

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

М.Ю.Белевич

ГИДРОМЕХАНИКА

Основы классической теории

*Рекомендовано учебно-методическим объединением по образованию
в области гидрометеорологии в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям:*

*«Гидрометеорология», «Экология и природопользование»,
по специальностям:*

«Метеорология», «Гидрология», «Океанология», «Геоэкология»



Санкт-Петербург
2006

УДК 532.533

ISBN 5-86813-178-9

Белевич М.Ю. Гидромеханика. Основы классической теории. Учебное пособие. СПб., изд. РГГМУ, 2006.— 213 с.

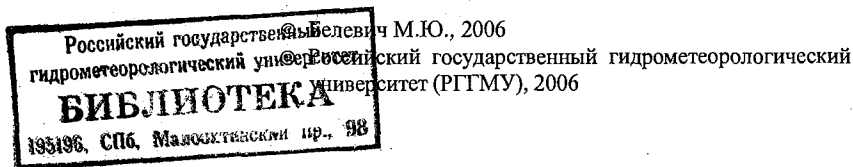
Рецензенты: Отдел динамической метеорологии Главной геофизической обсерватории им. А.И.Воейкова (Зав. Отделом, к.г.н. В.М. Катцов); д.ф.-м.н. В.А.Рябченко (СПбФ ИОРАН).

Настоящее учебное пособие призвано сообщить читателям основы классической гидромеханики, показать этапы построения модели жидкости и продемонстрировать возможные приемы работы с нею. Объем пособия соответствует односеместровому курсу, читаемому автором на протяжении ряда лет студентам второкурсникам океанологам и экологам-физикам РГГМУ. Наряду с теоретическим материалом в книге содержатся упражнения и задачи, решаемые со студентами на практических занятиях.

Пособие адресовано студентам и аспирантам, обучающимся по направлениям «Гидрометеорология», «Экология и природопользование».

В $\frac{-1}{2K2(03)-99}$ Без объявления

ISBN 5-86813-178-9



Содержание

Предисловие	7
I Модель сплошной среды	10
1. Тела и их свойства	11
1.1. Введение	11
1.2. Место: пространство событий и системы отсчета	13
1.3. Движение	18
1.4. Масса тела	22
1.5. Сила — способ описания взаимодействий	24
2. Основные гипотезы и законы	29
2.1. Гипотеза сплошности	29
2.2. Интегральные параметры и их плотности	31
2.2.1. Части тела	32
2.2.2. Интегральные параметры среды	32
2.2.3. Интегральные характеристики области пространства	34
2.2.4. Еще раз о различиях	35
2.3. Деформация. Эйлеровы и лагранжевы координаты	37
2.4. Законы сохранения	39
2.4.1. Интегральные законы сохранения	40
2.4.2. Дифференциальные законы сохранения	41
2.4.3. Теорема переноса	42
2.4.4. Дифференциальные законы сохранения (продолжение)	45
3. Скорости изменения характеристик среды	47
3.1. Скорость изменения места. Траектории движения	47
3.2. Скорость изменения скалярной функции. Правило суммирования	49

3.3. Скорость изменения векторной функции	53
4. Минимум о тензорах	59
4.1. Тензоры и тензорные операции	59
4.1.1. Введение	59
4.1.2. Тензор 2-го ранга и его компоненты	60
4.1.3. Алгебраические тензорные операции	62
4.1.4. Дифференциальные тензорные операции	63
4.2. Некоторые специальные тензоры	64
4.3. Задача на собственные значения	68
5. Деформация	69
5.1. Деформация: растяжение и поворот	69
5.1.1. Тензор поворота	71
5.1.2. Тензор растяжения	71
5.2. Кинематика деформации	74
6. Уравнение неразрывности	79
6.1. Скорость объемного расширения/сжатия	79
6.2. Дифференциальные законы сохранения и уравнения баланса	81
6.3. Уравнение неразрывности	84
7. Динамика жидкости	86
7.1. Импульс тела и скорость его изменения. Основной принцип динамики	86
7.2. Массовые и контактные силы	88
7.3. Уравнение движения	90
7.4. Уравнение движения идеальной жидкости	93
7.5. Уравнение Эйлера в компонентной форме	94
7.6. Резюме	96
8. Энергия	97
8.1. Кинетическая энергия и ее баланс	97
8.2. Внутренняя энергия и ее баланс	101
8.3. Резюме	104
8.4. Уравнение состояния	105

II Приложения	109
9. Идеальная жидкость	110
9.1. Введение	110
9.1.1. Постановка задач гидромеханики идеальной жидкости	110
9.1.2. Уравнение движения в форме Громеки-Лэмба	111
9.1.3. Замечания о приложениях модели	112
9.2. Гидростатика	113
9.3. Баротропная жидкость	114
9.3.1. Стационарные течения; уравнение Бернулли	114
9.3.2. Нестационарные течения; уравнение вихря скорости	117
10. Идеальная несжимаемая жидкость	118
10.1. Баротропная модель жидкости	118
10.1.1. Уравнение Гельмгольца	118
10.1.2. Теоремы Лагранжа и Гельмгольца	120
10.2. Двумерные течения	122
10.2.1. Функция тока	122
10.2.2. Форма линий тока стационарного течения	124
10.2.3. Поток жидкости через контур	124
10.3. Потенциальное течение	126
10.4. Связь потенциала скорости с функцией тока для стационарного плоского течения	127
11. Вязкая жидкость	129
11.1. Недостатки модели идеальной жидкости	129
11.2. Уравнения движения вязкой жидкости и уравнения Навье-Стокса	130
11.3. Компонентная форма записи уравнения движения вязкой жидкости	132
11.4. Постановка задач гидромеханики вязкой жидкости	133
11.5. Вязкая диссипация и баланс энергии	133
12. Вязкая жидкость — 2	138
12.1. Уравнение теплопроводности	138
12.2. Свободная конвекция	140

12.3. Какая жидкость вязкая?	142
12.3.1. Безразмерная форма уравнений	143
12.3.2. Динамическое подобие	146
12.4. Безразмерная форма уравнения переноса тепла	148
13. Ламинарный пограничный слой	150
13.1. Ламинарный пограничный слой	150
13.2. Толщина пограничного слоя	151
13.3. Уравнения пограничного слоя	153
13.4. Отрыв пограничного слоя	155
13.5. Температурный пограничный слой	157
14. Турбулентная жидкость	159
14.1. Гидродинамическая неустойчивость	159
14.2. Развитая турбулентность	161
14.3. Проблема осреднения	162
14.4. Уравнение Рейнольдса	166
14.5. Баланс энергии	168
15. Турбулентный пограничный слой	173
15.1. Введение	173
15.2. Общий вид профиля средней скорости	174
15.3. Течение около гладкой стенки	175
15.4. Влияние шероховатостей. Параметр шероховатости	178
III Практические занятия	180
Список литературы	204
Список используемых обозначений	206
Предметный указатель	210

Предисловие

У любого преподавателя рано или поздно формируется свое отношение к читаемому им предмету и к способу его изложения. Отбирается материал и иллюстрации, расставляются акценты. Все это черпается из различных источников: множества толстых книг, бесед с коллегами, собственных размышлений. Когда же доходит дело до чтения студентам списка рекомендуемой литературы, оказываешься в тупике: нет той единственной книжки, которую с легким сердцем мог бы рекомендовать для изучения. И, разумеется, не потому, что все, какие есть, плохие. Напротив, немало хороших, но то, что ты извлек из них сам и о чем рассказывал студентам, разбросано по десяткам книг, вмещающим не одну тысячу страниц. Вот «Если бы губы Никанора Ивановича да приставить к носу Ивана Кузьмича, да взять сколько-нибудь...», ну и так далее. А до экзамена (зачета) — неделя (да даже, если месяц). Как проработать за этот срок то, над чем сам трудился не один год? Хорошо, если есть записи лекций, но они часто, по разным причинам, отсутствуют. Тут и возникает мысль собрать воедино все свои лекционные материалы и написать еще одну книгу по классической гидромеханике «толщиной» в один семестр, в которой собрано то, что тебе кажется важным, и рассказано так, как тебе представляется нужным.

Результат — перед вами. Здесь изложены основы механики жидкости в объеме, соответствующем односеместровому курсу, читаемому студентам второкурсникам океанологам и экологам-физикам РГГМУ. Свою задачу я видел, прежде всего, в том, чтобы показать студентам, как (и почему именно так) строится модель жидкости и как с нею можно работать. Любая дисциплина с более чем двухвековой историей костенеет, основоположники утрачивают живые человеческие черты, а их результаты все чаще воспринимаются как окончательные. С одной стороны, эта тенденция защищает хорошо зарекомендовавшие себя теории от всякого панибратства, но с другой — определенно душит инициативу, ибо с Истиной не поспоришь. Необходимого баланса, мне кажется, можно достичь лишь сохраняя в изложении материала драматизм научного исследования и его мотивацию.¹ Надеюсь, местами этого удалось добиться.

¹ Или, если угодно, привнося все это в изложение, поскольку пафос основоположников в значительной степени утрачен и, видимо, чужд нашим современникам.

Весь теоретический материал естественно делится на две части. В первой строится модель сплошной среды, т.е. вводятся базовые понятия, обсуждаются основополагающие гипотезы, выводится основная система уравнений гидромеханики в форме Коши. Завершает эту часть получение системы уравнений идеальной жидкости, которая представляет собой наиболее простую, но уже вполне работоспособную модель. Вторая часть книги посвящена приложениям разработанной модели жидкости, т.е. применению ее к описанию различных частных случаев, из всего множества которых отобраны наиболее, на мой взгляд, универсальные и концептуально богатые. Здесь же рассматриваются модификации модели, приспособленные для описания движения вязкой среды, турбулентных течений и пограничных слоев. Легко понять, что это не вся гидромеханика, и что при изучении частных случаев надо обращаться к другим книгам, порой, весьма специальным. Фундамент, однако, у всех этих специальных отраслей механики жидкости один и тот же. Его обсуждению и посвящена эта книга.

Неотъемлемой частью настоящего учебного пособия являются упражнения и задачи, решаемые со студентами на практических занятиях. Они подобраны с таким расчетом, чтобы научить студентов работать со сложными системами дифференциальных уравнений, каковыми и являются различные модели жидких сред. Отрабатываются навыки записи уравнений в векторно-матричной форме, переход к компонентной форме записи, применение правила суммирования Эйнштейна. Большое внимание уделяется постановке задач и формализации их словесного описания (выбор систем координат, их ориентация, учет направлений и симметрий, присущих задаче, и т.п.). Уравнения гидромеханики достаточно сложны и не имеют в большинстве интересных случаев аналитического решения. Поэтому, мне кажется, что основной целью практических занятий по гидромеханике является не получение аналитического решения в каком-то очень частном случае, а тренировка способности видеть поставленную задачу с разных точек зрения и оценивать возможные пути ее упрощения.

Теоретическая гидромеханика весьма математизированная дисциплина, поэтому к студентам предъявляются определенные требования. Предполагается знание следующих разделов алгебры и анализа:

– *определители*: вычисление, разложение, свойства, алгебраическое дополнение;

- *матрицы*: транспонированная, обратная, симметричная, единичная, нулевая, след матрицы;
 - *задача на собственные значения*: собственные значения, собственные векторы;
 - *векторные пространства*: базис, скалярное произведение, ортогональность;
 - *анализ*: вычисление производных и интегралов, дифференцирование сложной функции, ряд Тейлора, замена переменных в кратных интегралах;
 - *векторный анализ*: дивергенция, ротор, градиент, теорема Гаусса-Остроградского;
 - *дифференциальные уравнения*: интегральные кривые, постановка задач.
- Минимально необходимые сведения о тензорах приводятся в самом курсе.

Благодарности

Помимо явных и неявных учителей, мне хотелось бы специально поблагодарить друзей и коллег, тех, кто терпеливо, а иногда с готовностью, обсуждал со мной различные аспекты этого курса. Это в первую очередь С.А.Фокин и А.А.Тронь. Б.А.Каган, В.М.Катцов и А.С.Сафрай прочитали рукопись. Их замечания, комментарии и пожелания были очень полезны.

Отдельное спасибо всем программистам (чаще неизвестным), чьи труды я пользовался при создании книги. Не могу не упомянуть здесь Д.Кнута (TeX), Л.Лампорта (LaTeX), а также L^AT_EX Team (L^AX).

М.Белевич, С.-Петербург, 2006 г.

Научный закон есть высказывание (утверждение, суждение, предложение), обладающее такими признаками: 1) оно истинно лишь при определенных условиях; 2) при этих условиях оно истинно всегда и везде без каких бы то ни было исключений (исключение из закона, подтверждающее закон, — это диалектическая бессмыслица); 3) условия, при которых истинно такое высказывание, никогда не реализуются в действительности полностью, но лишь частично и приблизительно. Потому нельзя буквально говорить, что научные законы обнаруживаются в изучаемой действительности (открываются). Они выдумываются (изобретаются) на основе изучения опытных данных с таким расчетом, чтобы их потом можно было использовать в получении новых суждений из данных суждений о действительности (в том числе — для предсказаний чисто логическим путем). Сами по себе научные законы нельзя подтвердить и нельзя опровергнуть опытным путем. Их можно оправдать или нет в зависимости от того, насколько хорошо или плохо они выполняют указанную выше роль.

А. Зиновьев. Зияющие высоты.

Часть I

Модель сплошной среды

1. Тела и их свойства

1.1. Введение

Все естественнонаучные дисциплины проходят один и тот же путь развития: от собирания фактов, их классификации к формализации объекта исследования и его моделированию (вначале качественному, а затем и количественному). Гидромеханика в этом отношении достигла значительного прогресса, о чем можно судить по степени проникновения в нее математики.

За прошедшие века собрано огромное количество сведений о поведении того, что мы теперь называем газами, жидкостями и твердыми телами. В результате их систематизации выявлены общие черты и различия объектов исследования. Осознаны и сформулированы основные свойства изучаемых явлений и закономерности, которым они подчиняются. Построены математические модели, позволяющие описывать данные наблюдений и предсказывать эволюцию моделируемых объектов, т.е. изменение их положения в пространстве, формы и некоторых других свойств. Эти модели и являются, по существу, предметом настоящего курса.

Наша задача состоит в изучении а) гипотез, определяющих объект исследования, б) аксиом или законов природы, лежащих в основе описываемых моделей, и, наконец, в) следствий, вытекающих из этих гипотез и аксиом. Подчеркнем еще раз: *предметом курса являются модели динамики жидкости*. Необходимо понимать, что изучение моделей жидкостей (да и любых других объектов) отнюдь не то же самое, что изучение самих реальных жидкостей. Последнее — это область естествоиспытателей, экспериментаторов, натуралистов. В отличие от них, дело теоретика — моделирование явлений природы на основе изучения данных наблюдений и экспериментов.

Любая модель содержит в себе лишь то, что было в нее, осознанно или неосознанно, заложено создателем. На этом ее связь с явлением природы обрывается, и каждое новое наблюдение может этой моделью либо описываться, либо — нет. Причем, последнее скорее указывает не на то, что модель плоха, а на то, что достигнута граница области применимости модели, т.е. граница того диапазона изменения параметров, в котором гипотезы и аксиомы, положенные в основу модели, имеют

смысл. Если же область применимости модели оказывается неудовлетворительной, то модель приходится подправлять либо, в крайнем случае, строить новую. К счастью, наука достаточно консервативна и появление действительно новых моделей происходит весьма редко. Так, наиболее широко используемым гидродинамическим моделям уже около двухсот лет.

Всякая модель — это наша попытка сказать, по возможности, просто о сложном явлении. Раз просто, значит, о чем-то сказано не будет. О чём говорить необходимо, а что можно опустить? Какие стороны явления модель должна описывать, а какие — необязательно? Ответ на этот вопрос далеко не однозначен, и тот, который можно считать данным на сегодняшний день, является результатом многовекового отбора фактов, их систематизации и осмысления. В итоге получается примерно следующее. К наиболее существенным свойствам наблюдаемых объектов принято относить такие их способности:

- *существовать*, т.е. занимать место в трехмерном пространстве мест;
- *двигаться*, т.е. изменять место с течением времени;
- *сохранять состояние* равномерного прямолинейного движения и препятствовать его изменению (эту способность принято описывать с помощью понятия массы);
- *взаимодействовать* с другими объектами (для описания таких взаимодействий вводится понятие силы).

Конечно, это далеко не все свойства реальных жидкостей или газов (да все и не перечислишь), и, в этом смысле, работать мы будем скорее со схемами реальных объектов. Однако природа так устроена, что для того, чтобы знать, как и почему течет жидкость, вовсе неважно, какой у нее, к примеру, цвет или запах. Указанные же четыре свойства, оказываются определяющими.

Таким образом, гидромеханика как раздел теоретической физики описывает идеальные понятия, называемые *телами*, и наделенные следующими свойствами:

- 1) *местом* в трехмерном пространстве мест;
- 2) *движением* — способностью менять место с течением времени;
- 3) *массой* — способностью сохранять состояние прямолинейного равномерного движения;
- 4) способностью взаимодействовать с другими телами посредством *силы*.

1.2. Место: пространство событий и системы отсчета

Будем мыслить тело B состоящим из совокупности *точек тела* $\{X, Y, \dots\}$. Любая точка тела, например X , в каждый данный момент времени t занимает в трехмерном пространстве мест P место $P(t, X)$.²

Пара (момент времени, место) $= (t, P(t, \cdot))$ называется *событием*,³ а совокупность всех таких пар — *пространством событий* W или *пространственно-временным континуумом* (или, наконец, *пространством-временем*). Пространство событий можно представлять себе состоящим из бесконечной совокупности *пространств мест* $P(t, \cdot) \equiv P_t$, занумерованных вещественным параметром t , который мы отождествляем с *временем*.⁴

²Никто не видел *тело* вне пространства и вне времени. *Пустое пространство* отдельно от времени, как и *время само по себе*, никем не наблюдалось. Более того, наблюдение как раз и предполагает совокупность одного, другого и третьего. Все эти понятия лишь чрезвычайно удобные абстракции, помогающие разобраться в существе дела.

³Здесь и далее точка, т.е. значок $(\cdot)$ — «держатель» места. Сюда может быть поставлен любой объект из оговоренного ранее множества.

⁴Хорошей иллюстрацией пространству событий может служить киноплёнка, на которой запечатлен какой-нибудь эпизод. Каждый кадр фиксирует одновременные события, произошедшие в различных точках пространства мест. Но кадров много! Что изображено на них? Одно и то же пространство мест, в котором есть время, и все живет, все меняется? Или перед нами снимки различных пространств мест, каждое из которых связано со своим моментом времени и ни с каким иным, в которых, другими словами, нет времени (да и само время здесь оказывается лишь чередой сменяющих друг друга пространств мест)? Легко понять, что однозначного ответа на этот вопрос дать нельзя. Любая точка зрения имеет право на существование. Первая — более традиционна, вторая же, пришедшая из теории относительности, представляется более универсальной и потому кажется более перспективной.

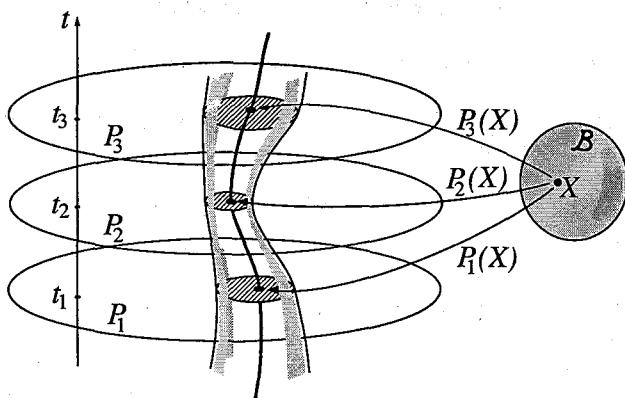


Рис. 1. Мировые линии и мировая трубка тела B . Пространства P_1, P_2, P_3 — пространства одновременных событий. События из P_i все произошли в момент времени t_i .

С течением времени точка тела X занимает в соответствующих пространствах P_t места $P_t(X)$. Совокупность событий $(t, P_t(X)) \in \mathcal{W}$, связанных с одной и той же точкой тела $X \in B$, образует кривую $\lambda(t, X)$, которая называется *мировой линией* этой точки тела. У каждой точки тела своя мировая линия.⁵ Если считать, что тело B всегда состоит из одних и тех же точек (т.е. точки тела не возникают и не исчезают), то одно и то же событие не может быть связано с разными точками тела, и, следовательно, мировые линии не могут пересекаться и/или сливаться. Мы будем придерживаться этой точки зрения. Кроме того, время направлено лишь от прошлого к будущему, и поэтому мировые линии

⁵В качестве иллюстрации этой идеи возьмем ленту самописца. Одномерное движение пера превращается в плоскую кривую в пространстве мест (ленте). Каждая точка этой кривой есть проекция события, т.е. местоположение пера, связанное с определенным временем.

Мировые линии содержат всю информацию о движении. Примером тому может служить граммофонная пластинка, на которой хранится копия отрезка проекции мировой линии конца иглы звукозаписывающего аппарата. Те звуки, что заставили эту иглу двигаться, могут быть извлечены вновь из информации, хранящейся в звуковой канавке пластинки.

не имеют точек самопересечения. Для каждой данной точки тела X ее мировая линия есть функция одной переменной t . Будем предполагать, что она достаточно гладкая и дифференцируема по t нужное число раз (как минимум дважды).

Само тело B занимает в пространствах P_t совокупности мест $P_t(B)$ различные, вообще говоря, в разные моменты времени t . Совокупность мировых линий точек тела B будем называть его *мировой трубкой* $\lambda(t, B)$. Примеры мировой линии и мировой трубки показаны на рис.1. Для наглядности трехмерное пространство мест изображено в виде куска плоскости. Пространство событий W представляется в виде бесконечной совокупности трехмерных (на рисунке — двумерных) пространств мест, «нанизанных» на временную ось. С каждым моментом времени связано свое пространство мест. Можно считать, что момент времени служит номером соответствующего пространства мест, каждое из которых есть пространство одновременных событий (все события, связанные с точками некоторого пространства мест P_t , произошли в один и тот же момент времени t).

Что значит описать положение тела (или точки тела) в пространстве или во времени? Из повседневного опыта каждый знает, что однозначное определение события означает указание *даты* и *места*. Для событий, происходящих на Земле — это, чаще всего, указание времени прошедшего с момента Рождества Христова, а также направления и расстояния до какого-либо хорошо известного пункта (например, Мекки). Возможны, конечно, и другие способы. В любом случае, требуются какие-то события-ориентиры, относительно которых определяются остальные события. В конечном счете, события считаются описанными, если с каждым из них связана упорядоченная совокупность чисел (в нашем примере — это (*время, направление, расстояние*)) и заданы события-ориентиры, относительно которых эта совокупность чисел имеет указанный смысл (в примере, это Р.Х. и некоторый, заранее выбранный, пункт). Такой способ описания событий трудно переоценить, поскольку он открывает путь к построению количественных (т.е. математических) моделей явления, позволяя заменить работу с событиями, оперированием с числами, а это — хорошо разработанная область знаний.

Ныне, после веков сомнений и споров, в классическом естествознании возобладали точка зрения, согласно которой *пространство счита-*

ется однородным и изотропным, а время однородным. Другими словами, пространственно-временной континуум сам по себе считается лишенным каких-либо ориентиров, относительно которых можно было бы отсчитывать расстояния и направления.⁶ В такой ситуации, когда нет абсолютных ориентиров, приходится назначать их самим. Человек постоянно пользуется большим количеством подобных ориентиров и выбирает те или иные из них в зависимости от проблемы, с которой сталкивается. По существу, это означает выбор нулевого момента (Сотворение Мира, Новый Год, звонок на урок и т.п.) и единицы измерения времени, а также системы координат в пространстве мест (обычно — полярные, но часто используются сферические, декартовы, и проч.; связанные с поверхностью Земли, с «неподвижными звездами» или с предметным стеклышком микроскопа).

В результате, с каждым событием однозначно связывается упорядоченная четверка чисел⁷ (время t и три координаты места $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$), имеющая смысл четырех координат в пространственно-временном континууме $\mathcal{W}$, если указаны упомянутые выше системы координат на временной оси и в пространстве мест.

Упорядоченная четверка чисел $(t, \mathbf{x}) = (t, x_1, x_2, x_3)$ — это элемент четырехмерного вещественного пространства $\mathbb{R}^4$. Отображение ϕ , ставящее в соответствие событию из $\mathcal{W}$ точку из $\mathbb{R}^4$, называется *системой отсчета*

$$\phi: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}^4. \quad (1.1)$$

Паре (момент времени, место), т.е. событию, ставится в соответствие другая пара — (вещественное число, упорядоченная тройка вещественных чисел). Совокупность моментов времени отображается на вещественную ось $\mathbb{R}^1$, нуль которой определяет *начало отсчета*. Вещественное число t , поставленное в соответствие некоторому моменту времени, называется *временем* этого момента. Расстояние $|t_1 - t_0|$

⁶Наблюдаемая повсюду неоднородность и анизотропия связывается с объектами, помещенными в лишенное всяких неоднородностей пространство. Что касается времени, то оно считается однородным, поскольку (и до тех пор, пока) нет оснований считать его иным.

⁷Упорядоченность означает, что важны не только значения чисел, но и порядок, в котором они расположены. Так, в принятом нами упорядочении, первое число — всегда время. Две совокупности не равных между собой чисел, различающиеся лишь порядком своих членов, считаются разными.

между двумя моментами времени называется **временным интервалом**. Если $t_1 > t_0$, то t_1 называется более поздним временем, нежели t_0 .

Упорядоченная тройка вещественных чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$, поставленная в соответствие месту $P_t(\cdot)$, однозначно его определяет и называется **координатами** этого **места**, если указана система координат в пространстве мест. Таким образом, система отсчета, как и вообще любое отображение, есть правило, ставящее в соответствие элементам одного множества элементы другого.

Необходимо понимать, что в пространстве $\mathbb{R}^4$ не существует какой-то точки, специально предназначенной для события $(t, P_t(\cdot))$ из $\mathcal{W}$. Связь между $\mathcal{W}$ и $\mathbb{R}^4$ устанавливаем мы сами, выбирая ту или иную систему отсчета ϕ . Аналогично и в пространстве $\mathbb{R}^3$ нет точки, жестко связанной с каким-либо местом пространства мест. Выбор системы координат дает нам эту связь. Но это — выбор! И три числа x_1, x_2, x_3 останутся лишь числами, если наряду с ними не подразумевается вполне определенная система координат.

Часто возникает искушение слить воедино пространство мест P и трехмерное пространство вещественных чисел $\mathbb{R}^3$, мыслить их как единое целое, отождествить. Такое отождествление, как правило, очень удобно. Даже рисунки становятся, вроде бы, понятнее, если на них изображена, кроме всего прочего, система координат (обычно — декартова). В этом нет ничего удивительного: ведь координаты и придуманы были для удобства. Однако при этом нельзя забывать, что само пространство мест никаких координат не подразумевает, а образ пространства мест P в $\mathbb{R}^3$ сильно зависит от отображения $P \rightarrow \mathbb{R}^3$. Так, например, если это отображение задается декартовой системой координат, то образом P является все $\mathbb{R}^3$, но в случае, скажем, сферических координат образом P уже будет бесконечный параллелепипед (рис.2).

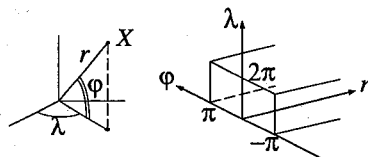


Рис. 2. Отображение пространства мест P на $\mathbb{R}^3$ в случае сферических координат. Полубесконечный параллелепипед — образ P .

Упражнение. Покажите, что это действительно так.

Уг.ч. 1283

1.3. Движение

С каждой точкой тела X связана бесконечная совокупность событий — мировая линия $\lambda(t, X)$, кривая, точки которой занумерованы вещественным параметром t — временем. Время меняется, меняется и событие, связанное с точкой тела X в данный момент времени. Отслеживая смену событий, мы перемещаемся с течением времени по мировой линии. Скорость этого перемещения определяется, как известно, касательным вектором $\vec{u} = d_t \lambda$ (рис.3). Чем больше скорость перемещения $|\vec{u}|$, тем длиннее касательный вектор $d_t \lambda$.

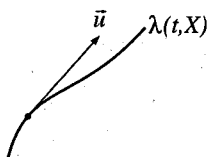


Рис. 3. Касательный вектор $\vec{u}$ — вектор скорости перемещения по мировой линии.

Выбирая систему отсчета ϕ , мы наделяем все события координатами. Точки мировой линии $\lambda(t, X)$ получают координаты $(t, \mathbf{x}(t))$, где $\mathbf{x}(t)$ — координаты места, которое занимает точка X в момент времени t относительно выбранной системы отсчета. В этом случае касательному вектору $\vec{u}$ ставится в соответствие набор чисел — его компонент

$$\vec{u} = d_t \lambda(t, X) \stackrel{\phi}{=} d_t (t, \mathbf{x}(t)). \quad (1.2)$$

Букву над знаком равенства, указывающую выбранную систему отсчета, далее мы будем опускать. Надо отчетливо понимать, что вектор не зависит от того, ввели ли мы какую-нибудь систему отсчета. Он существует помимо нее. Однако, компоненты вектора такие, как они определены здесь, возникают лишь при введении системы отсчета.

Вектор $\vec{u}$, как и всякая производная, есть предел отношения

$$\vec{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\lambda(t + \Delta t, X) - \lambda(t, X)}{\Delta t},$$

который после введения системы отсчета переписывается в виде

$$\vec{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t, \mathbf{x}(t + \Delta t)) - (t, \mathbf{x}(t))}{\Delta t}.$$

В числителе стоит разность элементов $\mathbb{R}^4$, и она вычисляется, как известно, покомпонентно. Получаем (для сокращения записи координаты

места не раскрываем)

$$\vec{u} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{(t + \Delta t) - t}{\Delta t}, \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \right) = \left(1, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \right),$$

или, вводя обозначения $v_i = d_t x_i$,

$$\vec{u}(t, \mathbf{x}(t)) = (1, d_t \mathbf{x}(t)) = (1, v_1, v_2, v_3).$$

Осталось выяснить, в каком базисе⁸ числа $(1, \{v_i\})$ имеют смысл компонент вектора $\vec{u}$. Иными словами, что это за векторы $\{\vec{e}_i\}_{i=0}^3 = \{\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, линейная комбинация которых с весами $(1, v_1, v_2, v_3)$ однозначно определяет вектор скорости $\vec{u}$

$$\vec{u} = 1 \cdot \vec{e}_0 + v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3? \quad (1.3)$$

Во-первых, векторы базиса $\{\vec{e}_i\}$ и вектор $\vec{u}$ должны быть элементами одного векторного пространства, чтобы (1.3) имело смысл. Это, в частности,

означает, что точка мировой линии $(t, \mathbf{x}(t))$ есть нуль этого векторного пространства, а все векторы, ему принадлежащие, в том числе и базисные, «начинаются» в этой точке. Во-вторых, совокупность векторов $\{\vec{e}_i\}$ не должна содержать нулевого вектора. В противном случае, представление (1.3) не единственно и, значит, $\{\vec{e}_i\}$ не базис. В-третьих, компоненты базисных векторов относительно самих себя суть

$$\vec{e}_0 = (1, 0, 0, 0), \quad \vec{e}_1 = (0, 1, 0, 0), \quad \vec{e}_2 = (0, 0, 1, 0), \quad \vec{e}_3 = (0, 0, 0, 1).$$

Легко видеть, например, что $\vec{e}_2 = (0, 0, 1, 0) = 0 \cdot \vec{e}_0 + 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 0 \cdot \vec{e}_3$.

Попробуем теперь понять, как расположены векторы базиса $\{\vec{e}_i\}$. Компонента $v_i = d_t x_i$ есть скорость изменения i -й координаты места

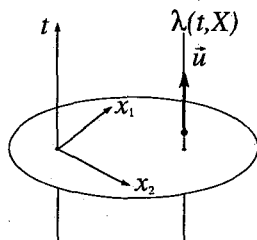


Рис. 4. Мировая линия точки, покоящейся относительно начала системы координат. Касательный вектор $\vec{u}$ в некоторой точке мировой линии пропорционален базисному вектору $\vec{e}_0$ в той же точке.

⁸Предполагается, что читатель «в курсе» того, что есть векторное пространство, его базис, компоненты вектора относительно базиса и проч. В двух словах определение векторного пространства дается ниже на стр.26 применительно к силам.

при движении вдоль мировой линии. Если $v_i = 0$, значит, этого изменения нет. Таким образом, если с течением времени точка тела X находится в месте, имеющем одни и те же координаты, ее мировая линия λ параллельна оси времени. Касательный вектор $d_t \lambda = \vec{u}$ также параллелен оси t , имеет компоненты $(1, 0, 0, 0)$ и, следовательно, $\vec{u} = 1 \cdot \vec{e}_0$. Но $\vec{u}$ направлен вдоль оси t , значит, также направлен и базисный вектор $\vec{e}_0$ (см. рис.4).

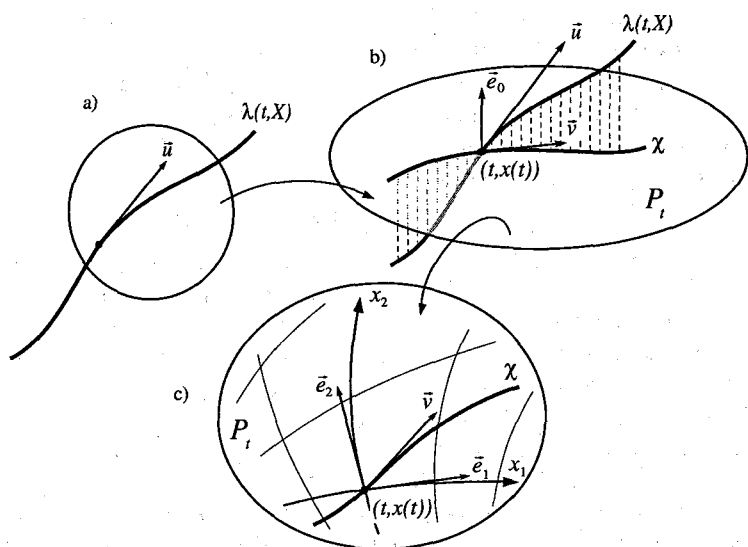


Рис. 5. а) Мировая линия точки тела X и касательный к ней вектор $\vec{u}$; б) траектория движения точки X — проекция той же мировой линии λ на пространство мест P_t ; касательный к траектории вектор $\vec{v}$ — проекция $\vec{u}$ на P_t : $\vec{u} = (1, \vec{v}) = 1 \cdot \vec{e}_0 + \vec{v}$; в) координаты в пространстве мест P_t и координатный базис $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_3)$, относительно которого $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Расположение остальных базисных векторов легче узнать, изучая проекцию мировой линии на пространство мест P . Проектирование ставит в соответствие точке мировой линии $\lambda(t, X) = (t, x(t))$ точку

параметризованной кривой⁹ $\mathbf{x}(t)$ в пространстве мест. Отображение $\chi: (t, X) \mapsto \mathbf{x}(t)$ или

$$\mathbf{x}(t) = \chi(t, X) \quad (1.4)$$

называется **движением** точки X , а кривая $\chi(t, X)$ — **траекторией** точки X в пространстве мест. В каждый момент времени t точкам тела соответствует совокупность мест $\chi(t, \mathcal{B})$, называемая **конфигурацией тела** в этот момент времени.¹⁰ Таким образом, конфигурация тела есть сечение его мировой трубки в указанный момент времени.

Поскольку выше мы уже решили не рассматривать пересекающиеся мировые линии, отображение (1.4) обратимо, т.е. существует отображение $\chi^{-1}: (t, \mathbf{x}) \mapsto X$. Иначе говоря, зная момент времени t и координаты места $\mathbf{x}$, всегда можно указать точку тела X

$$X = \chi^{-1}(t, \mathbf{x}), \quad (1.5)$$

которая в это время там находилась.

Вектор $\vec{v}$, касательный к кривой $\chi(t, X)$, является проекцией вектора $\vec{u}$ на то же пространство мест. Его компонентами в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ служат числа (v_1, v_2, v_3) , т.е.

$$\vec{v} = d_t \mathbf{x} = d_t x_1 \vec{e}_1 + d_t x_2 \vec{e}_2 + d_t x_3 \vec{e}_3 = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3.$$

Для любого базисного вектора (скажем, $\vec{e}_3$) находим $\vec{e}_3 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3$. Таким образом, для базисного вектора $\vec{e}_3$ имеем $d_t x_1 = d_t x_2 = 0$, а $d_t x_3 = 1$. Это значит, что $\vec{e}_3$ есть единичный вектор, касательный к координатной кривой¹¹ x_3 . Остальные векторы базиса $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ суть единичные векторы, касательные к координатным кривым x_1 и x_2 соответственно (см. рис.5). Базис, составленный из векторов, касательных к координатным кривым, называется **координатным базисом**.

⁹ *Параметризованной кривой* в пространстве мест P будем называть дифференцируемое отображение открытого подмножества из $\mathbb{R}^1$ в P . По сути это означает, что параметризация кривой есть последовательная нумерация всех ее точек вещественными числами (значениями параметра).

¹⁰ Всякий, кто наблюдал бегающую капельку ртути или растекающуюся лужицу воды, легко поймет, что такое конфигурация жидкого тела: в обоих примерах тела можно все время считать одними и теми же, но конфигурации постоянно меняются.

¹¹ Не стоит забывать, что координатные прямые — лишь частный случай координатных линий, т.е. таких кривых, точки которых различаются лишь одной координатой.

Окончательно получаем следующую картину. С каждой точкой мировой линии связано векторное пространство, представителем которого служит вектор, касающийся мировой линии в этой точке. Если в качестве базиса в таком векторном пространстве взять единичные векторы, касательные к координатным кривым (см. рис.6), то компонентами вектора $\vec{u}$ скорости перемещения по мировой линии будут служить производные по времени от соответствующих координат точки $\lambda(t, X) = (t, \mathbf{x}(t))$. При этом, три последние компоненты $\vec{u}$ суть компоненты вектора $\vec{v}$, касательного к проекции мировой линии на пространство мест, т.е. к траектории движения. Разумеется, базис можно взять другой, но тогда изменятся и компоненты векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

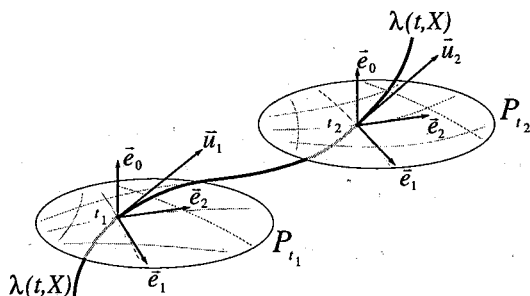


Рис. 6. Базисы касательных пространств в различных точках мировой линии, соответствующих моментам времени t_1 и t_2 ; векторы $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ суть векторы скорости движения точки тела X в пространственно-временном континууме.

1.4. Масса тела

Многочисленные наблюдения показывают, что все тела, представляющие интерес для гидромеханики, обладают в той или иной степени способностью сохранять состояние прямолинейного равномерного движения и препятствовать его изменению. Эту способность тел называют

массой.¹² Она является настолько консервативной характеристикой тела, что это было замечено и легло в основу всей классической физики под названием *закона сохранения массы*.

Простейший способ описать какое-либо свойство тела — приписать телу некоторое численное значение, характеризующее это свойство. Именно так и поступают с массой. Каждому телу B приписывается вещественное число $M(B)$, которое называется массой тела. Поступая таким образом, мы автоматически удовлетворяем закону сохранения массы, потому что число, характеризующее массу, приписывается телу независимо от времени.

Поскольку все тела только препятствуют изменению состояния покоя и никогда не способствуют этому, массы всех тел должны быть числами одного знака. Традиционно выбирается знак плюс. Кроме того, ни одно из тел не в силах воспрепятствовать изменению состояния покоя. По этой причине, массой тела считается конечное число. Наконец, еще одно наблюдаемое свойство массы — *аддитивность*. Это означает, что общая масса любых двух тел B и C , не имеющих общих точек (такие тела называются *отделенными*; их пересечение пусто, т.е. $B \cap C = \emptyset$), равна сумме масс каждого из них

$$M(B \cup C) = M(B) + M(C). \quad (1.6)$$

Таким образом, аддитивность массы состоит в том, что массы отделенных тел складываются. Формализуем теперь все, что было сказано выше.

Обозначим через Ω множество всех тел, обладающих массой. Это значит, что если два произвольных тела B и C являются элементами Ω , то $B \cup C$ и $B \cap C$ также принадлежат Ω . Кроме того, будем считать, что $\emptyset \in \Omega$, а масса пустого множества (и только его) равна нулю. Определим на Ω ограниченную, вещественную, неотрицательную, аддитивную функцию

$$M: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{0+}, \quad (1.7)$$

¹²Как и в случае с однородным и изотропным пространством (см. сноску 6 на с.16), никто и никогда не наблюдал такое состояние движения. Представление о нем возникло как раз из желания описать наблюдаемое непрямолинейное и неравномерное движение как результат воздействия на тело окружающей среды. При таком понимании неравномерности движения, в отсутствие внешних воздействий, тело должно сохранять состояние покоя (или равномерного движения, что, впрочем, одно и то же).

где через $\mathbb{R}^{0+}$ обозначено множество неотрицательных вещественных чисел. *Массой* $M(B)$ тела B назовем значение массовой функции M на элементе B из множества Ω .

Принятое определение, очевидно, не задает нам массовую функцию M однозначно. Так, если M — некоторая массовая функция и $c = \text{const} > 0$, то новая функция cM также является массовой функцией, поскольку удовлетворяет определению (т.е. является конечной, положительной и аддитивной). Как видим, на Ω можно задать разные массовые функции, выбирая то или иное значение константы c . Таким образом, численные значения массы тел могут быть произвольными, однако, отношение масс тел при этом не изменится:

$$\frac{M(B_1)}{M(B_2)} = \frac{cM(B_1)}{cM(B_2)}.$$

Нас, вообще говоря, интересует не само значение $M(B)$, которое, как мы только что увидели, может быть любым числом, а именно отношение $M(B)$ к массе некоторого эталонного тела $\mathcal{E}$. В частности, взвешивание, т.е. измерение веса W тела основывается именно на отношении масс тела B и эталона (гири) $\mathcal{E}$. Действительно, в силу того, что $W(B) = M(B)g$, $g = \text{const} > 0$, имеем

$$\frac{W(B)}{W(\mathcal{E})} = \frac{M(B)}{M(\mathcal{E})}.$$

Таким образом, никаким взвешиванием отличить одну массовую функцию от другой, ей пропорциональной, нельзя. Выбор же той или иной массовой функции, по существу, оказывается выбором эталона, с массой которого сравнивается масса любого другого тела. Вспомним, что, говоря о массе тела, мы называем не только число, но и единицу измерения, т.е. явно указываем эталон, которому приписана масса, равная единице.

1.5. Сила — способ описания взаимодействий

К этому моменту наблюдаемое неоднородное пространство событий мы договорились интерпретировать следующим образом.

— пространственно-временной континуум считается однородным,

- неоднородности отождествляются с телами,
- тела стремятся двигаться прямолинейно и равномерно.

Осталось объяснить, почему они так не двигаются, т.е. почему они движутся неравномерно и непрямолинейно, или, иначе говоря, с ускорением?

В настоящее время изменение характера движения тела принято объяснять его *взаимодействием* с другими телами, а механизм этого взаимодействия описывать с помощью понятия *силы*. На множестве Ω вводится *система сил*, и это означает, что каждой паре (B, C) элементов из Ω ставится в соответствие некоторая величина $f_B(C, t)$, называемая *силой*, с которой тело C действует на тело B в момент времени t . Понятно, что величина $f_C(B, t)$ будет силой, с которой тело B действует на тело C .

Многочисленные наблюдения механических взаимодействий показывают, что силы взаимодействия отделенных тел обладают рядом свойств. Например, верны утверждения:

- 1) Сила $f_B(C, t)$ действия тела C на тело B равна по величине силе $f_C(B, t)$ действия тела B на тело C , но направлена в противоположную сторону;
- 2) Если на тело B действует не только тело C , но и тело D , то силы $f_B(C, t)$ и $f_B(D, t)$ отличны от силы $f_B(C \cup D, t)$.
Наконец, можно считать, что
- 3) Сила взаимодействия тела с самим собой равна нулю, т.е. $f_B(B, t) = 0$;

Взаимодействие рассматриваемого тела B сразу с совокупностью тел $\{C_i\}$ часто удобно интерпретировать, как взаимодействие с одним телом, представляющим собой объединение всех тел из $\{C_i\}$, т.е. описывать силой $f_B(\cup_i C_i, t)$, называемой *результатирующей*. Результирующую силу можно определить для любого тела B из Ω с помощью понятия *внешности тела*,¹³ под которой будем понимать тело B^e такое, что $B \cap B^e = \emptyset$ и $B \cup B^e = \Omega$, т.е. такое тело из Ω , точки которого не входят

¹³Это понятие и термин заимствованы у К.Трусделла [11].

в B . Тогда *результатирующей* силой, действующей, на B будет называться сила, с которой на тело B действует его внешность $f_B(B^e, t)$, или $f_B(t)$.

Все упомянутые свойства взаимодействий тел друг с другом приводят к мысли, что для правильного описания этих взаимодействий нам надо уметь их складывать (т.е. описывать совместное действие двух и более тел на третье) и умножать на числа (например, силу $f_C(B, t)$ из свойства 1 можно трактовать как силу $f_B(C, t)$, умноженную на число -1). Другими словами, надо придумать такие правила сложения сил и умножения их на числа, чтобы действие двух отделенных тел A и C на третье тело B можно было бы записывать как сумму сил:

$$f_B(A \cup C, t) = f_B(A, t) + f_B(C, t), \quad (1.8)$$

а силу противодействия (см. свойство 1, выше) — как произведение силы действия на число (-1) :

$$f_C(B, t) = (-1) f_B(C, t).$$

В математическом арсенале имеется разработанное средство для работы с подобного рода объектами. Называется оно *векторным пространством*. Таким образом, если мы хотим корректно определить сложение сил и умножение их на числа, требуется, чтобы введенная нами система сил имела структуру векторного пространства. Сразу скажем, что физическая интерпретация такой структуры не единственна и мы вправе выбрать наиболее нам подходящую. В любом случае, введение структуры векторного пространства означает следующее.

- На множестве Ω выбирается элемент (тело) B , с которым связывается нулевой вектор 0 , и который мы интерпретируем, как силу $f_B(B, t) = 0$ (см. свойство 3, выше).
- Всем остальным элементам, например C_i , ставятся в соответствие векторы $f_B(C_i, t)$, описывающие силы, с которыми элементы (тела) C_i действуют на B .
- Задается правило, согласно которому каждой паре векторов $f_B(C_1, t)$ и $f_B(C_2, t)$ ставится в соответствие третий $f_B(C_3, t) = f_B(C_1, t) + f_B(C_2, t)$, называемый их суммой.

- Задается правило, согласно которому каждому вектору $\mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t)$ и числу α ставится другой вектор $\mathbf{f}_B(\mathcal{A}, t) = \alpha \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t)$, называемый произведением вектора $\mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t)$ на α .
- Указанные правила должны удовлетворять следующим аксиомам (подробности см. в любом учебнике по линейной алгебре):

- 1) $\mathbf{f}_B(\mathcal{A}, t) + \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) = \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) + \mathbf{f}_B(\mathcal{A}, t)$ — суммирование симметрично
- 2) $(\mathbf{f}_B(\mathcal{A}, t) + \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t)) + \mathbf{f}_B(\mathcal{D}, t) = \mathbf{f}_B(\mathcal{A}, t) + (\mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) + \mathbf{f}_B(\mathcal{D}, t))$ — суммирование ассоциативно
- 3) Нулевой вектор 0 таков, что $\mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) + 0 = \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t)$
- 4) Для любого вектора $\mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t)$ существует вектор $(-\mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t))$, называемый *противоположным*, такой, что

$$\mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) + (-\mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t)) = 0$$

- 5) $1 \cdot \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) = \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t)$
- 6) $\alpha (\mathbf{f}_B(\mathcal{A}, t) + \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t)) = \alpha \mathbf{f}_B(\mathcal{A}, t) + \alpha \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t)$
- 7) $(\alpha + \beta) \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) = \alpha \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) + \beta \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t)$
- 8) $(\alpha \beta) \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) = \alpha (\beta \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t))$.

Раскрывая скобки в пункте 4, левую часть обычно записывают как разность векторов

$$\mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) + (-1) \cdot \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) = \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) - \mathbf{f}_B(\mathcal{C}, t) = 0.$$

Таким образом, разность векторов определяется через сумму и умножение на -1 .

Нетрудно видеть, что все эти аксиомы достаточно естественны. Они лишь отражают наше желание легко и просто работать с такими новыми объектами, как векторы. Если сумма и произведение не будут удовлетворять этим аксиомам, то нельзя будет раскрывать скобки, менять местами слагаемые, выносить за скобку общий множитель и т.п.

Почему всюду фигурирует тело B ? Просто потому, что, интересуясь влиянием различных тел из Ω на тело B , мы связали с ним нулевой вектор. Вместо B можно взять любое другое тело. Получим, при этом, другое векторное пространство на том же множестве Ω . Но надо иметь в виду, что сложение определяется лишь для векторов, принадлежащих одному и тому же векторному пространству. Таким образом, если на множестве Ω определено два векторных пространства, то сумма двух векторов из разных пространств неопределена, т.е. попросту лишена смысла.¹⁴

После введения векторного пространства на множестве Ω в нашем распоряжении оказываются правила сложения сил и умножения их на числа. Каковы именно эти правила (т.е. какой конкретно вектор считать, например, суммой двух других), определяется решаемой задачей. В нашем случае, где вектор интерпретируется как сила, суммарный вектор определяется как диагональ параллелограмма, построенного на суммируемых векторах. В другой задаче может понадобиться иное определение.

¹⁴Смысл могут добавить какие-нибудь дополнительные процедуры, типа параллельного переноса (см. стр.56). Но здесь мы их не рассматриваем.

2. Основные гипотезы и законы

2.1. Гипотеза сплошности

Описать движение тела значит указать явную зависимость $x(t) = \chi(t, X)$ для всех частиц X , это тело составляющих. Причем, размер этих частиц должен быть достаточно мал, чтобы их можно было ассоциировать с точками. Сколько же частиц составляют тело, и сколько таких зависимостей нужно получить?

