Министерство образования и науки Российской Федерации

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. Н. Веретенников

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

РГГМУ

Санкт-Петербург
2011

Одобрено Научно-методическим советом РГГМУ

УДК 51

Веретенников В. Н. Сборник задач по математике. Введение в математический анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – СПб.: РГГМУ, 2011 – 340 с.

Пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий в Российском государственном гидрометеорологическом университете. По каждой теме кратко излагаются основные теоретические сведения и предлагаются вопросы для самопроверки, способствующие усвоению теоретического материала; приводятся методические указания для решения типовых задач, даются задачи и упражнения для самостоятельной работы с ответами и указаниями.

Активизация познавательной деятельности студентов, выработка у них способности самостоятельно решать достаточно сложные проблемы может быть достигнута при такой организации учебного процесса, когда каждому студенту выдаются индивидуальные домашние задания (ИДЗ) с обязательным последующим контролем их выполнения и выставлением оценок.

Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи ИДЗ.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие написано на основе многолетнего опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математическому анализу на I курсе РГГМУ. Оно предназначено как для студентов, так и для преподавателей, особенно молодых, начинающих вести практические занятия.

Пособие не является сборником задач в обычном смысле слова. Как явствует из его структуры, оно преследует цель помочь активному и неформальному усвоению студентами изучаемого предмета. При составлении пособия имелось в виду, что им будут пользоваться студенты заочного факультета. В связи с этим материал каждой темы разбит, как правило, на четыре пункту.

В п. I – «Основные теоретические сведения» – приводятся основные теоретические сведения и формулы (разумеется, без доказательства), необходимые для решения задач. Иногда после формулировки определения или теоремы даются поясняющие примеры или некоторые комментарии, чтобы облегчить студентам восприятие новых понятий. Там, где это, возможно, дается геометрическая и физическая интерпретация математических понятий.

В п. II – «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» – содержатся вопросы по теории и простые задачи, решение которых не связано с большими вычислениями, но которые хорошо иллюстрируют то или иное теоретическое положение. Назначение этого пункта – помочь студенту в самостоятельной работе над теоретическим материалом, дать ему возможность самому проконтролировать усвоение основных понятий. Предполагается, конечно, что основная работа над теоретическим материалом с проработкой доказательств теорем по учебнику или конспектам лекций. Однако для решения задач часто достаточно понимания сути теоремы (или формулы). Многие контрольные вопросы направлены на раскрытие этой сути. Из п. II преподаватель может черпать вопросы для проверки готовности студентов к практическому занятию по той или иной теме.

В п. III – «Примеры решения задач» – разобраны типичные примеры, демонстрирующие применение на практике результатов теории. При этом большое внимание уделяется обсуждению не только «технических приемов», но и различным «тонким местам», например условиям применимости той или иной теоремы или формулы.

Назначение п. IV – «Задачи и упражнения для самостоятельной работы» – определено его названием. При подборе упражнений были использованы различные источники, в том числе широко известные задачники. В конце задачи дается ответ и указание.

Начало и конец решений задач отмечаются соответственно знаками ▲ и ▼.

В пособии приведен перечень знаний, умений и навыков, которыми должен владеть студент; указана используемая литература.

Автор надеется, что данное пособие поможет студентам в овладении методами математического анализа, в их самостоятельной работе над предметом. Он также выражает надежду, что пособие будет полезным для преподавателей в работе со студентами, и с благодарностью воспримет все критические замечания и пожелания, направленные на улучшение его содержания.

I. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Основные теоретические сведения

1.1. Алгебра высказываний (логическая символика)

Многие рассуждения в теории множеств можно сделать очень наглядными, если пользоваться логическими символами и логическими законами, сформулированными в этой символике. Приведем основные сведения из логики.

Под ***высказыванием*** понимают всякое утверждение, сформулированное словесно или записанное с помощью символов (формул). О высказывании имеет смысл говорить, истинно оно или ложно.

Произвольное высказывание будем **обозначать** буквами

$$l, m, n, p, q, r, \dots.$$

Из двух произвольных высказываний p, q можно получить новое высказывание, связывая высказывания p и q одним из союзов: **И**; **ИЛИ**; **ЕСЛИ..., ТО; ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА; НЕ.**

Высказывание p **И** q называется ***конъюнкцией*** или ***логическим произведением*** высказываний p и q, называемых сомножителями конъюнкции.
Обозначение: $p \wedge q$.

Конъюнкция $p \wedge q$ истинна, когда оба ее сомножителя истинны; если хотя бы один из ее сомножителей ложный то и конъюнкция ложна.

Высказывание p **ИЛИ** q называется ***дизъюнкцией***, или ***логической суммой*** высказываний p и q (слагаемых дизъюнкции).
Обозначение: $p \vee q$.

Дизъюнкция истинна, если хотя бы одно из ее слагаемых истинно, и ложна тогда, когда оба слагаемых ложны.

Высказывание **ЕСЛИ** p **ТО** q называется ***импликацией*** с ***посылкой*** p и ***заключением*** q.
Обозначение: $p \Rightarrow q$.

Импликация ложна, если ее заключение ложно, в то время как посылка истинна. Во всех остальных случаях импликация истинна.

Записи $p \Rightarrow q$, означающей, что p влечет q или q следует из p, мы часто будем придавать другую словесную интерпретацию, говоря, что q

есть ***необходимый признак*** или ***необходимое условие*** p и в свою очередь p – ***достаточное условие*** или ***достаточный признак*** q.

Высказывание p **ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА** q называется ***эквивалентностью*** с членами p и q.
Обозначение: $p \Leftrightarrow q$ $(p \equiv q)$.

Это высказывание истинно, когда высказывание p и q имеют одинаковые логические значения, т.е. либо оба истинны, либо оба ложны. Если же p истинно, а q ложно, или q истинно, а p ложно, то эквивалентность $p \Leftrightarrow q$ ложна.

Высказывание **НЕ** p называется ***отрицанием*** p.
Обозначение: $\neg p$.

Оно истинно, если p ложно, и ложно, если p истинно. Таким образом, отрицание p имеет логическое значение, противоположное логическому значению p.

Произвольное истинное высказывание обозначим через T (*true – истинный*), а произвольное ложное высказывание через F (*false – ложный*).

Например, T может быть высказыванием $2 \cdot 2 = 4$, а F – высказыванием $2 \cdot 2 = 5$.

Используя символы T и F, можно записать данные выше определения истинности и ложности конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности и отрицания при помощи следующей таблицы истинности (таблица 1).

Таблица 1

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\neg p$
T	T	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T
F	F	F	F	T	T	T

Логические законы, или ***логические тавтологии***, – это такие выражения, построенные из букв $l, m, n, p, q, r, \ldots$ и связок $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$, что если буквы $l, m, n, p, q, r, \ldots$ произвольным образом заменить высказываниями (истинными или ложными), то в результате всегда получится истинное высказывание.

1.2. Множества. Пустое множество. Подмножества. Включения

Понятие множества является первичным в математике. Множество считается известным, если мы знаем его элементы или в принципе можем их найти.

Задать множество можно многими способами; простейший из них – перечислить его элементы. Перечень элементов множества заключают обычно в фигурные скобки.

Например, $\{1, 2, 3, 4\}$ – это множество, элементами которого являются числа 1, 2, 3, 4 ***и только они***; {весна, лето, осень, зима} – это множество времен года.

Вместо того, чтобы перечислять все элементы множества можно указать свойство, в точности определяющее, какие элементы мы хотим в это множество включить.

Множество $\{n : n -$ целое число и $1 \le n \le 4\}$ совпадает с множеством $\{1, 2, 3, 4\}$.

Мы будем строить ***алгебру*** множеств. Как и в обычной алгебре, множества и элементы множества обозначаются буквами. Мы используем строчные буквы для обозначения элементов, а прописные латинские – для обозначения множеств.

Если элемент x принадлежит множеству X, то пишут $x \in X$. В противном случае пишут $x \notin X$ (или $x \overline{\in} X$).

Запись $\{x \in X : P(x)\}$ означает множество тех элементов $x \in X$, которые обладают некоторым свойством P.

В записи высказываний о множествах часто используются логические операторы:

1) $\exists$[1] («существует», « найдется» или «хотя бы один»);

2) $\forall$[2] («любой», «для любого», «все», «всякий» или «каждый»).

Эти операторы называются ***кванторами существования*** и ***общности*** соответственно.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***.

Существует только одно пустое множество, т.е. все пустые множества равны между собой (полная демократия).

Установив, что имеется пустое одно-единственное множество можно ввести для него **специальное обозначение**. Как правило, для этого используется символ $\varnothing$ (знак диаметра).

[1] $\exists$ – перевернутая латинская буква E. От английского слова Existence – существование.
[2] $\forall$ – перевернутая латинская буква A. От английского слова Any – любой.

Замечание. Нельзя сказать, что пустое множество – это «ничто» или что оно не существует. Оно существует точно так же, как любое другое множество, не существуют его элементы.

Роль пустого множества в теории множеств аналогична роли числа нуль в алгебре. Без множества $\varnothing$ операции умножения и вычитания множеств не всегда были бы выполнимы, что впоследствии привело бы к значительным трудностям при вычислениях.

Множество B называется ***подмножеством множества*** A, если каждый элемент множества B является также и элементом множества A. **Обозначение**: $B \subset A$[3] или $A \supset B$.

Запись $A \subset B$ означает, что A является подмножеством B, или, как иногда говорят, A ***содержится*** в B. Или, что B содержит A, или, что B ***включает*** в себя A. В связи с этим отношение $A \subset B$ между множествами A, B называется отношением включения (рис. 1.1).

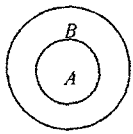


Рис. 1.1

Итак,

$$(A \subset B) = \forall x\big((x \in A) \Rightarrow (x \in B)\big).$$

Всякое непустое множество A имеет, по крайней мере, два подмножества: само множество A и пустое множество $\varnothing$, которые называются ***несобственными подмножествами*** множества A. Запись $A \subset B$ означает, что множество A является подмножеством множества B, но $A \neq B$. В этом случае говорят, что множество A есть ***собственное подмножество*** множества B.

1.3. Операции над множествами

Введем четыре аксиомы.

I. Аксиома объемности. Если множества A и B составлены из одних и тех же элементов, то они совпадают.

II. Аксиома суммы. Для произвольных множеств A и B существует множество, элементами которого являются все элементы множества A и все элементы множества B и которое никаких других элементов не содержит.

---

[3] Символ $\subset$ произошел от символа <, но был специально искривлен, чтобы напомнить, что речь идет не о числах, а о множествах.

III. Аксиома разности. Для произвольных множеств A и B существует множество, элементами которого являются те и только те элементы множества A, которые не являются элементами множества B.
IV. Аксиома существования. Существует, по крайней мере, одно множество.

Аксиому объемности можно записать в виде $\forall x((x \in A) \Leftrightarrow (x \notin B))$. Эта запись означает, что для любого объекта x соотношения $x \in A$ и $x \in B$ равносильны. Поскольку множество вполне определяется своими элементами, указанное высказывание принято обозначать коротко записью $A = B$, читаемой «A равно B», обозначающей совпадение множеств A и B.

Таким образом, два множества ***равны***, когда они состоят из одних и тех же элементов.

Отрицание равенства записывается в виде $A \neq B$.

Из аксиом I и II следует, что для произвольных множеств A и B множество, удовлетворяющее условиям аксиомы I, единственно. Это единственное множество, удовлетворяющее условиям аксиомы II, назовем ***объединением*** (или *суммой*) множеств A и B будем **обозначать** символом $A \bigcup B$.

Объединением $A \bigcup B$ множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, входящих во множества A или B, и только из них, т.е. $A \bigcup B = \{x : (x \in A) \vee (x \in B)\}$.

Если один и тот же элемент содержится и во множестве A и во множестве B, то в их объединение он входит только один раз.

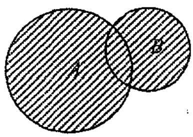


Рис. 1.2. $A \bigcup B$

Схематически объединение множеств A и B изображено на рис. 1.2 с помощью диаграмм Венна, на которых множества представлены в виде кругов и те области, где лежат нужные элементы, заштрихованы.

Например,

если, а $B = \{1, 7, 5, 2\}$, то $A \bigcup B = \{1, 3, 2, 9, 7, 5\}$.

Аналогично определяется объединение любого количества множеств.

Например: 1) Если множество A состоит из всех четных чисел $A=\{2,4,6,8,\ldots\}$, множество B состоит из всех натуральных чисел, делящихся на три $B=\{3,6,9,12,\ldots\}$, и множество C состоит из всех нечетных чисел, не делящихся на три $C=\{1,5,7,11,\ldots\}$, то

$$A\bigcup B\bigcup C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots\},$$

т.е. совпадает со всем множеством натуральных чисел.

2) Пусть для каждого вещественного числа x множество A_x состоит из всех точек плоскости Oxy, имеющих заданную абсциссу x (т.е. каждое A_x заполняет прямую, параллельную оси Oy). Тогда объединение $\bigcup A_x$ есть совокупность всех точек плоскости.

Подобным образом из аксиом I и III заключаем, что

для произвольных множеств A и B существует в точности одно множество, содержащее элементы множества A, не принадлежащие множеству B (рис. 1.3). Это множество называется ***разностью*** множеств A и B и обозначается символом $A\setminus B$, т.е.

$$A\setminus B=\{x:(x\in A)\wedge(x\notin B)\}.$$

Рис.1.3. $A\setminus B$

Пересечение (***произведение***) $A\bigcap B$ множеств A и B определяем по формуле $A\bigcap B=A\setminus(A\setminus B)$.

Пересечением множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B, и только из них, т.е. $A\bigcap B=\{x:(x\in A)\wedge(x\in B)\}$.

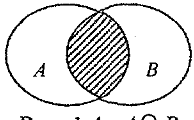


Рис. 1.4. $A\bigcap B$

Таким образом, пересечение – это общая часть сомножителей. Элементами его являются те, и только те объекты, которые принадлежат обоим сомножителям (рис. 1.4).

Математические теории, как правило, находят свой выход в том, что позволяют перерабатывать один набор чисел (исходные данные) в другой набор чисел, составляющих промежуточную или окончательную цель вычислений. По этой причине особое место в математике и ее приложениях занимают числовые функции (точнее, так называемые дифференцируемые числовые функции). Они составляют главный объект исследования классического анализа. Но сколь-нибудь полное с точки зрения современной математики описание свойств этих функций невозможно без точного определения множества вещественных чисел, на котором эти функции действуют.

1.4. Некоторые числовые множества

Определение. Множество R называется множеством ***вещественных (действительных) чисел***, а его элементы – ***вещественными (действительными) числами***, если выполнен комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел. Этот комплекс условий состоит из аксиом сложения, умножения, связь сложения и умножения, аксиом порядка, связь сложения и порядка в R, связь умножения и порядка R, аксиомы полноты (непрерывности).

Представление вещественных чисел в виде бесконечной десятичной дроби. Любое вещественное число a представимо в виде бесконечной десятичной дроби:

$$a = \pm a_0 . a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,$$

где из двух знаков «$\pm$» берется какой-то один: плюс – для положительных чисел, минус – для отрицательных чисел (знак плюс обычно не пишется).

Рациональные числа представимы в виде периодических, а иррациональные числа – в виде непериодических бесконечных десятичных дробей. Некоторые рациональные числа представимы в виде конечной дроби или в виде бесконечной дроби с нулем в периоде. Такие числа допускают второе представление – в виде бесконечной десятичной дроби с цифрой 9 в периоде.

Например, $\frac{1}{2} = 0.500\ldots0\ldots = 0.5(0)$; $\frac{1}{2} = 0.4000\ldots9\ldots = 0.4(9)$.

Вещественные числа можно изображать точками на прямой координатной линии. Поэтому множество всех вещественных чисел называют

числовой прямой, а сами числа – ***точками***, и при рассмотрении числовых множеств часто пользуются их геометрической интерпретацией.

Будем использовать следующие обозначения и терминологию:

N – множество всех натуральных чисел;

Z – множество всех целых чисел;

$R = (-\infty; +\infty)$ – множество всех вещественных чисел (прямая числовая линия);

$(a; b)$ – интервал – множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$.

На чертеже 1.5 представлен интервал $(a; b)$.

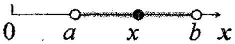


Рис. 1.5.

$[a; b]$ – сегмент (отрезок) – множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$; геометрически $[a; b]$ есть отрезок прямой с концами в точках a и b.

Различие между интервалом $(a; b)$ и отрезком $[a; b]$ состоит в том, что в случае интервала $(a; b)$ числа a и b ему не принадлежат, а в случае отрезка $[a; b]$ числа a и b ему принадлежат. На рис. 1.6 представлен отрезок $[a; b]$.

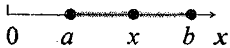


Рис. 1.6.

$[a; b)$ или $(a; b]$ – полуинтервал (полусегмент) – множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих соответственно неравенствам

$a \le x < b$, $a < x \le b$ (рис.1.7 и 1.8).

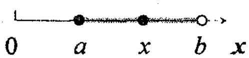


Рис. 1.7.

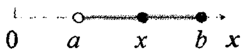


Рис.1.8.

$[a; +\infty)$ или $(a; +\infty)$ или $(-\infty; b]$ или $(-\infty; b)$ – полупрямая – множество всех вещественных чисел x, удовлетворяющих соответственно неравенствам $a \le x < +\infty$, $a < x < +\infty$, $-\infty < x \le b$, $-\infty < x < b$;

отрезок, интервал, полуинтервал, полупрямую и числовую прямую будем называть также промежутком.

Окрестность точки x_0 – любой интервал, содержащий точку x_0.

Пусть ε – положительное число.

ε-окрестность точки x_0 – любой интервал $(x_0-\varepsilon; x_0+\varepsilon)$, симметричный относительно точки x_0 (рис. 1.9).

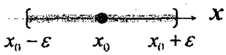


Рис. 1.9.

Это – совокупность всех чисел x, удовлетворяющих неравенству

$$|x-x_0|<\varepsilon \text{ или } x_0-\varepsilon<x<x_0+\varepsilon.$$

Примеры решения задач

Пример 1.1. Задать перечислением всех элементов множества, определенные с помощью следующих характеристических свойств:

а) $A::=\{x\in \mathrm{N}: x\le 5$; б) $B::=\{x\in \mathrm{N}: x<0\}$; в) $C::=\{x\in \mathrm{Z}: |x|\le 2\}$.

▲ а) Требуется перечислить натуральные числа, меньшие или равные числу 5. Имеем множество $A=\{1;2;3;4;5\}$.

б) Отрицательных натуральных чисел не существует, поэтому $B=\varnothing$.

в) В данном случае из решения неравенства $|x|\le 2$ надо выбрать только целые числа. Так как его решением является отрезок $[-2;2]$, то

$$B=\{-2;-1;0;1;2\}. \;▼$$

Пример 1.2. Описать множество точек M числовой прямой, таких, что $\{M \mid |OM|=1\}$, и перечислить его элементы.

▲ Множество задано характеристическим свойством: его элементы есть точки числовой прямой, удаленные от точки отсчета O на расстояние, равное 1 (рис. 1.10).

Значит, элементами этого множества являются числа -1 и 1, т.е. $M=\{-1;1\}$. ▼

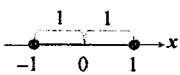


Рис. 1.10.

Пример 1.3. Составить множество B всех подмножеств множества $A = \{1; 2\}$.

▲ Согласно определению подмножества данного множества, будем иметь: $B\{\varnothing; \{1\}; \{2\}; [1; 2]\}$. ▼

Пример 1.4. Верно ли соотношение $\{a; b; c\} = \{\{a; b\}; c\}$?

▲ Соотношение, неверно хотя бы потому, что первое множество имеет три элемента: a, b и c, а второе – только два: множество $\{a; b\}$ и элемент c, или потому, что первое множество не содержит элемента $\{a; b\}$, содержащегося во втором множестве. ▼

Пример 1.5. Найти все подмножества множества $\{\Delta; \otimes; -\}$.

▲ Сначала выпишем несобственные подмножества данного множества: $\varnothing$ и $\{\Delta; \otimes; -\}$, а затем все его собственные подмножества:

$$\{\Delta\}, \{\otimes\}, \{-\}, \{\Delta; \otimes\}, \{\Delta; -\}, \{\otimes; -\}.$$

Итак, данное множество имеет восемь подмножеств.

Замечание. Отметим, что количество подмножеств множества, содержащего n элементов, равно 2^n. ▼

Пример 1.6. Найти объединение и пересечение следующих двух множеств: а) $A ::= (4; 8)$, $B ::= (1; 4]$; б) $A ::= (-3; 7]$, $B ::= [5; 6)$.

▲ Исходя из определений объединения и пересечения множеств, получим: а) $A \bigcup B = (1; 8)$, $A \bigcap B = \varnothing$; б) $A \bigcup B = (-3; 7]$, $A \bigcap B = [5; 6]$. ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Составить список элементов множеств, заданных характеристическими свойствами: а) $A = \{x \mid x^2 - 8x + 15 = 0\}$; б) $A = \{x \mid x \in \mathrm{N}, -11 < x \le -3\}$.

Ответ: а) $A = \{3; 5\}$; б) $A = \varnothing$.

2. Выясните, равны ли множества $\{1; 2\}$ и $\{\{1; 2\}\}$.

3. Доказать, что если $A = \{x : x^2 - 7x + 6 = 0\}$ и $B = \{1; 6\}$, то $A = B$.

4. Описать множества точек M плоскости, таких, что:

$$\text{а) } \{M : |OM| = R\};\ \text{б) } \{M : |OM| \le R\};\ \text{в) } \{M : |AM| = |BM|\},$$

где a и b – заданные точки.

Ответ: а) Множество точек окружности радиусом R и с центром в точке O;

б) множество точек круга радиусом R и с центром в точке O;

в) множество точек прямой плоскости, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его середину.

5. Какая разница в записях $A \subset B$ и $A \in B$?
6. Доказать, что $\{\{1;2\},\{2;3\}\} \neq \{1;2;3\}$.
7. Верно ли, что $\{1;2\} \in \{\{1;2;3\},\{1;3\},1,2\}$?

Ответ: Первое соотношение неверное, второе – верное.

8. Является ли множество, состоящее из числа 0, пустым?
9. Составьте множество всех подмножеств множества $A = \{0;1;2\}$.
10. Найдите объединение и пересечение следующих множеств: A – множества четных чисел, B – множества нечетных чисел, C – множества простых чисел.
11. Найдите разности $A \backslash B$ и $B \backslash A$ следующих множеств:

$$A = \{1;2;4;6;9\};\ B = \{3;4;5;8;10\}.$$

12. A – множество студентов в одной из групп факультете, а B – множество отличников на факультете. Какие множества студентов описывают множества $A \cap B$, $A \setminus B$ и $B \setminus A$?

Ответ: Множество отличников в группе; множество студентов в группе без отличников; множество отличников в других группах факультета.

13. A – множество натуральных чисел, делящихся на 2; B – множество натуральных чисел, делящихся на 3. Каково множество $A \cap B$?

Ответ: Множество натуральных чисел, делящихся на 6.

14. Пусть

$$A = \{x : x \in \mathrm{N}, 2 < x \le 6\},\ B = \{x : x \in \mathrm{N}, 1 < x < 4\},\ C = \{x : x \in \mathrm{N}, x^2 - 4 = 0\}.$$

Из каких элементов состоят множества:

а) $D \cup C$; б) $A \cap B \cap C$; в) $A \cup B \cup C$; г) $(A \cap B) \cup (B \cup C)$?

Ответ: а) $\{2, 3\}$; б) $\varnothing$; в) $\{2, 3, 4, 5, 6\}$; г) $\{2, 3\}$.

Указание: выписать элементы множеств A, B и C.

15. Даны множества A, B и C. С помощью операций объединения, пересечения и разности записать множества, состоящие из элементов, принадлежащих: а) всем трем множествам; б) хотя бы одному из множеств; в) множеству A и не принадлежащих множествам B и C; г) множествам A и B и не принадлежащим множеству C.

Ответ: а) $A \cap B \cap C$; б) $A \cup B \cup C$; в) $A \setminus B \setminus C$; г) $(A \cap B) \setminus C$.

1.5. Абсолютная величина

Определение. *Модулем* (*абсолютной величиной*) вещественного числа x называют неотрицательное число $|x|$, определяемое равенством: $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Чтобы перейти к абсолютной величине числа, имеющего в цифровой записи минус, надо этот знак отбросить.

Если $x = 5$, то $|x| = |5| = 5$; если $x = 0$, то $|x| = 0$.

Если $x = -3$, то $|x| = |-3| = -(-3) = 3$.

Если $|x| < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$, то это означает, что x удовлетворяет неравенствам (рис. 1.11)

$$\boxed{-\varepsilon < x < +\varepsilon.} \tag{5.1}$$

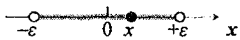


Рис. 1.11.

Примеры решения задач

Пример 1.7. Если $|x| < 3$, то имеют место неравенства $-3 < x < +3$.

Пример 1.8. Если $|y| \leq \frac{\pi}{2}$, то y удовлетворяет неравенствам (рис. 1.12) $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq +\frac{\pi}{2}$.

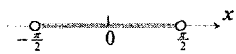


Рис. 1.12.

Пример 1.9. Определить числовую величину выражения

$$\left|\frac{2x+5}{7-2x^2}\right| \text{ при } x = 2.$$

▲ При значении $x = 2$

$$\left|\frac{2x+5}{7-2x^2}\right|\Bigg|_{x=2} = \left|\frac{2\cdot 2+5}{7-2\cdot 2^2}\right| = \left|\frac{4+5}{7-8}\right| = \left|\frac{9}{-1}\right| = |-9| = 9. \ ▼$$

Пример 1.10. Определить, при каких значениях x будет справедливо неравенство $|x-3| < 2$.

▲ Согласно формуле (5.1) данное неравенство может быть записано так: $-2 < x-3 < 2$. Прибавим к каждой части этих неравенств по 3 и получим $-2+3 < x < 2+3$, откуда следует, что $1 < x < 5$. Неравенство $|x-3| < 2$ выполняется для всех значений x из интервала (1; 5). ▼

Абсолютные величины обладают следующими свойствами:

1) *Абсолютная величина суммы нескольких слагаемых не больше суммы абсолютных величин этих слагаемых*

$$|x+y+z| \le |x|+|y|+|z|.$$

2) *Абсолютная величина разности абсолютных величин двух чисел не меньше разности абсолютных величин этих чисел*

$$|x-y| \ge |x|-|y|.$$

3) *Абсолютная величина произведения нескольких сомножителей равна произведению абсолютных величин этих сомножителей*

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|.$$

4) *Абсолютная величина дроби равна абсолютной величине числителя, разделенной на абсолютную величину знаменателя* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется абсолютной величиной?
2. Что выражают неравенства $|x| \ge a$, $|x| \le a$ на числовой оси и на плоскости?
3. Проверить свойство 1 для значений

а) $x=-5;\ y=4;\ z=5;\ u=-1$; б) $x=-4;\ y=5;\ z=-2$.

в) $x=4;\ y=2;\ z=7$; г) $x=5;\ y=-3;\ z=-6$.

4. Проверить свойство 2 для значений

а) $x=7;\ y=-4$; б) $x=-4;\ y=-8$; в) $x=5;\ y=7$; г) $x=-10;\ y=4$.

1.6. Применение символов математической логики

При формулировках многих определений и теорем используются кванторы существования и всеобщности ($\exists$ и $\forall$).

С помощью указанных символов определение ограниченного сверху множества можно записать так: множество X называется ограниченным сверху, если $\exists M \in \mathrm{R}$ такое, что $\forall x \in \mathrm{X}$ выполняется неравенство $x \leq M$, или (еще более кратко, опуская некоторые слова): множество X называется ограниченным сверху, если

$$\exists M \in \mathrm{R}\ \forall x \in \mathrm{X} : x \leq M . \tag{6.1}$$

Использование кванторов не только сокращает запись, но и позволяет весьма простым способом строить отрицания предложений (определений, утверждений), записанных с помощью кванторов. Проиллюстрируем этот способ на примере отрицания определения ограниченного сверху множества. Иначе говоря, сформулируем определение неограниченного сверху множества. Неограниченность сверху множества X означает: не существует числа M такого, что для любого $x \in \mathrm{X}$ выполняется неравенство $x \leq M$. Это значит, что для любого числа M существует $x \in \mathrm{X}$, для которого $x > M$. Поэтому определение неограниченного сверху множества с помощью кванторов можно записать так: множество X называется неограниченным сверху, если

$$\forall M \in \mathrm{R}\ \exists x \in \mathrm{X} : x > M . \tag{6.2}$$

Сравнивая (6.1) с (6.2), мы видим, что для построения отрицания предложения (6.1) нужно квантор $\exists$ заменить квантором $\forall$, а квантор $\forall$ – на $\exists$ и стоящее после двоеточия неравенство заменить ему противоположным.

Это правило можно использовать и для построения отрицаний любых других утверждений, содержащих кванторы $\exists$ и $\forall$.

1.7. Метод математической индукции

Чтобы доказать, что некоторое утверждение верно для любого натурального числа n начиная со значения n_0, достаточно доказать, что:

а) это утверждение верно для числа $n = n_0$;

б) если данное утверждение справедливо для некоторого натурального числа $k \geq n_0$, то оно верно также и для следующего натурального числа $k+1$.

Такой метод доказательства называется ***методом математической индукции***.

Вопросы для самопроверки

1. Запишите с помощью кванторов определение ограниченного снизу множества.

2. Постройте отрицание этого определения, пользуясь правилом построения отрицаний.

3. Какое множество называется ограниченным?

4. В чем состоит метод математической индукции?

5. Методом математической индукции докажите, что $\forall n \in \mathrm{N} : n \leq 2^{n-1}$.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Применяя метод математической индукции, докажите, что $\forall n \in \mathrm{N}$ справедливы равенства:

1. $1+2+3+\ldots+n = 0.5n(n+1)$.

2. $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

3. $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3 = 0.25n^2(n+1)^2$.

Методом математической индукции докажите справедливость неравенств:

4. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

5. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ $(n \geq 2)$.

6. $n^{n+1} > (n+1)^n$ $(n \geq 3)$.

7. $\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$ при $x_k \geq 0,\ 1 \leq k \leq n$

(среднее геометрическое n неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического);

8. $\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}}_{n} \leq 0.5\left(1+\sqrt{4a+1}\right),\ \forall a > 0$.

2. ПРЕДЕЛ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

Основные теоретические сведения

2.1. Функция натурального аргумента (числовая последовательность)

Начало изучению понятия предела числовой последовательности положено уже в элементарной математике.

Примерами таких последовательностей могут служить:

- последовательность всех членов арифметической и геометрической прогрессий;
- последовательность периметров правильных n – угольников, вписанных в данную окружность;
- последовательность $x_1 = 1$, $x_2 = 1.4$, $x_3 = 1.41$, ... приближенных значений $\sqrt{2}$.

> **Определение 1**. Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ по некоторому закону поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество вещественных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ $x_n, \ldots$ называется ***числовой последовательностью*** или просто ***последовательностью***.

Другими словами, числовую последовательность можно определить как множество пар чисел $(n; x_n)$, в которых первое число принимает последовательно значения $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$.

Числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ называются элементами (или членами) последовательности.

Символ x_n – общим элементом (n-членом) последовательности; а число n – его номером.

Сокращенно последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ будем обозначать символом $\{x_n\}$.

Последовательность считается ***заданной***, если указано правило, по которому каждому значению аргумента n (натуральному числу) поставлено в соответствие единственное значение x_n. Для задания последовательности достаточно знать ее общий член, ибо, зная номер члена последовательности, всегда можно найти и сам член.

Последовательности могут быть заданы посредством ***описания*** их словами.

Существует также ***реккурентный способ*** задания последовательности, когда последующий член выражен через один или несколько предыдущих членов последовательности.

Например, следующие последовательности заданы реккурентно:

$$1)\ a_1=0,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+1);\ 2)\ b_1=2,\ b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{2}{b_n}\right).$$

При любом способе задания последовательности каждый ее член определяется номером занимаемого места. Поэтому возможно такое определение последовательности.

> **Определение 2**. Функция f, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется последовательностью.

Значения $f(n)$ функции f называются членами последовательности. Их принято обозначать символом элемента того множества, в которое идет отображение, снабжая символ соответствующим индексом аргумента, $x_n=f(n)$. Саму последовательность $\{x_n\}$ называют последовательностью элементов множества X.

По самому определению, последовательность содержит бесконечное число элементов: любые два ее элемента отличаются, по крайней мере, своими номерами.

Последовательности $\{x_n+y_n\}, \{x_n-y_n\}, \{x_n\cdot y_n\}, \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ называются соответственно ***суммой***, ***разностью***, ***произведением*** и ***частным*** двух последовательностей: $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ (для частного $n\neq 0$).

> **Определение.** Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если $\exists\, M>0$ такое, что $\forall\, n$: $|x_n|\le M$.

С геометрической точки зрения это означает, что все члены последовательности находятся в некоторой окрестности (M-окрестности) точки $x=0$.

> **Определение.** Последовательность $\{x_n\}$ называется ***неограниченной***, если $\forall\, M>0\ \exists\, n$: $|x_n|>M$.
>
> **Определение.** Число $a\in\mathrm{R}$ называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, N\in\mathrm{N}$ такой номер, что $\forall\, n>N$ выполняется неравенство $|x_n-a|<\varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

2.2. Геометрический смысл предела последовательности

Геометрически последовательность изображается на координатной прямой в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим элементам последовательности.

Изобразим члены последовательности $\{x_n\}$ точками числовой оси (рис. 2.1).

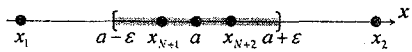


Рис. 2.1.

Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, равносильное двойному неравенству

$$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon,$$

означает, что точка x_n находится в ε - окрестности точки a.

Таким образом, число a есть предел последовательности $\{x_n\}$,

- если какова бы ни была ε – окрестность точки a, найдется такой номер N, что все точки x_n с номерами $n > N$ будут содержаться в этой окрестности точки a, т. е. в интервале $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$;
- вне этого интервала может оказаться лишь конечное множество точек данной последовательности.

2.3. Свойства предела последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***сходящейся***, если она имеет (конечный) предел.
Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся***.

Теорема 1.*Сходящаяся последовательность имеет только один предел.*

Теорема 2 (необходимое условие сходимости последовательности). *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Примеры решения задач

Пример 2.1. Написать первые десять членов последовательности, если ее общий член $x_n = \dfrac{n}{n+2}$.

▲ Вычисляя значение дроби $\frac{n}{n+2}$ при значениях n, равных 1, 2, 3, ..., 10, получим:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{6}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{8}{10}$	$\frac{9}{11}$	$\frac{10}{12}$

Вообще же последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{n+2}$ запишется так: $\frac{1}{3}; \frac{2}{4}; \frac{3}{5}; ...; \frac{n}{n+2}; ...$ ▼

Пример 2.2. По данным первым членам последовательности $\frac{6}{7}; \frac{9}{10}; \frac{14}{15}; \frac{21}{22}; \frac{30}{31}; ...$ написать ее общий член.

▲ Прежде всего, отметим, что заданием нескольких первых членов последовательности не определяется вся последовательность. Однако условимся считать, что как написанные члены последовательности, так и все следующие за ними составлены по одному и тому же закону соответствия между натуральными числами и членами последовательности.

В нашем случае нетрудно усмотреть, что числитель каждой дроби равен квадрату номера плюс пять

$$\frac{6}{7} = \frac{1^2+5}{(1^2+5)+1}; \frac{9}{10} = \frac{2^2+5}{(2^2+5)+1}; \frac{14}{15} = \frac{3^2+5}{(3^2+5)+1};$$

$$\frac{21}{22} = \frac{4^2+5}{(4^2+5)+1}; \frac{30}{31} = \frac{5^2+5}{(5^2+5)+1}; ....$$

Т.е. числитель равен n^2+5, а знаменатель каждой дроби на единицу больше числителя, т.е. равен n^2+6. Итак, $x_n = \frac{n^2+5}{n^2+6}$. ▼

Пример 2.3. Доказать, что последовательность с общим членом $x_n = \frac{n}{n+1}$ имеет предел, равный 1.

▲ Выберем произвольное число ε и покажем, что для него можно определить такое натуральное число N, что для всех номеров $n > N$ будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, в котором надо взять $a = 1$; $x_n = \frac{n}{n+1}$, т.е. неравенство $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$.

После приведения под знаком модуля к общему знаменателю, получим

$$\left|\frac{n-n-1}{n+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-1}{n+1}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<\varepsilon .$$

Из последнего неравенства следует, что $n+1>\frac{1}{\varepsilon}$, $n>\frac{1}{\varepsilon}-1$.

Замечание. Если $a<b$, то $\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$.

Значит, если номер N больше, чем число $\frac{1}{\varepsilon}-1$, то неравенство $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ будет выполняться. Теперь надо решить вопрос о числе N, о котором идет речь в определении. За число N можно принять наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon}-1$. Наибольшее целое число, содержащееся в числе x, обозначается символом $[x]$ (или $E(x)$).

На основании этого наибольшее целое число, содержащееся в числе $\frac{1}{\varepsilon}-1$, надо обозначить так: $\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$. Итак, можно принять $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$ (предполагается, что $\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]>0$, иначе N не будет натуральным числом и его надо брать равным 1).

Заключение: По произвольному заданному положительному числу ε мы нашли такое натуральное число N, что для всех номеров $n>N$ неравенство $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$ действительно выполняется, а эти и доказано, что 1 является пределом последовательности с общим членом $x_n=\dfrac{n}{n+1}$.

Теперь приведенные вычисления проиллюстрируем числовым примером. Пусть, например, $\varepsilon=\frac{1}{100}$.

Тогда при значении $\varepsilon=\frac{1}{100}$ получаем из выражения $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]$

$$N=\left[\frac{1}{\frac{1}{100}}-1\right]=[100-1]=99;\ N=99.$$

Таким образом, для членов последовательности с номером большим, чем 99, выполняется неравенство $|1-x_n|<\frac{1}{100}$.

Пусть $n=97$; тогда, так как $x_n=\dfrac{n}{n+1}$, $x_{97}=\dfrac{97}{98}$,

$$\left|1-\tfrac{97}{98}\right| = \tfrac{1}{98}, \text{ а } \tfrac{1}{98} > \tfrac{1}{100};$$

если $n=98$, то

$$x_{98} = \tfrac{98}{99}, \text{ и } \left|1-\tfrac{98}{99}\right| = \tfrac{1}{99};\ \tfrac{1}{99} > \tfrac{1}{100}.$$

Из этих расчетов видно, что когда номер n члена последовательности меньше 99 $(n=97,\ n=98)$, неравенство $|1-x_n| < \frac{1}{100}$ не выполняется: вместо того чтобы $|1-x_n|$ была меньше $\frac{1}{100}$, мы получили, что $|1-x_n| > \frac{1}{100}$.

Если взять $n > 99$, т.е., например, $n = 100$, тогда $x_n = \frac{100}{101}$ и

$$|1-x_n| = \left|1-\tfrac{100}{101}\right| = \left|\tfrac{101-100}{101}\right| = \tfrac{1}{101},$$

а $\frac{1}{101} < \frac{1}{100}$. Неравенство $|1-x_n| < \frac{1}{100}$ будет выполняться для всех номеров n, которые больше, чем 99. Так как $\varepsilon = \frac{1}{100}$, а $n > 99$, то все члены последовательности, начиная с сотого, будут лежать на интервале $\left(1-\frac{1}{100};\, 1+\frac{1}{100}\right)$, т.е. на интервале (0.99; 1.01).

(Теперь возьмите для числа ε значение, меньшее $\frac{1}{100}$, например, $\varepsilon = \frac{1}{1000}$. Найдите N и убедитесь, что оно увеличится).

Полученный результат можно записать так: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1.$

Иначе можно сказать, что последовательность $\{x_n\} = \dfrac{n}{n+1}$ сходится к 1. ▼

Пример 2.4. Доказать, что число $a=1$ является пределом последовательности с общим членом $x_n = \dfrac{2^n-1}{2^n+1}$.

▲ Повторим подробно все рассуждения, приведенные в предыдущей задаче. Зададим произвольное сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$ и покажем, что для него можно найти такое число $N(\varepsilon)$, что для всех членов последовательности с номерами $n > N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{2^n-1}{2^n+1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Для отыскания числа $N(\varepsilon)$ решим полученное неравенство относительно n. Так как

$$\left|\frac{2^n-1}{2^n+1}-1\right|=\left|\frac{-2}{2^n+1}\right|=\frac{2}{2^n+1},$$

то от этого неравенства переходим к неравенству

$$\frac{2}{2^n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow 2^n+1>\frac{2}{\varepsilon} \Leftrightarrow 2^n>\frac{2}{\varepsilon}-1 \Leftrightarrow n\ln 2>\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right) \Leftrightarrow n>\frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right).$$

Из последнего неравенства следует, что за число $N(\varepsilon)$ можно принять число, удовлетворяющее условию

$$N(\varepsilon)\geq\left[\frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)\right].$$

Таким образом, при произвольном числе $\varepsilon>0$ найдено число $N(\varepsilon)$, такое, что для любого $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $\left|\frac{2^n-1}{2^n+1}-1\right|<\varepsilon$. Это и означает (по определению предела последовательности), что $a=1$ – предел рассматриваемой последовательности.

Придавая ε конкретное значение в правой части неравенства

$$N(\varepsilon)\geq\left[\frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{2}{\varepsilon}-1\right)\right],$$

можно указать соответствующий номер, начиная с которого все члены последовательности будут находиться в ε - окрестности точки $a=1$.

Например, если $\varepsilon=0.01$, то $\frac{1}{\ln 2}\ln\left(\frac{2}{0.01}-1\right)\approx 7.64$.

Следовательно, начиная с номера $n>7.64$, т.е. со значения $n=8$,

$$x_n\in(0.99;1.01).$$

В самом деле, $x_8=\frac{2^8-1}{2^8+1}=\frac{255}{257}\approx 0.9922$ и $x_8\in(0.99;1.02)$, но $a_7\approx 0.9845$ и $a_7\notin(0.99;1.01)$. ▼

Замечание. В решенных двух задачах мы находили наименьший номер N, фигурирующий в определении предела последовательности, такой, что, начиная с него, неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$ выполняется. Однако необходимо уяснить, что

1) если это неравенство выполняется, начиная с номера N, то оно будет выполняться и подавно при всех номерах N_1, больших, чем N;

2) заданием числа ε номер N определяется неоднозначно и

3) для доказательства того, что $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = a$, вовсе нет необходимости среди всех номеров N искать наименьший.

Так в примере 2.3, установив, что неравенство $\left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$ выполняется для всех $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, мы могли дальше не вести никаких рассуждений.

Пример 2.5. Доказать, что последовательность $3; 3^2; 3^3; 3^4; \ldots; 3^n; \ldots$ не имеет предел.

▲ Мы докажем требуемое, если установим, что общий член этой последовательности $x_n = 3^n$ превзойдет любое наперед заданное число. Пусть M такое число. Возьмем $n > M - 1$. Тогда $n + 1 > M$; $3^n = (1+2)^n \geq 1 + 2n$, и подавно $3^n > n + 1$, или $3^n > M$. Тем самым показано, что 3^n может превзойти любое число M. Если бы существовал предел переменной $x_n = 3^n$, и был бы равен a, то для любого $\varepsilon > 0$ можно было бы подобрать такое N, что при номерах $n > N$ выполнялись бы неравенства

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \text{ т.е. } a - \varepsilon < 3^n < a + \varepsilon,$$

а это противоречит доказанному утверждению, так как 3^n при $n > M - 1$ превзойдет любое число M, а тем самым и число $a + \varepsilon$, меньше которого оно должно оставаться. Это противоречие и доказывает, что последовательность $\{3^n\}$ предела не имеет. Этот пример иллюстрирует утверждение: ***не всякая последовательность имеет предел.*** ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Выписать несколько первых членов последовательности, общий член которой а) $x_n = 1$; б) $x_n = 2n - 1$; в) $x_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$; г) $x_n = (-1)^{n+1} 2^n$.

Ответ: а) $1, 1, 1, \ldots$; б) $1, 3, 5, 7, \ldots$; в) $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$;
г) $2, -4, 8, -16, \ldots$.

2. Доказать, что общий член последовательности, первый член которой единица, а каждый последующий, начиная со второго, на единицу больше

удвоенного предшествующего члена, определяется формулой $x_n = 2^n - 1$.
Указание. Доказательство провести методом математической индукции.
3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{2n+1}=\frac{5}{2}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-2}=\frac{1}{2}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n^2-1}=0$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2+n+1}=1$; ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-n-1}{2n^2+n-1}=\frac{1}{2}$; з) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}=1$;

е) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{n}+2}=\frac{1}{3}$; и) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2+(-1)^n}{n}=0$; к) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)=0$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определения: а) последовательности; б) ограниченной и неограниченной последовательности; в) предела последовательности. Дайте геометрическую интерпретацию этих определений.
2. Покажите на примере что номер N, фигурирующий в определении предела последовательности, зависит, вообще говоря, от значения ε.
3. Какая последовательность называется: а) сходящейся; б) расходящейся.
4. Пусть последовательность сходится. Является ли сходящейся последовательность, которая получается из исходной последовательности, если:

а) из нее удалить конечное число членов, а оставшиеся заново перенумеровать в порядке их следования?

б) к ней добавить конечное число членов, перенумеровав члены последовательности в порядке их следования?

в) в ней изменить произвольным образом конечное число членов?

5. Сформулируйте необходимое условие сходимости последовательности.
6. Сформулируйте определения: а) бесконечно малой последовательности; б) бесконечно большой последовательности. Дайте геометрическую интерпретацию этих определений.
7. а) Является ли бесконечно малая последовательность ограниченной?

б) Является ли бесконечно большая последовательность ограниченной? сходящейся?

в) Является ли любая ограниченная последовательность бесконечно большой?

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Основные теоретические сведения

3.1. Величины постоянные и переменные. Функция. Область определения функции. Свойства функций. График функции

Постоянные величины. *Величина называется постоянной, если она всегда или только в условиях данной задачи сохраняет одно и то же числовое значение.*

Параметром *называется такая постоянная величина, которая лишь в условиях данной задачи (данного исследования) сохраняет постоянное, вполне определенное числовое значение, но с изменением условий задачи принимает уже другое, хотя определенное числовое значение.*

Переменные величины. *Величина называется переменной, если она в условиях данной задачи принимает различные числовые значения.*

Независимые переменные. *Две переменные величины называются независимыми, если значения, принимаемые одной из них, не зависят от значений, принимаемых другой.*

Например, в формуле для определения объема цилиндра $V = \pi R^2 H$ величины R и H – независимые переменные, так как значения, принимаемые высотой H цилиндра, не зависят от значений R, которые принимает радиус цилиндра.

Рассмотрим множество X вещественных чисел x и множество Y элементов y.

Определение. Если каждому элементу $x \in X$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное вещественное число $y \in Y$, то говорят, что ***на множестве X задана функция*** и пишут

$$y = f(x) \text{ или } y = y(x), x \in X .$$

Введенную таким образом функцию называют ***числовой***.

В этом случае множество X называется ***областью определения*** функции; символ x его общего элемента – ***аргументом функции*** или ***независимой переменной***.

Частное значение функции. Соответствующий конкретному значению $x_0 \in X$ аргумента x элемент $y_0 \in Y$ называют частным значением функции при значении аргумента $x = x_0$ и обозначают *через* $f(x_0)$ или $y(x_0)$.

При изменении аргумента значения $y = f(x) \in Y$, вообще говоря, меняются в зависимости от значений x. По этой причине величину $y = f(x)$ часто называют ***зависимой переменной***.

Определение частных значений функции. Для того чтобы найти частное значение функции по заданному частному значению аргумента, надо в аналитическое выражение функции подставить вместо аргумента его частное значение.

Примеры решения задач

Пример 3.1. Дана целая рациональная функция $f(x)=3x^2-2x-1$. Вычислить: а) $f(2)$; б) $f(-2)$; в) $f(0)$; г) $f(a+2)$; д) $f(-x)$.

▲ При вычислении будем использовать схему Горнера, для этого представим данную функцию в виде $f(x)=x(3x-2)-1$.

а) $f(2)=2(3\cdot 2-2)-1=2(6-2)-1=2\cdot 4-1=8-1=7$.

б) $f(-2)=-2\big(3\cdot(-2)-2\big)-1=-2(-6-2)-1=-2\cdot(-8)-1=16-1=15$.

в) $f(0)=0\cdot(3\cdot 0-2)-1=-1$.

г) $f(a+2)=(a+2)\big(3(a+2)-2\big)-1=(a+2)(3a+6-2)-1=$

$=(a+2)(3a+4)-1=3a^2+10a+8-1=3a^2+10a+7$.

д) $f(-x)=-x\big(3(-x)-2\big)-1=-x(-3x-2)-1=3x^2+2x-1$. ▼

Пример 3.2. Дана дробная рациональная функция $f(x)=\dfrac{4x^2-7x+2}{3x^2+5}$.

Вычислить: а) $f(2)$; б) $f(0)$; в) $f(a)$; г) $f\left(\dfrac{1}{a^2}\right)$.

▲ Представим данную функцию в виде $f(x)=\dfrac{x(4x-7)+2}{3x^2+5}$.

а) $f(2)=\dfrac{2(4\cdot 2-7)+2}{3\cdot 2^2+5}=\dfrac{2+2}{12+5}=\dfrac{4}{17}$;

б) $f(0)=\dfrac{0\cdot(4\cdot 0-7)+2}{3\cdot 0+5}=\dfrac{2}{5}$; в) $f(a)=\dfrac{4a^2-7a+2}{3a^2+5}$;

г) $f\left(\dfrac{1}{a^2}\right)=\dfrac{\dfrac{1}{a^2}\left(4\cdot\dfrac{1}{a^2}-7\right)+2}{3\left(\dfrac{1}{a^2}\right)^2+5}=\dfrac{\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{4-7a^2}{a^2}+2}{\dfrac{3}{a^4}+5}=\dfrac{4-7a^2+2a^4}{3+5a^4}$. ▼

Пример 3.3. Дана дробно-линейная функция $f(x)=\dfrac{5x+1}{2-x}$. Найти:

а) $f(3x)$; б) $f(x^3)$; в) $3f(x)$; г) $\big(f(x)\big)^3$.

▲ а) Чтобы найти $f(3x)$ следует в выражении для функции $f(x)$ заменить x на $3x$. Получаем

$$f(3x)=\frac{5\cdot 3x+1}{2-3x}=\frac{15x+1}{2-3x}.$$

б) Заменяя в выражении для функции $f(x)$ аргумент x на x^3, получим

$$f(x)=\frac{5x^3+1}{2-3x^3}.$$

в) Следует отличать $f(3x)$ от $3f(x)$, $f(x^3)$ от $(f(x))^3$.

Было найдено в а), что $f(3x)=\dfrac{15x+1}{2-3x}$, а $3f(x)=3\dfrac{5x+1}{2-x}=\dfrac{15x+3}{2-x}$.

г) $(f(x))^3=\left(\dfrac{5x+1}{2-x}\right)^3=\dfrac{125x^3+75x^2+15x+1}{8-12x+6x^2-x^3}$. ▼

Пример 3.4. Найти корни x_1 и x_2 функции $f(x)=x^2+10x+9$ и вычислить ее частные значения при значении x, равном среднему арифметическому и среднему геометрическому этих корней.

Корнями функции называются значения аргумента, которые обращают ее в нуль.

▲ Определим корни функции $f(x)$, приравняв ее нулю:

$$x^2+10x+9=0 \Leftrightarrow (x_1=-9)\vee(x_2=-1).$$

Среднее арифметическое корней x_1 и x_2 равно их полусумме

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-9+(-1)}{2}=-5,$$

а среднее геометрическое – квадратному корню из их произведения

$$\sqrt{x_1x_2}=\sqrt{(-9)(-1)}=\sqrt{9}=3.$$

Искомые частные значения функции $f(x)$ будут:

$$f(-5)=-5(-5+10)+9=-16;\ f(3)=3(3+10)+9=48.$$ ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Указать, какие из величин, входящих в формулы, являются переменными, постоянными, параметрами.

1. Период малых колебаний T математического маятника вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$, где ℓ – длина маятника, g – ускорение силы тяжести.

   Ответ: 2 и π – постоянные; g – параметр (значение этой величины постоянно только в данной точке земной поверхности, но изменяется при переходе от одной точки земной поверхности к другой); ℓ и T – величины переменные.

2. Согласно закону Бойля-Мариотта, в изометрическом процессе $pV = C$, где p – давление газа, а V – занимаемый газом объем.

   Ответ: Величины p и V – переменные; величина C – параметр (так как она сохраняет постоянное значение только для данного газа и для данной температуры).

3. Объем усеченного конуса вычисляется по формуле

$$V = \tfrac{1}{3}\pi H\left(R^2 + Rr + r^2\right).$$

Ответ: Величины π и 3 – постоянные; V, H, R и r – переменные величины.

4. Дана целая рациональная функция $f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1$. Вычислить:

   а) $f(-1)$; б) $f(2)$; в) $f\left(\tfrac{1}{2}\right)$; г) $f\left(\dfrac{a}{2}\right)$; д) $f\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)$.

   Ответ: а) -5; б) 13; в) $-\dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{a^3 - a^2 + 2a - 4}{4}$; д) $\dfrac{a^3 - 7a^2 + 3a - 5}{(a+1)^3}$.

5. Дана функция $f(x) = 5^{\frac{1}{x}-1}$. Вычислить:

   а) $f(1)$; б) $f(2)$; в) $f(-2)$; г) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

   Ответ: а) 1; б) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; в) $\frac{1}{5\sqrt{5}}$; г) 5^{x-1}.

6. Дана функция $f(x) = \dfrac{7 - x^2}{5 - x + x^2}$. Вычислить: а) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ и б) $\dfrac{1}{f(x)}$.

Ответ: а) $\dfrac{7x^2-1}{5x^2-x+1}$; б) $\dfrac{5-x+x^2}{7-x^2}$.

7. $f(x)=\lg\sin x$. Доказать, что $f(a)+f(b)=\lg(\sin a\cdot\sin b)$.

8. Доказать, что если $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$, то $f(-x)=-f(x)$.

9. $f(\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$. Доказать, что $f(2\alpha)=\dfrac{2f(\alpha)}{1-f^2(\alpha)}$.

10. Доказать, что если $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$, то $f(-x)=f(x)$.

Множество значений функции. Множество

$$f(X)\Leftrightarrow\{y\in Y:\ \exists x((x\in X)\wedge(y=f(x)))\}$$

всех значений функции, которые она принимает на элементах множества X, будем называть ***множеством значений*** или ***областью значений функции***.

Замечание. В зависимости от природы множеств X, Y термин «функция» в различных отделах математики имеет ряд полезных синонимов: ***отображение***, ***преобразование***, ***морфизм***, ***оператор***, ***функционал***. Отображение – наиболее распространенный из них, и мы его тоже часто будем употреблять.

Две функции f_1, f_2 считаются ***совпадающими*** или ***равными***, если они имеют одну и ту же область определения X и на любом элементе $x\in X$ значения $f_1(x)$, $f_2(x)$ этих функций совпадают. В этом случае пишут $f_1=f_2$.

Задание функции. Функция $y=f(x)$ считается заданной, если:

1) Указана совокупность всех рассматриваемых значений аргумента x.

2) Указан закон, который позволяет по заданному значению аргумента x находить соответствующее ему значение функции y.

Итак, задание функции (отображения) предполагает указание тройки (X,f,Y), где

X – отображаемое множество или область определения функции;

Y – множество, в которое идет отображение, или область прибытия функции.

f – Закон, по которому каждому элементу $x \in X$ сопоставляется определенный элемент $y \in Y$.

В определении функции ничего не сказано о том, как устанавливается соответствие между числами $x \in X$ и $y \in Y$. В зависимости от того, как задано это соответствие, применяют различные способы задания функции:

- аналитический способ (с помощью формулы),
- графический способ,
- табличный способ.

Функция, заданная разными формулами для различных значений аргумента, называется ***кусочно-аналитической***.

Например, $y = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \geq 0, \\ 0, \text{ если } x < 0. \end{cases}$ – кусочно-аналитическое задание функции (эта функция может быть и одной формулой $y = x + |x|$).

Функция знака числа x, $y = \operatorname{sign} x$, задается так: $y = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0. \end{cases}$ Ее график изображен на рис. 3.1.

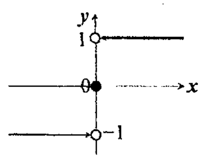


Рис. 3.1

Если задано уравнение $F(x; y) = 0$, связывающее функцию y и аргумент x, то говорят, то функция y задана ***неявно***.

Например, уравнение $x - (x^2 + 1)y = 3$ является неявным заданием функции y.

Если разрешить это уравнение относительно y, то получим $y = \dfrac{x-3}{x^2+1}$ – явное аналитическое задание функции y.

Замечание. Обычно выражение y через x при неявном задании функции не так просто, как в приведенном примере. Но при решении многих задач и не требуется выражать функцию явно.

Область определения функции – совокупность всех значений аргумента, при которых функция принимает вещественные и конечные значения. Для отыскания области определения функции надо знать условия существования функций различного вида, уметь решать неравенства и системы неравенств.

При нахождении области определения элементарной функции, заданной формулой $y = f(x)$, нужно обращать внимание на следующие элементы формулы:

1) на знаменатели дробных выражений – функция будет определена только для тех значений x, при которых знаменатели отличны от нуля;

2) на радикалы четной степени – функция не будет определена только для тех значений x, при которых их подкоренные выражения будут неотрицательны;

3) на трансцендентные функции $\log_a x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x, \arcsin x, \arccos x$, которые определены не всюду.

Таблица условий существования различных функций

№	Вид функции	Существенный признак для области определения	Условия существования функции
1	$y = P_n(x)$	многочлен	существует при любых x
2	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	есть знаменатель	$g(x) \neq 0$
3	$y = \sqrt[2n]{g(x)}$	корень четной степени в числителе	$g(x) \geq 0$
4	$y = \dfrac{f(x)}{\sqrt[2n]{g(x)}}$	корень четной степени в знаменателе	$g(x) > 0$
5	$y = \log_a g(x)$	логарифм	$g(x) > 0$
6	$y = \arcsin x$	арксинус (арккосинус)	$-1 \leq g(x) \leq 1$

Примеры решения задач

Пример 3.5. Найти область определения функций:

$$y = \lg(x+3),\ y = \sqrt{5-2x},\ y = \frac{1}{x^2-1}.$$

Решение приведено в следующей таблице.

Функция	Условия существования	X
$y=\lg(x+3)$	$x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$	$-3<x<\infty$
$y=\sqrt{5-2x}$	$5-2x\ge 0 \Leftrightarrow x\le \frac{5}{2}$	$-\infty<x\le\frac{5}{2}$
$y=\dfrac{1}{x^2-1}$	$x^2-1\ne 0 \Leftrightarrow (x\ne -1)\vee(x\ne 1)$	$-\infty<x<-1$ $-1<x<1$ $1<x<\infty$

Пример 3.6. Найти область определения функций:

а) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$; б) $\dfrac{1}{x^2+1}$; в) $y=\arcsin(x-2)$.

▲ а) Функция $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$ существует, если $x^2-4x>0 \Leftrightarrow x(x-4)>0$.

Решим это неравенство методом интервалов.

1) Отложим на оси Ox нули функции $f(x)=x(x-4)$; $x_1=0, x_2=4$.

2) Определим знак $f(x)$ в произвольной точке: $f(5)=5(5-4)=5>0$.

3) Отметим чередование знаков;

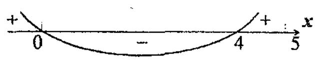


Рис. 3.2.

По рисунку записываем область определения функции:

$$-\infty<x<0,\ 4<x<\infty.$$

Замечание. ***Дальше все операции метода интервалов, кроме рисунка, следует выполнять в уме.***

б) Функция $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ существует при любых значениях x, так как знаменатель нигде в нуль не обращается $(-\infty<x<\infty)$.

в) Функция $y=\arcsin(x-2)$ существует, если $-1\le x-2\le 1$. Область определения функции $-1\le x\le 3$. ▼

Указание. Если требуется найти область определения алгебраической суммы нескольких функций, то надо поступить так: 1) Определить область определения каждой из слагаемых функций.

2) Определить часть, общую для всех найденных областей. Эта общая часть и будет искомой.

Это указание распространяется также на произведение нескольких функций и на частное двух функций, причем при определении области определения частного двух функций должны быть исключены точки, в которых знаменатель дроби обращается в нуль.

Пример 3.7. Найти область определения функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{3x-4}} + \arccos\frac{3-2x}{5}.$$

▲ 1) Найдем область определения функции

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{3x-4}},\ 3x-4>0 \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}.$$

2) Найдем область определения функции $f_2(x) = \arccos\frac{3-2x}{5}$.

Функция $f_2(x)$ существует, если

$$-1 \le \frac{3-2x}{5} \le 1 \Leftrightarrow -5 \le 3-2x \le 5 \Leftrightarrow -5-3 \le 3-2x-3 \le 5-3 \Leftrightarrow$$

$$-8 \le -2x \le 2 \big| :(-2) \Leftrightarrow\Leftrightarrow 4 \ge x \ge -1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 4.$$

3) Решим совместно систему $\begin{cases} x > \frac{4}{3} \\ -1 \le x \le 4 \end{cases}$ – это, и будет искомой областью определения. Систему лучше всего решать графически. На числовой оси Ox символически изобразим области, в которых удовлетворяются все неравенства системы

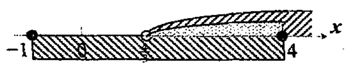


Рис. 3.3.

Область, в которой одновременно удовлетворяются все неравенства $\frac{4}{3} < x \le 4$. ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найти области определения функций:

№	$f(x)$	*Ответ*
1	$\dfrac{x-2}{2x-1}$	$\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; \infty\right)$
2	$\dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$	$(-1; 1) \cup (1; \infty)$
3	$\sqrt{1-2x} + 3\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$	$\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$
4	$\sqrt{4-x^2} + \dfrac{1}{x}$	$[-2; 0) \cup (0; 2]$
5	$\lg(3x-1) + 2\lg(x+1)$	$\left(\frac{1}{3}; \infty\right)$
6	$\dfrac{1}{xe^x}$	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
7	$\sqrt{\dfrac{x}{2-x}} - \sqrt{\sin x}$	$[0; 2)$
8	$\dfrac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$	$(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

Найти область определения функций и изобразить их на числовой оси:

№	$f(x)$	*Ответ*
9	$\sqrt{16-x^2} + \sqrt[3]{2x+3}$	$[-4; 4]$
10	$\dfrac{4x-7}{x^2-5x+6}$	$(-\infty; 2) \cup (2; 3) \cup (3; \infty)$
11	$\dfrac{1}{\sqrt{16-x^2}}$	$(-4; 4)$
12	$\sin^2 x$	$(-\infty; \infty)$

Четные и нечетные функции. Функция, определенная в симметричной относительно начала координат области $-a < x < a)$, называется ***четной***, если для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(x) = f(-x)$.

Функция, определенная в симметричной относительно начала координат области $(-a < x < a)$, называется ***нечетной***, если для любого значения x из области определения выполняется равенство $f(x) = -f(-x)$.

Функции, ни четные и ни нечетные, называются функциями ***общего вида***.

Свойства четных и нечетных функций:

1. Область определения четной и нечетной функций симметрична относительно начала координат.

2. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

3. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

4. Сумма, разность, произведение и частное двух четных функций с одной и той же областью определения (знаменатель дроби при этом должен быть отличен от нуля) также являются четными функциями.

5. Сумма и разность двух нечетных функций (с одной областью определения) есть нечетные функции.

6. Произведение и частное двух нечетных функций являются четными функциями.

7. Произведение и частное четной и нечетной функции есть нечетные функции.

При построении графиков четных и нечетных функций достаточно построить только ту часть графика, которая лежит в правой полуплоскости (при $x \geq 0$), а затем отобразить ее симметрично относительно оси ординат (для четной функции) или относительно начала координат (для нечетной функции).

Периодические функции. Функция $f(x)$ называется ***периодической***, если существует такое число $T > 0$ (не зависящее от x), что:

1) $x+T$ и $x-T$ также входят в область определения функции $f(x)$;

2) для всех x из области определения функции выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$;

3) среди всех таких T есть наименьшее.

Это наименьшее число T называется ***периодом*** функции.

Свойства периодических функций:

1. Область определения периодической функции симметрична относительно начала координат.

2. Для периодической функции $y = f(x)$ справедливо равенство

$$f(x+kT) = f(x),$$

где T – период функции; число $k \in Z$; в частности, $f(x-T) = f(x)$.

3. Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y = f(ax)$ также периодическая с периодом $\frac{T}{|a|}$ (при $a \neq 0$).

4. Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y = f(x+a)$ также периодическая с периодом T.

При построении графика периодической функции достаточно построить часть графика на интервале, равном одному периоду, а затем продолжить его на всю область определения функции.

Примеры решения задач

Пример 3.8. Определить, какая из данных функций четная или нечетная: а) $y = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2\sin x$; б) $y = 2^x + 2^{-x}$; в) $y = |x| - 5e^{x^2}$; г) $y = x^2 + 5x$.

▲ а) Т.к. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x} + 2\sin x$, то

$$f(-x) = (-x)^2 \cdot \sqrt[3]{-x} + 2\sin(-x) = -x^2 \cdot \sqrt[3]{x} - 2\sin x,$$

т.е. $f(-x) = f(x)$. Следовательно, функция нечетная.

б) Имеем $f(x) = 2^x + 2^{-x}$,

$$f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x,$$

т.е. $f(-x) = f(x)$. Следовательно, функция четная.

в) Здесь $f(x) = |x| - 5e^{x^2}$,

$$f(-x) = |-x| - 5e^{(-x)^2} = |x| - 5e^{x^2},$$

т.е. $f(-x) = f(x)$. Следовательно, функция четная.

г) Здесь $f(x) = x^2 + 5x$, $f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) = x^2 - 5x$.

Таким образом, функция не является ***ни четной, ни нечетной*** (или ***функцией общего вида***). ▼

Пример 3.9. Исследовать на периодичность следующие функции:

а) $y = x^2 + x - 1$; б) $y = 2$; в) $y = \sin\left(\frac{3}{2}x\right) + 1$; г) $y = \sin x - \cos x$;

д) $y = \sin 2x - 2\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$; е) $y = \cos^2 x$; ж) $y = x - [x]$.

▲ а) Предположим, что данная функция периодическая, тогда должно существовать такое число T, что $(x+T)^2 + (x+T) - 1 = x^2 + x - 1$.

Вычислим T, разрешая это уравнение относительно T:

$$x^2 + 2Tx + T^2 + x + T - 1 = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow T^2 + (2x+1)T = 0 \Leftrightarrow (T_1 = 0) \vee (T_2 = -2x - 1)$$

Так как ни одно из полученных значений T_1, T_2 не удовлетворяет определению периодической функции (период не должен зависеть от x и не должен равняться нулю), то функция не периодическая.

б) Равенство $f(x+T)=f(x)$ выполняется для всех x и для всех T, но среди T нет наименьшего числа. Функция непериодическая.

в) Предположим, что T – период данной функции, тогда для всех x должно выполняться равенство $\sin\frac{3}{2}(x+T)+1=\sin\left(\frac{3}{2}x\right)+1$. Из последнего равенства можно найти T:

$$\sin\left(\tfrac{3}{2}x+\tfrac{3}{2}T\right)-\sin\left(\tfrac{3}{2}x\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2}x+\tfrac{3}{2}T-\tfrac{3}{2}x\right)\cos\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{3}{2}x+\tfrac{3}{2}T+\tfrac{3}{2}x\right)=0.$$

Если $\cos\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}T+\frac{3}{2}x\right)=0$, то $\cos\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}T\right)=0$, откуда

$$\tfrac{3}{4}x+\tfrac{3}{4}T=\tfrac{1}{2}\pi+\pi k \ \ (k\in Z) \text{ и } T=\tfrac{2}{3}\pi+\tfrac{4}{3}\pi k-2x.$$

Полученное значение T зависит от x и, следовательно, периодом функции быть не может.

Если $\sin\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}T-\frac{3}{2}x\right)=0$, то $\sin\frac{3}{4}T=0$, откуда $\frac{3}{4}T=\pi k$ $(k\in Z)$ и $T=\frac{4}{3}\pi k$ не зависит от x и принимает наименьшее значение, если $k=3$; следовательно, данная функция периодическая с периодом $\frac{4}{3}\pi$.

г) Воспользуемся тем фактом, что $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

Период функции $y=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ такой же, как у функции $y=\sin x$ (хотя бы потому, что график этой функции получается из графика функции $y=\sin x$ сдвигом на величину $\frac{\pi}{4}$ вправо и растяжением в $\sqrt{2}$ раз вдоль оси Oy). Следовательно, и период исходной функции равен 2π.

д) Пусть T – период функции. Тогда для всех x

$$\sin 2(x+T)-2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x+T)=\sin 2x-2\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x.$$

Следовательно,

$$\sin 2(x+T)-\sin x-2\left(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(x+T)-\operatorname{tg}\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin T\cos(2x+T)-\frac{2\sin\left(\frac{1}{2}T\right)}{\cos\frac{1}{2}(x+T)\cos\left(\frac{1}{2}x\right)}$$

и, значит,

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}T\right)\left(2\cos\left(\tfrac{1}{2}T\right)\cos(2x+T)-\frac{1}{\cos\frac{1}{2}(x+7)}\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right)=0,$$

Для всех x последнее равенство выполняется лишь при условии $\sin\left(\frac{1}{2}T\right)=0$, откуда $T=2\pi k$ $(k\in Z)$. Наименьшее положительное значение $T=2\pi$ — период функции.

е) Периодом функции $y=\cos^2 x$ является число π, поскольку

$$\cos^2 x=\tfrac{1}{2}(1+\cos 2x),$$

а период функции $y=\cos 2x$ равен π.

ж) Функция целой части $y=[x]$ удовлетворяет равенству

$$[x+T]=[x]+T$$

для всех целых T. Значит, $f(x+T)=(x+T)-[x+T]=x+T-[x]-T=f(x)$.

Положительное наименьшее число T равно единице. Следовательно, период данной функции $T=1$ (рис. 3.4).

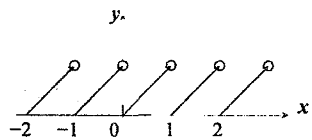


Рис. 3.4.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Доказать четность функций: а) $f(x)=\dfrac{x^2}{2+x^2}$; б) $f(x)=\dfrac{x^4+x^2-1}{2x^2+7}$.

2. Выяснить, является ли функция $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ четной или нечетной.

3. Доказать, что сумма или разность двух четных функций есть функция четная.

4. Доказать, что сумма или разность двух нечетных функций есть функция нечетная.

5. Доказать, что произведение двух четных или двух нечетных функций есть функция четная.

6. Доказать, что произведение функции четной на нечетную функцию есть функция нечетная.

7. Найти наименьший период функций:

а) $y=\sin 2x$; б) $y=\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$; в) $y=\operatorname{tg} 3x$.

Ответ: а) $T=\pi$; б) $T=4\pi$; в) $T=\frac{1}{3}\pi$.

Возрастающие, убывающие функции. Функция $y=f(x)$, определенная на множестве X, называется ***возрастающей***, если для любых x_1 и x_2 множества X из неравенства $x_1<x_2$, следует, что $f(x_1)<f(x_2)$, т.е. функция $y=f(x)$ называется возрастающей, если большему значению аргумента из области определения соответствует большее значение функции (рис. 3.5).

Функция $y=f(x)$, определенная на множестве X, называется ***убывающей***, если для любых x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1<x_2$, следует, что $f(x_1)>f(x_2)$, т.е. функция называется убывающей, если большему значению аргумента из области определения соответствует меньшее значение функции (рис. 3.6).

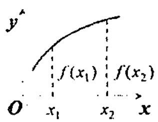


Рис. 3.5

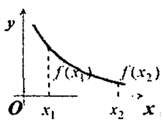


Рис. 3.6

Возрастающие и убывающие функции называются строго ***монотонными***.

Если в определении возрастающей функции строгое неравенство заменить нестрогим неравенством $f(x_1)\le f(x_2)$, то такая функция называется ***неубывающей***.

Если в определении убывающей функции строгое неравенство заменить нестрогим неравенством $f(x_1 \ge f(x_2)$, то такая функция называется ***невозрастающей***.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие функции называются ***монотонными*** функциями.

Свойства монотонных функций:

1. Сумма двух возрастающих (убывающих) функций есть функция возрастающая (убывающая).
2. Если функция $y=f(x)$ возрастающая (убывающая), то функция $y=-f(x)$ убывающая (возрастающая).
3. Если функция $y=f(x)$ возрастающая (убывающая), то функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ убывающая (возрастающая) $(f(x)\ne 0)$.
4. Суперпозиция двух монотонно возрастающих (убывающих) функций монотонно возрастающая функция.

5. Суперпозиция двух функций, из которых одна монотонно возрастающая, а другая монотонно убывающая, является монотонно убывающей функцией.

Ограниченные функции. Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ***ограниченной сверху*** на данном множестве, если существует число M такое, что $f(x) \le M$ для любого $x \in X$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ***ограниченной снизу***, если существует число m такое, что $f(x) > m$ для любого $x \in X$.

Функция $y = f(x)$, определенная на множестве X, называется ***ограниченной на данном множестве***, если существует число $A > 0$ такое, что $|f(x)| < A$ для любого $x \in X$. Ясно, что функция $y = f(x)$ является ограниченной тогда и только тогда, когда она ограничена и сверху, и снизу.

