

А.А. Чалганова

Методические указания по решению задач линейной
оптимизации с использованием табличного процессора Excel
по дисциплине «Экономико-математическое моделирование
в управлении»

Направление 38.03.02 «Менеджмент организации»

Санкт-Петербург
РГГМУ
2021

УДК 33

ББК 65.05

Чалганова А. А.

Методические указания по решению задач линейной оптимизации с использованием табличного процессора Excel по дисциплине «Экономико-математическое моделирование в управлении» / А. А. Чалганова. – Санкт-Петербург : РГГМУ, 2021. – 20 с.

В методических указаниях по решению задач линейной оптимизации внимание уделяется практической реализации экономико-математического моделирования путем обращения к сервису «Поиск решения» модуля «Анализ данных» (надстройка табличного процессора Excel).

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения по направлению подготовки 38.03.02 «Менеджмент организации».

Методические указания по решению задач линейной оптимизации с использованием табличного процессора Excel по дисциплине «Экономико-математическое моделирование в управлении» одобрены на заседании кафедры экономики предприятия природопользования и учетных систем от 18 марта 2021 г., протокол № 8.

© Чалганова А.А., 2021

© «Российский государственный гидрометеорологический университет»,
(РГГМУ), 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	5
1. Задачи линейной оптимизации.....	6
2. Методические указания к для решения задач с использованием стандартного табличного процессора Microsoft Excel	8

Сокращения

ЛО	–	Линейная оптимизация
ЛП	–	Линейное программирование
ЗЛП	–	Задача линейного программирования;
ЦФ	–	Целевая функция;

Введение

Теоретические основы современной науки, техники, экономики и организации производства очень сложны. Практическое использование экономико-математического моделирования, благодаря повсеместному внедрению компьютеров для автоматизации сложных математических расчетов, становится все более простым и доступным. Реализация сложных алгоритмов в качестве функций и сервисов табличного процессора Excel позволила использовать их для расчетов широкому кругу научных работников и практиков, от которых требуется:

- грамотная постановка задачи;
- подбор и оценка исходных данных;
- построение концептуальной модели;
- построение алгоритма решения задачи;
- подбор программных средств для ее решения;
- построение модели в компьютере;
- проведение расчетов с помощью программных средств;
- интерпретация результатов и оценка их надежности;
- оформление результатов работы.

При этом знание математических методов и моделей по-прежнему остается актуальным. Знание теории необходимо для понимания возможных «подводных камней».

В данном пособии рассмотрено получение численного решения для задачи линейной оптимизации с помощью надстройки «Поиск решения» табличного процессора Excel.

Основная цель планирования любой деятельности – получение максимального результата при имеющихся ограничениях. Сервис «Поиск решения» дает возможность решать оптимизационные задачи, не вникая в сложную математику. Поэтому основной целью данных методических указаний является изложение численной методики решения основных задач линейного программирования в табличном процессоре Excel.

1. Задачи линейной оптимизации

Экономико-математическое моделирование заключается в использовании методов и средств математического моделирования для исследования экономических объектов и явлений.

Экономико-математическая модель – это математическое описание исследуемого экономического объекта или явления (процесса).

Экономико-математическое моделирование можно разделить на следующие 5 этапов:

- 1 этап – постановка экономической проблемы;
- 2 этап – построение математической модели;
- 3 этап – численное решение;
- 4 этап – оценка адекватности построенной модели;
- 5 этап – применение численных результатов моделирования.

Экономико-математическое моделирование сводится к построению математической модели.

При построении математической модели можно выделить следующие основные этапы:

1. Определение цели решения задачи, т.е. чего хотят добиться, решая данную задачу.
2. Определение параметров модели, т.е. заранее известных фиксированных факторов, на значение которых исследователь не влияет.
3. Формирование управляющих переменных, значения которых являются решением задачи и при изменении которых можно достичь поставленной цели.
4. Определение области допустимых решений, т.е. ограничений, которым должны удовлетворять управляющие переменные.
5. Выявление неизвестных факторов, т.е. величин, которые могут изменяться случайным или неопределенным образом.
6. Выражение цели через управляющие переменные, параметры и неизвестные факторы, т.е. формирование целевой функции, называемой также критерием эффективности или критерием оптимальности задачи.

Линейные модели являются одним из наиболее простых и часто используемых классов математических моделей, используемых в экономике. Они изучаются в рамках линейного программирования.

Линейное программирование – это набор математических методов и приемов решения задачи оптимального распределения имеющихся ограниченных ресурсов для достижения определенной цели (максимума прибыли или минимума издержек). Такого рода задачи связаны с планированием закупок, перевозок, инвестиций, замены оборудования и т.д.

Если критерий эффективности Z (целевая функция) представляет собой линейную функцию, а функции в системе ограничений также линейны, то такая задача является задачей линейного программирования.