Пусть P_1 — часть тела B , сохраняющая все его свойства. Пусть P_2 — часть P_1 , т.е. $P_2 \subset P_1$. До каких пор можно строить цепочку $B \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_k \supset \dots$ так, чтобы каждая часть P_k сохраняла свойства тела B ? Существует ли некоторая неделимая часть X тела B или деление можно продолжать до бесконечности? Ответ известен: да, существует. Однако он совершенно неудовлетворителен, главным образом, потому, что количество таких чрезвычайно малых неделимых частей (а это по современным представлениям молекулы), обычно фантастически велико. Количество зависимостей, описывающих движение частиц намного превышает человеческие возможности. Учитывая это, мы либо вынуждены ограничиваться рассмотрением небольшого числа частиц, теряя при этом из виду сам объект (жидкость или газ), либо получаем немыслимо сложную задачу. Положение усугубляется и тем, что в природе молекулы не являются независимыми частицами и весьма сложным образом взаимодействуют друг с другом. Полное пренебрежение этим взаимодействием не всегда возможно.

Неожиданным выходом из тупика оказывается допущение бесконечной делимости тела, т.е. допущение того, что в пределах конфигурации тело не дискретно и, кроме того, сколь бы малой не была частичка тела, она сохраняет все его свойства. Парадоксальность ситуации состоит в том, что казалось бы непосильная, из-за огромного числа частиц задача может упроститься, если считать, что тело содержит бесконечное и даже несчетное их множество. Причина этого в том, что отказываясь от рассмотрения тела как совокупности большого, но конечного числа частиц и заменяя его, так называемой, *сплошной средой*, мы получаем с одной стороны возможность использовать мощный инструмент исследования (хорошо разработанный аппарат математического анализа, теорию дифференциальных уравнений и проч.), а с другой — прибли-

женно учитываем межмолекулярные взаимодействия. Чтобы все это стало возможным, требуется принять допущение, известное как *гипотеза сплошности*.

Будем называть тело *сплошной средой*, если для него выполняется *гипотеза сплошности*, т.е. истинны следующие утверждения:

- 1) Любое тело представляет собой *всюду плотное множество* точек.
- 2) Свойства тела описываются *дифференцируемыми функциями* точек тела.

После принятия этой гипотезы прежде разобщенные и независимые частицы тела (молекулы) оказываются связанными друг с другом, поскольку все свойства тела описываются теперь дифференцируемыми функциями (это утверждение 2). Отныне, зная, что происходит в какой-либо точке, мы примерно представляем, что происходит в точках, находящихся в ее окрестности. Именно для того, чтобы иметь такую возможность, нам и нужно вводить дополнительные фиктивные точки тела, т.е. заменять конечную совокупность молекул бесконечным плотным множеством точек. Первое утверждение как раз и означает, что в теле нет изолированных точек: в любой окрестности каждой точки тела найдется хотя бы еще одна точка тела (точные формулировки см. в курсах математического анализа, например, [9]).

Когда можно считать тело сплошной средой? Сколько должно быть молекул в капле жидкости, чтобы ее можно было назвать сплошной? А звезд на небе мало для этой цели или достаточно? По-видимому, тело, которое можно было бы рассматривать как сплошное, должно быть не слишком разреженным. Однако, разреженность понятие относительное: вода или воздух у поверхности Земли представляются не слишком разреженными средами. Но, ведь, мы можем изучать движение, скажем, десятка молекул той же воды. Среда в этом случае остается прежней, расстояния между молекулами не меняются, но кажется маловероятным, что средства, пригодные для описания поведения десяти молекул, подойдут и в случае несчетного множества частиц. Судя по тому, важно не только, какие молекулы мы рассматриваем и на каких расстояниях они друг от друга находятся, но и сколько их. Количество

же молекул, попадающих в поле нашего зрения, определяется тем явлением, которое мы изучаем, его характерным пространственным масштабом. Если мы изучаем движение десятка молекул воды, то скорее всего это не сплошная среда, а если нас интересует движение той же воды в океане, то без большой ошибки ее можно считать сплошной средой.

Таким образом, очевидно, что гипотеза сплошности, как и любая другая, имеет свои пределы применимости, т.е. не всякое тело или не всегда можно считать сплошной средой. Критерием здесь служит, так называемое, *число Кнудсена*,¹⁵ которое определяется как отношение длины свободного пробега молекул в рассматриваемом веществе l , к пространственному масштабу исследуемого явления L

$$Kn = \frac{l}{L}$$

Это число характеризует относительную разреженность изучаемого вещества. При $Kn < 0.1$ использовать гипотезу сплошности считается допустимым, так как размеры области, занятой изучаемой средой, велики по сравнению с расстоянием между молекулами вещества.¹⁶ Если $Kn > 1$, то мы имеем дело с, так называемым, свободным молекулярным течением. Это область применения кинетической теории газов. Наконец, диапазон $Kn \in [0.1, 1]$ — переходная область. Здесь масштабы тела лишь незначительно превышают длину свободного пробега молекул.

2.2. Интегральные параметры и их плотности

Принятие гипотезы сплошности и представления о теле как о сплошной среде означает, что нас интересуют в основном макроскопические процессы. Именно они будут описываться явно. Процессы, происходящие на микроуровне (где у нас находится теперь множество фиктивных точек) будут либо описываться параметрически (т.е. характеризоваться числом — значением параметра), либо не приниматься в

¹⁵Кнудсен (Knudsen) Мартин Ханс Кристиан (1871–1949), датский физик и океанограф.

¹⁶Этим объясняется широкое применение понятий и методов теории сплошных сред в таких областях физики, где, казалось бы, ни о какой сплошной среде говорить не приходится, например, в астрофизике (см. [2]).

расчет. Такой подход требует введения ряда новых понятий и, в первую очередь, представления об *интегральных параметрах* и *параметрах локальных* или *плотностях*.

2.2.1. Части тела

Замкнутую поверхность, отделяющую связное¹⁷ подмножество точек тела B от остальных его точек, будем называть *поверхностью раздела*, а оба подмножества — *частями тела*. Каждая часть тела, в свою очередь, конечно, может рассматриваться как тело. Существует теорема (см. например, [10]), согласно которой поверхность раздела в любой момент времени состоит из одних и тех же точек тела. Поверхность, обладающая таким свойством, называется *кинематической границей*. Таким образом, поверхности раздела, как и поверхности конфигураций тел, являются кинематическими границами.

2.2.2. Интегральные параметры среды

Если некоторая величина (будем пока обозначать ее буквой Π), является характеристикой тела, как единого целого, она называется его *интегральным параметром*. Примером такого параметра может служить масса, характеризующая способность тела препятствовать изменению состояния покоя.

Формально *интегральный параметр среды* Π определяется как ограниченная, вещественная, аддитивная функция, определенная на множестве Ω .

В этом определении, в отличие от того, что было дано для массы, отсутствует требование неотрицательности, т.е. допускаются и знакопеременные параметры, а также зависимость от времени. Помимо массы, можно придумать и другие интегральные параметры. Так, объем $V(t, B) = V(\chi(t, B))$ конфигурации $\chi(t, B)$ тела B — пример зависящего от времени положительного интегрального параметра, а электрический заряд — пример знакопеременного параметра. Далее мы рассмотрим несколько таких величин.

¹⁷Множество называется *связным*, если каждая его пара точек может быть соединена непрерывной кривой, лежащей в этом множестве, т.е. состоящей из точек этого же множества.

Пусть какой-либо интегральный параметр определен для тела B . Тогда он также определен и для любой его части $P \subset B$. При этом, в соответствие с определением, $|\Pi(t, P)| < |\Pi(t, B)|$. Рассмотрим бесконечную последовательность частей тела $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$ такую, что $P_{k+1} \subset P_k, \forall k$ и $\bigcap_k P_k = X$, т.е. каждый следующий элемент последовательности есть подмножество предыдущего, и все они имеют лишь одну общую точку X . Значения модуля параметра $\Pi^k = \Pi(t, P_k)$ на элементах последовательности $\{P_k\}$ образуют монотонно убывающую числовую последовательность $|\Pi^1| > |\Pi^2| > \dots > |\Pi^k| > \dots$, ограниченную снизу нулем. Известно, что такая последовательность имеет предел $\lim_{k \rightarrow \infty} |\Pi^k| = 0$, т.е. значение интегрального параметра в точке сплошной среды равно нулю. Таким образом, масса любой точки тела $M(X)$, как и занимаемый ею объем $V(\chi(t, X))$, равны нулю, а значит, интегральные параметры не могут служить характеристиками среды в точке.

Вместе с тем, предел отношения интегрального параметра части тела P_k к занимаемому этой частью объему $V^k = V(t, P_k) = V(\chi(t, P_k))$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\Pi^k}{V^k} = \pi(t, \chi(t, X)) = \pi(t, x(t)), \quad (2.1)$$

вообще говоря, отличен от нуля и является функцией точки. Величина $\pi(t, x(t))$ называется *плотностью* интегрального параметра Π в точке $(t, x(t))$.

Так, например, *плотность массы* ρ есть по определению

$$\rho(t, x(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M(P_k)}{V^k}. \quad (2.2)$$

В отличие от массы, плотность массы является характеристикой одной из точек пространства мест, занимаемых конфигурацией тела в некоторый момент времени. Она оказывается, таким образом, *локальной характеристикой*.

Зная плотность параметра π в некоторой конфигурации χ , можно определить сам интегральный параметр Π , вычислив интеграл по точкам этой конфигурации:

$$\Pi(t, B) = \int_{\chi} \pi(t, x(t)) dV. \quad (2.3)$$

Здесь dV — бесконечно малый элемент объема конфигурации.

Масса тела находится в соответствии с общей формулой (2.3) как значение интеграла:

$$M(B) = \int_{\chi} \rho(t, \mathbf{x}(t)) dV. \quad (2.4)$$

Она по определению не зависит от времени, поэтому этот аргумент здесь и опущен.

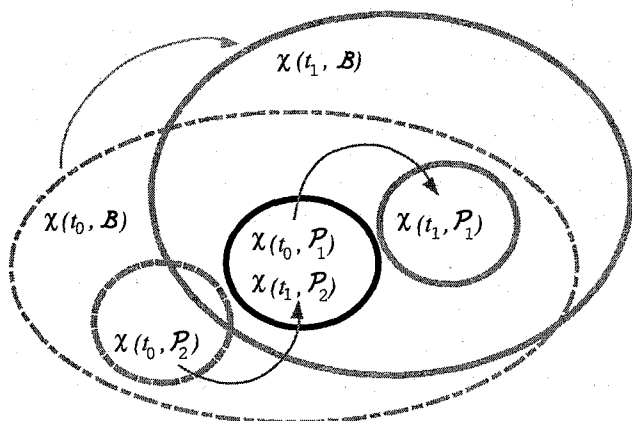


Рис. 7. Область пространства, ограниченная черной линией, в разное время является конфигурацией различных частей тела B . В момент t_0 эта область занята частью P_1 , а в момент t_1 — частью P_2 .

2.2.3. Интегральные характеристики области пространства

Точки тела B занимают в пространстве мест область, соответствующую текущей конфигурации $\chi(t, B)$. Поскольку отображение χ полагается обратимым, область $\chi(t, B)$ в момент времени t и тело B связаны взаимно однозначно: мы говорим «тело B в момент времени t » — подразумеваем область $\chi(t, B)$ в пространстве мест; мы говорим «область $\chi(t, B)$ в момент времени t » — подразумеваем тело B , в этот момент там находящееся.

Если с телом связан интегральный параметр $\Pi(t, \mathcal{B})$, то в каждый данный момент времени t его можно рассматривать не только как характеристику тела, но и как характеристику той области пространства мест $\chi(t, \mathcal{B})$, которую это тело занимает. Таким образом,

$$\Pi(t, \mathcal{B}) = \Pi(\chi(t, \mathcal{B})).$$

Пусть $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{B}$ часть тела $\mathcal{B}$, а $\chi(t_0, \mathcal{P}_1)$ ее конфигурация в момент времени t_0 . В общем случае в любой другой момент времени t_1 эта часть тела займет область $\chi(t_1, \mathcal{P}_1)$, а прежняя область окажется конфигурацией какой-то другой части тела, скажем, $\mathcal{P}_2$, т.е. $\chi(t_0, \mathcal{P}_1) = \chi(t_1, \mathcal{P}_2)$ (см. рис.7). Каждая фиксированная область пространства в различные моменты времени является конфигурацией различных тел или их частей. По этой причине, говоря о параметре, характеризующем область пространства мест в некоторый момент времени t , удобно связывать его не с конфигурацией какой-либо части тела (поскольку здесь безразлично, какой именно), а с объемом V этой области, т.е. рассматривать величину $\Pi(t, V)$. В таком случае сам интегральный параметр $\Pi(t, V)$ и соответствующая ему плотность связаны соотношением

$$\Pi(t, V) = \int_V \pi dV. \quad (2.5)$$

2.2.4. Еще раз о различиях

$\Pi(t, \mathcal{P})$ против $\Pi(t, V)$.

Подчеркнем еще раз разницу между $\Pi(t, \mathcal{P})$ и $\Pi(t, V)$.

$\Pi(t, \mathcal{P})$ — характеристика тела или его части, т.е. того множества точек, поведение которых мы исследуем, независимо от места, где они находятся;

$\Pi(t, V)$ — характеристика области пространства, т.е. множества мест, объемом V , независимо от того, какие именно точки тела эти места занимают.

Если оба параметра рассматривать как функции времени, то $\Pi(t, \mathcal{P})$ показывает изменение Π в теле $\mathcal{P}$ с течением времени (например, изменение объема, занимаемого конфигурацией тела). В свою очередь, $\Pi(t, V)$ показывает эволюцию параметра Π в объеме V (например, изменение массы вещества, заключенного в данном объеме).

Обратите внимание на то, что разный смысл имеют лишь интегральные параметры, а не соответствующие им плотности. Функция $\pi(t, \mathbf{x})$ и в формуле (2.3), и в формуле (2.5) одна и та же. Только в первом случае аргументами плотности служат координаты $(t, \mathbf{x}(t))$ точки мировой линии, а во втором — координаты $(t, \mathbf{x})$ фиксированной точки пространства-времени. Согласно принятой гипотезе сплошности, плотность массы, как и плотность любого другого интегрального параметра, считается дифференцируемой функцией всех своих аргументов, т.е. плотность изменяется от точки к точке гладко, без скачков и изломов в пределах конфигурации тела.

Интегральный параметр против локального параметра.

Следует также отчетливо понимать принципиальное различие между интегральными и локальными параметрами среды. Интегральный параметр — величина измеряемая. Более того, мы в состоянии измерять только интегральные параметры. Математическое понятие, им соответствующее, так и называется — *мера*. Масса, объем, заряд и т.п. — это все различные меры тела (среды). Соответствие здесь однозначное: если мера, значит можно измерить, а если что-то измеряется, значит это мера, т.е. интегральный параметр среды, пусть занимающей даже очень малый объем (но не точку потому, что среда — это, по определению, всегда бесконечно много точек). Напротив, плотность, или локальный параметр, не измеряется никогда, а всегда вычисляется уже хотя бы потому, что той самой точки тела, в которой она определяется теоретически, в природе может не существовать (реальные тела на микроуровне дискретны). Ведь для того, чтобы избежать этой неприятности и была придумана гипотеза сплошности. Итак, плотность — это теоретическая, умозрительная конструкция. Даже если утверждается, что какой-нибудь прибор измеряет плотность π , на самом деле, он этого не делает. Он измеряет не ту функцию точки, которую мы здесь определили, а отношение двух мер: интегрального параметра части тела $\Pi(t, P_k)$ к занимаемому этой частью объему V^k . Иными словами — некую среднюю плотность. В случае однородной среды, какой именно плотностью пользоваться — настоящей или средней — безразлично. А если среда неоднородна? Неизбежно возникает погрешность измерения и, в общем случае, всегда ненулевая.

2.3. Деформация. Эйлеровы и лагранжевы координаты

Объем V конфигурации $\chi(t, B)$, как уже говорилось, также является интегральным параметром, но, в отличие от массы, его значение приписывается не телу, а тому множеству мест, которое это тело занимает, т.е. конфигурации тела. По этой причине объем конфигурации — величина в общем случае переменная. Плотность этого параметра, найденная по формуле (2.3), всюду оказывается равной единице и потому неинформативной.

Если, однако, среди всего множества разных конфигураций, соответствующих различным моментам времени, выбрать и зафиксировать одну (любую), то можно исследовать изменение занимаемого телом объема относительно объема, фиксированной конфигурации. Выбранная конфигурация κ носит название *отсчетной*. Чаще всего используют конфигурацию, соответствующую начальному моменту времени t_0 :

$$\kappa(B) = \chi(t_0, B). \quad (2.6)$$

Все другие конфигурации называются *текущими*. Координаты мест, занимаемых точками тела в отсчетной конфигурации, традиционно называются *лагранжевыми координатами*¹⁸ (или, иногда, *метками*) точек тела. Мы будем обозначать их прописными буквами $X = (X_1, X_2, X_3)$. Таким образом,

$$X = \kappa(X) = \chi(t_0, X). \quad (2.7)$$

Координаты тех же точек тела в текущих конфигурациях называются их *эйлеровыми координатами*.¹⁹ Они являются функциями времени.

Учитывая, что эйлеровы координаты той же точки тела X в момент времени t есть $x(t) = \chi(t, X)$ и все конфигурации, по договоренности, обратимы, находим связь лагранжевых и эйлеровых координат одной и той же точки тела. А именно: из (2.7) найдем $X = \kappa^{-1}(X)$ и, далее,

$$x(t) = \chi(t, \kappa^{-1}(X)) = \chi_\kappa(t, X), \quad x(t_0) = X, \quad (2.8)$$

¹⁸Лагранж (Lagrange) Жозеф Луи (1736–1813), французский математик и механик.

¹⁹Эйлер (Euler) Леонард (1707–1783), математик, физик и астроном. Родился и учился в Швейцарии, работал в Германии и России, где и умер.

т.е. лагранжевы координаты точки тела X суть ее эйлеровы координаты в начальный момент времени.

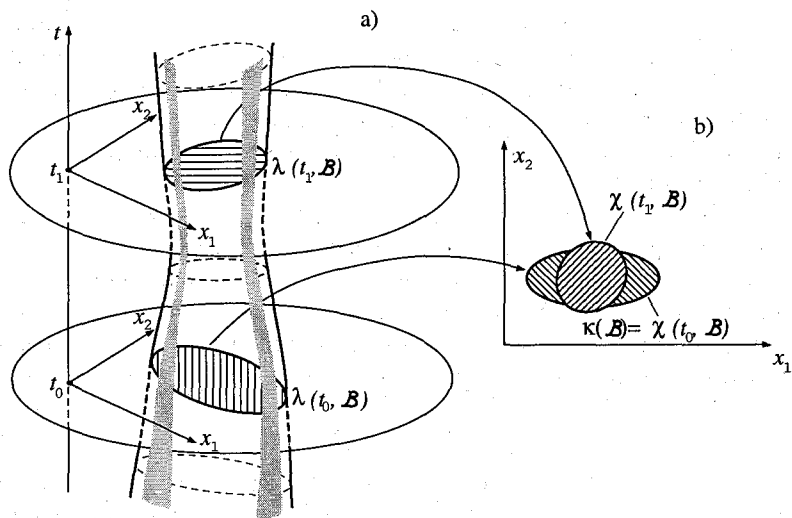


Рис. 8. а) сечения мировой трубки тела B , соответствующие отсчетному моменту времени t_0 — $\lambda(t_0, B) = (t_0, \kappa(B))$ и некоторому текущему моменту времени t_1 — $\lambda(t_1, B) = (t_1, \chi(t_1, B))$, б) деформация отсчетной конфигурации $\kappa(B)$ в текущую $\chi(t_1, B)$. Обе конфигурации суть сечения мировой трубки, спроектированные на какое-либо пространство мест.

Зависящее от времени отображение $\chi_\kappa: (t, X) \mapsto x(t) = \chi_\kappa(t, X)$ описывает изменение положений точек тела при переходе от отсчетной конфигурации $\kappa(B)$ к соответствующей текущей $\chi(t, B)$, или деформацию отсчетной конфигурации. Оно так и называется *деформацией* тела B за время $(t - t_0)$ по отношению к отсчетной конфигурации (рис.8). Обратите внимание, оба отображения и $\chi(t, X)$, и $\chi_\kappa(t, X)$ дают текущие (эйлеровы) координаты некоторой точки тела. Только в первом случае эта точка указана явно, а во втором — задана своими координатами в отсчетной конфигурации (лагранжевыми координатами).

Иногда вместо (2.8) мы будем пользоваться сокращенной записью

$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{X})$, понимая под этим то, что всякая траектория $\mathbf{x}(t)$ связана с точкой тела, имеющей лагранжевы координаты $\mathbf{X}$.

После того, как выбрана отсчетная конфигурация, ее можно использовать для вычисления величины, характеризующей текущую деформацию отсчетной конфигурации

$$J = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{V(\chi_\kappa(t, \mathcal{P}_k))}{V_\kappa^k}.$$

Здесь $V_\kappa^k = V(\kappa(\mathcal{P}_k))$ — объем $\mathcal{P}_k$ в отсчетной конфигурации. Геометрический смысл этой величины — относительное изменение бесконечно малого объема при переходе от отсчетной конфигурации к текущей.

Объем текущей конфигурации есть по определению величина, равная

$$V(\chi_\kappa(t, \mathcal{B})) = \int_{\chi_\kappa} dV,$$

где интегрирование ведется по точкам текущей конфигурации. С другой стороны, рассматривая величину J как «плотность» объема текущей конфигурации χ_κ относительно объема отсчетной конфигурации κ , с помощью формулы (2.3) вычислим

$$V(\chi_\kappa(t, \mathcal{B})) = \int_\kappa J dV.$$

Здесь интегрирование ведется по точкам отсчетной конфигурации. Сравнивая обе формулы, получаем

$$\int_{\chi_\kappa} dV = \int_\kappa J dV.$$

Вспомним, теперь, что координаты точки X в отсчетной конфигурации есть $\mathbf{X}$, а в текущей — $\mathbf{x}(t)$. Функция J , таким образом, оказывается якобианом преобразования координат. Этого следовало ожидать, поскольку якобиан как раз и дает величину относительного изменения бесконечно малого объема при преобразовании координат.

2.4. Законы сохранения

Основная тенденция всех развитых естественнонаучных дисциплин — построение аксиоматических теорий, т.е. попытка сведения всей

совокупности накопленных знаний о предмете к небольшому набору постулатов. Все остальное, по замыслу, должно выводиться из них по правилам формальной логики. По существу, эти постулаты и есть модель объекта, ибо все прочие сведения об объекте должны быть необходимыми следствиями. В противном случае, набор постулатов неполон.

Гидромеханика достигла значительных успехов в этом отношении. Множество различных движений жидкостей и газов удается описать системой нескольких дифференциальных уравнений. Нельзя не подивиться такой концентрации знаний: число уравнений в системе и число ее различных решений — вещи не сопоставимые. Эти дифференциальные уравнения, в свою очередь, получаются при некоторых предположениях, как следствия, из *интегральных законов* движения сплошной среды.

2.4.1. Интегральные законы сохранения

Выбор в качестве основы интегральных законов понятен: именно интегральные соотношения можно получить из данных наблюдений, поскольку именно интегральные параметры доступны измерению. Часть таких соотношений, имеющих наиболее общий характер, получают далее статус *законов природы*, что с математической точки зрения эквивалентно понятию аксиомы — базовому утверждению, принимаемому без доказательства. Обычно они формулируются либо как 1) *законы сохранения* значений неких интегральных параметров в процессе движения, либо как 2) *соотношения баланса*: изменение значения интегрального параметра в некотором объеме вызывается (балансируется) и/или производством внутри, и/или притоком извне. Рассмотрим первый вариант и его следствия.

Одним из фундаментальных принципов современного естествознания является, так называемый, *принцип причинности*, согласно которому всякое следствие (изменение) должно иметь причину, и следствие не может причине предшествовать. Если каким-то образом нам стали известны причины, вызывающие изменение некоторого интегрального параметра $\Pi(t, B)$, то это может быть записано в виде уравнения

$$d_t \Pi = \Sigma. \quad (2.9)$$

Величина Σ , описывающая скорость изменения Π под действием при-

чины, называется *мощностью источника (стока)* этого параметра.

В отсутствие причины мощность источника/стока равна нулю $\Sigma = 0$, и значения $\Pi(t, B)$ с течением времени не меняются

$$d_t \Pi = 0. \quad (2.10)$$

В этом случае, параметр Π есть величина, сохраняющаяся во время движения. Оба уравнения и (2.9) и (2.10) носят название *интегрального закона сохранения*.

2.4.2. Дифференциальные законы сохранения

Поскольку интегральный параметр Π удовлетворяет равенствам (2.9) или (2.10), его плотность π также должна удовлетворять определенным соотношениям, которые называются *дифференциальными законами сохранения*. Для вывода таких соотношений запишем мощность источника Σ в виде

$$\Sigma(t, B) = \int_{\chi} \sigma(t, \chi(t)) dV. \quad (2.11)$$

Плотность $\sigma(t, \chi(t))$ называется *генерацией (продукцией, притоком)* величины Π .

Теперь дифференциальное уравнение, соответствующее закону сохранения (2.9), можно найти, подставив в (2.9) выражения (2.3) и (2.11). Получим

$$d_t \int_{\chi} \pi dV = \int_{\chi} \sigma dV. \quad (2.12)$$

Схема дальнейших рассуждений такова. Вычисляем производную и пытаемся получить равенство типа

$$\int_{\chi} A(\pi) dV = 0, \quad (2.13)$$

где A — некоторый оператор. Предполагаем, далее, непрерывность подынтегрального выражения и находим требуемое соотношение $A(\pi) = 0$, поскольку конфигурация χ произвольна.²⁰ Здесь, однако,

²⁰Из равенства нулю интеграла по произвольной области от непрерывной функции следует равенство нулю самой функции.

возникает затруднение, связанное с тем, что конфигурация χ зависит от времени и, значит, операторы дифференцирования и интегрирования в (2.12) не коммутируют, т.е. их нельзя просто поменять местами. Для того чтобы обойти это затруднение, воспользуемся, так называемой, **теоремой переноса**,²¹ которую сейчас сформулируем и докажем.

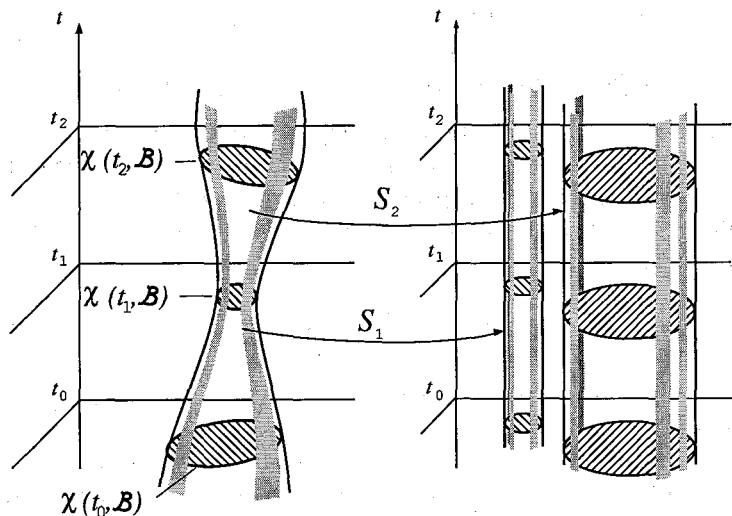


Рис. 9. Мировая трубка и варианты ее выпрямления.

2.4.3. Теорема переноса

Пусть $\chi = \chi(t, B)$ конфигурация тела B , соответствующая моменту времени t , а $\pi(t, \mathbf{x}(t))$ — функция, определенная на точках $\mathbf{x} \in \chi$ конфигурации тела B . Каждая такая конфигурация есть сечение мировой трубки тела $\lambda(t, B)$ гиперплоскостью равных времен. Выбранная

²¹Эта теорема встречается и под другими названиями. Используемое здесь название заимствовано из книги [10].

нами система отсчета ϕ включает в себя систему координат на оси t и систему координат в пространстве мест.

В общем случае точки тела движутся в пространстве мест неравномерно относительно выбранной системы координат. В результате, мировая трубка тела «искривлена», а конфигурации тела в разные моменты времени различны, т.е. зависят от времени. Если бы этой зависимости не было, то оператор $d_t(\cdot)$ можно было бы внести под знак интеграла, и проблема была бы решена. Такое искривление проявляется всегда лишь в *инерциальной системе отсчета*.²² Выбором определенной неинерциальной системы отсчета можно добиться прямолинейности любой мировой трубки.

Попробуем воспользоваться этим наблюдением. Рассмотрим в пространстве мест преобразование координат S , зависящее от времени так, что образы мировых линий в $\mathbb{R}^4$, а значит, и мировой трубки под действием S выпрямляются (рис.9). Сечения мировой трубки гиперплоскостями равного времени в новых координатах равны друг другу в том смысле, что всегда состоят из одних и тех же точек пространства $\mathbb{R}^3$, а точки тела всегда имеют одни

и те же пространственные координаты независимо от времени. Выпрямляющее преобразование S должно быть взаимно однозначным, иначе мы не сможем вернуться обратно. Однако, это требование не определяет его единственным образом. И, действительно, способов выпрямить мировую трубку бесконечно много. Обычно поступают так. Фиксируют отсчетную конфигурацию κ_* согласно (2.6), а системы ко-

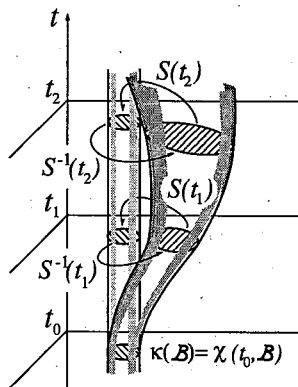


Рис. 10. К доказательству теоремы переноса: выпрямление мировой трубки.

²² Принцип относительности Галилея постулирует существование систем отсчета, которые называются *инерциальными* и обладают следующими свойствами: 1) во всех инерциальных системах отсчета законы природы одинаковы и 2) система отсчета, движущаяся относительно инерциальной системы отсчета равномерно, инерциальна.

ординат в пространствах мест P_t , соответствующие другим моментам времени, выбирают так, чтобы координаты точек с течением времени не менялись (рис.10). Конфигурация тела, при этом, также не будет меняться, оставаясь равной $\kappa(B)$.

В результате применения такого выпрямляющего преобразования S интеграл в левой части (2.12) приводится к интегралу по отсчетной конфигурации, а подынтегральное выражение умножается на соответствующий якобиан J преобразования лагранжевых координат в эйлеровы $J = |\partial x_i x_j|$. Это обычная замена переменных в интегралах (см. например, [9]). Левая часть (2.12) переписывается в виде

$$d_t \int_{\kappa} \pi J dV, \quad (2.14)$$

и, поскольку конфигурация κ от времени не зависит, оператор дифференцирования можно внести под знак интеграла. Получаем

$$\int_{\kappa} d_t (\pi J) dV. \quad (2.15)$$

Теперь, чтобы (2.12) записать как (2.13) нужно либо (2.11) записать в терминах отсчетной конфигурации, либо (что мы и сделаем) вернуться к текущей конфигурации χ в (2.15), воспользовавшись обратным преобразованием S^{-1} . Такое преобразование всегда существует, так как в качестве преобразования S мы взяли взаимно однозначное отображение эйлеровых координат в лагранжевы. Подынтегральное выражение снова умножается на якобиан преобразования координат. Однако теперь это преобразование обратное, а значит и якобиан такого преобразования равен $1/J$. Имеем

$$\int_{\chi} \frac{1}{J} d_t (\pi J) dV. \quad (2.16)$$

В итоге, получаем связь скорости изменения интегрального параметра со скоростью изменения его плотности:

$$d_t \int_{\chi} \pi dV = \int_{\chi} \frac{1}{J} d_t (\pi J) dV. \quad (2.17)$$

Теорема переноса утверждает справедливость равенства (2.17). Это кинематическая теорема, и она выполняется для любой плотности π , независимо от ее природы.

2.4.4. Дифференциальные законы сохранения (продолжение)

Применив теорему переноса (2.17) к выражению (2.12), мы сразу получаем уравнение типа (2.13)

$$\int_{\chi} \left(\frac{1}{J} d_t (\pi J) - \sigma \right) dV = 0.$$

Отсюда немедленно находим, что для выполнения интегрального закона сохранения (2.10) плотность π должна удовлетворять уравнению

$$\frac{1}{J} d_t (\pi J) = \sigma, \quad (2.18)$$

или

$$d_t \pi = \sigma - \pi \frac{1}{J} d_t J. \quad (2.19)$$

Это уравнение называется *дифференциальным законом сохранения*, соответствующим интегральному закону сохранения (2.10).

Что же означает это уравнение? Функции π и J определены в точках $(t, x(t)) = \lambda(t, X)$, где $X \in \mathcal{B}$, $t \in \mathbb{R}^1$. Отсюда видно, что вдоль мировых линий обе функции зависят лишь от времени. Таким образом, дифференциальный закон сохранения (2.19) утверждает, что скорость изменения π вдоль любой мировой линии определяется совокупным действием генерации σ и относительным изменением объема. При этом, если генерация отсутствует, то, согласно (2.18), изменение плотности любого интегрального параметра обратно пропорционально изменению бесконечно малого объема.

Функция π — плотность интегрального параметра Π , а J равно величине относительного расширения ($J > 1$)/сжатия ($J < 1$) бесконечно малого объема, движущегося с телом. Если в процессе движения изолированного тела происходит его сжатие и объем конфигурации уменьшается, то $J < 1$ и плотность π увеличивается ровно настолько, чтобы произведение πJ в данной точке тела, т.е. на той же мировой линии, сохранило свою прежнюю величину.

Положим $\sigma = 0$ и проинтегрируем уравнение (2.18). Общим решением является $J\pi = \text{const}$, т.е. решений бесконечно много. Для того чтобы выбрать единственное интересующее нас частное решение, требуется

задать некоторое дополнительное условие, которому это решение будет удовлетворять. Например, указать значение функции-решения в какой-то точке. В качестве такой точки обычно выбирается начальный момент времени t_0 . Это и дает условию название — *начальное условие*. Поскольку J — якобиан преобразования лагранжевых координат в эйлеровы, то в начальный момент времени, когда текущая конфигурация совпадает с отсчетной, $J = 1$. Если обозначить $\pi|_{t=t_0} = \pi_0$, получим следующую задачу:

$$d_t(\pi J) = 0, \quad (2.20)$$

$$J\pi|_{t=t_0} = \pi_0, \quad (2.21)$$

которая называется *задачей с начальным условием* или *задачей Коши*.²³ Интересующим нас частным решением оказывается $J\pi = \pi_0$. По виду оно совпадает с начальным условием, но справедливо для любого момента времени. Сохраняющейся вдоль мировых линий величиной оказывается значение плотности π_0 , связанное с точкой тела в отсчетной конфигурации.

Таким образом, с каждой сохраняющейся в отсутствие внешних воздействий характеристикой тела, как целого, связан интегральный закон сохранения и соответствующий ему дифференциальный закон сохранения. Далее мы рассмотрим другие формулировки дифференциального закона сохранения (2.18) и свяжем его с близким по смыслу *уравнением баланса*.

²³Коши (Cauchy) Огюстен Луи (1789–1857), французский математик.

3. Скорости изменения характеристик среды

3.1. Скорость изменения места. Траектории движения

Простота, с которой было проинтегрировано уравнение (2.18), в значительной мере иллюзорна, а формула (2.20) имеет теоретическую, но отнюдь не практическую ценность. Дело в том, что уравнение (2.18) описывает изменение величины (πJ) вдоль мировой линии. Соответственно и формула (2.20) справедлива вдоль этого же множества точек. Но оно-то неизвестно! Как же его найти?

Вспомним, что множество мест, каждое из которых поочередно занимает точка тела X в различные моменты времени, можно представлять в виде кривой λ , пронизывающей «стопку» пространств мест P_t . Эта кривая — мировая линия точки тела. Если всю «стопку» пространств P_t «спрессовать» в одно пространство P , т.е. спроектировать все P_t на какое-то одно из них (любое), то мировая линия отобразится на трехмерную кривую — траекторию $\chi(t, X)$, а касательный к ней вектор $\vec{u} = (1, \vec{v})$ отобразится в вектор $\vec{v}$, касательный к χ . Поскольку векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ связаны однозначно, сосредоточим внимание на последнем.

Вектор $\vec{v}$ определяется как

$$\vec{v} = d_t x(t). \quad (3.1)$$

Это определение скорости перемещения. Однако, если в каждой точке некоторой области пространства мест вектор $\vec{v}$ задан, т.е. *определено* поле²⁴ скорости $\vec{v}$, тогда выражение (3.1) можно рассматривать как уравнение, описывающее траектории движения точек тела. Общее решение (3.1) описывает все возможные траектории движения в заданном поле скорости. Для того чтобы из этой совокупности частных решений выбрать то единственное, что нас интересует, необходимо дополнитель-

²⁴ *Поле* величины φ , заданной в области V пространства мест, называется *правильным*, ставящее в соответствие каждой точке из V значение величины φ в этой точке. Поле называется *скалярным*, если φ — скалярная величина. Если же φ — вектор, поле называется *векторным* и т.п.

но задать начальное условие, т.е. сформулировать задачу Коши:

$$d_t \mathbf{x} = \vec{v}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{x}|_{t=t_0} = \mathbf{X}. \quad (3.3)$$

Здесь (3.3) — начальное условие.

Нетрудно записать ту же задачу, как говорят, «в координатах» или «в компонентах». Имеется в виду следующее. Если некоторые векторы (в нашем случае $d_t \mathbf{x}$ и $\vec{v}$) удовлетворяют определенному соотношению (здесь — уравнению (3.2)), то какие-то соотношения справедливы и для компонент этих векторов. Пусть в каждой точке интересующей нас области пространства задан координатный базис $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$, относительно которого оба вектора из равенства (3.2) определяются своими компонентами и могут быть записаны в виде:

$$d_t \mathbf{x} = d_t x_1 \vec{e}_1 + d_t x_2 \vec{e}_2 + d_t x_3 \vec{e}_3, \quad \vec{v} = v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2 + v_3 \vec{e}_3.$$

Переноса, скажем, вектор $\vec{v}$ в левую часть (или, наоборот, $d_t \mathbf{x}$ — в правую), и вынося одинаковые базисные векторы за скобки, получим

$$d_t \mathbf{x} - \vec{v} = (d_t x_1 - v_1) \vec{e}_1 + (d_t x_2 - v_2) \vec{e}_2 + (d_t x_3 - v_3) \vec{e}_3 = 0. \quad (3.4)$$

Все эти манипуляции (перенос вектора в другую часть равенства со сменой знака (кстати, почему он меняется?), вынесение общего множителя за скобку, и проч.) возможны лишь в том случае, если и $d_t \mathbf{x}$ и $\vec{v}$ суть элементы векторного пространства (вспомните аксиомы векторного пространства, приведенные на стр.26).

У нас именно такой случай: два одинаковых вектора из касательно-го векторного пространства, определенного в точке пространства мест P_t с координатами $\mathbf{x}$. В правой части (3.4) стоит нулевой вектор, все компоненты которого по определению равны нулю. Но тогда нулевым является и вектор, стоящий в левой части равенства, т.е. и его компоненты равны нулю. Отсюда, для $i = 1, 2, 3$ получаем

$$d_t x_i = v_i.$$

Другими словами, одно векторное уравнение соответствует системе уравнений. Аналогичными рассуждениями находим необходимые начальные условия

$$x_i|_{t=t_0} = X_i.$$

Положение точек в произвольной (текущей) конфигурации описывается ее эйлеровыми координатами, т.е. координатами, меняющимися во времени относительно заданной системы отсчета. В начальный момент времени конфигурация называется отсчетной, а координаты точек тела — лагранжевыми. Таким образом, решение задачи (3.2)–(3.3) дает нам траекторию движения, т.е. совокупность эйлеровых координат точки тела X с лагранжевыми координатами X , или связь эйлеровых и лагранжевых координат одной и той же точки тела.

3.2. Скорость изменения скалярной функции. Правило суммирования

В процессе движения меняться могут не только координаты места точек тела, но и другие характеристики. Таковыми, например, являются плотности интегральных параметров, задаваемые скалярными полями, или скорости протекания различных процессов (в том числе и изменения места), задаваемые векторными полями, и другие. Рассмотрим вначале случай скалярной функции.

Пусть на точках тела определено скалярное поле a , т.е. каждой точке тела X с текущими координатами $x(t)$ поставлено в соответствие значение скалярной функции $a(t, x(t))$. С течением времени точка X движется по своей мировой линии. Значения же функции a при этом меняются со скоростью $d_t a$ равной производной по t от сложной функции, а именно:

$$\begin{aligned} d_t a(t, x(t)) &= d_t a(t, x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = \partial_t a + \sum_{i=1}^3 (\partial_{x_i} a) d_t x_i = \\ &= \partial_t a + \sum_i v_i \partial_{x_i} a = \partial_t a + v_i \partial_{x_i} a. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь для сокращения записи в последнем выражении использовано, так называемое, **правило суммирования** Эйнштейна. Оно заключается в том, что сумма ряда, общий член которого состоит из сомножителей, снабженных индексами, записывается без знака суммы. Признаком же необходимого суммирования служит пара повторяющихся индексов.

Например, в нашем случае именно такая ситуация. Повторяющиеся индексы в результате суммирования не входят и потому могут быть обозначены любым значком, не встречающимся в данном выражении. Они и называются *неммыми индексами*. Понятно, что неоднозначность здесь присутствует и должна специально разъясняться, когда суммирование не предполагается. Так, если обсуждается общий член ряда, то ясно, что о сумме речи нет. Кроме того, не всякий ряд можно записать с помощью этого правила. Обычно оно используется в тех выражениях, где регулярно встречаются ряды с одинаковым числом подобных членов. Ситуация типичная для задач тензорной алгебры. Пугающие своей сложностью и длиной выражения, чудесным образом преобразуются и становятся легко обозримыми с применением правила суммирования. Мы, далее, будем широко им пользоваться.

Всегда, когда встречается выражение типа $a_i b_{jk} c_{kjin}$, имеется в виду, что это тройной ряд с общим членом указанного вида, т.е. $\sum_i \sum_j \sum_k a_i b_{jk} c_{kjin}$. Обратите внимание на то, что индекс n не имеет пары и, значит, никакого суммирования по этому индексу не производится. Этот индекс называется *свободным*. Выражение справедливо при любом его значении (от 1 до 3, в нашем случае). Такое суммирование индексированных величин (т.е. компонент тензоров различных рангов, которые встретятся чуть позже) носит название *свертки* (тензоров) по паре (или парам, если их несколько) индексов.

Вернемся к формуле (3.5). Будем интерпретировать числа $\partial_k a$ как компоненты некоего вектора, который обозначим через $\nabla a = (\partial_{x_1} a, \partial_{x_2} a, \partial_{x_3} a)$ и назовем *градиентом* скалярного поля a в точке $x(t)$. В каждый данный момент времени этот вектор характеризует пространственную неоднородность поля a и направлен в сторону его максимального роста. Для обозначения градиента часто используется и сокращение grad . Таким образом,

$$\nabla a = \text{grad } a = (\partial_{x_i} a) \vec{e}_i = \nabla_i a \vec{e}_i. \quad (3.6)$$

Если последнее слагаемое в (3.3) рассматривать как скалярное произведение²⁵ $(\vec{v}, \nabla a)$, то скорость изменения функции a запишется в виде

$$d_t a = \partial_t a + (\vec{v}, \nabla a). \quad (3.7)$$

²⁵ Скалярным произведением называется правило $g(\cdot, \cdot)$, ставящее в соответствие

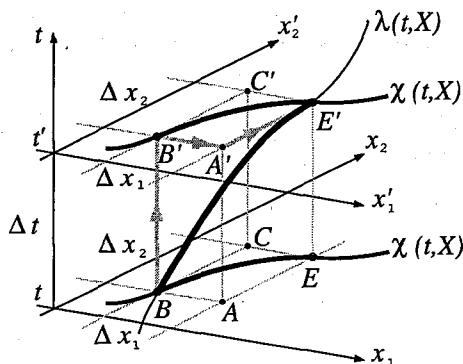


Рис. 11. Связь полной производной d_t с частной ∂_t . Указанный стрелками маршрут соответствует порядку слагаемых в формуле (3.8). Обе кривые $\chi(t, X)$ — одна и та же траектория точки X , т.е. проекция мировой линии $\lambda(t, X)$ на пространство мест. В одном случае таким пространством является P_t , а в другом — $P_{t'}$.

Что означают полученные формулы (3.5) или (3.7)? Рассмотрим в качестве иллюстрации случай двумерного пространства мест. Формула (3.3) примет вид

$$d_t a = \partial_t a|_{x_1, x_2} + v_1 \partial_{x_1} a|_{t, x_2} + \partial_{x_2} a|_{t, x_1}.$$

Обратите внимание на то, что частные производные в правой части, в соответствии с определением, вычисляются при фиксированных зна-

паре векторов данного векторного пространства вещественное число — скаляр:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = g(\vec{a}, \vec{b}) = g_{ij} a_i b_j.$$

Набор чисел $g_{ij} = (\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ называется компонентами *метрического тензора* g (см. основные сведения о тензорах в гл.4) Если эти числа равны

$$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

то $(\vec{a}, \vec{b}) = a_i b_i$, а базис, относительно которого числа a_i и b_j являются компонентами векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, называется *ортонормированным*. Мы будем использоваться только такие базисы. Более общий случай можно найти, например, в [13].

чениях аргументов, не участвующих в дифференцировании (в формуле они указаны явно при каждой производной). Переходя к конечным приращениям, из той же формулы получим приближенное равенство

$$\frac{\Delta a}{\Delta t} = \frac{\Delta a}{\Delta t} \bigg|_{x_1, x_2} + \frac{\Delta x_1}{\Delta t} \frac{\Delta a}{\Delta x_1} \bigg|_{t, x_2} + \frac{\Delta x_2}{\Delta t} \frac{\Delta a}{\Delta x_2} \bigg|_{t, x_1},$$

или, домножая на Δt и сокращая,

$$\Delta a = \Delta a|_{x_1, x_2} + \Delta a|_{t, x_2} + \Delta a|_{t, x_1}. \quad (3.8)$$

В левой части (3.8) стоит изменение функции $a(t, x)$ при перемещении на Δt вдоль мировой линии точки X из пункта В в пункт Е' (рис.11). В правой части стоит сумма приращений a , которая получается при движении между теми же пунктами, но другим маршрутом, а именно, по прямым, параллельным осям координат. Различные маршруты соответствуют различному порядку слагаемых в правой части (3.8). Сама формула утверждает, что приращение Δa не зависит от маршрута. Скалярное произведение $(\vec{v}, \nabla a)$ есть проекция ∇a на направление перемещения, т.е. $\vec{v}$, а сам вектор ∇a направлен в сторону наибольшего изменения функции a .

Еще раз обратим внимание на то, в чем разница производных по времени, стоящих в правой (∂_t) и левой (d_t) частях равенства (3.7). Частная производная по времени, как и любая другая частная производная, вычисляется при фиксированных значениях всех аргументов, кроме одного (здесь, времени). Производная же d_t , которая называется *полной производной*, имеет смысл скорости изменения функции a вдоль мировой линии точки тела. Отсюда, кстати, синонимы — *индивидуальная* или *материальная производная*, т.е. производная, связанная с данной (индивидуальной) точкой тела (материи).

Формула (3.7) справедлива для любой скалярной функции и потому, часто рассматривается как связь полной производной по времени с частной:

$$d_t(\cdot) = \partial_t(\cdot) + (\vec{v}, \nabla(\cdot)) = \partial_t(\cdot) + (\vec{v}, \nabla)(\cdot), \quad (3.9)$$

в отрыве от какой-либо конкретной функции. Эта связь носит название *формулы Эйлера*.

Упражнение. Как должна быть расположена мировая линия, чтобы $d_t = \partial_t$? Какому виду движения соответствует такое расположение мировой линии?

3.3. Скорость изменения векторной функции

Пусть, теперь, на точках тела определено векторное поле $\vec{a}$, т.е. каждой точке тела X с текущими координатами $\mathbf{x}(t)$ поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(t, \mathbf{x}(t))$. Если этот вектор представлять себе стрелочкой, то стрелочка выходит из точки $(t, \mathbf{x}(t))$. Из любой точки могут выходить разные векторы. Все они — представители того векторного пространства, нулевым элементом которого является точка $(t, \mathbf{x}(t))$. Таким образом, со всякой точкой конфигурации тела связано свое векторное пространство, «прикрепляющееся» к ней нулем. Задавая векторное поле на множестве точек, мы выбираем по одному вектору из всех «прикрепленных» к нему векторных пространств.

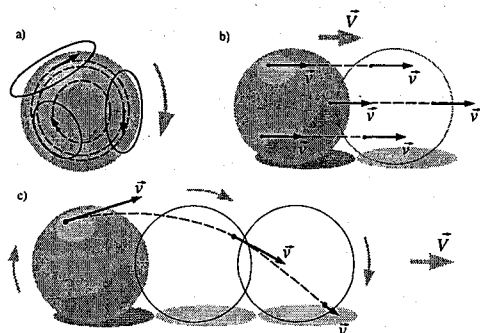


Рис. 12. Векторные поля на шаре: а) шар, вращающийся вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр; б) шар, движущийся поступательно без вращения; в) шар, катящийся без скольжения. Пунктирные кривые — траектории движения точек поверхности. Вектор $\vec{V}$ — скорость поступательного движения шара, а касающийся траектории вектор $\vec{v}$ — скорость движения точки поверхности.

Рассмотрим в качестве примера движение шара (рис.12). Каждая точка поверхности шара движется по своей траектории. Скорость движения может быть разной, но описывается она всегда вектором, касательным к траектории движения данной точки. Все мыслимые векторы скорости движения точки поверхности шара образуют в этой точке векторное пространство. У каждой точки поверхности такое пространство

свое, и скорость движения точки в любой момент времени описывается одним из векторов этого пространства.