Сумма и произведение ограниченных функций являются также ограниченными функциями.

График функции

Определение. Если в данной плоскости выбрать прямоугольную систему координат Oxy, то ***графиком*** Γ_f функции $y = f(x)$, $x \in X$, называют множество точек плоскости с координатами x и $f(x)$, $x \in X$, т. е.

$$\Gamma_f = \{M(x; y) : x \in X \wedge y = (x)\}.$$

Обычно графиком функции является некоторая кривая на плоскости, а само уравнение $y = f(x)$ называют уравнением этой кривой.

Согласно определению, для построения точного графика функции следует построить все точки, принадлежащие графику, а это, как правило, сделать невозможно, так как, вообще говоря, график функции содержит бесконечное множество точек.

Для построения графика функции $y = f(x)$ обычно поступают так: дают аргументу несколько частных значений и, пользуясь аналитическим выражением функции, вычисляют соответствующие значения функции.

Если, например, взяты значения аргумента

$$x = x_1; x = x_2; x = x_3; \ldots; x = x_n,$$

то соответствующими им значениями функции будут

$$y_1 = f(x_1); y_2 = f(x_2); y_3 = f(x_3); \ldots; y_n = f(x_n).$$

После этого берут прямоугольную систему координат и строят точки

$$M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), M_3(x_3; y_3), \ldots, M_n(x_n; y_n).$$

Полученные точки соединяют плавной кривой. Эта кривая дает эскиз графика функции (приближенный график).

При построении графиков функций применяются следующие приемы:

а) построение «по точкам»;

б) действия с графиками (сложение, вычитание, умножение графиков);

в) преобразования графиков (сдвиг, растяжение).

Приемы, облегчающие построение графика функции:

1. Для того, чтобы по известному графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = f(-x)$, надо поострить линию, симметричную линии $y = f(x)$ относительно оси Oy.

2. Для того, чтобы по известному графику функции $y = f(x)$ построить график функции $y = -f(x)$, надо поострить линию, симметричную линии $y = f(x)$ относительно оси Ox.

3. Если известен график функции $y = f(x)$, то, чтобы построить график функции $y = f(x+a)$, надо перенести график функции $y = f(x)$ вдоль оси Ox на a единиц масштаба вправо, если $a < 0$, и влево, если $a > 0$ (предполагается, что ось Ox направлена вправо).

4. График функции $y = f(x)+b$ получается из графика функции $y = f(x)$ переносом этого графика на b единиц масштаба вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$ (предполагается, что ось Oy направлена вверх).

5. График функции $y = Af(x)$ получается из графика функции $y = f(x)$ умножением всех его ординат на A единиц при сохранении величины соответствующих абсцисс (исходный график, растянутый в A вдоль оси Oy).

6. График функции $y = f(kx)$ $(k > 0)$ получается из графика функции $y = f(x)$ делением всех абсцисс этого графика на k, если $k > 1$, и умножением их на величину $\frac{1}{k}$, если $0 < k < 1$, при сохранении величин соответствующих ординат (график растянутый в $\frac{1}{k}$ раз вдоль оси Ox).

Применяя последовательно эти приемы, можно, зная график функции $y = f(x)$ построить график более сложной функции вида

$$y = Af(kx+a)+b.$$

Примеры решения задач

Пример 3.10. Построить график функции $y = x^2$.

▲ Функция определена при любом значении x. Заданная функция – четная. Её график симметричен относительно оси Oy. Поэтому достаточно построить часть графика для значений $x \geq 0$, а потом дополнить эту часть её «зеркальным отображением» относительно оси Oy. Так будет получен полный график этой функции. Составим таблицу частных значений функции при произвольных значениях $x \geq 0$

x	0	1	2
y	0	1	4

и построим на плоскости точки $O(0;0), A_1(1;1), A_2(2;4)$. Соединим эти точки плавной кривой (рис. 3.7).

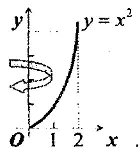


Рис.3.7

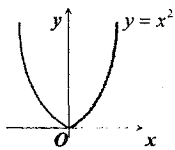


Рис. 3.8

Построим теперь «зеркальным отображением» этой кривой относительно оси Oy и получим полный приближенный график данной функции (рис.3.8). Очевидно, что графиком функции является парабола. ▼

Пример 3.11. По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций: а) $y = -x^2$; б) $y = 2x^2$; в) $y = \frac{1}{2}x^2$.

▲ а) Использовать указание 2 (рис. 3.9).

б) Учесть указание 5. Пользуясь графиком функции $y = x^2$ (рис. 3.8), сохраняя величины абсцисс, надо увеличить (растянуть вдоль оси Oy) все ординаты в 2 раза (рис. 3.10).

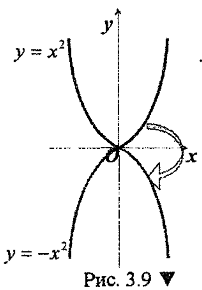


Рис. 3.9 ▼

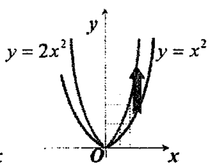


Рис. 3.10

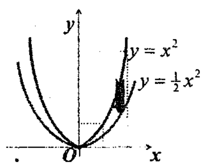


Рис. 3.11

в) Уменьшить (сжать вдоль оси Oy)все ординаты в 2 раза (рис. 3.11).

Пример 3.12. По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций: $y = x^2 + b$ при $b = 2, -3$.

▲ Учесть указание 4. Графики этих функций показаны на рис. 3.12, 3.13.

График функции $y = x^2 + 2$ получается из графика функции $y = x^2$, если этот график поднять на 2 единицы масштаба.

График функции $y = x^2 - 2$ получается из графика функции $y = x^2$, если этот график опустить на 3 единицы масштаба.

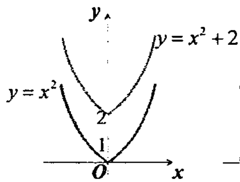


Рис. 3.12

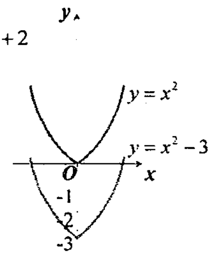


Рис. 3.13 ▼

Пример 3.13. По известному графику функции $y = x^2$ построить графики функций: а) $y = (x+1)^2$, б) $y = (x-2)^2$. $y = (x-2)^2$

▲ а) График функции $y = (x+1)^2$ получается из графика функции $y = x^2$ переносом его на 1 единицу масштаба вдоль оси Ox влево – рис. 3.14,*а* и 3.14,*б* (смотри указание 3).

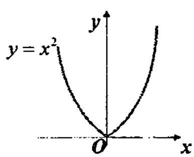


Рис. 3.14,*а*

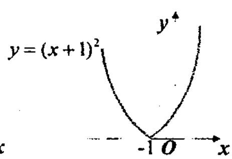


Рис. 3.14,*б*

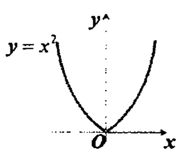


Рис. 3.15,*а*

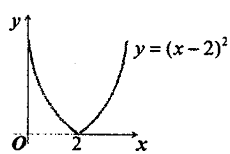


Рис. 3.15,*б*

б) График функции $y=(x-2)^2$ получается из графика функции $y=x^2$ переносом его вдоль оси Ox на 2 единицы масштаба вправо – рис. 3.15,*а* и 3.15,*б* (использовать то же указание). ▼

Пример 3.14. Пользуясь графиком функции $y=x^2$, построить график функции $y=2x^2+4x+6$.

▲ Заданную функцию, выделив полный квадрат в правой части, записать в виде $y=2(x+1)^2+4$ и вести построение в такой последовательности:
1) $y=x^2$; 2) $y=(x+1)^2$; 3) $y=2(x+1)^2$; 4) $y=2(x+1)^2+4$.

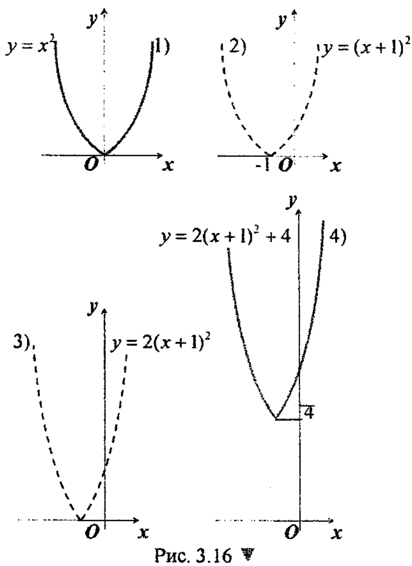


Рис. 3.16 ▼

Вопросы для самопроверки

1. Что называется числовой осью? Как изображается на числовой оси области изменения переменной величины?

2. Дайте определение функции. Что называется областью определения функции?

3. Каковы основные способы задания функции?

4. Какая функция называется периодической?

5. Какие функции называются элементарными?

6. Как, зная график функции $y=f(x)$, можно построить графики функций: $y=f(ax)$, $y=f(ax+b)$, $y=kf(ax+b)+c$.

4. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ
РАСКРЫТИЕ ПРОСТЕЙШИХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Основные теоретические сведения

4.1. Предел функции

Определение (Коши). Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при значении x стремящемся к числу a (или ***в точке*** a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ (которое может быть как угодно малым) существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in X, x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

Отметим, что неравенства $x \neq a, |x-a| < \delta$ можно записать в виде

$$0 < |x-a| < \delta.$$

Используя логические символы, определение можно записать в виде:

$$\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) \Leftrightarrow \left((\forall\, \varepsilon > 0)\ (\exists\, \delta > 0)\ (\forall\, x \in \mathrm{X},\ 0 < |x\text{-}a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\right).$$

Геометрически существование предела $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ означает, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta > 0$, что для всех x, заключенных между $a - \delta$ и $a + \delta$ (может быть, кроме самой точки a) график функции $y = f(x)$ лежит в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$.

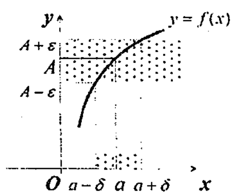


Рис. 4.1

Итак, понятие предела функции дает возможность ответить на вопрос, к чему стремятся значения функции, когда значения аргумента приближаются к a.

Следует иметь в виду, что существует бесконечное множество значений δ, отвечающих заданному числу ε, среди которых есть наибольшее. Однако, если речь идет о проверке равенства $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, то достаточно найти одно значение δ (или доказать его существование), соответствующее произвольному значению $\varepsilon > 0$, заменив неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ более простым, к нему приводящим.

При этом часто бывает удобной замена переменной $t = x - a$.

Примеры решения задач

Пример 4.1. Доказать, пользуясь определением предела функции, что $\lim\limits_{x\to -2}(2x+5) = 1$. Каким должно быть число $\varepsilon > 0$, чтобы для аргумента

$$x \in (-2-\delta; -2+\delta)$$

значения функции $2x+5$ отличались от 1 меньше, чем на 0.1; 0.01; 0.001?

▲ Здесь $f(x) = 2x+5$, $a = -2$, $A = 1$.

Функция $f(x) = 2x+5$ определена всюду, включая точку $a = -2$: $f(-2) = 1$. Возьмем любое число $\varepsilon > 0$.

Для того, чтобы неравенство $|(2x+5)-1| < \varepsilon$ имело место, необходимо выполнение следующих неравенств

$$|(2x+5)-1| < \varepsilon \Rightarrow |2x+4| < \varepsilon \Rightarrow |x-(-2)| < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ (или любое положительное число меньше его), то при $|x-(-2)| < \delta = \frac{\varepsilon}{2}$ будем иметь $|f(x)-1| < \varepsilon$. Это означает, что число $A = 1$ есть предел функции $f(x) = 2x+5$ в точке $a = -2$.

Полагая в формуле $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$: $\varepsilon = 0.1$; $\varepsilon = 0.01$; $\varepsilon = 0.001$, найдем

$$\delta(0.1) = 0.05;\ \delta(0.01) = 0.005;\ \delta(0.001) = 0.0005\ . ▼$$

Пример 4.2. Проверить равенство $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+5}{2x+1} = \dfrac{8}{7}$.

▲ Здесь $f(x) = \dfrac{x+5}{2x+1}$, $A = \dfrac{8}{7}$, $a = 3$. Задавшись некоторым числом $\varepsilon > 0$, составим неравенство $\left|\dfrac{x+5}{2x+1} - \dfrac{8}{7}\right| < \varepsilon$. Элементарными преобразованиями оно приводится к равносильному неравенству $\left|\dfrac{3-x}{2x+1}\right| < \dfrac{7}{9}\varepsilon$. Если верно неравенство, то существует $\delta > 0$ такое, что множество значений x, определяемых условием $|x-3| < \delta$, удовлетворяет этому неравенству. Сделав замену переменной $t = x - 3$, получим два неравенства: $\left|\frac{t}{2t+7}\right| < \frac{7}{9}\varepsilon$ и $|t| < \delta$, из которых первое должно быть следствием второго.

Пусть $|2t| < 1$, т.е. $|t| < \frac{1}{2}$, тогда $|2t+7| > 6$ и $\left|\frac{t}{2t+7}\right| < \frac{|t|}{6}$.

Поэтому если $\frac{|t|}{6} < \frac{7}{9}\varepsilon$, то тем более $\left|\frac{t}{2t+7}\right| < \frac{7}{9}\varepsilon$.

Приняв $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}; \frac{14}{3}\varepsilon\right\}$, нетрудно проверить, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдено $\delta > 0$, зависящее от числа ε, а именно $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}; \frac{14}{3}\varepsilon\right\}$ такое, что для любых $x \neq 3$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x-3| < \delta$, выполняется неравенство $\left|\frac{x+5}{2x+1} - \frac{8}{7}\right| < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+5}{2x+1} = \frac{8}{7}$. ▼

Индивидуальные домашние задания на определение предела последовательности и предела функции

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$).

Задача 2. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2	ВАРИАНТ 3
1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n-2}{2n-1} = \frac{3}{2}$	1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n-1}{2n+1} = 2$	1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{7n+4}{2n+1} = \frac{7}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{2x^2+5x-3}{x+3} = -7$	2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x^2-4x-1}{x-1} = 6$	2. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x^2+5x-2}{x+2} = -7$

ВАРИАНТ 4 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-5}{3n+1}=\dfrac{2}{3}$ 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-14x+6}{x-3}=10$	**ВАРИАНТ 5** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n-1}{n+1}=7$ 2. $\lim\limits_{x\to -0.5}\dfrac{6x^2+x-1}{x+0.5}=-5$	**ВАРИАНТ 6** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^2+1}{3n^2+2}=\dfrac{4}{3}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0.5}\dfrac{6x^2-x-1}{x-0.5}=5$
ВАРИАНТ 7 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{9-n^3}{1+2n^3}=-\dfrac{1}{2}$ 2. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{9x^2-1}{x+\frac{1}{3}}=-6$	**ВАРИАНТ 8** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-3}{2n+1}=2$ 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{x-2}=7$	**ВАРИАНТ 9** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}=-\dfrac{1}{2}$ 2. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2-2x-1}{x+\frac{1}{3}}=-4$
ВАРИАНТ 10 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\dfrac{5n}{n+1}\right)=-5$ 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+8x+1}{x+1}=-6$	**ВАРИАНТ 11** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{1-2n}=-\dfrac{1}{2}$ 2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{x-3}=2$	**ВАРИАНТ 12** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+1}{3n-5}=\dfrac{2}{3}$ 2. $\lim\limits_{x\to 0.5}\dfrac{2x^2+3x-2}{x-0.5}=5$
ВАРИАНТ 13 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2n^2}{n^2+3}=-2$ 2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-5x+1}{x-\frac{1}{3}}=-1$	**ВАРИАНТ 14** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2}{2-n^2}=-3$ $\lim\limits_{x\to -\frac{7}{5}}\dfrac{10x^2+9x-7}{x+\frac{7}{5}}=-19$	**ВАРИАНТ 15** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{3n-1}=\dfrac{1}{3}$ $\lim\limits_{x\to -\frac{7}{2}}\dfrac{2x^2+13x+21}{2x+7}=-\dfrac{1}{2}$
ВАРИАНТ 16 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^3}{n^3-1}=3$ 2. $\lim\limits_{x\to \frac{5}{2}}\dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}=\dfrac{1}{2}$	**ВАРИАНТ 17** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+2n}{1-3n}=-\dfrac{2}{3}$ 2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}}\dfrac{6x^2+x-1}{x-\frac{1}{3}}=5$	**ВАРИАНТ 18** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+15}{6-n}=-5$ $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{6x^2-75x-39}{x+\frac{1}{2}}=-81$
ВАРИАНТ 19 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3-n^2}{4+2n^2}=-\dfrac{1}{2}$	**ВАРИАНТ 20** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-1}{2-3n}=-\dfrac{2}{3}$	**ВАРИАНТ 21** 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n-1}{5n+1}=\dfrac{3}{5}$

$\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{2x^2-21x-11}{x-11}=23$	$\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-24x-5}{x-5}=26$	$\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{2x^2+15x+7}{x+7}=-13$
ВАРИАНТ 22	**ВАРИАНТ 23**	**ВАРИАНТ 24**
1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n-3}{2n+1}=2$ $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+6x-8}{x+4}=-10$	1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2n^2}{2+4n^2}=-\dfrac{1}{2}$ 2. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2-x-1}{3x+1}=-\dfrac{5}{3}$	1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{10n-3}=\dfrac{1}{2}$ 2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{x+5}=-8$
ВАРИАНТ 25	**ВАРИАНТ 26**	**ВАРИАНТ 27**
1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-2n}{3+4n}=-\dfrac{1}{2}$ $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x^2-40x+128}{x-8}=8$	1. $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\dfrac{23-4n}{2-n}=4$ $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}=49$	1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3n}{6-n}=-3$ 2. $\lim\limits_{x\to 0.5}\dfrac{2x^2-5x+2}{x-0.5}=-3$
ВАРИАНТ 28	**ВАРИАНТ 29**	**ВАРИАНТ 30**
1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{n+5}=2$ $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{3x^2+17x-6}{x+6}=-19$	1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2}{4n^2-1}=\dfrac{3}{4}$ 2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+17x-6}{x-\frac{1}{3}}=19$	1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}=-\dfrac{3}{5}$ 2. $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{5}}\dfrac{15x^2-2x-1}{x+\frac{1}{5}}=-8$

Решение типового варианта

1. Дана последовательность $\{x_n\}=\left\{\dfrac{2n+3}{n+1}\right\}$. Доказать, что ее предел $a=2$

▲ В соответствии с определением предела последовательности зададим произвольно сколь угодно малое число $\varepsilon>0$ и покажем, что для него можно найти такое число $N(\varepsilon)$, что для всех членов последовательности с номерами $n>N(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{2n+3}{n+1}-2\right|=\left|\frac{2n+3-2n-2}{n+1}\right|=\left|\frac{1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}.$$

Решим неравенство $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon \Leftrightarrow n+1>\dfrac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$. Следовательно, $N(\varepsilon)=\left\lfloor\frac{1}{\varepsilon}-1\right\rfloor+1$.

Таким образом, существует число $N(\varepsilon)$ такое, что для любого $n>N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n-2|<\varepsilon$. ▼

2. Доказать (найти $\delta(\varepsilon)$), что $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}=8$.

▲ Здесь $f(x)=\dfrac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}$, $a=\dfrac{1}{3}$, $A=8$.

Функция $f(x)=\dfrac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}$ не определена в точке $a=\frac{1}{3}$.

Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и преобразуем выражение $|f(x)-8|$ при $x\neq\frac{1}{3}$ следующим образом

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|=\left|\frac{15x^2-2x-1-8x+\frac{8}{3}}{x-\frac{1}{3}}\right|=\left|\frac{15x^2-10x+\frac{5}{3}}{x-\frac{1}{3}}\right|=$$

$$\left|\frac{15\left(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\right)}{x-\frac{1}{3}}\right|=\left|\frac{15\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{x-\frac{1}{3}}\right|=15\left|x-\frac{1}{3}\right|.$$

Получаем неравенство $15\left|x-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|x-\frac{1}{3}\right|<\frac{\varepsilon}{15}$. Отсюда видно, что если взять $\delta=\frac{\varepsilon}{15}$, то для всех x, подчиненных условию $0<\left|x-\frac{1}{3}\right|<\delta$, будет верно неравенство

$$\left|\frac{15x^2-2x-1}{x-\frac{1}{3}}-8\right|<\delta=\frac{\varepsilon}{15}.$$

Это означает, что число $A=8$ является пределом данной функции в точке $a=\frac{1}{3}$. ▼

4.2. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности

Понятие предела функции, естественно, обобщается на тот случай, когда a не есть конечное число, если ввести понятие окрестности бесконечно удаленной точки как множества всех значений x, для которых $|x|>M$, где $M>0$ – произвольное число.

Определение. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при переменной x, ***стремящейся к бесконечности***, если для любого $\varepsilon>0$ существует число $M>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x|>M$, верно неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$$(\forall\varepsilon>0)\,(\exists M>0)\,(\forall x\,|x|>M)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Для **обозначения** предела функции $f(x)$ при $x \to \infty$ используется символ

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Число $M(\varepsilon)$, зависящее от выбранного числа ε, играет в этом определении ту же роль, что число $\delta(\varepsilon)$ в определении предела $\lim\limits_{x\to a} f(x)$. Каждому значению ε отмечает бесконечное множество значений *M*, среди которых есть наименьшее, соответствующее наибольшей окрестности бесконечно удаленной точки.

Геометрический смысл записи $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ виден из рисунка 4.2: произвольной ε - окрестности точки $y = A$ можно сопоставить окрестность бесконечно удаленной точки, т.е. множество *x* таких, что $|x| > M$, для всех точек которой $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, т.е. график функции размещается в полосе, ограниченной прямыми $y = A \pm \varepsilon$.

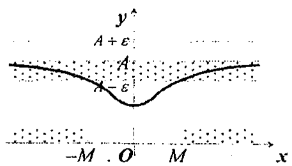


Рис. 4.1

Пример 4.3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9x+5}{4x} = \dfrac{9}{4}$. Каким должно быть число *M*, чтобы для $|x| > M$ значения функции отличались от числа $\frac{9}{4}$ меньше, чем на 0.1; 0.002; 0.000005?

▲ Здесь $f(x) = \dfrac{9x+5}{4x}$, $A = \dfrac{9}{4}$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Доказываемое утверждение верно, если существует $M > 0$ такое, что при $|x| > M$ выполняется неравенство

$$\left| f(x) - \frac{9}{4} \right| < \varepsilon, \text{ т.е. } \left| \frac{9x+5}{4x} - \frac{9}{4} \right| < \varepsilon, \text{ или } \frac{5}{4|x|} < \varepsilon.$$

Последнее неравенство равносильно следующему: $|x| > \frac{5}{4\varepsilon}$, так что, положив $M = \frac{5}{4\varepsilon}$, при $|x| > M$ получим как следствие

$$\frac{5}{4|x|} < \varepsilon \text{, или } \left|\frac{9x+5}{4x} - \frac{9}{4}\right| < \varepsilon .$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{9x+5}{4x} = \frac{9}{4}$.

На остальные вопросы получаем ответ простым вычислением значений $M(\varepsilon) = \frac{5}{4\varepsilon}$ при значении ε, равном 0.1; 0.002 и 0.000005, который можно оформить так:

ε	0.1	0.002	0.000005
M	12.5	625	250000

▼

4.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Пусть функция $\alpha(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, быть может, кроме самой точки a.

Определение. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется ***бесконечно малой функцией*** (сокращенно бмф) при переменной x, стремящейся к a, если $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Свойства бесконечно малых функций

1. (***Связь функции, имеющей предел, с ее пределом и бмф***). Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, может быть, кроме самой точки a. Для того чтобы функция $f(x)$ в точке a имела пределом число A, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ можно было представить в виде суммы $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бмф при $x \to a$.

2. (***Сумма бмф***). Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ − бмф при $x \to a$, то их сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ есть также бмф при $x \to a$.

3. (***Произведение бмф на ограниченную функцию***). Если функция $\alpha(x)$ является бмф при $x \to a$, а функция $f(x)$ ограниченна в окрестности точки a, то произведение $\alpha(x) \cdot f(x)$ есть бмф при $x \to a$.

4. (***Произведение бмф***). Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ − бмф при $x \to a$, то их произведение $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ есть также бмф при $x \to a$.

5. (***Произведение бмф на постоянную функцию***). Произведение бмф на постоянную функцию есть бмф.

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно большой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$. Или

$$(f(x) - \text{ббф при } x \to a) \Leftrightarrow \forall M > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x,\, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Геометрически это означает, что для $x \in (a-\delta; a+\delta)$, $x \neq a$, график функции $y = f(x)$ лежит вне полосы, ограниченной прямыми $x = \pm M$ (рис. 4.2).

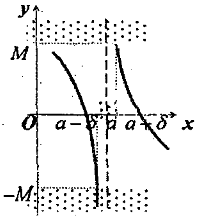


Рис. 4.2

Между бесконечно большими функциями и бесконечно малыми существует простая связь: если $f(x)$ при $x \to a$ – бмф, то $\dfrac{1}{f(x)}$ при $x \to a$ – ббф, и обратно.

Пример 4.4. Доказать, что функция $x-1$ есть бесконечно малая при $x \to 1$. (Иногда задачи такого типа можно встретить в такой формулировке: доказать, что функция $x-1$ есть бм в точке $x=1$. Здесь подразумевается не значение функции в точке $x=1$, а её изменения при значениях x, близких к единице).

▲ Согласно определению бм достаточно показать, что $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$.

Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и покажем существование такого числа $\delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство $|(x-1)-0| < \varepsilon$ или $|x-1| < \varepsilon$ выполняется для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x-1| < \delta$.

Очевидно, что из неравенства $|x-1| < \delta$ следует, что $|x-1| < \varepsilon$, значит, $\lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$, и функция $x-1$ – бм при $x \to 1$. ▼

Пример 4.5. Найти предел функции $y = x\sin\dfrac{1}{x}$ при $x \to 0$.

▲ Аргумент $\dfrac{1}{x} \to \infty$ при $x \to 0$, а множитель $\sin\dfrac{1}{x}$ будет при этом колебаться между -1 и $+1$, не стремясь ни к какому определенному числу, т.е. множитель не имеет предела, но является величиной ограниченной,

$$\left|\sin\frac{1}{x}\right| \le 1.$$

Поэтому согласно свойству 3 данная функция, представляющая произведение бм x на величину, ограниченную $\sin\frac{1}{x}$, есть бм величина, а ее предел равен нулю: $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$. ▼

Пример 4.6. Доказать, что функция $\frac{1}{2x+4}$ бб при $x \to -2$.

▲ Так как при $x \to -2$ функция $2x+4$ бм, то функция $\frac{1}{2x+4}$ бб. ▼

Пример 4.7. Доказать, что последовательность $\left\{2^{\sqrt{n}}\right\}$ является бб при $n \to \infty$.

▲ Здесь необходимо доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{\sqrt{n}} = +\infty$, т.е. что $2^{\sqrt{n}} > M$, где $M > 0$ – произвольное число, для всех n, начиная с некоторого номера N. Используя монотонность логарифмической функции (основание $e > 1$), получаем $\ln 2^{\sqrt{n}} > \ln M$, $\sqrt{n} > \frac{\ln M}{\ln 2}$, $n > \left(\frac{\ln M}{\ln 2}\right)^2$, и за число N можно взять, например, целую часть числа $\left(\frac{\ln M}{\ln 2}\right)^2$, т.е. $N = \left[\left(\frac{\ln M}{\ln 2}\right)^2\right]$.

Итак, для всех $n > N$ выполняется неравенство $2^{\sqrt{n}} > M$, следовательно, последовательность $\left\{2^{\sqrt{n}}\right\}$ бб. ▼

Пример 4.8. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$, $a > 1$.

▲ Если $x_n = \frac{n}{a^n}$, то $x_{n+1} = \frac{n+1}{a^{n+1}} = \frac{n}{a^{n+1}} + \frac{1}{a^{n+1}}$, откуда

$$x_{n+1} = \frac{1}{a}x_n + \frac{1}{a^{n+1}}. \tag{4.1}$$

Заметим, что $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)a^n}{a^{n+1}n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{a}$ при $n \to \infty$ стремится к $\frac{1}{a}$, причем $\frac{1}{a} < 1$, следовательно, для достаточно больших значений n будет выполняться неравенство $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$, т.е. $x_{n+1} < x_n$, а тогда последовательность $\{x_n\}$ убывающая, а так как она ограничена снизу нулем, то имеет предел. Обозначим его b, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

Если теперь в равенстве (4.1) перейти к пределу, то получим $b = \frac{1}{a}\cdot b + 0$, что выполняется лишь при $b = 0$. ▼

Замечание. Так как последовательность $\left\{\frac{n}{a^n}\right\}$ бесконечно малая при $a > 1$, то последовательность $\left\{\frac{a^n}{n}\right\}$ бесконечно большая,

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = \infty$. ▼

4.4. Свойства предела функции

Предельный переход и арифметические операции

Теорема 4.1. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *существует, то он единственный.*

Теорема 4.2. *Пусть функции* $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *определены в некоторой окрестности точки а, быть может, кроме самой точки а. Если*

$$\lim_{x\to a} f_1(x) = A_1,\ \lim_{x\to a} f_2(x) = A_2, \text{ то}$$

1. $\lim\limits_{x\to a} C = C$ $(C - \text{const})$.
2. $\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;
3. $\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x)\cdot f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;
4. $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_1(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}, \left(\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0,\ f_2(x) \neq 0\right)$.

Следствие 1. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*

$$\lim_{x\to a}\left(C\cdot f(x)\right) = C\cdot \lim_{x\to a} f(x).$$

Следствие 2. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *и* m *– натуральное число, то*

$$\lim_{x\to a} f^m(x) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^m.$$

Пример 4.9. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(4x^2 - 6x + 3)$.

▲ Так как предел алгебраической суммы переменных равен такой же алгебраической сумме пределов этих переменных,

постоянный множитель можно выносить за знак предела,

предел целой положительной степени равен такой же степени предела,

предел постоянной величины равен самой постоянной,

то последовательно получим

$$\lim_{x\to\infty}(4x^2 - 6x + 3) = \lim_{x\to\infty} 4x^2 - \lim_{x\to\infty} 6x + \lim_{x\to\infty} 3 =$$

$$= 4\lim_{x\to\infty} x^2 - 6\lim_{x\to\infty} x + \lim_{x\to\infty} 3 =$$

$$= 4\left(\lim_{x\to\infty} x\right)^2 - 6\lim_{x\to\infty} x + 3 =$$

$$= 4\cdot 2^2 - 6\cdot 2 + 3 = 16 - 12 + 3 = 7.\ ▼$$

Замечание 1. Вычисление предела многочлена второй степени свелось к вычислению его значения при предельном значении аргумента.

Следствие 3 (Предел целой рациональной функции). *Если*

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \text{ то } \lim_{x\to a} P_n(x) = P_n(a),$$

т. е. при отыскании предела целой рациональной функции можно в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением.

Пример 4.10. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 8x + 2)$.

▲ $\lim\limits_{x\to 1}(2x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 8x + 2) =$

$= \{2\cdot 1^5 - 4\cdot 1^4 + 3\cdot 1^3 - 6\cdot 1^2 + 8\cdot 1 + 2\} = 5.$ ▼

Следствие 4 (Предел дробно-рациональной функции). *Если*

$$F(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + b_2x^{m-2} + \ldots + b_{n-1}x + b_n} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

$$\text{то} \quad \lim_{x\to a} F(x) = \frac{P(a)}{Q(a)} = F(a), \text{ если } Q(a) \neq 0,$$

т. е. **при отыскании предела дробно-рациональной функции можно в аналитическом выражении функции заменить аргумент его предельным значением, если при этом предельном значении знаменатель не обращается в нуль.**

Пример 4.11. Найти $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6}$.

$$\blacktriangle \quad \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-4x+7}{2x^2-5x+6} = \left\{ \frac{3\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 7}{2\cdot 1^2 - 5\cdot 1 + 6} = \frac{3-4+7}{2-5+6} = \frac{6}{3} \right\} = 2. \ \blacktriangledown$$

Предел ***элементарной функции*** в точке ее определения равен частному значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Чтобы найти предел функции $y = f(x)$ нужно вместо x подставить его предельное значение, т.е. выполнить операцию

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Пример 4.12. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{x^2-7} + \sqrt[3]{x+60}}{2x^2-5x-8}$.

$$\blacktriangle \ \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x^2-7} + \sqrt[3]{x+60}}{2x^2-5x-8} =$$

$$= \left\{ \frac{\sqrt{4^2-7} + \sqrt[3]{4+60}}{2\cdot 4^2 - 5\cdot 4 - 8} = \frac{\sqrt{9} + \sqrt[3]{64}}{32-20-8} = \frac{3+4}{4} \right\} = \frac{7}{4} \ \blacktriangledown$$

Предельный переход и неравенства

1. (***Переход к пределу в неравенстве***). Если $f_1(x) \le f_2(x)$ для всех x из некоторой окрестности точки a, может быть кроме самой точки a, и каждая из функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в точке a имеют предел, то $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) \le \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$.

2. (**О сжатой переменной**). Если $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x)$ для всех x в некоторой окрестности точки a, быть может, кроме самой точки a, и если

$\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A = \lim\limits_{x\to a} f_3(x)$, то существует также предел $f_2(x)$ при $x \to a$, причем $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A$.

Пример 4.13. Доказать, что последовательность $\left\{\left(\dfrac{n}{7n+3}\right)^n\right\}$ имеет предел, равный нулю.

▲ Заметим, что $0 < \dfrac{n}{7n+3} < \dfrac{n}{7n} = \dfrac{1}{7}$, отсюда $0 < \left(\dfrac{n}{7n+3}\right)^n < \left(\dfrac{1}{7}\right)^n$.

По свойству 2 о сжатой переменной получаем

$$\lim_{n\to\infty} 0 \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{7n+3}\right)^n \le \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{7}\right)^n,$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{7n+3}\right)^n = 0$. ▼

Пример 4.14. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n}{2n-3}\right) = +\infty$.

▲ Заметим, что $\dfrac{7n}{2n-3} > \dfrac{7n}{2n} = \dfrac{7}{2} > 1$, отсюда $\left(\dfrac{7n}{2n-3}\right)^n > \left(\dfrac{7}{2}\right)^n$, и по свойству 1 о переходе к пределу в неравенствах $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n}{2n-3}\right)^n \ge \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7}{2}\right) = +\infty$, отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n}{2n-3}\right) = +\infty$. ▼

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение предела функции в точке.
2. Понятие функции, ограниченной в окрестности точки. Теорема об ограниченности функции, имеющей предел.
3. Дана функция $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$. Определена ли функция $f(x)$ в точке $x = 0$? Существует ли $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?
4. Как связано понятие предела функции с понятиями ее пределов слева и справа?

5. Существует ли $f(3+0)$ и $f(3-0)$, если $f(x)=\frac{|3-x|}{3-x}$? Существует ли $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$?

6. В чем состоит геометрический смысл предела функции?

7. При каких условиях из существования односторонних пределов следует существование предела функции?

8. Теорема о пределе суммы.

9. Теорема о пределе произведения.

10. Теорема о пределе частного.

11. В чем состоит правило предельного перехода?

12. Что устанавливает первый замечательный предел?

13. Как и когда применяется замена переменных при отыскании пределов от тригонометрических функций и пределов, связанных с e?

14. Какими пределами можно заменить число e?

15. Усвоили ли вы, как быстро, в уме найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}$?

4.5. Вычисление пределов. Элементарные приемы и использование замечательных пределов

В практике отыскания пределов наиболее часто применяется теорема 4.2 об арифметических действиях над пределами. Однако ее непосредственное применение бывает невозможно в особых случаях, называемых неопределенностями, которые возникают при нарушении условий теоремы.

Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования. Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к неопределенностям вида

$$\tfrac{0}{0},\ \tfrac{\infty}{\infty},\ \infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ 1^{\infty},\ 0^{0},\ \infty^{0}.$$

Отметим также, что

$$\lim_{x\to a}\frac{C}{f(x)}=0,\ \text{если}\ \lim_{x\to a}f(x)=\infty;\ \lim_{x\to a}\frac{C}{f(x)}=\infty,\ \text{если}\ \lim_{x\to a}f(x)=0;$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=0,\ \text{если}\ \lim_{x\to a}f(x)=0,\ \lim_{x\to a}g(x)=\infty;$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty, \text{ если } \lim_{x\to a}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to a}g(x)=0.$$

Чтобы найти пределы при наличии неопределенности, надо эту неопределенность устранить, открыв тем самым возможность использования тех или иных теорем о пределах. Это достигается, с одной стороны, применением алгебраических и тригонометрических преобразований (разложение функций на множители или на слагаемые, приведение дробей к общему знаменателю, добавление и вычитание некоторого выражения, умножение и деление на некоторую функцию, вынесение общего множителя за скобку и т.п.). А также заменой переменной, использованием эквивалентных бесконечно малых величин и бесконечно больших. С другой стороны, использованием, так называемых ***замечательных пределов***:

1. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$

2. $\lim\limits_{z\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{z}\right)^z=e,\ \lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$

($e=2.718281828459\ldots$ – иррациональное число)

Напоминаем, что прежде, чем вычислять любой предел, нужно подставить в функцию, стоящую под знаком предела, предельное значение аргумента. Тогда либо предел будет сразу определен, либо получится неопределенность, по виду которой можно найти метод ее раскрытия.

I. **Неопределенность** $\frac{0}{0}$. *Случай, когда при* $x\to a$ *или* $x\to\infty$ *функция* $f(x)$ *представляет отношение двух бесконечно малых величин.*

Этот случай нахождения предела функции имеет особенно большое значение. Как будет выяснено впоследствии, нахождение предела отношения бесконечно малого изменения функции к бесконечно малому изменению аргумента одним из основных средств изучения функций.

В простейших случаях такая неопределенность устраняется путем выделения в числителе и знаменателе общего множителя, создающего неопределенность, и сокращения на него, после чего можно применять теорему о пределе частного.

Пример 4.15. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$.

▲ Вначале убеждаемся, что предел функции нельзя найти непосредственной подстановкой, что при указанном значении аргумента она представляет отношение двух бесконечно малых величин

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\left\{\frac{2-2}{2^2-4}=\frac{0}{0}\right\}.$$

Затем делаем преобразования, чтобы сократить на множитель, стремящийся к нулю. Для этого разлагаем знаменатель на множители и сокращаем дробь на двучлен $x-2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x+2}=\left\{\frac{1}{2+2}\right\}=\frac{1}{4}.$$

Здесь нет сокращения на нуль, что никогда недопустимо. Согласно определению предела функции аргумент x стремится к своему предельному значению 2, никогда с ним не совпадая. Поэтому здесь $x-2\neq 0$. ▼

Вообще, *если ищется предел функции при* $x\to a$, *то необходимо помнить, что* x *не принимает значения* a, *т.е. что* $x\neq a$ *и* $x-a\neq 0$.

Если ищется предел дроби, числитель и знаменатель которой многочлены, обращающиеся в нуль в предельной точке $x=a$, то согласно теореме Безу оба многочлена разделятся без остатка на двучлен $x-a$, т.е. такую дробь всегда можно сократить на двучлен $x-a$.

Итак, при раскрытии некоторых неопределенностей нужно делить многочлен на двучлен. Как это сделать?

Разделить многочлен на двучлен, значит выполнить деление углом по правилам деления многочлена на многочлен.

Пример 4.16. Разделить многочлен x^3+4x^2-x+5 на двучлен $x-2$.

▲ Деление очевидно.

$$\begin{array}{r|l}
-\,x^3+4x^2-x+5 & x-2 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-2x^2} & x^2+6x+11 \\
-\,6x^2-x+5 & \\
\underline{6x^2-12x} & \\
-\,11x+5 & \\
\underline{11x-22} & \\
27 &
\end{array}$$

Ответ: $\dfrac{x^3+4x^2-x+5}{x-2}=x^2+6x+11+\dfrac{27}{x-2}$. ▼

1) Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$.

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при отыскании предела отношения многочленов $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, нужно

1) определить тип неопределенности,

2) если неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то поделить числитель и знаменатель на двучлен $(x-a)$.

Замечание. Двучлен $(x-a)$ в дальнейшем будем называть «***критическим множителем***». Таким образом, нахождение предела сводится, прежде всего, к выделению в числителе и знаменателе критического множителя $(x-a)$, незримое присутствие которого и создает неопределенность. Практически это достигается каким-либо способом разложения числителя и знаменателя на множители (например, деления «уголком»).

Пример 4.17. Найти предел $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

▲ $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=$

$$=\left\{1)\ \frac{(-2)^3+3(-2)^2+2(-2)}{(-2)^2-(-2)-6}=\frac{-8+12-4}{4+2-6}=\frac{0}{0},\ \begin{array}{l}\text{2) поделим числитель и}\\ \text{знаменатель на крити-}\\ \text{ческий множитель } x+2\end{array}\right\}=$$

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+3x^2+2x & x+2 \\ \underline{x^3+2x^2} & \overline{x^2+x} \\ -\,x^2+2x & \\ \underline{x^2+2x} & \\ 0 & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} -\,x^2-x-6 & x+2 \\ \underline{x^2+2x} & \overline{x-3} \\ -\,-3x-6 & \\ \underline{-3x-6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+x}{x-3}=\left\{\frac{(-2)^2+(-2)}{-2-3}=\frac{4-2}{-5}\right\}=-\frac{2}{5}.\ ▼$$

Пример 4.18. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac12}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

▲ $$\lim_{x\to\frac12}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\left\{1)\ \frac{8\left(\frac12\right)^3-1}{6\left(\frac12\right)^2-5\cdot\frac12+1}=\frac{1-1}{\frac32-\frac52+1}=\frac00;\ 2)\ \left(x-\tfrac12\right)\right\}=$$

$$\begin{array}{l|l}
-\,8x^3-1 & x-\frac12 \\ \cline{2-2}
\underline{8x^3-4x^2} & 8x^2+4x+2 \\
\quad -\,4x^2-1 & \\
\quad \underline{4x^2-2x} & \\
\qquad -\,2x-1 & \\
\qquad \underline{2x-1} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
-\,6x^2-5x+1 & x-\frac12 \\ \cline{2-2}
\underline{6x^2-3x} & 6x-2 \\
\quad -\,-2x+1 & \\
\quad \underline{-2x+1} & \\
\qquad 0 &
\end{array}$$

$$=\lim_{x\to\frac12}\frac{8x^2+4x+2}{6x-2}=\left\{\frac{8\left(\frac12\right)^2+4\cdot\frac12+2}{6\cdot\frac12-2}=\frac{2+2+2}{3-2}\right\}=6\,.\ ▼$$

Пример 4.19. Найти предел $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

▲ $$\lim_{x\to1}\frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}=\left\{1)\ \frac{1^3+1-2}{1^3-1^2-1+1}=\frac00;\ 2)\ (x-1)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+2}{x^2-1}=\left\{\frac{1^2+1+2}{1^2-1}=\frac40\right\}=\infty\,.▼$$

$$\begin{array}{l|l}
-\,x^3+x-2 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} & x^2+x+2 \\
\quad -\,x^2+x-2 & \\
\quad \underline{x^2-x} & \\
\qquad -\,2x-2 & \\
\qquad \underline{2x-2} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
-\,x^3-x^2-x+1 & x-1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^3-x^2} & x^2-1 \\
\quad -\,-x+1 & \\
\quad \underline{-x+1} &
\end{array}$$

Можно прием деления на критический множитель $x-a$ повторить несколько раз подряд.

Пример 4.20. Найти предел $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+9x^2+24x+20}{2x^3+13x^2+28x+20}$.

▲ $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+9x^2+24x+20}{2x^3+13x^2+28x+20}=$

$$=\left\{1)\ \frac{(-2)^3+9(-2)^2+24(-2)+20}{2(-2)^3+13(-2)^2+28(-2)+20}=\frac{0}{0};\ 2)\ x+2\right\}=$$

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+9x^2+24x+20 & x+2 \\ \underline{x^3+2x^2\qquad\qquad\quad} & \overline{x^2+7x+10} \\ -\,7x^2+24x+20 & \\ \underline{7x^2+14x\qquad} & \\ -\,10x+20 & \\ \underline{10x+20} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,2x^3+13x^2+28x+20 & x+2 \\ \underline{2x^3+4x^2\qquad\qquad\quad} & \overline{2x^2+9x+10} \\ -\,9x^2+28x+20 & \\ \underline{9x^2+18x\qquad} & \\ 10x+20 & \\ \underline{10x+20} & \\ 0 & \end{array}$$

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}=\left\{1)\ \frac{(-2)^2+7(-2)+10}{2(-2)^2+9(-2)+10}=\frac{4-14+10}{8-18+10}=\frac{0}{0};\ 2)\ x+2\right\}=$$

$$\begin{array}{r|l} -\,x^2+7x+10 & x+2 \\ \underline{x^2+2x\qquad} & \overline{x+5} \\ -\,5x+10 & \\ \underline{5x+10} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,2x^2+9x+10 & x+2 \\ \underline{2x^2+4x\qquad} & \overline{2x+5} \\ -\,5x+10 & \\ \underline{5x+10} & \\ 0 & \end{array}$$

▼

$$=\lim_{x\to-2}\frac{x+5}{2x+5}=\left\{\frac{-2+5}{2(-2)+5}=\frac{3}{-4+5}\right\}=3.$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найти пределы:

№	Предел	***Ответ***
1	$\lim\limits_{x\to3}(2x^2-7x+6)$	3
2	$\lim\limits_{x\to1}(3x^4-5x^3+6x^2-4x+7)$	7
3	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-5x+2}{3x^2-6x+4}$	2

4	$\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-7x+6}$	0
5	$\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-6x+5}$	∞
6	$\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+6}$	$\dfrac{4}{5}$
7	$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3x^2-7x+2}{4x^2-5x-6}$	$\dfrac{15}{44}$
8	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$	$\dfrac{1}{2}$
9	$\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$	$\dfrac{7}{3}$
10	$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$	$\dfrac{2}{3}$
11	$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^3-6x^2}{4x^5+2x^3+x^2}$	
12	$\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81}$	$\dfrac{1}{3}$

При отыскании пределов от ***иррациональных функций*** с неопределенностями вида $\frac{0}{0}$ используется рассмотренный выше прием, но только после предварительных алгебраических преобразований.

2) Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$.

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при отыскании предела дроби, содержащей иррациональные выражения в случае, когда предел и числителя, и знаменателя дроби равен нулю, надо

1) определить тип неопределенности,

2) умножить числитель и знаменатель на выражения, сопряженные числителю и знаменателю.

3) После этого сделать необходимые упрощения (приведение подобных членов, сокращение, выделение критического множителя и т. д.) и перейти к пределу.

Пример 4.21. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{x+1}}{x}$.

$$▲\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}=\left\{1)\ \frac{1-\sqrt{0+1}}{0}=\frac{0}{0},\ 2)\ \begin{matrix}\text{уничтожаем}\\ \text{иррациональность}\\ \text{в числителе}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-(x+1)}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}=$$

$$=\left\{\frac{0}{0\left(1+\sqrt{0+1}\right)}=\frac{0}{0},\ \begin{matrix}\text{сокращаем}\\ \text{дробь на } x\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{1+\sqrt{x+1}}=$$

$$=\left\{\frac{-1}{1+\sqrt{0+1}}=\frac{-1}{1+1}\right\}=-\frac{1}{2}.\ ▼$$

Аналогичный пример, но с освобождением от иррациональности в знаменателе.

Пример 4.22. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

$$▲\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}=\left\{1)\ \frac{0}{\sqrt{1+3\cdot 0}-1}=\frac{0}{0};\ 2)\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}{1+3x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+1}{3}=$$

$$=\left\{\frac{\sqrt{1+3\cdot 0}+1}{3}=\frac{1+1}{3}\right\}=\frac{2}{3}.\ ▼$$

Если иррациональность в числителе и знаменателе, то необходимо от иррациональности в числителе и знаменателе.

Пример 4.23. Найти предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

$$▲\ \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left\{1)\ \frac{\sqrt{1+2\cdot 4}-3}{\sqrt{4}-2}=\frac{0}{0};\ 2)\right\}=$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)\left(\sqrt{1+2x}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)(x-4)} =$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{1+2x}+3\right)(x-4)} = \lim_{x\to 4}\frac{2\left(\sqrt{x}+2\right)}{\sqrt{1+2x}+3} = \left\{\frac{2\left(\sqrt{4}+2\right)}{\sqrt{1+2\cdot 4}+3} = \frac{2\cdot 4}{3+3}\right\} = \frac{4}{3}. \ ▼$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найти пределы:

№	Предел	*Ответ*
1	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+7}-3}{\sqrt{x+2}-2}$	$\frac{2}{3}$
2	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$	$\frac{1}{148}$
3	$\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{\sqrt{x-1}-2}$	40
4	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$	$-\frac{1}{2}$
5	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$	$\frac{3}{4}$
6	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}$	$\frac{3}{2}$
7	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}$	$\frac{5}{12}$
8	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{\sqrt{5-x}-\sqrt{7x-3}}$	$\frac{7}{12}$
9	$\lim\limits_{x\to -3}\frac{\sqrt{x^2+7}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x^2-9}}$	0
10	$\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3x^2-39}}{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{2x^2-19}}$	$\frac{23\sqrt{13}}{24}$

Пример 4.24. Найти указанный предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$.

$$▲\ \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}=\left\{1)\ \frac{0}{\sqrt{1+3\cdot 0}-1}=\frac{0}{0}\ 2)\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}{\left(\sqrt{1+3x}-1\right)\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}{1+3x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(\sqrt{1+3x}+1\right)}{3x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+3x}+1}{3}=\left\{\frac{\sqrt{1+3\cdot 0}+1}{3}\right\}=\frac{2}{3}.\ ▼$$

Пример 4.25. Найти указанный предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}$.

$$▲\ \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}=\left\{1)\ \frac{\sqrt{3\cdot 3+7}-\sqrt{2\cdot 3+10}}{\sqrt{4\cdot 3+13}-\sqrt{3+22}}=\frac{4-4}{5-5}=\frac{0}{0}\ 2)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}\right)\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)\left(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}\right)}{\left(\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}\right)\left(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}\right)\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(3x+7-2x-10)\left(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}\right)}{(4x+13-x-22)\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}\right)}{(3x-9)\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)\left(\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}\right)}{3(x-3)\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+22}}{3\left(\sqrt{3x+7}+\sqrt{2x+10}\right)}=\left\{\frac{\sqrt{4\cdot 3+13}+\sqrt{3+22}}{3\left(\sqrt{3\cdot 3+7}+\sqrt{2\cdot 3+10}\right)}=\frac{10}{24}\right\}=\frac{5}{12}.\ ▼$$

3) Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$.

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при отыскании предела дроби, содержащей тригонометрические функции в случае, когда предел и числителя, и знаменателя дроби равен нулю, надо

1) определить тип неопределенности,

2) с помощью алгебраических и тригонометрических преобразований разложить числитель и знаменатель на множители, выделив критический множитель.

3) Для нахождения предела использовать первый замечательный предел

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

При определении предела тригонометрической функции можно независимую переменную заменить ее предельным значением, если оно принадлежит области существования функции:

$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a;\ \lim_{x\to a}\cos x=\cos a;\ \lim_{x\to a}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}a;\ \lim_{x\to a}\operatorname{ctg}x=\operatorname{ctg}a.$$

Например: 1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=\sin 0=0$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=\cos 0=1$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$;

5) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x$ – не существует, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ нельзя приписать ни какого числового значения.

Замечание. Если под знаком предела имеется сумма или разность тригонометрических функций, часто бывает полезным преобразовать их в произведение по известным формулам тригонометрии.

Пример 4.26. Найти предел $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

▲ $$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\left\{\frac{\sin^2\pi}{1+\cos^3\pi}=\frac{0}{0},\ 2)\ \begin{matrix}\text{разложим числитель и}\\ \text{знаменатель на множители}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{выделим критический множитель}\\ (1+\cos x)\ \text{и сократим на него}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=$$

$$=\left\{\frac{1-\cos\pi}{1-\cos\pi+\cos^2\pi}=\frac{1-(-1)}{1-(-1)+(-1)^2}=\frac{1+1}{1+1+1}\right\}=\frac{2}{3}.\ ▼$$

Пример 4.27. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}$.

$$▲\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}=\left\{1)\ \frac{\operatorname{tg}0}{1-\sqrt{1+\operatorname{tg}0}}=\frac{0}{0};\ 2)\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x\left(1+\sqrt{1+\operatorname{tg}x}\right)}{1-1-\operatorname{tg}x}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x\left(1+\sqrt{1+\operatorname{tg}x}\right)}{-\operatorname{tg}x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x\left(1+\sqrt{1+\operatorname{tg}x}\right)}{\left(1-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}\right)\left(1+\sqrt{1+\operatorname{tg}x}\right)}=-\lim_{x\to 0}\left(1+\sqrt{1+\operatorname{tg}x}\right)=\left\{-\left(1+\sqrt{1+\operatorname{tg}0}\right)\right\}=-2.\ ▼$$

При решении следующих задач подвергаем функцию под знаком предела преобразованиям с тем, чтобы использовать ***1-й замечательный предел***:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1\ (\alpha - \text{радианная мера угла}).$$

Пример 4.28. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

$$▲\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=\left\{1)\ \frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0},\ 2)\ \begin{matrix}\text{сравнивая с замечательным}\\ \text{пределом имеем } \alpha=3x\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot\sin 3x}{3\cdot x}=3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3.\ ▼$$

Пример 4.29. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

$$▲\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}=\left\{1)\ \frac{0}{0};\ 2)\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 7x}{7x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{7x}{\sin 7x}=1\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=\frac{5}{7}.\ ▼$$

Следует запомнить, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{x}=k;\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin kx}=\dfrac{1}{k}$.

Пример 4.30. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}kx}{x}$.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}kx}{x}=\left\{1)\ \dfrac{0}{0};\ 2)\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin kx}{\cos kx\cdot x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}=k\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos kx}=\left\{k\cdot\frac{1}{1}\right\}=k.$$ ▼

Пример 4.31. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 kx}{x^2}$.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 kx}{x^2}=\left\{1)\ \dfrac{0}{0};\ 2)\ \dfrac{\sin^2 kx}{x^2}=\dfrac{\sin kx}{x}\cdot\dfrac{\sin kx}{x}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\{k\cdot k\}=k^2.$$ ▼

Пример 4.32. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{x^2}$.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos kx}{x^2}=\left\{1)\ \dfrac{0}{0};\ 2)\ 1-\cos kx=2\sin^2\dfrac{kx}{2}\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{kx}{2}}{x^2}=$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{kx}{2}}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{kx}{2}}{x}=\left\{2\cdot\frac{k}{2}\cdot\frac{k}{2}\right\}=\frac{k^2}{2}.$$ ▼

Пример 4.33. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}=\left\{1)\ \dfrac{1-1}{0\cdot 0}=\dfrac{0}{0};\ 2)\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin 2x}=$

$$=\left\{1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)=$$

$$=\left\{\lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)=3\right\}=$$

$$= 2\cdot 3\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\cdot \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin 2x} = \left\{6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right\} = \frac{3}{4}.\ \blacktriangledown$$

Замена переменной под знаком предела

Пример 4.34. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$.

$$\blacktriangle\ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x} = \left\{1)\ \frac{0}{0};\ 2)\ \begin{matrix} y=\arcsin 3x \\ 3x=\sin y\end{matrix}\ 3)\ \begin{matrix} x=\frac{1}{3}\sin y \\ y\to 0 \text{ при } x\to 0\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{y}{2\cdot\frac{1}{3}\sin y} = \frac{3}{2}\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \frac{3}{2}.\ \blacktriangledown$$

Если под знаком предела делается замена переменной, то
1) все величины, входящие под знак предела, должны быть выражены через эту новую переменную,
2) а из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, должен быть определен предел новой переменной.

Пример 4.35. Найти предел $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

$$\blacktriangle\ \lim_{x\to 1}(1-x)\,\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2} = \left\{(1-1)\,\mathrm{tg}\frac{\pi\cdot 1}{2} = 0\cdot\infty;\ 1)\ \begin{matrix} y=1-x \\ x=1-y\end{matrix}\ 2)\ \begin{matrix} y\to 0 \\ \text{при } x\to 1\end{matrix}\right\} =$$

$$= \lim_{y\to 0} y\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}(1-y)\right) == \left\{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}(1-y)\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}y\right) = \mathrm{ctg}\frac{\pi y}{2}\right\} =$$

$$= \lim_{y\to 0} y\,\mathrm{ctg}\frac{\pi y}{2} = \lim_{y\to 0} y\frac{\cos\frac{\pi y}{2}}{\sin\frac{\pi y}{2}} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin\frac{\pi y}{2}}\cdot\lim_{y\to 0}\cos\frac{\pi y}{2} == \left\{\frac{2}{\pi}\cdot 1\right\} = \frac{2}{\pi}.\ \blacktriangledown$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найти пределы:

№	Предел	***Ответ***
1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$	3
2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$	2
3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 4x}$	$\dfrac{3}{4}$
4	$\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$	$\dfrac{2}{3}$
5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$	k
6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 ax}{x^2}$	a^2
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos mx}{x^2}$	$\dfrac{m^2}{2}$
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos kx-\cos lx}{x^2}$	$\dfrac{l^2-k^2}{2}$
9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$	$2\cos a$
10	$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$
11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$	$\dfrac{1}{2}$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 2x}$	$\dfrac{3}{2}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$	6
14	$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(2(x-1))}{x^2-7x+6}$	$-\dfrac{2}{5}$

II. **Неопределенность** $\frac{\infty}{\infty}$. *Случай, когда при* $x\to a$ *или* $x\to\infty$ *функция* $f(x)$ *представляет отношение двух бесконечно больших величин.*

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Если предел отношения двух алгебраических функций при $x \to \infty$ **дает неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, то нужно числитель и знаменатель дроби поделить на старшую степень переменной** x, **встречающуюся в членах этой дроби.**

Или

в числителе и знаменателе вынести множитель, переменную x^m, **где** m **– старшая степень переменной.**

Пример 4.36. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$.

▲ $$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4-2}{\sqrt{x^8\left(1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}\right)}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(3-\frac{2}{x^4}\right)}{x^4\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x^4}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^7}+\frac{4}{x^8}}}=3.$$ ▼

Пример 4.37. Найти предел рациональной функции

$$R(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+b_2x^2+\ldots+b_mx^m},$$

где $a_n\neq 0,\ b_m\neq 0$, при значении x, стремящемся к бесконечности.

▲ Преобразуем выражение для данной функции, вынося за скобки множитель x^n в числителе и множитель x^m в знаменателе:

$$R(x)=\frac{x^n\left(\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_2}{x^{n-2}}+\ldots+a_n\right)}{x^m\left(\frac{b_0}{x^m}+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_2}{x^{m-2}}+\ldots+b_m\right)}=x^{n-m}Q(x). \qquad \text{(A)}$$

где

$$Q(x)=\frac{\left(\frac{a_0}{x^n}+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_2}{x^{n-2}}+\ldots+a_n\right)}{\left(\frac{b_0}{x^m}+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_2}{x^{m-2}}+\ldots+b_m\right)}. \qquad \text{(B)}$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{c}{x^k}=0 \ (k=1,2,3,\ldots),$$

то

$$\lim_{x\to\infty}Q(x)=\frac{a_n}{b_m}. \qquad \text{(C)}$$

Поскольку предел произведения равен произведению пределов, то

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\lim_{x\to\infty}x^{n-m}\cdot\lim_{x\to\infty}Q(x). \qquad \text{(D)}$$

Предел первого множителя в правой части последнего равенства (D) зависит от соотношения между n и m, а именно

$$\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=\infty, \text{ если } n>m;$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=1, \text{ если } n=m; \qquad \text{(E)}$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{n-m}=0, \text{ если } n<m.$$

Из формулы (D) с учетом формул (C) и (E) получаем

$$\lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty, & \text{если } n>m;\\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{если } n=m;\\ 0, & \text{если } n<m.\end{cases} \ \blacktriangledown$$

Полученный результат можно сформулировать следующим образом:

Предел отношения двух алгебраических функций при $x\to\infty$ **равен 1) отношению коэффициентов перед старшей степенью** x, **если степень алгебраической функции в числителе равна степени алгебраической функции в знаменателе;**

2) нулю, если степень алгебраической функции в числителе меньше степени алгебраической функции в знаменателе;
3) ∞, если степень алгебраической функции в числителе больше степени алгебраической функции в знаменателе.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Воспользовавшись упрощенным приемом, найдите в уме следующие пределы. (Ответы справа перепутаны).

1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+7x-8x^4}{1-x^2+7x^3}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\ldots$	0	Найдите ответ в уме и сверьте его с таблицей. Если он совпадает хотя бы с одним из ответов в таблице, то ваш ответ верен.
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^{14}-x^2+13}{11x^{15}-6x^{10}+4x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\ldots$	$-\infty$	
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+x}+3x}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\cdots$	$\dfrac{1}{4}$	
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{17x^3-x^8+4}{11x^2-4x^8+16}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\ldots$	$\dfrac{2}{3}$	
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^4-7x-5}}{3x^4-6x+1}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\ldots$	∞	
6	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+1+x^6}{15x+3x^5+x^3}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\ldots$	0	

Таблица ответов. Проверьте свои ответы

№	1	2	3	4	5	6
Старшая степень	x^4	x^{15}	x	x^8	x^4	x^6
Отношение коэффициентов перед старшей степенью	$\dfrac{-8}{0}$	$\dfrac{0}{11}$	$\dfrac{\sqrt{4}}{3}$	$\dfrac{-1}{-4}$	$\dfrac{0}{3}$	$\dfrac{1}{0}$
Ответ	$-\infty$	0	$\dfrac{2}{3}$	$\dfrac{1}{4}$	0	∞

Найти пределы указанных функций:

№	Предел функции	*Ответ*
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x+4}{3x^2+7x-2}$	2
2	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+6x-3}{9x^3+8x^2-2}$	0
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-7x^4+3x^3-4x^2+8x-9}{3x^5+5x^4-6x^3+7x^2-11x-2}$	2
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4-5x^3+6x^2-7x+12}{9x^5-8x^3+12x^2-5x-14}$	0
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-6x^2+11x-18}{5x^2-9x+24}$	∞
6	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2}}{x-1}$	2
7	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\sqrt{2x^2-1}}{x}$	$-\sqrt{2}$

III. **Неопределенность** $\infty-\infty$. *Случай, когда при* $x\to a$ *или* $x\to\infty$ *функция* $f(x)$ *представляет разность двух положительных бесконечно больших величин.*

Этот случай нахождения предела функции можно привести к случаю $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ путем преобразования функции к виду дроби.

Пример 4.38. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\left(\dfrac{2}{2x-5}-\dfrac{17}{6x^2-13x-5}\right)$.

▲ $\lim\limits_{x\to\frac{5}{2}}\left(\dfrac{2}{2x-5}-\dfrac{17}{6x^2-13x-5}\right)=$

$$=\left\{\frac{2}{2\cdot\frac{5}{2}-5}-\frac{17}{6\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-13\cdot\frac{5}{2}-5}=\frac{2}{5-5}-\frac{17}{\frac{75}{2}-\frac{65}{2}-5}=\infty-\infty\right\}=$$

(Приведение дробей к общему знаменателю сменяет неопределенность $\infty-\infty$ на неопределенность $\frac{0}{0}$, которая раскрывается сокращением дроби на критический множитель $2x-5$). Действительно, учитывая, что

$$6x^2-13x-5=(2x-5)(3x+1),$$

находим последовательно

$$=\lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{6x+2-17}{(2x-5)(3x+1)}=\lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{3(2x-5)}{(2x-5)(3x+1)}=\lim_{x\to\frac{5}{2}}\frac{3}{3x+1}=\left\{\frac{3}{3\cdot\frac{5}{2}+1}\right\}=\frac{6}{17}\ .\ \blacktriangle$$

Переход от одной неопределенности к другой может быть осуществлен и иначе:

Пример 4.39. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)$.

$\blacktriangle$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)=\left\{\sqrt{\infty-5}-\sqrt{\infty}=\infty-\infty\right\}=$

(умножение и деление на одно и то же выражение, сопряженное данному двучлену, сводит неопределенность $\infty-\infty$ к неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$)

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+5-x}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x}}=\left\{\frac{5}{\infty}\right\}=0\ .\ \blacktriangledown$$

Пример 4.40. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+2}\right)$.

$\blacktriangle$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+2}\right)=\{\infty-\infty\}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+2}-\sqrt{x^2-x+2}\right)\left(\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+2}\right)}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x+2-x^2+x-2}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+2}+\sqrt{x^2-x+2}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\frac{2}{2}=1\ .\ \blacktriangledown$$

Пример 4.41. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)=\left\{\dfrac{2}{0}-\dfrac{1}{0}=\infty-\infty\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{2\sin x\cos x}-\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x=0.$$ ▲

Пример 4.42. Найти предел $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos 3x}+\dfrac{1}{1-2\cos 2x}\right)$.

▲ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos 3x}+\dfrac{1}{1-2\cos 2x}\right)=\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos\frac{\pi}{2}}+\dfrac{1}{1-2\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0}=\infty-\infty\right\}=$

Приведем дроби к общему знаменателю, учитывая, что

$$\cos 3x=\cos(2x+x)=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x=$$

$$=\cos x(\cos 2x-2\sin^2 x)=\cos x(2\cos 2x-1).$$

Тогда

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2\cos x(2\cos 2x-1)}+\frac{1}{1-2\cos 2x}\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}-2\cos x}{2\cos x(2\cos 2x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1}{2\cos x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}-2\cos x}{2\cos 2x-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sqrt{3}-2\cos x}{2\cos 2x-1}=\left\{\frac{\sqrt{3}-2\cos\frac{\pi}{6}}{2\cos\frac{\pi}{3}-1}=\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\left(\sqrt{3}-2\cos x\right)\left(\sqrt{3}+2\cos x\right)}{(2\cos 2x-1)\left(\sqrt{3}+2\cos x\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{3-4\cos^2 x}{(2\cos 2x-1)\left(\sqrt{3}+2\cos x\right)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1}{\sqrt{3}+2\cos x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{3-2(1+\cos 2x)}{2\cos 2x-1}=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{2\sqrt{3}}\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{1-2\cos 2x}{2\cos 2x-1}=-\frac{1}{6}.$$ ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найти пределы указанных функций:

№	Предел функции	*Ответ*
1	$\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$	$\dfrac{1}{4}$

2	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x}\right)$	$-\dfrac{5}{2}$
3	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2}{\sin 2x}-\operatorname{ctg} x\right)$	0
4	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{2}{1-x^2}\right)$	$\dfrac{1}{2}$

IV. ***Неопределенность*** $0\cdot\infty\ (\infty\cdot 0)$. *Случай, когда при $x\to a$ или $x\to\infty$ функция $f(x)$ представляет произведение бесконечно малой величины на бесконечно большую величину.*

Этот случай нахождения предела функции приводится путем преобразования функции к одному из двух рассмотренных случаев, т.е. к случаю $\frac{0}{0}$ или к случаю $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 4.43. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}\right)$.

▲ Отыскание этого предела связано с устранением неопределенности $\infty\cdot 0$. В самом деле,

$$\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{x^2+x-1}\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}=$$

$$=\frac{x^2+x+1-(x^2+x-1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}=\frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0.$$

Поэтому исходный предел равен

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+x-1}}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$==\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}=\left\{\frac{2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}\right\}=1.$$

Преобразование разности $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+x-1}$ позволило не только выявить неопределенность $\infty\cdot 0$, но и заменить ее неопределенностью $\frac{\infty}{\infty}$. ▼

Пример 4.44. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}$.

▲ $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{3}=\{0\cdot\operatorname{ctg}0=0\cdot\infty\}=\lim\limits_{x\to 0} x\dfrac{\cos\frac{x}{3}}{\sin\frac{x}{3}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin\frac{x}{3}}\cos\frac{x}{3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x}{\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}}\cdot\cos\frac{x}{3}=\left\{\frac{1}{\frac{1}{3}}\cdot 1\right\}=3.\ ▼$$

Пример 4.45. Найти предел $\lim\limits_{x\to\pi}\sin 2x\operatorname{ctg}x$.

▲ $\lim\limits_{x\to\pi}\sin 2x\operatorname{ctg}x=\{\sin 2\pi\operatorname{ctg}\pi=0\cdot\infty\}=$

$=\lim\limits_{x\to\pi}2\sin x\cos x\dfrac{\cos x}{\sin x}=2\lim\limits_{x\to\pi}\cos^2 x\{2\cdot\cos^2\pi=2\cdot 1\}=2.$ ▼

Пример 4.46. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\dfrac{2x+1}{x^2+4x^3}$.

▲ $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\sin\dfrac{2x+1}{x^2+4x^3}=$

$$=\left\{\infty\cdot 0,\ \text{при } x\to\infty\ \frac{2x+1}{x^2+4x^3}\to 0;\ \begin{matrix}\text{выделим 1-й}\\ \text{замечательный предел}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\frac{\sin\frac{2x+1}{x^2+4x^3}}{\frac{2x+1}{x^2+4x^3}}\cdot\frac{2x+1}{x^2+4x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(2x+1)}{x^2+4x^3}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{2x+1}{x^2+4x^3}}{\frac{2x+1}{x^2+4x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x^2}{x^2+4x^3}\cdot 1=\left\{\frac{2}{4}\right\}=\frac{1}{2}.\ ▼$$

Пример 4.47. Найти предел $\lim\limits_{x\to+\infty}x\operatorname{arcctg}x$.

▲ $\lim\limits_{x\to+\infty}x\operatorname{arcctg}x=\{\infty\cdot 0;\ y=\operatorname{arcctg}x\Rightarrow x=\operatorname{ctg}y,\ \text{при } x\to+\infty\ y\to+0\}=$

$$= \lim_{y \to +0} y \operatorname{ctg} y = \{0 \cdot \infty\} = \lim_{y \to +0} \cos y \cdot \lim_{y \to +0} \frac{y}{\sin y} = \{1 \cdot 1\} = 1. \blacktriangledown$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найти пределы указанных функций:

№	Предел функции	*Ответ*
1	$\lim\limits_{x \to 0} x \operatorname{ctg} 2x$	0.5
2	$\lim\limits_{x \to \pi} \sin 2x \operatorname{ctg} x$	2
3	$\lim\limits_{x \to \infty} x \sin \frac{a}{x}$	a
4	$\lim\limits_{x \to \infty} 2^x \operatorname{tg} 2^{-x}$	1
5	$\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x} - 1\right)$	$\frac{1}{2}$
6	$\lim\limits_{x \to 0} x^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}}$	$2\sqrt{2}$
7	$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x$	–2
8	$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} (1 - \operatorname{tg} x) \operatorname{tg} 2x$	2
9	$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \operatorname{tg} x$.	

V. Неопределенность 1^{∞}. *Случай, когда при $x \to a$ или $x \to \infty$ функция $f(x)$ представляет степень, основание которой стремится к единице, а показатель – к бесконечности.*

Условия, при которых возникает эта неопределенность, связана с пределом $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^{g(x)}$.

При отыскании пределов вида $\lim\limits_{x \to a} (f(x))^{g(x)}$ в случае, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, имеет место формула

$$\lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

Раскрытие неопределенности 1^∞.

Неопределенность вида 1^∞ может быть раскрыта способом непосредственной «подгонки» ко второму замечательному пределу, который можно записать в одном из следующих видов:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e;\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k;\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e;\ \lim_{x\to 0}(1+kx)^{\frac{1}{x}}=e^k.$$

Способ «подгонки» состоит в следующем:

1) функцию $f(x)$ представляют в виде $f(x)=1+(f(x)-1)$,

2) показатель степени $g(x)$ записывают в виде:

$$g(x)=\frac{1}{f(x)-1}(f(x)-1)\cdot g(x),$$

и тогда

$$\lim_{x\to a}(f(x))^{g(x)}=\lim_{x\to a}(1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}(f(x)-1)\cdot g(x)}=$$

$$=\left(\lim_{x\to a}(1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to a}(f(x)-1)\cdot g(x)}$$

Число e – иррациональное; $e=2.7182818\ldots$ *Логарифмы с основанием е называются натуральными* и обозначаются $\ln$.

Натуральные и десятичные логарифмы связаны формулами:

$$\lg x=M\ln x,\ \ln x=\tfrac{1}{M}\lg x,$$

где $M=\lg e=0.43429\ldots,\ \frac{1}{M}=\ln 10=2.30258\ldots$

Пример 4.49. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

▲ $$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^x=\left\{\left(1-\frac{1}{\infty}\right)^\infty\to 1^\infty\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-x^2}\right)^{-x^2}\right)^{\frac{x}{-x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{-x^2}\right)}=$$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)}=\left\{e^{-\frac{1}{\infty}}=e^0\right\}=1.$$ ▼

Пример 4.50. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x^2}}$.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}(1-\sin x)^{\frac{1}{x^2}} = \left\{(1-\sin 0)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to 0}\left((1+(-\sin x))^{\frac{1}{-\sin x}}\right)^{\frac{-\sin x}{x^2}} =$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{\sin x}{x^2}\right)} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)} = \left\{e^{-1\cdot\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty}\right\} = 0$. ▼

Пример 4.51. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

▲ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = \left\{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty} = \left(\frac{1}{1}\right)^{\infty} = 1^{\infty}\right\} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1}{x-2}-1\right)^{2x-1} =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{x+1-x+2}{x-2}\right)^{2x-1} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{x-2}\right)^{\frac{2x-1}{x-2}} = e^{3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x-2}} = \left\{e^{3\cdot\frac{2}{1}}\right\} = e^6$. ▼

Пример 4.52. Связан ли с e предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x+4}\right)^{x}$?

