

Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

К.Е. Сазонов

МОДЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ОКЕАНОЛОГИИ

Учебное пособие



Санкт-Петербург

2011

УДК 551.46.072

Сазонов К.Е. Модельный эксперимент в океанологии. – СПб., изд. РГГМУ, 2011. – 93 с.

ISBN 978-5-86813-301-5

Рассматриваются особенности использования модельного эксперимента при изучении характерных для океанологии проблем. Изложение базируется на подробном рассмотрении теории размерности и подобия. Показано применение этих теорий для получения критериев подобия, анализа экспериментальных результатов, а также их использование для решения теоретических задач. Большое внимание уделено описанию успешных модельных экспериментов, выполненных для решения тех или иных океанологических задач. В работе также анализируются примеры некорректного использования модельного эксперимента в океанологии.

Учебное пособие предназначено для студентов, магистров и аспирантов, специализирующихся на изучении сложных физических явлений, протекающих в морской среде. Пособие может быть также использовано представителями и других специализаций, так как большая часть материала, изложенного в пособии, носит общетеоретический характер.

Рецензенты: В.К. Гончаров, д-р техн. наук, проф. (СПбГМТУ)
М.П. Лобачев, канд. техн. наук (ФГУП "ЦНИИ им. академика А.Н. Крылова")

Sazonov, K.E. Model experiment in oceanography. – St. Petersburg, RSU Publishers, 2011. – 93 pp.

The manual considers the features of model experiment application in studying the problems specific to oceanography. The presentation is based on a detailed examination of the theories of dimension and similarity. These theories are shown to be applied to obtaining similarity criteria, analysis of experimental results, as well as solving theoretical problems. Much attention is paid to the successful model experiments carried out to solve a variety of oceanological problems. The book also analyzes examples of incorrect use of model experiment in oceanography.

The manual is intended for undergraduate, Masters and PhD students specializing in the study of complex physical phenomena occurring in the marine environment. The book can also be used for students exploring other research areas, since most of the material presented in the manual is of a general theoretical character.

ISBN 978-5-86813-301-5

© Сазонов К.Е., 2011

© Российский государственный гидрометеорологический

университет, 2011

Российский государственный
гидрометеорологический университет

БИБЛИОТЕКА

195196, СПб, Малоохтинский пр., 98

282964

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие родилось в ходе подготовки к чтению лекций для бакалавров, обучающихся на кафедре "Океанология". Целью этих лекций было ознакомление бакалавров с некоторыми методологическими подходами и методическими приемами, которые широко используются в научно-исследовательской и инженерной деятельности. Поэтому материал, изложенный в пособии, представляет собой изложение фундаментальных понятий, составляющих теорию размерности физических величин и подобия физических явлений, а также использование этих понятий для решения различных задач. Из этого следует, что основная часть пособия (первые пять глав) может быть использована для ознакомления с предметом любыми учащимися, изучающими естественнонаучные и технические дисциплины. Последние две главы носят более специальный характер, ориентированный на студентов и аспирантов, специализирующихся в области океанологии, гидрологии суши и смежных дисциплин.

Следует предупредить будущих читателей, что, несмотря на кажущуюся простоту, теория размерности и подобия является довольно сложной для понимания и усвоения ее методов. Для надежного овладения этой теорией необходимо постоянно совершенствовать свои навыки, пытаться анализировать окружающие нас физические явления, выделяя из них наиболее существенные факторы. Тот, кто сумеет научиться всему этому, одновременно разовьет свою физическую интуицию, сможет выделять в изучаемых явлениях "промежуточные асимптотики", позволяющие наиболее полно и просто описать явление, а также находить "скейлинговые" соотношения, сигнализирующие о самоподобии явления. Все это, несомненно, окажет неоценимую помощь в выполнении научных исследований и в инженерной деятельности.

ВВЕДЕНИЕ

В современной науке модельный эксперимент является одним из методических приемов исследования реального мира. Он основан на замене изучения некоторого физического явления в натуральных условиях на рассмотрение аналогичного явления на модели, размеры которой изменены в ту или другую сторону по отношению к исходному объекту. Основной целью такого моделирования является получение информации об интересующем явлении на основании изучения поведения модели (обычно такой эксперимент провести легче, чем с натурным объектом). При этом возникает дополнительная задача адекватного пересчета модельных данных на натурные условия. В какой-то мере эта ситуация аналогична применению интегральных преобразований в математике.

Из выше сказанного следует, что основной областью применения модельного эксперимента является изучение таких физических процессов, которые невозможно или очень сложно исследовать в натурном масштабе. Для проведения такого рода экспериментов обычно используют специально оборудованные лаборатории. Наибольшее распространение модельный эксперимент получил в технических науках гидромеханического цикла и при исследовании процессов тепло- и массопереноса, происходящих в технических устройствах и природных условиях. Можно даже говорить о том, что сложилась соответствующая парадигма, ставящая модельный эксперимент в привилегированное положение по сравнению с другими методами исследования в этих науках. Любой научный результат в них считался истинным только в случае подтверждения его данными модельного эксперимента. Долгое время такой подход можно было считать вполне удовлетворительным, однако в настоящее время все в большей степени возникают задачи, полное решение которых невозможно получить только в рамках проведения модельного эксперимента, что приводит к необходимости смены существующей парадигмы.

В последнее время модельный эксперимент все в большей степени используется в океанологии при изучении сложных физических явлений, протекающих в морской среде. С его помощью

получен целый ряд важных результатов [Алексеев и др., 2005]. В то же время применение модельного эксперимента в океанологии приводит к тем же методологическим проблемам, что и в других науках. Кроме этого, не редко океанологи допускают ошибки при постановке модельных экспериментов, анализе их данных и при переносе его результатов на натурные условия.

В данном пособии основное внимание уделено рассмотрению методологических основ модельного эксперимента и в первую очередь теории размерности и подобия. Обсуждаются вопросы, связанные с возникновением и методологией учета "масштабного эффекта". Кроме этого достаточно подробно рассмотрена возможность применения теории размерности при теоретическом решении задач. Приведены примеры успешного использования модельного эксперимента, теории подобия и размерности в океанологии. Подробно разобраны случаи неправильного применения модельных представлений при изучении гидрофизических процессов.

Глава 1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ

При изучении явлений природы вводятся различные понятия (энергия, температура, светимость и т.п.), которые характеризуют описываемое явление. Самым важным в этих понятиях является то, что они могут быть заданы и определены с помощью чисел. Тогда вопросы о свойствах явлений природы можно ставить как математические задачи нахождения некоторых функций и их численных значений для величин, описывающих явление.

Очень часто при рассмотрении таких задач для описания законов природы используются различные функциональные уравнения, большей частью дифференциальные. Такие уравнения применяются при теоретическом анализе общих качественных свойств изучаемых объектов, а также для вычисления конкретных числовых значений характеризующих явление величин.

Однако очень часто теоретический анализ интересующего нас явления природы, основанный на решении описывающих его функциональных уравнений, оказывается невозможен. Эта невозможность выполнения анализа может возникать либо из-за непреодолимых математических трудностей, возникающих при решении, либо из-за отсутствия самих уравнений, описывающих интересующее явление природы. В качестве примера задачи, которая до настоящего времени не может быть полностью разрешена даже с использованием самых совершенных компьютеров, можно указать систему уравнений движения вязкой жидкости Навье – Стокса. Примером же объекта, с которым часто имеют дело океанологи и который не имеет в настоящее время общепринятой системы функциональных уравнений, описывающих его свойства, является морской и пресноводный лед.

В таких случаях единственным способом получения информации об интересующем явлении или объекте является проведение эксперимента. Необходимо подчеркнуть, что эксперимент всегда является первичным по отношению к функциональным уравнениям, описывающим тот или иной класс явлений природы или объектов. Действительно, для установления любых функциональных

связей между понятиями, характеризующими явление, необходимо иметь хотя бы минимальную эмпирическую (опытную) информацию, набор опытных фактов. Только на этой основе могут быть сформулированы так называемые законы природы в качественном виде или в виде математических соотношений.

Следовательно, важнейшей задачей является нахождение общей методики, которая позволяла бы правильно ставить эксперимент и обрабатывать его результаты. Если обработка экспериментальных данных выполнена таким образом, что полученный результат может быть использован и в тех случаях, когда эксперимент не проводился, то можно говорить об установлении ранее неизвестной природной закономерности. Для этого необходимо детально вникать в сущность исследуемой проблемы и выполнять ее общий качественный анализ. Таким образом, для выполнения качественных экспериментальных исследований необходим предварительный теоретический анализ.

Может создаться впечатление, что приведенные выше рассуждения содержат "порочный круг". Для нахождения функциональных уравнений явлений природы необходимо иметь экспериментальные данные, а для получения качественных опытных результатов необходимо предварительное теоретическое рассмотрение проблемы. На самом деле никакого "порочного круга" не существует. Дело в том, что качественно-теоретический анализ изучаемых явлений и процессов может быть выполнен с помощью теории размерности и подобия. Эта теория носит общий характер и приложима практически ко всем природным явлениям и техническим процессам. Она содержит достаточно простые функциональные уравнения, которые будут рассмотрены ниже, и поэтому может быть использована для теоретического анализа.

При изучении физических процессов используются размерные и безразмерные величины. Если численное значение величины зависит от выбранной системы единиц измерения (масштаба), то такая величина называется *размерной* или *именованной*, если же величина не изменяет своего численного значения при переходе от одной системы единиц измерения (масштаба) к другой, то такая величина называется *безразмерной* или *отвлеченной*. Примерами размерных величин, используемых в океанологии, являются ско-

рость, энергия, температура, проводимость и т.п. Безразмерными величинами являются углы, соленость, любые относительные величины.

Необходимо иметь в виду, что подразделение величин на размерные и безразмерные носит достаточно условный характер. Мы указали, что соленость является безразмерной величиной, но эта величина измеряется в промилле. В некоторых книгах можно встретить, что величина солености задается в процентах. Наконец, соленость в принципе можно измерять в величинах отношения удельной электрической проводимости данной пробы воды при температуре $+15^{\circ}\text{C}$ к удельной проводимости нормальной воды с соленостью 35‰ при температуре $+15^{\circ}\text{C}$ и при атмосферном давлении. Из этого следует, что соленость может рассматриваться как размерная величина. Однако если принять соглашение, что в любых системах единиц соленость будет измеряться в промилле, то ее можно рассматривать как безразмерную величину.

Аналогично угол может быть рассмотрен как размерная и как безразмерная величина. Он может измеряться в радианах, градусах, долях прямого угла и т.д. Принятие одной единицы измерения угла для всех систем единиц переводит его в разряд безразмерных величин. В принципе таким способом любая размерная величина может быть переведена в безразмерную. Применение фиксированных единиц измерения физических величин удобно в том случае, когда эта величина является инвариантной относительно часто используемых преобразований. Так, введение фиксированной единицы измерения для углов удобно потому, что при применении преобразования подобия углы сохраняют свою величину. Длина при этом преобразовании не сохраняется, поэтому введение для нее фиксированной единицы измерения не представляется целесообразным.

Скорость традиционно рассматривается как размерная величина. Тем не менее во многих разделах океанологии при рассмотрении нестационарных потоков используют разделение его скорости на среднюю и пульсационную составляющие. При этом часто пульсационная составляющая выражается в долях от средней скорости потока. Тогда пульсационная составляющая скорости становится отвлеченной величиной. С другой стороны, ту же пульсаци-

онную составляющую можно рассматривать как размерную величину, единицей измерения которой является средняя скорость потока.

Подведя итог рассмотрению размерных и безразмерных величин, приведем их определение, заимствованное из книги "Методы подобия и размерности в механике" академика Л.И. Седова: "Понятия размерных и безразмерных величин являются относительными понятиями. Мы вводим некоторый запас единиц измерения. Тогда величины, для которых единицы измерения одинаковы во всех принятых системах единиц измерения, мы будем называть безразмерными. Величины же, для которых в опытах или теоретических исследованиях фактически или потенциально (явно или неявно) допускаются различные единицы измерения, мы будем называть размерными" [Седов, 1977].

В природе физические величины не существуют сами по себе, они связаны друг с другом определенными соотношениями. Наличие этих соотношений позволяет выражать одни физические величины через другие. Поэтому можно выбрать ряд величин в качестве основных и присвоить им единицы измерения. Тогда единицы измерения остальных величин, используя физические соотношения между ними, можно будет выразить через единицы измерения основных величин. Единицы измерения основных величин называются *основными* или *первичными*, а все остальные единицы измерения – *производными* или *вторичными*.

В нашей стране, начиная с 1 января 1963 г, введена единая Международная система единиц СИ. В этой системе в качестве основных приняты следующие единицы измерения: длины – метр (*м*), массы – килограмм (*кг*), времени – секунда (*с*), силы тока – ампер (*А*), температуры – градус Кельвина (*К*), силы света – кандела (*кд*), количества вещества – моль (*моль*). Все эти единицы имеют символическое обозначение: метр – *L*, масса – *M*, время – *T*, сила тока – *I*, температура – θ , сила света – *J*, количества вещества *N* (Сена, 1969).

Ныне действующий межгосударственный стандарт [ГОСТ, 2002] следующим образом определяет основные величины. Метр есть длина пути, проходимого светом в вакууме за интервал времени $1/299792458$ с. Килограмм есть единица массы, равная массе

международного прототипа килограмма. Секунда есть время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133. Ампер есть сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малой площади кругового поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, вызвал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную 2×10^{-7} Н. Кельвин есть единица термодинамической температуры, равная $1/273,16$ части термодинамической температуры тройной точки воды. Кандела есть сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540 \cdot 10^{12}$ Гц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет $1/683$ Вт/ср. Моль есть количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько содержится атомов в углероде-12 массой 0,012 кг. При применении моля структурные элементы должны быть специфицированы и могут быть атомами, молекулами, ионами, электронами и другими частицами или специфицированными группами.

До введения системы единиц СИ широко использовались система единиц СГС и МКГСС. В системе СГС в качестве основных были приняты единица длины – сантиметр (см), массы – грамм (г) и времени секунда (с). В технической системе единиц МКГСС основными единицами измерения были: длина – метр (м), сила – килограмм-сила (кгс) и время – секунда (с). В качестве символического обозначения для килограмм-силы используют либо символ K , либо символ F . С этими системами измерений можно столкнуться при изучении ранее изданной научной литературы.

Можно заметить, что набор физических величин, единицы измерения которых выбраны в качестве основных, в системах СИ и СГС одинаков. Они отличаются только величиной основных единиц измерения, такие системы единиц считаются относящимися к одному *классу*. Система единиц МКГСС не входит в один класс с системами СИ и СГС, так как в этой системе в качестве основной единицы измерения выбрана килограмм-сила. Класс системы единиц измерения может быть обозначен символами основ-

ных единиц измерения. Так, системы СИ и СГС принадлежат к классу MLT , а система МКГСС – к классу FLT .

Единицы измерения физических величин, не являющиеся основными для выбранной системы единиц измерения, получают с помощью определений этих величин и комбинации основных единиц измерения. Выражение производной единицы измерения через основные называется *размерностью*. Из этого определения следует, что размерность физической величины зависит от принятой системы единиц. В данном пособии, если это не будет оговорено особо, везде принимается система единиц СИ.

Г.И. Баренблатт [1982, 2009] дает следующее определение размерности. Размерностью физической величины называется функция, определяющая, во сколько раз изменится численное значение этой величины при переходе от исходной системы единиц измерения к другой системе внутри данного класса. Тогда можно сказать, что размерность физической величины зависит от класса систем единиц измерения.

Размерность физической величины обозначается символом [...], который был введен Максвеллом. Например, размерность кинетической энергии может быть получена следующим образом. Воспользуемся известной из механики формулой для кинетической энергии: $E = \frac{mV^2}{2}$. Тогда размерность энергии будет

$[E] = \frac{ML^2}{T^2}$. Здесь мы воспользовались уравнением связи между скоростью расстоянием и временем при равномерном движении, $L = VT$. Размерность кинетической энергии систем единиц СИ и СГС одинакова. В системе же МКГСС размерность энергии будет $[E] = FL$.

Установлено, что размерность любой физической величины всегда представляет собой степенной многочлен. Г.И. Баренблатт [1982, 2009] считает, что этот факт следует из утверждения, что внутри данного класса все системы равноправны. Докажем это утверждение [Эпштейн, 1970].

Численное значение некоторой физической величины a обозначим через A , тогда

$$a = A[a]. \quad (1.1)$$

Изменение размерности единицы в пределах одного класса приведет к изменению числовой величины. Размерность $[a]$ может зависеть от размерности других величин. В общем случае

$$[a] = f([a_1], [a_2], \dots, [a_k]), \quad (1.2)$$

где $[a_1], [a_2], \dots, [a_k]$ – основные размерности принятой системы единиц.

Далее для простоты изложения предположим, что изменяется только один аргумент в выражении (1.2). Для краткости обозначим $[a_1] = x$. Тогда вместо выражений (1.2) и (1.1) можно соответственно записать

$$[a] = f(x) \quad (1.3)$$

и

$$a = Af(x). \quad (1.4)$$

Изменим, размерность величины a_1 в μ раз, соответственно заменим x на μx . Из соотношения (1.4) следует, что в этом случае изменится размерность величины a и ее числовое значение. Это числовое значение станет равным A/k , где k является функцией μ . Очевидно, что при $\mu = 1 \Rightarrow k = 1$. В старых и новых единицах выражение для a может быть записано следующим образом:

$$a = Af(x) = \frac{A}{k} f(\mu x).$$

Из этого выражения следует, что

$$\frac{f(\mu x)}{f(x)} = k(\mu).$$

В этом выражении правая часть не зависит от x , поэтому производная левой части по x должна быть равна нулю.

$$\frac{\partial f(u)}{\partial u} \mu f(x) - f(u) \frac{\partial f(x)}{\partial x} = 0,$$

здесь введено обозначение $\mu x = u$. Преобразуя полученное равенство, получим.

$$\mu \frac{1}{f(u)} \frac{\partial f(u)}{\partial u} = \frac{1}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x} \quad (1.5)$$

При выполнении приведенных выше преобразований мы не накладывали никаких ограничений на величину μ , поэтому мы в праве выбрать любое ее значение. Положим $u=1$, тогда $\mu=1/x$. При таком выборе функции и производные в левой части выражения (1.5) станут постоянными, а само выражение примет вид:

$$\frac{1}{f(x)} \frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\alpha_1}{x}, \quad (1.6)$$

где $\alpha_1 = \left[\frac{1}{f(u)} \frac{\partial f(u)}{\partial u} \right]_{u=1}$

Интегрируя выражение (1.6), получаем

$$\ln f(x) = \alpha_1 \ln x + \ln C_1 \Rightarrow f(x) = C_1 x^{\alpha_1}.$$

Тогда в соответствии с (1.3) и (1.4)

$$[a] = C_1 [a_1]^{\alpha_1}.$$

В данном выражении C_1 является функцией $[a_2], \dots, [a_k]$, которые сохранялись постоянными. Теперь, если провести аналогичные рассуждения с $[a_2], \dots, [a_k]$, окончательно получим.

$$[a] = C [a_1]^{\alpha_1} [a_2]^{\alpha_2} \dots [a_k]^{\alpha_k}. \quad (1.7)$$

Мы получили общую структурную формулу размерности, которая показывает, что размерность величины a выражается через размерности определяющих ее основных величин степенным одночленом. В этой формуле безразмерная константа C может быть опущена.

