i

$$\sigma_x = \sqrt{(n-1)^{-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}.$$

- абсолютная случайная погрешность

$$A_\delta = |x - x_{\text{ист}}|$$

- относительная случайная ошибка

$$\varepsilon = A_\delta / x_{\text{ист}}$$

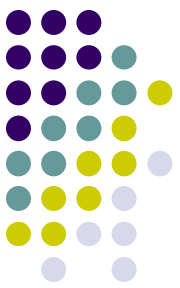
- допустимая ошибка прогноза

$$A_\delta' = 0,8\sigma_x.$$

- вероятная случайная ошибка

$$\sigma_B \approx (2/3)\sigma_x.$$

Влияние дискретности наблюдений



- м.о. и к.ф.
$$\hat{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x(j \Delta t),$$

$$\hat{R}_x(\tau_k) = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} [x(j \Delta t) - \hat{m}_x][x((j+k) \Delta t) - \hat{m}_x]$$

- ошибка оценки м.о.

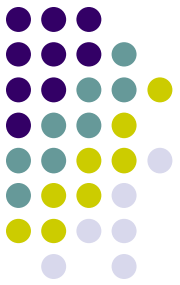
$$\eta^2[\hat{m}_x] = M \left\{ \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X(t_j) - m_x \right]^2 \right\} = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n R_x(k-j) \Delta$$

где $\Delta = \frac{T}{n}$

- ошибка оценки к.ф.

$$\eta^2[\hat{R}_x(\tau)] = M \{ [\hat{R}_x(\tau) - R_x(\tau)]^2 \}$$

Оценка корреляционной функции эргодического с.п. $X(t)$



- $$\hat{R}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - \hat{m}_x][x(t+\tau) - \hat{m}_x] dt$$

- смещение оценки к.ф.

$$b[\hat{R}_x(\tau)] = R_x(\tau) - M[\hat{R}_x(\tau)]$$

- смещение оценки дисперсии (при $\tau = 0$)

$$b[\hat{D}_x] = -\frac{2}{T^2} \int_0^T (T-\tau) R_x(\tau) d\tau$$

- дисперсия оценки к.ф. $\sigma^2[\hat{R}_x(\tau)] = M\{[\hat{R}_x(\tau) - R_x(\tau)]^2\}$
- дисперсия оценки к.ф. при $\tau = 0$ $\sigma^2[\hat{D}_x] \approx \frac{D_x}{dT}$

Общая схема анализа погрешностей измерений и расчетов



1. Сравнение результатов различных независимых методов расчета отдельных составляющих уравнения
2. Сравнение расчетов составляющих уравнения с их измерениями при помощи специальной аппаратуры.
3. Оценка вероятных ошибок расчетов путем анализа примененных формул.
4. Оценка погрешности расчета всех составляющих путем замыкания уравнения при независимом определении всех его членов.

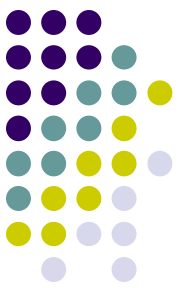
- $$\eta = \sum_{i=1}^k \xi_i + \sum_{i=1}^k \delta_i + \sum_{j=1}^l \mu_j,$$

где ξ_i и δ_i — систематическая и случайная погрешности i -й компоненты исходного уравнения;

μ_j — величина не учитываемой в исходном уравнении j -й компоненты;

l — число неучитываемых членов.

Случайные погрешности статистических характеристик



- ошибка выборочного среднего

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / (n-1)^{1/2};$$

- ошибка среднего квадратического отклонения

$$\sigma_s \approx \sigma_x / (2n-1)^{1/2};$$

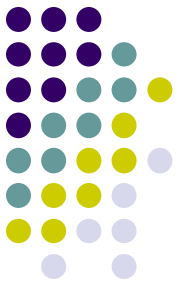
- ошибка коэффициента асимметрии

$$\sigma_A = \sqrt{\frac{6n(n-1)}{(n-2)(n+1)(n+3)}} \approx \sqrt{\frac{6}{n}};$$

- ошибка коэффициента эксцесса

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{24n(n-1)^2}{(n-3)(n-2)(n+3)(n+5)}} \approx \sqrt{\frac{24}{n}}.$$

Случайная ошибка для автокоррелированного ряда



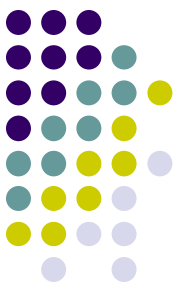
- временной ряд эквивалентно-независимой длины n^* $\sigma_{\bar{x}} = \sigma_x / (n^*)^{1/2}$

- временной ряд простой цепи Маркова

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n^*}} \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1+r_1}{1-r_1}}$$

$$\sigma_{\sigma} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n_{\sigma}^*}} \approx \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{1+r_1^2}{1-r_1^2}}$$

- для степени связности ряда 0,60 ошибка выборочного среднего увеличивается в 2 раза, ошибка стандартного отклонения - в 1,5 раза.



Статистические оценки м.о. и к.ф. стационарного процесса

- по сечениям: $m_x = M[X] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$

$$R_{xy} = M[(X - m_x)(Y - m_y)] =$$

$$= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - m_x)(y_i - m_y),$$

- по реализациям: $m_x(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t),$

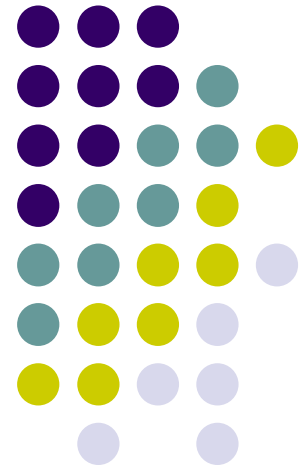
$$R_x(t_1, t_2) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_1) - m_x(t_1)][x_i(t_2) - m_x(t_2)]$$

Марковские процессы

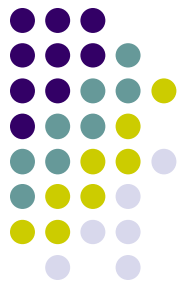
Понятие марковского случайного процесса. Граф состояний.

Марковская цепь. Переходные вероятности марковской цепи.

Понятие о непрерывном мартовском процессе. Уравнения Колмогорова



Понятие марковского случайного процесса

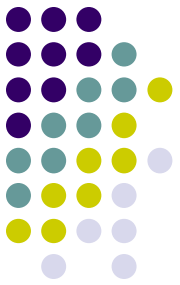


- Случайный процесс называется *процессом с дискретными состояниями*, если множество его возможных состояний $s_1, s_2, s_3, \dots, s_i, \dots$ конечно или счетно (можно заранее перечислить), а переход из одного состояния в другое осуществляется скачком, переходы возможны только в определенные моменты времени $t_1, t_2, t_3, \dots$.

Если переходы возможны в любой момент времени, т. е. моменты переходов из одного состояния в другое случайны, то процесс называется *процессом с непрерывным временем*.

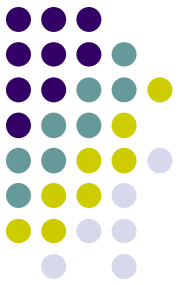
- Случайный процесс с дискретными состояниями называется *марковским*, если для любого момента времени t_0 условная вероятность каждого из состояний системы S в будущем (т. е. при $t > t_0$) зависит только от ее состояния в настоящем (т. е. при $t = t_0$) и не зависит от того, когда и как система пришла в это состояние (т. е. каковы были состояния системы S в прошлом, при $t < t_0$).

Марковость в гидрометеорологических процессах



- **классы (типы, группы и т.п.):**
 - типы атмосферной циркуляции,
 - типы ледового режима и т.д.
- **градации**
 - облачность, волнение в баллах и т.п.
 - норма, аномалии выше нормы, ниже нормы

Определение марковского случайного процесса



- Марковский процесс называют также *процессом без последствия*: будущее в нем зависит от прошлого только через настоящее, т. е. вероятность системы S попасть в состояние s_j в момент времени t_k ($S(t_k) = s_j$) зависит лишь от состояния s_i , в котором система находилась в предыдущий момент времени t_{k-1} ($S(t_{k-1}) = s_i$):

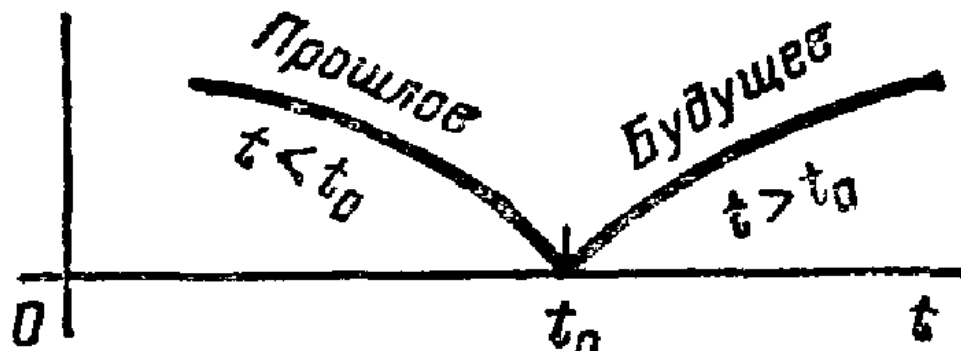
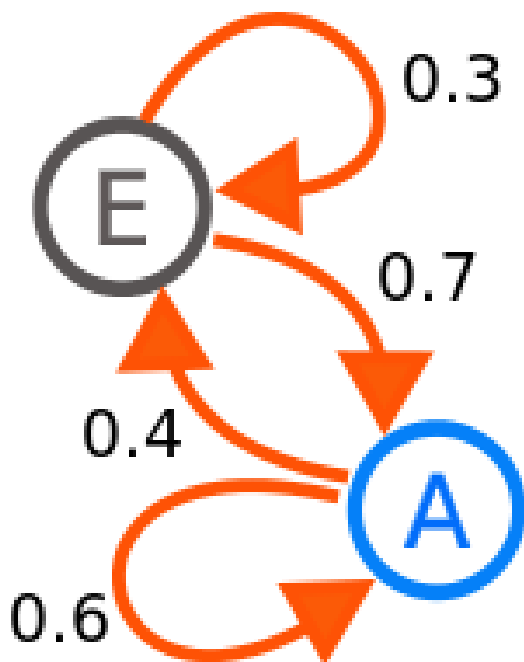
$$\begin{aligned} P(S(t_k) = s_j \mid S(t_1) = x_1, S(t_2) = x_2, \dots, S(t_{k-1}) = s_i) = \\ = P(S(t_k) = s_j \mid S(t_{k-1}) = s_i), \end{aligned}$$

где $x_1, x_2, \dots$ — есть возможные состояния системы $\{s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_j, \dots, s_n\}$.

- $p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}$ — вероятность состояния s_i системы S в момент времени t ,

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1.$$

Марковское свойство

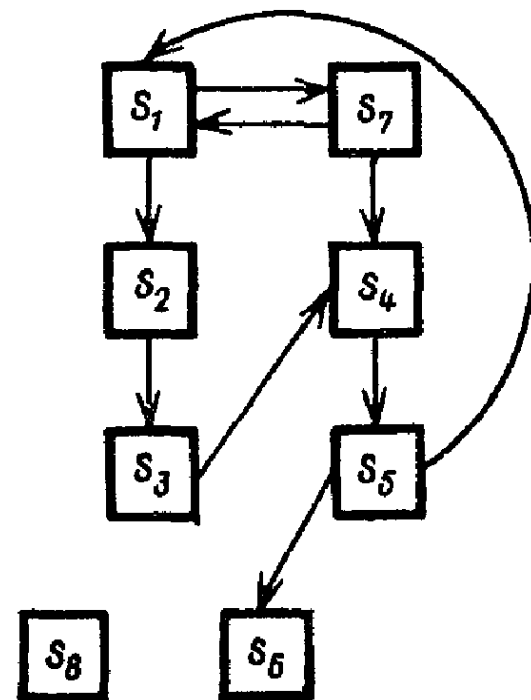
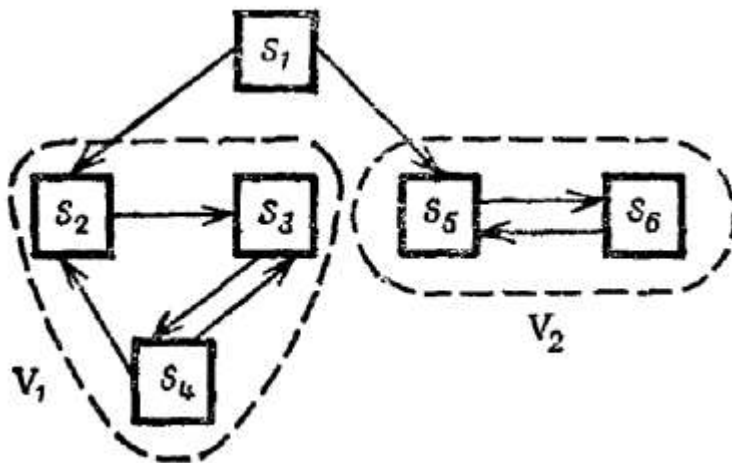


- Цепь Маркова
 $P(s_i = A | s_{i-1} = E) = 0,7$
 $P(s_i = A | s_{i-1} = A) = 0,6$
 $P(s_i = E | s_{i-1} = A) = 0,4$
 $P(s_i = E | s_{i-1} = E) = 0,3$
- Схема Бернулли
 $P(s_i = A | s_{i-1} = E) =$
 $= P(s_i = A | s_{i-1} = A)$
 $P(s_i = E | s_{i-1} = A) =$
 $P(s_i = E | s_{i-1} = E)$

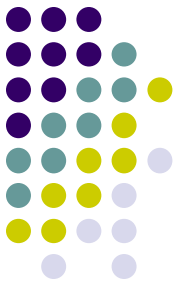
Граф состояний



- **Граф состояний** - ориентированный граф, вершины s_i которого соответствуют состояниям системы, а стрелки из вершины s_i в вершину s_j обозначают переход системы S из состояния s_i в состояние s_j .
 - множество вершин графа совпадает со множеством состояний цепи
 - вершины соединяются ориентированным ребром, если интенсивность потока из i -го состояния в j -е положительна



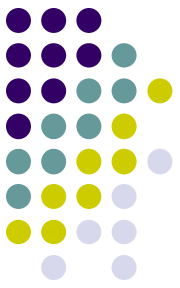
Типы вершин в графе состояний



- **Отдельные состояния системы**
 - источник
 - концевое (или поглощающее)
 - соседние
 - транзитивные
- **Подмножества состояний системы**
 - замкнутое (концевое)
 - если попав в одно из состояний, нельзя выйти из этого подмножества состояний
 - связное или эргодическое
 - если из любого состояния можно попасть в любое другое состояние
 - транзитивное
 - если система можно войти и выйти из любого состояния этого подмножества

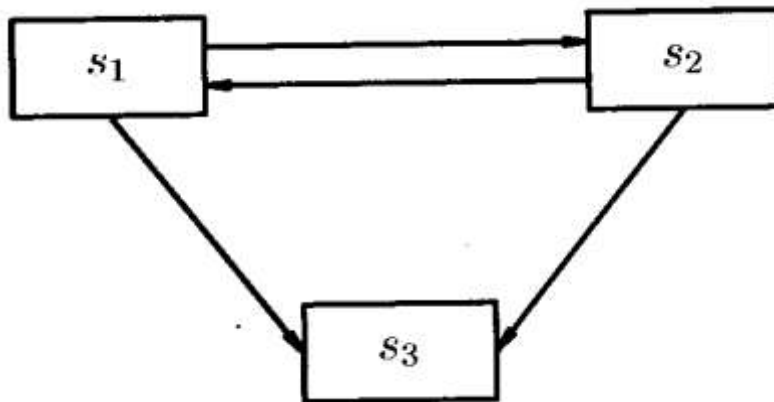
Граф состояний.