▲ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{x+4}\right)^{x} = \left\{\left(\frac{2}{1}\right)^{\infty} = 2^{\infty}\right\} = \infty$. Предел с е не связан. ▼

Найдем еще несколько пределов, не связанных с e.

Пример 4.53. Найти предел $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x+2}{2x-9}\right)^{x}$.

▲ $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x+2}{2x-9}\right)^{x} =$

$\nearrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{2x-9}\right)^{x} = \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{\infty}\right\} = \infty.$

$\searrow$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+2}{2x-9}\right)^{x} = \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\infty}\right\} = 0.$ ▼

Всегда при $x\to\pm\infty$ надо рассматривать отдельно $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Пример 4.54. Связан ли с e предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$?

▲ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}=\left\{\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)^{\frac{x}{x}}=1^{1}\right\}=1$. Предел с е не связан. ▼

Пример 4.55. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x+9}{x^2+3x+5}\right)^{6x}$.

▲ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4x+9}{x^2+3x+5}\right)^{6x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2+4x+9}{x^2+3x+5}-1\right)^{6x}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{x+4}{x^2+3x+5}\right)^{\frac{x^2+3x+5}{x+4}}\right)^{\frac{6x(x+4)}{x^2+3x+5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+24x}{x^2+3x+5}}=e^6. ▼$$

Со вторым замечательным пределом связаны пределы от показательных и логарифмических функций с неопределенностями вида $\frac{0}{0}$, $0\cdot\infty$. Но прежде чем воспользоваться вторым замечательным пределом, их нужно преобразовать так, чтобы получилась неопределенность 1^{∞}.

Пример 4.56. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\left\{\dfrac{\ln 1}{0}=\dfrac{0}{0},\ \begin{array}{c}\text{содержит логарифм под знаком предела,}\\ \Rightarrow \text{предел связан с } e.\end{array}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x)=\lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=$$

$$=\left\{\begin{array}{c}\text{знак предела и знак непрерывной функции}\\ \text{можно переставлять местами}\end{array}\right\}=$$

$$=\ln\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1. ▼$$

Пример 4.57. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln x}{x}$.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}=\left\{\dfrac{\ln a-\ln a}{0}=\dfrac{0}{0},\ \begin{matrix}\text{потенцируем:}\\ \ln(a+x)-\ln a=\ln\frac{a+x}{a}\end{matrix}\right\}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln\frac{a+x}{a}=\lim_{x\to 0}\ln\left(\frac{a+x}{a}\right)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{\frac{a}{x}\frac{1}{a}}=\ln e^{\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}.$$ ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найти пределы указанных функций:

№	Предел функции	*Ответ*
1	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{3x+1}$	e^3
2	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-1}\right)^{x}$	0 или ∞
3	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-1}\right)^{4x-1}$	e^4
4	$\lim\limits_{x\to\infty}\big((2x+1)(\ln(3x+1)-\ln(3x-2))\big)$	2
5	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{3x+4}\right)^{x^2}$	0
6	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$	E
7	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$	0
8	$\lim\limits_{x\to 0}(1+\mathrm{tg}^2\,x)^{2\,\mathrm{ctg}^2 x}$	e^2
9	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+7x+10}{x^2+15x+1}\right)^{-\frac{x^2}{2}}$	e^4
10	$\lim\limits_{x\to 4}(9-2x)^{\frac{1}{4-x}}$	$e^{\frac{1}{2}}$

5. СРАВНЕНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – две бмф при $x \to a$. Для сравнения двух бмф $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \to a$ находят предел их отношения: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C$.

1. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C \neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***бмф одного порядка.***

Обозначение: $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

(«читается $\alpha(x)$ равна O большому от $\beta(x)$»).

2. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ называется ***бмф высшего порядка по сравнению с бмф*** $\beta(x)$.

Обозначение: $\alpha(x) = o(\beta(x))$. («читается $\alpha(x)$ равна o малому от $\beta(x)$»).

3. В частном случае, когда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, бмф $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными.***

Обозначение. $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Эквивалентные бесконечно малые функции обладают следующими свойствами:

I. Разность двух эквивалентных бесконечно малых есть бесконечно малая высшего порядка, чем каждая из них.

II. При нахождении предела отношения двух бесконечно малых можно каждую из них (или только одну) из них заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной, т.е. если

$$\alpha_1 \sim \alpha \text{ и } \beta_1 \sim \beta, \text{ то } \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1}{\beta} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta_1} = \lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1}{\beta_1}.$$

Наличие набора эквивалентных бесконечно малых часто значительно упрощает вычисление пределов при раскрытии неопределенностей. Так, при $\alpha \to 0$

$$\begin{array}{ll}
\sin\alpha \sim \alpha, & \operatorname{tg}\alpha \sim \alpha, \\
\arcsin\alpha \sim \alpha, & \operatorname{arctg}\alpha \sim \alpha, \\
1-\cos\alpha \sim \frac{1}{2}\alpha^2, & \ln(1+\alpha) \sim \alpha, \\
a^{\alpha}-1 \sim \alpha\ln a, & e^{\alpha}-1 \sim \alpha, \\
(1+\alpha)^p - 1 \sim p\alpha, & \sqrt[n]{1+\alpha}-1 \sim \dfrac{\alpha}{n}.
\end{array}$$

Примеры решения задач

Пример 5.1. Сравнить функции: а) $\sqrt{2+x}-\sqrt{2}$ и x при $x\to 0$; б) $1-\sin x$ и $\cos x$ при $x\to\frac{\pi}{2}$; в) $2x^2+1$ и x^2-100x при $x\to\infty$.

▲ а) Данные функции при $x\to 0$ бесконечно малые. Составим их отношение и высчитаем его предел при $x\to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2+x-2}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Следовательно, данные функции одного порядка малости.

б) Если $x\to\frac{\pi}{2}$, то функции бесконечно малые и

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)}{\cos x(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x}=0,$$

следовательно, функция $1-\sin x$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с функцией $\cos x$, т.е. $1-\sin x=o(\cos x)$.

в) Если $x\to\infty$, то функции $2x^2+1$ и x^2-100x бесконечно большие. Для их сравнения вычислим предел их отношения при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-100x}=\begin{Bmatrix}n=2\\ m=2\end{Bmatrix}=2.$$

Значит, данные функции бесконечно большие одного порядка. ▼

Пример 5.2. Пользуясь тем, что при отыскании пределов отношения двух бесконечно малых можно заменять их эквивалентными бесконечно малыми найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2\frac{x}{2}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{(\operatorname{arctg}5x)^2}$; г) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{tg}^3\frac{1}{x}\cdot\operatorname{arctg}\frac{3}{x\sqrt{x}}}{\sin\frac{2}{x^3}\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\arcsin\frac{5}{x}}$.

▲ а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4x}{3x}=\frac{4}{3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}^2 2x}{\sin^2\frac{x}{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\left(\frac{x}{3}\right)^2}=36$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin 2x}{(\operatorname{arctg}5x)^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{5x}\cdot\frac{2x}{5x}=\frac{2}{25}$;

г) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{tg}^3 \frac{1}{x} \cdot \operatorname{arctg} \frac{3}{x\sqrt{x}}}{\sin \frac{2}{x^3} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \arcsin \frac{5}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\frac{1}{x}\right)^3 \cdot \frac{3}{x\sqrt{x}}}{\frac{2}{x^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{5}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^4\sqrt{x}}{10x^4\sqrt{x}} = \dfrac{3}{10}$. ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Пользуясь свойством эквивалентных бесконечно малых функций, найти следующие пределы:

№	Предел	*Ответ*
1	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x + x^2}$	5
2	$\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\sqrt{2x} - x}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$	$\sqrt{2}$
3	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x}{\operatorname{arctg} 6x}$	$\dfrac{1}{2}$
4	$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin^2(x-1)}{x^2 - 1}$	0
5	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x \cdot \arcsin 3x}{\sin 3x \cdot \operatorname{arcctg} 2x}$	1
6	$\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin x}{x - \pi}$	-1
7	$\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sin 3(x-2)}{x^2 - 3x + 2}$	3
8	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{5x} - 1}{\sin 10x}$	$\dfrac{1}{2}$
9	$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+7x)}{\sin 7x}$	1

Доказать, что при $x \to 0$:

10. $\sqrt{6x+1} - 1 \sim 3x$. 11. $\sin x + \operatorname{tg} x \sim 2x$.

12. $\sqrt[3]{x+8} - 2 \sim \frac{1}{12}x$. 13. $1 - \cos\dfrac{x}{m} \sim \dfrac{x^2}{2m^2}$.

14. Сравнить бесконечно малые величины $ax, cx^3, b\sqrt[3]{x}$ с бесконечно малой величиной x.

Ответ: $ax = O(x),\ cx^3 = o(x),\ x = o\left(b\sqrt[3]{x}\right)$.

Вопросы для самопроверки

1. Какая функция называется бесконечно малой, и каковы ее основные свойства?
2. Сформулируйте определение и приведите примеры бесконечно малой функции $\alpha(x)$:
   - а) одного порядка с функцией $\beta(x)$ в точке a;
   - б) эквивалентной функции $\beta(x)$ в точке a;
   - в) более высокого порядка малости при $x \to a$, чем $\beta(x)$.
3. Что означает символическая запись

$$\alpha(x) = o(\beta(x)),\ \alpha(x) = O(\beta(x)) \text{ при } x \to a.$$

4. Какая функция называется бесконечно большой, какова ее связь с бм?
5. Покажите, что при $x \to 0$ бесконечно малые функции

$$\sin x,\ \arcsin x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{arctg} x$$

попарно эквивалентны.

6. Пусть $x \to 0$. При каком значении a бесконечно малые величины $a\sin^2 x$ и $1 - \cos x$ эквивалентны?
7. Перечислите известные вам эквивалентные бесконечно малые величины.
8. Какие свойства эквивалентных бесконечно малых величин используются при отыскании пределов?

6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИЙ

6.1. Односторонние пределы функции в точке

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некотором интервале $(c; a)$.

Определение 1. Число A называется ***левым пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$, верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

Символическая запись:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x,\ x_0 - \delta < x < x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Обозначение:

$$A = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ (} x \text{ стремится к } x_0 \text{, оставаясь меньше } x_0 : x < x_0\text{).}$$

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; d)$.

Определение 2. Число A называется ***правым пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 < x < x_0 + \delta$, верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

Символическая запись:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x,\ x_0 < x < x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Обозначение:

$$A = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \text{ (} x \text{ стремится к } x_0 \text{, оставаясь больше } x_0 : x > x_0\text{).}$$

В частности, если $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$, определение предела функции выглядит следующим образом:

число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если для любого положительного числа ε существует число M, такое, что как только $x > M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ $\left(\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A\right)$ (рис. 6.1);

число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to -\infty$, если для любого положительного числа ε существует число M, такое, что как только $x < M$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A\right)$ (рис. 6.2).

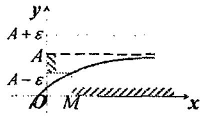


Рис. 6.1

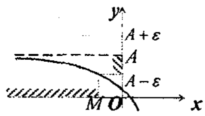


Рис. 6.2

Понятия, определяемые равенствами $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$, обобщают понятия односторонних пределов функции. Рис. 6.1 и 6.2 дают их геометрическую интерпретацию.

В дальнейшем вместо терминов «предел слева», «предел справа» будет использоваться символическая запись: $f(x_0-0)$, $f(x_0+0)$.

Пример 6.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x^2}=0$.

▲ Исходя из определения предела функции, для любого $\varepsilon>0$ надо найти такое M, что для всех $x<M$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{x+1}{x^2}-0\right|<\varepsilon.$$

Преобразуем последнее неравенство:

$$\left|\frac{x+1}{x^2}\right|=\left|\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{1}{x^2}\right|=\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x^2}<\varepsilon$$

и потребуем, чтобы каждое из слагаемых было меньше $\frac{1}{2}\varepsilon$, тогда их сумма будет меньше ε:

$$\frac{1}{|x|}<\frac{\varepsilon}{2},\ \frac{1}{x^2}<\frac{\varepsilon}{2},\ \text{или}\ |x|>\frac{2}{\varepsilon},\ |x|>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}.$$

Т.к. $x\to-\infty$, то можно считать $x<0$ и тогда $|x|=-x$, и система неравенств будет равносильной следующей:

$$-x>\frac{2}{\varepsilon},\ -x>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\ \text{или}\ x<-\frac{2}{\varepsilon},\ x<-\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}.$$

Вместо M можно взять, например, $\min\left\{-\frac{2}{\varepsilon}; -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right\}$.

Итак, для всех $x < \min\left\{-\frac{2}{\varepsilon}; -\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right\}$ при любом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\left|\frac{x+1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0$.

6.2. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва

Определение 1. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в точках некоторой ее окрестности $\Omega(x_0)$;

2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0;

3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Определение 2. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в этой точке и в некоторой ее окрестности $\Omega(x_0)$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \Omega(x_0)$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если она определена в этой точке и в некоторой ее окрестности $\Omega(x_0)$ и бесконечно малому приращению Δx аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение Δy функции, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Приведенные определения эквивалентны. Использование разных из них позволяет упрощать решение различных задач.

Из **определения 1**, в частности, следует, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$, т. е. если функция непрерывна, то предел функции равен функции предела.

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия:

1) *существовал предел слева* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)$ *и предел справа* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$;

2) *пределы слева и справа были равны друг другу*

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

3) *выполнялось условие* $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$.

Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ непрерывны в точке $x=x_0$, то функции

$$Cf_1(x),\ f_1(x)\pm f_2(x),\ f_1(x)\cdot f_2(x),\ \frac{f_1(x)}{f_2(x)}\ \left(f_2(x_0)\neq 0\right)$$

также непрерывны в этой точке.

Если функция $x=x(t)$ непрерывна в точке $t=t_0$, а функция $y=f(t)$ непрерывна в точке $x_0=x(t_0)$, то и сложная функция $y=f\left(x(t)\right)$ непрерывна в точке $t=t_0$.

Определения. Точка x_0 называется ***точкой разрыва функции*** $f(x)$, если в ней не выполняются условия непрерывности.

Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечные пределы слева и справа, но они не равны друг другу, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то точка x_0 называется ***точкой разрыва функции*** $f(x)$ ***1-го рода.***

Разность $|f(x_0-0)-f(x_0+0)|$ называется ***скачком функции*** $f(x)$ в точке x_0.

Если в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен, то точка x_0 называется ***точкой разрыва 2-го рода.***

Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет предел слева и справа и они равны между собой, но не равны значению функции в точке x_0,

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)\neq f(x_0),$$

то точка x_0 называется ***точкой неустранимого разрыва*** функции $f(x)$.

Примеры решения задач

Пример 6.2. Найти предел слева и справа функции $f(x)=2^{\frac{1}{x-1}}$ в точке $x=1$.

▲ Предел слева $f(1-0)=\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-1}}$, символическая запись $x\to 1-0$ означает, что $x\to 1$ слева, т.е. остается меньше 1, тогда разность $x-1$ будет меньше нуля, знаменатель дроби $\frac{1}{x-1}$ при $x\to 1-0$ отрицательный и стремится к нулю, дробь возрастает по абсолютной величине и $\to -\infty$. Все эти рассуждения кратко можно заменить операциями с символами, которые легко выполняются в уме. Предел слева: $f(1-0)=\lim\limits_{\substack{x\to 1-0\\ x<1}} 2^{\frac{1}{x-1}}=$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{подставляем вместо } x \text{ его}\\ \text{предельное значение в символах}\end{matrix} : 2^{\frac{1}{1-0-1}}=2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=\frac{1}{\infty}\right\}=0.$$

Предел справа:

$$f(1+0)=\lim_{\substack{x\to 1+0\\ x>1}} 2^{\frac{1}{x-1}}=\left\{2^{\frac{1}{1+0-1}}=2^{\frac{1}{+0}}=2^{+\infty}\right\}=\infty.$$

Предел справа не существует, функция в точке $x=1$ терпит бесконечный разрыв. ▼

Первая типичная задача

Пример 6.3. Найти пределы функции $y=2^{\frac{1}{x-3}}$ слева и справа в точках $x_1=3$, $x_2=5$. Узнать, является ли функция непрерывной в этих точках. Сделать схематический чертеж.

▲ 1. Исследуем точку $x=3$.

$$f(3-0)=\lim_{\substack{x\to 3-0\\ x<3}} 2^{\frac{1}{x-3}}=\left\{2^{\frac{1}{3-0-3}}=2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=\frac{1}{\infty}\right\}=0,$$

$$f(3+0)=\lim_{\substack{x\to 3+0\\ x>3}} 2^{\frac{1}{x-3}}=\left\{2^{\frac{1}{3+0-3}}=2^{\frac{1}{+0}}=2^{+\infty}\right\}=\infty,$$

в точке $x=3$ предел справа не существует, и функция терпит бесконечный разрыв.

2. Исследуем точку $x=5$.

$$f(5-0)=\lim_{\substack{x\to 5-0\\ x<5}} 2^{\frac{1}{x-3}}=\left\{2^{\frac{1}{5-0-3}}=2^{\frac{1}{2}}\right\}=\sqrt{2},$$

$$f(5+0)=\lim_{\substack{x\to 5+0\\ x>5}} 2^{\frac{1}{x-3}}=\left\{2^{\frac{1}{5+0-3}}=2^{\frac{1}{2}}\right\}=\sqrt{2},$$

$$f(5)=2^{\frac{1}{5-3}}=\sqrt{2}.$$

Итак,

$$f(5-0)=f(5+0)=f(5).$$

Предел слева равен пределу справа и равен значению функции в точке. Функция непрерывна при $x=5$.

Для построения графика функции нужно провести дополнительные исследования по краткой схеме, известной из средней школы:

1. Найти область определения функции: $X=\{(-\infty;3)\cup(3;\infty)\}$.

2. Определить точки пересечения с осями координат.

$$\text{С осью } Ox\text{: } \begin{cases} y\neq 0, \text{ т.к. } y>0 \\ y=2^{\frac{1}{x-3}}. \end{cases}$$

$$\text{С осью } Oy\text{: } \begin{cases} x=0, \\ y=2^{\frac{1}{x-3}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=2^{-\frac{1}{3}}; \end{cases} M_1\left(0;2^{-\frac{1}{3}}\right).$$

3. Функция общего вида: $2^{\frac{1}{-x-3}}\neq \pm 2^{\frac{1}{x-3}}$. Симметрии графика функции относительно оси Oy и начала координат нет.

4. Исследовать поведение функции при $x\to\pm\infty$ (рис.6.3):

$$\lim_{x\to-\infty} 2^{\frac{1}{x-3}}=\left\{2^{\frac{1}{-\infty-3}}=2^{\frac{1}{-\infty}}=2^0\right\}=1;\ \lim_{x\to+\infty} 2^{\frac{1}{x-3}}=\left\{2^{\frac{1}{+\infty-3}}=2^{\frac{1}{\infty}}=2^0\right\}=1.$$

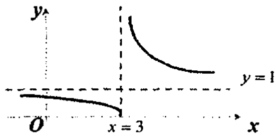


Рис. 6.3. ▼

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на интервале*** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала. Множество функций, непрерывных на интервале $(a;b)$ **обозначают** $C(a;b)$.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a;b]$, если она непрерывна на интервале $(a;b)$ и в точке a непрерывна справа, а в точке b – непрерывна слева. Множество всех таких функций обозначают $C[a;b]$.

Функция называется ***элементарной***, если она составлена из конечного числа основных элементарных функций с помощью алгебраических действий и операций взятия функции от функции и имеет одно аналитическое выражение на всей области определения.

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке области определении. Т.е. область непрерывности элементарной функции совпадает с ее областью определения.

Элементарная функция может иметь точки разрыва только в отдельных точках, там, где она не определена. Неэлементарная функция может иметь точки разрыва как там, где она не определена, так и там, где определена.

Если неэлементарная функция задана различными аналитическими выражениями (формулами) для различных интервалов изменений аргумента, то она может иметь разрыв в тех точках, где меняется ее аналитическое выражение.

Вторая типичная задача

Пример 6.4. Функция задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента. Найти точки разрыва, если они существуют. Сделать схематический чертеж. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x-2, \text{ если } x\le 0, \\ x^2+1, \text{ если } 0<x<2, \\ 2x+1, \text{ если } x\ge 2. \end{cases}$$

▲ 1. Исследуем точку $x=0$.

$$f(0-0)=\lim_{\substack{x\to 0-0\\ x<0}} f(x)=\left\{\begin{array}{c}\text{символ } x\to 0-0 \text{ позволяет выбрать нужное}\\ \text{аналитическое выражение для функции}\\ f(x) \text{ из уравнений, ее определяющих}\end{array}\right\}=$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0-0\\ x<0}}(x-2)=-2.$$

$$f(0+0)=\lim_{\substack{x\to 0+0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0+0\\ x>0}}(x^2+1)=1.$$

Функция терпит конечный разрыв 1-го рода. Скачок

$$|f(0+0)-f(0-0)|=|1-(-2)|=3.$$

2. Исследуем точку $x=2$.

$$f(2-0)=\lim_{\substack{x\to 2-0\\ x<2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2-0\\ x<2}}(x^2+1)=\left\{(2-0)^2+1\right\}=5.$$

$$f(2+0)=\lim_{\substack{x\to 2+0\\ x>2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 2+0\\ x>2}}(2x+1)=\left\{2\cdot(2+0)+1\right\}=5.$$

$$f(2)=(2x+1)\big|_{x=2}=5.$$

Итак,

$$f(2-0)=f(2+0)=f(2).$$

Т.е. в точке $x=2$ функция непрерывна.

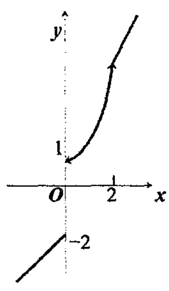


Рис. 6.4. ▼

3. Построим график функции (рис.6.4) без дополнительного исследования, так как все составные части графика известны. Если на конце интервала функция не определена данной формулой, то на соответствующем конце ставим стрелку.

Если до сих пор мы имели дело с функциями, графики которых известны, а точки разрыва очевидны, то теперь нужно решить ту же задачу, но при более сложных условиях.

Обратите внимание на схему исследования и на то, что элементарная функция имеет разрывы только в тех точках, где она не определена. Напоминаем, что для исследования точек разрыва и поведения функции надо: 1) Найти область определения функции. 2) Исследовать точки, в которых функция не определена. Определить в них характер разрыва. 3) Найти точки пересечения с осями координат. 4) Проверить, нет ли симметрии графика относительно оси Oy или начала координат. 5) Установить поведение функции при $x \to \pm\infty$.

Пример 6.5. Исследовать характер разрыва функции $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ и схематически построить ее график.

▲ 1) Область определения функции: $X = \{(-\infty; 0) \cup (0; \infty)\}$.

2) Исследуем точку $x = 0$.

В этой точке функция разрывна, так как $f(0)$ не существует. Однако нам известно, что при стремлении x к нулю по любому закону $(x \to 0)$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ и, таким образом, существуют левосторонний предел функции $f(0-0)$, правосторонний предел функции $f(0+0)$ и они между собой равны: $f(0-0) = f(0+0) = 1$. Но $f(0)$ не существует. На кривой, которая является графиком этой функции (рис. 6.5), отсутствует точка (она как бы «вырвана»), абсцисса которой равна нулю. Если условиться, что при $x = 0$ функция $\dfrac{\sin x}{x} = 1$, то тем самым график функции станет сплошным (непрерывным), и разрыв будет «устранен».

Для функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ точка $x=0$ является точкой «устранимого» разрыва, так как $f(0-0)=f(0+0)$, и функция в этой точке может быть доопределена так, что можно взять $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$.

Замечание. Термин «устранимый» взят в кавычки потому, что фактически разрыв функции $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x=0$ ничем устранить нельзя, так как он существует в действительности. Можно только условно принять, что значение функции в этой точке равно единице. Такое соглашение восстановит на кривой отсутствующую, на ней точку $(0;\,1)$.

3) Функция пересекает ось Ox в точках:

$$\begin{cases} y=\dfrac{\sin x}{x} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=k\pi \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow M_k(k\pi;\,0).$$

Функция пересекает ось Oy (после доопределения) – в точке $N(0;\,1)$.

4) Функция четная, так как $\dfrac{\sin(-x)}{-x}=\dfrac{\sin x}{x}$. График функции симметричен относительно оси Oy.

5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$, так как $\sin x$ – величина, ограниченная при любом значении x.

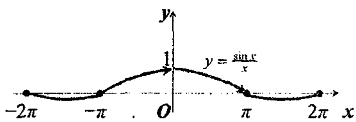


Рис. 6.5. ▼

Пример 6.6. Дана функция. Найти ее точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

а) $f_1(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$; б) $f_2(x)=\dfrac{3x-5}{x^2+2x+10}$; в) $f_3(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$;

г) $f_4(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$; д) $f_5(x)=\lg(x^2+2x)$.

▲ а) Функция $f_1(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$ определена, т.е. может быть вычислена при всех значения x, кроме значений $(x=-2)\wedge(x=2)$.

Эта функция элементарная, поэтому она непрерывна во всей области своего определения: $X=\{(-\infty;-2)\cup(-2;2)\cup(2;\infty)\}$. Она не определена в точках $x_1=-2\wedge x_2=2$, но определена вблизи этих точек. Вследствие этого, ввиду несоблюдения 1-го условия непрерывности, данная функция в точках x_1 и x_2 имеет разрывы.

Вычислим односторонние пределы этой функции при стремлении аргумента x к точкам разрыва слева и справа:
Исследуем точку $x=-2$.

$$f(-2-0)=\lim_{\substack{x\to-2-0\\x<-2}}\frac{1}{x^2-4}=\lim_{\substack{x\to-2-0\\x<-2}}\frac{1}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\left\{\frac{1}{(-2-0-2)(-2-0+2)}=\frac{1}{-4\cdot(-0)}=\frac{1}{0}\right\}=+\infty;$$

$$f(-2+0)=\lim_{\substack{x\to-2+0\\x>-2}}\frac{1}{x^2-4}=\lim_{\substack{x\to-2+0\\x>-2}}\frac{1}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\left\{\frac{1}{(-2+0-2)(-2+0+2)}=\frac{1}{-4\cdot(+0)}=\frac{1}{-0}\right\}=-\infty.$$

Следовательно, в точке $x=-2$ функция имеет бесконечный разрыв (2-го рода).
Исследуем точку $x=2$.

$$f(2-0)=\lim_{\substack{x\to2-0\\x<2}}\frac{1}{x^2-4}=\lim_{\substack{x\to2-0\\x<2}}\frac{1}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\left\{\frac{1}{(2-0-2)(2-0+2)}=\frac{1}{-0\cdot4}=\frac{1}{-0}\right\}=-\infty;$$

$$f(2+0)=\lim_{\substack{x\to2+0\\x>2}}\frac{1}{x^2-4}=\lim_{\substack{x\to2+0\\x>2}}\frac{1}{(x-2)(x+2)}=$$

$$=\left\{\frac{1}{(2+0-2)(2+0+2)}=\frac{1}{+0\cdot 4}=\frac{1}{+0}\right\}=+\infty.$$

Следовательно, и в точке $x=2$ разрыв функции бесконечный.

Точка пересечения с осью Oy: $\begin{cases} x=0 \\ y=\dfrac{1}{x^2-4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow M_1\left(0;-\dfrac{1}{4}\right)$.

Функция четная, так как $f_1(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2-4}=f_1(x)$. Следовательно, график функции симметричен относительно оси Oy.

Поведение функции при $x\to\pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-4}=\left\{\frac{1}{(-\infty)^2-4}=\frac{1}{\infty}\right\}=0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-4}=\left\{\frac{1}{\infty^2-4}=\frac{1}{\infty}\right\}=0.$$

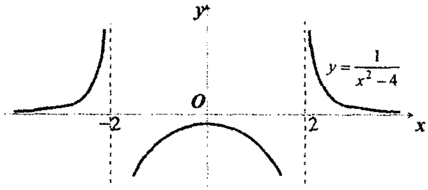


Рис. 6.6.

б) Элементарная функция $f_2(x)=\dfrac{3x-5}{x^2+2x+10}$ определена на всей числовой оси (хотя она дробная, но корни знаменателя комплексные). Поэтому она непрерывна на всей числовой оси, т.е. не имеет точек разрыва.

в) Элементарная функция $f_3(x)=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x}$ определена, а, следовательно, и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки

$$x=0\ \left(X=\{(-\infty;0)\cup(0;\infty)\}\right).$$

В точке $x=0$ функция имеет разрыв. Найдем односторонние пределы функции в этой точке:

$$f_3(0-0)=\lim_{\substack{x\to 0-0\\ x<0}}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\left\{\operatorname{arcctg}\frac{1}{0-0}=\operatorname{arcctg}(-\infty)\right\}=\pi;$$

$$f_3(0+0)=\lim_{\substack{x\to 0+0\\ x>0}}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\left\{\operatorname{arcctg}\frac{1}{0+0}=\operatorname{arcctg}(+\infty)\right\}=0.$$

Следовательно, разрыв функции конечный, при $x=0$ она имеет конечный скачок $|f_3(0-0)-f_3(0+0)|=|\pi-0|=\pi$.

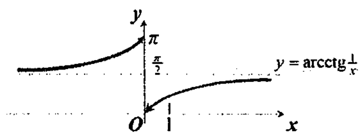


Рис. 6.7.

г) Функция $f_4(x)=\dfrac{|x-3|}{x-3}$ определена и непрерывна на всей числовой оси, кроме точки $x=3$ $\left(X=\{(-\infty;3)\cup(3;\infty)\}\right)$. Из этого следует, что в точке $x=3$ функция имеет разрыв.

Исследуем эту точку разрыва:

$$f(3-0)=\lim_{\substack{x\to 3-0\\ x<3}}\frac{|x-3|}{x-3}=\lim_{\substack{x\to 3-0\\ x<3}}\frac{-(x-3)}{x-3}=-1;$$

$$f(3+0)=\lim_{\substack{x\to 3+0\\ x>3}}\frac{|x-3|}{x-3}=\lim_{\substack{x\to 3-0\\ x<3}}\frac{x-3}{x-3}=1.$$

Следовательно, в точке $x=3$ функция имеет разрыв 1-го рода; ее скачок в этой точке разрыва конечный: $|f(3-0)-f(3+0)|=|-1-1|=2$.

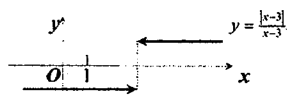


Рис. 6.8.

д) Логарифмическая функция определена только для положительных значений своего аргумента. Поэтому данная функция $f_5(x)=\lg(x^2+2x)$

будет определена и непрерывна для значений x, удовлетворяющих неравенству $x^2 + 3x > 0$. Решая это неравенство, найдем область определения и область непрерывности функции $X = \{(-\infty; -3) \cup (0; \infty)\}$.

Во всех точках отрезка $-3 \le x \le 0$ данная функция не определена, однако точками ее разрыва являются граничные точки $x = -3$ и $x = 0$.

Найдя односторонние пределы функции при стремлении x к точкам разрыва изнутри области определения функции

$$f_5(-3-0) = \lim_{\substack{x \to -3+0 \\ x > -3}} \lg(x^2 + 3x) = \{\lg((-3+0)^2 + 3(-3+0)) = \lg 0\} = -\infty;$$

$$f_5(0+0) = \lim_{\substack{x \to 0+0 \\ x > 0}} \lg(x^2 + 3x) = \{\lg((0+0)^2 + 3(0+0)) = \lg 0\} = -\infty,$$

заключаем, что в точках $x = -3$ и $x = 0$ функция имеет бесконечные разрывы (2-го рода).

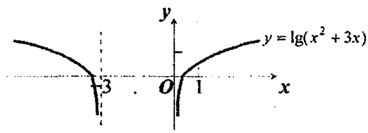


Рис. 6.9. ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Исследовать данные функции на непрерывность в указанных точках. Сделать схематический чертеж.

1. $f(x) = \dfrac{3x-2}{x+2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

2. $f(x) = \dfrac{2x+4}{3x+9}$, $x_1 = -1$, $x_2 = -3$.

Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики:

№	Функция	№	Функция
3	$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x<0,\\ \cos x, & \text{если } 0\le x<\frac{\pi}{2},\\ 1-x, & \text{если } x\ge\frac{\pi}{2}.\end{cases}$	4	$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x^2, & \text{если } x\le 2,\\ x, & \text{если } x>2.\end{cases}$
5	$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & \text{если } 0\le x\le 1,\\ 4-2x, & \text{если } 1<x<2.5,\\ 2x-7, & \text{если } 2.5x\le x<\infty.\end{cases}$	6	$f(x)=\begin{cases}2x+5, & \text{если } -\infty<x<-1,\\ \dfrac{1}{x}, & \text{если } -1\le x<\infty.\end{cases}$
7	$f(x)=\begin{cases}-2(x+1), & \text{если } x\le -1,\\ (x+1)^2, & \text{если } -1<x<0,\\ x, & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$	8	$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{если } \le 0,\\ x^2+1, & \text{если } 0<x\le 1,\\ 2, & \text{если } x>1.\end{cases}$
9	$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le -1,\\ \dfrac{2}{x-1}, & \text{если } x>-1.\end{cases}$	10	$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{если } x<0,\\ (x-1)^2, & \text{если } 0\le x\le 2,\\ 4-x, & \text{если } x>2.\end{cases}$

Дана функция. Найти ее точки разрыва, если они существуют, и скачок функции в каждой точке разрыва:

№	Функция	№	Функция
11	$f(x)=\dfrac{1}{x^3-3x^2-4x}$	12	$f(x)=\dfrac{x^2-x^3}{\lvert x-1\rvert}$
13	$f(x)=\lg(2x+1)$	14	$f(x)=\arcsin\dfrac{1}{x}$
15	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	16	$f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$

Исследовать данные функции на непрерывность и построить их графики:

17. $f(x)=\dfrac{4}{x^2-2x+1}$.

18. $f(x)=x+\dfrac{x+2}{\lvert x+2\rvert}$.

19. $f(x)=\dfrac{2\lvert x-1\rvert}{x^2-x^3}$.

20. $f(x)=2^{\frac{1}{x}}-1$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. Сформулируйте определение непрерывности функции в точке:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

3. Сформулируйте определения непрерывности функции справа (слева) в точке.
4. Сформулируйте необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке.
5. Какие точки называются точками разрыва функции?
6. Какого типа разрывы существуют и с чем они связаны?
7. Какие операции надо вспомнить, чтобы исследовать точку разрыва?
8. Какие операции, и в какой последовательности надо вспомнить, чтобы, исследуя точку разрыва, построить график функции?
9. Сформулируйте локальные основные свойства непрерывных функций.
10 . Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.
11. В чем заключается свойство перестановочности непрерывной функции с операцией предельного перехода?
12. Сформулируйте основные свойства функций, непрерывных на отрезке, и дайте геометрическое истолкование этим свойствам.
13. Для каких функций область непрерывности совпадает с областью определения функции?

Знания и умения, которыми должен владеть студент

1. Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Множество. Элементы теории доказательств

1.1. Классификация числовых множеств. Операции над множествами.
1.2. Точная верхняя и точная нижняя границы ограниченных числовых множеств.
1.3. Свойства множества вещественных чисел.
1.4. Абсолютная величина вещественного числа. Свойства.
1.5. Высказывание. Логические связки. Кванторы.
1.6. Необходимые и достаточные условия. Прямая и обратная теоремы.

2. Функции.

2.1. Функция как отображение множеств.

2.2. Функция числового аргумента.
2.3. Числовая последовательность.
2.4. Классификация функций.
2.5. Сложная функция.
2.6. Обратная функция; ее свойства.
2.7. Элементарные функции.

3. Предел.

3.1. Предел числовой последовательности.
3.2. Определение предела функции.
3.3. Бесконечно малые функции (бмф) и бесконечно большие функции (ббф).
3.4. Сравнение бмф и ббф.
3.5. Таблица эквивалентных бесконечно малых функций.

4. Непрерывность.

4.1. Непрерывность функции в точке и на промежутке.
4.2. Свойства непрерывных функций.
4.3. Точки разрыва и их классификация.

2. Знания на уровне доказательств и выводов

1. Свойства бмф и ббф.
2. Предельный переход и арифметические операции.
3. Предельный переход и неравенства.
4. Замечательные пределы.
5. Теоремы об эквивалентных бесконечно малых функциях.
6. Локальные свойства непрерывных функций.
7. Теорема о непрерывности сложной функции.
8. Непрерывность основных элементарных функций.
9. Глобальные свойства непрерывных функций.

3. Умения в решении задач

Студент должен уметь:

1. Проводить простейшее исследование элементарных функций (область определения, множество значений, четность, периодичность, нахождение обратной функции и т. п.).
2. Вычислять пределы на основе теорем о пределах и непрерывности функций.
3. Раскрывать неопределенности с помощью основных методов.
4. Сравнивать бмф и ббф.
5. Исследовать непрерывность функций.

Индивидуальные домашние задания

Задача I. Найти указанные пределы.

Задача II. Доказать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка малости.

Задача III. Найти предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

Задача IV. Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график.

Задача V. Исследовать данную функцию на непрерывность в указанных точках.

ВАРИАНТ 1

I. 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+11x+15}{3x^2+5x-12}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$.

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$. 8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+3}{5x+7}\right)^{x+1}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

II. $f(x)=2x^3,\ g(x)=\dfrac{5x^3}{4-x}$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos x}{2x^2}$.

IV. $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ x, & 0\le x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$

V. $f(x)=\dfrac{x-3}{x+4};\ x_1=-5,\ x_2=-4$.

ВАРИАНТ 2

I. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{x^3-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-4x^2+5}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+2x-5}{2x^2+x+7}$.

5. $\lim\limits_{z\to -\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$.

6. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$. 8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$.

II. $f(x)=\dfrac{x^2}{5+x},\ g(x)=\dfrac{4x^2}{x-1}$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$.

IV. $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le \frac{\pi}{2},\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi,\\ 2, & x\ge \pi.\end{cases}$

V. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-2};\ x_1=3,\ x_2=2$.

ВАРИАНТ 3	ВАРИАНТ 4
I. 1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{6+x-x^2}{x^3-27}$.	I. 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2-x-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-4x+3}$.	2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+2x-16}{x^3-8}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$.	3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2+7x-4}{x^5+2x-1}$.	4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-3x+4}{3x^2-2x+1}$.	5. $\lim\limits_{z\to-\infty}\dfrac{2x^2-x+7}{3x^4-5x^2+10}$.
6. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$.	6. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$.
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{1+2x}\right)^{-4x}$. 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{3x}$	7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^{2-3x}$.
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{2x^2}$.	8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x-1}{4x+1}\right)^{3x-1}$. 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{2\sin x}$.
II. $f(x)=\operatorname{arctg}^2 3x,\ g(x)=4x^2$.	II. $f(x)=\sin 3x-\sin x,\ g(x)=5x$.
III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg}2x}$.	III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^3+27x}$.
IV. $f(x)=\begin{cases}x+2, & x\le-1,\\ x^2+1, & -1<x\le 1,\\ -x+3, & x>1.\end{cases}$	IV. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ -(x-1)^2, & 0<x\le 2,\\ x-3, & x>2.\end{cases}$
V. $f(x)=\dfrac{x+7}{x-2};\ x_1=2,\ x_2=3$.	V. $f(x)=\dfrac{x-5}{x+3};\ x_1=-2,\ x_2=-3$.

ВАРИАНТ 5	**ВАРИАНТ 6**
I. 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-7x+6}{x^2-5x+6}$.	I. 1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{12-x-x^2}{x^3-27}$.
2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^4-x^2+x+1}{x^4-1}$.	2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^4-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-4x^2+28x}{5x^3+3x^2+x-1}$.	3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$.
4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x+5}$.	4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^3+7x^2+4}{x^4+5x-1}$.
5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{4x^3-2x^2+x}{3x^2-x}$.	5. $\lim\limits_{z\to \infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{3x^2+2x-5}$.
6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+4}}{3x^2-4x+1}$.	6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$.
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$. 8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x+8}{x-2}\right)^{x+4}$	7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$. 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+1}{3x-1}\right)^{2x+1}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{3x^2}$.	9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\sin 3x}$.
II. $f(x)=\cos 3x-\cos x,\ g(x)=7x^2$.	II. $f(x)=x^2-\cos 2x,\ g(x)=6x^2$.
III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}6x}{2x^2-3x}$.	III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{2x}$.
IV. $f(x)=\begin{cases}-2(x+1), & x\le -1,\\ (x+1)^3, & -1<x<0,\\ x, & x\ge 0.\end{cases}$	IV. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 2,\\ x+1, & x>2.\end{cases}$
V. $f(x)=4^{\frac{1}{3-x}}+2;\ x_1=2,\ x_2=3$.	V. $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}};\ x_1=0,\ x_2=2$.

ВАРИАНТ 7

I. 1. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+2x-1}{27x^3-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-3}{5x^2+3x-26}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^6-5x^2+2}{2x^3+4x-5}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+2}{x^4+3x^2-9}$.

6. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{1+2x}$. 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^{4x}$

9. $\lim\limits_{x\to1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

II. $f(x)=\operatorname{tg}2x,\ g(x)=\arcsin x$.

III. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^3-5x^2}$.

IV. $f(x)=\begin{cases}x+4, & x<-1,\\ x^2+2, & -1\le x<1,\\ 2x, & x\ge1.\end{cases}$

V. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1;\ x_1=3,\ x_2=4$.

ВАРИАНТ 8

I. 1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-2x-3}$.

2. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+7x+3}{5x^2-3x+4}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+5x^2-4x}{3x^2+11x-7}$.

5. $\lim\limits_{z\to-\infty}\dfrac{5x^2-4x+2}{4x^3+2x-5}$.

6. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$. 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^{5x}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\pi-2x}$.

II. $f(x)=1-\cos x,\ g(x)=3x^2$.

III. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg}3x}$.

IV. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le0,\\ (x+1)^2, & 0<x\le2,\\ -x+4, & x>2.\end{cases}$

V. $f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}-1;\ x_1=3,\ x_2=4$.

ВАРИАНТ 9

I. 1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{-x^2+x+2}$.

2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$.

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7x^2+5x+9}{1+4x-x^3}$.

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x^2+2x}{x^2+7x+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{3x}$. 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+3}{2x-4}\right)^{x+2}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^2}$.

II. $f(x)=\dfrac{3x}{1-x}$, $g(x)=\dfrac{x}{4+x}$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg}3x}$.

IV. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & x\le 0,\\ 0, & 0<x\le 2,\\ x-2, & x>2.\end{cases}$

V. $f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}+3;\ x_1=3,\ x_2=4$.

ВАРИАНТ 10

I. 1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$.

2. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+7x-4}{x^3+64}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-3x^2+10}{7x^3+2x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^2+3x+1}$.

5. $\lim\limits_{z\to -\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{4x^5-3x^3+2}$.

6. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\sqrt{3x+17}-\sqrt{2x+12}}{x^2+8x+15}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2x+1}$. 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-1}\right)^{x-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\operatorname{tg}x}$.

II. $f(x)=\dfrac{3x^2}{2+x}$, $g(x)=7x^2$.

III. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-5x+6}$.

IV. $f(x)=\begin{cases}2x^2, & x\le 0,\\ x, & 0<x\le 1,\\ 2+x, & x>1.\end{cases}$

V. $f(x)=7^{\frac{1}{5-x}}+1;\ x_1=4,\ x_2=5$.

ВАРИАНТ 11

I. 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2+x-6}$.

2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{2x^2+11+5}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2+5x-7}{2x^2-x+10}$.

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x^2+5x+7}{3x^4-2x^2+x}$.

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7x^5+6x^4-x^3}{2x^2+6x+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-1}{x+4}\right)^{3x+2}$. 8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x-3}{x+4}\right)^{x+3}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

II. $f(x)=\operatorname{tg} 2x,\ g(x)=\arcsin x$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2)}{x^3-5x^2}$.

IV. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1, \\ x^2+2, & -1\le x<1, \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

V. $f(x)=2^{\frac{1}{x-3}}+1;\ x_1=3,\ x_2=4$.

ВАРИАНТ 12

I. 1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^3+x-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3+4x^2-7x}{2x^2+7x-3}$.

5. $\lim\limits_{z\to -\infty}\dfrac{4-3x-2x^2}{3x^4+5x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{7-x}-\sqrt{7+x}}{\sqrt{7}\,x}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-1}\right)^{x+2}$. 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{7x+4}\right)^{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$.

II. $f(x)=1-\cos x,\ g(x)=3x^2$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$.

IV. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0, \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2, \\ -x+4, & x>2. \end{cases}$

V. $f(x)=5^{\frac{1}{x-3}}-1;\ x_1=3,\ x_2=4$.

ВАРИАНТ 13

I. 1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$. 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

II. $f(x)=\sin 8x,\ g(x)=\arcsin 5x$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1+2x)}$.

IV. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x<2,\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$

V. $f(x)=5^{\frac{2}{x-3}};\ x_1=3,\ x_2=4$.

ВАРИАНТ 14

I. 1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x-7}{3x^2+x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$.

5. $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$. 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$.

II. $f(x)=\sin 3x+\sin x,\ g(x)=10x$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$.

IV. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0,\\ x^2-1, & 0\le x<1,\\ -x, & x\ge 1.\end{cases}$

V. $f(x)=4^{\frac{2}{x-1}}-3;\ x_1=1,\ x_2=2$.

ВАРИАНТ 15

I. 1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2+x-20}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-7x+5}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x+9}{2x^2-x+4}$.

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{2x^4+3x^2+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{7-3x^4}{2x^3+3x^2-5}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^{2x-3}$. 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x-5}{3x+4}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$.

II. $f(x)=\sin 8x,\ g(x)=\arcsin 5x$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{\ln(1+2x)}$.

IV. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x<2,\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$

V. $f(x)=5^{\frac{2}{x-3}};\ x_1=3,\ x_2=4$.

ВАРИАНТ 16

I. 1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{4x^2+11x-3}{x^2+2x-3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x^2-9x+10}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{18x^2+5x}{8-3x-9x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{1+2x-x^4}$.

5. $\lim\limits_{z\to \infty}\dfrac{8x^4+7x^3-3}{3x^2-5x+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x}{x-3}\right)^{x-5}$. 8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+3}{4x-5}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$.

II. $f(x)=\sin 3x+\sin x,\ g(x)=10x$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 4x}{\operatorname{tg} 5x}$.

IV. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x<0,\\ x^2-1, & 0\le x<1,\\ -x, & x\ge 1.\end{cases}$

V. $f(x)=4^{\frac{2}{x-1}}-3;\ x_1=1,\ x_2=2$.

ВАРИАНТ 17

I. 1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+4x-1}{3x^2+x-2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4x^3-2x^2+5x}{3x^2+7x}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{11x^3+3x}{2x^2-2x+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x-7}{3x^4+2x^3+1}$.

6. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-4}{2x}\right)^{-3x}$. 8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-2}{3x+10}\right)^{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x-\sin 3x}{2x^2}$.

II. $f(x)=3\sin^2 4x,\ g(x)=x^2-x^4$.

III. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sin(x+2)}{x^3+8}$.

IV. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0,\\ \sin x, & 0\le x<\pi,\\ 3, & x\ge \pi.\end{cases}$

V. $f(x)=5^{\frac{4}{3-x}}+1;\ x_1=2,\ x_2=3$.

ВАРИАНТ 18

I. 1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-4x-5}{3x^2+2x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^4-5x^2+1}{x^2-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^2+4x-5}{4x^2-3x+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^2+3x+5}{4x^3-2x^2+1}$.

5. $\lim\limits_{z\to -\infty}\dfrac{5x^4-3x^2}{1+3x^2+2x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^{3x+4}$ 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x-3}{x+4}\right)^{6x+1}$

9. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\sin 2x}{\pi-4x}$.

II. $f(x)=\operatorname{tg}(x^2+2x),\ g(x)=x^2+2x$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{\operatorname{tg}4x}$.

IV. $f(x)=\begin{cases} -x+1, & x<-1,\\ x^2+1, & -1\le x\le 2,\\ 2x, & x>2.\end{cases}$

V. $f(x)=\dfrac{3x}{x-4};\ x_1=4,\ x_2=5$.

ВАРИАНТ 19	ВАРИАНТ 20
I. 1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x^2+4x-3}{2x^2+3x+1}$.	I. 1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-x-12}$.
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+5x-42}{x^2-5x+6}$.	2. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2-x-30}{x^3+125}$.
3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^4-4x^2+3}{2x^4+1}$.	3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x+2}{6x^2+5x+1}$.
4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6x^3+5x^2-3}{2x^2-x+7}$.	4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+4x-7}{x^4-2x^3+1}$.
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x+3}{x^3-4x^2-x}$.	5. $\lim\limits_{z\to -\infty}\dfrac{3x^4+5x}{2x^2-3x-7}$.
6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$.	6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$.
7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x-7}{x+1}\right)^{4x-2}$. 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x+3}{3x-1}\right)^{2x}$	7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{3-2x}$. 8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{6x+5}{x-10}\right)^{5x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos^3 4x}{3x^2}$.	9. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin 2x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} 2x}\right)$.
II. $f(x)=\arcsin(x^2-x),\ g(x)=x^3-x$	II. $f(x)=\sin 7x+\sin x,\ g(x)=4x$.
III. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{\operatorname{tg}(x-4)}$.	III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-\cos 4x}{3x^2}$.
IV. $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 0,\\ 2^x, & 0<x\le 2,\\ x+3, & x>2.\end{cases}$	IV. $f(x)=\begin{cases}-x+2, & x\le -2,\\ x^3, & -2<x\le 1,\\ 2, & x>1.\end{cases}$
V. $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-1};\ x_1=1,\ x_2=2$.	V. $f(x)=2^{\frac{3}{x+2}}+1;\ x_1=-2,\ x_2=-1$.

ВАРИАНТ 21	ВАРИАНТ 22
I. 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-9x+10}{x^2+3x-10}$.	I. 1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+x-5}{x^2-2x+1}$.
2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^3-64}$.	2. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{8x^3-1}{x^2-0.25}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$.	3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+4x}{x^3-3x+2}$.
4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8x^5-4x^3+3}{2x^3+x-7}$.	4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-7x+1}{x^3+4x^2-3}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+3}{3x^4-2x^2+x}$.	5. $\lim\limits_{z\to-\infty}\dfrac{2x^5-x^3}{4x^2+3x-6}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+16}-4}$.	6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$.
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2-3x}{5-3x}\right)^{x}$. 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x+7}{x+4}\right)^{4x}$	7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-x}\right)^{3x}$. 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{4x+5}\right)^{3x}$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$.	9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{x^2-x}$.
II. $f(x)=\sqrt{4+x}+2,\ g(x)=3x$.	II. $f(x)=\sin(x^2-2x),\ g(x)=x^4-8x$
III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x^3)}{2x^3}$.	III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\, 5x}{\mathrm{tg}\, 2x}$.
IV. $f(x)=\begin{cases}3x+4, & x\le -1,\\ x^2-2, & -1<x<2,\\ x, & x\ge 2.\end{cases}$	IV. $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 1,\\ (x-2)^2, & 1<x<3,\\ -x+6, & x\ge 3.\end{cases}$
V. $f(x)=2^{\frac{3}{x-2}}+2;\ x_1=2,\ x_2=3$.	V. $f(x)=3^{\frac{2}{x+1}}-2;\ x_1=-1,\ x_2=0$.

ВАРИАНТ 23

I. 1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-5x^2+11x-2}{3x^2-x-10}$.

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2+3x-28}{x^2-4x}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$.

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x^4-2x^3+3}{2x^2+3x-7}$.

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x+1}{x^3-5x^2+4x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{2x}$. 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{5x-7}{x+6}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 2x}{x\arcsin x}$.

II. $f(x)=\dfrac{2x}{3-x}$, $g(x)=2x-x^2$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\ln(1+2x)}$.

IV. $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<1,\\ x^2+2, & 1\le x\le 2,\\ -2x, & x>2.\end{cases}$

V. $f(x)=5^{\frac{3}{x+4}}+1;\ x_1=-5,\ x_2=-4$.

ВАРИАНТ 24

I. 1. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-5x-14}{2x^2-9x-35}$.

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+11x+10}{x^2-5x-14}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{14x^2+3x}{7x^2+2x+1}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^3+x^2-7}{2x^2-5x+3}$.

5. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2-x-3x^2}{x^3-16}$.

6. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x}\right)^{-2x}$. 8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3-4x}{2-x}\right)^{6x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin x}$.

II. $f(x)=\dfrac{x^2}{7+x}$, $g(x)=3x^3-x^2$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{\operatorname{tg} 4x}$.

IV. $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<-1,\\ x-1, & -1\le x\le 3,\\ -x+5, & x>3.\end{cases}$

V. $f(x)=\dfrac{x-4}{x+2};\ x_1=-2,\ x_2=-1$.

ВАРИАНТ 25

I. 1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-6x-45}{2x^2-3x-35}$.

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{3x^2+x-10}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^4-2x^2+x}{x^4+3x^2 2}$.

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4+2x^2-8}{8x^3-4x+5}$.

5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^2-10x+7}{2x^3-3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+4}\right)^{-x}$. 8. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{1-2x}{3-x}\right)^{-x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 5x-\cos x}{4x^2}$.

II $f(x)=\sin(x^2+5x)$, $g(x)=x^3-25x$

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\operatorname{tg}2x}$.

IV. $f(x)=\begin{cases} x, & x<-2, \\ -x+1, & -2\le x\le 1, \\ x^2-1, & x>1. \end{cases}$

V. $f(x)=\dfrac{x-4}{x+3}$; $x_1=-3$, $x_2=-2$.

ВАРИАНТ 26

I. 1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+x-15}{x^2-6x-27}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^2+x}{4x^3-5x^2+x}$.

3. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4-2x^2-7}{3x^4+3x+5}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^4+2x-4}{3x^2-4x+1}$.

5. $\lim\limits_{z\to -\infty}\dfrac{2x^3-3x+1}{x^5+4x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x+5}\right)^{x+1}$. 8. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{4+3x}{5+x}\right)^{7x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x+\sin x}{\arcsin x}$.

II. $f(x)=\cos x-\cos^3 x$, $g(x)=6x^2$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{\sin 2x}$.

IV. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\le 0, \\ -x^2+4, & 0<x<2, \\ x-2, & x\ge 2. \end{cases}$

V. $f(x)=\dfrac{x+5}{x-3}$; $x_1=3$, $x_2=4$.

ВАРИАНТ 27

I. 1. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2-2x-35}{2x^2+11x+5}$.

2. $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{2x^2-11x-6}{3x^2-20x+12}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4-5x^2-3x^5}{x^5+6x+8}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^3-2x+4}{2x^2+x-5}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-13}{x^7-3x^5-4x}$.

6. $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+2x}{3+2x}\right)^{-x}$. 8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{3x-1}{2x+5}\right)^{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{(\frac{\pi}{2}-x)^2}$.

II. $f(x)=\arcsin 2x,\ g(x)=8x$.

III. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^3-27}$.

IV. $f(x)=\begin{cases}0, & x\le-1,\\ x^2-1, & -1<x\le2,\\ 2x, & x>2.\end{cases}$

V. $f(x)=3^{\frac{4}{1-x}}+1;\ x_1=1,\ x_2=2$.

ВАРИАНТ 28

I. 1. $\lim\limits_{x\to-8}\dfrac{2x^2+15x-8}{3x^2+25x+8}$.

2. $\lim\limits_{x\to-6}\dfrac{x^2+2x-24}{2x^2+15x+18}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+5x^2-3x}{3x^2+x-10}$.

5. $\lim\limits_{z\to-\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^3+2x^2+5}$.

6. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{\sqrt{8+x}-3}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x+2}\right)^{x-2}$. 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-x}{2-10x}\right)^{5x}$

9. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg}x$.

II. $f(x)=1-\cos 4x,\ g(x)=x\sin 2x$.

III. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{\operatorname{tg}(5+x)}{x^2-25}$.

IV. $f(x)=\begin{cases}-1, & x<0,\\ \cos x, & 0\le x\le\pi,\\ 1-x, & x>\pi.\end{cases}$

V. $f(x)=\dfrac{4x}{x+5};\ x_1=-5,\ x_2=-4$.

ВАРИАНТ 29

I. 1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-2x-40}{x^2-3x-4}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x-4}{x^2-11x+18}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+10x-11}{3x^4-2x+5}$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-81}{3x^2+4x+2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^{3-2x}$.

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{9x-4}\right)^{2x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sin x+\sin 7x}$.

II. $f(x)=\sqrt{9-x}-3,\ g(x)=2x$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x^2}$.

IV. $f(x)=\begin{cases}2, & x<-1,\\ 1-x, & -1\le x\le 1,\\ \ln x, & x>1.\end{cases}$

V. $f(x)=6^{\frac{2}{4-x}};\ x_1=3,\ x_2=4$.

ВАРИАНТ 30

I. 1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x-3}{3x^2+10x+3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{7x^2-27x-4}$.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$.

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x+4}{3x^3-5x+1}$.

5. $\lim\limits_{z\to-\infty}\dfrac{3x^2-7x+2}{x^4+2x-4}$.

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4-2x}{1-2x}\right)^{x+1}$.

8. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x+5}{4x-2}\right)^{3x}$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{5x^2}$.

II. $f(x)=\cos 3x-\cos 5x,\ g(x)=x^2$.

III. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$.

IV. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^3, & 0<x\le 2,\\ x+4, & x>2.\end{cases}$

V. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2};\ x_1=2,\ x_2=3$.

Решение задач типового варианта

I. Найти указанные пределы.

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}$.

▲ $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{5x^2+13x+6}{3x^2+2x-8}=$

$$=\left\{\frac{5\cdot(-2)^2+13\cdot(-2)+6}{3\cdot(-2)^2+2\cdot(-2)-8}=\frac{0}{0};\ \begin{matrix}\text{необходимо разложить на множители}\\ \text{числитель и знаменатель}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{критический}\\ \text{множитель } x+2\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(5x+3)}{(x+2)(3x-4)}=$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{5x+3}{3x-4}=\left\{\frac{5\cdot(-2)+3}{3\cdot(-2)-4}\right\}=\frac{7}{10}.\ ▼$$

Замечание. Многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, обращаются в нуль при значении $x=-2$. Если $x=-2$ – корень многочлена, то этот многочлен делится на двучлен $x+2$ без остатка. По теореме Безу в этом случае каждый многочлен (в числителе и знаменателе) может быть представлен в виде произведения критического множителя $(x+2)$ на некоторый многочлен. Таким образом, нахождение предела сводится, прежде всего, к выделению в числителе и знаменателе критического множителя $(x+2)$, незримое присутствие которого и создает неопределенность $\frac{0}{0}$. Для разложения на множители можно воспользоваться теоремой Виета, или использовать деление «уголком» на «критический множитель»: $(x-(-2))=x+2$.

$$\begin{array}{r|l} 5x^2+13x+6 & x+2 \\ \underline{5x^2+10x} & 5x+3 \\ 3x+6 & \\ \underline{3x+6} & \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{r|l} 3x^2+2x-8 & x+2 \\ \underline{3x^2+6x} & 3x-4 \\ -4x-8 & \\ \underline{-4x-8} & \end{array}$$

2. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-10x-8}{4x^2+6x-64}$.

▲ $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-10x-8}{4x^2+6x-64}=\left\{\dfrac{3\cdot 4^2-10\cdot 4-8}{4\cdot 4^2+6\cdot 4-64}=\dfrac{0}{24}\right\}=0.$ ▼

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}.$

▲ При достаточно больших значениях x величина числителя определится членом $7x^4$, а роль остальных слагаемых тем незначительней, чем больше x. В знаменателе при росте x доминирующее значение приобретает слагаемое $6x^4$. Поэтому именно присутствие членов, содержащих x^4, является причиной возникновения неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$. В числителе и знаменателе вынести множитель x^4 за скобки и сократить на него, то неопределенность исчезнет:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}=\left\{\frac{\infty}{\infty};\ \begin{matrix}\text{старшая степень переменнойи в}\\ \text{числителе, и в знаменателе } m=4\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4\left(7+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^4}\right)}{x^4\left(6+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^4}}{6+\frac{3}{x^2}-\frac{7}{x^3}}=\left\{\frac{7+\frac{2}{\infty}+\frac{5}{\infty}}{6+\frac{3}{\infty}-\frac{7}{\infty}}=\frac{7+0+0}{6+0-0}\right\}=\frac{7}{6}.$$

(Слагаемые $\frac{2}{x}, \frac{5}{x^4}, \frac{3}{x^2}, -\frac{7}{x^3}$ есть бесконечно малые при $x\to\infty$).

Замечание. Проведенные преобразования фактически сводятся к делению числителя и знаменателя на старшую степень x. Часто это бывает достаточно для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$.

В сущности, к этому же приему можно отнести замену переменной $x=\frac{1}{t}$. Тогда $t=\frac{1}{x}\to 0$ при $x\to\infty$ и

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^4+2x^3+5}{6x^4+3x^2-7x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{t^4}+\frac{2}{t^3}+5}{\frac{6}{t^4}+\frac{3}{t^2}-\frac{7}{t}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7+2t+5t^4}{6+3t^2-7t^3}=\left\{\frac{7+2\cdot 0+5\cdot 0}{6+3\cdot 0-7\cdot 0}\right\}=\frac{7}{6}.\ ▼$$

4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}.$

▲ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{10x-3}{2x^3+4x+3}=$

$$=\left\{\frac{-\infty}{-\infty};\ \begin{matrix}\text{старшая степень переменной в числителе } n=1\\ \text{старшая степень переменной в знаменателе } m=3\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(10-\frac{3}{x}\right)}{x^3\left(2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{10-\frac{3}{x}}{x^2\left(2+\frac{4}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=\left\{\frac{10-0}{\infty(2+0+0)}=\frac{10}{\infty}\right\}=0.$$ ▼

5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}.$

▲ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^5+3x^3-4x}{3x^2-4x+2}=$

$$=\left\{\frac{-\infty}{\infty};\ \begin{matrix}\text{старшая степень переменной в числителе } n=5\\ \text{старшая степень переменной в знаменателе } m=2\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{x^2\left(3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3\left(2+\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x^4}\right)}{3-\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\left\{\frac{-\infty(2+0-0)}{3+0+0}=\frac{-\infty}{3}\right\}=-\infty.$$ ▼

6. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}.$

▲ $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{21+x}-5}{x^3-64}=\left\{\dfrac{\sqrt{21+4}-5}{4^3-64}=\dfrac{0}{0}\ \begin{matrix}\text{уничтожаем иррацио-}\\ \text{нальность в числителе}\end{matrix}\right\}=$

$$=\lim_{x\to4}\frac{(\sqrt{21+x}-5)(\sqrt{21+x}+5)}{(x^3-64)(\sqrt{21+x}+5)}=\lim_{x\to4}\frac{21+x-25}{(x-4)(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=\left\{\frac{0}{0}\ \begin{matrix}\text{сокращаем}\\ \text{на }(x-4)\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{(x^2+4x+16)(\sqrt{21+x}+5)}=\left\{\frac{1}{(4^2+4\cdot 4+16)\sqrt{21+4}+5}\right\}=\frac{1}{480}.\ \blacktriangledown$$

7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}$.

$\blacktriangle$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x}{2x-3}\right)^{2-5x}=$

$$=\left\{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{-\infty}=1^{\infty};\ \begin{matrix}\text{при раскрытии неопределенности } \frac{\infty}{\infty} \text{ было испльзовано}\\ \text{правило устного раскрытия данной неопределенности}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{используем}\\ \text{метод подгонки}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x}{2x-3}-1\right)^{2-5x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x-2x+3}{1x-3}\right)^{2-5x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{(2x-3)\cdot\frac{2-5x}{2x-3}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{2x-3}\right)^{2x-3}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-5x}{2x-3}}=\left(e^3\right)^{-\frac{5}{2}}=e^{-\frac{15}{2}}.\ \blacktriangledown$$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^{x}$.

$\blacktriangle$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)^{x}=\left\{\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=2^{\infty};\ \begin{matrix}\text{предел с числом}\\ e\ \text{ не связан}\end{matrix}\right\}=\infty.\ \blacktriangledown$

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

$$\blacktriangle\ \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\frac{\sin x}{x}\frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}. \ \blacktriangledown$$

II. Доказать, что функции

$$f(x) = \cos 2x - \cos^3 2x \text{ и } g(x) = 3x^2 - 5x^3 \text{ при } x \to 0$$

являются бмф одного порядка малости.

$$\blacktriangle \ \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{3x^2 - 5x^3} = \left\{\frac{\cos 0 - \cos^3 0}{0-0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x(1-\cos^2 2x)}{x^2(3-5x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot\sin^2 2x}{x^2(3-5x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{3-5x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{x} = \left\{\frac{1}{3-0}\cdot 2\cdot 2\right\} = \frac{4}{3}.$$

Так как предел отношения функций $f(x)$и $g(x)$ равен отличной от нуля постоянной, то в соответствии с определением данные функции – бесконечно малые одного порядка малости, т.е.

$$(\cos 2x - \cos^3 2x) = O\left(3x^2 - 5x^3\right). \ \blacktriangledown$$

III. Найти предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

$$\blacktriangle \ \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 8x}{\ln(1+4x)} = \left\{\begin{array}{l}\arcsin 8x \sim 8x\\ \ln(1+4x)\sim 4x\end{array}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{8x}{4x} = 2. \ \blacktriangledown$$

IV. Исследовать данную функцию на непрерывность и построить ее график:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -\infty < x \le 0,\\ (x-1)^2, & 0 < x \le 2,\\ 5-x, & 2 < x < +\infty. \end{cases}$$

▲ Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

Для точки $x_1 = 0$ имеем:

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} x^2 = 0, \ \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (x-1)^2 = 1, \ f(0) = x^2 \Big|_{x=0} = 0.$$

Замечание. Символ $x \to 0-0$ (или $x \to 0+0$) позволяет выбрать нужное аналитическое выражение для функции $f(x)$ из уравнений, ее определяющих.

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) \neq \lim_{x \to 0+0} f(x),$$

т. е. функция $f(x)$ в точке $x_1 = 0$ имеет разрыв первого рода.

Скачок $|f(0-0) - f(0+0)| = |0-1| = 1$.

Для точки $x_2 = 2$ находим:

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} (x-1)^2 = 1, \ \lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} (5-x) = 3,$$

$$f(2) = (x-1)^2 \Big|_{x=2} = 1.$$

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) \neq \lim_{x \to 2+0} f(x),$$

т. е. в точке $\underline{x_2 = 2}$ функция также имеет разрыв первого рода.

Скачок $|f(2-0) - f(2+0)| = |1-3| = 2$.

График функции строим без дополнительного исследования, так как все составные части графика известны.

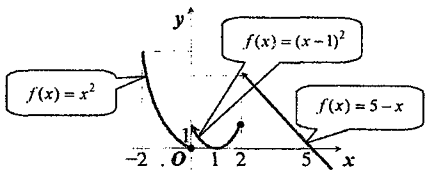


Рис. 6.10.

V. Исследовать функцию $f(x) = 8^{\frac{1}{x-3}} + 1$ на непрерывность в точках $x_1 = 3, \ x_2 = 4$.

▲ Для точки $x_1 = 3$ имеем

$$\lim_{x\to 3-0} f(x) = \lim_{x\to 3-0}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right) = \left\{8^{\frac{1}{3-0-3}}+1 = 8^{\frac{1}{-0}}+1 = 8^{-\infty}+1 = \tfrac{1}{8^{\infty}}+1 = 0+1\right\} = 1,$$

$$\lim_{x\to 3+0} f(x) = \lim_{x\to 3+0}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right) = \left\{8^{\frac{1}{3+0-3}}+1 = 8^{\frac{1}{+0}}+1 = 8^{+\infty}+1\right\} = \infty,$$

т. е. в точке $x_1 = 3$ функции $f(x)$ терпит бесконечный разрыв ($x_1 = 3$ – точка разрыва второго рода).

Для точки $x_2 = 4$ имеем:

$$\lim_{x\to 4-0} f(x) = \lim_{x\to 4-0}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right) = \left\{8^{\frac{1}{4-0-3}}+1 = 8+1\right\} = 9,$$

$$\lim_{x\to 4+0} f(x) = \lim_{x\to 4+0}\left(8^{\frac{1}{x-3}}+1\right) = \left\{8^{\frac{1}{4+0-3}}+1 = 8+1\right\} = 9, \ f(4) = 8^{\frac{1}{4-3}}+1 = 9.$$

Итак, $f(4-0) = f(4+0) = f(4)$ – предел слева равен пределу справа и равен значению функции в точке. Функция $f(x)$ непрерывна при $x = 4$. ▼

Дополнение к теме 6

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на интервале*** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a;b]$, если она непрерывна на интервале $(a;b)$ и в точке a непрерывна справа, а в точке b – непрерывна слева.

Функция, непрерывная на отрезке $[a;b]$, обладает следующими свойствами:

1) она ограничена на отрезке $[a;b]$ (I теорема Вейерштрасса);

2) достигает на $[a;b]$ наименьшего m и наибольшего M значений (II теорема Вейерштрасса);

3) если $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то существует такая точка $c \in (a;b)$, что $f(c) = 0$ (I теорема Больцано-Коши);

4) для любого числа A, удовлетворяющего неравенству $m \le A \le M$, существует такая точка $c \in (a;b)$, для которой $f(c) = A$ (II теорема Больцано-Коши).

Для функции непрерывной и строго монотонной на промежутке X существует обратная функция $x = \varphi(y)$ непрерывная и строго монотонная (в том же смысле) на промежутке Y изменения функции $y = f(x)$.

Примеры решения задач

Пример 1. Показать, что уравнение $x^3 - 3x + 1 = 0$ на промежутке $[1; 2]$ имеет вещественный корень, и вычислить его значение с точностью до 0.1.

▲ Оценим значение функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$ на концах заданного промежутка:

$$f(1) = x^3 - 3x + 1\big|_{x=1} = 1 - 3 \cdot 1 + 1 = -1 < 0,$$

$$f(2) = x^3 - 3x + 1\big|_{x=2} = 2^3 - 3 \cdot 2 + 1 = 3 > 0.$$

Так как на отрезке $[1; 2]$ функция $f(x) = x^3 - 3x + 1$ непрерывна и на его концах принимает значения разных знаков, то согласно I теореме Больцано-Коши внутри этого промежутка есть, по крайней мере, одна точка, в которой функция обращается в нуль. Эта точка и есть вещественный корень данного уравнения.

Для его нахождения с заданной точностью промежуток $[1; 2]$ разделим точками 1.1; 1.2; …; 1.9 и в каждой из них определим знак функции $f(x) = x^3 - 3x + 1$:

X	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
Знак $f(x)$	–	–	–	–	–	+	+	+	+

Так как $f(1.5) < 0$, а $f(1.6) > 0$, то вещественный корень x_0 данного уравнения расположен между 1.5 и 1.6: $1.5 < x_0 < 1.6$. ▼

Пример 2. На отрезке $[-1; 1]$ задана функция

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{при } -1 \le x \le 0, \\ -x^2 & \text{при } 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Принимает ли функция наибольшее и наименьшее значения на заданном отрезке? Каковы эти значения?

▲ $\sup\limits_{-1\le x\le 1} f(x)=1$, $\inf\limits_{-1\le x\le 1} f(x)=-1$ и функция достигает наибольшего значения при $x=0$ и наименьшего значения при $x=1$.

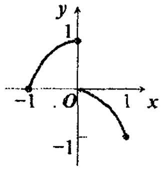


Рис. 1. ▼

Замечание. Отметим, что приведенная функция не является непрерывной на отрезке $[-1;1]$ (рис. 1) однако она ограничена и достигает наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке, значит, условие непрерывности в теоремах Вейерштрасса является достаточным, но не необходимым.

Пример 2. Ограничена ли функция $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2+1}{2x}+2^{\sin x}-x^2$ на отрезке $[1;5]$? Достигает ли она наименьшего и наибольшего значений на этом отрезке?

▲ Данная функция непрерывна на отрезке $[1;5]$ как сумма трех непрерывных на этом отрезке функций. Тогда по теоремам Вейерштрасса она ограничена на этом отрезке и достигает на нем наименьшего и наибольшего значений. ▼

Пример 3. Принимает ли функция $f(x)=\cos\pi x-\dfrac{x^5}{27}+1$ значение 5 внутри отрезка $[-3;3]$?

▲ Данная функция непрерывна на отрезке $[-3;3]$ и на его концах принимает значения

$$f(-3)=\left(\cos\pi x-\frac{x^5}{27}+1\right)\Bigg|_{x=-3}=\cos(-3\pi)-\frac{(-3)^5}{27}+1=-1+9+1=9;$$

$$f(3)=\left(\cos\pi x-\frac{x^5}{27}+1\right)\Bigg|_{x=3}=\cos(3\pi)-\frac{3^5}{27}+1=-1-9+1=-9.$$

Т. к. $-9<5<9$, то по II теореме Больцано-Коши найдется хотя бы одно значение x, такое, что $f(x)=5$. ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Имеет ли уравнение хотя бы один корень:

а) $x^4-3x^2+2x-1=0$ на отрезке $[1; 2]$;

б) $8^x-3\cdot 2^x-16=0$ на отрезке $[0; 2]$;

в) $\sin x - x+1=0$ на отрезке $[0; \pi]$?

Ответ: а) да; б) да; в) да.

2. Доказать, что уравнение $2^x=4x$ имеет по крайней мере два вещественных корня.

3. Доказать, что уравнение $x^3-2x-1=0$ на промежутке $[1; 2]$ имеет вещественный корень и найти его значение с точностью до 0.1.

Ответ: $1.5<x<1.6$.