Направление вектора и его длина зависят от характера движения шара. Так, если шар вращается (рис.12а) вокруг некоторой неподвижной оси, проходящей через его центр, траектории всех точек его поверхности суть окружности, лежащие на поверхности шара, и поле скоростей есть поле касательных к поверхности шара векторов. Направление вектора скорости зависит от положения точки на траектории, а величина — от расстояния до оси вращения. Напротив, если шар движется поступательно без вращения (рис.12б), траектории движения точек поверхности — параллельные прямые. Поле скоростей однородно, т.е. не зависит от положения точки и момента времени. И, наконец, если шар катится по плоскости без скольжения (рис.12в), траекториями точек являются трохойды, а вектор скорости зависит от положения точки на траектории.

В каждом векторном пространстве можно выбрать базис (пусть это будет координатный базис $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$; см. определение на стр.21) и снабдить векторы соответствующими компонентами. Произвольный вектор $\vec{a}$ запишется тогда в виде

$$\vec{a}(t, \mathbf{x}(t)) = a_i(t, \mathbf{x}(t)) \vec{e}_i(\mathbf{x}(t)). \quad (3.10)$$

Базисные векторы в каждой точке пространства выбираем независимыми от времени. Будем рассматривать только *гладкие векторные поля*, т.е. такие, в которых компоненты векторов меняются от точки к точке гладко. Это означает, что если рассматривать компоненты векторов поля как функции точки (т.е. $a = a(t, \mathbf{x}(t)) = a_i(t, x_1, x_2, x_3)$), то они нужное число раз дифференцируемы по всем своим аргументам.

Вычислим производную по t вектора $\vec{a}$, используя разложение (3.10). Имеем

$$d_t \vec{a} = d_t (a_i \vec{e}_i) = d_t (a_i) \vec{e}_i + a_i d_t (\vec{e}_i). \quad (3.11)$$

Первое слагаемое — вектор с компонентами $d_t (a_i)$, которые легко вычисляются по формуле (3.3):

$$d_t a_i = \partial_t a_i + v_k \partial_{x_k} a_i = \partial_t a_i + (\vec{v}, \nabla a_i), \quad (3.12)$$

поскольку a_i — числовые функции. Обратите внимание на то, что немой индекс i в формуле (3.3) здесь пришлось заменить на k , чтобы не путать

с номером компоненты вектора $\vec{a}$ (ясно, что с тем же успехом можно было бы поменять букву-номер компоненты).

Второе слагаемое также должно быть вектором (ведь, первое — вектор). Тогда по аналогии с (3.12) можно записать

$$d_t \vec{e}_i = (\partial_{x_k} \vec{e}_i) d_t x_k = v_k (\partial_{x_k} \vec{e}_i), \quad (3.13)$$

где $(\partial_{x_k} \vec{e}_i)$ — некий новый вектор. Раскладывая его по базису $\{\vec{e}_j\}$, получим

$$(\partial_{x_k} \vec{e}_i) = \Gamma_{ki}^j \vec{e}_j, \quad (3.14)$$

где Γ_{ki}^j — компоненты вектора $(\partial_{x_k} \vec{e}_i)$ в базисе $\{\vec{e}_j\}$. Подставляя (3.14) в (3.13), найдем

$$d_t \vec{e}_i = v_k \Gamma_{ki}^j \vec{e}_j. \quad (3.15)$$

Вы помните, что в соответствии с правилом суммирования по повторяющемуся индексу, в правой части (3.15) стоит двойная сумма по j и k . Собирая, наконец, вместе (3.11), (3.12) и (3.15), получим

$$d_t \vec{a} = (\partial_t a_i + v_k \partial_{x_k} a_i) \vec{e}_i + \Gamma_{ki}^j v_k a_i \vec{e}_j = (\partial_t a_i + v_k (\partial_{x_k} a_i + \Gamma_{kj}^i a_j)) \vec{e}_i. \quad (3.16)$$

Чтобы получить последнее равенство, пришлось поменять местами немые индексы i и j . Таким образом, для i -й компоненты вектора $d_t \vec{a}$ имеем

$$(d_t \vec{a})_i = \partial_t a_i + v_k (\partial_{x_k} a_i + \Gamma_{kj}^i a_j) = \partial_t a_i + v_k \nabla_k a_i, \quad (3.17)$$

где значком $\nabla_k a_i = \partial_{x_k} a_i + \Gamma_{kj}^i a_j$ обозначена, так называемая, **ковариантная производная** по направлению вектора $\vec{e}_k$. Как видим, она отличается от частной производной по тому же направлению добавочным членом. Эта добавка, которая содержит неизвестные пока величины Γ_{kj}^i , порождается вот какой проблемой.

Вычисление производной векторной функции связано с вычислением разности двух векторов, ведь, согласно стандартному определению, производная в точке $(t, \mathbf{x}(t))$ мировой линии $\lambda(t, X)$ должна была бы равняться пределу:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{a}(t + \Delta t, \mathbf{x}(t + \Delta t)) - \vec{a}(t, \mathbf{x}(t))}{\Delta t}. \quad (3.18)$$

Выражение это, однако, пока бессмысленно, так как разность, стоящая в числителе, не определена. Векторы $\vec{a}(t + \Delta t, \mathbf{x}(t + \Delta t))$ и $\vec{a}(t, \mathbf{x}(t))$ принадлежат разным векторным пространствам. И, вообще, все векторы векторного поля принадлежат разным векторным пространствам, каждый — своему. Ведь все векторы поля начинаются в различных точках.

Упражнение. Проверьте себя: понимаете ли вы разницу между векторным пространством и векторным полем.

Таким образом, ясно, что непосредственным обобщением

скалярного случая скорость изменения вектора не определить. Прежде всего, требуется придумать, как сравнивать вектора, принадлежащие разным векторным пространствам. Одним из способов является, так называемый, *параллельный перенос*, с помощью которого вектор $\vec{a}(t + \Delta t, \mathbf{x}(t + \Delta t))$ переносится в точку t на той же мировой линии (рис.13).

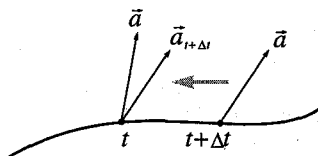


Рис. 13. Параллельный перенос.

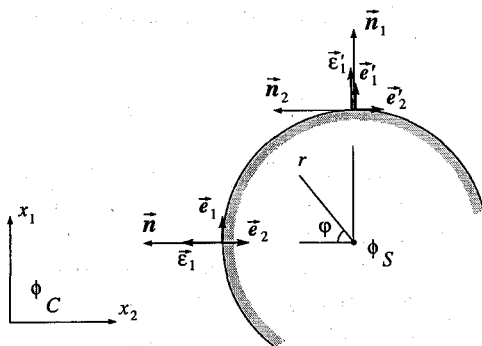


Рис. 14. Параллельный перенос нормального вектора на сфере.

К сожалению, единственного способа параллельного перенесения векторов в общем случае не существует, и все зависит от выбранной на-

ми точки зрения. Чтобы проиллюстрировать возникающие здесь проблемы, рассмотрим такой пример. Пусть где-нибудь, скажем, на экваторе мы построили нормальный к земной поверхности вектор $\vec{n}$ и перемещаемся теперь к полюсу, перенося построенный вектор параллельно самому себе (см. рис.14, где для простоты нарисована двумерная картинка). Какой вектор на полюсе считать параллельным исходному: нормальный $\vec{n}_1$ или касательный $\vec{n}_2$?

Если и на экваторе, и на полюсе используется координатный базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots\}$, связанный с декартовой системой координат ϕ_C , то параллельным, наверное, следует считать вектор $\vec{n}_2$: хоть он и превратился в касательный, но координаты его остались такими же, как и у исходного вектора $\vec{n} = (0, n_C, 0)$. Кроме того, если мы теперь вычислим производную по времени от вектора $\vec{n}$, пользуясь формулой (3.18)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{n}_{||}(\mathbf{x}(t + \Delta t)) - \vec{n}(\mathbf{x}(t))}{\Delta t}, \quad (3.19)$$

где под $\vec{n}_{||}(\mathbf{x}(t + \Delta t))$ понимается вектор $\vec{n}(\mathbf{x}(t + \Delta t))$, перенесенный параллельно в точку $\mathbf{x}(t)$,²⁶ то, очевидно, получим нулевой вектор: разность векторов вычисляется покомпонентно, а компоненты обоих векторов равны. Такой результат естественно интерпретируется, как перенесение вектора $\vec{n}$ без изменений, а это именно то, что требуется от параллельного переноса.

Можно, однако, использовать и другой координатный базис, например, $\{\vec{e}_1, \dots\}$, связанный со сферической системой координат ϕ_S . В этом случае, параллельным, по-видимому, будет вектор $\vec{n}_1$: так как он и нормальный, и координаты у него в выбранном базисе такие же, как у исходного вектора $\vec{n} = (n_S, 0, 0)$. И, наконец, производная по времени, найденная по формуле (3.19), также равна нулю. В геофизических задачах такая точка зрения явно предпочтительна.

Заметьте, при этом, что в любой точке, кроме исходной, векторы-результаты этих двух «параллельных» перенесений не совпадают, да и параллельным с каждой точки зрения считается лишь один способ переноса. Соответственно, лишь один из векторов рассматривается как параллельный исходному.

²⁶В этом примере мы считаем, что вектор $\vec{n}$ от времени не зависит и является лишь функцией точки $\mathbf{x}(t)$, в которой он построен.

Выбранные правила параллельного переноса описываются заданием коэффициентов Γ_{ki}^j в формуле (3.14), которые указывают нам, как связаны друг с другом различные векторные пространства.²⁷ Они так и называются *коэффициентами связности*, или *символами Кристоффеля* по имени описавшего их математика.²⁸ В декартовой системе координат они равны нулю, и ковариантная производная равна, в этом случае, частной. В других системах координат они отличны от нуля (по крайней мере, часть из них) и должны учитываться при вычислении производных.

Мы не будем специально изучать ковариантное дифференцирование, но, чтобы не замыкаться только в рамках декартовых координат, везде, где необходимо, будем писать не частные, а ковариантные производные, тем более, что по своим свойствам они очень близки. Так ковариантная производная по направлению $\vec{e}_k$ от скалярной функции равна частной производной $\nabla_k f = \partial_{x_k} f$, а от вектора $\vec{a}$ — вектору $\nabla_k \vec{a} = (\nabla_k a_i) \vec{e}_i$. Кроме того, ковариантная производная линейна, т.е. если f — скалярная функция, а $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторные, то верны равенства

$$\begin{aligned}\nabla_k(\vec{a} + \vec{b}) &= \nabla_k \vec{a} + \nabla_k \vec{b}, \\ \nabla_k(f\vec{a}) &= (\nabla_k f) \vec{a} + f(\nabla_k \vec{a}) = (\partial_{x_k} f) \vec{a} + f(\nabla_k \vec{a}).\end{aligned}$$

Эти соотношения позволяют единообразно записать формулы (3.3) и (3.17) как *формулу Эйлера*, справедливую для любых объектов и в любой системе координат:

$$d_t(\cdot) = \partial_t(\cdot) + v_k \nabla_k(\cdot). \quad (3.20)$$

Если ввести в рассмотрение символический вектор $\nabla = (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3)$, то последнее слагаемое в (3.20) можно записать как скалярное произведение, и вся формула, при этом, формально становится неотличимой от (3.9). Разница лишь в смысле вектора (оператора) ∇ . Далее в этом курсе мы будем считать, что коэффициенты связности заданы, правила параллельного переноса известны, и дифференциальные операции всегда определены.

²⁷ Ясно, что это некая дополнительная структура, поскольку векторные пространства могут существовать и без указания такой связи.

²⁸ Кристоффель (Christoffel) Эльвин Бруно (1829-1900), немецкий математик.

4. Минимум о тензорах

4.1. Тензоры и тензорные операции

4.1.1. Введение

В предыдущем параграфе мы впервые столкнулись с новым геометрическим объектом — *тензором*. До сих пор таких геометрических объектов было два: скаляр и вектор. Пример скаляра — плотность массы ρ , пример вектора — скорость перемещения $\vec{v}$.

Плотность массы — это некоторое число. Компонента вектора $\vec{v}$ в некотором базисе тоже число. Является ли компонента вектора v_i скаляром? Нет, не является. Почему же одно число — скаляр, а другое — нет? Дело, разумеется, не в числах, как таковых, а смысле, которым мы наделяем те или иные объекты, принимающие численные значения. Так, ρ имеет смысл плотности массы, а v_i имеет смысл компоненты вектора относительно выбранного базиса. Последнее указание является определяющим: если ρ есть плотность массы безотносительно к какому-либо базису, то v_i без ссылки на выбранный базис теряет смысл компоненты вектора. При этом сам вектор $\vec{v}$ имеет смысл скорости перемещения независимо от того выбран базис или нет. И ρ и $\vec{v}$ существуют сами по себе (в рамках той или иной задачи). Системы же координат, базисы и прочее тому подобное, нам требуются лишь для того, чтобы иметь возможность описывать векторы и более сложные объекты числами, и свести работу с этими объектами к работе с характеризующими их числами. Однако, эти числа являются характеристиками наших объектов лишь относительно заранее выбранных отсчетных (базисных, реперных) объектов, а не сами по себе.

Изучая скорость изменения скаляра a , мы обнаружили, что производные $\partial_{x_i} a$ являются компонентами вектора ∇a в координатном базисе $\{\vec{e}_i\}$. При исследовании скорости изменения вектора $\vec{a}$ мы получили набор величин $\nabla_k a_i$. В том же координатном базисе они являются компонентами нового геометрического объекта — тензора $\nabla \vec{a}$. По аналогии с названием вектора ∇a , тензор $\nabla \vec{a}$ называется *градиентом вектора $\vec{a}$* . В силу того, что $\nabla_k a_i$ — двухиндексная величина, она называется *ком-*

понентой тензора 2-го ранга, а сам тензор представляется матрицей

$$\nabla \vec{a} = \begin{pmatrix} \nabla_1 a_1 & \nabla_2 a_1 & \nabla_3 a_1 \\ \nabla_1 a_2 & \nabla_2 a_2 & \nabla_3 a_2 \\ \nabla_1 a_3 & \nabla_2 a_3 & \nabla_3 a_3 \end{pmatrix}.$$

Как и другие геометрические объекты, тензор $\nabla \vec{a}$ не зависит от выбора системы координат, т.е. существует сам по себе. Действительно, запишем еще раз скорость изменения $\vec{a}$, воспользовавшись формулой Эйлера (3.9)

$$d_t \vec{a} = \partial_t \vec{a} + (\vec{v}, \nabla \vec{a}). \quad (4.1)$$

В левой части этого равенства стоит величина, инвариантная по отношению (т.е. безразличная) к замене базиса, следовательно такой же должна быть и правая часть. Первое слагаемое в правой части $\partial_t \vec{a}$ не зависит от выбора базиса. Значит, таким же должно быть и второе. Вектор скорости $\vec{v}$, как и скалярное произведение, не чувствителен к замене базисных векторов. Таким образом, градиент $\nabla \vec{a}$ также не должен от него зависеть.

Не все величины, снабженные индексами, являются компонентами каких-либо тензоров. Например, символы Кристоффеля. Подробности см. в [13].

4.1.2. Тензор 2-го ранга и его компоненты

Что же все-таки такое тензор? Есть разные способы осмысления этого понятия.²⁹ Будем пользоваться следующим определением.

Тензором 2-го ранга будем называть линейное отображение векторного пространства в себя, т.е. преобразование векторов векторного пространства в векторы того же пространства.

Например, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы некоторого векторного пространства и T — тензор, отображающий $\vec{a}$ в $\vec{b}$, то

$$\vec{b} = T\vec{a}. \quad (4.2)$$

²⁹Во-первых к нему, как и к любому другому новому понятию, да и вообще, ко всему новому, надо привыкнуть. Привычка рождает если не понимание, то, по крайней мере, его иллюзию, и привычное чаще всего не вызывает отторжения.

Линейность как обычно означает, что для каждого отображения T , всяких векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и всяких чисел α и β выполняется равенство:

$$T(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha T\vec{a} + \beta T\vec{b},$$

т.е. можно раскрывать скобки и выносить числовые множители за знак тензора.

Определяя в векторном пространстве базис $\{\vec{e}_i\}$, мы ставим в соответствие векторам наборы чисел (компонент): $\vec{a} = a_i\vec{e}_i$ и $\vec{b} = b_j\vec{e}_j$. При этом свой набор компонент получает и тензор. А именно, подставим в (4.2) разложение вектора $\vec{a}$ по базису. Получим

$$T\vec{a} = T a_i \vec{e}_i =$$

В силу линейности тензора, полученное выражение можно записать так

$$= a_i (T\vec{e}_i) =$$

Выражение в скобках, как следует из определения тензора, есть некий новый вектор $\vec{T}_i$. Его, как и любой другой вектор, можно представить в виде разложения по базису $\vec{T}_i = T_{ji}\vec{e}_j$, после чего цепочка равенств принимает вид

$$= a_i T_{ji} \vec{e}_j = b_j \vec{e}_j.$$

В последнем равенстве введено новое обозначение

$$a_i T_{ji} \equiv b_j.$$

Компоненты a_i и b_j определяют вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ относительно базиса однозначно. Следовательно, числа T_{ji} так же однозначно задают преобразование (4.2), т.е. тензор T . Эти числа называются компонентами тензора T относительно базиса $\{\vec{e}_i\}$. Количество их равно квадрату размерности пространства, поэтому тензор удобно записывать в виде квадратной матрицы. Если теперь записать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в виде столбцов, то выражение (4.2) примет вид

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Умножая матрицу на вектор, для j -ой компоненты вектора $\vec{b}$ получим $b_j = T_{ji}a_i$. Это произведение называется *сверткой тензора с вектором* и в бескоординатной форме часто записывается так $(T, \vec{a})$. Такая конструкция симметрична: $T_{ij}a_j = a_j T_{ij}$ и, значит, $(T, \vec{a}) = (\vec{a}, T) = T\vec{a}$.

Все известные нам теперь геометрические объекты — скаляры, векторы, тензоры — можно считать тензорами различных рангов. Ранг тензора соответствует количеству индексов у его компонент. Так скаляр — тензор 0-го ранга, а вектор — тензор первого ранга.

4.1.3. Алгебраические тензорные операции

Математические действия с тензорами, в результате которых получается тензор, называются *тензорными операциями*. Вот список алгебраических тензорных операций.

- 1) *Сложение* тензоров одинакового ранга; осуществляется покомпонентно; результат — тензор того же ранга:

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b})_j &= a_j + b_j, \\ (A + B)_{ij} &= A_{ij} + B_{ij}.\end{aligned}$$

- 2) *Умножение* тензора на число; умножается покомпонентно; результат — тензор того же ранга:

$$\begin{aligned}(\alpha \vec{a})_j &= \alpha a_j, \\ (\alpha A)_{ij} &= \alpha A_{ij}\end{aligned}$$

- 3) *Свертка* по паре индексов; ранг результата на два меньше суммы рангов сворачиваемых тензоров:

$$\begin{aligned}(\vec{a}, \vec{b}) &= a_j b_j, \\ (A\vec{a})_i &= A_{ij} a_j, \\ (AB)_{ij} &= A_{ik} B_{kj}.\end{aligned}$$

- 4) *Скалярное произведение* (определено для тензоров одинакового ранга); результат — скаляр:

$$\begin{aligned}(\vec{a}, \vec{b}) &= a_j b_j, \\ A : B &= A_{kj} B_{jk}.\end{aligned}$$

- 5) *Тензорное произведение*; ранг результата равен сумме рангов сомножителей:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b})_{jk} = a_j b_k$$

Легко видеть, что перечисленные тензорные операции — это хорошо известные действия с векторами и квадратными матрицами: сложение, умножение на число, произведение матриц и вычисление следа произведения. Знакомый пример пятой операции — это произведение вектора-столбца на вектор-строку. Результат — квадратная матрица.

4.1.4. Дифференциальные тензорные операции

Кроме алгебраических тензорных операций есть и другие. Градиент или ковариантная производная — пример *дифференциальной* тензорной операции.

- 1) *Градиент*. Ранг результата на единицу больше ранга исходного тензора. Например,

- а) градиент скалярной функции φ есть вектор вида

$$\nabla \varphi = (\partial_{x_i} \varphi) \vec{e}_i.$$

- б) градиент векторнозначной функции $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$ есть тензор 2-го ранга $\nabla \vec{a}$ с компонентами в базисе $\{\vec{e}_i\}_{i=1}^3$ следующего вида:

$$(\nabla \vec{a})_{kj} = \nabla_j a_k.$$

Если базис декартов, то ковариантные производные равны частным и предыдущее выражение записывается так:

$$(\nabla \vec{a})_{kj} = \partial_{x_j} a_k.$$

- 2) *Дивергенция*. Ранг результата на единицу меньше ранга исходного тензора. Например,

- а) дивергенция вектора $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$ есть скаляр вида

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla_i a_i,$$

- б) дивергенция тензора 2-го ранга T есть вектор с компонентами

$$(\operatorname{div} T)_j = \nabla_k T_{jk}.$$

Если базис декартов, ковариантные производные в обоих случаях заменяются на частные. Дивергенция часто рассматривается как свертка вектора ∇ с соответствующим тензором или вектором. В последнем случае свертка эквивалентна скалярному произведению, чем часто пользуются при записи дивергенции вектора, т.е. пишут

$$\operatorname{div} \vec{a} = (\nabla, \vec{a}).$$

Однако нужно иметь в виду, что ∇ — дифференциальный оператор, а не настоящий вектор. По этой причине выражение $(\nabla, \vec{a})$ теряет одно из важных свойств скалярного произведения — симметричность, т.е.

$$(\nabla, \vec{a}) \neq (\vec{a}, \nabla).$$

Действительно, из определения дивергенции следует, что $(\nabla, \vec{a}) = \nabla_i a_i$ — скаляр, в то время как $(\vec{a}, \nabla) = a_i \nabla_i$ — дифференциальный оператор. Другое дело, если используется выражение вида $(\vec{u}, \nabla a)$. Здесь оба множителя в скалярном произведении полноценные векторы, и симметрия имеет место, т.е. $(\vec{u}, \nabla a) = (\nabla a, \vec{u})$.

Выражения, в которых тензоры или тензорные компоненты комбинируются только при помощи этих операций, называются *тензорными выражениями*. Тензорные выражения удобны тем, что они справедливы в любом базисе.

4.2. Некоторые специальные тензоры

Кроме тензоров общего вида, существует несколько тензоров, обладающих специальными свойствами.

1) Нулевой и единичный тензоры.

Отображение, которое переводит любой вектор в нулевой вектор, называется *нулевым тензором* и обозначается символом

$O: \vec{a} \mapsto 0$. Матрица нулевого тензора в любом базисе равна нулевой матрице.

Тождественное отображение называется **единичным тензором** и обозначается символом $I: \vec{a} \mapsto \vec{a}$. В любом базисе матрица единичного тензора есть единичная матрица, и компоненты единичного тензора равны $I_{ik} = \delta_{ik}$, т.е. *символам Кронекера*.³⁰

Для всех векторов данного векторного пространства, таким образом, верны равенства

$$O\vec{a} = 0, \quad I\vec{a} = \vec{a}.$$

2) Обратный тензор.

Если тензор A *взаимно однозначен*, то он *обратим*, т.е. существует тензор A^{-1} , называемый *обратным*, такой, что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Нулевой тензор — пример необратимого (или *вырожденного*) тензора. Если тензоры A и B обратимы, то их свертка AB также обратима и

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Кроме того,

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Если $a \neq 0$ — число, то

$$(aA)^{-1} = a^{-1}A^{-1}.$$

3) Транспонированный тензор.

Пусть $\{e_i\}$ — ортонормированный базис, и $\vec{a} = a_i \vec{e}_i$, $\vec{b} = b_j \vec{e}_j$ и $A\vec{a} = (A_{ji}a_i) \vec{e}_j$. Рассмотрим скалярное произведение векторов $A\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$(A\vec{a}, \vec{b}) = (A_{ji}a_i)b_j = a_i(A_{ji}b_j) = (\vec{a}, A^T\vec{b}). \quad (4.3)$$

³⁰Кронекер (Kronecker) Леопольд (1823–1891), немецкий математик. Символы, носящие его имя, определяются так

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Действие тензора на вектор в компонентной записи сводится к умножению матрицы на вектор-столбец. По существующей договоренности, первый индекс матричного элемента нумерует строку, а второй — столбец. По правилам же умножения матриц, элемент результата есть сумма произведений элементов строки матрицы на соответствующие элементы столбца второго сомножителя. Для того чтобы в (4.3) поменять местами порядок суммирования и записать все это в матричной нотации с сохранением правил умножения матриц, нам требуется ввести новую матрицу A^T с теми же компонентами, что и у матрицы A , но стоящими в другом порядке: строки и столбцы меняются местами. Новая матрица A^T называется *транспонированой* по отношению к матрице A . Соответственно, тензор, матрицей которого в базисе $\{\vec{e}_i\}$ является A^T , называется *транспонированным* по отношению к тензору A . Таким образом, имеем

$$A_{ij}^T = A_{ji}.$$

Легко проверяются следующие свойства операции транспонирования:

$$(A + B)^T = A^T + B^T,$$

$$(AB)^T = B^T A^T,$$

$$(A^T)^T = A.$$

Если A — обратимый тензор, то $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

4) Симметричный и антисимметричный тензоры.

Если

$$A = A^T,$$

то тензор A называется *симметричным*. Матрица такого тензора симметрична относительно главной диагонали, т.е. $A_{ij} = A_{ji}$.

Аналогично, если

$$B = -B^T,$$

то тензор B называется *антисимметричным*, а его матрица антисимметрична относительно главной диагонали, т.е. $B_{ij} = -B_{ji}$.

Если у матрицы тензора 2-го ранга общего вида в трехмерном

пространстве число независимых компонент равно 9-ти, то у любого симметричного тензора оно сокращается до 6-ти (три над- или поддиагональных элемента + три элемента на диагонали), а у антисимметричного — до 3-х (диагональный элемент должен быть равен самому себе с обратным знаком: единственный вариант — нуль).

Упражнение. Сколько независимых компонент у тензора 2-го ранга: а) общего вида, б) симметричного и в) антисимметричного в 4-мерном пространстве; в n -мерном пространстве?

5) Ортогональный тензор.

Введение в рассматриваемое векторное пространство дополнительной структуры — *скалярного произведения*, позволяет определить, наряду с прочим, *длину вектора* $|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$. Тензор R называется *ортогональным*, если он сохраняет длину вектора, т.е.

$$|R\vec{a}| = |\vec{a}|. \quad (4.4)$$

В этом случае $R^{-1} = R^T$. Действительно, в силу (4.3) и (4.4) верна цепочка равенств (здесь над знаками равенства указаны номера формул, в силу которых равенства выполняются)

$$|R\vec{a}|^2 = (R\vec{a}, R\vec{a}) \stackrel{(4.3)}{=} (\vec{a}, R^T R \vec{a}) \stackrel{(4.4)}{=} |\vec{a}|^2,$$

но $|\vec{a}|^2 = (\vec{a}, \vec{a})$, следовательно, $R^T R = I$. Поскольку, по определению $R^{-1} R = I$, значит $R^{-1} = R^T$.

6) Положительно определенный тензор.

Симметричный тензор A называется *положительно определенным*, если для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ имеет место неравенство

$$(A\vec{a}, \vec{a}) > 0.$$

4.3. Задача на собственные значения

Тензор второго ранга преобразует один вектор в другой. Рассмотрим действие какого-нибудь обратимого тензора A на произвольный ненулевой вектор $\vec{b}$. Результатом такого действия будет новый вектор $A\vec{b}$, в общем случае не совпадающий с вектором $\vec{b}$, т.е. отличной от него длины $|A\vec{b}| \neq |\vec{b}|$ и повернутый относительно него на некоторый угол.

Будем плавно менять направление вектора $\vec{b}$, например, вращать его по часовой стрелке. Поскольку вектор $A\vec{b}$ линейно зависит от вектора $\vec{b}$, его направление также будет плавно меняться. Однако скорость этого изменения и его направление могут быть иными. По этой причине после поворота вектора $\vec{b}$ на некоторый угол направления векторов $\vec{b}$ и $A\vec{b}$ могут совпасть или стать противоположными. В обоих случаях результирующий вектор $A\vec{b}$ оказывается пропорциональным исходному вектору $\vec{b}$. Математически такая ситуация записывается в виде следующего равенства

$$A\vec{b} = \lambda \vec{b}, \quad (4.5)$$

где λ — некоторое число, и если она реализовалась, то направление вектора $\vec{b}$ называется **собственным направлением** тензора A , а сам вектор — **собственным вектором** этого тензора. Действие тензора на собственный вектор сводится, как мы видим, к растяжению/сжатию его в $|\lambda|$ раз и отражению, если $\lambda < 0$. Число λ называется **собственным числом (значением)** тензора A .

Собственные значения и собственные векторы — важные характеристики тензоров. Для их отыскания требуется решить задачу (4.5), которая в этом случае называется **задачей на собственные значения**. Каждому собственному числу соответствует бесконечно много собственных векторов. Действительно, если $\vec{b}$ — собственный вектор, т.е. вектор, удовлетворяющий равенству (4.5), любой другой вектор $\alpha\vec{b}$, где α — какое-то число, также удовлетворяет этому равенству.

Собственные числа положительно определенного тензора положительны. Действительно, если тензор A положительно определен и вектор $\vec{b}$ его собственный вектор, т.е. $A\vec{b} = \lambda\vec{b}$, тогда

$$0 < (A\vec{b}, \vec{b}) = (\lambda\vec{b}, \vec{b}) = \lambda(\vec{b}, \vec{b}) = \lambda|\vec{b}|^2 \Rightarrow \lambda > 0.$$

5. Деформация

5.1. Деформация: растяжение и поворот

В процессе движения конфигурация тела постоянно меняется. Точки тела движутся по своим мировым линиям, со своими скоростями. Однако, в силу принятой гипотезы сплошности, движение каждой точки тела связано с движением соседних точек. Один из путей исследования этой связи состоит в выборе отсчетной конфигурации κ и изучении ее деформации с течением времени.

В любой момент времени деформация отсчетной конфигурации может рассматриваться как нелинейное преобразование координат $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}(t)$. В первом же приближении в окрестности каждой точки деформация может быть описана линейной зависимостью

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}, \quad (5.1)$$

где $\mathbf{F}$ — тензор с компонентами $F_{jk} = \partial_{X_k} x_j$.

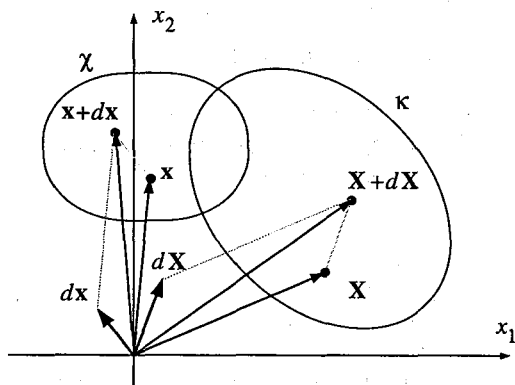


Рис. 15. Деформация приращения радиуса-вектора.

Действительно, пусть $\mathbf{X}$ — некоторая точка в отсчетной конфигурации, а $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ — другая точка в окрестности точки $\mathbf{X}$ (см. рис.15). Величины $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ и $\mathbf{X} + d\mathbf{X} = (X_1 + dX_1, X_2 + dX_2, X_3 + dX_3)$

иногда называются *радиусами-векторами* соответствующих точек пространства. Все они начинаются в начале выбранной системы координат, а компонентами их являются координаты соответствующих точек пространства.³¹ В текущей конфигурации рассматриваемым точкам будут соответствовать радиусы-векторы $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$ и $\mathbf{x}(t, \mathbf{X} + d\mathbf{X})$. Чтобы выяснить, как изменилась разность $d\mathbf{X}$ между точками $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$, разложим каждую компоненту $\mathbf{x}(t, \mathbf{X} + d\mathbf{X})$ как функцию нескольких переменных в ряд Тейлора относительно $\mathbf{x}(t, \mathbf{X})$. Ограничиваясь линейными членами разложения найдем (не забудьте, что здесь суммирование по k):

$$x_j(t, \mathbf{X} + d\mathbf{X}) = x_j(t, \mathbf{X}) + dX_k \partial_{X_k} x_j + o(d\mathbf{X}), \quad \forall j = 1, 2, 3.$$

или, что то же

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{X} + d\mathbf{X}) = \mathbf{x}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{F}d\mathbf{X} + o(d\mathbf{X}).$$

Значок $o(\cdot)$ обозначает члены более высокого порядка малости нежели стоящие в скобках. В нашем случае — это члены, малые по сравнению с $d\mathbf{X}$. Полагая теперь

$$d\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(t, \mathbf{X} + d\mathbf{X}) - \mathbf{x}(t, \mathbf{X}),$$

с точностью до линейных членов получаем выражение (5.1).

Тензор $\mathbf{F}$ называется *градиентом деформации*. Мы с ним уже сталкивались при обсуждении теоремы переноса. Определитель J матрицы тензора $\mathbf{F}$

$$J = \begin{vmatrix} \partial_1 x_1 & \partial_2 x_1 & \partial_3 x_1 \\ \partial_1 x_2 & \partial_2 x_2 & \partial_3 x_2 \\ \partial_1 x_3 & \partial_2 x_3 & \partial_3 x_3 \end{vmatrix}, \quad \partial_k x_j \equiv \partial_{X_k} x_j, \quad (5.2)$$

есть якобиан преобразования координат точки тела в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты) в координаты той же точки тела в текущей конфигурации (эйлеровы координаты).

В чем же заключается деформация отсчетной (следовательно, и любой другой) конфигурации? Воспользуемся *теоремой о полярном*

³¹ Не путайте их с другими векторами, например, вектором скорости, который начинается в той точке, чью скорость движения описывает.

разложении, согласно которой любой обратимый тензор 2-го ранга, а значит, и градиент деформации F , представим в виде свертки двух тензоров, один из которых ортогональный тензор R , а другой — симметричный, положительно определенный тензор U (правый) или V (левый), в зависимости от записи

$$F = RU = VR. \quad (5.3)$$

Если выбран базис, то равенства (5.3) понимаются как матричные равенства, а свертки — как произведения квадратных матриц.

Действие тензора F имеет ясный геометрический смысл: деформация бесконечно малого приращения dX в отсчетной конфигурации в бесконечно малое приращение dx в текущей конфигурации. Произвольную деформацию F можно, согласно (5.3), интерпретировать как последовательные действия двух специальных деформаций: сначала U , а затем R либо, наоборот, сначала R , но тогда потом уже V , т.е.

$$FdX = R(UdX) = V(RdX). \quad (5.4)$$

Осталось лишь понять, какую деформацию описывают тензоры R , U и V . Будем работать в ортонормированном базисе, где выкладки проще, а интерпретация очевидней.

5.1.1. Тензор поворота

В чем специфика действия тензора R ? Любой вектор $\vec{a}$ из данного трехмерного векторного пространства характеризуется тремя числами. Это либо его декартовы координаты (расстояния до осей), либо сферические (длина и два угла), либо еще что-нибудь. Действие тензора на вектор приводит к тому, что координаты вектора, т.е. эти три числа, меняются. Тензор R , как мы выяснили в прошлой главе, длину вектора оставляет прежней, стало быть, его действие сводится к изменению углов (если говорить в терминах сферических координат), т.е. к повороту вектора. По этой причине тензор R так и называется *тензором поворота*.

5.1.2. Тензор растяжения

Обратимся теперь к тензорам U и V .

- 1) Известно, что если U и V вещественны и симметричны, то их собственные числа также вещественны. Более того, в силу полярного разложения можно утверждать, что *собственные числа тензора U равны собственным числам тензора V .*

Действительно, пусть u_i — собственное число тензора U , а $\vec{\xi}_i$ — соответствующий ему собственный вектор, и, следовательно, выполняется равенство

$$U\vec{\xi}_i = u_i\vec{\xi}_i.$$

Рассмотрим вектор $F\vec{\xi}_i$. Пользуясь полярным разложением тензора F , найдем

$$F\vec{\xi}_i = RU\vec{\xi}_i = Ru_i\vec{\xi}_i = u_i(R\vec{\xi}_i)$$

С другой стороны,

$$F\vec{\xi}_i = V R \vec{\xi}_i.$$

Сравнивая оба результата, получим

$$V(R\vec{\xi}_i) = u_i(R\vec{\xi}_i)$$

или, если обозначить $\vec{\zeta}_i = R\vec{\xi}_i$,

$$V(\vec{\zeta}_i) = u_i(\vec{\zeta}_i).$$

Из этого равенства следует, что $\vec{\zeta}_i$ есть собственный вектор тензора V , а u_i — его собственное число. Таким образом, мы не только показали, что u_i является также собственным числом тензора V , но и обнаружили связь между собственными векторами тензоров U и V . Если $\vec{\xi}_i$ — собственный вектор тензора U , соответствующий собственному числу u_i , то собственным вектором тензора V , соответствующим тому же собственному числу, будет вектор $\vec{\zeta}_i = R\vec{\xi}_i$, имеющий ту же длину, что и $\vec{\xi}_i$, но иное направление.

- 2) Относительно собственных векторов этих тензоров справедливо следующее утверждение: *собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям вещественного симметричного тензора, ортогональны, т.е. $(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j) = 0$ при $i \neq j$.* Действительно, пусть $\vec{\xi}_i$ и $\vec{\xi}_j$ — собственные векторы тензора U ,

а u_i и u_j — соответствующие им собственные числа, и $u_i \neq u_j$. Верна следующая цепочка равенств:

$$u_i(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j) = (u_i \vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j) = (U \vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j) = (\vec{\xi}_i, U^T \vec{\xi}_j) =$$

Далее, в силу симметрии тензора U , имеем

$$= (\vec{\xi}_i, U \vec{\xi}_j) = (\vec{\xi}_i, u_j \vec{\xi}_j) = u_j(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j).$$

Вычитая теперь последнее выражение из первого, получим

$$0 = (u_i - u_j)(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j).$$

Таким образом, если $u_i \neq u_j$, необходимо $(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_j) = 0$, что и означает ортогональность $\vec{\xi}_i$ и $\vec{\xi}_j$. Если тензоры U и V имеют три различных собственных числа, то они имеют также по три ортогональных собственных вектора, причем эти тройки векторов связаны соотношением

$$\vec{\zeta}_i = R \vec{\xi}_i,$$

где $\vec{\xi}_i$ — собственный вектор тензора U , а ζ_i — собственный вектор тензора V ; оба собственных вектора соответствуют одному собственному числу u_i . Эти собственные векторы определяют направления, которые называются *главными осями деформации*. Тензор U определяет их в исходной конфигурации κ , т.е. в точке X , а тензор V — в текущей конфигурации χ , т.е. в точке x . Тензор поворота R переводит главные оси деформации в точке X в главные оси деформации в точке x .

- 3) Кроме всего прочего, теорема о полярном разложении утверждает, что тензоры U и V являются положительно определенными, т.е. такими, для которых справедливо неравенство

$$(U \vec{a}, \vec{a}) > 0 \quad \forall \vec{a} \neq 0.$$

Если тензор, скажем U , положительно определен, то как было показано на стр.68 его собственные числа положительны. Это следует из того, что если u_i — собственное число, а $\vec{\xi}_i$ — соответствующий собственный вектор тензора U , то имеем

$$(U \vec{\xi}_i, \vec{\xi}_i) = u_i(\vec{\xi}_i, \vec{\xi}_i) = u_i |\vec{\xi}_i|^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad u_i > 0.$$

Положительность собственных чисел позволяет интерпретировать их как отношение длин векторов $F\vec{\xi}_i$ (образов векторов $\vec{\xi}_i$) в текущей конфигурации к длинам самих векторов $\vec{\xi}_i$ в отсчетной конфигурации и называть их *главными растяжениями*.

Тензоры U и V , таким образом, описывают растяжение/сжатие по трем ортогональным направлениям. Величина растяжения/сжатия определяется собственными числами, а направления, по которым оно происходит, — собственными векторами. Тензор U называется *правым* (стоит справа³² от R), а V — *левым тензорами растяжения/сжатия*.

Если $R = I$, т.е. поворот отсутствует, то $U = V$ и деформация называется *чистым растяжением*.

Если $U = V = I$, то, напротив, отсутствует растяжение и деформация называется *поворотом*.

Упражнение. Проверьте себя: понимаете ли вы, почему $R = I$ означает отсутствие поворота, а $U = V = I$ — отсутствие растяжения?

Таким образом, теорема о полярном разложении утверждает, что деформацию, локально соответствующую F , можно получить двумя путями: либо осуществляя чистое растяжение вдоль трех взаимно ортогональных направлений $\vec{\xi}_i$ с главными растяжениями u_i и последующим поворотом этих направлений, либо осуществляя сначала поворот, а затем то же растяжение u_i , но вдоль новых направлений $\vec{\zeta}_i = R\vec{\xi}_i$.

5.2. Кинематика деформации

Для того чтобы понять, как протекает деформация, вычислим производную по t от выражения (5.1) в точке t_0 . Получим

$$d_t(dx) = (d_t F) dX. \quad (5.5)$$

В левой части стоит приращение скорости $d_t(dx) = d(d_t x) = d\vec{v}$ в окрестности данной точки. Компонента тензора $d_t F$ в правой части равна

$$(d_t F)_{ki} = d_t(\partial_{X_i} x_k) = \partial_{X_i}(d_t x_k) = \partial_{X_i} v_k. \quad (5.6)$$

³²Вы помните, что свертка тензоров (произведение матриц) некоммукативна, т.е. перемена мест сворачиваемых тензоров меняет результат.

Последние равенства выполняются в силу того, что лагранжевы переменные не зависят от времени. Компоненты вектора касательного к траектории точки тела являются функциями ее лагранжевых координат и момента времени. Однако, в силу обратимости любых наших деформаций, между лагранжевыми и эйлеровыми координатами существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому компоненты вектора скорости могут считаться функциями времени и места в текущей конфигурации, т.е. эйлеровых координат. С этой точки зрения цепочку равенств (5.6) можно продолжить, дифференцируя компоненты скорости как сложные функции и записать:

$$(d_t F)_{ki} = \partial_{x_j} v_k \partial_{X_i} x_j = \nabla_j v_k F_{ji},$$

или

$$d_t F = G F, \quad (5.7)$$

где $G \equiv \nabla \vec{v}$. Отсюда получаем выражение градиента скорости G через градиент деформации F :

$$G = (d_t F) F^{-1}. \quad (5.8)$$

Таким образом, приращение скорости равно

$$d\vec{v} = (d_t F) dX = (G F) dX = G (F dX) = G dx. \quad (5.9)$$

Учитывая представление (5.3), найдем

$$G = ((d_t R)U + R d_t U) F^{-1} = ((d_t V)R + V d_t R) F^{-1}. \quad (5.10)$$

Попробуем подыскать подходящую интерпретацию этим выражениям.

Любой тензор и, в частности G , можно записать в виде суммы симметричной D и антисимметричной W части:

$$G = D + W = \underbrace{\frac{1}{2} (G + G^T)}_D + \underbrace{\frac{1}{2} (G - G^T)}_W. \quad (5.11)$$

Симметричный тензор D

$$D_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_k v_i + \nabla_i v_k) \quad (5.12)$$

называется *тензором скоростей деформации*, а антисимметричный тензор W

$$W_{ik} = \frac{1}{2} (\nabla_k v_i - \nabla_i v_k) \quad (5.13)$$

будем называть *спином*.³³

В момент времени t_0 градиент деформации равен единичному тензору (деформация отсутствует), откуда

$$R = U = V = I \Rightarrow F = F^{-1} = I. \quad (5.14)$$

Если положить, что в окрестности t_0 градиент деформации мало отличается от единичного тензора (т.е. равенства (5.14) в первом приближении выполняются), тогда из (5.10) получим

$$G \simeq d_t R + d_t U \simeq d_t V + d_t R. \quad (5.15)$$

Отсюда

$$D \simeq d_t U \simeq d_t V, \quad W \simeq d_t R. \quad (5.16)$$

В силу симметрии, тензор D имеет три вещественных собственных числа (*главные скорости деформации*) и три ортогональных собственных вектора (*главные оси тензора скоростей деформации*).

Приращение скорости, таким образом, складывается, в первом приближении, из двух частей: симметричной, связанной с действием тензора D , и антисимметричной, связанной с действием тензора W :

$$d\vec{v} = Ddx + Wdx. \quad (5.17)$$

Тензор D описывает скорость растяжения/сжатия по трем ортогональным направлениям. Антисимметричный тензор W описывает скорость поворота этих направлений.

Поскольку число независимых компонент тензора W равно числу компонент вектора, вместо тензора W можно рассматривать соответ-

³³В гидродинамической литературе этот тензор по большей части остается безымянным, видимо, в связи с тем, что его функцию успешно выполняет вектор вихря ω (см. ниже). Здесь использовано название, данное этому тензору К.Трусделлом [11].

ствующий ему вектор.³⁴ Действительно, рассмотрим величину Wdx :

$$\begin{aligned} Wdx &= \begin{pmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & 0 & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -W_{21} & W_{13} \\ W_{21} & 0 & -W_{32} \\ -W_{13} & W_{32} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и введем обозначения (именно те, что нужны для получения известного результата):

$$\begin{aligned} \omega_1 &\equiv 2W_{32} = \partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2, \\ \omega_2 &\equiv 2W_{13} = \partial_{x_3} v_1 - \partial_{x_1} v_3, \\ \omega_3 &\equiv 2W_{21} = \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1. \end{aligned}$$

Если числа ω_1 , ω_2 и ω_3 рассматривать как компоненты вектора $\vec{\omega}$, то из определения видно, что $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$. Этот вектор называется вектором **вихря скорости**, или вектором **завихренности**. Он определяет угловую скорость вращения жидкости в данной точке. Подставляя компоненты вектора вихря в выражение для Wdx , найдем:

$$\begin{aligned} Wdx &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\omega_3 dx_2 + \omega_2 dx_3 \\ \omega_3 dx_1 - \omega_1 dx_3 \\ -\omega_2 dx_1 + \omega_1 dx_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Полученный вектор есть ни что иное, как векторное произведение

$$Wdx = \frac{1}{2} \vec{\omega} \times dx. \quad (5.18)$$

Теперь из выражения для бесконечно малого приращения скорости $d\vec{v} = \vec{v}(t, x + dx) - \vec{v}(t, x)$ найдем скорость в окрестности точки x :

$$\vec{v}(t, x + dx) = \vec{v}(t, x) + Ddx + Wdx = \vec{v}(t, x) + Ddx + \frac{1}{2} \vec{\omega} \times dx. \quad (5.19)$$

³⁴Точнее, *псевдовектор*, или *аксиальный* вектор — объект чувствительный к замене базиса: при отражении базиса псевдовектор меняет знак.

Интерпретация этого разложения такова: мгновенное состояние движения среды в окрестности $d\mathbf{x}$ рассматриваемой точки $\mathbf{x}$ складывается из поступательного движения со скоростью $\vec{v}(t, \mathbf{x})$, растяжения/сжатия по трем ортогональным направлениям ($Dd\mathbf{x}$) и вращения этих направлений ($Wd\mathbf{x} = \frac{1}{2}\vec{\omega} \times d\mathbf{x}$). Если $D = 0$, то растяжения/сжатия не происходит, и жидкость движется как *твердое тело*. Если $W = 0$, то направления растяжения/сжатия не меняются и движение называется *безвихревым*. Напротив, если $W \neq 0$, то движение *вихревое*.

6. Уравнение неразрывности

6.1. Скорость объемного расширения/сжатия

Ранее уже отмечалось, что значение якобиана J равно величине относительного расширения или сжатия бесконечно малого объема, движущегося с телом. Скорость изменения этой величины связана со *скоростью объемного расширения/сжатия*, которое определим как отношение

$$\frac{1}{J} d_t J.$$

Якобиан преобразования лагранжевых координат в эйлеровы J — это определитель матрицы градиента деформации F (см. (5.2)). Всякий определитель представляет собой сумму, любое слагаемое которой есть произведение, содержащее один и только один элемент из каждой строки и каждого столбца матрицы. Количество сомножителей в каждом слагаемом равно порядку матрицы. При этом, в определитель не входят произведения, которые не содержат элементов из каких-либо строк/столбцов или содержат их более одного.

Для записи определителя удобно использовать, так называемые, *символы Леви-Чивиты*.³⁵ Эти антисимметричные³⁶ символы позволяют сделать запись определителя компактной, автоматически отследить знаки перед слагаемыми и отсеять ненужные слагаемые. Определяются они следующим образом:

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{четная перестановка индексов,} \\ 0, & \text{совпадающие индексы,} \\ -1, & \text{нечетная перестановка индексов.} \end{cases}$$

Под четной/нечетной перестановкой подразумевается число перестановок соседних символов, которые нужно проделать для получения комбинации индексов 123.

Пусть A — квадратная 3×3 матрица с элементами a_{ij} , тогда ее определитель равен

$$\det(A) = \varepsilon^{ijk} a_{i1} a_{j2} a_{k3}. \quad (6.1)$$

³⁵ Леви-Чивита (Levi-Civita) Тулио (1873–1941), итальянский математик.

³⁶ Как и в случае тензоров 2-го ранга, антисимметрия проявляется в смене знака при перестановке соседних индексов.

Если явно расписать какую-либо сумму (а вы помните, что у нас их здесь три, по i , j и k), например, по i , то получим разложение определителя по элементам 1-го столбца:

$$\det(A) = a_{11}(\varepsilon^{1jk} a_{j2} a_{k3}) + a_{21}(\varepsilon^{2jk} a_{j2} a_{k3}) + a_{31}(\varepsilon^{3jk} a_{j2} a_{k3}). \quad (6.2)$$

Члены в скобках $A^{1i} \equiv \varepsilon^{ijk} a_{j2} a_{k3}$ суть, так называемые, алгебраические дополнения к соответствующим элементам a_{i1} матрицы. Таким образом,

$$\det(A) = a_{11}A^{11} + a_{21}A^{12} + a_{31}A^{13} = a_{i1}A^{1i}. \quad (6.3)$$

Поскольку определитель можно раскладывать по элементам любого столбца (а не только первого), имеем

$$\det(A) = a_{ij}A^{ji}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (6.4)$$

Здесь подразумевается сумма только по индексу i , а индекс j может принимать любое значение, что специально указано. Раскладывать определитель можно и по элементам строк, т.е. можно писать и так:

$$\det(A) = a_{ij}A^{ji}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.5)$$

Это разложение по элементам i -ой строки (суммирование подразумевается по j). Оба выражения (6.4) и (6.5) можно записать в более общей форме

$$a_{kj}A^{ji} = a_{jk}A^{ij} = \delta_{ki} \det(A), \quad (6.6)$$

если воспользоваться известным свойством алгебраических дополнений: сумма произведений элементов одной строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения к элементам другой строки (столбца) равна нулю.

