МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА МОРСКИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Т.М. Татарникова

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2008

УДК 519.711

Татарникова Т.М. Моделирование систем: Методические указания к выполнению лабораторных работ. СПб.: РГГМУ, 2008

Рецензент: О.И. Кутузов, д-р техн. наук, проф. ГЭТУ (ЛЭТИ)

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ по курсу «Моделирование систем» и содержат описание основных видов моделирования систем и их свойств, отличительные особенности и алгоритмы моделей разных видов, контрольные вопросы для закрепления пройденного материала.

Предназначено для подготовки специалистов по специальностям 075600 - информационная безопасность телекоммуникационных систем и 141000 – морские информационные системы и оборудование.

Введение

Моделирование – один из наиболее распространенных методов исследования процессов функционирования сложных систем.

В основе моделирования лежит теория подобия, которая утверждает, что абсолютное подобие может иметь место лишь при замене одного объекта другим точно таким же.

Классификация видов моделирования систем приведена на рисунке 1.

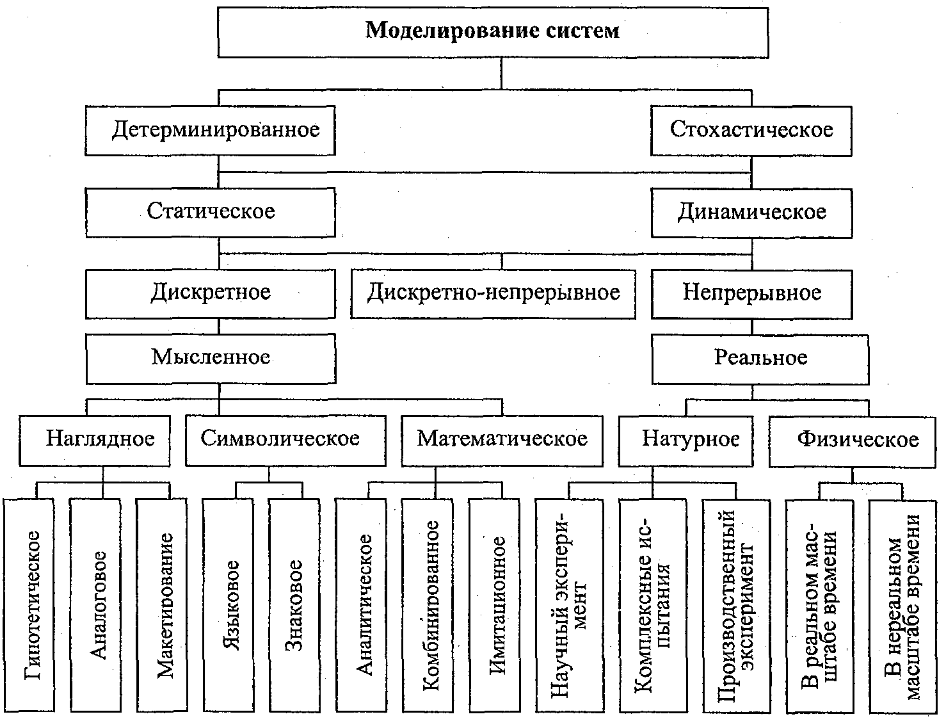


Рисунок 1 – Классификация видов моделирования систем

В зависимости от характера изучаемого процесса в системе все виды моделирования могут быть разделены на детерминированные и стохастические, статические и динамические, дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные.

Детерминированное моделирование отображает процессы, в которых предполагается отсутствие всяких случайных воздействий. *Стохастическое моделирование* отображает вероятностные процессы и события. В этом случае анализируется ряд реализаций случайного процесса и оцениваются средние характеристики.

Статическое моделирование служит для описания поведения объекта в какой-либо момент времени. *Динамическое моделирование* отображает поведение объекта во времени. *Дискретное моделирование* служит для описания процессов, которые предполагаются дискретными, соответственно *непрерывное моделирование* позволяет отразить непрерывные процессы в системах, а дискретно-непрерывное моделирование используется для случаев, когда хотят выделить наличие как дискретных, так и непрерывных процессов.

Мысленное моделирование часто является единственным способом моделирования объектов, которые либо практически нереализуемы в заданном интервале времени, либо существуют вне условий, возможных для их физического создания. Мысленное моделирование может быть реализовано в виде наглядного, символического и математического.

При наглядном моделировании на базе представлений человека о реальных объектах создаются различные наглядные модели, отображающие явления и процессы, протекающие в объекте. В основу *гипотетического моделирования* исследователем закладывается некоторая гипотеза о закономерностях протекания процесса в реальном объекте, которая отражает уровень знаний исследователя о б объекте и базируется на причинно-следственных связях между входом и выходом изучаемого объекта. Гипотетическая моделирование используется, когда знаний об объекте недостаточно для построения формальных моделей.

Аналоговое моделирование основывается на применении аналогий различных уровней. Наивысшим уровнем является полная аналогия, имеющая место только для достаточно простых объектов.

Существенное место при мысленном моделировании занимает *макетирование.* Мысленный макет может применяться в случаях, когда протекающие в реальном объекте процессы не поддаются физическому моделированию. В основе их построения лежат аналогии, и также причинно-следственные связи между явлениями и процессами в объекте.

Если ввести условное обозначение отдельных понятий, то есть знаки, а также определенные операции между знаками, то можно реализовать *знаковое моделирование* и с помощью знаков отображать набор понятий – составлять отдельные цепочки из слов и предложений. Используя операции объединения, пересечения и дополнения теории множеств, можно в отдельных символах дать описание какого-то реального объекта или предметной области.

Символическое моделирование представляет собой искусственный процесс создания логического объекта, который замещает реальный и выражает основные свойства его отношений с помощью определенной системы знаков или символов.

Под математическим моделированием понимается процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторой математической модели и исследование этой модели, позволяющее получить характеристики рассматриваемого реального объекта.

Для аналитического моделирования характерно то, что процессы функционирования элементов системы записываются в виде некоторых функциональных соотношений (алгебраических, интегральных, дифференциальных, конечно-разностных и т.п.).

При имитационном моделировании реализуется алгоритм воспроизведения процесса функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени, дающие оценить характеристики системы.

Лабораторная работа №1
ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СИСТЕМЫ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Цель работы: Исследование основных характеристик простейших систем массового обслуживания методом аналитического моделирования, анализ и обработка данных.

1.1 Описание объекта исследования

Системой массового обслуживания называется любая система, предназначенная для обслуживания каких - либо заявок (требований), поступающих на неё в случайные моменты времени. Примеры систем массового обслуживания (СМО): телефонная станция, бюро ремонта, билетная касса, парикмахерская, ЭВМ и др.

Любое устройство, непосредственно занимающееся обслуживанием заявок, называется каналом обслуживания (или) прибором. СМО - бывают как одно - так и многоканальными. Пример одноканальной СМО - билетная касса с одним кассиром; пример многоканальной - та же касса с несколькими кассирами.

Различают СМО с отказами и СМО с очередью (ожиданием). В СМО с отказами заявка, пришедшая в момент времени, когда все каналы заняты, получает отказ, покидает СМО и в дальнейшей ее работе не участвует. В СМО с очередью заявка, пришедшая в момент занятости всех каналов, не покидает СМО, а становится в очередь и ждет, пока не освободится какой-нибудь канал. Число мест в очереди может быть как ограниченным, так и неограниченным. При нулевом числе мест в очереди СМО с очередью превращается в СМО с отказами. Очередь может иметь ограничение и по времени ожидания заявки. Такие СМО называются системами с нетерпеливыми клиентами.

СМО с очередью различаются не только по ограничению очереди, но и по дисциплине обслуживания: обслуживаются ли заявки в порядке поступления или в случайном порядке, или же некоторые заявки обслуживаются вне очереди (так называемые СМО с приоритетом). Приоритет может иметь несколько уровней или рангов.

Многофазная СМО представляет собой последовательность обслуживающих приборов (фаз). При этом входной поток заявок последующей фазы является выходным потоком предыдущей фазы.

Для обозначения типа СМО Кендаллом и Башариным предложена система обозначений, имеющих вид $\Delta|\Theta|\Xi|\Omega$. Здесь Δ - обозначение закона распределения вероятностей для интервалов поступления заявок, Θ- обозначение закона распределения вероятностей для времени, Ξ – число каналов обслуживания, Ω - число мест в очереди.

Обозначение законов распределения в позициях Δ и Θ выполняется обычно буквами из следующего списка:

M – экспоненциальное (промежуток времени между последовательными событиями – случайная величина).

R – равномерное (промежуток времени между последовательными событиями равномерно распределён на заданном интервале)

D - детерминированное (промежуток времени между последовательными событиями - постоянная величина),

E^k - эрланговское порядка k (получается "прореживанием" простейшего потока, когда сохраняется каждая k-я точка (событие) в потоке, а все промежуточные выбрасываются)

G - произвольное (любого вида) и т.д.

Если число мест в очереди не ограничено, то позиция Ξ не указывается. Например, M|M|1 означает простейшую СМО (оба распределения экспоненциальные, канал обслуживания один, очередь не ограничена), а обозначение R|D|2|100 соответствует СМО с равномерным распределением интервалов поступления требований, фиксированным временем их обслуживания, двумя каналами и 100 местами в очереди. В этой СМО заявки, приходящие в моменты, когда все места в очереди заняты, покидают систему (т.е. теряются).

В данной лабораторной работе исследуются простейшие СМО, т.е. потоки событий простейшие (стационарные пуассоновские). Поток оказывается простейшим, только если время обслуживания представляет собой случайную величину, имеющую показательное распределение. Для такого потока вероятность наступления за промежуток времени [0,t] n событий есть $p_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}\exp(-\lambda t)$, а математическое ожидание числа событий, наступивших за время t, - λt, где λ – среднее число событий, наступающих в единицу времени. Величину λ в случае пуассоновского потока называют интенсивностью потока событий.

В терминах СМО описываются многие реальные системы: вычислительные системы, узлы сетей связи, системы посадки самолетов, магазины, производственные участки - любые системы, где возможны очереди и (или) отказы в обслуживании. Например, в вычислительной системе роль обслуживающего прибора играет ЭВМ, роль заявок - решаемые задачи. Источником заявок служат терминалы пользователей. Моментом выдачи заявки является момент нажатия клавиши для подачи директивы о запуске задачи на решение. Операционная системы ЭВМ исполняет роль диспетчера: определяет очередность решения задач. В роли ячеек буфера выступают ячейки памяти ЭВМ, хранящие сведения о задачах, требующих решения.

В системе разгрузки судна, другой пример реальной системы, источниками заявок являются направления, с которых прибывают суда. Момент выдачи заявки - это момент прибытия судна в зону морского порта для разгрузки/погрузки. Обслуживающим прибором является причал вместе с персоналом и техническими средствами, организующими разгрузку/погрузку. Роль буфера играет акватория порта.

Рассмотрим простейшие (они же экспоненциальные) СМО и соответствующие им аналитические модели.

Простейшая одноканальная система массового обслуживания M|M|1 определяется следующими свойствами. СМО имеет канал. В СМО приходят заявки. Если СМО пустая (нет заявок), то приходящая заявка занимает канал. Приходящая в непустую СМО заявка становится в очередь последней. Любая занявшая канал заявка обслуживается, освобождает канал и уходит из СМО. Если в момент ухода очередь непустая, первая в ней заявка выходит из очереди и занимает канал. Кружком (рисунок 2) обозначен канал, тремя прямоугольниками - очередь.