Общей задачей линейной оптимизации называют задачу

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j \rightarrow \max(\min)$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m_1$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i, i = (m_1 + 1), \dots, m_2$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \geq b_i, i = m_2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n_1$$

$$x_j - \text{произвольного знака}, j = (n_1 + 1), \dots, n$$

Т.е. целевая функция задается на максимум или на минимум, ограничения имеют форму равенств или неравенств типа « \leq » или « \geq », на некоторые переменные наложено требование неотрицательности.

Набор значений переменных задачи (x_1, x_2, \dots, x_n) , удовлетворяющих системе ограничений, называется **допустимым планом** (допустимым решением) задачи линейной оптимизации. Совокупность допустимых планов образует **множество допустимых планов**.

Допустимый план, доставляющий целевой функции экстремальное значение, называется оптимальным планом и обозначается $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Значение целевой функции на оптимальном плане называется оптимальным значением и обозначается $f^* = f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$

Решение задачи линейной оптимизации состоит в отыскании оптимального плана и оптимального значения.

2. Решение задач ЛП в табличном редакторе Microsoft Excel

Для того чтобы решить задачу ЛП в табличном редакторе Microsoft Excel, необходимо выполнить следующие действия:

1. Ввести условия задачи, что потребует следующих действий на листе табличного редактора Microsoft Excel:
 - a) создание экранной формы для ввода условия задачи;
 - b) ввод необходимых исходных данных в экранную форму;
 - c) ввод зависимостей из математической модели в экранную форму;
 - d) задание вида и направления оптимизации ЦФ;
 - e) ввод ограничений и граничных условий модели.
2. Получить численное решение задачи в Excel:
 - a) установка параметров решения задачи;
 - b) запуск решения задачи;
 - c) выбор формата вывода решения.

Рассмотрим последовательность решения следующей одноиндексной задачи линейного программирования (ЛП), модель которой представлена в примере 1.

Пример 1.

$$\begin{aligned} Z(X) &= 130.5 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 56 \cdot x_3 + 87.8 \cdot x_4 \rightarrow \max; \\ \begin{cases} -1.8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 - 4 \cdot x_4 = 756, \\ -6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - x_4 \geq 450, \\ 4 \cdot x_1 - 1.5 \cdot x_2 + 10.4 \cdot x_3 + 13 \cdot x_4 \leq 89, \\ x_j \geq 0; j = \overline{1,4}. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

- a) создание экранной формы для ввода условия задачи.

Условие задачи включает:

- переменные (x_1, x_2, x_3, x_4)
 - целевую функцию (ЦФ) ,
 - ограничения,
 - граничные условия;
- b) необходимо ввести исходные данные в экранную форму, т.е.:
 - коэффициенты ЦФ,
 - коэффициенты при переменных в ограничениях,
 - правые части ограничений;

Экранная форма для ввода условий задачи примера 1 вместе с введенными в нее исходными данными представлена на рисунке 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Переменные							
2	Имя	x1	x2	x3	x4				
3	Значение								
4	Нижн. Граница	0	0	0	0	ЦФ			
5						Значение	Направл.		
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	0	max		
7									
8		Ограничения							
9	Вид						Знак	Прав. Часть	
10	Огран. 1	-1,8	2	1	-4	0	=	756	
11	Огран. 2	-6	2	4	-1	0	>=	450	
12	Огран. 3	4	-1,5	10,4	13	0	<=	89	
13									
14									

Рис. 1. Экранная форма задачи примера 1.

В экранной форме на рисунке 1 каждой переменной и каждому коэффициенту задачи поставлена в соответствие конкретная ячейка листа Excel. Имя ячейки состоит из буквы, обозначающей столбец, и цифры, обозначающей строку, на пересечении которых находится объект задачи ЛП. Так, например, переменным задачи соответствуют ячейки **B3** (x_1), **C3** (x_2), **D3** (x_3), **E3** (x_4), коэффициентам ЦФ соответствуют ячейки **B6** ($c_1 = 130,5$), **C6** ($c_2 = 20$), **D6** ($c_3 = 56$), **E6** ($c_4 = 87,8$), правым частям ограничений соответствуют ячейки **H10** ($b_1 = 756$), **H11** ($b_2 = 450$), **H12** ($b_3 = 89$) и т.д.

с) ввод зависимости из математической модели в экранную форму означает необходимость ввести:

- формулу для расчета ЦФ,
- формулы для расчета значений левых частей ограничений;

В ячейку **F6**, в которой будет отображаться значение ЦФ, необходимо ввести формулу, по которой это значение будет рассчитано. Согласно модели примера 1 значение ЦФ определяется выражением (1):

$$Z(X) = 130.5 \cdot x_1 + 20 \cdot x_2 + 56 \cdot x_3 + 87.8 \cdot x_4 \rightarrow \max; \quad (2)$$

Формулу для расчета ЦФ (2) можно записать как сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов ЦФ (**B6, C6, D6, E6**):

$$B6 \cdot B3 + C6 \cdot C3 + D6 \cdot D3 + E6 \cdot E3 \quad (3)$$

Чтобы задать эту формулу (3) необходимо в ячейку **F6** ввести следующее выражение и нажать клавишу «Enter»:

$$=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3; B6:E6), \quad (4)$$

где символ \$ перед номером строки 3 означает, что при копировании этой формулы в другие места листа Excel номер строки 3 не изменится.