Пример



- **Пример.** Построить граф состояний следующего с. п.: устройство S в случайный момент времени может выйти из строя, оно осматривается в определенные моменты времени, например через каждые 3 часа, и в случае необходимости — ремонтируется.

○ Возможные состояния системы (устройства) S : s_1 — устройство исправно; s_2 — устройство неисправно, требуется ремонт; s_3 — устройство неисправно, ремонту не подлежит, списано.



$s_1^{(1)}, s_1^{(2)}, s_1^{(3)}, s_2^{(4)}, s_1^{(5)}, s_1^{(6)}, s_3^{(7)}$

Марковская цепь



- *Цепью Маркова* называют последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ полной группы, причем условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s -м испытании наступит событие A_j ($j = 1, 2, \dots, k$), при условии, что в $(s-1)$ -м испытании наступило событие A_i ($i = 1, 2, \dots, k$), не зависит от результатов предшествующих испытаний.
- *Простая цепь Маркова* – цепь, в которой условные вероятности последующих состояний зависят только от состояния перед последним шагом (и не зависят от предыдущих состояний).
- марковская цепь является обобщением на случай зависимых испытаний независимых испытаний.

Характеристики цепи Маркова



- **Вероятности состояний системы:**

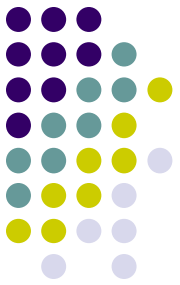
$$p_i(k) = P\{S(k) = s_i\}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n; \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

- **Переходные вероятности состояния системы:**

$$p_{ij}(k) = P\{S(k) = s_j \mid S(k-1) = s_i\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

- $P\{S(k) = s_i\}$ — безусловная вероятность того, что на k -м шаге система будет находиться в состоянии s_i .
- $P\{S(k) = s_j \mid S(k-1) = s_i\}$ — условная вероятность перехода системы S на k -м шаге в состояние s_j , если известно, что на предыдущем $(k-1)$ -м шаге она была в состоянии s_i
- $\{S(k) = s_i\}$, где $i = 1, 2, 3, \dots, n; k = 0, 1, 2, \dots$ — последовательность (цепь) событий
 $S(0)$ — начальное состояние системы перед 1-м шагом;
 $S(1)$ — состояние системы после 1-го шага,
 $S(2)$ — после 2-го шага и т. д.

Основная задача теории марковских цепей



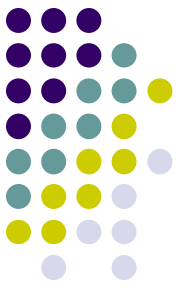
Нахождение безусловных вероятностей состояний S_j системы S на любом k -ом шаге:

- $p_i(k) = P \{S(k) = S_i\} \ (i=1, 2, \dots, n; k = 0, 1, \dots),$

когда известны условные вероятности перехода системы S на k -м шаге в состояние s_j , если на предыдущем $(k-1)$ -м шаге она была в состоянии s_i :

- $p_{ij}(k) = P\{S(k)=s_j|S(k-1) = s_i\} \ (i,j= 1, 2, \dots, n).$

Матрица переходных вероятностей марковской цепи



- *Переходной вероятностью $p_{ij}(k)$ называют условную вероятность перехода системы S на k -м шаге в состояние s_j , если известно, что на предыдущем $(k - 1)$ -м шаге она была в состоянии s_i , т. е.*

$$p_{ij}(k) = P\{S(k) = s_j \mid S(k - 1) = s_i\}, \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, n$$

- *Цепь Маркова называется **однородной**, если $p_{ij}(k) = p_{ij}$, т. е. условные вероятности $p_{ij}(k)$ не зависят от номера испытаний.*

- $$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \text{ — матрица перехода системы,}$$

$(p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0))$ — вероятности состояний в момент $t_0 = 0$

Стохастическая матрица. Свойства



$$\| p_{ij}(k) \| = \begin{pmatrix} p_{11}(k) & p_{12}(k) & \dots & p_{1n}(k) \\ p_{21}(k) & p_{22}(k) & \dots & p_{2n}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{i1}(k) & p_{i2}(k) & \dots & p_{in}(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1}(k) & p_{n2}(k) & \dots & p_{nn}(k) \end{pmatrix}$$

$(k = 0, 1, 2, \dots)$

- все элементы матрицы отвечают условию: $0 \leq p_{ij}(k) \leq 1$
- для любой строки матрицы сумма всех стоящих в ней вероятностей равна 1: $\sum_{j=1}^n p_{ij}(k) = 1$
- на главной диагонали матрицы стоят вероятности задержки системы в данном состоянии:
 $p_{11}(k), p_{22}(k), \dots, p_{jj}(k), \dots, p_{nn}(k)$
 - вероятности задержки есть дополнения до единицы всех остальных членов строки: $p_{ii}(k) = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij}(k)$
- вероятности состояний на k-м шаге:
 $(k = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots, n) \quad p_j(k) = \sum_{i=1}^n p_i(k-1) p_{ij}$

Свойства матрицы перехода системы. Пример



Пример. Задана матрица перехода $\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix}$.

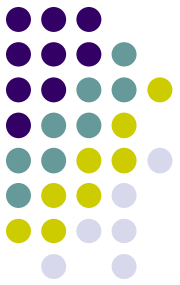
Найти матрицу вероятностей переходов за два шага.

○ По формуле $\mathcal{P}(2) = \mathcal{P}^2$ находим

$$\mathcal{P}(2) = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,5 \\ 0,3 & 0,2 & 0,5 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,38 & 0,27 & 0,35 \\ 0,37 & 0,28 & 0,35 \\ 0,29 & 0,27 & 0,44 \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{P}(n) = \mathcal{P}^n$, т. е. матрица переходов за n шагов есть n -я степень матрицы переходов за один шаг.

Однородная марковская цепь



- состояния системы после k шагов:

$$S_1(k), S_2(k), \dots, S_i(k), \dots, S_n(k)$$

- вероятности состояний системы после k шагов:

$$p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k), \quad p_1(k) + p_2(k) + \dots + p_n(k) = 1$$

- вероятности перехода за один шаг из состояния S_i в S_j :

$$P_{ij} = P(S_j(k)/S_i(k-1))$$

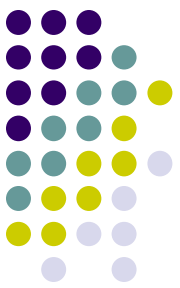
- матрица переходных вероятностей:

$$|P_{ij}| = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nj} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

- [illegible]

- $$p_i(3) = \sum_{j=1}^n p_j(2) P_{ji},$$

- $$p_i(k) = \sum_{j=1}^n p_j(k-1) P_{ji} \quad (i = 1, \dots, n).$$



Цепь Маркова k-го порядка

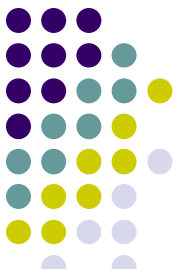
Последовательность событий $A_i^{(t)}$ называют цепью Маркова k-го порядка, если для каждого момента времени t условная вероятность события $A_i^{(t+1)}$ зависит только от того, какие события произошли в k предыдущих моментах времени и не зависит от поведения последовательности до момента $t-k+1$, т.е.

$$P\{A_j^{(t+1)} | A_i^{(t)}, A_{i_1}^{(t-1)}, A_{i_2}^{(t-2)}, \dots\} = P\{A_j^{(t+1)} | A_i^{(t)}, \dots, A_{i_{k-1}}^{(t-k+1)}\}. \quad (10.44)$$

Отсюда следует, что для цепи Маркова первого порядка, называемой *простой марковской цепью*, для каждого момента времени t справедливо равенство:

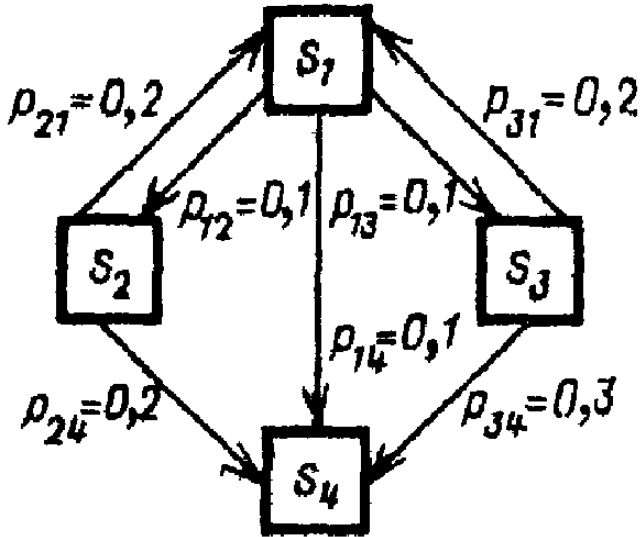
$$P\{A_j^{(t+1)} | A_i^{(t)}, A_{i_1}^{(t-1)}, A_{i_2}^{(t-2)}, \dots\} = P\{A_j^{(t+1)} | A_i^{(t)}\}. \quad (10.45)$$

Вероятности состояний системы после k шагов. Пример



- Задана матрица переходных вероятностей: $p_{21}=0,2$

$$\| p_{ij} \| = \begin{vmatrix} 0,7 & 0,1 & 0,1 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Найти распределение вероятностей состояний для первых четырех шагов $k=1, 2, 3, 4$)

- $k = 1: p_1(0) = 1, p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0$
 $p_1(1) = 0,7; p_2(1) = 0,1; p_3(1) = 0,1; p_4(1) = 0,1$
- $k = 2: p_1(2) = 0,7 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0 = 0,53;$
 $p_2(2) = 0,7 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0 = 0,13;$
 $p_3(2) = 0,7 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0 + 0,1 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0 = 0,12;$
 $p_4(2) = 1 - p_1(2) - p_2(2) - p_3(2) = 0,22.$



$$k = 3: p_1(3) = 0,53 \cdot 0,7 + 0,13 \cdot 0,2 + 0,12 \cdot 0,2 = 0,421;$$

$$p_2(3) = 0,53 \cdot 0,1 + 0,13 \cdot 0,6 = 0,131;$$

$$p_3(3) = 0,53 \cdot 0,1 + 0,12 \cdot 0,5 = 0,113;$$

$$p_4(3) = 1 - (p_1(3) + p_2(3) + p_3(3)) = 0,335;$$

$$k = 4: p_1(4) = 0,421 \cdot 0,7 + 0,131 \cdot 0,2 + 0,113 \cdot 0,2 = 0,3435;$$

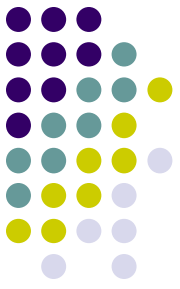
$$p_2(4) = 0,421 \cdot 0,1 + 0,131 \cdot 0,6 = 0,1207;$$

$$p_3(4) = 0,421 \cdot 0,1 + 0,113 \cdot 0,5 = 0,0986;$$

$$p_4(4) = 1 - (p_1(4) + p_2(4) + p_3(4)) = 0,4372.$$

с возрастанием k вероятность поглощающего состояния $p_4(k)$ растет, тогда как вероятность $p_1(k)$ состояния s_1 убывает.

Понятие о непрерывном марковском процессе

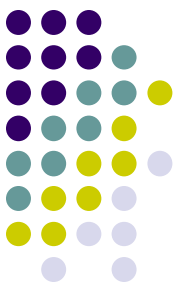


- Если переходы системы из состояния в состояние происходят не в фиксированные моменты $t_0, t_1, t_2, \dots$, а в случайные моменты времени (что чаще встречается на практике), то такой процесс называют *марковским процессом с дискретными состояниями и непрерывным временем*.

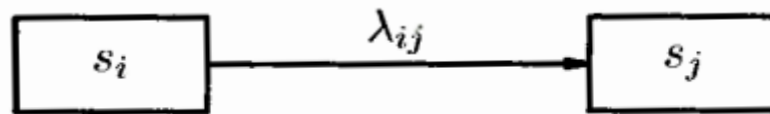
- *Потоком событий* называют последовательность событий, наступающих в случайные моменты времени.

Поток событий, обладающий свойствами стационарности, ординарности и отсутствия последствия называется *простейшим (пуассоновским) потоком*.