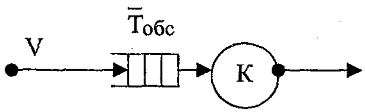


Рисунок 2 – Одноканальная СМО

Стрелки указывают направление движения заявок, точки у стрелок - вход и выход СМО. Приходы заявок образуют пуассоновский поток событий. Это означает, что время между приходами любых двух последовательных заявок есть независимая случайная величина (сл. в.) с экспоненциальной функцией распределения вероятностей

$$F(x) = 1 - e^{-Vx} \tag{1.1}$$

Параметр V есть интенсивность потока заявок, т.е. среднее число заявок, приходящих в единицу времени, равно V. В дальнейшем интенсивность прихода заявок в СМО будем обозначать через λ . Время обслуживания заявки - тоже независимая сл.в. с экспоненциальной функцией распределения вероятностей вида (1.1). Но параметр V в этом случае имеет другое значение. Будем обозначать его через μ Величину $1/\mu$, равную среднему времени обслуживания заявки, обозначим через $\overline{T}_{обс}$.

В виде одноканальной экспоненциальной СМО можно промоделировать, например, периферийное устройство мультипрограммной вычислительной системы. Тогда приходы заявок будут соответствовать обращениям программ к устройству для выполнения операции ввода или вывода информации; λ будет интенсивностью таких обращений, $\overline{T}_{обс}$ - средним временем выполнения требуемой операции.

Одноканальная экспоненциальная СМО задается параметрами λ, $\overline{T}_{обс}$. Цель ее анализа заключается в расчете характеристик, важнейшие из которых следующие:

- коэффициент загрузка ρ ;
- средняя длина L очереди;
- среднее число M заявок в СМО;
- среднее время $\overline{T}_{ож}$ ожидания обслуживания;
- среднее время $\overline{T}_{пр}$ пребывания заявки в СМО.

Коэффициент загрузки рассчитывается по формуле

$$\rho = \lambda \cdot \overline{T}_{обс}. \qquad (1.2)$$

Если выполняется условие

$$\rho \le 1, \qquad (1.3)$$

то существует стационарный режим функционирования СМО. В стационарном режиме все вероятностные характеристики системы являются постоянными во времени величинами. Сами происходящие в СМО события остаются при этом случайными. Если (1.3) не выполняется, то стационарного режима у СМО не существует.

В стационарном режиме среднее число M заявок в СМО постоянно. Поэтому среднее число заявок, приходящих в СМО в единицу времени, равно среднему числу заявок, в единицу времени из СМО уходящих. Следовательно, в стационарном режиме интенсивность потока уходящих заявок равна λ.

Средняя длина очереди (среднее число заявок в очереди) в одноканальной экспоненциальной СМО рассчитывается по формуле

$$L = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \qquad (1.4)$$

Среднее число M заявок в СМО равно сумме среднего числа L заявок в очереди и среднего числа ρ заявок в канале:

$$M = \frac{\rho}{1-\rho}. \qquad (1.5)$$

Заявка перемещается в очереди в среднем с постоянной скоростью. Среднее число переходов заявки в очереди на одно место вперед за единицу времени равно λ.

При такой скорости перемещения L переходов произойдет за время, равное в среднем

$$\overline{T}_{ож} = \frac{\overline{T}_{обс} \cdot \rho}{1-\rho}. \qquad (1.6)$$

Формула (1.6) дает среднее время прохождения заявки через очередь. Это есть среднее время ожидания.

Среднее время пребывания заявки в СМО есть сумма среднего времени ожидания и среднего времени обслуживания заявки:

$$\overline{T}_{пр} = \frac{\overline{T}_{обс}}{1-\rho}. \qquad (1.7)$$

Вероятность наличия в системе k требований определяется с помощью геометрического закона распределения в виде $(1-\rho)\cdot\rho^k, k = 0,1,2,...$

Характеристики (1.2) - (1.7). могут давать ценную информацию о моделируемой в виде СМО системе. Пусть, например, СМО изображает периферийное устройство вычислительной системы. Тогда ρ равен коэффициенту использования устройства, (1- ρ) - коэффициенту простоя. Необходимо, чтобы коэффициент использования был достаточно велик. Величина $\overline{T}_{ож}$ характеризует среднее время, в течение которого программы ожидают освобождения устройства. В это время программы фактически "простаивают". Желательно, чтобы оно было достаточно мало.

Многоканальная экспоненциальная СМО отличается от одноканальной следующим. Число каналов в ней более одного. Приходящая заявка становится в очередь, если все каналы заняты. В противном случае заявка занимает свободный канал.

Многоканальная экспоненциальная СМО задается тремя параметрами: интенсивностью V прихода заявок, средним временем T обслуживания и числом K каналов. На рисунке 3 изображена двухканальная СМО.

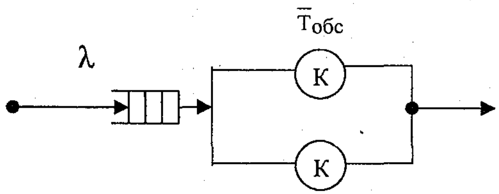


Рисунок 3 – Многоканальная экспоненциальная СМО

Формулы для расчета характеристик многоканальной экспоненциальной СМО немногим сложнее формул (1.2) - (1.7).

Коэффициент загрузки определяется в виде

$$\rho = \frac{\lambda \overline{T}_{обс}}{K} . \qquad (1.8).$$

Его значение должно отвечать условно стационарности (1.3).

Средняя длина очереди

$$L = \frac{(\lambda \overline{T}_{обс})^{K+1}}{K! \cdot K \left(1 - \frac{\lambda \overline{T}_{обс}}{K}\right)^2} \beta_0 , \qquad (1.9)$$

где - β_0 стационарная вероятность того, что в СМО нет заявок. Эта вероятность определяется в виде

$$\beta_0 = \frac{1}{\dfrac{(\lambda \overline{T}_{обс})^K}{K!\left(1 - \frac{\lambda \overline{T}_{обс}}{K}\right)} + \sum\limits_{m=0}^{K-1} \dfrac{(\lambda \overline{T}_{обс})^m}{m!}} . \qquad (1.10)$$

Остальные характеристики вычисляются через параметры СМО следующим образом:

$$M = L + K \cdot \rho \qquad (1.11)$$

$$\overline{T}_{ож} = \frac{L}{\lambda} \qquad (1.12)$$

$$\overline{T}_{пр} = \overline{T}_{ож} + \overline{T}_{обс} . \qquad (1.13)$$

Многоканальную СМО можно поставить в соответствие, например, многопроцессорному блоку вычислительной системы, имеющему общую память для всех процессоров и, следовательно, в общую очередь задач.

Совокупность СМО образуют сеть массового обслуживания (СеМО), в которой заявки с выходов одних СМО могут поступать на входы других в соответствии с маршрутной матрицей. Входным потоком заявок СМО будем называть поток заявок, приходящих на вход отдельной СМО из внешней среды СеМО, т.е. не с выхода какой-либо СМО. В общем случае число входных потоков СеМО равно числу СМО. При этом отдельные СМО отображают функционально самостоятельные части реальной системы, связи между СМО - структуру системы, а требования, циркулирующие по СеМО – составляющие материальных потоков (сообщения (пакеты) в коммуникационной сети, задания в мультипроцессорных системах, контейнеры грузопотоков и т.п.).

Для наглядного представления СеМО используется граф, вершины которого соответствуют отдельным СМО, а дуги отображают связи между узлами.

Переход заявок между узлами происходит мгновенно в соответствии с переходными вероятностями $p_{ij}, i, j = \overline{1, N}$, p_{ij} - вероятность того, что заявка после обслуживания в узле i перейдет в узел j. Естественно, если узлы непосредственно не связаны между собой, то $p_{ij} = 0$. Если из узла i–го переход только в один какой либо узел j, то $p_{ij} = 1$.

Таким образом, экспоненциальной (простейшей) будем называть СеМО, отвечающую требованиям:

- входные потоки СеМО пуассоновские;
- во всех N СМО время обслуживания заявок имеет экспоненциальную функцию распределения вероятностей, и заявки обслуживаются в порядке прихода;
- переход заявки с выхода i-й СМО на вход j-й является независимым случайным событием, имеющим вероятность p_{ij}; $i, j = \overline{1, N}$; p_{i0}; - вероятность ухода заявки из СеМО.

Если заявки приходят в сеть и уходят из нее, то сеть называется разомкнутой. Если заявки не приходят в сеть и из нее не уходят, сеть называется замкнутой. Число заявок в замкнутой сети постоянное.

1.2 Пример анализа СеМО

Разомкнутая экспоненциальная СеМО задается следующими параметрами:

1) числом N СМО;
2) числом $K1, ..., K_N$ каналов в СМО 1 ,..., N;
3) матрицей $P = \| p_{ij} \|$ вероятностей передач, i = 1,...,N; j =0,..., N;
4) интенсивностями $I1, ..., I_N$ входных потоков заявок;
5) средними временами обслуживания $\overline{T}_{обс1}, ..., \overline{T}_{обсN}$ заявок в СМО.

Например, СеМО (рисунок 4) будет задана численно в следующем виде:

1) $N=3$;

2) $K_1=1$; $K_2=1$; $K_3=2$;

3) $$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

4) $I1 = 1$; $I2 = 0$; $I3 = 0$;

5) $\bar{T}_{обс1} = 0{,}07$; $\bar{T}_{обс2} = 0{,}06$; $\bar{T}_{обс3} = 0{,}35$.

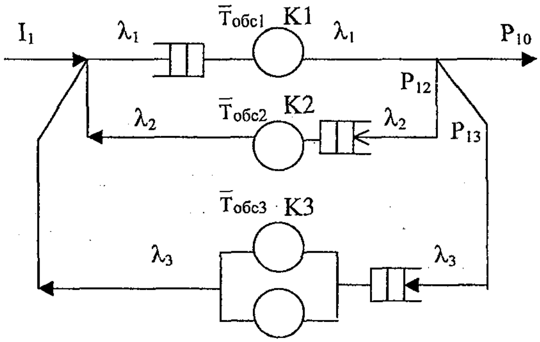


Рисунок 4 - Разомкнутая экспоненциальная СеМО

С помощью такой СеМО можно промоделировать, например, вычислительную систему. Тогда входные потоки заявок СеМО будут изображать запросы, поступающие на вход вычислительной системы, отдельные СМО будут соответствовать этапам их обработки на устройствах (процессорах, периферийных устройствах и др.), выходные заявки СеМО - результатам обработки запросов.

В экспоненциальной СеМО поток заявок на входе СМО складывается из входного потока СеМО (возможно, имеющего нулевую интенсивность) и из потоков, поступающих с выходов СМО. Характеристики СМО отвечают формулам (1.2) - (1.13). Поэтому для их расчета в заданной Се МО достаточно найти интенсивности $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ входных потоков СМО.

Нахождение интенсивностей $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ осуществляется на основе уравнений баланса сети с учетом простых свойств слияния и разветвления потоков.

При слиянии n. потоков заявок с интенсивностями $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ образуется поток, имеющий интенсивность $\lambda = \lambda_1+,\ldots,+\lambda_n$. При ветвлении потока с интенсивностью λ на n направлений, вероятности перехода заявки в которые равны $p_1,\ldots, p_n$, образуется n потоков с интенсивностями $\lambda p_1,\ldots,\lambda p_n$ соответственно.

В стационарной СеМО среднее число заявок в любой её фиксированной части постоянное. Отсюда следует, что суммарная интенсивность входящих в эту часть потоков равна суммарной интенсивности выходящих. Запись данного закона в математической форме называется *уравнением баланса*. Выделяя различные части в СеМО и составляя для них уравнения баланса, можно получить систему уравнений, связывающую неизвестные интенсивности $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ с известными $I_1,..,I_N$. Обычно при этом в качестве отдельных частей СеМО выделяют все СМО. В этом случав для N неизвестных имеется N уравнений. Можно добавить к ним уравнение баланса для входных и выходных потоков всей СеМО. Тогда получится N +1 уравнение, и одно из них можно использовать в качестве проверочного.