Символ «:» означает, что в формуле будут использованы и все ячейки, расположенные между ячейками, указанными слева и справа от двоеточия (например, запись **B6:E6** указывает на ячейки **B6, C6, D6** и **E6**). После этого в целевой ячейке появится 0 (нулевое значение) (рисунок 2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		Переменные							
2	Имя	x1	x2	x3	x4				
3	Значение								
4	Нижн. Граница	0	0	0	0	ЦФ			
5						Значение	Направл.		
6	Коэф. ЦФ	130,5	20	56	87,8	0	max		
7									
8		Ограничения							
9	Вид						Знак	Прав. Часть	
10	Огран. 1	-1,8	2	1	-4	0	=	756	
11	Огран. 2	-6	2	4	-1	0	>=	450	
12	Огран. 3	4	-1,5	10,4	13	0	<=	89	

Рис. 2. Экранная форма задачи после ввода всех необходимых формул.

Если дважды кликнуть на ячейку **F6**, то мы увидим формулу, по которой вычисляется значение целевой функции. Скриншот листа с ячейкой целевой функции представлен на рисунке 3.

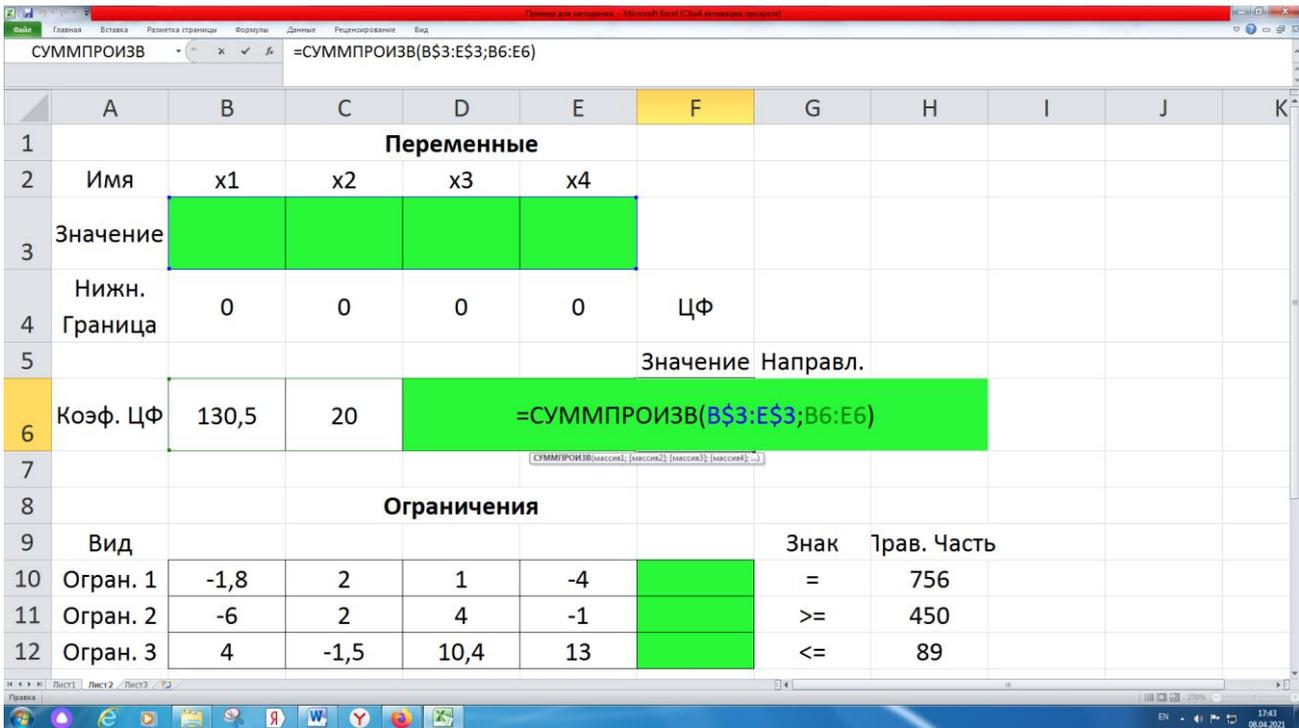


Рис. 3. Формула для расчета ЦФ при выделении ячейки ЦФ.