Уравнения Колмогорова

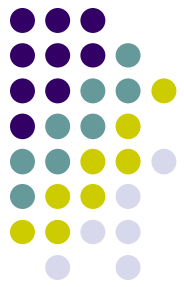


- Будем считать, что переходы системы из состояния s_i в состояние s_j осуществляются под воздействием пуассоновского потока событий с интенсивностью $\lambda_{ij} = \text{const}$.



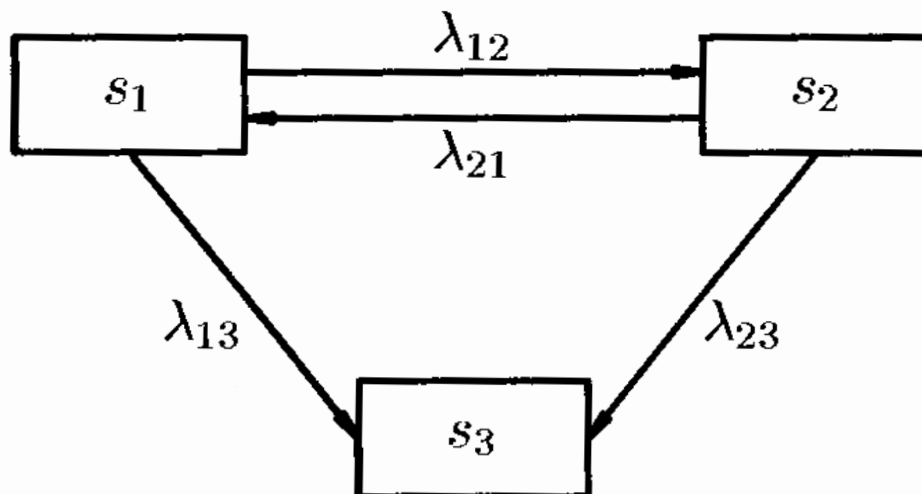
- $p_i(t) = P\{S(t) = s_i\}$, причем $\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1$
- СДУ Колмогорова: $\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \cdot p_j(t) - p_i(t) \cdot \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n)$
- $p_1(0), p_2(0), \dots, p_n(0); p_i(0) \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i(0) = 1$
- $\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1.$

Правило составления уравнений Колмогорова



- в левой части каждого из уравнений Колмогорова стоит производная вероятности s_i состояния, т. е. $\frac{dp_i(t)}{dt}$;
- в правой части — *сумма* произведений вероятностей $p_i(t)$ всех состояний (когда стрелка ведет в данное состояние) на интенсивности соответствующих потоков *минус* суммарная интенсивность всех потоков (когда стрелка ведет *из* данного состояния), умноженная на вероятность данного s_i состояния.

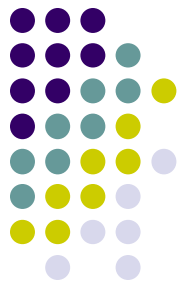
Составление уравнений Колмогорова. Пример



$$\begin{cases} p_1'(t) = \lambda_{21} \cdot p_2(t) - (\lambda_{12} + \lambda_{13}) \cdot p_1(t), \\ p_2'(t) = \lambda_{12} \cdot p_1(t) - (\lambda_{21} + \lambda_{23}) \cdot p_2(t), \\ p_3'(t) = \lambda_{13} \cdot p_1(t) + \lambda_{23} \cdot p_2(t). \end{cases}$$

Нормировочное условие $p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1$.

Предельный стационарный режим

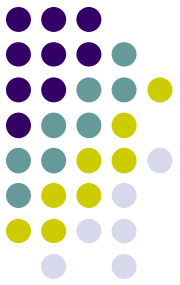


- Случайный процесс, устанавливающийся в системе при $t \rightarrow \infty$ (т. е. *предельный стационарный режим*), характеризуют *предельные (финальные) вероятности состояний*, т. е. вероятности $p_i(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

$$p_i = \lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t)$$

- Предельная вероятность состояния s_i показывает *среднее относительное время пребывания системы в этом состоянии*.
- Предельные вероятности существуют, если число состояний конечно,
- «состояний без выхода» (из них невозможен переход ни в какое другое состояние) нет,
- потоки событий стационарны ($\lambda_{ij} = \text{const}$).

Финальные вероятности с дискретным временем



- Для однородной цепи $p_{ij}(k) = p_{ij}$ при $k \rightarrow \infty$ вероятность p_j состояния s_i на $(k+1)$ -м шаге равна на k -м шаге:

$$p_j(k+1) = \sum_{i=1}^n p_i(k) p_{ij} = p_j, \quad p_j = \sum_{i=1}^n p_i p_{ij}$$

- разделим эту сумму на две части:

$$p_j = \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_i p_{ij} + p_j p_{jj}, \quad \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_i p_{ij} + p_j (p_{jj} - 1) = 0$$

- для n финальных вероятностей $p_1, p_2, \dots, p_n$:

$$\sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_i p_{ij} + p_j (p_{jj} - 1) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Правило для финальных вероятностей



- для стационарного режима суммарный поток вероятности, переводящий систему S в состояние s_j из других состояний s_i , равен суммарному потоку вероятности, выводящему систему из состояния s_j :

$$\sum_{i=1}^n p_i p_{ij}$$

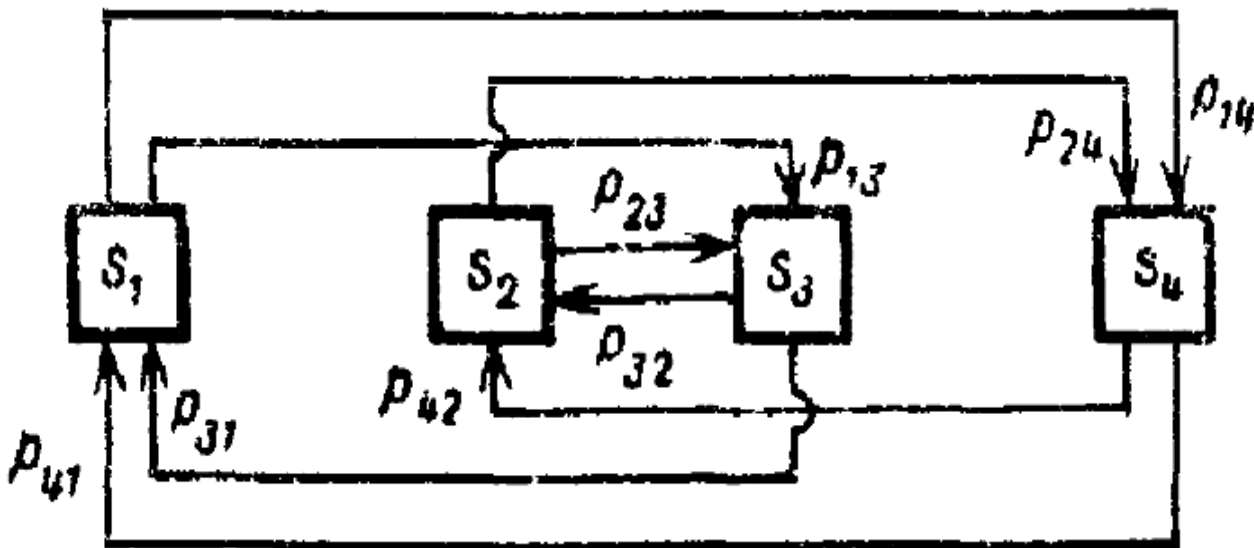
- балансовое условие

$$\sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_i p_{ij} = p_j \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^n p_{ji} \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

- нормировочное условие $\sum_{i=1}^n p_i = 1$

Циклическая цепь Маркова.

Пример

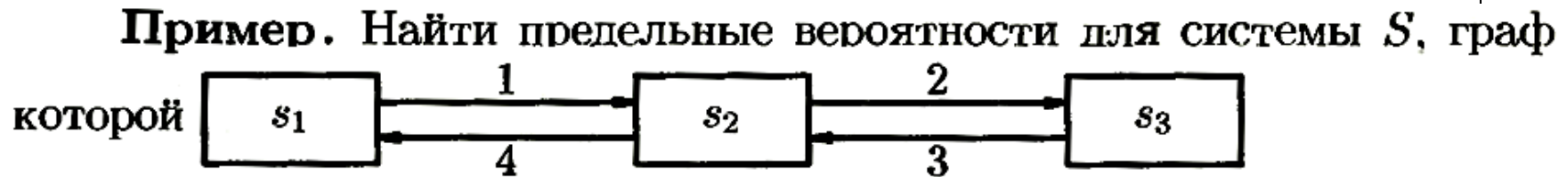
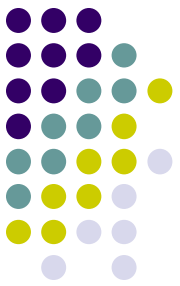


при k нечетном
 $p_1(k) + p_2(k) = 0$;
 $p_3(k) + p_4(k) = 1$

при k четном
 $p_1(k) + p_2(k) = 1$;
 $p_3(k) + p_4(k) = 0$

$$\| p_{ij} \| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & p_{13} & p_{14} \\ 0 & 0 & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & 0 & 0 \\ p_{41} & p_{42} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Предельные вероятности с непрерывным временем. Пример



○ Составляем дифференциальные уравнения Колмогорова:

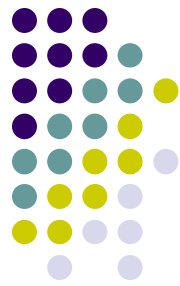
$$\begin{cases} p_1' = 4p_2 - p_1, \\ p_2' = p_1 + 3p_3 - (2 + 4) \cdot p_2, \\ p_3' = 2 \cdot p_2 - 3 \cdot p_3. \end{cases}$$

Тогда система алгебраических уравнений, описывающих стационарный режим системы S , принимает вид

$$\begin{cases} 4p_2 - p_1 = 0, \\ p_1 + 3p_3 - 6p_2 = 0, \\ 2p_2 - 3p_3 = 0, \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases}$$

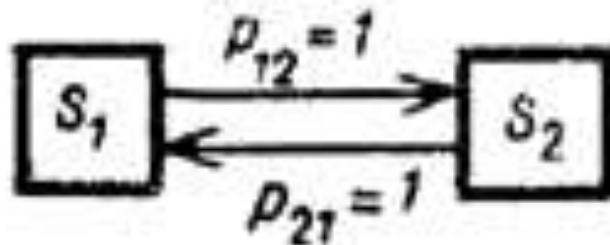
Решая эту систему, находим $p_1 = \frac{12}{17}$, $p_2 = \frac{3}{17}$, $p_3 = \frac{2}{17}$, т. е. система S в среднем 70,6 % будет находиться в состоянии s_1 ; 17,6 % — в состоянии s_2 ; 11,8 % — в состоянии s_3 .

Эргодические цепи Маркова



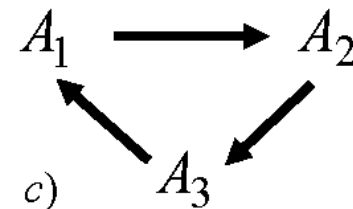
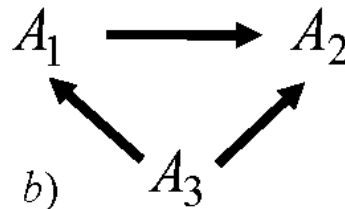
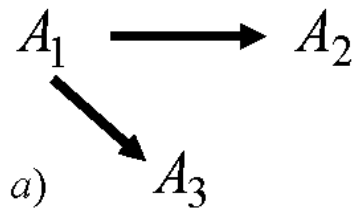
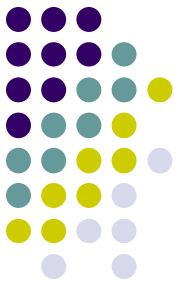
Марковский случайный процесс с дискретными состояниями и дискретным временем (цепь Маркова) системы S называется *эргодической цепью Маркова*, если у него существует стационарный режим, для чего:

1. множество всех состояний системы S должно быть эргодическим, т.е. в графе $G(S)$ все состояния транзитивные
 - из любого состояния s_i можно перейти в состояние s_j и вернуться обратно и состояния s_i, s_j могут не быть соседними.
2. цепь Маркова должна быть однородной: $p_{ij}(k) = p_{ij}$
3. в цепи Маркова моменты попадания в отдельные состояния не образуют циклов :



Эргодические цепи Маркова.

Пример

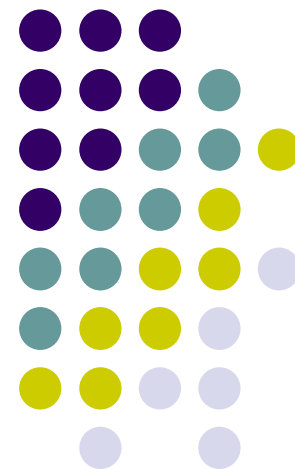


$$\mathbf{Q}_a = \begin{pmatrix} -(q_{12} + q_{13}) & q_{12} & q_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_b = \begin{pmatrix} -q_{12} & q_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q_{31} & q_{32} & -(q_{31} + q_{32}) \end{pmatrix}, \mathbf{Q}_c = \begin{pmatrix} -q_{12} & q_{12} & 0 \\ 0 & -q_{23} & q_{23} \\ q_{31} & 0 & -q_{31} \end{pmatrix}$$

- a) цепь не является слабо эргодической
- b) слабо эргодическая цепь (граф переходов не является ориентированно связным)
- c) эргодическая цепь (граф переходов ориентированно связан).