Например, баланс интенсивностей в сети (рисунок 4) можно учесть, обозначая интенсивности на входах и выходах СМО и СеМО так, как показано на рисунке 4. Применяя свойства слияния и ветвления потоков, запишем, что

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= I_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_1 &= P_{10}\cdot\lambda_1 \\ \lambda_2 &= P_{12}\cdot\lambda_1 \\ \lambda_3 &= P_{13}\cdot\lambda_1 \end{aligned} \tag{1.14}$$

При известных $I1 = 1$, $p_1 = 0{,}1$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}4$ из последних трёх уравнений находим $\lambda 1 = 10$, $\lambda 2 = 5$, $\lambda_3 = 4$. Используя первое уравнение в (1.14) для проверки, подставляем в него найденные значения интенсивностей и получаем тождество $10 = 1 + 5 + 4$, подтверждающее правильность произведённых вычислений.

Далее выполняем проверку стационарности СеМО. СеМО стационарна, если стационарны все СМО, т.е. если

$$\rho_j \le 1, \quad j=\overline{1,N} \tag{1.15}$$

Проверить эти условия после того, как определены, λj , не представляет труда. Например, для СеМО на рисунке 4 (1.15) выполняется, поскольку $\rho_1 = \lambda_1 \overline{T}_{обс1} = 10\cdot 0{,}07 = 0{,}7$; $\rho_2 = \lambda_2 \overline{T}_{обс2} = 5\cdot 0{,}06 = 0{,}3$;$\rho_3 = \lambda_3 \overline{T}_{обс3}/2 = 4\cdot 0{,}35/2 = 0{,}7$

Для стационарной экспоненциальной СеМО с известными интенсивностями λ_j расчёт локальных характеристик сводится к применению формул (1.2) - (1.13).

Например, для СеМО на рисунке 4 находим, что $\rho_1 = 0{,}7$, $L_1 = 1{,}63$, $M_1 = 2{,}33$, $\overline{T}_{ож1} = 0{,}163$, $\overline{T}_{пр1} = 0{,}233$; $\rho_2 = 0{,}3$, $L_2 = 0{,}13$, $M_2 = 0{,}43$, $\overline{T}_{ож2} = 0{,}026$, $\overline{T}_{пр2} = 0{,}086$; $\rho_3 = 0{,}7$, $\beta_0 = 0{,}176$, $L_3 = 0{,}402$, $M_3 = 1{,}802$, $\overline{T}_{ож3} = 0{,}1$, $\overline{T}_{пр3} = 0{,}45$.

1.3 Порядок выполнения работы

1. Изучить основные понятия теории массового обслуживания.
2. Изучить методику описания объектов системами массового обслуживания.
3. Изучить основные характеристики СМО и способы их вычисления в процессе функционирования системы.
4. Построить математическую модель исследуемой СМО.
5. Оценить требуемые в задании локальные характеритсики системы.

6. Дать интерпретацию результатов вычислительных экспериментов с моделью СМО.

1.4 Контрольные вопросы

1. Какие объекты называют СМО?
2. Перечислите характеристики СМО.
3. Какой характер имеет зависимость характеристик М, λ , $\overline{T}_{пр}$ от ρ в одноканальной экспоненциальной СМО?
4. Подстановка К = 1 в (1.8) – (1.13) должна дать формулы для расчёта характеристик одноканальной СМО. Проверьте, так ли это.
5. Что такое экспоненциальная СеМО?
6. Что такое уравнения баланса и для чего они применяются?
7. В чём состоят особенности моделирования многоканальных и многофазовых СМО?
8. Что составляет предмет исследования СМО?
9. По каким признакам различают СМО? Какова структура описания СМО?
10. Возможно ли улучшение характеристик СМО и какое?

1.5 Варианты заданий

1. Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию, на вход которой поступает простейший поток вызовов с интенсивностью λ=0,3 вызов/мин. Средняя продолжительность разговора $\overline{T}_{обс}$=3 мин, время разговора имеет показательное распределение. Определить пропускную способность СМО, объем буфера (длину очереди) на линии, а также вероятность отказа в обслуживании. Сравнить пропускную способность СМО с номинальной, которая была бы, разговор в точности длился бы три минуты, а заявки шли одна за другой непрерывно.
2. Железнодорожная сортировочная горка, на которую подаётся простейший поток составов с интенсивностью λ=2 состава в час, представляет собой одноканальную СМО с неограниченной очередью. Время обслуживания (роспуска) состава на горке имеет показательное распределение со среднем значением $\overline{T}_{обс}$=20 мин. Определить среднее число составов, связанных с горкой, среднее число составов в очереди, среднее время пребывания состава в СМО, среднее время пребывания состава в очереди.
3. Автозаправочная станция имеет две колонки (N=2). Площадка возле станции допускает одновременное ожидание не более 4 автомашин. Поток автомашин, прибывающих на станцию, простейший с интенсивностью λ=1 машина/мин. Время обслуживания автомашины - показательное со средним значением $\overline{T}_{обс}$=2 мин. Определить характеристики станции: пропускную способность станции, вероятность отказа обслуживания, среднее число автомашин в очереди и

в СМО, среднее время пребывания машин в очереди и в СМО, среднее число занятых каналов.

4. В зубоврачебном кабинете три кресла (N=3) , а в коридоре имеются три стула для ожидания приёма. Поток клиентов - простейший с интенсивностью λ=1,2 клиента/час. Время обслуживания клиента - показательное со средним значением $\overline{T}_{обс}$=20 мин. Если все три стула в коридоре заняты, клиент в очередь не становится. Определить среднее число клиентов, обслуживаемых кабинетом за час, среднюю долю обслуженных клиентов из числа пришедших, среднее число занятых стульев в коридоре, среднее время, которое клиент проведёт в коридоре и в кабинете.

5. СМО - билетная касса с одним окошком (N=1) и неограниченной очередью. Касса продаёт билеты в пункты А и В. Пассажиров, желающих купить билет в пункт А, проходит в среднем трое за 20 мин, пункт В - двое за 20 мин. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трёх пассажиров за 10 мин. Время обслуживания - показательное. Определить характеристики СМО: среднее число заявок в СМО, среднее число пассажиров в очереди, среднее время пребывания пассажиров в системе, среднее время простаивания пассажиров в очереди.

6. Одноканальная СМО - ЭВМ, на которую поступают заявки (требования на расчёты). Поток заявок - простейший с интенсивностью 10 требований в мин. Время обслуживания $\overline{T}_{обс}$=8 мин. Определить среднее число заявок в СМО и среднее число заявок в очереди, а также средние времена пребывания заявки в системе и в очереди.

7. Технические устройства (ТУ) на предприятии могут время от времени выходить из строя. Поток отказов ТУ - простейший с интенсивностью λ=1,6 отказа в сутки. Среднее время восстановления (ремонта) ТУ равно 0,3 ТУ в час. Определить среднюю долю времени, в течении которого ТУ работает; определить среднее число ТУ на предприятии и среднее число ТУ в очереди.

8. СМО - обувной магазин в котором покупатели проходят три фазы обслуживания: 1-я - примерка и выбор обуви; 2-я - уплата денег в кассу; 3-я - получение покупки. Поток покупателей простейший I=45 человек/ч. В отделе примерки имеется 4 стула. Среднее время примерки и выбора обуви равно 5 мин. Затем покупатель направляется в кассу, где вторично становится в очередь. Среднее время оплаты в кассе равно 1 мин. После оплаты покупатель идёт на контроль, где становится в новую очередь и получает покупку. На контроле работают три продавца. Среднее время выдачи покупки 2 мин. Все потоки событий - простейшие. Рассматривая магазин как трёхфазную СМО, найти характеристики её эффективности: среднее число покупателей в очереди к первой, второй, третьей фазам обслуживания; среднее время пребывания покупателя в первой, второй, третьей фазах обслуживания;

9. На железнодорожную станцию поступает простейший поток составов с интенсивностью I=1,2 состава/час. Среднее время обслуживания состава $\overline{T}_{обс}$=30 мин. Оценить характеристики эффективности станции: среднее число составов на станции, среднее время ожидания составом очереди на обслуживание.

10. Железнодорожная касса имеет два окошка, в каждом из которых продаются билеты в два пункта: Санкт-Петербург и Киев. Потоки пассажиров приобретающих билеты в Санкт-Петербург и в Киев по интенсивности одинаковы, λ=0,45 пасс./мин. Среднее время обслуживания пассажира 2 мин. Поступило рационализаторское предложение: для уменьшения очередей сделать обе кассы специализированными: в первой продавать билеты только в Санкт-Петербург, а во второй - только в Киев. Считая в первом приближении все потоки событий простейшими, проверить разумность этого предложения.

11. СМО - обувной магазин, в котором покупатели проходят три фазы обслуживания: 1-я - примерка и выбор обуви; 2-я - уплата денег в кассу; 3-я - получение покупки. Поток покупателей простейший I=45 человек/ч. В отделе примерки имеется 3 стула. Среднее время примерки и выбора обуви равно 5 мин. Затем покупатель направляется в кассу, где вторично становится в очередь. Среднее время оплаты в кассе равно 1 мин. После оплаты покупатель идёт на контроль, где становится в новую очередь и получает покупку. На контроле работают два продавца. Среднее время выдачи покупки 2 мин. Все потоки событий - простейшие. Рассматривая магазин как трёхфазную СМО, найти характеристики её эффективности: общее среднее число покупателей в магазине; общее среднее время затрачиваемое покупателями на приобретение обуви в магазине. В каком звене и как нужно улучшить обслуживание для того, чтобы сократить затраты времени покупателей?

12. СМО - железнодорожная касса, которая имеет три окошка, в каждом из которых интенсивности потоков пассажиров одинаковы, λ=0,45 пасс./мин. Среднее время обслуживания пассажира 5 мин. Найти характеристики эффективности СМО: общее среднее число пассажиров в железнодорожной кассе; общее среднее время затрачиваемое пассажирами на приобретение билетов в кассе; среднюю длину очереди в кассе.

1.6 Содержание отчета

- Описание задачи и ее интерпретация в модели СМО.
- Математическая модель СМО.
- Расчет локальных характеристик СМО.
- Анализ результатов расчета СМО.
- Ответы на контрольные вопросы.
- Выводы по проделанной работе.

1.7 Литература

1. Е.Н. Бендерская, Д.Н. Колесников и др. Моделирование систем с использованием теории массового обслуживания. Учебное пособие под ред. д.т.н. Д.Н. Колесникова. СПб.: СПб ГПУ, 2003. – 180 с.

2. Ю.И. Рыжиков Теория очередей и управление запасами. – СПб.: Изд-во «Питер», 2001. – 376 с.

Лабораторная работа №2
РАСЧЕТ СИСТЕМНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СМО

Цель работы: Исследование системных характеристик свойств экспоненциальных сетей массового обслуживания, расчет и анализ требуемых характеристик вариантов СеМО.

2.1 Описание объекта исследования

Характеристики СеМО определяются обычно на уровне средних значений и делятся на локальные и системные. К *локальным* характеристикам СеМО относятся характеристики всех входящих в нее СМО. *Системные* характеристики отражают свойства сети в целом, рассматриваемой как единая, неделимая на части система.

Наиболее важными системными характеристиками СеМО являются.

1) *Среднее время* $\overline{T}_{пр}$ *пребывания в сети.* Временем пребывания в сети называется время между приходом заявки в сеть и ее уходом из сети.

2) *Передаточные коэффициенты* α_{ij}, $i,j=\overline{1,N}$. Пусть заявка входит в сеть из i - го входного потока. Её маршрут в сети случаен, поэтому случайно и число приходов в j - ю СМО за время пребывания в сети. Среднее значение α_{ij}. этого числа приходов будем называть передаточным коэффициентом. Он однозначно определяется для любых i,j, матрицей P вероятностей передач.

