Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное Агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

**РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

И.В. НЕДЗВЕЦКАЯ
Н.В.ДЬЯЧЕНКО

конспект лекций
по дисциплине «Физика»

ТЕМЫ:

1.РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ПРИРОДА МАГНИТНОГО ПОЛЯ
2.УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Направления: – Гидрометеорология
– Экология и природопользование
- Физика

РГГМУ
Санкт–Петербург

2009

Рекомендовано к изданиюРедакционно-издательским советом РГГМУ

УДК 53

Недзвецкая И.В., Дьяченко Н.В. Конспект лекций по дисциплине «Физика». Темы : 1.Релятивистская природа магнитного поля. 2.Уравнения Максвелла. Ток смещения. - СПб.: Изд.РГГМУ, 2009.- 24 с.

Ответственный редактор: Бобровский А.П., доц., зав. каф. физики РГГМУ

Рецензент: Холмогоров В.Е., д-р физ.-мат. наук, проф. физического ф-та СПбГУ

Конспект лекций составлен в соответствии с программой дисциплины «Физика». Излагается наиболее трудный раздел электромагнетизма – система уравнений Максвелла. Приведены примеры решения задач, вопросы и задачи для самоконтроля.

Предназначен студентам метеорологического, гидрологического, океанологического факультетов и факультета экологии и физики природной среды.

Предисловие

Пособие представляет собой конспект лекций, читаемых авторами в разделе «Электромагнитное поле» курса общей физики и предназначено для студентов, обучающихся по направлениям «Гидрометеорология», «Физика», «Экология и природопользование»

ТЕМА 1. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ПРИРОДА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

1. Единство электромагнитного поля.

Согласно принципу относительности, сформулированному Эйнштейном, законы всех физических явлений, в том числе и электромагнитные, имеют одинаковый вид (или являются инвариантными) во всех инерциальных системах отсчета. Однако численные значения конкретных физических величин, входящих в законы, изменяются при переходе от одной системы отсчета K к другой K', т.е. результаты измерения одного и того же явления в двух различных инерциальных системах отсчета, вообще говоря, отличны друг от друга. В современной электродинамике постулируется, что численное значение электрического заряда q не зависит от системы отсчета. При этом, однако, значения векторов поля в разных системах оказываются существенно различными.

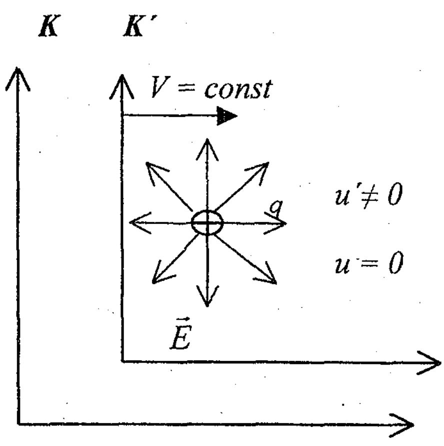


Рис.1

Рассмотрим пример. Пусть в инерциальной системе K электрическое поле $\vec{E}$ создано неподвижным зарядом q.., рис.1 Магнитное поле отсутствует, $\vec{H} = 0$ Однако, если этот заряд неподвижен относительно системы K ($\vec{u} = 0$), то относительно другой инерциальной системы K', движущейся относительно K

равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{V}$, скорость этого заряда $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{V} = -\vec{V}$, т.е. уже не будет равна 0. Следовательно, в системе ***K'*** этот заряд на расстоянии $\vec{r}$ от себя порождает не только электрическое, но и магнитное поле

$$\vec{H}' = \frac{q[\vec{u}' \times \vec{r}]}{4\pi\, r^3} = \frac{-q[\vec{V} \times \vec{r}]}{4\pi\, r^3},$$

т.к. движущиеся заряды представляют собой электрический ток, а ток порождает магнитное поле.

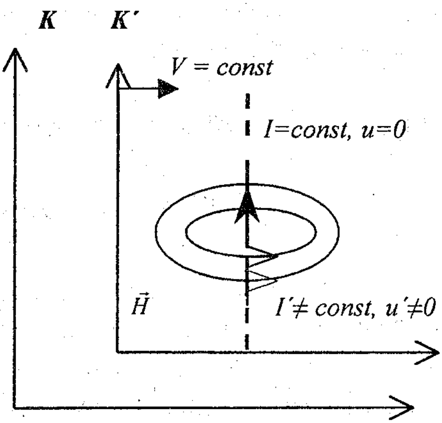


Рис.2

Рассмотрим другой пример. В системе ***K*** находится неподвижный провод с постоянным током и создает вокруг себя постоянное магнитное поле $\vec{H}$, рис.2. В другой инерциальной системе ***K'***, движущейся относительно ***K*** равномерно и прямолинейно со скоростью $\vec{V}$, провод движется, следовательно, создается переменное магнитное поле, что приводит к появлению вихревого электрического поля (согласно закону электромагнитной индукции). Таким образом, поле, которое относительно некоторой системы отсчета ***K*** является "чисто электрическим" или "чисто магнитным" для другой равноправной системы ***K'*** является совокупностью электрического и магнитного полей. Согласно идеям Максвелла, переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а, в свою очередь, переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным полем. То есть электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом - они образуют *единое электромагнитное поле.*