Марковский процесс с дискретными состояниями и дискретным временем

Однородная марковская цепь
Неоднородная марковская цепь



Однородная и неоднородная марковская цепь



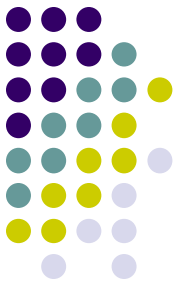
- Однородная марковская цепь - марковский процесс с дискретными состояниями, для которого вероятности перехода от шага к шагу не меняются

$$P_{ij} = P(S_j^{(k)} / S_i^{(k-1)})$$

- Неоднородная марковская цепь - марковская цепь, для которой вероятности перехода меняются от шага к шагу

$$P_{ij}^{(k)} = P(S_j^{(k)} / S_i^{(k-1)})$$

Однородная марковская цепь



- состояния системы после k шагов:

$$S_1(k), S_2(k), \dots, S_i(k), \dots, S_n(k)$$

- вероятности состояний системы после k шагов:

$$p_1(k), p_2(k), \dots, p_n(k), \quad p_1(k) + p_2(k) + \dots + p_n(k) = 1$$

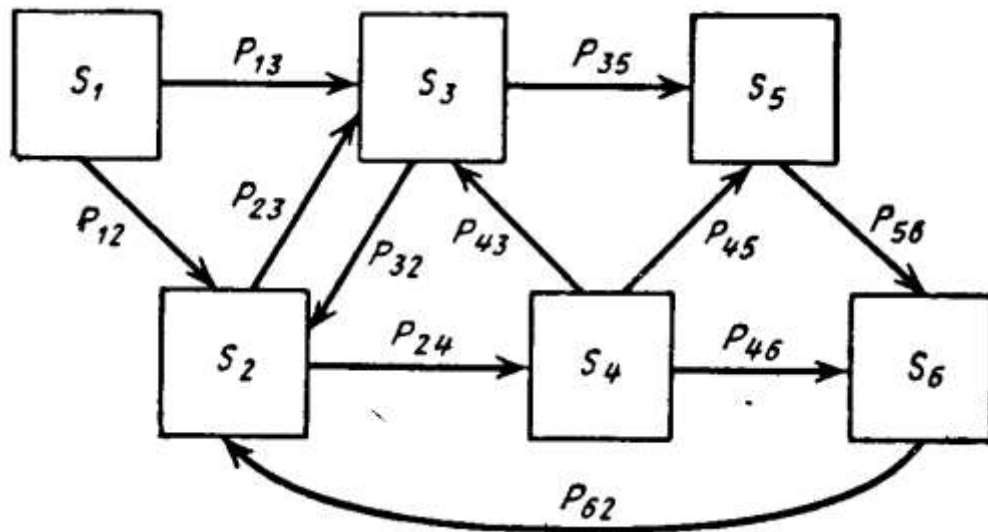
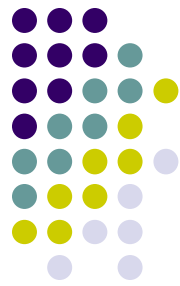
- вероятности перехода за один шаг из состояния S_i в S_j :

$$P_{ij} = P(S_j(k)/S_i(k-1))$$

- матрица переходных вероятностей:

$$|P_{ij}| = \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1j} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2j} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{i1} & P_{i2} & \dots & P_{ij} & \dots & P_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nj} & \dots & P_{nn} \end{vmatrix}$$

Размеченный граф состояний



$$\begin{aligned}P_{11} &= 1 - (P_{12} + P_{13}), \\P_{22} &= 1 - (P_{23} + P_{24}), \\P_{33} &= 1 - (P_{32} + P_{35}), \\P_{44} &= 1 - (P_{43} + P_{45} + P_{46}), \\P_{55} &= 1 - P_{56}, \\P_{66} &= 1 - P_{62}.\end{aligned}$$

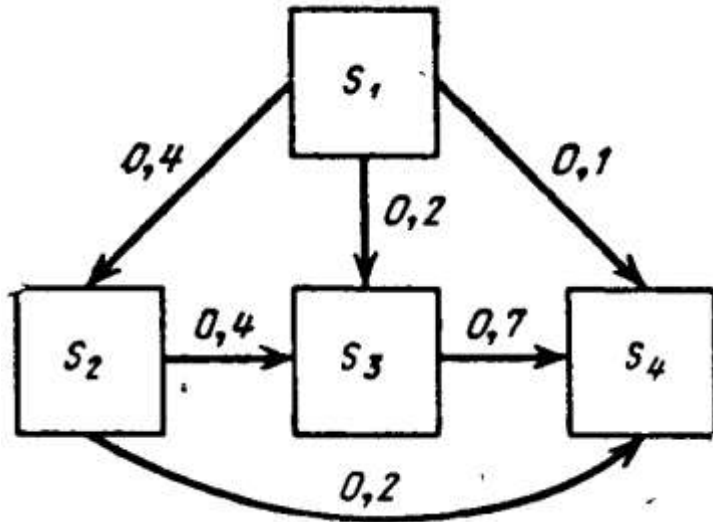
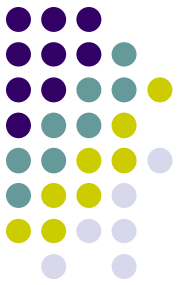
- вероятности в начальный момент (перед первым шагом):
 $p_1(0) = 0; \quad p_2(0) = 0; \quad \dots; \quad p_m(0) = 1; \quad \dots; \quad p_n(0) = 0$
- вероятности состояний после первого шага:
 $p_1(1) = P_{m1}; \quad p_2(1) = P_{m2}; \quad \dots; \quad p_m(1) = P_{mm}; \quad \dots; \quad p_n(1) = P_{mn}.$

- [illegible]

- $$p_i(3) = \sum_{j=1}^n p_j(2) P_{ji},$$

- $$p_i(k) = \sum_{j=1}^n p_j(k-1) P_{ji} \quad (i = 1, \dots, n).$$

Однородная марковская цепь. Пример



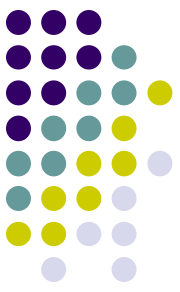
Задача. Определить вероятности состояний заданной графом системы S после четырех шагов из начального состояния S_1

- вероятности состояний в начальный момент: $p_1(0) = 1$
- вероятности перехода из состояния S_1 :

$$P_{12} = 0,4; \quad P_{13} = 0,2; \quad P_{14} = 0,1$$

$$P_{11} = 1 - (P_{12} + P_{13} + P_{14}) = 0,3$$

Условные вероятности состояний системы после одного шага



- вероятности перехода из состояний S_2, S_3, S_4 :

$$P_{21}=0; \quad P_{22}=0,4; \quad P_{23}=0,4; \quad P_{24}=0,2;$$

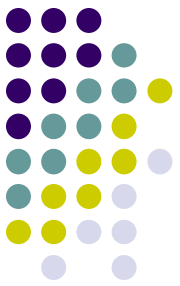
$$P_{31}=0; \quad P_{32}=0; \quad P_{33}=0,3; \quad P_{34}=0,7;$$

$$P_{41}=0; \quad P_{42}=0; \quad P_{43}=0; \quad P_{44}=1.$$

- матрица переходных вероятностей динамической системы S :

$$\|P_{ij}\| = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вероятности состояний системы после 2-го и 3-го шагов



- вероятности состояний после 1-ого шага:

$$p_1(1) = 0,3; \quad p_2(1) = 0,4; \quad p_3(1) = 0,2; \quad p_4(1) = 0,1$$

- вероятности состояний после 2-го шага:

$$p_1(2) = p_1(1) P_{11} = 0,3 \cdot 0,3 = \underline{0,09};$$

$$p_2(2) = p_1(1) P_{12} + p_2(1) P_{22} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,4 = \underline{0,28};$$

$$p_3(2) = p_1(1) P_{13} + p_2(1) P_{23} + p_3(1) P_{33} = 0,3 \cdot 0,2 + 0,4 \cdot 0,4 + 0,2 \cdot 0,3 = \underline{0,28};$$

$$p_4(2) = p_1(1) P_{14} + p_2(1) P_{24} + p_3(1) P_{34} + p_4(1) P_{44} = 0,3 \cdot 0,1 + 0,4 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 1 = \underline{0,35};$$

- вероятности состояний после 3-го шага:

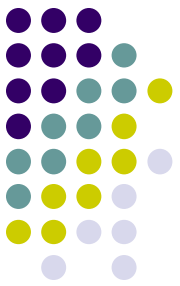
$$p_1(3) = p_1(2) P_{11} = 0,09 \cdot 0,3 = \underline{0,027};$$

$$p_2(3) = p_1(2) P_{12} + p_2(2) P_{22} = 0,09 \cdot 0,4 + 0,28 \cdot 0,4 = \underline{0,148};$$

$$p_3(3) = p_1(2) P_{13} + p_2(2) P_{23} + p_3(2) P_{33} = 0,09 \cdot 0,2 + 0,28 \cdot 0,4 + 0,28 \cdot 0,3 = \underline{0,214};$$

$$p_4(3) = p_1(2) P_{14} + p_2(2) P_{24} + p_3(2) P_{34} + p_4(2) P_{44} = \\ = 0,09 \cdot 0,1 + 0,28 \cdot 0,2 + 0,28 \cdot 0,7 + 0,35 \cdot 1 = \underline{0,611}.$$

Вероятности состояний системы после 4 шагов



- вероятности состояний после 4-го шага:

$$p_1(4) = p_1(3) P_{11} = \underline{0,0081};$$

$$p_2(4) = p_1(3) P_{12} + p_2(3) P_{22} = 0,27 \cdot 0,4 + 0,148 \cdot 0,4 = \underline{0,0700};$$

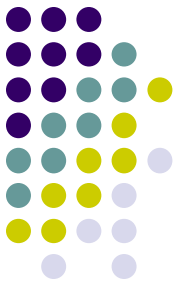
$$\begin{aligned} p_3(4) &= p_1(3) P_{13} + p_2(3) P_{23} + p_3(3) P_{33} = \\ &= 0,027 \cdot 0,2 + 0,148 \cdot 0,4 + 0,214 \cdot 0,3 = \underline{0,1288}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4(4) &= p_1(3) P_{14} + p_2(3) P_{24} + p_3(3) P_{34} + p_4(3) P_{44} = \\ &= 0,027 \cdot 0,1 + 0,148 \cdot 0,2 + 0,214 \cdot 0,7 + 0,611 \cdot 1 = \underline{0,7931}. \end{aligned}$$

- вероятности состояний после четырех шагов:

$$p_1(4) \approx 0,008; p_2(4) \approx 0,070; p_3(4) \approx 0,129; p_4(4) \approx 0,793.$$

Неоднородная марковская цепь



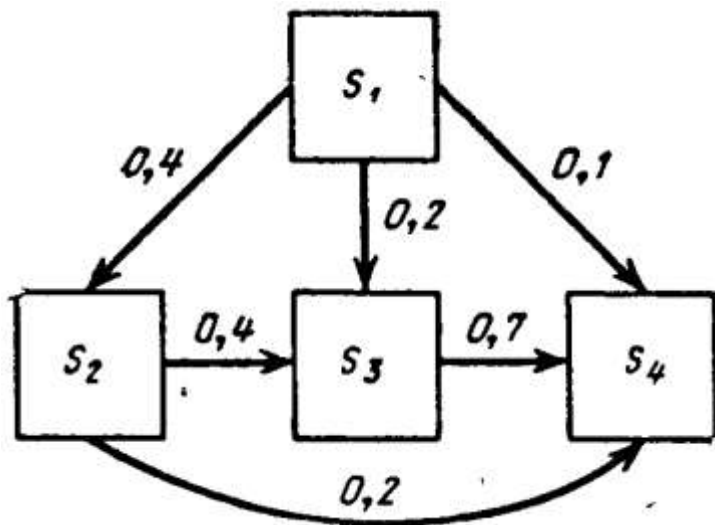
- Неоднородная марковская цепь - марковская цепь, для которой вероятности перехода меняются от шага к шагу.
- Условные вероятности перехода системы из состояния S_i в состояние S_j на k -ом шаге:

$$P_{ij}^{(k)} = P(S_j^{(k)} / S_i^{(k-1)})$$

- вероятность перехода системы S после k шагов в состояние S_i

$$p_i(k) = \sum_j p_j(k-1) P_{ji}^{(k)} \quad (i = 1, \dots, n)$$

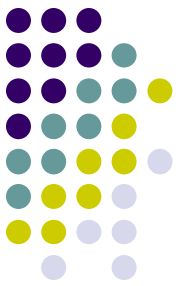
Неоднородная марковская цепь. Пример



Задача. Определить вероятности состояний заданной графом системы после 3-х шагов с матрицами переходов для трех последовательных шагов:

$$\|P_{ij}^{(1)}\| = \begin{vmatrix} 0,3 & 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0 & 0,4 & 0,4 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0,3 & 0,7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \|P_{ij}^{(2)}\| = \begin{vmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,3 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \|P_{ij}^{(3)}\| = \begin{vmatrix} 0,05 & 0,3 & 0,4 & 0,25 \\ 0 & 0,1 & 0,6 & 0,3 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0,9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Вероятности состояний системы после двух шагов



- вероятности состояний системы после 1-го шага:

$$p_1(1) = 0,3; \quad p_2(1) = 0,4; \quad p_3(1) = 0,2; \quad p_4(1) = 0,1;$$

- вероятности состояний системы после 2-го шага:

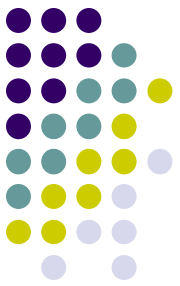
$$p_1(2) = p_1(1) P_{11}^{(2)} = 0,3 \cdot 0,1 = \underline{0,03};$$

$$p_2(2) = p_1(1) P_{12}^{(2)} + p_2(1) P_{22}^{(2)} = 0,3 \cdot 0,4 + 0,4 \cdot 0,2 = \underline{0,20};$$

$$\begin{aligned} p_3(2) &= p_1(1) P_{13}^{(2)} + p_2(1) P_{23}^{(2)} + p_3(1) P_{33}^{(2)} = \\ &= 0,3 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,5 + 0,2 \cdot 0,2 = \underline{0,33}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4(2) &= p_1(1) P_{14}^{(2)} + p_2(1) P_{24}^{(2)} + p_3(1) P_{34}^{(2)} + p_4(1) P_{44}^{(2)} = 0,3 \cdot 0,2 + \\ &+ 0,4 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,8 + 0,1 \cdot 1 = \underline{0,44}; \end{aligned}$$