3) *Входовые средние времена* $F_1,...,F_N$ пребывания в сети. Величина Fj определяется как среднее время пребывания в сети заявки, поступающей из j -го входного потока ($j=\overline{1,N}$).

4) *Условные пропускные способности* $B_1,...,B_N$. Предположим, что в заданной СеМО значение интенсивности I_j заменено на максимальное значение, при котором сеть ещё стационарна. Это значение B_j будем называть условной пропускной способностью по входу j .

При заданных I_k $(k\neq j)$ сеть стационарна для любых значений $I_j\leq B_j$.

5) *Абсолютные пропускные способности* A_j. Предположим, что в заданной СеМО интенсивности всех входных потоков, кроме j-го, заменены на нулевые, а I_j заменена на предельное значение, при котором сеть ещё стационарна. Это значение A_j будем называть абсолютной пропускной способностью по j -му входу.

Если $I_j>A_j$, то сеть нестационарна, каковы бы ни были интенсивности остальных входных потоков.

6) *Запасы* D_1 ,..., D_N, по пропускным способностям. Запас $D_j=B_j-J_j, j=\overline{1,N}$. Запас D_j показывает, насколько может быть увеличина интенсивность прихода заявок на j-ом входе (при заданных остальных) без нарушения условия стационарности/

Если в виде СеМО моделируется некоторая реальная система, то характеристики 1.2 – 1.7 могут дать ценную информацию о свойствах этой реальной системы. Например, если СеМО изображает вычислительную систему реального времени, то среднее время пребывания E характеризует среднее время ответа системы, а запасы Di выражают готовность системы продолжать устойчивое функционирование при увеличении нагрузки (интенсивности запросов) по тому.или.иному входу.

Среднее время пребывания заявки в СеМО рассчитывается по формуле

$$\overline{T}_{пр} = \frac{1}{I}\sum_{j=1}^{N} \lambda_j \overline{T}_{прj}\,, \tag{2.1}$$

где $I = I_1 + ... + I_N$. Эта формула выводится ниже.

Передаточные коэффициенты

Важное и полезное свойство передаточных коэффициентов состоит в следующем. В стационарном режиме при любых $I_1 + ... + I_N$ для $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ справедливо

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha_{11} I_1 + \alpha_{21} I_2 + \ldots + \alpha_{N1} I_N \\ \lambda_2 = \alpha_{12} I_1 + \alpha_{22} I_2 + \ldots + \alpha_{N2} I_N \\ \cdot \\ \lambda_N = \alpha_{1N} I_1 + \alpha_{2N} I_2 + \ldots + \alpha_{NN} I_N \end{cases} \tag{2.2}$$

Обратим внимание на то, что строка передаточных коэффициентов в (2.2) представляет собой столбец матрицы $\|\alpha_{ij}\|$. Система (2.2) выражает интенсивности λj прихода заявок в СМО через интенсивности $I_1 + ... + I_N$ входных потоков сети.

Приведем алгоритм вычисления матрицы $\|\alpha_{ij}\|$.

1) Составить уравнения баланса сети, включающие интенсивности I1,… I_N в буквенном виде,

2) Положить k= 1.

3) Решить уравнения баланса для случая, когда $I_k = 1$, остальные $I_i = 0$. Полученные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ записать в k-ую строку матрицы передаточных коэффициентов.

4) Положить k=k+1.

5) Если k<N, перейти к 3), иначе к 6).

6) Конец.

Свойства суммы, смеси и суммы случайного числа слагаемых

Среднее значение суммы случайных величин (сл. в.) равно сумме их средних, для $y = x_1 + ... + x_n$ справедливо

$$M(y) = M(x_1) + ... + M(x_n)\,. \tag{2.3}$$

Смесью сл. в. $x_1 ... x_n$ называется величина z , которая принимает значение x_1 с вероятностью $p_1, ..., x_n$ – с вероятностью p_n. Выбор i-й сл. в. x_i и ее значение статистически независимы.

Смесь обладает следующим свойством:

$$M(z) = p_1 M(x_1) + ... + p_n M(x_n). \quad (2.4)$$

Свойства суммы и смеси легко выводятся из определения понятий функции распределения вероятностей и математического ожидания.

Суммой τ случайного числа слагаемых назовем сумму вида $\tau = x_1 + ... + x_\gamma$; число γ слагаемых случайно; x_i - независимые сл.в. с одинаковыми средними $M(x_i) = M(x)$. Тогда

$$M(\tau) = M(\gamma)\, M(x). \quad (2.5)$$

Свойство (2.5) выводится из (2.3) и (2.4).

Входовое среднее время пребывания

Рассмотрим СеМО на рисунке 4 и проследим, как формируется входовое время пребывания в сети заявки первого потока. Видно, что это время состоит из двух слагаемых. Первое слагаемое есть время пребывания в СМО 1, составляющее в среднем $\overline{T}_{пр1}$. Второе слагаемое с вероятностью p_{10} равно нулю (заявка уходит из сети), с вероятностью p_{12} равно входовому времени пребывания для входа 2 (заявка входит в сеть через СМО 2) и с вероятностью p_{13} - входовому времени пребывания для входа 3. Из свойства смеси вытекает, что в среднем второе слагаемое составляет величину $p_{10} \cdot 0 + p_{12}F_2 + p_{13}F_3 = p_{12}F_2 + p_{13}F_3$. В целом среднее входовое время пребывания F1 по свойству суммы равно сумме средних значений первого и второго слагаемых:

$$F_1 = T_{пр1} + p_{12}F_2 + p_{13}F_3. \quad (2.6)$$

Рассуждая аналогично о входовых средних временах пребывания F_2 и F_3 можно записать для них сходные с (2.6) уравнения, которые вместе с (2.6) составят следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} F_1 &= \overline{T}_{пр1} + p_{12}F_2 + p_{13}F_3 \\ F_2 &= \overline{T}_{пр2} + F_1 \\ F_3 &= \overline{T}_{пр3} + F_1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Развернутая форма условия стационарности

Условие стационарности СеМО запишем в виде $\frac{\lambda_j T_j}{K_j} \le 1, \quad j = \overline{1,N}$

Эта запись эквивалентна следующей: $\lambda_j \le K_j / T_j, \quad j = \overline{1,N}$

Выражая λj через I_j по формуле (2.2), получим развернутую форму условия стационарности:

$$
\begin{cases}
\alpha_{11} I_1 + \alpha_{21} I_2 + \dots + \alpha_{N1} I_N \le K_1 / T_1 \\
\alpha_{12} I_1 + \alpha_{22} I_2 + \dots + \alpha_{N2} I_N \le K_2 / T_2 \\
\cdot \\
\alpha_{1N} I_1 + \alpha_{2N} I_2 + \dots + \alpha_{NN} I_N \le K_N / T_N
\end{cases}
\quad (2.8)
$$

Эта система неравенств эквивалентна (2.2).

Абсолютная пропускная способность

Используя развернутую форму условий стационарности, абсолютную пропускную способность A_i по i-му входу можно найти непосредственно по ее определению. Действительно, если все входные интенсивности СеМО, кроме Ii, положить равными нулю, то из (2.8) получим, что для стационарности необходимо условие:

$$
\begin{cases}
\alpha_{i1} I_i \le K_1 / \overline{T}_{обс1} \\
\alpha_{i2} I_i \le K_2 / \overline{T}_{обс2} \\
\cdot \\
\alpha_{iN} I_i \le K_N / \overline{T}_{обсN}
\end{cases}
$$

Это условие удобно переписать так:

$$
\begin{cases}
I_i \le K_1 / (\overline{T}_{обс1} \alpha_{i1}) \\
I_i \le K_2 / (\overline{T}_{обс2} \alpha_{i2}) \\
\cdot \\
I_i \le K_N / (\overline{T}_{обсN} \alpha_{iN})
\end{cases}
\quad (2.9)
$$

Из определения Ai вытекает, что эта величина равна максимальному из значений Ii, отвечающих (2.9). Следовательно, Ai равно наименьшей из правых частей в (2.9).

Условная пропускная способность

Условная пропускная способность, как и абсолютная, может быть найдена из (2.8). Для нахождения Bi в (2.8) следует подставить заданные значения всех входных интенсивностей СеМО, кроме Ij. Затем полученная система разрешается относительно Ii в виде

$$
\begin{cases}
I_1 \le B_1 \\
I_2 \le B_2 \\
\dots \\
I_N \le B_N
\end{cases}
\quad (2.10)
$$

и Bi находится как наименьшая из правых частей в (2.10). Если условие стационарности СеМО содержит лишь одно неравенство, как на рисунке 4, то нахождение B_i упрощается.

Запасы по пропускным способностям

Формула для вычисления запасов Di дана непосредственно в их определении.

2.2 Пример анализа СеМО

Рассмотрим пример расчета системных характеристик для СеМО на рисунке 4

Среднее время пребывания заявки в СеМО

$$\bar{T}_{пр} = \frac{\sum_{j=1}^{3} \lambda_j \bar{T}_{прj}}{I_1 + I_2 + I_3} = \frac{10 \cdot 0{,}233 + 5 \cdot 0{,}086 + 4 \cdot 0{,}45}{1+0+0} = 4{,}56 \text{ с.}$$

Передаточные коэффициенты

Значения коэффициентов α_{ij} однозначно определяются матрицей Р вероятностей передач. Из (2.2) вытекает, что при $I_2 = ... = I_N = 0, I_1 = 1$ имеет место

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha_{11} \\ \lambda_2 = \alpha_{12} \\ \quad . \\ \lambda_N = \alpha_{1N} \end{cases}$$

Это позволяет найти строку коэффициентов α_{1j} - матрицы $\|\alpha_{ij}\|$ путем решения уравнений баланса сети для случая $I_1 = 1, I_2 = ... = I_N = 0$: найденные значения λ_1 , . . . , λ_N будут численно равны коэффициентам $\alpha_{11},...,\alpha_{1N}$. Аналогично для случая, когда I_k=1, остальные $I_i = 0$. решение уравнений баланса даст значения $\alpha_{k1},...,\alpha_{kN}$.

Найдем матрицу $\|\alpha_{ij}\|$ для СеМО на рисунке 4, составим уравнения баланса:

$$\begin{cases} \lambda_1 = I_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ I_1 + I_2 + I_3 = p_{10} \\ \lambda_2 = p_{12}\lambda_1 + I_2 \\ V_3 = p_{13}\lambda_1 + I_3 \end{cases}$$

Решим эти уравнения для I1=1, I2=I3=0. Получим λ1=10, λ2=5, λ3=4. Для I2=1, I1=I3=0 решением будет λ_1=10, λ_2=6, λ_3=4 и для I3=1, I1=I2=0 решением будет λ_1=10, λ_2=5, λ_3=5.

Следовательно, матрица $\|\alpha_{ij}\|$ этой СеМО имеет вид:

$$\begin{matrix} 10 & 5 & 4 \\ 10 & 6 & 4 \\ 10 & 5 & 5 \end{matrix}$$

Входовое среднее время пребывания

Из системы (2.7) при известных $\bar{T}_{пр}j$ (найденных при расчете схемы на рисунке 4 нетрудно найти F_1 = 4,56, F_2 = 4,64, F_3 = 5,01,

Развернутая форма условия стационарности

Для конкретных СеМО некоторые из неравенств системы (2.8) оказываются излишними: такие неравенства можно исключать из системы (2.8), не изменяя решения системы. Например, для СеМО (рисунок 4) условие (2.8) примет вид

$$
\begin{gathered}
10 I_1 + 10 I_2 + 10 I_3 \le 1/0{,}07 \\
5 I_1 + 6 I_2 + 5 I_3 \le 1/0{,}06 \\
4 I_1 + 4 I_2 + 5 I_3 \le 2/0{,}35
\end{gathered}
$$

или, после сокращения на положительные коэффициенты,

$$
\begin{gathered}
I_1 + I_2 + I_3 \le 10/7 \\
I_1 + 1{,}2 I_2 + I_3 \le 10/3 \\
I_1 + I_2 + 1{,}25 I_3 \le 10/7
\end{gathered}
\qquad (2.11)
$$

В этой системе второе неравенство вытекает из первого (сравните их, предварительно умножив первое на 1,2). Поэтому второе неравенство может быть отброшено. Кроме того, первое неравенство вытекает из третьего, поэтому его тоже можно отбросить. Следовательно, условие стационарности (2.11) эквивалентно следующему:

$$
I_1 + I_2 + 1{,}25 I_3 \le 10/7\,. \qquad (2.12)
$$

Абсолютная пропускная способность

Для СеМО на рисунке 4 нахождение Ai несколько упрощается благодаря тому, что условие стационарности сети (2.12) содержит лишь одно неравенство. Так, полагая $I_2 = I_3 = 0$ для I_1 из (2.12) получим $I_1 \le 10/7$, откуда $A_1 = 10/7$. Аналогично вычисляются $A_2 = 10/7$ и $A_3 = 8/7$. Вполне естественно, что найденные значения совпадают с максимальными значениями для I_i, показанными в правых частях уравнений (2.11).