2. Магнитное поле, как релятивистская поправка к электрическому полю

Можно показать, что даже в одной инерциальной системе отсчета магнитное поле можно рассматривать как релятивистскую поправку к электрическому полю. Покажем это на следующем примере:

1) Пусть два положительных заряда покоятся, тогда на каждый заряд действует сила Кулона $f_k = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, рис.3

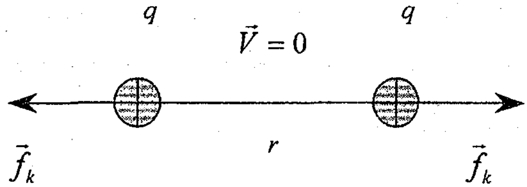


Рис.3

2) Пусть теперь эти заряды движутся параллельно друг другу с одинаковой скоростью $\vec{V}$. Каждый заряд создает вокруг себя магнитное поле, рис.4. Кроме силы Кулона на каждый заряд теперь действует сила Лоренца

$$\vec{f}_л = q\left[\vec{V} \times \vec{B}\right]$$

В нашем примере $\vec{V}$ и $\vec{B}$ перпендикулярны, поэтому $f_л = qVB$.

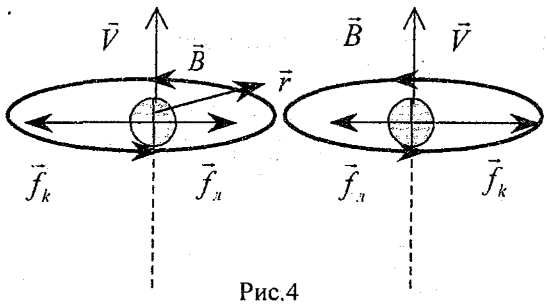


Рис.4

Общая сила равна разности f_k и $f_л$, т.к. они направлены в противоположные стороны

$$f_{общ} = f_k - f_л$$

Известно, что напряженность магнитного поля заряда, движущегося со скоростью $\vec{V}$, в точке, удаленной на расстояние $\vec{r}$ от него, определяется формулой $\vec{H} = \frac{q\left[\vec{V} \times \vec{r}\right]}{4\pi\, r^3}$. Абсолютная величина $H = \frac{q\,V\,r}{4\pi\, r^3} \sin\alpha$.

В нашем примере sinα = 1 (α - угол между радиусом – вектором $\vec{r}$, соединяющим заряд и точку наблюдения, и вектором скорости заряда $\vec{V}$).

Следовательно, $H = \frac{q\,V}{4\pi\, r^2}$.

$$B = \mu_0\, H \qquad\qquad B = \mu_0\, \frac{q\,V}{4\pi\, r^2}.$$

Сила Лоренца

$$f_л = q\,V\,\mu_0\, \frac{q\,V}{4\pi\, r^2} = \mu_0\, \frac{q^2V^2}{4\pi\, r^2}$$

Вычислим общую силу, действующую на каждый заряд

$$f_{общ} = f_k - f_л = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\, r^2} - \mu_0\, \frac{q^2V^2}{4\pi\, r^2} = \frac{q^2}{4\pi\, \varepsilon_0 r^2}\left(1 - V^2\varepsilon_0\mu_0\right)$$

Вспомним, что $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$, где c - скорость света.

$$f_{общ} = \frac{q^2}{4\pi\, \varepsilon_0 r^2}\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right).$$

Лоренц- фактор $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$

Теперь общую силу, действующую на каждый движущийся заряд, можно записать

$$f_{общ} = \frac{f_k}{\gamma^2},$$

т.е. влияние магнитного поля сводится к появлению релятивистской поправки к силе Кулона.

ТЕМА 2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ТОК СМЕЩЕНИЯ

1. Предварительные математические сведения

Прежде чем обратиться к основным уравнениям электромагнитного поля- уравнениям Максвелла[1]- напомним математические теоремы, необходимые для их получения.