Существует другой способ задания функций в Excel с помощью режима «Вставка функций», который можно вызвать из вкладки «Формулы» или при нажатии кнопки «fx» на стандартной панели инструментов:

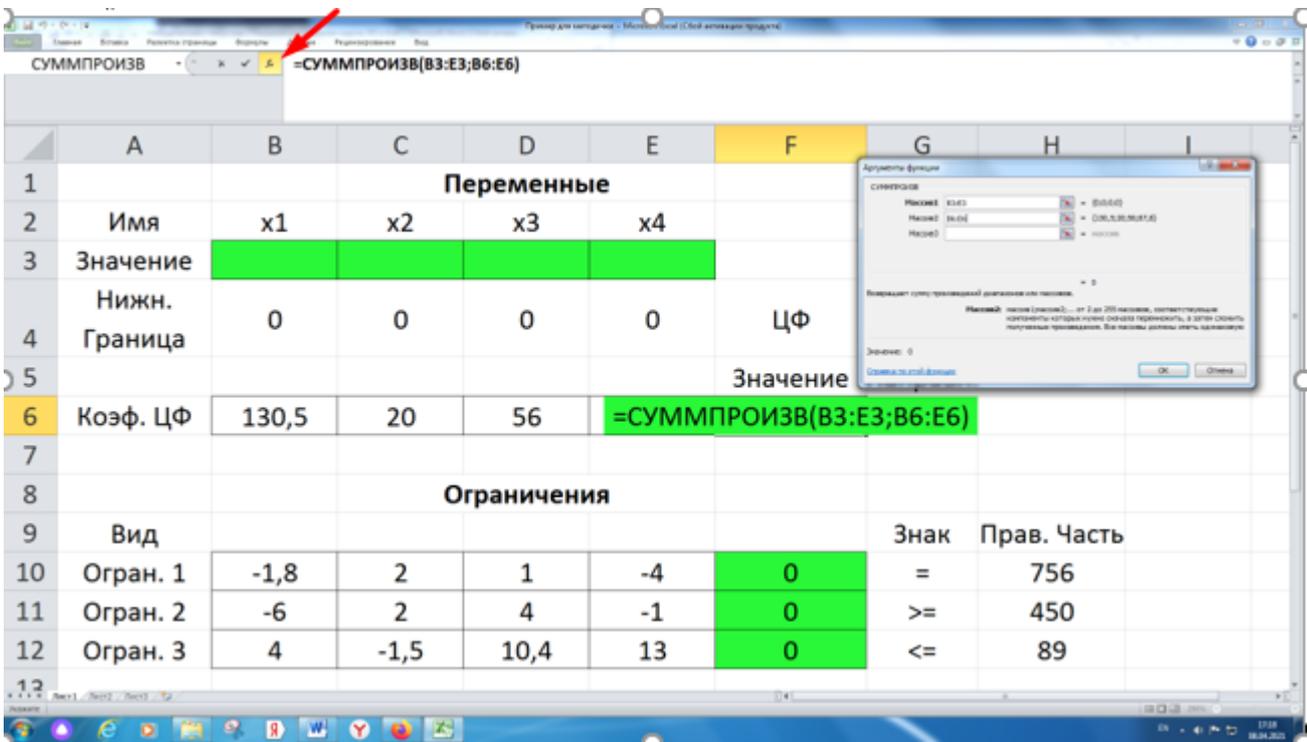


Рис. 4. Стрелка указывает на «Вставку функций»

Так, например, формулу (3) можно задать следующим образом:

- курсор установить в поле **F6**;
- нажав кнопку « f_x », вызвать окно «Мастер функций - шаг 1 из 2»;
- выбрать в окне «Категория» категорию «Математические»;
- в окне «Функция» выбрать функцию **СУММПРОИЗВ**;
- в появившемся окне «**СУММПРОИЗВ**» в строку «Массив 1» ввести выражение **B\$3:E\$3**, а в строку «Массив 2» - выражение **B6:E6**. Скриншот окна функции представлен на рисунке 5.

После ввода ячеек в строки «Массив 1» и «Массив 2» в окне функции «**СУММПРОИЗВ**» появятся числовые значения введенных массивов, а в экранной форме в ячейке **F6** появится текущее значение, вычисленное по введенной формуле, то есть 0 (так как в момент ввода формулы значения переменных задачи нулевые).