Условная пропускная способность

Условную вероятность для рассматриваемой СеМО найдем из (2.12):

$B_1 = 10/7$, $B_2 = 3/7$, $B_3 = 12/35$.

Запасы по пропускным способностям

Для СеМО на рисунке 4 запасы составляют $D_1 = 10/7-1=3/7$, $D_2 = 3/7-0=3/7$, $D_3 = 12/35-0=12/35$.

2.3 Порядок выполнения работы

1. Изучить основные системные характеристики СеМО и способы их вычисления в процессе функционирования сети.
2. Построить математическую модель исследуемой СеМО.
3. Оценить требуемые в задании системные характеристики сети.
4. Дать интерпретацию результатов вычислительных экспериментов с моделью СеМО.

2.4 Контрольные вопросы

1. Перечислите системные характеристики СеМО.

2. Пусть локальные характеристики разомкнутой экспоненциальной СеМО известны. Изобразите блок-схему, отражающую последовательность, в которой вычисляются системные характеристики, и исходные данные, необходимые для определения каждой их них.

3. Объясните в чем физический смысл характеристики «запасы по пропускным способностям».

4. Объясните в чем физический смысл характеристики «условная пропускная способность».

5. Предположим, что все входные потоки некоторой СеМО, кроме 2-го и 3-го, имеют нулевые интенсивности Ii=0, и требуется найти характеристики Fi, Bi, Ai, Di для i=2,3. Необходимо ли для этого вычислить всю матрицу $\|\alpha_{ij}\|$ передаточных коэффициентов или достаточно иметь ее 2-ю и 3-ю строки? Если достаточно, то как по ним найти требуемые характеристики?

2.5 Варианты заданий

На рисунке 5 изображена экспоненциальная СеМО, имеющая следующие параметры:

1) N = 6;
2) K1= 1, K_2= 1, K_3 = 2, K4= 1, K_5= 1, K_6= 1,
3) p_{40} =0,3, p_{45} = 0,5, p_{46}= 0,2;
4) I_1 = 1/100, I_2 = 1/70, I_3= 1/50 (заявок в секунду);
5) $\overline{T}_{обс1}$= 50, $\overline{T}_{обс2}$= 35, $\overline{T}_{обс3}$= 90, $\overline{T}_{обс4}$=7, $\overline{T}_{обс5}$ = 15, $\overline{T}_{обс6}$= 40 с.

Определим *правила удаления* СМО из заданной (рисунок 5) сети следующим образом. Если удаляется СМО с номером от 1 до 3, то удаляется также соответствующий входной поток. Например, при удалении СМО 1 удаляется поток с интенсивностью I_1. Если удаляется СМО с номером 5 или 6, то вероятность p_{40} увеличивается соответственно на p_{45} (т.е. на 0,5) или p_{46} (т.е. на 0,2). Например, при удалении СМО 5 вероятность p_{40} увеличивается на 0.5 и становится равна 0,8. После удаления СМО оставшиеся СМО нумеруются заново.

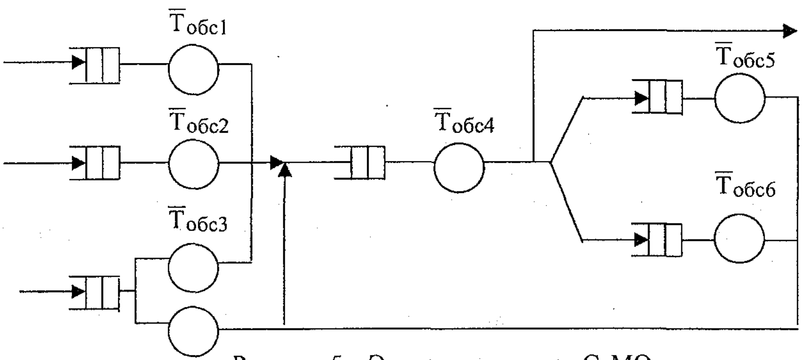


Рисунок 5 – Экспоненциальная СеМО

В таблице 1 заданы варианты СеМО, получаемые путём удаления различных СМО из сети (рисунок 5). Удаляемые СМО указаны знаком « - », остающиеся - знаком « + ». Требуется рассчитать локальные характеристики для указанных вариантов СеМО

Для варианта СеМО рассчитать характеристики E, Fi, Bi, Ai, Di. Характеристики Fi, Bi, Ai, Di рассчитать только для тех i для которых $Ii \neq 0$.

Таблица 1

Номер варианта	Номера СМО					
	1	2	3	4	5	6
1	+	+	-	+	-	+
2	+	+	-	+	+	+
3	-	-	+	+	-	+
4	-	+	-	+	-	+
5	-	+	-	+	+	+
6	+	-	-	+	+	+
7	+	+	-	+	+	-
8	-	-	+	+	+	-
9	-	+	-	+	+	-
10	+	+	+	+	-	-
11	+	+	+			+
12	+		+	+		+
13	-	+	-	+	-	+
14	+	-	+	+	+	-
15	+	+	-	+	-	+

2.6 Содержание отчета

- Условие задачи.
- Схема полученного после удаления варианта СеМО с исходными параметрами.
- Математическая модель СеМО.
- Расчет системных характеристик СМО.
- Анализ результатов расчета СеМО.
- Ответы на контрольные вопросы.
- Выводы по проделанной работе.

2.7 Литература

1. Е.Н. Бендерская, Д.Н. Колесников и др. Моделирование систем с использованием теории массового обслуживания. Учебное пособие под ред. д.т.н. Д.Н. Колесникова. СПб.: СПб ГПУ, 2003. – 180 с.

2. Ю.И. Рыжиков Теория очередей и управление запасами. – СПб.: Изд-во «Питер», 2001. – 376 с.

Лабораторная работа №3
ИМИТАЦИЯ ПОТОКОВ СОБЫТИЙ

Цель работы: Освоение методов моделирования потоков событий. Имитация потока входных заявок в системах массового обслуживания.

3.1 Описание объекта исследования

Потоком событий называют последовательность однородных событий, появляющихся одно за другим в случайные моменты времени. Примеры: поток вызовов на телефонной станции; поток забитых шайб при игре в хоккей; поток сбоев ЭВМ; поток заявок на проведение регламентных работ в вычислительном центре и т.п. Имитацию потоков событий наиболее часто приходится проводить при исследование систем массового обслуживания.

С потоком событий можно связывать различные случайные события, но не имеет смысла говорить о вероятностях "событий", образующих поток.

Поток событий случаен, поэтому вычислить можно только какую-то его конкретную реализацию.

Поток событий наглядно изображается рядом точек с абсциссами t1,t2,...,tj,...(например, последовательностью моментов времени, в которые в систему поступают заявки). При вероятностном описании поток событий может быть представлен последовательностью случайных величин-промежутков времени между последовательными событиями:

$$z_1=t_1;$$
$$z_2=t_2 - t_1;$$
$$z_3=t_3 - t_2;$$
$$\ldots\ldots;$$
$$z_j=t_j - (t_{j-1}).$$
$$\ldots\ldots.$$

Тогда последовательность случайных величин представляется следующим образом: t_1, $t_2=t_1+z_2$, $t_3=t_2+z_3$ и т.д.

В общем случае для задания последовательности случайных величин z_m (m=1,2,3,...) требуется указать совместные функции распределения
$F(x_1,x_2,...,x_m) = P[z_1<x_1,...,z_M<> x_M$

Такое описание очень громоздко, в связи с чем на практике используются частные типы потоков событий, допускающие более простое описание.

Наиболее часто используются стационарные потоки с ограниченным последствием. Для этих потоков вероятность попадания того или другого числа событий на любой интервал времени зависит только от длины этого интервала и не зависит от расположения интервала на оси времени, а сами интервалы z_j - независимые случайные величины с одинаковой плотностью распределения $f_i(x)=f(x)$ (i=2,3,...).Плотность распределения $f1(x)$- момента поступления t_1 первой заявки может отличается от $f(x)$ и связана с ней формулой

$$f_1(x)=\lambda\left(1-\int_0^x f(t)dt\right)$$

где λ - интенсивность потока событий.

Способ моделирования стационарного потока с ограниченным последствием достаточно прост. Сначала получают реализацию случайной величины с плотностью $f(x)$ и находят момент времени появления первого события – t_1. Далее последовательно осуществляется следующая процедура. Пусть t_j - момент наступления j-го события уже вычислен. Получаем реализацию z случайной величины с плотностью распределения вероятностей $f(x)$ и вычисляем момент t_{j+1} прихода очередного события: $t_{j+1}=t_j+z$ и т.д.

Рассмотрим конкретные, часто используемые, типы потоков и способы их имитации.

Простейший (пуассоновский) поток

Интервал времени между двумя соседними событиями простейшего потока имеет распределение:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ (x>0),$$

где λ - интенсивность потока.

Используя метод имитации показательного (экспоненциального) распределения, получаем следующий способ моделирования пуассоновского потока:

$t_0=0$; $t_j= t_{j-1} - (1/\lambda)\ \ln U$, (j=1,2,3,...).

Величина U – случайное число, получаемое от датчика случайных чисел.

Равномерный поток

Для этого потока событий считается, что промежуток времени между последовательными событиями равномерно распределён на интервале [a,b], т.е.

$f(x)=1/(b-a)$, $(a>x>b)$.

Можно подсчитать, что

$f1(x)=2(b-x)/(b-a)2$;

$F1(x)=1-[(b-x)2/(b-a)2]$, $(a>x>b)$

Применяя для моделирования метод обратной функции, получим алгоритм вычисления первого момента времени

$$t_1=b-(b-a)\sqrt{u}\ ,$$

где u получают от датчика случайных чисел.

Окончательно имеем следующий алгоритм моделирования равномерного потока:

1) момент времени t_1 наступления первого события вычисляется по формуле

$$t_1=b-(b-a)\sqrt{u}$$

2) для последующих моментов времени производимы вычисления по формуле

$$t_j=t_{j-1}+a+(b-a)u;$$

Величина u вырабатывается датчика случайных чисел.

Поток Эрланга порядка k

Потоком Эрланга k-го порядка называют поток событий, получающегося "прореживанием" простейшего потока, когда сохраняется каждая k-я точка (событие) в потоке, а все промежуточные выбрасываются.

Интервал времени между двумя соседними событиями в потоке Эрланга k-го порядка представляет собой сумму k независимых случайных величин $z_1, z_2, \ldots, z_k$, имеющих показательное распределение с параметром λ:

$$z = \sum_{i=1}^{k} z_i$$

Закон распределения случайной величины z называется законом Эрланга k-го порядка и имеет плотность

$$f_m(x) = \frac{\bar{\lambda}\left(\bar{\lambda}x\right)^{m-1} e^{-\bar{\lambda}x}}{(m-1)!}, \ (x > 0).$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины z соответственно равны: $M[z]=k/\lambda$; $D[z]=k/\lambda 2$.