Теорема Гаусса-Остроградского

Пусть в пространстве задано векторное поле $\vec{A}$. (У нас в качестве такого поля будут выступать векторные поля $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$). *Потоком вектора $\vec{A}$ через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V, называется величина* $\Phi_A = \oint\limits_S (\vec{A} \cdot d\vec{S}) = \oint\limits_S A_n dS$, где dS – элементарная площадка на замкнутой поверхности *S*, а A_n - проекция вектора на внешнюю нормаль к этой площадке, см.рис.5

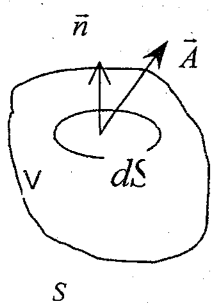


Рис.5

[1]Джеймс Клерк Максвелл (1831 - 1879), английский физик, член Эдинбургского и Лондонского Королевских обществ. Учился в Эдинбурге и Кембридже. В 1856-1860 гг. – профессор Абердинского университета, в 1860-1865 – Лондонского королевского колледжа. С 1871 г. – первый профессор экспериментальной физики в Кембридже. Наиболее весомый вклад Максвелл сделал в молекулярную физику и электродинамику. В кинетической теории газов, одним из основателей которой он является, установил статистический закон, описывающий распределение молекул газа по скоростям (*распределение Максвелла*). Самым большим научным достижением Максвелла является созданная им в 60-х годах теория электромагнитного поля, сформулированная в виде *системы уравнений Максвелла*.

Разделим объем V на бесконечно малые прямоугольные параллелепипеды со сторонами dx, dy, dz, параллельными соответствующим осям декартовой системы координат.

Рассмотрим поток вектора $\vec{A}$ через один такой параллелепипед, см.рис.6. На грани **1** внешняя нормаль направлена в отрицательную сторону оси X. Поэтому поток вектора $\vec{A}$ через эту грань будет $-A_x(x)\,dy\,dz$. На противоположной грани **2**, наоборот, направление внешней нормали совпадает с положительным направлением оси X, и для потока через эту грань следует писать $+A_x(x+dx)\,dy\,dz$. Сумма обоих потоков будет

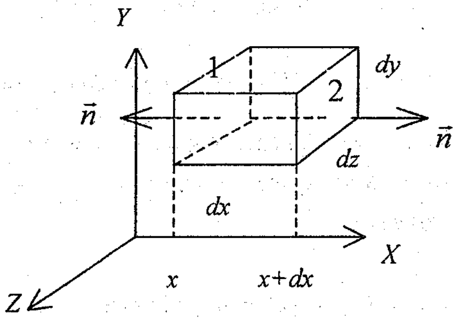


Рис.6

$$\left[A_x(x+dx)-A_x(x)\right]dy\,dz=\frac{\partial A_x}{\partial x}dx\,dy\,dz=\frac{\partial A_x}{\partial x}dV$$ где $dV=dx\cdot dy\cdot dz$ - объем параллелепипеда. Аналогично найдутся потоки через две пары остальных граней. Полный поток через всю поверхность параллелепипеда

$$d\Phi_A=\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dV=div\,\vec{A}\cdot dV$$

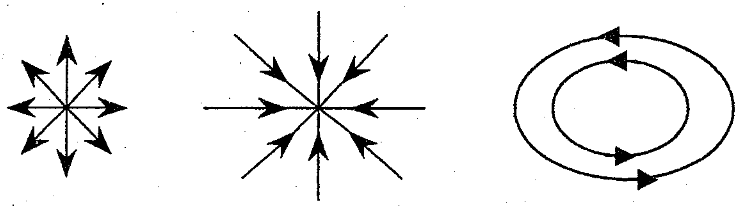
Выражение $$div\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (1.1)$$

называется *дивергенцией* (*или расходимостью*) вектора $\vec{A}$. Полный поток через замкнутую поверхность S будет равен алгебраической сумме потоков (или при $dV\to 0$ - интегралу) через все элементарные параллелепипеды, заполняющие объем V, т.е.

$$\Phi_A=\oint_S d\Phi_A=\oint_S\left(\vec{A}\cdot d\vec{S}\right)=\int_V div\,\vec{A}\cdot dV \qquad (1.2)$$

Это и есть ***теорема Гаусса- Остроградского,*** которая утверждает, что *поток вектора $\vec{A}$ через замкнутую поверхность S равен интегралу от дивергенции этого вектора по объему, заключенному внутри поверхности S.*

Нетрудно видеть из (1.1), что дивергенция вектора – скалярная величина. Она характеризует интенсивность источников поля $\vec{A}$, создающих поток Φ_A. Если дивергенция положительная, то поле имеет «источники», см. рис. 7 а); если отрицательная, то поле имеет «стоки», см. рис.7 б); если равна нулю, то у поля нет ни источников, ни стоков, т.е. силовые линии не имеют начала и конца, следовательно, они – замкнутые рис.7, в). Такие поля называются *соленоидальными*



а) б) в)

Рис.7

Теорема Стокса

Рассмотрим замкнутый контур *L*, находящийся в векторном поле $\vec{A}$, рис.8.