Вероятности состояний системы после трех шагов



- вероятности состояний системы после 3-го шага:

$$p_1(3) = p_1(2) P_{11}^{(3)} = 0,03 \cdot 0,05 \approx \underline{0,002};$$

$$p_2(3) = p_1(2) P_{12}^{(3)} + p_2(2) P_{22}^{(3)} = 0,03 \cdot 0,3 + 0,20 \cdot 0,1 = \underline{0,029};$$

$$\begin{aligned} p_3(3) &= p_1(2) P_{13}^{(3)} + p_2(2) P_{23}^{(3)} + p_3(2) P_{33}^{(3)} = \\ &= 0,3 \cdot 0,4 + 0,20 \cdot 0,6 + 0,33 \cdot 0,1 = \underline{0,165}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_4(3) &= p_1(2) P_{14}^{(3)} + p_2(2) P_{24}^{(3)} + p_3(2) P_{34}^{(3)} + p_4(2) P_{44}^{(3)} = \\ &= 0,03 \cdot 0,25 + 0,20 \cdot 0,3 + 0,33 \cdot 0,9 + 0,44 \cdot 1 \approx \underline{0,804}. \end{aligned}$$

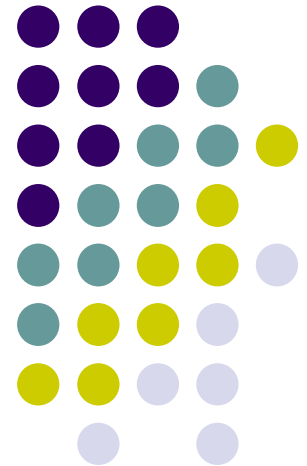
- вероятности состояний системы после трех шагов:

$$p_1(3) \approx 0,002; \quad p_2(3) = 0,029; \quad p_3(3) = 0,165; \quad p_4(3) \approx 0,804.$$

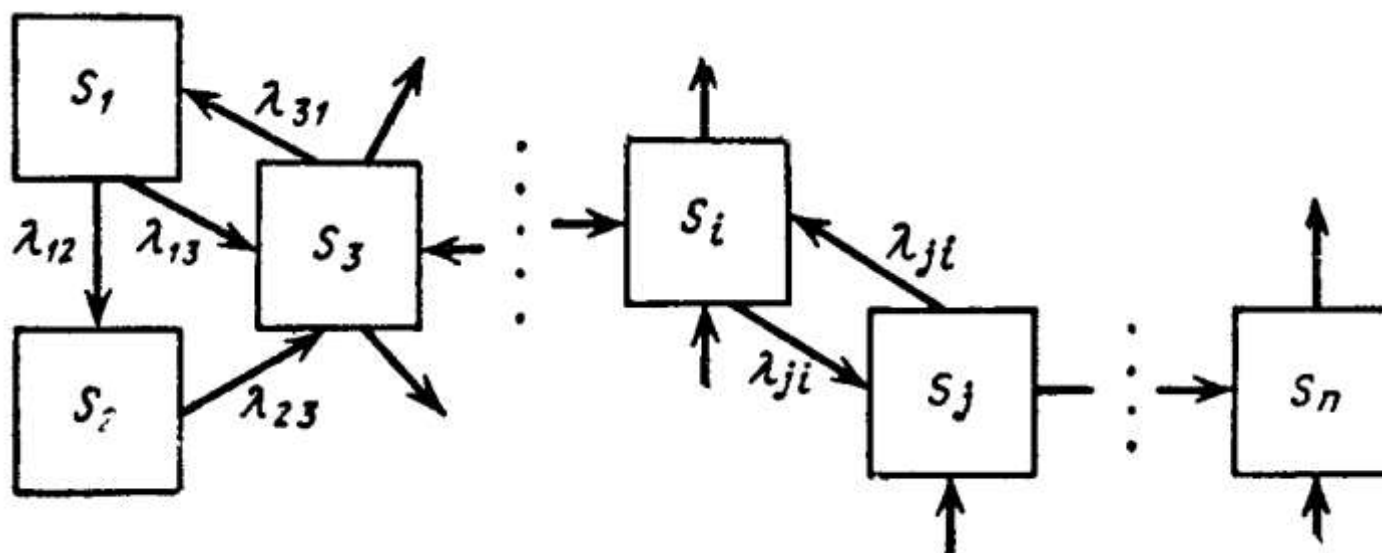
Марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем

Однородная и неоднородная
непрерывная цепь Маркова

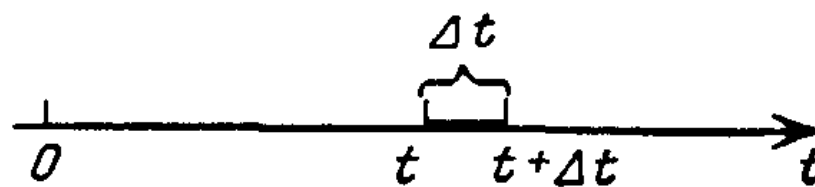
Дифференциальные
уравнения Колмогорова



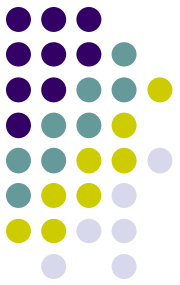
Понятие непрерывной цепи Маркова



$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},$$

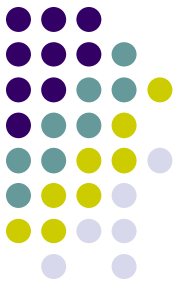


Непрерывная цепь Маркова



- **Плотностью вероятности перехода** λ_{ij} называется предел отношения вероятности перехода системы за время Δt из состояния S_i в соседнее состояние S_j к длине промежутка Δt :
$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P_{ij}(\Delta t)}{\Delta t},$$
 - где $P_{ij}(\Delta t)$ — вероятность того, что система, находившаяся в момент t в состоянии S_i за время Δt перейдет из него в состояние S_j ($i \neq j$).
 - с точностью до бесконечно малых высших порядков:
$$P_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij} \Delta t$$
- **Однородным** называется марковский процесс, если все плотности вероятностей перехода λ_{ij} не зависят от t
- **Неоднородным** называется марковский процесс, если эти плотности представляют собой функции времени $\lambda_{ij}(t)$

Дифференциальные уравнения Колмогорова. Вывод

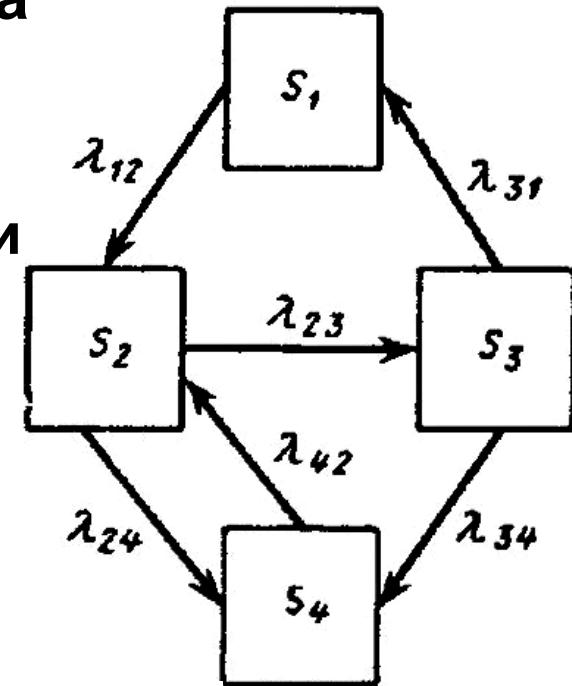


- Вероятность того, что в момент $t+\Delta t$ система будет находиться в состоянии S_1 :

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t) (1 - \lambda_{12} \Delta t) + p_3(t) \lambda_{31} \Delta t$$

- вероятность, что, находясь в состоянии S_1 , за время Δt система не вышла из состояния S_1 : $1 - \lambda_{12} \Delta t$
- вероятность, что за время Δt система перешла из состояния S_3 в состояние S_1 :

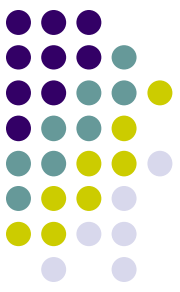
$$p_3(t) \lambda_{31} \Delta t$$



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_1(t + \Delta t) - p_1(t)}{\Delta t} = -\lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{31} p_3(t)$$

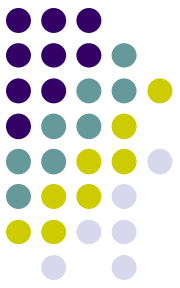
$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda_{12} p_1(t) + \lambda_{31} p_3(t)$$

Правило составления дифференциальных уравнений для вероятностей состояний



- В левой части каждого уравнения стоит производная вероятности состояния, а правая часть содержит столько членов, сколько стрелок связано с данным состоянием:
 - если стрелка направлена из состояния, соответствующий член имеет знак «минус»;
 - если в состояние — знак «плюс»;
 - каждый член равен произведению плотности вероятности перехода, соответствующей данной стрелке, умноженной на вероятность того состояния, из которого исходит стрелка.

Дифференциальные уравнения Колмогорова

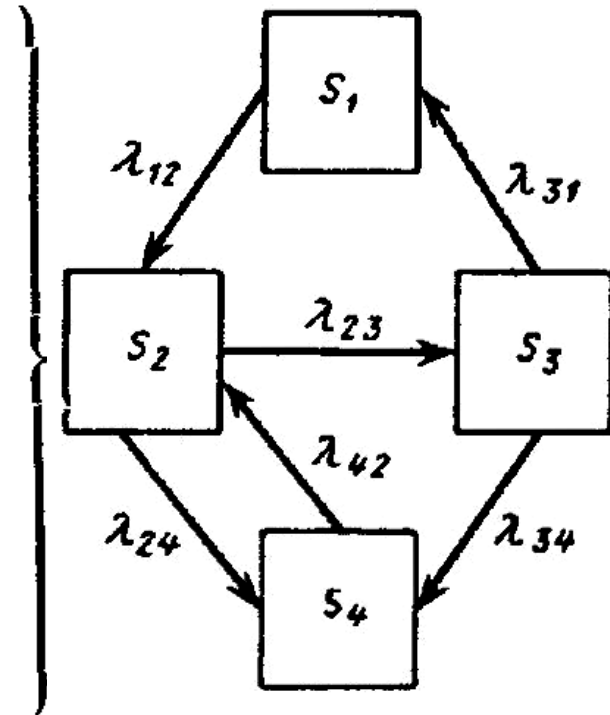


$$\frac{dp_1}{dt} = -\lambda_{12} p_1 + \lambda_{31} p_3,$$

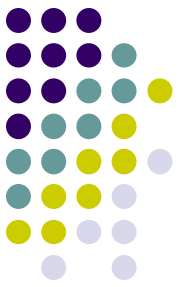
$$\frac{dp_2}{dt} = -\lambda_{23} p_2 - \lambda_{24} p_2 + \lambda_{12} p_1 + \lambda_{42} p_4,$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -\lambda_{31} p_3 - \lambda_{34} p_3 + \lambda_{23} p_2,$$

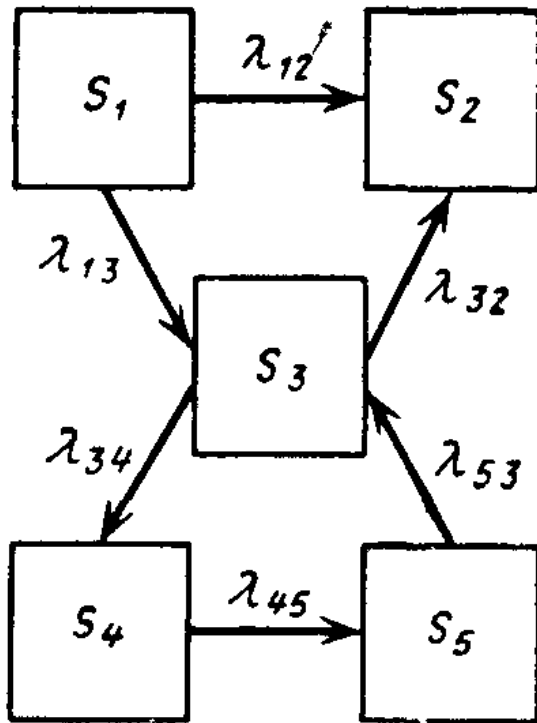
$$\frac{dp_4}{dt} = -\lambda_{42} p_4 + \lambda_{24} p_2 + \lambda_{34} p_3.$$



Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний. Пример



Решение. Система уравнений Колмогорова имеет вид:



$$\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13}) p_1,$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3,$$

$$\frac{dp_3}{dt} = -(\lambda_{32} + \lambda_{34}) p_3 + \lambda_{13} p_1 + \lambda_{53} p_5,$$

$$\frac{dp_4}{dt} = -\lambda_{45} p_4 + \lambda_{34} p_3,$$

$$\frac{dp_5}{dt} = -\lambda_{53} p_5 + \lambda_{45} p_4.$$

Начальные условия:

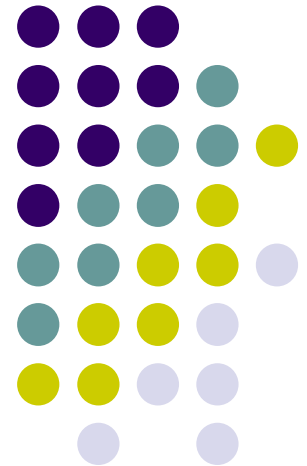
$$\text{при } t=0 \quad p_1=1, \quad p_2=p_3=p_4=p_5=0.$$

Потоки в процессах с непрерывным временем

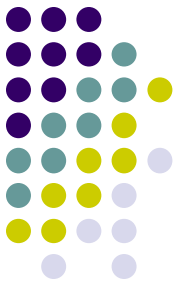
Потоки событий. Свойства
простейшего потока

Законы распределения в
потоке Пуассона

Потоки Пальма, Эрланга

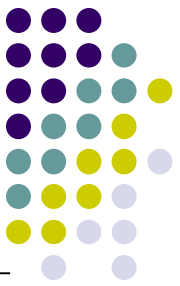


Потоки событий



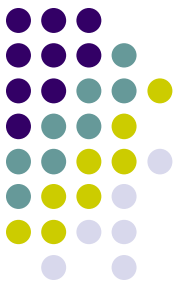
- ***Потоком событий*** называется последовательность однородных событий, следующих одно за другим в случайные моменты времени.
- Поток событий называется ***регулярным***, если события следуют одно за другим через строго определенные промежутки времени.
- Поток событий, обладающий свойствами стационарности, безпоследствия (марковости), ординарности называется ***простейшим*** (или ***стационарным пуассоновским***) потоком.
- Если поток событий без последствия ординарен, но не стационарен, он называется ***нестационарным пуассоновским потоком***.