Займемся, теперь, вычислением производной $d_t J$, для чего в соответствии с (6.1) запишем

$$J = \det(F) = \varepsilon^{ijk} \partial_1 x_i \partial_2 x_j \partial_3 x_k.$$

Мы вновь используем сокращение $\partial_i x_k \equiv \partial_{x_i} x_k$. Дифференцируя J по времени, получаем

$$\begin{aligned} d_t J &= d_t (\varepsilon^{ijk} \partial_1 x_i \partial_2 x_j \partial_3 x_k) = \\ &= \varepsilon^{ijk} (d_t (\partial_1 x_i) \partial_2 x_j \partial_3 x_k + \partial_1 x_i d_t (\partial_2 x_j) \partial_3 x_k + \partial_1 x_i \partial_2 x_j d_t (\partial_3 x_k)) = \end{aligned}$$

Вспомним, что лагранжевы переменные от времени не зависят и, значит, дифференцирование по времени и по лагранжевой переменной можно поменять местами, т.е. писать $d_t(\partial_m x_i) = \partial_m(d_t x_i) = \partial_m v_i$:

$$= \varepsilon^{ijk} (\partial_1 v_i \partial_2 x_j \partial_3 x_k + \partial_1 x_i \partial_2 v_j \partial_3 x_k + \partial_1 x_i \partial_2 x_j \partial_3 v_k) =$$

Обозначим через J^{ki} алгебраическое дополнение к ki -му элементу матрицы Якоби (градиенту деформации F). Введение алгебраического дополнения позволяет упростить запись:

$$= (\partial_m v_i) J^{mi} =$$

Учтем теперь, что компоненты скорости заданы, как функции эйлеровых переменных $v_i = v_i(t, \mathbf{x}(t))$. Пользуясь взаимно однозначной связью эйлеровых и лагранжевых переменных (см. с.39), запишем $v_i = v_i(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{X}))$. Дифференцируя компоненты скорости v_i как сложные функции, найдем $\partial_m v_i = \partial_{x_k} v_i \partial_m x_k$. Воспользуемся, далее, формулой (6.6) и получим

$$\begin{aligned} &= (\partial_{x_k} v_i \partial_m x_k) J^{mi} = \partial_{x_k} v_i (\partial_m x_k J^{mi}) = \\ &= \partial_{x_k} v_i \delta_{ki} J = J \partial_{x_k} v_k. \end{aligned}$$

Последнее выражение есть произведение якобиана на дивергенцию скорости, так что, окончательно, имеем

$$d_t J = J(\nabla, \vec{v}) = J \operatorname{div} \vec{v}. \quad (6.7)$$

Таким образом, скорость объемного расширения/сжатия определяется полем скорости $\vec{v}$ и равна его дивергенции³⁷

$$\frac{1}{J} d_t J = (\nabla, \vec{v}). \quad (6.8)$$

6.2. Дифференциальные законы сохранения и уравнения баланса

Продолжим рассмотрение дифференциальных законов сохранения. Во второй главе мы выяснили, если интегральный параметр $\Pi(t, \mathcal{B})$

³⁷В старых руководствах часто можно встретить вместо слова *дивергенция* его перевод — *расходимость* (а также *сходимость* — вместо *конвергенция*), смысл которого напрямую связан с обсуждаемой темой.

удовлетворяет интегральному закону сохранения (формула 2.9)

$$d_t \Pi = \Sigma,$$

то его плотность π удовлетворяет дифференциальному закону сохранения (2.18):

$$\frac{1}{J} d_t (\pi J) = \sigma,$$

или (2.19)

$$d_t \pi + \frac{\pi}{J} d_t J = \sigma.$$

Учитывая (6.7) это выражение теперь можно записать в виде

$$d_t \pi + \pi (\nabla, \vec{v}) = \sigma, \quad (6.9)$$

которое также известно под названием *дифференциального закона сохранения*. Распишем далее полную производную $d_t \pi$ по формуле Эйлера и учтем, что

$$(\vec{v}, \nabla \pi) + \pi (\nabla, \vec{v}) = (\nabla \pi, \vec{v}) + \pi (\nabla, \vec{v}) = (\nabla, \pi \vec{v})$$

Это дает нам еще один вариант записи равенства (2.18)

$$\partial_t \pi + (\nabla, \pi \vec{v}) = \sigma, \quad (6.10)$$

который будем называть *дифференциальным уравнением баланса* плотности параметра Π . Величина $\pi \vec{v}$ называется *плотностью потока* параметра Π .

Очевидно, (2.18) то же, что (6.10), но по-разному расставлены акценты. В первом случае утверждается, что скорость изменения величины πJ в тех местах, через которые проходит точка тела во время движения по мировой линии, определяется величиной σJ , т.е. пропорциональна его генерации. Во втором же случае указывается, что изменение плотности параметра π в данном месте порождается совокупным действием генерации и плотности потока $\pi \vec{v}$. Обратите внимание, что оба уравнения справедливы для плотности любого сохраняющегося интегрального параметра.

Раз есть плотность потока параметра, то должен быть и соответствующий ей интегральный параметр, т.е. должен существовать *поток*

параметра Π . Такую величину действительно можно определить. Она естественно появляется при рассмотрении интегрального параметра, характеризующего некоторую область пространства, т.е. $\Pi(t, V)$, который по определению есть (см. (2.5))

$$\Pi(t, V) = \int_V \pi dV.$$

Как меняется этот параметр по времени? В отличие от параметра $\Pi(t, \mathcal{B})$, являющегося функцией лишь t , параметр $\Pi(t, V)$ оказывается также дифференцируемой функцией объема V . Таким образом, скорость изменения $\Pi(t, V)$ определяется частной производной $\partial_t \Pi(t, V)$, вычисляемой при фиксированном аргументе V . Поскольку V фиксировано, производную можно внести под знак интеграла, и получить следующее:

$$\partial_t \Pi(t, V) = \int_V \partial_t \pi dV. \quad (6.11)$$

Выразим, теперь, производную от плотности, используя формулу (6.10):

$$\partial_t \pi = \sigma - \operatorname{div}(\pi \vec{v}), \quad (6.12)$$

откуда

$$\partial_t \Pi(t, V) = \int_V \sigma dV - \int_V \operatorname{div}(\pi \vec{v}) dV. \quad (6.13)$$

Первое слагаемое в правой части этого уравнения называется *продукцией* параметра Π в области V , а второе слагаемое носит название *притока* величины Π в область V .

Применяя к последнему интегралу в (6.13) теорему Гаусса–Остроградского³⁸ и учитывая, что интеграл $\int_V \sigma dV$ равен продукции параметра Σ (см. определение (2.11)), получим

$$\partial_t \Pi(t, V) = \Sigma - \int_S (\pi \vec{v}, \vec{n}) dS. \quad (6.14)$$

Здесь S — поверхность, ограничивающая фиксированный объем V , а $(\pi \vec{v}, \vec{n}) = (\pi \vec{v})_n$ — проекция плотности потока Π на направление внешней к S нормали $\vec{n}$. Второе слагаемое в уравнении (6.14) носит название

³⁸Гаусс (Gauss) Карл Фридрих (1777–1855), немецкий математик, Остроградский Михаил Васильевич (1801–1861), русский математик.

потока параметра Π **через поверхность** S . Если интеграл положителен, то результирующий поток через поверхность S направлен наружу.

Оба уравнения (6.13) и (6.14) описывают баланс параметра Π в области V и называются поэтому **уравнениями баланса** Π . Интерпретация этих уравнений очевидна: изменение параметра Π в области V вызывается (балансируется) продукцией Σ внутри области V (т.е. внутри V есть источники/стоки величины Π мощностью Σ) и притоком извне или, что то же, потоком Π через границу S области V . Скорость же изменения Π равна сумме продукции и притока. Эти уравнения, как и дифференциальный закон сохранения (2.9), выполняются для любого сохраняющегося интегрального параметра.

6.3. Уравнение неразрывности

Применим теперь все, что было сказано, к известному нам уже интегральному параметру — массе тела $M(B)$ с плотностью $\rho(t, \mathbf{x}(t))$ и нулевой продукцией (см. с.23). Из уравнений (2.10), (2.18), (6.10) и (6.14) немедленно получаем следующие соотношения:

- 1) Уравнение (2.10) дает интегральный **закон сохранения массы** тела

$$d_t M(B) = 0. \quad (6.15)$$

- 2) Уравнение (2.18) дает дифференциальный закон сохранения

$$\frac{1}{J} d_t (\rho J) = 0, \quad (6.16)$$

а выражение (6.10) дает другую, чаще используемую форму дифференциального закона сохранения массы, обычно называемую **уравнением неразрывности**:

$$d_t \rho + \rho (\nabla, \vec{v}) = \partial_t \rho + (\nabla, \rho \vec{v}) = 0. \quad (6.17)$$

Величина $\rho \vec{v}$ называется **плотностью потока массы**. Разрешая (6.17) относительно дивергенции скорости, найдем

$$(\nabla, \vec{v}) = -\frac{1}{\rho} d_t \rho, \quad (6.18)$$

что соответствует (2.19) и означает, что дивергенция скорости равна относительной *сжимаемости* среды.

Если плотность массы жидкости при движении вдоль мировых линий не меняется, то не происходит изменения объема и дивергенция скорости отсутствует

$$d_t \rho = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d_t J = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\nabla, \vec{v}) = 0. \quad (6.19)$$

Такая среда называется *несжимаемой*, а любое из уравнений (6.19) называется *уравнением неразрывности несжимаемой жидкости*.

Напротив, если $d_t \rho \neq 0$, среда называется *сжимаемой*. Там, где поле скорости имеет положительные значения дивергенции, значения поля плотности уменьшаются (скорость изменения поля плотности отрицательна). И, наоборот, там, где поле скорости обладает отрицательной дивергенцией, плотность массы увеличивается.

3) Уравнение баланса массы в фиксированном объеме V

$$\partial_t M(t, V) = - \int_S (\rho \vec{v}, \vec{n}) dS \quad (6.20)$$

утверждает, что скорость изменения массы в объеме V (левая часть уравнения) равна *потоку массы через границу S* (правая часть уравнения).

Уравнение неразрывности (или его эквиваленты) есть первое и, увы, не единственное уравнение модели движущейся сплошной среды. Оно содержит две неизвестных функции ρ и $\vec{v}$ и, следовательно, недоопределено. Если нам задано поле скорости, уравнение (6.17) позволяет найти поле плотности массы. В противном случае решений бесконечно много. Таким образом, для нахождения обоих полей (плотности массы и скорости) требуется еще одно векторное уравнение. Его мы получим в следующей главе.

7. Динамика жидкости

7.1. Импульс тела и скорость его изменения.

Основной принцип динамики

Мы уже рассматривали силы как средство описания взаимодействия тел, и определяли на множестве Ω структуру векторного пространства сил. Свяжем теперь эти представления с пространственно-временной картиной движения, введя в рассмотрение понятие центра масс конфигурации тела. Запишем интеграл

$$\mathbf{r}(t, B) = \int_{\chi} \rho \mathbf{x} dV. \quad (7.1)$$

Здесь ρ — плотность массы, χ — конфигурация тела, $\mathbf{x}$ — координаты места. По теореме о среднем интеграл (7.1) можно переписать в виде

$$\mathbf{r}(t, B) = \mathbf{x}_* \int_{\chi} \rho dV = \mathbf{x}_*(t) M(B). \quad (7.2)$$

При записи последнего равенства мы учли связь массы и ее плотности (2.4). Координата $\mathbf{x}_* \in \chi$, определяемая, в соответствии с (7.2), по формуле

$$\mathbf{x}_*(t) = \frac{\mathbf{r}(t, B)}{M(B)}, \quad (7.3)$$

называется *центром масс конфигурации тела B* . Функция же $\mathbf{x}_*(t)$ определяет траекторию, по которой двигалась бы точка с массой, равной массе тела $M(B)$. Скорость ее движения $\vec{v}_* = d_t \mathbf{x}_*(t)$ совпадает со скоростью движения центра масс тела. Величину, которую будем обозначать буквой $\mathbf{m}$

$$\mathbf{m}(t, B) = \vec{v}_*(t) M(B), \quad (7.4)$$

называется *импульсом тела B или его количеством движения*.

Скорость изменения импульса тела равна силе действующей на тело:

$$d_t \mathbf{m}(t, B) = \mathbf{f}_B(t). \quad (7.5)$$

Это утверждение составляет *основной принцип динамики*. В таком виде он выполняется в инерциальных системах отсчета (см. сноску 22 на с.43) и является фундаментом механики вообще (уравнения Ньютона движения системы материальных точек) и гидромеханики, в частности. При таком подходе сила $\mathbf{f}_B$ — касательный вектор к кривой $\mathbf{m}(t, B) = \mathbf{m}(t, \mathbf{x}_*(t))$.

Импульс — интегральная характеристика тела. Для того, чтобы вычислить плотность этой характеристики, выведем одну полезную формулу.

Пусть $h = h(t, \mathbf{x}(t))$ — произвольная дифференцируемая функция, а ρ — плотность массы (т.е. функция, удовлетворяющая уравнению (6.17)). Тогда, в силу теоремы переноса (2.17) и уравнения неразрывности (6.16), верна следующая цепочка равенств:

$$d_t \int_{\chi} \rho h dV \stackrel{(2.17)}{=} \int_{\chi} \frac{1}{J} d_t(\rho h J) dV = \int_{\chi} \left(\rho d_t h + \underbrace{\frac{h}{J} d_t(\rho J)}_{=0} \right) dV,$$

откуда

$$d_t \int_{\chi} \rho h dV = \int_{\chi} \rho d_t h dV. \quad (7.6)$$

Подставим теперь (7.1) в (7.4) и в силу (7.6) получим:

$$\mathbf{m}(t, B) = d_t \int_{\chi} \rho \mathbf{x} dV = \int_{\chi} \rho \dot{\mathbf{x}} dV. \quad (7.7)$$

В соответствии с определением (2.3), находим, что плотность импульса равна $\rho \dot{\mathbf{x}}$, т.е. плотности потока массы. Основной принцип динамики запишется теперь в виде

$$d_t \mathbf{m}(t, B) = \int_{\chi} \rho d_t \dot{\mathbf{x}} dV = \mathbf{f}_B(t). \quad (7.8)$$

Здесь мы также воспользовались формулой (7.6). Основной принцип в форме (7.5) или (7.8) представляет собой интегральное соотношение. Для того, чтобы получить из него дифференциальное уравнение поступим так, как было описано в п.2.4.2. Но сначала нужно записать силу, стоящую в правой части (7.8), в виде интеграла по текущей конфигурации тела, или, другими словами, определить плотность силы. К этому мы теперь и переходим.

7.2. Массовые и контактные силы

Рассматривая понятие силы, мы ввели также понятие *результурующей силы* $\mathbf{f} = \mathbf{f}_B(B^e, t)$, действующей на тело B со стороны его *внешности* B^e , т.е. суммы всех сил действующих на тело. Полезным, однако, оказывается представление результирующей силы не одним вектором, а суммой двух векторов, отражающих различную природу действующих сил. Дело в том, что лишь часть точек B^e , образующих подмножество B_s^e , находится в непосредственном контакте с телом B . Их взаимодействие называется *контактным* (или *поверхностным*), а сила его описывающая — *контактной* (поверхностной) *силой* $\mathbf{f}_C = \mathbf{f}_B(B_s^e, t)$. Остальные точки B^e , входящие в множество B_o^e , взаимодействуют с телом B неконтактным способом (*полевым* или, как иногда говорят, *посредством излучения*). Сила, описывающая такое взаимодействие, называется *массовой* или *объемной* *силой* $\mathbf{f}_B = \mathbf{f}_B(B_o^e, t)$ (ниже мы увидим, откуда такое название). Таким образом, мы представляем внешность тела в виде объединения

$$B^e = B_s^e \cup B_o^e, \quad (7.9)$$

а силу взаимодействия — в виде соответствующей суммы

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_C + \mathbf{f}_B. \quad (7.10)$$

Такое представление сил вполне оправдано, так как любая кинематическая граница состоит из одних и тех же точек тела и, следовательно, множества B_s^e и B_o^e во времени не меняются. Итак, уравнение (7.5) записывается теперь в виде

$$d_t \mathbf{m} = \mathbf{f}_C + \mathbf{f}_B. \quad (7.11)$$

Поскольку обе составляющие силы $\mathbf{f}$ также являются интегральными параметрами тела, запишем их по аналогии с (7.7) в виде интегралов по текущим конфигурациям от соответствующих плотностей. Другими словами, введем в рассмотрение плотности сил и положим по определению

$$\mathbf{f}_C = \int_{\partial \chi} \vec{\tau} dS, \quad (7.12)$$

$$\mathbf{f}_B = \int_{\chi} \rho \vec{b} dV. \quad (7.13)$$

Здесь $\rho \vec{b}$ — *плотность массовой силы*, функция, определенная на точках тела, $\vec{\tau}$ — *плотность контактной силы*, обычно называемая *напряжением*, функция, определенная на точках тела, образующих поверхность его конфигурации $\partial\chi$ (кинематическую границу), а dS — бесконечно малый элемент поверхности.

Удельная плотность массовой силы $\vec{b}(t, \mathbf{x}(t))$ является заданной функцией места и времени, не зависящей от конкретного тела $\mathcal{B}$. Сила $\mathbf{f}_B$ поэтому называется *внешней*. Постоянное во времени поле $\vec{b}$ называют *стационарным*. Если же поле $\vec{b}$ не зависит от места, то оно называется *однородным*. Поле удельной плотности массовой силы, обладающее обоими этими свойствами, называется *однородным полем тяготения*. Поскольку поле $\vec{b}$ в природе всегда ограничено (т.е. $|\vec{b}| < \infty$), из (7.13), пользуясь теоремой о среднем, найдем

$$\mathbf{f}_B = \int_{\chi} \rho \vec{b} dV = \vec{b}(t, \tilde{\mathbf{x}}(t)) \int_{\chi} \rho dV = \vec{b}(t, \tilde{\mathbf{x}}(t)) M(\mathcal{B}), \quad (7.14)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \chi(t, \mathcal{B})$, откуда видно, что сила $\mathbf{f}_B$ является непрерывной функцией массы, почему и называется массовой.

В ряде задач, связанных с описанием движения жидкости, удобно представлять массовую силу как градиент некоторой скалярной функции Φ , т.е. писать

$$\vec{b} = -\nabla \Phi. \quad (7.15)$$

Наблюдения показывают, что это часто оказывается допустимым. Такие силы называются *потенциальными*, а функция Φ — *потенциалом массовой силы*.³⁹ Знак минус перед градиентом — дань традиции. Впредь, мы будем считать массовые силы потенциальными.

В механике жидкости массовые силы представляют лишь второстепенный интерес. Основное внимание уделяется контактным силам. По аналогии с (7.14), из (7.12) следует, что $\mathbf{f}_C$ является непрерывной функцией площади поверхности конфигурации тела (замкнутой кинематической границы). Если поле напряжений известно, то результирующая контактная сила определена и не зависит от того, что может происходить в точках, не лежащих на $\partial\chi$.

³⁹ Введение потенциала и представление векторной величины в виде (7.15) бывает полезным не только применительно к силам, но и в других случаях (см., например, с.121 и п.10.3).

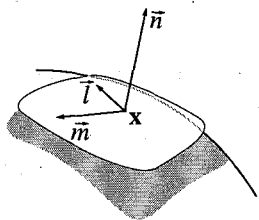
Подставляя (7.8), а также (7.12), (7.13) в (7.11), получим *основной закон движения*:

$$\int_{\chi} \rho d_t \vec{v} dV = \int_{\partial\chi} \vec{\tau} dS + \int_{\chi} \rho \vec{b} dV. \quad (7.16)$$

Первый этап получения дифференциального соотношения из основного принципа (7.8), таким образом, завершен: плотности сил определены. Теперь требуется переписать первое слагаемое в правой части в виде интеграла по конфигурации χ .

7.3. Уравнение движения

Рассмотрим поле напряжений $\vec{\tau}$ на $\partial\chi$.



От чего может зависеть вектор $\vec{\tau}$? Во-первых, скорей всего, от того, где и когда он находится, т.е. от положения точки x и момента времени t . Во-вторых, поскольку $\vec{\tau}$ — вектор, а $\partial\chi$ — поверхность, необходимо учесть их взаимное расположение, т.е. взаимную ориентацию.

Рис. 16. Касательные векторы и нормаль.

Поверхность называется *ориентируемой*, если можно указать ее внешнюю и внутреннюю стороны (лист Мёбиуса — классический пример односторонней и, следовательно, неориентируемой поверхности). Ориентацию поверхности принято связывать с положением вектора внешней нормали $\vec{n}$.

Будем считать, что поверхность $\partial\chi$ ориентируема, т.е. однозначно связана с вектором $\vec{n}$, нормальным к $\partial\chi$ в точке x (рис.16). По договоренности, вектор $\vec{n}$ направляется наружу из $\chi(t, \mathcal{B})$. Теперь можно учесть влияние ориентации поверхности на действующие на ней напряжения. Следуя Коши, примем следующий

Постулат (Коши). *Напряжение $\vec{\tau}$ в каждый данный момент времени t зависит только от положения x на поверхности и ориентации поверхности в этой точке, т.е.*

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(t, x, \vec{n}). \quad (7.17)$$

Величину $\vec{\tau}(t, \mathbf{x}, \vec{n})$ мы интерпретируем, как напряжение, вызываемое внешними телами в точке $\mathbf{x}$ в момент времени t , а величину $\vec{\tau}(t, \mathbf{x}, -\vec{n})$ — наоборот, как напряжение, вызываемое самим телом B . В соответствии со свойством 1 (равенство модулей сил действия и противодействия), введенной нами на с.25 системы сил, имеет место следующая

Лемма (Коши):

$$\vec{\tau}(t, \mathbf{x}, \vec{n}) = -\vec{\tau}(t, \mathbf{x}, -\vec{n}). \quad (7.18)$$

Теперь, рассматривая равновесие бесконечно малого тетраэдра с тремя гранями, параллельными декартовым координатным плоскостям (см., например, любой учебник из перечисленных в списке литературы), можно показать, что верна следующая

Теорема (Коши). *Зависимость напряжения $\vec{\tau}$ от нормали $\vec{n}$ линейна, т.е. если $\vec{\tau}(t, \mathbf{x}, \vec{n})$ — непрерывная функция места и времени, то существует тензор $T(t, \mathbf{x})$ такой, что*

$$\vec{\tau} = T\vec{n}. \quad (7.19)$$

Тензор T носит название **тензора напряжений**.

Если в точке $\mathbf{x} \in \partial\chi$ выбрать ортонормированный базис, образованный нормальным вектором $\vec{n}$ и двумя произвольными ортогональными векторами $\vec{l}$ и $\vec{m}$ касательными к $\partial\chi$, то напряжение $\vec{\tau}$ можно записать в виде

$$\vec{\tau}(t, \mathbf{x}, \vec{n}) = \tau^l \vec{l} + \tau^m \vec{m} + \tau^n \vec{n}. \quad (7.20)$$

Коэффициенты разложения τ^l , τ^m и τ^n являются проекциями вектора $\vec{\tau}$ на соответствующие направления и находятся по формулам:

$$\tau^l(t, \mathbf{x}) = (\vec{\tau}, \vec{l}), \quad \tau^m(t, \mathbf{x}) = (\vec{\tau}, \vec{m}), \quad \tau^n(t, \mathbf{x}) = (\vec{\tau}, \vec{n}).$$

Первые два коэффициента — проекции $\vec{\tau}$ на касательные базисные векторы $\vec{l}$ и $\vec{m}$, называются **касательными напряжениями**, а последний — проекция на нормаль — **нормальным напряжением** в точке $\mathbf{x}$.

Подставим теперь (7.19) в (7.16)

$$d_t \mathbf{m} = \int_{\chi} \rho d_t \vec{v} dV = \int_{\partial\chi} T \vec{n} dS + \int_{\chi} \rho \vec{b} dV. \quad (7.21)$$

Полученное уравнение называется **уравнением баланса импульса** $\mathbf{m}$ тела B (ср. с общим видом уравнения баланса (6.14) в гл. 6). Изменение импульса $d_t \mathbf{m}$ балансируется генерацией импульса внутри конфигурации χ массовыми силами (второе слагаемое) и притоком импульса за счет потока импульса через границу $\partial\chi$ (первое слагаемое).

При взгляде на выражение (7.21), может возникнуть вопрос: зачем все это? Ведь для задания вектора $\vec{\tau}$ требуются три числа, а для определения тензора $\mathbf{T}$ — уже девять. Где же упрощение?

Введение тензора напряжений понадобилось нам для того, чтобы из интегрального принципа (7.16) получить дифференциальное уравнение движения. Теперь мы можем применить к первому слагаемому в правой части (7.21) теорему Гаусса-Остроградского и переписать его в виде

$$\int_{\partial\chi} \mathbf{T} \vec{n} dS = \int_{\chi} \operatorname{div} \mathbf{T} dV. \quad (7.22)$$

Само же уравнение (7.21) запишем в виде равенства нулю интеграла:

$$0 = \int_{\chi} \left(\rho d_t \vec{v} - \operatorname{div} \mathbf{T} - \rho \vec{b} \right) dV. \quad (7.23)$$

Полагая подынтегральное выражение непрерывным и учитывая, что конфигурация произвольна, получим **дифференциальное уравнение баланса плотности импульса**:

$$\rho d_t \vec{v} = \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \vec{b}. \quad (7.24)$$

Это уравнение называется **законом** (или **уравнением**) **движения сплошной среды** Коши.

Конкретный вид тензора напряжений порождает ту или иную модель среды. Прежде чем переходить к рассмотрению отдельных используемых видов тензора $\mathbf{T}$, наделим его еще одним свойством, приняв следующий

Постулат (Больцман⁴⁰). Тензор напряжений симметричен, т.е.

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T. \quad (7.25)$$

⁴⁰Больцман (Boltzmann) Людвиг (1844–1906), австрийский физик.

7.4. Уравнение движения идеальной жидкости

Мы подошли, по существу, к самому важному моменту в построении модели движущейся жидкости. Если до сих пор дорога у нас была, пожалуй, одна, то теперь, мы явно стоим на распутье. От того, каким мы решим сделать тензор напряжений, зависит будущее нашей модели. Они (модели) даже классифицируются по виду тензора напряжений.

Постулат Больцмана (7.25) уменьшил количество независимых компонент тензора напряжений до 6-ти, но не определил его однозначно. Чтобы выбрать какой-то конкретный вид тензора T , да и вообще понять, из чего выбирать, применим обычный в таких случаях прием: возьмем простейшую конструкцию и сравним то, что получилось у нас с тем, что происходит в природе, т.е. сопоставим решение системы дифференциальных уравнений модели с данными наблюдений. Как правило сравнивается решение задачи, описывающей некий эксперимент, с полученными в ходе его измерениями.

Если допустить, что все расчеты и измерения проводятся правильно, то хорошее совпадение вычислений с наблюдениями (в известных, конечно, пределах) означает, что наша модель в этом случае работает и использованный вид тензора напряжений здесь подошел. Есть надежда, что подойдет не только здесь, но и в других случаях. Если же «все — хорошо, да что-то — нехорошо», то общую структуру тензора T уловить, видимо, удалось, но где-то его еще надо подправить. Здесь явно намечается итерационный процесс, который может привести к цели. Ну и, наконец, если «все не так, как надо», то придуманный вид тензора напряжений здесь никуда не годится. Надо придумать другой. Будем придерживаться этого пути. При этом, заметим, что неудачное сравнение с экспериментом еще не означает полную нежизнеспособность того или иного вида тензора T . Это лишь показывает, что данный конкретный эксперимент требует другого вида тензора и не исключено, что при моделировании движения иной среды и/или в иных условиях, такой вид тензора T был бы удовлетворительным.

Итак, простейшей гипотезой, по-видимому, может служить пропорциональность тензора напряжений единичному тензору:⁴¹

$$T = -pI. \quad (7.26)$$

⁴¹ Нулевой тензор, очевидно, не подходит — он исключает все контактные силы напрочь.

Выбор этот удачен в том смысле, что существует масса ситуаций, т.е. сред и условий их движения, где модель жидкости с тензором напряжений такого вида дает результаты, близкие к данным измерений. Коэффициент пропорциональности p называется *давлением*. Вектор напряжения $\vec{\tau}$ при таком выборе тензора T совпадает по направлению с нормалью к поверхности. Действительно, подставив (7.26) в (7.19), найдем

$$\vec{\tau} = T\vec{n} = -p\vec{n} = -p\vec{n}. \quad (7.27)$$

Проекция $\vec{\tau}$ на касательную плоскость равна нулю и, следовательно, касательные напряжения отсутствуют. Знак в (7.26) выбран так, чтобы при $p > 0$ силы $\vec{\tau}$, действующие на замкнутую поверхность, стремились сжать жидкость, заключенную внутри. Давление, определенное в каждой точке конфигурации χ , образует *поле давления*. Тело, состояние которого характеризуется зависимостью (7.26) называется *идеальной жидкостью*.

Дивергенция T легко вычисляется и равна градиенту давления:

$$(\operatorname{div}(pl))_i = \partial_{x_k} (p\delta_{ki}) = \partial_{x_i} p = \nabla_i p \Rightarrow \operatorname{div}(pl) = \nabla p. \quad (7.28)$$

Здесь δ_{ik} — компонента единичного тензора. Подставляя (7.26), с учетом (7.28), в (7.24), получим *уравнение движения идеальной жидкости*

$$\rho d_t \vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{b}, \quad (7.29)$$

или *уравнение Эйлера*. Другую форму того же уравнения найдем, если производную $d_t \vec{v}$ запишем, используя формулу Эйлера:

$$d_t \vec{v} = \partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \nabla \vec{v}) = \partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v}.$$

Подставляя это выражение в (7.29) и нормируя на плотность массы, получим

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{b}. \quad (7.30)$$

7.5. Уравнение Эйлера в компонентной форме

Обе формы уравнения движения идеальной жидкости и (7.29) и (7.30) векторные. Они удобны при построении теории, но если дело доходит до вычислений, то требуется компонентная форма записи. Чтобы

получить такую форму, выберем в пространстве мест систему координат. Можно, конечно, выбрать любую, но удобнее окажется та, которая как-то учитывает те или иные особенности задачи.

Так, если массовая сила обусловлена тяготением Земли и вектор $\vec{b}$ всегда направлен к центру Земли, т.е. вниз,⁴² то естественно использовать это выделенное направление для выбора и ориентации системы координат. Обычно параллельно вектору $\vec{b}$ направляют одну из осей координат. Тогда, если в каждой точке x выбрать координатный базис $\{\vec{e}_i\}$, две компоненты вектора $\vec{b}$ из трех обратятся в нуль, а третья окажется равной длине вектора, т.е. ускорению свободного падения $|\vec{b}| = g$. Знак этой третьей компоненты зависит от того, со- или противоположно направлены базисный вектор и вектор $\vec{b}$. Так, в случае выбора сферических геоцентрических координат (λ, φ, r) с осью r , направленной против вектора $\vec{b}$, имеем $\vec{b} = (0, 0, -g)$. Напротив, если рассматривается задача в декартовых координатах (x, y, z) с осью z , направленной вертикально вниз, получим $\vec{b} = (0, 0, g)$.

Итак, пусть выбрана система координат в пространстве мест, а в каждой точке конфигурации тела определен координатный базис $\{\vec{e}_i\}$, в котором

$$\vec{v} = v_i \vec{e}_i, \quad \vec{b} = (0, 0, -g) = -g \delta_{3i} \vec{e}_i, \quad \nabla(\cdot) = \vec{e}_i \nabla_i(\cdot). \quad (7.31)$$

Использование символа Кронекера в разложении вектора $\vec{b}$ позволяет автоматически вставить его только в третье уравнение. Подставляя (7.31) в (7.30), получим

$$\partial_t (v_i \vec{e}_i) + (\vec{v}, \nabla) (v_i \vec{e}_i) = -\frac{1}{\rho} \nabla_i p \vec{e}_i - g \delta_{3i} \vec{e}_i, \quad (7.32)$$

или, перенося все влево и вынося базисный вектор за скобку,

$$\left(\partial_t v_i + (\vec{v}, \nabla) v_i + \frac{1}{\rho} \nabla_i p + g \delta_{3i} \right) \vec{e}_i = 0. \quad (7.33)$$

В правой части стоит нулевой вектор, все компоненты которого равны нулю. Значит, для того, чтобы равенство (7.33) выполнялось, слева должен также стоять вектор с нулевыми компонентами. Таким образом,

⁴²Ведь *низом* и называется то, куда указывает вектор $\vec{b}$.

имеем три скалярных уравнения относительно компонент скорости, соответствующих одному векторному уравнению (7.30)

$$\partial_t v_i + (\vec{v}, \nabla) v_i = -\frac{1}{\rho} \nabla_i p - g \delta_{3i}. \quad (7.34)$$

Можно, далее, расписать и скалярное произведение $(\vec{v}, \nabla) = v_k \nabla_k$ так, что окончательно уравнения Эйлера (теперь их три) примут вид

$$\partial_t v_i + v_k \nabla_k v_i = -\frac{1}{\rho} \nabla_i p - g \delta_{3i}. \quad (7.35)$$

Не будем при этом забывать, что

- 1) k — немой индекс, по которому происходит суммирование от 1 до 3;
- 2) i — свободный индекс; он принимает значения 1, 2 и 3, разные в разных уравнениях, и тем самым нумерует эти уравнения;
- 3) ∇_k — ковариантная производная. Если выбрана декартова система координат, то ковариантная производная равна частной ($\nabla_k v_i = \partial_{x_k} v_i$). Ковариантная производная от скаляра всегда равна частной производной ($\nabla_i p = \partial_{x_i} p$). В этом случае уравнение (7.35) принимает вид

$$\partial_t v_i + v_k \partial_{x_k} v_i = -\frac{1}{\rho} \partial_{x_i} p - g \delta_{3i}.$$

7.6. Резюме

В нашей модели жидкости теперь два уравнения: уравнение неразрывности и уравнение движения. Система, однако, по-прежнему, в общем случае не замкнута. На 4 скалярных уравнения приходится 5 неизвестных (ρ , $\vec{v}$ и p). Если задано одно из полей (ρ или p), то уравнения модели позволяют найти поле скоростей и второе скалярное поле. Что же делать в общем случае? Видимо, попытаться найти еще одно независимое уравнение, связывающее переменные модели. Попробуем это сделать в следующей главе.

8. Энергия

8.1. Кинетическая энергия и ее баланс

Изучая интегральные параметры и соответствующие им плотности, мы ввели в рассмотрение плотность массы — скалярное поле, определенное на точках тела. Это не единственное скалярное поле, которое можно определить. Помимо ρ , в каждой точке тела у нас определен модуль вектора скорости $\vec{v}$, с которой точка движется по своей траектории. Величина

$$k = \frac{1}{2} \rho |\vec{v}|^2 = \frac{1}{2} \rho (\vec{v}, \vec{v}) \quad (8.1)$$

называется *плотностью кинетической энергии*, а соответствующий интегральный параметр $K(t, B)$ — *кинетической энергией* тела (т.е. энергией движения) в момент времени t

$$K(t, B) = \int_{\chi} k dV. \quad (8.2)$$

Чтобы понять, чем вызывается изменение кинетической энергии, найдем скорость ее изменения. Вычислим производную по времени и получим

$$d_t K = \int_{\chi} \rho d_t \frac{k}{\rho} dV = \frac{1}{2} \int_{\chi} \rho d_t (\vec{v}, \vec{v}) dV = \int_{\chi} \rho (\vec{v}, d_t \vec{v}) dV. \quad (8.3)$$

Здесь в первом равенстве мы воспользовались формулой (7.6), а в третьем учли, что $d_t (\vec{v}, \vec{v}) = 2 (\vec{v}, d_t \vec{v})$. В итоге, при обычных предположениях, имеем дифференциальное уравнение, соответствующее (8.3):

$$\rho d_t \frac{k}{\rho} = \rho (\vec{v}, d_t \vec{v}) = (\vec{v}, \rho d_t \vec{v}). \quad (8.4)$$

Итак, для нахождения скорости изменения удельной плотности кинетической энергии $d_t \frac{k}{\rho}$, а затем и кинетической энергии тела $d_t K$, нужно вычислить скалярное произведение вектора скорости $\vec{v}$ на вектор ускорения $d_t \vec{v}$. Ускорение можно найти из уравнения движения (7.24), левая часть которого есть произведение ρ на ускорение. Таким образом,

$$\rho d_t \frac{k}{\rho} = (\vec{v}, \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \vec{b}) = (\vec{v}, \operatorname{div} \mathbf{T}) + (\vec{v}, \rho \vec{b}). \quad (8.5)$$

Это выражение называется *уравнением баланса удельной плотности кинетической энергии*.⁴³ В частности, для идеальной жидкости ($T = -pI$) получим

$$\rho d_t \frac{k}{\rho} = -(\vec{v}, \nabla p) + (\vec{v}, \rho \vec{b})$$

или в компонентной форме (и нормируя на ρ)

$$\partial_t \frac{k}{\rho} + v_i \partial_{x_i} \frac{k}{\rho} = -\frac{1}{\rho} v_i \partial_{x_i} p + v_i b_i.$$

Скорость изменения кинетической энергии тела в общем случае найдем, интегрируя (8.5) по точкам текущей конфигурации χ :

$$d_t K = \int_{\chi} (\vec{v}, \operatorname{div} T + \rho \vec{b}) dV. \quad (8.6)$$

Чем же определяется изменение кинетической энергии, т.е. что стоит в правой части (8.6)? Раз в левой части стоит скорость изменения энергии, а энергия — это способность тела совершать работу, значит, в правой части по определению должна стоять скорость совершения работы системой сил, т.е. их мощность.

Определим мощность системы сил следующим образом. Пусть $\vec{v}$ — скорость перемещения точек тела под действием силы $\mathbf{f}$ с плотностью $\vec{f}$, тогда интеграл

$$W = \int_A (\vec{v}, \vec{f}) dA$$

будем называть *мощностью силы $\mathbf{f}$* . Если $\mathbf{f}$ — массовая сила, то интегрирование ведется по точкам конфигурации χ тела, если же $\mathbf{f}$ — контактная сила, то — по точкам границы $\partial\chi$. Подсчитаем мощность системы сил, действующих в нашем случае,

$$W = \int_{\chi} (\vec{v}, \rho \vec{b}) dV + \int_{\partial\chi} (\vec{v}, \vec{\tau}) dS. \quad (8.7)$$

⁴³Заметьте, что мы воспользовались здесь уравнением движения в форме закона движения Коши и, значит, равенство (8.5) выполняется для любой среды, движение которой подчиняется закону движения (7.24), а не только идеальной жидкости.

Первое слагаемое — *скорость совершения работы* массовыми силами, второе — *поверхностными*. Причем,

$$\int_{\partial\chi} (\vec{v}, \vec{\tau}) dS = \int_{\partial\chi} (\vec{v}, T\vec{n}) dS = \int_{\partial\chi} (T\vec{v}, \vec{n}) dS. \quad (8.8)$$

В последнем равенстве мы использовали формулу (4.3) и постулат Больцмана (7.25). Применяя теперь к (8.8) теорему Гаусса-Остроградского, находим мощность контактных сил:

$$\int_{\partial\chi} (T\vec{v}, \vec{n}) dS = \int_{\chi} \operatorname{div} (T\vec{v}) dV. \quad (8.9)$$

Суммарная же мощность сил, действующих на тело, равна

$$W = \int_{\chi} \left(\operatorname{div} (T\vec{v}) + (\vec{v}, \rho\vec{b}) \right) dV. \quad (8.10)$$

Сравнивая полученное выражение с правой частью (8.6), мы видим, что 1) работа массовых сил состоит исключительно в изменении кинетической энергии тела и 2) контактные силы тоже изменяют кинетическую энергию, но кроме этого делают что-то еще. Что же? Вычислим дивергенцию $\operatorname{div} (T\vec{v})$:

$$\operatorname{div} (T\vec{v}) = \nabla_k (T_{kj} v_j) = (\nabla_k T_{kj}) v_j + T_{kj} \nabla_k v_j = (\vec{v}, \operatorname{div} T) + T : \nabla \vec{v}. \quad (8.11)$$

Первое слагаемое как раз и образует ту часть мощности контактных сил, которая идет на изменение кинетической энергии. На что же идет вторая часть?

Вычислим скалярное произведение $T : \nabla \vec{v}$. В случае идеальной жидкости, когда $T = -pI$, имеем

$$T : \nabla \vec{v} = -p \delta_{ij} \nabla_j v_i = -p \nabla_i v_i = -p (\nabla, \vec{v}), \quad (8.12)$$

Величина $(\nabla, \vec{v})$ определяется относительной сжимаемостью среды (см. формулу (6.18)) и, следовательно,

$$T : \nabla \vec{v} = \frac{p}{\rho} d_t \rho. \quad (8.13)$$

Теперь видно, что вторая часть мощности контактных сил тратится на изменение объема за счет всестороннего сжатия/растяжения (ведь от нуля отличны лишь нормальные напряжения; касательные напряжения в силу (7.27) отсутствуют) и потому не отражается на изменении кинетической энергии тела.

Получается, таким образом, что возможна ситуация, когда контактные силы действуют, но не участвуют в изменении кинетической энергии тела. Для того чтобы увидеть это более отчетливо, избавимся от массовой силы в правой части, введя понятие *механической энергии*. Будем считать массовую силу (как мы ранее договорились) потенциальной с независимым от времени потенциалом Φ , тогда уравнение (8.5) может быть записано в виде

$$\rho d_t \left(\frac{k}{\rho} + \Phi \right) = (\vec{v}, \operatorname{div} \mathbf{T}). \quad (8.14)$$

Выражение в левой части в скобках называется *удельной плотностью механической энергии*, а само уравнение (8.14) — *уравнением баланса плотности механической энергии*.

Упражнение. Получите уравнение (8.14).

Интегрируя (8.14) по χ , найдем

$$d_t (K + U) = \int_{\chi} (\vec{v}, \operatorname{div} \mathbf{T}) dV. \quad (8.15)$$

Величина $U = \int_{\chi} \rho \Phi dV$ называется *потенциальной энергией* конфигурации χ тела B , а сумма $(K + U)$ — *механической энергией*. Отсюда следует, что, если $(\vec{v}, \operatorname{div} \mathbf{T}) = 0$ (в случае идеальной жидкости это означает $\nabla p \perp \vec{v}$) или $\operatorname{div} \mathbf{T} = 0$ (т.е. $\nabla p = 0$), поверхностные силы не участвуют в изменении механической энергии, осуществляя лишь всестороннее сжатие/расширение. Механическая энергия тела в таком случае сохраняется в процессе движения.

8.2. Внутренняя энергия и ее баланс

Рассмотрим еще раз суммарную мощность сил, действующих на тело

$$\begin{aligned} W &= \int_{\chi} \left(\operatorname{div} (\mathbf{T} \vec{v}) + (\vec{v}, \rho \vec{b}) \right) dV = \\ &= \int_{\chi} (\vec{v}, \operatorname{div} \mathbf{T} + \rho \vec{b}) dV + \int_{\chi} (\mathbf{T} : \nabla \vec{v}) dV. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части — скорость изменения кинетической энергии $d_t K$. Будем интерпретировать второе слагаемое аналогично, как скорость изменения некоторого вида энергии. Обозначим его буквой E и назовем *внутренней энергией*. Плотность внутренней энергии будем обозначать буквой ε , т.е. положим

$$E = \int_{\chi} \varepsilon dV. \quad (8.16)$$

Тогда вся мощность сил идет на изменение энергии, а скорость изменения внутренней энергии среды равна:

$$d_t E = \int_{\chi} (\mathbf{T} : \nabla \vec{v}) dV. \quad (8.17)$$

Теперь энергетический баланс выглядит более законченным:

$$d_t (K + E) = W, \quad (8.18)$$

где W — мощность, действующих на тело сил. Величина $(K + E)$ называется *полной энергией* тела, а $(k + \varepsilon)$, соответственно, *плотностью полной энергии*. Первое является интегральным параметром среды, а второе — его плотностью.

Что в действительности описывает новая величина E ? Этот параметр связан с тем, что мы ощущаем, как тепло, нагрев среды. Все знают, что если, скажем, газ сжать, то он нагреется, и, наоборот, при расширении — охладится (на этом принципе, как известно, основан холодильник). В обоих случаях изменяется плотность кинетической энергии среды. Однако эти изменения происходят на микроскопических

масштабах, на уровне молекул, где индивидуальное описание становится невозможным. Вместо этого, приняв гипотезу сплошности, мы используем параметрическое описание. Внутренняя энергия и ее плотность, и есть те параметры, которые характеризуют среднюю кинетическую энергию молекул.

Последнее, что осталось сделать в энергетическом балансе (8.18) — это учесть тот очевидный факт, что тепло можно не только вырабатывать, изменяя конфигурацию тела, но им можно также обмениваться. Это предположение формулируется в виде постулата, известного как

Первое начало (закон) термодинамики:

$$d_t(K + E) = W + Q, \quad (8.19)$$

который и есть окончательный вид **интегрального уравнения баланса полной энергии**. Смысл обозначений здесь тот же, что и в (8.18), а Q — скорость нагрева тела. В правой части стоит $(W + Q)$ — мощность источника полной энергии. При отсутствии источника скорость изменения полной энергии в процессе движения равна нулю, т.е. полная энергия сохраняется.

Попробуем теперь из этого интегрального соотношения получить дифференциальное уравнение. По аналогии с силами, рассматривается два варианта передачи тепла: **объемный нагрев** посредством **излучения** и **контактный нагрев** за счет **теплопроводности**. Общая же скорость нагрева считается суммой скоростей **объемного** Q_B и **контактного** Q_C **нагрева**

$$Q = Q_B + Q_C. \quad (8.20)$$

Величина Q_B полагается непрерывной функцией объема конфигурации тела:

$$Q_B = \int_{\chi} \rho s dV, \quad (8.21)$$

(плотность ρs — **приток тепла за счет излучения**), а величина Q_C — непрерывной функцией площади поверхности $\partial\chi$:

$$Q_C = \int_{\partial\chi} q dS, \quad (8.22)$$

где q — **приток тепла за счет теплопроводности**. Данные наблюдений показывают, что аналогия с силами идет дальше и позволя-

ет сформулировать утверждения типа постулата и теоремы Коши. А именно: считаем, что имеют место

Постулат

$$q = q(t, \mathbf{x}, \vec{n}), \quad (8.23)$$

утверждающий, что приток тепла q в каждый данный момент времени t зависит только от положения $\mathbf{x}$ на поверхности и ориентации поверхности в этой точке и

Теорема (принцип теплового потока Фурье-Стокса⁴⁴)

$$q(t, \mathbf{x}, \vec{n}) = (\vec{h}(t, \mathbf{x}), \vec{n}), \quad (8.24)$$

утверждающая, что зависимость притока тепла от нормали линейна. Величина $\vec{h}(t, \mathbf{x})$ называется *плотностью потока тепла*. Объединяя (8.20)–(8.24), получим

$$Q = \int_{\chi} \rho s dV + \int_{\partial\chi} (\vec{h}, \vec{n}) dS =$$

и, далее, применяя ко второму слагаемому теорему Гаусса-Остроградского, найдем

$$= \int_{\chi} (\rho s + (\nabla, \vec{h})) dV. \quad (8.25)$$

Для получения дифференциального уравнения баланса осталось лишь собрать все воедино, т.е. подставить в Первое начало термодинамики (8.19) выражения (8.15), (8.16) — в левую часть, и (8.23), (8.25) — в правую:

$$d_t \int_{\chi} (k + \varepsilon) dV = \underbrace{\int_{\chi} (\operatorname{div}(\mathbf{T}\vec{v}) + (\vec{v}, \rho\vec{b})) dV}_W + \underbrace{\int_{\chi} ((\nabla, \vec{h}) + \rho s) dV}_Q. \quad (8.26)$$

⁴⁴Фурье (Fourier) Жан Батист Жозеф (1768–1830), французский физик и математик.

Стокс (Stokes) Джордж Габриель (1819–1903), английский физик и математик.

Вычисляя производную в левой части с помощью формулы (7.6), объединяя интегралы и предполагая непрерывность подынтегрального выражения и произвольность конфигурации, получим *дифференциальное уравнение баланса плотности полной энергии*:

$$\rho d_t \frac{k + \varepsilon}{\rho} = \operatorname{div}(\mathbf{T}\vec{v}) + (\vec{v}, \rho\vec{b}) + (\nabla, \vec{h}) + \rho s. \quad (8.27)$$

Теперь можно получить *баланс внутренней энергии*. Это легко сделать, вычтя, например, из (8.26) или (8.27) соответственно (8.6) или (8.5). Проделаем это и вычтем (8.6) из (8.26). С учетом формулы (8.11) имеем:

$$d_t E = \int_{\chi} \rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} dV = \int_{\chi} (\mathbf{T} : \nabla \vec{v}) dV + \int_{\chi} ((\nabla, \vec{h}) + \rho s) dV. \quad (8.28)$$

Такой результат вполне согласуется с выражением (8.17), в котором не учитывается внешний нагрев. Дифференциальное уравнение для ε можно получить теперь и непосредственно из (8.28). Вот оно

$$\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} = \mathbf{T} : \nabla \vec{v} + (\nabla, \vec{h}) + \rho s. \quad (8.29)$$

Это уравнение описывает *скорость изменения внутренней энергии тела* под действием контактных сил ($\mathbf{T} : \nabla \vec{v}$) на его поверхности (а точнее, на любой его кинематической границе) и внешнего нагрева $((\nabla, \vec{h}) + \rho s)$. В случае идеальной жидкости (учитываем формулы (8.13)) и в отсутствие внешнего нагрева, уравнение (8.29) принимает вид:

$$d_t \frac{\varepsilon}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d_t \rho = d_t \frac{\varepsilon}{\rho} + p d_t \frac{1}{\rho} = 0. \quad (8.30)$$

Такое выражение для Первого начала термодинамики можно часто встретить в литературе. Если, наконец, жидкость считать несжимаемой (т.е. полагать $d_t \rho = 0$), то внутренняя энергия в точке тела сохраняется: $d_t \varepsilon = 0$.

8.3. Резюме

Вспомним, с чего и почему мы начали эту главу. В нашем распоряжении имелась недоопределенная система двух уравнений. Нужно бы-

ло получить уравнение, замыкающее систему, т.е. описывающее некую новую связь между уже имеющимися переменными. Чего же мы достигли?