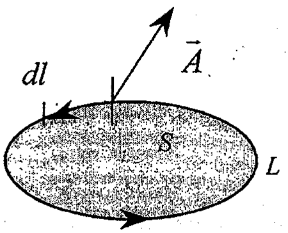


Рис.8

Пусть задано направление обхода этого контура. *Циркуляцией вектора $\vec{A}$ по замкнутому контуру L называется величина*

$$C_A = \oint_L \left(\vec{A} \cdot d\vec{l}\right) = \oint_L A_l \, dl,$$ где $d\vec{l}$ - направленный элементарный отрезок длины контура. Разобъем площадь, охватываемую контуром, на элементарные прямоугольные

контуры. Найдем циркуляцию вектора $\vec{A}$ вдоль одного такого контура. Для этого спроецируем его последовательно на три координатные плоскости декартовой системы координат. На рис.9 изображена такая проекция на плоскость *ZOY*. Вклад в циркуляцию, вносимый стороной *AB*, равен $A_y(x, y, z)\,dy$. Противоположная сторона *CD* вносит в циркуляцию слагаемое $-A_y(x, y, z+dz)\,dy$.

Сумма этих величин равна

$$\left[-A_y(x, y, z+dz) + A_y(x, y, z)\right] dy = -\frac{\partial A_y}{\partial z}\,dz\,dy = -\frac{\partial A_y}{\partial z}\,dS,$$

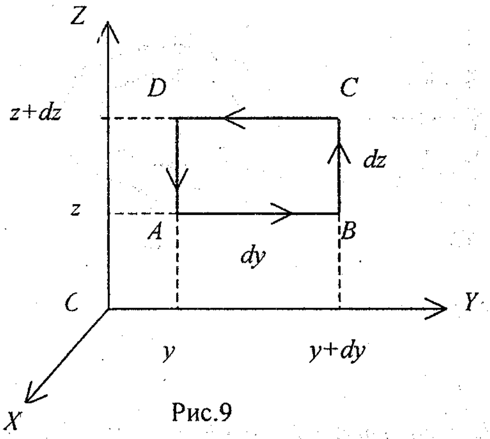


Рис.9

где $dS = dy\,dz$ - площадь контура *ABCD*. Аналогично, стороны *BC* и *AD* вносят в циркуляцию слагаемое $+\frac{\partial A_z}{\partial y}dS$. Следовательно, циркуляция по проекции элементарного контура на плоскость *ZOY* будет равна $\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)dS$.

Рассуждая аналогично, можно показать, что циркуляции по двум оставшимся проекциям контура на плоскости *ZOX* и *XOY* будут равны $\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)dS$ и $\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)dS$ соответственно. Величины, стоящие в скобках – компоненты вектора, который называется *ротор (или вихрь)*. В нашем случае ротор вектора $\vec{A}$ определяется выражением

$$rot\vec{A}=\vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right), \qquad (1.3)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - орты декартовых осей координат. Таким образом полная циркуляция по элементарному контуру будет равна $dC_A = rot\,\vec{A}\cdot d\vec{S}$

Сложим циркуляции по всем элементарным контурам и в пределе при $dS \to 0$, получим

$$C_A = \oint_L dC_A = \oint_L \left(\vec{A}\cdot d\vec{l}\right) = \int_S \left(rot\,\vec{A}\cdot d\vec{S}\right). \qquad (1.4)$$

Выражение (1.4) представляет собой ***теорему Стокса*** :: *Циркуляция вектора $\vec{A}$ по замкнутому контуру L равна интегралу по поверхности S, опирающейся на этот контур, от ротора вектора $\vec{A}$.*

Значение ротора векторного поля $\vec{A}$., также как и дивергенция, может дать нам информацию о характере этого поля. Если $rot\,\vec{A}=0$, то поле – безвихревое, (т.е. потенциальное), его силовые линии имеют начало и конец. Если же $rot\,\vec{A}\neq 0$, то поле имеет вихревой характер, его силовые линии закручены и замкнуты.

3. Вихревое электрическое поле. Первое уравнение Максвелла

Экспериментальный закон Фарадея для электромагнитной индукции говорит о том, что электродвижущая сила (ЭДС) индукции, возникающая в замкнутом контуре, равна скорости изменения магнитного потока через этот контур, т.е.