Свойства ПОТОКОВ СОБЫТИЙ СМО



- **Ординарность:** вероятность появления 2-х и более заявок в сколь угодно малом промежутке есть величина высшего порядка малости относительно вероятности 1-ой заявки;
- **Стационарность:** вероятность поступления определенного числа заявок за определенный промежуток не зависит от времени;
- **Безпоследствие:** вероятность поступления определенного числа заявок за определенный промежуток не зависит от их поступления прежде.

Пуассоновский поток событий. Пример



Пример 1.33. Телефонная станция обслуживает 2000 абонентов. Вероятность позвонить любому абоненту в течение часа равна 0,003. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят 5 абонентов?

○ Среднее число позвонивших в течение часа абонентов равно $2000 \cdot 0,003 = 6$ ($a = np = \lambda t$). Стало быть, $p_5 = \frac{6^5 e^{-6}}{5!} \approx 0,13$. ●

Пуассоновский поток событий. Свойства

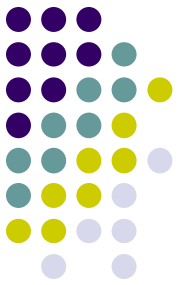


- Свойство *стационарности* означает, что вероятность появления k событий на участке времени длины τ зависит только от его длины (т. е. не зависит от начала его отсчета).
 - *интенсивность* λ потока (т. е. *среднее число событий, появляющихся в единицу времени*), есть величина постоянная: $\lambda(t) = \lambda$.
- Свойство *ординарности* означает, что вероятность появления более одного события за малый участок времени Δt пренебрежительно мала по сравнению с вероятностью появления только одного события (события появляются не группами, а поодиночке).
- Свойство *отсутствия последствия* означает, что вероятность появления k событий на любом участке времени длины τ не зависит от того, сколько событий появилось на любом другом не пересекающимся с ним участком (говорят: «будущее» потока не зависит от «прошлого»).
- вероятность появления m событий простейшего потока за время t

$$P_t(m) = p_m = \frac{(\lambda t)^m \cdot e^{-\lambda t}}{m!}.$$

Простейший поток событий.

Стационарность

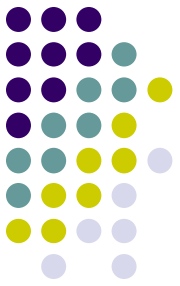


- Поток событий называется *с т а ц и о н а р н ы м*, если вероятность некоторого числа событий за *промежуток* времени длиной τ зависит только от его *длины* и не зависит от того, *где* именно на оси $0t$ он расположен.

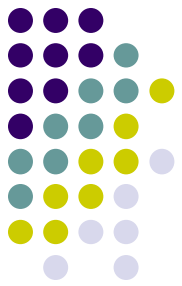


- стационарность (однородность) потока по времени: вероятностные характеристики потока не изменяются во времени.
- среднее число событий в единицу времени (интенсивность потока событий) для стационарного потока является постоянным.

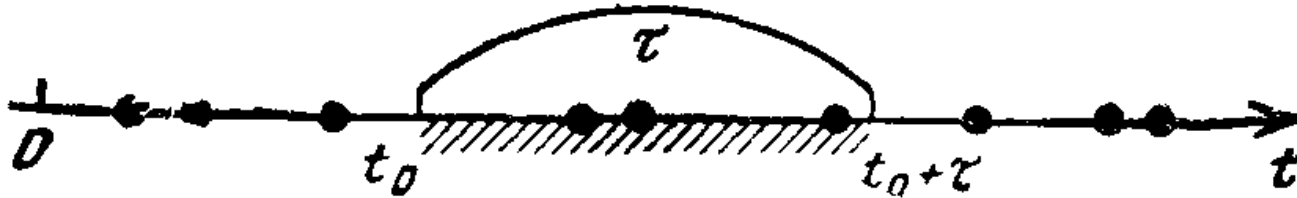
Безпоследствие. Ординарность



- **Отсутствие последствия** в потоке означает, что события, образующие поток, появляются в последовательные моменты времени *независимо* друг от друга.
- **О р д и н а р н о с т ь** потока означает, что для любого момента времени появление в потоке двух и более событий невозможно, т.е. события происходят поодиночке, а не парами, тройками и т. д.
- При суперпозиции достаточно большого числа стационарных и ординарных потоков с последствием получается простейший суммарный поток и тем точнее, чем большее число потоков складывается.



Простейший поток событий. Закон Пуассона



- Вероятность ровно m событий за время $[t_0, t_0 + \tau]$:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a} \quad (m = 0, 1, \dots),$$

- a — среднее число событий за промежуток τ .
- для стационарного пуассоновского потока:

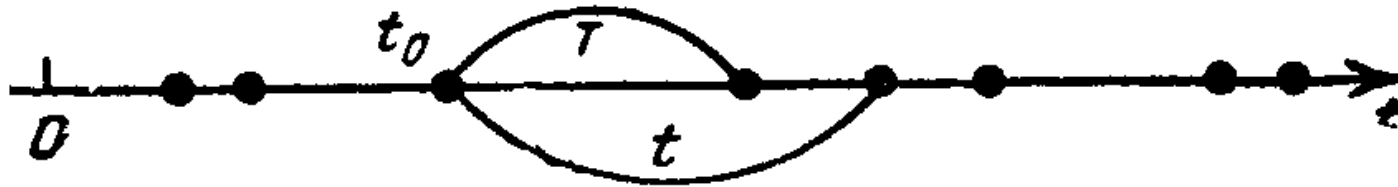
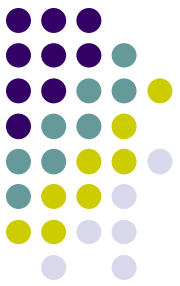
$$a = \lambda \tau, \quad \lambda = \text{const}$$

- для нестационарного пуассоновского потока:

$$a = \int_{t_0}^{t_0 + \tau} \lambda(t) dt, \quad \lambda = \lambda(t)$$

Простейший поток событий.

Показательный закон



- Функция распределения интервала времени T между соседними событиями в потоке:

$$F(t) = P(T < t) = 1 - P_0 = 1 - e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$$

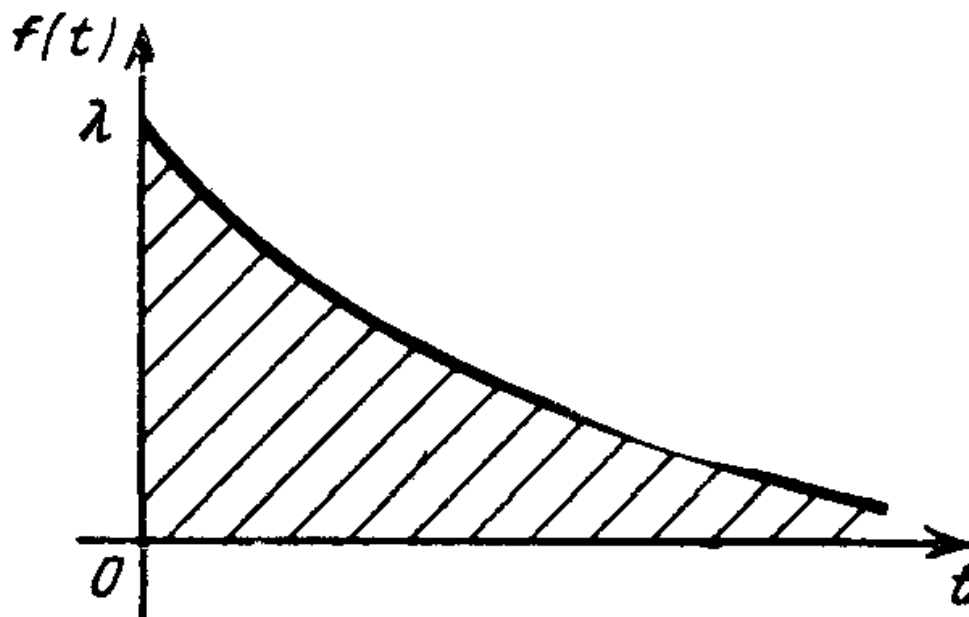
$$P_0 = \frac{a^0}{0!} e^{-a} = e^{-a} = e^{-\lambda t} \quad - \text{вероятность, что на участок } T \text{ не попадет ни одного события потока}$$

- плотность распределения T : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$

- м.о. T : $m_t = \int_0^{\infty} t f(t) dt = \lambda \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$

- дисперсия T : $D_t = \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - m_t^2 = \int_0^{\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$

Показательный (экспоненциальный) закон

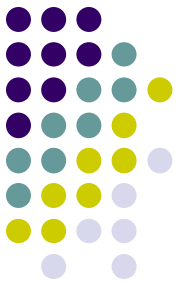


$$m_t = \sigma_t = \frac{1}{\lambda}$$

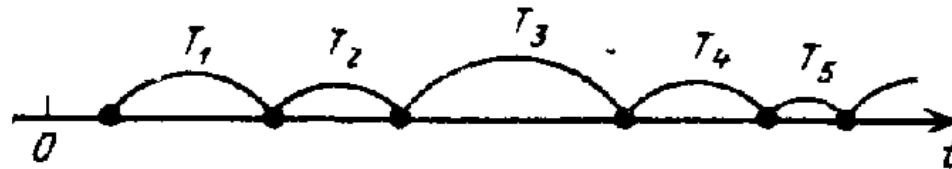
$$P_1(\Delta t) \approx \lambda \Delta t$$

- В *простейшем* потоке промежуток времени T между соседними событиями распределен по *показательному* закону и его среднее значение и среднее квадратическое отклонение равны $1/\lambda$, где λ — интенсивность потока.
- Вероятность появления события на элементарном интервале времени Δt : $P_1(\Delta t) \approx 1 - e^{-\lambda \Delta t} = \lambda \Delta t$

Поток Пальма

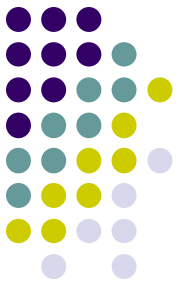


- Поток событий называется потоком Пальма (потоком с ограниченным последствием), если промежутки времени между последовательными событиями: $T_1, T_2, \dots, T_i, \dots$ представляют собой независимые, одинаково распределенные случайные величины



- Простейший поток есть частный случай потока Пальма:
 - с.в. T_i имеют показательное распределение
 - простейший поток есть поток без последствия
 - промежутки времени между любыми двумя событиями независимы

Потоки Эрланга



- Поток Эрланга k -го порядка $\mathcal{E}_k$ называется поток, получающийся в результате сохранения в простейшем потоке каждой k -й точки и исключения остальных. :

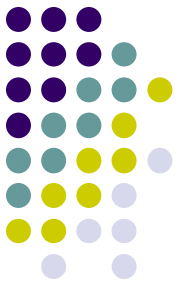
- Поток Эрланга 2-го порядка $\mathcal{E}_2$:



- Простейший поток есть поток Эрланга 1-го порядка $\mathcal{E}_1$
- Интервал времени T между соседними событиями в потоке $\mathcal{E}_k$

$$T = T_1 + T_2 + \dots + T_k = \sum_{i=1}^k T_i$$

Закон Эрланга k-го порядка



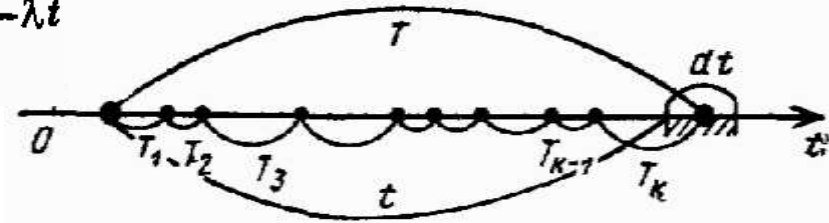
- Закон распределения интервала T между соседними событиями в потоке $\mathcal{E}_k$ называется **законом Эрланга k-го порядка**.