В современной науке наличие между некоторыми переменными зависимости типа (1.7) описывается термином *скейлинг* [Баренблатт, 2009].

Ниже приводится сводная таблица размерностей геометрических, механических и тепловых величин, часто используемых в океанологии.

Таблица 1.1

Размерность геометрических, механических и тепловых величин

Величина	Формула определения	Формула размерности	Единица
Длина	l	L	m
Масса	m	M	$кг$
Время	t	T	c
Площадь	$S = l^2$	L^2	m^2
Объем	$V = l^3$	L^3	m^3
Угол	$\alpha = l/r$	1	$рад$
Телесный угол	$\omega = S/r^2$	1	$ср$
Кривизна	$k = 1/r$	L^{-1}	m^{-1}
Скорость	$v = l/t$	LT^{-1}	m/c
Ускорение	$a = \frac{v_1 - v_2}{t}$	LT^{-2}	m/c^2
Скорость угловая	$\omega = \frac{\phi}{t}$	T^{-1}	$рад/c$
Период	$T = 2\pi/\omega$	T	c
Частота	$\nu = 1/T$	T^{-1}	$Гц$
Градиент линейной скорости	$grad v = dv/dl$	T^{-1}	c^{-1}
Расход объемный	$q_v = dV/dt$	L^3T^{-1}	m^3/c
Расход массовый	$q_m = dm/dt$	MT^{-1}	$кг/c$
Сила	$F = ma$	LMT^{-2}	$H, кг м/c^2$
Момент силы	$M = Fl$	L^2MT^{-2}	$Нм$
Импульс силы, количество движения	$I = Ft,$ $p = mv$	LMT^{-1}	$Нс,$ $кг \cdot м/c$
Энергия, работа	$E = mv^2/2,$ $P = mgl,$ $A = Fl \cos(F, l)$	L^2MT^{-2}	$Дж$
Давление	$p = F/S$	$L^{-1}MT^{-2}$	$Па, Н/м^2$
Градиент давления	$grad p = dp/dl$	$L^{-2}MT^{-2}$	$Па/м, Н/м^3$

Величина	Формула определения	Формула размерности	Единица
Плотность	$\rho = \frac{m}{V}$	$L^{-3}M$	кг/м ³
Вязкость динамическая	$\mu = \frac{F}{S \, dv/dl}$	$L^{-1}MT^{-1}$	кг/(с·м)
Вязкость кинематическая	$\nu = \frac{\mu}{\rho}$	L^2T^{-1}	м ² /с
Коэффициент поверхностного натяжения	$\sigma = F/l$	MT^{-2}	Н/м, Джс/м ²
Коэффициент диффузии	$D = -\frac{\Delta m}{\Delta t S \, d\rho/dl}$	L^2T^{-1}	м ² /с
Количество теплоты	$\Delta Q = \Delta U + \Delta A$	L^2MT^{-2}	Джс
Температура	T	θ	⁰ С, К
Градиент температурный	$grad T = dT/dl$	$L^{-1}\theta$	К/м
Энтропия	$\Delta S = \int \frac{dQ}{T}$	$L^2MT^{-2}\theta^{-1}$	Джс/К
Теплоемкость	$C = \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT}$	$L^2T^{-2}\theta^{-1}$	Джс/(кг·К)
Удельная теплота фазового превращения	$q = \frac{Q}{m}$	L^2T^{-2}	Джс/кг
Коэффициент теплопроводности	$\lambda = -\frac{\left(\frac{dQ}{dt}\right)}{\left(\frac{dT}{dl} S\right)}$	$LMT^{-3}\theta^{-1}$	Вт/(м·К)
Коэффициент теплопередачи	$k = \frac{(\Delta TS)}{\left(\frac{dQ}{dt}\right)}$	$MT^{-3}\theta^{-1}$	Вт/(м ² ·К)
Коэффициент температуропроводности	$\alpha = \lambda / C\rho$	L^2T^{-1}	м ² /с

Любые физические закономерности, полученные на основании анализа экспериментальных данных или теоретических расчетов, можно представить следующей общей формулой:

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad (1.8)$$

где a_i , $i=1, \dots, n$ – определяющие рассматриваемое явление параметры. Среди этих параметров содержится k параметров, имеющих независимые размерности. Размерности же аргументов

ницы измерений, иначе говоря, считать основные величины безразмерными. Это дает нам право записать итоговое выражение (1.11) в следующем виде:

$$\Pi = F(1, \dots, 1, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}) = F(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}). \quad (1.12)$$

Рассмотрим следующий пример, поясняющий приведенные выше рассуждения. Пусть нас интересует горизонтальная скорость водной среды v_x , возникающая из-за движения в ней подводного аппарата. Эта скорость будет зависеть от геометрических размеров аппарата, проекций его скорости движения V_x, V_y и V_z , а также от координат x, y, z выбранной точки пространства:

$$v_x = f(l_1, l_2, \dots, l_n, x, y, z, V_x, V_y, V_z). \quad (1.13)$$

В этом выражении l_1, \dots, l_n — величины, характеризующие размеры аппарата и его положение относительно координатных осей. Выберем длину аппарата l_1 и, например, вертикальную скорость его движения V_z основными величинами, т.е. будем измерять линейные размеры в длинах аппарата, а скорости в вертикальных скоростях движения аппарата. Это можно сделать, так как их размерности независимы. В этом случае все остальные геометрические размеры и скорости станут отвлеченными числами, показывающими во сколько раз та или иная величина больше или меньше соответствующей основной. Соотношение (1.13) можно тогда записать следующим образом:

$$\frac{v_x}{V_z} = f\left(1, \frac{l_2}{l_1}, \dots, \frac{l_n}{l_1}, \frac{x}{l_1}, \frac{y}{l_1}, \frac{z}{l_1}, \frac{V_x}{V_z}, \frac{V_y}{V_z}, 1\right).$$

Выражение (1.12) представляет собой запись фундаментального результата, называемого Π — теоремой. Впервые Π — теорема была сформулирована Э. Бакингамом.

Из Π — теоремы следует, что любую связь между размерными величинами можно представить как связь между безразмерными комбинациями этих величин. Особо следует подчеркнуть, что число безразмерных комбинаций меньше общего числа определяю-

Российский государственный
гидрометеорологический университет

БИБЛИОТЕКА

195196, СПб, Малоохтинский пр., 98

383964

щих параметров на число размерных определяющих параметров с независимыми размерностями.

При использовании теории размерности возникает задача определения системы основных параметров, которые определяют рассматриваемое физическое явление. Эта задача относительно легко решается, если известна математическая формулировка задачи. В этом случае необходимо просто выписать все размерные и безразмерные величины, которые необходимо задать для возможности решения математической задачи.

Когда же не математическая формулировка задачи неизвестна, определяющие параметры можно установить, рассматривая те факторы, которые необходимы для полного определения искомой величины. При этом необходимо схематизировать рассматриваемое явление и отобрать наиболее значимые факторы. Такая схематизация требует от исследователя опыта, интуиции, умения качественно анализировать физические механизмы изучаемых процессов. Однако очень часто применение теории размерности оказывается более простым способом получения результата, чем составление уравнений.

Задания к главе 1

- 1.1. Записать размерность следующих величин в системе МКГСС: давление, коэффициент поверхностного натяжения, кинематическая вязкость
- 2.2. Некоторые физические явления характеризуются следующими наборами определяющих параметров:
 - а) давление, скорость, вязкость, геометрические размеры тела, угол;
 - б) температура, теплопроводность, количество теплоты, скорость, коэффициент теплопередачи, геометрические размеры;
 - в) солёность, коэффициент диффузии, скорость, геометрические размеры, время.Определить среди них величины с независимыми размерностями

Глава 2

ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТИ

В данной главе приводятся некоторые примеры применения теории размерности для анализа различных физических задач. Использование теории размерности базируется на следующем, вытекающем из приведенных в предыдущей главе результатов, утверждении. *Любое равенство, выражающее связь между физическими величинами, должно содержать по обе стороны знака равенства величины, имеющие одинаковую размерность.*

Это довольно очевидное положение оказывает существенную помощь при рассмотрении различных задач.

Классическим примером является задача о движении математического маятника. Напомним, что математический маятник представляет собой тяжелую материальную точку, подвешенную на невесомой нерастяжимой нити, другой конец которой закреплен неподвижно. Будем рассматривать только плоские движения маятника. Нам необходимо определить зависимость периода колебаний математического маятника T от параметров, определяющих явление.

К числу определяющих математический маятник параметров могут быть отнесены: l — длина нити, m — масса материальной точки, φ_0 — начальный угол отклонения маятника, g — ускорение свободного падения, так как движение маятника происходит в поле силы тяжести. Мы можем записать следующее соотношение:

$$T = f(l, m, \varphi_0, g). \quad (2.1)$$

Период колебаний маятника T имеет размерность времени, следовательно, величина, стоящая в правой части соотношения, также должна иметь размерность времени. Это условие накладывает довольно жесткие требования на вид функции f . Во-первых, из числа ее аргументов должна быть исключена масса материальной точки, так как учитывая ее, невозможно составить из рассматриваемых параметров комбинацию с размерностью времени.

Во-вторых, из оставшихся параметров комбинацию, имеющую размерность времени, можно составить единственным способом, а именно $\sqrt{l/g}$.

Тогда соотношение (2.1) может быть записано следующим образом:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} f(\varphi_0).$$

Таким образом, только на основании соображений, базирующихся на теории размерности, были установлены важнейшие факты, относящиеся к теории колебаний математического маятника:

- период колебаний не зависит от массы маятника;
- период колебаний пропорционален его длине в степени $1/2$

и обратно пропорционален ускорению свободного падения также в степени $1/2$.

В принципе знания этих фактов вполне достаточно, например, для создания прибора, позволяющего находить и исследовать аномалии в поле тяжести Земли.

В качестве другого примера рассмотрим определение связи между элементами плоских гравитационных волн на поверхности тяжелой жидкости [Эпштейн, 1970]. На основании теории размерности определим зависимость скорости распространения волн при неограниченной глубине водоема от определяющих параметров. Можно предположить, что скорость волн зависит от их длины l , высоты h , от физических констант, определяющих свойства среды (σ – коэффициент поверхностного натяжения, μ – динамическая вязкость воды, ρ – плотность воды) и ускорения свободного падения g . В теории волн капиллярными и вязкими силами обычно пренебрегают, поэтому соответствующие физические константы в дальнейшем анализе учитывать не будем. Тогда можно записать следующее соотношение для скорости волн:

$$v = f(l, h, \rho, g).$$

Плотность воды должна быть исключена из дальнейшего рассмотрения, так как это единственный параметр, который содержит размерность массы, и эта размерность не может быть исключена из рассмотрения путем составления различных комбинаций с другими параметрами. В результате мы можем записать для скорости волн следующее соотношение:

$$v = \sqrt{gl} f\left(\frac{h}{l}\right),$$

из которого следует, ее пропорциональность длине волны и ускорению свободного падения в степени $\frac{1}{2}$. Коэффициент пропорциональности является функцией отношения высоты волны к ее длине. Теория подобия не дает возможности определить коэффициент пропорциональности. Для его определения необходимо использовать либо теоретические решения, либо определять его из экспериментальных данных.

Для волн малой амплитуды зависимость коэффициента пропорциональности от отношения h/l отсутствует. Теоретический расчет показывает, что коэффициент пропорциональности в этом случае равен $1/\sqrt{2\pi}$. Скорость таких волн на глубокой воде задается следующим соотношением:

$$v = \sqrt{\frac{gl}{2\pi}}.$$

Применим теорию размерности для определения вида зависимости толщины намерзающего ледяного покрова от времени. На основании соображений о физической сущности рассматриваемого процесса в качестве определяющих его параметров примем следующие:

- разность температур ΔT между верхней и нижней кромками ледяного покрова $\Delta T = \vartheta - T$, где ϑ – температура кристаллизации льда, T – температура верхней кромки льда;
- коэффициент теплопроводности льда λ ;
- время намерзания льда t ;
- удельную теплоту фазового перехода вода–лед L ;

– плотность льда ρ .

Общее число определяющих параметров равно 5. Искомая зависимость может быть тогда записана следующим образом:

$$h = f(\lambda, \Delta T, t, L, \rho). \quad (2.2)$$

Выпишем размерности искомой величины и определяющих ее параметров (см. таблицу 1.1).

$$[h] = L; \quad [\lambda] = LMT^{-3}\theta^{-1}; \quad [\Delta T] = \theta; \quad [t] = T; \quad [L] = L^2T^{-2}; \quad [\rho] = ML^{-3}. \quad (2.3)$$

Теперь необходимо выяснить, имеются ли среди определяющих параметров такие, размерность которых можно выразить через размерность других параметров. Анализ соотношений (2.3) показывает, что принципиально возможно представить размерность коэффициента теплопроводности λ через размерности разности температур ΔT , плотности ρ и времени t .

Проверим, так ли это. Для этого воспользуемся полученными в предыдущей главе результатами. В этой главе было показано, что размерность величины a выражается через размерности определяющих ее основных величин степенным одночленом (формула 1.7). На основании этого выражения можно записать следующее равенство:

$$[\lambda] = [\Delta T]^\alpha [\rho]^\beta [t]^\gamma,$$

где α, β, γ – неизвестные показатели степеней одночлена, которые подлежат определению. Предыдущее выражение можно записать в развернутом виде:

$$LMT^{-3}\theta^{-1} = L^{-3\beta} M^\beta T^\gamma \theta^\alpha.$$

Приравняв соответствующие показатели степеней в этом выражении, получим соотношения для определения неизвестных α, β, γ :

$$\alpha = -1; \quad \beta = -\frac{1}{3}; \quad \gamma = 1; \quad \gamma = -3.$$

Полученный результат показывает, что размерность коэффициента теплопроводности выразить через размерности температуры, плотности и времени невозможно. Следовательно, все пять определяющих параметра имеют независимые размерности. Тогда

разность между общим числом параметров и числом параметров с независимыми размерностями $n - k = 0$. В этом случае функция F в выражении (1.12) не зависит ни от одного безразмерного комплекса, т.е. превращается в константу. Существует один единственный безразмерный комплекс, включающий в себя искомую величину:

$$\Pi = \frac{\lambda \Delta T t}{\rho L h^2}.$$

Окончательно выражение для определения толщины льда может быть записано в виде:

$$h = C \sqrt{\frac{\lambda \Delta T t}{\rho L}}.$$

Теоретическими методами можно показать, что константа равна $\sqrt{2}$ [Богородский и др., 1978].

Таким же способом можно определить выражение для нахождения предельной толщины льда термического происхождения h_{lim} . В этом случае набор определяющих параметров будет иной, чем в только что рассмотренном примере. В самом деле, предельная толщина ледяного покрова может установиться только в том случае, если будет наблюдаться равенство потоков тепла нагревающих и охлаждающих поверхность раздела вода – лед. Количество тепла, отводимого от поверхности раздела должно зависеть от разности температур на верхней и нижней поверхностях ледяного покрова ΔT и коэффициента теплопроводности λ . Количество подводимого тепла задается тепловым потоком Φ от воды ко льду. Размерность этой величины:

$$[\Phi] = \text{MT}^{-3}.$$

Предельная толщина льда и рассмотренные определяющие параметры образуют единственный безразмерный комплекс

$$\Pi = \frac{\lambda \Delta T}{h_{\text{lim}} \Phi}.$$

Формула для определения предельной толщины льда может быть записана следующим образом:

$$h_{\text{им}} = C \frac{\lambda \Delta T}{\Phi}.$$

Интересным фактом из истории использования теории размерностей является ее применение для анализа характеристик атомного взрыва. Во время первых испытаний атомной бомбы был снят кинофильм, запечатлевший развитие процесса взрыва. В отличие от технических характеристик взрывного устройства этот фильм не был засекречен. На основании анализа данных о развитии газового пузыря во время взрыва и теории размерности Д. Тейлор в США и Л.И. Седов в СССР смогли установить мощность ядерного заряда. Можно считать, что при ядерном взрыве мгновенно в очень малой области, которую можно в первом приближении считать точкой, выделяется большое количество энергии E . От центра взрыва распространяется сферическая ударная волна, за фронтом которой давление в сотни тысяч раз превышает атмосферное. На этом основании влиянием начального давления воздуха на начальных стадиях взрыва можно пренебречь. Тогда радиус газового пузыря r в некоторый момент времени t после взрыва будет зависеть от E, t и начальной плотности воздуха ρ_0 :

$$r = f(E, t, \rho_0). \quad (2.3)$$

В данном случае число определяющих параметров равно 3. Число основных единиц с независимой размерностью также равно 3. Это означает, что функция F в выражении (1.12) не зависит ни от одного безразмерного комплекса, т.е. превращается в константу. Тогда выражение (2.3) можно записать следующим образом:

$$r = C \left(\frac{Et^2}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{5}}.$$

На основании этой формулы можно сделать вывод, что если известны значения радиуса газового пузыря в различные моменты времени, то можно определить энергию взрыва с точностью до константы C . Привлечение дополнительных физических соображений позволило оценить порядок величины этой константы. Она оказалась примерно равной единице. Это позволило определить энергию взрыва примерно равной 10^{14} Дж, а эта цифра была большим секретом.

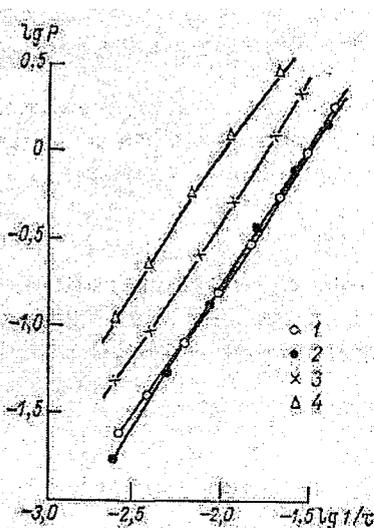


Рис. 2.1. Результаты экспериментальных исследований зависимости перепада давления от времени заполнения объема.
 1 – вода, 2 – хлороформ,
 3 – бромформ,
 4 – ртуть.