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_B}{dt}, \qquad (2.1)$$

где $d\Phi_B = \vec{B}\cdot d\vec{S} = \mathrm{B}\,dS\cos\alpha = \mathrm{B}_n\,dS$, а $\Phi_B = \int_S d\Phi_B = \int_S \mathrm{B}_n\,dS$ - поток вектора магнитной индукции через замкнутый контур площадью S.

Если контур неподвижен, т.е. его координаты не меняются, а магнитное поле однородно, то изменение потока может происходить только за счет изменения магнитной индукции во времени. Поэтому в формуле (2.1) можно перейти от полной производной по времени $\frac{d}{dt}$ к частной $\frac{\partial}{\partial t}$,

$$\text{т.е. } \varepsilon_i = -\frac{d\int\limits_S \vec{B}\cdot d\vec{S}}{dt} = -\int\limits_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \qquad (2.2)$$

По определению ЭДС называется физическая величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру $\varepsilon = \frac{A}{q}$.

Работа $A = \oint\limits_L \vec{F}\cdot d\vec{l} = q\oint\limits_L \vec{E}^*\cdot d\vec{l}$, где $\vec{E}^*$ - напряженность поля сторонних сил. В случае ЭДС индукции сторонняя сила порождается переменным во времени магнитным полем, напряженность поля этой силы носит вихревой характер и обозначается $\vec{E}_B$, т.е.

$$\varepsilon_i = \oint\limits_L \vec{E}_B\cdot d\vec{l}\,. \qquad (2.3)$$

Уравнения (2.2) и (2.3) тождественны, следовательно

$$\oint\limits_L \vec{E}_B\cdot d\vec{l} = -\int\limits_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \qquad (2.4)$$

Если поле создается и электрическими зарядами и переменным магнитным полем, то полную напряженность поля можно записать как $\vec{E} = \vec{E}_q + \vec{E}_B$, тогда уравнение (2.4) представится в более общем виде

$$\oint\limits_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint\limits_L \vec{E}_q\cdot d\vec{l} + \oint\limits_L \vec{E}_B\cdot d\vec{l} = -\int\limits_S \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}\,,$$

где учтено, что в потенциальном поле работа по перемещению единичного заряда по замкнутому контуру $\oint\limits_L \vec{E}_q \cdot d\vec{l} = 0$ равна нулю, т.е.

$$\oint\limits_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int\limits_S \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}. \tag{2.5}$$

Здесь L - любой замкнутый контур, а S -любая поверхность, опирающаяся на него.

Уравнение (2.5) называется *первым уравнением Максвелла в интегральной форме.* Удобнее представить это уравнение в дифференциальной форме. Для этого воспользуемся теоремой Стокса для вектора $\vec{E}$

$$\oint\limits_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int\limits_S rot\, \vec{E} \cdot dS \tag{2.6}$$

Интегралы (2.5) и (2.6) равны, следовательно, равны и подынтегральные выражения:

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \tag{2.7}$$

Это *первое уравнение Максвелла в дифференциальной форме.* Физический смысл этого уравнения: изменяющееся магнитное поле приводит к появлению вихревого электрического поля. Если $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, то $\oint\limits_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ и поле становится потенциальным.

4. Поток вектора магнитной индукции через замкнутую поверхность. Второе уравнение Максвелла

Представим себе любое магнитное поле и любую замкнутую поверхность, например, магнитное поле постоянного тока, рис.10. Потоки через элементарные площадки справа и слева отличаются знаком, т.к. внешние нормали к ним повернуты на 180^0. Сумма этих потоков даст ноль. Так будет и при пересечении замкнутой поверхности любой другой магнитной силовой линией. Следовательно, суммарный магнитный поток, пронизывающий замкнутую поверхность S, равен нулю.

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S B_n \, dS = 0 \tag{3.1}$$

Применяя теорему Гаусса

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{B}\, dV ,$$

можно записать

$$div\, \vec{B} = 0 . \tag{3.2}$$

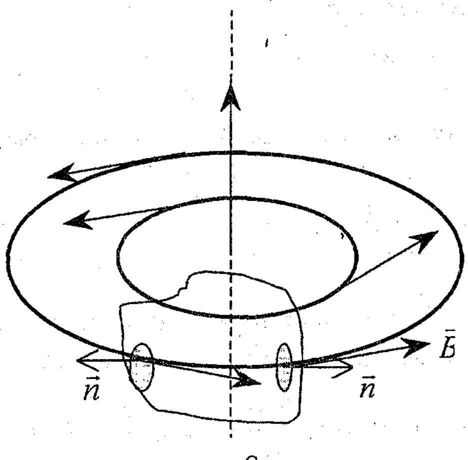


Рис.10

Уравнение (3.1) называется *вторым уравнением Максвелла в интегральной форме*, а (3.2) - *вторым уравнением Максвелла в дифференциальной форме*. Физический смысл второго уравнения: силовые линии магнитного поля не имеют начала и конца (источников и стоков), т.е. они всегда замкнуты.