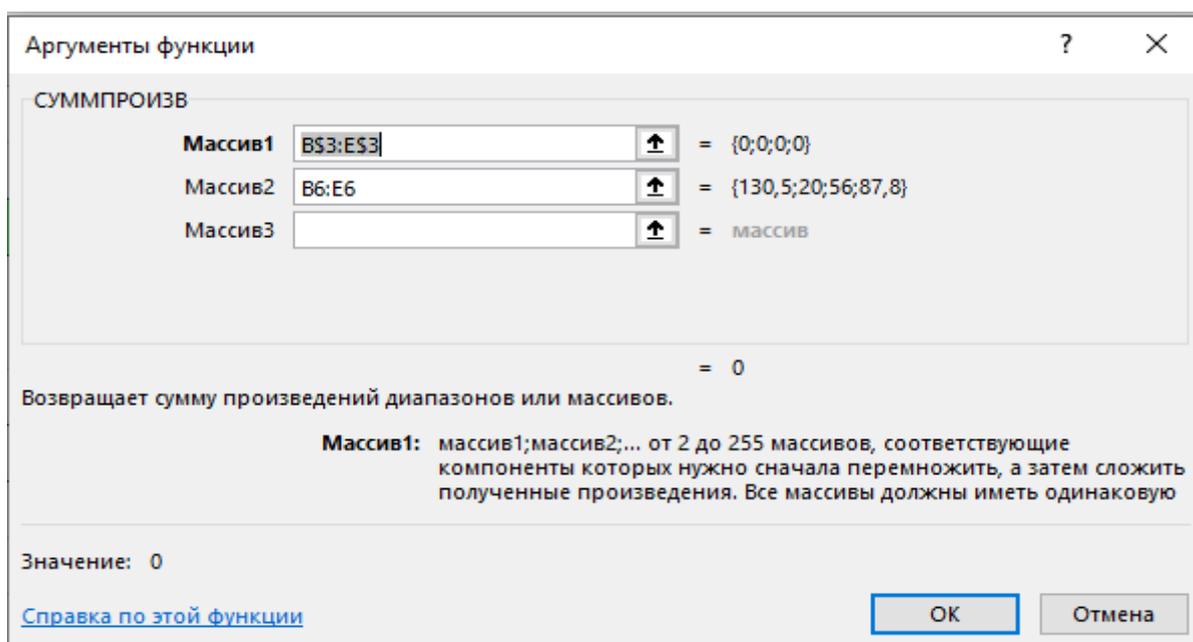


Рис. 5. Ввод формулы для расчета ЦФ в окно «Мастер функций»

Зависимости для левых частей ограничений нужно ввести в соответствующие ячейки.

Левые части ограничений задачи (1) представляют собой сумму произведений каждой из ячеек, отведенных для значений переменных задачи (**B3, C3, D3, E3**), на соответствующую ячейку, отведенную для коэффициентов конкретного ограничения (**B10, C10, D10, E10** - 1-е ограничение; **B11, C11, D11, E11** - 2-е ограничение и **B12, C12, D12, E12** - 3-е ограничение).

Формулы, соответствующие левым частям ограничений, представлены в таблице 1.

Таблица 1

Формулы, описывающие ограничения модели (1)

Левая часть ограничения	Формула Excel
$-1.8 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 - 4 \cdot x_4$, или $B10 \cdot B3 + C10 \cdot C3 + D10 \cdot D3 + E10 \cdot E3$	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3; B10:E10)
$-6 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - x_4$, или $B11 \cdot B3 + C11 \cdot C3 + D11 \cdot D3 + E11 \cdot E3$	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3; B11:E11)
$4 \cdot x_1 - 1.5 \cdot x_2 + 10.4 \cdot x_3 + 13 \cdot x_4$, или $B12 \cdot B3 + C12 \cdot C3 + D12 \cdot D3 + E12 \cdot E3$	=СУММПРОИЗВ(B\$3:E\$3; B12:E12)

Как видно из таблицы 1, формулы, задающие левые части ограничений задачи (1), отличаются друг от друга и от формулы (4) в целевой ячейке F6 только номером строки во втором массиве. Этот номер определяется той строкой, в которой ограничение записано в экранной форме. Поэтому для задания зависимостей для левых частей ограничений достаточно скопировать формулу из целевой ячейки в ячейки левых частей ограничений. Для этого необходимо:

- поместить курсор в поле целевой ячейки **F6** и протянуть за маркер автозаполнения (черный крестик в правом нижнем углу ячейки);
- на экране в полях **F10**, **F11** и **F12** появится 0 (нулевое значение) (см. рисунок 2).

Проверка правильности введения формул необходима для уверенности в верном вводе условия задачи.

Для проверки правильности введенных формул нужно произвести поочередно двойное нажатие левой клавиши мыши на ячейки с формулами. При этом на экране рамкой будут выделяться ячейки, используемые в формуле.

Дальнейшие действия производятся в окне «Поиск решения», которое вызывается из вкладки «Данные» (рисунок 6):

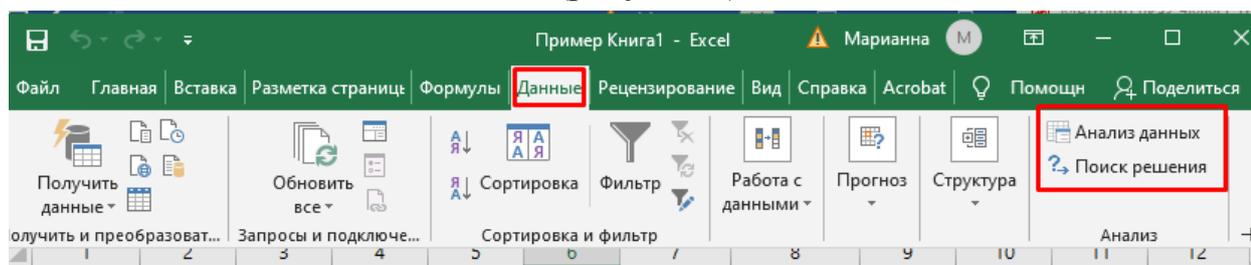


Рис. 6. Надстройка Поиск решения установлена; вкладка «Данные», группа «Анализ»

Для поиска решения в группе **Анализ** на вкладке **Данные** становится доступна команда **Поиск решения** (рис.7).