Важнейшим приложением теории размерности является ее использование для обработки экспериментальных данных, а также для планирования эксперимента. Классическим примером подобного применения теории является обработка Теодором фон Карманом результатов экспериментов группы физико-химиков [Баренблатт, 1982]. Эти ученые измеряли время τ заполнения сосуда заданного объема V и перепад давления на концах трубки Δp , через которую стационарно протекали различные жидкости: вода, хлороформ, ртуть, этиловый спирт и т.д. В результате этих исследований был получен набор зависимостей перепада давления от времени заполнения объема (рис. 2.1). Т. Карман применил к обработке этих данных теорию размерности. Он предположил, что перепад давления должен зависеть от четырех определяющих параметров $n = 4$:

$$\Delta p = f(\tau, V, \mu, \rho),$$

где μ – динамическая вязкость жидкости; ρ – плотность жидкости. Размерности искомой величины и определяющих параметров могут быть записаны следующим образом:

$$[\Delta p] = \frac{M}{LT^2}; \quad [\tau] = T; \quad [V] = L^3; \quad [\mu] = \frac{M}{LT}; \quad [\rho] = \frac{M}{L^3}.$$

Независимыми размерностями обладают только три первых параметра. В самом деле, размерность плотности можно выразить через размерности динамической вязкости, времени и объема:

$$[\rho] = [\mu][\tau][V]^{\frac{2}{3}}.$$

Таким образом, число параметров с независимыми размерностями равно $k=3$. Тогда $n-k=1$ и функция F в выражении (1.12) должна зависеть от одного безразмерного комплекса:

$$\Pi = F(\Pi_1), \quad \Pi = \frac{\Delta p \tau}{\mu}, \quad \Pi_1 = \frac{\rho V^{\frac{2}{3}}}{\mu \tau}.$$

Из приведенной записи следует, что в координатах Π_1, Π все экспериментальные точки должны лечь на единую кривую. На рис. 2.2 показан результат такого построения, полностью подтверждающий эффективность применения анализа размерностей к рассмотренной задаче. Очевидно, что своевременное применение такого анализа позволило бы существенно снизить объем экспериментальных исследований.

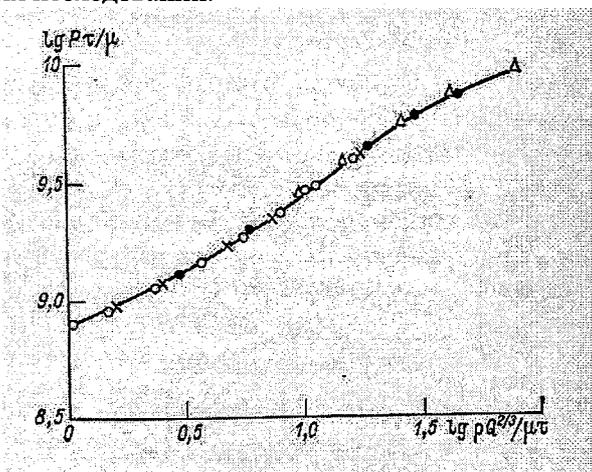


Рис. 2.2. Результаты обработки экспериментальных данных Т. Карманом. Обозначения см. рис. 2.1.

Еще одним примером применения теории размерности для обработки экспериментальных и расчетных данных является исследование переноса вод через вертикаль, вызванного действием ветра [Судольский, 1991]. Этот перенос может быть охарактеризован абсолютным элементарным расходом $|q|$. Абсолютная величина выбрана из-за того, что перенос вод через вертикаль может быть вызван однонаправленным или разнонаправленным по глубине ветровым течением.

Элементарный расход $|q|$ зависит от скорости ветра W , глубины водоема H и ускорения свободного падения g . Можно записать следующее соотношение:

$$|q| = f(W, H, g).$$

Размерности этих величин будут следующие:

$$[q] = \frac{L^2}{T}; \quad [W] = \frac{L}{T}; \quad [H] = L; \quad [g] = \frac{L}{T^2}.$$

Размерность ускорения свободного падения не является независимой, ее можно выразить через размерности скорости и глубины:

$$[g] = \frac{[W]^2}{[H]}.$$

В рассматриваемой зависимости число параметров равно $n = 3$, а число параметров с независимой размерностью равно $k = 2$. Следовательно, $n - k = 1$ и

$$\Pi = F(\Pi_1), \quad \Pi = \frac{g|q|}{W^3}, \quad \Pi_1 = \frac{gH}{W^2}.$$

Экспериментальные данные должны ложиться на единую кривую в координатах Π_1, Π . Рисунок 2.3 подтверждает этот вывод. Верхняя кривая на этом рисунке соответствует дрейфовым течениям, охватывающим всю толщу воды. К нижней кривой относятся точки, соответствующие разнонаправленным по глубине ветровым течениям.

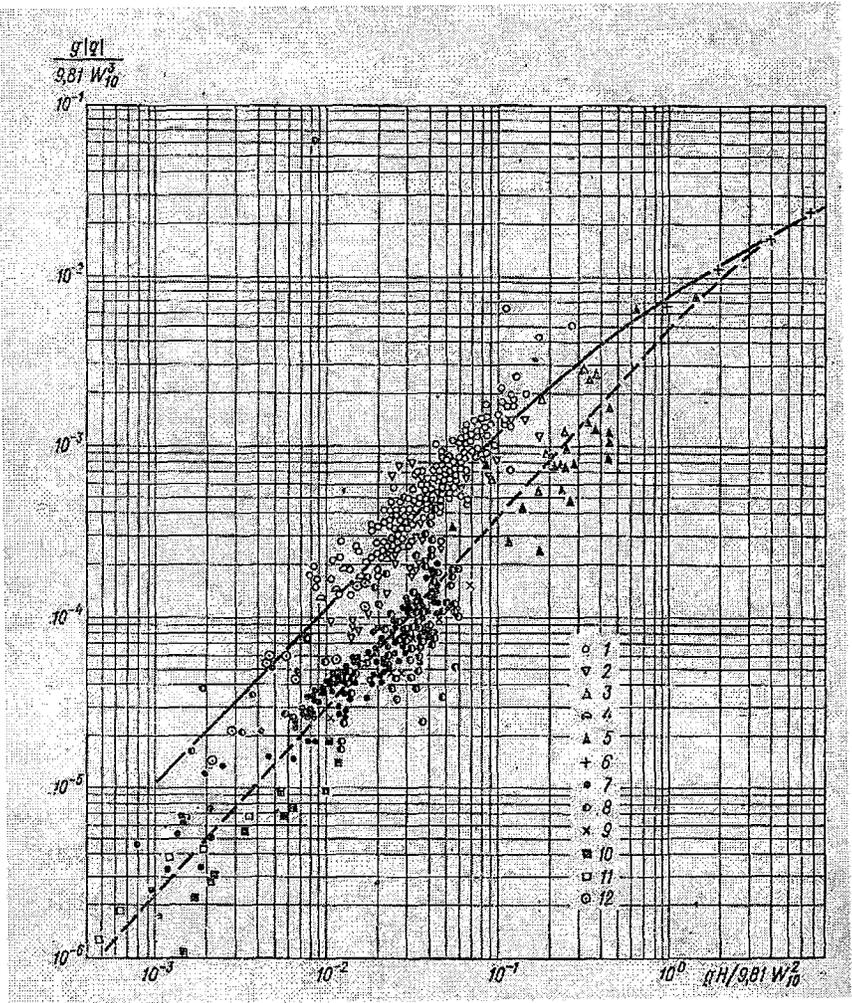


Рис. 2.3. Зависимость $\Pi = F(\Pi_1)$ для однонаправленных и разнонаправленных по глубине ветровых течений.
 1 – 5 – натурные наблюдения; 6 – результаты расчетов; 7 – 8 – результаты исследований на гидравлических моделях оз. Байкал; 9 – 12 – результаты исследований в аэрогидравлических лотках разных размеров.

Теория размерности используется не только для анализа экспериментальных данных. Часто соображения размерности позво-

ляют получить важные результаты и при теоретических исследованиях. В первую очередь анализ размерности в теоретических задачах позволяет уменьшить число учитываемых параметров.

Рассмотрим задачу о диффузии вихревой нити [Лаврентьев, Шабат, 1977]. В начальный момент времени $t = 0$ в вязкой жидкости имеется распределение скоростей, которое соответствует вихревой нити. Необходимо определить закон изменения поля скорости во времени.

Для решения задачи удобно ввести цилиндрические координаты (x, r, θ) , приняв за ось x вихревую нить. Тогда в момент времени $t = 0$ поле скорости в жидкости задается следующими соотношениями:

$$v_x = 0; \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}; \quad v_r = 0,$$

где Γ – некоторая постоянная, характеризующая интенсивность вихревой нити.

Легко заметить, что задача обладает осевой симметрией, которая должна сохраняться во время всего движения. Из этого следует, что компоненты скорости v_x и v_r будут равны нулю при любых t .

В этой задаче удобно перейти от компоненты скорости v_θ к скалярной величине – завихренности $\omega(r, t)$, которые связаны соотношением:

$$v_\theta = \frac{1}{r} \int_0^r \omega(\rho, t) \rho d\rho, \quad (2.4)$$

здесь ρ – переменная интегрирования.

Изменение поля завихренности описывается уравнением Гельмгольца

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} \right), \quad (2.5)$$

и начальным условием при $t = 0$:

$$\begin{cases} \omega = 0; & r \neq 0; \\ 2\pi \int_0^{\infty} \omega(r, 0) r dr = \Gamma; & r = 0. \end{cases}$$

Применим к поставленной задаче теорию размерности. Очевидно, что завихренность будет зависеть от четырех параметров:

$$\omega = f(r, t, \Gamma, \nu). \quad (2.6)$$

Размерности величин, входящих в выражение (2.6), представляются следующими соотношениями:

$$[\omega] = T^{-1}; \quad [r] = L; \quad [t] = T; \quad [\Gamma] = L^2 T^{-1}; \quad [\nu] = L^2 T^{-1}.$$

Из этих четырех величин только две имеют независимую размерность, например t и ν . При этом мы можем составить три безразмерные комбинации и на основании π теоремы можем записать:

$$\omega = \frac{1}{t} F\left(\frac{r}{\sqrt{\nu t}}, \frac{\Gamma}{\nu}\right). \quad (2.7)$$

Введем новую переменную $\xi = \frac{r}{\sqrt{\nu t}}$ и из соотношения (2.7)

выразим производные завихренности ω по времени и координате.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} &= -\frac{1}{t^2} \left[F\left(\xi, \frac{\Gamma}{\nu}\right) + \frac{\xi}{2} F'\left(\xi, \frac{\Gamma}{\nu}\right) \right], \\ \frac{\partial \omega}{\partial r} &= \frac{r}{\nu t^2 \xi} F'\left(\xi, \frac{\Gamma}{\nu}\right), \\ \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} &= \frac{1}{\nu t^2} F''\left(\xi, \frac{\Gamma}{\nu}\right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

После подстановки соотношения (2.8) в уравнение (2.5) вместо уравнения в частных производных получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции F :

$$F'' + \left(\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{2}\right) F' + F = 0. \quad (2.9)$$

Начальные условия в новых переменных принимают следующий вид:

$$2\pi \int_0^{\infty} F(\xi) \xi d\xi = \frac{\Gamma}{\nu}. \quad (2.10)$$

Решением задачи (2.9) – (2.10) является

$$F = \frac{\Gamma}{2\pi\nu} e^{-\frac{\xi^2}{4}},$$

тогда с учетом (2.7) получим выражение для завихренности:

$$\omega = \frac{\Gamma}{2\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}.$$

Теперь, применив формулу (2.4), получим окончательное полное решение задачи:

$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right). \quad (2.11)$$

Полученный с помощью теории размерности результат – формула (2.11) – имеет не только дидактическую ценность. С помощью этой формулы легко получать оценки времени жизни различных вихревых структур в океане.

Задания к главе 2

- 2.1. На основании теории размерности получить законы распространения разлива нефти по водной поверхности [зависимости $R = f(t)$] при постоянном объеме вылившейся нефти V на гравитационно – вязкостной и на конечной (влияет поверхностное натяжение) стадиях растекания.
- 2.2. На основании теории размерности вывести зависимость для толщины экмановского слоя (слоя трения) при ветровых течениях.

Глава 3

ПОДОБИЕ И КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Понятие подобия хорошо известно любому человеку из курса средней школы. На уроках геометрии вводится геометрическое подобие фигур. Треугольники, а также многоугольники с одинаковым числом сторон называются подобными, если у них соответственные углы равны, а сходственные стороны пропорциональны.

Естественным обобщением понятия геометрического подобия является подобие физическое. *Два физических явления называются подобными, если величины, характеризующие одно явление, могут быть получены из величин другого, взятых в сходных пространственно-временных точках, простым умножением на одинаковые во всех точках множители, называемые коэффициентами подобия* [Лойцанский, 1978].

Обозначим $\varphi(\mathbf{r}; t), \mathbf{a}(\mathbf{r}; t), Q(\mathbf{r}; t)$ некоторые в общем случае нестационарные поля распределения физических скалярных, векторных и тензорных величин в пространственно-временной области $(\mathbf{r}; t)$, где \mathbf{r} – радиус-вектор точки, его проекции (x, y, z) координаты этой точки. Эти функции описывают некоторое физическое явление. Сопоставим с этим явлением другое физическое явление, характеризуемое набором скалярных, векторных и тензорных функций $\bar{\varphi}(\bar{\mathbf{r}}; \bar{t}), \bar{\mathbf{a}}(\bar{\mathbf{r}}; \bar{t}), \bar{Q}(\bar{\mathbf{r}}; \bar{t}) \in (\bar{\mathbf{r}}; \bar{t})$. Пространственно-временная точка $\bar{M}(\bar{\mathbf{r}}, \bar{t})$ называется *сходственной* по отношению к точке $M(\mathbf{r}, t)$, если радиус-векторы этих точек и соответствующие моменты времени могут быть получены одни из других простыми линейными преобразованиями:

$$\bar{\mathbf{r}} = k_1 \mathbf{r} \quad (\bar{x} = k_1 x, \bar{y} = k_1 y, \bar{z} = k_1 z); \quad \bar{t} = k_2 t, \quad (3.1)$$

где k_1, k_2 – коэффициенты подобия, одинаковые для всех точек сравниваемых областей; k_1 – один и тот же для всех координат, он инвариантен относительно направления координатных осей в пространстве.

В соответствии с приведенным выше определением два физических явления подобны, если характеризующие их функции φ, \mathbf{a}, Q и $\bar{\varphi}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{Q}$, определенные в сходственных точках областей $(\mathbf{r}; t)$ и $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{t})$, могут быть получены одни из других линейным преобразованием:

$$\bar{\varphi} = k_{\varphi} \varphi, \quad \bar{\mathbf{a}} = k_a \mathbf{a}, \quad \bar{Q} = k_Q Q, \quad (3.2)$$

здесь k_{φ}, k_a, k_Q коэффициенты подобия, одинаковые для различных сходственных точек, при этом k_a одинаков для всех проекций вектора \mathbf{a} , а k_Q — для всех компонент тензора Q . Описанные здесь процедуры можно рассматривать как обобщение понятия геометрического подобия, согласно которому две геометрические фигуры подобны, если отношения соответствующих длин одинаковы.

Подобие двух физических явлений иногда можно понимать в более широком смысле. Расширение определений, задаваемых выражениями (3.1) и (3.2), приводит к понятию *аффинного подобия*.

В случае аффинного подобия вводятся следующие обобщенные правила преобразований:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi} &= k_{\varphi} \varphi, & \bar{a}_x &= k_{a_x} a_x, & \bar{a}_y &= k_{a_y} a_y, & \bar{a}_z &= k_{a_z} a_z, \\ \bar{Q}_{xx} &= k_{Q_{xx}} Q_{xx}, & \bar{Q}_{xy} &= k_{Q_{xy}} Q_{xy}, & & & & \text{и т.д.} \end{aligned} \right\}, \quad (3.3)$$

справедливые в сходственных точках, определяемых формулами перехода:

$$\bar{x} = k_x x, \quad \bar{y} = k_y y, \quad \bar{z} = k_z z; \quad \bar{t} = k_t t, \quad (3.4)$$

Коэффициенты подобия $k_{\varphi}, k_{a_x}, \dots, k_{Q_{xx}}, \dots, k_x, k_y, k_z$ не меняются при переходе от одной точки к другой, однако равенства между коэффициентами уже не наблюдается:

$$k_{a_x} \neq k_{a_y} \neq k_{a_z}, \quad k_{Q_{xx}} \neq k_{Q_{yy}} \neq \dots, \quad k_x \neq k_y \neq k_z.$$

Преобразования (3.1) и (3.2), характеризующие обычное подобие, или (3.3) и (3.4), характеризующие аффинное подобие, можно трактовать иначе, если для каждого из рассматриваемых физических явлений ввести некоторые постоянные величины, ха-

рактически характеризующие количественный порядок (масштаб) переменных физических величин, описывающих явление. Академик Л.И.Седов указывает, что «числовые характеристики для двух различных, но подобных явлений можно рассматривать как числовые характеристики одного и того же явления, выраженные в двух различных системах единиц измерения» [Седов, 1992]. В области одного из явлений (например, не имеющего черточек сверху) выберем характерные значения длины L и времени T и будем считать их масштабами соответствующих величин. В области подобного явления выполним ту же процедуру и выделим \bar{L} и \bar{T} . Как следует из выражения (3.1), между ними существует связь (аналогичное уравнение связи можно записать и для аффинного подобия):

$$\bar{L} = k_l L, \quad \bar{T} = k_t T. \quad (3.5)$$

Таким же образом можно ввести масштабы Φ, A, Q^* и $\bar{\Phi}, \bar{A}, \bar{Q}^*$ для характеризующих физические явления скалярных, векторных и тензорных функций φ, \mathbf{a}, Q и $\bar{\varphi}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{Q}$ соответственно, при этом из (3.2) следует:

$$\bar{\Phi} = k_\varphi \Phi, \quad \bar{A} = k_a A, \quad \bar{Q}^* = k_Q Q^*. \quad (3.6)$$

Из равенств (3.5) и (3.6) можно исключить коэффициенты подобия, используя соотношения (3.1) и (3.2). В результате для сходственных точек получаем следующие безразмерные соотношения, которые можно рассматривать как определение подобия явлений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\varphi}{\Phi} = idem, \quad \frac{\mathbf{a}}{A} = idem, \quad \frac{Q}{Q^*} = idem, \\ \text{если} \\ \frac{x}{L} = idem, \quad \frac{y}{L} = idem, \quad \frac{z}{L} = idem, \quad \frac{t}{T} = idem, \end{array} \right\} \quad (3.7)$$

Выражения (3.7) являются критериями подобия, которые должны оставаться инвариантными для подобных физических явлений.

Выражения (3.7) обосновывают один из способов получения критериев подобия. Так как подобные явления отличаются между собой только масштабом описывающих явление величин, то, если в математических моделях явления (дифференциальных уравнениях, краевых и начальных условиях) перейти к безразмерным величинам, эти математические модели станут одинаковыми для сравниваемых явлений. Тогда коэффициенты в безразмерных дифференциальных уравнениях и краевых и начальных условиях будут представлять собой критерии подобия.

Другой путь получения критериев подобия базируется на применении к рассматриваемому явлению теории размерности, в частности знаменитой П – теоремы (см. главу 1). Пусть некоторое физическое явление характеризуется n параметрами, часть из которых может быть безразмерными. Размерности определяющих физических величин и констант могут быть выражены через размерности k из этих параметров с независимыми размерностями, причем $k \leq n$. Тогда из величин n можно составить $n - k$ независимых безразмерных комбинаций. Все безразмерные характеристики явления можно рассматривать как функции от этих $n - k$ безразмерных комбинаций. Эти безразмерные комбинации составляют базу, они определяют все остальные величины. *Для подобия двух явлений необходимо и достаточно, чтобы численные значения безразмерных комбинаций, образующих базу, для этих двух явлений были одинаковы.* Таким образом, безразмерные комбинации, составляющие базу, являются критериями подобия.