2. Ток смещения. Третье уравнение Максвелла

Явление электромагнитной индукции говорит о том, что наличие в пространстве переменного магнитного поля приводит к возникновению вихревого электрического поля. Максвелл предположил, что верно и обратное - изменяющееся электрическое поле приводит к появлению магнитного поля.

Рассмотрим цепь, состоящую из источника постоянного тока и сопротивления, рис.11. В такой цепи течет ток проводимости, плотность которого

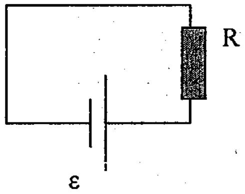


Рис.11

$$j_{пр} = \frac{I}{S} = \frac{dq}{dt\,S},$$

т.е. через поперечное сечение проводника S в единицу времени переносится заряд dq. Если в эту цепь последовательно включить конденсатор (рис.12), то ток проводимости в цепи станет равен нулю. Если же заменить источник постоянного тока на источник переменного тока (рис.13), то движение носителей заряда (ток проводимости) возникнет во всей цепи, кроме зазора между пластинами конденсатора. На пластинах конденсатора каждое мгновение будет меняться заряд и, следовательно, внутри конденсатора будет находиться переменное электрическое поле, которое будем характеризовать вектором электрического смещения $\vec{D}(t) = \varepsilon_0\,\vec{E}(t)$,(рис.14)

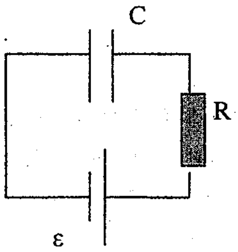


Рис.12

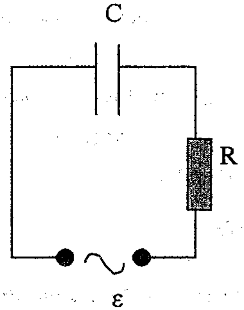


Рис.13

Изменение этого электрического поля во времени $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ совпадает по размерности с плотностью тока. Максвелл назвал этот ток "током смещения", т.е. $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}_{см}$. Ток смещения не является током в обычном смысле слова, т.е. перемещение зарядов как таковое отсутствует, однако он создает в окружающем пространстве магнитное поле.

В диэлектриках ток смещения состоит из двух существенно различных слагаемых. Так как $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, то видно, что плотность тока смещения $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ складывается из "истинного" тока смещения $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ и *тока поляризации* $\dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ - величины, обусловленной смещением связанных зарядов. В том, что токи поляризации создают магнитное поле, нет ничего неожиданного, т.к. по природе своей они не отличаются от токов проводимости. Важнейшее значение имеет тот факт, что и другая часть тока смещения $\varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, которая не связана ни с каким движением зарядов, а обусловлена только изменением электрического поля, также возбуждает магнитное поле. Даже в вакууме всякое изменение электрического поля возбуждает магнитное.

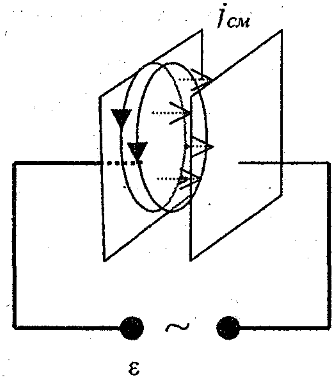


Рис.14

По закону полного тока (теорема о циркуляции) циркуляция напряженности магнитного поля по замкнутому контуру равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_k I_k = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$

Полная плотность тока в цепи складывается из плотности тока проводимости и плотности тока смещения $\vec{j} = \vec{j}_{пр} + \vec{j}_{см}$. Следовательно,

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{пр} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \qquad (4.1)$$

Используя теорему Стокса для вектора $\vec{H}$

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S rot\, \vec{H} \cdot d\vec{S},$$

можно записать

$$\int\limits_S \vec{j}_{пр} \cdot d\vec{S} + \int\limits_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int\limits_S rot\,\vec{H} \cdot d\vec{S}\,.$$

Из равенства интегралов следует равенство подынтегральных выражений

$$rot\,\vec{H} = \vec{j}_{пр} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad (4.2)$$

Уравнение (4.1) это *третье уравнение Максвелла в интегральном*, а (4.2) - в *дифференциальном виде*. Физический смысл этого уравнения в том, что магнитное поле порождается как токами проводимости так и переменным электрическим полем.