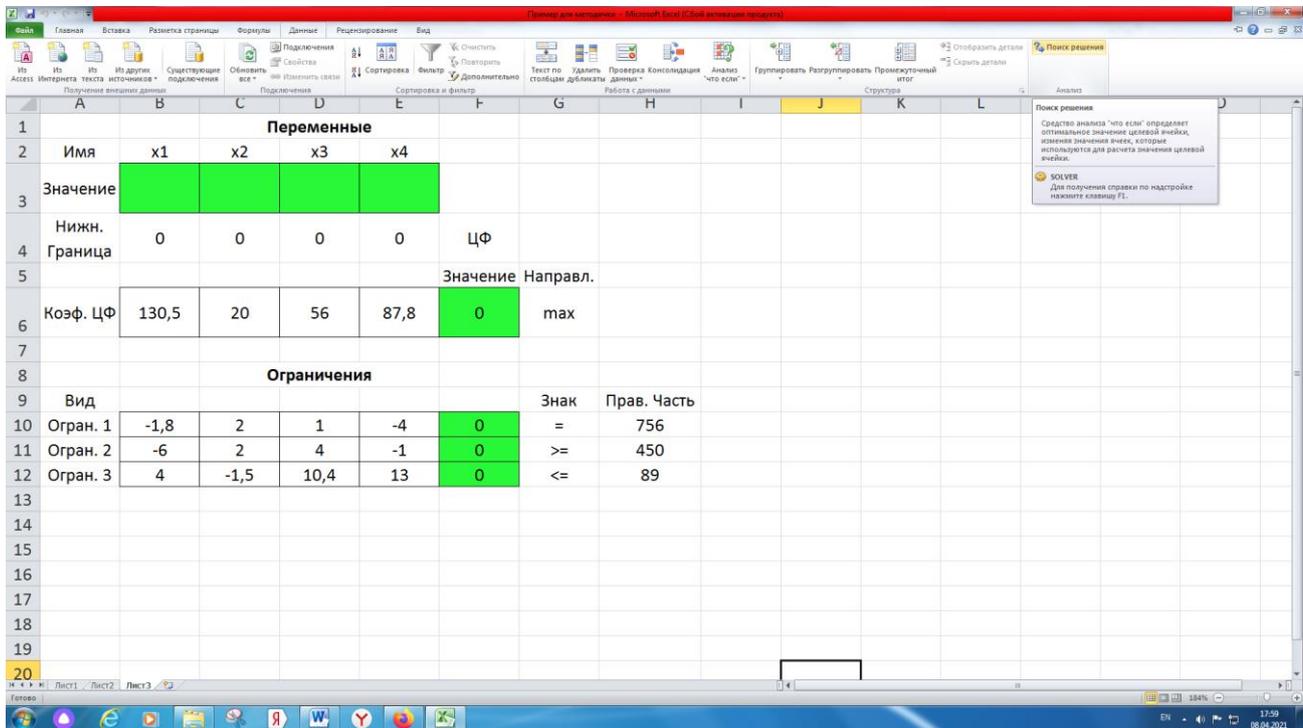


Рис. 7. Команда **Поиск решения** на листе Excel

Вид и направление оптимизации ЦФ задается в окне **Поиск решения**. Вид окна представлен на рисунке 8.

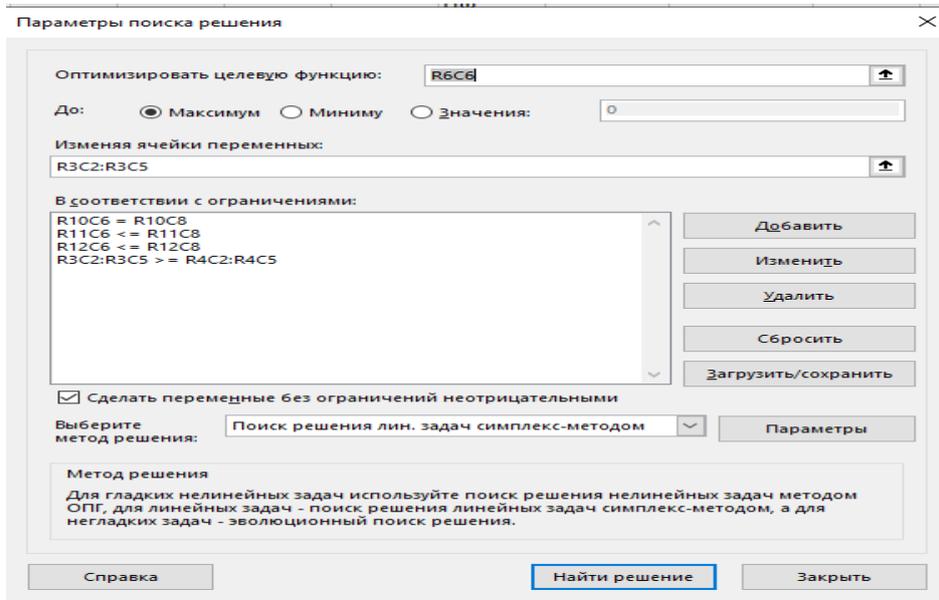


Рис. 8. Окно «Поиск решения» задачи (1). Ввод ограничений и граничных условий

d) Чтобы задать вид и направление оптимизации ЦФ в окне «Поиск решения», нужно задать:

- целевую ячейку,
- направление оптимизации ЦФ;

Для этого надо поставить курсор в поле «Оптимизировать целевую функцию», ввести адрес целевой ячейки **F\$6** или сделать одно нажатие левой клавиши мыши на целевую ячейку в экранной форме, что будет равносильно вводу адреса с клавиатуры;

Для того, чтобы ввести направление оптимизации ЦФ для рассматриваемой задачи, достаточно щелкнуть один раз левой клавишей мыши по селекторной кнопке «**Максимум**».

Ввод ограничений и граничных условий выполняется в том же окне **Поиск решения**.

e) Для ввода ограничений и граничных условий (в окне «**Поиск решения**») необходимо задать:

- ячейки со значениями переменных,
- граничные условия для допустимых значений переменных,
- соотношения между правыми и левыми частями ограничений.

Задание ячеек переменных осуществляется следующим образом. В окне **Поиск решения** в поле «Изменяя ячейки» нужно вписать адреса **\$B\$3:\$E\$3**. Необходимые адреса можно вносить в поле «Изменяя ячейки» и автоматически путем выделения мышью соответствующих ячеек переменных непосредственно в экранной форме.

Следующим действием должно быть задание граничных условий для допустимых значений переменных. В нашем случае на значения переменных накладывается только граничное условие неотрицательности, то есть их нижняя граница должна быть равна нулю (1). Это можно сделать следующим образом:

- Нужно нажать кнопку «Добавить», после чего появится окно «Добавление ограничения» (рисунок 9).

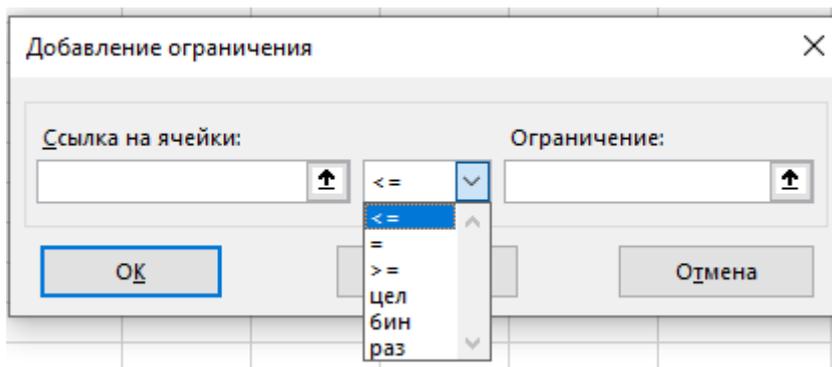


Рис. 9. Добавление граничных условий переменных задачи (1)

- В поле «Ссылка на ячейку» ввести адреса ячеек переменных **\$B\$3:\$E\$3**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью всех ячеек переменных непосредственно в экранной форме.
- В поле знака открыть список предлагаемых знаков и выбрать нужный.
- В поле «Ограничение» ввести адреса ячеек нижней границы значений переменных, то есть **\$B\$4:\$E\$4**. Их также можно ввести путем выделения мышью непосредственно в экранной форме.

Для ввода следующих ограничений и граничных условий необходимо:

- Нажать кнопку «Добавить» в окне «Добавление ограничения».
- В поле «Ссылка на ячейку» ввести адрес ячейки левой части конкретного ограничения, например **\$F\$10**. Это можно сделать как с клавиатуры, так и путем выделения мышью нужной ячейки непосредственно в экранной форме.
- В соответствии с условием задачи (1) выбрать в поле знака необходимый знак, например =.
- В поле «Ограничение» ввести адрес ячейки правой части рассматриваемого ограничения, например **\$H\$10**.
- Аналогично ввести ограничения: **\$F\$11>=\$H\$11**, **\$F\$12<=\$H\$12**.
- Подтвердить ввод всех перечисленных выше условий нажатием кнопки ОК.

Окно «Поиск решения» после ввода всех необходимых данных задачи (1) представлено на рисунке 8.

Если при вводе условия задачи возникает необходимость в изменении или удалении внесенных ограничений или граничных условий, то это делают, нажав кнопки «Изменить» или «Удалить» (см. рисунок 8).

На этом ввод условия задачи для получения численного решения завершен.

Следующий этап – собственно получение численного решения для построенной модели

2. Численное решение задачи в Excel предполагает следующие действия:

- а) установка параметров решения задачи (в окне «Поиск решения»);
- б) запуск задачи на решение (в окне «Поиск решения»);
- с) выбор формата вывода решения (в окне «Результаты поиска решения»).