Мы получили целых четыре уравнения (баланс кинетической, механической, полной и внутренней энергий). Однако новым является лишь одно — это либо уравнение баланса полной энергии, либо — внутренней (можно взять любое). Остальные три не являются независимыми и легко получаются из выбранного и уже имевшихся уравнений.

Наша модель жидкости содержит теперь пять независимых скалярных уравнений, но, по-прежнему, остается недоопределенной. Новое уравнение, которое нам требовалось для замыкания прежней системы, снова добавило неизвестную величину — плотность внутренней энергии. Ситуация патовая. Остается последнее средство: опытным путем найти связь между переменными задачи. Но универсальный опыт не поставить: для любого опыта требуется какая-то конкретная жидкость. И, значит, если упомянутую связь удастся найти, то она, скорее всего, будет приложима лишь к той среде, для которой найдена. Таким образом, здесь наша теория перестает быть универсальной.

8.4. Уравнение состояния

Неизвестными у нас являются следующие величины: ρ , $\vec{v}$, p , ϵ . Понятно, что при таком количестве неизвестных поиск связывающего их выражения, без дополнительных упрощающих гипотез, вряд ли возможен. Поэтому с самого начала мы такие гипотезы примем.

- 1) Во-первых, это гипотеза *локального термодинамического равновесия*, которая означает, что все уравнения равновесной термодинамики справедливы для бесконечно малых элементов массы неравновесных систем. В настоящее время принято считать [3], что эта гипотеза применима всегда, за исключением особых случаев быстропротекающих процессов. Термодинамическое равновесие (как и любое другое равновесие) означает произвольно долгое сохранение телом значений своих характеристик при неизменных внешних условиях. В этом случае производные по времени от термодинамических характеристик локально равны нулю.
- 2) Во-вторых, здесь мы будем рассматривать только простейший

случай однокомпонентной и однофазной среды. Иными словами, исследуемое тело состоит из одного вещества, находящегося в одном термодинамическом состоянии.

- 3) В-третьих, мы будем считать, что наша среда как термодинамическая система не зависит от значений макроскопической скорости и является двухпараметрической. Это означает, что ее состояние полностью определяется заданием каких-либо двух параметров.

Таким образом, с учетом всех трех упрощений, получается, что оставшиеся неизвестные ρ , p , и ε должны быть связаны одним соотношением, например, таким:

$$\rho = \rho(p, \varepsilon). \quad (8.31)$$

Это выражение называется **уравнением состояния**. Оно является алгебраическим, а не дифференциальным и связывает значения самих переменных, а не их производных. Плотность массы в уравнении (8.31) оказывается сложной функцией времени и места:

$$\rho(t, \mathbf{x}) = \rho(p(t, \mathbf{x}), \varepsilon(t, \mathbf{x})). \quad (8.32)$$

Соответственно, любая производная плотности массы может быть выражена через производные от p и ε , а именно:

$$\partial_{x_\alpha} \rho = \partial_p \rho \partial_{x_\alpha} p + \partial_\varepsilon \rho \partial_{x_\alpha} \varepsilon. \quad (8.33)$$

Это равенство часто используется при преобразовании уравнений модели.

Двигаясь в описываемом направлении, удается достичь определенных успехов. В результате обработки многочисленных экспериментов был получен ряд уравнений состояния (часто весьма сложных) для различных веществ. Они и служат последним звеном, замыкающим систему уравнений гидромеханики: добавляют еще одну связь, не увеличивая число неизвестных. Достигается это, однако, ценой потери универсальности модели. До сих пор все уравнения были справедливы для любой сплошной среды (в рамках принятых допущений). Привлечение конкретного уравнения состояния делает систему справедливой лишь для того вещества, которому это уравнение соответствует.

Итак, из четырех законов природы

- закона сохранения массы (6.15),
- основного принципа динамики (7.5),
- закона сохранения полной энергии или первого начала термодинамики (8.19) и
- уравнения состояния⁴⁵ (8.31)

с помощью ряда дополнительных гипотез и предположений нам удалось получить замкнутую систему дифференциальных уравнений, которую и принято называть *математической моделью динамики жидкости*.

Прежде чем закончить этот параграф, ответим на один возможный вопрос: откуда вдруг взялась эта внутренняя энергия, тепло? Ведь в самом начале не вводилось ничего подобного. Не совсем так. При обсуждении гипотезы сплошности было отмечено, что ее принятие означает наше желание описывать явно только макроскопические процессы. Если бы мы собирались описывать движение молекул, как можно было бы игнорировать факт дискретности материи? Именно то, что мы сочли это несущественным, позволило нам считать материю *континуумом*.

Насколько же это не существенно? Настолько, что можно им пренебречь вовсе, или все же надо как-то учесть, введя, скажем, специальный параметр? Наблюдения показывают, что в зависимости от конкретной ситуации (среды, масштабов явления) поступать можно и так, и так.

Если погрешности, связанные с пренебрежением молекулярными процессами, слишком велики, можно попробовать учесть их параметрически, т.е. ввести функцию времени и места $\varepsilon(t, x)$, интерпретировать ее значения, как плотность средней кинетической энергии молекулярных движений и назвать *внутренней энергией*. Так и было сделано при записи уравнения (8.31). Модель жидкости, в которой уравнение состояния записано в виде (8.31), называется *бароклиной*. Рассмотрение внутренней энергии здесь является необходимой составной частью задачи. Она обеспечивает выполнение закона сохранения полной энергии, поскольку в общем случае кинетическая энергия не является

⁴⁵Ведь это соотношение, как и первые три, добыто из опыта и тоже является утверждением, принимаемым без доказательства, т.е. аксиомой.

сохраняющейся величиной. Потери кинетической энергии балансируются ростом внутренней энергии (нагревом среды), и, таким образом, знание этого параметра требуется для корректного описания динамики жидкости.

Напротив, если опыт показывает, что потери кинетической энергии за счет сил внутреннего трения пренебрежимо малы, и макроскопическая динамика жидкости мало зависит от процессов, происходящих на молекулярном уровне, тогда гипотезу двупараметричности (3) можно заменить более сильным предположением однопараметричности и уравнение состояния записывать в виде:

$$\rho = \rho(p), \quad (8.34)$$

т.е. считать плотность массы независимой от внутренней энергии. Такая модель жидкости называется *баротропной*. Здесь для описания движения среды привлечения внутренней энергии не требуется.

В крайнем случае, можно придумать более сложные зависимости, отказавшись от каких-либо из принятых в начале раздела гипотез, но обычно выражений типа (8.31) оказывается вполне достаточно.

Современным математикам вообще трудно читать своих предшественников, которые писали: «Петя вымыл руки» там, где просто следовало сказать: «Существует $t_1 < 0$, такое, что образ Петя(t_1) точки t_1 при естественном отображении $t \mapsto \text{Петя}(t)$ принадлежит множеству грязноруких, и такое t_2 из полуинтервала $(t_1, 0]$, что образ точки t_2 при том же отображении принадлежит дополнению к множеству, о котором шла речь при рассмотрении точки t_1 .»

В.И.Арнольд. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук.

Часть II

Приложения

9. Идеальная жидкость

9.1. Ведение

9.1.1. Постановка задач гидромеханики идеальной жидкости

В нашем распоряжении имеется теперь замкнутая система дифференциальных уравнений, описывающая движения идеальной жидкости. Вот она:

$$\partial_t \rho + (\nabla, \rho \vec{v}) = 0, \quad (9.1)$$

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{b}, \quad (9.2)$$

$$d_t \frac{\varepsilon}{\rho} + p d_t \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho} (\nabla, \vec{h}) + s, \quad (9.3)$$

$$\rho = \rho(p, \varepsilon). \quad (9.4)$$

Три дифференциальных уравнения, связывают четыре неизвестных функции ρ , $\vec{v}$, p , и ε . При этом, система содержит одно векторное уравнение, а совокупность неизвестных, соответственно, включает вектор. Величина $\vec{b}$ обычно считается параметром задачи (как и источники внутренней энергии $\vec{h}$ и s). Последнее, четвертое, уравнение позволяет исключить из уравнений одну из неизвестных скалярных функций (например, p).

Система (9.1)–(9.3) есть система трехмерных эволюционных дифференциальных уравнений (содержит производные по времени только 1-го порядка) в частных производных 1-го порядка (содержит частные производные не выше первого порядка). Наличие в системе (9.1)–(9.3) производных по всем координатным направлениям позволяет сформулировать смешанную начально-краевую задачу. Для этого требуется поставить необходимое число начальных и граничных условий.

Поскольку все дифференциальные уравнения — эволюционные, в начальный момент времени $t = 0$ нужно задать значения ρ , $\vec{v}$ и ε . На границе области определения неизвестных функций ставятся граничные условия для ρ , $\vec{v}$, и ε в количестве, равном наибольшему порядку

пространственных производных, т.е. в случае идеальной жидкости — по одному.

После того, как выписаны уравнения, выбрана область определения функций и заданы начальные и граничные условия, можно говорить, что *задача поставлена*.

9.1.2. Уравнение движения в форме Громеки-Лэмба

При рассмотрении динамики идеальной жидкости полезным оказывается представление уравнения движения Эйлера (9.2) в, так называемой, форме Громеки-Лэмба.⁴⁶ Особенность этой формы записи состоит в том, что в левой части уравнения явно выделяется член, описывающий вихревое движение жидкости.

Для получения указанной формы запишем второе слагаемое в левой части (9.2) в терминах градиента скорости $G = \nabla \vec{v}$ и спина $W = \frac{1}{2}(G - G^T)$:

$$(\vec{v}, \nabla) \vec{v} = G \vec{v} = (G - G^T) \vec{v} + G^T \vec{v} = 2W \vec{v} + G^T \vec{v}.$$

Первое слагаемое, в соответствии с формулой (5.18), дает $2W \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ или, меняя местами сомножители в векторном произведении, $2W \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{\omega}$. Здесь $\vec{\omega}$ — введенный ранее вектор вихря скорости: $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$. Выражение для j -ой компоненты вектора $G^T \vec{v}$ также легко находится

$$(G^T \vec{v})_j = (\partial_{x_j} v_k) v_k = \frac{1}{2} \partial_{x_j} (v_k)^2,$$

откуда $G^T \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla |\vec{v}|^2$. Таким образом,

$$(\vec{v}, \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla |\vec{v}|^2 - \vec{v} \times \vec{\omega}. \quad (9.5)$$

Подставляя теперь это выражение в уравнение (9.2), получим

$$\partial_t \vec{v} - \vec{v} \times \vec{\omega} + \frac{1}{2} \nabla |\vec{v}|^2 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{b}.$$

Это и есть уравнение движения в форме Громеки-Лэмба. В заключение, перегруппировывая члены и полагая, как обычно, массовую силу $\vec{b}$ потенциальной с потенциалом $-\Phi$, запишем

⁴⁶Громека Ипполит Степанович (1851-1889), русский гидромеханик, Лэмб (Lamb) Гораций (1849-1934), английский математик и механик.

$$\partial_t \vec{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \Phi \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{v} \times \vec{\omega}. \quad (9.6)$$

9.1.3. Замечания о приложениях модели

Решение задач гидромеханики в полном объеме — дело крайне трудоемкое, а подчас и ненужное. Часто, пользуясь какой-либо априорной информацией относительно искомого решения, удастся заметно упростить исходные уравнения, а в редких случаях даже получить аналитическое решение.

Не лишне, при этом, подчеркнуть, что после того, как нами (с помощью великих предшественников) была сформулирована модель движущейся сплошной среды, никаких принципиально новых уравнений, в рамках имеющейся модели, мы получать не собираемся. Модель среды все время одна и та же. Единственное существенное изменение, которое мы можем сделать — переопределить тензор напряжений. К этому приходится прибегать в тех случаях, когда имеющаяся базовая модель идеальной жидкости перестает описывать наблюдаемые течения. Мы воспользуемся такой возможностью при рассмотрении вязкой и турбулентной среды.

Значительно чаще нам будет достаточно пренебречь чем-нибудь в уже построенной модели, чтобы упростить имеющуюся сложную систему уравнений, приспособив ее для описания специальных режимов течения. Именно такого рода упрощения и используются далее. Мы жертвуем универсальностью ради возможности проще описать какой-либо частный случай. Обратите внимание, что всякий раз, когда мы будем выводить таким образом новые уравнения (система уравнений гидростатики п.9.2, уравнение вихря скорости п.9.3.2 и проч.), мы будем действовать не так, как поступали при выводе уравнений модели сплошной среды в первой части книги, то есть начинать будем не с обсуждения основ, базовых предпосылок, а сразу, используя готовую модель, будем что-то в ней упрощать (или скорости приравняем нулю, или производные, либо уравнение состояния запишем в урезанном виде, ...). Так же поступим и теперь при рассмотрении одного из таких простых частных случаев, каковым является гидростатическое равновесие.

9.2. Гидростатика

Гидростатика описывает механическое равновесие *покоящейся жидкости*. В этом случае $\vec{v} = 0$ и уравнения (9.1)–(9.3) принимают вид:

$$\partial_t \rho = 0, \quad (9.7)$$

$$0 = -\nabla p + \rho \vec{b}, \quad (9.8)$$

$$\partial_t \frac{\varepsilon}{\rho} = -p \partial_t \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} (\nabla, \vec{h}) + s. \quad (9.9)$$

Из уравнения неразрывности (9.7) следует, что плотность покоящейся жидкости сохраняется в каждой точке. Изменения внутренней энергии, как видно из уравнений (9.7) и (9.9), происходит лишь за счет внешнего нагрева. Уравнение (9.8) позволяет найти распределение давления в покоящейся жидкости. Выберем декартов базис, направим $\vec{e}_3$ вертикально вверх, и обозначим $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$. Тогда $\vec{b} = (0, 0, -g)$, и уравнение (9.8) оказывается эквивалентным трем скалярным уравнениям такого вида:

$$\begin{aligned} -\partial_x p &= 0, \\ -\partial_y p &= 0, \\ -\partial_z p &= \rho g. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Из первых двух уравнений следует, что $p = p(z)$. Для третьего уравнения можно сформулировать задачу Коши, если задать при некотором z значение давления.

Пусть, например, начало координат расположено на нижней границе слоя жидкости глубиной h . Давление на поверхности равно p_0 . Тогда интегрирование уравнения (9.10) дает

$$\int_{p(z)}^{p(h)} dp = -g \int_z^h \rho dz,$$

и при $\rho = \text{const}$ получаем:

$$p = p_0 + \rho g(h - z).$$

9.3. Баротропная жидкость

Если динамика жидкости описывается баротропной моделью, первый член в правой части уравнения движения (9.2) может быть записан как градиент некоторой функции. Такое представление позволяет упростить модель среды и получить важные сведения о характере течения.

Определим функцию P следующим образом:

$$P = \int \frac{1}{\rho} dp.$$

В силу того, что уравнение состояния имеет вид $\rho = \rho(p)$, т.е. плотность зависит лишь от давления, подынтегральное выражение может быть записано как дифференциал некоторой функции. В нашем случае это, конечно, функция P : $\frac{1}{\rho} dp = dP$ и, следовательно,

$$\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla P. \quad (9.11)$$

Уравнение движения в форме Громеки-Лэмба (9.6) принимает вид

$$\partial_t \vec{v} + \nabla \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \Phi + P \right) = \vec{v} \times \vec{\omega}. \quad (9.12)$$

9.3.1. Стационарные течения; уравнение Бернулли

В том случае, когда в каждой точке x пространства, занимаемого телом $\mathcal{B}$, характеристики движения не изменяются во времени, движение (или течение) называется *стационарным* или *установившимся*. Математически это означает, что частные производные по времени в уравнениях, описывающих течение, равны нулю:

$$\partial_t \vec{v} = 0, \quad \partial_t \rho = 0, \quad \partial_t (k + \varepsilon) = 0.$$

Уравнение движения (9.6) при этом имеет вид

$$\nabla \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + \Phi \right) = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{v} \times \vec{\omega}. \quad (9.13)$$

Дальнейшая модификация связана с предположением баротропности, т.е. с уравнением (9.12), которое в стационарном случае записывается так

$$\nabla \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + P + \Phi \right) = \vec{v} \times \vec{\omega}. \quad (9.14)$$

Вспомним теперь выражение для полной производной по времени от некоторой функции f (см. (3.9)). В стационарном случае оно принимает вид: $d_t f = (\vec{v}, \nabla f)$, поэтому, если мы умножим (9.14) скалярно на $\vec{v}$, то фактически найдем производную по времени от выражения в скобках:

$$d_t \left(\frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + P + \Phi \right) = (\vec{v}, \vec{v} \times \vec{\omega}) = 0. \quad (9.15)$$

Правая часть (9.15), естественно, равна нулю, так как векторное произведение ортогонально каждому из своих сомножителей, а значит, ортогонально $\vec{v}$. Отсюда следует, что при стационарном течении величина

$$H \equiv \frac{1}{2} |\vec{v}|^2 + P + \Phi = \text{const} \quad (9.16)$$

в точке тела не меняется, т.е. сохраняется при движении точки по своей траектории. Уравнение (9.16) называется *уравнением Бернулли*,⁴⁷ а величина H — *интегралом Бернулли*. Функция H постоянна вдоль траекторий точек тела. В точках же пространства, занимаемых телом, она определяется, согласно (9.14), выражением

$$\nabla H = \vec{v} \times \vec{\omega}$$

и не является, вообще говоря, однородной. Однако легко видеть, что если течение безвихревое ($\vec{\omega} = 0$), то функция H пространственно однородна,

поскольку градиент $\nabla H = 0$. Это утверждение называется *теоремой Бернулли*.

Уравнение

$$d_t \mathbf{x} = \vec{v}(t, \mathbf{x})$$

определяет траектории движения точек тела, т.е. кривые, касательный вектор к которым в каждой точке $\mathbf{x}$ в момент времени t равен $\vec{v}(t, \mathbf{x})$.

⁴⁷Бернулли (Bernoulli) Даниил (1700–1782), швейцарский математик.

Любая конкретная траектория определяется начальным условием

$$\mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{X}.$$

Уравнение же

$$d_{\lambda}\mathbf{x} = \vec{v}(t, \mathbf{x})$$

в некоторый (а значит, в любой) момент времени t определяет *линии тока*,⁴⁸ т.е. кривые, касательный вектор к которым в каждой точке $\mathbf{x}$ равен $\vec{v}(t, \mathbf{x})$. Любая конкретная линия тока определяется начальным условием

$$\mathbf{x}|_{\lambda=0} = \mathbf{x}_0.$$

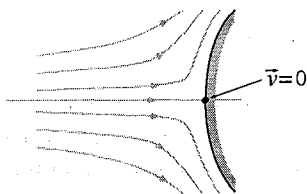


Рис. 17. Критическая точка на поверхности тела, обтекаемого стационарным потоком жидкости.

Разница между этими двумя множествами кривых в том, что линии тока строятся по полю скоростей, соответствующему некоторому фиксированному моменту времени (скажем, сфотографировали поле скоростей, а затем по фотографии построили множество кривых, всюду касающихся этого векторного поля). Траектории же соответствуют «живому», меняющемуся с течением времени полю скорости. Они являются проекциями мировых линий, и потому хранят знание о всех прошлых и всех будущих

мгновенных векторных полях.

Вот если течение стационарно, т.е. поле скорости все время одно и то же $\vec{v} = \vec{v}(\mathbf{x})$, тогда ни в прошлых, ни в будущих векторных полях нет ничего отличного от настоящего, и потому *траектории точек тела совпадают с линиями тока*. Мы изучаем именно такую ситуацию. В этом случае говорят, что уравнение (9.16) выполняется вдоль линии тока.

Если направить ось $x_3 = z$ вверх от поверхности Земли, тогда плотность массовой силы в условиях поля тяготения Земли определится вектором $\vec{b} = (0, 0, -g)$, потенциал массовой силы, называемой в этом случае *геопотенциалом*, будет равен $\Phi = gz$, а уравнение Бернулли примет вид:

⁴⁸Обратите внимание на то, что поизводная вычисляется по параметру λ , которым параметризована линия тока, а не по времени t , которым параметризованы мировые линии и траектории, т.е. проекции мировых линий.

$$H = \frac{1}{2}|\vec{v}|^2 + P + gz. \quad (9.17)$$

Из уравнения (9.17) вытекает, что при заданном значении z , скажем $z = 0$, величина P (а в случае $\rho = \text{const}$, просто давление p) будет максимальной в тех точках, где $\vec{v} = 0$. Такая точка обычно имеется на поверхности тела, обтекаемого жидкостью, и называется *критической точкой* (см. рис.17).

Если на бесконечности давление и скорость равны p_∞ и $\vec{v}_\infty$ соответственно, то давление в критической точке для случая $\rho = \text{const}$ легко находится из (9.17):

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho|\vec{v}_\infty|^2.$$

9.3.2. Нестационарные течения; уравнение вихря скорости

Допущение баротропности позволяет существенно упростить уравнение движения и в общем нестационарном случае. Упрощение основывается на том, что для любой дважды дифференцируемой функции f ротор ее градиента равен нулю:

$$\text{rot } \nabla f = 0. \quad (9.18)$$

Рассмотрим еще раз уравнение движения (9.12)

$$\partial_t \vec{v} + \nabla \left(\frac{1}{2}|\vec{v}|^2 + \varphi + P \right) = \vec{v} \times \vec{\omega}.$$

Взяв ротор от обеих частей этого уравнения, в силу (9.18) получим

$$\text{rot } (\partial_t \vec{v}) = \text{rot } (\vec{v} \times \vec{\omega}).$$

Ротор и оператор вычисления частной производной по времени можно поменять местами, после чего в левой части будет стоять $\partial_t(\text{rot } \vec{v}) = \partial_t \vec{\omega}$, а само уравнение примет вид

$$\partial_t \vec{\omega} = \text{rot } (\vec{v} \times \vec{\omega}). \quad (9.19)$$

Это уравнение содержит только одну неизвестную величину — скорость и, значит, его можно решать независимо от остальных уравнений модели. Такой результат, безусловно, сильно упрощает задачу. Выведенное уравнение описывает эволюцию поля вихря $\vec{\omega}$, и поэтому называется *уравнением вихря*.

10. Идеальная несжимаемая жидкость

Экспериментальные данные показывают, что капельные жидкости являются чрезвычайно плохо сжимаемыми объектами. Также ведут себя и газы при достаточно малых скоростях движения. Все эти наблюдения позволяют в ряде случаев использовать в качестве дополнительной гипотезы предположение о несжимаемости среды, т.е. считать выполняющимися соотношения (6.19). В этой главе мы рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из принятия этой гипотезы. Модель идеальной несжимаемой жидкости представляет собой модифицированный вариант системы уравнений (9.1)–(9.4):

$$\begin{aligned}(\nabla, \vec{v}) &= 0, \\ \partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{b}, \\ \rho d_t \varepsilon &= (\nabla, \vec{h}) + \rho s, \\ \rho &= \rho(p, \varepsilon).\end{aligned}$$

Допущение несжимаемости $d_t \rho = 0$ отразилось лишь на первом (уравнение неразрывности) и третьем (баланс внутренней энергии) уравнениях модели. При отсутствии источников $\vec{h}$ и s внутренняя энергия сохраняется.

10.1. Баротропная модель жидкости

Допущение баротропности жидкости позволило свести уравнение движения к уравнению вихря скорости. Посмотрим, что нового приносит в модель принятие гипотезы несжимаемости среды.

10.1.1. Уравнение Гельмгольца

Из рассмотрения уравнения вихря можно получить важные результаты о движении идеальной несжимаемой жидкости. Для этого преобразуем $\text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega})$ в (9.19) по известной формуле векторного анализа:

$$\text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}) \equiv \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = \vec{v}(\nabla, \vec{\omega}) - \vec{\omega}(\nabla, \vec{v}) + (\vec{\omega}, \nabla) \vec{v} - (\vec{v}, \nabla) \vec{\omega}. \quad (10.1)$$

Учтем, далее, что жидкость несжимаема, т.е. $(\nabla, \vec{v}) = 0$ и что для любого дифференцируемого вектора $\vec{f}$ справедливо равенство

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{f} \equiv (\nabla, \operatorname{rot} \vec{f}) = 0.$$

Тогда первые два члена в правой части выражения (10.1) оказываются нулевыми. Подставляя оставшиеся два слагаемых в (9.19), получим:

$$\partial_t \vec{\omega} + (\vec{v}, \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega}, \nabla) \vec{v}. \quad (10.2)$$

Выражение в левой части (10.2) есть полная производная от вектора вихря. Записывая ее в левой части, окончательно получаем так называемое *уравнение Гельмгольца*.⁴⁹

$$d_t \vec{\omega} = (\vec{\omega}, \nabla) \vec{v}. \quad (10.3)$$

Это уравнение удастся проинтегрировать. Сначала перепишем его в эквивалентной форме, учитывая, что $(\vec{\omega}, \nabla) \vec{v} = G \vec{\omega}$, где $G \equiv \nabla \vec{v}$:

$$d_t \vec{\omega} = G \vec{\omega}. \quad (10.4)$$

Теперь вспомним, что, рассматривая скорость растяжения, мы получили выражение градиента скорости G через градиент деформации F (формула (5.8)):

$$G = (d_t F) F^{-1}.$$

Подставляя это выражение в уравнение (10.4), получим:

$$d_t \vec{\omega} = (d_t F) F^{-1} \vec{\omega}. \quad (10.5)$$

Запишем левую часть (10.5) в виде

$$d_t \vec{\omega} = d_t (I \vec{\omega}) =$$

Представим, далее, единичный тензор как свертку $I = FF^{-1}$ и продифференцируем

$$= d_t (FF^{-1} \vec{\omega}) = (d_t F) F^{-1} \vec{\omega} + F d_t (F^{-1} \vec{\omega}). \quad (10.6)$$

⁴⁹Гельмгольц (Helmholtz) Герман Людвиг Фердинанд (1821–1894) немецкий физик, математик, физиолог и психолог.

Вычитая (10.5) из (10.6), найдем:

$$F d_t(F^{-1}\vec{\omega}) = 0. \quad (10.7)$$

Это выражение можно рассматривать как уравнение относительно неизвестного вектора $d_t(F^{-1}\vec{\omega})$, т.е. как систему линейных алгебраических уравнений относительно компонент указанного вектора. Поскольку мы считаем движение обратимым,⁵⁰ матрица тензора F неособая, и, следовательно, уравнение (10.7) имеет только тривиальное решение:

$$d_t(F^{-1}\vec{\omega}) = 0. \quad (10.8)$$

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ в рассматриваемой области определено векторное поле $\vec{\omega}_0$. В этот же момент времени $F = F^{-1} = I$, т.е. деформация отсутствует. Тогда начальное условие для уравнения (10.8) имеет вид

$$F^{-1}\vec{\omega}|_{t=0} = \vec{\omega}_0. \quad (10.9)$$

Интегрируя задачу Коши (10.8), (10.9), получим:

$$F^{-1}\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega} = F\vec{\omega}_0. \quad (10.10)$$

Из этого результата вытекают важные следствия, известные под названием теорем Лагранжа и Гельмгольца.

10.1.2. Теоремы Лагранжа и Гельмгольца

Вспомним, что течение называется *безвихревым*, если вихрь скорости его всюду равен нулю.

Теорема (Лагранж). *Безвихревое (вихревое) течение в идеальной несжимаемой баротропной жидкости сохраняется.*

Действительно, если в начальный момент времени течение было безвихревым, то всюду $\vec{\omega}_0 = \text{rot } \vec{v}_0 = 0$. Согласно (10.10) в любое другое

⁵⁰Вы понимаете, что это — допущение, а не указание жидкости, как ей надлежит двигаться. Это описание границ применимости теории. В том случае, когда движение жидкости нельзя считать обратимым, следует быть готовым к тому, что данная теория перестанет работать, т.е. описывать и предсказывать характер движения жидкости.

время вектор вихря $\vec{\omega}$ также будет нулевым. И обратно, если в момент времени $t = 0$ течение было вихревым, т.е. существует точка, в которой $\vec{\omega}_0 \neq 0$, тогда, поскольку градиент деформации $F = \nabla \chi$ не равен нулевому тензору, в любое другое время вектор вихря $\vec{\omega} = F\vec{\omega}_0$ будет отличен от нулевого вектора.

Если движение безвихревое, то $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} = 0$. Однако, нулю равен ротор градиента любой дифференцируемой функции. В силу этого, вектор скорости безвихревого течения можно записать как градиент некоторой скалярной функции φ :

$$\text{rot } \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} \equiv \nabla \varphi.$$

Введенная функция φ называется *потенциалом скорости*, а безвихревое течение (т.е. течение, при котором скорость обладает потенциалом) иначе называется *потенциальным течением*.⁵¹

Прежде чем формулировать теорему Гельмгольца, введем некоторые определения. Кривую, касающуюся в каждой точке непрерывного векторного поля, будем называть *векторной линией*. Если векторное поле — поле скоростей, то векторные линии называются *линиями тока*. Если же векторное поле есть поле вихря скорости, то векторные линии называются *вихревыми линиями*.

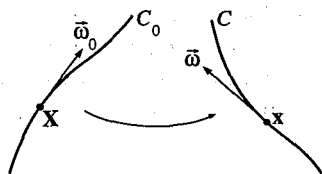


Рис. 18. Деформация вихревой линии.

Векторные линии, проходящие через замкнутый контур, который можно стянуть в точку, образует поверхность, называемую *векторной трубкой*. В случае вихревых линий получаем, соответственно, *вихревую трубку*.

Теорема (Гельмгольц). *Вихревые линии в идеальной несжимаемой жидкости сохраняются. Другими словами, множество точек тела, составляющее вихревую линию в начальный момент времени, составляет вихревую линию и в любой другой момент времени.*

⁵¹Здесь ситуация буквально та же, что и в случае с плотностью массовой силы. Величину $\vec{b}$ в большинстве геофизических задач мы можем записать как градиент геопотенциала Φ именно потому, что по данным наблюдений поле $\vec{b}$ с большой точностью оказывается безвихревым.

Рассмотрим в начальный момент времени $t = 0$ некоторую вихревую линию C_0 (см. рис. 18), параметризованную вещественным параметром λ . Пусть в точке с координатами $\mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{X}$ определен касательный вектор $d_\lambda C_0 = d_\lambda \mathbf{X} = \vec{\omega}_0$. В момент времени t в результате деформации вихревая линия C_0 отобразится в некоторую линию C . Точка $\mathbf{X}$ отобразится в точку $\mathbf{x}$, а вектор касательный к кривой C в этой точке определится выражением

$$d_\lambda C = d_\lambda \mathbf{x} =$$

В соответствии с формулой (5.1), далее имеем

$$= F d_\lambda \mathbf{X} = F d_\lambda C_0 = F \vec{\omega}_0.$$

Учитывая теперь формулу (10.10), получим:

$$d_\lambda C = \vec{\omega},$$

а это означает, что касательный вектор к кривой C есть вектор вихря. Аналогичные рассуждения справедливы для любой точки каждой вихревой линии C_0 . Следовательно вихревые линии деформируются в вихревые линии, что и доказывает теорему Гельмгольца.

10.2. Двумерные течения

Если существует направление, в котором поле скорости не меняется, то можно выбрать систему координат такую, что две компоненты скорости жидкости будут зависеть лишь от двух координат, а третья будет равна нулю

$$\vec{v} = \vec{v}(x_1, x_2) = (v_1, v_2, 0) \equiv (u, v, 0).$$

10.2.1. Функция тока

В этом двумерном (плоском) случае с линиями тока тесно связан другой, часто используемый элемент описания течений, — *функция тока*.

В двух измерениях уравнение неразрывности несжимаемой жидкости принимает вид:

$$(\nabla, \vec{v}) = \partial_x u + \partial_y v = 0, \quad (10.11)$$

или

$$\partial_x u = -\partial_y v.$$

Введем функцию $\psi(x, y)$, обладающую смешанной производной, такую, что

$$u = \partial_y \psi, \quad v = -\partial_x \psi. \quad (10.12)$$

Тогда уравнение (10.11) удовлетворится автоматически:

$$\partial_{xy}\psi - \partial_{yx}\psi \equiv 0.$$

Функция ψ называется *функцией тока*. Уравнение, решением которого является функция тока, выводится из уравнения движения несжимаемой идеальной жидкости, а точнее, из уравнения Гельмгольца.

Вычислим вихрь скорости в рассматриваемом плоском случае:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= (\partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2, \partial_{x_3} v_1 - \partial_{x_1} v_3, \partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_1) = \\ &= (0, 0, \partial_x v - \partial_y u) = \omega_z \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Откуда

$$\omega_z \equiv \partial_x v - \partial_y u = -\partial_{xx}\psi - \partial_{yy}\psi = -\Delta\psi.$$

Здесь используется стандартное обозначение дифференциального оператора второго порядка $\Delta \equiv \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Оператор Δ называется оператором Лапласа.⁵² Подставим теперь найденное выражение вихря скорости в уравнение Гельмгольца

$$\partial_t \vec{\omega} + (\vec{v}, \nabla) \vec{\omega} = (\vec{\omega}, \nabla) \vec{v},$$

вычислив предварительно скалярные произведения. Учитывая, что $\vec{\omega} = -\Delta\psi \vec{e}_3$, для $(\vec{v}, \nabla) \vec{\omega}$ имеем

$$(\vec{v}, \nabla) \vec{\omega} = -(\partial_y \psi \partial_x - \partial_x \psi \partial_y) \Delta\psi \vec{e}_3 = (-\partial_y \psi \partial_x \Delta\psi + \partial_x \psi \partial_y \Delta\psi) \vec{e}_3.$$

Поскольку компоненты скорости являются функциями двух переменных x и y , получаем

$$(\vec{\omega}, \nabla) \vec{v} = \omega_z \partial_z \vec{v} = 0.$$

Уравнение Гельмгольца теперь выглядит следующим образом

$$\partial_t \Delta\psi + \partial_y \psi \partial_x \Delta\psi - \partial_x \psi \partial_y \Delta\psi = 0,$$

⁵² Лаплас (Laplace) Пьер Симон (1749–1827), французский астроном, математик, физик.

или в стационарном случае

$$\partial_y \psi \partial_x \Delta \psi - \partial_x \psi \partial_y \Delta \psi = 0.$$

Полученное ранее уравнение вихря, являлось существенным упрощением задачи, поскольку позволяло найти скорость, интегрируя это единственное векторное уравнение. В рассматриваемом двумерном случае нам удалось пойти дальше и свести задачу нахождения скорости течения к одному скалярному уравнению относительно функции тока.

10.2.2. Форма линий тока стационарного течения

Зная функцию тока, можно непосредственно определить форму линий тока для стационарных течений. Действительно, поскольку скорость изменения функции тока вдоль мировой линии равна

$$d_t \psi = \partial_t \psi + u \partial_x \psi + v \partial_y \psi,$$

то в стационарном случае имеем

$$d_t \psi = u \partial_x \psi + v \partial_y \psi = 0. \quad (10.13)$$

Последнее равенство следует из определения функции тока (10.12). Таким образом, в стационарном течении функция тока постоянна на линии тока, поскольку в стационарном случае траектории совпадают с линиями тока.

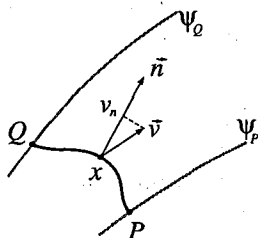
Если представить функцию тока как поверхность $\psi(x, y)$, то линии тока окажутся линиями уровня этой поверхности и будут определяться уравнениями

$$\psi(x, y) = C = \text{const.}$$

10.2.3. Поток жидкости через контур

Проведем между двумя точками P и Q контур l . Тогда поток q жидкости с постоянной плотностью ρ через этот контур будет равен

$$q = \rho \int_P^Q v_n dl = \rho \int_P^Q (\vec{v}, \vec{n}) dl, \quad (10.14)$$

Рис. 19. Поток жидкости через кривую l .

где $\vec{v}$ — скорость течения в точке x на кривой l ; $\vec{n}$ — единичная нормаль к кривой в этой же точке; а v_n — проекция $\vec{v}$ на направление нормали (см. рис. 19).

Пусть $d\vec{l}$ — касательный вектор к контуру l в точке x . Тогда $(\vec{n}, d\vec{l}) = 0$. Если dx и dy — компоненты касательного вектора, т.е. $d\vec{l} = (dx, dy)$, а dl^2 — квадрат его длины, то компоненты нормали n_x и n_y определяются следующими уравнениями:

$$n_x dx + n_y dy = 0, \quad (10.15)$$

$$dx^2 + dy^2 = dl^2, \quad (10.16)$$

$$n_x^2 + n_y^2 = 1. \quad (10.17)$$

Перемножая два последних уравнения и вычитая из них квадрат первого, получим:

$$(n_x dy - n_y dx)^2 = dl^2.$$

Извлекая из этого уравнения квадратный корень, найдем уравнение, которое вместе с уравнением (10.15) даст нам необходимую систему уравнений:

$$n_x dx + n_y dy = 0,$$

$$n_x dy - n_y dx = \pm dl.$$

Отсюда $n_x = \pm \frac{dy}{dl}$, $n_y = \mp \frac{dx}{dl}$. Выберем направление нормали так, чтобы скалярное произведение $(\vec{v}, \vec{n})$ было положительным. Тогда $n_x = \frac{dy}{dl}$,

$n_y = -\frac{dx}{dl}$, а $(\vec{v}, \vec{n}) = u\frac{dy}{dl} - v\frac{dx}{dl}$. Подставляя найденное скалярное произведение в интеграл (10.14), получим:

$$q = \rho \int_P^Q (udy - vdx) = \rho \int_P^Q (\partial_x \psi dx + \partial_y \psi dy) = \rho \int_P^Q d\psi = \rho(\psi_Q - \psi_P),$$

где ψ_Q и ψ_P — значения функции тока на линиях тока, проходящих через соответствующие точки.

Таким образом, поток массы через контур не зависит от его формы, а определяется только разностью значений функций тока на его концах.

10.3. Потенциальное течение

Безвихревое течение, как уже говорилось, называется *потенциальным*, так как условие отсутствия вихрей $\text{rot } \mathbf{v} = 0$ позволяет ввести потенциал скорости φ , определяемый равенством

$$\vec{v} = \nabla \varphi. \quad (10.18)$$

Уравнение, которому удовлетворяет потенциал скорости, можно получить из уравнения неразрывности. Действительно, подставляя в уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости определение потенциала (10.18), получим:

$$(\nabla, \vec{v}) = (\nabla, \nabla \varphi) = \Delta \varphi = 0, \quad (10.19)$$

где $\Delta = \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$ — оператор Лапласа. Для определения потенциала скорости ставится задача Неймана, т.е. на границе рассматриваемой области задается краевое условие:

$$v_n = \partial_n \varphi, \quad (10.20)$$

где v_n — заданная величина, а ∂_n — производная по нормали к границе. Задача (10.19), (10.20) позволяет найти потенциал с точностью до аддитивной константы. Поскольку потенциал скорости является решением уравнения Лапласа, он удовлетворяет *принципу максимума*: наибольшие по модулю значения функция φ принимает на границе области течения.

Некоторые заключения о характере течения можно сделать, исходя из вида задачи (10.19), (10.20), определяющей потенциал и, следовательно, поле скорости. Так, если потенциальное течение порождается движущимся в жидкости твердым телом, то характеристики течения в любой момент времени зависят только от мгновенной скорости тела, но не от его ускорения. Связано это с тем, что уравнение Лапласа не содержит производных по времени, а в краевое условие входит лишь скорость тела.

10.4. Связь потенциала скорости с функцией тока для стационарного плоского течения

Если потенциальное течение плоское, то можно ввести функцию тока, которая также удовлетворяет уравнению Лапласа. Действительно, $\Delta\psi = -\omega_z$, но так как вихрь скорости равен нулю, то $\Delta\psi = 0$.

Связь между потенциалом и функцией тока, однако, более тесная. Для того чтобы ее выяснить, выразим компоненты скорости через функцию тока по (10.12) и потенциал скорости по (10.18):

$$u = \partial_y \psi = \partial_x \varphi, \quad v = -\partial_x \psi = \partial_y \varphi.$$

Подставляя найденные значения в выражение (10.13), выполняющееся вдоль линии тока в стационарном случае, найдем:

$$d_t \psi = u \partial_x \psi + v \partial_y \psi = (\partial_x \varphi) \partial_x \psi + (\partial_y \varphi) \partial_y \psi = (\nabla \varphi, \nabla \psi) = 0. \quad (10.21)$$

Величины $u = \partial_x \varphi$ и $v = \partial_y \varphi$ есть компоненты вектора, касательного к кривой $\psi = \text{const}$. В свою очередь, величины $\partial_x \psi$, $\partial_y \psi$ можно рассматривать как компоненты вектора, касательного к кривой $\varphi = \text{const}$. Действительно, из (10.21) и определения функции тока имеем

$$(\nabla \varphi, \nabla \psi) = (\partial_x \psi) \partial_x \varphi + (\partial_y \psi) \partial_y \varphi = (-v) \partial_x \varphi + u \partial_y \varphi = d_t \varphi = 0.$$

Вектор $\nabla \psi$ с компонентами $(-v, u)$ касается линии $\varphi = \text{const}$ в той точке, где он определен. Касательные векторы $\nabla \psi$ и $\nabla \varphi$ согласно (10.21) ортогональны (см. рис.20).

Таким образом, равенство (10.21), которое представляет собой скалярное произведение касательных векторов, можно интерпретировать

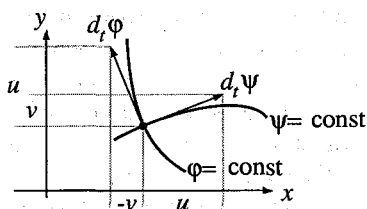


Рис. 20. Связь потенциала φ с функцией тока ψ .

как ортогональность кривых $\psi = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$. С геометрической точки зрения безразлично, что считать линиями тока, а что эквипотенциальными кривыми. И если решена некоторая гидродинамическая задача, т.е. найдены характеристики течения, определяемые функциями φ и ψ , то одновременно оказывается решенной и другая, связанная с ней задача, в которой ψ есть потенциал скорости, а φ — функция тока. Такие задачи, как и функции ψ и φ , называются *сопряженными*.

11. Вязкая жидкость

11.1. Недостатки модели идеальной жидкости

Выбор тензора напряжений в виде (7.26) удачен в том смысле, что определяемая им модель идеальной жидкости позволяет в ряде случаев успешно описывать течения реальной жидкости. Существует, однако, ситуации, когда этого не происходит, и предсказания, сделанные по такой модели, разительно отличаются от наблюдений. Если речь идет об одной и той же жидкости, то, очевидно, что дело не в ее физико-химических свойствах, а в геометрии потока, масштабах изучаемого явления, скоростях течения и т.п. Судя по всему, принимая модель идеальной жидкости, мы пренебрегаем, среди прочих, теми свойствами реальных сред, которые в указанных ситуациях становятся существенными. Так, например, из (7.26) следует, что в модельной среде отсутствуют касательные напряжения (формула (7.27)). Понятно, что там, где они малы по сравнению с нормальными, ими, вероятно, можно пренебречь. Но там, где это не имеет места, модель идеальной жидкости работать не будет (т.е. будет работать плохо, неправильно).

К чему приводит отсутствие касательных напряжений, если говорить об этом простым языком? Напряжения есть плотности контактных сил взаимодействия тела с окружающей его внешней средой. Так, если жидкость движется в каком-нибудь канале, то стенки канала взаимодействуют с потоком. Если они только сжимают жидкость, то от нуля отличны лишь нормальные напряжения. Если же имеет место трение жидкости о стенки канала, то ненулевыми оказываются касательные напряжения. Таким образом, допуская, что касательные напряжения отсутствуют (т.е. равны нулю), мы допускаем, что трения о стенки нет. Отсутствует также и трение между любыми слоями жидкости вдоль любой кинематической границы. Первое приводит к тому, что такая модельная среда оказывается почти нечувствительной к введению каких-либо тел в занятую ею область. Со вторым связано то, что характер течения (вихревой/потенциальный) сохраняется во времени. Всяческое затухание отсутствует вообще. Кроме того, отсутствует и порождение завихренности, следствием чего является отсутствие перемешивания.

11.2. Уравнения движения вязкой жидкости и уравнения Навье-Стокса

Попробуем учесть касательные напряжения, усложнив конструкцию тензора напряжений T . Не будем, однако, менять его кардинально (ведь то, что есть, работает неплохо), а добавим корректирующее слагаемое T' :

$$T = -pI + T'. \quad (11.1)$$

Этот добавочный член, как и первое слагаемое, является тензором 2-го ранга. Его задача — приближенно описать действие сил межмолекулярных взаимодействий препятствующих существованию и развитию неоднородностей, которые характеризуются отличными от нуля градиентами. Эти силы будем называть *силами вязкости*, а тензор T' — *тензором вязких напряжений*.

Из опыта известно, что силы вязкости не проявляются, если жидкость движется, как твердое тело, т.е. когда отсутствует градиент скорости $G = 0$. Во всех других случаях вязкие силы стремятся выровнять поле скорости, т.е. свести движение жидкости к твердотельному. Так ведут себя вязкие силы в любых жидкостях. По этой причине будем считать тензор T' зависящим от тензора G , точнее от его симметричной части, т.е. тензора D . Дело в том, что и тензор T и единичный тензор симметричны, значит симметричным должен быть и тензор T' . Таким образом, положим

$$T' = 2\mu D. \quad (11.2)$$

Теперь, в отличие от случая идеальной жидкости, тензор напряжений теряет свою универсальность. Понятно, что, скажем, у воздуха и воды разные способности сглаживать неоднородности. Специфику каждого конкретного вещества будет отражать коэффициент пропорциональности 2μ . Величина μ называется *коэффициентом динамической вязкости*. Он всегда положителен, поскольку действие тензора T' всегда однонаправлено. Это опытный факт. Двойка же в (11.2) поставлена только потому, что в определении тензора D есть коэффициент $\frac{1}{2}$, и мы таким способом от него избавляемся (двойку можно было бы и не ставить, но тогда величина μ удвоилась бы). Итак, новый тензор напряжений имеет вид

$$T = -pI + 2\mu D = -pI + \mu (G + G^T), \quad (11.3)$$

а компоненты его равны

$$T_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j). \quad (11.4)$$

Прежде чем подставить выражение (11.3) в закон движения Коши (7.24), вычислим дивергенцию нового тензора напряжений:

$$(\operatorname{div} T)_i = \nabla_j T_{ij} = \nabla_j (-p\delta_{ij} + \mu(\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)) = \quad (11.5)$$

$$= \nabla_i p + \nabla_j (\mu \nabla_j v_i) + \nabla_j (\mu \nabla_i v_j), \quad (11.6)$$

и для того, чтобы нагляднее показать действие отдельных членов, введем дополнительные упрощающие предположения. Предположим, что

1) $\mu = \text{const}$,

2) система координат — декартова и, следовательно, $\nabla_k = \partial_{x_k}$.

Теперь дивергенция тензора напряжений выглядит так

$$(\operatorname{div} T)_i = -\partial_{x_i} p + \mu \Delta v_i + \mu \partial_{x_j x_i} v_j = \quad (11.7)$$

$$= -\partial_{x_i} p + \mu \Delta v_i + \mu \partial_{x_i} (\nabla, \vec{v}). \quad (11.8)$$

В декартовых координатах *лапласиан* $\Delta \equiv \nabla^2 \equiv (\nabla, \nabla)$ имеет вид: $\Delta = \partial_{x_i x_i}$. Если выбраны недекартовы координаты, то выражение для Δ сложнее (необходимо учитывать ненулевые символы Кристоффеля) и его можно найти для ряда известных случаев в справочной литературе.

Подставим (11.8) в закон движения (7.24) и получим, так называемое, *уравнение движения вязкой жидкости Навье-Стокса-Дюгема*:⁵³

$$\rho d_t \vec{v} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \mu \nabla (\nabla, \vec{v}) + \rho \vec{b}. \quad (11.9)$$

Как уже отмечалось, реальные жидкости в ряде случаев можно считать несжимаемыми средами, поэтому это свойство часто сразу же закладывается в модель. Уравнение неразрывности принимает тогда вид

⁵³Навье (Navier) Луи Мари Анри (1785–1836), французский физик и математик. Дюгем (Duhem) Пьер Морис Мари (1861–1916), французский физик, философ и историк науки.

(6.19). Уравнение движения также упрощается (третье слагаемое в правой части в силу уравнения неразрывности становится равным нулю) и принимает вид **уравнения Навье-Стокса**

$$\rho d_t \vec{v} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{b}. \quad (11.10)$$

11.3. Компонентная форма записи уравнения движения вязкой жидкости

Векторное уравнение движения вязкой жидкости можно, как и уравнение Эйлера (7.30), записать в виде трех скалярных уравнений. Выберем аналогично декартову систему координат и построим в каждой точке координатный базис $\{\vec{e}_i\}$. Уравнение (11.9) запишем в виде

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \nu \Delta \vec{v} - \nu \nabla (\nabla, \vec{v}) - \vec{b} = 0, \quad (11.11)$$

где $\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$ — **коэффициент кинематической вязкости**. Используя выписанные ранее выражения компонент векторов (7.31) получим:

$$\left(\partial_t v_i + (\vec{v}, \nabla) v_i + \frac{1}{\rho} \nabla_i p - \nu \Delta v_i - \nu \nabla_i (\nabla, \vec{v}) + g \delta_{3i} \right) \vec{e}_i = 0, \quad (11.12)$$

откуда

$$\partial_t v_i + (\vec{v}, \nabla) v_i = -\frac{1}{\rho} \nabla_i p + \nu \Delta v_i + \nu \nabla_i (\nabla, \vec{v}) - g \delta_{3i}. \quad (11.13)$$

Подставляя теперь компонентную запись скалярного произведения $(\vec{v}, \nabla) = v_k \nabla_k$, дивергенции скорости $(\nabla, \vec{v}) = \nabla_k v_k$ и оператора Лапласа $\Delta \equiv (\nabla, \nabla) = \nabla_k \nabla_k = \nabla_k^2$, окончательно найдем

$$\partial_t v_i + v_k \nabla_k v_i = -\frac{1}{\rho} \nabla_i p + \nu \nabla_k^2 v_i + \nu \nabla_i (\nabla_k v_k) - g \delta_{3i}. \quad (11.14)$$

В случае несжимаемой жидкости (уравнение Навье-Стокса) вместо (11.14) получим более простые уравнения:

$$\partial_t v_i + v_k \nabla_k v_i = -\frac{1}{\rho} \nabla_i p + \nu \nabla_k^2 v_i - g \delta_{3i}. \quad (11.15)$$

Как и в случае невязкой жидкости, здесь i — свободный индекс, а k — немой, со всеми вытекающими последствиями.