4. Будет ли ограничена на отрезке $[0; 100]$ функция

$$f(x)=5^{x^2}\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}+(x^2-x+2)\sin\sqrt{3+x^2}\ ?$$

Ответ: Да.

5. Принимает ли функция $f(x)=\begin{cases}-x^2+1 & \text{при } -1\le x<0,\\ 0 & \text{при } x=0,\\ x^2-1 & \text{при } 0<x<1\end{cases}$ наименьшее и наибольшее значения в области ее задания?

Ответ: Нет.

6. Принимает ли функция $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\sin\pi x+3$ значение $\frac{7}{3}$ внутри отрезка $[-2; 2]$?

Ответ: Да.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Контрольная работа «Пределы» (1 час)

Найти пределы:

ВАРИАНТ 1

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2+4x+1}$. 2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x-2}{3x^2+2x-8}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-4}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-x+1}{x^2+2x-5}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\sin 3x\,\mathrm{ctg}\,2x$.

6. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x-1}\right)^{4x}$.

ВАРИАНТ 2

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-2}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{2x^2-x-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{3-2x}-3}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+x-4}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\sin^2 3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{2}{x+4}\right)^{2x-5}$.

ВАРИАНТ 3

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-5x+1}$. 2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{10x-3x^2-8}{3x^2-8x+4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{9-x^2}-3}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+3x-1}{2x^3+x^2-4}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{3x-4}$.

ВАРИАНТ 4

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-2}{x^2-5x+4}$. 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2-x-3}{x^2-3x-4}$.

3. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+6}-2}{x^2-4}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2+2x-3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{\mathrm{tg}^2\, 3x}$. 6. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+5}\right)^{4-x}$.

ВАРИАНТ 5

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-4x+5}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{7x-x^2-12}{2x^2-11x+15}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-4}{x^2-9}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2+2x-5}{x^4+5x^2-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}\,5x}{3x}$. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{4}{3x-1}\right)^{x+2}$.

ВАРИАНТ 6

1. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+1}{2x^2-3x-5}$. 2. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{3-8x-3x^2}{x^2+x-6}$

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{2x+1}-3}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+3x+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{1-\cos 4x}}{\sin^2 3x}$.

6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+5}\right)^{3x-2}$.

ВАРИАНТ 7

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+2x-3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-17x+35}{x^2-x-20}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9-x}-3}{\sqrt{x+4}-2}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^3+3x-4}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 6x}{x\,\mathrm{tg}\,2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{5-2x}$.

ВАРИАНТ 8

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x+1}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{4-3x^2-x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{2-\sqrt{x+1}}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-8x+1}{3x^3-x+4}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\arcsin 2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+2}\right)^{2x-4}$.

ВАРИАНТ 9

1. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x^2+5x+2}$. 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{5x^2+6x+1}{3x^2+5x+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{4-x^2}-2}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{2x^2+x-3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 3x}{1-\cos 4x}$. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1-\dfrac{2}{3x-1}\right)^{1-4x}$.

ВАРИАНТ 10

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-3}{x^2-4}$. 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5-\sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2x+1}-3}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2-3x-x^2}{2x^3+x-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x}{3x\sin x}$. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{2}{3x-4}\right)^{1-6x}$.

ВАРИАНТ 11

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-3}{3x^2+x+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2-9}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-4x^5+1}{2x^5+3x^3-x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 4x}{\sin^2 3x}$. 6. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{3x+1}$.

ВАРИАНТ 12

1. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-3x-2}{x^2-3x+2}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^2+2x-3}{x^2+x-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-\sqrt{4-3x}}{7x}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x^3+3x^2-1}{2x^3-3x+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\sin 3x}$. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\ln\left(\dfrac{x+2}{x+3}\right)^{2x+3}$.

ВАРИАНТ 13

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x^2-2x-3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2+10x+5}{x^2-2x-3}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{5x-1}-3}{x^2-2x}$. 4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^6-3x^2-2}{2x^6+4x+5}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{\operatorname{tg}^2 5x}$. 6. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+1}{2x-5}\right)^{x-1}$.

ВАРИАНТ 14

1. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$.

2. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{2x^2+6x+5}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{6x^5-3x^2+1}{3x^5-2x+3}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} 3x}{4x}$. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\ln\left(\dfrac{2-4x}{1-4x}\right)^{x+3}$.

ВАРИАНТ 15

1. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$.

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2-6x+2}{x^2+5x+6}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{4x+1}-3}$. 4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^3-4x^2+5}{3x^4+2x^2-x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{4x^2}$. 6. $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x-2}\right)^{3x}$.

ВАРИАНТ 16

1. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$.

2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{4x^2+9x+2}{x^2-3x-10}$.

3. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 5x}{3x^2}$. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\ln\left(\dfrac{2x-3}{2x-1}\right)^{x}$.

ВАРИАНТ 17 1. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$. 2. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2-6x-7}$. 3. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x^2}-3}{x^2}$. 4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^5-4x^3+2}{3x^4-2x+3}$ 5. $\lim\limits_{z\to0}\dfrac{1-\cos5x}{x\,\mathrm{tg}\,2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$.	**ВАРИАНТ 18** 1. $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{2x^2-9x-18}{x^2-7x+6}$. 2. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+3x-7}$. 3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x+10}-4}{x^2-4}$. 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-4x+1}{x^3-2x^2-1}$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\sin5x\,\mathrm{ctg}\,3x$. 6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{4x+5}{4x-1}\right)^{x+3}$
ВАРИАНТ 19 1. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{3x^2-17x-28}{x^2-9x+14}$. 2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-4x-3}$. 3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{4x-3}-3}$. 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^5-3x^2+1}{2x^5-2x+3}$. 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2}{\sin3x\,\mathrm{tg}\,2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to1}(3x-2)^{\frac{5x}{x-1}}$.	**ВАРИАНТ 20** 1. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-8x-3}{x^2-x-6}$. 2. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-6x+5}{2x^2-7x-18}$. 3. $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-49}{\sqrt{2x+11}-5}$. 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^3-4x^2+1}{6x^3+3x+2}$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\sin8x\,\mathrm{ctg}\,x$. 6. $\lim\limits_{x\to3}(3x-8)^{\frac{x+1}{x-3}}$.
ВАРИАНТ 21 1. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-x-6}{2x^2+x-6}$. 2. $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-4x+3}$. 3. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$. 4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^5-x^2+x}{x^4+2x+5}$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\mathrm{arctg}\,3x}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^x$.	**ВАРИАНТ 22** 1. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$. 2. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{4x^2-7x-2}{x^2-7x+10}$. 3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$. 4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6x^3-2x+7}{3x^3-5x+2}$ 5. $\lim\limits_{x\to0}\mathrm{tg}^2\,3x\,\mathrm{ctg}^2\,2x$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+4}\right)^{x-1}$
ВАРИАНТ 23 1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{3x^2+x-2}{3x^2+4x+1}$. 2. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+16}$. 3 $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$. 4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{7x^4-2x^3+2}{x^4+2x}$. 5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos8x}{1-\cos2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{x+3}$.	**ВАРИАНТ 24** 1. $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$. 2. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2+x+4}{2x^2+x-3}$. 3. $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{\sqrt{2x}-2}$. 4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7+6x-5}{4x^7+2x^3-3}$. 5. $\lim\limits_{x\to0}3x\,\mathrm{ctg}\,7x$. 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x-4}\right)^{x-3}$.

ВАРИАНТ 25

1. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$.

2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-3x+2}{4x-3x^2-1}$.

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{x}-2}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x+5}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{5x+1}{5x-1}\right)^{x-4}$.

ВАРИАНТ 26

1. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{2x^2+9x+4}{x^2-x-20}$. 2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2+x-2}{x^2-2x+3}$

3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x^2-x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 2x}{1-\cos 4x}$. 6. $\lim\limits_{x\to 1}(3x-2)^{\frac{x}{x^2-1}}$.

ВАРИАНТ 27

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-4x+3}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-4}{3x^2-7x+2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$.

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{6x^4-4x^3+8}{2x^3-3x^2+1}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{2x\sin 5x}$. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\ln\left(\dfrac{4+3x}{1+3x}\right)^{x-2}$.

ВАРИАНТ 28

1. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2+10x+8}{2x^2-3x-2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$.

4. $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+5}{6x^4+2x^3-1}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,\mathrm{tg}\,2x}{1-\cos 3x}$. 6. $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{x^2}{x-2}}$.

ВАРИАНТ 29

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$. 2. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2-2x-5}{x^2+5x+4}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$.

4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2+3x^2-x^5}{2x+x^2-3x^5}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 3x\,\mathrm{ctg}^2\,5x$. 6. $\lim\limits_{x\to \infty}\ln\left(\dfrac{x+3}{x-4}\right)^{x}$.

ВАРИАНТ 30

1. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-x-12}{x^2+5x+6}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{3x^2-5x-10}$.

3. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$. 4. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3+7x-4}{6x^3-3x^2+2}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\mathrm{arctg}^2\,2x}$. 6. $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{x(3x-3)}$.

И. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

1. ПРОИЗВОДНАЯ ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ФОРМУЛЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Основные теоретические сведения

1.1. Определение производной

Возьмем в области определения X функции $y = f(x)$ некоторое фиксированное (исходное) значение x_0 аргумента. Пусть $x \in X$ – новое значение аргумента.

Разность $x - x_0$ называется ***приращением аргумента*** и обозначается Δx. Итак,

$$\Delta x = x - x_0 .$$

Аналогично разность между значениями функции при новом значении аргумента x и при исходном значении x_0 аргумента называется ***приращением функции*** в точке x_0 и обозначается $\Delta f(x_0)$ или Δy. Таким образом,

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x).$$

Замечание. Приращение аргумента Δx есть приращение абсциссы, а приращение функции Δy есть приращение ординаты точки M кривой $f(x)$.

Разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ также является функцией аргумента Δx.

Определение. ***Производной*** функции $y = f(x)$ ***в данной точке*** x называется предел (если он существует) отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю.

Обозначение: $f'(x)$, $y'(x)$, y'_x, y', $\dfrac{dy}{dx}$.

Таким образом, по определению

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$. Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

1.2. Физический смысл производной

Определение 1. ***Средней скоростью*** изменения функции $y=f(x)$ при переходе независимой переменной от значения x к значению $x+\Delta x$ называется отношение приращения Δy функции к приращению Δx независимой переменной: $V_{\text{ср}}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Определение 2. ***Истинной*** (***мгновенной***) скоростью изменения функции $y=f(x)$ при данном значении x называется предел, к которому стремится средняя скорость изменения функции при стремлении к нулю Δx: $V=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Таким образом, производная $f'(x)$ – это скорость изменения функции $y=f(x)$ в точке x_0(иными словами, скорость изменения зависимой переменной y по отношению к изменению независимой переменной x в точке x_0).

В частности, если x – время, $y=f(x)$ – координата точки, движущейся по прямой линии, в момент x, то $f'(x_0)$ – мгновенная скорость точки в момент времени x_0.

1.3. Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной состоит в том, что производная функции $f(x)$ при данном значении x_0 аргумента равна угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0;\, f(x_0))$, т. е.

$$f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha,$$

где α – величина угла, образованного касательной с положительным направлением оси Ox.

Поэтому уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, где $y_0=f(x_0)$, имеет вид $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$.

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0; y_0)$ перпендикулярно к касательной, называется нормалью к графику функции $y=f(x)$ в этой точке.

Если $f'(x_0)\neq 0$, то уравнение нормали записывается в виде

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0).$$

Когда $f'(x_0)=0$, нормаль имеет уравнение $x=x_0$.

Углом между кривыми в точке их пересечения называют угол между касательными к кривым в этой точке.

Из определения производной функции в точке вытекает и способ ее вычисления. А именно, чтобы вычислить производную функции $y=f(x)$, $x\in X$, в точке $x\in X$, нужно:

1) значению аргумента x дать некоторое приращение $\Delta x\neq 0$ и получить новое значение аргумента $x+\Delta x\in X$;

2) найти соответствующее приращение функции в точке x:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x);$$

3) составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (приращение функции к вызвавшему его приращению аргумента);

4) вычислить предел этого отношения при $\Delta x\to 0$, если он существует, т.е. производную функции f в точке x

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

1.4. Односторонние производные

Пределы

$$\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \text{ и } \lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

называются соответственно ***левосторонней и правосторонней производными функции $y=f(x)$ в точке*** x_0 **и обозначаются** $f'(x_0-0)$ и $f'(x_0+0)$. Эти пределы называют также ***односторонними производными функции в точке*** x_0.

Если указанные пределы конечны и $f'(x_0-0)\neq f'(x_0+0)$, то для графика функции в точке x_0 существуют правосторонняя касательная линия и левосторонняя касательная линия.

Для того чтобы в точке x_0 существовала производная $f'(x)$, необходимо и достаточно, чтобы в точке x_0 функция $y=f(x)$ имела правую и левую производные, и эти производные были равны между собой:

$$f'(x_0-0)=f'(x_0+0)=f'(x_0).$$

Если предел $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ равен $+\infty$ или $-\infty$, то говорят, что в точке x_0 функция $y=f(x)$ имеет ***бесконечную производную***. Геометрически это означает, что касательная к графику функции в точке $M_0(x_0;\ f(x_0))$ перпендикулярна оси Ox.

Примеры решения задач

Пример 1.1. Пользуясь определением, вычислить производные следующих функций в точке x_0: а) $y=3x^2-4x$; б) $y=\dfrac{1}{x}$; в) $y=\sqrt{x}$.

▲ а) Для функции $y=3x^2-4x$ область определения $X=(-\infty;\infty)$:

1) $x_0\in X$, $f(x_0)=3x_0^2-4x_0$; $x_0+\Delta x_0\in X$,

$f(x_0+\Delta x)=3(x_0+\Delta x)^2-4(x_0+\Delta x)=3x_0^2+6x_0\Delta x+3\Delta x^2-4x_0-4\Delta x$;

2) $\Delta y=(3x_0^2+6x_0\Delta x+3\Delta x^2-4x_0-4\Delta x)-(3x_0^2-4x_0)=$

$=6x_0\Delta x+3\Delta x^2-4\Delta x$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{6x_0\Delta x+3\Delta x^2-4\Delta x}{\Delta x}=6x_0+3\Delta x-4$;

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6x_0+3\Delta x-4)=6x_0-4$.

Следовательно, $(3x^2-4x)'\big|_{x=x_0}=6x_0-4$.

б) Для функции $y=\dfrac{1}{x}$ область определения $X=\{(-\infty;0)\cup(0;\infty)\}$:

1) $x_0\in X$, $f(x_0)=\dfrac{1}{x_0}$; $x_0+\Delta x\in X$, $f(x_0+\Delta x)=\dfrac{1}{x_0+\Delta x}$;

2) $\Delta y=\dfrac{1}{x_0+\Delta x}-\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)}$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-\dfrac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}$;

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(-\dfrac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}\right)=-\dfrac{1}{x_0^2}$.

Следовательно, $\left.\left(\dfrac{1}{x}\right)'\right|_{x=x_0}=-\dfrac{1}{x_0^2}$.

в) Для функции $y=\sqrt{x}$ область определения $X=[0;\infty)$:

1) $x_0\in X$, $f(x_0)=\sqrt{x_0}$; $x_0+\Delta x\in X$, $f(x_0+\Delta x)=\sqrt{x_0+\Delta x}$;

2) $\Delta y=\sqrt{x_0+\Delta}-\sqrt{x_0}$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}$;

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}}{\Delta x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x_0+\Delta x}-\sqrt{x_0}\right)\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0+\Delta x-x_0}{\Delta x\left(\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Следовательно, $\left.\left(\sqrt{x}\right)'\right|_{x=x_0}=\dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$. ▼

Пример 1.2. Пользуясь определением, вычислить производную функции $y=\sqrt[3]{x-2}$ в точке $x=2$.

▲ Для функции $y=\sqrt[3]{x-2}$ область определения $X=(-\infty;\infty)$:

1) $x=2\in X$, $f(2)=\left(\sqrt[3]{x-2}\right)_{x=2}=0$;

$2+\Delta x\in X$, $f(2+\Delta x)=\left(\sqrt[3]{x-2}\right)_{2+\Delta x}=\sqrt[3]{2+\Delta x-2}=\sqrt[3]{\Delta x}$;

2) $\Delta y=\sqrt[3]{\Delta x}-0=\sqrt[3]{\Delta x}$;

3) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$;

4) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}=\left\{\dfrac{1}{0}\right\}=+\infty$.

Итак, заданная функция в точке $x=2$ имеет бесконечную производную. Этот факт, в частности, свидетельствует о том, что в точке $x=2$ график функции $y=\sqrt[3]{x-2}$ имеет вертикальную касательную (рис. 1.1).

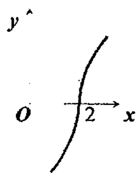


Рис. 1.1. ▼

Пример 1.3. Исследовать дифференцируемость функции в указанной точке:

а) $y=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0,\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$ в точке $x=0$;

б) $y=\begin{cases} x^2 & \text{при } x\geq 0,\\ x^3 & \text{при } x<0\end{cases}$ в точке $x=0$;

в) $y=\sqrt{1-\cos 2x}$ в точке $x=0$;

г) $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ в точке $x=1$.

▲ а) Функция дифференцируема в точке, если в этой точке ее производная существует и конечна. Поэтому найдем значение производной заданной функции в точке $x=0$.

1) $x=0\in X$, $f(0)=0$; $0+\Delta x\in X$, $f(0+\Delta x)=\Delta x\sin\left(\dfrac{1}{\Delta x}\right)$;

2) $\Delta y = \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x} - 0 = \Delta x \sin\frac{1}{\Delta x}$;

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \sin\frac{1}{\Delta x}$;

4) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\frac{1}{\Delta x}$.

Так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \sin\frac{1}{\Delta x}$ не существует, то не существует и производная, следовательно, в точке $x = 0$ функция не дифференцируема. В окрестности точки $x = 0$ функция совершает бесконечно много колебаний. В этой точке график функции касательной не имеет.

б) Слева и справа от точки $x = 0$ функция задана по-разному. Поэтому исследование ее дифференцируемости в этой точке целесообразно провести при помощи односторонних производных. Найдем значения левосторонней и правосторонней производных заданной функции в точке $x = 0$:

$$f'(0+0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{(0+\Delta x)^2 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+0} \Delta x = 0;$$

$$f'(0-0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{(0+\Delta x)^3 - 0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-0} (\Delta x)^2 = 0.$$

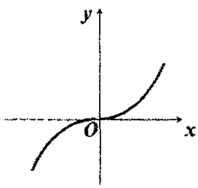


Рис. 1.2.

Т.к. $f'(0+0) = f'(0-0)$, то функция в точке $x = 0$ дифференцируема. В этой точке касательная к графику функции совпадает с осью Ox (рис. 1.2).

в) Для нахождения производной функции $y = \sqrt{1 - \cos 2x}$ в точке $x = 0$ предварительно найдем приращение функции Δy, придав аргументу некое приращение Δx:

$$\Delta y = \sqrt{1 - \cos 2\Delta x} - \sqrt{1 - \cos 0} = \sqrt{2\sin^2 \Delta x} = \sqrt{2}|\sin \Delta x| =$$

$$=\begin{cases} \sqrt{2}\sin\Delta x \text{ при } \Delta x \ge 0, \\ -\sqrt{2}\sin\Delta x \text{ при } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Дальнейшее исследование удобнее вести при помощи односторонних производных:

$$f'(0+0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0+0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0+0\\ \Delta x>0}}\frac{\sqrt{2}\sin\Delta x}{\Delta x}=\sqrt{2};$$

$$f'(0-0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0-0\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0-0\\ \Delta x<0}}\frac{-\sqrt{2}\sin\Delta x}{\Delta x}=-\sqrt{2}.$$

Односторонние производные в точке $x=0$ не равны, следовательно, функция в этой точке не дифференцируема. График функции в этой точке имеет две касательные: правостороннюю и левостороннюю (рис. 1.3).

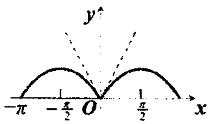


Рис. 1.3

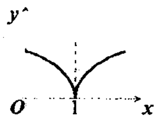


Рис. 1.4

г) Для нахождения производной функции $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ в точке $x=1$ придадим аргументу приращение Δx и вычислим отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{(1+\Delta x-1)^2}-\sqrt[3]{(1-1)}}{\Delta x}=\frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}{\Delta x}=\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}.$$

Поскольку

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0-0\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0-0\\ \Delta x<0}}\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}=-\infty,\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0+0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0+0\\ \Delta x>0}}\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}=+\infty,$$

то $f'(0-0)=-\infty$, $f'(0+0)=+\infty$

В точке $x=1$ функция имеет односторонние бесконечные производные, касательная к графику функции в этой точке перпендикулярна оси Ox (рис. 1.4).

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Исходя из определения, найти производные следующих функций в точке x_0: а) $y=x^2+5x-1$; б) $y=\frac{1}{x^2}$; в) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$; г) $y=\sin 3x$.

Ответ: а) $2x+5$; б) $-\frac{2}{x^3}$; в) $-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$; г) $3\cos 3x$.

Пользуясь определением, вычислить производные функций в указанных точках:

№	Функция	*Ответ*
2	$y=x^3+2$ в точке $x=2$	12
3	$y=\sqrt{x}$ в точках $x=x_0$ и $x=1$	$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}$; $\frac{1}{2}$
4	$y=\sqrt[5]{x-1}$ в точке $x=1$	$+\infty$
5	$y=3^x$ в точке $x=x_0$	$3^{x_0}\ln 3$

6. Вычислить $y'(\frac{\pi}{2}+0)$ и $y'(\frac{\pi}{2}-0)$, если $y=|\cos x|$.

Ответ: $y'(\frac{\pi}{2}+0)=1$, $y'(\frac{\pi}{2}-0)=-1$.

Исследовать дифференцируемость функции в указанной точке:

7. $y=\sqrt[3]{x^2}$ в точке $x=0$.

Ответ: недифференцируема ($y'(0-0)=-\infty$, $y'(0+0)=+\infty$).

8. $y=x|x|$ в точке $x=0$. ***Ответ***: функция дифференцируема ($y'(0)=0$).

9. $y=\begin{cases}\sin x & \text{при } x\ge 0\\ -x & \text{при } x<0\end{cases}$ в точке $x=0$.

Ответ: недифференцируема ($y'(0-0)=-1$, $y'(0+0)=1$.

Сводка формул для вычисления производных

Основные правила дифференцирования

A

1. $(C)'=0$; $(x)'=1$; $(Cu)'=Cu'$;

2. $(u \pm v)'=u' \pm v'$;

3. $(u \cdot v)'=u'v+uv'$;

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

4а. $\left(\dfrac{C}{v}\right)'=-C\dfrac{v'}{v^2}$ $(v \neq 0)$; 4б. $\left(\dfrac{u}{C}\right)'=\dfrac{1}{C}u'$;

Производные тригонометрических функций	*Производные обратных тригонометрических функций*
B 1. $(\sin u)'=\cos u \cdot u'$; 2. $(\cos u)'=-\sin u \cdot u'$; 3. $(\mathrm{tg}\, u)'=\dfrac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$; 4. $(\mathrm{ctg}\, u)'=-\dfrac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.	**C** 1. $(\arcsin u)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$; 2. $(\arccos u)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$; 3. $(\mathrm{arctg}\, u)'=\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$; 4. $(\mathrm{arcctg}\, u)'=-\dfrac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

Производные степенной, показательной и логарифмической функций

D

1. $(u^{\mu})'=\mu u^{\mu-1}\cdot u'$ $(\mu \in \mathrm{R})$; 1а. $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$;

2. $(a^u)'=a^u \ln a \cdot u'$; $a>0, a \neq 1$;

3. $(e^u)'=e^u \cdot u'$;

4. $(\ln u)'=\dfrac{1}{u}\cdot u'$. 4а. $\left(\log_a u\right)'=\dfrac{1}{u}\cdot u' \cdot \log_a e=\dfrac{u'}{\ln a \cdot u}$.

Производные
обратной, сложной и степенно-показательной функций

$\boxed{E}$ 1. $y=f(u),\ u=g(x):\quad y'_x=y'_u u'_x$ или $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\dfrac{du}{dx}$;

2. $y=f(x),\ x=g(y):\quad f'(x)=\dfrac{1}{g'(y)}\ \left(g'_y\neq 0\right)$.

3. $$(u^v)'=\underbrace{vu^{v-1}\cdot u'}_{\text{производная степенной функции}}+\underbrace{u^v\cdot\ln u\cdot v'}_{\text{производная показательной функции}}$$

Во всех приведенных ниже формулах C – постоянное число, функции u и v считаются функциями независимой переменной x: $u=u(x)$, $v=v(x)$. Эту таблицу необходимо твердо выучить наизусть.

Замечание 1. Все формулы выписаны по группам (**A**, **B**, **C**, **D**) по четыре формулы в каждой. Так проще искать нужную формулу.

Замечание к группе формул A. Прочитайте (и выучите) все правила, проговаривая их про себя:

1) производная постоянной величины равна нулю;
   производная независимой переменной равна единице;
   постоянный множитель можно выносить за знак производной;
2) производная алгебраической суммы равна алгебраической сумме производных;
3) производная произведения равна сумме произведений производной первого сомножителя на постоянный второй плюс производной второго сомножителя на постоянный первый;
4) производная дроби равна дроби, знаменатель которой равен квадрату исходного знаменателя. Числитель дроби равен произведению производной исходного числителя на исходный знаменатель минус произведение исходного числителя, умноженного на производную исходного знаменателя.

2. ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

2.1. Решение самых простых задач

Пример 2.4. Найти производные функций:

а) $y = x^4$; б) $y = x^5$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $y = \sqrt[4]{x^3}$.

▲ Учитывая замечание, которое только что сделано, по формуле D_1, полагая в ней $u = x$, имеем

а) $y' = (x^4)' = \{\mu = 4\} = 4x^3$; б) $y' = (x^5)' = \{\mu = 5\} = 5x^4$;

в) $y' = \left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \{\mu = \frac{1}{2}\} = \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

При решении этого примера можно было воспользоваться формулой D_{1a}.

г) $y' = \left(\sqrt[4]{x^3}\right)' = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \{\mu = \frac{3}{4}\} = \dfrac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}}$. ▼

Пример 2.5. Найти производные функций:

а) $y = 5x^3$; б) $y = -4x^2$; в) $y = 7\sqrt{x}$; г) $y = \dfrac{8}{x^2}$; д) $y = 4\sqrt[3]{x^2}$.

▲ При решении всех этих примеров можно пользоваться формулой D_1 и надо учесть, что постоянный множитель можно выносить за знак производной $(Cu)' = Cu'$ (формула A_1)

а) $y' = \left(5x^3\right)' = 5\left(x^3\right)' = 5 \cdot 3x^2 = 15x^2$;

б) $y' = \left(-4x^2\right)' = -4\left(x^2\right)' = -4 \cdot 2x = -8x$;

в) $y' = \left(7\sqrt{x}\right)' = 7\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = 7 \cdot \dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{7}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{7}{2\sqrt{x}}$.

Здесь можно было сразу воспользоваться формулой D_{1a}, и тогда,

$$\text{если } y = 7\sqrt{x}, \text{ то } y' = 7\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2\sqrt{x}}.$$

г) Перепишем пример в виде $y = 8x^{-2}$, тогда

$$y' = \left(8x^{-2}\right)' = 8\left(x^{-2}\right)' = 8 \cdot -2x^{-3} = -\frac{16}{x^3}.$$

д) $y' = \left(4\sqrt[3]{x^2}\right)' = 4\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = 4 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{8}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$. ▼

2.2. Правила вычисления производных, связанные с арифметическими действиями над функциями

Пользуясь формулами дифференцирования и таблицей производных, найти производные следующих функций:

Пример 2.6. $y = 5x^3 - 3x^2 + x - 1$.

▲ Данная функция есть алгебраическая сумма нескольких функций, следовательно, по формуле A_2

$$y' = (5x^3 - 3x^2 + x - 1)' = (5x^3)' - (3x^2)' + (x)' - (1)' = \{A_1\} = 5(x^3)' - 3(x^2)' + 1 =$$

$$= 5 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x + 1 = 15x^2 - 6x + 1. \ ▼$$

Некоторые советы

При отыскании производных следующих функций:

$$y' = \left(\sqrt[3]{x} + 2^x - e^x + \frac{1}{x^2}\right)' =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{все степени } x \text{ лучше писать в виде} \\ \text{дробных чисел, помещая } x \text{ в числитель}\end{matrix}\right\} = \left(x^{\frac{1}{3}} + 2^x - e^x + x^{-2}\right)' =$$

$$= \{A_2\} = (x^{\frac{1}{3}})' + (2^x)' - (e^x)' + (x^{-2})' = \tfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2^x \ln 2 - e^x - 2x^{-3}.$$

Производные выгодно искать "в две руки", т. е. работать с соседом, находя производные, независимо друг от друга, но обсуждать результаты и допущенные ошибки совместно!!!

Пример 2.7. $y = x^2 \ln x$.

▲ $y' = (x^2 \ln x)' = \{A_3\} = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = x(2\ln x + 1)$. ▼

Некоторые советы (продолжение)

1. Обратите внимание на то, что const следует выносить за знак производной, и как ставятся скобки, особенно в первом слагаемом.

$$y' = \left(2\arccos x(\sqrt{x} + a^x)\right)' =$$

$$= 2\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)\cdot(\sqrt{x} + a^x) + \arccos x \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + a^x \ln a\right)\right).$$

2. $\boxed{(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'.}$

Чтобы вычислить производную произведения любого числа функций, надо продифференцировать первую функцию и умножить полученную производную на произведение всех остальных функций, затем найти производную второй функции и умножить ее на произведение всех остальных функций. Точно так же поступить со всеми функциями-сомножителями и все полученные таким образом произведения сложить.

$$y' = (a^x \cdot \sin x \cdot \arccos x)' =$$

$$= a^x \ln a \cdot \sin x \cdot \arccos x + a^x \cdot \cos x \cdot \arccos x + a^x \cdot \sin x \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right).$$

Пример 2.8. $y = x\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$.

▲ $y' = \left(x\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' - 2(x^{-2})' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 2(-2)x^{-3} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x} + \dfrac{4}{x^3}$. ▼

Пример 2.9. $y = \dfrac{3^x}{\cos x}$.

▲ $y' = \left(\dfrac{3^x}{\cos x}\right)' = \{A_4\} = \dfrac{(3^x)'\cos x - 3^x(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$

$= \dfrac{3^x \ln 3 \cos x - 3^x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \dfrac{3^x(\ln 3 \cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$. ▼

Некоторые советы (продолжение)

1. Выражение $\dfrac{C}{v}$ – частный случай дроби $\dfrac{u}{v}$, а именно: дробь с постоянным числителем.

$$\frac{C}{v}=C\cdot v^{-1};\ \left(\frac{C}{v}\right)'=C\cdot(v^{-1})'=-C\cdot v^{-2}\cdot v'=-\frac{C\cdot v'}{v^3}.\ \boxed{\left(\frac{C}{v}\right)'=-\frac{C\cdot v'}{v^2}.}$$

Например, $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$, $\left(\dfrac{2}{\sin x}\right)'=-\dfrac{2\cdot\cos x}{\sin^2 x}$, $\left(\dfrac{4}{\arcsin x}\right)'=-\dfrac{4\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{(\arcsin x)^2}$,

$$\left(\frac{3}{a^x}\right)'=-\frac{3\cdot a^x\cdot\ln a}{a^{2x}}.$$

2. Выражение вида $\dfrac{u}{C}$ не нужно рассматривать как дробь:

$$\boxed{\frac{u}{C}=\frac{1}{C}\cdot u},\ \text{тогда}\ \left(\frac{u}{C}\right)'=\left(\frac{1}{C}\cdot u\right)'=\frac{1}{C}u',\ \text{т. е.}\ \boxed{\left(\frac{u}{C}\right)'=\frac{1}{C}\cdot u'.}$$

$$y'=\left(\frac{2\operatorname{arcctg}x+5\sin x}{\sqrt{5}}\right)'=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\cdot\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)+5\cos x\right).$$

$$y'=\left(\frac{2\arcsin x-3\operatorname{tg}x+\cos\frac{\pi}{10}}{a^2-b^2}\right)'=\frac{1}{a^2-b^2}\left(2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-3\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+0\right).$$

3. При дифференцировании дроби результат лучше всего начинать писать с квадрата знаменателя, затем в числителе писать знаменатель без изменения, умноженный на производную числителя, минус числитель, умноженный на производную знаменателя.

$$y'=\left(\frac{2\operatorname{ctg}x+10^x}{4\ln x-3\sin x}\right)'=$$

$$=\frac{(4\ln x-3\sin x)\left(\dfrac{-2}{\sin^2 x}+10^x\ln 10\right)-(2\operatorname{ctg}x+10^x)\left(\dfrac{4}{x}-3\cos x\right)}{(4\ln x-3\sin x)^2}.$$

4. Обратите внимание на то, как переносится результат дифференцирования на другую строку.

$$y'=\left(\frac{e^x\cdot\arccos x+\operatorname{ctg}x}{\cos x+\sqrt[3]{5}}\right)'=\frac{\left(\cos x+\sqrt[3]{5}\right)\left(e^x\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\arccos x\cdot e^x-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{\left(\cos x+\sqrt[3]{5}\right)^2}-$$

$$-\frac{(e^x\cdot\arccos x+\operatorname{ctg}x)\cdot(-\sin x)}{\left(\cos x+\sqrt[3]{5}\right)^2}.$$

Пример 2.10. $y=x^5\left(2-\dfrac{x}{3}+3x^2\right)$.

▲ ***1-й способ.*** Пользуясь формулой A_3, получим

$$y'=(x^5)'\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)+x^5\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)'=$$

$$=5x^4\left(2-\frac{x}{3}+3x^2\right)+x^5\left(-\frac{1}{3}+6x\right)=10x^4-2x^5+21x^6.$$

2-й способ. Сначала раскроем скобки, затем дифференцируем, как сумму:

$$y=2x^5-\tfrac{1}{3}x^6+3x^7;\ y'=2(x^5)'-\tfrac{1}{3}(x^6)'+3(x^7)'=10x^4-2x^5+21x^6.$$

Этот способ предпочтительнее, так как быстрее приводит к цели. ▼

Следует иметь в виду, что вообще ***не обязательно дифференцировать заданную функцию сразу. Можно предварительно подвергнуть ее тождественным преобразованиям*** (если это целесообразно, т.е. ведет к упрощению дифференцирования).

Пример 2.11. $y=\dfrac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}$.

$$▲\ y'=\left(\frac{x^2-3x+4}{\sqrt{x}}\right)'=\left(x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+4x^{-\frac{1}{2}}\right)'=\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}+4\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}.$$

В целях экономии времени результат дифференцирования можно не упрощать. ▼

Пример 2.12. $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$.

$$▲\ y'=\frac{(x^2+1)(x^2)'-x^2(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{2x(x^2+1)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}.\ ▼$$

Пример 2.13. $y=\dfrac{10}{a\sin x-b\cos x}$.

▲ Применяем формулу A_{4a}(постоянный числитель), а не формулу A_4, что целесообразнее.

$$y'=-\frac{10(a\sin x-b\cos x)}{(a\sin x-b\cos x)^2}=-\frac{10(a\cos x+b\sin x)}{(a\sin x-b\cos x)^2}.\ ▼$$

Пример 2.14. $y=\dfrac{\cos x\operatorname{ctg}x}{1+2\operatorname{tg}a}$.

▲ Пользуясь формулой $A_{4б}$ (постоянный знаменатель), получим

$$y'=\frac{(\cos x\operatorname{ctg}x)'}{1+2\operatorname{tg}a}=\frac{-\sin x\operatorname{ctg}x+\cos x\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{1+2\operatorname{tg}a}.\ ▼$$

Пример 2.15. Найти производную данной функции и затем вычислить ее частное значение при указанном значении аргумента:

а) $f(x)=\dfrac{\left(1-\sqrt{x}\right)^2}{x}$, $x=0.01$; б) $f(x)=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$, $x=\dfrac{\pi}{6}$;

в) $f(x)=\dfrac{a+b}{3-2x}+\dfrac{5x^4-1}{a-b}$, $x=0$.

▲ а) Вначале раскрываем скобки и производим деление, затем дифференцируем:

$$f(x)=\frac{1-2\sqrt{x}+x}{x}=\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}+1=x^{-1}-2x^{-\frac{1}{2}}+1;$$

$$f'(x)=-x^{-2}-2\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

Подставляя значение $x=0.01$, получим

$$f'(0.01)=\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)\Bigg|_{x=0.01}=-\frac{1}{0.01^2}+\frac{1}{\sqrt{0.01^3}}=-100^2+10^3=-9000.$$

б) По формуле A_4 найдем

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'(1-\sin x)-\cos x(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2}=\frac{-\sin x(1-\sin x)-\cos x(-\cos x)}{(1-\sin x)^2}=$$

$$=\frac{-\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}=\frac{1}{1-\sin x}.$$

Полагая $x=\frac{\pi}{6}$, получим

$$f'\left(\tfrac{\pi}{6}\right)=\left(\frac{1}{1-\sin x}\right)\Bigg|_{x=\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{1-\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2.$$

в) применяя формулы $A_{4а}$ и $A_{4б}$, получим

$$f'(x)=-\frac{(a+b)(3-2x)'}{(3-2x)^2}+\frac{(5x^4-1)'}{a-b}=\frac{2(a+b)}{(3-2x)^2}+\frac{20x^3}{a-b}.$$

Если $x=0$, то найдем

$$f'(0)=\left(\frac{2(a+b)}{(3-2x)^2}+\frac{20x^3}{a-b}\right)\Bigg|_{x=0}=\frac{2(a+b)}{3^2}+\frac{0}{a-b}=\frac{2}{9}(a+b).\ \blacktriangledown$$

Пример 2.16. Найти производную $f'(x)$ функции

$$f(x)=\begin{cases}1-x & \text{при } x<0,\\ e^x & \text{при } x\ge 0\end{cases}$$

и построить графики функций $f(x)$ и $f'(x)$.

▲ Отметим, что функция $f(x)$ непрерывна, ибо

$$f(0+0)=\lim_{\substack{x\to 0+0\\ x>0}} e^x=\left\{e^{0+0}\right\}=1,\ f(0-0)=\lim_{\substack{x\to 0-0\\ x<0}}(1-x)=\left\{1-(0-0)\right\}=1$$

$$\text{и } f(0)=e^x\big|_{x=0}=1.$$

Слева и справа от точки $x=0$ функция $f(x)$ задана элементарными функциями, и ее производная равна

$$f'(x)=\left[\begin{array}{ll}-1 & \text{при } x<0,\\ e^x & \text{при } x>0.\end{array}\right.$$

Остается выяснить вопрос о дифференцируемости функции в точке $x=0$, для чего вычислим ее лево- и правосторонние производные в этой точке:

$$f'(0-0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0-0\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0-0\\ \Delta x<0}}\frac{1-\Delta x-1}{\Delta x}=-1$$

$$f'(0+0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0+0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0+0\\ \Delta x>0}}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\left\{e^{\Delta x}-1\sim\Delta x\right\}=1.$$

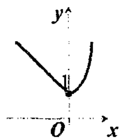


Рис. 1.5

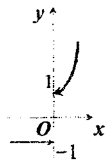


Рис.1.6

Т.к. $f'(0-0)\neq f'(0+0)$, то в точке $x=0$ производная функции $f(x)$ не существует, а тогда

$$f'(x)=\left[\begin{array}{ll}-1 & \text{при } x<0,\\ e^x & \text{при } x>0.\end{array}\right.$$

Графики функций $f(x)$ и $f'(x)$ приведены на рис. 1.5, 1.6. ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

По формулам дифференцирования найти производные следующих функций:

№	Функция	*Ответ*
1	$y = x + 3x^2 - \frac{x^3}{3}$	$1 + 6x - x^2$
2	$y = x - 2\sqrt{x}$	$1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$
3	$y = \frac{1}{5}x^5 - 2x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5$	$x^4 - 8x^3 + 2x^2 - 3x + 4$
4	$y = \left(\sqrt{x} - \sqrt{a}\right)^2$	$1 - \sqrt{\frac{a}{x}}$
5	$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$	$-\frac{x+2}{x^3}$
6	$y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5}$	$-\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6}$
7	$y = 4\sqrt[4]{x^3} - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 3\sqrt{x}$
8	$y = 3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3} + 4$	$\frac{3}{\sqrt[4]{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
9	$\sin x - \cos x$	$\cos x + \sin x$
10	$y = x^2 \cos x$	$x(2\cos x - x\sin x)$
11	$y = \frac{2x}{x+3}$	$\frac{6}{(x+3)^2}$
12	$y = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$	$\frac{12x}{(x^2+3)^2}$
13	$y = \frac{ax - b}{ax + b}$	$\frac{2ab}{(ax+b)^2}$
14	$y = x^2 \sin x$	$x(2\sin x + x\cos x)$
15	$y = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$	$-\frac{1 + \cos x}{\sin^2 x}$
16	$y = -3\cos x \operatorname{ctg} x$	$3\left(1 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)\cos x$

17. $y = \left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{a}\right)(\ln x + \arcsin x)$.

Ответ: $(\ln x+\arcsin x)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}+\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{a}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

18. $y=\cos x\cdot\ln x\cdot\operatorname{arctg}x$.

Ответ: $-\sin x\cdot\ln x\cdot\operatorname{arctg}x+\frac{1}{x}\cos x\cdot\operatorname{arctg}x+\frac{1}{1+x^2}\cdot\cos x\cdot\ln x$.

19. $y=\operatorname{tg}x(\sin x+\operatorname{ctg}x)$.

Ответ: $\frac{1}{\cos^2 x}(\sin x+\operatorname{ctg}x)+\operatorname{tg}x\left(\cos x-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$.

20. $y=\frac{\cos x-\ln x}{x^2+3e^x}$.

Ответ: $\dfrac{(x^2+3e^x)\left(-\sin x-\frac{1}{x}\right)-(\cos x-\ln x)(2x+3e^x)}{\left(x^2+3e^x\right)}$.

21. $y=\frac{2\operatorname{ctg}x+10^x}{4\ln x-3\sin x}$.

Ответ: $\dfrac{(4\ln x-3\sin x)\left(-\frac{2}{\sin^2 x}+10^x\ln 10\right)-\left(2\operatorname{ctg}x+10^x\right)\left(\frac{4}{x}-3\cos x\right)}{(4\ln x-3\cos x)^2}$.

22. $y=\dfrac{\frac{1}{x}-e^x}{2\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x}$.

Ответ: $\dfrac{(2\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x)\left(-\frac{1}{x^2}-e^x\right)-\left(\frac{1}{x}-e^x\right)\left(\frac{2}{\cos^2 x}-\frac{3}{\sin^2 x}\right)}{(2\operatorname{tg}x+3\operatorname{ctg}x)^2}$.

23. $y=\frac{\operatorname{arctg}x+\arcsin x}{\operatorname{arcctg}x+\arccos x}$.

Ответ: $\dfrac{(\operatorname{arcctg} x+\arccos x)\left(\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\operatorname{arcctg} x+\arccos x)^2}-$

$$-\frac{(\operatorname{arctg} x+\arcsin x)\left(-\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)}{(\operatorname{arcctg} x+\arccos x)^2}.$$

24. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; вычислить $f'(1)$. *Ответ*: $\dfrac{1}{8}$.

25. $f(x)=\dfrac{m}{x}+\dfrac{x}{m}$; вычислить $\left.\left(\dfrac{df}{dx}\right)\right|_{x=m}$. *Ответ*: 0.

26. $r(\varphi)=\varphi\sin\varphi+\cos\varphi$; вычислить $r'(\pi)$. *Ответ*: $-\pi$.

27. $y=(x^2-2x)\operatorname{tg}x$; вычислить $y'(0)$. *Ответ*: 0.

28. $f(x)=x^2-5x+6$. Найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(4)$, $f'(-2)$.

Ответ: $f'(0)=-5, f'(1)=-3, f'(4)=3, f'(-2)=-9$.

2.3. Задача на физический и геометрический смысл производной

Пример 2.17. Закон прямолинейного движения материальной точки задан формулой $s=5\sin(3t+1)$. Найти мгновенную скорость.

▲ В соответствии с механическим смыслом производной

$$v(t)=s'(t)=\left(5\sin(3t+1)\right)'=15\cos(3t+1). ▼$$

Пример 2.18. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$s=\sqrt{t}+2t^2-3t+2.$$

Найти мгновенную скорость в момент $t=25\,c$ (путь измеряется в метрах)

▲ $v(t)=s'=\left(\sqrt{t}+2t^2-3t+2\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+4t-3$;

$$v(25)=\left.\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}+4t-3\right)\right|_{t=25}=\frac{1}{2\sqrt{25}}+4\cdot 25-3=0.1+100-3=97.1(\text{м/с}). ▼$$

Пример 2.19. Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону $s(t) = -4.905t^2 + 981t + 950$ (s – в метрах, t – в секундах). Найти: скорость тела в любой момент времени; его начальную скорость; момент времени, при котором скорость тела станет равной нулю; высоту, которой тело достигнет в этот момент времени.

▲ В соответствие с механическим смыслом производной

$$v(t) = s'(t) = -9.81t + 981.$$

Полагая $t = 0$, получаем начальную скорость тела:

$$v_0 = s'(0) = (-9.81t + 981)\big|_{t=0} = 981 \text{ (м/с)}.$$

Определим теперь, в какой момент времени t скорость тела станет равной нулю. Из уравнения $-9.81t + 980 = 0$ найдем, что $t = 100\,c$. Тогда высота, достигнутая телом в момент времени $t = 100\,c$,

$$s = \left(-4.905t^2 + 981t + 950\right)\Big|_{t=100} = -4.905 \cdot 100^2 + 981 \cdot 100 + 950 = 50000\,(м).$$

Ясно, что эта высота является наибольшей. ▼

Пример 2.20. В точке с абсциссой $x_0 = -2$ найти угловой коэффициент касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2 - 6x - 1$.

▲ Имеем

$$y' = 3x^2 - 6x - 6 = 3(x^2 - 2x - 2);$$

$$k = f'(-2) = \left(3(x^2 - 2x - 2)\right)\Big|_{x=-2} = 3\left((-2)^2 - 2(-2) - 2\right) = 18. \text{ ▼}$$

Пример 2.21. В точке с абсциссой $x_0 = 0.5$ найти угол наклона к оси абсцисс касательной к графику функции $y = \ln(2x + 1)$.

▲ Имеем

$$y' = \frac{1}{2x+1}(2x+1)' = \frac{2}{2x+1};$$

$$k = y'(0.5) = \frac{2}{2x+1}\bigg|_{x=0.5} = \frac{2}{2 \cdot 0.5 + 1} = 1;$$

$$k = \operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{tg}\varphi = 1 \Rightarrow \alpha = \tfrac{\pi}{4}. \text{ ▼}$$

Пример 2.22. В точке с абсциссой $x_0 = -\frac{1}{4}$ составить уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{1}{2x}$.

▲ Имеем

$$y_0 = f\left(-\tfrac{1}{4}\right) = \frac{1}{2x}\bigg|_{x=-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)} = -2;$$

$$y' = \left(\tfrac{1}{2}x^{-1}\right)' = \tfrac{1}{2}\cdot(-1)x^{-2} = -\frac{1}{2x^2};$$

$$f'\left(-\tfrac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2} = -8.$$

Чтобы записать уравнение касательной, воспользуемся формулой

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0):$$

$$y-(-2) = -8\left(x - \left(-\tfrac{1}{4}\right)\right);\ y + 2 = -8x - 2;\ 8x + y + 4 = 0.\ ▼$$

Пример 2.23. Составить уравнения касательных к параболе

$$y = 4x - x^2$$

в точках ее пересечения с осью абсцисс.

▲ Найдем указанные точки:

$$\begin{cases} y = 4x - x^2, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(4-x) = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 4, \\ y = 0 \end{cases} O(0;0);\ M(4;0).$$

Найдем производную заданной функции: $y' = 4 - 2x$.

а) Рассмотрим первую точку с абсциссой $x_1 = 0$. Имеем

$$y(x_1) = y(0) = (4x - x^2)\big|_{x=0} = 0;\ y'(x_1) = y'(0) = 4.$$

Уравнение касательной к параболе в точке $O(0;0)$:

$$y - 0 = 4(x - 0);\ 4x - y = 0.$$

б) Рассмотрим вторую точку с абсциссой $x_2 = 4$. Для нее:

$$y(x_2)=y(4)=0;\ y'(x_2)=y'(4)=(4-2x)\big|_{x=4}=4-2\cdot 4=-4.$$

Следовательно, $y-0=-4(x-4)$; $4x+y-16=0$ – уравнение касательной в точке $M(4;0)$. ▼

Пример 2.24. На графике функции $y=x^2+x-5$ взята точка M. Касательная к графику функции, проведенная через точку M, наклонена к оси Ox под углом, тангенс которого равен 5. Найти абсциссу точки M.

▲ Имеем:

$$y'=2x+1;\ y'(x_0)=(2x+1)\big|_{x=x_0}=2x_0+1;$$

$$5=\operatorname{tg}\alpha=y'(x_0)=2x_0+1.$$

Итак,

$$2x_0+1=5\Rightarrow x_0=2.\ ▼$$

Пример 2.25. Найти точку пересечения касательной к графику функции $f(x)=-12\log_2(x+4)$ с осью абсцисс, если угловой коэффициент этой касательной $k=-\dfrac{3}{2\ln 2}$.

▲ Прежде всего, определим абсциссу точки касания из условия $k=f'(x_0)$.

Находим производную $f'(x)=-12\cdot\dfrac{1}{(x+4)\cdot\ln 2}$; $f'(x_0)=-\dfrac{12}{(x_0+4)\ln 2}$;

$$-\frac{3}{2\ln 2}=-\frac{12}{(x_0+4)\ln 2}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{4}{x_0+4}\Rightarrow x_0+4=8\Rightarrow x_0=4.$$

Теперь можем найти ординату точки касания

$$y_0=f(x_0)=\left(-12\log_2(x+4)\right)\big|_{x_0=4}=-12\log_2(4+4)=-12\log_2 2^3=-36$$

и уравнение касательной

$$y-(-36)=-\frac{3}{2\ln 2}(x-4)\Rightarrow y=-\frac{3}{2\ln 2}(x-4)-36.$$

Находим точку пересечения касательной с осью абсцисс

$$\begin{cases} y = -\dfrac{3}{2\ln 2}(x-4) - 36, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{2\ln 2}(x-4) - 36 = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 + 24\ln 2 = 0, \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - 24\ln 2, \\ y = 0. \end{cases}$$

Итак, искомая точка $M(4 - 24\ln 2; 0)$. ▼

Пример 2.26. Написать уравнения касательной и нормали, проведенной к кривой $y = x^3$ в точке с абсциссой $x = 2$.

▲ $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$ – уравнение касательной. Найдем

$$y_0 = y(x_0) = x^3\Big|_{x_0=2} = 2^3 = 8,$$

$$y' = (x^3)' = 3x^2;\ y'(2) = (3x^2)\Big|_{x_0=2} = 3 \cdot 2^2 = 12.$$

Уравнение касательной: $y - 8 = 12(x - 2)$, $12x - y - 16 = 0$.

Уравнение нормали:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y - 8 = -\frac{1}{12}(x - 2),\ x + 12y - 98 = 0.\ ▼$$

Пример 2.27. В точке (1; 2) параболы $y = 2x^2$ проведите касательную и нормаль.

▲ Уравнение касательной: $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. Найдем $y'(x_0)$:

$$y' = 4x;\ y'(1) = (4x)\Big|_{x_0=1} = 4.$$

$$y - 2 = 4(x - 1) \text{ или в общем виде } 4x - y - 2 = 0.$$

Уравнение нормали:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -\frac{1}{4}(x - 1),\ x + 4y - 9 = 0.$$

Как определить угол между линиями $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, если известно, что угол между прямыми линиями определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_2k_1}\right|,$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты прямых линий?

Угол между линиями – угол между касательными, проведенными к линиям в точке их пересечения (рис. 1.7).

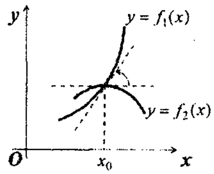


Рис. 1.7.

Пример 2.28. Найти угол между параболами $y=x^2$ и $y=x^3$ в точках их пересечения.

▲ 1) Решая совместно уравнения парабол, найдем абсциссы точек их пересечения

$$\begin{cases}y=x^2,\\ y=x^3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=x^3,\\ y=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2(1-x)=0,\\ y=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\vee x=1,\\ y=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}\vee\begin{cases}x=1,\\ y=1.\end{cases}$$

Имеем $x_1=0,\ x_2=1$.

2) Найдем угловые коэффициенты касательных к параболам в точках их пересечения:

$$x_1=0:\begin{array}{l}f_1'(0)=(2x)\big|_{x_1=0}=0\\ f_2'(0)=(3x^2)\big|_{x_1=0}=0\end{array};\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{0-0}{1+0\cdot 0}=0\Rightarrow\varphi_1=0;$$

$$x_2=1:\begin{array}{l}f_1'(1)=(2x)\big|_{x_2=1}=2\\ f_2'(1)=(3x^2)\big|_{x_2=1}=3\end{array};\ \operatorname{tg}\varphi_2=\left|\frac{2-3}{1+2\cdot 3}\right|=\frac{1}{7}\Rightarrow\varphi_2=\operatorname{arctg}\frac{1}{7}.\ ▼$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Материальная точка движется прямолинейно по закону

$$s=2t^4+3t^2-t+\sqrt{t^3}.$$

Найти мгновенную скорость. ***Ответ***: $v(t)=8t^3+6t-1+1.5\sqrt{t}$.

1. Координаты точки, движущейся вдоль оси Ox, изменяется по закону $x(t) = -4t^2 + 2t + 2$. Найти, в какой момент времени скорость равна 1.

Ответ: $\frac{1}{8}$.

3. Расстояние, пройденное материальной точкой за время t (c),

$$s = \tfrac{1}{4}t^4 - \tfrac{1}{3}t^3 + 2t + 1$$

(s – в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени $t = 0; t = 1; t = 2\,c$. ***Ответ***: 2 м/с; 2 м/с; 6 м/с.

4. Две точки движутся по прямой линии по законам:

$$s_1 = t^3 - 5t^2 + 17t - 4,\ s_2 = t^3 - 3t.$$

В какой момент времени их скорости равны?

Ответ: $t = 2c$ $(v_1 = 3t^2 - 10t + 17; v_2 = 3t^2 - 3)$.

5. Найти угловой коэффициент касательной к графику функции

$$y = (x^2 - x + 1)^2$$

в точке с абсциссой $x_0 = -1$. ***Ответ***: -18.

6. Найти угол наклона, который составляет с осью абсцисс касательная к графику функции $y = \frac{64\sqrt{3}}{5x^5}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$. ***Ответ***: $\frac{2}{3}\pi$.

7. Составить уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - 2x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. ***Ответ***: $2x - y - 1 = 0$.

8. Найти точку пересечения касательной к графику функции

$$f(x) = -8\sqrt{x-4}$$

и оси абсцисс, если угловой коэффициент касательной $k = -0.8$.

Ответ: $(-21; 0)$.

9. К графику функции $y = \sqrt{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ проведена касательная. Найти ординату точки касательной, абсцисса которой $x = 31$.

Ответ: $y = 16$.

10. К графику функции $y = 9.6\sqrt{x+2}$ проведена касательная, угловой коэффициент которой равен 1.2. Найти абсциссу точки пересечения этой касательной с прямой $y = 0$. ***Ответ***: -18.

11. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x - 2$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$. ***Ответ***: $5x - y - 4 = 0$; $x + 5y - 6 = 0$.

12. Найти углы, под которыми пересекаются линии, заданные уравнениями $x^2 + 2y^2 = 3$ и $y = x^2$. ***Ответ***: $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}$.

13. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$ в точке $x_0 = 1$. ***Ответ***: $2x + y - 2 = 0$; $x - 2y - 1 = 0$.

14. Составить уравнения касательной и нормали:

а) к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке, где $x = 1$;

б) к окружности $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 3 = 0$ в точках пересечения ее с осью Ox;

в) к кривой $y = |x^3 - 1|$ в ее угловой точке.

Ответ: а) Уравнение касательной $2x + y + 1 = 0$,
уравнение нормали $x - 2y - 7 = 0$.

б) Для точки $(-1; 0)$ соответственно $x - y + 1 = 0$; $x + y + 1$; для точки (3; 0) соответственно $x + y - 3 = 0$; $x - y - 3 = 0$.

в) Уравнения односторонних касательных $3x - y - 3 = 0$, $3x + y - 3 = 0$ и уравнения нормалей $x + 3y - 1 = 0$, $x - 3y - 1 = 0$.

15. Найти углы, под которыми пересекаются следующие линии:

а) прямая $x + y - 4 = 0$ и парабола $2y = 8 - x^2$;

б) эллипс $x^2 + 4y^2 = 4$ и парабола $4y = 4 - 5x^2$;

в) синусоида $y = \sin x$ и косинусоида $y = \cos x$.

Ответ: а) $\operatorname{tg}\alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, $\beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_3 = -27$, $\alpha_1 = \alpha_3 = \pi - \operatorname{arctg}27$; $\operatorname{tg}\alpha_2 = 0$, $\alpha_2 = 0$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \pm 2\sqrt{2}$.

16. Составить уравнения касательных к параболе $y = x^2 - 4x + 1$, проходящих через не лежащую на ней точку: а) $O(0; 0)$; б) $A(1; 1)$.

Ответ: а) $2x + y = 0$, $6x + y = 0$;

б) через точку A нельзя провести к данной параболе ни одной касательной.

Найти углы, под которыми пересекаются данные линии, и построить эти линии и углы:

№	Данные линии	***Ответ***
17	$9y = x^3$; $x - y = 0$	$\frac{\pi}{4}$; $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$
18	$y = \cos x$; $2y = 1$	$\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$
19	$y = e^x$; $y = e^{3x}$	$\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$
20	$y = \sin x$; $y = \sin 2x$	$\mathrm{arctg}3$; $\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$

21. На каждой из следующих кривых: а) $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$;

б) $y = x + \sqrt{x}$

найти такие точки, где касательная параллельна оси Ox.

Ответ: а) (1; 0), (2; 1); б) таких точек нет.

22. Построить и найти углы, образуемые параболой $y = 2x - x^2$ и хордой, соединяющей ее точки с абсциссами 1 и 4. ***Ответ***: $\mathrm{arctg}3$, $\mathrm{arctg}\frac{3}{19}$.

23. Определить угол между касательными к параболе $y = x^2 - 3x + 1$, проведенными из точки (4; 1). Построить параболу и касательные.

Ответ: $\mathrm{arctg}\frac{4}{5}$.

2.4. Производная степенной, показательной, показательно-степенной функций

Обычно путают степенную и показательную функции и совсем не знают степенно-показательной функции.

Функция называется ***степенной***, если она имеет вид $\boxed{y = u^{\alpha}}$, где ***основание степени*** u – переменная величина, ***показатель степени*** $\alpha = \mathrm{const}$.

Например, $y = \sin^2 x$. Здесь $u = \sin x$, $\alpha = 2$.

Функция называется ***показательной***, если она имеет вид $\boxed{y = a^u}$, где ***основание*** $a = \mathrm{const}$, $(a \neq 0, a \neq 1)$, а ***показатель*** u – переменная величина.

Например, $y = 2^{\sin x}$. Здесь $a = 2, u = \sin x$.

Функция называется **степенно-показательной**, если она имеет вид $\boxed{y = u^v}$, где ***основание*** u и ***показатель*** v – переменные величины.

Например, $y = (\sin x)^{\cos x}$. Здесь $u = \sin x$, $v = \cos x$.

Производная степенной функции	*Производная показательной функции*
$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$

Производная степенно-показательной функции состоит из суммы:
$(u^v)' = \underline{\underline{vu^{v-1} \cdot u'}} + \underline{\underline{u^v \cdot \ln u \cdot v'}}$
производная степенной функции + производная показательной функции

2.5. Производная сложной функции

Рассмотрим суперпозицию двух функций: $y = f(u(x))$, где $y = f(u)$, $u = u(x)$. В этом случае u – называют ***промежуточным аргументом***, x – ***независимой переменной.***

Функцию, заданную в виде суперпозиции функций, называют сложной функцией. Таким образом, прилагательное «сложная» характеризует не функцию, а способ ее задания.

Теорема (о дифференцировании сложной функции). *Если функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке $x \in \mathrm{X}$, а функция $y = f(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u = u(x) \in \mathrm{U}$, то сложная функция $y = f(u(x))$ дифференцируема в точке x, причем*

$$\left(f(u(x))\right)'_x = f'_u \cdot u'(x).$$

Последнее равенство можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ или } y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Поучитесь вычленять в сложной функции ***основные элементарные функции***, которые ее составляют, и пользоваться правилом дифференцирования сложной функции.

Правило нахождения производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций.

Например, если $y = f(u), u = u(v), v = v(x)$,

т. е. если $y = f\left(u(v(x))\right)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$ или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dv} \cdot \dfrac{dv}{dx}$.

Производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

При дифференцировании можно руководствоваться следующим правилом:

1. Все функции считать сложными.
2. Научиться определять основные элементарные функции и их промежуточные аргументы.
3. Умножать на производную основной элементарной функции по промежуточному аргументу до тех пор, пока в результате дифференцирования не будет получена const.

Порядок дифференцирования обратный порядку вычисления значения функции в точке. Вычисление значения функции начинается справа налево, а дифференцирование наоборот – слева направо.

Первой дифференцируется та основная элементарная функция, которая вычислялась бы последней – это самое главное!

Физическая интерпретация формулы: производная $u'(x)$ есть скорость изменения переменной u по отношению к изменению переменной x, а производная $f'(u)$ – скорость изменения переменной y по отношению к изменению переменной u. Ясно, что скорость $f'(u)$ изменения переменной y по отношению к изменению переменной x равна произведению скоростей $f'(u)$ и $u'(x)$. (Если u движется быстрее x в k раз, а y – быстрее u в ℓ раз, то y движется быстрее x в $k \cdot \ell$ раз).

Правило нахождения производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций.

Например, если $y = f(u), u = u(v), v = v(x)$,

т. е. если $y = f(u(v(x)))$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Прежде чем приступить к решению задач, сделаем **замечание**, которым нам неоднократно придется пользоваться:

Если функция, которую надо продифференцировать, не является сложной, то мы в сводке формул для вычисления производных будем полагать, что $u = x$, т. е. u – независимая переменная. Тогда $u'_x = 1$ (производная независимой переменной равна единице), и поэтому, применяя указанные формулы, умножать на u' не придется, так как такое умножение равносильно умножению на единицу, а, как известно, умножение на единицу не изменяет произведения.

Примеры решения задач

Пример 2.29. Функция $y=\arcsin\sqrt{\ln a^{\sqrt{x}}}$ состоит из пяти основных элементарных функций, которые можно записать в виде цепочки простых функций таким образом:

Продифференцируем эту функцию по правилу

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dw}\cdot\frac{dw}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}$$

Сколько основных элементарных функций входит в сложную функцию столько и производных стоит в произведении справа

Продифференцируем каждую из основных элементарных функций:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{v}}\cdot\frac{1}{w}\cdot a^t\ln a\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Теперь подставим вместо u, v, w, t их значения из цепочки и производная от сложной функции получена:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sqrt{\ln a^{\sqrt{x}}}\right)^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln a^{\sqrt{x}}}}\cdot\frac{1}{a^{\sqrt{x}}}\cdot a^{\sqrt{x}}\cdot\ln a\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Так будет выглядеть результат дифференцирования без упрощения.

При дифференцировании рекомендуется сразу писать результат дифференцирования без введения промежуточных аргументов. Все промежуточные операции следует выполнять в уме.

Пример 2.30. Найти производную функции $y=\mathrm{ctg}^3\arccos e^{-x}$.

▲ В уме: – Функция состоит из пяти основных элементарных функций: степенная, котангенс, арккосинус, показательная и $-x$.

$$y'=\left(\mathrm{ctg}^3\arccos e^{-x}\right)'=3\,\mathrm{ctg}^2\arccos e^{-x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\arccos e^{-x}}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(e^{-x})^2}}\right)\cdot e^{-x}\cdot(-1)$$

▼

производная:	степенной функции	котангенса	арккосинуса	показательная ф.	$(-x)'$

При дифференцировании можно руководствоваться следующим правилом:

1. Все функции считать сложными.
2. Научиться определять основные элементарные функции и их промежуточные аргументы.
3. Умножать на производную основной элементарной функции по промежуточному аргументу до тех пор, пока в результате дифференцирования не будет получена const.

Попробуйте ещё раз понять структуру производной сложной функции. В рассматриваемом ниже примере функция постепенно усложняется.

Пример 2.31.

$$y=\sin x,\ y'=\cos x\cdot 1;$$

$$y=\sin 3x;\ y'=\cos 3x\cdot 3;$$

$$y=\sin 3\operatorname{tg}x^3;\ y'=\cos 3\operatorname{tg}x^3\cdot 3\cdot\frac{1}{\cos^2 x^3}\cdot 3x^2;$$

$$y=\sin 3\operatorname{tg}\ln^3 x;\ y'=\underbrace{\cos 3\operatorname{tg}\ln^3 x}_{\text{производная синуса}}\cdot 3\cdot\frac{1}{\underbrace{\cos^2\ln^3 x}_{\text{производная тангенса}}}\cdot\underbrace{3\ln^2 x}_{\text{производная степенной функции}}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{производная }\ln x}.$$

Порядок дифференцирования обратный порядку вычисления значения функции в точке. Вычисление значения функции начинается справа налево, а дифференцирование наоборот – слева направо.

Первой дифференцируется та основная элементарная функция, которая вычислялась бы последней – это самое главное!

Чтобы обратить ваше внимание на порядок дифференцирования, в следующем примере основные элементарные функции подчеркнуты в соответствии с их порядковым номером при дифференцировании.

Пример 2.32. Найти производную функции $y=\underline{e}^{\underline{\underline{\arcsin}}\,\underline{\underline{\underline{\ln}}}\underline{\underline{\underline{\underline{(4-3x)}}}}}$.

▲ $$y'=\underline{e^{\arcsin\ln(4-3x)}}\cdot\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{1-\ln^2(4-3x)}}}}\cdot\underline{\underline{\underline{\frac{1}{4-3x}}}}\cdot\underline{\underline{\underline{\underline{(-3)}}}}.$$ ▼

Найти производные следующих функций:

Пример 2.33. $y = e^{\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}$.

▲ $$y' = \left(e^{\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}}\right)' = e^{\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}.$$ ▼

Пример 2.34. $y = \cos^4 \operatorname{arcctg} 2x$.

▲ $$y' = 4\cos^3 \operatorname{arcctg} 2x \cdot (-\sin \operatorname{arcctg} 2x) \cdot \frac{-1}{1+(2x)^2} \cdot 2.$$ ▼

Будем считать, что вы усвоили формулу $y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, знаете порядок дифференцирования и сможете сами найти производную функции. Дифференцируйте "в две руки", не параллельно с соседом, а затем сверьте результаты.

Пример 2.35. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2x-1}{3x+4}}$.

▲ $$y' = \frac{1}{1+\frac{2x-1}{3x+4}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{2x-1}{3x+4}}} \cdot \frac{(3x+4)\cdot 2 - (2x-1)\cdot 3}{(3x+4)^2}.$$ ▼

Пример 2.36. $y = \log_3\left(x^2 - \sin\sqrt{x}\right)$.

▲ $$y' = \frac{1}{\ln 3} \cdot \frac{1}{x^2 - \sin\sqrt{x}} \cdot \left(2x - \cos\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$$ ▼

Пример 2.37. $y = \frac{a}{x^2 + 4x - \sin x^3}$.

▲ $$y' = -\frac{a}{\left(x^2 + 4x - \sin x^3\right)^2} \cdot \left(2x + 4 - \cos x^3 \cdot 3x^2\right).$$ ▼

Пример 2.38. $y = \ln\left(e^{2t} + 1\right) - 4\operatorname{arctg} e^{-t}$.

▲ $$y' = \frac{1}{e^{2t}+1} \cdot e^{2t} \cdot 2 - \frac{4}{1+e^{-2t}} \cdot e^{-t} \cdot (-1).$$ ▼

Пример 2.39. $y = \ln \sqrt[4]{\dfrac{1-x}{1+2x}}$.

Перед дифференцированием выгодно выражение справа упростить, воспользовавшись свойствами логарифмов.

▲ $$y = \frac{1}{4}(\ln(1-x) - \ln(1+2x)); \; y' = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+2x}\cdot 2\right).$$ ▼

И вообще, ***если под знаком подлежащей дифференцированию логарифмической функции содержится выражение, поддающееся логарифмированию*** (произведение, частное, степень, корень), ***то полезно сначала выполнить логарифмирование.***

Пример 2.40. $y = 5^{\operatorname{arctg}^6 \sqrt{\cos 2 + \lg(x^2+1)}}$.

▲ $$y' = 5^{\operatorname{arctg}^6 \sqrt{\cos 2+\lg(x^2+1)}} \cdot \ln 5 \cdot 6 \operatorname{arctg}^5 \sqrt{\cos 2 + \lg(x^2+1)} \cdot$$
$$\cdot \frac{1}{1+\cos 2 + \lg(x^2+1)} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 2 + \lg(x^2+1)}} \cdot \frac{2x}{(x^2+1)\cdot \ln 10}.$$ ▼

Пример 2.41. $y = \sin^2 x \cdot \sin x^2$.

▲ $$y' = \sin x^2 \cdot 2\sin x \cdot \cos x + \sin^2 x \cdot \cos x^2 \cdot 2x.$$ ▼

Пример 2.42. $y = \left(\operatorname{ctg} x^2\right)^{\cos 2x}$.

Напоминаем правило дифференцирования показательно-степенной функции.

$$\left(u^v\right)' = vu^{v-1}\cdot u' + u^v \ln u \cdot v'$$

▲ $$y' = \cos 2x \cdot \left(\operatorname{ctg} x^2\right)^{\cos 2x - 1} \cdot \frac{-1}{\sin^2 x^2} \cdot 2x +$$
$$+ \left(\operatorname{ctg} x^2\right)^{\cos 2x} \cdot \ln \operatorname{ctg} x^2 \cdot (-\sin 2x)\cdot 2$$ ▼

Пример 2.43. $y = \left(\sin \dfrac{x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\left(x^2+\sqrt{5}\right)}$.

▲ $$y' = \operatorname{tg}\left(x^2+\sqrt{5}\right)\cdot\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\left(x^2+\sqrt{5}\right)-1}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}+$$
$$+\left(\sin\frac{x}{2}\right)^{\operatorname{tg}\left(x^2+\sqrt{5}\right)}\cdot\ln\sin\frac{x}{2}\cdot\frac{2x}{\cos^2\left(x^2+\sqrt{5}\right)}.$$ ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найти производные следующих функций:

№	Функция	*Ответ*
1	$y=\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3$	$\left(1+x^{-\frac{1}{3}}\right)^2$
2	$y=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$
3	$y=\dfrac{1}{(1-x^2)^3}$	$\dfrac{6x}{(x^2-1)^4}$
4	$y=\sqrt{\cos 4x}$	$-\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{\cos 4x}}$
5	$y=\sin^4 x+\cos^4 x$	$-\sin 4x$
6	$y=\dfrac{x}{\cos^2 ax}$	$\dfrac{1+2ax\operatorname{tg}ax}{\cos^2 ax}$
7	$y=2e^x\sin x\cos^2 x$	$e^x\cos x(3\cos 2x+\sin 2x-1)$
8	$y=x^4(8\ln^2 x-4\ln x+1)$	$32x^3\ln^2 x$
9	$y=e^{2x}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$	$e^{2x}\left(\dfrac{1}{\sin x}+2\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$
10	$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$
11	$y=\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$-\dfrac{x^4+1}{x(x^4-1)}$
12	$y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$	$\dfrac{1}{\cos x}$
13	$y=x(\cos\ln x-\sin\ln x)$	$-2\sin\ln x$
14	$y=\dfrac{5^{2x}}{2+\sqrt{4+5^{2x}}}$	$\dfrac{5^{2x}\ln 5}{\sqrt{4+5^{2x}}}$

15	$y=\arcsin\sqrt{\sin x}$	$\dfrac{\cos x}{2\sqrt{(1-\sin x)\sin x}}$

2.6. Метод логарифмического дифференцирования

Логарифмической производной функции $y=f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е. $(\ln f(x))'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Если требуется продифференцировать произведение нескольких функций или дробь, числитель и знаменатель которой содержат произведения, часто представляется выгодным обе части данного выражения сначала прологарифмировать, по основанию e, а потом уже приступить к дифференцированию.

К этому приему удобно прибегать и при дифференцировании выражений, содержащих корни из дробей.

К нему прибегают всегда, когда следует продифференцировать функцию вида $y=(f(x))^{g(x)}$, т. е. когда и основание степени, и показатель степени есть функции x.

Порядок действий при логарифмическом дифференцировании следующий:
1. Найти сначала логарифм данной функции.
2. Результат логарифмирования продифференцировать.
3. Найти y' из результата дифференцирования.

Пример 2.44. Найти производную функции $y=\dfrac{xe^{-x}\operatorname{arctg}4x}{\ln^2 3x}$.

▲ 1. $\ln y=\ln x-x\ln e+\ln(\operatorname{arctg}4x)-2\ln(\ln 3x)$. $(\ln e=1)$.

2. $\dfrac{y'}{y}=\dfrac{1}{x}-1+\dfrac{1}{\operatorname{arctg}4x}\cdot\dfrac{1}{1+16x^2}\cdot 4-2\cdot\dfrac{1}{\ln 3x}\cdot\dfrac{1}{3x}\cdot 3 \Bigg|\cdot y=\dfrac{xe^{-x}\operatorname{arctg}4x}{\ln^2 3x}$.