- В простейшем потоке с интенсивностью λ и интервалами вероятность того, что в элементарный интервал $(t, t+dt)$ суммарный интервал T попадет $T_1, T_2, \dots, T_{k-1}$:

$$P_{k-1} = \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} e^{-a} = \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t}$$

- T_k :

$$P_k = \lambda dt$$

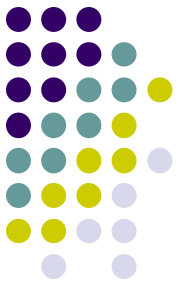


- плотность распределения закона Эрланга k-го порядка:

$$f_k(t) = \frac{\lambda (\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$$

- при $k = 1$ $f_1(t) = \lambda e^{-\lambda t} \quad (t > 0)$

Характеристики потока Эрланга k-го порядка



- С.в. $T \sim f_k(t)$ получается сложением k независимых с.в. $T_i \sim f_k(t)$:

$$T = \sum_{i=1}^k T_i$$

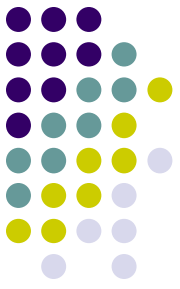
- T_i : $m_i = \sigma_i = \frac{1}{\lambda}$

- T : математическое ожидание $m_t^{(k)} = \frac{k}{\lambda}$

- T : дисперсия $D_t^{(k)} = \frac{k}{\lambda^2}$

- T : среднее квадратическое отклонение $\sigma_t^{(k)} = \frac{\sqrt{k}}{\lambda}$

Характеристики потока Эрланга k-го порядка



- Λ_k – интенсивность потока $\mathcal{E}_k$:

$$\Lambda_k = \lambda/k; \quad \lambda = k\Lambda_k; \quad \Lambda_k = \Lambda = \text{const}$$

- плотность потока: $f_k(t) = \frac{(k\Lambda_k)^k}{(k-1)!} t^{k-1} e^{-k\Lambda_k}, \quad (t \geq 0)$

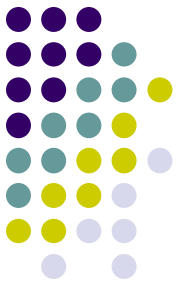
- математическое ожидание: $m_t^{(k)} = \frac{1}{\Lambda_k} = \frac{1}{\Lambda}$

- дисперсия: $D_t^{(k)} = \frac{1}{k\Lambda_k^2} = \frac{1}{k\Lambda^2}$

- среднее квадратическое отклонение: $\sigma_t^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{k}\Lambda_k} = \frac{1}{\sqrt{k}\Lambda}$

- При $k \rightarrow \infty$ поток Эрланга заданной интенсивности Λ неограниченно приближается к регулярному потоку с постоянным интервалом между событиями $T = \text{const} = 1/\Lambda$

Поток Эрланга. Пример



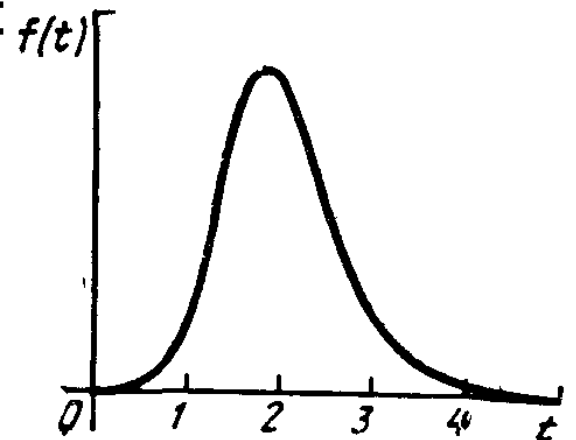
- В результате обработки интервалов времени между событиями в некотором опыте получены среднее значение интервала $m_t = 2$ года и с.к.о. интервала $\sigma_t = 0,9$ года. Требуется подобрать поток Эрланга, обладающий приблизительно теми же характеристиками и найти его интенсивность Λ и порядок k .

- Интенсивность: $\Lambda = 1/m_t = 1/2 = 0,5$ (соб/год)

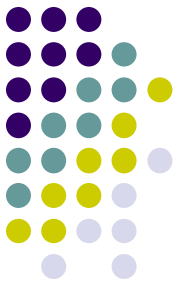
- Порядок: $k = \left(\frac{1}{\sigma_t \Lambda} \right)^2 = \left(\frac{1}{0,9 \cdot 0,5} \right)^2 \approx 4,9, \quad k = 5$

- Плотность потока Эрланга 5 порядка:

$$\begin{aligned} f_5(t) &= \frac{(5 \cdot 0,5)^5}{4!} t^4 e^{-5 \cdot 0,5 t} = \\ &= 4,1 t^4 e^{-2,5 t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$



Применение потоков Эрланга в статистическом анализе



- возможность, задаваясь различными порядками k , получать потоки с различным последствием от отсутствия последствия ($k=1$) до регулярного потока событий ($k=\infty$)
 - возможность сводить немарковские процессы к марковским
- упрощение реального потока событий потоком Эрланга с последствием и м.о. и дисперсией интервала между событиями реального потока
 - приближенное представление потоков Пальма любого вида, так как потоки Эрланга различных порядков образуют целую гамму потоков
- порядок потока Эрланга k может служить мерой последствия.

Модели непрерывных марковских цепей

Процесс гибели и
размножения
Циклический процесс

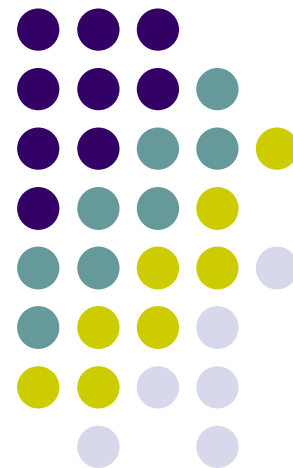
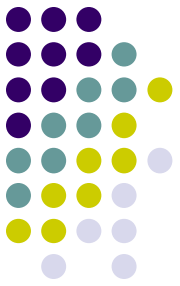
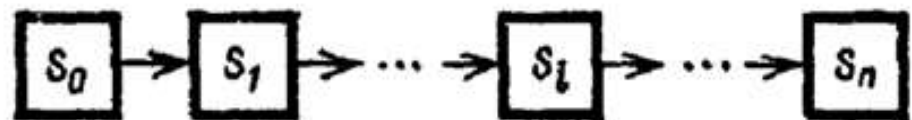
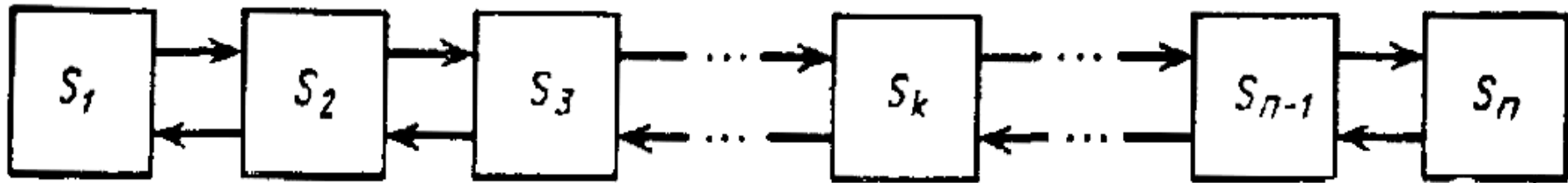


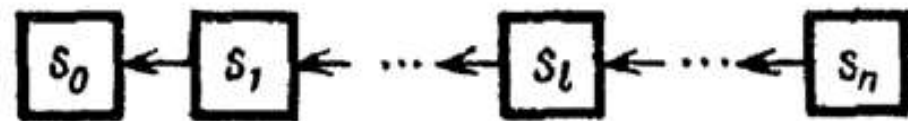
Схема гибели и размножения



- Марковская непрерывная цепь называется «процессом гибели и размножения», если все состояния можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из средних состояний ($S_2, \dots, S_{n-1}$) связано прямой и обратной связью с



процесс «чистого размножения»

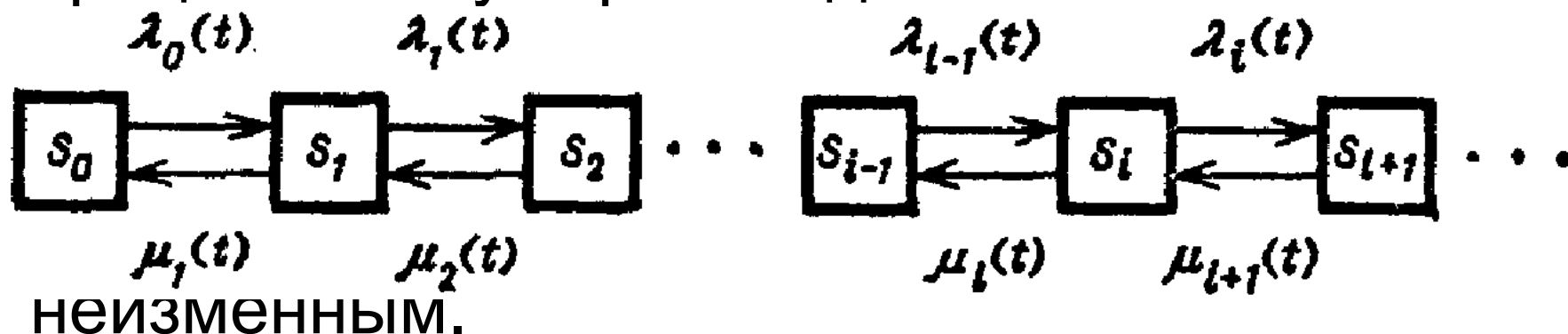


процесс «чистой гибели»

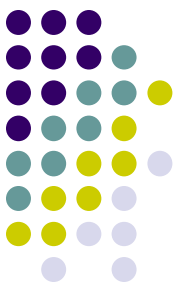
Процесс гибели и размножения



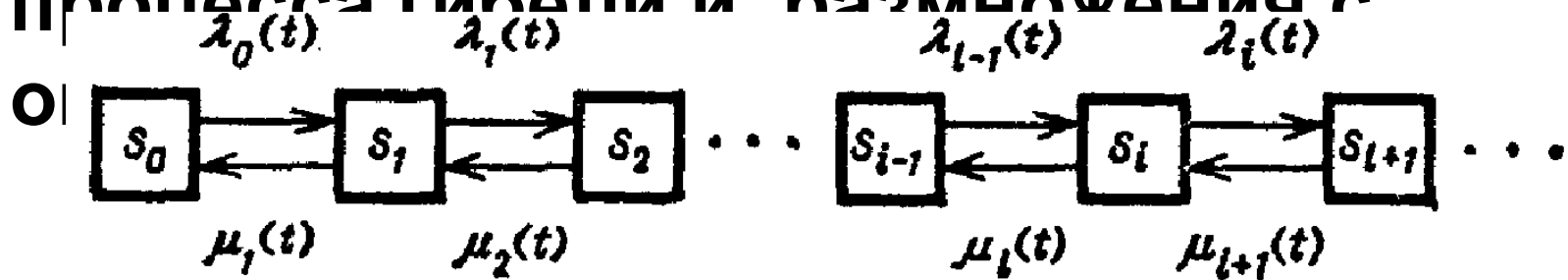
- Марковским процессом гибели и размножения с непрерывным временем** называется такой случайный процесс, который может принимать только целые неотрицательные значения и изменения этого процесса могут происходить в любой момент



процесса гибели и размножения



- Система уравнений Колмогорова для процесса гибели и размножения с



$$dp_0(t)/dt = \mu_1(t) p_1(t) - \lambda_1(t) p_0(t),$$

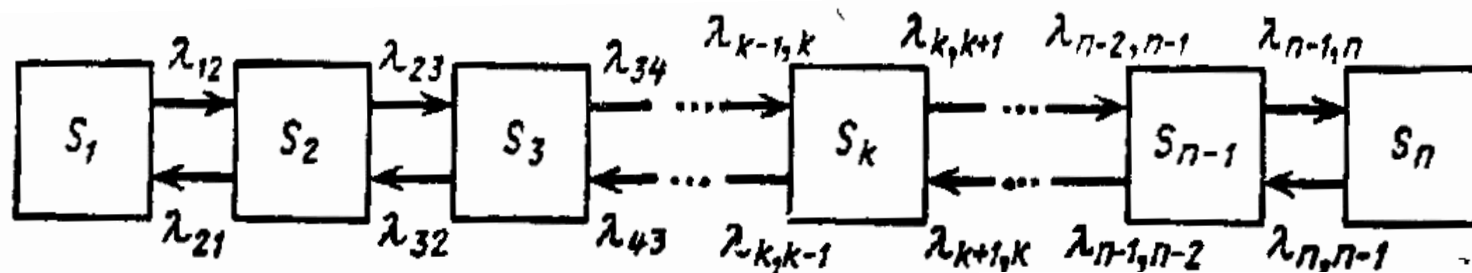
.....

$$dp_i(t)/dt = \lambda_{i-1}(t) p_{i-1}(t) + \mu_{i+1}(t) p_{i+1}(t) - (\lambda_i(t) + \mu_i(t)) p_i(t) \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

где $p_i(t) = \mathbf{P}\{S(t) = s_i\} = \mathbf{P}\{X(t) = i\} \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$

$$p_i(0) \geq 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots), \quad \sum_i p_i(0) = 1$$

Уравнения предельных вероятностей состояний



$$S_1: \lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2$$

$$S_2: \lambda_{23} p_2 + \lambda_{21} p_2 = \lambda_{12} p_1 + \lambda_{32} p_3,$$

$$\lambda_{23} p_2 = \lambda_{32} p_3,$$

$$\lambda_{34} p_3 = \lambda_{43} p_4,$$

.....

$$\lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k-1} p_k,$$

.....

$$\lambda_{n-1,n} p_{n-1} = \lambda_{n,n-1} p_n$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$$

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} p_1,$$

$$p_3 = \frac{\lambda_{23} \lambda_{12}}{\lambda_{32} \lambda_{21}} p_1,$$

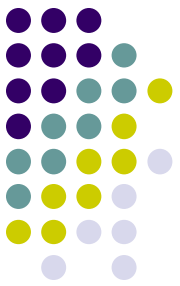
.....

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,k} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{k,k-1} \dots \lambda_{21}} p_1,$$

.....