11.4. Постановка задач гидромеханики вязкой жидкости

В отличие от системы уравнений идеальной жидкости система уравнений вязкой жидкости включает производные второго порядка по пространственным переменным. По этой причине для корректной постановки задачи требуется задание дополнительных граничных условий. Из физических соображений *граничное условие скольжения* на границе в случае идеальной среды для вязкой жидкости заменяется *условием прилипания*. Соответственно, скорость жидкости на твердой стенке равна скорости движения стенки. Кроме того, полагается, что при пересечении кинематической границы вектор напряжения меняется непрерывно.

11.5. Вязкая диссипация и баланс энергии

Коль скоро изменилось наше представление о контактных силах, действующих на поверхности конфигурации любого тела или его части, т.е. на любой кинематической границе, и это нашло свое отражение в конструкции тензора напряжений, изменилась, очевидно, и мощность контактных сил и ее распределение. Согласно (8.7), (8.10) и (8.11) мощность контактных сил есть

$$W_C = \int_{\partial\chi} (\vec{v}, \vec{\tau}) dS = \int_{\chi} \operatorname{div} (\mathbf{T}\vec{v}) dV = \int_{\chi} (\vec{v}, \operatorname{div} \mathbf{T}) dV + \int_{\chi} (\mathbf{T} : \nabla \vec{v}) dV, \quad (11.16)$$

где слагаемые в последнем выражении описывают скорость совершения поверхностными силами работы, идущей на изменение а) кинетической энергии тела (первое слагаемое) и б) внутренней энергии (второе слагаемое).

Подставляя в (11.16) конкретный вид тензора напряжения (11.3), найдем (здесь, как и прежде, используются введенные выше на с.131 упрощающие предположения 1 и 2):

$$W_C = \int_{\chi} (-(\vec{v}, \nabla p) + 2\mu (\vec{v}, \operatorname{div} \mathbf{D})) dV + \int_{\chi} (-p(\nabla, \vec{v}) + 2\mu \mathbf{D} : \nabla \vec{v}) dV, \quad (11.17)$$

Первые слагаемые в каждом интеграле по-прежнему описывают работу сил давления, а вторые — работу сил вязкости. При этом, вклад

касательных напряжений в эволюцию внутренней энергии (т.е. последнее слагаемое во втором интеграле) обладает уникальным свойством: он знакопостоянен. Точнее, он неотрицателен.

Для того чтобы показать, что нечто не меняет знак, его обычно стараются записать как квадрат какой-то величины. Попробуем поступить так же. Запишем скалярное произведение $2D : \nabla \vec{v}$ в компонентной форме:

$$(\partial_{x_k} v_j + \partial_{x_j} v_k) \partial_{x_k} v_j = (\partial_{x_k} v_j) (\partial_{x_k} v_j) + (\partial_{x_j} v_k) (\partial_{x_k} v_j) =$$

В этих выражениях все индексы немые. Значит, их можно обозначить любыми буквами. Постараемся, работая с индексами, записать наше скалярное произведение как квадрат суммы компонент градиента скорости. Первое слагаемое есть квадрат $(\partial_{x_k} v_j)^2$. Разобьем его на два одинаковых слагаемых, в одном из которых поменяем местами индексы. Получим

$$= \frac{1}{2} \left((\partial_{x_k} v_j)^2 + (\partial_{x_j} v_k)^2 + 2 (\partial_{x_k} v_j) (\partial_{x_j} v_k) \right) =$$

но это и есть требуемый квадрат

$$= \frac{1}{2} (\partial_{x_k} v_j + \partial_{x_j} v_k)^2 = 2D : D. \quad (11.18)$$

Такой результат есть отражение общего свойства симметричных тензоров: скалярное произведение симметричного тензора с антисимметричным равно нулю. Следовательно, скалярное произведение симметричного тензора с тензором общего вида равно скалярному произведению симметричного тензора с симметричной частью тензора общего вида. Отсюда

$$D : \nabla \vec{v} = D : D \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 2\mu \int_{\chi} D : \nabla \vec{v} dV = 2\mu \int_{\chi} D : D dV \geq 0, \quad (11.19)$$

и, действительно, эта часть мощности контактных сил всегда не меньше нуля. Но что в этом особенного?

Особенное то, что, согласно нашему результату, за счет работы контактных сил внутренняя энергия может только возрастать. А уменьшаться она может, согласно Первому началу термодинамики (8.19),

лишь за счет отрицательной скорости нагрева, т.е. отвода тепла либо теплопроводностью при контакте с более холодным телом, либо путем излучения. Важно то, что имеется в виду работа контактных сил, действующих на поверхности любой мыслимой части тела, т.е. на любой его кинематической границе.

Пусть, для простоты, на тело действуют лишь контактные силы (включение в рассмотрение массовых сил не представляет труда). Тогда, если на поверхности рассматриваемого в какой-либо задаче теплоизолированного тела контактные силы равны нулю, т.е.

$$d_t(K + E) = 0, \quad (11.20)$$

то внутренняя энергия не будет возрастать лишь в том случае, когда контактные силы равны нулю на любой кинематической границе внутри тела. Это означает, что тензор $D = 0$ в каждой точке конфигурации, и наше тело движется, как твердое тело без растяжения/сжатия. Выполнение неравенства $D \neq 0$ хотя бы в одной точке означает возрастание внутренней энергии, которое будет продолжаться до тех пор, пока не реализуется режим движения твердого тела. При сохранении полной энергии, возрастание внутренней энергии тела $E(B)$ означает одновременное уменьшение его кинетической энергии $K(B)$. Этот процесс, как и величина

$$\text{Diss} \equiv 2\mu \int_{\chi} D : D dV, \quad (11.21)$$

носит название *диссипации кинетической энергии*, что в переводе означает ее исчезновение. Поскольку диссипация проявляется всюду, где наблюдается градиент скорости (т.е. одна частица жидкости движется относительно другой) и такое движение сопровождается торможением частиц жидкости за счет трения, говорят, что диссипация кинетической энергии происходит за счет сил *внутреннего трения*.

Дифференциальные уравнения баланса кинетической и внутренней энергии легко получить из (8.6) и (8.29) соответствующей подстановкой тензора напряжений (11.3):

$$\rho d_t \frac{k}{\rho} = -(\vec{v}, \nabla p) + 2\mu(\vec{v}, \text{div} D) + (\vec{v}, \rho \vec{b}), \quad (11.22)$$

$$\rho d_t \frac{\varepsilon}{\rho} = -p(\nabla, \vec{v}) + 2\mu D : D + (\nabla, \vec{h}) + \rho s. \quad (11.23)$$

Чтобы нагляднее продемонстрировать обмен энергией между кинетической и внутренней составляющими полной энергии, исключим из рассмотрения массовые силы и внешний нагрев и перепишем (11.22) в виде уравнения баланса, преобразуя левую часть с помощью уравнения неразрывности, а также первые два слагаемых в правой части. Получим

$$\partial_t k + (\nabla, k\vec{v}) = -(\nabla, p\vec{v}) + p(\nabla, \vec{v}) + 2\mu(\nabla, (D\vec{v})) - 2\mu D : D.$$

Объединим теперь дивергенции в обеих частях уравнения:

$$\partial_t k + (\nabla, (k + p)\vec{v} - 2\mu D\vec{v}) = p(\nabla, \vec{v}) - 2\mu D : D. \quad (11.24)$$

Аналогично, запишем уравнение (11.23):

$$\partial_t \varepsilon + (\nabla, \varepsilon\vec{v}) = -p(\nabla, \vec{v}) + 2\mu D : D. \quad (11.25)$$

Интегральные уравнения баланса получим, интегрируя по фиксированному объему V :

$$\begin{aligned} \partial_t K + \int_V (\nabla, (k + p)\vec{v} - 2\mu D\vec{v}) dV &= \int_V p(\nabla, \vec{v}) dV - \text{Diss}, \\ \partial_t E + \int_V (\nabla, \varepsilon\vec{v}) dV &= - \int_V p(\nabla, \vec{v}) dV + \text{Diss}. \end{aligned}$$

Преобразуем теперь интегралы в левых частях с помощью теоремы Гаусса-Остроградского:

$$\begin{aligned} \partial_t K + \int_{\partial V} ((k + p)\vec{v} - 2\mu D\vec{v})_n dS &= \int_V p(\nabla, \vec{v}) dV - \text{Diss}, \\ \partial_t E + \int_{\partial V} (\varepsilon\vec{v})_n dS &= - \int_V p(\nabla, \vec{v}) dV + \text{Diss}. \end{aligned}$$

Здесь индексом n помечены нормальные составляющие плотностей потоков соответствующих параметров (K и E). Положим, наконец, потоки через поверхность объема равными нулю (это может реализоваться по разным причинам. Например, скорость и ее градиент на границе нулевые или в одном месте втекло столько же, сколько в другом вытекло), тогда в уравнениях баланса останутся только интересные

нас члены:

$$\partial_t K = \int_V p(\nabla, \vec{v}) dV - \text{Diss}, \quad (11.26)$$

$$\partial_t E = - \int_V p(\nabla, \vec{v}) dV + \text{Diss}. \quad (11.27)$$

Теперь можно сделать выводы.

Во-первых, мы видим, что в сумме оба уравнения дают сохранение полной энергии при отсутствии притока извне: правые части компенсируют друг друга.

Во-вторых, прирост кинетической энергии означает убыль внутренней энергии и наоборот. Это может происходить за счет сжатия/расширения тела силами давления (первое знакопеременное слагаемое в правых частях).

И, наконец, в-третьих, независимо от работы сил давления имеется сток кинетической энергии и, соответственно, источник внутренней энергии. Это — диссипация. В отличие от сил давления, которые могут служить и источником, и стоком и того, и другого вида энергии, диссипация всегда однонаправленна. Она всегда увеличивает внутреннюю энергию за счет кинетической и никогда — наоборот.⁵⁴

⁵⁴На всякий случай, напомним: такова модель, а не природа. В природе, вероятно, не так уж все прямолинейно.

12. Вязкая жидкость — 2

12.1. Уравнение теплопроводности

Если внутренняя энергия — величина более удобная для построения теории, то на практике предпочтительней оказывается работать с другой, легче измеряемой величиной — *температурой*. Рассмотрим случай идеального газа, когда *температура* среды T определяется следующим соотношением:

$$c_p d_t T = d_t \frac{\varepsilon + p}{\rho}, \quad (12.1)$$

в котором c_p — теплоемкость при постоянном давлении.

Уравнение эволюции температуры можно найти из уравнений баланса внутренней энергии (8.29) для идеальной жидкости или (11.23) — для вязкой, подставляя в них выражение $d_t \frac{\varepsilon}{\rho} = c_p d_t T - d_t \frac{p}{\rho}$, полученное из определения (12.1). В случае идеальной жидкости найдем:

$$\rho c_p d_t T = d_t p + (\nabla, \vec{h}) + \rho s. \quad (12.2)$$

Далее, требуется задать плотность потока тепла $\vec{h}$ на границе конфигурации. Обычно его выражают в соответствии с *законом теплопроводности Фурье*:

$$\vec{h} = \lambda \nabla T, \quad (12.3)$$

т.е. считают, что вектор $\vec{h}$ параллелен градиенту температуры ∇T . Функция температуры λ называется *коэффициентом теплопроводности*. Теперь объединим (12.2) с (12.3) и получим *уравнение теплопроводности движущейся среды*:

$$\rho c_p d_t T = d_t p + (\nabla, \lambda \nabla T) + \rho s. \quad (12.4)$$

Функцию λ часто полагают постоянной и выносят за знак скалярного произведения. Если при этом учесть, что оператор $(\nabla, \nabla)(\cdot) = \Delta(\cdot)$ есть *оператор Лапласа*, то можно записать

$$\rho c_p d_t T = d_t p + \lambda \Delta T + \rho s. \quad (12.5)$$

Обычно первый член в правой части ($d_t p$) мал и им пренебрегают. В этом случае, после нормировки на ρc_p , уравнение (12.5) записывается в виде

$$d_t T = \partial_t T + (\vec{v}, \nabla T) = \kappa \Delta T + s_T, \quad (12.6)$$

где $\kappa \equiv \frac{\lambda}{\rho c_p}$ — так называемый **коэффициент температуропроводности**, а $s_T \equiv \frac{s}{c_p}$ — удельная мощность объемного источника тепла (за счет излучения, химических реакций и проч.). Это уравнение применимо и к капельным жидкостям, и к газам, если скорость движения последних много меньше скорости звука. Если в задачах гидромеханики вместо уравнения баланса внутренней энергии использовать уравнение баланса тепла (12.4) или его производные, то уравнение состояния удобнее также записывать в терминах температуры, а не внутренней энергии, т.е. в виде $\rho = \rho(p, T)$.

По своему виду уравнение (12.6) совпадает с **уравнением диффузии**

$$d_t C = \partial_t C + (\vec{v}, \nabla C) = \kappa \Delta C + s_C, \quad (12.7)$$

которое описывает эволюцию концентрации $C(t, \mathbf{x})$ некоторой *пассивной примеси* в среде. Коэффициент κ в этом случае интерпретируется как **коэффициент молекулярной диффузии**, а s_C — как удельная мощность объемного источника примеси.

Примесь называется *пассивной*, если она не оказывает влияния на динамику потока. Такое предположение означает, что поле скорости $\vec{v}$ может быть найдено независимо от поля C и затем подставлено в уравнение диффузии для расчета поля концентрации C .

Если мы считаем температуру пассивной примесью, то тем самым допускаем, что температурные неоднородности настолько малы, что не оказывают влияния на динамику. Для расчета поля скорости привлечение уравнения баланса внутренней энергии (тепла) не требуется, а уравнение состояния принимает вид (8.34). При этом, температурные неоднородности только перемешиваются течением и сглаживаются за счет молекулярной теплопроводности. Такое движение неоднородно нагретых масс жидкости часто называется **вынужденной конвекцией**. Напротив, **свободная конвекция** — пример течения, в котором температура не может считаться пассивной примесью.

12.2. Свободная конвекция

Рассмотрим движение неоднородно нагретой жидкости под действием *архимедовых сил*, вызывающих опускание холодных и подъем нагретых масс жидкости. Такое движение называется **свободной конвекцией**. Температура здесь не может рассматриваться как пассивная примесь, поскольку ее неоднородности сами порождают движение. Выведем уравнения, описывающие движение жидкости в таком режиме.

Будем считать плотность массы, зависящей только от температуры, а среду несжимаемой (т.е. уравнение неразрывности записывается в виде (6.19)). Начало декартовой системы координат расположим на поверхности слоя жидкости, а ось z направим вертикально вверх.

Вначале рассмотрим случай отсутствия горизонтальных движений, $u = v = 0$. Тогда система уравнений модели жидкости запишется в виде:

$$\begin{aligned} \text{уравнение неразрывности:} \quad \partial_z w &= 0, & (12.8) \\ \text{уравнения движения:} \quad \partial_x p &= 0, \\ &\partial_y p = 0, \\ &\partial_t w = -\frac{1}{\rho} \partial_z p - g, \\ \text{уравнение переноса тепла:} \quad \partial_t T &= \kappa \Delta T, \\ \text{уравнение состояния:} \quad \rho &= \rho(T). \end{aligned}$$

Полагая вертикальную компоненту скорости w на поверхности жидкости нулевой, из уравнения неразрывности получим $w = 0$ всюду в жидком слое.

Если температура жидкости постоянна $T = T_0 = \text{const}$, то из уравнения состояния получаем $\rho(T_0) = \rho_0 = \text{const}$, и система (12.8) превращается в уже рассмотренную систему уравнений гидростатики. Интегрируя уравнения движения при $p|_{z=0} = p_* = \text{const}$, находим

$$p|_{T=T_0} = p_0(z) = p_* - \rho_0 g z.$$

Пусть теперь температура не постоянна. Представим ее в виде $T(t, \mathbf{x}) = T_0 + T_1(t, \mathbf{x})$, тогда с точностью до величин первого поряд-

ка малости получим

$$\begin{aligned}\rho(t, \mathbf{x}) &= \rho(T_0) + (T - T_0) (\partial_T \rho)_{T=T_0} + o(T - T_0) \approx \\ &\approx \rho_0 + T_1 (\partial_T \rho)_{T=T_0} = \\ &= \rho_0 - T_1 \beta \rho_0 = \rho_0 + \rho_1(t, \mathbf{x}),\end{aligned}\quad (12.9)$$

где $\rho_1(t, \mathbf{x}) = -\rho_0 \beta T_1(t, \mathbf{x})$ — изменение плотности массы при нагревании среды, а $\beta = -\frac{1}{\rho_0} (\partial_T \rho_0)_{T=T_0}$ — так называемый *коэффициент теплового расширения*. Давления в этом случае определяется следующим выражением

$$\begin{aligned}p(t, \mathbf{x}) &= p_* - \rho(t, \mathbf{x})gz = (p_0 + \rho_0 gz) - \rho gz = \\ &= p_0 - (\rho - \rho_0)gz = p_0 - \rho_1 gz \\ &= p_0 + p_1.\end{aligned}\quad (12.10)$$

Здесь p_1 — изменение давления за счет нагревания среды. С помощью полученных формул преобразуем правую часть уравнения движения для вертикальной компоненты скорости w . Запишем приближенное выражение для $\frac{1}{\rho} \partial_z p$ в точке (ρ_0, p_0) , для чего разложим $\frac{1}{\rho}$ в ряд Тейлора относительно ρ_0 :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} - \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho_0^2} + \dots = \frac{1}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} + \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \partial_z p &= \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} + \dots \right) \partial_z (p_0 + p_1) \approx \\ &\approx \frac{1}{\rho_0} \partial_z p_0 + \frac{1}{\rho_0} \partial_z p_1 - \frac{\rho_1}{\rho_0^2} \partial_z p_0.\end{aligned}$$

В последнем выражении удержаны только линейные по ρ_1 и p_1 члены. Поскольку $\partial_z p_0 = -\rho_0 g$, в первом приближении имеем

$$\frac{1}{\rho} \partial_z p \approx -g + \frac{1}{\rho_0} \partial_z p_1 + \frac{\rho_1}{\rho_0} g = -g + \frac{1}{\rho_0} \partial_z p_1 - g \beta T_1.$$

Подставляя этот результат в (12.8), найдем

$$\partial_t w = -\frac{1}{\rho_0} \partial_z p_1 + g \beta T_1.$$

Таким образом, температура (в виде отклонения от среднего) непосредственно входит в уравнения движения и является либо источником этого движения, либо дополнительным стабилизирующим фактором.

В более общем случае движения со скоростями достаточно малыми, чтобы можно было пренебречь влиянием изменения плотности массы за счет изменения давления, легко записать систему уравнений, описывающих свободную конвекцию в жидкости. Достаточно вернуть на место все производные, которые в рассмотренном случае полагались равными нулю. Вот эта система:

$$\begin{aligned}
 (\nabla, \vec{v}) &= 0, \\
 d_t u &= -\frac{1}{\rho_0} \partial_x p, \\
 d_t v &= -\frac{1}{\rho_0} \partial_y p, \\
 d_t w &= -\frac{1}{\rho_0} \partial_z p_1 + g \beta T_1, \\
 d_t T &= \kappa \Delta T, \\
 \rho &= \rho(T).
 \end{aligned}$$

12.3. Какая жидкость вязкая?

Теперь у нас есть два варианта модели жидкости, соответствующие различным определениям тензора напряжений:

- 1) модель идеальной жидкости с уравнением движения

$$d_t \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{b}, \quad (12.11)$$

- 2) модель вязкой жидкости с уравнением движения

$$d_t \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \vec{b} + 2\nu D : D. \quad (12.12)$$

Видимо, все жидкости в природе обладают вязкостью. *Означает ли это, что после того как мы придумали модель вязкой жидкости, первоначальный вариант безнадежно устарел и его можно выбросить?*

Отчего же? Модель идеальной жидкости, действительно, не описывает взаимодействие молекул меж собой. Но, во-первых, это не предусматривалось при создании модели и потому является не ее дефектом, а ее свойством. Во-вторых, все модели чего-то не описывают, именно потому, что они модели, а не сама природа. Более того, мы намеренно стремимся учитывать не всё при конструировании какой-либо модели, поскольку задачей исследователя и, тем более, инженера является не копирование природы, а получение эффективного метода решения проблемы, включающей весьма ограниченный круг явлений. Таким образом, оценивая ту или иную модель, мы должны учитывать не только способность воспроизводить различные стороны изучаемого явления, но и то, насколько эффективно она позволяет это делать. Каждому ясно, что если, скажем, модель погоды будет выдавать прогноз со скоростью изменения самой погоды, пусть даже и очень точный, он вряд ли будет кому-нибудь нужен.

Все сказанное в полной мере относится к обоим нашим моделям. Учет любого дополнительного свойства реальной жидкости даром не дается, поэтому там, где эффектом вязкости можно пренебречь, разумнее, видимо, использовать более простую модель идеальной жидкости. И будем помнить, что реальная жидкость вовсе не такая, какой она предстает в модели. Исходный вопрос, очевидно, надо сформулировать иначе. Например, так: *в каком случае жидкость может считаться идеальной/вязкой?* Попробуем ответить.

Легко видеть, что приближение идеальной жидкости дает хорошие результаты там, где силы вязкости малы по сравнению с силами инерции. Обе силы представлены соответствующими членами в уравнении движения. Для того чтобы оценить степень влияния тех или иных членов, уравнения приводят к так называемой *безразмерной форме*.

12.3.1. Безразмерная форма уравнений

Физические величины обычно выражаются числами, полученными путем сравнения с эталонами, которые называются *основными единицами измерения* (например, метр, фунт, баррель). Совокупность основных единиц, достаточных для описания данного класса явлений, носит название *системы единиц измерения* (наиболее употребительны системы СИ, СГС, МКС). Из основных единиц образуется множество про-

изводных. *Размерностью* физической величины называется функция, определяющая, во сколько раз изменится численное значение этой величины при переходе от исходной системы единиц измерения к другой. Она представляет собой степенной многочлен, зависящий только от основных единиц измерения (скажем, такой $\kappa g^\alpha \cdot m^\beta \cdot c^\gamma$ или такой $\text{квт}^\delta \cdot \text{час}^\varepsilon$. Здесь $\alpha, \dots, \varepsilon$ — целые константы). Для обозначения размерности некоторой величины a используют квадратные скобки $[a]$. Безразмерная величина имеет размерность, равную единице. Некоторая величина a_1 из совокупности $(a_1, \dots, a_n)$ имеет **независимую размерность**, если эту размерность нельзя представить в виде произведения степеней размерностей остальных величин $(a_2, \dots, a_n)$. Например, из трех величин ρ , p и $\vec{v}$, независимые размерности имеют только две величины (любые). Действительно, размерности этих величин в системе СИ таковы

$$[\rho] = \kappa g \cdot c^{-3}, \quad [p] = n \cdot m^{-2} = \kappa g \cdot m^{-1} \cdot c^{-2}, \quad [\vec{v}] = m \cdot c^{-1},$$

и существуют такие целые константы a и b , что $[p] = [\rho]^a \cdot [\vec{v}]^b$. Эти константы легко находятся и равны $a = 1$, $b = 2$. Напротив, величины ρ , f_B и $\vec{v}$ все имеют независимые размерности, т.е. не существует целых констант a и b таких, что $[f_B] = [\rho]^a \cdot [\vec{v}]^b$ (см. подробнее, например, в [1]).

Для того чтобы получить безразмерный вид уравнений, все размерные переменные задачи a_p (зависимые и независимые, но не параметры) выражают через произведения неких постоянных характерных значений A и безразмерных функций a :

$$a_p(t, x) = Aa(t, x). \quad (12.13)$$

Каждая размерная константа A имеет, естественно, ту же размерность, что и переменная a_p , и называется ее **масштабом**. Это может быть либо среднее значение величины a , либо среднее значение ее амплитуды. Она выбирается такой, чтобы в рассматриваемой задаче безразмерная переменная a была порядка единицы. Число независимых масштабов, т.е. масштабов с независимыми размерностями, должно быть равно числу независимых размерностей.

После подстановки размерных переменных в виде (12.13) в рассматриваемую задачу каждый член уравнения оказывается записанным в

виде произведения комплекса размерных констант, безразмерных переменных и их производных (также безразмерных). Поскольку выбранные масштабы обеспечивают каждому безразмерному сомножителю порядок единицы, величина размерного комплекса может служить оценкой вклада соответствующего члена уравнения.

Если уравнение пронормировать на какой-либо размерный комплекс, то все уравнение в силу его однородности по размерности окажется безразмерным, а величины безразмерных коэффициентов, составленных из выбранных масштабов и параметров задачи, дадут относительный вклад членов уравнения.

Продемонстрируем описанную процедуру на примере уравнения Навье-Стокса (11.10). Введем для переменных размерные масштабы. Переменные в уравнении (11.10) имеют следующие размерности:

$$[t] = c, \quad [x] = m, \quad [p] = \frac{\kappa g}{m \cdot c^2},$$

и на первый взгляд независимых масштабов должно быть три. Однако обратим внимание на то, что градиент давления встречается только нормированным на плотность, так что размерность всего этого члена будет m/c^2 . Таким образом, необходимых независимых размерностей оказывается только две. Столько же надо выбрать независимых масштабов. Остальные масштабы будут производными от этих двух.

Выберем в качестве независимых масштаб скорости U и масштаб длины L , не уточняя их конкретных численных значений.⁵⁵ Тогда масштабом времени T будет служить отношение L/U . Запишем размерные переменные задачи, обозначенные здесь индексом p , в виде (12.13)

$$\vec{v}_p = U \vec{v}, \quad t_p = T t, \quad \partial_{t_p} = \frac{U}{L} \partial_t,$$

$$\left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right)_p = \frac{U^2}{L} \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (\Delta \vec{v})_p = \frac{U}{L^2} \Delta \vec{v}.$$

Обратите внимание на то, что дифференциальные операторы также размерны. Подставляя найденные выражения в уравнение (11.10), по-

⁵⁵Таков традиционный выбор. Разумеется, можно взять любые два независимых масштаба, например, L и T . Результат получится тот же, но выражен будет в других терминах.

лучим:

$$\frac{U^2}{L} \partial_t \vec{v} + \frac{U^2}{L} (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{U^2}{L} \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \frac{U}{L^2} \Delta \vec{v} + \vec{b}. \quad (12.14)$$

В этом уравнении размерными являются только введенные масштабы и параметры задачи ν и $\vec{b}$. Они и образуют размерные комплексы $\frac{U^2}{L}$ и $\nu \frac{U}{L^2}$, о которых говорилось выше. Поскольку безразмерные члены уравнения (12.14) порядка единицы, легко заметить, что первые три члена уравнения одного порядка, равного U^2/L . Относительный порядок последних двух членов найдем, пронормировав (12.14) на величину U^2/L :

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \left(\frac{\nu}{UL} \right) \Delta \vec{v} + \left(\frac{gL}{U^2} \right) \frac{\vec{b}}{g}.$$

Теперь все члены уравнения безразмерны. Относительный вклад двух последних слагаемых в правой части показывают содержащиеся в них безразмерные комплексы размерных величин. Вводя традиционные для этих комплексов обозначения

$$\text{Re} \equiv \frac{UL}{\nu}, \quad \text{Fr} \equiv \frac{U^2}{gL},$$

окончательно получим

$$\partial_t \vec{v} + (\vec{v}, \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v} + \frac{1}{\text{Fr}} \frac{\vec{b}}{g}. \quad (12.15)$$

Безразмерный комплекс Re называется *числом Рейнольдса*⁵⁶ и характеризует отношение сил инерции к силам вязкости. Безразмерный комплекс Fr называется *числом Фруда*⁵⁷ и характеризует отношение сил инерции к силе тяжести.

12.3.2. Динамическое подобие

Как видно, все многообразие решений уравнения (12.15) зависит только от двух параметров Re и Fr . Выбранные нами величины U и L

⁵⁶ Рейнольдс (Reynolds) Осборн (1842-1912), английский физик и инженер.

⁵⁷ Фруд (Froude) Уильям (1810-1879), английский кораблестроитель.

характеризуют пространственно-временные масштабы изучаемого течения. Задавая разные числовые значения U и L , мы будем изучать, вообще говоря, разные течения. Однако если при изменении масштабов U и L числа Re и Fr не изменятся, то различным размерным характеристикам течения будет соответствовать одно и то же решение уравнения (12.15). Иначе говоря, каждое решение уравнения (12.15) описывает целое семейство течений с одинаковыми значениями чисел Re и Fr . Такие течения называются *динамически подобными*. При этом предполагается, что жидкость обтекает геометрически подобные тела.

Идея динамически подобных течений широко используется, например, при испытании моделей судов. Сила сопротивления жидкости складывается из сопротивления трения, определяемого вязкостью жидкости, и из волнового сопротивления, зависящего от силы тяжести. Если размер судна в 100 раз больше размера модели (масштаб L), то для того, чтобы число Фруда потока, обтекающего судно равнялось числу Фруда потока, обтекающего модель, скорость модели должна быть в 10 раз меньше скорости судна. Вместе с тем, чтобы добиться одинаковых чисел Рейнольдса, вязкость жидкости, обтекающей модель, должна быть в 1000 раз меньше вязкости воды. Поскольку такие условия создать невозможно, силу трения приходится рассчитывать по эмпирическим формулам.

Если решается задача обтекания тела, погруженного в жидкость (свободная поверхность не рассматривается), то, вводя потенциал силы тяжести $\varphi = -gz$, безразмерное уравнение Навье-Стокса можно привести к виду:

$$d_t \vec{v} = -\nabla(P + \varphi) + \frac{1}{Re} \Delta \vec{v}. \quad (12.16)$$

В этом случае два течения будут подобны, если их числа Рейнольдса одинаковы. При наличии свободной поверхности такой прием не используется, так как свободная граница, на которой ставится граничное условие на давление, сама определяется величиной g .

Еще раз подчеркнем физический смысл полученных безразмерных комплексов Re и Fr . Найдем характерные величины плотностей сил, определяющих течение жидкости в терминах выбранных масштабов:

- 1) Плотность инерционных сил, определяемая произведением плотности массы на ускорение, пропорциональна величине $\rho U^2/L$.

- 2) Плотность силы тяжести равна ρg .
- 3) Плотность силы трения, порождаемая вязкостью, пропорциональна $\rho \nu U/L^2$.

Отношение сил инерции к силам вязкости есть число Рейнольдса:

$$\frac{\rho U^2/L}{\rho \nu U/L^2} = \frac{UL}{\nu} \equiv \text{Re}.$$

Отношение же инерционных сил к силе тяжести дает число Фруда:

$$\frac{\rho U^2/L}{\rho g} = \frac{U^2}{Lg} \equiv \text{Fr}.$$

Из рассмотрения уравнения (12.16) вытекает, что при больших числах Re член $\frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v}$ становится пренебрежимо малым. Течение в таком случае хорошо описывается моделью идеальной жидкости. Таким образом, вынесенный в заголовок параграфа 12.3 вопрос «какая жидкость вязкая?» оказывается бессмысленным. Большое значение ν некоторой жидкости еще не является гарантией малости отношения $\text{Re} = UL/\nu$. Для описания движения одной и той же среды может подойти модель идеальной жидкости, а может потребоваться модель вязкой жидкости. Все зависит от пространственно-временных масштабов изучаемого явления.

12.4. Безразмерная форма уравнения переноса тепла

Аналогичные рассуждения применимы и к уравнению (12.6), описывающему перенос тепла. Безразмерный вид уравнения теплопроводности легко получить, последовательно выполняя описанную процедуру. Вот это уравнение:

$$\partial_t T + (\vec{v}, \nabla T) = \frac{1}{\text{Pe}} \Delta T. \quad (12.17)$$

Здесь $\text{Pe} = \frac{UL}{\kappa}$ — число Пекле,⁵⁸ а U и L — масштабы скорости и длины изучаемого течения.

⁵⁸Пекле (Pecllet) Жан Клод (1793-1857), французский физик.

Упражнение. Выведите уравнение (12.17).

Аналогично числу Рейнольдса, число Пекле определяет порядок отношения инерционных членов $(\vec{v}, \nabla T)$ к диффузионным $\kappa \Delta T$. Если течение характеризуется большими значениями числа Pe , то, очевидно, эволюция температурного поля обеспечивается, главным образом, полем скорости $\vec{v}$, а влиянием молекулярной теплопередачи можно пренебречь. Уравнение (12.17) принимает вид $d_t T = 0$, что означает сохранение температуры вдоль мировых линий.

Разумеется, само уравнение (12.6) или (12.17) никаких молекул не описывает. Ведь у нас сплошная среда, гладкое поле температуры и т.п. Однако, поскольку уравнение — это модель, а не природа, а в природе на микроскопическом уровне той сплошной среды, о которой мы ведем речь — нет, в модель приходится включать механизмы влияния микропроцессов (взаимодействие молекул) на макропроцессы (передачу тепла). Простейшим и самым распространенным способом учета этих механизмов является параметрическое их описание. Здесь таким параметром оказывается коэффициент κ . Различными значениями этого параметра мы пытаемся приближенно учесть способность молекул, разную для разных веществ, взаимодействовать друг с другом.

13. Ламинарный пограничный слой

13.1. Ламинарный пограничный слой

Рассмотрим простую задачу: течение жидкости вдоль плоской твердой поверхности. Если вдали от стенки число Re велико (L — велико (далеко от пластины) и/или U — велика), то движение жидкости может быть описано моделью идеальной жидкости. С другой стороны, понятно, что стенка тормозит поток жидкости и, если принять граничное условие прилипания, то на поверхности скорость течения должна равняться нулю. Число Re вблизи стенки, таким образом, мало и модель идеальной жидкости перестает работать. Надо использовать модель вязкой жидкости. Но ведь вдали от стенки течение определяется инерционными силами, а вязкие силы пренебрежимо малы. Учитывать их здесь — напрасная трата усилий. Как быть?

По предложению Прандтля,⁵⁹ в жидкости выделяют тонкий слой, примыкающий к твердой границе, в пределах которого силы вязкости сравнимы или доминируют над силами инерции. Эта область получила название *пограничного слоя*. Здесь скорость жидкости быстро возрастает от нуля на пластине, до значения скорости на внешней границе слоя, которая определяется течением жидкости вне пограничного слоя. Такой подход позволяет убить двух зайцев сразу: во-первых, использовать уравнения Эйлера в области с большими значениями Re и, во-вторых, учесть вязкость только там, где она существенна, т.е. в тонком слое у твердой поверхности, что позволяет упростить уравнения вязкой жидкости. Концепция пограничного слоя оказалась очень плодотворной и широко применяется. Так, пограничные слои выделяются не только на поверхностях твердых тел, но и вообще на поверхностях раздела двух сред. Например, по обе стороны поверхности раздела вода-воздух. Во всех случаях такая область характеризуется большими градиентами скорости и является зоной интенсивного вихревого движения.

Мы рассмотрим простейший случай образования пограничного слоя на полубесконечной плоской тонкой пластине в равномерном потоке, движущемся со скоростью U . Выберем декартовы координаты (x, y, z) так, чтобы пластина описывалась уравнениями $x \geq 0, z = 0$. Ось x ори-

⁵⁹Прандтль (Prandtl) Людвиг (1875–1953) немецкий гидромеханик.

ентируем по скорости набегающего потока. При этом движения вдоль оси y отсутствуют, и задачу можно считать двумерной с координатами (x, z) . Набегающий поток является потенциальным, т.е. безвихревым.

Модель идеальной жидкости нечувствительна к введению в поток пластины. Для того чтобы ее присутствие сказывалось на картине движения, нужно выделить вдоль пластины область, в которой будут использованы иные средства описания движущейся среды. Иными словами, требуется выделить тонкий пограничный слой, в пределах которого поток жидкости резко тормозится. Поскольку задача симметрична относительно оси x , будем рассматривать только верхнюю полуплоскость.

13.2. Толщина пограничного слоя

Толщина пограничного слоя δ не постоянна и растет с нуля по мере удаления от края пластины. Чтобы оценить величину δ , рассмотрим параметры, ее определяющие. Их всего три: t , ν , U . Размерности этих параметров следующие:

$$[t] = c, \quad [\nu] = \frac{m^2}{c}, \quad [U] = \frac{m}{c}.$$

Скорость набегающего потока U является масштабом скорости горизонтальных движений. Из двух других параметров можно составить еще одну величину с размерностью скорости $w \equiv \sqrt{\nu/t}$, которая связана с коэффициентом кинематической вязкости ν и, очевидно, является масштабом скорости вертикальных движений. Действительно, если вязкости нет $\nu = 0$, то $w = 0$ и течение оказывается нечувствительным к наличию стенки. Если же наоборот $\nu \rightarrow \infty$, то $w \rightarrow \infty$ и стенка тормозит весь поток сразу. Тормозящий эффект стенки, как видим, распространяется вверх тем быстрее, чем выше коэффициент вязкости.

Возмущения, вносимые в поток стенкой, распространяются вверх со скоростью w и сносятся течением со скоростью U . За время t возмущения от стенки достигнут высоты $\delta_\nu = wt$. За это же время они будут снесены набегающим потоком на расстояние $x = Ut$. Таким образом, имеем

$$\delta_\nu = wt = \sqrt{\nu t} = \sqrt{\nu \frac{x}{U}} = \frac{x}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad (13.1)$$

т.е. толщина пограничного слоя растет как $\sqrt{x}$ с расстоянием x от края пластины.

Если скорость потока U велика, то Re велико, δ_ν — мало и вихревые возмущения, порождаемые стенкой, с трудом проникают вглубь потока. В таком случае можно считать, что влияние пограничного слоя отсутствует и потенциальность течения не нарушается.

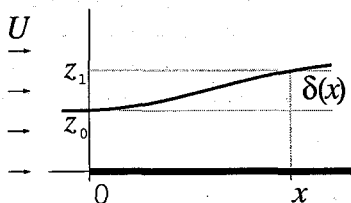


Рис. 21. Толщина вытеснения.

Толщиной пограничного слоя δ_ν можно понимать такое расстояние по нормали от твердой поверхности, где u -компонента скорости достигает определенной доли скорости набегающего потока, скажем, 99%.

Другой величиной, характеризующей поперечный масштаб пограничного слоя, является, так называемая, **толщина вытеснения** δ_* , определяемая формулой

$$\delta_* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u(x, z)}{U} \right) dz. \quad (13.2)$$

Смысл этого определения связан с тем, что вследствие трения о стенку продольная компонента скорости в пределах пограничного слоя уменьшается, а это, в свою очередь, вызывает искажение линий тока, которое проявляется как оттеснение наружу набегающего потока (рис.21). Поскольку расход жидкости через любое сечение трубки тока должен быть одинаковым, а u -компонента скорости уменьшается тем сильнее, чем больше расстояние от края пластины, сечение трубки тока должно расти с ростом x .

Расход между линиями тока, проходящими через точки $(0, 0)$ и $(0, z_0)$ перед пластиной равен

$$\int_0^{z_0} U dz = U z_0.$$

На расстоянии x от края пластины расход между теми же линиями тока равен

$$\int_0^{z_1(x)} u(x, z) dz = \int_0^{z_0} U dz. \quad (13.3)$$

Здесь $z = z_1(x)$ — уравнение линии тока, проходящей через точку $(0, z_0)$. Последний интеграл в (13.3) можно записать в виде

$$\int_0^{z_0} U dz = \int_0^{z_1(x)} U dz - \int_{z_0}^{z_1(x)} U dz = \int_0^{z_1(x)} U dz - (z_1(x) - z_0)U. \quad (13.4)$$

Подставляя (13.4) в (13.3), найдем

$$\delta(x) = (z_1(x) - z_0) = \int_0^{z_1(x)} \left(1 - \frac{u(x, z)}{U} \right) dz = \int_0^{z_0 + \delta(x)} \left(1 - \frac{u(x, z)}{U} \right) dz.$$

Устремляя $z_0 \rightarrow \infty$, получим (13.2).

Вытеснение приводит к тому, что картина линий тока становится искаженной и вне пограничного слоя. Таким образом, пограничный слой оказывает влияние на внешний поток. В частности, из-за вытеснения вертикальная компонента скорости не стремится к нулю при $z \rightarrow \infty$.

13.3. Уравнения пограничного слоя

Процесс обтекания бесконечной пластины длиной L горизонтальным плоскопараллельным потоком, как было отмечено, двумерен, и безразмерные уравнения вязкой жидкости в этом случае таковы:

$$\partial_x u + \partial_z w = 0, \quad (13.5)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + w \partial_z u = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \frac{1}{\text{Re}} (\partial_{xx} u + \partial_{zz} u), \quad (13.6)$$

$$d_t v = 0, \quad (13.7)$$

$$\partial_t w + u \partial_x w + w \partial_z w = -\frac{1}{\rho} \partial_z p + \frac{1}{\text{Re}} (\partial_{xx} w + \partial_{zz} w). \quad (13.8)$$

По-прежнему направление оси x совпадает с вектором скорости набегающего потока U , а ось z направлена вертикально вверх. Нас интересует

движение среды в тонком слое, толщиной $\sim \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}$, около пластины. Заменой координат перейдем к рассмотрению движения в области, независимой от характеристики потока Re . Положим $\zeta = z\sqrt{\text{Re}}$. Тогда

$$w = d_t z = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} d_t \zeta = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} W, \quad W \equiv d_t \zeta,$$

и уравнения (13.5)–(13.8) запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \partial_x u + \partial_\zeta W &= 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + W \partial_\zeta u &= -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \frac{1}{\text{Re}} (\partial_{xx} u + \text{Re} \partial_{\zeta\zeta} u), \\ \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \partial_t W + \frac{u}{\sqrt{\text{Re}}} \partial_x W + \frac{W}{\sqrt{\text{Re}}} \partial_\zeta W &= -\frac{\sqrt{\text{Re}}}{\rho} \partial_\zeta p + \frac{1}{\text{Re}^{3/2}} \partial_{xx} W + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}} \partial_{\zeta\zeta} W. \end{aligned}$$

Нормируя последнее уравнение на $\sqrt{\text{Re}}$, перепишем два последних уравнения так:

$$\begin{aligned} \partial_t u + u \partial_x u + W \partial_\zeta u &= -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \frac{1}{\text{Re}} \partial_{xx} u + \partial_{\zeta\zeta} u, \quad (13.9) \\ \frac{1}{\text{Re}} (\partial_t W + u \partial_x W + W \partial_\zeta W) &= -\frac{1}{\rho} \partial_\zeta p + \frac{1}{\text{Re}^2} \partial_{xx} W + \\ &\quad + \frac{1}{\text{Re}} \partial_{\zeta\zeta} W. \quad (13.10) \end{aligned}$$

В пределе, при $\text{Re} \rightarrow \infty$ (*предельный переход Прандтля*), получаем систему уравнений пограничного слоя:

$$\partial_x u + \partial_\zeta W = 0, \quad (13.11)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + W \partial_\zeta u = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \partial_{\zeta\zeta} u, \quad (13.12)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \partial_\zeta p. \quad (13.13)$$

Из уравнения (13.13) видно, что давление постоянно по сечению пограничного слоя и, следовательно, должно быть равно давлению в набегающем потоке. Его же (набегающий поток) мы описываем моделью

идеальной жидкости, т.е. считаем, что выполняется равенство

$$\partial_t U + U \partial_x U = -\frac{1}{\rho} \partial_x p. \quad (13.14)$$

Следовательно, горизонтальная составляющая градиента давления — известная функция. Возвращаясь к исходным координатам, получим

$$\partial_x u + \partial_z w = 0, \quad (13.15)$$

$$\partial_t u + u \partial_x u + w \partial_z u = -\frac{1}{\rho} \partial_x p + \frac{1}{\text{Re}} \partial_{zz} u. \quad (13.16)$$

Эта система уравнений с граничными условиями

$$u|_{z=0} = w|_{z=0} = 0, \quad u|_{z \rightarrow \infty} \rightarrow U$$

и соответствующим начальным условием позволяет найти компоненты вектора скорости в области $x \in [0, L]$, $z \in [0, \infty]$.

13.4. Отрыв пограничного слоя

Уравнения пограничного слоя были нами выведены для случая обтекания плоской бесконечной пластины. Можно, однако, показать, что в первом приближении они справедливы и при описании обтекания двумерных криволинейных поверхностей с малыми значениями кривизны. Радиус кривизны поверхности должен быть всюду большим в сравнении с толщиной пограничного слоя (см. [12]). Влияние кривизны сказывается на профиле скорости, видоизменяя его, и может порождать такое явление, как *отрыв пограничного слоя*.

Рассмотрим задачу стационарного обтекания прямого кругового цилиндра течением, перпендикулярным к оси цилиндра. И пусть радиус сечения цилиндра и скорость набегающего потока достаточно велики, чтобы выведенные уравнения пограничного слоя были применимы. На поверхности цилиндра образуется пограничный слой, вне которого жидкость можно считать идеальной, а движение — потенциальным.

Горизонтальная составляющая градиента давления в стационарных условиях равна (ср. с уравнением (13.14))

$$-\frac{1}{\rho} \partial_x p = u \partial_x u, \quad (13.17)$$

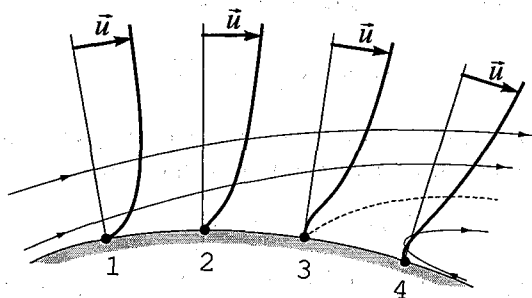


Рис. 22. Отрыв пограничного слоя.

где u — горизонтальная составляющая вектора скорости набегающего потока (см. рис.22). Над верхней точкой (2) сечения цилиндра величина u достигает максимума: $|u| = |U|$ и $\partial_x u = 0$, откуда $\partial_x p = 0$. Таким образом, величина u растет от точки (1) до точки (2) и далее падает. Давление, напротив, падает до точки (2), а затем растет.

Поскольку градиент давления $\partial_x p$ на участке (2)–(4) положителен, градиент скорости $\partial_x u$ здесь же отрицателен, жидкость тормозится и в точке (3) скорость падает до нуля $u = 0$. Начиная с точки (3), жидкость течет в противоположном направлении. В точке (3) пограничный слой отрывается от поверхности, оттесняемый возвратным потоком. Поверхность раздела (на рисунке — пунктир) оказывается неустойчивой и быстро сворачивается в вихрь. Второй такой вихрь образуется на нижней половине цилиндра. Они поочередно отрываются от поверхности цилиндра и уносятся течением, а на их месте образуются новые. След за препятствием, состоящий из следующих друг за другом противоположно закрученных вихрей, называется *вихревой дорожкой Кармана*.⁶⁰ Это красивое явление часто можно наблюдать в природе.

Необходимым условием для отрыва пограничного слоя, как мы видим, является существование на поверхности обтекаемого тела участков, где градиент давления меняет знак. Это условие выполняется и в ряде других случаев. Например, в течении в расширяющейся трубе.

⁶⁰Карман (Karman) Теодор фон (1881–1963), немецкий учёный в области механики.

Здесь также может возникнуть отрыв пограничного слоя.

13.5. Температурный пограничный слой

Как уже было сказано, если течение характеризуется большими значениями числа Re , то эволюция температурного поля обеспечивается, главным образом, полем скорости $\vec{v}$. Однако, при обтекании твердых поверхностей, в тех местах, где за счет уменьшения скорости течения резко уменьшается число Re , должны также резко падать и значения числа Pe . Влиянием молекулярной теплопроводности пренебрегать уже нельзя, поскольку она имеет здесь тот же порядок, что и члены, описывающие перенос температуры. Возникает та же проблема, что и при учете вязкости вблизи границы раздела, и решается она аналогично. Выделяется приграничная область резкого изменения температуры, так называемый, *температурный пограничный слой*. В пределах этого слоя влияние молекулярной теплопроводности учитывается. Однако малая толщина слоя позволяет значительно упростить уравнения (аналогично рассмотренным уравнениям пограничного слоя).

Рассуждая, как и в случае вязкого пограничного слоя, можно получить оценку толщины температурного пограничного слоя δ_T :

$$\delta_T = \frac{L}{\sqrt{Pe}}. \quad (13.18)$$

Сравнивая толщину вязкого пограничного слоя δ_ν с величиной δ_T , видим, что их отношение

$$\frac{\delta_\nu}{\delta_T} = \sqrt{\frac{Pe}{Re}} = \sqrt{\frac{\nu}{\kappa}} \quad (13.19)$$

зависит исключительно от свойств самой жидкости (т.е. κ и ν) и никак не связано с масштабами ее движения (L и U). Безразмерное отношение $P_r \equiv \frac{\nu}{\kappa}$ называется *числом Прандтля*. Для газов эта величина порядка единицы (0.72 у воздуха, $\frac{2}{3}$ у одноатомных и $\frac{3}{4}$ у двухатомных газов), для большинства капельных жидкостей — больше 1, а для жидких металлов — значительно меньше 1.

Уравнение, описывающее эволюцию температуры в температурном пограничном слое, можно получить тем же способом, что и уравнения

пограничного слоя. Вот это уравнение

$$\partial_t T + u \partial_x T + w \partial_z T = \kappa \partial_{zz} T. \quad (13.20)$$

Здесь использованы все те же обозначения, координаты и базисы, что и при выводе уравнений пограничного слоя.

Упражнение. Выведите уравнение (13.20). Обратите внимание на то, что это уравнение записано в размерном виде (кстати, откуда это следует?).

14. Турбулентная жидкость

14.1. Гидродинамическая неустойчивость

Как правило, решения уравнений гидродинамики вязкой или идеальной жидкости хорошо описывают данные наблюдений при достаточно малых значениях числа $Re = \frac{UL}{\nu}$. Если же значения Re велики, то решения уравнений по-прежнему существуют, но наблюдаемым течениям не соответствуют. Теоретические решения описывают плавные изменения гладких гидродинамических полей. Наблюдаются же беспорядочные пульсации во времени и пространстве всех гидродинамических характеристик течения.

Движения жидкости распадаются на два сильно отличающихся друг от друга режима.

- 1) *ламинарные течения* — гладкие течения, плавно эволюционирующие под действием внешних условий.
- 2) *турбулентные течения* — течения, характеризующиеся хаотическими пространственно-временными пульсациями всех гидродинамических полей.