3. $y'=\dfrac{xe^{-x}\operatorname{arctg}4x}{\ln^2 3x}\left(\dfrac{1}{x}-1+\dfrac{4}{(1+16x^2)\operatorname{arctg}4x}-\dfrac{2}{x\ln 3x}\right)$. ▼

Пример 2.45. Найти производную функции $y=\sqrt[3]{\dfrac{5-x}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$.

▲ 1. $\ln y = \frac{1}{3}\left(\ln(5-x) - \frac{1}{5}\ln(x^2+4)\right)$.

2. $\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5-x}\cdot(-1) - \frac{1}{5}\frac{1}{x^2+4}\cdot 2x\right)\Bigg|\cdot\; y = \sqrt[3]{\frac{5-x}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$.

3. $y' = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{5-x} - \frac{2}{5}\frac{x}{x^2+4}\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{5-x}{\sqrt[5]{x^2+4}}}$. ▼

Пример 2.46. Найти производную функции $y = (\operatorname{tg}7x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}$.

▲ ***Способ 1***. 1. $\ln y = \operatorname{ctg}\frac{x}{3}\cdot\ln(\operatorname{tg}7x)$.

2. $\frac{y'}{y} = -\frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ln(\operatorname{tg}7x) + \operatorname{ctg}\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}7x}\cdot\frac{1}{\cos^2 7x}\cdot 7\,\Big|\cdot y = (\operatorname{tg}7x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}$.

3. $y' = (\operatorname{tg}7x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}\left(-\frac{1}{3}\frac{\ln(\operatorname{tg}7x)}{\sin^2\frac{x}{3}} + \frac{7\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}{\operatorname{tg}7x\cdot\cos^2 7x}\right)$.

Способ 2. Для нахождения производной ее удобно представить в виде $y = e^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}\cdot\ln(\operatorname{tg}7x)}$. Тогда

$$y' = e^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}\ln(\operatorname{tg}7x)}\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}}\cdot\frac{1}{3}\cdot\ln(\operatorname{tg}7x) + \operatorname{ctg}\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}7x}\cdot\frac{1}{\cos^2 7x}\cdot 7\right).$$

Способ 3. Для нахождения производной можно воспользоваться формулой дифференцирования степенно-показательной функции.

$$y' = \operatorname{ctg}\frac{x}{3}\cdot(\operatorname{tg}7x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}-1}\cdot\frac{1}{\cos^2 7x}\cdot 7 + (\operatorname{tg}7x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{3}}\ln(\operatorname{tg}7x)\cdot\left(-\frac{1}{\sin^2\frac{x}{3}}\right)\cdot\frac{1}{3}.$$ ▼

2.7. Производная обратной функции

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в $[a;b]$, имеет непрерывную обратную функцию $x = g(y)$ и $y'_x \neq 0$ $x \in [a;b]$, то x'_y тоже существует, и справедлива формула

$$x'_y = \frac{1}{y'_x} \text{ или } g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Физическая интерпретация формулы: производная $g'(y)$ есть скорость изменения переменной x по отношению к изменению переменной y, а $f'(x)$ – скорость изменения переменной y по отношению к изменению переменной x. Ясно, что эти величины являются взаимно обратными.

Пример 2.47. $y = x^2 + 2x + 3$, вычислить x'_y.

▲ Найдем производную $y'_x = 2x + 2$. На промежутках $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$ существует обратная функция и $y'_x \neq 0$, поэтому можно воспользоваться приведенной выше формулой, следовательно, если $x \neq -1$ $x'_y = \dfrac{1}{2x+2}$. ▼

Пример 2.48. $x = e^y - y$, вычислить y'_x.

▲ Найдем производную $x'_y = e^y - 1$. На промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ существует обратная функция и $x'_y \neq 0$. Поэтому по приведенной выше формуле $y'_x = \dfrac{1}{e^y - 1}$. ▼

2.8. Производная функции, заданной параметрически

В геометрии и механике часто употребляется так называемый параметрический способ задания уравнения кривой. Кривую можно рассматривать как множество последовательных положений движущейся точки, а координаты x и y этой точки выразить в виде непрерывных функций вспомогательной переменной t, которая называется параметром. Плоская кривая в этом случае определяется двумя уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем параметр t должен изменяться в таком промежутке, чтобы при изменении его в этом промежутке тоска с координатами $(x; y)$ описывала всю кривую или ее рассматриваемую часть. Предполагается, что каждому значению t соответствует только по одному значению x и y.

Уравнение $x = x(t)$, $y = y(t)$ можно интерпретировать как зависимость координат точки, движущейся на плоскости $(x; t)$, от времени t. При такой интерпретации график функции $y = f(x)$ представляет собой траекторию точки.

Если из уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$ можно исключить параметр t, то y определится как явная или неявная функция x. Однако исключение параметра t из уравнений

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

является в большом числе случаев задачей трудной, а иногда и просто неразрешимой.

Проведение касательных к линиям, уравнения которых заданы параметрически

Порядок действий:

1. Записать уравнение касательной в виде: $y - y_0 = y'(M_0)(x - x_0)$.

2. Найти y': $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

3. Вычислить $y'(M_0)$: для этого надо найти значение t, соответствующее координатам x_0, y_0. Подставить в уравнение $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ координаты точки M_0 и найти соответствующее t.

4. Записать уравнение касательной.

Пример 2.49. Исключить параметр t из уравнений $\left.\begin{array}{l} x = 8t^2 - 7 \\ y = 16t^2 + 4 \end{array}\right\}$ и определить линию, определяемую полученным уравнением.

▲ Из первого уравнения определим t^2 в зависимости от x и подставим это значение t^2 во второе уравнение

$$\left.\begin{array}{l} t^2 = \dfrac{x+7}{8} \\ y = 16 \cdot \dfrac{x+7}{8} + 4 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2x + 18.$$

Линия, определяемая этим уравнением – прямая. Значит, заданное уравнение определяет прямую линию. ▼

Пример 2.50. Даны уравнения движения точки: $x = 5t^2$, $y = 3t$. Определить траекторию точки.

▲ Исключим из уравнений параметр t. Найдем из второго уравнения t и подставим найденное значение в первое уравнение

$$\left.\begin{array}{l} x = 5t^2 \\ t = \dfrac{y}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 5 \cdot \dfrac{y^2}{9} \\ t^2 = \dfrac{y^2}{9} \end{array}\right\} \Rightarrow y^2 = \frac{9}{5}x,$$

траектория – парабола. Заданные уравнения – параметрические уравнения параболы. ▼

Пример 2.51. Кривая задана параметрическими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{aligned}\right\} \; 0 \le t \le 2\pi .$$

Исключить параметр t из этих уравнений.

▲ Обе части первого уравнения разделим на a, а второго на b: $\left.\begin{aligned} &\frac{x}{a}\cos t \\ &\frac{y}{b} = \sin t \end{aligned}\right\}.$

Обе части каждого из этих уравнений возведем в квадрат и почленно сложим

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} &= \cos^2 t \\ \frac{y^2}{b^2} &= \sin^2 t \end{aligned}\right\} \Big| + \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

кривая – эллипс. Итак, заданные уравнения – уравнения эллипса в параметрической форме. Когда параметр t изменяется на отрезке $[0; 2\pi]$, точка на эллипсе описывает всю кривую. ▼

Пример 2.52 (для самостоятельного решения). Исключить параметр t из уравнений и определить вид кривой:

а) $\left.\begin{aligned} x &= 6\sin\tfrac{\pi}{3}t \\ y &= 3\cos\tfrac{\pi}{3}t \end{aligned}\right\}$; б) $\left.\begin{aligned} x &= 4\sin t \\ y &= 4\cos t \end{aligned}\right\}$; в) $\left.\begin{aligned} x &= 3\cos t^2 \\ y &= 3\sin t^2 \end{aligned}\right\}$; г) $\left.\begin{aligned} x &= 3\cos t \\ y &= 4 - 3\sin t \end{aligned}\right\}$.

Ответ: а) Кривая – эллипс, определяемый уравнением $x^2 + 4y^2 - 36 = 0$.

б) Кривая – окружность $x^2 + y^2 = 16$.

в) Кривая – окружность $x^2 + y^2 = 9$.

г) Кривая – окружность $x^2 + (y-4)^2 = 9$

Если функция $y = f(x)$ *задана параметрически, т.е. система уравнений*

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha; \beta],$$

где функции $x(t)$, $y(t)$ дифференцируемы и $x'_t \neq 0$, определяет y как непрерывную функцию от x, то производная y'_x существует и вычисляется по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Общее правило: производная от параметрически заданной величины y по независимой переменной x равна отношению производных от y и от x, взятых по параметру t.

Пример 2.53. Вычислить y'_x, если $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $t \in R$.

▲ Находим производные x'_t и y'_t: $x'_t = -a\sin t$, $y'_t = b\cos t$.

Подставляя полученные выражения в формулу, получаем

$$y'_x = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t \ (t \neq k\pi, k \in Z). \ ▼$$

Пример 2.54. Вычислить y'_x при $t = 0$, если $x = \sin t$, $y = a^t$, $t \in R$.

▲ По формуле имеем

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{a^t \ln a}{\cos t} \left(t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in Z \right).$$

Подставляя в это равенство $t = 0$, находим

$$y'_x\big|_{t=0} = \frac{a^0 \ln a}{\cos 0} = \ln a. \ ▼$$

Пример 2.55. Для функции, заданной параметрически,

$$\left.\begin{array}{l} x = k\sin t + \sin kt \\ y = k\cos t + \cos kt \end{array}\right\}$$

найти $\left(\frac{dy}{dt}\right)\Big|_{t=0}$. Каков геометрический смысл результата?

▲ Находим производные от x и от y по параметру t

$$\frac{dx}{dt} = k\cos t + k\cos kt; \ \frac{dy}{dt} = -k\sin t - k\sin kt.$$

Искомая производная от y по x находится как отношение производных от y и от x по t:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{k(\sin t+\sin kt)}{k(\cos t+\cos kt)}=-\frac{2\sin\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}}{2\cos\frac{t+kt}{2}\cos\frac{t-kt}{2}}=-\operatorname{tg}\frac{k+1}{2}t.$$

Если $t=0$, то получим $\left(\frac{dy}{dt}\right)\Big|_{t=0}=\left(-\operatorname{tg}\frac{k+1}{2}t\right)\Big|_{t=0}=0$.

Согласно геометрическому значению производной в точке $(0;k+1)$, где $t=0$, касательная к графику данной функции параллельна оси Ox. ▼

Пример 2.56. Составить уравнения касательной и нормали к циклоиде $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$ в точке, где $t=\frac{\pi}{2}$.

▲ Подставляя в уравнение циклоиды $t_0=\frac{\pi}{2}$, находим координаты точки касания:

$$x_0=x(t_0)=(t-\sin t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=\tfrac{\pi}{2}-\sin\tfrac{\pi}{2}=\tfrac{\pi}{2}-1;$$

$$y_0=y(t_0)=(1-\cos t)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1-\cos\tfrac{\pi}{2}=1.$$

Затем определяем производную от y по x из уравнений циклоиды, как от функции, заданной параметрически

$$y'=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sin t}{1-\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

и вычисляем ее значение для точки касания $y_0'=y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)\Big|_{t=\frac{\pi}{2}}=1$.

Подставляя x_0, y_0 и y_0' в уравнения

$$y-y_0=y_0'(x-x_0);\ y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0),$$

получим уравнение касательной $2x-2y-\pi+4=0$ и уравнение нормали $2x+2y-\pi=0$. ▼

Пример 2.57. В каких точках кривой $x=t-1$, $y=t^3-12t+1$ касательная параллельна: а) оси Ox; б) прямой $9x+y+3=0$?

▲ Используем здесь условие параллельности прямых, которое заключается в равенстве их угловых коэффициентов.

Найдем производную от y по x из уравнений кривой:

$$y' = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 12}{1} = 3t^2 - 12.$$

Эта производная представляет угловой коэффициент касательной к данной кривой в любой ее точке.

а) Приравнивая y' угловому коэффициенту оси Ox, который равен нулю, получим

$$3t^2 - 12 = 0 \Rightarrow t^2 - 4 = 0 \Rightarrow (t+2)(t-2) = 0 \Rightarrow (t_1 = -2) \vee (t_2 = 2).$$

Подставляя эти значения параметра t в данные уравнения кривой, найдем координаты тех ее точек, где касательная параллельна оси Ox:

$$t_1 = -2$$
$$x_1 = x(t_1) = (t-1)\big|_{t=-2} = -2 - 1 = -3;$$
$$y_1 = y(t_1) = (t^3 - 12t + 1)\big|_{t=-2} = (-2)^3 - 12(-2) + 1 = 17; \ \underline{(-3; 17)}$$

$$t_2 = 2$$
$$x_2 = x(t_2) = (t-1)\big|_{t=2} = 2 - 1 = 1;$$
$$y_2 = y(t_2) = (t^3 - 12t + 1)\big|_{t=2} = 2^3 - 12 \cdot 2 + 1 = -15; \ \underline{(1; -15)}$$

б) Приравнивая y' угловому коэффициенту данной прямой линии, который равен -9, получим

$$3t^2 - 12 = -9 \Rightarrow t^2 - 1 = 0 \Rightarrow (t+1)(t-1) = 0 \Rightarrow (t_1 = -1) \vee (t_2 = 1).$$

По найденным значениям параметра t из уравнений кривой определяем координаты искомых точек, где касательная к кривой параллельна данной прямой: $(-2; 12)$, $(0; -10)$. ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Вычислить производную y'_x для функции, заданной параметрически:

1. $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t^3, \end{cases} \quad t \in R.$ **Ответ**: $\dfrac{3t}{2}$.

2. $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^2 t, \end{cases} t \in R.$ **Ответ**: $-\dfrac{b}{a}$.

3. $\begin{cases} x = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \end{cases} t \in R.$

Ответ: $y' = \begin{cases} 1, t > 0, \\ -1, t < 0 \end{cases}$ не существует, если $t = 0$.

4. $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} t \in R.$ **Ответ**: $\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ $(t \neq 2\pi k)$.

5. $\begin{cases} x = a\left(\ln\operatorname{tg}\dfrac{t}{2} + \cos t - \sin t\right), \\ y = a(\sin t - \cos t) \end{cases}$ **Ответ**: $\operatorname{tg} t$ $\left(t \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$.

6. $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = t(1 - \sin t) \end{cases} t \in R.$ **Ответ**: $\dfrac{\cos t - t\sin t}{1 - \sin t - t\cos t}$.

7. Вычислить $\dfrac{dy}{dx}$ при $t = 1$, если $\begin{cases} x = t\sin t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}, \end{cases} t \in R.$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - \ln t}{t^2(1 + \ln t)}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=1} = 1$.

8. Вычислить $\dfrac{dy}{dx}$ при $t = \dfrac{\pi}{4}$, если $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} t \in R.$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t}$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \infty$.

2.9. Производная функции, заданной неявно

Функцию называют ***заданной неявно*** уравнением $F(x;\,y)=0$ (***неявной функцией***), если каждое значение аргумента x и соответствующее ему значение функции y являются решением данного уравнения.

Если уравнение $F(x;\,y)=0$ задает y как неявную функцию аргумента x, т. е. $y=y(x)$, то при нахождении производной этой функции дифференцируют обе части данного уравнения по x и получают уравнение относительно y'. Затем из этого уравнения находят y'.

Проведение касательной к линии, уравнение которой задано неявно

Если $y=f(x)$, то уравнение касательной в точке $M_0(x_0;\,y_0)$ имеет вид $y-y_0=y'(x_0)(x-x_0)$.

Если функция задана неявно, то касательная имеет то же самое уравнение, только производная находится по правилу дифференцирования неявной функции и вычисления в точке $M_0(x_0;\,y_0)$.

Порядок действий:

1. Записать уравнение касательной в виде: $y-y_0=y'(M_0)(x-x_0)$.
2. Найти y' по правилу дифференцирования неявной функции и вычислить $y'(M_0)$, подставив в y' вместо x и y координаты точки M_0.
3. Записать уравнение касательной.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найти производную неявной функции:

Пример 2.58. $x^2+y^2-a^2=0$.

▲ Считая y функцией от x и дифференцируя y как сложную функцию, получим $(x^2+y^2-a^2)'=0$, $2x+2yy'=0$, откуда $y'=-\dfrac{x}{y}$. ▼

Пример 2.59. $\operatorname{arctg} y-y+x=0$.

▲ Дифференцируем равенство по x, считая y функцией от x:

$$\frac{y'}{1+y^2}-y'+1=0,\text{ откуда } y'=\frac{1+y^2}{y^2}.\ ▼$$

Пример 2.60. $a^x-e^{x-y}=0$.

▲ $a^x\ln a-e^{x-y}(1-y')=0$, откуда

$$y' = \frac{e^{x-y} - a^x \ln a}{e^{x-y}} = \frac{e^{x-y}(1 - \ln a)}{e^{x-y}} = 1 - \ln a. \ \blacktriangledown$$

Пример 2.61. $e^y = x^{x+y}$.

▲ В правой части равенства переменными являются и основание степени x, и показатель степени $x + y$, а потому здесь следует сначала прологарифмировать обе части равенства, а затем уже дифференцировать.

После логарифмирования с учетом того, что $\ln e = 1$, получаем $y = (x + y)\ln x$. Отсюда

$$y' = (1 + y')\ln x + (x + y)\frac{1}{x}.$$

Раскрывая скобки, имеем

$$y' = \ln x + y'\ln x + (x + y)\frac{1}{x} \Rightarrow y' - y'\ln x = \ln x + (x + y)\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y'(1 - \ln x) = \ln x + (x + y)\frac{1}{x} \Rightarrow y' = \frac{x\ln x + x + y}{x(1 - \ln x)},$$

и окончательно:

$$y' = \frac{x(\ln x + 1) + y}{x(1 - \ln x)}. \ \blacktriangledown$$

Найти производную заданной функции и вычислить ее значение в указанной точке

Пример 2.62. $e^{x-2} + xy - 3y - 2 = 0$, $x = 2$.

▲ $e^{x-2} + xy' + y - 3y' = 0$. Из этого равенства определяем $y' = \dfrac{e^{x-2} + y}{3 - x}$.

Подставляя данное по условию значение $x = 2$ в исходное уравнение, найдем соответствующее значение

$$(e^{x-2} + xy - 3y - 2 = 0)\big|_{x=2} \Rightarrow e^0 + 2y - 3y - 2 = 0 \Rightarrow y = -1.$$

Искомое частное значение производной y' при $x = 2$ будет

$$y'\Big|_{x=2,\,y=-1} = \left(\frac{e^{x-2}+y}{3-x}\right)\Bigg|_{x=2,\,y=-1} = \frac{e^0-1}{3-2} = 0.\ ▼$$

Пример 2.63. $x^2+y^2-4x-10y+4=0$, $x=6$. Каков геометрический смысл решения этой задачи?

▲ Дифференцируя по x, получим $2x+2yy'-4-10y'=0$. Отсюда имеем

$$y' = \frac{x-2}{5-y}.$$

Подставляя заданное значение $x=6$ в исходное уравнение, найдем два соответствующих ему значения y:

$$(x^2+y^2-4x-10y+4=0)\big|_{x=6},$$

$$36+y^2-24-10y+4=0 \Rightarrow y^2-10y+16=0 \Rightarrow y_1=2 \vee y_2=6.$$

Поэтому и производная y' при $x=6$ имеет два значения:

$$y'\Big|_{x=6,\,y=2} = \left(\frac{x-2}{5-y}\right)\Bigg|_{x=6,\,y=2} = \frac{6-2}{5-2} = \frac{4}{3};$$

$$y'\Big|_{x=6,\,y=8} = \left(\frac{x-2}{5-y}\right)\Bigg|_{x=6,\,y=8} = \frac{6-2}{5-8} = -\frac{4}{3}.$$

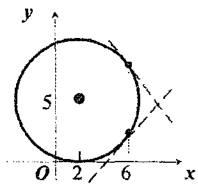


Рис. 1.8

Геометрически, в прямоугольной системе координат, заданное в условии задачи уравнение определяет окружность, у которой абсциссу $x=6$ имеют две точки: (6; 2) и (6; 8). Найденные значения производной представляют угловые коэффициенты касательных к этой окружности в той и другой точке (рис. 1.8). ▼

Пример 2.64. Составить уравнение касательной и нормали к окружности $x^2+y^2-2x+4y-3=0$ в точках пересечения ее с осью Ox.

▲ Решая совместно заданное уравнение окружности и уравнение оси Ox, $y=0$, находим точки их пересечения:

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x+4y-3=0, \\ y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-2x-3=0, \\ y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-1 \vee x_2=3, \\ y=0 \end{cases}$$

$A(-1;0)$, $B(3;0)$ рис. 1.9.

Дифференцируя по x уравнение окружности $2x+2yy'-2+4y'=0$, находим производную $y'=\dfrac{1-x}{2+y}$ и вычислим ее значение для точек A и B:

$$y'(A)=\left(\frac{1-x}{2+y}\right)\Bigg|_{x=-1,\,y=0}=1;\ y'(B)=\left(\frac{1-x}{2+y}\right)\Bigg|_{x=3,\,y=0}=-1.$$

Подставляя в общее уравнения касательной и нормали, получим искомые уравнения:

для точки A соответственно $x-y+1=0$ и $x+y+1=0$;

для точки B $x+y-3=0$ и $x-y-3=0$. ▼

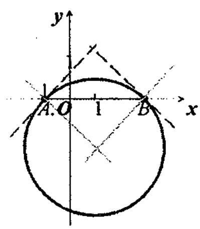


Рис. 1.9

Пример 2.65. Найти углы, под которыми пересекаются следующие линии: эллипс $x^2+4y^2=4$ и парабола $4y=4-5x^2$.

▲ Решая совместно уравнения кривых, находим их общие точки:

$$\begin{cases} x^2+4y^2=4, \\ x^2=\dfrac{4-4y}{5}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{4-4y}{5} \\ \dfrac{4-4y}{5}=4-4y^2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{4-4y}{5}, \\ 5y^2 - y - 4 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{4-4y}{5}, \\ y_1 = -0.8 \vee y_2 = 1 \end{cases}$$

$A(1.2; -0.8)$, $B(0; 1)$, $C(-1.2; -0.8)$, рис. 1.10.

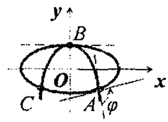


Рис. 1.10

Затем определяем угловые коэффициенты $k_э$ и $k_п$ касательных в любой точке эллипса и параболы как производные от y по x из их уравнений

$$2x + 8yy' = 0,\ y' = -\tfrac{x}{4y},\ k_э = -\tfrac{x}{4y};\ 4y' = -10x,\ y' = -\tfrac{5}{2}x,\ k_п = -\tfrac{5}{2}x.$$

Подставляя координаты точки A, получим

$$k_э = \left(-\tfrac{x}{4y}\right)\Big|_{x=1.2;\,y=-0.8} = \tfrac{3}{8} \text{ и } k_п = \left(-\tfrac{5}{2}x\right)\Big|_{x=1.2;\,y=-0.8} = -3.$$

Следовательно, в точке A: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\frac{3}{8} - (-3)}{1 + \frac{3}{8}\cdot(-3)} = \dfrac{\frac{3}{8}+3}{1 - \frac{9}{8}} = -27;\ \varphi = \pi - \operatorname{arctg} 27.$

Под таким же углом кривые пересекаются и в точке C вследствие их симметричности относительно оси Oy.

В точке B имеем: $k_э = k_п = 0$, следовательно, в точке B кривые имеют общую касательную, т.е. касаются друг друга. В этой точке угол между кривыми равен нулю. ▼

Пример 2.66. Точка движется по кубической параболе, $12y = x^3$. Какая из ее координат изменяется быстрее?

▲ Считая в уравнении параболы y сложной функцией от времени t, получим $12\frac{dy}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$.

Отсюда найдем отношение скоростей изменения ординаты и абсциссы: $\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4}x^2$.

Если $|x| < 2$, то это отношение будет меньше единицы, если $|x| = 2$ – равно единице и если $|x| > 2$ оно будет больше единицы. Следовательно,

1) если $-2 < x < 2$, то ордината изменяется медленнее абсциссы;

2) если $x=\pm 2$, то скорости изменения абсциссы и ординаты одинаковы;
3) если $x<-2$ и $x>2$, то ордината изменяется быстрее абсциссы. ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Вычислить производные функций, заданных неявно:

№	Функция	*Ответ*
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$-\frac{b^2x}{a^2y}$
2	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{b^2x}{a^2y}$
3	$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$	$-\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$
4	$\operatorname{arctg}(x+y)=x$	$(x+y)^2$
5	$x^3+y^3-3axy=0$	$\frac{x^2-ay}{ax-y^2}$
6	$e^y=x+y$	$\frac{1}{e^y-1}$
7	$\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$	$\frac{x+y}{x-y}$
8	$e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$	$-\frac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$
9	$\sqrt[x]{y}=\sqrt[y]{x}$	$\frac{y(x+y\ln y)}{x(y+x\ln x)}$

10. Вычислить y'_x в точке $M(1;1)$, если $y^2=x+\ln\frac{y}{x}$.

Ответ: $y'=\frac{1-\frac{1}{x}}{2y-\frac{1}{y}}$, $y'(M)=0$.

11. Вычислить y'_x при $x=0$, если $e^y+xy=e$ и $y(0)=1$.

Ответ: $y'=\frac{-y}{e^y+x}$, $y'(0)=\frac{-1}{e}$.

12. Найти y'_x при $y=0$, если $x\cos y-\sin y+\sin 2y=1$. *Ответ*: -1.

13. Найти уравнения касательных и нормалей к гиперболе $y^2-2x^2=1$ в точках, где $x=2$.

Ответ: $4x-3y+1=0, 3x+4y-18=0$; $4x+3y+1=0, 3x-4y-18=0$.

14. Найти углы, под которыми пересекаются данные линии:

$x^2 - y^2 = 6,\ x^2 + 4y^2 = 16.$ *Ответ*: $\frac{\pi}{2}$.

15. На окружности $x^2 + y^2 = 25$ найти точки, где касательная параллельна прямой $3x + 4y - 12 = 0$. Построить окружность, прямую и касательные. *Ответ*: $(3; 4), (-3; -4)$.

16. На кривой $x^2 + 3y^2 - 2x + 6y - 8 = 0$ найти такие точки, где касательная параллельна оси Ox. *Ответ*: $(1; -3)$.

Вопросы для самопроверки

1. Что называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0?

2. От какого аргумента зависит разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$? Какова область определения функции $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

3. Дайте определение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

4. Пользуясь определением производной, выведите формулы для производных функций x^n (n – натуральное число), $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$, a^x.

5. Каков физический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке x_0?

6. Каков геометрический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке x_0? Дайте определение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ и напишите уравнение касательной.

7. Когда говорят, что функция имеет в точке x_0 бесконечную производную? Приведите пример функции, график которой имеет в некоторой точке вертикальную касательную.

8. Что такое односторонние производные функции в точке? Какова связь между односторонними производными и производной функции в точке? Приведите пример функции, у которой существуют односторонние производные в некоторой точке, но не существует производная в этой точке.

9. Выведите формулы для производных суммы, разности, произведения и частного двух функций. Используя их, выведите формулы для производных функций $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$.

10. Сформулируйте теорему о производной обратной функции. Какова физическая интерпретация формулы для производной обратной функции? Пользуясь этой формулой, выведите формулы для производных обратных тригонометрических функций.

11. Что называется сложной функцией?

12. Как сложную функцию записать в виде цепочки простых функций?

13. Сформулируйте теорему о производной сложной функции. Какова физическая интерпретация формулы для производной сложной функции?
14. Запишите правило дифференцирования сложной функции.
15. Каков порядок дифференцирования сложной функции?
16. В чем состоит метод логарифмического дифференцирования?
17. Что такое параметрическое задание функции?

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Основные теоретические сведения

3.1. Дифференцируемость функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой в точке*** $x \in (a; b)$, если приращение функции $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, отвечающее приращению Δx аргумента, можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где A – некоторое число, которое не зависит от приращения аргумента Δx (но, вообще говоря, зависит от x), а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Для того чтобы функция была дифференцируема в точке x, необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная

$$y'(x) = A.$$

Определение. Главная часть приращения $A\Delta x$ (линейная относительно Δx) называется ***дифференциалом функции***.

Обозначение: dy или $df(x)$.

По определению $dx = \Delta x$.

Учитывая, что $A = f'(x)$, дифференциал функции можно записать следующим образом:

$$dy = y'(x)dx \text{ или } dy = f'(x)dx.$$

Для всякой данной функции $y = f(x)$ производная y' зависит только от одной переменной x, тогда как ее дифференциал dy зависит от двух независимых друг от друга переменных: x и Δx.

Чтобы найти дифференциал какой-либо функции, надо
1. ***найти производную этой функции;***
2. ***умножить ее на дифференциал независимой переменной.***

3.2. Геометрический и физический смысл дифференциала

Геометрически дифференциал интерпретируется как приращение NQ ординаты касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ (рис. 3.1). Здесь

$PN = \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение ординаты кривой,

$NQ = \operatorname{tg}\alpha \cdot \Delta x = y'dx = dy$ – дифференциал функции.

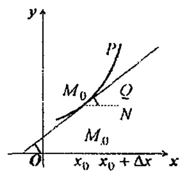


Рис. 3.1

Если x – время, а $y = f(x)$ – координата точки на прямой в момент x, то дифференциал $dy = f'(x)\Delta x$ равен тому изменению координаты, которое получила бы точка за время Δx, если бы скорость точки на отрезке времени $[x_0; x_0 + \Delta x]$ была постоянной и равной $f'(x_0)$. Изменение скорости на этом отрезке приводит к тому, что, вообще говоря, $\Delta y \neq dy$.

Однако на малых промежутках времени Δx изменение скорости незначительно и $\Delta y \approx dy = f'(x_0)\Delta x$.

3.3. Инвариантность формы первого дифференциала

Дифференциал обладает свойством ***инвариантности формы***, т.е. для дифференцируемой сложной функции $y = f(u)$, где $u = u(x)$, форма дифференциала сохраняется в виде $dy = f'(u)du$. Отметим, что здесь du означает не произвольное приращение Δu, а дифференциал функции $u = u(x)$ как функции от x.

3.4. Использование дифференциала для приближенных вычислений

Если Δx мало, то с точностью до бесконечно малых величин более высокого порядка, чем Δx, имеет место приближенная формула

$$\Delta y \approx dy,\ f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x \text{ или } f(x+\Delta x) \approx f'(x)\Delta x + f(x).$$

В частности, если независимая переменная x определяется с абсолютной погрешностью $\Delta_x = |\Delta x|$, то в качестве абсолютной погрешности Δ_y дифференцируемой функции $y = f(x)$ можно принять $|dy|$, т.е.

$$\Delta_y \approx |dy| = |y'|\Delta_x.$$

Относительная погрешность δ_y функции $y = f(x)$ равна

$$\delta_y = \left|\frac{dy}{y}\right| = \left|\frac{y'}{y}\right|\Delta_x.$$

Примеры решения задач

Пример 3.1. Найти дифференциалы функций:

а) $y = x^3 - 3^x$; б) $y = \cos\frac{x}{3} + \sin\frac{3}{x}$;

в) $y = \ln(1+e^{10x}) + \operatorname{arcctg} e^{5x}$, вычислить $dy\big|_{x=0,\, dx=0.1}$.

▲ Находим производную данной функции и, умножая ее на дифференциал независимой переменной, получим дифференциал данной функции:

а) $dy = y'dx = (x^3 - 3^x)'dx = (3x^2 - 3^x \ln 3)dx$;

б) $dy = d\left(\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{3}{x}\right) = \left(\cos\frac{x}{3} + \sin\frac{3}{x}\right)' dx =$

$$= \left(-\sin\frac{x}{3}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)' + \cos\frac{3}{x}\cdot\left(\frac{3}{x}\right)'\right)dx = -\left(\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3} + \frac{3}{x^2}\cos\frac{3}{x}\right)dx.$$

в) $dy = \left(\frac{(1+e^{10x})'}{1+e^{10x}} - \frac{(e^{5x})'}{1+e^{10x}}\right)dx = \left(\frac{10e^{10x}}{1+e^{10x}} - \frac{5e^{5x}}{1+e^{10x}}\right)dx = \frac{5e^{5x}(2e^{5x}-1)}{1+e^{10x}}dx.$

Полагая $x = 0$ и $dx = 0.1$, получим

$$dy\big|_{x=0,\, dx=0.1} = \left(\frac{5e^{5x}(2e^{5x}-1)}{1+e^{10x}}dx\right)\Bigg|_{x=0,\, dx=0.1} = \frac{5e^0(2e^0-1)}{1+e^0}\cdot 0.1 = 0.25.$$ ▼

Пример 3.2. Найти приращение и дифференциал функции $y = 3x^2 + x$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 0.1$. Вычислить абсолютную и относительную погрешности, которые допускаются при замене приращения функции ее дифференциалом.

▲ Найдем приращение и дифференциал функции:

$\Delta y = \left(3(x+\Delta x)^2 + x + \Delta x\right) - (3x^2 + x) =$

$$= 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + \Delta x = (6x+1)\Delta x + 3\Delta x\cdot\Delta x.$$

Тогда $dy=(6x+1)\Delta x$. Вычислим Δy и dy в точке $x=1$ при $\Delta x=0.1$:

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}} = \left((6x+1)\Delta x+3(\Delta x)^2\right)\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}} =$$

$$=(6\cdot 1+1)\cdot 0.1+3(0.1)^2 = 7\cdot 0.1+3\cdot 0.01=0.73;$$

$$dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0/1}} = \left((6x+1)\Delta x\right)\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}} = (6\cdot 1+1)\cdot 0.1 = 0.7.$$

Абсолютная погрешность $|\Delta y-dy|=|0.73-0.7|=0.03$, относительная погрешность $\left|\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|=\dfrac{0.03}{0.73}\approx 0.04$. ▼

Пример 3.3. Вычислить значение дифференциала функции $y=x^2+2x$, когда x изменяется от 1 до 1.1.

▲ Прежде всего, находим общее выражение для дифференциала этой функции:

$$dy=(x^3+2x)'dx=(3x^2+2)dx.$$

Подставляя значения $x=1$, $dx=\Delta x=1.1-1=0.1$ в последнюю формулу, получаем искомое значение дифференциала:

$$dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}} = (3\cdot 1^2+2)0.1 = 5\cdot 0.1 = 0.5.\ ▼$$

Пример 3.4. Вычислить приближенное значение: $y=e^{1-x^2}$ при $x=1.05$.

Если требуется вычислить $f(x_1)$ и если проще вычислить $f(x_0)$ и $f'(x_0)$, то при достаточно малой по абсолютной величине разности $x_1-x_0=\Delta x=dx$ можно заменить приращение функции ее дифференциалом $f(x_1)-f(x_0)\approx f'(x_0)dx$ и отсюда найти приближенное значение искомой величины по формуле $f(x_1)\approx f(x_0)+f'(x_0)dx$.

▲ В нашей задаче $x_0=1$, $\Delta x=dx=1.05-1=0.05$. Вычисляем

$$y(1)=\left(e^{1-x^2}\right)_{x=1}=e^{1-1^2}=1,$$

$$dy=\left(e^{1-x^2}\right)'dx=e^{1-x^2}(-2x)dx;\ dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.05}}=\left(-2\cdot 1\cdot e^{1-1^2}\right)\cdot 0.05=-0.1.$$

Тогда $y(1.05)\approx 1-0.1=0.9$. ▼

Пример 3.5. Вычислить приближенное значение:

$$\text{а) } \sqrt[4]{17};\ \text{б) } \operatorname{arctg}0.98;\ \text{в) } \sin 29^\circ.$$

▲ а) Будем рассматривать $\sqrt[4]{17}$ как частное значение функции $f(x)=\sqrt[4]{x}$ при $x=17=x_1$. Пусть $x_0=16$, тогда $f(x_0)=\sqrt[4]{16}=2$,

$$f'(x_0)=\tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\Big|_{x=16}=\tfrac{1}{4\sqrt[4]{16^3}}=\tfrac{1}{32},\ dx=x_1-x_0=1.$$

Подставляя в формулу, получаем

$$\sqrt[4]{17}\approx f(x_0)+f'(x_0)dx=2+\tfrac{1}{32}\cdot 1=\tfrac{65}{32}\approx 2.031.$$

б) Пусть $\operatorname{arctg}0.98$ есть частное значение функции $y=\operatorname{arctg}x$ при $x=0.98=x_1$.

Пусть $x_0=1$, тогда $y(x_0)=\operatorname{arctg}x\big|_{x=1}=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}$,

$$y'(x_0)=\frac{1}{1+x^2}\Big|_{x=1}=\frac{1}{2},\ dx=x_1-x_0=0.98-1=-0.02.$$

Пользуясь формулой, найдем

$$\operatorname{arctg}0.98\approx y(x_0)+y'(x_0)dx=\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{1}{2}(-0.02)\approx 0.7754.$$

в) Полагая, что $\sin 29^\circ$ есть частное значение функции $y=\sin x$ при $x=\frac{\pi}{180}\cdot 29=x_1$ и что $x_0=\frac{\pi}{180}\cdot 30=\frac{\pi}{6}$, получим

$$y(x_0)=\sin\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{1}{2};\ y'(x_0)=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}=\tfrac{\sqrt{3}}{2};$$

$$dx=x_1-x_0=\tfrac{29\pi}{180}-\tfrac{\pi}{6}=-\tfrac{\pi}{180};$$

$$\sin 29^\circ\approx y(x_0)+y'(x_0)dx=\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\left(-\tfrac{\pi}{180}\right)\approx 0.4848.$$ ▼

Пример 3.6. Найти dy, если $y^3-y=6x^2$.

▲ Воспользовавшись свойством инвариантности формы дифференциала, найдем

$$d(y^3 - y) = d(6x^2),\ 3y^2dy - dy = 12xdx \text{ или } dy(3y^2 - 1) = 12xdx.$$

Отсюда $dy = \dfrac{12xdx}{3y^2 - 1}$. ▼

Пример 3.7. Насколько изменится объем шара, если его радиус изменится на величину ΔR. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до одного процента.

▲ Объем шара $V(R) = \frac{4}{3}\pi R^3$.

При изменении радиуса на ΔR его объем изменится на величину

$$\Delta V \approx dV = V'dR = 4\pi R^2 \Delta R.$$

Относительная погрешность при определении объема шара равна

$$\delta_V = \left|\frac{dV}{V}\right| = \left|\frac{4\pi R^2 \Delta R}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right| = 3\left|\frac{dR}{R}\right| = 3\delta_R,$$

где $\delta_R = \left|\frac{dR}{R}\right|$ – относительная погрешность при измерении радиуса шара. Следовательно, $\delta_R = \frac{1}{3}\delta_V$. Если $\delta_V = 1\%$, то находим $\delta_R = 0.33\%$. ▼

Пример 3.8. Вычислить приращение стороны куба, если известно, что его объем увеличился от 27 до 27.1 $м^3$.

▲ Если x – объем куба, то его сторона $y = \sqrt[3]{x}$.

По условию задачи $x = 27$, $\Delta x = 27.1 - 27 = 0.1$.

Тогда приращение стороны куба

$$\Delta y \approx dy = y'(x)dx,\ dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.1}} = y'(1)dx = \left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\Bigg|_{x=1} \cdot 0.1 =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cdot 0.1 = \frac{0.1}{27} \approx 0.0037\ м. ▼$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Вычислить приращение и дифференциал функции:

а) $y = x^3 - 7x^2 + 8$ в точке x_0;

б) $y = x^2 + 2x + 3$ в точке $x = 1$ при $\Delta x = 0.2$.

Ответ: а) $\Delta y = (3x^2 - 14x)\Delta x + \left((3x-7)\Delta x + (\Delta x)^2\right)\Delta x$,

$$dy = (3x^2 - 14x)dx;$$

$$\text{б) } \Delta y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.2}} = 0.84,\ dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.2}} = 0.8.$$

2. **Вычислить приращение и дифференциал функции** $y = x^3 - x$ **в точке** $x = 2$ **при**: а) $\Delta x = 0.01$, б) $\Delta x = 0.1$. **Найти абсолютную и относительную погрешности, которые допускаются при замене приращения функции ее дифференциалом.**

Ответ: $\Delta y = (3x^2 - 1)\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$, $dy = (3x^2 - 1)dx$,

а) $\Delta y = 0.110601$, $dy = 0.11$; $|\Delta y - dy| = 0.000601$, $\left|\frac{dy - \Delta y}{\Delta y}\right| = 0.0055$;

б) $\Delta y = 1.161$, $dy = 1.1$; $|\Delta y - dy| = 0.061$, $\left|\frac{dy - \Delta y}{\Delta y}\right| = 0.0526$.

3. **Найти дифференциалы заданных функций:**

а) $y = x\ln x - x$; б) $y = \arcsin\frac{x}{a}$; в) $y = \mathrm{arctg}\frac{x}{a}$;

г) $y = \ln(1 + e^{10x}) + \mathrm{arctg}\, e^{5x}$;

д) $y = \sqrt{\arcsin x} + \mathrm{arctg}^2 x$; е) $y = \ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}x\right)$.

Ответ: а) $\ln x dx$; б) $\dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$; в) $\dfrac{adx}{x^2 + a^2}$; г) $\dfrac{5e^{5x}(2e^{5x} + 1)}{1 + e^{10x}}dx$;

$$\text{д) } \left(\frac{1}{2\sqrt{\arcsin x(1 - x^2)}} + \frac{2\,\mathrm{arctg}\, x}{1 + x^2}\right)dx;\ \text{е) } \frac{-dx}{2\sin\dfrac{x}{2}}.$$

4. **Вычислить приближенное значение функции в указанных очках:**

а) $y = e^{0.1x(1-x)}$ в точке $x = 1.05$;

б) $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ в точке $x = 1.03$;

в) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-x}{1+x}}$ в точке $x = 0.1$.

Ответ: а) 0.995; б) 5; в) 0.93.

5. Вычислить приближенно (заменяя приращение функции ее дифференциалом): а) $\cos 61^\circ$; б) $\lg 10.21$; в) $\sqrt[5]{33}$; г) $y = \operatorname{arctg} 1.05$.

Ответ: а) 0.485; б) 1.009; в) 2.0125; г) $\frac{\pi}{4} + 0.025 \approx 0.81$.

6. Найти дифференциалы функций заданных неявно:

а) $y = e^{-\frac{x}{y}}$; б) $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Ответ: а) $\dfrac{-ye^{-\frac{x}{y}}dx}{y^2 - xe^{-\frac{x}{y}}}$; б) $\dfrac{x+y}{x-y}dx$.

7. Сторона квадрата равна 8 см. Насколько приблизительно увеличится его площадь, если каждую сторону увеличить: а) на 1 см, б) на 0.1 см.

Ответ: а) 16, б) 1.6.

Указание: $S = x^2$, где x – сторона квадрата. При увеличении стороны квадрата на Δx площадь увеличится на величину $\Delta S \approx dS = 2xdx$.

8. Сторона куба $x = 5\text{м} \pm 0.01\text{м}$. Вычислить абсолютную погрешность и относительную погрешности при вычислении объема куба.

Ответ: $\Delta_V \approx |\Delta V| = 0.75$, $\delta_V = \left|\frac{dV}{V}\right| = 0.006 = 0.6\%$.

9. Период колебания маятника $T = \pi\sqrt{\frac{l}{981}}$, где l – длина маятника в сантиметрах. Как нужно изменить длину маятника $l = 20\,см$, чтобы период колебания уменьшился на 0.1 с?

Ответ: 4.46 см. *Указание*: $dT = \frac{2\pi}{\sqrt{981}}\frac{1}{2\sqrt{l}}dt$, тогда $dl = \frac{\sqrt{981 \cdot l}}{\pi}dT$.

10. Период колебания маятника вычисляется по формуле $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где – длина маятника, g – ускорение силы тяжести. $\left(g = 981\,см/с^2\right)$. Какое влия-

ние на погрешность при вычислении T окажет погрешность в 1% при ускорении: а) длины маятника, б) ускорения?

Ответ: а) 0.5%. *Указание*: $\delta_T = \left|\frac{dT}{T}\right| = \left|\frac{\pi\sqrt{l}}{\sqrt{gl}\,2\pi\sqrt{l}}\right| dl = \left|\frac{dl}{2l}\right| = \frac{1}{2}\delta_l$.

б) 0.05%. *Указание*: $\delta_T = \left|\frac{dT}{T}\right| = \left|-\frac{2\pi\sqrt{l}\sqrt{g}dg}{1g\sqrt{g}\,2\pi\sqrt{l}}\right| = \left|\frac{1}{2}\frac{dg}{g}\right| = \frac{1}{2}\delta_g$.

11. Ток I определяется по тангенс-гальванометру по формуле $I = c\operatorname{tg}\varphi$. Пусть $d\varphi$ – ошибка, допущенная при отсчете угла φ. Найти абсолютную погрешность и относительную погрешности при определении I. При каком значении φ относительная погрешность будет минимальной?

Ответ: $\Delta_I \approx |dI| = \left|\dfrac{c\,d\varphi}{\cos^2\varphi}\right|$,

$\delta_I = \left|\dfrac{dI}{I}\right| = \left|\dfrac{2d\varphi}{\sin 2\varphi}\right|$, δ_I минимально при $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

12. По данному расстоянию d светящейся точки от оптического центра двояковыпуклого стекла может быть вычислено расстояние изображения точки согласно формуле $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$, где F – постоянная величина для данного стекла и данного сорта лучей. Как влияет погрешность в измерении d на погрешность в вычислении? ***Ответ***: $\Delta_f = \frac{f^2}{(d-F)^2}\Delta_d$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение дифференцируемости функции в данной точке.
2. Докажите теорему о связи между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке производной.
3. Что такое дифференциал функции в данной точке? От какого аргумента он зависит?
4. Может ли дифференциал функции в данной точке быть постоянной величиной?
5. Для каких функций дифференциал равен приращению функции?
6. Каков геометрический смысл дифференциала функции?
7. Для каких точек графика функции ее дифференциал больше приращения? Для каких точек он меньше приращения?
8. Каков физический смысл дифференциала?

9. Что понимается под инвариантностью формы первого дифференциала? Докажите, что форма первого дифференциала инвариантна.
10. Как можно использовать дифференциал функции для приближенных вычислений?

4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Основные теоретические сведения

4.1. Производные высших порядков

Определение. Если производная $f'(x)$ функции $y=f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x и имеет в этой точке производную, то производная от ее первой производной, т. е. $\left(f'(x)\right)'$ называется ***второй производной*** (или ***производной второго порядка***) функции $y=f(x)$ в точке x.

Обозначения: y'' (читается: игрек два штриха), $f''(x)$ (читается: эф два штриха от икс), $\frac{d^2y}{dx^2}$ (читается: де два игрек по де икс дважды), $y^{(2)}$, $f^{(2)}(x)$.

Механически вторая производная интерпретируется как ускорение прямолинейного движения точки, т. е. если $x=f(t)$ – закон движения точки, то $\frac{d^2f}{dt^2}$ – ускорение этого движения.

Третья производная определяется как производная от второй производной и т.д.

Определение. Если функция $y=f(x)$ имеет производную $(n-1)$ – го порядка, то ***производной*** n – го ***порядка*** называется производная от производной $(n-1)$ – го порядка.

Обозначение: $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, $\dfrac{d^nf(x)}{dx^n}$.

Таким образом, производные высших порядков определяются индуктивно по формуле

$$y^{(n)}(x)=\left(y^{(n-1)}(x)\right)'.$$

В частности, $y''=(y')'$, $y'''=(y'')'$ и т.д.

Функция, имеющая n-ю производную в точке x, называется n раз ***дифференцируемой*** в этой точке. Функция, имеющая в точке x производные всех порядков, называется ***бесконечно дифференцируемой*** в этой точке.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ n дифференцируемы, то справедливы формулы

$$(c_1 u \pm c_2 v)^{(n)} = c_1 u^{(n)} \pm c_2 v^{(n)},$$

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} v + C_n^1 u^{(n-1)} v' + C_n^2 u^{(n-2)} v'' + \ldots + uv^{(n)}$$

(формула Лейбница).

Если функция задана ***параметрически*** с помощью системы уравнений $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in (a; b)$, то ее производные высших порядков вычисляются последовательно по формулам

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},\ y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},\ y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ и т.д.}$$

Если функция $y = f(x)$ задана неявно с помощью уравнения

$$F(x; y) = 0,$$

то y''_{xx} находится из уравнения $\dfrac{d^2(F(x; y(x)))}{dx^2} = 0$.

Производную второго или третьего порядка удобно искать по методу последовательного дифференцирования, т.е.
1) найти сначала y', упростить,
2) затем найти y'', упростить и т.д.

Примеры решения задач

1. Последовательное дифференцирование

Пример. 4.1. Найти производную третьего порядка функции

$$y = x^3 - 5x^2 + 2x - 3.$$

▲ Находим последовательно y', y'', y''':

1) $y' = (x^3 - 5x^2 + 2x - 3)' = 3x^2 - 10x + 2$,

2) $y'' = (y')' = (3x^2 - 10x + 2)' = 6x - 10$,

3) $y''' = (y'')' = (6x - 10)' = 6$. ▼

Пример. 4.2. Найти производную второго порядка функции

$$y = \operatorname{arcctg} x^3.$$

▲ 1) $y' = -\dfrac{3x^2}{1 + x^6}$;

2) $y'' = -3\dfrac{(1 + x^6)\cdot 2x - x^2 \cdot 6x^5}{(1 + x^6)^2} = -6x\dfrac{1 + x^6 - 3x^6}{(1 + x^6)^2} = \dfrac{6x(2x^6 - 1)}{(1 + x^6)^2}$. ▼

Пример. 4.3. Найти производную второго порядка функции

$$y = \arccos e^{-x}.$$

▲ 1) $y' = -\dfrac{e^{-x}(-1)}{\sqrt{1 - (e^{-x})^2}} = \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}$;

2) $y'' = \dfrac{\sqrt{1 - e^{-2x}} \cdot e^{-x}(-1) - e^{-x} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{1 - e^{-2x}}} \cdot (-e^{-2x})(-2)}{1 - e^{-2x}} =$

$$y'' = \frac{-e^{-x}\sqrt{1 - e^{-2x}} - \dfrac{e^{-3x}}{\sqrt{1 - e^{-2x}}}}{1 - e^{-2x}} = \frac{-e^{-x}(1 - e^{-2x}) - e^{-3x}}{(1 - e^{-2x})\sqrt{1 - e^{-2x}}} =$$

$$= -\frac{e^{-x}(1 - e^{-2x} + e^{-2x}}{\left(\sqrt{1 - e^{-2x}}\right)^3} = -\frac{e^{-x}}{\left(\sqrt{1 - e^{-2x}}\right)^3}.$$ ▼

Пример. 4.4. Найти производную третьего порядка функции

$$y = \cos^3 x.$$

▲ 1) $y' = 3\cos^2 x \cdot (-\sin x) = -3\cos^2 x \cdot \sin x$;

2) $y'' = -3\left(2\cos x \cdot (-\sin x \cdot \sin x + \cos^2 x \cdot \cos x\right) =$

$$=\{\sin^2 x+\cos^2 x=1 \Rightarrow \sin^2 x=1-\cos^2 x\}=-3(\cos^3 x-2\cos x(1-\cos^2 x))=$$

$$=-3(\cos^3 x-2\cos x+2\cos^3 x)=6\cos x-9\cos^3 x;$$

3) $y'''=6\cdot(-\sin x)-9\cdot 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)=-6\sin x+27\cos^2 x\cdot\sin x$. ▼

Пример. 4.5. Найти производную второго порядка функции

$$y=\operatorname{tg}2x+\sqrt{x}.$$

▲ 1) $y'=\dfrac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2}{\cos^2 2x}+\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$;

2) $y''=\left\{\left(\dfrac{C}{v}\right)'=-\dfrac{Cv'}{v^2}\right\}=-\dfrac{2\cdot 2\cos 2x\cdot(-\sin 2x)\cdot 2}{\cos^4 2x}+\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}}=$

$$=\frac{8\sin 2x}{\cos^3 2x}-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}=\frac{8\operatorname{tg}2x}{\cos^2 2x}-\frac{1}{4x\sqrt{x}}.$$ ▼

2. Получение $y^{(n)}$ методом математической индукции

Определить от заданной функции производную порядка n – значит найти формулу, по которой можно определить производную любого порядка этой функции. Вообще говоря, для этого надо вычислить все последовательные производные до n-й включительно. Однако этого можно избежать, пользуясь методом математической индукции. На практике поступают так: находят последовательно несколько производных, подмечают закономерность, по которой они все образовываются, и, считая, что эта закономерность выполняется для производной любого порядка, составляют выражение для производной порядка n (заметим, что нулевая производная означает саму функцию).

Принцип математической индукции состоит в следующем:
1) если некоторое утверждение, зависящее от n, верно для значения
$$n=1$$
2) и из предположения, что оно верно для $n=k$ (k – любое натуральное число) следует, что оно верно и для следующего числа $n=k+1$,
3) то утверждение верно для любого натурального n.

Пример. 4.6. Найти производную n-го порядка функции $y=xe^x$.

▲ 1) $y' = e^x + xe^x = e^x(1+x)$, $y'' = e^x(1+x) + e^x = e^x(2+x)$,

$$y''' = e^x(2+x) + e^x = e^x(3+x).$$

2) Заметим, что правые части зависят от порядка производной (сомножитель при функции e^x есть двучлен, первое слагаемое которого равно порядку производной). Считаем, что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка.

Допустим, что $y^{(k)} = e^x(k+x)$ и найдем $y^{(k+1)}$:

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left(e^x(k+x)\right)' = e^x(k+x) + e^x = e^x\left((k+1)x\right).$$

3) Отсюда в силу принципа математической индукции заключаем, что

$$y^{(n)} = e^x(n+x).\ ▼$$

Пример. 4.7. Найти производную n-го порядка функции $y = e^{4x}$.

▲ 1) $y' = 4^1 e^x$, $y'' = 4^2 e^{4x}$, $y''' = 4^3 e^{4x}$.

2) Замечая, что правые части зависят от порядка производной (показатель степени у коэффициента при e^{4x} равен порядку производной), допустим, что $y^{(k)} = 4^k e^{4x}$ и найдем $y^{(k+1)}$:

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left(4^k e^{4x}\right)' = 4^k \cdot 4e^{4x} = 4^{k+1} e^x.$$

3) Отсюда в силу принципа математической индукции заключаем, что

$$y^{(n)} = 4^n e^{4x}.\ ▼$$

Пример. 4.8. Найти производную n-го порядка функции $y = x \cdot \ln x$.

Напоминаем $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, $0! = 1$.

▲ 1) $y' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$;

$$y'' = \frac{1}{x} = x^{-1} = (-1)^0 \cdot 0! x^{-1};$$

$$y''' = (-1) \cdot x^{-2} = (-1)^1 \cdot 1! x^{-2};$$

$$y^{(4)} = (-1)(-2)\cdot x^{-3} = (-1)^2 \cdot 2!\cdot x^{-3}; \ldots$$

2) Рассмотрим закономерность, по которой составлена каждая из этих производных:

а) все производные содержат множителем число -1 в степени, которая на две единицы меньше порядка производной;

б) второй сомножитель есть факториал числа на две единицы меньшим порядка производной; третий сомножитель есть x в отрицательной степени, равной порядку производной без единицы. Считая, что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка, допустим, что

$$y^{(k)} = (-1)^{k-2}(k-2)!\cdot x^{-(k-1)} \text{ для } k \geq 2$$

и найдем $y^{(k+1)}$:

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left((-1)^{k-2}(k-2)!\cdot x^{-(k-1)}\right)' =$$

$$= (-1)^{k-2}(k-2)!\cdot\left(-(k-1)\right)\cdot x^{-k} = (-1)^{k-1}(k-1)!\cdot x^{-k}.$$

3) Отсюда в силу принципа математической индукции заключаем, что

$$y^{(n)} = (-1)^{n-2}(n-2)!x^{-(n-1)} \text{ для } n \geq 2. \ ▼$$

Пример. 4.9. Найти производную n-го порядка функции $y = \sin x$.

▲ 1) $y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$,

$$y'' = \left(\sin\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + \tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 2\cdot\tfrac{\pi}{2}\right).$$

2) Легко усматривается закономерность, по которой образованы все эти производные: у каждой из них под знаком синуса к x прибавляется произведение $\frac{\pi}{2}$ на порядок производной.

Считая, что эта закономерность сохраняется для производной любого порядка, допустим, что $y^{(k)} = \sin\left(x + k\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ и найдем $y^{(k+1)}$:

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left(\sin\left(x + k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + k\cdot\tfrac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (k+1)\cdot\tfrac{\pi}{2}\right).$$

3) Отсюда в силу принципа математической индукции заключаем, что

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\tfrac{\pi}{2}\right). \ ▼$$

3. Вычисление $y^{(n)}$ по известным формулам

Известны производные n-го порядка для многих из основных элементарных функций, полученные по принципу математической индукции.

$$1.\ \left(x^n\right)^{(n)} = n!,\ \left(x^n\right)^{(m)} = n(n-1)\cdots(n-m+1)\cdot x^{n-m};$$

$$2.\ \left(e^x\right)^{(n)} = e^x; \qquad 3.\ \left(a^x\right)^{(n)} = (\ln a)^n \cdot a^x.\ \ 4.\ (\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\cdot\tfrac{\pi}{2}\right);$$

$$5.\ (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\cdot\tfrac{\pi}{2}\right);\ 6.\ (\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n-1)!}{x^n}.$$

Пользуясь этими формулами, можно быстро находить производные n-го порядка от многих функций.

Пример. 4.10. Найти производную n-го порядка функции $y = \sin^2 x$.

▲ $y' = 2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$.

$$y^{(n)} = (\sin 2x)^{(n-1)} = \{\text{по формуле } 4\} = 2^{n-1}\sin\left(2x + (n-1)\tfrac{\pi}{2}\right).$$

Множитель 2^{n-1} появляется в результате необходимости каждый раз домножить на производную от аргумента. ▼

4. Вычисление $y^{(n)}$ по формуле Лейбница

Эта формула дает возможность вычислить производную любого порядка от произведения двух функций, минуя последовательное применение формулы для вычисления производной от произведения двух функций. Формула Лейбница записывается так:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + C_n^2 u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}$$

Пример. 4.11. Найти производную 5-го порядка функции

$$y = e^{4x}\sin 3x.$$

▲ Если $y = uv$, то на основании формулы Лейбница

$$y^{(5)} = u^{(5)}v + C_5^1 u^{(4)}v' + C_5^2 u'''v'' + C_5^3 u''v''' + C_5^4 u'v^{(4)} + uv^{(5)}.$$

Полагая в заданной функции $u = e^{4x}$, $v = \sin 3x$, для применения формулы следует найти первые пять последовательных производных каждой функции u и v:

$u' = 4e^{4x}$; $u'' = 16e^{4x}$; $u''' = 64e^{4x}$; $u^{(4)} = 256e^{4x}$; $u^{(5)} = 1024e^{4x}$;

$v' = 3\cos 3x$; $v'' = -9\sin 3x$; $v''' = -27\cos 3x$; $v^{(4)} = 81\sin 3x$; $v^{(5)} = 243\cos 3x$.

Подставляя эти производные в полученную формулу, получим

$$y^{(5)} = 1024e^{4x}\sin 3x + 5\cdot 256e^{4x}\cdot 3\cos 3x + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}64e^{4x}(-9\sin 3x) + \\ + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}16e^{4x}(-27\cos 3x) + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}4e^{4x}\cdot 81\sin 3x + e^{4x}\cdot 243\cos 3x;$$

и после упрощений $y^{(5)} = -e^{4x}(3116\sin 3x + 237\cos 3x)$. ▼

5. Вычисление $y^{(n)}$ от функции, заданной параметрически

Пример. 4.12. Найти $y_x^{(3)}$, если $x = \ln t$, $y = t^3$ $(t > 0)$.

▲ Находим

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(t^3)'}{(\ln t)'} = \frac{3t^2}{\frac{1}{t}} = 3t^3,\ y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(3t^3)'}{(\ln t)'} = \frac{9t^2}{\frac{1}{t}} = 9t^3,$$

$$y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} = \frac{(9t^3)'}{(\ln t)'} = \frac{27t^2}{\frac{1}{t}} = 27t^3. ▼$$

6. Вычисление $y^{(n)}$ от функции, заданной неявно

Пример. 4.13. Найти y''', если $x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

▲ Дифференцируя равенство $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ по x, и считая y функцией от x, получаем

$$2x + 2yy' = 0,\ \text{откуда}\ y' = -\frac{x}{y}.$$

Дифференцируем еще раз по x: $(2x + 2yy')' = 0$, $2 + 2y'y' + 2yy'' = 0$. Откуда

$$y'' = -\frac{1 + (y')^2}{y}.$$

Подставляя вместо первой производной y' её значение $-\frac{x}{y}$, получаем

$$y'' = -\frac{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}{y} = -\frac{1+\frac{x^2}{y^2}}{y} = -\frac{x^2+y^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3},$$

ибо $x^2 + y^2 = a^2$. ▼

Пример. 4.14. Вычислить y'' в точке $M(1;1)$, если

$$x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0.$$

▲ Дифференцируя равенство по x, получаем

$$2x + 5y + 5xy' + 2yy' - 2 + y' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{2x+5y-2}{5x+2y+1} \text{ и } y'(M) = \left(-\frac{2x+5y-2}{5x+2y+1}\right)\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1}} = -\frac{2+5-2}{5+2+1} = -\frac{5}{8}.$$

Еще раз дифференцируем по x: $2 + 5y' + 5y' + 5xy'' + 2yy'' + 2y'y' + y'' = 0$, откуда

$$y'' = -\frac{2+10y'+2(y')^2}{5x+2y+1}.$$

Подставляя в последнее равенство $x = 1$, $y = 1$, $y' = -\frac{5}{8}$, получим

$$y''(M) = \left(-\frac{2+10y'+2(y')^2}{5x+2y+1}\right)\Bigg|_{\substack{x=1\\y=1\\y'=-\frac{5}{8}}} = -\frac{2+10\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)+2\left(-\frac{5}{8}\right)^2}{5+2+1} =$$

$$= -\frac{2\cdot 64 - 10\cdot 5\cdot 8 + 50}{64\cdot 8} = \frac{111}{256}. ▼$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Для данных функций найти производные указанного порядка:

№	Функция, порядок производной	*Ответ*
1	$y=e^{x^2};\ y''$	$2e^{x^2}(1+2x^2)$
2	$y=\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right);\ y''$	$\dfrac{-x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$
3	$y=(\arcsin x)^2;\ y''$	$2\dfrac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}-x\arcsin x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
4	$y=x^2+\sin 5x;\ y'''$	$-125\cos 5x$
5	$y=x^5\ln x;\ y'''$	$x^2(47+60\ln x)$
6	$y=(2x-1)^5;\ y^{(4)}$	$1920(2x-1)$
7	$y=x^2e^{3x};\ y''$	$e^{3x}(9x^2+12x+2)$
8	$y=x\sin x;\ y^{(10)}$	$10\cos x-x\sin x$

Найти производные n-го порядка функций:

№	Функция	*Ответ*
9	$y=\cos 3x$	$3^n\cos\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$
10	$y=3n(1+x)$	$\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+1)^n}$
11	$y=3^{2x}$	$2^n3^{-x}(\ln 3)^n$
12	$y=\dfrac{2x+1}{x^2+x-2}$	$(-1)^n n!\left(\dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}+\dfrac{1}{(x+2)^{n+1}}\right)$

Указание к № 12. Представить функцию в виде $y=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x+2}$.

13. $y=\sin 3x\cos^2 x$.

Ответ: $\frac{1}{4}\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}5^n\sin\left(5x+n\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}3^n\sin\left(3x+n\frac{\pi}{2}\right)$.

Указание. Представить функцию в виде

$$\tfrac{1}{2}\sin 3x(1+\cos 2x)=\tfrac{1}{2}\sin 3x+\tfrac{1}{4}\sin x+\tfrac{1}{4}\sin 5x.$$

Применяя формулу Лейбница, найти производные указанного порядка следующих функций:

14. $y = x^3 \ln x$; y'''. **Ответ**: $6\ln x + 11$.

15. $y = x^3 \sin x$; y''. **Ответ**: $x^3 \sin x - 60x^2 \cos x - 1140 \sin x + 6840 \cos x$.

16. $y = e^x(3x^2 - 4)$; $y^{(n)}$. **Ответ**: $e^x\left(3x^2 + 6nx + 3n(n-1) - 4\right)$.

Найти производные второго порядка функций, заданных параметрически:

№	Функция	**Ответ**
17	$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1+t^2), \end{cases} t \in R$	$2t^2 + 2$
18	$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} t \in R$	$\frac{-1}{4a\sin^4 \frac{t}{4}}$ $(t \neq 2\pi k)$
19	$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} t \in R$	$\frac{2e^{-t}}{(\cos t - \sin t)^3}$ $\left(t \neq \frac{\pi}{4} + \pi k\right)$
20	$\begin{cases} x = \frac{1}{\cos t}, \\ y = \operatorname{tg} t, \end{cases} t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$	$\frac{-1}{t\cos^2 t}$, $\left(t \neq 0, t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$

Найти производные $y''' = \dfrac{d^3y}{dx^3}$, если:

21. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3, \end{cases} t \in R$. **Ответ**: $-6e^{3t}(1 + +3t + t^2)$.

22. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} t \in R$. **Ответ**: $\dfrac{3\operatorname{ctg}^4 t}{\sin t}$ $(t \neq \pi k)$.

23. Найти $y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n}$, если $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^m, \end{cases} t > 0$. **Ответ**: $m^n t^m$ $(t > 0)$.

Найти производные второго порядка функций, заданных неявно:

24. $y^2 = 2px$. **Ответ**: $-\dfrac{p^2}{y^3}$.

25. $y = x + \ln y$. **Ответ**: $\dfrac{y}{(1-y)^3}$.

26. $e^{x+y} = xy$. **Ответ**: $-\dfrac{y\left((x-1)^2+(y-1)^2\right)}{x^2(y-1)^3}$.

Указание. В выражении для y' и y'' заменить e^{x+y} на xy.

27. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$. **Ответ**: $\dfrac{-2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$.

28. Вычислить $y''(0)$, если $e^y + xy = e$ и $y(0) = 1$. **Ответ**: e^{-2}.

29. Вычислить y'' в точке $M(0;1)$, если $x^4 + xy + y^4 = 1$. **Ответ**: $-\frac{1}{16}$.

30. Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, если $x^2 + y^2 = a^2$. **Ответ**: $-\dfrac{3a^2x}{y^5}$.

Указание: учесть, что $x^2 + y^2 = a^2$.

4.2. Дифференциалы высших порядков

Пусть x – независимая переменная и функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0.

Первый дифференциал $dy = f'(x)dx$ является функцией двух переменных: x и dx.

Определение. Дифференциалом второго порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от ее первого дифференциала dy.

Обозначение: d^2y.

Второй дифференциал d^2y функции $y = f(x)$ в точке x_0 определяется как дифференциал функции $dy = f'(x)dx$ в точке x_0 при условиях:

1) dy рассматривается как функция только независимой переменной x (иными словами, при вычислении дифференциала от $f'(x)dx$) нужно вычислить дифференциал от $f'(x)$, рассматривая dx как постоянный множитель;

2) приращение независимой переменной x при вычислении дифференциала от $f'(x)$ считается равным первоначальному приращению аргумента, т.е. тому же самому значению dx, которое входит множителем в выражение $dy = f'(x)dx$.

Пользуясь этим определением, получаем

$$d^2y\Big|_{x=x_0} = d(dy)\Big|_{x=x_0} = d\big(f'(x)\big)\Big|_{x=x_0} dx = \left(\big(f'(x)\big)'\Big|_{x=x_0} dx\right)dx = f''(x_0)(dx)^2,$$

или (записывая $(dx)^2$ в виде dx^2)

$$d^2x\Big|_{x=x_0} = f''(x_0)dx^2.$$

Если дифференциал ($n-1$)-го порядка определен, то ***дифференциал n-го порядка*** равен дифференциалу от дифференциала ($n-1$)-го порядка.

Для дифференциалов высших порядков принято **обозначение** $d^2y, d^3y, \ldots, d^ny$.

Итак,

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Если x – независимая переменная, то

$$d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$$

Если $x = x(t)$ (x – функция аргумента t), то

$$d^2y = y''(dx)^2 + y'd^2x,\ d^3y = y'''(dx)^3 + y''d(dx)^2 + y''dxd^2x + y'd^3x.$$

Для второго дифференциала (и для дифференциалов старших порядков) происходит нарушение инвариантности формы.

Примеры решения задач

Пример 4.15. Найти d^2y, если $y = e^{-x^2}$.

▲ По формуле $d^ny = y^{(n)}(dx)^n$

$$d^2y = y''(dx)^2 = \left(e^{-x^2}\right)''(dx)^2.$$

Найдем y'':

$$y' = \left(e^{-x^2}\right)' = -2xe^{-x^2};\ y'' = \left(-2xe^{-x^2}\right)' = -2\left(e^{-x^2} - xe^{-x^2}(-2x)\right) = 2e^{-x^2}(2x^2-1).$$

Следовательно, $d^2y = 2e^{-x^2}(2x^2-1)(dx)^2$. ▼

Пример 4.16. Найти d^ny, если $y = \sin(3x+5)$.

▲ Найдем $y^{(n)}$:

$$y^{(n)} = (\sin(3x+5))^{(n)} = 3^n \sin\left(3x+5+n\tfrac{\pi}{2}\right).$$

Следовательно, $d^{(n)}y = 3^n \sin\left(3x+5+n\frac{\pi}{2}\right)(dx)^n$. ▼

Пример 4.17. Найти dy и d^2y, если $y = 4x^3+2x+3$, считая, что:

а) x – независимая переменная, б) $x = x(t)$ – функция аргумента t.

▲ Дифференциал первого порядка в силу свойства инвариантности в обоих случаях имеет вид

$$dy = (4x^3+2x+3)'dx = (12x^2+2)dx.$$

Однако в первом случае

$$dx = \Delta x = \text{const}\ (\Delta x\ \text{– приращение аргумента}),$$

во втором случае

dx – дифференциал функции $x = x(t)$ (может быть, что $dx \neq \Delta x$).

Следовательно,

если x – независимая переменная, то

$$d^2y = y''(dx)^2 = (12x^2+2)'(dx)^2 = 24x(dx)^2;$$

если $x = x(t)$ (функция аргумента t), то

$$d^2y = y''(dx)^2 + y'(d^2x) = 24x(dx)^2 + (12x^2+2)d^2x. ▼$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найти дифференциал указанного порядка данных функций:

№	Функция	*Ответ*
1	$y = \sqrt{1-x^2};\ d^2y$	$\dfrac{-(dx)^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

2	$y=4^{-x^2}$; d^2y	$4^{-x^2}2\ln 4(2x^2\ln 4-1)(dx)^2$
3	$y=\dfrac{\ln x}{x}$; d^2y	$\dfrac{2\ln x-3}{x^3}(dx)^2$
4	$y=x^2x^{-x}$; d^3y	$-e^{-x}(x^2-6x+6)(dx)^3$
5	$y=\cos(3x+2)$; d^ny	$3^n\cos\left(3x+2+n\frac{\pi}{2}\right)(dx)^n$

6. $y=\ln\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$. Найти d^2y при условии: а) x – независимая переменная, б) x – функция переменной t.

Ответ: а) $d^2y=\dfrac{-4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}(dx)^2$; б) $d^2y=\dfrac{-4(1+3x^4)}{(1-x^4)^2}(dx)^2-\dfrac{4x}{1-x^4}d^2x$.

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение второй производной функции $y=f(x)$ в точке x_0.

2. Может ли существовать вторая производная $f''(x_0)$, если не существует первая производная $f'(x_0)$?

3. Приведите пример функции, у которой существует $f'(x_0)$, но не существует $f''(x_0)$.

4. Дайте определение n-й производной функции $y=f(x)$ в точке x_0.

5. Известно, что n-я производная функции $y=f(x)$ в точке x_0 существует. Что можно сказать о существовании производных меньшего порядка в точке x_0 и в окрестности этой точки?

6. Методом математической индукции докажите правило нахождения n-й производной суммы и разности двух функций.

7. Выведите формулу Лейбница.

8. Выведите формулы для n-х производных функций

$$x^{\mu},\ a^x,\ \sin x,\ \cos x,\ \ln x.$$

9. Докажите, что если функция $f(x)$ n раз дифференцируема, то

$$\frac{d^n(ax+b)}{dx^n}=a^nf^{(n)}(t)\big|_{t=ax+b}.$$

10. Вычислите производные n-го порядка:

$$(e^{5x})^{(n)},\ \left(\sin(3x+2)\right)^{(n)},\ \left(\sqrt{1-x}\right)^{(n)}.$$

11. Дайте определение дифференциала n-го порядка функции в точке x_0.

12. Докажите справедливость формулы $d^n y\big|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0)dx^n$ $\left(dx^n = (dx)^n\right)$ для дифференциала n-го порядка в случае, когда x – независимая переменная.

13. Справедлива ли формула $d^n y\big|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0)dx^n$ $\left(dx^n = (dx)^n\right)$, если x – функция некоторой переменной t? Выведите в этом случае формулы для дифференциалов d^2y и d^3y.

Докажите, что формула $d^n y\big|_{x=x_0} = f^{(n)}(x_0)dx^n$ $\left(dx^n = (dx)^n\right)$ сохраняется, если x – линейная функция независимой переменной t, т.е. $x = at + b$ (a и b – числа).