На основе определения потока Эрланга получается простой способ моделирования: прореживается пуассоновский поток с интенсивностью $\bar{\lambda}=\lambda/k$, т.е. в пуассоновском потоке допускаем моменты времени с номерами $1,2,\ldots,k-1$, а k-й момент оставляем, т.к. он принадлежит новому потоку и т.д. Таким образом, моменты времени потока Эрланга вычисляются по формулам:

$$t_1 = 0;$$

$$t_j = t_{j-1} - \left(1/\bar{\lambda}\right)\ln u_1 - \left(1/\bar{\lambda}\right)\ln u_2 - \ldots - \left(1/\bar{\lambda}\right)\ln u_k, j=1,2,3,\ldots,$$

где λ - интенсивность потока Эрланга k-го порядка, u_j - случайные числа от ДСЧ.

3.2 Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с основными типами потоков событий.
2. Ознакомиться с методами моделирования пуассоновского, равномерного потока событий и потока Эрланга порядка k.
3. Составить алгоритм и программу имитации результирующего потока, указанного в варианте.
4. Первые 100 моментов времени поступления заявок в результирующем потоке вывести на печать.
5. По первым 1000 заявкам рассчитать оценку средней интенсивности потока. Найденную оценку сравнить с теоретическим значением интенсивности потока.
6. Оформить отчет о проделанной работе.

3.3 Контрольные вопросы

1. Дать определение потока событий.

2. Как строится вероятностное описание потока событий.
3. В чём состоит способ моделирования стационарного потока с ограниченным последействием.
4. Охарактеризовать пуассоновский поток и способ его моделирования.
5. Охарактеризовать равномерный поток и способ его моделирования.
6. Дать характеристику потока Эрланга k-го порядка и метода его имитации.
7. Привести характеристики потока событий, исследованного в лабораторной работе.

3.4 Варианты заданий

В некоторую систему массового обслуживания по различным каналам поступают заявки, образующие поток событий заданного типа. На входе системы потоки сливаются в один. Параметры сливающихся потоков приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Варианты заданий

Поток образован слиянием трёх пуассоновских потоков событий с интенсивностями λ_1, λ_2, λ_3 (1/с)			
Вариант	λ_1,	λ_2	λ_3
1	2,5	5	1,5
2	3	0,5	2
3	2,5	3	0,5
4	5	0,5	0,5

Поток образован слиянием двух равномерных потоков с параметрами a_1, b_1 и a_2, b_2 (с)				
Вариант	a_1	b_1	a_2	b_2
5	1	3	1	2
6	1,5	2,5	2	3
7	0	2	2	3

Поток образован слиянием пуассоновского потока с интенсивностью λ (1/с) и равномерного потока с параметрами a и b (с)			
Вариант	λ	a	b
8	0,5	2	4
9	2	0,5	1
10	1	0	2
11	2	0,5	1

Результирующий поток является потоком Эрланга k-го порядка с интенсивностью λ (1/с)		
Вариант	k	λ
12	2	0,5
13	4	0,4
14	4	1
15	3	1

3.5 Содержание отчета

- Условие задачи и исходные данные.
- Алгоритм и программа имитации результирующего потока, указанного в варианте.
- Листинг первых 100 моментов времени поступления заявок в результирующем потоке.
- Результат расчета оценки средней интенсивности потока для первых 1000 заявок.
- Результат сравнения найденной оценки с теоретическим значением интенсивности потока.
- Выводы по проделанной работе.

3.6 Литература

1. В. Кельтин, А. Лоу Имитационное моделирование. Пер. с англ. – СПб.: Изд-во Питер; Киев: Изд. группа БХВ, 2004. – 847 с.

2. С.А. Буженков, Е.А. Ракитина Моделирование и формализация. Методическое пособие. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 336 с.

Лабораторная работа №4
МОДЕЛИ РАСЧЕТНО-ЛОГИЧЕСКОГО ТИПА

Цель работы: Познакомиться с моделями расчетно-логического типа. Выполнить поиск решения на расчетно-логической модели с использованием алгоритмов прямой волны и обратной волны.

4.1 Описание объекта исследования

К моделям расчетно-логического типа относятся функциональные семантические сети - сети математических отношений, под которыми понимается структура следующего вида:

$$x * y * z = 0, \tag{6}$$

где * – символ некоторой алгебраической операции.

Например, периметр треугольника равен сумме всех его сторон. Данное утверждение записывается следующим образом: $p = a + b + c$. Здесь a, b, c – стороны треугольника, p – периметр. Данное выражение есть «разрешение» следующего математического отношения:

$$a + b + c - p = 0 \tag{7}$$

Множество показателей проблемной области (ПО) входят в различные математические отношения, которые таким образом оказываются связанными через эти показатели между собой. Таким образом, функциональная сеть – это граф (X, F, G), где X – вершины графа, отображающие множество показателей ПО , F –

вершины, отображающие математические отношения, а G – ребра, связывающие некоторые подмножества вершин из X с некоторыми подмножествами вершин из F. В качестве примера рассмотрим фрагмент функциональной сети, описывающей проблемную область "треугольник". Пусть a, b, c – стороны треугольника, A, B, C – его углы, ha, hb, hc – высоты (высота ha проведена к стороне a, высота hb – к стороне b и высота hc – к стороне c), p – периметр и S – площадь треугольника. Соответствующий фрагмент функциональной сети представлен на рисунке 6.

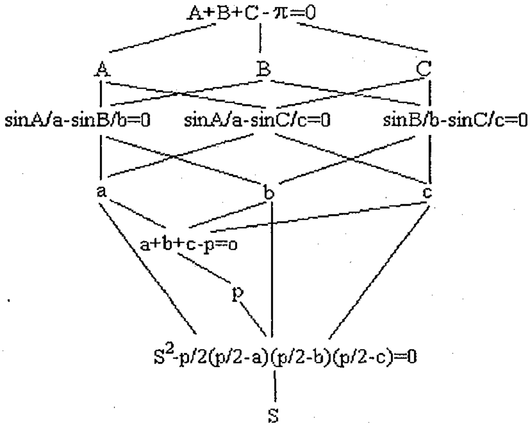


Рисунок 6 – Пример функциональной семантической сети

Рассмотрим алгоритмы поиска решений на моделях расчетно-логического типа.

Прежде всего необходимо выбрать представление, в котором реализуются процедуры поиска решений и организации вычислительного процесса. В качестве такого представления целесообразно выбрать представление в пространстве состояний. Тогда задача поиска решений формально описывается следующим образом: $T = < S, S_o, S_k, F>$, где S_o – начальное состояние, S_k – конечное состояние или состояния, S – множество промежуточных состояний, $F = \{F^{\eta}{}_{i}\}$ – множество операторов, которые переводят процесс поиска из одного состояния в другое. Каждому математическому отношению F_i поставим в соответствие список (кортеж) входящих в него параметров. Таким образом, рассматриваемый алгоритм предусматривает работу со списочными структурами данных.

При поиске решений в моделях расчетно-логического типа в качестве множества операторов выступают разрешения математических отношений $F^{\eta}{}_{i}$, реализуемые в виде отдельных программных модулей, совокупность которых для данной проблемной области составляет локальную (быть может, одну из многих) базу процедур. Здесь верхний индекс η указывает на параметр, который в данном разрешении выступает как функция, а нижний индекс i – на номер соответствующего математического отношения в совокупности математических отношений. Задание исходных данных определяет начальное состояние S_0, а искомое решение – конечное (целевое) состояние. Выбор на каждом очередном шаге некоторого конкретного оператора осуществляется в соответствии с некоторыми правилами, которые для данной проблемной области составляют локальную базу правил.

Алгоритм 1. Стратегия обратной волны

В алгоритме обратной волны реализуется поиск решения задачи с целевого состояния, т.е. от искомого параметра. Суть алгоритма состоит в следующем. В соответствии с алгоритмом поиска решений образуются следующие списки: S_1 – список параметров, которые должны быть рассчитаны; S_2 – список параметров, для которых выбраны разрешения для расчета; дополнительно образуем еще два списка: S_3 – список разрешений, включаемых в план решения задачи; S_4 – список оценок сложности реализации разрешения, выбранного в план решения задачи. Данные оценки позволяют при наличии нескольких планов выбрать наилучший, т. е. реализовать классическую постановку задачи принятия решений.

Шаг 1. Поместить искомый параметр в список S_2 и найти разрешение (в дальнейшем оператор F^{η}_{i}), с помощью которого может быть рассчитан искомый параметр. Если таких разрешений несколько, выбрать разрешение, содержащее наименьшее число неизвестных аргументов. Если все аргументы данною оператора известны, то план решения найден, можно переходить к собственно организации вычислений, иначе - записать неизвестные аргументы в список S_1 и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Упорядочить список S_1 в соответствии со следующим правилом: самым первым в списке поместить параметр, для которого разрешение имеет наибольшее число неизвестных аргументов, а на последнее место – параметр, для которого все аргументы известны (если такое разрешение имеет место). Перейти к шагу 3.

Шаг 3. Выбрать очередной неизвестный параметр из списка S_1 и поместить его в список S_2. Если это был последний в списке параметр и список S_1 стал пустым, то поиск данного плана решения закончен, можно переходить либо к поиску следующего возможного плана, либо к организации вычислений в соответствии с данным планом. Иначе – поместить неизвестные аргументы данного разрешения в список S_1, и перейти к шагу 2.

Если набор математических отношений является неполным, возможно возникновение ситуаций, когда в рамках данного набора математических отношений и принятых правил выбора не удается найти маршрут для вычисления требуемою параметра. Таким образом, возникает тупиковая ситуация.

Тупиковая ситуация – это появление стыков и вилок. Стык – когда оператор F^{η}_{i} не имеет выхода, а вилка – когда оператор F^{η}_{i} не имеет на входе данных. Еще одна ситуация может встретиться, когда в процессе формирования рабочей программы (организации вычислительного процесса) образуются циклы, т.е. для расчета некоторою параметра требуется знать значение этого же параметра.

Алгоритм 2. Стратегия прямой волны

В алгоритме прямой волны планирование идет от исходных данных к целевому параметру. Суть алгоритма состоит в следующем.

Обозначим: $N_{\text{чп}}$ – число параметров в математическом отношении; D – число заданных исходных данных (значений параметров); $N_{\text{чнп}}$ – число параметров, оставшихся неизвестными; $N_{\text{чип}}$ – число параметров, найденных (известных) на данном шаге применением соответствующего оператора F.

Шаг 1. Пометить параметры, значения которых известны, и для каждого F_i (списка параметров) рассчитать значение $N_{\text{чнп}} = N_{\text{чп}} - D_i^j$, где j – номер шага алгоритма и $D_i^{j=0} <= D$

Шаг 2. Пометить F^{η}_i, $i \in (1, M)$ (M есть полное множество математических отношений, описывающих проблемную область решаемых задач), для которых $N = 1$; положить в каждом из помеченных через F_i списков параметров неизвестный параметр η как функцию и вычислить его значение во всех F_i

В результате выполнения данного шага множество известных параметров расширится от D до $D_j > D$.

Шаг 3. Перейти к шагу 1.

Поиск решения можно представить графом состояний следующего вида.

S_0:< a^*, b^*, $c^*|d$ >

↓

F^d; S_1:< a^*, b^*, c^*, d^$|e$ >

↓

F^e; S_2:< a^*, b^*, c^*, d^, e^$|f$>

↓

↓

F^f;S_k:< a^*, b^*, c^*, d^, e^, f^$|z$ >

↓

F^z

В данном алгоритме за один шаг находятся все разрешения, с помощью которых могут быть рассчитаны какие-либо параметры. Далее пересчитываются значения N_i, и действие повторяется. И так до момента, пока на некотором шаге в число рассчитываемых не попадет целевой параметр F^z.