5. Теорема Остроградского-Гаусса. Четвертое уравнение Максвелла

По теореме Остроградского - Гаусса *поток вектора электрического смещения $\vec{D}$ через замкнутую поверхность S равен алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью*

$$\oint\limits_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_i = \int\limits_V \rho\, dV\,, \qquad (5.1)$$

здесь ρ - объемная плотность зарядов в объеме V, охватываемом поверхностью S.

Воспользовавшись теоремой Гаусса для вектора смещения $\vec{D}$

$$\oint\limits_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int\limits_V div\,\vec{D} \cdot dV$$

получим

$$\int\limits_V div\,\vec{D} \cdot dV = \int\limits_V \rho\; dV\,.$$

Следовательно, равны подынтегральные выражения, т.е.

$$div\,\vec{D} = \rho\,. \qquad (5.2)$$

Уравнение (5.1) - *четвертое уравнение Максвелла в интегральном*, а (5.2) - в *дифференциальном виде*. Физический смысл этого уравнения в том, что источником электрического поля являются электрические заряды, а силовые линии вектора $\vec{D}$ начинаются и кончаются на зарядах.

6. Система уравнений Максвелла - основа теории электромагнитного поля

Гипотеза Максвелла о существовании тока смещения позволила создать единую теорию электрических и магнитных явлений. Эта теория не только объяснила все разрозненные явления электричества и магнетизма, но и предсказала ряд новых явлений, существование которых подтвердилось впоследствии.

Итак, теперь всю теорию электромагнитных явлений можно представить в виде системы фундаментальных уравнений. Запишем их сначала в *интегральной форме*:

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \qquad \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho\, dV \qquad (6.1)$$

$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = \iint_S \left(\vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} \qquad \oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (6.2)$$

Из уравнений Максвелла для циркуляции векторов $\vec{E}$ и $\vec{H}$ следует, что электрическое и магнитное поля нельзя рассматривать как независимые: изменение во времени одного из них приводит к появлению другого. Поэтому имеет смысл лишь совокупность этих полей, описывающая *единое электромагнитное поле.*

Необходимо помнить, что рассуждения, с помощью которых получены уравнения Максвелла, ни в коей мере не являются их доказательством. Эти уравнения нельзя "вывести", они являются основными аксиомами, постулатами электродинамики, полученными путем обобщения экспериментальных фактов.

Систему уравнений Максвелла можно представить и в *дифференциальной форме:*

$$rot\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad div\,\vec{D} = \rho \qquad (6.3)$$

$$rot\,\vec{H} = \vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad div\,\vec{B} = 0 \qquad (6.4)$$

Уравнения (6.3) говорят о том, что электрическое поле может возникать по двум причинам. Во-первых, его источниками являются электрические заряды ρ (как свободные, так и связанные). Во-вторых, поле образуется всегда, когда меняется во времени магнитное поле.

Уравнения (6.4) говорят о том, что магнитное поле может возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями, либо тем и другим одновременно. Источников магнитного поля, подобных электрическим зарядам (магнитных зарядов) нет и быть не может.

Уравнения Максвелла в интегральной форме обладают большей общностью, чем в дифференциальной, ибо они справедливы и в тех случаях, когда существуют *поверхности разрыва* - поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно. Уравнения Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и времени изменяются непрерывно. Чтобы расширить область применения дифференциальной записи уравнений нужно дополнить их *граничными условиями* для нормальных и тангенциальных составляющих векторов поля. Эти соотношения подробно выводятся в курсе теоретической физики. Здесь мы приведем лишь окончательные формулировки граничных условий для простейшего случая - отсутствия токов и зарядов на границе раздела сред.

$$D_{1n} = D_{2n} \qquad E_{1\tau} = E_{2\tau} \qquad B_{1n} = B_{2n} \qquad H_{1\tau} = H_{2\tau}$$

Уравнения Максвелла позволяют решить прямую и обратную задачи электродинамики, а именно: зная поля, найти токи и заряды их образующие, и наоборот: зная распределение зарядов и токов, найти создаваемые ими поля. Решить эти задачи возможно, если дополнить уравнения Максвелла соотношениями, учитывающими индивидуальные свойства среды. Такие соотношения называются *материальными уравнениями.* В простейшем случае слабых электромагнитных полей, медленно меняющихся в пространстве и времени, и изотропных сред, не содержащих сегнетоэлектрики и ферромагнетики, эти уравнения имеют вид:

$$\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H} \qquad \vec{j} = \sigma\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right),$$

где ε, μ -относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости, σ - электропроводность среды, а $\vec{E}^*$ - напряженность поля сторонних сил, обусловленная химическими или тепловыми процессами.