Продемонстрируем оба способа получения критериев подобия. Сначала рассмотрим способ, базирующийся на приведении к безразмерному виду дифференциальных уравнений. В качестве примера возьмем уравнение Навье – Стокса в векторной форме, описывающее движение вязкой жидкости. Будем считать, что из всех массовых сил на жидкость действует только сила тяжести $-\bar{k}g$, где \bar{k} – орт вертикальной оси z .

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\bar{k}g - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \bar{v}, \quad (3.8)$$

где \vec{v} – вектор скорости жидкости; v_x, v_y, v_z – его проекции на координатные оси; ρ – плотность жидкости; p – давление; ν – кинематическая вязкость.

Различные члены уравнения (3.8) описывают действующие в жидкости силы: $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$, $\left(v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right)$ – инерционные силы, обусловленные соответственно нестационарностью процесса движения и наличием конвективных ускорений; $-\vec{k}g$ – массовые силы; $\frac{1}{\rho} \text{grad} p$ – силы давления; $\nu \Delta \vec{v}$ – силы вязкости. Все члены уравнения (3.8) имеют размерность ускорения, так как они отнесены к единице массы жидкости.

Выполним процедуру обезразмеривания уравнения (3.8). Для этого введем некоторые характерные постоянные величины длины L , времени T , скорости v_0 и давления P . Тогда можно записать следующие соотношения:

$$x = xL; \quad t = tT; \quad v_x = v_x v_0; \quad p = pP, \quad (3.9)$$

где жирным шрифтом выделены безразмерные координата, время, проекция скорости и давление.

Подставим соотношения (3.9) в уравнение (3.8), при этом учтем, что постоянные величины выносятся за знак дифференциала:

$$\frac{v_0}{T} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{v_0^2}{L} \left(v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) = -\vec{k}g - \frac{P}{\rho L} \text{grad} p + \frac{\nu v_0}{L^2} \Delta \vec{v}. \quad (3.10)$$

В полученном выражении все производные являются безразмерными. Формально для того, чтобы получить уравнение в безразмерном виде, необходимо поделить это уравнение на любой из множителей, стоящих перед производными. Однако если проанализировать структуру коэффициентов, стоящих перед безразмерными производными, можно заметить, что все эти коэффициенты, кроме одного, содержат уникальные величины, которые определяют физическую природу рассматриваемого члена уравнения. Так, первый член уравнения содержит временную постоянную, два

последних члена включают в себя характерное давление и кинематическую вязкость. Если обезразмерить уравнение с помощью одного из указанных коэффициентов, то полученные таким образом безразмерные коэффициенты перед производными будут содержать не соответствующие этим производным параметры. Например, если мы поделим уравнение (3.10) на коэффициент, стоящий перед первым членом уравнения $\frac{v_0}{T}$, то получим безразмерные коэффициенты перед всеми другими стационарными членами уравнения, которые будут содержать параметр T . Аналогичная ситуация возникнет, если обезразмеривание будет проведено с помощью какого-либо другого коэффициента, содержащего параметр P или ν .

Единственным коэффициентом в уравнении (3.10), не содержащим никаких характерных уникальных параметров, является коэффициент перед безразмерной конвективной производной $\frac{v_0^2}{L}$. Именно на этот коэффициент необходимо поделить уравнение (3.10), чтобы его обезразмерить.

$$\frac{L}{v_0 T} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \left(v_x \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) = -\bar{k} \frac{gL}{v_0^2} - \frac{P}{\rho v_0^2} \text{grad} p + \frac{\nu}{v_0 L} \Delta \bar{v}. \quad (3.11)$$

Полученные безразмерные коэффициенты, составленные из характерных величин процессов, являются критериями (числами) подобия:

$$- \text{число Струхала } Sh = \frac{L}{v_0 T};$$

$$- \text{число Фруда } Fn = \frac{v_0}{\sqrt{gL}};$$

$$- \text{число Эйлера } Eu = \frac{2P}{\rho v_0^2};$$

$$- \text{число Рейнольдса } Rn = \frac{v_0 L}{\nu}.$$

Достаточно легко установить физический смысл чисел Фруда, Эйлера и Рейнольдса. Они получены при делении удельных сил

различной физической природы на коэффициент $\frac{v_0^2}{L}$, который характеризует силы инерции. Таким образом, число Фруда характеризует отношение сил тяжести к силам инерции, число Эйлера – сил давления к силам инерции, а число Рейнольдса – сил вязкости к силам инерции. Необходимо помнить, что числа подобия только характеризуют отношение указанных сил, а не равны им. Во-первых, в выражения сил помимо безразмерных коэффициентов входят еще безразмерные производные. Во-вторых, коэффициент $\frac{v_0^2}{L}$ характеризует лишь силы инерции, связанные с конвективными ускорениями.

Число Струхала характеризует отношение гидродинамических инерционных сил, зависящих от времени, к силам инерции, связанным с конвективными ускорениями.

Теперь покажем, как те же критерии можно получить на основании анализа размерности. Для определенности рассмотрим задачу о движении тела в жидкости. Сначала проанализируем случай движения тела в безграничной жидкости. Нас будет интересовать нахождение зависимости для сопротивления воды движению тела X . В рассматриваемом случае в качестве определяющих параметров нужно выбрать характерный размер тела l , скорость его движения v , плотность ρ и динамическую вязкость воды μ . Тогда

$$X = f(l, v, \rho, \mu).$$

Из указанных величин можно получить два безразмерных комплекса:

$$\Pi = \frac{X}{\mu v L}, \quad \Pi_1 = \frac{\mu}{\rho v L} = \frac{v}{vL}, \quad \mu = \rho v.$$

Легко видеть, что комплекс Π_1 представляет собой число Рейнольдса. Таким образом, сила сопротивления может быть записана так:

$$X = \mu v l f(Rn).$$

Последнее выражение можно преобразовать:

$$X = \rho v \frac{v^2 l^2}{\nu l} f(Rn) = \rho v^2 l^2 \frac{1}{Rn} f(Rn) = \rho v^2 l^2 F(Rn). \quad (3.12)$$

Если бы мы рассматривали движение тела в идеальной жидкости, то из числа определяющих параметров необходимо было бы исключить вязкость μ . Тогда из оставшихся определяющих параметров можно было бы создать только одну безразмерную комбинацию. Выражение (3.12) нужно тогда записать следующим образом:

$$X = C \rho v^2 l^2; \quad C = const. \quad (3.13)$$

Если же теперь мы будем рассматривать движение тела на поверхности жидкости, мы должны внести в число определяющих параметров ускорение свободного падения g . Появление еще одного параметра позволяет получить еще один безразмерный комплекс Π_2 . Можно показать, что этот комплекс представляет собой число Фруда. Тогда сила сопротивления будет определяться следующей зависимостью:

$$X = \rho v^2 l^2 F(Rn, Fn). \quad (3.14)$$

Выражения (3.12) – (3.14) представляют собой общие структурные выражения для гидродинамических сил.

Выше мы рассматривали течение жидкости, вызванное движением в нем тела. В океанологии очень часто представляет большой интерес изучение свободных движений жидкости, вызванных различием плотности или температуры в разных ее частях.

Одной из особенностей свободных течений является необходимость определения их скорости v , поэтому она должна быть исключена из числа определяющих параметров. Отсюда сразу же следует, что числа Фруда и Рейнольдса не могут быть использованы для анализа данного течения. Тем не менее с помощью этих чисел можно сконструировать новое число подобия – число (критерий) Галилея:

$$Ga = \frac{Rn^2}{Fn} = \frac{v^2 L^2 g L}{v^2 v^2} = \frac{gL^3}{v^2}.$$

Можно показать, что число Галилея может быть представлено как произведение двух безразмерных комплексов, один из которых характеризует отношение инерционной силы к силе внутреннего трения, а другой – отношение силы тяжести к той же силе.

При изучении свободных потоков могут быть использованы и другие критерии, например число Архимеда. Это число является модификацией числа Галилея:

$$Ar = \frac{gL^3}{v^2} \frac{\Delta\rho}{\rho},$$

где $\Delta\rho = |\rho - \rho'|$, ρ, ρ' – плотности двух различных сред. Это могут быть плотности воды и льда, плотности различных объемов воды, различающихся температурой, и т.п.

Число Архимеда может быть получено непосредственно из рассмотрения соотношений чисел Рейнольдса и Фруда, если последнее записать не для силы тяжести $\bar{g}\rho$, а для силы плавучести $\bar{g}\Delta\rho$.

При изучении термической конвекции необходимо учитывать еще один определяющий физический параметр – температуру. Для таких течений необходимо провести "термическую модификацию" критерия Архимеда. При изменении температуры происходит изменение объема тела, которое характеризуется коэффициентом объемного расширения:

$$\beta = \frac{1}{w} \frac{dw}{d\vartheta},$$

где $w = 1/\rho$ – удельный объем среды; $\vartheta = |T - T_0|$, T_0, T – температура среды и текущая температура соответственно.

Силу плавучести (подъемную), отнесенную к единице объема в некоторой точке среды при небольших перепадах температуры, можно записать в виде $\bar{g}\rho\beta\vartheta$. Тогда критерий Архимеда преобразуется в число Грасгофа:

$$Gr = \frac{gL^3}{v^2} \beta\vartheta.$$

При рассмотрении задач о переносе тепла движущейся жидкостью используется критерий Пекле, который представляет собой

меру отношения переноса теплоты конвекцией к интенсивности переноса теплоты кондукцией:

$$Pe = \frac{vL}{\alpha},$$

где $\alpha = \frac{\lambda}{C_p \rho}$ – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности; C_p – теплоемкость при постоянном давлении.

Легко заметить, что структура чисел Рейнольдса и Пекле одинаковая. Поэтому, поделив одно число на другое, получим еще один критерий – число Прандтля:

$$Pr = \frac{\nu}{\alpha}.$$

Этот критерий состоит из одних физических констант, поэтому он характеризует среду. Известно, что коэффициент температуропроводности характеризует способность среды изменять температуру при прохождении потока тепла. Коэффициент кинематической вязкости аналогично характеризует способность среды изменять скорость движения при прохождении потока количества движения. Таким образом, число Прандтля служит мерой отношения этих процессов.

Можно записать обобщенные уравнения для распределения температуры жидкости, взаимодействующей с твердым телом в условиях вынужденного движения [Гухман, 1973]:

$$\frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G}_0} = f\left(\frac{x_1}{L}, \frac{x_2}{L}, \frac{x_3}{L}, Rn, Pr\right). \quad (3.15)$$

В выражение (3.15) входит число Рейнольдса, так как рассматривается вынужденное движение жидкости, в котором задана характерная скорость. Перенос тепла описывается числом Прандтля. Однако вместо числа Прандтля могло быть использовано число Пекле.

При рассмотрении термической конвекции использовать выражение (3.15) уже нельзя, так как скорость движения становится определяемой величиной. В этом случае обобщенные уравнения

для поля скорости и температуры могут быть записаны в следующем виде [Гухман, 1973]:

$$\frac{vL}{\nu} = f\left(\frac{x_1}{L}, \frac{x_2}{L}, \frac{x_3}{L}, Gr, Pr\right), \quad (3.16)$$

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f\left(\frac{x_1}{L}, \frac{x_2}{L}, \frac{x_3}{L}, Gr, Pr\right). \quad (3.17)$$

Во многих прикладных задачах океанологии необходимо учитывать процесс теплообмена между различными средами. Для описания таких процессов применяется два критерия: число Био и число Нуссельта. Структурная формула у этих чисел одинаковая, она представляет собой безразмерный комплекс $\beta L/\lambda$, где β – коэффициент теплоотдачи, λ – коэффициент теплопроводности. Физический же смысл у этих двух критериев различный.

Критерий Био $Bi = \frac{\beta L}{\lambda_s}$ характеризует теплообмен между двумя средами. В этом критерии коэффициент теплоотдачи является заданной величиной. В критерии используется коэффициент теплопроводности той среды, теплоотдача которой изучается. Например, если рассматривается задача о теплообмене между твердым телом и жидкостью (термоанемометр), то используется коэффициент теплопроводности твердого тела. Критерий Био используется для термической классификации водохранилищ [Пехович, 1983], в этом случае в нем используется коэффициент теплопроводности воды.

Критерий Нуссельта служит для изучения самого процесса теплообмена. В этом критерии коэффициент теплоотдачи является неизвестной величиной и всегда используется коэффициент теплопроводности жидкости.

В конце данной главы приведем сводку критериев (чисел) подобия применяющихся в океанологии (табл. 3.1).

Критерии подобия, применяемые в океанологии

Название	Формула	Основные параметры	Физическая сущность
Число Фруда	$Fr = \frac{v_0}{\sqrt{gL}}$	v_0 – характерная скорость; L – характерный линейный размер; g – ускорение свободного падения	Отношение сил инерции к силам тяжести
Число Рейнольдса	$Rn = \frac{v_0 L}{\nu}$	ν – кинематическая вязкость	Отношение сил инерции к силам вязкости
Число Эйлера	$Eu = \frac{2P}{\rho v_0^2}$	P – давление; ρ – плотность	Отношение сил инерции к силам давления
Число Струхала	$Sh = \frac{L}{v_0 T}$	T – характерное время процесса	Отношение гидродинамических инерционных сил различной природы
Число Коши	$Ch = \frac{\rho v^2}{E}$	E – модуль упругости (Юнга)	Отношение инерционных сил к силам упругости
Число Экмана	$Ek = \frac{2\nu}{fL^2}$	f – параметр Кориолиса	Отношение сил вязкости к силе Кориолиса
Число Россби	$Ro = \frac{v_0}{\omega L} = \frac{v_0}{fL}$	ω – частота вращения	Отношение сил инерции к силе Кориолиса
Число Вебера	$We = \frac{\sigma}{\rho v_0^2 L}$	σ – коэффициент поверхностного натяжения	Отношение сил инерции к капиллярным силам
Число Галилея	$Ga = \frac{gL^3}{\nu^2}$		Представляет собой произведение двух безразмерных комплексов, один из которых характеризует отношение инерционной силы к силе внутреннего трения, а другой – отношение силы тяжести к той же силе

Название	Формула	Основные параметры	Физическая сущность
Число Архимеда	$Ar = \frac{gL^3 \Delta\rho}{\nu^2 \rho}$	$\Delta\rho = \rho - \rho' $, ρ, ρ' – плотности двух различных сред	Модификация числа Галилея, характеризует взаимодействие архимедовой силы, вызываемой разностью плотностей, и сил вязкого трения
Число Грасгофа	$Gr = \frac{gL^3}{\nu^2} \beta \vartheta$	$\vartheta = T - T_0 $, T_0, T – температура среды и текущая температура соответственно	"Термическая модификация" числа Архимеда
Число Пекле	$Pe = \frac{\nu L}{\alpha}$	α – коэффициент температуропроводности,	Представляет собой меру отношения переноса теплоты конвекцией к интенсивности переноса теплоты кондукцией
Число Прандтля	$Pr = \frac{\nu}{\alpha}$		Служит мерой отношения процессов изменения температуры при прохождении потока тепла и изменения скорости при прохождении потока количества движения
Число Нуссельта	$Nu = \frac{\beta L}{\lambda_f}$	β – коэффициент теплоотдачи; λ_f – коэффициент теплопроводности жидкости	характеризует взаимодействие интегральной теплоотдачи с теплопроводностью в пристенном слое текучей среды
Число Био	$Bi = \frac{\beta L}{\lambda_s}$	λ_s – коэффициент теплопроводности твердого тела	Характеризует соотношение кондуктивного и конвективного термического сопротивления на границе двух сред
Число Фурье	$Fo = \frac{\alpha T}{L^2}$		Выражает определенное соответствие между темпом изменения условий в окружающей среде и темпом перестройки температуры внутри тела.

Задания к главе 3

- 3.1. Привести к безразмерному виду систему уравнений Экмана и определить критерии подобия:

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -vf,$$

$$\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = uf,$$

где u, v – компоненты скорости течения; μ, ρ – динамическая вязкость и плотность жидкости; f – параметр Кориолиса.

Граничные условия:

$$1) \quad -\mu \frac{du}{dz} = 0; \quad -\mu \frac{dv}{dz} = \tau; \quad z = 0;$$

$$2) \quad u < \infty; \quad v < \infty; \quad z \rightarrow \infty.$$

- 3.2. Привести к безразмерному виду уравнение диффузии солей и определить критерий подобия, считая плотность ρ и коэффициент диффузии χ_s постоянными:

$$\rho \frac{dS}{dt} = \text{div}(\rho \chi_s \nabla S),$$

где S – соленость.

- 3.3. Привести к безразмерному виду уравнение Гельмгольца (2.5) и определить критерий подобия.
- 3.4. Определить критерий подобия, описывающий процесс соударения айсберга с неподвижной добычной платформой:

$$M_I \ddot{x} = -\sigma_c A(x),$$

где X – величина внедрения сооружения в айсберг; M_I – масса айсберга с учетом присоединенных масс жидкости; $A(x)$ – площадь контакта айсберга с сооружением, σ_c – прочность льда при раздроблении.

Начальными условиями для этого уравнения являются следующие соотношения:

$$x|_{t=0} = 0; \quad \dot{x}|_{t=0} = v_I,$$

где v_I – скорость дрейфа айсберга до соударения.

Глава 4

МОДЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В различных областях науки и техники часто возникают задачи, экспериментальное исследование которых невозможно или крайне сложно и дорого. Такие задачи появляются в тех случаях, когда необходимо исследовать физическое явление, имеющее большие пространственные и/или временные масштабы. В технических науках с такими задачами сталкиваются при необходимости изучения поведения в реальных условиях эксплуатации сложных инженерных объектов: судов, самолетов, гидротехнических сооружений и т.п.

В океанологии к задачам, в которых возможно эффективное использование модельного эксперимента, можно отнести исследование процессов общей океанической циркуляции, тропических циклонов, проблемы образования струйных течений, генерации волнения и многие другие задачи. В области технических приложений океанологии можно указать такие важные задачи, как исследование распространения различных примесей в морской среде, изучение разливов нефти на чистой воде и в ледовых условиях, изучение взаимодействия волнения с защитными гидротехническими сооружениями портов и т.д.

Модельные представления возникли в глубокой древности. Одна из линий развития моделей и моделирования в современном понимании этих терминов была связана с вещественными образцами изделия либо сооружения, которые использовались при решении архитектурно-строительных и технических задач в античности. Так, в «Своде механики» Филона Византийского (III в. до н.э.) модели в указанном смысле упоминаются как общеизвестный предмет [Неуймин, 1983]. Упоминает о моделях и античный архитектор Витрувий (I в. до н.э.). Тем не менее существенного развития моделирование в античности не получило.

Следующие документально засвидетельствованные сведения о применении моделей относятся к эпохе Возрождения. С этого времени модели все чаще применяются для решения различных технических задач, в первую очередь связанных со строительством

вом. В качестве примера можно привести хранящуюся в Исаакиевском соборе Санкт-Петербурга модель, изготовленную Огюстом Монферраном до начала строительства собора.