В общем случае при реализации данного алгоритма могут быть лишние вычисления а именно вычисления параметров, которые не являются необходимыми при расчете целевого параметра. Тогда, сформулировав некоторые дополнительные правила, можно уменьшить сложность вычислительного алгоритма. Ситуация несколько усложняется в случае задания на расчет не одного, а нескольких целевых параметров.

Как нетрудно заметить, возможна модификация данного алгоритма, когда на каждом шаге определяется первый оператор F_i для которого $N_i^j=1$, и рассчитывается соответствующий параметр. После этого поиск повторяется.

4.2 Примеры поиска решений на функциональной сети

Рассматривая в качестве примера проблемной области геометрическую фигуру – треугольник, сведем основные соотношения, связывающие параметры треугольника в табл.3.

Таблица 3

Обозначение	Математическое отношение	Параметры, связанные отношением
$F1$	$A + B + C - \pi = 0$	A, B, C
$F2$	$\frac{\sin A}{a} - \frac{\sin B}{b} = 0$	A, B, a, b
$F3$	$\frac{\sin B}{b} - \frac{\sin C}{c} = 0$	B, C, b, c
$F4$	$\frac{\sin A}{a} - \frac{\sin C}{c} = 0$	A, C, a, c
$F5$	$a^2 - b^2 - c^2 + 2bc\cos A = 0$	A, a, b, c
$F6$	$b^2 - a^2 - c^2 + 2ac\cos B = 0$	B, a, b, c
$F7$	$c^2 - a^2 - b^2 + 2ab\cos C = 0$	C, a, b, c
$F8$	$p - a - b - c = 0$	p, a, b, c
$F9$	$S^2 - \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 0$	S, p, a, b, c
$F10$	$S - \frac{1}{2}h_a a = 0$	S, h_a, a
$F11$	$S - \frac{1}{2}h_b b = 0$	S, h_b, b
$F12$	$S - \frac{1}{2}h_c c = 0$	S, h_c, c
$F13$	$h_a - c\sin B = 0$	B, h_a, c
$F14$	$h_a - b\sin C = 0$	C, h_a, b
$F15$	$h_b - a\sin C = 0$	C, h_b, a
$F16$	$h_b - c\sin A = 0$	A, h_b, c
$F17$	$h_c - b\sin A = 0$	A, h_c, b
$F18$	$h_c - a\sin B = 0$	B, h_c, a
$F19$	$a - b\cos C - c\cos B = 0$	B, C, a, b, c
$F20$	$b - a\cos C - c\cos A = 0$	A, C, a, b, c

Обозначение	Математическое отношение	Параметры, связанные отношением
$F21$	$c-a\cos B-b\cos A=0$	A, B, a, b, c
$F22$	$\sin\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}=0$	A, b, c, p
$F23$	$\sin\frac{B}{2}-\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}=0$	B, a, c, p
$F24$	$\sin\frac{C}{2}-\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}=0$	C, a, b, p
$F25$	$\cos\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=0$	A, a, b, c, p
$F26$	$\cos\frac{B}{2}-\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}=0$	B, a, b, c, p
$F27$	$\cos\frac{C}{2}-\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}=0$	C, a, b, c, p
$F28$	$tg\frac{A}{2}-\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=0$	A, a, b, c, p
$F29$	$tg\frac{B}{2}-\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}=0$	B, a, b, c, p
$F30$	$tg\frac{C}{2}-\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}=0$	C, a, b, c, p
$F31$	$\sin A-\frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=0$	A, a, b, c, p
$F32$	$\sin B-\frac{2}{ac}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=0$	B, a, b, c, p
$F33$	$\sin C-\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=0$	C, a, b, c, p
$F34$	$\omega_a-\frac{1}{b+c}\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}=0$	ω_a, a, b, c
$F36$	$\omega_c-\frac{1}{a+b}\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}=0$	ω_c, a, b, c

Обозначение	Математическое отношение	Параметры, связанные отношением
$F37$	$m_a - \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} = 0$	m_a, a, b, c
$F38$	$m_b - \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} = 0$	m_b, a, b, c
$F39$	$m_c - \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} = 0$	m_c, a, b, c

Пусть дана одна сторона треугольника и два прилежащих к ней угла: c, A, B и требуется определить площадь треугольника S.

Как видно, искомый параметр S входит в отношения F9 – F12, причем последнее содержит наименьшее число неизвестных аргументов. Выпишем из табл.3 первые 12 отношений и пометим символом * известные аргументы. Поэтому выбираем разрешение, соответствующее данному отношению. Далее схему решения задачи по алгоритму 1 (обратной волны) представим следующим образом:

$F1$	A^*, B^*, C	S_1	S_2	S_3	S_4	
$F2$	A^*, B^*, a, b	S	-	-	-	исх.сост.
$F3$	B^*, C, b, c^*	h_c	S	$F12$	$L12$	шаг1
$F4$	A^*, C, a, c^*	-	-	-	-	шаг2
$F5$	A^*, a, b, c^*	b	h_c	$F17$	$L17$	шаг3
$F6$	B^*, a, b, c^*	-	-	-	-	шаг2
$F7$	C, a, b, c^*	C	b	$F3$	$L3$	шаг3
$F8$	p, a, b, c^*	-	-	-	-	шаг2
$F9$	S, p, a, b, c^*	-	C	$F1$	$L1$	шаг3
$F10$	S, h_a, a					
$F11$	S, h_b, b					
$F12$	S, h_c, c^*					
$F13$	B^*, h_a, c^*					
$F14$	C, h_a, b					
$F15$	C, h_b, a					
$F16$	A^*, h_b, c^*					
$F17$	A^*, h_c, b					
$F18$	B^*, h_c, a					

Так как список S1 пуст, то план решения найден и дерево поиска решения будет выглядеть следующим образом:

$<A^*, B^*, c^*> \to F(1, C) \to C \to F(3,b) \to b \to$
$\to F(17, h_c) \to h_c \to F(12, S) \to S,$

где $F(12, S)$ есть разрешение математического отношения $F12$ относительно S.

Суть алгоритма 2 прямой волны рассмотрим на первом примере алгоритма 1. Дано: c, A, B. Требуется определить S.

Обозначим через ЧП – число параметров в математическом отношении;

ЧНП – число неизвестных параметров; ЧИП – число параметров, найденных (известных) на данном шаге применением соответствующего оператора F.

Составим таблицу 4 следующего вида

Таблица 4

	ЧП	Шаг алгоритма							
		1		2		3		4	
		ЧНП	ЧИП	ЧНП	ЧИП	ЧНП	ЧИП	ЧНП	ЧИП
$F1$ A^*, B^*, C	3	1	1(C)	0	0	0	0	0	0
$F2$ A^*, B^*, a, b	4	2	0	2	0	0	0	0	0
$F3$ B^*, C^*, b, c^*	4	2	0	1	1(b)	0	0	0	0
$F4$ A^*, C^*, a, c^*	4	2	0	1	1(a)	0	0	0	0
$F5$ A^*, a^*, b^*, c^*	4	2	0	2	0	0	0	0	0
$F6$ B^*, a^*, b^*, c^*	4	2	0	2	0	0	0	0	0
$F7$ C^*, a^*, b^*, c^*	4	2	0	2	0	0	0	0	0
$F8$ p, a^*, b^*, c^*	4	3	0	3	0	1	1(p)	0	0
$F9$ S, p, a^*, b^*, c^*	5	4	0	4	0	2	0	1	1(S)

Целевое состояние↑

Поиск решения можно представить графом состояний следующего вида:

S_0 - A^*, B^*, c^* |
S_1 $A^*, B^*, c^*|C^*$ |
↓ S_2 $A^*, B^*, c^*, C^*|b^*$ |
F1(C) ↓ S_3 $A^*, B^*, c^*, C^*, b^*|a^*$ |
F3(b) ↓ S4 $A^*, B^*, c^*, C^*, b^*, a^*|p^*$ |$F9(S)$ |
F4(a) ↓ S_k $A^*, B^*, c^*, C^*, b^*, a^*, p^*|S$
F8(p) ↓
Целевое состояние

В данном алгоритме после каждого шага, на котором находится какой-либо параметр, пересчитываются значения ЧНП и повторяется поиск следующего оператора F (разрешения математического отношения) для какого-то другого параметра. И так до нахождения целевого параметра.

Рассмотрим следующую модификацию данного алгоритма, представленного в таблице 5.

Таблица 5

Отношение	ЧП	Шаг алгоритма					
		1		2		3	
		ЧНП	ЧИП	ЧНП	ЧИП	ЧНП	ЧИП
$F1\ A^*, B^*, C$	3	1	1(C)	0	0	0	0
$F2\ A^*, B^*, a, b$	4	2	0	2	0	–	–
$F3\ B^*, C, b, c^*$	4	2	0	1	1(b)	–	–
$F4\ A^*, C, a, c^*$	4	2	0	1	1(a)	–	–
$F5\ A^*, a, b, c^*$	4	2	0	2	0	0	0
$F6\ B^*, a, b, c^*$	4	2	0	2	0	0	0
$F7\ C, a, b, c^*$	4	3	0	2	0	0	0
$F8\ p, a, b, c^*$	4	3	0	3	0	1	1(p)
$F9\ S, p, a, b, c^*$	5	4	0	4	0	2	0
$F10\ S, h_a, a$	3	3	0	2	0	1	1(S)
$F11\ S, h_b, b$	3	3	0	3	0	1	1(S)
$F12\ S, h_c, c^*$	3	2	0	2	0	S - целевой параметр. Останов процедуры	
$F13\ B^*, h_a, c^*$	3	1	1(h_a)	0	0	–	
$F14\ C, h_a, b$	3	3	0	1	1(b)	–	
$F15\ C, h_b, a$	3	3	0	1	1(a)	–	
$F16\ A^*, h_b, c^*$	3	1	1(h_b)	0	0	–	
$F17\ A^*, h_c, b$	3	2	0	2	0	–	
$F18\ B^*, h_c, a$	3	2	0	2	0	–	
$F19\ B^*, C, a, b, c^*$	5	3	0	2	0	–	
$F20\ A^*, C, a, b, c^*$	5	3	0	2	0	–	
$F21\ A^*, B^*, a, b,$	5	2	0	2	0	–	
$F22\ A^*, b, c^*, p$	4	2	0	2	0	–	
$F23\ B^*, a, c^*, p$	4	2	0	2	0	–	
$F24\ C, a, b, p$	4	4	0	3	0	–	
$F25\ A^*, a, b, c^*, p$	5	3	0	3	0	–	
$F26\ B^*, a, b, c^*, p$	5	3	0	3	0	–	
$F27\ C, a, b, c^*, p$	5	4	0	3	0	–	

В данном алгоритме за один шаг находятся все разрешения, с помощью которых могут быть рассчитаны какие-либо параметры. А далее пересчитываются значения ЧНП и действие повторяется.

Таким образом за три шага алгоритма найден допустимый маршрут расчета целевого параметра (дерево решения):

$A^*, B^*, c^* \rightarrow F1(C) \rightarrow C \rightarrow F13(h_a) \rightarrow h_a \rightarrow F16(h_b) \rightarrow h_b \rightarrow F3(a) \rightarrow a \rightarrow F4(b) \rightarrow b \rightarrow$
$\rightarrow F8(p) \rightarrow p \rightarrow F9(S) - \rightarrow S$ -ЦП.

Анализ данного маршрута показывает, что имеются лишние вычисления, а именно параметров, которые не являются необходимыми при расчете целевого параметра. Таким образом, сформулировав некоторые дополнительные правила, можно уменьшить сложность вычислительного алгоритма. Ситуация несколько усложняется в случае задания на расчет не одного, а нескольких параметров. В заключение данного раздела укажем, что такое представление знаний о проблемной области используется, когда все задачи, решаемые в данной предметной области, имеют расчетно-логический характер.