7. Примеры решения задач с применением уравнений Максвелла.

Пример 1.

Показать, что из уравнений Максвелла следует закон сохранения электрического заряда $div\, \vec{j} = -\partial\rho/\partial t$.

Решение: Вспомним, что объемная плотность заряда ρ входит в четвертое уравнение Максвелла $div\, \vec{D} = \rho$. Продифференцируем обе части этого уравнения по времени $\frac{\partial}{\partial t}$, поменяем слева порядок дифференцирования, поставим знак «минус» перед обеими частями, получим: $-div\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

Вспомним третье уравнение Максвелла, $rot\,\vec{H} = \vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$. Из него следует, что $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = rot\,\vec{H} - \vec{j}_{np}$. Применим к обеим частям этого равенства операцию дивергенции. $div\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = div\, rot\,\vec{H} - div\,\vec{j}_{np}$.

Учитывая определения дивергенции и ротора, получим

$$div\, rot\, \vec{H} = \frac{\partial\, rot_x H}{\partial x} + \frac{\partial\, rot_y H}{\partial y} + \frac{\partial\, rot_z H}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right) = 0$$

Следовательно, $-div\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = div\, \vec{j}_{пр}$ и $div\, \vec{j}_{пр} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$, что и требовалось доказать.

Пример 2.

Электрическое поле задано выражением $\vec{E} = 3a\vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор декартовой системы координат, a – размерная константа. Найти, какое распределение заряда ρ создает такое поле.

Решение. В декартовой системе координат $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Воспользуемся четвертым уравнением Максвелла $div\, \vec{D} = \rho$ или $div\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

$$div\, \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x}(3ax) + \frac{\partial}{\partial y}(3ay) + \frac{\partial}{\partial z}(3az) = 9a \text{,т.е. } \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 9a \text{ или } \rho = 9a\varepsilon_0 .$$

8. Вопросы и задачи для самоконтроля

1 Какие экспериментальные законы электромагнетизма содержатся в каждом из уравнений Максвелла?

2 Какой физический смысл имеет член $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ в уравнении Максвелла?

3 Для чего нужны граничные условия для нормальных и тангенциальных составляющих векторов электромагнитного поля?

4 Что такое материальные уравнения и для чего они нужны?

5. Может ли индукция магнитного поля в вакууме определяться следующими формулами

а) $\vec{B} = 3a\mu_0 \left(x\vec{i} + 2y\vec{j} + 3z\vec{k}\right)$

б) $\vec{B} = 3a\mu_0 \left(x\vec{i} + 2y\vec{j} - 3z\vec{k}\right)$

в) $\vec{B} = 3a\mu_0 \left(y\vec{i} + z\vec{j}\right)$? В случае положительного ответа определить плотность тока $\vec{j}(x, y, z)$.Указание: воспользоваться вторым и третьим уравнениями Максвелла, считая, что в вакууме $\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0$

6. Электрическое поле в среде с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 9$ и удельной проводимостью σ = 10 мСм/м меняется по закону $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k x)$, где ω= 62,8·10^6 с$^{-1}$. Найти отношение амплитуд токов проводимости и смещения.

7. Показать, что уравнения Максвелла $rot\, \vec{E} = -\partial\vec{B}/\partial t$ и $div\, \vec{B} = 0$ являются совместимыми, т.е. первое не противоречит второму.

9. Литература

1. Физическая энциклопедия.-М.: издательство «Советская энциклопедия»,т.1-5, 1988.
2. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Учебное пособие для втузов. В 5 кн. Кн.2. Электричество и магнетизм. - М.:ООО «Издательство Астрель», ООО «Издательство АСТ» , 2004.
3. *Трофимова Т. И.* Курс физики : Учебное пособие для вузов. -6-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2004.
4. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике, т.5., - М.: Издательство «Мир», 1977.
5. *Иродов И.Е.* Основные законы электромагнетизма: Учеб. пособие для студентов вузов.- 2-е, стереотип. – М.: Высшая школа, 1991.

Содержание

Учебное издание

конспект лекций по дисциплине «Физика»

Темы:

1. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ ПРИРОДА МАГНИТНОГО ПОЛЯ

2. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ТОК СМЕЩЕНИЯ

Составители: Ирина Владимировна Недзвецкая,
Наталья Владимировна Дьяченко

Ответственный редактор :*Бобровский А.П.*

Редактор: И.Г.Максимова

ЛР № 020309 от 30.12.96

Подписано в печать 26.02.2009. Формат 60×90 $\frac{1}{16}$. Гарнитура Times New Roman.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 1,6. Тираж 600 экз. Заказ № 7.
195196 СПб., Малоохтинский пр., 98, РГГМУ.