Рассмотрим подробнее выполнение требуемых действий.

Для установки параметров решения задачи, до запуска на решение в окне «Поиск решения», надо предварительно для установления конкретных параметров решения задач оптимизации определенного класса нажать кнопку «**Параметры**» и заполнить некоторые поля окна «**Параметры поиска решения**», вид которого приведен на рисунке 10.

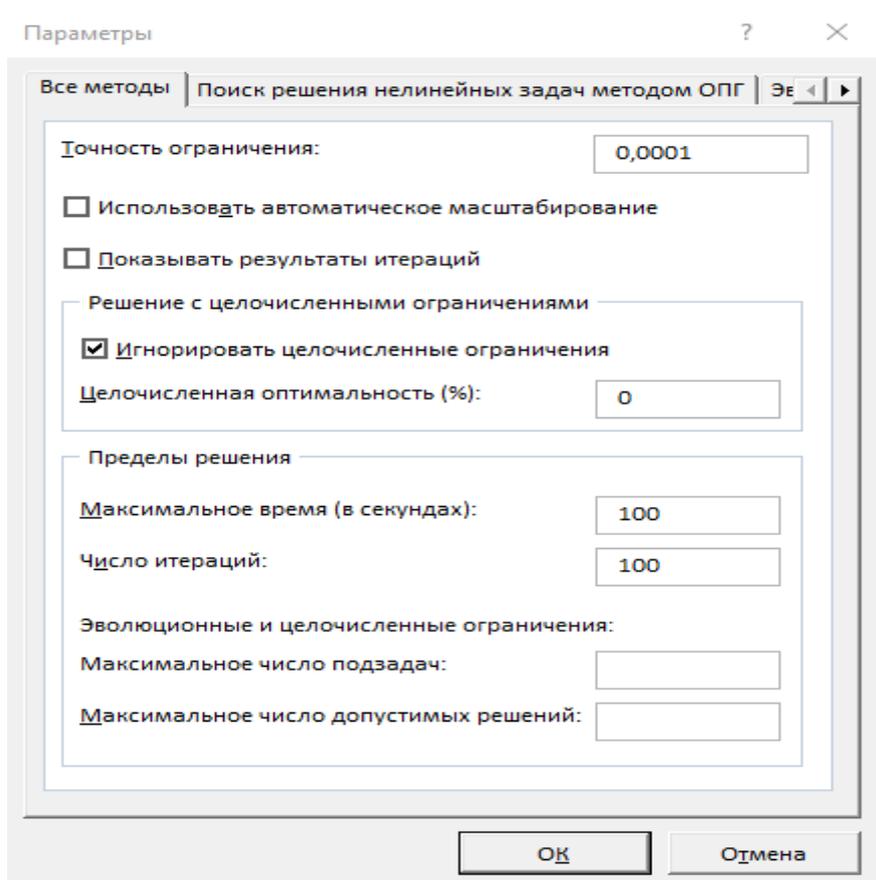


Рис. 10. Параметры поиска решения, подходящие для большинства задач ЛП

Параметр «Максимальное время» служит для назначения времени (в секундах), выделяемого на решение задачи. В поле можно ввести время, не превышающее 32 767 секунд (более 9 часов).

Параметр «Предельное число итераций» служит для управления временем решения задачи путем ограничения числа промежуточных вычислений. В поле можно ввести количество итераций, не превышающее 32 767.

Чтобы подтвердить установленные параметры, нужно нажать кнопку «ОК».

Запуск задачи на решение производится из окна «**Поиск решения**» путем нажатия кнопки «Выполнить».

После запуска на решение задачи ЛП на экране появляется окно «**Результаты поиска решения**» с сообщением.

Если при заполнении полей окна «**Поиск решения**» были допущены ошибки, не позволяющие Excel применить симплекс-метод для решения задачи или довести ее решение до конца, то после запуска задачи на решение на экран будет выдано соответствующее сообщение с указанием причины, по которой решение не найдено.

Иногда слишком малое значение параметра «Относительная погрешность» не позволяет найти оптимальное решение.

Для исправления этой ситуации можно увеличивать погрешность поразрядно, например от 0,000001 до 0,00001 и т.д.

В окне «**Результаты поиска решения**» представлены названия трех типов отчетов: «Результаты», «Устойчивость», «Пределы». Они необходимы при анализе полученного решения на чувствительность.

Для получения же ответа (значений переменных, ЦФ и левых частей ограничений) прямо в экранной форме просто нужно нажать кнопку «ОК». После этого в экранной форме появляется оптимальное решение задачи.

Скриншот листа Excel с численным решением задачи примера 1 представлен на рисунке 11.

Учебное издание

Чалганова А.А.

Методические указания по решению задач линейной
оптимизации с использованием табличного
процессора Excel по дисциплине «Экономико-
математическое моделирование в управлении»

Печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 31.05.2021. Формат 60×90 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать цифровая. Усл. печ. л. 1,25.
Тираж 15 экз. Заказ № 1086.
РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская ул., д.79.