Причем это различие не только внешнее, резко меняются и такие свойства течений, как трение о стенки, скорость перемешивания, теплопроводность. В турбулентном течении все это происходит значительно интенсивнее.

Общий критерий возникновения турбулентности был установлен О. Рейнольдсом в конце 19 в. и заключается он в том, что течение остается ламинарным до тех пор, пока число Re не превосходит некоторого *критического* значения Re_{cr} , а при $Re > Re_{cr}$ становится турбулентным. При возрастании Re в момент достижения критического значения возмущения скачкообразно порождают турбулентность. Само же значение Re_{cr} зависит от интенсивности и масштаба возмущений, привносимых в поток (например, различными препятствиями, шероховатыми стенками и т.п.). Уменьшая степень начальной возмущенности потока (путем тщательной обработки стенок канала, трубы, и проч.) удавалось достичь *затягивания ламинарного режима* до значений $Re_{cr} = 50000$.

Таким образом, число Рейнольдса еще не является однозначным критерием возникновения турбулентности. Можно, однако, указать минимальное критическое значение $Re_{cr \min}$ такое, что при $Re < Re_{cr \min}$ поток всегда будет оставаться ламинарным, т.е. любые возмущения будут затухать. Величина $Re_{cr \min}$ — порядка 2000.

Итак, снова неожиданная неприятность. Модель предсказывает одно, эксперимент дает другое. Не те профили скорости, не та интенсивность перемешивания. Здесь что-то происходит с самим течением: только что оно было плавным и гладким, и вот уже хаотично. Оно, как говорят, перестает быть *устойчивым* по отношению к малым возмущениям.

На основе многовековых наблюдений сформулирован принцип, согласно которому в природе длительное время могут существовать лишь устойчивые режимы движения. Те движения, возмущения которых не затухают во времени, а возрастают, разрушаются, превращаясь в иные, устойчивые формы движений. Поэтому есть основания считать, что Re_{cr} помечает собой границу устойчивости ламинарного и турбулентного режимов. При $Re < Re_{cr}$ ламинарный поток устойчив, возникающие под действием инерционных сил возмущения гасятся вязкостью, т.е. неустойчивым оказывается турбулентное течение. При $Re > Re_{cr}$, наоборот, ламинарный поток теряет устойчивость, вязкость не справляется с возникающими возмущениями, они растут и турбулизируют течение.

Если допустить, что оба режима, и ламинарный и турбулентный, описываются одними уравнениями гидромеханики вязкой жидкости, тогда то, что при $Re > Re_{cr}$ установившееся ламинарное течение в природе *невозможно*, а стационарное решение уравнений модели *существует*, приводит к мысли, что такое решение становится неустойчивым по отношению к малым возмущениям. Этот вывод, в общем, подтверждается исследованиями [5].

Широкая распространенность турбулентных течений делает особенно важной проблему их описания. Ведь понимание причин возникновения турбулентности еще не способ ее описания.

14.2. Развитая турбулентность

Если при докритических значениях Re близких к Re_{cr} в потоке, все еще называемом ламинарным, возникают переходные процессы в виде кратковременных всплеск высокочастотных пульсаций (так называемых, «турбулентных пятен»), то при закритических значениях Re вся область течения оказывается охваченной хаотическими пульсациями характеристик потока и, в частности, компонент скорости. Это приводит к тому, что траектории движения точек жидкости оказываются чрезвычайно запутанными. То, чего мы старались избежать, принимая гипотезу сплошности (т.е. индивидуального описания движения жидких частиц) вновь появляется с возникновением турбулентности.

Идея, связанная с принятием гипотезы сплошности, состояла в том, что характер движения близких частиц считался похожим, близким, мало меняющимся в малых масштабах. Для описания таких движений требуется сравнительно мало информации. Турбулентный режим путает все карты. Близкие вначале траектории, быстро разбегаются. Объем информации необходимый для описания таких движений чудовищно возрастает, и мы, по существу, откатываемся на исходные позиции. Задача описания турбулентного течения старыми методами становится безнадежной. Требуется другой подход. Он был найден. Это статистический подход, а соответствующий математический аппарат — теория случайных полей.

В современной статистической гидромеханике [8] гидродинамические поля турбулентного течения всегда считаются *случайными полями*. Каждая конкретная реализация такого поля рассматривается как представитель некоторого *статистического ансамбля* полей. Вместо описания деталей индивидуальных реализаций изучают среднестатистические поля. Все гидродинамические величины f в турбулентном потоке записывают в виде суммы осредненных значений $\bar{f}$ и отклонений от них f' — пульсаций:

$$f = \bar{f} + f'. \quad (14.1)$$

Под осреднением же понимается *теоретико-вероятностное осреднение* по соответствующему статистическому ансамблю. Такая процедура осреднения, обозначаемая далее чертой сверху, удовлетворяет следующим *условиям Рейнольдса*:

- 1) $\overline{a} = a, \quad a = \text{const},$
- 2) $\overline{af} = a\overline{f}, \quad a = \text{const},$
- 3) $\overline{\partial_{x_i} f} = \partial_{x_i} \overline{f},$
- 4) $\overline{f + g} = \overline{f} + \overline{g},$
- 5) $\overline{fg} = \overline{f}\overline{g},$ где g может принимать значения $g = 1, \overline{h}, h'.$ В этом случае условие 5) эквивалентно трем следующим условиям: 5а) $\overline{\overline{f}} = \overline{f},$ 5б) $\overline{f\overline{h}} = \overline{f}\overline{h},$ 5в) $\overline{fh'} = 0.$

Упражнение. Получите условия 5а)–5в) из условия 5).

Все эти условия означают, что оператор осреднения есть

- линейный: $\overline{af + bh} = a\overline{f} + b\overline{h}, \quad a, b = \text{const},$
- непрерывный: $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{f_n},$
- проектор: $\overline{\overline{f}} = \overline{f}.$

Упражнение. Покажите, что из трех этих условий следуют условия 1)–5).

14.3. Проблема осреднения

Ансамбля реализаций на практике часто получить невозможно, и приходится прибегать к каким-то иным способам осреднения. Пусть $f(x)$ функция, значения которой нужно сгладить, задана на множестве вещественных чисел. *Осредненной* (сглаженной) будем называть функцию $\overline{f}(x)$, определенную выражением

$$\overline{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) f(x - \xi) d\xi, \quad (14.2)$$

где $\omega(\xi)$ некоторая весовая функция. Выражение (14.2) означает, что значение осредненной функции $\bar{f}$ в точке x зависит от значений исходной функции f во всех точках области определения и каждое из этих значений учитывается со своим весом ω .

Не трудно видеть, что в выражении (14.2) функции f и ω равноправны, т.е. осредненную функцию можно также записать в виде

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\omega(x - \xi)d\xi, \quad (14.3)$$

Действительно, обозначим $\eta = x - \xi$, тогда

$$d\xi = -d\eta, \quad \omega(\xi) = \omega(x - \eta), \quad f(x - \xi) = f(\eta).$$

Откуда

$$\bar{f}(x) = - \int_{\infty}^{-\infty} \omega(x - \eta)f(\eta)d\eta = \int_{-\infty}^{\infty} f(\eta)\omega(x - \eta)d\eta,$$

что с точностью до обозначений совпадает с (14.3).

Сглаживающая (весовая) функция должна отвечать некоторым очевидным требованиям:

- 1) Если $f = \text{const} = C$, то $f = \bar{f} = C$. Отсюда получаем, что

$$C = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi)C d\xi = C \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) d\xi,$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) d\xi = 1.$$

- 2) Для того чтобы функция $\bar{f}$ существовала необходима, сходимость несобственных интегралов в (14.2), (14.3). Последние сходятся, если при $|\xi| \rightarrow \infty$ весовая функция $\omega(\xi)$ такова, что произведение $\omega(\xi)f(x - \xi) \rightarrow 0$ не медленнее, чем $1/\xi^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$.⁶¹

⁶¹ Хорошо известно, что интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi} d\xi$ расходится, тогда как интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi^{1+\alpha}} d\xi$ сходится при любом сколь угодно малом положительном α (см. например, [9]).

Обычно $\omega(\xi)$ выбирается четной неотрицательной функцией. В силу определения (14.2) или (14.3) процедура осреднения линейна, т.е. $\overline{f_1 + f_2} = \overline{f_1} + \overline{f_2}$. Повторное осреднение отлично от однократного. Действительно

$$\overline{\overline{f}} = \overline{\overline{f}}^{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) f(x - \xi - \eta) d\xi \right) d\eta =$$

Обозначая $\zeta = \xi + \eta$, получим $\eta = \zeta - \xi$, $d\eta = d\zeta$, и далее

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) f(x - \zeta) d\xi d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\zeta - \xi) \omega(\xi) f(x - \zeta) d\xi d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \omega(\zeta - \xi) \omega(\xi) d\xi \right) f(x - \zeta) d\zeta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega_1(\zeta) f(x - \zeta) d\zeta = \overline{f}^{\omega_1}. \end{aligned}$$

Таким образом, повторное сглаживание эквивалентно однократному сглаживанию с другой весовой функцией ω_1 , равной

$$\omega_1(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\zeta - \xi) \omega(\xi) d\xi.$$

Наиболее часто применяются пространственное и/или временное осреднение. Весовая функция задается при этом в виде

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{L}, & |\xi| < \frac{L}{2}, \\ 0, & |\xi| \geq \frac{L}{2}, \end{cases} \quad (14.4)$$

где множество $(-L/2, L/2)$ — так называемый *интервал осреднения*. Это либо временной интервал, либо некоторый пространственный диапазон. Средние значения функции $f(x)$ вычисляются, соответственно, по формуле

$$\overline{f}^{\omega}(x) = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} f(x - \xi) d\xi = \frac{1}{L} \int_{x-\frac{L}{2}}^{x+\frac{L}{2}} f(\eta) d\eta.$$

Повторное сглаживание с той же весовой функцией приводит к осреднению с весом

$$\begin{aligned}\omega^{(2)}(\zeta) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) \omega(\zeta - \xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \omega(\zeta - \xi) d\xi = \frac{1}{L^2} (L - |\zeta|), \quad |\zeta| < L, \\ \omega^{(2)}(\zeta) &= 0, \quad |\zeta| \geq L.\end{aligned}$$

В пределе многократное осреднение с весом (14.4) эквивалентно однократному осреднению с весом $\omega^{(\infty)}(\zeta)$, описываемым гауссовой кривой.

Осреднение типа (14.4) проводят на практике. При этом условия Рейнольдса 1) – 4) (см. с. 161) выполняются точно, а условие 5) лишь приближенно: среднее $\bar{f}$ оказывается зависящим от интервала осреднения. Выбирать этот интервал необходимо так, чтобы зависимость $\bar{f}$ от него была минимальной и, тем самым, условие 5) выполнялось с достаточной точностью. Это бывает возможно, если соответствующий спектр движений (пространственный или временной) имеет области, в которых амплитуды гармоник можно считать малыми (см. рис.23).

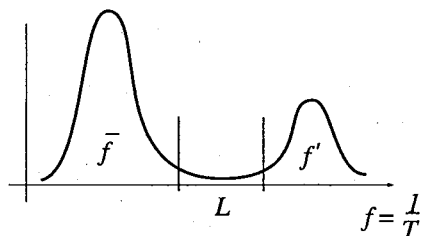


Рис. 23. Примерный вид спектра, допускающего представление функции в виде (14.1). Интервал осреднения необходимо выбирать в области L .

Для атмосферных движений в частотном спектре такая область приходится на периоды порядка часа. Следовательно, величины различных характеристик метеополей мало чувствительны к интервалу осреднения, если он меняется в пределах от нескольких минут до нескольких часов.

14.4. Уравнение Рейнольдса

Для того чтобы получить уравнения, описывающие эволюцию средних характеристик движения, необходимо осреднить уравнения для соответствующих мгновенных значений.

Рассмотрим случай постоянной плотности $\rho = \text{const}$ и осредним уравнение Навье-Стокса. Вначале, пользуясь уравнением неразрывности (6.17)

$$\partial_t \rho + \nabla_k \rho v_k = 0,$$

запишем его в виде⁶²

$$\partial_t \rho \vec{v} + \nabla_k (\rho \vec{v} v_k) + \nabla p - \mu \Delta \vec{v} - \rho \vec{b} = 0. \quad (14.5)$$

Представим, далее, скорость и давление как сумму осредненной и пульсационной составляющих $\vec{v} = (\bar{\vec{v}} + \vec{v}')$, $p = (\bar{p} + p')$ и осредним уравнение (14.5):

$$0 = \partial_t \rho (\bar{\vec{v}} + \vec{v}') + \nabla_k (\rho (\bar{\vec{v}} + \vec{v}') (\bar{v}_k + v'_k)) + \nabla (\bar{p} + p') - \mu \Delta (\bar{\vec{v}} + \vec{v}') - \rho \vec{b} = \quad (14.6)$$

Пользуясь свойствами операции осреднения, уравнение (14.6) можно записать в виде

$$= \partial_t \rho \bar{\vec{v}} + \nabla_k (\rho \bar{\vec{v}} \bar{v}_k) + \nabla_k (\rho \overline{\vec{v}' v'_k}) + \nabla \bar{p} - \mu \Delta \bar{\vec{v}} - \rho \vec{b}. \quad (14.7)$$

Отсюда получаем уравнение эволюции осредненного вектора скорости, или **уравнение Рейнольдса**:

$$\partial_t \rho \bar{\vec{v}} + \nabla_k (\rho \bar{\vec{v}} \bar{v}_k) = -\nabla \bar{p} + \mu \Delta \bar{\vec{v}} - \nabla_k (\rho \overline{\vec{v}' v'_k}) + \rho \vec{b}. \quad (14.8)$$

⁶²Это часто используемый прием преобразования полной производной по времени. Используя формулу Эйлера, запишем полную производную вектора скорости в левой части уравнения движения в виде

$$\rho d_t \vec{v} = \rho \partial_t \vec{v} + \rho v_k \nabla_k \vec{v}.$$

Складывая это выражение с уравнением неразрывности, умноженным на вектор скорости, получим

$$\begin{aligned} \rho d_t \vec{v} &= \rho \partial_t \vec{v} + \rho v_k \nabla_k \vec{v} + \vec{v} \underbrace{(\partial_t \rho + \nabla_k \rho v_k)}_{=0} = \\ &= \partial_t \rho \vec{v} + \nabla_k (\rho \vec{v} v_k). \end{aligned}$$

Вычитая из (14.8) уравнение неразрывности, умноженное на $\bar{v}$, получим другую форму уравнения Рейнольдса:

$$\rho \partial_t \bar{v} + \rho \bar{v}_k \nabla_k \bar{v} = -\nabla \bar{p} + \mu \Delta \bar{v} - \nabla_k (\rho \bar{v} v'_k) + \rho \bar{b}. \quad (14.9)$$

Новое слагаемое в правой части уравнения (14.9) представляет собой дивергенцию тензора R , компоненты которого

$$R_{ij} = \rho \bar{v}'_i v'_j$$

суть корреляции пульсационных составляющих вектора скорости. Этот новый тензор называется *тензором напряжений Рейнольдса*. Таким образом, в турбулентном потоке обмен импульсом между «частицами» жидкости осуществляется не только молекулярной вязкостью, но и пульсациями скорости.

Если считать, что турбулентность есть результат перехода части энергии осредненного течения к мелкомасштабным возмущениям, то характеристики турбулентности должны зависеть от поля средней скорости. Это наводит на мысль описывать компоненты тензора напряжений Рейнольдса в терминах градиента осредненной скорости по аналогии с описанием компонент тензора напряжений Коши в терминах градиента скорости. Положим

$$R_{ij} = -\mu_T (\partial_{x_i} \bar{v}_j + \partial_{x_j} \bar{v}_i), \quad (14.10)$$

где μ_T — функция, вообще говоря, зависящая от x и t , которая называется *коэффициентом турбулентной вязкости*. После подстановки (14.10) в (14.9) уравнение Рейнольдса принимает вид

$$\partial_t \bar{v} + \bar{v}_k \nabla_k \bar{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{p} + (\nu + \nu_T) \Delta \bar{v} + \bar{b}. \quad (14.11)$$

Здесь $\nu_T \equiv \frac{\mu_T}{\rho}$. Величина $(\mu + \mu_T)$ называется *эффективным коэффициентом вязкости*. Поскольку обычно $\mu_T \gg \mu$, в уравнении (14.11) эффективный коэффициент вязкости заменяется турбулентным.

Коэффициент μ характеризует физические свойства жидкости (статистические свойства хаотических молекулярных движений), а коэффициент μ_T статистические свойства пульсационного движения. Легко

видеть, что рассматриваемый здесь подход к описанию турбулентности сводится к введению второй поправки R к тензору напряжений T

$$T = -pI + T' + R = -pI + 2\mu D + R,$$

и, в частном случае (14.10) позволяет записать T в виде

$$T = -pI + 2(\mu + \mu_T)D.$$

Здесь, однако, тензор D есть симметричная часть градиента средней скорости $\nabla \bar{v}$.

Упражнение. Покажите, что

1) осредненное уравнение неразрывности несжимаемой жидкости имеет вид

$$(\nabla, \bar{v}) = 0, \quad (14.12)$$

2) пульсации скорости удовлетворяют уравнению неразрывности.

14.5. Баланс энергии

Наряду с массой, энергия — еще одна числовая характеристика тела. Если масса характеризует способность тела препятствовать ускорению, то энергия характеризует способность движущегося тела совершать работу. Этих двух величин было бы достаточно, если бы движение жидкости любых масштабов было гладким и упорядоченным. Увы, это не так. Хаотичность движения, проявляющаяся на различных масштабах, вынуждает нас отказываться от детального описания движения тела, ограничиваясь осредненными так или иначе характеристиками.

Вместе с тем, мы не можем просто отбросить хаотические составляющие движения (это стоило бы нам законов сохранения, т.е. основы основ), а пытаемся учесть их упрощенно, параметрически. Так мы поступили со случайными пульсациями на молекулярном уровне, введя в рассмотрение внутреннюю энергию. Из общей кинетической энергии движений всех масштабов мы выделили часть, связанную с движениями микроскопических масштабов и, следовательно, наиболее высокочастотную, назвали ее внутренней энергией, и использовали для грубого, приближенного описания всего того, что творится на этом

уровне. Однако, если плотность кинетической энергии в некоторой точке пространства-времени у нас всегда связана с вектором скорости в этой же точке, то с плотностью внутренней энергии никакого конкретного вектора скорости не связано. Эта числовая функция описывает среднюю способность микроскопических движений совершать работу.

Теперь, когда обнаружилась потеря устойчивости ламинарного течения, мы, чтобы продвинуться вперед, вынуждены снова отказаться от явного описания движений части масштабов. Мы вновь выделяем долю энергии движения, называем ее турбулентной энергией, и связываем с ней все не описываемые явно пульсации. Так, единая прежде энергия движения разбилась у нас на три части: собственно *кинетическую энергию среднего движения, турбулентную энергию и внутреннюю энергию*.

Все эти части соответствуют различным масштабам движения и все вместе образуют то, что теперь называется *полной энергией*. Она, по-прежнему, является сохраняющейся величиной, поскольку, как и ранее, является мерой способности тела совершать работу независимо от масштабов движений, от самых больших, вплоть до механических взаимодействий молекул. Составляющие же ее части, напротив, сохраняются лишь в особых случаях. Для каждого вида энергии можно написать свое уравнение баланса, и в сумме они должны давать закон сохранения полной энергии. Чтобы получить эти уравнения баланса, поступим следующим образом.

- 1) Умножим вектор средней скорости скалярно на уравнение Рейнольдса (14.9)

$$(\bar{v}, \rho \partial_t \bar{v} + \rho(\bar{v}, \nabla) \bar{v} + \nabla \bar{p} - \mu \Delta \bar{v} + \rho \nabla_k (\bar{v}' v'_k) - \rho \bar{b}) = 0$$

и получим *уравнение баланса плотности кинетической энергии среднего движения* $k_A \equiv \frac{1}{2} \rho(\bar{v}, \bar{v})$:

$$\begin{aligned} \partial_t k_A + (\bar{v}, \nabla k_A) &= -(\bar{v}, \nabla \bar{p}) + \mu(\bar{v}, \Delta \bar{v}) - \\ &\quad - \rho(\bar{v}, \nabla_k \bar{v}' v'_k) + \rho(\bar{v}, \bar{b}). \end{aligned} \quad (14.13)$$

- 2) Теперь возьмем уравнение (11.22), описывающее баланс плотности кинетической энергии неосредненного движения $k \equiv \frac{1}{2} \rho(\bar{v}, \bar{v})$,

запишем его в виде

$$\partial_t k + (\nabla, k\vec{v}) + (\vec{v}, \nabla p) - \mu(\vec{v}, \Delta\vec{v}) - \rho(\vec{v}, \vec{b}) = 0,$$

подставим $\vec{v} = (\bar{\vec{v}} + \vec{v}')$, $p = (\bar{p} + p')$ и осредним. Получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho \overline{(\partial_t(\bar{v}_i + v'_i)^2 + (\nabla, (\bar{v}_i + v'_i)^2(\bar{\vec{v}} + \vec{v}')))} = \\ = \overline{((\bar{\vec{v}} + \vec{v}'), \nabla p) + \mu((\bar{\vec{v}} + \vec{v}'), \Delta(\bar{\vec{v}} + \vec{v}')) + \rho((\bar{\vec{v}} + \vec{v}'), \vec{b})}. \end{aligned}$$

Раскрывая, далее, скобки и учитывая свойства операции осреднения, найдем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\rho\partial_t(\bar{v}_i\bar{v}_i + \overline{v'_i v'_i}) + \frac{1}{2}\rho\nabla_k \left(\bar{v}_i\bar{v}_i\bar{v}_k + \overline{v'_i v'_i v_k} + 2\overline{v'_i v'_i} \bar{v}_i + \overline{v'_i v'_i v'_k} \right) = \\ = -(\bar{v}_i\nabla_i\bar{p} + \overline{v'_i\nabla_i p'}) + \mu(\bar{v}_i\Delta\bar{v}_i + \overline{v'_i\Delta v'_i}) + \rho(\bar{\vec{v}}, \vec{b}). \end{aligned}$$

Вспоминая определение k_A и вводя определение *плотности энергии турбулентности* $k_T \equiv \frac{1}{2}\rho\overline{v'_i v'_i}$, перепишем полученное уравнение в виде

$$\begin{aligned} \partial_t(k_A + k_T) + (\nabla, (k_A + k_T)\vec{v}) + \rho\nabla_k \left(\overline{v'_i v'_i} \bar{v}_i + \frac{1}{2}\overline{v'_i v'_i v'_k} \right) = \\ = -(\bar{\vec{v}}, \nabla\bar{p}) - \overline{v'_i\nabla_i p'} + \mu(\bar{\vec{v}}, \Delta\bar{\vec{v}}) + \mu(\overline{v'_i\Delta v'_i}) + \rho(\bar{\vec{v}}, \vec{b}). \quad (14.14) \end{aligned}$$

Мы получили уравнение, описывающее баланс суммы плотностей кинетической и турбулентной энергий. Вычитая из него уравнение баланса плотности кинетической энергии среднего движения, найдем *уравнение баланса плотности турбулентной энергии*:

$$\begin{aligned} \partial_t k_T + (\nabla, k_T\vec{v}) = -\overline{v'_i\nabla_i p'} + \mu\overline{v'_i\Delta v'_i} - \\ - \frac{1}{2}\rho\nabla_k \overline{v'_i v'_i v'_k} - \rho\overline{v'_i v'_k} \nabla_k \bar{v}_i. \quad (14.15) \end{aligned}$$

Другая, эквивалентная, форма записи этого уравнения такова

$$\begin{aligned} \partial_t k_T + (\nabla, k_T\vec{v}) = -\overline{(\vec{v}', \nabla p')} + \mu\overline{(\vec{v}', \Delta\vec{v}')} - \\ - \frac{1}{2}\rho(\nabla, \overline{v'_i v'_i \vec{v}'}) - R : \nabla\bar{\vec{v}}. \quad (14.16) \end{aligned}$$

- 3) Рассмотрим, наконец, уравнение баланса внутренней энергии (11.25), куда также подставим скорость и давление в виде суммы средних и пульсационных составляющих, и осредним. С учетом несжимаемости среды, получим:

$$\overline{\partial_t \varepsilon + (\nabla, \varepsilon \bar{\vec{v}} + \vec{v}')}) - \mu \overline{\frac{1}{2} (\partial_{x_k} (\bar{v}_j + v'_j) + \partial_{x_j} (\bar{v}_k + v'_k))^2} = 0 \quad (14.17)$$

В виду громоздкости преобразуем последнее слагаемое отдельно

$$\begin{aligned} & \overline{(\partial_{x_k} (\bar{v}_j + v'_j) + \partial_{x_j} (\bar{v}_k + v'_k))^2} = \\ & = \overline{((\partial_{x_k} (\bar{v}_j + v'_j))^2 + (\partial_{x_j} (\bar{v}_k + v'_k))^2)} + \\ & \quad + 2 \overline{\partial_{x_k} (\bar{v}_j + v'_j) \partial_{x_j} (\bar{v}_k + v'_k)} = \\ & = 2 \overline{((\partial_{x_k} \bar{v}_j)^2 + (\partial_{x_k} v'_j)^2)} + 2 \overline{(\partial_{x_k} \bar{v}_j \partial_{x_j} \bar{v}_k + \partial_{x_k} v'_j \partial_{x_j} v'_k)} = \\ & = (\partial_{x_k} \bar{v}_j + \partial_{x_j} \bar{v}_k)^2 + (\partial_{x_k} v'_j + \partial_{x_j} v'_k)^2. \end{aligned}$$

Теперь, подставляя полученный результат в (14.17), найдем

$$\partial_t \varepsilon + (\nabla, \varepsilon \bar{\vec{v}}) = \frac{\mu}{2} (\partial_{x_k} \bar{v}_j + \partial_{x_j} \bar{v}_k)^2 + \frac{\mu}{2} (\partial_{x_k} v'_j + \partial_{x_j} v'_k)^2.$$

- 4) Выпишем (слегка модифицировав) все полученные уравнения, чтобы легче было обозреть результат:

$$\begin{aligned} \partial_t k_A + \nabla_j \left(\underbrace{(k_A + \bar{p} + \rho \varphi) \bar{v}_j}_{(1)} + \underbrace{\rho (\bar{v}_i \overline{v'_j v'_i})}_{(2)} - \underbrace{\mu (\partial_{x_i} \bar{v}_j + \partial_{x_j} \bar{v}_i) \bar{v}_i}_{(3)} \right) = \\ = -\frac{\mu}{2} (\partial_{x_k} \bar{v}_j + \partial_{x_j} \bar{v}_k)^2 + \rho \overline{v'_i v'_k} \nabla_k \bar{v}_i = \\ = -\frac{\mu}{2} (\partial_{x_k} \bar{v}_j + \partial_{x_j} \bar{v}_k)^2 - \frac{\mu_T}{2} (\partial_{x_k} \bar{v}_j + \partial_{x_j} \bar{v}_k)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t k_T + \nabla_j \left(\underbrace{k_T \bar{v}_j}_{(1)} + \underbrace{p' v'_j + \rho \frac{1}{2} v'_i v'_i v'_j}_{(2)} - \underbrace{\mu (\partial_{x_i} v'_j + \partial_{x_j} v'_i) v'_i}_{(3)} \right) = \\
= -\frac{\mu}{2} (\partial_{x_k} v'_j + \partial_{x_j} v'_k)^2 - \overline{\rho v'_i v'_k} \nabla_k \bar{v}_i = \\
= -\frac{\mu}{2} (\partial_{x_k} v'_j + \partial_{x_j} v'_k)^2 + \frac{\mu_T}{2} (\partial_{x_k} \bar{v}_j + \partial_{x_j} \bar{v}_k)^2, \\
\partial_t \varepsilon + \nabla_j (\underbrace{\varepsilon \bar{v}_j}_{(1)}) = \frac{\mu_T}{2} (\partial_{x_k} \bar{v}_j + \partial_{x_j} \bar{v}_k)^2 + \frac{\mu}{2} (\partial_{x_k} v'_j + \partial_{x_j} v'_k)^2.
\end{aligned}$$

В левых частях уравнений стоят частные производные по времени и дивергенции плотностей потоков соответствующих компонент энергии, которые включают перенос осредненным течением — (1), турбулентными пульсациями — (2) и силами вязкости — (3). В правых частях стоят источники/стоки компонент полной энергии. Поскольку полная энергия сохраняется, правые части, по существу, описывают обмен между компонентами полной энергии k_A , k_T и ε . Так, мы видим, что внутренняя энергия «подпитывается» за счет диссипации как кинетической, так и турбулентной энергии. В свою очередь, турбулентная энергия питается за счет перехода в нее части кинетической энергии среднего движения.

15. Турбулентный пограничный слой

15.1. Введение

Чрезвычайная запутанность траекторий и представление о турбулентном течении как о движении со значительной завихренностью наводит на мысль считать его суперпозицией вихрей различных размеров, интенсивности и ориентации. Наличие сдвига средней скорости приводит к вытягиванию некоторых вихрей и к усилению завихренности за счет энергии основного течения.

Самые крупные вихри имеют масштаб основного потока. Таким масштабом может быть диаметр сечения трубы, струи, следа за препятствием, толщина пограничного слоя и т.п. Эти вихри являются главными потребителями энергии основного потока и, в свою очередь, питают энергией вихри меньшего размера. И так — вплоть до масштабов, на которых энергия рассеивается вязкой диссипацией, иными словами, переходит в тепло.

Турбулентные течения, питающиеся энергией основного потока, можно разделить на две группы: *свободные* турбулентные течения и *пристеночные* турбулентные течения. В первую группу входят турбулентные струи и следы, т.е. турбулизированные области, не имеющие твердых границ. Ко второй группе относятся турбулентные течения в трубах, каналах, пограничных слоях. Здесь мы рассмотрим свойства течения в *турбулентном пограничном слое* около стенки, параллельной средней скорости течения.

Структура пристеночной турбулентности непосредственно определяется близостью твердой границы. Турбулентный пограничный слой — сложное образование, в котором, как правило, выделяют три области:

- 1) примыкающий к стенке *вязкий подслой*, в котором число Re резко уменьшается и падает до нуля на стенке. Доля напряжений Рейнольдса в касательном напряжении сокращается, и с приближением к стенке оно становится вязким;
- 2) *переходная область*;
- 3) анизотропный *полностью турбулентный поток*, размеры вихрей в котором сравнимы с расстоянием до стенки.

15.2. Общий вид профиля средней скорости

Рассмотрим случай стационарного плоскопараллельного потока в области $z > 0$ без градиента давления и в отсутствие силы тяжести. Тогда 1-е уравнение Рейнольдса примет вид

$$\nu \partial_{zz} \bar{u} - \partial_z \overline{u'w'} = 0, \quad (15.1)$$

откуда касательное напряжение

$$\tau(z) = \rho \nu \partial_z \bar{u} - \rho \overline{u'w'} = \tau_0 = \text{const}, \quad (15.2)$$

где τ_0 — напряжение трения на стенке $z = 0$. Поскольку величина $\overline{u'w'}$ неизвестна, однозначно определить скорость $\bar{u}(z)$ нельзя. Можно, однако, применить следующие соображения, которые часто называют *соображениями размерности*.

Осредненная скорость $\bar{u}(z)$ на расстоянии z от стенки определяется лишь величинами τ_0 , z , ρ и ν (см. (15.2)) или

$$\bar{u} = \bar{u}(\tau_0, z, \rho, \nu). \quad (15.3)$$

Число этих параметров можно уменьшить, если заметить, что размерность массы входит лишь в τ_0 и ρ , и, значит, в (15.3) эти параметры должны входить в виде отношения

$$\bar{u} = \bar{u}(z, \nu, \frac{\tau_0}{\rho}). \quad (15.4)$$

Величина $v_* \equiv \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ с размерностью скорости называется *скоростью трения* и является естественным масштабом скоростей в пристеночном течении. Следовательно, можно записать

$$\bar{u} = v_* f(z, \nu, v_*). \quad (15.5)$$

В силу того что отношение $\frac{\bar{u}}{v_*}$ безразмерно, функция f в (15.5) также должна быть безразмерной функцией своих аргументов. Но из z , ν и v_* можно составить лишь одну безразмерную комбинацию $\zeta \equiv \frac{zv_*}{\nu}$, так что общий вид профиля скорости записывается теперь в виде

$$\frac{\bar{u}}{v_*} = f(\zeta), \quad \zeta \equiv \frac{zv_*}{\nu}, \quad (15.6)$$

где $f(\zeta)$ — некоторая универсальная функция, а сама зависимость (15.6) носит название *универсального закона пристеночной турбулентности Прандтля*.

Закон Прандтля получен из условия, что стенка гладкая $z = 0$. Как же должна выглядеть реальная стенка, чтобы ее можно было считать гладкой? Из (15.6) следует, что масштабом длины в турбулентном пограничном слое служит отношение $z_* = \frac{\nu}{v_*}$. По-видимому, если средняя высота неровностей h на стенке меньше z_* , стенку можно считать гладкой.

Эти соображения подтверждаются наблюдениями, согласно которым при $h \leq 4z_*$ профиль скорости не зависит от h . Элементы шероховатости оказываются полностью погруженными в так называемый вязкий подслой (т.е. слой жидкости, где играют роль силы вязкости), а стенка в этом случае называется *динамически гладкой*. Если $h > 60z_*$, вязкий подслой разрушается и течение у самой стенки состоит из вихрей, возникающих при обтекании неровностей. Молекулярная вязкость перестает влиять на течение, а такая стенка называется *динамически вполне шероховатой*. Случай $h \in (4z_*, 60z_*)$ — промежуточный; стенка же называется *динамически слегка шероховатой*.

15.3. Течение около гладкой стенки

Рассмотрим снова случай динамически гладкой стенки $z = 0$, для которой справедлив закон (15.6). Вид универсальной функции f можно определить в двух предельных случаях: для больших и малых значений ζ .

1) Малые значения ζ .

Поскольку на поверхности стенки $\overline{u'w'} = 0$, ясно, что в случае малых ζ течение определяется вязкими напряжениями, а напряжениями Рейнольдса можно пренебречь. Тогда из (15.1) имеем

$$\partial_z \bar{u} = \frac{v_*^2}{\nu} = \text{const}, \quad (15.7)$$

и, интегрируя по z с учетом $\bar{u}|_{z=0} = 0$, найдем

$$\bar{u}(z) = \frac{v_*^2 z}{\nu} \Rightarrow \frac{\bar{u}}{v_*} = \zeta. \quad (15.8)$$

Слой жидкости, в котором $\nu |\partial_z \bar{u}| \gg |\overline{u'w'}|$, называется **вязким подслоем**.

2) Большие ζ .

Вдали от твердых стенок турбулентные напряжения во много раз превосходят вязкие напряжения и при больших значениях z можно считать, что

$$\tau_0 = -\rho \overline{u'w'}. \quad (15.9)$$

Поскольку влиянием вязкости мы пренебрегаем, вертикальная компонента градиента скорости не должна зависеть от ν , и определяется лишь двумя оставшимися параметрами v_* и z . Из этих параметров можно составить единственную комбинацию с размерностью градиента скорости $\frac{v_*}{z}$. Следовательно, при достаточно больших z градиент скорости должен быть пропорционален отношению $\frac{v_*}{z}$:

$$\partial_z \bar{u} \sim \frac{v_*}{z}. \quad (15.10)$$

Коэффициент пропорциональности традиционно записывается в виде $\frac{1}{\kappa}$, где κ — так называемая постоянная Кармана. Интегрируя (15.10) по z , получим

$$\bar{u} = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{\zeta}{\zeta_0}. \quad (15.11)$$

Численные значения параметров κ и ζ_0 должны определяться по данным экспериментов. По этим данным для $\zeta > 30$ распределение средней скорости с очень хорошей точностью описывается законом (15.11). При этом наилучшее совпадение с опытными данными достигалось для значений $\kappa = 0.4$ и $\zeta_0 = 0.11$. Слой жидкости, в котором справедлива формула (15.11), называется **логарифмическим пограничным слоем**. Он образуется на твердых стенках при течениях в трубах, каналах, на пластинах, и во всех случаях формула (15.11) оказывается справедливой (см. рис.24).

При $\zeta < 5$ справедлива зависимость (15.8). Область значений $\zeta \in (5., 30.)$ — промежуточная зона, где члены $\rho \nu \partial_z \bar{u}$ и $-\rho \overline{u'w'}$ имеют одинаковый порядок. Если пренебречь рассмотрением этой зоны (а это,

видимо, не приведет к большим ошибкам), то можно считать, что вслед за вязким подслоем идет логарифмический пограничный слой. В этом случае вязкий подслой, где профиль скорости описывается формулой (15.8), простирается до значений $\zeta = 11.1$, а выше следует логарифмический пограничный слой, где справедлива зависимость (15.11).

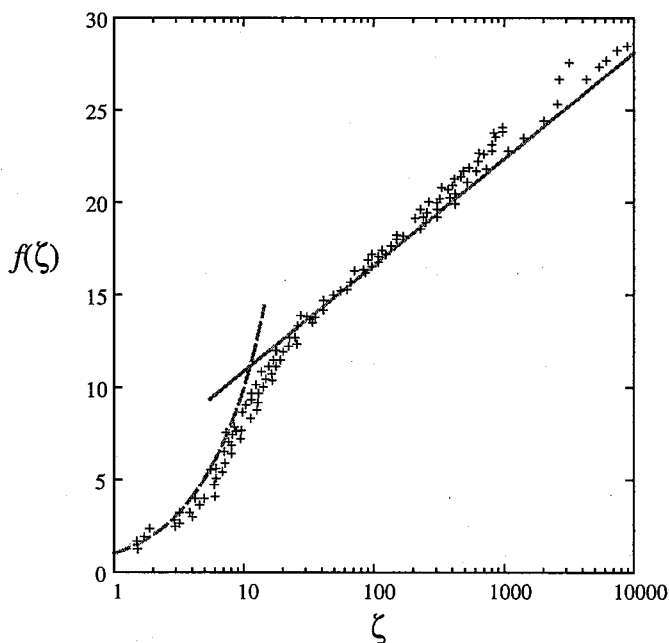


Рис. 24. Структура пограничного слоя по [8]: зависимость универсальной функции $f(\zeta)$ от безразмерного параметра ζ . Маркеры — экспериментальные данные, сплошная линия — теоретическая кривая (15.11), пунктир — зависимость (15.8).

В предыдущей главе мы ввели понятие о турбулентной вязкости и связали компоненты тензора напряжений Рейнольдса с компонентами градиента средней скорости (см. формулу (14.10)). В соответствии с

этой формулой

$$\overline{\rho u' w'} = -\mu_T \partial_z \bar{u}$$

и

$$\tau_0 = (\mu + \mu_T) \partial_z \bar{u}. \quad (15.12)$$

Тогда вязкий подслой можно определить как область, в которой допустимо считать $\mu_T \equiv 0$. Соответственно, логарифмический пограничный слой оказывается областью, где $\mu \ll \mu_T$. Выражение для коэффициента турбулентной вязкости в этом случае получим, сравнивая (15.12) и (15.10), а именно:

$$\mu_T = \kappa v_* z.$$

Таким образом, чем дальше от стенки и чем больше напряжение трения, тем интенсивнее перемешивание.

15.4. Влияние шероховатостей. Параметр шероховатости

Рассмотрим теперь случай шероховатой стенки, когда высота неровностей h сравнима или превосходит по величине масштаб $z_* = \frac{\nu}{v_*}$. С одной стороны, такие неровности, их высота, форма и расположение должны оказывать влияние на течение. С другой стороны, однако, кажется очевидным, что вдали от стенки влияние неровностей будет осредненным, интегральным. Поэтому тип зависимости (15.11), по-видимому, сохранится, т.е.

$$\frac{\bar{u}}{U} = \ln \frac{z}{z_0},$$

но значения параметров U и z_0 будут определяться характером шероховатости. Вместе с тем, поскольку масштаб скорости U задается компонентой плотности потока импульса τ_0 , очевидно, и здесь можно положить

$$U = v_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}.$$

Таким образом, для профиля средней скорости у шероховатой стенки имеем

$$\bar{u} = v_* \ln \frac{z}{z_0}. \quad (15.13)$$

Неизвестная величина z_0 существенно зависит от неровностей стенки и является тем параметром, с помощью которого мы описываем осредненное взаимодействие течения с элементами шероховатости. Она и называется *параметром шероховатости*. В соответствии с (15.13) получается, что $z = z_0$ является той высотой, на которой средняя скорость $\bar{u}(z_0)$ обращалась бы в нуль, если логарифмическая зависимость работала бы на любом расстоянии от стенки.

Часть III

Практические занятия

Занятия № 1 и № 2

ПОВТОРЕНИЕ НЕОБХОДИМОГО МАТЕРИАЛА ИЗ АЛГЕБРЫ И АНАЛИЗА.

1) Матрицы и действия с ними.

Когда существуют и чему в этом случае равны следующие объекты

а) $A_{(m \times k)} + B_{(l \times n)}$,

б) $A_{(m \times k)} B_{(l \times n)}$,

в) $\det(A)$.

г) Пусть u_i, v_i и a_{ij} — компоненты трехмерных векторов $\vec{u}, \vec{v}$ и матрицы $A_{3 \times 3}$, соответственно. Найти компоненты векторов $\vec{u} + \vec{v}$ и $A\vec{v}$.

д) Показать, что $AB \neq BA$.

Ответы:

а) $m = l, k = n$,

б) $k = l$,

в) A — квадратная матрица,

г) $(\vec{u} + \vec{v})_i = u_i + v_i$ и $(A\vec{v})_i = a_{i1}v_1 + a_{i2}v_2 + a_{i3}v_3$.

д) $(AB)_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$,

$(BA)_{ij} = \sum_k B_{ik} A_{kj} = \sum_k A_{kj} B_{ik} \neq \sum_k A_{ik} B_{kj}$.

2) Векторное пространство, базис, компоненты вектора. Использование этих конструкций в физике.

3) Скалярное произведение, модуль вектора, расстояние (метрика).

а) Пусть в некоторой системе координат $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Вычислить компоненты вектора $\vec{v} = d_i \mathbf{x}$ относительно координатного базиса $\{\vec{e}_j\}$ и его длину $|\vec{v}|^2 = (\vec{v}, \vec{v})$.

б) Рассмотреть те же величины в случае декартова базиса.

Решения:

Скалярное произведение — это числовая функция двух аргументов $(\cdot, \cdot)$. Любой паре векторов оно ставит в соответствие число. При этом скалярное произведение должно удовлетворять следующим условиям. Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — векторы, а α, β — числа, тогда:

- $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ — симметрия,
- $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \vec{c}) = \alpha(\vec{a}, \vec{c}) + \beta(\vec{b}, \vec{c})$ — линейность,
- $(\vec{a}, \vec{a}) \geq 0, \quad (\vec{a}, \vec{a}) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$.

Пользуясь этими свойствами скалярного произведения можно записать в терминах компонент сомножителей и скалярных произведений базисных векторов (компонент метрического тензора)

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \left(\sum_i a_i \vec{e}_i, \sum_j b_j \vec{e}_j \right) = \sum_{i,j} a_i b_j (\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \sum_{i,j} a_i b_j g_{ij}.$$

$$\text{а) } \vec{v} = \sum_{j=1}^3 (d_j x_j) \vec{e}_j = \sum_{j=1}^3 v_j \vec{e}_j;$$

$$(\vec{v}, \vec{v}) = \left(\sum_{j=1}^3 v_j \vec{e}_j, \sum_{k=1}^3 v_k \vec{e}_k \right) = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 v_j v_k (\vec{e}_j, \vec{e}_k) = \sum_{j,k=1}^3 v_j v_k g_{jk}.$$

- б) Под декартовым базисом понимается тройка ортогональных векторов совпадающих по направлению с координатными прямыми. Если базис к тому же ортонормирован, скалярные произведения базисных векторов суть: $g_{jk} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \Rightarrow (\vec{v}, \vec{v}) = \sum_{j=1}^3 v_j^2$.

4) Векторы в трехмерном пространстве: векторное произведение; двойное векторное произведение.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — трехмерные векторы, и a_i, b_i, c_i их компоненты в некотором декартовом базисе $\{\vec{e}_i\}$. Тогда векторное произведение вычисляется разложением по первой строке определителя

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

а двойное векторное произведение может быть вычислено по формуле $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \times \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$.

- 5) Векторное поле, координатные кривые, координатные базисы (зачем?). Сколько нужно выбрать базисов для описания векторного поля?

Ответ: Несчетное множество, поскольку в каждой точке среды надо выбрать свой базис, а среда — это по определению несчетное множество точек.

- 6) Производная, производная по направлению, частная производная, производная сложной функции.

Дифференцирование сложной функции: $dx f(x, y(x)) = \partial_x f + \partial_y f dx y$, и т.п.

- 7) Разложение функций одной и многих переменных в ряд Тейлора:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x dx f|_{x_0} + \frac{1}{2!} \Delta^2 x d_{xx} f|_{x_0} + \frac{1}{3!} \Delta^3 x d_{xxx} f|_{x_0} + o(\Delta^3 x),$$

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + (\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)_{(x_0, y_0)} f + \frac{1}{2!} (\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)_{(x_0, y_0)}^2 f + \frac{1}{3!} (\Delta x \partial_x + \Delta y \partial_y)_{(x_0, y_0)}^3 f + o(\Delta^3 x, \Delta^3 y).$$

- 8) Теорема Гаусса-Остроградского. Нормаль к поверхности. Ориентируемые поверхности.

Занятия № 3 и № 4

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ, ТРАЕКТОРИИ И МИРОВЫЕ ЛИНИИ.

Найти траектории движения и мировые линии точек среды, решив задачу Коши (Зельдович и Мышкис [4]):

$$d_t \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \vec{v}, \quad \mathbf{x}|_{t=0} = \mathbf{X}.$$

- 1) Одномерное пространство мест.

В этом случае каждая точка пространства мест имеет одну характеризующую ее координату x , а вектор скорости — одну компоненту v . Траектории описываются одним уравнением $d_t x = v$

относительно неизвестной x с начальным условием $x|_{t=0} = X$.

Во всех заданиях сделать следующее:

- найти $x(X, t)$ и $\vec{v}(X, t)$, либо $\vec{v}(x, t)$,
- вычислить матрицу Якоби и якобиан $J = |\partial_x x|$ преобразования лагранжевых координат X в эйлеровы x ,
- построить векторное поле скорости и траектории движения точек среды.
- построить векторное поле касательных к мировым линиям векторов и мировые линии точек среды.

Дано :

Ответ :

- а) $v(x, t) = t$, $x = X + \frac{1}{2}t^2$, $J = 1$,
 б) $v(x, t) = x$, $x = Xe^t$, $J = e^t$, $v = Xe^t$,
 в) $v(x, t) = xt$, $x = Xe^{\frac{1}{2}t^2}$, $J = e^{\frac{1}{2}t^2}$, $v = Xte^{\frac{1}{2}t^2}$,
 г) $v(X, t) = X + t$, $X = \frac{x - \frac{1}{2}t^2}{t+1}$, $J = t + 1$, $v = \frac{x + \frac{1}{2}t^2 + t}{t+1}$.

Решения:

Задания а)–в) выполняются одинаково по следующей схеме (здесь рассматриваем задание а):

- Подставляя в правую часть значения скорости, решаем задачу Коши

$$d_t x = t, \quad x|_{t=0} = X.$$

Интегрируя, получаем

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t t dt \Rightarrow x|_X^x = \frac{1}{2}t^2|_0^t \Rightarrow x = X + \frac{1}{2}t^2.$$

- матрица Якоби состоит из одного элемента $\partial_x x = 1$, откуда $J = 1$.
- этапы построения векторного поля скорости, траекторий движения точек среды, а также векторного поля касательных к мировым линиям векторов и мировых линий точек среды показаны на рис.25.

В задании г) интегрирование задачи Коши дает

$$\int_{x(0)}^{x(t)} dx = \int_0^t (X + t) dt \Rightarrow x|_X^x = Xt + \frac{1}{2}t^2|_0^t \Rightarrow x = X(t+1) + \frac{1}{2}t^2.$$

Скорость v , как функцию места и времени, найдем, подставив вместо лагранжевой переменной ее выражение через эйлерову переменную:

$$v = X + t = \frac{x - \frac{1}{2}t^2}{t+1} + t = \frac{x + \frac{1}{2}t^2 + t}{t+1}.$$

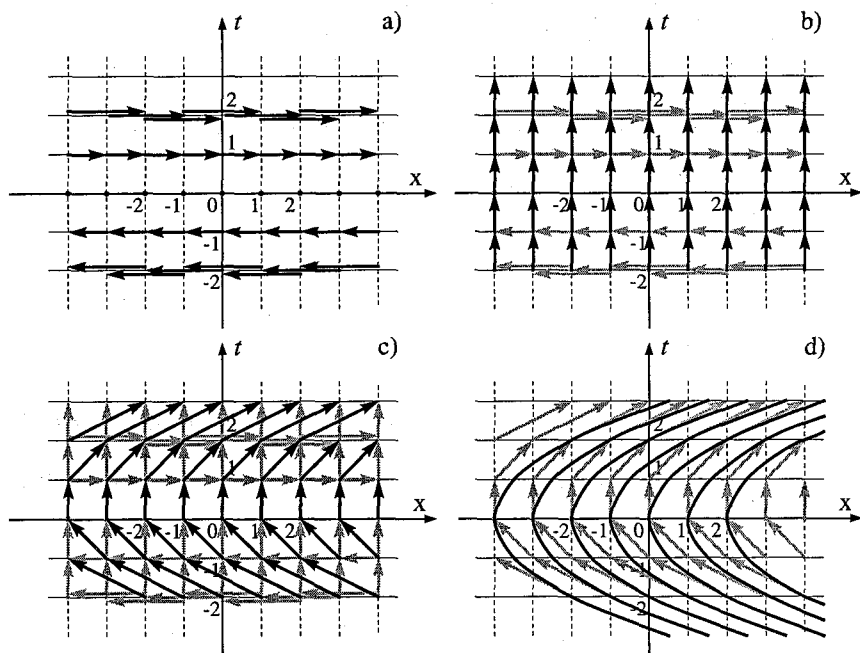


Рис. 25. Этапы построения: а) траектории движения точек среды (сплошные линии) и векторное поле скорости, т.е. касательных к траекториям векторов $v = d_t x$; б) компоненты касательных к мировым линиям векторов $\vec{u} = (d_t t, d_t x) = (1, v)$; в) касательное к мировым линиям векторное поле; д) мировые линии точек среды.