Все чаще модели начинают использоваться при проведении исследовательских работ, направленных на создание новых образцов техники. В этом смысле очень показателен анализ, выполненный историками науки, позволяющий установить источники идей и данных, полученных Джеймсом Уаттом при разработке универсальной паровой машины. Было установлено, что по всем типам проектно-исследовательских задач модельный эксперимент внес существенный вклад в конечный результат работы [Неуймин, 1983]. Существенным недостатком этих модельных экспериментов было отсутствие научно обоснованной методики переноса экспериментальных результатов на натурные условия, поэтому большинство экспериментов носили качественный характер. Основы такой теории были заложены И. Ньютоном в его «Математических началах натуральной философии», однако вплоть до второй половины XIX в существенных результатов в этой области не было получено.

Дальнейшее развитие модельный эксперимент получил в судостроении. Именно здесь были заложены научные основы модельного эксперимента, позволившие ему со временем стать одним из основных методических приемов исследования в ряде направлений прикладной механики. Следует отметить, что попытки использовать испытания моделей для нужд судостроения имеют давнюю историю, восходящую ко времени Леонардо да Винчи. В XVIII в. проведение буксировочных испытаний моделей в бассейнах гравитационного типа становится довольно обычным явлением (Бофуа, Франклин, Чапмен и др.). На рис.4.1 представлена старинная гравюра, на которой изображены сопоставительные испытания моделей судов в открытом бассейне, позволяющие выбрать лучший вариант из числа испытанных моделей по величине сопротивления воды.



Рис. 4.1. Сопоставительные испытания моделей судов в открытом бассейне гравитационного типа. Середина XVIII века, Лондон.

Интенсивное развитие модельного эксперимента началось после разработки В. Фрудом методики проведения модельных испытаний в опытовых бассейнах [Сазонов, 2010]. Им первым был осознан тот факт, что полное моделирование процессов в модельном эксперименте практически никогда не осуществимо (при наличии не совместимых критериев подобия). В. Фруд искусственно разделил сопротивление судна на две составляющие и предложил определять составляющую сопротивления, связанную с вязкостью воды, с помощью расчетных зависимостей, которые могут быть определены с помощью специально поставленных экспериментов. Кроме этого, он разработал и обосновал процедуру пересчета модельных данных на натурные условия. Применение фрудовской методики сразу же дало хороший результат, что обусловило ее быстрое распространение во всем мире. Если попытаться сформулировать основной результат, полученный В.Фрудом, то это можно сделать так. Он показал *возможность применения модельного*

эксперимента в случае не строгого соблюдения критериев подобия при условии разработки специальной методики пересчета результатов эксперимента на натурные условия. Фактически Фрудовская методика явилась первой попыткой преодоления «масштабного эффекта», возникающего из-за неточного выполнения в эксперименте критериев моделирования.

Создание этой методики способствовало распространению модельного эксперимента во все области прикладной механики, где этот эксперимент был возможен. В результате в этих областях прикладной механики, а особенно в технических науках гидромеханического цикла, сложились методологические подходы, определяющие модельный эксперимент как основной метод решения задач, стоящих перед исследователем.

Для осуществления модельного эксперимента необходимо одновременное выполнение *геометрического, кинематического и динамического* подобия между натурным и модельным физическими процессами. Геометрическое подобие требует пропорциональности между сходственными геометрическими размерами натурального и модельного явлений. Будем обозначать величины, относящиеся к натурным объектам, индексом "*f*", а модели – индексом "*m*". Эти сокращения взяты от английских словосочетаний *full scale* – полный масштаб и *model scale* – модельный масштаб. Тогда, в соответствии с геометрическим подобием сходственные размеры явлений *l*, координаты сходственных точек *x*, характерные сходственные линейные размеры *L* должны удовлетворять следующему соотношению:

$$\frac{l_f}{l_m} = \frac{x_f}{x_m} = \frac{L_f}{L_m} = k, \quad (4.1)$$

где *k* – геометрический масштаб (число, показывающее во сколько раз сходственные геометрические размеры натурального объекта больше модели).

Кинематическое подобие заключается в том, что поля скоростей природы и модели подобны в сходственные моменты времени. Другими словами, в сходственных точках скорости всех физических тел, вовлеченных в рассматриваемое явление, должны быть пропорциональны в сходственные моменты времени.

$$\frac{\bar{v}_f}{\bar{v}_m} = k_v, \quad (4.2)$$

где k_v – масштаб скоростей.

Если в модельном эксперименте изучается неустановившийся процесс, то, как это уже подчеркивалось, сравнение скоростей имеет смысл только в сходственные моменты времени. Пусть t_f и t_m некоторые промежутки времени для натурального объекта и модели, T_f и T_m характерные промежутки времени природы и модели. В качестве таких промежутков можно выбрать, например, период колебаний, время прохождения объектом пути, равного его характерному размеру, и т.п. Тогда может быть введено безразмерное время t :

$$t = \frac{t}{T} = const. \quad (4.3)$$

В сходственные моменты времени безразмерное время одинаково для модели и природы. Условие (4.2) должно выполняться совместно с условием (4.3).

Условия динамического подобия были сформулированы в предыдущей главе в виде критериев (чисел) подобия. Численное значение критериев не изменяется при переходе от натуральных объектов к модели.

Ранее уже показывалось (см. главу 1), что любая физическая закономерность, описываемая формулой вида:

$$a = f(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n), \quad (4.4)$$

на основании П – теоремы может быть представлена в виде:

$$П = F(П_1, \dots, П_{n-k}), \quad (4.5)$$

где $П, П_1, \dots, П_{n-k}$ – безразмерные комплексы.

При использовании зависимостей типа (4.5) для анализа модельного эксперимента принято считать, что определяющими физическое явление являются только те безразмерные параметры, величина которых лежит в пределах от 0,1 до 10 [Баренблатт, 1982]. Если величина параметра находится вне указанных

пределов, то при анализе явления таким параметром можно пренебречь. Сформулированное выше положение не всегда выполняется, поэтому применять его следует с большой осторожностью. Примером, нарушающим указанное правило, является число Рейнольдса, которое для движущихся в воде объектов может изменяться от 10^{-3} для жгутиковых организмов до 10^9 для современных крупнотоннажных судов. В большинстве случаев пренебрегать влиянием этого параметра нельзя.

После того как выполнен отбор определяющих явление параметров, динамические критерии подобия [безразмерные комплексы в выражении (4.5)] являются определенными и на их основе можно моделировать явление.

В тех случаях, когда представляется возможным осуществить моделирование, удовлетворив всем критериям подобия, такое моделирование называется *полным*. В качестве примера можно привести моделирование движения тела в безграничном водном пространстве или при полете в воздухе. И в том и в другом случае, сопротивление среды движению тела R будет описываться следующей зависимостью:

$$R = C(Rn) \frac{\rho v^2}{2} \Omega, \quad (4.6)$$

где ρ – плотность среды; v – скорость движения тела; Ω – площадь поверхности тела, $C(Rn)$ – коэффициент сопротивления среды, зависящий от числа Рейнольдса.

При соблюдении геометрического и кинематического подобия условием соблюдения динамического подобия между моделью и натурным явлением будет равенство чисел Рейнольдса для модели и природы. Это равенство позволяет определить ранее неизвестный масштаб скоростей k_v :

$$\frac{L_f v_f}{\nu} = \frac{L_m v_m}{\nu} \Rightarrow k_v = \frac{v_f}{v_m} = \frac{L_m}{L_f} = \frac{1}{k} \Rightarrow v_m = k v_f. \quad (4.7)$$

Таким образом, чтобы удовлетворить критерию Рейнольдса, необходимо увеличивать скорость движения модели по сравнению

со скоростью натурального объекта в k раз, где k – геометрический масштаб модели.

В соответствии с выражениями (4.6) и (4.7) пересчет измеренного в модельном эксперименте сопротивления на натурные условия осуществляется по формуле:

$$R_f = k^4 R_m. \quad (4.8)$$

Рассмотрим теперь более сложный опыт, в котором необходимо исследовать сопротивление среды объекту, движущемуся вблизи границы раздела сред. В качестве границы может выступать и пикноклин, поэтому приводимые ниже рассуждения могут быть отнесены и к подводным объектам. Можно показать, что в рассматриваемом случае выражение (4.6) преобразуется к следующему виду:

$$R = C(Rn, Fn) \frac{\rho v^2}{2} \Omega, \quad (4.9)$$

где $C(Rn, Fn)$ – коэффициент сопротивления среды, зависящий теперь не только от числа Рейнольдса, но и от числа Фруда.

Полное динамическое подобие модельного эксперимента натурным условиям возможно только при одновременном выполнении двух критериев подобия – Рейнольдса и Фруда. Выясним, какие требования на величину масштаба скоростей накладывает выполнение критерия подобия Фруда:

$$\frac{v_f}{\sqrt{gL_f}} = \frac{v_m}{\sqrt{gL_m}} \Rightarrow k_v = \frac{v_f}{v_m} = \sqrt{\frac{L_f}{L_m}} = \sqrt{k} \Rightarrow v_m = \frac{v_f}{\sqrt{k}} \quad (4.10)$$

Для удовлетворения критерия Фруда необходимо, чтобы скорость движения модели была в \sqrt{k} раз меньше, чем скорость натурального объекта.

Сравнив требования к масштабу скорости, которые вытекают из критериев подобия Рейнольдса и Фруда [выражения (4.7) и (4.10)], можно сделать вывод о невозможности одновременного моделирования явлений таким образом, чтобы одновременно были бы удовлетворены оба критерия, при проведении испытаний в воде.

Полученный результат позволяет рассматривать динамические критерии подобия как *совместные* или *не совместные*. К со-

вместным относятся такие динамические критерии подобия, использование которых не приводит к противоречивым требованиям и может быть выполнено одновременно в эксперименте. Рассмотрим, возможно ли совместное использование критериев Фруда и Струхалея при моделировании неустановившихся движений с учетом волнообразования?

$$\frac{L_f}{v_f T_f} = \frac{L_m}{v_m T_m} \Rightarrow \frac{T_f}{T_m} = \frac{L_f v_m}{L_m v_f} = \frac{k}{\sqrt{k}} \Rightarrow T_m = \frac{T_f}{\sqrt{k}}. \quad (4.11)$$

Из приведенных выражений следует, что периоды колебаний натурального объекта и модели связаны как корень квадратный из геометрического масштаба модели. Противоречий между критериями Фруда и Струхалея не возникает, причем измеренные в опыте периоды колебаний должны пересчитываться на натурные условия с использованием последнего соотношения (4.11).

Примером не совместных критериев подобия являются рассмотренные выше критерии Фруда и Рейнольдса.

Необходимо отметить, что описанная выше ситуация является довольно типичной при попытках использования модельного эксперимента для исследований явлений природы. Может сложиться впечатление, что моделирование в этих случае вообще невозможно. К счастью, это не так. На помощь приходит метод так называемого *частичного моделирования (приближенное подобие)*. Суть этого метода заключается в выполнении моделирования по части определяющих критериев подобия. Влияние же остальных критериев подобия учитывается путем пересчета экспериментально полученных данных на натурные условия по специально разработанным методикам.

Впервые возможность применения частичного моделирования доказал Вильям Фруд, который разработал методику проведения модельных испытаний судов. Для преодоления противоречия, содержащегося в выражении (4.9), он предложил испытывать модели судов в соответствии с критерием подобия Фруда. Учет влияния сил вязкости осуществлялся следующим образом. Из экспериментально полученных данных о сопротивлении модели вычиталась вязкостная составляющая сопротивления. Эта составляющая рассчитывалась по предложенной В.Фрудом формуле при модельном

числе Рейнольдса. Полученное в результате вычитания так называемое остаточное сопротивление пересчитывалось на натурные условия в соответствии с критерием Фруда. Из выражений (4.9) и (4.10) следует, что при выполнении критерия Фруда сила пересчитывается на натурные условия по следующей формуле: $R_f = k^3 R_m$.

К пересчитанным данным прибавлялось вязкостное сопротивление натурального объекта, вычисленное по той же формуле Фруда для натурального числа Рейнольдса.

В основных своих чертах методика экспериментального определения сопротивления воды движению судна, предложенная В.Фрудом во второй половине XIX столетия, используется до сих пор во всех опытовых бассейнах мира. Как уже отмечалось, успех Фруда способствовал развитию методов моделирования во многих науках, в первую очередь, гидромеханического цикла.

Основным достижением модельного эксперимента следует считать успехи, достигнутые в XX веке в создании надводного и подводного флотов, авиации, космической техники, ядерных реакторов и т.д. Все эти технические устройства не могли быть созданы без применения в той или иной степени модельного эксперимента. Для обеспечения потребностей практики развивался и сам модельный эксперимент, причем это развитие шло как по линии развития исследования на уже имеющихся экспериментальных установках новых объектов, так и путем создания новых экспериментальных установок [Лобачев, Сазонов, 2008].

Примером, иллюстрирующим первую линию развития, могут служить начатые еще при жизни В.Фруда испытания в опытовых бассейнах, созданных для испытаний корпусов судов, довольно специфических объектов – гребных винтов судов. Другим примером является имитация битого льда на поверхности опытового бассейна с помощью парафиновых пластинок и проведение в этих условиях буксировочных испытаний судов.

Более плодотворным направлением было создание новых экспериментальных установок. Даже если только перечислить новые экспериментальные средства, созданные для проведения исследований в области гидродинамики судна и средств освоения океана, то получится внушительный список. Это гидродинамические лотки, кавитационные трубы и кавитационные бассейны, бассейны

для изучения мореходных и маневренных качеств судов. К этому списку необходимо прибавить аэродинамические трубы, основное применение которых связано с созданием авиационной техники, тем не менее аэродинамический эксперимент широко применяется и при исследованиях, связанных с освоением океана, а также ледовые опытовые бассейны. Развитие экспериментальной техники обострило вопрос об ограничениях, накладываемых на модельный эксперимент.

Трудности, возникающие при проведении модельного эксперимента, можно разделить на две группы. К первой группе можно отнести такие эксперименты, при проведении которых заранее известно о невозможности удовлетворить всем основным критериям подобия. В этом случае в эксперименте выполняется так называемое частичное моделирование, заключающееся в учете одной группы совместимых между собой критериев, влияние других критериев учитывается с помощью специальной системы пересчета экспериментальных данных на натурные условия. Примером таких экспериментов могут служить исследования ходкости судов.

К другой группе относятся эксперименты, в которых формально все критерии подобия удовлетворены, но при выполнении эксперимента могут возникать некоторые паразитные эффекты, которые в принятой постановке задачи для исследуемого натурального объекта несущественны. Такая ситуация может возникнуть, например, при исследовании обтекания крыльев воздушным потоком при малых скоростях движения, при которых сжимаемость воздуха не учитывается. Попытка удовлетворения критерию Рейнольдса приводит к увеличению скорости обтекания модели потоком воздуха, при этом число Маха ($M = \frac{v}{v_{зв}}$, где v — скорость потока, $v_{зв}$ — скорость звука в среде) возрастает и может превысить критическое значение, после которого необходимо учитывать сжимаемость. Учет возможности возникновения подобных эффектов при проектировании аэродинамических труб привел к существенному увеличению их размеров (выполняются продувки самолетов в натуральную величину).

Ограничения, накладываемые на модельный эксперимент, объясняют, почему он является основным инструментом исследо-

вания в прикладных науках гидромеханического цикла и практически не используется при решении задач, связанных с изучением напряженно-деформированного состояния конструкций.

Рассмотрим моделирование равновесия упругих конструкций [Седов, 1977]. Определяющими параметрами в этом случае будут характерный размер L , модуль Юнга материала E , безразмерный коэффициент Пуассона σ , удельный вес материала ρg (этот параметр необходимо учитывать, если в рассматриваемом состоянии вес конструкции существенен) и величина, имеющая размерность силы, которая характеризует внешние нагрузки P . Из этих параметров можно получить три безразмерные комбинации:

$$\sigma, \frac{E}{\rho g L}, \frac{P}{EL^2}.$$

Если модель и сооружение в натуре сделаны из одного и того же материала, значения ρ , σ и E будут одинаковы и для модели, и для натуре. Тогда критериям подобия можно удовлетворить только при соблюдении равенства $gL = const$. Но в обычных условиях $g = const$, поэтому размеры модели должны совпадать с натурой. Исследовать равновесие весомых упругих тел можно только на специальных центробежных экспериментальных установках, однако на этих установках нельзя испытывать модели большого размера, что существенно ограничивает возможности их использования.

Опыт создания экспериментальных установок для проведения модельного эксперимента показывает, что относительно простые в техническом отношении установки могут быть созданы только для проведения опытов, удовлетворяющих только одному критерию подобия. Попытки создания специализированных лабораторий, в которых осуществимо моделирование по двум критериям, приводит к появлению очень сложных объектов. В качестве примера таких лабораторий можно указать кавитационные бассейны, в них моделирование осуществляется по критерию Фруда и числу кавитации, и ледовые бассейны, в которых помимо критерия Фруда удовлетворяют критерии подобия для моделированного ледяного покрова.

Платой за возможность применения частичного моделирования является возникновение "масштабного эффекта".

Известные в науке масштабные эффекты можно разделить на две неравные группы. К первой группе относятся масштабные эффекты, условно называемые «физическими». Это такие масштабные эффекты, проявление которых обусловлено физической природой изучаемого объекта. Наиболее ярким примером является масштабный эффект прочности геоматериалов. В соответствии с этим эффектом прочность малого образца может во много раз превышать прочность крупного объекта. Основой этого эффекта является вероятностный характер распределения дефектов в геоматериалах. При увеличении размера образца возрастает вероятность содержания в нем более крупного дефекта, что снижает его прочность. В какой-то мере к «физическим» масштабным эффектам можно отнести масштабный эффект возникновения кавитации. Согласно современным представлениям, ядром возникновения кавитации является нерастворенный в воде газ, находящийся в поверхностных трещинах твердых частиц, содержащихся в жидкости, либо на поверхности самого тела. Распределение трещин на поверхности тела носит также вероятностный характер. При увеличении размеров тела увеличивается количество трещин, а также возрастает объем нерастворенного газа, который может захватываться этими трещинами. Однако следует отметить, что это не единственное объяснение масштабного эффекта возникновения кавитации, существуют и другие, учитывающие, например, скорость роста газовых пузырьков в зонах разряжения давления.

Ко второй группе относятся масштабные эффекты, вызванные несоблюдением при проведении экспериментов некоторых из критериев подобия (частичное моделирование). Так, например, практические способы количественной оценки ходовых качеств судна основываются на результатах модельного эксперимента, проводимого в опытовых бассейнах. Нарушением законов подобия в модельном эксперименте (не соблюдение критерия Рейнольдса) обусловлено возникновение задачи о масштабном эффекте интегральных и локальных гидродинамических характеристик обтекания корпуса судна реальной (вязкой) жидкостью.

В решении задачи о масштабном эффекте можно выделить два основных направления: экспериментальное и численное моделирование. Экспериментальное направление решения данной за-

дачи связано с проведением испытаний масштабных серий моделей. На современном этапе наибольшее развитие получило второе направление, т.е. численное моделирование. Это связано как с недостатками экспериментальных методов – с невозможностью в эксперименте на масштабных сериях достичь натуральных значений чисел Рейнольдса и большой стоимостью проведения подобных работ, так и со значительным развитием численных методов и вычислительной техники. В последние два десятилетия для решения задачи о масштабном эффекте все чаще используются методы, основанные на решении полных уравнений Рейнольдса.