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Продифференцировать данные функции.

Задача 2. Найти производные y' и y''.

Задача 3. Для данной функции y и аргумента x_0 вычислить $y'''(x_0)$.

Задача 4. Решить задачу.

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
I. 1. $y = 2x^5 - \dfrac{4}{x^3} + \dfrac{1}{x} + 3\sqrt{x}$;	I. 1. $y = \dfrac{3}{x} + \sqrt[5]{x^2} - 4x^3 + \dfrac{2}{x^4}$;
2. $y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} + \dfrac{4}{(x-2)^5}$;	2. $y = \sqrt[3]{(x-3)^4} - \dfrac{3}{2x^3 - 3x + 1}$;
3. $y = \sin^3 2x \cdot \cos 8x^5$;	3. $y = \cos^5 3x \cdot \mathrm{tg}(4x+1)^3$;
4. $y = \mathrm{arcctg}^2\, 5x \cdot \ln(x-4)$;	4. $y = \mathrm{arctg}^3\, 2x \cdot \ln(x+5)$;
5. $y = \mathrm{tg}^4\, 3x \cdot \arcsin 2x^3$;	5. $y = (x-2)^4 \cdot \arcsin 5x$;
6. $y = (x-3)^4 \arccos 5x^3$;	6. $y = (3x-4)^3 \arccos 3x^2$;
7. $y = \dfrac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$;	7. $y = \dfrac{(x-4)^2}{e^{\mathrm{arcctg}\, x}}$;
8. $y = \dfrac{\log_5(3x-7)}{\mathrm{ctg}\, 7x^3}$;	8. $y = \dfrac{\ln(5x-3)}{4\,\mathrm{tg}\, 3x^4}$;

9. $y=\dfrac{\operatorname{arcctg}^4 5x}{\sin\sqrt{x}}$; 10. $y=\dfrac{9\operatorname{arctg}(x+7)}{(x-1)^2}$; 11. $y=\sqrt{\dfrac{2x+1}{2x-1}}\log_2(x-3x^2)$; 12. $y=(\operatorname{ctg}3x)^{\arcsin x}$; 13. $y=(\arccos(x+2))^{\operatorname{tg}3x}$; 14. $y=\dfrac{\sqrt{x+7}(x-3)^4}{(x+2)^5}$. II. 1. $y^2=8x$; 2. $\begin{cases}x=(2t+3)\cos t,\\ y=3t^2.\end{cases}$ III. $y=\sin^2 x,\ x_0=\frac{\pi}{2}$. IV. Записать уравнение касательной к кривой $y=x^2-7x+3$ в точке с абсциссой $x=1$.	9. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}^3 2x}{\cos\frac{1}{x}}$; 10. $y=\dfrac{8\operatorname{arctg}(2x+3)}{(x+1)^3}$; 11. $y=\sqrt[3]{\dfrac{2x-5}{2x+3}}\lg(4x+7)$; 12. $y=(\cos(x+2))^{\ln x}$; 13. $y=(\arcsin 2x)^{\operatorname{ctg}(x+1)}$; 14. $y=\dfrac{(x-3)^5(x+2)^3}{\sqrt{(x-1)^3}}$. II. 1. $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{7}=1$; 2. $\begin{cases}x=2\cos^2 t,\\ y=3\sin^2 t.\end{cases}$ III. $y=\operatorname{arctg}x,\ x_0=1$. IV. Записать уравнение нормали к кривой $y=x^2-16x+7$ в точке с абсциссой $x=1$.
ВАРИАНТ 3 I. 1. $y=3x^4+\sqrt[3]{x^5}-\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^2}$; 2. $y=\sqrt{(x-4)^5}+\dfrac{5}{(2x^2+4x-1)^2}$; 3. $y=\operatorname{tg}^4 x\cdot\arcsin 4x^5$; 4. $y=\arccos^4 x\cdot\ln(x^2+x-1)$; 5. $y=2^{-x^3}\operatorname{arctg}7x^4$; 6. $y=\sin^3 4x\cdot\arccos\sqrt{x}$;	**ВАРИАНТ 4** I. 1. $y=7\sqrt{x}-\dfrac{2}{x^5}-3x^3+\dfrac{4}{x}$; 2. $y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\dfrac{5}{(x-1)^3}$; 3. $y=\arcsin^3 2x\cdot\operatorname{ctg}7x^4$; 4. $y=\sqrt{\arccos 2x}\cdot 3^{-x}$; 5. $y=(x+6)^5\operatorname{arcctg}3x^5$; 6. $y=\operatorname{tg}^2\sqrt{x}\cdot\operatorname{arcctg}3x^2$;

7. $y=\dfrac{e^{-x^3}}{\sqrt{x^2+5x-1}}$;	7. $y=\dfrac{e^{-\operatorname{ctg}5x}}{(3x^2-4x+2)}$;
8. $y=\dfrac{\ln(7x+2)}{5\cos^4 2x}$.	8. $y=\dfrac{\sin^3 5x}{\ln(2x-3)}$.
9. $y=\dfrac{\arccos 3x^4}{\operatorname{tg}^2 x}$;	9. $y=\dfrac{\arcsin 5x^3}{\cos\sqrt{x}}$;
10. $y=\dfrac{7\arccos(4x-1)}{(x+2)^4}$;	10. $y=\dfrac{6\arcsin(x+5)}{(x-2)^5}$;
11. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+3}{x-3}}\ln(5x^2-2x+1)$;	11. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}\log_3(x^2+x+4)$;
12. $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$;	12. $y=(\operatorname{tg}5x)^{\arcsin(x+1)}$;
13. $y=(\operatorname{arctg}(x+7))^{\cos 2x}$;	13. $y=(\operatorname{arcctg}(x-3))^{\sin 4x}$;
14. $y=\dfrac{(x-2)^3\sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^2}$.	14. $y=\dfrac{(x+3)\sqrt[5]{(x-2)^2}}{(x+1)^7}$.
II. 1. $y=x+\operatorname{arctg}y$;	II. 1. $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=1$;
2. $\begin{cases}x=6\cos^3 t,\\ y=2\sin^3 t.\end{cases}$	2. $x=\dfrac{1}{t+2},\ y=\left(\dfrac{t}{t+2}\right)^2$.
III. $y=\ln(2+x^2),\ x_0=0$.	III. $y=e^x\cos x,\ x_0=0$.
IV. Записать уравнение касательной к линии $y=\sqrt{x-4}$ в точке с абсциссой $x=8$.	IV. Записать уравнение касательной к линии $y=\sqrt{x+4}$ в точке с абсциссой $x=-3$.
ВАРИАНТ 5	**ВАРИАНТ 6**
I. 1. $y=7x+\dfrac{5}{x^2}-\sqrt[7]{x^4}+\dfrac{6}{x}$;	I. 1. $y=5x^2-\sqrt[3]{x^4}+\dfrac{4}{x^3}-\dfrac{5}{x}$;
2. $y=\sqrt[4]{3x^2-x+5}-\dfrac{3}{(x-5)^4}$;	2. $y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\dfrac{4}{(x+2)^3}$;

3. $y = \operatorname{ctg} 3x \cdot \arccos 3x^2$;	3. $y = \arccos^2 4x \cdot \ln(x-3)$;
4. $y = \operatorname{tg}^4 3x \cdot \operatorname{arctg} 7x^2$;	4. $y = 5^{-x^2} \arcsin 3x^3$;
5. $y = 3^{\cos x} \ln(x^2 - 3x + 7)$;	5. $y = \log_2(x-7) \cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;
6. $y = \operatorname{ctg}^3 5x \cdot \arcsin 3x^2$;	6. $y = \cos\frac{1}{x} \cdot \operatorname{arctg}(7x+2)$;
7. $y = \dfrac{\sqrt{7x^3 - 5x + 2}}{e^{\cos x}}$;	7. $y = \dfrac{e^{\operatorname{tg} 3x}}{\sqrt{3x^2 - x + 4}}$;
8. $y = \dfrac{\cos^2 3x}{\lg(3x-4)}$;	8. $y = \dfrac{\operatorname{tg}^3 2x}{\lg(5x+1)}$;
9. $y = \dfrac{\operatorname{ctg}^3(x+1)}{\arccos 2x}$;	9. $y = \dfrac{\operatorname{tg} 3x^5}{\operatorname{arctg}^2 3x}$;
10. $y = \dfrac{3\operatorname{arcctg}(2x-5)}{(x+1)^4}$;	10. $y = \dfrac{2\operatorname{arctg}(3x+2)}{(x-3)^2}$;
11. $y = \sqrt[6]{\dfrac{7x-4}{7x+4}} \log_5(3x^2 + 2x)$;	11. $y = \sqrt[7]{\dfrac{2x-3}{2x+1}} \lg(7x-10)$;
12. $y = (\sin(x+2))^{\arcsin 2x}$;	12. $y = (\cos 5x)^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}$;
13. $y = (\operatorname{ctg}(3x-2))^{\arcsin 3x}$;	13. $y = (\operatorname{tg}(4x-3))^{\arccos 2x}$;
14. $y = \dfrac{(x+2)^7(x-3)^3}{\sqrt{(x+1)^5}}$.	14. $y = \dfrac{(x-1)^4(x+2)^5}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.
II. 1. $y^2 = 25x - 4$; 2. $\begin{cases} x = e^{-2t}, \\ y = e^{4t}. \end{cases}$	II. 1. $\operatorname{arcctg} y = 4x + 5y$; 2. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[5]{t}. \end{cases}$
III. $y = e^x \sin 2x$, $x_0 = 0$.	III. $y = e^{-x} \cos x$, $x_0 = 0$.
IV. Записать уравнение касательной к кривой $y = x^3 - 2x^2 + 4x - 7$ в точке (2; 1).	IV. Записать уравнение нормали к кривой $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ в точке (1; 1).

ВАРИАНТ 7	ВАРИАНТ 8
I. 1. $y=3x^5-\frac{3}{x}-\sqrt{x^3}+\frac{10}{x^5}$;	I. 1. $y=\sqrt[3]{x^7}+\frac{3}{x}-4x^6+\frac{4}{x^5}$;
2. $y=\sqrt[3]{(x-7)^5}+\frac{5}{4x^2+3x-5}$;	2. $y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\frac{2}{2x^2-3x+7}$;
3. $y=\ln^5 x\cdot\operatorname{arctg}7x^4$;	3. $y=\operatorname{arctg}^3 4x\cdot 3^{\sin x}$;
4. $y=\operatorname{arctg}^5 x\cdot\log_2(x-3)$;	4. $y=\log_3(x+5)\cdot\arccos 3x$;
5. $y=\arccos^3 5x\cdot\operatorname{tg}x^4$;	5. $y=(x-5)^7\operatorname{arcctg}7x^3$;
6. $y=\cos^3 4x\cdot\arccos 4x^2$;	6. $y=\sin^3 3x\cdot\operatorname{arcctg}5x^2$;
7. $y=\frac{e^{\sin x}}{(x-5)^7}$;	7. $y=\frac{\sqrt[3]{2x^2-3x+1}}{e^{-x}}$;
8. $y=\frac{\log_3(4x+5)}{2\operatorname{ctg}\sqrt{x}}$;	8. $y=\frac{\ln(7x-3)}{3\operatorname{tg}^2 4x}$;
9. $y=\frac{\arccos^7 2x}{\operatorname{tg}x^5}$;	9. $y=\frac{\arcsin^3 4x}{\sin(3x+1)}$;
10. $y=\frac{4\arccos 3x}{(x+2)^5}$;	10. $y=\frac{\arcsin(3x+8)}{(x-7)^3}$;
11. $y=\sqrt[8]{\frac{5x+1}{5x-1}}\ln(3x-x^2)$;	11. $y=\sqrt[9]{\frac{x+3}{x-3}}\log_5(2x-3)$;
12. $y=\left(\sqrt{3x+2}\right)^{\operatorname{arcctg}3x}$;	12. $y=\left(\ln(x+3)\right)^{\sin\sqrt{x}}$;
13. $y=\left(\cos(2x-5)\right)^{\operatorname{arctg}5x}$;	13. $y=\left(\sin(7x+4)\right)^{\operatorname{arcctg}x}$;
14. $y=\frac{(x-3)^2\sqrt{x+4}}{(x+2)^7}$.	14. $y=\frac{(x-7)^{10}\sqrt{3x-1}}{(x+3)^5}$.
II. 1. $y^2-x=\cos y$;	II. 1. $3x+\sin y=5y$;

2. $\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

III. $y = \sin 2x,\ x_0 = \pi$.

IV. Определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^2 - y^2 + xy - 11 = 0$ в точке (3; 2).

2. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2 - 1}, \\ y = \dfrac{t+1}{\sqrt{t^2-1}}. \end{cases}$

III. $y = (2x+1)^5,\ x_0 = 1$.

IV. В какой точке кривой $y^2 = 4x^3$ касательная перпендикулярна к прямой линии $x + 3y - 1 = 0$?

ВАРИАНТ 9

I. 1. $y = 8x^2 + \sqrt[3]{x^4} - \dfrac{4}{x} - \dfrac{2}{x^3}$;

2. $y = \dfrac{3}{(x-4)^7} - \sqrt{5x^2 - 4x + 3}$;

3. $y = 2^{\cos x} \cdot \operatorname{arcctg} 5x^3$;

4. $y = \mathrm{e}^{-x} \cdot \arcsin^2 5x$;

5. $y = \arccos x^2 \cdot \operatorname{ctg} 7x^3$;

6. $y = \operatorname{tg}^5 3x \cdot \arcsin \sqrt{x}$;

7. $y = \dfrac{\sqrt{x^3 + 4x - 5}}{\mathrm{e}^{x^3}}$;

8. $y = \dfrac{\lg(11x+3)}{\cos^2 5x}$;

9. $y = \dfrac{\operatorname{tg}^4(2x+5)}{\arccos 3x}$;

10. $y = \dfrac{7\operatorname{arctg}(4x+1)}{(x-4)^2}$;

11. $y = \sqrt{\dfrac{6x+5}{6x-5}} \lg(4x+7)$;

ВАРИАНТ 10

I. 1. $y = 4x^6 + \dfrac{5}{x} - \sqrt[3]{x^7} - \dfrac{7}{x^4}$;

2. $y = \sqrt[5]{4x^2 - 3x - 4} - \dfrac{2}{(x-3)^5}$;

3. $y = 4^{-x} \cdot \ln^5(x+2)$;

4. $y = \log_4(x-1) \cdot \arcsin^4 x$;

5. $y = 5^{-x^2} \cdot \arccos 5x^4$;

6. $y = \operatorname{ctg}^2(x+1) \cdot \arccos \frac{1}{x}$;

7. $y = \dfrac{\mathrm{e}^{\operatorname{ctg} 5x}}{(x+4)^3}$;

8. $y = \dfrac{\operatorname{ctg}^2 5x}{\ln(7x-2)}$;

9. $y = \dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} 2x}}{\sin^2 x}$;

10. $y = \dfrac{3\arcsin(2x-7)}{(x+2)^4}$;

11. $y = \sqrt[3]{\dfrac{4x-1}{4x+1}} \ln(2x^3 - 3)$;

12. $y=\left(\log_2(x+4)\right)^{\mathrm{ctg}\,7x}$;	12. $y=(\sin 3x)^{\mathrm{arctg}(x+2)}$;
13. $y=(\arcsin 2x)^{\ln(x+3)}$;	13. $y=(\arccos 3x)^{\lg(5x-1)}$;
14. $y=\dfrac{(x+1)^8(x-3)^2}{\sqrt{(x+2)^5}}$.	14. $y=\dfrac{(x+2)(x-7)^4}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.
II. 1. $\mathrm{tg}\,y=3x+5y$; 2. $\begin{cases}x=4t+2t^3,\\ y=5t^3-3t^2\end{cases}$	II. 1. $xy=\mathrm{ctg}\,y$; 2. $x=\dfrac{\ln t}{t},\ y=t\ln t$.
III. $y=\ln(1+x),\ x_0=2$. IV. Записать уравнение касательной к кривой $y=x^2-6x+2$ в точке с абсциссой $x=2$.	III. $y=\frac{1}{2}x^2e^x,\ x_0=0$. IV. Записать уравнение касательной к кривой $y=\frac{1}{4}x^2-x+5$ в точке с абсциссой $x=4$.
ВАРИАНТ 11	**ВАРИАНТ 12**
I. 1. $y=2\sqrt{x^3}-\dfrac{7}{x}+3x^2-\dfrac{2}{x^5}$;	I. 1. $y=4x^3-\dfrac{3}{x}-\sqrt[5]{x^2}+\dfrac{6}{x^2}$;
2. $y=\dfrac{7}{(x-1)^3}+\sqrt{8x-3+x^2}$;	2. $\sqrt[5]{3x^2+4x-5}+\dfrac{4}{(x-4)^4}$;
3. $y=3^{\mathrm{tg}\,x}\cdot\arcsin 7x^4$;	3. $y=5^{x^2}\cdot\arccos 2x^5$;
4. $y=(x-4)^5\cdot\mathrm{arcctg}\,3x^2$;	4. $y=\mathrm{ctg}^3\,4x\cdot\mathrm{arctg}\,2x^3$;
5. $y=\mathrm{arctg}^4\,x\cdot\cos 7x^4$;	5. $y=4(x-7)^6\cdot\arcsin 3x^5$;
6. $y=\sin^4 2x\cdot\arccos x^2$;	6. $y=\cos^3(3x+2)\cdot\mathrm{arctg}\,3x$;
7. $y=\dfrac{\sqrt{3+2x-x^2}}{e^x}$;	7. $y=\dfrac{e^{3x}}{\sqrt{3x^2-4x-7}}$;
8. $y=\dfrac{\mathrm{tg}^2(x-2)}{\lg(3x-2)}$;	8. $y=\dfrac{\sin^3(5x+1)}{\lg(3x-2)}$;
9. $y=\dfrac{\arcsin^2 4x}{\mathrm{tg}(5x-3)}$;	9. $y=\dfrac{\cos^2(4x+2)}{\mathrm{arctg}\,x^3}$;

10. $y=\dfrac{2\lg(4x+5)}{(x+6)^4}$; 11. $y=\sqrt[4]{\dfrac{x+6}{x-6}}\sin(3x^2+1)$; 12. $y=(\cos 3x)^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$; 13. $y=(\operatorname{arctg}5x)^{\log_2(x+4)}$; 14. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+4)^3}}{(x-1)^2(x+3)^5}$. II. 1. $y=e^y+4x$; 2. $\begin{cases}x=e^t\cos t,\\ y=e^t\sin t.\end{cases}$ III. $y=\arcsin x,\ x_0=0$. IV. Записать уравнение нормали к кривой $y=\frac{1}{4}x^2-27x+60$ в точке с абсциссой $x=2$.	10. $y=\dfrac{5\ln(5x+7)}{(x-7)^2}$; 11. $y=\sqrt[5]{\dfrac{x-7}{x+7}}\cos(2x^3+x)$; 12. $y=(\arcsin 5x)^{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$; 13. $y=(\operatorname{arctg}7x)^{\lg(x+1)}$; 14. $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^7}}{(x+1)^5(x-5)^3}$. II. 1. $\ln y-\dfrac{y}{x}=7$; 2. $\begin{cases}x=t^4,\\ y=\ln t.\end{cases}$ III. $y=(5x-4)^5,\ x_0=2$. IV. Записать уравнение касательной к кривой $y=-\frac{1}{2}x^2+7x-\frac{15}{2}$ в точке с абсциссой $x=3$.
ВАРИАНТ 13	**ВАРИАНТ 14**
I. 1. $y=5x^3-\dfrac{8}{x^2}+4\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}$; 2. $y=\sqrt[3]{5x^4-2x-1}+\dfrac{8}{(x-5)^2}$; 3. $y=\sin^4 3x\cdot\operatorname{arctg}2x^3$; 4. $y=e^{-\cos x}\cdot\operatorname{arctg}7x^5$; 5. $y=(x+5)^2\cdot\arccos^3 5x$; 6. $y=\operatorname{tg}^3 4x\cdot\operatorname{arcctg}3x^4$;	I. 1. $y=\dfrac{9}{x^3}+\sqrt[3]{x^4}-\dfrac{2}{x}+5x^4$; 2. $y=\dfrac{3}{(x+2)^5}-\sqrt[7]{5x-7x^2-3}$; 3. $y=\cos^3 4x\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{x}$; 4. $y=(x+1)\cdot\arccos 3x^4$; 5. $y=2^{-\sin x}\cdot\arcsin^3 2x$; 6. $y=\operatorname{ctg}^4 7x\cdot\arcsin\sqrt{x}$;

7. $y=\dfrac{e^{-\sin 2x}}{(x+5)^4}$;	7. $y=\dfrac{e^{\cos 5x}}{\sqrt{x^2-5x-2}}$;
8. $y=\dfrac{\cos^4(7x-1)}{\lg(x+5)}$;	8. $y=\dfrac{\sin^3(4x+3)}{\ln(7x+1)}$;
9. $y=\dfrac{\arcsin 4x^5}{\operatorname{tg}^3 x}$;	9. $y=\dfrac{\operatorname{arctg}^3(2x+1)}{\cos\sqrt{x}}$;
10. $y=\dfrac{4\log_3(3x+1)}{(x+1)^2}$;	10. $y=\dfrac{7\log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$;
11. $y=\sqrt[6]{\dfrac{x-9}{x+9}}\operatorname{tg}(3x^2-4x+1)$;	11. $y=\sqrt[7]{\dfrac{x-4}{x+4}}\operatorname{ctg}(2x+5)$;
12. $y=(\arccos 5x)^{\ln x}$;	12. $y=(\operatorname{arctg} 2x)^{\sin x}$;
13. $y=(\log_4(2x+3))^{\arcsin x}$;	13. $y=(\log_5(3x+2))^{\arccos x}$;
14. $y=\dfrac{\sqrt{(x+2)^3}(x-1)^4}{(x+2)^7}$.	14. $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^5}(x+3)^2}{(x-7)^3}$.
II. 1. $y^2+x^2=\sin y$; 2. $\begin{cases} x=5\cos t, \\ y=4\sin t. \end{cases}$	II. 1. $e^y=4x-7y$; 2. $\begin{cases} x=5\cos^2 t, \\ y=3\sin^2 t. \end{cases}$
III. $y=x\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{2}$.	III. $y=x^2\ln x$, $x_0=\frac{1}{3}$.
IV. Записать уравнение нормали к кривой $y=3\operatorname{tg}2x+1$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{2}$.	IV. Записать уравнение касательной к кривой $y=4\operatorname{tg}3x$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{9}$.
ВАРИАНТ 15	**ВАРИАНТ 16**
I. 1. $y=\dfrac{4}{x^5}-\dfrac{9}{x}+\sqrt[5]{x^2}-7x^3$;	I. 1. $y=\dfrac{8}{x^3}+\dfrac{3}{x}-4\sqrt{x^3}+2x^7$;
2. $y=\sqrt[4]{(x-1)^5}-\dfrac{4}{7x^2-3x+2}$;	2. $y=\sqrt[5]{(x-2)^6}-\dfrac{3}{7x^3-x^2-4}$;

3. $y=\operatorname{tg}^3 2x\cdot\arcsin x^5$;	3. $y=\operatorname{ctg}^7 x\cdot\arccos 2x^3$;
4. $y=2^{\sin x}\cdot\operatorname{arcctg}x^4$;	4. $y=3^{-x^3}\cdot\operatorname{arctg}2x^5$;
5. $y=(x+2)^7\cdot\arccos\sqrt{x}$;	5. $y=(x-7)^5\cdot\arcsin 7x^4$;
6. $y=\sin^3 2x\cdot\arcsin 7x^2$;	6. $y=\operatorname{tg}^5 4x\cdot\arccos 3x^4$;
7. $y=\dfrac{(2x+5)^3}{e^{\operatorname{tg}x}}$;	7. $y=\dfrac{e^{-\operatorname{tg}3x}}{4x^2-3x+5}$;
8. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^3(2x-3)}{\log_3(x+2)}$;	8. $y=\dfrac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}$;
9. $y=\dfrac{\arccos 4x^3}{\sin^4 x}$;	9. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^2(x-2)}{\arccos 3x}$;
10. $y=\dfrac{\ln(7x+2)}{(x-6)^4}$;	10. $y=\dfrac{4\lg(3x+7)}{(x+1)^7}$;
11. $y=\sqrt[8]{\dfrac{x-2}{x+2}}\sin(4x^2-7x+2)$;	11. $y=\sqrt[9]{\dfrac{x-3}{x+3}}\cos(x^2-3x+2)$;
12. $y=(\ln(x+7))^{\operatorname{ctg}2x}$;	12. $y=(\operatorname{ctg}(7x+4))^{\sqrt{x+3}}$;
13. $y=(\lg(7x-5))^{\operatorname{arctg}2x}$;	13. $y=(\ln(5x-4))^{\operatorname{arcctg}x}$;
14. $y=\dfrac{\sqrt[4]{x-8}(x+2)^6}{(x-1)^5}$.	14. $y=\dfrac{\sqrt[5]{x+1}(x-3)^7}{(x+8)^3}$.
II. 1. $4\sin^2(x+y)=x$;	II. 1. $\sin y=7x+3y$;
2. $\begin{cases}x=\operatorname{arctg}t,\\ y=\ln(1+t^2).\end{cases}$	2. $\begin{cases}x=\arcsin t,\\ y=\sqrt{1-t^2}.\end{cases}$
III. $y=x\sin 2x,\ x_0=-\frac{\pi}{4}$.	III. $y=x\cos 2x,\ x_0=\frac{\pi}{12}$.
IV. Записать уравнение нормали к кривой $y=6\operatorname{tg}5x$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{20}$.	IV. Записать уравнение касательной к кривой $y=4\sin 6x$ в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{18}$.

ВАРИАНТ 17	**ВАРИАНТ 18**
I. 1. $y=5x^2+\dfrac{4}{x}-\sqrt[3]{x^7}-2x^6$;	I. 1. $y=10x^2+3\sqrt{x^5}-\dfrac{4}{x}-\dfrac{5}{x^4}$;
2. $y=\dfrac{4}{(x+4)^2}-\sqrt[3]{4+3x-x^4}$;	2. $y=\dfrac{2}{(x-1)^3}-\dfrac{8}{6x^2+3x-7}$;
3. $y=e^{-\sin x}\cdot \operatorname{tg} 7x^6$;	3. $y=e^{\cos x}\cdot \operatorname{ctg} 8x^3$;
4. $y=3^{\cos x}\cdot \arcsin^2 3x$;	4. $y=\ln(x-10)\cdot \arccos^2 4x$;
5. $y=\ln(x-3)\cdot \arccos 3x^4$;	5. $y=\log_2(x-4)\cdot \operatorname{arctg}^3 4x$;
6. $y=\cos^2 5x\cdot \operatorname{arctg}\sqrt{x}$;	6. $y=\operatorname{ctg}^4 2x\cdot \operatorname{arctg} x^3$;
7. $y=\dfrac{e^{-\sin 4x}}{(2x-5)^6}$;	7. $y=\dfrac{3x^2-5x+10}{e^{-x^4}}$;
8. $y=\dfrac{\ln^2(x+1)}{\cos 3x^4}$;	8. $y=\dfrac{\log_2(7x-5)}{\operatorname{tg}\sqrt{x}}$;
9. $y=\dfrac{\operatorname{tg}^3(2x+2)}{\arcsin 5x}$;	9. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}^2(3x-1)}{\arccos x^2}$;
10. $y=\dfrac{5\log_2(x^2+1)}{(x-3)^4}$;	10. $y=\dfrac{6\log_3(2x+9)}{(x+4)^2}$;
11. $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{3x+2}}\operatorname{tg}(2x^2-9)$;	11. $y=\sqrt{\dfrac{2x+3}{2x-3}}\operatorname{ctg}(3x^2+5)$;
12. $y=\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+1}\right)^{\operatorname{arctg} 2x}$;	12. $y=\left(\operatorname{ctg}(1/x)\right)^{\arcsin 7x}$;
13. $y=\left(\log_2(6x+5)\right)^{\arcsin 2x}$;	13. $y=\left(\lg(4x-3)\right)^{\arccos 4x}$;
14. $y=\dfrac{\sqrt[7]{(x-2)^4}}{(x+1)^2(x-6)^5}$.	14. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+1)^2}}{(x-3)^4(x-4)^3}$.
II. 1. $\operatorname{tg} y=4y-5x$;	II. 1. $y=7x-\operatorname{ctg} y$;

2. $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t). \end{cases}$	2. $\begin{cases} x = 3(\sin t - t\cos t), \\ y = 3(\cos t + t\sin t). \end{cases}$
III. $y = x^4 \ln x,\ x_0 = 1$.	III. $y = x + \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1$.
IV. Выяснить, в каких точках кривой $y = \sin 2x$ касательная составляет с осью Ox угол $\frac{\pi}{4}$.	IV. Выяснить, в какой точке кривой $y = 2x^3 - 1$ касательная составляет с осью Ox угол $\frac{\pi}{3}$.
ВАРИАНТ 19	**ВАРИАНТ 20**
I. 1. $y = \sqrt{x^5} - \frac{3}{x} + \frac{4}{x^3} - 3x^3$;	I. 1. $y = 9x^3 + \frac{5}{x} - \frac{7}{x^4} + \sqrt[3]{x^7}$;
2. $y = \sqrt{1 + 5x - 2x^2} + \frac{3}{(x-3)^4}$;	2. $y = \sqrt[3]{5 + 4x - x^2} - \frac{5}{(x+1)^3}$;
3. $y = \cos^5 x \cdot \arccos 4x$;	3. $y = \sin^3 7x \cdot \operatorname{arcctg} 5x^2$;
4. $y = \lg(x-2) \cdot \arcsin^5 x$;	4. $y = \log_3(x+1) \cdot \operatorname{arctg}^5 7x$;
5. $y = (x-7)^4 \cdot \operatorname{arcctg}^2 7x$;	5. $y = \sqrt[3]{x-3} \cdot \arccos^4 2x$;
6. $y = \sin^4 5x \cdot \arccos 3x^2$;	6. $y = \cos^3 9x \cdot \operatorname{arctg}(5x-1)$;
7. $y \frac{e^{-x}}{(2x^2 - x + 4)^2}$;	7. $y = \frac{e^{4x}}{(3x+5)^3}$;
8. $y = \frac{\log_3(4x-2)}{\operatorname{ctg} 2x}$;	8. $y = \frac{\ln^3(x-5)}{\operatorname{tg}(1\ x)}$;
9. $y = \frac{\sin^5 x}{\arccos 4x}$;	9. $y = \frac{\sqrt{\cos^3 x}}{\operatorname{arctg} 5x}$;
10. $y = \frac{3\log_2(5x-4)}{(x-5)^5}$;	10. $y = \frac{7\log_5(x^2+x)}{(x+3)^3}$;
11. $y = \sqrt[4]{\frac{x+5}{x-5}} \sin(3x^2 - x + 4)$;	11. $y = \sqrt[5]{\frac{x-6}{x+6}} \cos(7x+2)$;
12. $y = (\cos(x+5))^{\arcsin 3x}$;	12. $y = \left(\sqrt{x+5}\right)^{\arccos 3x}$;

13. $y=\left(\ln(7x-3)\right)^{\operatorname{arctg}5x}$;	13. $y=\left(\log_5(2x+5)\right)^{\operatorname{arctg}x}$;
14. $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{(x+3)^7(x-4)^2}$.	14. $y=\dfrac{\sqrt[3]{(x-2)^4}}{(x-5)(x+1)^7}$.
II. 1. $xy-6=\cos y$; 2. $\begin{cases}x=\sin 2t,\\ y=\cos^2 t.\end{cases}$	II. 1. $3y=7+xy^3$; 2. $\begin{cases}x=e^{3t},\\ y=e^{-3t}.\end{cases}$
III. $y=\cos^2 x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.	III. $y=\ln(x^2-4)$, $x_0=3$
IV. Выяснить, в какой точке кривой $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+9$ касательная составляет с осью Ox угол $\frac{-\pi}{4}$.	IV. Выяснить, в каких точках кривой $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+7x+4$ касательная составляет с осью Ox угол $\frac{\pi}{4}$.
ВАРИАНТ 21	**ВАРИАНТ 22**
I. 1. $y=3\sqrt{x}+\dfrac{4}{x^5}+\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{7}{x}$.	I. 1. $y=\sqrt{x^3}+\dfrac{2}{x}-\dfrac{4}{x^5}-5x^3$.
2. $y=\sqrt[4]{5x^2-4x+1}-\dfrac{7}{(x-5)^2}$.	2. $y=\sqrt[5]{3-7x+x^2}-\dfrac{4}{(x-7)^5}$.
3. $y=\sin^2 3x\cdot\operatorname{arcctg}3x^5$.	3. $y=\cos\sqrt[5]{x}\cdot\operatorname{arctg}x^4$.
4. $y=\ln(x+9)\cdot\operatorname{arcctg}^3 2x$.	4. $y=\lg(x+2)\cdot\arcsin^2 3x$.
5. $y=\sqrt[3]{x-4}\cdot\arcsin^4 5x$.	5. $y=(x-3)^5\cdot\arccos 3x^6$.
6. $y=\operatorname{tg}^4 x\cdot\operatorname{arcctg}(1/x)$.	6. $y=\operatorname{ctg}^3 4x\cdot\arcsin(3x+1)$.
7. $y=\dfrac{e^{\operatorname{ctg}5x}}{(3x-5)^4}$.	7. $y=\dfrac{(2x-3)^7}{e^{-2x}}$.
8. $y=\dfrac{\lg(x+2)}{\sin 2x^5}$.	8. $y=\dfrac{\operatorname{tg}^3 7x}{\ln(3x+2)}$.
9. $y=\dfrac{\operatorname{tg}^2(x+3)}{\operatorname{arcctg}\sqrt{x}}$.	9. $y=\dfrac{\arcsin^2 3x}{\cos(x-5)}$.

10. $y=\dfrac{\log_7(2x^2+5)}{(x-4)^2}$.

11. $y=\sqrt[6]{\dfrac{x-7}{x+7}}\arcsin(2x+3)$.

12. $y=(\sin 4x)^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$.

13. $y=(\sin(8x-7))^{(x+3)}$.

14. $y=\dfrac{(x+4)^3(x-2)^4}{\sqrt[3]{(x-2)^5}}$.

II. 1. $y^2=x+\ln\dfrac{1}{x}$. 2. $\begin{cases} x=\dfrac{\ln t}{t}, \\ y=t^2\ln t. \end{cases}$

III. $y=x^2\cos x,\ x_0=\frac{\pi}{2}$.

IV. Найти точки, в которых касательные параллельны оси Ox к кривой $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{9}{2}x^2+20x-7$.

10. $y=\dfrac{2\ln(3x-10)}{(x+5)^7}$.

11. $y=\sqrt[7]{\dfrac{x-8}{x+8}}\arccos(3x-5)$.

12. $y=(\operatorname{tg}3x^4)^{\sqrt{x+3}}$.

13. $y=(\cos(3x+8))^{\operatorname{tg}(x-7)}$.

14. $y=\dfrac{(x-1)^6(x+2)^3}{\sqrt[5]{(x+3)^2}}$.

II. 1. $xy^2-y^3=4x-5$.

2. $\begin{cases} x=\arccos t, \\ y=\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

III. $y=x\arccos x,\ x_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

IV. Найти точку на кривой $y=\frac{1}{4}x^2-7$, касательная в которой параллельна прямой $y=8x-4$.

ВАРИАНТ 23

I. 1. $y=7x^2+\dfrac{3}{x}-\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{8}{x^3}$.

2. $y=\sqrt{(x-3)^7}+\dfrac{9}{7^2-5x-8}$.

3. $y=\operatorname{tg}^6 2x\cdot\cos 7x^2$.

4. $y=4^{-\sin x}\operatorname{arctg}3x$.

5. $y=\sqrt{(x+3)^5}\arcsin 2x^3$.

6. $y=\cos^2 5x\cdot\operatorname{arctg}x^4$.

ВАРИАНТ 24

I. 1. $y=8x^3-\dfrac{4}{x}-\dfrac{7}{x^4}+\sqrt[7]{x^2}$.

2. $y=\sqrt[3]{(x-8)^4}-\dfrac{2}{1+3x-4x^2}$.

3. $y=\operatorname{ctg}^3 4x\cdot\arcsin\sqrt{x}$.

4. $y=2^{\cos x}\operatorname{arcctg}^3 x$.

5. $y=\sqrt[3]{(x+1)^2}\arccos 3x$.

6. $y=\operatorname{tg}^4 7x\cdot\arccos x$.

7. $y=\dfrac{(3x+1)^4}{e^{4x}}$.	7. $y=\dfrac{5x^2+4x-2}{e^{-x}}$.
8. $y=\dfrac{\operatorname{ctg}\sqrt{x-2}}{\lg(3x+5)}$.	8. $y=\dfrac{\operatorname{tg}(3x-5)}{\ln^2(x+3)}$.
9. $y=\dfrac{\operatorname{arcctg}^3 x}{\sin(2x-5)}$.	9. $y=\dfrac{\arccos^3 5x}{\operatorname{tg}(x-2)}$.
10. $y=\dfrac{8\lg(4x+5)}{(x-1)^5}$.	10. $y=\dfrac{2\log_3(4x-7)}{(x+3)^4}$.
11. $y=\sqrt[8]{\dfrac{x-4}{x+4}}\operatorname{arctg}(5x+1)$.	11. $y=\sqrt[9]{\dfrac{x-1}{x=1}}\operatorname{arcctg}(7x+2)$.
12. $y=\left(\operatorname{ctg}2x^3\right)^{\sin\sqrt{x}}$.	12. $y=\left(\operatorname{tg}7x^5\right)^{\sqrt{x+2}}$.
13. $y=\left(\operatorname{tg}(9x+2)\right)^{\cos(2x-1)}$.	13. $y=\left(\operatorname{ctg}(7x+5)\right)^{\sin 3x}$.
14. $y=\dfrac{(x-1)^4(x-7)^2}{\sqrt[3]{(x+2)^5}}$.	14. $y=\dfrac{(x+7)^2(x-3)^5}{\sqrt{x^2+3x-1}}$.
II. 1. $x^2y^2+x=5y$. 2. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t+1}, \\ y=\left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$	II. 1. $x^4+x^2y^2+y=4$. 2. $\begin{cases} x=5\sin^3 t, \\ y=3\cos^3 t. \end{cases}$
III. $y=(x+1)\ln(x+1)$, $x_0=-0.5$.	III. $y=\ln^3 x$, $x_0=1$.
IV. Найти точку на кривой $y=-3x^2+4x+7$, касательная в которой перпендикулярна к прямой $x-20y+5=0$.	IV. Найти точку на кривой $y=3x^2-4x+6$, касательная в которой параллельна прямой $8x-y-5=0$.

ВАРИАНТ 25	ВАРИАНТ 26
I. 1. $y=8x-\frac{5}{x^4}+\frac{1}{x}-\sqrt[5]{x^4}$.	I. 1. $y=\sqrt[4]{x^3}-\frac{5}{x}+\frac{4}{x^5}+3x$.
2. $y=\frac{3}{4x-3x^2+1}-\sqrt{(x+1)^5}$.	2. $y=\frac{3}{x-4}+\sqrt[6]{2x^2-3x+1)^5}$.
3. $y=3^{\operatorname{tg}x}\cdot\arccos x^4$.	3. $y=\operatorname{tg}\sqrt{x}\cdot\operatorname{arcctg}3x^5$.
4. $y=\lg(x-3)\cdot\arcsin^2 5x$.	4. $y=\log_2(x+3)\cdot\arccos^2 x$.
5. $y=\operatorname{tg}^3 x\cdot\operatorname{arcctg}3x$.	5. $y=\sqrt{(x-2)^3}\operatorname{arctg}(7x-1)$.
6. $y=\operatorname{ctg}4x^5\cdot\arccos 2x$.	6. $y=\operatorname{ctg}3x\cdot\arcsin^4 2x$.
7. $y=\frac{\sqrt{5x^2-x+1}}{e^{3x}}$.	7. $y=\frac{e^{-x^2}}{(2x-5)^7}$.
8. $y=\frac{\cos^2 x}{\lg(x^2-2x+1)}$.	8. $y=\frac{\log_2(3x+7)}{\operatorname{tg}3x}$.
9. $y=\frac{\sqrt{\arccos 3x}}{\sin^2 x}$.	9. $y=\frac{\arcsin^2 3x}{\sqrt{\operatorname{tg}x}}$.
10. $y=\frac{3\log_4(2x=9)}{(x-7)^2}$.	10. $y=\frac{\lg(x^2+2x)}{(x+8)^4}$.
11. $y=\sqrt{\frac{7x-4}{7x+4}}\arcsin(x^2+1)$.	11. $y=\sqrt[3]{\frac{8x-3}{8x+3}}\arccos(x^2-5)$.
12. $y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$.	12. $y=(\operatorname{ctg}7x)^{\sin(x+3)}$.
13. $y=\left(\sin(3x-7)^{\cos(x+4)}\right)$.	13. $y=(\cos(2x-3))^{\operatorname{tg}(x+5)}$.
14. $y=\frac{\sqrt[3]{x-3}(x+7)^5}{(x-4)^2}$.	14. $y=\frac{\sqrt{x+10}(x-8)^3}{(x-1)^5}$.

II. 1. $\sin y = xy^2 + 5$. 2. $\begin{cases} x = e^{-3t}, \\ y = e^{8t}. \end{cases}$

III. $y = 2^{x^2}$, $x_0 = 1$.

IV. Найти точку на кривой

$$y = 5x^2 - 4x + 1,$$

касательная в которой перпендикулярна к прямой $x + 6y + 15 = 0$.

II. 1. $x^3 + y^3 = 5x$. 2. $\begin{cases} x = \sqrt[3]{(t-1)^2}, \\ y = \sqrt{t-1}. \end{cases}$

III. $y = (4x-3)^5$, $x_0 = 1$.

IV. Найти точку на кривой

$$y = -3x^2 + 4x + 7,$$

касательная в которой параллельна прямой $x - y + 10 = 0$.

ВАРИАНТ 27

I. 1. $y = 4x^3 + \dfrac{3}{x} - \sqrt[3]{x^5} - \dfrac{2}{x^4}$.

2. $y = \dfrac{4}{(x-7)_3} - \sqrt[3]{(3x^2 - x + 1)^4}$.

3. $y = \mathrm{tg}^3 2x \cdot \arccos 2x^3$.

4. $y = 2^{-x} \mathrm{arctg}^3 4x$.

5. $y = \sqrt[5]{(x+4)^2} \arcsin 7x^2$.

6. $y = \mathrm{tg}^5 3x \cdot \mathrm{arcctg}\sqrt{x}$.

7. $y = \dfrac{e^{\cos 3x}}{(2x+4)^5}$.

8. $y = \dfrac{\ln^3 x}{\mathrm{ctg}(x-5)}$.

9. $y = \dfrac{\mathrm{arctg}^2 5x}{\sqrt[3]{\mathrm{ctg}\, x}}$.

10. $y = \dfrac{3\ln(x^2+5)}{(x-7)^3}$.

ВАРИАНТ 28

I. 1. $y = 4x^5 - \dfrac{5}{x} - \sqrt{x^3} + \dfrac{2}{x^3}$.

2. $y = \sqrt{(x-4)^7} - \dfrac{10}{(3x^2 - 5x + 1)}$.

3. $y = 2^{\mathrm{tg}\, x} \mathrm{arctg}^5 3x$.

4. $y = \ln(x-4) \cdot \mathrm{arcctg}^4 3x$.

5. $y = \arcsin^3 4x \cdot \mathrm{ctg}\, 3x$.

6. $y = \sin^4 3x \cdot \arccos 5x^4$.

7. $y = \dfrac{e^{\sin 5x}}{(3x-2)^2}$.

8. $y = \dfrac{\mathrm{tg}^4 5x}{\ln(x+7)}$.

9. $y = \dfrac{\mathrm{arctg}^2 5x}{\mathrm{tg}(x+3)}$.

10. $y = \dfrac{4\log_2(3x-5)}{(x-2)^2}$.

11. $y=\sqrt[4]{\dfrac{2x-5}{2x+5}}\operatorname{arctg}(3x+2)$.

12. $y=(\sin 5x)^{\operatorname{arctg}(x+2)}$.

13. $y=(\operatorname{tg}(7x-5))^{\sin(x+2)}$.

14. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x-2)^3(x-1)}}{(x+3)^4}$.

II. 1. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{7}$. 2. $\begin{cases} x=\ln^2 t, \\ y=t+\ln t. \end{cases}$

III. $y=x\operatorname{arcctg}x,\ x_0=2$.

IV. Найти точку на кривой
$$y=-x^2+7x+16,$$
касательная в которой параллельна прямой $y=3x+4$.

11. $y=\sqrt[5]{\dfrac{3x-4}{3x+4}}\operatorname{arcctg}(2x+5)$.

12. $y=(\operatorname{arctg}x)^{\operatorname{tg}(3x+1)}$.

13. $y=(\cos(3x+2))^{\cos(x+4)}$.

14. $y=\dfrac{\sqrt[4]{(x+1)^3(x-2)^5}}{(x-3)^2}$.

II. 1. $y^2=\dfrac{x-y}{x+y}$. 2. $\begin{cases} x=te^t, \\ y=\dfrac{t}{e^t}. \end{cases}$

III. $y=(7x-4)^6,\ x_0=1$.

IV. Выяснить в какой точке кривой $y=4x^2-10x+13$ касательная параллельна прямой $y=6x-7$.

ВАРИАНТ 29

I. 1. $y=\dfrac{7}{x}+\dfrac{4}{x^3}-\sqrt[5]{x^3}-2x^6$.

2. $y=\dfrac{7}{(x+2)^5}-\sqrt{8-5x+2x^2}$.

3. $y=\sin^5 3x\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

4. $y=\lg(x+3)\cdot\operatorname{arcctg}^2 5x$.

5. $y=e^{-\cos x}\arcsin 2x$.

6. $y=\operatorname{ctg}^2 4x\cdot\arcsin x^3$.

7. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x-7}}{e^{-x^3}}$.

ВАРИАНТ 30

I. 1. $y=\dfrac{6}{x^4}-\dfrac{3}{x}+3x^3-\sqrt{x^7}$.

2. $y=\sqrt[3]{(x-1)^5}+\dfrac{5}{2x^2-4x+7}$.

3. $y=\cos^4 3x\cdot\arcsin 3x^2$.

4. $y=\log_5(x+1)\cdot\operatorname{arctg}^2 x^3$.

5. $y=\sqrt{(x+5)^3}\arccos^4 x$.

6. $y=\operatorname{tg}^3 5x\cdot\operatorname{arcctg}(2x-5)$.

7. $y=\dfrac{e^{-\operatorname{tg}x}}{4x^2+7x-5}$.

8. $y=\dfrac{\log_3(x+4)}{\cos^5 x}$.	8. $y=\dfrac{\operatorname{tg}^4 3x}{\lg(x^2-x+4)}$.
9. $y=\dfrac{\sqrt{\sin^3 x}}{\operatorname{arcctg}5x}$.	9. $y=\dfrac{\sqrt[5]{\cos 3x}}{\operatorname{arctg}(x+2)}$.
10. $y=\dfrac{2\ln(2x^2+3)}{(x-7)^4}$.	10. $y=\dfrac{4\lg(3x+7)}{(x-5)^3}$.
11. $y=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}\arcsin 2x$.	11. $y=\sqrt[7]{\dfrac{x^2+3}{x^2-3}}\arccos 4x$.
12. $y=\left(\operatorname{ctg}\sqrt{x}\right)^{\sin(x+3)}$.	12. $y=\left(\sin 3x\right)^{\operatorname{arcctg}2x}$.
13. $y=\left(\ln(7x+4)\right)^{\operatorname{tg}x}$.	13. $y=\left(\lg(8x+3)\right)^{\operatorname{tg}5x}$.
14. $y=\dfrac{\sqrt[6]{(x-1)^5}}{(x+2)^4(x-5)^7}$.	14. $y=\dfrac{\sqrt[5]{(x+2)^3}}{(x-1)^4(x-3)^5}$.
II. 1. $\sin^2(3x+y^2)=5$.	II. 1. $\operatorname{ctg}^2(x+y)=5x$.
2. $\begin{cases}x=6t^2-4,\\ y=3t^5.\end{cases}$	2. $\begin{cases}x=\arcsin t,\\ y=\ln t.\end{cases}$
III. $y=x\sin 2x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.	III. $y=\sin(x^3+\pi)$, $x_0=\sqrt[3]{\pi}$.
IV. Выяснить в какой точке кривой $y=7x^2-5x+4$ касательная перпендикулярна к прямой линии $23y=1-x$.	IV. Выяснить в какой точке кривой $y=\frac{1}{4}x^2-7x+5$ касательная параллельна прямой линии $y=2x+5$.

Решение типового варианта

I. Продифференцировать данные функции:

1. $y=9x^5-\dfrac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^7}-3x+4$.

▲ $y' = \left(9x^5 - 4x^{-3} + x^{\frac{7}{3}} - 3x + 4\right)' = \{A_2\} =$

$= \left(9x^5\right)' - \left(4x^{-3}\right)' + \left(x^{\frac{7}{3}}\right)' - (3x)' + (4)' =$

$= \{A_1\} = 9 \cdot \left(x^5\right)' - 4 \cdot \left(x^{-3}\right)' + \left(x^{\frac{7}{3}}\right)' - 3 \cdot (x)' + 0 =$

$= \{D_1\} = 9 \cdot 5x^{5-1} - 4 \cdot (-3)x^{-3-1} + \frac{7}{3}x^{\frac{7}{3}-1} - 3 = 45x^4 + 12x^{-4} + \frac{7}{3}x^{\frac{4}{3}} - 3.$ ▼

2. $y = \sqrt[4]{(2x^2 - 3x + 1)^3} - \dfrac{6}{(x+1)^3}.$

▲ $y' = \left((2x^2 - 3x + 1)^{\frac{3}{4}} - 6(x+1)^{-3}\right)' = \{A_2, A_1\} =$

$= \left((2x^2 - 3x + 1)^{\frac{3}{4}}\right)' - 6 \cdot \left((x+1)^{-3}\right)' =$

$= \{A_2, A_1, D_1\} = \frac{3}{4}(2x^2 - 3x + 1)^{-\frac{1}{4}}(2 \cdot 2x - 3) + 18(x+1)^{-4} =$

$= \frac{3}{4}(2x^2 - 3x + 1)(4x - 3) + 18(x+1)^{-4}.$ ▼

3. $y = \mathrm{tg}^5(x+2) \cdot \arccos 3x^2.$

▲ $y' = \left(\mathrm{tg}^5(x+2) \cdot \arccos 3x^2\right)' = \{A_3\} =$

$= \left(\mathrm{tg}^5(x+2)\right)' \arccos 3x^2 + \mathrm{tg}^5(x+2)\left(\arccos 3x^2\right)' =$

$= \{E_2, D_1; C_2\} = 5\,\mathrm{tg}^4(x+2)(\mathrm{tg}(x+2)' \cdot \arccos 3x^2 + \mathrm{tg}^5(x+2)\dfrac{-(3x^2)'}{\sqrt{1-(3x^2)^2}} =$

$= \{B_3, E_2; D_1, A_1\} = 5\,\mathrm{tg}^4(x+2)\dfrac{(x+2)'}{\cos^2(x+2)}\arccos 3x^2 + \mathrm{tg}^5(x+2)\dfrac{-6x}{\sqrt{1-9x^4}} =$

$= 5\,\mathrm{tg}^4(x+2)\dfrac{1}{\cos^2(x+2)}\arccos 3x^2 - \mathrm{tg}^5(x+2)\dfrac{6x}{\sqrt{1-9x^4}}.$ ▼

4. $y = \arcsin^5 4x \cdot \log_2(x-5).$

▲ $y' = \left(\arcsin^5 4x \cdot \log_2(x-5)\right)' = \{A_3\} =$

$= \left(\arcsin^5 4x\right)' \cdot \log_2(x-5) + \arcsin^5 4x \cdot \left(\log_2(x-5)\right)' = \{E_2,\ D_1;\ D_{4a}\} =$

$= 5\arcsin^{5-1} 4x \cdot (\arcsin 4x)' \cdot \log_2(x-5) + \arcsin^5 4x \dfrac{(x-5)'}{\ln 2 \cdot (x-5)} =$

$= \{C_1,\ E_2\} = 5\arcsin^4 4x \dfrac{(4x)'}{\cdot\sqrt{1-(4x)^2}} \log_2(x-5) + \arcsin^5 4x \dfrac{1}{(x-5)\ln 2} =$

$= \{A_1)\} = 5\arcsin 4x \cdot \dfrac{4}{\sqrt{1-16x^4}} \log_2(x-5) + \arcsin^5 4x \cdot \dfrac{1}{(x-5)\ln 2}$. ▼

5. $y = 3^{-x^4} \cdot \mathrm{ctg}\, 7x^3$.

▲ $y' = \left(3^{-x^4} \cdot \mathrm{ctg}\, 7x^3\right)' = \{A_3\} = \left(3^{-x^4}\right)' \mathrm{ctg}\, 7x^3 + 3^{-x^4}\left(\mathrm{ctg}\, 7x^3\right)' =$

$= \{E_2,\ D_2;\ B_4\} = 3^{-x^4} \cdot \ln 3 \cdot (-x^4)' \mathrm{ctg}\, 7x^3 + 3^{-x^4} \dfrac{-\left(7x^3)'\right)}{\sin^2 7x^3} =$

$= \{D_1,\ A_1\} = 3^{-x^4} \ln 3(-4x^{4-1}) \mathrm{ctg}\, 7x^3 + 3^{-x^4} \dfrac{-7 \cdot 3x^{3-1}}{\sin^2 7x^3} =$

$= -4\ln 3 \cdot 3^{-x^4} x^3 \mathrm{ctg}\, 7x^3 - 21 \cdot 3^{-x^4} \dfrac{x^2}{\sin^2 7x^3}$. ▼

6. $y = \mathrm{ctg}^2 3x \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}$.

▲ $y' = \left(\mathrm{ctg}^2 3x \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)' = \{A_1\} = \left(\mathrm{ctg}^2 3x\right)' \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x} + \mathrm{ctg}^2 3x \cdot \left(\mathrm{arctg}\sqrt{x}\right)' =$

$= \{E_2,\ D_1;\ C_3\} = 2\,\mathrm{ctg}\, 3x \cdot (\mathrm{ctg}\, 3x)' \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x} + \mathrm{ctg}^2 3x \cdot \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)'}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} =$

$= \{E_2,\ B_4,\ D_{1a}\} = 2\,\mathrm{ctg}\, 3x \cdot \dfrac{-(3x)'}{\sin^2 3x} \cdot \mathrm{arctg}\sqrt{x} + \mathrm{ctg}^2 3x \cdot \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1+x} =$

$$=\{A_1\}=-6\operatorname{ctg}3x\cdot\frac{1}{\sin^2 3x}\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{x}+\operatorname{ctg}^2 3x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}.\ \blacktriangledown$$

7. $y=\dfrac{\sqrt{3x^2-7x+5}}{e^{-x^4}}$.

▲ ***Способ 1***. Преобразуем дробь в произведение

$$y'=\left(\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot e^{x^4}\right)'=\{A_3\}=\left(\sqrt{3x^2-7x+5}\right)'e^{x^4}+\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot\left(e^{x^4}\right)'=$$

$$=\{E_2,\ D_{1a};\ D_3\}==\frac{(3x^2-7+5)'}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}e^{x^4}+\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot e^{x^4}(x^4)'=$$

$$=\frac{(6x-7)e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}+\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot e^{x^4}\cdot 4x^3.$$

Способ 2.

$$y'=\left(\frac{\sqrt{3x^2-7x+5}}{e^{-x^4}}\right)'=\{A_4\}=\frac{\left(\sqrt{3x^2-7x+5}\right)'e^{-x^4}-\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot\left(e^{-x^4}\right)'}{\left(e^{-x^4}\right)^2}=$$

$$=\{E_2,D_{1a},D_3\}=\frac{\dfrac{(3x^2-7x+5)'}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}e^{-x^4}-\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot e^{-x^4}(-x^4)'}{e^{-2x^4}}=$$

$$=\frac{\dfrac{6x-7}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}e^{-x^4}-\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot e^{-x^4}(-4x^3)}{e^{-2x^4}}=$$

$$=\frac{(6x-7)e^{x^4}}{2\sqrt{3x^2-7x+5}}+\sqrt{3x^2-7x+5}\cdot e^{x^4}\cdot 4x^3.\ \blacktriangledown$$

8. $y=\dfrac{\lg(x^2-3x+5)}{\operatorname{arcctg}^2 5x}$.

▲ $$y' = \left(\frac{\lg(x^2-3x+5)}{\operatorname{arcctg}^2 5x}\right)' = \{A_4\} =$$

$$= \frac{\left(\lg(x^2-3x+5)\right)' \cdot \operatorname{arcctg}^2 5x - \lg(x^2-3x+5)\cdot\left(\operatorname{arcctg}^2 5x\right)'}{\left(\operatorname{arcctg}^2 5x\right)^2} = \{E_2,\, D_{4a},\, D_1\} =$$

$$= \frac{\dfrac{(x^2-3x+5)'}{(x^2-3x+5)\cdot\ln 10}\cdot\operatorname{arcctg}^2 5x - \lg(x^2-3x+5)\cdot 2\cdot\operatorname{arcctg} 5x\cdot(\operatorname{arcctg} 5x)'}{\operatorname{arcctg}^4 5x} =$$

$$= \{A_2,\, D_1,\, A_1, C_4\} = \frac{\dfrac{2x-3}{(x^2-3x+5)\cdot\ln 10}\cdot\operatorname{arcctg}^2 5x}{\operatorname{arcctg}^4 5x} -$$

$$- \frac{\lg(x^2-3x+5)\cdot 2\cdot\operatorname{arcctg} 5x\cdot\left(-\dfrac{1}{1+25x^2}\right)\cdot 5}{\operatorname{arcctg}^4 5x}.$$ ▼

9. $y = \dfrac{\sqrt{\arcsin 3x}}{\sin^2 x}$.

▲ $$y' = \left(\frac{\sqrt{\arcsin 3x}}{\sin^2 x}\right)' = \{A_4\} = \frac{\left(\sqrt{\arcsin 3x}\right)'\sin^2 x - \sqrt{\arcsin 3x}\cdot\left(\sin^2 x\right)'}{\left(\sin^2 x\right)^2} =$$

$$= \{E_2,\, D_{1a},\, D_1\} = \frac{\dfrac{(\arcsin 3x)'}{2\sqrt{\arcsin 3x}}\sin^2 x - \sqrt{\arcsin 3x}\cdot 2\sin x\cdot(\sin x)'}{\sin^4 x} =$$

$$= \{E_2,\, C_1,\, B_1\} = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{\arcsin 3x}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\cdot 3\cdot\sin^2 x}{\sin^4 x} -$$

$$- \frac{\sqrt{\arcsin 3x}\cdot 2\sin x\cdot\cos x}{\sin^4 x}.$$ ▼

10. $y = \dfrac{3\ln(x^2-5)}{(x+3)^7}$.

▲ $$y'=\left(\frac{3\ln(x^2-5)}{(x+3)^7}\right)'=\{A_1,\,A_4\}=$$

$$=3\frac{\left(\ln(x^2-5)\right)'(x+3)^7-\ln(x^2-5)\cdot\left((x+3)^7\right)'}{\left((x+3)^7\right)^2}=\{E_2,\,D_4,\,D_1\}=$$

$$=3\frac{\dfrac{(x^2-5)'}{x^2-5}(x+3)^7-\ln(x^2-5)\cdot 7(x+3)^6(x+3)'}{(x+3)^{14}}=\{A_2,\,D_1,\,A_1\}=$$

$$=3\frac{\dfrac{1}{x^2-5}\cdot 2x\cdot(x+3)^7-7(x+3)^6\ln(x^2-5)}{(x+3)^{14}}.$$ ▼

11. $y=\sqrt[7]{\dfrac{x+5}{x-5}}\operatorname{ctg}(3x-4)$.

▲ $$y'=\left(\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}\operatorname{ctg}(3x-4)\right)'=\{A_3\}=\left(\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}\right)'\operatorname{ctg}(3x-4)+$$

$$+\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}\left(\operatorname{ctg}(3x-4)\right)'=\{E_2,\,D_1,\,B_4\}=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}-1}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)'\operatorname{ctg}(3x-4)+$$

$$+\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}\left(-\frac{(3x-4)'}{\sin^2(3x-4)}\right)=\{E_2,\,A_4,\,A_2,\,A_1\}=$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\frac{(x+5)'(x-5)-(x+5)(x-5)'}{(x-5)^2}\operatorname{ctg}(3x-4)+$$

$$+\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}\frac{-3}{\sin^2(3x-4)}=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\frac{x-5-(x+5)}{(x-5)^2}\operatorname{ctg}(3x-4)+$$

$$+\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}\cdot\left(-\frac{3}{\sin^2(3x-4)}\right)=$$

$$=\frac{1}{7}\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{-\frac{6}{7}}\frac{-10}{(x-5)^2}\operatorname{ctg}(3x-4)+\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^{\frac{1}{7}}\cdot\left(-\frac{3}{\sin^2(3x-4)}\right).\ \blacktriangledown$$

12. $y=\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}$.

Указание. Смотри пример 1.46, где представлены три способа дифференцирования показательно-степенной функции.

▲ $$y'=\left(\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}\right)'=\{E_3\}=$$

$$=\ln(3x+2)\cdot\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)-1}\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)'+$$

$$+\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}\ln\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)\cdot\left(\ln(3x+2)\right)'=$$

$$=\{E_2,\ B_3,\ D_4\}=\ln(3x+2)\cdot\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)-1}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+2}\right)'}{\cos^2\sqrt{x+2}}+$$

$$+\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}\ln\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)\cdot\frac{(3x+2)'}{3x+2}=\{E_2,\ D_{1a},\ A_2,\ A_1\}=$$

$$=\ln(3x+2)\cdot\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)-1}\cdot\frac{\frac{(x+2)'}{2\sqrt{x+2}}}{\cos^2\sqrt{x+2}}+$$

$$+\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}\ln\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)\cdot\frac{3}{3x+2}=$$

$$=\ln(3x+2)\cdot\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)-1}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{\cos^2\sqrt{x+2}}+$$

$$+\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)^{\ln(3x+2)}\ln\left(\operatorname{tg}\sqrt{x+2}\right)\cdot\frac{3}{3x+2}.\ \blacktriangledown$$

13. $y=(\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)}$.

Указание. Смотри пример 1.46, где представлены три способа дифференцирования показательно-степенной функции.

▲ $$y'=\left((\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)}\right)'=\{E_3\}=$$

$$= \operatorname{arctg}(3x-5)\cdot(\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)-1}\cdot(\sin 7x)' +$$

$$+ (\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)}\cdot \ln\sin 7x\cdot\left(\operatorname{arctg}(3x-5)\right)' = \{E_2, B_1, C_3\} =$$

$$= \operatorname{arctg}(3x-5)\cdot(\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)-1}\cdot\cos 7x\cdot(7x)' +$$

$$+ (\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)}\cdot \ln(\sin 7x)\cdot\frac{(3x-5)'}{1+(3x-5)^2} = \{A_1, A_2\} =$$

$$= \operatorname{arctg}(3x-5)\cdot(\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)-1}\cdot\cos 7x\cdot 7 +$$

$$+ (\sin 7x)^{\operatorname{arctg}(3x-5)}\cdot \ln(\sin 7x)\cdot\frac{3}{1+(3x-5)^2}. \ \blacktriangledown$$

14. $y = \dfrac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}$.

▲ ***Способ 1.*** Применяя метод логарифмического дифференцирования, последовательно находим

$$\ln y = \ln\frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5} = \frac{6}{7}\ln(x+5) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3),$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{7}\frac{(x+5)'}{x+5} - 2\frac{(x-1)'}{x-1} - 5\frac{(x+3)'}{x+3},$$

$$\left.\frac{y'}{y} = \frac{6}{7}\frac{1}{x+5} - 2\frac{1}{x-1} - 5\frac{1}{x+3}\right|\cdot y = \frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5},$$

$$y' = \frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}\left(\frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}\right).$$

Способ 2. Преобразуем исходную функцию к виду

$$y = \frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5} = (x+5)^{\frac{6}{7}}\cdot(x-1)^{-2}\cdot(x+3)^{-5}.$$

Применяя формулу $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$, получим

$$y' = \tfrac{6}{7}(x+5)^{-\frac{1}{7}}(x-1)^{-2}(x+3)^{-5} + (-2)(x-1)^{-3}(x+5)^{\frac{6}{7}}(x+3)^{-5} +$$

$$+(-5)(x+3)^{-6}(x+5)^{\frac{6}{7}}(x-1)^{-2}. \ \blacktriangledown$$

II. Найти производные y' и y'':

1. $x^3y - y^2 = 6x$.

Для того чтобы найти ***производную неявной функции***, надо дифференцировать все члены этой функции по порядку, помня о том, что y есть функция от x $\big(y = y(x)\big)$ и затем из результата дифференцирования найти y'.

$\blacktriangle$ 1) Дифференцируем по порядку:

$$(x^3y) - (y^2)' = (6x)'; \ 3x^2y + x^3y' - 2yy' = 6.$$

2) Решаем уравнение с одним неизвестным (y'). Найдем:

$$y'(x^3 - 2y) = 6 - 3x^2y \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{6 - 3x^2y}{x^3 - 2y}.$$

3) Продифференцировав обе части равенства $3x^2y + x^3y' - 2yy' = 6$, получим

$$6xy + 3x^2y' + 3x^2y' + x^3y'' - 2(y')^2 - 2yy'' = 0.$$

4) Решаем уравнение с одним неизвестным (y''). Найдем:

$$y''(x^3 - 2y) = 2(y')^2 - 6x^2y' - 6xy \Rightarrow y'' = 2\frac{(y')^2}{x^3 - 2y} - 6x^2\frac{y'}{x^3 - 2y} - \frac{6xy}{x^3 - 2y}.$$

Подставляя выражение $\dfrac{6 - 3x^2y}{x^3 - 2y}$ вместо первой производной y', имеем:

$$y'' = 2\frac{(6 - 3x^2y)^2}{(x^3 - 2y)^3} - 6x^2\frac{6 - 3x^2y}{(x^3 - 2y)^2} - \frac{6xy}{x^3 - 2y}. \ \blacktriangledown$$

2. $\begin{cases} x = 3t^4 - t^2, \\ y = t^3 - 5. \end{cases}$

▲ Т. к. $\begin{cases} x'(t) = 12t^3 - 2t, \\ y'(t) = 3t^2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x''(t) = 36t^2 - 2, \\ y''(t) = 6t, \end{cases}$ то

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3t^2}{12t^3 - 2t} = \frac{3t}{12t^2 - 2},$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\left(\frac{3t}{12t^2-2}\right)'_t}{12t^3 - 2t} = \frac{\frac{3(12t^2-2) - 24t \cdot 3t}{(12t^2-2)^2}}{12t^3 - 2t} =$$

$$= \frac{36t^2 - 6 - 72t^2}{(12t^2-2)^2(12t^3 - 2t)} = -\frac{3(6t^2+1)}{4t(6t^2-1)^3}$$

или

$$y''_{xx} = \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{(x'_t)^3} = \frac{6t(12t^3 - 2t) - (36t^2 - 2) \cdot 3t^2}{(12t^3 - 2t)^3} =$$

$$= \frac{72t^4 - 12t^2 - 108t^4 + 6t^2}{(12t^3 - 2t)^3} = -\frac{3(6t^2+1)}{4t(6t^2-1)^3}. \blacktriangledown$$

III. Вычислить $y'''(x_0)$: $y = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cos^2 x$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.

▲ Последовательно находим:

$$y' = -\tfrac{1}{4} \cdot 2\cos x(-\sin x) = \tfrac{1}{2}\cos x \sin x = \tfrac{1}{4}\sin 2x,$$

$$y'' = \tfrac{1}{4}\cos 2x \cdot 2 = \tfrac{1}{2}\cos 2x, \quad y''' = \tfrac{1}{2}(-\sin 2x) \cdot 2 = -\sin 2x.$$

$$y'''\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = \left(-\sin 2x\right)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = -\sin\left(2 \cdot \tfrac{\pi}{4}\right) = -\sin\tfrac{\pi}{2} = -1. \blacktriangledown$$

IV. Записать уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 9x - 4$ в точке с абсциссой $x = -1$.

▲ 1. Ордината точки касания

$$y(-1) = \left(x^2 - 9x - 4\right)\Big|_{x=-1} = (-1)^2 - 9\cdot(-1) - 4 = 6.$$

2. Итак, имеем $x_0 = -1$, $y_0 = 6$.

3. В любой точке $y' = 2x - 9$.

В точке касания $y'(-1) = (2x-9)\big|_{x=-1} = 2\cdot(-1) - 9 = -11$.

4. Поэтому уравнение касательной (по точке $M_0(-1;6)$ и угловому коэффициенту -11): $y - 6 = -11(x+1)$, $y = -11x - 5$.

5. Уравнение нормали: $y - 6 = -\frac{1}{-11}(x+1)$, $11y - x - 67 = 0$. ▼

Знания и умения, которыми должен владеть студент

1. Знания на уровне понятий, определений, описаний, формулировок

1. Определение производной; физический и геометрический смысл.
2. Таблица производных основных элементарных функций и общих правил их отыскания.
3. Правила и формулы для производных, заданных неявно и параметрически.
4. Определение дифференциала; связь с приращением функции и производной. Понятие дифференцируемой функции.
5. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью.
6. Таблица дифференциалов.
7. Геометрический смысл дифференциала.
8. Применение дифференциалов к приближенным вычислениям.
9. Определение производных и дифференциалов высших порядков; связь между ними.

2. Знания на уровне доказательств и выводов

1. Производные основных элементарных функций и общие правила отыскания производных.
2. Производные первого и высших порядков, заданных параметрически.
3. Теорема о связи дифференциала и производной.
4. Теорема о дифференцируемости функции.
5. Формула для выражения дифференциала n – го порядка через производную n – го порядка.
6. Инвариантность формы дифференциала первого порядка.
7. Геометрический смысл производной и дифференциала.
8. Уравнения касательно и нормали к кривой.

3. Умения в решении задач

Студент должен уметь:

1. Находить производные сложных функций, заданных явно.
2. Находить производные функций, заданных неявно и параметрически.
3. Находить дифференциалы сложных функций.
4. Находить производные и дифференциалы высших порядков.

Решать задачи с использованием физического и геометрического смысла производной.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Контрольная работа «Производные и их приложения» (2 часа)

Задача I. Найти производную первого порядка.

Задача II. Вычислить первую производную при указанном значении аргумента или параметра либо при заданных координатах точки.

Задача III. Найти вторую производную y''.

Задача IV. Решить следующие задачи.

ВАРИАНТ 1	ВАРИАНТ 2
I. 1. $\left(\dfrac{2}{27x}-\dfrac{1}{9x^2}\right)\sqrt{3x+x^2}$.	I. 1. $y=x\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
2. $3^{\operatorname{arctg}^2(4x+1)}$.	2. $y=\ln\dfrac{5+\sqrt{25-x^2}}{x}$.
II. $f(x)=\dfrac{1-2x}{1+\sqrt[3]{2x}}$, $x=4$.	II. $f(x)=\sqrt{x+2\sqrt{x}}$, $x=1$.
III. 1. $y=\dfrac{x-1}{x+1}e^{-x}$.	III. 1. $y=\operatorname{arctg}(x^2)$.
2. $\begin{cases} x=t+\ln\cos t, \\ y=t-\ln\sin t. \end{cases}$	2. $\begin{cases} x=2t-\sin 2t, \\ y=\sin^3 t. \end{cases}$
IV. 1. Под каким углом синусоида $y=\sin x$ пересекает прямую линию $y=\frac{1}{2}$?	IV. 1. Показать, что гиперболы $x^2-y^2=12$ и $xy=12$ пересекаются под прямым углом.
2. Закон движения материальной точки по прямой линии задан фор-	2. Две точки движутся по прямой линии по законам $s_1=t^3-3t$ и

мулой, $s = t^3 - 3t^2 + 3t + 5$. В какие моменты времени t скорость точки равна нулю?	$s_2 = t^3 - 5t^2 + 17t - 4$. В какой момент времени их скорости будут равны?
ВАРИАНТ 3 I. 1. $y = \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$. 2. $y = x^{\arcsin\frac{2x+1}{3}}$. II. $f(x) = xe^{\frac{x}{a}}$, $x = 0$. III. 1. $y = x^2 \ln x$. 2. $\begin{cases} x = t + \frac{1}{2}\sin t, \\ y = \cos^3 t. \end{cases}$ IV. 1. Определить угол, под которым пересекаются кривые $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$. 2. Тело, брошенное вверх, движется по закону, $s = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{17}{2}t^2 + 60t - 49$. В какой момент времени скорость тела станет равной нулю? Найти наибольшую высоту подъема тела.	**ВАРИАНТ 4** I. 1. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x+3}{3x-5}}$. 2. $y = (1 + \mathrm{ctg}^2 3x)e^{-x}$. II. $f(t) = \ln(1 + a^{-2t})$, $t = 0$. III. 1. $y = \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}$. 2. $\begin{cases} x = t^5 + 2t, \\ y = t^3 - 8t - 1 \end{cases}$ IV. 1. Под каким углом пересекаются гипербола $y = \frac{1}{x}$ и парабола $y = \sqrt{x}$? 2. Скорость тела, движущегося прямолинейно, определяется формулой $v = 3t + t^2$. Какое ускорение будет иметь тело через 4c после начала движения?
ВАРИАНТ 5 I. 1. $y = \dfrac{\sqrt{1+3x^2}}{2+3x^2}$. 2. $y = e^{-x^2}\cos^3(2x+3)$. II. $f(t) = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos t}$, $t = \frac{\pi}{2}$. III. 1. $y = \ln \mathrm{ctg}\, 4x$.	**ВАРИАНТ 6** I. 1. $y = \dfrac{\sqrt{1+\cos^3 x}}{1+\sin 3x}$. 2. $y = \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{1+e^{2x}}$. II. $f(x) = \dfrac{x}{2x-1}$, $x = -2$. III. 1. $y = \sqrt[3]{(1-x)^2}$.

2. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t, \\ y = \frac{1}{2}t^2 + \dfrac{1}{t}. \end{cases}$

IV. 1. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней параллельна секущей?

2. Тело массой 100 *кг* движется прямолинейно по закону $s = 2t^2 + 3t + 1$. Определить кинетическую энергию $\frac{1}{2}mv^2$ тела через $5c$ после начала движения.

2. $\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos 2t. \end{cases}$

IV. 1. Канат висящего моста имеет форму параболы и прикреплен к вертикальным опорам, отстоящим одна от другой на расстоянии 200 *м*. Самая нижняя точка каната находится на 40 *м* ниже точек подвеса. Найти угол между канатом и опорами.

2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью *a м/с*. За какое время, и на каком расстоянии от поверхности Земли тело достигнет наивысшей точки?

ВАРИАНТ 7

I. 1. $y = \left(1 + \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^3$.

2. $y = e^{-\frac{1}{\cos x}}$.

II. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x = -8$.

III. 1. $y = 2^{\operatorname{ctg} 3x}$. 2. $\begin{cases} x = t^2 + t + 1, \\ y = t^3 + t. \end{cases}$

IV. 1. При каком значении a кривая

$$y = \tfrac{1}{4}\left(ax + x^3\right)$$

пересекает ось Ox под углом $\frac{\pi}{4}$?

2. Плот подтягивается к берегу с помощью каната, который наматывается на ворот со скоростью 50 *м/мин*. Определить скорость движения плота в тот момент, когда его расстояние от берега будет рав-

ВАРИАНТ 8

I. 1. $y = \dfrac{x}{(x+1)^2(x^2+1)^3}$.

2. $y = \sqrt[3]{(1+\sin^3 2x)^2}$.

II. $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x} - 1\right)^2}{x}$, $x = 0.01$.

III. 1. $y = xe^{\frac{1}{x}}$. 2. $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t, \\ y = \dfrac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$

IV. 1. Найти угол пересечения кривой $y = x - x^3$ и прямой $y = 5x$.

2. Заряд, проходящий через проводник, начиная с момента времени $t = 0$, определяется формулой

$$Q = t^3 - 9t^2 + 15t + 1.$$

В какие моменты времени сила тока в

но 25 *м*, если ворот расположен на берегу, на $6\sqrt{6}$ *м* выше поверхности воды.	проводнике будет равна нулю?
ВАРИАНТ 9 I. 1. $y=\sqrt[5]{x+x\sqrt[3]{x}}$. 2. $y=3x\cos^3 x$. II. $f(x)=x^2-\dfrac{1}{2x^2}$, $x=\pm 2$. III. 1. $y=xe^{-x}$. 2. $x=\dfrac{2-t}{2+t^2}, y=\dfrac{t^2}{2+t^2}$. IV. 1. Найти угол пересечения линий $y=1+\sin x$ и $y=1$. 2. Тело массой 6 т движется прямолинейно по закону $s=-1+\ln(t+1)+(t+1)^3$. Требуется вычислить кинетическую энергию $\frac{1}{2}mv^2$ тела через 1с после начала движения.	**ВАРИАНТ 10** I. 1. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+\sin 3x}{3+2\sin 3x}}$. 2. $y=e^{-\frac{x}{3}}\operatorname{arctg}^2 x$. II. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x$, $x=-1$. III. 1. $y=\ln\ln x$. 2. $\begin{cases} x=2\cos^3 2t, \\ y=\sin^3 2t. \end{cases}$ IV. 1. Найти угол пересечения линий $y=1$ и $y=\sqrt{2}\sin x$. 2. Зависимость пути от времени при прямолинейном движении точки задана уравнением $s=\frac{1}{5}t^5+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{8}t$. Определить скорость движения точки через 2 с после начала движения.
ВАРИАНТ 11 I. 1. $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{x}}$. 2. $y=\dfrac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$. II. $f(x)=e^{-x}\cos 3x$, $x=0$.	**ВАРИАНТ 12** I. 1. $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}-2\sqrt{6x+5}$. 2. $y=\cos 2x\sin^2 2x$. II. $f(x)=\ln(1+x)+\arcsin\frac{1}{2}x$, $x=1$.

III. 1. $y = x\sqrt{1+x^2}$. 2. $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

IV. 1. Найти угол пересечения кривых $y = x^3$ и $y = \frac{1}{x^2}$.

2. Зависимость между количеством x вещества, получаемого в результате некоторой реакции, и временем t выражается уравнением

$$x = 7(1 - e^{-3t}).$$

Определить скорость реакции через 2 с после начала опыта ($t = 0$).

III. 1. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 2. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin^2 t. \end{cases}$

IV. 1. Составить уравнения касательной и нормали к полукубической параболе $x = t^2, y = t^3$, которые проведены в точке $t = 2$.

2. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален кубу времени. Первые два оборота были сделаны колесом за 4с. Найти угловую скорость ω колеса через 16с после начала движения.

ВАРИАНТ 13

I. 1. $y = \frac{4}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

2. $y = \sin^3 5x \cdot \sin^5 3x$.

II. $f(x) = \operatorname{tg}^3 \frac{\pi x}{6}$, $x = 2$.

III. 1. $y = \frac{\ln x}{x}$.

2. $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t. \end{cases}$

IV. 1. Найти угол пересечения кривых $x^2 + y^2 = 5$ и $y^2 = 4x$.

2. Тело движется по прямой линии Ox согласно закону $x = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 3t$. Определить скорость и ускорение движения. В какие моменты тело меняет направление движения?

ВАРИАНТ 14

I. 1. $y = x\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$.

2. $y = e^{\cos^2 3x}$.

II. $2y = 1 + xy^3$, $x = 1$, $y = 1$.

III. 1. $y = x^2 \ln x^3$.

2. $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t, \\ y = \sin t - t\cos t. \end{cases}$

IV. 1. Определить, под каким углом кривая $y = \frac{x-1}{1+x^2}$ пересекает ось абсцисс?

2. По параболе $y = x(8 - x)$ движется точка так, что ее абсцисса изменяется в зависимости от времени t по закону $x = t\sqrt{t}$. Какова скорость изменения ординаты в точке $M(1; 7)$?

ВАРИАНТ 15

I. 1. $y=\sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$.

2. $y=e^{\operatorname{tg}x}\cos x$.

II. $y=(x+y)^3-27(x-y), x=2, y=1$

III. 1. $y=x^3e^{5x}$.

2. $\begin{cases} x=2\cos t-\cos 2t, \\ y=2\sin t-\sin 2t. \end{cases}$

IV. 1. Найти точки, в которых касательные к графикам функций

$$f_1(x)=x^3-x-1$$

$$\text{и } f_2(x)=3x^2-4x+1$$

параллельны.

2. Точка движется по гиперболе $xy=10$ так, что ее абсцисса равномерно возрастает со скоростью 1м/с. С какой скоростью изменяется ее ордината, когда точка проходит положение (5; 2)?

ВАРИАНТ 16

I. 1. $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$.

2. $y=\arcsin(\operatorname{tg}x)$.

II. $ye^y=e^{x+1}, x=0, y=1$.

III. 1. $y=(1+x^2)\operatorname{tg}x$.

2. $\begin{cases} x=2t^2+t, \\ y=\ln t. \end{cases}$

IV. 1. Записать уравнения касательных и нормалей к кривой

$$x^2+y^2+4x-2y-3=0$$

в точках пересечения ее с осью Oy.

2. Закон движения точки по оси Ox

$$s=5t-t^2.$$

Найти скорость и ускорение точки для моментов времени

$$t_1=0,\ t_2=1\,c.$$

ВАРИАНТ 17

I. 1. $y=\sqrt{\dfrac{x^2+\sqrt{x}}{x^3-\sqrt{x}}}$.

2. $y=e^{\cos x}\sin^2 x$.

II. $y^2=x+\ln\dfrac{y}{x}, x=1, y=1$.

III. 1. $y=e^x\cos^4 x$. 2. $\begin{cases} x=3t-t^3, \\ y=3t^2. \end{cases}$

ВАРИАНТ 18

I. 1. $y=5\sqrt{x^2+\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}}$.

2. $y=\ln\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

II. $x=t\ln t, y=\dfrac{\ln t}{t}, t=1$.

III. 1. $y=e^{-x}\cos x$. 2. $\begin{cases} x=2t-t^3, \\ y=2t^2. \end{cases}$

<table>
<tr>
<td>IV. 1. Записать уравнения касательных и нормалей к кривой
$$y=4x-x^3$$
в точках пересечения ее с осью Ox.
2. Точка движется по параболе $y=\sqrt{6x}$ так, что ее абсцисса возрастает со скоростью 10см/с. Какова скорость изменения ординаты в этой точке в момент, 1когда $x=6$?</td>
<td>IV. 1. Записать уравнения касательных к гиперболе $xy=4$ в точках с абсциссами $x_1=1, x_2=-4$ и найти угол между касательными.
2. Закон движения точки по прямой линии задан формулой $s=5t-\frac{4}{t^2}+3$. Найти скорость и ускорение точки через 1 с после начала движения.</td>
</tr>
<tr>
<td>ВАРИАНТ 19
I. 1. $y=1+\sqrt{\frac{1+x}{x-1}}$. 2. $y=\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$.
II. $x=a(t-\sin t), y=a(1-\mathrm{cot}), t=\frac{\pi}{2}$.
III. 1. $y=\sqrt{x}\,e^x$. 2. $\begin{cases} x=\operatorname{ctg} t, \\ y=\frac{1}{\cos^2 t}. \end{cases}$
IV. 1. В какой точке параболы $y=x^2+5x+3$ касательная к ней будет параллельна секущей, проведенной через две точки с абсциссами $x=-2$ и $x=3$?
2. Точка движется по кривой $y=\sqrt[3]{x}$ в первом квадранте. Найти координаты точки в момент времени, когда скорость изменения абсциссы этой точки в 12 раз больше скорости изменения ординаты этой точки.</td>
<td>ВАРИАНТ 20
I. 1. $y=\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{3x-2}}$. 2. $y=\frac{e^x}{\cos x}$.
II. $x=e^t\cos t, y=e^t\sin t, t=\frac{\pi}{4}$.
III. 1. $y=xe^{-x^3}$. 2. $\begin{cases} x=\ln t, \\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right). \end{cases}$
IV. 1. Найти уравнения касательной и нормали к кривой
$$4x^3-3xy^2+6x^2-5xy+9x+14=0$$
в точке (–2; 3).
2. Точка движется по закону
$$s=4t^3+2t^2-5\ (см).$$
Найти скорость и ускорение движения точки через 2с.</td>
</tr>
<tr>
<td>ВАРИАНТ 21
I. 1. $y=\sqrt[4]{x^2+3x}-\sqrt[5]{(6x-1)^2}$.
2. $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$.</td>
<td>ВАРИАНТ 22
I. 1. $y=\frac{2x}{\sqrt{1+x}}-4\sqrt{1+x}$.
2. $y=\sin^2 3x$.</td>
</tr>
</table>

II. $y(x)=(1+x^3)\left(5-\dfrac{1}{x^2}\right),\ x=1$.

III. 1. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$. 2. $\begin{cases} x=t^2, \\ y=\frac{1}{3}t^3-t. \end{cases}$

IV. 1. Записать уравнение нормали к астроиде $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ в точке, для которой $t=\frac{\pi}{4}$.

2. Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5см/с. С какой скоростью увеличивается площадь поверхности шара и его объем в момент, когда его радиус становится равным 50см?

II. $s(t)=\dfrac{3}{5-t}+\dfrac{t^2}{5},\ t=2$.

III. 1. $y=x^3\ln x$. 2. $\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t. \end{cases}$

IV. 1. Составить уравнение той нормали к кривой линии $y=\ln(2x+1)$, которая перпендикулярна к биссектрисе первого и третьего координатных углов.

2. Электрический заряд, проходящий через проводник, начиная с момента времени $t=0$, задается формулой

$$Q=2t^2+10t+9.$$

Найти силу тока для $t=15$с.

ВАРИАНТ 23

I. 1. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$. 2. $y=\sqrt{1+\ln^2 x}$.

II. $f(x)=x\left(1+\sqrt{x^3}\right),\ x=0$.

III. 1. $y=xe^{\sin x}$. 2. $\begin{cases} x=\sin\left(\frac{1}{2}t\right), \\ y=\cos t. \end{cases}$

IV. 1. Найти расстояние от вершины параболы до касательной к ней, когда парабола

$$y=x^2-4x+5$$

пересекается с осью Oy.

2. В какой точке эллипса

$$16x^2+9y^2=400$$

ордината убывает с той же скоростью, с какой возрастает абсцисса?

ВАРИАНТ 24

I. 1. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$. 2. $y=\dfrac{4\ln x}{1-\ln x}$.

II. $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2},\ x=2$.

III. 1. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}x\right)$. 2. $\begin{cases} x=\cos at, \\ y=\sin at. \end{cases}$

IV. 1. В уравнении

$$y=x^2+bx+c$$

параболы определить b и c, если известно, что парабола касается прямой $y=x$ в точке $x=2$.

2. Сторона квадрата растет со скоростью 5м/с. Какова скорость изменения периметра и площади квадрата в тот момент, когда сторона его равна 50м?

ВАРИАНТ 25 I. 1. $y=\sqrt[5]{3x^2+1}+\sqrt[3]{x^3-4}$. 2. $y=\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{ctg}x+x$. II. $f(x)=\frac{a-x}{1+x}, x=1$. III. 1. $y=x\operatorname{arctg}x$. 2. $\begin{cases}x=e^{2t},\\ y=\cos t.\end{cases}$ IV. 1. Провести касательную к кривой $y=\frac{x+9}{x+5}$ так, чтобы она прошла через начало координат. Записать уравнение этой касательной. 2. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8с. Найти угловую скорость ω колеса через 32с после начала движения.	**ВАРИАНТ 26** I. 1. $y=x\sqrt{1+x^2}$. 2. $y=\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}}-x$. II. $s(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{5}, t=2$. III. 1. $y=\frac{x}{x^2-1}$. 2. $\begin{cases}x=\cos\left(\frac{1}{2}t\right),\\ y=t-\sin t.\end{cases}$ IV. 1. Найти угол, под которым пересекаются параболы $y=(x-2)^2$ и $y=-4+6x-x^2$. 2. Расстояние s *м*, пройденное телом за t *с*, определяется формулой $65s=\frac{1}{8}t^3+3t^2+t$. Найти скорость и ускорение тела при $t=10$.
ВАРИАНТ 27 I. 1. $5\sqrt[5]{4x+3}-\frac{2}{\sqrt{x^3+x+1}}$. 2. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\cos x}}$. II. $y=e^{\sqrt{\ln x}}, x=e$. III. 1. $y=x-\operatorname{arctg}x$. 2. $\begin{cases}x=\operatorname{tg}t+\operatorname{ctg}t,\\ y=2\ln\operatorname{ctg}t.\end{cases}$ IV. 1. Найти углы, под которыми пересекаются эллипс $\frac{1}{4}x^2+y^2=1$ и парабола $4y=4-5x^2$.	**ВАРИАНТ 28** I. 1. $y=3\sqrt[3]{x^5+5x^4-\frac{5}{x}}$. 2. $y=\ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$. II. $y=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)}, x=\frac{\pi}{2}$. III. 1. $y=\sin x-\frac{1}{3}\cos^3 x$. 2. $\begin{cases}x=t^2+1,\\ y=e^{t^2}.\end{cases}$ IV. 1. Составить уравнение касательной к линии $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}x\right)$ в точках ее пересечения с прямой линией $x=2$. 2. Точка движется прямолинейно так,

2. Вращающееся маховое колесо, задерживаемое тормозом, за t с поворачивается на угол $$\varphi = a + bt - ct^2,$$ где a, b, c – положительные постоянные величины. Определить угловую скорость и ускорение вращения колеса. Когда колесо остановится?	что $$v^2 = 2bx,$$ где v – скорость точки; x – пройденный путь; b – некоторая постоянная. Определить ускорение движения точки.
ВАРИАНТ 29	**ВАРИАНТ 30**
I. 1. $y = \dfrac{1}{x + \sqrt{1 + x^2}}$. 2. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. II. $f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1),\ x = 1$ III. 1. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x}$. 2. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t, \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$ IV. 1. Найти касательную к кривой $4x^2 + y^2 = 80$, параллельную прямой $x + y - 6 = 0$. 2. В период разгона маховик вращается по закону $\varphi = \frac{1}{10}t^3$. Через какое время после начала движения угловая скорость маховика будет равна 60π рад/с? Чему будет равно угловое ускорение тела в этот момент?	I. 1. $y = x + \sqrt[5]{\dfrac{1 + x^5}{1 - x^5}}$. 2. $y = \operatorname{tg}^2(x^3 + 1)$. II. $f(x) = \dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{3}{x^2 + 1},\ x = 1$. III. 1. $y = \ln\left(x + \sqrt{x}\right)$. 2. $\begin{cases} x = t\cos t, \\ y = at\sin t. \end{cases}$ IV. 1. При каком значении параметра a парабола $y = ax^3$ касается кривой $y = \ln x$? 2. Точка движется прямолинейно по закону, $s = 60t - 5t^3$. Через какой промежуток времени после начала движения точка остановится? Найти путь, пройденный точкой за это время.

III. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ ПОВЕДЕНИЯ ФУНКЦИЙ

Одной из важнейших прикладных задач дифференциального исчисления является разработка общих приемов, которые позволяют исследовать поведение функций.

1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЯХ

Основные теоретические сведения

Теорема Ролля[1]. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:*

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a;b)$;

3) $f(a)=f(b)$.

Тогда существует точка $c\in(a;b)$ такая, что $f'(c)=0$.

Физическая интерпретация теоремы Ролля

Пусть x – время, а $f(x)$ – координата точки, которая в момент времени x движется по прямой линии. В начальный момент $x=a$ точка имеет координату $f(a)$, далее движется определенным образом со скоростью $f'(x)$ и в момент времени $x=b$ она возвращается в точку с координатой $f(a)$ $(f(b)=f(a))$. Ясно, что для возвращения в точку $f(a)$ она должна остановиться в некоторый момент времени (прежде чем «повернуть назад»), т.е. в некоторый момент $x=c$ скорость $f'(c)=0$.

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля

Существует точка $c\in(a;b)$ такая, что касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $(c;f(c))$ параллельна оси Ox (рис. 1.1).

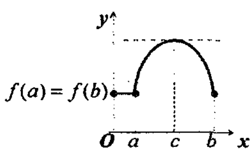


Рис. 1.1

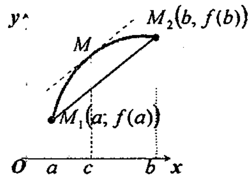


Рис. 1.2

Теорема Лагранжа[2]. *Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:*

---

[1] Мишель Ролль (1652-1719) – французский математик.

[2] Жозеф-Луи Лагранж (1736-1813) – французский математик и механик.

1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$;

2) функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a;b)$.

Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Эта формула называется ***формулой Лагранжа*** (или ***формулой конечных приращений***).

Физическая интерпретация теоремы Лагранжа

Пусть x – время, а $f(x)$ – координата точки, которая в момент времени x движется по прямой линии. Величина в левой части формулы Лагранжа является, очевидно, средней скоростью движения точки по прямой линии за промежуток времени от a до b. Формула Лагранжа показывает, что существует такой момент времени $x = c$, в который мгновенная скорость равна средней скорости на временном отрезке $[a;b]$.

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа

Число $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ является угловым коэффициентом прямой, проходящей через концы графика функции $y = f(x)$ – точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$, а $f'(c)$ – угловым коэффициентом касательной к графику в точке $(c; f(c))$. Формула Лагранжа показывает, что касательная к графику функции в некоторой точке $(c; f(c))$ параллельна прямой, проходящей через концы графика (или совпадает с ней, рис.1.2).

Из теоремы Лагранжа следует, что если функция непрерывна на отрезке $[a;b]$ и ее производная равна нулю в интервале $(a;b)$, то функция постоянна на отрезке $[a;b]$.

Теорема Коши[3]. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют условиям:*

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a;b]$;

2) функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в интервале $(a;b)$;

3) $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a;b)$.

Тогда существует точка $c \in (a;b)$ такая, что $\dfrac{f(b)-f(b)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Данная формула называется ***формулой Коши***.

Теорема Лагранжа следует из теоремы Коши, если $g(x) = x$.

Пример 1.1. Будет ли выполняться теорема Ролля для функции $f(x) = x^2 - 6x + 100$, если $a = 1, b = 5$? При каком значении c?

[3] Огюстен Луи Коши (1789-1857) – французский математик.

▲ Так как функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x и значения функции $f(x)$ на границах отрезка $[1; 5]$ равны между собой, т.е. $f(1) = f(5) = 95$, то теорема Ролля будет выполняться в отрезке $[1; 5]$. Значение c определяем из уравнения $f'(x) = 2x - 6 = 0$, т.е. $c = 3$. ▼

Примеры решения задач

Пример 1.2. Удовлетворяет ли функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ на промежутке $[-1; 1]$ условиям теоремы Ролля?

▲ Производная данной функции $y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$. Поскольку при $x = 0$ $\left(y'(0+0 = +\infty, y'(0-0) = -\infty\right)$ производная не существует, то функция не дифференцируема в промежутке $[-1; 1]$. Значит, условие 2) теоремы Ролля не выполнены. ▼

Пример 1.3. Показать, что производная $f'(x)$ полинома

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

имеет вещественный корень в интервале $(-1; 1)$.

▲ Найдем корни данного полинома:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 1 \vee x_3 = -1.$$

По теореме Ролля, если $f(-1) = f(1) = 0$, то $f'(x)$ имеет корень в интервале $(-1; 1)$. Найдем корни производной полинома $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$, т.е. $x_1 = -\frac{1}{3} \vee x_2 = 1$. Таким образом, между корнями функции -1 и 1 содержится корень производной, равный $-\frac{1}{3}$. ▼

Пример 1.4. Доказать, что уравнение $e^x = 1 + x$ имеет единственный корень $x = 0$.

▲ Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - 1 - x$. Предположим, что она имеет два корня: $x = 0$ и $x = x_0 > 0$. Тогда для функции $f(x)$ на промежутке $[0; x_0]$ выполнены все условия теоремы Ролля. Значит, существует точка $x_1 \in (0; x_0)$, такая, что $f'(x_1) = 0$, но это не соответствует действительности, ибо $f'(x) = e^x - 1 \neq 0$ при $x \neq 0$. Случай $x_0 < 0$ рассматривается аналогично. Следовательно, уравнение $e^x = 1 + x$ имеет единственный корень $x = 0$. ▼

Пример 1.5. Применив формулу Лагранжа к функции $f(x) = x^2$ на промежутке $[a; b]$, определить c.

▲ Т.к. $f'(x)=2x$, то формула Лагранжа на промежутке $[a;b]$ имеет вид $\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=2c$. Следовательно, $c=\frac{1}{2}(a+b)$, т.е. точка c – середина отрезка $[a;b]$. ▼

Пример 1.6. Найти координаты точки M на дуге AB кривой

$$y=2x-x^2,$$

в которой касательная параллельна хорде AB, если $A(1;1)$ и $B(3;-3)$.

▲ Функция $y=2x-x^2$ непрерывна и дифференцируема при всех значениях x. По теореме Лагранжа между двумя значениями $a=1$ и $b=3$ существует значение $x=c$, удовлетворяющее равенству

$$y(b)-y(a)=(b-a)y'(c),$$

где $y'=2-2x$. Подставим данные из условия задачи:

$$y(3)-y(1)=(3-1)y'(c)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(2\cdot3-3^2)-(2\cdot1-1^2)=(3-1)\cdot(2-2c)\Rightarrow-4=4(1-c).$$

Отсюда $c=2$, $y(2)=0$.

Таким образом, точка M имеет координаты (2; 0). ▼

Пример 1.7. На дуге AB кривой, заданной параметрическими уравнениями $\begin{cases}x=t^2,\\ y=t^3\end{cases}$, найти точку M, в которой касательная параллельна хорде AB, если в точке A $t=1$, в точке B $t=3$.

▲ Угловой коэффициент хорды AB равен $\dfrac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)}$, а угловой коэффициент касательной в точке M (при $t=c$) равен $\dfrac{y_t'(c)}{x_t'(c)}$, где $x_t'=2t$, $y_t'=3t^2$.

Для определения c получаем по теореме Коши уравнение

$$\frac{y(3)-y(1)}{x(3)-x(1)}=\frac{y_t'(c)}{x_t'(c)},\Rightarrow\frac{27-1}{9-1}=\frac{3c^2}{2c}\Rightarrow\frac{13}{4}=\frac{3}{2}c\Rightarrow c=\frac{13}{6}.$$

Найденное значение c удовлетворяет неравенству $1<c<3$.

Подставив значение $t = c$ в параметрические уравнения, получаем $x = \frac{169}{36}$, $y = \frac{2197}{216}$. Итак, искомая точка $M\left(\frac{169}{36}; \frac{2197}{216}\right)$. ▼

Пример 1.8. Доказать, что $\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi$.

▲ Рассмотрим функцию $f(x) = \arcsin x + \arccos x$, $x \in [-1; 1]$. Она дифференцируема на интервале (–1; 1), и $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$. Тогда по следствию из теоремы Лагранжа $f(x) = c$, если $x \in [-1; 1]$, или

$$\arcsin x + \arccos x = c.$$

Поскольку при $x = 0$ $\arcsin 0 + \arccos 0 = \frac{1}{2}\pi$, то $c = \frac{1}{2}\pi$. Следовательно,

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{1}{2}\pi. \text{ ▼}$$

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Будет ли выполняться теорема Ролля для функции $f(x) = \sqrt[3]{8x - x^2}$, если $a = 0, b = 8$? При каком значении c будет выполняться теорема Ролля?

Ответ: $c = 4$.

2. Дана функция $f(x) = \sqrt[3]{(x-8)^2}$.

Пусть $a = 0, b = 16$. Тогда $f(0) = f(16) = 4$. Однако производная не обращается в нуль ни в одной точке интервала $(0; 16)$. Противоречит ли это теореме Ролля?

Ответ: Условия теоремы Ролля нарушены.

3. Доказать, что на указанных отрезках к данным функциям не применима теорема Ролля: а) $y = 1 - |x|$, $x \in [-1; 1]$; б) $y = |\sin x| + x$, $x \in [-1; 1]$.

а) *Указание*: $y = \begin{cases} 1 + x, x \in [-1; 0), \\ 1 - x, x \in [0; 1]. \end{cases}$ В точке $x = 0$ функция недифференцируема $\left(f(y' + 0) = -1,\ f(y' - 0) = 1\right)$.

Ответ: Поэтому на отрезке $[-1; 1]$ к данной функции не применима теорема Ролля.

б) см. решение задачи 1.а).

4. Применив к функциям на указанных отрезках теорему Лагранжа, определить значение c: а) $y = \ln x, x \in [1; e]$; б) $y = x - x^3, x \in [-2; 1]$.

а) ***Ответ***: $c = e - 1$.

Указание. $y' = \frac{1}{x}$. Применив к функции $y = \ln x$ на отрезке $[1; e]$ формулу Лагранжа, для определения c получим уравнение

$$\ln e - \ln 1 = \frac{1}{c}(e-1),$$

откуда $c = e-1$;

б) ***Ответ***: $c=-1$.

Указание. Применив к функции $y = x - x^3$ на отрезке $[-2; 1]$ формулу Лагранжа, получим уравнение для определения c: $1-3c^2=-2$.

Откуда $c=-1 \vee c=1$.

Подходит только значение $c=-1$, для которого $-2<c<1$.

5. Вывести формулы: а) $\sin^2 x = 1-\cos 2x,\ x \in (-\infty; +\infty)$;

$$\text{б) } \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{arctg} x,\ x \in [0; \infty);$$

$$\text{в) } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{при } x>0, \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{при } x<0. \end{cases}$$

См. решение задачи 6.

6. Проверить, что функции

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ и } g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$$

удовлетворяют условиям теоремы Коши на отрезке $[1; 4]$, и найти соответствующее значение c.

Ответ: $c=2$.

Указание: $f'(x) = 2x-2,\ g'(x) = 3x^2 - 14x + 20$. Поскольку $g'(x) \neq 0$, то к функциям $f(x)$ и $g(x)$ на промежутке $[1; 4]$ применима теорема Коши:

$$\frac{f(4)-f(1)}{g(4)-g(1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ или } \frac{1}{2} = \frac{2c-2}{3c^2-14c+20}.$$

Решая последнее уравнение, находим $c=2,\ c=4$. Нашим условиям удовлетворяет $c = 2 \in (1; 4)$.

7. Доказать, что уравнение $3x^5 + 15x - 8 = 0$ имеет один вещественный корень.

Указание: предположим, что уравнение имеет два вещественных корня: x_1 и x_2 $(x_1 > x_2)$. Тогда для функции $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ на отрезке $[x_2; x_1]$ выполнены все условия теоремы Ролля, т.е. существует точка

$c \in (x_2; x_1)$, такая, что $f'(c) = 0$. Но это невозможно, ибо $f'(x) = 15x^4 + 15 > 0$. Существование одного вещественного корня следует из того, что многочлен $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ нечетной степени.

8. Пусть $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Доказать, что уравнение $f'(x) = 0$ имеет три вещественных корня.

9. Для отрезка параболы $y = x^2$, заключенного между точками $A(1;1)$ и $B(3;9)$, найти точку, касательная в которой параллельна хорде AB.

Ответ: $M(2;4)$.

Указание: к функции $y = x^2$ на отрезке $[1;3]$ применить формулу Лагранжа.

10. В какой точке дуги AB кривой $y = x^3 - 3x$ касательная параллельна хорд AB, если $A(0;0)$, $B(3;18)$?

Ответ: $M\left(\sqrt{3};0\right)$.

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему Ферма.
2. Сформулируйте теорему Ролля.
3. Останется ли справедливой теорема Ролля, если опустить условие:

а) $f(a) = f(b)$; б) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$? Приведите соответствующие примеры.

4. Каков физический смысл теоремы Ролля?
5. Каков геометрический смысл теоремы Ролля?
6. Сформулируйте следствие из теоремы Ролля (о корне производной).
6. Сформулируйте теорему Лагранжа.
7. Каков физический смысл теоремы Лагранжа?
8. Каков геометрический смысл теоремы Лагранжа?
9. Сформулируйте следствие из теоремы Лагранжа (о постоянстве функции).
10. Сформулируйте теорему Коши.

2. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ РАСКРЫТИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Основные теоретические сведения

Теорема Лопиталя[4]. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *определенные на промежутке* $(a;b)$, *удовлетворяет следующим условиям:*

[4] Г.Ф. де Лопиталь (1661-1704) – французский математик, способный ученик Иоганна Бернулли, маркиз, для которого последний в 1691-1692 гг. написал первый учебник анализа.

1) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в точке* x_0, $f(x_0)=0$, $g(x_0)=0$;

2) *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *дифференцируемы в некоторой окрестности точки* x_0, *быть может, кроме самой точки* x_0,

$$\Omega(x_0)=(x_0-\delta;\, x_0+\delta),$$

причем $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ *в указанной окрестности:*

3) *существует конечный или бесконечный предел* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *причем*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Это правило справедливо и тогда, когда x_0 не есть конечное число, т.е. $x_0=\pm\infty$.

Применяя алгебраические преобразования или логарифмирование, правило Лопиталя можно использовать и для раскрытия других неопределенностей, сводя их к неопределенностям $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$.

Если после применения правила Лопиталя неопределенность сохранилась, то при выполнении перечисленных выше условий его можно применить еще раз и поступать так до тех пор, пока неопределенность не исчезнет.

Будучи весьма сильным средством отыскания пределов, правило Лопиталя становится еще более эффективным, если оно сочетается с другими приемами раскрытия неопределенностей.

Безоглядное применение правила Лопиталя может привести к длительным и громоздким выкладкам, а иногда и просто в тупик.

Примеры решения задач

1. Неопределенность $\frac{0}{0}$

Пример 2.1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

Часть этого учебника, посвященного дифференциальному исчислению, в слегка измененном виде была опубликована Лопиталем под своим именем. Таким образом, «правилом Лопиталя» мы обязаны Иоганну Бернулли.

▲ $$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\left\{\frac{0}{0};\ \begin{matrix}\text{По правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=$$

$$=\left\{\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0};\ \begin{matrix}\text{По правилу}\\ \text{Лопиталя вторично}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$ ▼

Следует предостеречь читателя от распространенной ошибки:
надо дифференцировать не дробь, а отдельно ее числитель и знаменатель.

Пример 2.2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$.

▲ $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^2-1+\ln x\right)'}{\left(e^x-e\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\frac{3}{e}.$$ ▼

Пример 2.3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^x-5x}{4x^2+7x}$.

▲ $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^x-5x}{4x^2+7x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sin x\cdot e^x-5x\right)'}{\left(4x^2+7x\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot e^x+\sin x\cdot e^x-5}{8x+7}=-\frac{4}{7}.$$ ▼

Пример 2.4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$.

▲ $$\lim_{x\to 1}\frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x+\ln x)'}{\left(1-\sqrt{2x-x^2}\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{-1+\frac{1}{x}}{-\frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}=$$

$$= -\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)\sqrt{2x-x^2}}{(1-x)x} = -\lim_{x\to 1}\sqrt{2x-x^2} = -1. \blacktriangledown$$

2. Неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$

Пример 2.5. Вычислить $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$.

$$\blacktriangle \quad \lim_{x\to +0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{-\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to +0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to +0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to +0} x = 0. \blacktriangledown$$

Пример 2.6. Вычислить $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^2}$.

$$\blacktriangle \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to +\infty}\frac{(e^x)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty. \blacktriangledown$$

Пример 2.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x}$.

$$\blacktriangle \quad \lim_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{x+e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}} + xe^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{1+e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\left(1+\frac{1}{2}x\right)}{1+e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{x}{2}}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)+e^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}}{e^x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\left(2+\frac{1}{2}x\right)}{e^x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{2}x}{e^{\frac{x}{2}}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}} = 0. \blacktriangledown$$

3. Неопределенность $\infty - \infty$

Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$,

то для определения предела $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)$ *надо преобразовать эту разность* $f(x)-g(x)$ *к такому виду:*

$$f(x)-g(x)=\frac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}},$$

тогда $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{f(x)}}{\dfrac{1}{f(x)\cdot g(x)}}.$

Заключаем, что теперь мы должны исследовать «неопределенность вида $\frac{0}{0}$», которую мы умеем раскрывать с помощью правила Лопиталя.

Пример 2.8. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$.

▲ $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\left\{\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0}=\infty-\infty\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+\dfrac{x-1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{x-1}{x}}{\dfrac{x\ln x+x-1}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x+x\dfrac{1}{x}+1}=\left\{\frac{1}{0+1+1}\right\}=\frac{1}{2}.\ ▼$$

Пример 2.9. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

▲ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)=\left\{\dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0}=\infty-\infty\right\}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{\sin x+x\cos x}=$

$$=\left\{\frac{1-1}{0+0}=\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\left\{\frac{-0}{1+1-0}\right\}=0.\ ▼$$

4. Неопределенность $0 \cdot \infty$

Неопределенности этого вида могут быть сведены к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$. *Действительно, пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$. *Записав*

$$f(x)\cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}, \text{ или } f(x)\cdot g(x) = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

мы получим, что

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \left\{\frac{0}{\infty}\right\} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}.$$

Пример 2.10. Вычислить $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$.

▲ $$\lim_{x\to+0} x\ln x = \{0\cdot(-\infty)\} = \lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{-\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+0}(-x) = 0.$$ ▼

Пример 2.11. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$.

▲ $$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \{\infty\cdot e^{-\infty} = \infty\cdot 0\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = 0.$$ ▼

Пример 2.12. Вычислить $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right)$.

▲ $$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \left\{\infty\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \infty\cdot 0\right)\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{1+x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x} = 1.$$ ▼

5. Неопределенности видов 1^∞, ∞^0, 0^0

Неопределенности этих видов сводятся к неопределенности вида $0\cdot\infty$, *которая была рассмотрена в предыдущем разделе. Это достигается с помощью тождества*

$$\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)},$$

в предположении, что $f(x)>0$ *(это предположение необходимо сделать, так как в показателе степени в правой части равенства* $f(x)$ *стоит под знаком логарифма). Теперь можно написать, что*

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)} = \lim_{x\to a} e^{g(x)\cdot\ln f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)}$$

и дело сводится к определению предела $\lim\limits_{x\to a} g(x)\cdot\ln f(x)$.

Пример 2.12. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

▲ $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \left\{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty;\ 1^\infty\right\} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln\frac{\sin x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x}}.$$

Найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - x\sin x-\cos x}{\sin x + x\cos x} = -\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x\cos x}{\cos x+\cos x - x\sin x} = \left\{\frac{-0}{2-0}\right\} = 0.$$

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$ ▼

Пример 2.13. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

$$\blacktriangle \quad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \{\infty^0\} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1. \ \blacktriangledown$$

Пример 2.14. Вычислить $\lim\limits_{x\to 3+0}(x^2-4x+3)^{\frac{1}{\ln(x-3)}}$.

$$\blacktriangle \quad \lim_{x\to 3+0}(x^2-4x+3)^{\frac{1}{\ln(x-3)}} = \{0^0\} = \lim_{x\to 3+0} e^{\frac{1}{\ln(x-3)}\cdot\ln(x^2-4x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 3+0} e^{\frac{\ln(x^2-4x+3}{\ln(x-3)}} = e^{\lim\limits_{x\to 3+0}\frac{\ln(x^2-4x+3}{\ln(x-3)}}.$$

Отыскание этого предела сводится к отысканию предела

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{\ln(x^2-4x+3}{\ln(x-3)} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to 3+0}\frac{\frac{2x-4}{x^2-4x+3}}{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x\to 3+0}\frac{(2x-4)(x-3)}{x^2-4x+3} =$$

$$= 2\lim_{x\to 3+0}\frac{(x-2)(x-3)}{(x-1)(x-3)} = 2\lim_{x\to 3+0}\frac{x-2}{x-1} = 1.$$

Следовательно, исходный предел равен

$$\lim_{x\to 3+0}(x^2-4x+3)^{\frac{1}{\ln(x-3)}} = e^1 = e. \ \blacktriangledown$$

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Вычислить пределы:

№	Предел	*Ответ*
1	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^3-12x+16}$	$\frac{1}{3}$
2	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$	–3
3	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln(1+x)}$	$+\infty$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$	$\frac{1}{2}$

5	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}3x}$	$\dfrac{3}{5}$
6	$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	-1
7	$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln\sin x}{\ln\sin 5x}$	1
8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\arcsin 5x}$	$\dfrac{2}{5}$
9	$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x\cdot\operatorname{tg}5x$	$-\frac{3}{5}$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}(x/3)-\dfrac{1}{\sin(x\ 3)}\right)$	0
11	$\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{\sqrt{x}}$	$+\infty$
12	$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}x\cdot\ln(1+e^x)$	2
13	$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5}{x^5-1}-\dfrac{7}{x^7-1}\right)$	1
14	$\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sin(2x-1)\cdot\operatorname{tg}\pi x$	$-\frac{2}{\pi}$
15	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$	0
16	$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{4}{\sin^2 2x}\right)$	-1
17	$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}$	e
18	$\lim\limits_{x\to 1+0}(x-1)^{\frac{a}{\ln 2\cdot(x-1)}}$	e^a
19	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\cos\dfrac{m}{x}\right)^x$	1
20	$\lim\limits_{x\to+0}(\operatorname{ctg}2x)^{\frac{1}{\ln x}}$	e^{-1}
21	$\lim\limits_{x\to 0}(\cos kx)^{\frac{1}{x^2}}$	$e^{-\frac{k^2}{2}}$
22	$\lim\limits_{x\to 1}(2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$	$e^{\frac{2}{\pi}}$

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте правило Лопиталя раскрытия неопределенности типа:

а) $\frac{0}{0}$ при $x \to a$; б) $\frac{0}{0}$ при $x \to +\infty$; в) $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to a$; г) $\frac{\infty}{\infty}$ при $x \to +\infty$.

2. Пусть выполнены условия теоремы Лопиталя и пусть не существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Следует ли отсюда, что не существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$?

Рассмотрите примеры: а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 \sin(1\ x)}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \sin x}{2x + \sin x}$.

3. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА[5]

Основные теоретические сведения

Формула Тейлора для многочлена степени *n*

$$P_n(x) = P_n(a) + \frac{P_n'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Это и есть ***формула Тейлора*** по степеням $x - a$ для многочлена $P_n(x)$ степени n.

Отсюда в частном случае, если $a = 0$, получим ***формулу Маклорена***[6]

$$P_n(x) = P_n(0) + \frac{P_n'(0)}{1!}x + \frac{P_n''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Формула Тейлора для произвольной функции $f(x)$

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в окрестности $\Omega(a)$ точки a и имеющую n конечных производных в точке a.

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x).$$

Это ***формула Тейлора для функции*** $f(x)$ в окрестности точки $x = a$, а $R_n(x)$ называется ***остаточным членом*** рассматриваемой формулы Тейлора.

---

[5] Б. Тейлор (1685-1731) – английский математик, чл. Лондонского королевского о-ва и его ученый секретарь.

[6] К. Маклорен (1698-1746) – шотландский математик, чл. Лондонского королевского общества, ученик и последователь Ньютона.

Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ 0<\theta<1.$$

Остаточный член формулы Тейлора в форме Пеано[7]

$$R_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x-a)^n+\frac{\alpha(x)}{n!}(x-a)^n,\ \lim_{x\to a}\alpha(x)=0.$$

Формула Маклорена

Если $a=0$, то получаем формулу Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Важнейшими разложениями по формуле Маклорена являются:

I. $e^x=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_{n+1}(x)$.

II. $\sin x=\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2n+1}(x)$.

III. $\cos x=\sum(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2n+2}(x)$.

IV. $\ln(1+x)=\sum(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+R_{n+1}(x)$.

V. $(1+x)^\alpha=1+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k+R_{n+1}(x)$.

Формула Тейлора в дифференциалах

$$f(x+\Delta x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^{(k)}f(x)}{k!}+o(\Delta x^n),$$

[7] Дж. Пеано (1858-1932) – итальянский математик, профессор Туринского ун-та.

$$\Delta f(x) = df(x) + \frac{d^2 f(x)}{2!} + \cdots + \frac{d^{(n)} f(x)}{n!} + o(dx^n).$$

Как отмечалось, дифференциал (первого порядка) выделяет в окрестности точки x ту часть приращения функции $f(x)$, которая линейно зависит от приращения аргумента Δx.

Сумма $f(x) + f'(x)\Delta x = d^{(0)} f(x) + d^{(1)} f(x)$ выделяет в окрестности точки x ту часть функции $f(x)$, которая линейно зависит от Δx (геометрически: график $f(x)$ в окрестности точки x заменяется касательной к этому графику).

Таким образом, многочлен Тейлора представляет, так сказать, главную часть функции $f(x)$ в окрестности точки x. Это обстоятельство и лежит в основе приложений формулы Тейлора.

Примеры решения задач

Пример 3.1. Многочлен $P_2(x) = x^2 - 3x + 2$ разложить:

а) по степеням x; б) по степеням $x - 1$.

▲ а) Имеем

$$\begin{aligned} P_2(x) &= x^2 - 3x + 2; & P_2(0) &= 2, \\ P_2'(x) &= 2x - 3; & P_2'(0) &= -3, \\ P_2''(x) &= 2; & P_2''(0) &= 2. \end{aligned}$$

По формуле Маклорена

$$P_2(x) = 2 - \tfrac{3}{1!}x + \tfrac{2}{2!}x^2 = 2 - 3x + x^2,$$

т.е. получили исходный многочлен.

б) Имеем

$$\begin{aligned} P_2(x) &= x^2 - 3x + 2; & P_2(1) &= 0, \\ P_2'(x) &= 2x - 3; & P_2'(1) &= -1, \\ P_2''(x) &= 2; & P_2''(1) &= 2. \end{aligned}$$

По формуле Тейлора

$$P_2(x) = 0 - 1 \cdot (x - 1) + \tfrac{2}{2!}(x - 1)^2 = -(x - 1) + (x - 1)^2. \ ▼$$

Пример 3.2. Разложить функцию $\operatorname{tg} x$ по формуле Маклорена до члена с x^3 включительно.

▲ Найдем производные функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ до третьего порядка включительно:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^{-2} x;$$

$$f''(x) = 2\cos^{-3} x \sin x;$$

$$f'''(x) = 6\cos^{-4} x \sin^2 x + 2\cos^{-2} x.$$

Отсюда получаем

$$f(0) = \operatorname{tg} x\big|_{x=0} = 0,\ f'(0) = \cos^{-2} x\big|_{x=0} = 1,\ f''(0) = 2\cos^{-3} x \sin x\big|_{x=0} = 0,$$
$$f'''(0) = 6\cos^{-4} x \sin^2 x + 2\cos^{-2} x\big|_{x=0} = 2.$$

По формуле Маклорена с остаточным членом в форме Пеано имеем

$$\operatorname{tg} x = x + \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Заметим, что вычисление $f^{(4)}(x)$ дает $f^{(4)}(0) = 0$. Поэтому остаточный член можно записать в виде $o(x^4)$. ▼

Пример 3.3. Разложить функцию $f(x) = \ln\cos x$ по формуле Маклорена до члена с x^4 включительно.

▲ Здесь нет надобности, вычислять производные $f(x)$ до четвертого порядка, а можно воспользоваться основынми разложениями III и IV. Пользуясь разложением III, получим

$$\ln(\cos x) = \ln\left(1 - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right) = \ln(1+t),$$

где $t = -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4)$.

Теперь воспользуемся основным разложением IV:

$$\ln\cos x = \ln(1+t) = t - \tfrac{1}{2}t^2 + o(t^2) =$$

$$= -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4) - \tfrac{1}{2}\left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2 + o\left(\left(-\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 + o(x^4)\right)^2\right) =$$

$$= -\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{24}x^4 - \tfrac{1}{8}x^4 + o(x^4) = -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{12}x^4 + o(x^4).\ ▼$$

Пример 3.4. Оценить абсолютную погрешность приближенной формулы

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = P_n(x) \text{ при } 0 \le x \le 1.$$

▲ Для получения оценки абсолютной погрешности нужно оцунить остаточный член

$$R_{n+1}(x) = e^x - P_n(x).$$

Остаточный член $R_{n+1}(x)$ в форме Лагранжа для функции e^x имеет вид

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \ (0 < \theta < 1).$$

Отсюда получаем

$$|R_{n+1}(x)| \le \frac{e}{(n+1)!} \text{ при } 0 \le x \le 1.$$

Это и есть искомая оценка абсолютной погрешности последней формулы при $0 \le x \le 1$. ▼

Применение формул Тейлора и Маклорена для приближенных вычислений значений функции

Пример 3.5. Вычислить с точностью до 10^{-4} приближенное значение:

а) $\cos 5^\circ$; б) $\sin 49^\circ$; в) $\sqrt[4]{83}$.

▲ а) Воспользуемся приближенной формулой для функции $\cos x$ (смотри III):

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Подставляя в эту формулу радианную меру угла 5°, получим

$$\cos 5^\circ = \cos\frac{\pi}{36} \approx 1 - \frac{\pi^2}{2! \cdot 36^2} + \frac{\pi^4}{4! \cdot 36^4} - \ldots + \frac{\pi^{2k}}{(2k)! \cdot 36^{2k}}.$$

Чтобы определить, сколько взять первых членов этой формулы для получения заданной точности вычисления, оценим величины последовательных остаточных членов R_{2n+1}:

$$|R_1| \le \frac{x^2}{2!} = \frac{\pi^2}{2! \cdot 36^2} < 0.004,$$

$$|R_3| \le \frac{x^4}{4!} = \frac{\pi^4}{4! \cdot 36^4} < 0.000003,$$

$$|R_5| \le \frac{x^6}{6!} = \frac{\pi^6}{6! \cdot 36^6} < 0.00000003.$$

Величина $|R_5| < 10^{-6}$. Поэтому для получения заданной точности вычисления достаточно взять три первых члена формулы, предшествующих R_5:

$$\cos 5^\circ \approx 1 - \frac{\pi^2}{2! \cdot 36^2} + \frac{\pi^4}{4! \cdot 36^4} \approx 1 - 0.0038077 + 0.0000024 \approx 0.96195.$$

Здесь для обеспечения заданной точности значения числа π и всех результатов промежуточных действий взяты с одним лишним знаком, т.е. с точностью до 10^{-7} $(\pi \approx 3.1415917)$.

б) Чтобы вычислить $\sin 49^\circ$, напишем формулу Тейлора для функции $\sin x$:

$$\sin x = \sin a + \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right)\frac{x-a}{1!} + \sin\left(a + 2\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots +$$

$$+ \sin\left(a + n\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^n}{n!} + R_n,$$

$$R_n = \sin\left(a + \theta(x-a) + (n+1)\frac{\pi}{2}\right)\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < \theta < 1,$$

$$|R_n| \le \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ так как } |\sin\alpha| \le 1.$$

По этой формуле можно вычислять значения $\sin x$ при любых значения x и a и с любой желаемой точностью, так как по мере увеличения числа членов в ней погрешность R_n неограниченно убывает, стремясь к нулю. Чем меньше будет величина разности $|x-a|$, тем меньше потребуется брать первых членов этой формулы для достижения какой-либо заданной точности вычисления.

Полагая $x = \frac{\pi}{180} \cdot 49$ и $a = \frac{\pi}{180} \cdot 45$, получим $x - a = \frac{\pi}{180}(49 - 45) = \frac{\pi}{45}$,

$$\sin 49^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{1! \cdot 45} - \frac{\pi^2}{2! \cdot 45^2} - \frac{\pi^3}{3! \cdot 45^3} + \ldots \pm \frac{\pi^n}{n! \cdot 45^n}\right) + R_n,$$

$$|R_n| \le \frac{\pi^{n+1}}{(n+1)! \cdot 45^{n+1}}.$$

Для определения числа первых членов этой формулы, обеспечивающих заданную точность вычисления, оцениваем величины последовательных остаточных членов R_n:

$$|R_1| \le \frac{\pi^2}{2! \cdot 45^2} < 0.003,$$

$$|R_2| \le \frac{\pi^3}{3! \cdot 45^3} < 0.00006,$$

$$|R_3| \le \frac{\pi^4}{4! \cdot 45^4} < 0.0000009 < 10^{-6}.$$

Следовательно, заданная точность вычисления будет достигнута, если взять четыре первых члена формулы, предшествующих R_3:

$$\sin 49^\circ \approx \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{45} - \frac{\pi^2}{2 \cdot 45^2} - \frac{\pi^3}{6 \cdot 45^3}\right) \approx$$

$$\approx 0.7071068(1 + 0.0698131 - 0.0024369 - 0.0000567) \approx 0.754709.$$

(Значения $\pi, \sqrt{2}$ и всех результатов промежуточных действий взяты с одним лишним знаком, т.е. с семью десятичными знаками).

Иначе можно было вычислять $\sin 49^\circ$ по формуле Маклорена для функции $\sin x$, однако при этом для достижения заданной точности пришлось бы взять очень много членов этой формулы.

в) Преобразуем заданный корень

$$\sqrt[4]{83} = \sqrt[4]{81 + 2} = 3 \cdot \left(1 + \tfrac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}}$$

и применим формулу бинома V.

Полагая $x = \frac{2}{81}$ и $\alpha = \frac{1}{4}$, получим

$$\sqrt[4]{83} = 3\left(1 + \tfrac{1}{162} - \tfrac{1}{162 \cdot 108} + \tfrac{7}{162 \cdot 108 \cdot 486} - \tfrac{7}{162 \cdot 108 \cdot 486 \cdot 54} + \ldots + R_n\right).$$

Оценивая величины последовательных ошибок вычисления $3|R_n|$, находим:

$$3|R_1| < \tfrac{3}{162 \cdot 108} < 0.0002,$$
$$3|R_2| < \tfrac{3 \cdot 7}{162 \cdot 108 \cdot 486} < 0.000003,$$
$$3|R_3| < \tfrac{3 \cdot 7}{162 \cdot 108 \cdot 486 \cdot 54} < 0.00000006.$$

Следовательно, для получения заданной точности вычисления достаточно взять сумму четырех членов биномиальной формулы, которые предшествуют остатку R_3:

$$\sqrt[4]{83} \approx 3(1 + 0.0061728 - 0.0000572 + 0.0000008) \approx 3.018349. \;\blacktriangledown$$

Применение формулы Тейлора для раскрытия неопределенностей

Если вычисление предела по правилу Лопиталя или с помощью других методов затруднительно, то можно прибегнуть к разложению функций, стоящих под знаком предела, по формуле Тейлора. Формула Тейлора дает простое и весьма общее правило выделения главной части функции. В результате использования этого метода вычисление пределов функции с помощью выделения главной части приобретает алгоритмический характер. Часто бывает удобно для разложения функции по формуле Тейлора использовать разложения элементарных функций (смотри формулы I–V).

Пример 3.6. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}$.

▲ Неопределенность $\frac{0}{0}$. По виду знаменателя можно заключить, что определяющую роль играют члены 4-го порядка относительно $x\ (x \to 0)$. Поэтому воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Получим

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 + o(x^5).$$

Подставим это разложение в данный предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)\right)-1+\frac{1}{2}x^2}{x^4}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)}{x^4}=\lim_{x\to0}\left(\tfrac{1}{24}+o(x)\right)=\frac{1}{24}.\ \blacktriangledown$$

Пример 3.7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

▲ Неопределенность $\infty-\infty$. Выносся x^2 за скобку, получим

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

(неопределенность $\infty-\infty$ сменилась на неопределенность $\infty\cdot0$).

По формуле IV

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\ \text{при } x\to\infty.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\cdot\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}.\ \blacktriangledown$$

Пример 3.8. Используя основные разложения, найти

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x+2\sin x-3x}{x^4}.$$

▲ Имеем

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{tg}x+2\sin x-3x}{x^4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(x+\frac{1}{3}x^3+o(x^4)\right)+2\left(x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right)-3x}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{o(x^4)}{x^4}=0.\ \blacktriangledown$$

Вопросы для самопроверки

1. Что такое многочлен Тейлора для функции $f(x)$ с центром в точке a?

2. Напишите формулу Маклорена для функции $f(x)$ и остаточные члены этой формулы в формах Лагранжа и Пеано.
3. Напишите основные разложения и остаточные члены этих разложений в формах Лагранжа и Пеано.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Маклорена до члена указанного порядка включительно:

а) $f(x)=e^{-x}$ до члена с x^n; б) $f(x)=e^{2x-x^2}$ до члена с x^5;
в) $f(x)=\sin\sin x$ до члена с x^3; г) $f(x)=\cos\sin x$ до члена с x^4.

Ответ: а) $1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$;

б) $1+2x+x^2-\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{5}{6}x^4-\dfrac{1}{15}x^5+o(x^5)$;

в) $x-\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)$; г) $1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5}{24}x^4+o(x^4)$.

2. Написать разложение по формуле Тейлора с центром в точке $x=1$ функции: а) $f(x)=x^2$; б) $f(x)=\sqrt{x}$ до члена с $(x-1)^3$; в) $f(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ до члена с $(x-1)^4$.

Ответ: а) $1+2(x-1)+(x-1)^2$;

б) $1+(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{1}{16}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right)$;

в) $1-\frac{\pi^2}{8}(x-1)^2+\frac{\pi^4}{384}(x-1)^4+o\left((x-1)^4\right)$.

3. Оценить абсолютную погрешность формул: а) $\sin x\approx x-\frac{1}{6}x^3$ при $|x|\le\frac{1}{2}$;

б) $\operatorname{tg}x\approx x+\frac{1}{3}x^3$ при $|x|\le 0.1$; в) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$ при $0\le x\le 1$.

Ответ: а) Меньше $\frac{1}{3940}$; б) меньше $2\cdot 10^{-6}$; в) меньше $\frac{1}{16}$.

4. С помощью формулы Тейлора найти приближенные значения:

а) $\sqrt[3]{9}$ с точностью до 10^{-3}; б) $\sin 18^\circ$ с точностью до 10^{-4}; в) $\ln 1.1$ с точностью до 10^{-3}.

Ответ: а) 2.080; б) 0.3090; в) 0.095.

5. Используя основные разложения, найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x - 2\,\mathrm{tg}\,x}{\ln(1+x^3)}$; в) $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x+1}-\sqrt{e^x-1}\right)$.

Ответ: а) $-\frac{1}{12}$; б) -2; в) 1.

4. ВОЗРАСТАНИЕ И УБЫВАНИЕ ФУНКЦИЙ

Основные теоретические сведения

Определение 1. Функция $f(x)$ называется ***возрастающей в некотором интервале***, если для любых двух чисел x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) > f(x_1)$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется ***убывающей в некотором интервале***, если для любых двух чисел x_1 и x_2 из этого интервала из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) < f(x_1)$.

Промежутки, на которых функция возрастает (убывает), называются ***промежутками монотонности***.

Признаки возрастания и убывания функций

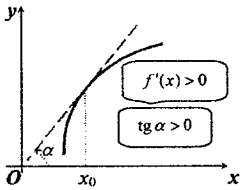
Следующая теорема выражает важный для практических целей признак возрастания и убывания функции и указывает правило для определения интервалов, в которых функция возрастает и убывает (иначе, интервалов монотонности функций).

При решении задач, в которых требуется определить интервалы возрастания и убывания функции, следует, прежде всего, определить область существования этой функции.

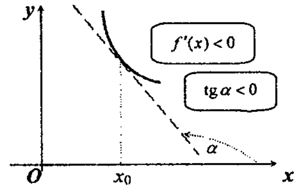
Теорема 1 (достаточный признак возрастания и убывания функции на интервале). *Если во всех точках некоторого интервала первая производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ в этом интервале возрастает. Если же во всех точках некоторого интервала первая производная $f'(x) < 0$, то функция в этом интервале убывает.*

Геометрический смысл условий монотонности

Известно: $f'(x) = \mathrm{tg}\,\alpha$ – геометрический смысл производной $\left(\alpha = Ox;\wedge \ell_{\text{кас}}\right)$.



Функция возрастает: $f'(x)>0$, так как касательная наклонена к оси Ox под острым углом ($\mathrm{tg}\,\alpha>0$).



Функция убывает: $f'(x)<0$, так как касательная наклонена к оси Ox под тупым углом ($\mathrm{tg}\,\alpha<0$).

Практическое правило для нахождения промежутков монотонности функции

Для нахождения промежутков монотонности функции достаточно

1) разбить область существования функции $f(x)$ на интервалы точками, в которых ее первая производная $f'(x)$ равна нулю или не существует,

2) определить ее знак в каждом из этих интервалов. Для чего достаточно вычислить значение производной в какой-либо одной точке каждого интервала, ибо внутри каждого интервала производная $f'(x)$ сохраняет постоянный знак (или решить неравенства $f'(x)>0$ и $f'(x)<0$).

Примеры решения задач

Пример 4.1. Определить промежутки монотонности функции

$$f(x)=2x^3+3x^2-12x+1.$$

▲ Функция определена на всей числовой оси $(-\infty;+\infty)$.

Найдем ее первую производную: $f'(x)=6x^2+6x-12$.

Она определена на всей числовой оси и равна нулю в точках $x_1=-2$ и $x_2=1$ (решается уравнение $6x^2+6x-12=0 \Rightarrow x^2+x-2=0$).

Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty;-2)$, $(-2;1)$, $(1;+\infty)$.

Определим знак производной в каждом из интервалов, для чего достаточно вычислить знак $f'(x)$ в какой-либо одной точке каждого интервала. Для первого интервала удобно взять $x=-3$, $f'(-3)=24>0$, следовательно, в интервале $(-\infty;-2)$ функция возрастает. Для второго интервала удобно взять $x=0$, $f'(0)=-12<0$, следовательно, в интервале $(-2;1)$ функция убывает. Для третьего интервала $x=2$, $f'(2)=24>0$, следовательно, в интервале $(1; +\infty)$ функция возрастает. Результаты исследования приведены в таблице.

Интервал изменения x	$(-\infty; -2)$	$(-2; 1)$	$(1; +\infty)$
Знак $f'(x)$	+	–	+
Поведение функции $f(x)$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

▼

Замечание. Условимся в дальнейшем возрастание, убывание функции на интервале обозначать так: $\uparrow, \downarrow$.

Пример 4.2. Определить промежутки монотонности функции

$$f(x) = 2 + 3\sqrt[3]{x^2}.$$

▲ Функция определена на всей числовой оси $(-\infty; +\infty)$.

Найдем ее первую производную: $f'(x) = 2 + \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} = 2\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x}}$.

Производная не существует при $x = 0$ и равна нулю при $x = -1$. Этими точками разобьем область существования функции на интервалы $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$.

Для определения знака производной в каждом интервале удобно взять точки $x = -8$, $x = -\frac{1}{8}$ и $x = 8$. Тогда $f'(-8) = 1 > 0$, следовательно, на интервале $(-\infty; -1)$ функция возрастает; $f'\left(-\frac{1}{8}\right) = -2 < 0$, значит, на интервале $(-1; 0)$ функция убывает; $f'(8) = 3 > 0$, значит, на интервале $(0; +\infty)$ функция возрастает.

Интервал изменения x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; +\infty)$
Знак $f'(x)$	+	–	+
Поведение функции $f(x)$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

▼

Пример 4.3. Определить промежутки монотонности функции

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}.$$

▲ Функция не определена при $x = 0$, т. е. область определения функции $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Найдем ее первую производную: $f'(x)=\dfrac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

Производная не существует при $x=0$ и равна нулю при $x=-1$ и $x=1$.

Этими точками разобьем область существования функции на интервалы $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$. Для определения знака производной в каждом интервале удобно взять точки $x=-2, x=-\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{2}$ и $x=2$. Тогда $f'(-2)=\frac{3}{4}>0$, $f'(2)=\frac{3}{4}>0$, следовательно, на интервалах $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ функция возрастает; $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=-3<0$, $f'\left(\frac{1}{2}\right)=-3<0$, следовательно, на интервалах $(-1;0)$ и $(0;1)$ функция убывает.

Интервал изменения x	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
Знак $f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
Поведение функции $f(x)$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$

▼

Пример 4.4. Определить промежутки монотонности функции

$$y=\begin{cases}1 & \text{при } x\le 0,\\ x^3+2 & \text{при } x>0.\end{cases}$$

▲ Функция имеет разрыв в точке $x=0$, ибо

$$\lim_{x\to 0-0} y=\lim_{x\to 0-0} 1=1,\quad \lim_{x\to 0+0} y=\lim_{x\to 0+0}(x^2+2)=2.$$

Слева и справа от точки $x=0$ функция задана элементарными функциями, и ее производная

$$y'=\begin{cases}0 & \text{при } x<0,\\ 3x^2 & \text{при } x>0\end{cases}$$

не существует при $x=0$.

Если $x\in(-\infty;0)$ $y'=0$, следовательно, функция постоянна.

Если $x\in(0;+\infty)$ $y'>0$, следовательно, функция возрастает.

График функции изображен на рис. 4.1 ▼

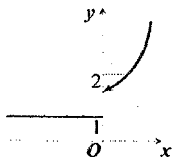


Рис. 4.1

Пример 4.5. Доказать, что при $0 < x \le 1$ справедливо неравенство $\operatorname{arctg} x < x - \frac{1}{6}x^3$.

▲ Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg} x - x + \frac{1}{6}x^3$. Ее производная

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2(x^2-1)}{2(x^2+1)}.$$

Функция непрерывна на отрезке $[0; 1]$ и ее производная $y'(x) < 0$, если $x \in (0; 1)$, следовательно, на отрезке $[0; 1]$ функция убывает. Тогда $y(x) < y(0) = 0$, или

$$\operatorname{arctg} x - x + \tfrac{1}{6}x^3 < 0 \text{ для любого } x \in (0; 1].$$

Значит, $\operatorname{arctg} x < x - \frac{1}{6}x^3$ при $x \in (0; 1]$.

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Найти промежутки возрастания и убывания функции:

а) $y = 3 + 2x - x^2$. ***Ответ***: на $(-\infty; 1)$ возрастает, на $(1; +\infty)$ убывает.

б) $y = x^3 - 3x + 5$.

Ответ: на $(-\infty; -1)$ и $(1; \infty)$ возрастает, на $(-1; 1)$ убывает.

в) $y = 2x^2 - \ln x$. ***Ответ***: на $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ убывает, на $\left(\frac{1}{2}; \infty\right)$ возрастает.

г) $y = (x-3)\sqrt{x}$. ***Ответ***: на $(0; 1)$ убывает, на $(1; \infty)$ возрастает.

д) $y = \frac{1}{3}x - \sqrt[3]{x}$. ***Ответ***: на $(-\infty; -1)$ и $(1; \infty)$ возрастает, на $(-1; 1)$ убывает.

е) $y = \frac{e^x}{x}$. ***Ответ***: на $(-\infty; 0)$ и $(0; 1)$ убывает, на $(1; \infty)$ возрастает.

ж) $y = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Ответ: монотонно возрастает на всей числовой оси.

з) $y=\begin{cases} x^3, \ x \geq 0, \\ x^2, \ x < 0. \end{cases}$ *Ответ*: на $(-\infty; 0)$ убывает, на $(0; \infty)$ возрастает.

2. Доказать неравенство $2\sqrt{x} > 3 - \dfrac{1}{x}$, если $x > 1$.

5. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0, включая и саму точку x_0.

Определение 3. Точка x_0 называется ***точкой локального максимума***, а значение функции в ней – ***локальным максимумом*** функции $y = f(x)$, если существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, верно неравенство

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) < 0 \text{ или } f(x) < f(x_0).$$

Определение 4. Точка x_0 называется ***точкой локального минимума***, а значение функции в ней – ***локальным минимумом*** функции $y = f(x)$, если существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, верно неравенство

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) > 0 \text{ или } f(x) > f(x_0).$$

Точки локального максимума и минимума называются ***точками локального экстремума***, а значения в них – ***локальными экстремумами функции***.

Необходимое условие существования точек экстремума

Теорема 2.1. *Для того чтобы точка x_0 была точкой экстремума функции $y = f(x)$, определенной в окрестности этой точки, необходимо выполнение одного из двух условий: либо $f'(x_0) = 0$; либо производная $f'(x)$ не существует в точке x_0 (в частности, где $f'(x)$ – бесконечно большая функция).*

Такие точки называются ***критическими***, и они ***являются точками, подозрительными на экстремум***.

Достаточные условия экстремума

I. **Теорема 2.2.** *Пусть функция $y = f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, непрерывная в самой этой точке и дифференцируемая в некоторой δ – окрестности точки x_0. Тогда справедливы следующие заключения:*

1) если $\left(f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0)\right) \wedge \left(f'(x) < 0\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta)\right)$ (т. Е. при переходе x через критическую точку x_0 производная меняет знак с плюса на минус), то x_0 – точка локального максимума функции $f(x)$;

если $\left(f'(x) < 0\ \forall x \in (x_0 - \delta; x_0)\right) \wedge \left(f'(x) > 0\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta)\right)$ (т. Е. при переходе x через критическую точку x_0 производная меняет знак с минуса на плюс), то x_0 – точка локального минимума функции $f(x)$;

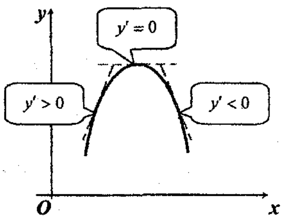
2) если $f'(x)$ во всей δ – окрестности точки x_0 имеет один и тот же знак, то в точке x_0 экстремума функции $f(x)$.

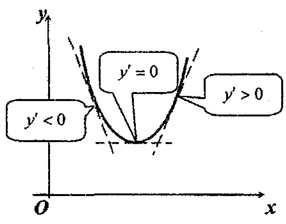
II. **Теорема 2.3.** *Пусть функция $y = f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, имеет производные до 2-го порядка включительно. Если $f'(x) = 0$ и $f''(x_0) \neq 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, а именно:*

1) минимум, если $f''(x_0) > 0$,

2) максимум, если $f''(x_0) < 0$.

Геометрический смысл необходимых и достаточных условий экстремумов





Проследите за изменением производной в зоне max и min:

I. Слева функция возрастает т. е. $y' > 0$.	I. Слева функция убывает, т. е. $y' < 0$.
В точке max $y' = 0$.	В точке min $y' = 0$.
Справа функция убывает, т. е. $y' < 0$.	Справа функция возрастает, т. е. $y' > 0$.
II. $y'' < 0$	II. $y'' > 0$

1. Правило для исследования функции на экстремум при помощи первой производной (первый способ)

Для исследования функции на экстремум по первой производной следует:

1. Найти область определения функции $X = (a; b)$.

2. Найти $f'(x)$ – первую производную функции.

3. Определить критические точки первого рода (кт I):

   а) решить уравнение $f'(x) = 0$,

   б) а также определить те значения x, при которых $f'(x) = \infty$ или не существует. Пусть этими точками будут точки с абсциссами $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые находятся в области определения функции.

4. Все критические точки расположить в порядке возрастания их абсцисс $a < x_1 < \ldots < x_n < b$.

5. Внутри каждого из интервалов $(a; x_1), (x_1; x_2), \ldots, (x_n; b)$ взять любую точку и установить в этой точке знак первой производной функции (производная сохраняет знак в каждом интервале между двумя соседними критическими точками).

6. Рассмотреть знаки $f'(x)$ в двух соседних интервалах, переходя последовательно слева направо от первого интервала к последнему интервалу. Если при таком переходе знаки $f'(x)$ в двух соседних интервалах различны, то экстремум в критической точке есть, (максимум будет, если знак меняется с $+$ на $-$, а минимум, если он меняется с $-$ на $+$). Если же в двух соседних интервалах имеет место сохранение знака первой производной, то экстремума в рассматриваемой точке нет.

7. Найти значения функции в точках, где она достигает экстремума (экстремальные значения функции).

2. Правило для исследования функции на экстремум по второй производной (второй способ)

Для того чтобы исследовать функцию на экстремум по второй производной, следует:

1. Найти область определения функции.

2. Найти $f'(x)$ – первую производную функции.

3. Определить критические точки первого рода.

4. Исследовать знак $f''(x)$ – второй производной функции – в каждой точке, найденной в пункте 3. Если окажется, что в рассматриваемой точке $f''(x) > 0$, то в этой точке будет минимум, а если $f''(x) < 0$, то в ней будет максимум. Если же окажется, что в рассматриваемой точке $f''(x) = 0$, то исследование надлежит провести по первому правилу.

Замечание. Отметим, что исследование знака первой производной слева и справа от критических точек совпадает с правилом, по которому находятся промежутки монотонности функции. Это связано с тем, что точки экстремума и разрыва функции разделяют участки ее возрастания и убывания.

3. Правило исследования функции на монотонность и экстремумы $\left(\text{по } f'(x)\right)$

1. Найти область определения функции.
2. Найти $f'(x)$.
3. Определить критические точки первого рода и пронумеровать их в порядке возрастания.
4. Построить таблицу I:

x	Интервалы монотонности и (ктI)
$f'(x)$	Знак $f'(x)$ и поведение в ктI
$f(x)$	Поведение функции на интервалах монотонности и ее значения в ктI

4. Достаточное условие экстремума функции, заданной параметрически

Пусть функция $y = f(x)$ *задана параметрически:*

$$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha; \beta],$$

и пусть в промежутке $[\alpha; \beta]$ *функции* $x(t)$ *и* $y(t)$ *имеют производные первого и второго порядка, причем* $x'(t) \neq 0$.

Пусть, далее, при $t = t_0 \in [\alpha; \beta]$ $y'(t) = 0$. *Тогда:*

1) если $y''(t_0) < 0$, *то функция* $y = f(x)$ *при* $x = x_0 = x(t_0)$ *имеет максимум;*

2) если $y''(t_0) > 0$, *то функция* $y = f(x)$ *при* $x = x_0 = x(t_0)$ *имеет минимум;*

3) если $y''(t_0) = 0$, *то вопрос о наличии экстремума остается открыт.*

Точки, в которых $x'(t) = 0$, *требуют специального исследования.*

Примеры решения задач

Пример 5.1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = (1 - x^2)^3$.

▲ **Проведем решение сначала по первому правилу**

1. Областью существования функции является весь бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$.

2. Находим, что $f'(x) = 3(1-x^2)^2 \cdot (-2x)$.

3. Решаем уравнение $f'(x) = 0$, т. е. уравнение

$$-6x(1-x^2)^2 = 0 \Rightarrow x(1-x)^2(1+x)^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \vee x_2 = 0 \vee x_3 = 1.$$

Производная конечна при любом x (в этом случае говорят, что производная конечна всюду). Поэтому критическими точками будут только найденные выше.

4. Располагаем критические точки в порядке возрастания абсцисс: -1; 0; 1.

5. Рассмотрим интервалы $(-\infty; -1)$; $(-1; 0)$; $(0; 1)$; $(1; +\infty)$. Выберем внутри каждого из этих интервалов произвольную точку и определим в этой точке знак первой производной по выражению $f'(x) = -6x(1-x^2)^2$.