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21}} p_1.$$

Предельная вероятность начального состояния S_1



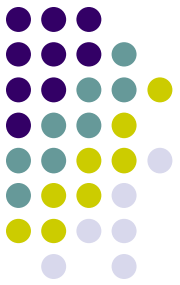
$$\rho_1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \rho_1 + \frac{\lambda_{23} \lambda_{12}}{\lambda_{32} \lambda_{21}} \rho_1 + \dots + \frac{\lambda_{k-1, k} \lambda_{k-2, k-1} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{k, k-1} \lambda_{k-1, k-2} \dots \lambda_{21}} \rho_1 +$$

$$+ \dots + \frac{\lambda_{n-1, n} \lambda_{n-2, n-1} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{n, n-1} \lambda_{n-1, n-2} \dots \lambda_{21}} \rho_1 = 1,$$

откуда

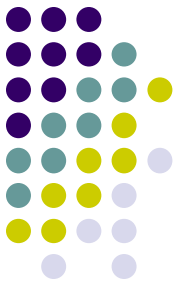
$$\rho_1 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} + \frac{\lambda_{23} \lambda_{12}}{\lambda_{32} \lambda_{21}} + \dots + \frac{\lambda_{k-1, k} \lambda_{k-2, k-1} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{k, k-1} \lambda_{k-1, k-2} \dots \lambda_{21}} + \dots + \frac{\lambda_{n-1, n} \dots \lambda_{12}}{\lambda_{n, n-1} \dots \lambda_{21}}}$$

Правило для предельных вероятностей состояний

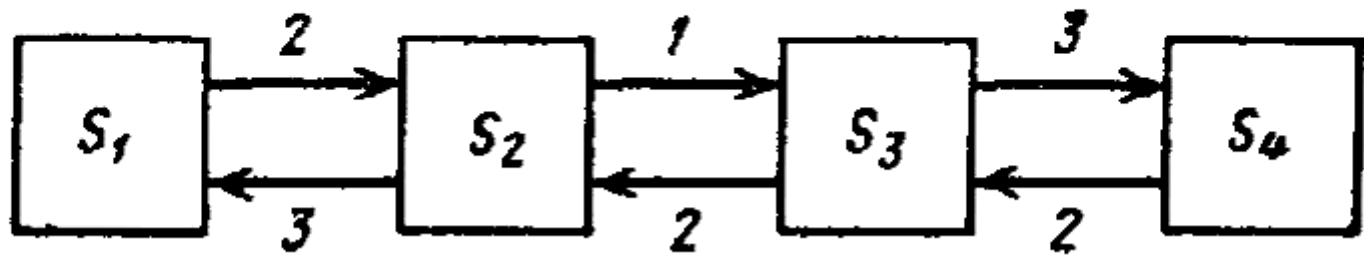


- В числителе стоит произведение всех плотностей вероятности перехода (интенсивностей) λ_{ij} , стоящих у стрелок, направленных с л е в а н а п р а в о с начала и до той стрелки, которая идет в состояние S_k ;
- В знаменателе — произведение всех интенсивностей λ_{ij} , стоящих у стрелок, идущих с п р а в а н а л е в о с начала и до стрелки, исходящей из состояния S_k .

Задача «гибели и размножения». Пример



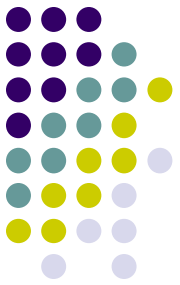
Найти предельные вероятности состояний для процесса гибели и размножения, граф которого показан на рис.



Решение По формулам имеем:

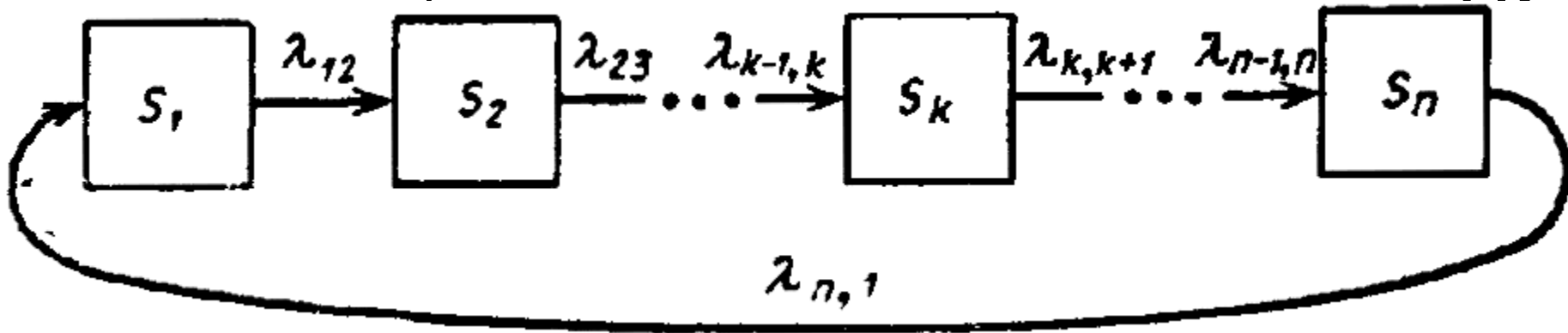
$$p_1 = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} + \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 2} + \frac{2 \cdot 1 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 2}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5},$$

$$p_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{15}, \quad p_3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{15}, \quad p_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$

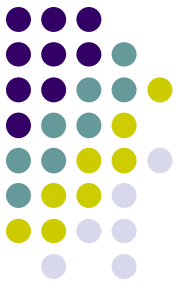


Циклический процесс

- Марковский случайный процесс, протекающий в системе, называется **циклическим**, если состояния связаны между



Предельные вероятности циклического процесса



$$\left. \begin{aligned} \lambda_{23} p_2 &= \lambda_{12} p_1, \\ \lambda_{34} p_3 &= \lambda_{23} p_2, \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \lambda_{k-1, k} p_{k-1} &= \lambda_{k, k+1} p_k, \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ \lambda_{n-1, n} p_{n-1} &= \lambda_{n, 1} p_n, \\ \lambda_{n, 1} p_n &= \lambda_{12} p_1, \end{aligned} \right\}$$

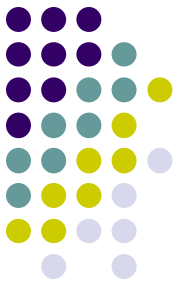
условие:

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1.$$

$$\left. \begin{aligned} p_2 &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{23}} p_1, \\ p_3 &= \frac{\lambda_{23}}{\lambda_{34}} p_2 = \frac{\lambda_{12} \lambda_{23}}{\lambda_{23} \lambda_{34}} p_1 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{34}} p_1, \\ p_4 &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{4, 5}} p_1, \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ p_k &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{k, k+1}} p_1, \\ \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ p_n &= \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{n, 1}} p_1. \end{aligned} \right\}$$

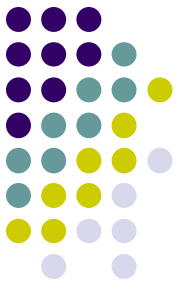
$$p_1 = \frac{1}{1 + \lambda_{12} \left(\frac{1}{\lambda_{23}} + \frac{1}{\lambda_{34}} + \dots + \frac{1}{\lambda_{n1}} \right)}$$

Среднее время пребывания время системы S в состоянии S_i



- t_i – среднее время пребывания системы ($\bar{t}_i = \frac{1}{\lambda_{i,i+1}}$ в состоянии S_i ($i = 1, \dots, n$)
- $\lambda_{i,i+1} = \frac{1}{\bar{t}_i}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n - 1$
($\lambda_{n,1} = \frac{1}{\bar{t}_n}$ для $i = n$)

Предельные вероятности циклического процесса



$$p_1 = \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \dots + \bar{t}_n},$$

$$p_2 = \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \dots + \bar{t}_n},$$

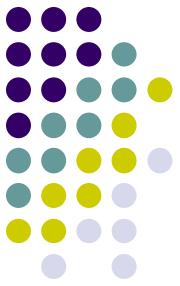
.....

$$p_n = \frac{\bar{t}_n}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \dots + \bar{t}_n},$$

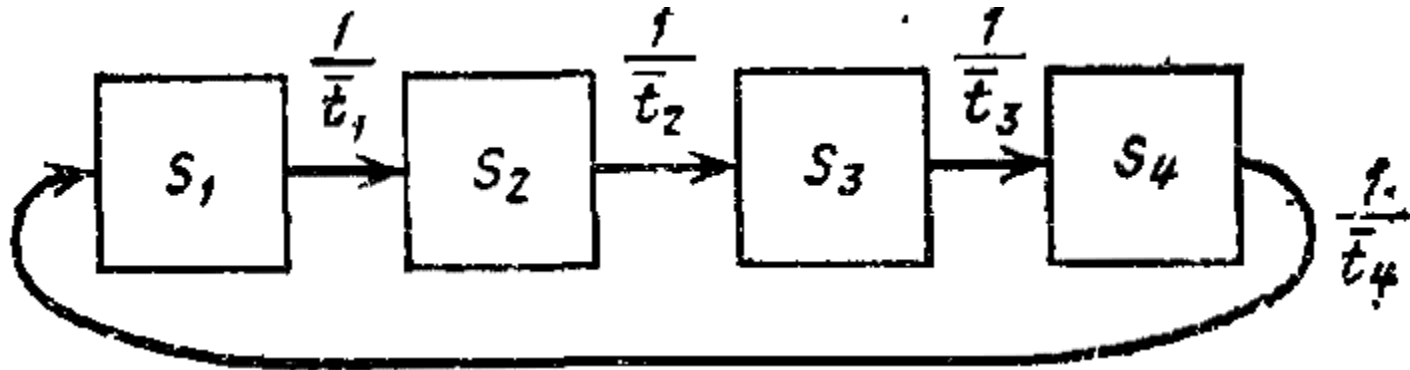
$$p_k = \frac{\bar{t}_k}{\sum_{i=1}^n \bar{t}_i} \quad (k = 1, \dots, n),$$

- предельные вероятности состояний в циклической схеме относятся как средние времена пребывания системы подряд в

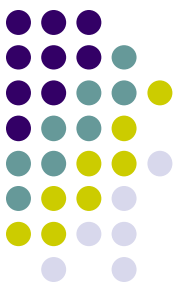
Задача циклического процесса. Пример



- Найти предельные вероятности состояний системы S , граф состояний которой имеет вид,



Среднее время пребывания системы подряд



Решение

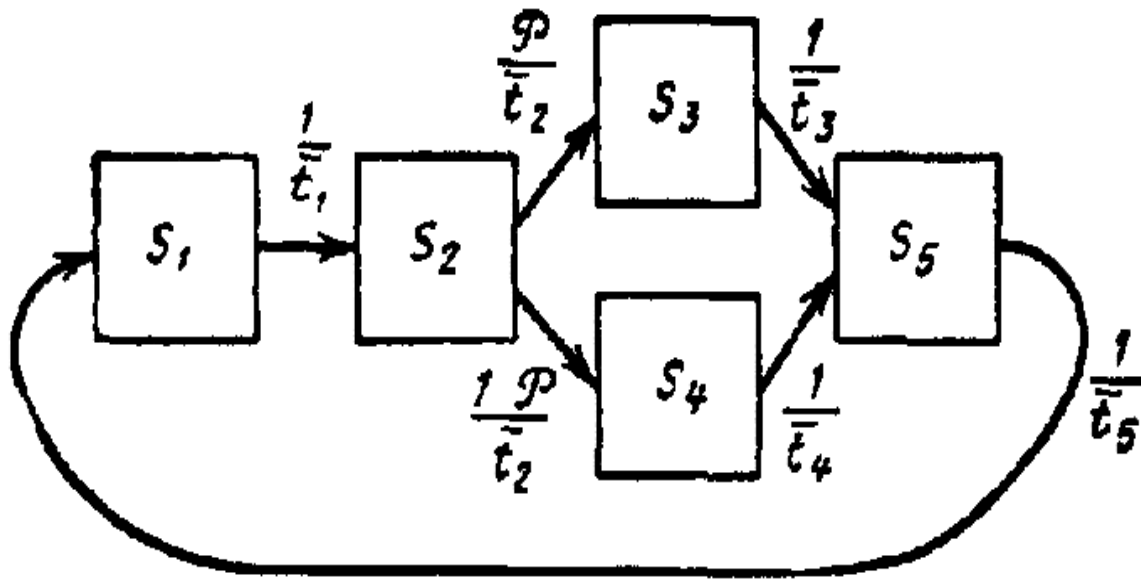
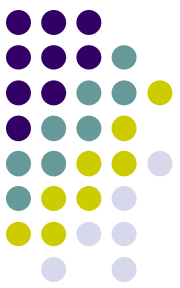
Определим среднее время пребывания подряд в каждом состоянии: $\bar{t}_1 = 1/2$, $\bar{t}_2 = 1/48$, $\bar{t}_3 = 1/4$, $\bar{t}_4 = 1/24$

откуда:
$$p_1 = \frac{1/2}{1/2 + 1/48 + 1/4 + 1/24} = 24/39,$$

$$p_2 = 1/39, \quad p_3 = 12/39, \quad p_4 = 2/39,$$

или: $p_1 = 0,615; \quad p_2 = 0,026; \quad p_3 = 0,308; \quad p_4 = 0,051.$

Ветвящийся циклический процесс. Пример



$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1.$$

$$\frac{1}{\bar{t}_1} p_1 = \frac{1}{\bar{t}_2} p_2,$$

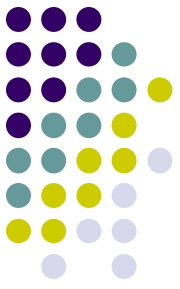
$$\frac{p}{\bar{t}_2} p_2 = \frac{1}{\bar{t}_3} p_3,$$

$$\frac{1-p}{\bar{t}_2} p_2 = \frac{1}{\bar{t}_4} p_4,$$

$$\frac{1}{\bar{t}_3} p_3 + \frac{1}{\bar{t}_4} p_4 = \frac{1}{\bar{t}_5} p_5,$$

$$\frac{1}{\bar{t}_5} p_5 = \frac{1}{\bar{t}_1} p_1,$$

Предельные вероятности состояний



$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\bar{t}_1}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \mathcal{P}\bar{t}_3 + (1-\mathcal{P})\bar{t}_4 + \bar{t}_5}, \\ p_2 &= \frac{\bar{t}_2}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \mathcal{P}\bar{t}_3 + (1-\mathcal{P})\bar{t}_4 + \bar{t}_5}, \\ p_3 &= \frac{\mathcal{P}\bar{t}_3}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \mathcal{P}\bar{t}_3 + (1-\mathcal{P})\bar{t}_4 + \bar{t}_5}, \\ p_4 &= \frac{(1-\mathcal{P})\bar{t}_4}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \mathcal{P}\bar{t}_3 + (1-\mathcal{P})\bar{t}_4 + \bar{t}_5}, \\ p_5 &= \frac{\bar{t}_5}{\bar{t}_1 + \bar{t}_2 + \mathcal{P}\bar{t}_3 + (1-\mathcal{P})\bar{t}_4 + \bar{t}_5}. \end{aligned}$$

структура вероятностей в схеме ветвящегося цикла, представляет собой отношения средних времен пребывания (подряд) в состояниях к сумме всех таких времен, а для состояния, лежащего на «ветке», это среднее время множится на вероятность перехода по данной «ветке» $\mathcal{P}$ или $1-\mathcal{P}$