В некоторых случаях оценку величины масштабного эффекта можно провести более простыми методами [Эпштейн, 1970]. Будем рассматривать задачу о движении тела пересекающего границу раздела вода – воздух. Тогда коэффициент сопротивления этого тела будет зависеть от следующих параметров:

$$C = f\left(\frac{l_1}{l}, \dots, \frac{l_n}{l}, Fn, Rn, We\right), \quad (4.12)$$

где l, l_1, \dots, l_n – линейные размеры, характеризующие размеры, форму и расположение элементов движущегося объекта.

Как выше уже отмечалось, в модельном эксперименте обычно удовлетворяется только критерий Фруда, поэтому величина коэффициента сопротивления C_m , определяемая в опыте, отличается от своего натурального значения C_f . Эти величины совпали бы, если можно было пренебречь влиянием вязкости и поверхностного натяжения. Для удобства последующего анализа запишем выражение (4.12) несколько в другом виде:

$$C = f\left(\frac{l_1}{l}, \dots, \frac{l_n}{l}, Fn, K, G\right), \quad (4.13)$$

где

$$K = \sqrt[3]{\left(\frac{Fn}{Rn}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{v^2}{gL^3}}, \quad (4.14)$$

$$G = \sqrt{Fn^2 We} = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g L^2}}. \quad (4.15)$$

Можно заметить, что из новых безразмерных параметров K и G исключена скорость.

По условиям задачи геометрическое подобие и критерий Фруда в эксперименте выполняются, поэтому можно записать:

$$C = F(K, G). \quad (4.16)$$

При $\nu = \sigma = 0 \Rightarrow K = G = 0$.

Разложим функцию $F(K, G)$ в ряд, ограничившись рассмотрением малых первого порядка:

$$C(K, G) = C(0, 0) + K \frac{\partial C}{\partial K}(0, 0) + G \frac{\partial C}{\partial G}(0, 0) + \dots$$

В дальнейшем нас будет интересовать значение величины ΔC :

$$\begin{aligned} \Delta C &= C(K, G) - C(0, 0) = K \frac{\partial C}{\partial K}(0, 0) + G \frac{\partial C}{\partial G}(0, 0) = \\ &= \frac{1}{L} \left[\sqrt[3]{\frac{v^2}{g}} \frac{\partial C}{\partial K}(0, 0) + \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \frac{\partial C}{\partial G}(0, 0) \right] = \frac{B}{L}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где B – некоторая константа при постоянных значениях входящих в нее физических величин плотности, вязкости, поверхностного натяжения и ускорения свободного падения.

Масштабный эффект можно определить как разность:

$$\Delta C_f - \Delta C_m = B \left(\frac{1}{L_f} - \frac{1}{L_m} \right). \quad (4.18)$$

Для определения неизвестной постоянной B необходимо провести два модельных эксперимента, отличающихся характерным размером модели L_{m1} и L_{m2} . После обработки результатов этих экспериментов в соответствии с (4.17) получают значения ΔC_1 и ΔC_2 . Тогда по формуле (4.18) можно найти неизвестную константу B :

$$B = \frac{\Delta C_2 - \Delta C_1}{\left(\frac{1}{L_{m2}} - \frac{1}{L_{m1}} \right)}. \quad (4.19)$$

Это выражение можно подставить в формулу (4.18):

$$\Delta C_f - \Delta C_m = \frac{\Delta C_2 - \Delta C_1}{\left(\frac{1}{L_{m2}} - \frac{1}{L_{m1}} \right)} \left(\frac{1}{L_f} - \frac{1}{L_m} \right). \quad (4.20)$$

Полученная оценка масштабного эффекта не имеет большой ценности, так как она получена при разложении функции $F(K, G)$ в ряд в окрестности $K = G = 0$. Интерес представляет разложение в ряд в области, соответствующей реальным значениям K и G . Разложив функцию $F(K, G)$ в ряд по разностям

$$\Delta K = K_f - K_m = \left(\frac{1}{L_f} - \frac{1}{L_m} \right) \sqrt[3]{\frac{v^2}{g}};$$

$$\Delta G = G_f - G_m = \left(\frac{1}{L_f} - \frac{1}{L_m} \right) \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}},$$

вновь получим формулы (4.18) – (4.20). Необходимо отметить, что описанная выше оценка масштабного эффекта с помощью испытания двух моделей может давать правильные результаты только в случае, если размеров тел не происходит кризисных явлений (например изменение характера течения, связанного с ламинарно-турбулентным переходом) и существенных изменений производных $\frac{\partial C}{\partial K}$ и $\frac{\partial C}{\partial G}$.

Задания к главе 4

- 4.1. При исследовании движения тел в ледовых условиях моделирование в ледовых бассейнах осуществляется с соблюдением критериев подобия Фруда и Коши. Определить являются ли эти критерии совместными и каким образом должны пересчитываться на натурные условия экспериментальные данные о ледовом сопротивлении, если оно задается формулой:

$$R = \sigma h^2 f \left(Fr, Ch, \frac{E}{\sigma} \right),$$

где σ – характеристика прочности льда, h – толщина льда, $Ch = \frac{\rho v^2}{E}$ – критерий подобия Коши, ρ – плотность льда, E – модуль Юнга льда. Прочность льда и его модуль Юнга в модельном эксперименте должны уменьшаться в масштаб раз.

- 4.2. Рассмотреть, возможно ли совместное моделирование с использованием критериев Фруда и Вебера.
- 4.3. Проанализировать, какие требования необходимо предъявлять к кинематической вязкости жидкости, чтобы стало возможным совместное моделирование по числам Рейнольдса и Фруда.

Глава 5

АВТОМОДЕЛЬНОСТЬ И ПРОМЕЖУТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА

Данная глава посвящена рассмотрению важного понятия автомодельности.

Явления, развивающиеся во времени, называются автомодельными, если распределение его характеристик в разные моменты времени получают одно из другого преобразованием подобия [Баренблатт, 1982]. Здесь важно подчеркнуть, что отождествление одной из независимых переменных процесса со временем носит условный характер, в принципе эта переменная может иметь любой физический смысл.

Установление автомодельности всегда позволяет упростить исследование (теоретическое или экспериментальное) поставленной задачи.

Обнаружение автомодельности при теоретическом решении задачи позволяет понизить число переменных на единицу. Наибольшего упрощения можно достигнуть в задачах математической физики с двумя независимыми переменными r и t . Пусть в такой задаче искомой величиной является функция u . Тогда наличие автомодельности позволяет так представить переменные масштабы $u_0(t)$ и $r_0(t)$, что представленные в этих масштабах характеристики явления будут функцией только одной переменной:

$$u = u_0(t)U(\xi); \quad \xi = \frac{r}{r_0(t)}.$$

Такое представление позволяет перейти от уравнений в частных производных, описывающих явление в первоначальных координатах, к обычным дифференциальным уравнениям для функции $U(\xi)$. Примером такого использования автомодельности является задача о диффузии вихревой нити в жидкости, которая была рассмотрена в главе 2.

Природа автомодельности связана с анализом размерностей. В главе 1 было показано, что зависимость физической величины a от n параметров a_1, a_2, \dots, a_n

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

может быть представлена в виде:

$$\Pi = F(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}), \quad (5.1)$$

где $\Pi, \Pi_1, \dots, \Pi_{n-k}$ – безразмерные комплексы. Число этих комплексов меньше числа исходных параметров n на число параметров, имеющих независимые размерности k .

Из приведенных формул следует, что теория размерности позволяет определить для рассматриваемой задачи автомодельные переменные, переход к которым позволяет уменьшить число учитываемых переменных. Наибольший эффект получается в том случае, когда

$$\Pi = F(\Pi_1).$$

Именно в этом случае можно перейти от рассмотрения уравнения в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению, а экспериментальные данные в автомодельных координатах Π и Π_1 ложатся на одну кривую.

Дальнейшие исследования показали, что класс автомодельных решений, которые можно получить на основании теории размерности, не охватывает всех случаев существования автомодельных решений [Баренблатт, 1982, 2009]. Более того, было установлено, что автомодельные решения возникают для *вырожденных задач*. В вырожденных задачах параметры, имеющие размерность независимых переменных (характерной длины, времени), равны нулю или бесконечности. Покажем это на примере задачи о сильном взрыве, рассмотренной в главе 2.

Решение задачи о сильном взрыве получено при использовании некоторых допущений, на которые мы ранее не обращали внимание. Во-первых, предполагается, что газовый пузырь имеет сферическую симметрию, и вся энергия взрыва выделяется в точечной области. На самом деле, это предположение не выполняется на некоторых малых характерных расстояниях d (например, на

расстоянии, соизмеримым с размером взрывного устройства). Вторых, при больших расстояниях, когда давление на фронте ударной волны снизится, уже нельзя пренебрегать влиянием атмосферного давления p_a . Таким образом, радиус газового пузыря r в некоторые моменты времени после взрыва будет зависеть не только от E, t и начальной плотности воздуха ρ_0 , а еще от линейного размера d и атмосферного давления p_a :

$$r = f(E, t, \rho_0, d, p_a).$$

В задаче появляются два дополнительных пространственных масштаба:

$$L_1 = d; \quad L_2 = \sqrt[3]{\frac{E}{p_a}},$$

которым соответствуют два критерия подобия:

$$\Pi_1 = \frac{d}{\left(\frac{Et^2}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{5}}}; \quad \Pi_2 = \frac{1}{p_a^{\frac{1}{3}}} \left(\frac{E^{\frac{2}{3}} \rho_0}{t^2}\right)^{\frac{1}{5}}.$$

Легко заметить, что дополнительные пространственные масштабы задачи существенно отличаются друг от друга $L_1 \ll L_2$. Можно констатировать, что полученное в главе 2 решение хорошо описывает развитие во времени газового пузыря атомного взрыва на достаточно больших расстояниях от центра взрыва, когда пузырь можно считать симметричным, и в то же время на достаточно малых, чтобы можно было пренебречь влиянием атмосферного давления.

Из этого следует, что автомодельное решение представляет собой *промежуточную асимптотику*. Промежуточной асимптотикой называют асимптотическое представление решения задачи, имеющей две характерные величины размерности независимой переменной x_i : $X_i^{(1)}$ и $X_i^{(2)}$ при $x_i/X_i^{(1)} \rightarrow \infty$ и $x_i/X_i^{(2)} \rightarrow 0$ [Баренблатт, 1982, 2009].

Таким образом, автомодельность всегда связана с "вырождением" некоторых критериев подобия. При проведении модельного эксперимента *автомодельными называют такие режимы, при которых некоторые числа подобия перестают оказывать влияние на результаты экспериментов.* В качестве примера можно привести обтекание вязкой жидкостью пластин, шаров, цилиндров и других плохообтекаемых тел. У этих объектов коэффициенты гидродинамического сопротивления в широком диапазоне изменения чисел Рейнольдса являются практически постоянными величинами. Наличие автомодельного режима по какому-нибудь из критериев подобия позволяет проводить модельный эксперимент в любом удобном значении указанного критерия подобия при условии сохранения автомодельности. Например, нам необходимо определить коэффициент сопротивления кабель-троса, с помощью которого буксируется забортное оборудование. Кабель-трос представляет собой цилиндрическое тело, обтекаемое перпендикулярно образующей. Режим обтекания автомодельный. Поэтому мы можем буксировать модель троса не со скоростью $v_m = kv_f$, где k — геометрический масштаб модели, а с любой другой скоростью $v < v_m$, для которой выполняется режим автомодельности.

Понятие промежуточной асимптотики и вырожденной задачи позволяет классифицировать автомодельные решения. При переходе от невырожденных задач к вырожденным некоторые безразмерные параметры (мы их обозначим опять Π_1 и Π_2) стремятся к нулю или бесконечности. Принципиально существуют три возможных случая поведения функции F в выражении (5.1):

1. Эта функция стремится к конечному пределу, отличному от нуля.

2. Функция имеет при малых или больших Π_1 и Π_2 степенную асимптотику вида: $F = \Pi_1^\alpha F_1 \left(\frac{\Pi_2}{\Pi_1^\beta}, \dots \right)$.

3. Функция не стремится к конечному пределу и не имеет при малых (больших) Π_1 и Π_2 степенной асимптотики.

В первом случае при малых (больших) Π_1 и Π_2 функция F заменяется своим предельным выражением. При этом число пара-

метров уменьшается, так как параметры, соответствующие масштабам, по которым выполнялся предельный переход, становятся несущественными и не рассматриваются. Этот случай называется *полной автомодельностью* по параметрам Π_1 и Π_2 .

Во втором случае выражение (5.1) можно записать следующим образом:

$$\Pi^* = F(\Pi^{**}, \Pi_3, \dots, \Pi_{n-k}), \quad \Pi^* = \Pi \Pi_1^{-\alpha}, \quad \Pi^{**} = \Pi \Pi_1^{-\beta}.$$

Из этой записи следует, что и в этом случае число параметров уменьшается. Сложность заключается в том, что параметры Π^* и Π^{**} не могут быть получены на основании анализа размерностей. Второй случай соответствует *неполной автомодельности* по параметрам Π_1 и Π_2 . Далее этот случай рассматриваться не будет, так как он в основном используется при теоретических исследованиях. Желающие получить более подробную информацию могут ее почерпнуть в книгах [Баренблатт, 1982, 2009].

В третьем случае параметры Π_1 и Π_2 остаются существенными для описания процесса, как бы они велики или малы не были. Пренебрегать ими ни в коем случае нельзя.

Глава 6

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОДЕЛЬНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА В ОКЕАНОЛОГИИ

В последние годы модельный эксперимент стал все шире применяться в океанологии для изучения различных гидрофизических процессов, происходящих в Мировом океане. В данной главе будут рассмотрены некоторые примеры эффективного использования модельного эксперимента для получения важных данных для теоретических и прикладных исследований.

В качестве первого примера рассмотрим изучение возбуждения внутренних волн дрейфующим айсбергом. Такое исследование было выполнено в большом стратифицированном бассейне ИПФ РАН [Поверхностные и внутренние волны в арктических морях, 2002]. Схема этого бассейна представлена на рис. 6.1.

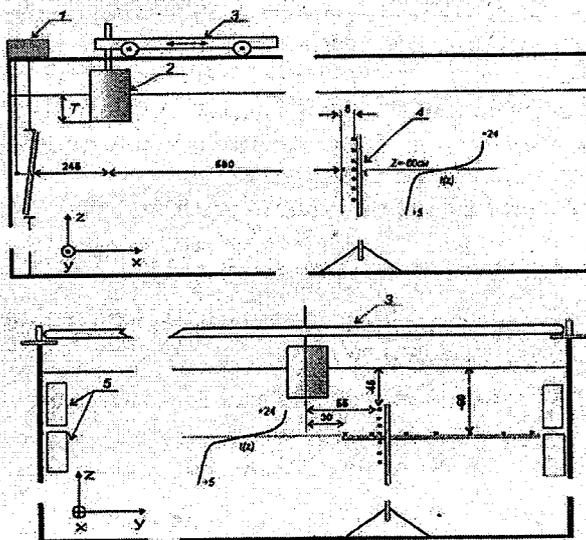


Рис. 6.1. Схема экспериментального бассейна для исследования генерации внутренних волн движущимся айсбергом.

- 1 – волнопродуктор; 2 – модель; 3 – буксировочная тележка;
4 – система датчиков; 5 – теплообменники.

Хорошо известно, что в арктических морях пикноклин выражен отчетливо. Перепад плотностей между верхним распресненным из-за таяния льда и речного стока слоем и нижним более соленым холодным составляет примерно 3 кг/м^3 . Глубина залегания пикноклина в Арктике составляет $20 - 40 \text{ м}$, а в некоторых случаях уменьшается до $5 - 10 \text{ м}$.

Типичные для арктических вод айсберги могут иметь осадку, сопоставимую и даже превышающую глубину залегания пикноклина. Средняя скорость дрейфа айсбергов составляет $0,1 - 0,3 \text{ м/с}$, максимальная до $1,5 \text{ м/с}$. При таких скоростях движения волновой составляющей сопротивления воды движению айсберга на поверхности раздела вода – воздух можно пренебречь. В то же время пренебрегать волновыми процессами в приповерхностном пикноклине нельзя.

Основной целью экспериментального исследования было изучение физических характеристик внутренних волн в следе за айсбергом. В соответствии с поставленной задачей моделирование процессов осуществлялось с помощью критерия Фруда. Основанием для этого служит, во-первых, практическая независимость характеристик волнения от вязкости жидкости. Во-вторых, сопротивлением модели, которая имитировала в опыте айсберг, не интересовались. Поэтому не было необходимости использовать при моделировании критерий Рейнольдса.

При проведении экспериментов коэффициент геометрического подобия был выбран $k = \frac{L_f}{L_m} = 100$. В соответствии с критерием Фруда временной масштаб задается следующим соотношением: $t_f = \sqrt{k} t_m$. Для внутренних волн это означает, что амплитуда колебаний температуры и плотности в эксперименте сохраняется, но в более высокочастотном диапазоне. По Фруду моделируются и другие физические величины: ускорение $a_f/a_m = 1$; фазовая и групповая скорости волн $v_f/v_m = \sqrt{k}$; длина волн $\lambda_f/\lambda_m = k$, частота Вайсяля – Брента $N_f/N_m = \sqrt{k}$.

При исследованиях параметров стационарного волнового следа измерения проводились датчиками, которые фиксировали во

времени изменение температуры в жидкости. Результаты исследований позволили определить, что фазовая картина и модовая структура волнового поля не зависят от заглубления айсберга. Эти характеристики определяются фазовой скоростью c_i i -той моды внутренних волн.

Интересным примером использования модельного эксперимента для изучения гидрофизических процессов является исследование сейшевых течений в озерах и крупных водохранилищах [Судольский, 1991]. Этот пример особенно интерес тем, что при моделировании сейшевых течений применяется аффинное подобие.

Как известно, сейша (стоячая волна) возникает при наложении двух одинаковых длинных волн, которые могут возникать в озерах, водохранилищах, каналах и т.п. Причинами их возникновения могут быть:

- неравномерное распределение атмосферного давления над акваторией или его периодические изменения во времени;
- действие ветра на водную поверхность;
- резкое повышение или понижение уровня в какой-либо части водоема;
- сейсмические колебания земной коры.

Сейши – очень распространенное явление. В большинстве водоемов они действуют в течение 30 – 50 % продолжительности безледного периода, а в таких озерах, как Байкал и Балхаш, этот показатель равен 80 – 90 %. Поэтому возникающие при сейшевых колебаниях уровня сейшевые течения вносят существенный вклад в процессы переноса и перемешивания вод.

В натуральных условиях изучение влияния различных факторов на процессы возникновения и развития сейш представляет собой крайне сложную, практически невыполнимую задачу. Поэтому при их исследовании большое распространение получил модельный эксперимент.

Первые модельные эксперименты по изучению сейшевых течений осуществлялись на гидравлической модели оз. Байкал. Эти опыты доказали возможность использования при таких исследованиях мелкомасштабных моделей, к примеру в масштабе 1:500 000.