В интервале $(-\infty; -1)$ возьмем, например, точку $x = -2$:

$$f'(-2) = -6(-2)\left(1-(-2)^2\right)^2 = 108 > 0,$$

в интервале $(-1; 0)$ возьмем точку $x = -0.5$: $f'(-0.5) = \frac{27}{16} > 0$,

в интервале $(0; 1)$ возьмем точку $x = 0.5$: $f'(0.5) = -\frac{27}{16} < 0$,

в интервале $(1; +\infty)$ возьмем точку $x = 2$: $f'(2) = -108 < 0$.

6. Таким образом, в интервалах первая производная имеет такую последовательность знаков:

$(-\infty; -1)$	$(-1; 0)$	$(0; 1)$	$(1; +\infty)$
$+$	$+$	$-$	$-$

и мы приходим к заключению, что в критической точке $x = 0$ имеет место максимум, а в критических точках $x = -1$ и $x = 1$ экстремумов нет.

7. Найдем теперь локальный максимум функции $f(0) = 1$.

Построим таблицу I.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\uparrow$	Нет экстремума	$\uparrow$	$f_{\max} = 1$	$\downarrow$	Нет экстремума	$\downarrow$

Проведем решение по второму правилу

Исследуем функцию на экстремум с помощью второй производной.

У нас критические точки уже определены: $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$. Найдем вторую производную функции. Дифференцируя первую производную, получаем

$$f''(x)=-6\left((1-x^2)^2+2x(1-x^2)(-2x)\right)=-6(1-x^2)(1-5x^2),$$

и согласно второму правилу определяем знак второй производной в каждой критической точке:

$f''(-1)=0$; используем результат по первому правилу,

$f''(0)=-6<0$; при $x=0$ функция имеет максимум;

$f''(1)=0$; используем результат по первому правилу. ▼

Необходимо отметить, что исследование, проведенное по второму способу, было значительно проще.

Однако от исследования функции на экстремум по первому правилу (при помощи первой производной) отказываться не следует, так как может оказаться, что в критической точке вторая производная окажется равной нулю (как в разобранном примере), а в этом случае нельзя сделать никакого заключения о наличие экстремума.

Пример 5.2. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

$$y=\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+2}.$$

▲ 1. Так как знаменатель $x+2$ не должен обращаться в нуль, то

$$\mathrm{X}=(-\infty;-2)\cup(-2;+\infty).$$

2. Найдем производную: $f'(x)=\dfrac{\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x+2)-x^{\frac{2}{3}}}{(x+2)^2}=\dfrac{4-x}{3\sqrt[3]{x}(x+2)^2}$.

3. Производная $f'(x)$ обращается в нуль в точке $x=4$ и не существует в точках $x=-2$, $x=0$.

Точка $x=-2$ не является критической, т. к. $(x=-2)\notin \mathrm{X}$.

Точки $x_1=0$ и $x_2=4$ – критические.

Располагаем критические точки в порядке возрастания абсцисс: 0; 4.

4. Построим таблицу I:

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;+\infty)$
$f'(x)$	$-$	$-\infty$	$-$	∞	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\downarrow$	$-\infty$	$\downarrow$	$f_{\min}=0$	$\uparrow$	$f_{\max}=\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$	$\downarrow$

▼

Пример 5.3. Найти экстремумы функции

$$x = t^3 + 3t + 1,\ y = t^3 - 3t + 1,\ t \in R.$$

▲ Производная $x'(t) = 3t^2 + 3$ не обращается в нуль.

Производная $y'(t) = 3t^2 - 3$ равна нулю при $t = -1$ и $t = 1$.

Вторая производная $y''(t) = 6t$.

Если $t = -1$, то $y''(-1) = -6 < 0$.

Значит, при $t = -1$, т.е. при $x = x(-1) = -3$, функция имеет максимум, равный $y(-1) = 3$.

Если $t = 1$, то $y''(1) = 6 > 0$.

Значит, при $t = 1$, т.е. при $x = x(1) = 5$, функция имеет минимум, равный $y(1) = -1$. ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

1. Используя первый способ найти экстремум функции:

а) $y = x^2(x-12)$. ***Ответ***: $y(0) = 0$, $y(12) = 0$ – минимумы, $y(6) = 1296$ – максимум.

б) $y = \dfrac{x^3}{x^2+3}$. ***Ответ***: экстремумов нет (функция возрастает на всей числовой оси).

в) $y = x\ln x$. ***Ответ***: $y\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$.

г) $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$. ***Ответ***: $y(0) = -2$ – максимум, $y(2) = 2$ – минимум.

2. Найти экстремум функции, используя второй способ:

а) $y = x^3 - 12x + 1$. ***Ответ***: $y(2) = 15$ – минимум, $y(-2) = 17$ – максимум.

б) $y = x^2e^{-x}$. ***Ответ***: $y(0) = 0$ – минимум, $y(2) = \frac{4}{e}$ – максимум.

в) $y = x^2(x-3)$. ***Ответ***: $y(0) = 0$ – максимум, $y(2) = -4$ – минимум.

3. Найти экстремум функции, заданной параметрическими функциями:

а) $x = t^2 - 2t,\ y = t^2 + 2t,\ t \in (-2; 0)$.

Ответ: при $t = 1$ (т.е. при $x = 3$) минимум $\left(y(-1) = -1\right)$.

б) $x = t^5 - 5t^3 - 20t + 7,\ y = 4t^3 - 3t^2 - 18t + 3,\ t \in (-2; 2)$.

Ответ: при $t = -1$ (т.е. при $x = 31$) максимум $\left(y(-1) = 14\right)$,
при $t = \frac{3}{2}$ (т.е. при $x = -\frac{1033}{32}$) минимум $\left(y(\frac{3}{2}) = -\frac{69}{4}\right)$.

4. Определить коэффициенты p и q квадратного уравнения трехчлена $y = x^2 = px + q$ так, чтобы он имел минимум $y = 3$ при $x = 1$.

Ответ: $p = -2,\ q = 4$. *Указание*: p и q определяются из системы

$$y'(1) = 0,\ y(1) = 3.$$

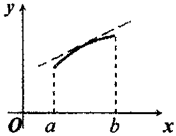
6. ИНТЕРВАЛЫ НАПРАВЛЕНИЯ ВЫПУКЛОСТИ ГРАФИКА ФУНКЦИИ, ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

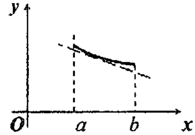
Пусть дана кривая уравнением $y = f(x)$ и пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$, т. е. в точке $M_0\left(x_0; f(x_0)\right)$ существует касательная к данной кривой, не параллельная оси Oy.

Определение. Если существует такая окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0, что все точки данной кривой, абсциссы которых содержатся в этой окрестности, расположены над касательной к кривой в точке M_0, то говорят, что данная кривая ***выпукла вниз*** в точке M_0.

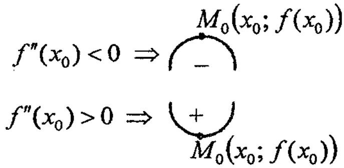
Если все точки кривой с абсциссами из некоторой окрестности точки x_0 находятся под касательной к этой кривой в точке M_0, то говорят, что данная кривая ***выпукла вверх*** в данной точке M_0.

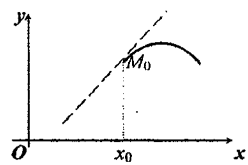
Замечание. Часто дуги кривой, обращенные выпуклостью вверх, называют ***выпуклыми***, а дуги кривой, обращенные выпуклостью вниз, – ***вогнутыми***.





Достаточным условием выпуклости функции вверх (вниз) на интервале $(a;b)$ является отрицательность (положительность) ее второй производной в каждой точке интервала, т. е.
если $f''(x)<0\ \forall x\in(a;b)$, то функция выпукла вверх на интервале $(a;b)$, а если $f''(x)>0\ \forall x\in(a;b)$, то она на нем выпукла вниз.





При построении графиков функций бывает полезно выделять точки перегиба графика.

Определение. Точка графика функции $M_0(x_0;f(x_0))$ называется ***точкой перегиба*** кривой $y=f(x)$, если существует окрестность

$$\Omega(x_0)=(x_0-\delta;\,x_0+\delta)$$

точки x_0 такая, что на множестве $\{x\in\Omega(x_0)\,|\,x<x_0\}$ выпуклость кривой направлена в одну сторону, а на множестве $\{x\in\Omega(x_0)\,|\,x>x_0\}$ – в противоположную сторону.

Теорема 3.1 (необходимое условие точек перегиба). *Для того чтобы точка x_0 была точкой перегиба функции $y=f(x)$, определенной и дифференцируемой в окрестности этой точки, необходимо выполнение одного из двух условий: 1) либо $f''(x_0)=0$, 2) либо $f''(x_0)$ не существует.*

Внутренние точки области определения функции, в которых вторая производная функции равна нулю или не существует, называются ***критическими точками второго рода*** (кт II).

Теорема 3.2 (достаточное условие точек перегиба). *Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, непрерыв-*

ную в точке x_0. Если $f''(x_0)=0$ и при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ есть точка перегиба кривой $y=f(x)$.

Замечание. Если $f''(x)\equiv 0$ всюду на интервале $(a;b)$, то $y=f(x)$ – линейная функция, и направление выпуклости прямой можно считать произвольным.

Практическое правило нахождения точек перегиба и участков направления выпуклости функции

1) Сначала находятся критические точки второго рода, т.е. точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует.

2) Затем область определения функции разбивается на интервалы критическими точками и точками разрыва функции и определяется знак второй производной $f''(x)$ в каждом из полученных интервалов (для чего достаточно определить знак $f''(x)$ в какой-либо одной точке каждого интервала). Если при переходе через эти точки вторая производная меняет знак, то эти точки являются точками перегиба функции, если смены знака второй производной не происходит, то точки не являются точками перегиба. При этом на тех интервалах, где $f''(x)>0$, функция выпукла вниз, где $f''(x)<0$, – выпукла вверх.

Порядок действий при этом рекомендуется следующий.

1. Найти область определения функции.
2. Найти $f'(x)$, $f''(x)$.
3. Определить критические точки второго рода и пронумеровать их в порядке возрастания.
4. Составить таблицу II.

x	Интервалы направления выпуклости и (кт II)
$f''(x)$	Знак $f''(x)$ на интервалах и поведение в кт II
$f(x)$	Поведение графика функции на интервалах выпуклости и значение функции в кт II

Примеры решения задач

Пример 6.1. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y=3x^5-5x^4+3x-2$.

▲ 1. Областью существования функции является весь бесконечный интервал $(-\infty; +\infty)$.

2. Найдем производные:

$$f'(x)=15x^4-20x^3+3;\ f''(x)=60x^3-60x^2=60x^2(x-1).$$

3. Вторая производная существует при всех x и равна нулю при $x_1=0 \vee x_2=1$. Критические точки II рода $x_1=0,\ x_2=1$. Разобьем область определения функции на интервалы $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$ и определим знак $f''(x)$ в каждом из них. Для этого достаточно определить знак $f''(x)$ в какой-либо одной точке интервала. Удобно взять точки

$$x=-1\notin(-\infty;0),\ x=0.5\in(0;1)\ \text{и}\ x=2\in(1;+\infty).$$

Тк $f''(-1)=60(-1)^2(-1-1)=-120<0$, то на интервале $(-\infty;0)$ функция выпукла вверх;

тк $f''(0.5)=60(0.5)^2\cdot(0.5-1)=-7.5<0$, то на интервале $(0;1)$ функция выпукла вверх;

тк $f''(2)=60\cdot2^2(2-1)=240>0$, то на интервале $(1;+\infty)$ функция выпукла вниз.

Вторая производная равна нулю при $x=0$ и $x=1$. При переходе через точку $x=0$ вторая производная не меняет знак, следовательно, в точке $x=0$ функция перегиба не имеет. При переходе через точку $x=1$ вторая производная меняет знак, следовательно, в точке $x=1$ функция имеет перегиб.

1. Составим таблицу II.

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	–	0	–	0	+
$f(x)$	$\cap$	Нет т.п.	$\cap$	$y_{т.п.}=-1$	$\cup$

▼

Замечание. Условимся в дальнейшем выпуклость вверх и выпуклость вниз графика в таблице обозначать так: $\cap$, $\cup$.

Пример 6.2. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y=\dfrac{x}{x^2-1}$.

▲ Область определения функции $(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

1. Найдем производные:

$$f'(x)=\frac{x^2-1-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2},$$

$$f''(x)=-\frac{2x(x^2-1)^2-(x^2+1)\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=$$

$$=-\frac{2x(x^2-1)(x^2-1-2x^2-2)}{(x^2-1)^4}=\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}.$$

2. Вторая производная не существует при $x=-1$ и $x=1$. Вторая производная равна нулю при $x(3+x^2)=0 \Rightarrow 3+x^2\neq 0,\ x=0$. Единственная критическая точка второго рода $x=0$, так как точки $x=-1$ и $x=1$ области определения не принадлежат. Разобьем область определения функции на интервалы $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$.

3. Составим таблицу II, знак второй производной $f''(x)$ на интервалах выпуклости и вогнутости определить по ее знаку в произвольной точке интервалов.

x	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	0	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	$y_{\text{т.п.}}=0$	$\cap$	$\cup$

▼

Пример 6.3. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y=\ln(1+x^2)$.

▲ 1. Область определения функции $(-\infty;+\infty)$.

2. Найдем производные:

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2},\quad f''(x)=2\frac{1+x^2-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=2\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

3. Вторая производная $f''(x)$ функции существует

$$\forall\, x\in(-\infty;+\infty).\ f''(x)=0\Rightarrow 1-x^2=0\Rightarrow x_1=-1 \text{ и } x_2=1.$$

Критические точки второго рода $x_1=-1$ и $x_2=1$. Разобьем область определения функции на интервалы $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$.

4. Составим таблицу II, знак второй производной $f''(x)$ на интервалах выпуклости и вогнутости определить по ее знаку в произвольной точке интервалов.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;+\infty)$	▼
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\cap$	$y_{\text{т.п.}}=\ln 2$	$\cup$	$y_{\text{т.п.}}=\ln 2$	$\cap$	

Пример 6.4. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y=\sqrt{1+x^2}$.

▲ 1. Область определения функции $(-\infty;+\infty)$.

2. Найдем производные:

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$f''(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}-x\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x}{1+x^2}=\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

3. Вторая производная $f''(x)$ функции существует $\forall\, x\in(-\infty;+\infty)$. Вторая производная $f''(x)\neq 0$. Критических точек второго рода нет, поэтому нет точек перегиба (не выполнен необходимый признак). Тк $f''(x)>0$, то график функции выпуклый вниз. ▼

Задачи и упражнения для самостоятельной работы

Найти интервалы выпуклости вверх, вниз и точки перегиба функций:

1. $y=e^{-x^2}$.

Ответ: на $\left(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ и $\left(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty\right)$ кривая выпукла вниз, на $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ кривая выпукла вверх, точки $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ – точки перегиба.

2. $y=(x+1)^4+e^x$.

Ответ: кривая выпукла вниз на всей числовой оси.

3. $y=\ln(x^2-1)$.

Ответ: кривая выпукла вверх на всей числовой оси.

4. $y=\dfrac{1}{(x-2)^3}$.

Ответ: на $(-\infty;2)$ кривая выпукла вверх, на $(2;+\infty)$ кривая выпукла вниз, $x=2$ – точка перегиба.

5. $y=\sqrt[3]{x+2}$.

Ответ: на $(-\infty;-2)$ кривая выпукла вниз, на $(-2;+\infty)$ кривая выпукла вверх, $x=-2$ – точка перегиба.

6. При каких значениях a и b точка $M(1;3)$ является точкой перегиба кривой $y=ax^3+bx^2$?

7. АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Может оказаться, что размеры графика данной функции $y=f(x), x\in X$, не ограничены. Это бывает, когда функция не ограничена или когда она задана на неограниченном промежутке. В таких случаях часто представление о графике функции вне рамок чертежа дают асимптоты графика.

Определение. Прямая линия ℓ называется ***асимптотой*** кривой $y=f(x)$, если расстояние d от точки M кривой $y=f(x)$ до прямой ℓ стремится к нулю при неограниченном удалении точки M по какой-либо части кривой $y=f(x)$ от начала координат.

Различают три вида асимптот: ***вертикальные*** (параллельные оси Oy), ***горизонтальные*** (параллельные оси Ox) и ***наклонные*** (не параллельные ни одной из координатных осей).

Прямая $x=x_0$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если выполнено, хотя бы одно из условий

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0-0} f(x)=\infty,\quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\infty \quad (\text{или } \pm\infty).$$

Для разыскания вертикальных асимптот кривой $y=f(x)$ поступаем следующим образом:

1) находим на оси Ox точки разрыва функции $f(x)$;

2) выделяем те из них, в которых хотя бы один из пределов функции $f(x)$ (слева или справа) равен $-\infty$ или $+\infty$.

Пусть это будут точки $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Тогда прямые $x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_k$ будут вертикальными асимптотами графика функции $y = f(x)$.

Наклонные асимптоты

Теорема 4. *Для того чтобы график функции* $y = f(x)$ *имел* при $x \to +\infty$ *наклонную асимптоту* $y = kx + b$, *необходимо и достаточно, чтобы существовали оба предела*

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b_+ = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - kx\right).$$

Аналогично для случая $x \to -\infty$.

Горизонтальная асимптота (*частный случай наклонной асимптоты* $(k = 0)$)

Если при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$) функция $f(x)$ имеет конечный предел, равный числу $b_\pm$:

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \left(b_- = \lim_{x\to-\infty} f(x)\right),$$

то прямая $y = b_\pm$ есть горизонтальная асимптота соответственно для правой или левой ветви графика функции $y = f(x)$.

Правило отыскания асимптот очевидно из следующего образца.

Примеры решения задач

Пример 7.1. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{1}{x^2 - 4x - 5}$.

▲ 1. Найдем область определения функции:

$$x^2 - 4x - 5 \neq 0 \Rightarrow (x-5)(x+1) \neq 0 \Rightarrow x \neq -1 \vee x \neq 5.$$

$$X = (-\infty; -1) \cup (-1; 5) \cup (5; +\infty).$$

Функция не определена в точках $x = -1$ и $x = 5$. Определим тип разрыва в этих точках, для чего вычислим пределы

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{1}{(x-5)(x+1)} = \left\{\frac{1}{(-1-0-5)(-1-0+1)} = \frac{1}{-6\cdot(-0)} = \frac{1}{0}\right\} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{1}{(x-5)(x+1)}=\left\{\frac{1}{(-1+0-5)(-1+0+1)}=\frac{1}{-6\cdot(+0)}=-\frac{1}{0}\right\}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 5-0}\frac{1}{(x-5)(x+1)}=\left\{\frac{1}{(5-0-5)(5-0+1)}=\frac{1}{-0\cdot 6}=-\frac{1}{0}\right\}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 5+0}\frac{1}{(x-5)(x+1)}=\left\{\frac{1}{(5+0-5)(5+0+1)}=\frac{1}{+0\cdot 6}=\frac{1}{0}\right\}=+\infty.$$

Следовательно, прямые $x=-1$ и $x=5$ вертикальные асимптоты.

Найдем левую наклонную асимптоту:

$$k_-=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(x^2-4x-5)\cdot x}=\left\{\frac{1}{-\infty}\right\}=0;$$

$$b_-=\lim_{x\to-\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2-4x-5}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-4x-5}=\left\{\frac{1}{\infty}\right\}=0.$$

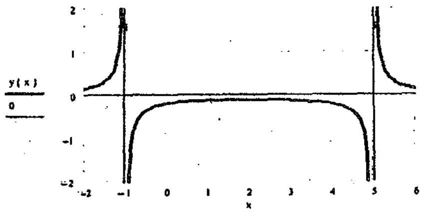
Следовательно, имеем слева горизонтальную асимптоту $x=0$.

Найдем правую наклонную асимптоту:

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x^2-4x-5)\cdot x}=\left\{\frac{1}{+\infty}\right\}=0;$$

$$b_+=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2-4x-5}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-4x-5}=\left\{\frac{1}{\infty}\right\}=0.$$

Значит, справа имеем горизонтальную асимптоту $x=0$. ▼



Пример 7.2. Найти асимптоты кривой $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$.

▲ 1. Найдем область определения функции: $X = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Функция не определена в точке $x = 0$. Определим тип разрыва в этой точке, для чего вычислим пределы

$$\lim_{x\to 0-0} xe^{\frac{1}{x^2}} = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to 0-0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} = \lim_{x\to 0-0}\frac{(e^{\frac{1}{x^2}})'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0-0}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0-0}\frac{2}{x}\cdot e^{\frac{1}{x^2}} = \left\{\frac{2}{0-0}\cdot e^{\frac{1}{(0-0)^2}} = -\infty\cdot\infty\right\} = -\infty.$$

Аналогично получаем $\lim\limits_{x\to 0+0} xe^{\frac{1}{x^2}} = +\infty$. Прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота.

2. Для нахождения левой наклонной асимптоты вычислим

$$k_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x^2}} = \left\{e^{\frac{1}{(-\infty)^2}} = e^0\right\} = 1,$$

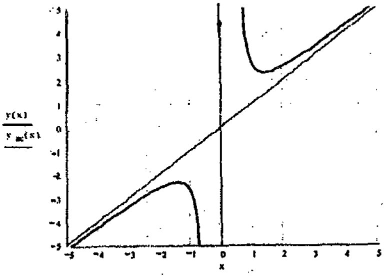
$$b_- = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to-\infty}\left(xe^{\frac{1}{x^2}} - 1\cdot x\right) = \{\infty - \infty\} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left\{\frac{0}{0}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(e^{\frac{1}{x^2}} - 1)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{2}{x^3}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}\cdot e^{\frac{1}{x^2}} = \left\{-0\cdot e^{\frac{1}{\infty}}\right\} = 0.$$

Следовательно, прямая $y = x$ – левая наклонная асимптота. Аналогично для правой наклонной асимптоты получаем

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x} 1, \quad b_+ = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{\frac{1}{x^2}} - 1\cdot x\right) = 0.$$

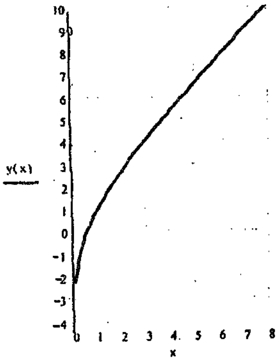
Следовательно, прямая $y = x$ – наклонная асимптота. ▼



Пример 7.3. Найти асимптоты кривой $y = x + \ln x$.

▲ 1. Найдем область определения функции: $X = (0; +\infty)$. Поэтому вертикальная асимптота может существовать лишь на конечной границе области определения. Найдем

$$\lim_{x \to 0+0} (x + \ln x) = \{0 + 0 + \ln 0\} = -\infty.$$



Значит, прямая $x = 0$ – вертикальная асимптота.

Найдем правую наклонную асимптоту (так как $x > 0$):

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x+\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right) = 1+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \left\{1+\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$$= 1+\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'} = 1+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = \left\{1+\frac{1}{\infty}\right\} = 1.$$

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_+x\right) = \lim_{x\to+\infty}(x+\ln x-1\cdot x) = \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty.$$

Следовательно, наклонной асимптоты нет. ▼

8. ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЯ ЕЁ ГРАФИКА

Одна из возможных схем исследования функции и построения ее графика разлагается на следующие этапы решения задачи.

Элементарное исследование

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки разрыва функции. Их характер. Вертикальные асимптоты.
3. Исследовать функцию на симметричность (определить четность и нечетность функции) и периодичность.
4. Определить, если это не вызовет особых затруднений, точки пересечения графика функции с осями координат. Найти интервалы знакопостоянства.
5. Вычислить предельные значения функции в ее граничных точках.
6. Выяснить существование наклонных асимптот.

Исследование функции по первой производной

7. Найти решение уравнений $f'(x)=0$ и $f'(x)=\infty$.
8. Критические точки, исследовать с помощью достаточного условия экстремума, определить вид экстремума. Вычислить значения функции в точках экстремума.
9. Найти интервалы монотонности функции.

Исследование функции по второй производной

10. Найти решение уравнений $f''(x)=0$ и $f''(x)=\infty$.
11. Критические точки исследовать с помощью достаточного условия. Вычислить значения функции в точках перегиба.
12. Найти интервалы выпуклости вниз и вверх графика функции.
13. Построить график функции.

Если исследование проведено без ошибок, то результаты всех этапов должны согласовываться друг с другом.

График функции лучше всего строить в таком порядке:

1. Построить все асимптоты, если они есть.
2. Нанести на график характерные точки: точки пересечения с осями координат, точки, в которых есть экстремум, точки перегиба.

Построение проводить в интервалах непрерывности с учетом проведенных исследований.

Примеры решения задач

Пример 8.1. Провести полное исследование функции $f(x)=\dfrac{-x^3}{(x+1)^2}$ и построить ее график.

▲ Исследование функции будем проводить, придерживаясь приведенной выше схемы.

I. Элементарное исследование

1. Область определения функции. $\boxed{X:\ (-\infty;-1)\cup(-1;\infty)}$.

Точка разрыва: $x=-1$.

2. Исследуем функцию на симметричность (определить четность и нечетность функции) и периодичность.

$$f(-x)=\frac{-(-x)^3}{(-x+1)^2}=\frac{x^3}{(-x+1)^2}\neq\begin{bmatrix}f(x),\\ -f(x).\end{bmatrix}\qquad \boxed{\text{Функция общего вида}}.$$

$$f(x+T)\neq f(x)\qquad \boxed{\text{Функция не периодична}}.$$

3. Выясним существование асимптот.

В точке $x=-1$ функция имеет разрыв II рода, ибо,

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=\left\{\frac{-(-1-0)^3}{(-1-0+1)^2}=\frac{1}{+0}\right\}=+\infty;$$

$$\lim_{x\to-1+0}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=\left\{\frac{-(-1+0)^3}{(-1+0+1)^2}=\frac{1}{+0}\right\}=+\infty,$$

в остальных точках она непрерывна. Прямая линия $\boxed{x=-1}$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты $y_{ac}=kx+b$.

Слева $(x\to-\infty)$.

$$k_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2\cdot x} = \left\{\frac{+\infty}{-\infty},\ \begin{matrix}\text{степень многочлена числителя равна}\\ \text{степени многочлена знаменателя}\end{matrix}\right\} = -1,$$

$$b_- = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x^3}{(x+1)^2}-(-1)x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^3+x^3+2x^2+x}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+x}{x^2+2x+1} =$$

$$= \left\{\frac{+\infty}{+\infty},\ \begin{matrix}\text{степень многочлена числителя равна}\\ \text{степени многочлена знаменателя}\end{matrix}\right\} = 2.$$

Уравнение наклонной асимптоты слева $\boxed{y_{ac} = -x+2}$.

Справа $(x\to+\infty)$.

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3}{(x+1)^2\cdot x} = \left\{\frac{-\infty}{+\infty},\ \begin{matrix}\text{степень многочлена числителя равна}\\ \text{степени многочлена знаменателя}\end{matrix}\right\} = -1,$$

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^3}{(x+1)^2}-(-1)x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+x^3+2x^2+x}{x^2+2x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+x}{x^2+2x+1} =$$

$$= \left\{\frac{+\infty}{+\infty},\ \begin{matrix}\text{степень многочлена числителя равна}\\ \text{степени многочлена знаменателя}\end{matrix}\right\} = 2.$$

Уравнение наклонной асимптоты справа $\boxed{y_{ac} = -x+2}$.

4. Определим точки пересечения графика функции с осями кординат.

Точки пересечения с осью Ox:

$$\begin{cases} y = \dfrac{-x^3}{(x+1)^2}, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x^3}{(x+1)^2} = 0, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \quad \boxed{O(0;0)}.$$

Точки пересечения с осью Oy:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \dfrac{-x^3}{(x+1)^3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \quad \boxed{O(0;0)}.$$

Найдем интервалы знакопостоянства функции

Промежутки знакопостоянства

x	$-\infty;-1$	-1	$-1;0$	0	$0;+\infty$
$f(x)$	$+$	$+\infty/+\infty$	$+$	0	$-$

II. Исследование графика функции по первой производной

Для нахождения участков монотонности и экстремальных точек найдем первую производную функции:

$$y' = -\left(\frac{3x^2(x+1)^2 - 2(x+1)x^3}{(x+1)^4}\right) = -\frac{x^2(x+1)(3x+3-2x)}{(x+1)^4} = -\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = 0 \Rightarrow x(x+3) = 0 \Rightarrow x = -3 \vee x = 0;$$

$$f'(x) = \infty \Rightarrow -\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3} = \infty \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow (x=-1) \notin \mathrm{X}.$$

$$\boxed{x=-3, x=0}\ \text{кт I.}$$

Область определения функции разобьем на интервалы $(-\infty;-3)$, $(-3;-1)$, $(-1;0)$, $(0;+\infty)$ и определим знак $f'(x)$ в каждом из них (для удобства вычислений в каждом интервале выбираем фиксированную точку). Результаты исследования знака производной на интервалах между критическими точками (с учетом X) с указанием поведения функции на этих интервалах занесем в таблицу:

x	$-\infty;-3$	-3	$-3;-1$	-1	$-1;0$	0	$0;+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\downarrow$	$f_{\min}=6.75$	$\uparrow$	$+\infty/+\infty$	$\downarrow$	0	$\downarrow$

Так как функция в точке $x=-3$ определена и непрерывна и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке минимум, причем $\boxed{f_{\min}(-3) = 6.75.}$

III. Исследование графика функции по второй производной

Для нахождения участков выпуклости вверх и вниз найдем вторую производную функции

$$f''(x) = -\left(\frac{2x(x+3)}{(x+1)^3} + \frac{x^2}{(x+1)^3} - \frac{3x^2(x+3)}{(x+1)^4}\right) =$$

$$= -x\frac{2(x+1)(x+3) + x(x+1) - 3x(x+3)}{(x+1)^4} =$$

$$= -\frac{2x^2 + 8x + 6 + x^2 + x - 3x^2 - 9x}{(x+1)^4} = -\frac{6x}{(x+1)^4}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \frac{-6x}{(x+1)^4} = 0 \Rightarrow x = 0;$$

$$f''(x) = \infty \Rightarrow \frac{-6x}{(x+1)^4} = \infty \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow (x = -1) \notin \mathrm{X}.$$

$\boxed{x=0}$ кт II.

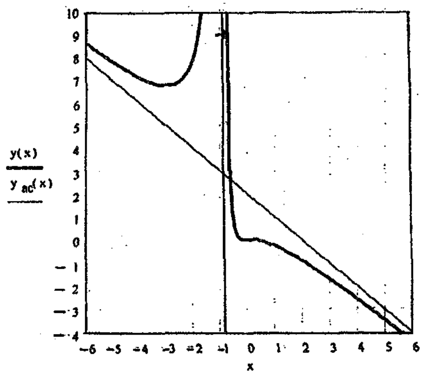
Область определения функции разобьем на интервалы $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; +\infty)$ и определим знак $f''(x)$ в каждом из них. Результат исследования знака функции $f''(x)$ на указанных интервалах с указанием выпуклости вверх и вниз запишем в таблицу:

x	$-\infty; -1$	-1	$-1; 0$	0	$0; +\infty$
$f''(x)$	+	∞	+	0	–
$f(x)$	$\cup$	$+\infty / +\infty$	$\cup$	$y_{\text{тп}} = 0$	$\cap$

При переходе через точку $x = 0$ вторая производная меняет знак, следовательно, это точка перегиба функции, причем $f_{\text{тп}}(0) = 0$. Точка $x = -1$ не является точкой перегиба.

Построение графика начнем с нанесения асимптот, точек пересечения с осями координат, экстремума, перегиба и фрагментов графика функции вблизи этих точек и асимптот.

В окончательном виде график изображен на следующем рисунке. ▼



Пример 8.2. Провести полное исследование функции и построить ее график $f(x)=\sqrt[3]{x(x-3)^2}$.

▲ Исследование функции будем проводить, придерживаясь приведенной выше схемы.

I. Элементарное исследование

1. Область определения функции. $\boxed{\text{X}: (-\infty; \infty)}$.

2. Исследуем функцию на симметричность (определить четность и нечетность функции) и периодичность.

$$f(-x)=\sqrt[3]{-x(-x-3)^2}=-\sqrt[3]{x(x+3)^2}\neq\left[\begin{array}{l}f(x),\\ -f(x).\end{array}\right.\qquad \boxed{\text{Функция общего вида}}.$$

$$f(x+T)\neq f(x)\qquad \boxed{\text{Функция не периодична}}.$$

3. Выясним существование асимптот.

$\boxed{\text{Вертикальных асимптот нет, так как нет точек разрыва.}}$

Найдем наклонные асимптоты $y_{ac}=kx+b$.

Слева ($x\to-\infty$).

$$k_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{x(x-3)^2}{x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{\frac{(x-3)^2}{x^2}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}, \begin{array}{c}\text{степень многочлена числителя равна}\\ \text{степени многочлена знаменателя}\end{array}\right\} = 1.$$

$$b_- = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt[3]{x(x-3)^2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(x-3)^2 - x^3}{\sqrt[3]{x^2(x-3)^4} + x\sqrt[3]{x(x-3)^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-6x^2 + 9x}{\sqrt[3]{x^2(x-3)^4} + x\sqrt[3]{x(x-3)^2} + x^2} =$$

$$= \left\{\frac{\infty}{\infty}, \begin{array}{c}\text{степень многочлена числителя равна}\\ \text{степени многочлена знаменателя}\end{array}\right\} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Уравнение наклонной асимптоты слева $\boxed{y_{\text{ас}} = x - 2}$.

Справа $(x \to +\infty)$.

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-3)^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{x(x-3)^2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{(x-3)^2}{x^2}} =$$

$$= \left\{\frac{\infty}{\infty}, \begin{array}{c}\text{степень многочлена числителя равна}\\ \text{степени многочлена знаменателя}\end{array}\right\} = 1.$$

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x(x-3)^2} - 1\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(x-3)^2 - x^3}{\sqrt[3]{x^2(x-3)^4} + x\sqrt[3]{x(x-3)^2} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-6x^2 + 9x}{\sqrt[3]{x^2(x-3)^4} + x\sqrt[3]{x(x-3)^2} + x^2} =$$

$$= \left\{\frac{\infty}{\infty}, \begin{array}{c}\text{степень многочлена числителя равна}\\ \text{степени многочлена знаменателя}\end{array}\right\} = \frac{-6}{3} = -2.$$

Уравнение наклонной асимптоты справа $\boxed{y_{\text{ас}} = x - 2}$.

4. Определим точки пересечения графика функции с координатными осями, найдем интервалы знакопостоянства функции.

Точки пересечения с осью Ox:

$$\begin{cases} y=\sqrt[3]{x(x-3)^2}, \\ y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x(x-3)^2}=0, \\ y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \vee \begin{cases} x=3, \\ y=0. \end{cases} \qquad \boxed{O(0;0),(3;0)}.$$

Точки пересечения с осью Oy:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=\sqrt[3]{x(x-3)^2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases} \quad \boxed{O(0;0)}.$$

Промежутки знакопостоянства

x	$-\infty;0$	0	$0;3$	3	$3;\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

II. Исследование графика функции по первой производной

Для нахождения участков монотонности и экстремальных точек найдем первую производную функции:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\frac{(x-3)^2+2x(x-3)}{\sqrt[3]{x^2(x-3)^4}}=\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1;$$

$$f'(x)=\infty \Rightarrow \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}=\infty \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0 \vee x=3.$$

$$\boxed{x=0,\ x=1,\ x=3} \text{ кт I.}$$

Область определения функции разобьем на интервалы $(-\infty;0)$, $(0;1),(1;3),(3;+\infty)$ и определим знак $f'(x)$ в каждом из них (для удобства вычислений в каждом интервале выбираем фиксированную точку). Результаты исследования знака производной на интервалах между критическими точками (с учетом X) с указанием поведения функции на этих интервалах занесем в таблицу:

x	$-\infty;0$	0	$0;1$	1	$1;3$	3	$3;\infty$
$f'(x)$	$+$	∞	$+$	0	$-$	∞	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	0	$\uparrow$	$f_{\max}=\sqrt[3]{4}$	$\downarrow$	$f_{\min}=0$	$\uparrow$

Так как функция в точке $x=1$ определена и непрерывна и при переходе через нее производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в этой точке максимум, причем $f_{\max}(1)=\sqrt[3]{1\cdot(1-3)^2}=\sqrt[3]{4}$.

В точке $x=3$ функция определена и непрерывна и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, в этой точке минимум, причем $f_{\min}(3)=0$.

III. Исследование графика функции по второй производной

Для нахождения участков выпуклости вверх и вниз найдем вторую производную функции

$$f''(x)=x^{-\frac{2}{3}}(x-3)^{-\frac{1}{3}}-\tfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}}(x-3)^{-\frac{1}{3}}(x-1)-\tfrac{1}{3}(x-3)^{-\frac{4}{3}}(x-1)x^{-\frac{2}{3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}-\frac{x-1}{3\sqrt[3]{x^5(x-3)}}-\frac{x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-3)^4}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}\left(1-\frac{x-1}{3x}-\frac{x-1}{3(x-3)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}\frac{3x(x-3)-(x-1)(x-3)-x(x-1)}{3x(x-3)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}\frac{3x^2-9x-x^2+4x-3-x^2+x}{3x(x-3)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2(x-3)}}\frac{x^2-4x-3}{3x(x-3)}.$$

$$f''(x)=0\ \Rightarrow\ \frac{x^2-4x-3}{3x(x-3)\sqrt[3]{x^2(x-3)}}=0\ \Rightarrow\ x^2-4x-3=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2-\sqrt{7}\approx-0.646\ \vee\ x=2+\sqrt{7}\approx 4.64.$$

$$f''(x)=\infty\ \Rightarrow\ \frac{x^2-4x-3}{3x(x-3)\sqrt[3]{x^2(x-3)}}=\infty\ \Rightarrow\ x=0\ \vee\ x=3.$$

$$\boxed{x\approx-0.646,\ x=0,\ x=3,\ x=4.646}\ \text{кт II.}$$

Область определения функции разобьем на интервалы

$$(-\infty; -0.646), (-0.646; 0), (0; 3), (3; 4.646),\ (4.646; +\infty)$$

и определим знак $f''(x)$ в каждом из них. Результат исследования знака функции $f''(x)$ на указанных интервалах с указанием выпуклости вверх и вниз запишем в таблицу:

x	$-\infty; -0.65$	-0.65	$-0.65; 0$	0	$0; 3$	3	$3; 4.65$	4.65	$4.65; \infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	∞	$-$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	$y_{тп} = -2.05$	$\cup$	0	$\cap$	0	$\cap$	$y_{тп} = 2.33$	$\cup$

При переходе через точки $x = -0.65$ и $x = 4.65$ вторая производная меняет знак, следовательно, это точки перегиба функции, причем

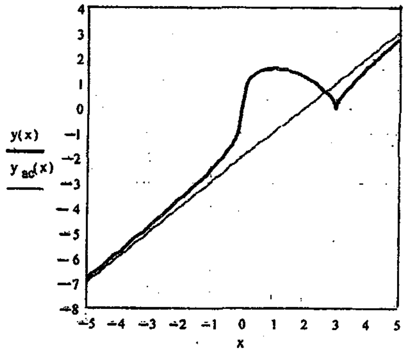
$$f_{тп}(-0.65) \approx \sqrt[3]{-0.65 \cdot (-0.65 - 3)^2} \approx -\sqrt[3]{0.65 \cdot 3.65^2} \approx -2.05,$$

$$f_{тп}(4.65) = \sqrt[3]{4.65 \cdot (4.65 - 3)^2} = \sqrt[3]{4.65 \cdot 1.65^2} \approx 2.33.$$

Точки перегиба: $\boxed{(-0.65; -2.05),\quad (4.65; 2.33)}$.

Построение графика начнем с нанесения асимптот, точек пересечения с осями координат, экстремума, перегиба и фрагментов графика функции вблизи этих точек и асимптот.

В окончательном виде график изображен на следующем рисунке. ▼



Пример 8.3. Провести полное исследование функции $y = xe^{-x}$ и построить ее график.

▲ Исследование функции будем проводить, придерживаясь приведенной выше схемы.

I. Элементарное исследование

1. Область определения функции. $\boxed{X:(-\infty;\infty)}$.

2. Исследуем функцию на симметричность (определить четность и нечетность функции) и периодичность.

$$f(-x) = -xe^{x} \neq \begin{cases} f(x), \\ -f(x). \end{cases} \qquad \boxed{\text{Функция общего вида}}.$$

$$f(x+T) \neq f(x) \qquad \boxed{\text{Функция не периодична}}.$$

3. Выясним существование асимптот.

$$\boxed{\text{Вертикальных асимптот нет, так как нет точек разрыва.}}$$

Найдем наклонные асимптоты $y_{ac} = kx + b$.

Слева $(x \to -\infty)$.

$$k_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = \{e^{+\infty}\} = \infty.$$ $\boxed{\text{Слева наклонной асимптоты нет}}$

Справа $(x \to +\infty)$.

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{-x}}{x} \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = \left\{e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}}\right\} = 0,$$

$$b_+ = \lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-x} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x} = \left\{\frac{+\infty}{e^{+\infty}},\ \begin{matrix}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x} = \left\{\frac{1}{e^{+\infty}}\right\} = 0.$$

$\boxed{\text{Справа горизонтальная асимптота}}$: $\boxed{y_{\text{ас}} = 0}$.

4. Определим точки пересечения графика функции с координатными осями, найдем интервалы знакопостоянства функции.

Точки пересечения с осью Ox:

$$\begin{cases} y = xe^{-x}, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xe^{-x} = 0, \\ y = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \qquad \boxed{O(0;\,0)}.$$

Точки пересечения с осью Oy:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = \dfrac{-x^3}{(x+1)^3}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \qquad \boxed{O(0;\,0)}.$$

Промежутки знакопостоянства

x	$-\infty; 0$	0	$0; \infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

II. Исследование графика функции по первой производной

Для нахождения участков монотонности и экстремальных точек найдем первую производную функции:

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x).$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x}(1-x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow x = 1;$$

$$f'(x) = \infty \Rightarrow e^{-x}(1-x) \neq \infty \qquad \boxed{x = 1}\ \text{кт I}.$$

Область определения функции разобьем на интервалы $(-\infty;1)$, $(1;+\infty)$ и определим знак $f'(x)$ в каждом из них (для удобства вычислений в каждом интервале выбираем фиксированную точку). Результаты исследования знака производной на интервалах между критическими точками (с учетом X) с указанием поведения функции на этих интервалах занесем в таблицу:

x	$-\infty;1$	1	$1;\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\uparrow$	$f_{max}=\frac{1}{e}$	$\downarrow$

Так как функция в точке $x=1$ определена и непрерывна и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в этой точке максимум, причем $f_{max}(1)=1\cdot e^{-1}=\frac{1}{e}$.

III. Исследование графика функции по второй производной

Для нахождения участков выпуклости вверх и вниз найдем вторую производную функции

$$f''(x)=-e^{-x}(1-x)-e^{-x}=e^{-x}(-1+x-1)=e^{-x}(x-2).$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow e^{-x}(x-2)=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2;$$

$$f''(x)=\infty \Rightarrow e^{-x}(x-2)\neq\infty.\ \boxed{x=2}\ \text{кт II}.$$

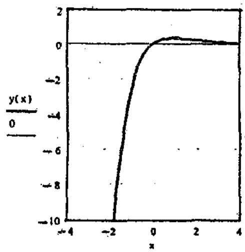
Область определения функции разобьем на интервалы $(-\infty;2)$, $(2;+\infty)$ и определим знак $f''(x)$ в каждом из них. Результат исследования знака функции $f''(x)$ на указанных интервалах с указанием выпуклости вверх и вниз запишем в таблицу:

x	$-\infty;2$	2	$2;\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$	$f_{тп}=\frac{2}{e^2}$	$\cup$

При переходе через точку $x=2$ вторая производная меняет знак, следовательно, это точка перегиба функции, причем $f_{тп}(2)=\frac{2}{e^2}$. Точка перегиба: $\boxed{\left(2;\frac{2}{e^2}\right)}$.

Построение графика начнем с нанесения асимптот, точек пересечения с осями координат, экстремума, перегиба и фрагментов графика функции вблизи этих точек и асимптот.

В окончательном виде график изображен на следующем рисунке. ▼



Пример 8.4. Провести полное исследование функции $y=\dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}$ и построить ее график.

▲ Исследование функции будем проводить, придерживаясь приведенной выше схемы.

I. Элементарное исследование

1. Область определения функции $\boxed{X:\ (-\infty;-1)\cup(-1;\infty)}$. Точка разрыва: $x=-1$.

2. Исследуем функцию на симметричность (определить четность и нечетность функции) и периодичность.

$$f(-x)=\frac{e^{2(-x+1)}}{2(-x+1)}\neq\left[\begin{array}{l}f(x),\\ -f(x).\end{array}\right.$$ Функция общего вида.

$$f(x+T)\neq f(x)$$ Функция не периодична.

3. Выясним существование асимптот. В точке $x=-1$ функция имеет разрыв II рода, ибо,

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}=\left\{\frac{e^{2(-1-0+1)}}{2(-1-0+1)}=\frac{1}{-0}\right\}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to -1+0}\frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}=\left\{\frac{e^{2(-1+0+1)}}{2(-1+0+1)}=\frac{1}{+0}\right\}=+\infty$$

в остальных точках она непрерывна.

Прямая линия $\boxed{x=-1}$ является вертикальной асимптотой.

Найдем наклонные асимптоты $y_{ac}=kx+b$.

Слева $(x\to-\infty)$.

$$k_-=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)\cdot x}=\left\{\frac{e^{-\infty}}{+\infty}=\frac{1}{+\infty\cdot e^{\infty}}\right\}=0,$$

$$b_-=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}=\left\{\frac{e^{-\infty}}{-\infty}=\frac{1}{-\infty\cdot e^{\infty}}\right\}=0.$$

Уравнение горизонтальной асимптоты слева: $\boxed{y_{ac}=0}$.

Справа $(x\to+\infty)$.

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)\cdot x}=\left\{\frac{e^{+\infty}}{+\infty},\ \begin{matrix}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^{2(x+1)}}{4x+2}=\left\{\frac{e^{+\infty}}{+\infty},\ \begin{matrix}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right\}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4e^{2(x+1)}}{4}=\left\{e^{\infty}\right\}=\infty.$$

$\boxed{\text{Справа наклонной асимптоты нет}}$.

4. Определим точки пересечения графика функции с координатными осями, найдем интервалы знакопостоянства функции.

Точки пересечения с осью Ox: $\begin{cases} y=\dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}, \\ y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}\neq 0, \\ y\neq 0. \end{cases}$

$\boxed{\text{Точек пересечения с осью } Ox \text{ нет}}$.

Точки пересечения с осью Oy: $\begin{cases} x=0, \\ y=\dfrac{e^{2(x+1)}}{2(x+1)}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=\frac{e^2}{2}. \end{cases}$

$\boxed{\text{Точка пересечения с осью } Oy\text{: } \left(0; \frac{e^2}{2}\right)}.$

Промежутки знакопостоянства

x	$-\infty; -1$	-1	$-1; \infty$
$f(x)$	$-$	$-\infty \,/\, +\infty$	$+$

II. Исследование графика функции по первой производной

Для нахождения участков монотонности и экстремальных точек найдем первую производную функции:

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{2e^{2(x+1)}(x+1) - e^{2(x+1)}}{(x+1)^2} = \frac{e^{2(x+1)}(2x+2-1)}{2(x+1)^2} = \frac{e^{2(x+1)}(2x+1)}{2(x+1)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{e^{2(x+1)}(2x+1)}{2(x+1)^2} = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0 \Rightarrow x = -0.5;$$

$$f'(x) = \infty \Rightarrow \frac{e^{2(x+1)}(2x+1)}{2(x+1)^2} = \infty \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow (x=-1) \notin X.$$

$$\boxed{x = -0.5} \text{ кт I.}$$

Область определения функции разобьем на интервалы $(-\infty; -1)$, $(-1; -0.5)$, $(-0.5; +\infty)$ и определим знак $f'(x)$ в каждом из них (для удобства вычислений в каждом интервале выбираем фиксированную точку). Результаты исследования знака производной на интервалах между критическими точками (с учетом X) с указанием поведения функции на этих интервалах занесем в таблицу:

x	$-\infty; -1$	-1	$-1; -0.5$	-0.5	$-0.5; \infty$
$f'(x)$	$-$	∞	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\downarrow$	$-\infty \,/\, +\infty$	$\downarrow$	$f_{\min} = e$	$\uparrow$

Так как функция в точке $x = -0.5$ определена и непрерывна и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке минимум, причем

$$\boxed{f_{\min}(-0.5) = \frac{e^{2(-0.5+1)}}{2(-0.5+1)} = e}.$$

III. Исследование графика функции по второй производной

Для нахождения участков выпуклости вверх и вниз найдем вторую производную функции

$$f''(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{2e^{2(x+1)}(2x+1)}{(x+1)^2}+\frac{2e^{2(x+1)}}{(x+1)^2}-\frac{2e^{2(x+1)}(2x+1)}{(x+1)^3}\right)=$$

$$=\frac{e^{2(x+1)}\left((2x+1)(x+1)+x+1-2x-1\right)}{(x+1)^3}=\frac{e^{2(x+1)}(2x^2+2x+1)}{(x+1)^3}.$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \frac{e^{2(x+1)}(2x^2+2x+1)}{(x+1)^3}\neq 0 \ (2x^2+2x+1>0 \text{ т.к. } D<0);$$

$$f''(x)=\infty \Rightarrow \frac{e^{2(x+1)}(2x^2+2x+1)}{(x+1)^3}=\infty \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow (x=-1)\notin X.$$

$\boxed{\text{кт II нет}}$.

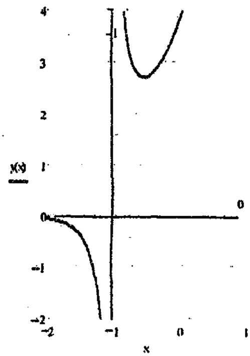
Область определения функции разобьем на интервалы $(-\infty;-1)$, $(-1;+\infty)$ и определим знак $f''(x)$ в каждом из них. Результат исследования знака функции $f''(x)$ на указанных интервалах с указанием выпуклости вверх и вниз запишем в таблицу:

x	$-\infty;-1$	-1	$-1;\infty$
$f''(x)$	$-$	∞	$+$
$f(x)$	$\cap$	$-\infty\,/\,+\infty$	$\cup$

$\boxed{\text{Точек перегиба нет}}$.

Построение графика начнем с нанесения асимптот, точек пересечения с осями координат, экстремума, перегиба и фрагментов графика функции вблизи этих точек и асимптот.

В окончательном виде график изображен на следующем рисунке. ▼



Пример 8.5. Провести полное исследование функции $y = 2\ln\frac{x-1}{x} + 1$ и построить ее график.

▲ Исследование функции будем проводить, придерживаясь приведенной выше схемы.

I. Элементарное исследование

1. Область определения функции. $\frac{x-1}{x} > 0 \Rightarrow$ X: $(-\infty; 0) \cup (1; \infty)$.

2. Исследуем функцию на симметричность (определить четность и нечетность функции) и периодичность.

$$f(-x) = 2\ln\frac{-x-1}{-x} + 1 = 2\ln\frac{x+1}{x} + 1 \neq \left[\begin{array}{l} f(x), \\ -f(x). \end{array}\right.$$ $\boxed{\text{Функция общего вида}}$.

$f(x+T) \neq f(x)$. $\boxed{\text{Функция не периодична}}$.

Выясним существование асимптот. Вертикальная асимптота может существовать лишь на конечных границах области определения. Найдем

$$\lim_{x \to 0-0}\left(2\ln\frac{x-1}{x} + 1\right) = \left\{2\ln\frac{0-0-1}{0-0} + 1 = 2\ln\frac{-1}{-0} + 1 = 2\ln\infty + 1\right\} = +\infty.$$

Значит, прямая $\boxed{x = 0}$ – вертикальная асимптота.

Найдем $\lim_{x \to 1+0}\left(2\ln\frac{x-1}{x} + 1\right) = \left\{2\ln\frac{1+0-1}{1+0} + 1 = 2\ln\frac{+0}{1} + 1 = 2\ln 0 + 1\right\} = -\infty.$

Следовательно, прямая $\boxed{x=1}$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонные асимптоты $y_{ac}=kx+b$.

Слева $(x\to-\infty)$.

$$k_-=\lim_{x\to-\infty}\frac{2\ln\frac{x-1}{x}+1}{x}=\left\{\frac{2\ln\frac{-\infty}{-\infty}+1}{-\infty}=\frac{2\ln1+1}{-\infty}=\frac{1}{-\infty}\right\}=0,$$

$$b_-=\lim_{x\to-\infty}\left(2\ln\frac{x-1}{x}+1-0\cdot x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(2\ln\frac{x-1}{x}+1\right)=$$

$$=\left\{2\ln\frac{-\infty}{-\infty}+1=2\ln1+1\right\}=1.$$

Уравнение горизонтальной асимптоты слева $\boxed{y_{ac}=1}$.

Справа $(x\to+\infty)$.

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln\frac{x-1}{x}+1}{x}=\left\{\frac{2\ln\frac{+\infty}{+\infty}+1}{+\infty}=\frac{2\ln1+1}{+\infty}=\frac{1}{+\infty}\right\}=0,$$

$$b_+=\lim_{x\to+\infty}\left(2\ln\frac{x-1}{x}+1-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(2\ln\frac{x-1}{x}+1\right)=$$

$$=\left\{2\ln\frac{+\infty}{+\infty}+1=2\ln1+1\right\}=1.$$

Уравнение горизонтальной асимптоты справа $\boxed{y_{ac}=1}$.

3. Определим точки пересечения графика функции с координатными осями, найдем интервалы знакопостоянства функции.

Точки пересечения с осью Ox:

$$\begin{cases}y=2\ln\dfrac{x-1}{x}+1,\\ y=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2\ln\dfrac{x-1}{x}+1=0,\\ y=0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\ln\dfrac{x-1}{x}=-\dfrac{1}{2},\\ y=0,\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{e}}, \\ y=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{e}-1} \approx 2.533, \\ y=0. \end{cases}$$

$\boxed{\text{Точка пересечения с осью } Ox: \ (2.533; 0)}$.

$\boxed{\text{Точек пересечения с осью } Oy \text{ нет}}$.

Промежутки знакопостоянства

x	$-\infty; 0$	0	1	$1; 2.533$	2.533	$2.533; \infty$
$f(x)$	$+$	$+\infty$	$-\infty$	$-$	0	$+$

II. Исследование графика функции по первой производной.

Для нахождения участков монотонности и экстремальных точек найдем первую производную функции:

$$f'(x) = 2\frac{x}{x-1}\frac{x-x+1}{x^2} = \frac{2}{x(x-1)}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{2}{x(x-1)} \neq 0;$$

$$f'(x) = \infty \Rightarrow \frac{2}{x(x-1)} = \infty \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow ((x=0) \vee (x=1)) \notin X.$$

$\boxed{\text{кт I нет}}$.

Область определения функции разобьем на интервалы $(-\infty; 0), (1; +\infty)$ и определим знак $f'(x)$ в каждом из них (для удобства вычислений в каждом интервале выбираем фиксированную точку). Результаты исследования знака производной на интервалах между критическими точками (с учетом X) с указанием поведения функции на этих интервалах занесем в таблицу:

x	$-\infty; 0$	0	1	$1; \infty$
$f'(x)$	$+$	∞	∞	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	$+\infty$	$-\infty$	$\uparrow$

$\boxed{\text{Экстремумов нет}}$.

III. Исследование графика функции по второй производной

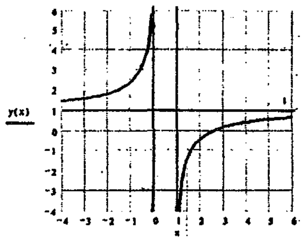
Для нахождения участков выпуклости вверх и вниз найдем вторую производную функции

$$f''(x) = 2\frac{-(2x-1)}{x^2(x-1)^2} = -2\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2}.$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -2\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow (x=0.5) \notin X;$$

$$f''(x) = \infty \Rightarrow -2\frac{2x-1}{x^2(x-1)^2} = \infty \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \big((x=0) \vee (x=1)\big) \notin X.$$

Кт II нет.



Область определения функции разобьем на интервалы $(-\infty; 0), (1; +\infty)$ и определим знак $f''(x)$ в каждом из них. Результат исследования знака функции $f''(x)$ на указанных интервалах с указанием выпуклости вверх и вниз запишем в таблицу:

x	$-\infty; 0$	0	1	$1; \infty$
$f''(x)$	$+$	∞	∞	$-$
$f(x)$	$\cup$	$+\infty$	$-\infty$	$\cap$

Точек перегиба нет.

Построение графика начнем с нанесения асимптот, точек пересечения с осями координат, экстремума, перегиба и фрагментов графика функции вблизи этих точек и асимптот.

В окончательном виде график изображен на следующем рисунке. ▼

9. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОЙ НА ОТРЕЗКЕ

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то, согласно второй теореме Вейерштрасса, она на этом отрезке принимает наибольшее и наименьшее значения.

Если свое наибольшее значение M функция $f(x)$ принимает во внутренней точке x_0 отрезка $[a;b]$, т. е. если $a < x_0 < b$, то значение $M = f(x_0)$ будет локальным максимумом функции $f(x)$.

В этом случае существует окрестность точки x_0 такая, что значения $f(x)$ для всех точек x из этой окрестности будут не больше $f(x_0)$ как в точках слева от точки x_0, так и в точках справа от точки x_0.

Однако свое наибольшее значение M функция $f(x)$ может принимать и на концах отрезка $[a;b]$.

Поэтому, чтобы найти наибольшее значение M непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$, надо найти все максимумы функции $f(x)$ в интервале $(a;b)$ и значения $f(x)$ на концах отрезка $[a;b]$, т. е. $f(a)$ и $f(b)$, и выбрать среди них наибольшее число.

Наименьшим значением m непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $f(x)$ будет наименьшее число среди всех минимумов функции $f(x)$ в интервале $(a;b)$ и значений $f(a)$ и $f(b)$.

Замечание 1. Если в промежутке $< a;b >$, конечном или бесконечном, одна критическая точка и в ней максимум (минимум), то в ней наибольшее (наименьшее) значение.

Замечание 2. Если функция задана и непрерывна на некотором промежутке, не являющемся замкнутым, то среди значений функции на этом промежутке может не быть наибольшего и наименьшего.

Правило определения наибольших и наименьших значений функции на отрезке

1. Найти значения функции на концах отрезка: $f(a)$ и $f(b)$.
2. Определить критические точки первого рода.
3. Вычислить значение функции в критических точках первого рода (кт I): $f(x_i)$, где $i = 1, 2, 3, \ldots$
4. Выбрать из значений $f(a)$, $f(b)$ и $f(x_i)$ наименьшее (m) и наибольшее (M) значения функции.

Пример 9.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2; 2]$.

▲ 1. Для вычисления функции в указанных точках используем схему Горнера:

$$x^4 - 2x^2 + 5 = x^2(x^2 - 2) + 5.$$

$$y(-2) = (-2)^2\left((-2)^2 - 2\right) + 5 = 13,$$

так как данная функция четная, то $y(2) = 13$.

2. Найдем производную: $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$. Она обращается в нуль в точках: $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$. Все они лежат внутри отрезка $[-2; 2]$.
3. Вычислим значения функции в кт I.

Имеем: $y(-1) = (-1)^2\left((-1)^2 - 2\right) + 5 = 4$, $y(0) = 5$, $y(1) = 4$.

4. Имеем множество значений функции на концах отрезка и в кт 1: $\{13; 13; 4; 5; 4\}$. Значит, наименьшее значение равно 4, наибольшее значение равно 13.

Ответ: $m = f_{\text{наим}}(-1) = f_{\text{наим}}(1) = 4$, $M = f_{\text{наиб}}(-2) = f_{\text{наиб}}(2) = 13$. ▼

Пример 9.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + 2\sqrt{x}$ на отрезке $[0; 4]$.

▲ 1. $y(0) = 0$, $y(4) = 4 + 2\sqrt{4} = 8$.

2. Найдем производную: $y' = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. Производная в нуль не обращается $(y' \neq 0)$. Производная не существует при $x = 0$.
3. Кт I совпадает с левой границей данного отрезка.
4. Имеем множество значений функции на концах отрезка и в кт I: $\{0; 8\}$. Значит, наименьшее значение равно 0, наибольшее значение равно 8.

Ответ: $m = f_{\text{наим}}(0) = 0$, $M = f_{\text{наиб}}(4) = 8$. ▼

Пример 9.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sqrt{100 - x^2}$ на отрезке $[-6; 8]$.

▲ 1. $y(-6) = \sqrt{100 - (-6)^2} = 8$, $y(8) = \sqrt{100 - 8^2} = 6$.

2. Найдем производную: $y' = \dfrac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}} = -\dfrac{x}{\sqrt{100-x^2}}$.

Производная обращается в нуль в точке $x=0$. Производная не существует при $x=-10$ и $x=10$, но обе эти точки не принадлежат данному отрезку.

3. Вычислим значения функции в кт I. Имеем: $y(0)=10$.

4. Имеем множество значений функции на концах отрезка и в кт I:

$$\{8; 6; 10\}.$$

Значит, наименьшее значение равно 6, наибольшее значение равно 10.

Ответ: $m = f_{\text{наим}}(8) = 6$, $M = f_{\text{наиб}}(0) = 10$. ▼

Пример 9.4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ на промежутке $(-\infty; +\infty)$.

▲ 2. Найдем производную: $y' = \dfrac{1+x^2-2x\cdot x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. Она обращается в нуль в точках $x=-1$, $x=1$.

3. Вычислим значения функции в кт I. Имеем: $y(-1) = \dfrac{-1}{1+(-1)^2} = -0.5$. Так как данная функция нечетная, то $y(1) = 0.5$.

4. Поскольку $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = \left\{\begin{matrix}\text{степень многочлена числителя меньше}\\ \text{степени многочлена знаменателя}\end{matrix}\right\} = 0$, то наибольшее значение равно 0.5, наименьшее значение –0.5.

Ответ: $m = f_{\text{наим}}(-1) = -0.5$, $M = f_{\text{наиб}}(1) = 0.5$. ▼

Пример 9.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x\ln x$ на отрезке $[1; e]$.

▲ 1. $y(1) = 1\cdot\ln 1 = 0$, $y(e) = e\cdot\ln e = e$.

2. Найдем производную: $y' = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} = \ln x + 1$. Она обращается в нуль при $x = \dfrac{1}{e}$

$$\left(\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}\right).$$

Точка $x = \dfrac{1}{e} \notin [1; e]$, т. е. кт I нет.

3. Имеем множество значений функции на концах отрезка: $\{0; e\}$. Значит, наименьшее значение равно 0, наибольшее значение равно e.

Ответ: $m = f_{\text{наим}}(1) = 0, M = f_{\text{наиб}}(e) = e$. ▼

Пример 9.6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sin x + \cos 2x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

▲ 1. $y(0) = 2\sin 0 + \cos 0 = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\dfrac{\pi}{2} + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 - 1 = 1$.

2. Найдем производную: $y' = 2\cos x - 2\sin 2x$. Если $y' = 0$, то

$$2\cos x - 4\sin x\cos x = 0 \Rightarrow 2\cos x(1 - 2\sin x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ 1 - 2\sin x = 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi\end{array}\right. \quad (k, n) \in \mathrm{Z}.$$

Из всех найденных критических точек только $x = \frac{\pi}{6}$ и $x = \frac{\pi}{2}$ принадлежат отрезку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Вычислим значения функции в кт I.

Имеем: $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6} + \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.5$.

4. Имеем множество значений функции на концах отрезка и в кт I: $\{1; 1.5; 1\}$. Значит, наименьшее значение равно 1, наибольшее значение равно 1.5.

Ответ: $m = f_{\text{наим}}(0) = f_{\text{наим}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $M = f_{\text{наиб}}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1.5$. ▼

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение локального экстремума функции.
2. Сформулируйте теорему, выражающую необходимое условие экстремума. Покажите, что это условие не является достаточным (на примере).

3. Сформулируйте теоремы, выражающие достаточные условия экстремума функции.

4. Дайте определение направления выпуклости функции.

5. Дайте определение точки перегиба функции.

6. Сформулируйте необходимое условие перегиба графика функции. Покажите, что это условие не является достаточным (на примере).

7. Сформулируйте достаточное условие перегиба графика функции.

8. Приведите схему построения графика функции $y = f(x)$.

9. Дайте определение и приведите пример вертикальной асимптоты графика функции.

10. Сформулируйте определение и приведите пример наклонной асимптоты графика функции при $x \to +\infty$ (при $x \to -\infty$).

11. Сформулируйте теорему, выражающую необходимые и достаточные условия существования наклонной асимптоты.

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

Задача 1. Провести полное исследование функций и построить их графики.

Задача 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции.

ВАРИАНТ 1	**ВАРИАНТ 2**
1. а) $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; б) $y = e^{2x-x^2}$. 2. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \cos x$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.	1. а) $y = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$; б) $y = x \cdot e^{-x^2}$. 2. $f(x) = x^5 - \frac{5}{3}x^3 + 2$ на отрезке $[0; 2]$.
ВАРИАНТ 3	**ВАРИАНТ 4**
1. а) $y = \dfrac{4x}{4+x^2}$; б) $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. 2. $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ на отрезке $[0; 3]$.	1. а) $y = \dfrac{x^2}{x-1}$; б) $y = x^2 - 2\ln x$. 2. $f(x) = 3x^4 - 16x^3 = 2$ на отрезке $[-3; 1]$.

ВАРИАНТ 5	ВАРИАНТ 6
1. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}$; б) $y=\ln(x^2-4)$. 2. $f(x)=x^3-3x+1$ на отрезке [0.5; 2].	1. а) $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$; б) $y=e^{\frac{1}{2-x}}$. 2. $f(x)=x^4+4x$ на отрезке [–2; 2].
ВАРИАНТ 7	**ВАРИАНТ 8**
1. а) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$; б) $y=\ln(x^2+1)$. 2. $f(x)=\ln(x^2-2x+4)$ на отрезке [–1; 1.5].	1. а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $y=\dfrac{4e^{x^2}-1}{e^{x^2}}$. 2. $f(x)=\sqrt{x-x^3}$ на отрезке [–2; –1].
ВАРИАНТ 9	**ВАРИАНТ 10**
1. а) $y=\dfrac{4x^3}{x^3-1}$; б) $y=\ln(9-x^2)$. 2. $f(x)=3-2x^2$ на отрезке [–1; 3].	1. а) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$; б) $y=\dfrac{x^3+4}{x^2}$. 2. $f(x)=4-e^{-x^2}$ на отрезке [0; 1].

ВАРИАНТ 11	ВАРИАНТ 12
1. а) $y=\dfrac{2(x+1)^2}{x-2}$; б) $y=(x-2)e^{3-x}$. 2. $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2+7}$ на отрезке [2; 8].	1. а) $y=\dfrac{1-x^2}{(x-2)^2}$; б) $y=\ln(4-x^2)$. 2. $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; 0\right]$.
ВАРИАНТ 13	**ВАРИАНТ 14**
1. а) $y=\dfrac{x^3-8}{2x^2}$; б) $y=x^2e^{-x}$. 2. $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+5}$ на отрезке [2; 8].	1. а) $y=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$; б) $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$. 2. $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
ВАРИАНТ 15	**ВАРИАНТ 16**
1. а) $y=\dfrac{1}{x^2+x}$; б) $y=(x+4)e^{2x}$. 2. $f(x)=x^2+\dfrac{16}{x}-16$ на отрезке [1; 4].	1. а) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+2}$; б) $y=\dfrac{e^{2-x}}{2-x}$. 2. $f(x)=4-x-\dfrac{4}{x^2}$ на отрезке [1; 4].
ВАРИАНТ 17	**ВАРИАНТ 18**
1. а) $y=\dfrac{1-2x}{x^2-x-2}$; б) $y=xe^{2x-1}$. 2. $f(x)=2\sqrt{x}-x$ на отрезке [0; 4].	1. а) $y=\dfrac{4x^3+5}{x}$; б) $y=\ln\dfrac{x-1}{x-2}$. 2. $f(x)=x-4\sqrt{x}+5$ на отрезке [1; 9].

ВАРИАНТ 19 1. а) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$. 2. $f(x)=\dfrac{10x}{1+x^2}$ на отрезке [0; 3].	**ВАРИАНТ 20** 1. а) $y=\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$; б) $y=\dfrac{e^{3-x}}{3-x}$. 2. $f(x)=2x^2+\dfrac{108}{x}-59$ на отрезке [2; 4].
ВАРИАНТ 21 1. а) $y=\dfrac{x}{9-x}$; б) $y=x^2e^{-\frac{x^2}{2}}$. 2. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{8}{x}+8$ на отрезке [–4; –1].	**ВАРИАНТ 22** 1. а) $y=\dfrac{4x-x^2-4}{x}$; б) $y=-\ln\dfrac{1+x}{1-x}$. 2. $f(x)=8x^2+\dfrac{4}{x^2}-15$ на отрезке [05; 2].
ВАРИАНТ 23 1. а) $y=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$; б) $y=x\ln x$. 2. $f(x)=\dfrac{4}{x^2}-8x-15$ на отрезке [–2; –0.5].	**ВАРИАНТ 24** 1. а) $y=\dfrac{x^3}{x^2-x+1}$; б) $y=x\ln^2 x$. 2. $f(x)=x-4\sqrt{x+2}+8$ на отрезке [–1; 7].
ВАРИАНТ 25 1. а) $y=\dfrac{x^2-x-1}{x^2-2x}$; б) $y=xe^{\frac{1}{x}}$. 2. $f(x)=\dfrac{4x}{4+x^2}$ на отрезке [–4; 2].	**ВАРИАНТ 26** 1. а) $y=\dfrac{(x-2)^2}{x+1}$; б) $y=\dfrac{e^{2x+2}}{2(x+1)}$. 2. $f(x)=3-x-\dfrac{4}{(x+2)^2}$ на отрезке [–1; 2].

ВАРИАНТ 27	ВАРИАНТ 28
1. а) $y=\dfrac{x^2+6}{1+x^2}$; б) $y=(x+2)e^{1-x}$. 2. $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$ на отрезке $[-0.5;\,0]$.	1. а) $y=\dfrac{4-x^3}{x^2}$; б) $y=-\dfrac{e^{-x-2}}{x+2}$. 2. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$ на отрезке $[0;\,5]$.
ВАРИАНТ 29	**ВАРИАНТ 30**
1. а) $y=\dfrac{2-x}{(1-x)^2}$; б) $y=xe^{-\frac{1}{x}}$. 2. $f(x)=108x-x^4$ на отрезке $[-1;\,4]$.	1. а) $y=\dfrac{5x}{4-x^2}$; б) $y=(x+1)e^{1-x}$. 2. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-6x^3+7$ на отрезке $[16;\,20]$.

Знания и умения, которыми должен владеть студент

1. Знания на уровне понятий, определений, описаний формулировок

Формула Лагранжа. Различные ее модификации.

Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Формула Тейлора в различных ее модификациях.

Определение возрастания, убывания функции на интервале.

Определение экстремумов функций.

Правило отыскания наибольших и наименьших значений функции на замкнутом промежутке.

Определение направления выпуклости, точек перегиба графика функции.

Правило отыскания точек перегиба графика.

Определение и правило отыскания вертикальных, горизонтальных, наклонных асимптот графика функции.

Схема построения графика функции.

2. Знания на уровне доказательств и выводов

Теоремы Ферма, Ролля, Коши.

Правило Лопиталя (частный случай $\frac{0}{0}$).

Достаточные условия возрастания (убывания) функции на интервале.

Необходимые и достаточные условия экстремума по первой и второй производной.

Достаточные условия направления выпуклости графика на интервале.

Формулы для нахождения наклонных асимптот графика функции.

3. Умения в решении задач

Вычислять различного рода пределы при помощи правила Лопиталя.

Использовать формулу Тейлора для получения аппроксимационных формул.

Определять интервалы возрастания (убывания) функции, точки локального экстремума.

Находить наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Находить интервалы направления выпуклости графика и точки перегиба.

Находить асимптоты графика функции.

Строить графики функций.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Бутузов В. Ф. и др.* Математический анализ в вопросах и задачах: Учебное пособие для вузов. – М.: Высш. шк., 1984. – 200 с.

2. *Волков В. А. и др.* Задачник-практикум по высшей математике: Множества. Функции. Предел. Непрерывность. Производная: Учебное пособие. – Л.: изд. ЛГУ, 1988, 224 с.

3. *Веретенников В.* Н. Высшая математика. Математический анализ функций одной переменной. СПб.: изд. РГГМУ, 2008 – 254 с.

4. *Запорожец Г.И.* Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966 – 460 с.

5. *Краснов М.* Л. и др. Вся высшая математика: Учебник. Т.1.-Т.3. – М.: Эдиториал УРСС, 2000-2001.

6. *Зорич В.* А. Математический анализ, часть I. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 544 с.

7. *Козлов В. Н., Максимов Ю. Д., Хватов Ю. А.* Математика. Структурированная программа (базис). Типовые задачи для контроля, требования к знаниям и умениям студентов. – СПб.: Изд. – СПБГТУ, 2001. – 55 с.

8. *Рябушко А. П.* и др. Сб. индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч.1. - Мн.: Высш. шк., 1990. - 270 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Автор:
Веретенников Валентин Николаевич.

Редактор И. Г. Максимова.

ЛЗ № 020309 от 30.12.96

Подписано в печать 27.07.2011 Формат $60 \times 90 \frac{1}{16}$. Печать офсетная.
Печ. л. 21,5. Тираж 300. Зак.№7

195196, СПб, Малоохтинский пр. 98. РГГМУ.