Остальное выполняется также, как в заданиях а)-в).

2) **Двумерное пространство мест.** Во всех заданиях сделать следующее:

- найти $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ и $\vec{v}(\mathbf{X}, t)$,
- вычислить матрицу Якоби и якобиан $J = |\partial x_j / \partial X_i|$ преобразования лагранжевых координат $\mathbf{X}$ в эйлеровы $\mathbf{x}$,
- построить векторное поле скорости и траектории движения точек среды.

Дано :

Ответ :

- а) $\vec{v}(\mathbf{x}, t) = x_1 \vec{e}_1$, $\mathbf{x} = (X_1 + t, X_2)$, $J = 1$,
 б) $\vec{v}(\mathbf{x}, t) = \alpha x_1 \vec{e}_1 + \beta x_2 \vec{e}_2$, $\mathbf{x} = (X_1 e^{\alpha t}, X_2 e^{\beta t})$, $J = e^{(\alpha + \beta)t}$,
 в) $\vec{v}(\mathbf{x}, t) = -x_2 \vec{e}_1 + x_1 \vec{e}_2$, $z = Z e^{it}$, $z \equiv (x_1 + ix_2)$, $J = 1$.

Решения:

В заданиях а) и б) уравнения, описывающие траектории, эквивалентны системам независимых уравнений, каждое из которых решается независимо от другого, как в случае одномерного пространства мест. Например, в задании а) имеем

$$\begin{cases} d_t x_1 = x_1, \\ d_t x_2 = 0. \end{cases}$$

Уравнение в задании в) эквивалентно системе связанных друг с другом уравнений

$$\begin{cases} d_t x_1 = -x_2, \\ d_t x_2 = x_1, \end{cases}$$

которая легко решается с переходом в комплексную плоскость. Действительно, умножим второе уравнение на i и сложим его с первым уравнением. Введя далее обозначения $z \equiv (x_1 + ix_2)$ и $Z \equiv (X_1 + iX_2)$, получим одно уравнение относительно комплексной переменной z : $d_t z = iz$ с начальным условием $z|_{t=0} = Z$. Решая его, найдем $z = Z e^{it}$. Запишем далее $e^{it} = \cos t + i \sin t$ и получим

$$z = (X_1 + iX_2)(\cos t + i \sin t) = (X_1 \cos t - X_2 \sin t) + i(X_1 \sin t + X_2 \cos t).$$

Откуда $x_1 = (X_1 \cos t - X_2 \sin t)$, $x_2 = (X_1 \sin t + X_2 \cos t)$. Матрица Якоби и ее определитель таковы:

$$J = \det \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} = 1.$$

Занятия № 5 и № 6

СВОЙСТВА ТЕНЗОРОВ ВТОРОГО РАНГА.

- 1) Показать, что верны следующие ниже соотношения.

Указание:

Во всех случаях проблема заключается в том, что операции транспонирования, свертки, вычисления обратного тензора (матрицы), и проч., определенные, скажем, для тензора A или B , не определены для тензоров $(A + B)$, (A^T) , и т.п. Требуется выразить новые операции, используя уже имеющиеся определения. Например, записать транспонирование тензора $(A + B)$ в терминах транспонированных тензоров A и B , т.е. A^T и B^T и т.д.

Транспонирование.

а) $(A + B)^T = A^T + B^T$,

б) $(AB)^T = B^T A^T$,

в) $(A^T)^T = A$,

Решения:

$$\begin{aligned}
 \text{а) } (A+B)_{jk}^T &= \text{меняем порядок индексов (убираем транспонирование)} \\
 &= (A+B)_{kj} = \text{складываем, используя определение} \\
 &= A_{kj} + B_{kj} = \text{восстанавливаем порядок индексов} \\
 &= A_{jk}^T + B_{jk}^T,
 \end{aligned}$$

б) $(AB)_{jk}^T = (AB)_{kj} = A_{kn} B_{nj} =$

получили элемент с номером kj , а нам нужен элемент с номером jk , поэтому сомножители меняем местами и транспонируем, чтобы матрицы перемножались в соответствии с принятой договоренностью (иначе нельзя записать все в безындexсной форме)

$$= B_{jn}^T A_{nk}^T = (B^T A^T)_{jk}.$$

2) $(A^T)_{jk}^T = A_{kj}^T = A_{jk}$.

Обратный тензор.

Пусть A и B — обратимые тензоры, тогда

$$а) (A^{-1})^{-1} = A.$$

$$б) (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

$$в) (aA)^{-1} = a^{-1}A^{-1}, a \neq 0.$$

$$г) (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Решения:

$$а) (A^{-1})^{-1} (A^{-1}) = I \Rightarrow \text{умножаем справа на } A$$

$$\Rightarrow (A^{-1})^{-1} A^{-1} A = A \Rightarrow (A^{-1})^{-1} = A.$$

$$б) (AB)^{-1} AB = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB)^{-1} A = B^{-1} \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}.$$

$$в) (aA)^{-1} (aA) = I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (aA)^{-1} a = A^{-1} \Rightarrow (aA)^{-1} = a^{-1} A^{-1}.$$

$$г) I = (A^T)^{-1} A^T \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} l_{ik} &= (A^T)^{-1}_{ij} A^T_{jk} = \text{транспонируем сомножители} \\ &= \left((A^T)^{-1} \right)^T_{ji} A_{kj} = \text{меняем порядок сомножителей} \\ &= A_{kj} \left((A^T)^{-1} \right)^T_{ji}. \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом } I = A \left((A^T)^{-1} \right)^T.$$

Умножив далее это выражение слева на A^{-1} , получим

$$A^{-1} = \left((A^T)^{-1} \right)^T.$$

Транспонируя результат, окончательно найдем

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

3) Вычислить скалярные произведения тензоров

$$A : D, \quad A : W, \quad W : D,$$

где A — тензор общего вида, а $D = D^T$ и $W = -W^T$ — симметричный и антисимметричный тензоры, соответственно. Показать, что

- а) $A : D = \frac{1}{2}(A + A^T) : D$, т.е. в скалярном произведении тензора общего вида A с симметричным тензором участвует только симметричная часть тензора A .
- б) $A : W = \frac{1}{2}(A - A^T) : W$, т.е. в скалярном произведении тензора общего вида A с антисимметричным тензором участвует только антисимметричная часть тензора A .
- в) $W : D = 0$, скалярное произведение произвольного симметричного тензора с произвольным антисимметричным тензором равно нулю.

Решения:

- а) Для любых двух тензоров A и B верно равенство $A : B = \text{tr}(AB)$. Пусть a_{ij} , $d_{ij} = d_{ji}$ и $w_{ij} = -w_{ji}$ суть компоненты тензоров A , D и W . Тогда для тензоров A и D в силу симметрии D имеем

$$(AD)_{ij} = a_{ik}d_{kj} = a_{ik}d_{jk}, \quad \text{tr}(AD) = a_{ik}d_{ki} = a_{ik}d_{ik},$$

или, учитывая обе возможности,

$$\text{tr}(AD) = \frac{1}{2}(a_{ik}d_{ki} + a_{ik}d_{ik}) = \frac{1}{2}(a_{ik}d_{ki} + a_{ki}^T d_{ik}) = \frac{1}{2}(A : D + A^T : D).$$

Отсюда

$$A : D = \text{tr}(AD) = \frac{1}{2}(A + A^T) : D.$$

Справедливость остальных равенств доказывается аналогично.

4) Ортогональные тензоры.

- а) Показать, что тензоры R_1 , R_2 и R_3 , которым в декартовом базисе соответствуют следующие (3×3) матрицы

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix},$$

ортогональны, т.е. не меняют длину вектора и обратная матрица равна транспонированной. Найти геометрическую интерпретацию действию этих тензоров.

- б) Показать, что любую ортогональную матрицу (2×2) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \cos \phi & \pm \sin \phi \\ \sin \phi & \mp \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Решения:

- а) Пусть некоторый вектор $\vec{a}$ в том же базисе имеет компоненты (a_1, a_2, a_3) .

Найти $|\vec{a}|^2 = (\vec{a}, \vec{a})$ и $|R_i \vec{a}|^2 = (R_i \vec{a}, R_i \vec{a})$ для $i = 1, 2, 3$. Показать, что $|\vec{a}|^2 = |R_i \vec{a}|^2$

Вычислить свертки $R_i R_i^T$ для $i = 1, 2, 3$ и показать, что они равны $I_{3 \times 3}$.

- б) Пусть в некотором декартовом базисе $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix}$. Найдем r_{ij} такие, при которых $|\vec{a}| = |R\vec{a}|$ или $|\vec{a}|^2 = |R\vec{a}|^2$. В компонентной форме последнее равенство имеет вид

$$a_1^2 + a_2^2 = (r_{11}^2 + r_{21}^2)a_1^2 + (r_{12}^2 + r_{22}^2)a_2^2 + 2(r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22})a_1a_2,$$

откуда получаем, что компоненты r_{ij} удовлетворяют системе уравнений

$$r_{11}^2 + r_{21}^2 = 1, \quad (*)1$$

$$r_{12}^2 + r_{22}^2 = 1, \quad (*)2$$

$$r_{11}r_{12} + r_{21}r_{22} = 0. \quad (*)3$$

Из уравнений (*3) и (*1) имеем

$$\begin{aligned} r_{11}^2 &\stackrel{(*3)}{=} \left(\frac{r_{21}r_{22}}{r_{12}} \right)^2 \stackrel{(*1)}{=} 1 - r_{21}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r_{12}^2 = r_{21}^2 (r_{22}^2 + r_{12}^2) \stackrel{(*2)}{\Rightarrow} r_{12}^2 = r_{21}^2, \end{aligned}$$

а уравнения (*3) и (*2) дают

$$\begin{aligned} r_{12} &\stackrel{(*3)}{=} \left(\frac{r_{21}r_{22}}{r_{11}} \right)^2 \stackrel{(*2)}{=} 1 - r_{22}^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r_{11}^2 = r_{22}^2 (r_{21}^2 + r_{11}^2) \stackrel{(*1)}{\Rightarrow} r_{11}^2 = r_{22}^2. \end{aligned}$$

Наконец, из уравнения (*3) следует, что отношения $\frac{r_{12}}{r_{21}}$ и $\frac{r_{22}}{r_{11}}$ должны быть разных знаков. Отсюда получаем $r_{12} = \pm r_{21}$ и $r_{11} = \mp r_{22}$. Таким образом, диагональные элементы в тензоре R равны с точностью до знака. Пользуясь свойством $R^{-1} = R^T$, легко проверить ортогональность тензора R , вычисляя свертку RR^T . Должен получиться единичный тензор. Наконец, из (*1) и (*2) следует, что $|r_{ij}| \leq 1$. Это позволяет интерпретировать компоненты тензора R , как тригонометрические функции $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, а их аргумент φ как угол между векторами $\vec{a}$ и $R\vec{a}$. Окончательно имеем

$$R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \pm\sin\varphi & \mp\cos\varphi \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \pm\sin\varphi \\ \sin\varphi & \mp\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

- 5) **Определить завихренность течения.** Формализовать задачу. Выбрать систему координат и векторы координатного базиса так, чтобы задача приобрела наиболее простой вид (использовать при-
сущие задаче направления и симметрии):

- а) *плоскопараллельное течение* со сдвигом скорости вдоль плоской поверхности. Рассмотреть линейный, квадратичный и логарифмический сдвиги, зависящие от расстояния до пластины.
- б) *элементарный вихрь*: вращение среды вокруг некоторой оси с независимой от времени скоростью. Рассмотреть вращение с угловой скоростью независимой от расстояния до оси вращения; линейно возрастающей с расстоянием до оси и убывающей обратно пропорционально этому расстоянию.

Решения:

- а) Выберем декартову систему координат, как наиболее простую. Нулевую точку поместим на плоскости, а оси координат ориентуем так, чтобы направление одной из осей совпадало с направлением скорости потока. Тогда, в соответствующем координатном базисе две компоненты скорости будут равны нулю, например, v_1 и v_3 : $\vec{v} = (0, v_2, 0)$, а ненулевая компонента будет функцией лишь одной переменной $v_2 = v_2(x_3)$. Вычислим вектор вихря скорости:

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial_{x_1} & \partial_{x_2} & \partial_{x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{e}_1 (\partial_{x_2} v_3 - \partial_{x_3} v_2) + \vec{e}_2 (\partial_{x_1} v_3 - \partial_{x_3} v_1) + \vec{e}_3 (\partial_{x_1} v_2 - \partial_{x_2} v_3) = \\ &= -\partial_{x_3} v_2 \vec{e}_1.\end{aligned}$$

Теперь можно рассмотреть линейный, квадратичный и логарифмический сдвиги, т.е.

$$v_2 = \begin{cases} \alpha x_3, \\ \alpha x_3^2, \\ \alpha \ln(x_3 + 1), \end{cases} \quad \alpha = \text{const} \in \mathbb{R}^1;$$

- б) Выберем систему цилиндрических координат и приведем скорость потока к виду $\vec{v} = (v_r, rv_\phi, v_z) = (0, rv_\phi(r), 0)$. Далее вычислим $\vec{\omega}$ и рассмотрим зависимости вида

$$v_\phi = \begin{cases} \alpha, \\ \alpha r, \\ \frac{\alpha}{r}, \end{cases} \quad \alpha = \text{const} \in \mathbb{R}^1;$$

Занятия № 7 и № 8

РАБОТА С КОМПОНЕНТАМИ И ПРАВИЛОМ СУММИРОВАНИЯ.

- 1) **Вспомогательные выражения.** Пусть f — произвольный скаляр, а вектор $\vec{v}$ и оператор ∇ в координатном декартовом базисе суть $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\nabla = (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, \partial_{x_3})$.

- а) Вычислить:

$$- \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{v} = (\nabla, \nabla \times \vec{v}) = ?$$

$$- \operatorname{div} \operatorname{grad} f = (\nabla, \nabla f) = ?$$

$$- \operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \nabla \times \nabla f = ?$$

- б) Показать, что выполняется равенство $(\vec{v}, \nabla \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla |\vec{v}|^2 - \vec{v} \times \operatorname{rot} \vec{v}$. Записать в компонентах левую и правую части и показать, что после упрощения они равны.

2) Координатная форма уравнений.

- а) Уравнение неразрывности:

$$d_t \rho + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t \rho + \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0.$$

Показать, что обе формы записи уравнения вытекают одна из другой (записать их в компонентной форме, выбрав некоторый координатный базис и используя правило суммирования и формулу Эйлера).

- б) Записать уравнение Эйлера

$$\rho d_t \vec{v} = -\nabla p + \rho \vec{b},$$

в координатной форме, т.е. получить систему дифференциальных уравнений, описывающую эволюцию компонент вектора скорости.

- в) С помощью уравнения неразрывности записать левую часть уравнения Эйлера в, так называемой, *дивергентной форме*:

$$\rho d_t v_k = \partial_t (\rho v_k) + \operatorname{div} (\rho v_k \vec{v}).$$

- г) Баланс внутренней энергии.

– общий случай:

$$\begin{aligned} \rho d_t \varepsilon &= (\operatorname{div}(\mathbf{T} \vec{v}) - \vec{v} \operatorname{div} \mathbf{T}) + \operatorname{div} \vec{h} + \rho s \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \partial_t (\rho \varepsilon) + \operatorname{div} (\rho \varepsilon \vec{v}) &= \mathbf{T} : \mathbf{D} + \operatorname{div} \vec{h} + \rho s, \end{aligned}$$

– идеальная жидкость:

$$\begin{aligned} \rho d_t \varepsilon &= -p \operatorname{div} \vec{v} + \operatorname{div} \vec{h} + \rho s \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad d_t \varepsilon &= -p d_t V + V \operatorname{div} \vec{h} + s, \end{aligned}$$

$$\text{где } V = \frac{1}{\rho}.$$

Решения:

- а) Используя правило суммирования, запишем уравнение неразрывности в виде

$$0 = d_t \rho + \rho(\nabla, \vec{v}) = d_t \rho + \rho \partial_{x_i} v_i =$$

Далее, используя формулу Эйлера, перепишем полную производную по времени

$$\begin{aligned} &= d_t \rho + (\vec{v}, \nabla \rho) + \rho \partial_{x_i} v_i = \\ \text{или} &= \partial_t \rho + v_i \partial_{x_i} \rho + \rho \partial_{x_i} v_i = \end{aligned}$$

Два последних слагаемых суть производная плотности потока массы

$$\begin{aligned} &= \partial_t \rho + \partial_{x_i} (\rho v_i) = \\ \text{или} &= \partial_t \rho + (\nabla, \rho \vec{v}). \end{aligned}$$

- б) Считая, что массовые силы представлены только силой притяжения Земли, выберем декартову систему координат так, чтобы вектор $\vec{b}$ имел лишь одну отличную от нуля компоненту (например, третью; для ее обозначения стандартно используется $\pm g$). С помощью символа Кронекера запишем удельную плотность массовых сил в виде $\vec{b} = \pm g \delta_{k3} \vec{e}_k$.

Рассмотрим дифференциальный оператор $\nabla \equiv \vec{e}_i \partial_{x_i}$ и вычислим ∇p . Используя далее формулу Эйлера, получим компонентную форму уравнения:

$$(\rho \partial_t v_k) \vec{e}_k + (\rho v_i \partial_{x_i} v_k) \vec{e}_k = (-\partial_{x_k} p) \vec{e}_k + (\pm \rho g \delta_{k3}) \vec{e}_k,$$

откуда найдем искомую систему уравнений

$$\rho \partial_t v_k + \rho v_i \partial_{x_i} v_k = -\partial_{x_k} p \pm \rho g \delta_{k3}.$$

- в) Сложим левую часть уравнения Эйлера для k -ой компоненты с уравнением неразрывности, умноженным на k -ую компоненту скорости

$$\begin{aligned} \rho \partial_t v_k &= \rho \partial_t v_k + \rho v_i \partial_{x_i} v_k + \\ &\quad + v_k (\partial_t \rho + \partial_{x_i} (\rho v_i)) = \\ \text{раскрывая скобки, получим} &= \partial_t \rho v_k + \partial_{x_i} \rho v_k v_i = \\ &= \partial_t \rho v_k + (\nabla, \rho v_k \vec{v}). \end{aligned}$$

Занятия № 9 и № 10

ГИДРОСТАТИКА И ИДЕАЛЬНАЯ ЖИДКОСТЬ

Максимально используя условия задачи, выбрать систему координат (в том числе начало координат и ориентацию осей), базисные вектора, модель среды, формализовать словесное описание задачи и решить ее.

- 1) (Мейз [7]) Широкий сосуд, наполненный несжимаемой жидкостью постоянной плотности, движется с постоянным ускорением $\vec{a}$ в поле силы тяжести. Найти уравнение свободной поверхности жидкости в сосуде, если давление на поверхности известно, постоянно и равно p_0 .
- 2) (Ландау и Лифшиц [6]) Широкий цилиндрический сосуд, наполненный несжимаемой жидкостью постоянной плотности, вращается вокруг оси с постоянной угловой скоростью в поле силы тяжести. Определить форму свободной поверхности, если давление на поверхности известно, постоянно и равно p_0 .
- 3) (Мейз [7]) Жидкость с уравнением состояния $p = \lambda \rho^k$, $\lambda, k = \text{const}$ вытекает из большого закрытого резервуара через гладкую тонкую трубку; течение баротропное. Давление в резервуаре N атм. Найти скорость стационарного истечения газа, считая давление в струе на выходе равным атмосферному.
- 4) (Мейз [7]) Дан потенциал скорости $\varphi = Ax + B \frac{x}{r^2}$, где $r^2 = x^2 + y^2$. Найти функцию тока ψ .

Решения:

- 1) Поскольку сосуд широкий, форма поверхности жидкости определяется балансом контактных и массовых сил, а искажениями за счет смачивания стенок можно пренебречь. Жидкость движется вместе с сосудом, а относительно сосуда движение отсутствует. Следовательно, в системе координат, движущейся вместе с сосудом, можно воспользоваться системой уравнений гидростатики. Выбираем простейшую декартову систему координат ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$), начало координат (точку o) помещаем на поверхности жидкости, ось z направляем вверх, а ось y ориентируем так, чтобы вектор $\vec{a}$ лежал в плоскости yo . В каждой

точке выбираем координатный базис $\{\vec{e}_i\} = \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$. Относительно этого базиса плотность силы тяжести имеет компоненты $\vec{g} = (0, 0, -g)$, а плотность силы, вызывающей равноускоренное движение, имеет компоненты $\vec{a} = (0, a_y, a_z)$. Система уравнений гидростатики в этом случае такова

$$\begin{aligned}\partial_x p &= 0, \\ \partial_y p &= \rho a_y, \\ \partial_z p &= \rho(a_z - g).\end{aligned}$$

Интегрируя первое уравнение, получим $p = p(y, z)$, из второго уравнения найдем $p = \rho a_y y + C(z)$. Наконец, интегрируя третье уравнение от 0 до z с учетом условия $p|_{y=0, z=0} = p_0$, найдем $p = \rho a_y y + \rho(a_z - g)z + p_0$. Поскольку на поверхности жидкости $p = p_0$, эта поверхность описывается уравнением: $z = \frac{a_y}{g - a_z} y$, т.е. поверхность состоит из точек с координатами $(x, y, \frac{a_y}{g - a_z} y)$.

- 2) Поместим начало координат на поверхности жидкости, а оси расположим так, чтобы вектор угловой скорости имел единственную, отличную от нуля компоненту $\Omega = d_t \phi$. Пусть r — расстояние точки с координатами (x, y) до оси вращения. Тогда компоненты вектора скорости этой точки таковы

$$\begin{aligned}u &= d_t x = d_t(r \cos \phi) = -y\Omega, \\ v &= d_t y = d_t(r \sin \phi) = x\Omega, \\ w &= 0.\end{aligned}$$

Подставляя эти компоненты скорости в уравнение движения (Эйлера), получим три скалярных уравнения для определения давления:

$$\begin{cases} x\Omega^2 = \frac{1}{\rho} \partial_x p \Rightarrow p = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 x^2 + C_1(y, z), \\ y\Omega^2 = \frac{1}{\rho} \partial_y p \Rightarrow y\Omega^2 = \frac{1}{\rho} \partial_y C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 y^2 + C_2(z), \\ 0 = \frac{1}{\rho} \partial_z p + g \Rightarrow \frac{1}{\rho} \partial_z C_2 + g = 0 \Rightarrow C_2 = -\rho g z + C_3. \end{cases}$$

Таким образом, $p = \rho(\frac{1}{2} \Omega^2 (x^2 + y^2) - g z) + C_3$. Поскольку всюду на поверхности $p = p_0$, из условия $p|_{x=y=z=0} = p_0$ находим константу $C_3 = p_0$. Сама же поверхность жидкости оказывается параболоидом вращения $z = \frac{\Omega^2}{2g} (x^2 + y^2)$.

- 3) Поскольку течение стационарное, решаем задачу с помощью интеграла Бернулли. Внутри резервуара ($\vec{v}_i = 0$, $p_i = N$, $\Phi_i = \Phi$) имеем:

$$H_i = \frac{1}{2} |\vec{v}_i|^2 + P_i + \Phi_i = P_i + \Phi.$$

То же снаружи ($\vec{v}_0$, $p_0 = 1$, $\Phi_0 = \Phi$):

$$H_0 = \frac{1}{2} |\vec{v}_0|^2 + P_0 + \Phi_0 = \frac{1}{2} |v_0|^2 + P_0 + \Phi.$$

Для вычисления функции $P = \int_{p_i}^p \frac{1}{\rho} dp$ используем уравнение состояния. Получаем $dp = \lambda k \rho^{k-1} d\rho$ и далее:

$$\begin{aligned} P &= k\lambda \int_{\rho(p_i)}^{\rho(p)} \rho^{k-2} d\rho = \frac{k\lambda}{k-1} \rho^{k-1} \Big|_{\rho(p_i)}^{\rho(p)} = \\ &= \frac{k\lambda}{k-1} \left(\left(\frac{1}{\lambda} p^{1/k} \right)^{k-1} - \left(\frac{1}{\lambda} p_i^{1/k} \right)^{k-1} \right) = \frac{k}{k-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_i}{\rho_i} \right). \end{aligned}$$

В результате $P_i = 0$, $P_0 = \frac{k}{k-1} \left(\frac{1}{\rho_0} - \frac{N}{\rho_i} \right)$. Поскольку $H_i = H_0$, имеем

$$|\vec{v}_0|^2 = -2P_0 = \frac{2k}{k-1} \frac{1}{\rho_0} \left(N \frac{\rho_0}{\rho_i} - 1 \right)$$

или преобразуя, с учетом уравнения состояния, $\frac{\rho_0}{\rho_i} = N^{-\frac{1}{k}}$, окончательно получаем

$$|\vec{v}_0|^2 = \frac{2k}{k-1} \frac{1}{\rho_0} \left(N^{1-\frac{1}{k}} - 1 \right).$$

4) Из определения функции тока получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi &= \partial_y \psi, \\ \partial_y \varphi &= -\partial_x \psi. \end{aligned} \quad (*4)$$

Дифференцируя потенциал φ по x , из первого уравнения найдем

$$\partial_y \psi = A - B \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Интегрирование дает выражение для функции тока, содержащее неизвестную функцию $C_1(x)$ — «константу» интегрирования:

$$\psi = Ay - B \frac{y}{x^2 + y^2} + C_1(x).$$

Дифференцируя это уравнение по x и подставляя результат в (*4), получим

$$\partial_y \varphi = -2B \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} - d_x C_1(x).$$

Интегрирование найденного уравнения дает выражение для потенциала

$$\varphi = B \frac{x}{x^2 + y^2} - y d_x C_1 + C_2(x),$$

где $C_2(x)$ — еще одна «константа» интегрирования. Сравнивая это выражение с условием задачи, получим уравнение для отыскания функции $C_1(x)$

$$d_x C_1(x) = \frac{1}{y} (-Ax + C_2(x)). \quad (*5)$$

Поскольку C_1 — есть функция единственного аргумента x , из уравнения (*5) необходимо следует $C_2(x) = Ax$ и $C_1 = C = \text{const.}$ Таким образом, подставляя найденное значение C_1 , окончательно имеем

$$\psi = -B \frac{y}{x^2 + y^2} + Ay + C.$$

Занятия № 11 и № 12

Вязкая жидкость

1) Координатная форма уравнений вязкой жидкости.

а) Записать уравнение Навье-Стокса

$$\rho d_t \vec{v} = -\nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \rho \vec{b},$$

в координатной форме, т.е. получить систему дифференциальных уравнений, описывающую эволюцию компонент вектора скорости.

б) Баланс внутренней энергии вязкой жидкости:

$$\begin{aligned} \rho d_t \epsilon &= -p \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu D : D + \operatorname{div} \vec{h} + \rho s \Rightarrow \\ \Rightarrow d_t \epsilon &= -p d_t V + 2\nu D : D + V \operatorname{div} \vec{h} + s, \end{aligned}$$

где $V = \frac{1}{\rho}$.

2) Слоистые течения: точные решения уравнения Навье-Стокса.

Слой жидкости толщиной H расположен между двумя бесконечно протяженными плоскостями, движущимися с постоянной скоростью U друг относительно друга параллельно самим себе. Описать установившееся течение жидкости в отсутствие силы тяжести и при наличии градиента давления, направленного вдоль движения плоскостей. Сформулировать краевую задачу, решить ее и вычислить расход жидкости.

- а) *Простое течение Куэтта*: градиент давления отсутствует.
 - б) *Течение Пуазейля*: $U = 0$, постоянный градиент давления.
 - в) *Обобщенное течение Куэтта*: постоянный градиент давления.
- 3) (Ландау и Лифшиц [6]) Слой жидкости толщиной h ограничен сверху свободной поверхностью, а снизу — неподвижной плоскостью, наклоненной под углом α к горизонту. Определить стационарное течение вязкой жидкости под действием силы тяжести, если давление на поверхности равно $p_0 = \text{const}$.
- 4) Записать в безразмерном виде уравнение неразрывности и уравнение переноса тепла.

Решения:

- 1) Выбором подходящей системы координат (x, y, z) сводим уравнение Навье–Стокса к одному уравнению

$$\partial_t u = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta u = \nu \partial_{zz} u - \frac{1}{\rho} \partial_x p$$

для единственной, отличной от нуля компоненты скорости $\vec{v}(z) = (u(z), 0, 0)$. Формулируем краевую задачу, решаем ее и вычисляем расход по формуле

$$D \equiv \int_0^H u(z) dz.$$

- а) *Простое течение Куэтта* ($\partial_x p = 0$):

$$\partial_{zz} u = 0, \quad u|_0 = 0, \quad u|_H = U.$$

Ответ:

$$u = U \frac{z}{H}, \quad D = \frac{1}{2} UH.$$

б) Течение Пуазейля ($U = 0$, $\partial_x p = \text{const} \neq 0$):

$$\mu \partial_{zz} u = \partial_x p, \quad u|_0 = 0, \quad u|_H = 0.$$

Ответ:

$$u = -\frac{(H-z)^2}{2\mu} \partial_x p, \quad D = -\frac{H^3}{12\mu} \partial_x p.$$

в) Обобщенное течение Куэтта ($U = \text{const} \neq 0$, $\partial_x p = \text{const} \neq 0$):

$$\mu \partial_{zz} u = \partial_x p, \quad u|_0 = 0, \quad u|_H = U.$$

Ответ:

$$u = U \frac{z}{H} - \frac{(H-z)^2}{2\mu} \partial_x p, \quad D = \frac{1}{2} U H - \frac{H^3}{12\mu} \partial_x p.$$

- 2) Начало системы декартовых координат помещаем на неподвижной плоскости (ось x — перпендикулярно, а ось y — параллельно горизонту, ось z — вверх). Задача при этом сводится к отысканию течения вдоль горизонтальной неподвижной границы под действием массовой силы $(g \cos \alpha, 0, g \sin \alpha)$. Система уравнений для нахождения скорости и давления такова:

$$\begin{aligned} \partial_{zz} u &= -\frac{g}{\nu} \sin \alpha, \\ \partial_z p &= -\rho g \cos \alpha. \end{aligned}$$

Граничные условия записываются в виде:

$$\begin{aligned} u|_{z=0} &= 0, \\ \partial_z u|_{z=h} &= 0, \\ p|_{z=h} &= p_0. \end{aligned}$$

Интегрируя систему, найдем

$$\begin{aligned} p &= p_0 + (h-z)\rho g \cos \alpha, \\ u &= \frac{g}{2\nu} z(2h-z) \sin \alpha. \end{aligned}$$

NB! $\lim_{\nu \rightarrow 0} u = \infty$.

Занятие № 13

УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

- 1) Рассмотреть общее уравнение теплопроводности движущейся жидкости

$$d_t T = \partial_t T + (\vec{v}, \nabla T) = \kappa \Delta T + s_T$$

и получить из него уравнение, описывающее частный случай: среда одномерна, распределение температуры стационарно, скорость движения среды постоянна, внешние источники отсутствуют.

- 2) Для указанного частного случая найти распределение температуры в среде в движущемся вместе с потоком отрезке $[a, b]$ при следующих граничных условиях:

- а) на концах отрезка заданы значения температуры T_a и T_b ,
- б) на одном конце задано значение температуры T_a , а на другом — значение потока $q_b = (\lambda \partial_x T)_{x=b}$,
- в) заданы значение температуры T_a на одном конце и среднее значение температуры

$$\bar{T} = \frac{1}{b-a} \int_a^b T(x) dx$$

на всем отрезке $[a, b]$,

- г) заданы значение потока q_a на одном конце отрезка и среднее значение температуры $\bar{T}$ на отрезке.
- 3) Пусть на обоих концах отрезка заданы значения потоков q_a и q_b . Найти дополнительное условие, при котором решение задачи существует, и показать, что это решение не единственно.

Решения:

- 1) Указанные ограничения приводят к следующим упрощениям уравнения:

- а) распределение температуры стационарно $\Rightarrow \partial_t T \equiv 0$,
- б) внешние источники отсутствуют $\Rightarrow s_T \equiv 0$,
- в) среда одномерна $\Rightarrow$ точка имеет одну координату, а вектор скорости — одну компоненту,

- г) скорость движения среды постоянна $\Rightarrow$ можно выбрать движущуюся систему координат, относительно которой среда будет покоиться.

Если координату обозначить через x , то в результате получим уравнение

$$\partial_{xx}T = 0.$$

- 2) Для решения уравнения введем вспомогательную функцию f такую, что

$$f(x) \equiv \partial_x T,$$

тогда исходное уравнение переписется в виде $\partial_x f = 0$ и легко может быть проинтегрировано. Получаем $f(x) = C_1 = \text{const.}$ Определение функции f используем теперь как уравнение для нахождения неизвестной T

$$\partial_x T = C_1.$$

Это уравнение также легко интегрируется. В результате находим $T = C_1 x + C_2$. Осталось определить константы интегрирования из граничных условий. Например, в последнем случае имеем

$$а) \quad q_a = \left(\lambda \partial_x T \right)_{x=a} = \lambda C_1 \Rightarrow C_1 = \frac{q_a}{\lambda} \Rightarrow T = \frac{q_a}{\lambda} x + C_2,$$

$$б) \quad \bar{T} = \frac{1}{b-a} \int_a^b T(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{q_a}{\lambda} x + C_2 \right) dx = \frac{q_a}{\lambda} \cdot \frac{b+a}{2} + C_2 \Rightarrow \\ C_2 = \bar{T} - \frac{q_a}{\lambda} \cdot \frac{b+a}{2}.$$

Отсюда

$$T = \bar{T} + \frac{q_a}{\lambda} \left(x - \frac{b+a}{2} \right).$$

- 3) Из определения потока $q = \left(\lambda \partial_x T \right)$ и решения уравнения следует, что $q = C_1$ всюду на отрезке $[a, b]$. Задание разных значений потока на обоих концах отрезка, таким образом, противоречиво. Другими словами, решений с такими значениями потока на границах нет. Решение задачи существует лишь в том случае, когда значения потоков на концах отрезка одинаковы. Однако, такие граничные условия эквивалентны одному условию. Отсутствие второго условия приводит к тому, что решений бесконечно много.

Занятия № 14 и № 15

ТУРБУЛЕНТНАЯ ЖИДКОСТЬ

1) Показать, что из следующих свойств оператора осреднения

– линейность: $\overline{af + bh} = a\bar{f} + b\bar{h}$, $a, b = \text{const}$,

– непрерывность: $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n$,

– проектор: $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$.

следует:

а) $\bar{a} = a$, $a = \text{const}$,

б) $\overline{af} = a\bar{f}$, $a = \text{const}$,

в) $\overline{\partial_{x_i} f} = \partial_{x_i} \bar{f}$,

г) $\overline{f + g} = \bar{f} + \bar{g}$,

д) $\overline{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g}$.

Решения:

а) поскольку $a = \text{const}$, пульсация $a' = 0$ и $a = \bar{a} + a' = \bar{a}$. Так как оператор осреднения есть проектор, имеем $\bar{\bar{a}} + a' = \bar{a} = \bar{a} = a$;

б) равенство выполняется в силу линейности оператора осреднения;

в) из определения производной (первое равенство), непрерывности оператора осреднения (второе равенство) и его линейности (третье равенство) имеем

$$\overline{\partial_{x_i} f} = \overline{\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_i}} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\overline{\Delta f}}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{f}}{\Delta x_i} = \partial_{x_i} \bar{f};$$

г) равенство выполняется в силу линейности оператора осреднения;

д) равенство также выполняется в силу линейности оператора осреднения.

2) Покажите, что условие $\overline{\bar{f}g} = \bar{f}\bar{g}$, где g принимает значения $g = 1, \bar{h}, h'$, эквивалентно следующим трем условиям

а) $\overline{\bar{f}} = \bar{f}$,

б) $\overline{\bar{f} \bar{h}} = \bar{f} \bar{h},$

в) $\overline{\bar{f} h'} = 0.$

3) Докажите, что

а) осредненное уравнение неразрывности несжимаемой жидкости имеет вид

$$(\nabla, \bar{\vec{v}}) = 0.$$

б) пульсации скорости удовлетворяют уравнению неразрывности.

Решения:

а) Запишем скорость в виде $\vec{v} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}'$, подставим в уравнение неразрывности и осредним. Получим

$$\begin{aligned} (\nabla, \vec{v}) &= (\nabla, \bar{\vec{v}} + \vec{v}') = (\nabla, \overline{\bar{\vec{v}} + \vec{v}'}) = \\ &= (\nabla, \bar{\vec{v}} + \overline{\vec{v}'}) = (\nabla, \bar{\vec{v}}) = 0. \end{aligned}$$

б) Запишем скорость как в предыдущем случае и подставим в уравнение неразрывности. Получим

$$(\nabla, \vec{v}) = (\nabla, \bar{\vec{v}} + \vec{v}') = (\nabla, \bar{\vec{v}}) + (\nabla, \vec{v}') = 0.$$

В предыдущем задании было показано, что $(\nabla, \bar{\vec{v}}) = 0$. Отсюда $(\nabla, \vec{v}') = 0$.

Учебники

- 1) Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости.— М.: Мир, 1973.— 758 с.
- 2) Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика, т.1.— М.: Физматгиз, 1963.
- 3) Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1954.— 788 с.
- 4) Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики.— М.: Наука, 1981.— 368 с.
- 5) Седов Л.И. Механика сплошных сред, т.1.— М.: Наука, 1973.— 536 с.
- 6) Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 256 с.

Список цитированной литературы

- [1] Баренблатт Г.И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика.— Л.: Гидрометеиздат, 1978.— 208 с.
- [2] Горбацкий В.Г. Газодинамические неустойчивости в астрофизических системах.— СПб: СПбГУ, 1999.— 168 с.
- [3] Курбатова Г.И., Филиппов Б.В. Основы моделирования движущихся сплошных сред. Термодинамика.— СПб: СПбГУ, 1997.— 78с.
- [4] Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д. Элементы математической физики.— М.: Наука, 1973.
- [5] Линь Цзя-Цзяо. Теория гидродинамической устойчивости.— М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
- [6] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1954.— 788 с.

- [7] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред.— М.: Мир, 1974.— 318 с.
- [8] Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. ч.I. Механика турбулентности.— М.: Наука, 1965.— 640 с.
- [9] Рудин У. Основы математического анализа.— М.: Мир, 1966.— 320 с.
- [10] Серрин Дж. Математические основы классической механики жидкости.— М.: Изд-во иностр. лит., 1963.— 256 с.
- [11] Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред.— М.: Мир, 1975.— 592 с.
- [12] Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.— 712 с.
- [13] Шутц Б. Геометрические методы математической физики.— М.: Мир, 1984.— 304 с.

Список используемых обозначений

Латинские буквы

- $A, B, \dots$ — тензоры 2-го ранга, 60
- $B, C, \dots$ — тела, 13
- B^e — внешность тела, 25
- $\vec{b}$ — удельная плотность массовой силы, 89
- c_p — теплоемкость при постоянном давлении, 138
- D — тензор скоростей деформации, 76
- d_t — полная производная по времени, 52
- ∂_t — частная производная по времени, 52
- E — внутренняя энергия, 101
- $\vec{e}_i$ — базисный вектор, 19
- F — градиент деформации, 70
- $f_B(C, t)$ — сила, с которой тело C действует на тело B в момент времени t , 25
- f_C — контактная сила, 88
- f_B — массовая сила, 88
- G — градиент скорости, 75
- H — интеграл Бернулли, 115
- $\vec{h}$ — плотность потока тепла, 103
- I — единичный тензор, 65
- J — якобиан преобразования координат, 39
- K — кинетическая энергия тела, 97
- k — плотность кинетической энергии, 97

- $M(B)$ — масса тела B , 23
- $m(t, B)$ — импульс тела B , 86
- $\vec{n}$ — внешняя нормаль к поверхности, 83
- O — нулевой тензор, 64
- P_t — пространства мест, 13
- $P(p) = \int \frac{1}{p} dp$ — 114
- P, P_k — части тела, 33
- p — давление, 94
- Q — скорость нагрева тела, 102
- Q_B — скорость объемного нагрева, 102
- Q_C — скорость контактного нагрева, 102
- q — приток тепла, 102
- R — ортогональный тензор, 67
- $\mathbb{R}^{0+}$ — множество неотрицательных вещественных чисел, 24
- $\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4$ — одномерное, трехмерное и четырехмерное пространства вещественных чисел, 16
- S — поверхность, ограничивающая некоторый объем, 83
- s — удельный приток тепла за счет излучения, 102
- T — температура, 138
- T' — тензор вязких напряжений, 130
- t — время, параметр мировой линии, 13
- $\vec{u} = d_t \lambda$ — вектор, касательный к мировой линии, 18
- U — потенциальная энергия, 100
- V — объем конфигурации тела, 32

- $\vec{v}$ — вектор скорости, 21
 W — мощность силы, 98
 $\mathcal{W}$ — пространство событий, 13
 W — спин, 76
 $X, Y, \dots$ — точки тела, 13
 $X = (X_1, X_2, X_3)$ — лагранжевы координаты точки тела, 37
 $x = (x_1, x_2, x_3)$ — координаты места, 17; эйлеровы координаты, 37
 $x(t)$ — параметризованная кривая, 21

Греческие буквы

- Δ — (Дельта) приращение, 18; оператор Лапласа, 123
 δ_{ij} — (дельта) символ Кронекера, 65
 ε — (эпсилон) плотность внутренней энергии, 101
 ε^{ijk} — символ Леви-Чивиты, 79
 κ — (каппа) коэффициент температуропроводности, 139
 $\kappa(B)$ — отсчетная конфигурация тела, 37
 λ — (лямбда) коэффициент теплопроводности, 138
 $\lambda(t, X)$ — мировая линия точки X , 14
 $\lambda(t, B)$ — мировая трубка тела B , 15
 μ — (мю) коэффициент динамической вязкости, 130
 ν — (ню) коэффициент кинематической вязкости, 132
 Π — (Пи) интегральный параметр среды, 32
 π — (пи) плотность интегрального параметра, 33
 ρ — (ро) плотность массы, 33

σ	— (сигма) продукция интегрального параметра, 41
$\vec{\tau}$	— (тау) плотность контактной силы, напряжение, 89
Φ	— (Фи) потенциал массовой силы, 89
φ	— (фи) потенциал скорости, 121
ϕ	— (фи) система отсчета, 16
χ_κ	— (хи) деформация, 38
$\chi(t, X)$	— траектория точки X , 21
$\chi(t, B)$	— конфигурация тела B в момент времени t , 21
ψ	— (пси) функция тока, 123
Ω	— (Омега) множество тел, обладающих массой, 23
$\vec{\omega}$	— (омега) вихрь скорости, 77

Математические символы

$(\cdot)$	— «держатель» места, 13
$\emptyset$	— пустое множество, 23
$\cup$	— объединение множеств, 23
$\cap$	— пересечение множеств, 23
∇_k	— ковариантная производная по направлению вектора $\vec{e}_k$, 55
∇	— оператор «набла» (Гамильтона), 58
$(\cdot)^\top$	— операция транспонирования, 66
$(\vec{a}, \vec{b})$	— скалярное произведение векторов, 50
$A : B$	— скалярное произведение тензоров, 62
$\det(A)$	— определитель квадратной матрицы, 79
$[a]$	— физическая размерность величины a , 144

Предметный указатель

Баланс внутренней энергии, 104

Вихрь скорости, 78
внешность тела, 25
внутреннее трение, 134
временная ось, 15
время, 13, 16
вязкий подслон, 171

Гидродинамическая неустойчивость, 159

гидростатика, 113

гипотеза

изотропности и однородности пространства и времени, 16

локального термодинамического равновесия, 106

плотности, 29

главные
оси

деформации, 74

тензора скоростей деформации, 77

растяжения, 75

скорости деформации, 77

градиент, 50

вектора, 60

деформации, 71

скорости, 76

Давление, 94

движение, 13, 21

вихревое, 79

деформация, 38

дивергенция, 63

динамическое подобие, 146

диссипация кинетической энергии, 135

Единицы измерения, основные, 143

Жидкость

бароклинная, 107

баротропная, 108

идеальная, 94

несжимаемая, 85

покоящаяся, 113

Завихренность, 77

задача

Коши, 46

на собственные значения, 68

закон

движения, основной, 90

пристеночной турбулентности

Прандтля, 175

сохранения

дифференциальный, 41

интегральный, 39

массы, 23

теплопроводности Фурье, 138

Импульс, 86

индекс

немой, 50

свободный, 50

интеграл Бернулли, 115

интервал

временной, 17

осреднения, 164

Касательный вектор, 18

кинематика деформации, 74

кинематическая граница, 32

количество движения, 86

компонента тензора, 60

конвекция

вынужденная, 139

свободная, 140

конфигурация

отсчетная, 37

текущая, 37

тела, 21

координатный базис, 21

координаты

лагранжевы, 37

места, 17

эйлеровы, 37

коэффициент

вязкости, эффективный, 167

динамической вязкости, 130

кинематической вязкости, 132

молекулярной диффузии, 139

вязности, 58

температуропроводности, 139

теплового расширения, 141

теплопроводности, 138

турбулентной вязкости, 167

критическая точка, 117

Лемма Коши, 91

линия

- векторная, 121
 - вихревая, 121
 - мировая, 14
 - тока, 116
- Масса, 13
- тела, 23
- масштаб, 144
- место, 13
- мощность силы, 98
- Нагрев
- контактный, 102
 - объемный, 102
- напряжение, 89
- касательное, 91
 - нормальное, 91
- начало отсчета, 16
- Однородное поле тяготения, 89
- описание событий, 15
- осреднение, 162
- отделенные тела, 23
- отрыв пограничного слоя, 155
- Параллельный перенос, 56
- параметр
- интегральный, 32
 - шероховатости, 179
- параметризованная кривая, 21
- пассивная примесь, 139
- первое начало термодинамики, 102
- плотность, 32
- кинетической энергии, 97
 - среднего движения, 169
- контактной силы, 89
- массовой силы, 89
- удельная, 89
- массы, 33
- потока массы, 84
- потока параметра, 82
- энергии турбулентности, 170
- поверхность
- гладкая, 175
 - раздела, 32
 - вполне шероховатая, 175
 - слегка шероховатая, 175
- поворот, 74
- пограничный слой
- ламинарный, 150
 - логарифмический, 176
 - температурный, 157
 - турбулентный, 173
- поле скорости, 47
- постулат
- Больцмана, 92
 - Коши, 90
- потенциал
- массовой силы, 89
 - скорости, 121
- поток, 84
- массы, 85
- правило суммирования, 49
- предельный переход Прандтля, 154
- преобразование выпрямляющее, 43
- принцип
- динамики, основной, 87
 - теплового потока Фурье-Стокса, 103
- приток, 83
- тепла, 102
- продукция, 83
- производная
- индивидуальная, 52
 - ковариантная, 55
 - полная, 52
 - частная, 52
- пространство
- векторное, 26
 - мест, 13
 - событий, 13
- пространство-время, 13
- развитая турбулентность, 161
- Размерность
- независимая, 144
 - физической величины, 144
- Свертка тензоров, 50
- сжимаемость среды, 85
- сила, 25
- внешняя, 89
 - вязкости, 130
 - контактная, 88
 - массовая, 88
 - объемная, 88
 - поверхностная, 88
 - потенциальная, 89
 - результатирующая, 25
- символ
- Кристоффеля, 58
 - Кroneckera, 65
 - Леви-Чивита, 79
- система
- единиц измерения, 143
 - отсчета, 16
 - инерциальная, 43
- скалярное произведение, 62
- скорость

- объемного расширения/сжатия, 79
- совершения работы, 99
- собственное
 - значение, 68
 - направление, 68
- собственный вектор, 68
- событие, 13
- спин, 76
- сплошная среда, 30
- Тело, 12
- температура, 138
- тензор, 59
 - антисимметричный, 66
 - вязких напряжений, 130
 - единичный, 65
 - напряжений, 91
 - напряжений Рейнольдса, 167
 - нулевой, 64
 - обратный, 65
 - ортогональный, 67
 - поворота, 71
 - положительно определенный, 67
 - растяжения, 71
 - симметричный, 66
 - скоростей деформации, 76
- тензорное выражение, 64
- тензорные операции, 62
- теорема
 - Бернулли, 115
 - Гельмгольца, 121
 - Коши, 91
 - Лагранжа, 120
 - о полярном разложении, 71
 - переноса, 42
- течение
 - двумерное, 122
 - ламинарное, 159
 - потенциальное, 122
 - стационарное, 114
 - турбулентное, 159
- толщина вытеснения, 152
- траектория, 21
- транспонирование, 66
- трубка
 - векторная, 121
 - вихревая, 121
 - мировая, 15
- Уравнение
 - баланса
 - дифференциальное, 82
 - импульса, 92
 - плотности импульса, 92
 - плотности кинетической энергии, 98
 - плотности механической энергии, 100
 - плотности полной энергии, 104
 - полной энергии, 102
- Бернулли, 115
- в безразмерной форме, 143
- вихря, 117
- Гельмгольца, 119
- движения
 - вязкой жидкости Навье-Стокса-Дюгема, 131
 - идеальной жидкости, 94
 - сплошной среды Коши, 92
- диффузии, 139
- Навье-Стокса, 132
- неразрывности, 84
- Рейнольдса, 166
- состояния, 106
- теплопроводности движущейся среды, 138
- Эйлера, 94
- уравнения пограничного слоя, 153
- условие начальное, 46
- условия Рейнольдса, 161
- Формула Эйлера, 52
- функция тока, 122
- Центр масс, 86
- Часть тела, 32
- число
 - Кнудсена, 31
 - Пекле, 148
 - Прандтля, 157
 - Рейнольдса, 146
 - Фруда, 146
- чистое растяжение, 74
- Энергия
 - внутренняя, 101
 - кинетическая, 97
 - механическая, 100
 - полная, 101
 - потенциальная, 100
- Якобиан, 44

Учебное издание

Михаил Юрьевич Белевич

ГИДРОМЕХАНИКА
Основы классической теории

Учебное пособие

Редактор О.С.Крайнова

ЛР № 020309 от 30.12.96.

Подписано в печать 22.09.06. Формат 60х90 1/16. Гарнитура Times New Roman.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 14,0. Уч.-изд.л. 14,0. Тираж 400 экз. Заказ № 81
РГТМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98.
ЗАО «НПП «Система», 195112, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр.,80/2..