Основной вклад в развитие сейшевых процессов вносят силы тяжести, поэтому моделирование осуществляется на основании критерия Фруда. Если рельеф котловины воспроизводится в модели без искажений геометрических размеров, то связь между основными определяющими параметрами в модельном эксперименте и натуральных условиях задается следующими выражениями:

$$v_f = k^{\frac{1}{2}} v_m, \quad Q_f = k^{\frac{5}{2}} Q_m, \quad (6.1)$$

где k – геометрический масштаб; v – скорость течения; Q – расход воды.

Однако при строительстве гидравлических моделей мелководных водоемов (рис. 6.2) обычно вынуждены допускать искажения геометрических размеров. Как правило, глубину водоема воспроизводят в более крупном масштабе, чем его горизонтальные размеры. Такая гидравлическая модель характеризуется двумя геометрическими масштабами:

$$k_x = \frac{L_f}{L_m}, \quad k_z = \frac{H_f}{H_m},$$

где k_x, k_z – геометрические масштабы по горизонтали и вертикали соответственно; L – характерный горизонтальный размер; H – характерный вертикальный размер.

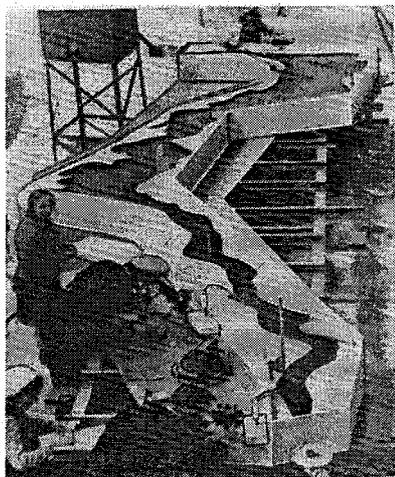


Рис. 6.2. Пространственная гидравлическая модель Каховского водохранилища.

получают на основе уравнений турбулентного движения и выражений для касательных напряжений ветра на водной поверхности. Дополнительно считается, что плотность жидкости и коэффициент турбулентной вязкости постоянны по глубине водоема, а также отсутствуют вертикальный перенос.

Полное подобие рассматриваемых процессов возможно при тождественности для модели и натуральных условий следующих критериев: Струхалия, Россби, Эйлера, Фруда, а также критериев, характеризующих воздействие ветра на водную поверхность D и турбулентность потока N .

$$\begin{aligned} Sh &= \frac{vt}{L}, & Ro &= \frac{v}{\omega L}, & Eu &= \frac{p_a}{\rho_w v^2}, \\ Fn &= \frac{v}{\sqrt{gH}}, & D &= \frac{\rho_w v^2 H}{g \tau_0 L}, & N &= \frac{\rho_w v H^2}{gAL}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где v – средняя скорость ветрового течения; t – время; L – характерный линейный размер; ω – угловая скорость вращения Земли; p_a – атмосферное давление; H – среднее значение глубины водоема; g – ускорение свободного падения; ρ_w – плотность воды; τ_0 – касательное напряжение ветра на водной поверхности; A – коэффициент турбулентной вязкости.

Анализ показывает, что полное моделирование в соответствии с критериальным соотношениям (6.3) возможно только при равенстве характерных размеров модели характерным размерам природы. Поэтому обычно используют какие-либо два или три из установленных критериев для выполнения частичного подобия.

Наиболее часто применяются критерий Фруда и критерий, характеризующий воздействие ветра на водную поверхность D . Тогда для неискаженных гидравлических моделей имеют следующие соотношения:

$$v_f = \sqrt{k} v_m, \quad \tau_f = k \tau_m,$$

а для искаженных моделей соответственно:

$$v_f = \sqrt{k_z} v_m, \quad \tau_f = k_z \tau_m.$$

При моделировании ускорения Кориолиса угловую скорость вращения гидравлической модели выбирают из условия подобия радиусов вращения и широты места.

Специалисты отмечают, что физическое моделирование ветровых течений является достаточно трудоемким делом как при выполнении эксперимента, так и при его обработке. Однако получаемые при этом результаты обладают большой ценностью, что окупает затраты на проведение опытов.

В качестве последнего примера рассмотрим применение модельного эксперимента для изучения процесса формирования термического следа воздушного вихря в стратифицированном океане [Алексеев и др., 2005]. Эта задача связана с изучением реакции океана на прохождение тропических циклонов. Для ее решения применялись различные методы: теоретические исследования, получение и обработка натуральных данных, модельный эксперимент. В рамках данного пособия невозможно рассмотреть все аспекты проблемы, а также результаты, полученные при ее решении. Мы ограничимся только описанием модельного эксперимента, уделив особое внимание использованным критериям подобия.

Для проведения модельного эксперимента была создана экспериментальная установка, схема и внешний вид которой показаны на рис. 6.4–6.5.

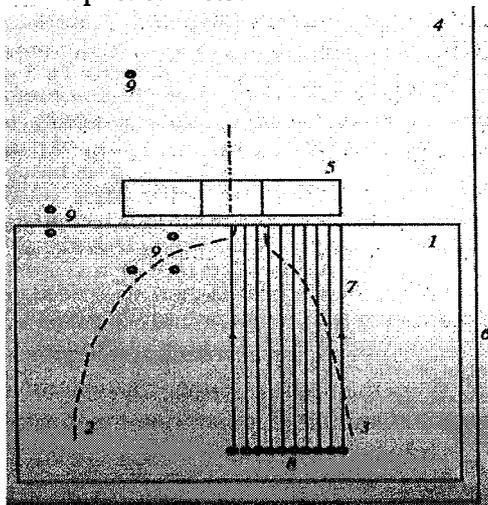


Рис. 6.4. Принципиальная схема лабораторной установки.

- 1 – лабораторный бассейн;
- 2 – начальное распределение температуры; 3 – начальное распределение солёности;
- 4 – воздушная камера;
- 5 – модельный воздушный вихрь; 6 – система теплоизоляции; 7 – направление сканирования температуры гребенкой датчиков 8 при получении вертикальных разрезов; 9 – положение датчиков температуры постоянной записи.

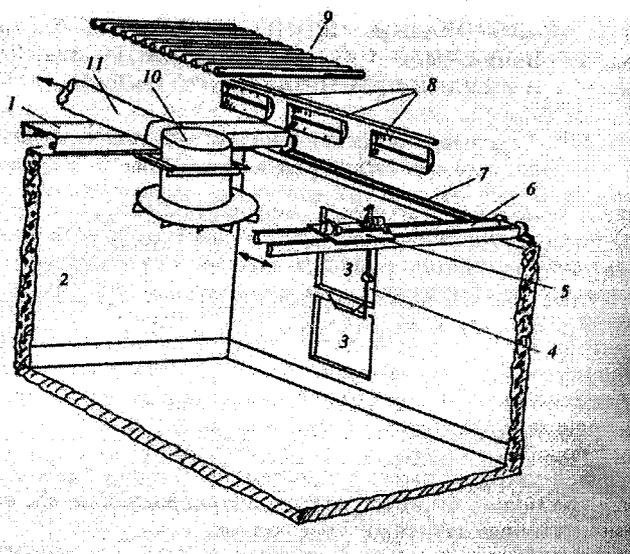


Рис. 6.5. Внешний вид лабораторной установки.

1 – тележка перемещения модели вихря; 2 – бассейн с водой (размеры 3×4×3 м); 3 – окна для наблюдения; 4 – датчики; 5 – координатник; 6 – тележка продольного перемещения датчиков; 7 – рельсы; 8 – ксеноновая лампа; 9 – лампы типа ЛДС; 10 – модель вихря; 11 – рукав отвода воздуха от модели

Основная трудность при разработке проекта экспериментальной установки и при проведении модельных исследований заключалась в том, что необходимо было разработать критерии моделирования и лабораторные модели двух различных гидрометеорологических процессов. Во-первых, необходимо было смоделировать воздушный вихрь (тропический циклон), во-вторых – стратифицированный океан. На принципиальной схеме лабораторной установки (рис. 6.4) видно, что нижнюю часть лабораторной установки занимает бассейн, в котором перед началом экспериментов создают заданные распределения по глубине температуры и солености. Верхняя часть установки представляет собой воздушную камеру. В ней создана модель вихря, которая располагается над поверхностью воды, что обеспечивает возможность непосредственного взаимодействия потоков воздуха с водной поверхностью и водным слоем под ней. Вся установка теплоизолирована от окружающей среды. Внешний вид установки показан на рис. 6.5.

При моделировании процессов взаимодействия тропического тайфуна с океаном помимо динамических критериев подобия необходимо учитывать и энергетические соотношения. Натурные исследования теплового баланса поверхности океана при прохождении тайфуна показывают, что затраты энергии на турбулентно-конвективный теплообмен воды и приводного слоя воздуха H и на испарение LE существенно превышают поступление тепла за счет солнечной радиации Q_c . В тайфуне выполняется соотношение $H + LE \gg Q_c$. Было установлено, что отношение энергии, поступающей от Солнца и теряемой при турбулентно-конвективном обмене и испарении, является довольно стабильной величиной, равной $0,2 - 0,22$. Ее можно использовать в качестве безразмерной характеристики энергетики изучаемых процессов.

Критерии для моделирования воздушного вихря получают на основании анализа модифицированных уравнений Навье – Стокса во вращающейся системе координат. В этом случае существенны следующие критерии подобия: Рейнольдса, Россби, Фруда и Эйлера. Число Эйлера определяет соотношение сил давления и инерции в потоке, число Рейнольдса характеризует режим потока (отношение вязких и инерционных сил), число Россби особенно необходимо при моделировании вихревых систем (отношение инерционных сил и сил Кориолиса), число Фруда характеризует отношение кинетической и потенциальной энергии.

Осуществление моделирования по всем критериям невозможно. Для изучаемых процессов важнейшим является подобие ветрового и барического полей. Поэтому моделирования осуществляют с учетом критериев Рейнольдса, Эйлера и Россби.

Взаимодействие модельного вихря с моделью стратифицированного океана описывается также уравнениями Навье – Стокса. При пренебрежении вязкими силами из этого уравнения получают единственный критерий подобия – число Ричардсона:

$$R_i = \frac{\rho' gL}{\rho_0 v^2}, \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \frac{\rho'}{\rho_0} \ll 1,$$

где ρ, ρ_0, ρ' – плотность, начальная плотность и отклонение от начальной плотности соответственно.

Требование равенства чисел Ричардсона для модели и натуральных условий позволяет получить соотношение для временных характеристик водной части модели:

$$t_f = \sqrt{kt_m},$$

где k – геометрический масштаб.

Другим критерием моделирования, который необходимо учитывать, является число Рейнольдса. Однако непосредственное использование этого критерия нецелесообразно из-за развитого турбулентного характера движения, так как входящая в этот критерий турбулентная вязкость, обладает существенной анизотропией и зависит от характерного масштаба турбулентности в данном направлении. В такой ситуации вводится два эффективных числа Рейнольдса для вертикальных $Rn_v = vL_v/v_i^v$ и горизонтальных $Rn_h = vL_h/v_i^h$ движений. Натурные данные показывают, что горизонтальный турбулентный коэффициент обмена линейно зависит от величины характерного горизонтального размера турбулентности $v_i^h = CL_h$, где C – некоторая константа. Поэтому следует ожидать, что число Рейнольдса для горизонтальных движений Rn_h практически не зависит от линейного масштаба. Тогда, введя в качестве горизонтального масштаба радиус максимальных ветров, а по вертикали – величину верхнего перемешанного слоя, авторы модели получили возможность сопоставить натурные данные и результатами моделирования.

$$\frac{Rn_h}{Rn_v} \cong \frac{u_f}{v_f} \cong \frac{u_m}{v_m},$$

где u, v – компоненты вектора скорости.

В таблице 6.1 приводятся значения критериев подобия для лабораторной установки и натурального вихря

Таблица 6.1

**Сопоставление величин критериев подобия
в модельном эксперименте и в натуральных условиях.**

Параметр	$\frac{Rn_h}{Rn_v}$	Ro	$\frac{Q_c}{H + LE}$	$\frac{t_f}{t_m}$	N^2
След тропического тайфуна	0,52	0,1 – 0,5	0,2 – 0,22	40	$10^{-4} - 10^{-6}$
Модель	0,56	0,37	0,24		$2,3 \cdot 10^{-4}$

Здесь N – частота Вайсяля – Брента.

Из табл. 6.1 следует очень хорошее совпадение критериев подобия для модели и натуральных условий, что позволяет с большим доверием относиться к полученным результатам.

Задания к главе 6

- 6.1. Рассмотреть критерии подобия и разработать план модельного эксперимента по определению скорости роста ледяного покрова. Считать, что эксперимент начинается при наличии начальной толщины льда h_0 .
- 6.2. Рассмотреть критерии подобия и разработать план модельного эксперимента применительно к океанологическим задачам.

Глава 7 ПРИМЕРЫ НЕКОРРЕКТНОГО ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ В ОКЕАНОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ

В данной главе приведены некоторые примеры некорректного использования теории подобия при проведении и обработке модельных экспериментов.

В интересной диссертационной работе [Кубышкин, 2000], посвященной изучению закономерностей формирования солености нарастающего морского льда, был выполнен модельный эксперимент по определению эффективного коэффициента распределения k_{eff} в зависимости от скорости роста льда:

$$k_{eff} = \frac{C_l}{C_w}, \quad (7.1)$$

где C_l – соленость льда; C_w – соленость жидкости. Кроме собственных данных в работе анализируются и используются данные модельных экспериментов других исследователей (рис. 7.1).

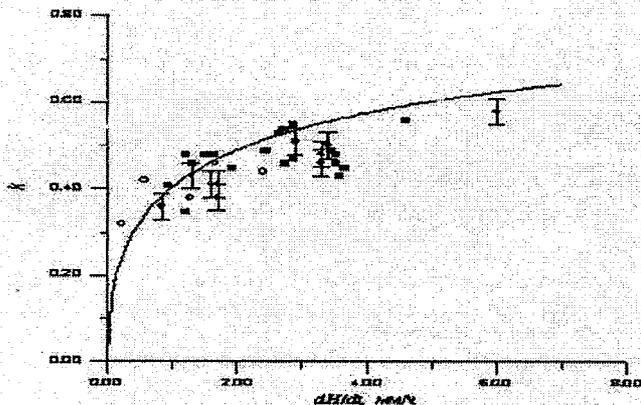


Рис. 7.1. Зависимость k_{eff} от скорости роста льда.

Сплошная линия – расчет по формуле (7.9); черные квадраты – наблюдения Ионсена; не заштрихованные кружки – лабораторные данные В.Л.Цурикова; заштрихованные кружки с границами погрешности – лабораторные данные Н.В.Кубышкина.

Автором диссертационной работы показывается, что в соответствии с теоретической моделью Бартона-Прима-Слихтера в непосредственной близости от границы раздела растущего льда и жидкости формируется тонкий диффузионный слой толщиной δ , в пределах которого происходит в основном диффузионный перенос примеси. Распределение солености в этом слое описывается одномерным уравнением диффузии, ось OX направлена вниз (от поверхности растущего ледяного покрова к воде):

$$D \frac{d^2 C}{dx^2} - \frac{dH}{dt} \frac{dC}{dx} = 0, \quad (7.2)$$

где C – концентрация примеси (соленость) в диффузионном слое; D – коэффициент диффузии; dH/dt – скорость нарастания ледяного покрова.

Граничные условия для этого уравнения будут:

$$C = C_w, \text{ при } x = \delta; \quad (7.3)$$

$$(C_0 - C_l) \frac{dH}{dt} + D \frac{dC}{dx} = 0, \text{ при } x = 0, \quad (7.4)$$

где C_0 – концентрация примеси в жидкой фазе на границе раздела вода – лед.

Решение задачи (7.2) – (7.4) может быть записано в следующем виде:

$$C = C_w - (C_0 - C_l) \left[\exp\left(-\frac{dH}{dt} \frac{\delta}{D}\right) - \exp\left(-\frac{dH}{dt} \frac{x}{D}\right) \right]. \quad (7.5)$$

При $x = 0$ это решение принимает вид:

$$\frac{C_0 - C_l}{C_w - C_l} = \exp\left(\frac{dH}{dt} \frac{\delta}{D}\right) \quad (7.6)$$

Теоретически необходимо определить коэффициент распределения k_0 , который находится при следующих условиях:

$$k_0 = \frac{C_l}{C_w}, \text{ при } \frac{dH}{dt} \rightarrow 0. \quad (7.7)$$

Величина этого коэффициента не зависит от условий кристаллизации и является константой для рассматриваемого раствора.

Из опыта определить эту величину невозможно, поэтому вводятся два других коэффициента: эффективный коэффициент распределения (7.1) и коэффициент распределения на границе раздела k^* :

$$k^* = \frac{C_I}{C_0}. \quad (7.8)$$

Считается, что при малых скоростях кристаллизации льда $k^* \approx k_0$. Связь между k_{eff} и k_0 задается следующим выражением, которое следует из формул (7.6) и (7.7).

$$k_{eff} = \frac{k_0}{k_0 + (1 - k_0) \left(-\frac{dH}{dt} \frac{\delta}{D} \right)}. \quad (7.9)$$

В этом выражении вместо k_0 можно использовать k^* .

Тогда соленость намерзающего слоя льда может быть вычислена по формуле:

$$C_I = C_w \frac{k_0}{k_0 + (1 - k_0) \left(-\frac{dH}{dt} \frac{\delta}{D} \right)}. \quad (7.10)$$

Для того чтобы формулу (7.10) можно было бы использовать, необходимо иметь информацию о величине коэффициента k_0 . Именно для его определения и ставятся лабораторные опыты. При переносе результатов, полученных в модельном эксперименте, на натурные условия, возникает вопрос о критериях подобия. Посмотрим, как этот вопрос решался в рассматриваемой диссертации.

Автор предлагает записать формулу (7.9) в следующем виде:

$$\ln \left(\frac{1}{k_{eff}} - 1 \right) = \ln \left(\frac{1}{k_0} - 1 \right) - \frac{dH}{dt} \frac{\delta}{D}, \quad (7.11)$$

которую затем переписывает отдельно для модельных и натуральных условий:

$$\ln \left(\frac{1}{(k_{eff})_f} - 1 \right) = \ln \left(\frac{1}{(k_0)_f} - 1 \right) - \frac{dH}{dt} \Big|_f \frac{\delta}{D} \Big|_f, \quad (7.12)$$

$$\ln \left(\frac{1}{(k_{eff})_m} - 1 \right) = \ln \left(\frac{1}{(k_0)_m} - 1 \right) - \frac{dH}{dt} \Big|_m \frac{\delta}{D} \Big|_m. \quad (7.13)$$

Учитывая, что k_0 является константой процесса, выражения (7.12) и (7.13) можно преобразовать к виду:

$$\ln \left(\frac{\frac{1}{(k_{eff})_f} - 1}{\frac{1}{(k_{eff})_m} - 1} \right) = \left(\frac{\delta}{D} \right)_m \left(\frac{dH}{dt} \right)_m - \left(\frac{\delta}{D} \right)_f \left(\frac{dH}{dt} \right)_f. \quad (7.14)$$

Анализируя это выражение, автор диссертации делает вывод, что «в качестве констант подобия (!) можно выбрать следующие величины

$$C_k = \frac{\frac{1}{(k_{eff})_f} - 1}{\frac{1}{(k_{eff})_m} - 1}, \quad C_H = \frac{\left(\frac{dH}{dt} \right)_f}{\left(\frac{dH}{dt} \right)_m}, \quad C_{\frac{\delta}{D}} = \frac{\left(\frac{\delta}{D} \right)_f}{\left(\frac{\delta}{D} \right)_m}. \quad (7.15)$$

Далее выражение (7.14) записывается с использованием введенных констант подобия:

$$\ln(C_k) = \left(\frac{\delta}{D} \right)_m \left(\frac{dH}{dt} \right)_m \left(1 - C_{\frac{\delta}{D}} C_H \right). \quad (7.16)$$

По этой формуле в предположении $C_H = 1$ и $C_{\frac{\delta}{D}} = 5,8$ проводятся расчеты для различных скоростей роста моделированного льда. В результате делается вывод, что во всем диапазоне изменения скорости нарастания льда различие между $(k_{eff})_f$ и $(k_{eff})_m$ мало, поэтому данные лабораторного моделирования можно *прямо переносить на натурные условия* (!).

Очевидно, что приведенные выше рассуждения содержат ошибку. Она заключается в том, что в работе не было выполнено корректное определение критериев подобия изучаемого процесса. В этой задаче это сделать особенно просто, так как имеются определяющие изучаемый процесс уравнения (7.2) – (7.4) и известно решение (7.5). Анализ математической формулировки задачи показывает, что соленость (безразмерная величина) зависит от единственного критерия подобия:

$$C = f(\Pi), \quad \Pi = \frac{dH}{dt} \frac{\delta}{D}. \quad (7.17)$$

Введенные в работе «константы подобия» на самом деле не являются критериями подобия, они представляют собой некоторые масштабные коэффициенты. С их помощью нельзя ни анализировать результаты экспериментов, ни переносить эти результаты на натурные условия.

Если воспользоваться приведенными в работе данными, получим

$$\Pi_f = 5,8\Pi_m. \quad (7.18)$$

Для традиционной практики это различие является достаточно большим, чтобы переносить опытные данные на натурные условия без какой-либо корректировки. Выполненное же в работе сравнение коэффициентов $(k_{eff})_f$ и $(k_{eff})_m$ с помощью выражения (7.16) не может считаться корректным, так как выражение (7.18) показывает, что модельный и натуральный процессы не являются подобными.

Другой пример некорректного использования теории подобия при проведении модельного эксперимента можно найти в книге [Астафьев и др., 1997]. Перед исследователями стояла задача изучения объемной пустотелости торосов. Натурные наблюдения с помощью термобурения позволяют получить информацию лишь о линейной пустотелости, которая не совпадает с объемной. Было решено получить данные об объемной пустотелости с помощью модельного эксперимента.

Объем пустот в торосе был представлен следующей зависимостью:

$$V_1 = f(V_2, V_3, l, a, h, K) \quad (7.19)$$

где V_1, V_2, V_3 – объемы пустот, льда в торосе и всего тороса соответственно; l, a, h – средняя длина, ширина и толщина блоков льда, из которых сложен торос; K – функция плотности распределения блоков льда по размерам.

В качестве основных единиц измерения были выбраны единицы длины l и объема V_3 , размерности которых были $[l] = L$ и $[V_3] = V$. В результате были получены пять безразмерных комплексов:

$$\Pi_1 = \frac{V_1}{V_3}, \quad \Pi_2 = \frac{V_2}{V_3}, \quad \Pi_3 = \frac{a}{l}, \quad \Pi_4 = \frac{h}{l}, \quad \Pi_5 = K. \quad (7.20)$$

Пересчет результатов экспериментов на натурные условия проводился с помощью критерия Π_1 при постоянстве остальных критериев. Это означает, что пустотелость модельного и натурального торосов одинаковая.

Эксперимент проводился следующим образом. В металлический ящик, размер которого изменялся от $0,4 \times 0,4 \times 0,4$ м³ до $0,75 \times 0,75 \times 0,75$ м³, хаотически засыпались заранее приготовленные ледяные пластинки. Длина этих пластинок варьировалась от 6 до 20 см, а отношение длины к ширине оставалось постоянным и равным 1,5. После этого ящик заливался водой, объем которой был равен объему пустот. В результате исследований была получена зависимость, представленная на рис. 7.2.

Некорректность применения теории подобия в данном случае заключается во введении дополнительной единицы измерения с размерностью объема. Никакой необходимости в этом не было. Очевидно, что линейный размер и объем являются величинами с зависимыми размерностями. Снижение на единицу числа критериев подобия, которые необходимо удовлетворить при проведении опыта, никак не облегчило проведение эксперимента. В то же время, неправомерное введение единиц измерения, по-видимому, привело к ошибке.

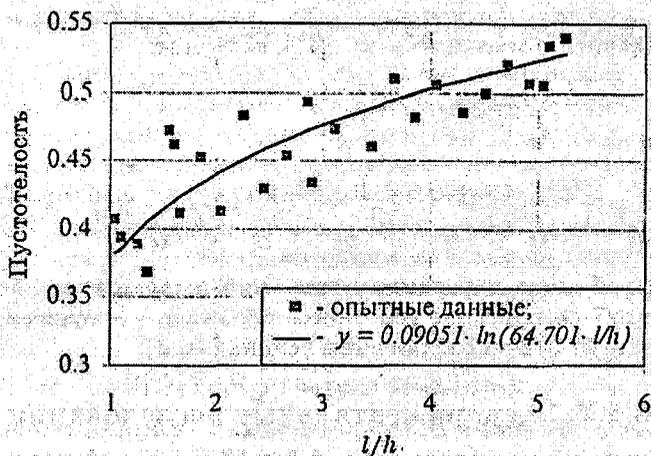


Рис. 7.2. Зависимость объемной пустотелости модельного тороса от соотношения длины и толщины обломков льда

Введение в качестве основной единицы измерения объема тороса V_3 вполне оправдано, так как оно помогает быстро обрабатывать результаты модельного эксперимента и определять объемную пустотелость модельного тороса. При корректном использовании теории подобия в данном опыте может быть только одна независимая переменная. Тогда возникает еще один не учтенный при проведении эксперимента критерий подобия:

$$\Pi_6 = \frac{l}{\sqrt[3]{V_3}}. \quad (7.21)$$

Аналогично можно получить критерии $\Pi_7 = \frac{a}{\sqrt[3]{V_3}}$ и $\Pi_8 = \frac{h}{\sqrt[3]{V_3}}$.

Легко видеть, что критерии Π_7 и Π_8 эквивалентны критериям Π_3 и Π_4 (7.20). В самом деле

$$\Pi_3 = \frac{\Pi_7}{\Pi_6}, \quad \Pi_4 = \frac{\Pi_8}{\Pi_6}.$$

Учет дополнительного критерия показывает, что среднюю длину блоков льда нельзя задавать произвольно. Между объемом тороса и средней длиной блоков льда, его слагающих, существует связь, которая не учитывалась при проведении модельного эксперимента. Возможно разброс экспериментальных точек на рис. 7.2 обусловлен именно этим обстоятельством. К сожалению, отсутствие в рассматриваемой книге подробных экспериментальных данных не позволяет окончательно ответить на этот вопрос. Интересно отметить, что в той же книге [Астафьев и др., 1997] приводятся данные о зависимости геометрических размеров торосов от толщины блоков льда, его слагающих, что подтверждает необходимость использования в модельном эксперименте какого-нибудь из критериев Π_6 , Π_7 или Π_8 .

Следует отметить, что введение нестандартных единиц измерения не является запрещенным приемом. В главе 1 мы упоминали систему единиц МКГСС, в которой в качестве основной единицы использовалась сила, а масса была производной величиной. Однако не допустимо в качестве независимых величин измерения одновременно использовать величины, связанные математическими соотношениями.

Приведем еще один типичный пример неправильного анализа данных модельного эксперимента. Он касается использования лабораторных экспериментов для изучения термического бара.

Термический бар обычно наблюдается в весеннее время после вскрытия ото льда озер, водохранилищ и слабосоленых морей. В это время начинается их интенсивный прогрев, что приводит к достаточно быстрому повышению температуры воды в мелководной прибрежной части акваторий. При этом поверхностные воды быстрее достигают температуры максимальной плотности T_m и опускаются вниз, образуя узкую вертикальную область с температурой T_m , которая простирается от поверхности до дна водоема. Эта поверхность является фронтальным разделом и называется *термическим баром*.

В работе [Соловьев и др., 2007] описывается лабораторная модель весеннего термического бара, а также приводятся результаты, полученные с помощью этой модели. Схема лабораторной

установки показана на рис. 7.3. Она представляет собой прямоугольный бассейн из стекла длиной 1,5 м и шириной 0,4 м. Дно бассейна имеет наклон, который может изменяться от 0 до 15°. Дно и стенки бассейна термостатировались пенопластом. Поток тепла к открытой поверхности бассейна создавался с помощью ламп накаливания. Во время эксперимента температура воды измерялась четырьмя вертикальными зондами, которые содержали в качестве датчиков температуры полупроводниковые интегральные микросхемы. Сигнал регистрировался платой АЦП.

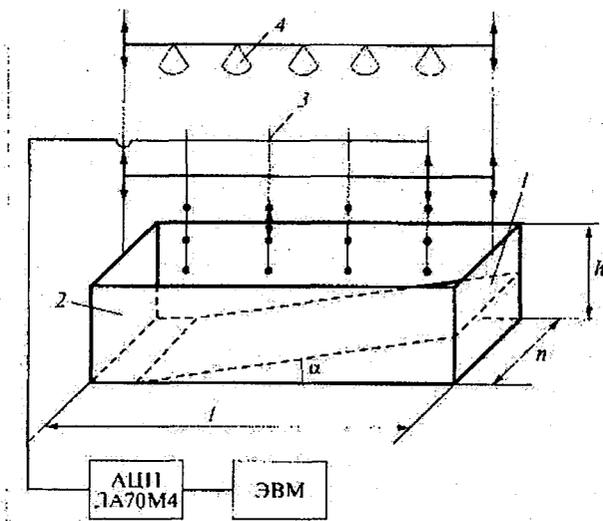


Рис. 7.3. Лабораторная установка для изучения термического бара.

l – длина бассейна; α – угол наклона дна; n – ширина бассейна; h – глубина бассейна; 1 – наклонное дно; 2 – прозрачная наблюдательная стенка; 3 – вертикальные зонды с термодатчиками; 4 – электролампы накаливания.

На описанной выше лабораторной установке проводились эксперименты, в ходе которых динамика эволюции термического бара не только измерялась датчиками температуры, но и выполнялась визуализация потоков с помощью трассеров. Это позволило наблюдать формирование двух циркуляционных ячеек, между которыми располагался фронтальный раздел. Авторы указывают, что

одной из главных целей лабораторного эксперимента является использование его данных для верификации разработанной ими математической модели термического бара.

До этого момента все изложенное в рассматриваемой статье не вызывает никаких замечаний. Исследователи выполнили лабораторный эксперимент, в ходе которого получили большой объем экспериментальной информации. Теперь если с помощью имеющейся математической модели рассчитать протекающие в эксперименте процессы, то можно ее верифицировать. В случае успешного выполнения верификации появляются законные основания для применения математической модели для расчета термического бара в различных водоемах.

Ошибочным следует признать содержащееся в статье сопоставление лабораторных экспериментальных результатов с данными натурных наблюдений. По мнению авторов, имеется полное качественное совпадение результатов (см. рис. 7.4).

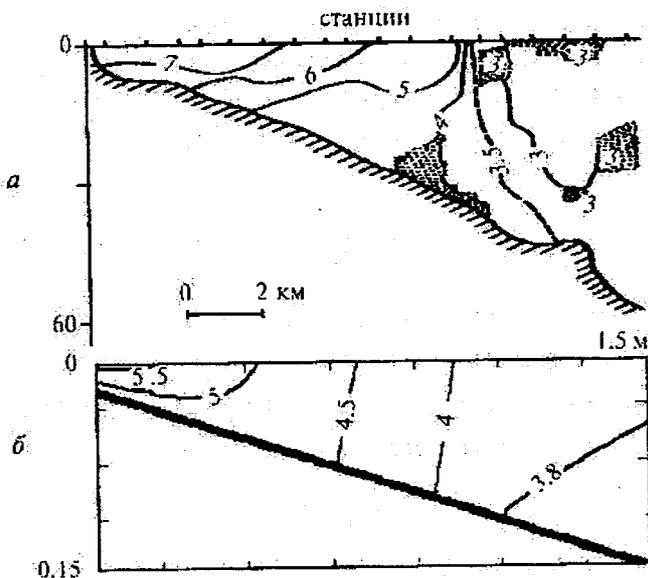


Рис. 7.4. Поля распределения температуры воды: (а) южной части озера Онтарио в период существования в нем термического бара, (б) данные лабораторного моделирования.

Говорить о каком-либо полном или качественном совпадении данных модельного эксперимента с натурными процессами можно только при соблюдении определенных условий – критериев подобия. В противном случае сопоставлять результаты некорректно. Авторы публикации никаких упоминаний о критериях подобия не делают.

Рассмотрим, правомерно ли приведенное в статье сопоставление результатов. Во-первых, термический бар динамический, развивающийся во времени процесс, поэтому сопоставление модельных и натуральных данных возможно только в сходственные моменты времени. Никаких указаний на этот счет в работе не имеется.

Во-вторых, необходимо соблюдение геометрического подобия модели и природы. В данном случае оно не соблюдается. Если выбрать геометрический масштаб по глубине водоема, как наиболее значимой геометрической характеристике процесса, то в соответствии с рис. 7.4 этот масштаб будет равен 1:400. Тогда лабораторная модель соответствует первым 600 м в натуральных условиях. Очевидно, что никакого качественного совпадения в этом случае не наблюдается. Кроме этого, натуральный объект и его модель имеют разные углы наклона дна: натура $\approx 0,5^\circ$, а модель $\approx 5,7^\circ$.

Распределение поля температуры при термической конвекции описывается следующим соотношением:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = f\left(\frac{x_1}{L}, \frac{x_2}{L}, \frac{x_3}{L}, Gr, Pr\right),$$

где в качестве ϑ_0 можно выбрать разность температур между температурой максимальной плотности T_m и температурой замерзания воды T_c ; $\vartheta = |T_m - T|$, T – текущая температура среды. Определяющим параметром является число Грасгофа:

$$Gr = \frac{gL^3}{\nu^2} \beta \vartheta_0,$$

где β – коэффициент объемного расширения жидкости.

В соответствии с теорией подобия число Грасгофа должно быть постоянным как для натуральных, так и для модельных условий.

Добиться этого можно только, изменяя физические константы среды, используемой для проведения эксперимента.

Таким образом, прямое моделирование явления термобара невозможно. С помощью лабораторных установок можно лишь изучать сам физический процесс, не привязывая его к какому-либо реальному процессу в водоемах.

Задания к главе 7

- 7.1. Выяснить, каким образом необходимо проводить первый из описанных в данной главе модельных экспериментов, чтобы получить правильные результаты?

ЛИТЕРАТУРА

- Алексеев В.В., Киселева С.В., Ланно С.С.* Лабораторные модели физических процессов в атмосфере и океане. – М.: Наука, 2005. – 312 с.
- Астафьев В.Н., Сурков Г.А., Трусков П.А.* Торосы и стамухи Охотского моря. – СПб., «Прогресс-Погода», 1997. – 197 с.
- Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. – Л.: Гидрометеоздат, 1982. – 256 с.
- Баренблатт Г.И.* Автомодельные явления – анализ размерностей и скейлинг. – Долгопрудный: Издательский дом "Интеллект", 2009. – 216 с.
- Богородский В.В., Гусев А.В., Доронин Ю.П., Кузнецова Л.Н., Шифрин К.С.* Физика океана. – Л.: Гидрометеоздат, 1978. – 294 с.
- ГОСТ 8.417 – 2002. Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы величин. – Минск: МГС по стандартизации, метрологии и сертификации, 2002. – 24 с.
- Гухман А.А.* Введение в теорию подобия. – М.: Высшая школа, 1973. – 296 с.
- Кубышкин Н.В.* Закономерности формирования солёности нарастающего морского льда и ее влияние на некоторые характеристики льда. Дисс. на соискание уч. степени канд. физ.-мат. наук. – СПб., 2000.
- Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. – М.: Наука, 1977. – 408 с.
- Лобачев М.П., Сазонов К.Е.* Модельный эксперимент: настоящее и будущее. //Морской вестник, 2008, № 3(27), с.101–107.
- Лойцанский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М., Наука, 1978. – 736 с.
- Неуймин Я.Г.* К истории развития модельных представлений и методов. //Вопросы истории естествознания и техники, 1983, № 2, с.35–49.
- Пехович А.И.* Основы гидродотермики. – Л.: Энергоатомиздат, 1983. – 200 с.
- Поверхностные и внутренние волны в арктических морях. Под ред. И.В. Лавернова и Е.Г. Морозова. – СПб.: Гидрометеоздат, 2002. – 364 с.
- Сазонов К.Е.* Роль В. Фруда в создании теории корабля. //Судостроение, 2010, № 5, с. 63–68.
- Седов Л.И.* Методы подобия и размерности в механике. – М.: Наука, 1977. – 440 с.
- Седов Л.И.* Об основных моделях в механике. – М., Изд-во МГУ, 1992. – 151 с.
- Сена Л.А.* Единицы физических величин и их размерности. – М.: Наука, 1969 – 304 с.
- Соловьев Д.А., Блохина Н.С., Орданович А.Е.* Лабораторная модель весеннего термического бара. //Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия, 2007, № 5, с.65–67.
- Судольский А.С.* Динамические явления в водоемах. – Л.: Гидрометеоздат, 1991. – 262 с.
- Эпштейн Л.А.* Методы теории размерности и подобия в задачах гидромеханики судов. – Л.: Судостроение, 1970. – 208 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	4
Глава 1. Основы теории размерности	6
Глава 2. Примеры применения теории размерности	19
Глава 3. Подобие и критерии подобия	32
Глава 4. Модельный эксперимент	46
Глава 5. Автомодельность и промежуточная асимптотика	62
Глава 6. Примеры использования модельного эксперимента в океанологии	67
Глава 7. Примеры некорректного применения теории подобия в океанологических исследованиях	78
Литература	90

CONTENTS

Preface	3
Introduction	4
Chapter 1. Foundations of the theory of dimension	6
Chapter 2. Examples of application of the theory of dimension	19
Chapter 3. Similarity and similarity criteria	32
Chapter 4. Model experiment	46
Chapter 5. Self-similarity and intermediate asymptotics	62
Chapter 6. Examples of model experiment application in oceanography	67
Chapter 7. Examples of improper use of similarity theory in oceanological research	78
References	90

Учебное издание

Кирилл Евгеньевич Сазонов

МОДЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ОКЕАНОЛОГИИ

Учебное пособие

*Редактор Л.В. Ковель
Компьютерная верстка Н.И. Афанасьевой*

ЛР № 020309 от 30.19.96.

Подписано в печать 26.05.11. Формат 60×90¹/₁₆. Гарнитура Times New Roman.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.-печ. л. 6,2. Тираж 250 экз. Заказ № 12/11.
РГГМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98.
ЗАО «НПП «Система», 197045, Санкт-Петербург, Ушаковская наб., 17/1.

88 = 00