4.3 Порядок выполнения работы

1. Задать (получить) исходные данные параметров, указанных в вартинте.
2. Разработать дерево решения задачи по алгоритму обратной волны.
3. В электронной таблице отобразить схему решения задачи по алгоритму обратной волны.
4. Разработать дерево решения задачи по алгоритму прямой волны.
5. В электронной таблице отобразить схему решения задачи по алгоритму прямой волны.
6. Ответить на контрольные вопросы.
7. Оформить отчет.

4.4 Контрольные вопросы

1. Дайте определение моделям расчетно-логического типа.
2. Сделайте сравнительный анализ алгоритмов прямой волны и обратной волны.
3. Объясните суть алгоритма прямой волны.
4. Объясните суть алгоритма обратной волны.
5. Сформулируйте дополнительные правила, с применением которых можно уменьшить сложность вычислительного алгоритма.
6. В каких случаях возникают тупиковую ситуации при работе алгоритмов поиска решений в моделях расчетно-логического типа.
7. Что называется локальной базой правил в моделях расчетно-логического типа.

4.5 Варианты заданий

Варианты заданий приведены в таблице 6.

Таблица 6

№ варианта	Условие задачи
1	Даны: сторона треугольника a и два прилежащих к ней угла C и B. Требуется определить площадь треугольника S.
2	Даны: угол A, высота к стороне c – h_c, периметр p. Требуется определить S.
3	Даны: стороны треугольника a, b и угол между ними C. Требуется определить площадь треугольника S.
4	Даны: высоты треугольника h_c, h_b и угол C (угол между сторонами a и b). Требуется определить периметр треугольника p.
5	Даны: стороны треугольника a, b и высота, проведенная на третью сторону h_c. Требуется определить площадь треугольника S.
6	Даны: углы треугольника A, B и сторона c. Найти площадь треугольника S.
7	Дано: углы A, B, C и высоты, проведенные соответственно к сторонам a – высота h_a, b – высота h_b и c – высота h_c. Найти периметр треугольника p.
8	Даны: угол C и сторона a. Найти площадь S.
9	Даны: сторона треугольника b и два прилежащих к ней угла C и A. Требуется определить площадь треугольника S.
10	Даны: угол B, высота к стороне a – h_a, периметр p. Требуется определить S.
11	Даны: стороны треугольника c, b и угол между ними A. Требуется определить площадь треугольника S.
12	Даны: высоты треугольника h_c, h_a и угол B (угол между сторонами a и c). Требуется определить периметр треугольника p.

4.6 Содержание отчета по лабораторной работе

– Схему решения задачи по алгоритму обратной волны

– Дерево поиска решения по алгоритму обратной волны

– Пример поиска решения по алгоритму обратной волны с заданием конкретных исходных данных, например a=17 см, c=34 см, B=30^0 и т.д.

– Схему решения задачи по алгоритму прямой волны

– Дерево поиска решения по алгоритму прямой волны

– Пример поиска решения по алгоритму прямой волны с теми же исходными данными, что и для верхнего алгоритма.

4.7 Литература

1. Б.Я. Советов, С.А. Яковлев Моделирование систем. Учебник. 4-е издание. – М.: Высшая школа, 2005.

Лабораторная работа № 5
ЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Цель работы: Получить навыки разработки простейших логических моделей с использованием языка логического программирования Prolog

5.1 Описание объекта исследования

Как правило, эти модели основаны на логике предикатов. Суть логики предикатов сводится к тому, что из одних выражений можно формально получить новые выражения по определенным логическим правилам.

Система продукции имеет три основные компоненты:

– базу данных (набор фактов)

– базу правил (набор правил)

– интерпретатор (для управления процессом вывода).

База данных состоит из фактов, которые представляются с помощью утверждений, выражаемые логическими предикатами, например

Утверждение: Ким – человек	Предикат: ЧЕЛОВЕК (Ким)
Утверждение: Ким – женщина	Предикат: ЖЕНЩИНА (Ким)
Утверждение: Ким – мужчина	Предикат: МУЖЧИНА (Ким)
Утверждение: Три меньше пяти	Предикат: МЕНЬШЕЧЕМ (три, пять)

База правил – это набор правил вида "условия – действие", где условиями являются утверждения о содержимом базы данных, а действия представляют собой процедуры, которые могут изменять это содержимое.

Формально правило определяется следующим образом:

(i); Q; P;C;A $\to B;N;$

где (i) – имя правила;

Q – сфера применения правила;

P – предусловие (например, приоритетность);

C – предикат (отношение);

$A \to B$ – ядро;

N – постусловия (изменения, вносимые в систему правил).

Практически правило строятся по схеме "ЕСЛИ (причина), ТО (следствие)". Причину называют также посылкой, а следствие – целью правила. В хорошей системе насчитывается от 1000 до 3000 правил.

Полученные в результат срабатывания правил новые знания могут использоваться для следующих целей.

Интерпретатор системы продукций выполняет сравнения условия (или ситуации) некоторого правила с фактами из базы данных. Если имеется совпадение, то вызывается действие части правила; это может быть результатом добавления (исключения, модификации) фактов в базе данных, или добавления (исключения, модификации) правил в базе знаний, или результатом выполнения других произвольных действий. Следовательно, система, основанная на правилах, достаточно универсальна, поскольку указанные выше действия могут быть произвольными. Кроме того, интерпретатор системы продукции должен идентифицировать те правила, которые могут быть применены, и решить, какое из них должно применяться следующим. Для того чтобы сделать систему более эффективной, могут быть наложены различные подходящие ограничения. Например, правила могут быть линейно упорядочены, и последовательно сканироваться интерпретатором. Сначала должно быть использовано применяемое правило, а затем проведено сканирование от начала или от текущего правила. Здесь могут быть использованы как "вывод от цели к фактам", так и "вывод от фактов к цели".

Рассмотрим синтаксис языка Турбо ПРОЛОГ и структуру программы для того, чтобы можно было самостоятельно разработать небольшую учебную программу.

Программа на Турбо-Прологе имеет следующую обобщенную структуру:

domains
/* ...объявление доменов... */
predicates
/* ...объявление предикатов... */
goal
/* ...подцель_1,
подцель_2,
и т.д.... */
clauses
/* ...предложения (факты и правила)... */

В секции **clauses** размещаются факты и правила, с которыми будет работать Турбо-Пролог, пытаясь разрешить цель программы.

В секции **predicates** объявляются предикаты и типы (домены) аргументов этих предикатов. Имена предикатов должны начинаться с буквы (желательно строчной), за которой следует последовательность букв, цифр и символов подчеркивания (до 250 знаков). В именах предикатов нельзя использовать символы пробела, минуса, звездочки, обратной (и прямой) черты. Объявление предиката имеет следующую форму:

predicates
predicateName (argument_type1, argument_type2, ..., argument_typeN)

Здесь argument_type1, ..., argument_typeN - либо стандартные домены, либо домены, объявленные в секции **domains**. Объявление домена аргумента и описание типа аргумента - суть одно и то же.

В секции **domains** объявляются любые нестандартные домены, используемые для аргументов предикатов. Домены в Прологе являются аналогами типов в других языках. Основными стандартными доменами Турбо-Пролога являются - char, integer, real, string и symbol. Основная форма объявления доменов имеет следующий вид:

domains
argument_type1, ..., argument_typeN = <стандартный домен>
argument_1, ..., argument_N = <составной домен 1>;
<составной домен 2>;
<...>;
<составной домен N>;

В секции **goal** задается внутренняя цель программы; это позволяет программе запускаться независимо от среды разработки. Если внутренняя цель включена в программу, то Турбо-Пролог выполняет поиск только первого решения, и связываемые с переменными значения не выводятся на экран. Если внутренняя цель не используется, то в процессе работы будет вводиться в диалоговом окне внешняя цель. При использовании внешней цели Турбо-Пролог ищет все решения и выводит на экран все значения, связываемые с переменными.

В Турбо-Пролог включено более 200 встроенных стандартных предикатов и более дюжины стандартных доменов: в случае использования этих предикатов и доменов нет необходимости объявлять их.

Арность (размерность) предиката - это число принимаемых им аргументов; два предиката с одним именем могут иметь различную арность. Предикаты с различными версиями арности должны собираться вместе, причем и в секции **predicates** и в секции **clauses**; однако предикаты с различной арностью рассматриваются как абсолютно разные.

Правила имеют форму:

ЗАГОЛОВОК :- <Подцель1>, <Подцель2>, ..., <ПодцельN>.

Для разрешения правила Пролог должен разрешить все его подцели, создав при этом соответствующее множество связанных переменных. Если же одна из подцелей ложна, Пролог возвратится назад и просмотрит альтернативные решения предыдущих подцелей, а затем вновь пойдет вперед, но с другими значениями переменных. Это процесс называется "поиск с возвратом".

5.2 Пример разработки логической модели

Пусть дано генеалогическое древо родственных отношений, предаствленной на рисунке 7. Из его содержания мы можем определить, по крайней мере, два факта: кто кому приходится родителем и пол людей, участвующих в родственных отношениях. Это то, что дано и является безусловно верным. Поэтому это факты. Запишем их на языке Prolog.

Тот факт, что bob является родителем tom на Прологе запишется так:

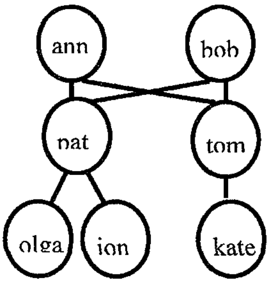


Рисунок 7

Parent(bob,tom),
где Parent - имя отношения;
tom,bob - аргументы отношения.
Все дерево родственных отношений на Прологе будет выглядеть следующим образом:
Parent(bob,pat).
Parent(ann,tom).
Parent(ann,pat).
Parent(pat,olga).
Parent(pat,jon).
Parent(tom,kate).

Все 7 предложений объявляют об факте – наличие отношения «Родитель».

После ввода такой программы в пролог-систему, ей можно задавать вопросы (цели). Например, является ли bob родителем pat?

Goel: parent(bob, pat)

Данный факт будет найден в программе и система ответит «Yes».

Можно задать и более интересные вопросы. Например, кто является родителем kate?

Goel: parent(X,kate)

Пролог-система найдет факт, в котором kate находится на месте второго аргумента и присвоит X значение первого аргумента: X=tom.

Кто дети bob?

Goel: parent(bob, X)

На этот вопрос система найдет два ответа (2 решения достижения цели): X=pat X=tom

Зададим более общий вопрос: Кто чей родитель?

Goel: parent(X,Y)

Система будет находить все пары родитель-ребенок:

X=bob Y=tom
X=bob Y=pat
X=ann Y=tom
X=ann Y=pat
X=pat Y=olga
X=pat Y=jon
X=tom Y=kate

Можно задать и более сложный вопрос: Кто является родителем родителя jon?

Достигать цель будем в два этапа, поскольку в нашем примере существует факт «Родитель», а по заданию необходимо определить отношение «родитель родителя».

Во-первых, определим, кто родитель jon. Пусть это Y.

Во-вторых, определим, кто родитель Y. Пусть это X.

Такой вопрос задается на Prolog в виде последовательности двух простых предложений скрепленных конъюнкцией (логическое «И»).

Goel: Parent(Y,jon), parent(X,Y).

Здесь «,» - знак конъюнкции, показывающий обязательное наличие истинности в двух вопросах. Если поменять порядок этих двух предложений, то логический смысл останется прежним.

Спросим, кто внуки bob?

Goel: parent(bob,X), (X,Y).

Получим ответ:

X=pat Y=olga
X=pat Y=jon
X=tom Y=kate

Спросим, есть ли у pat и tom общий родитель?

Очевидно, что вопрос должен состоять из двух этапов: во-первых, спросим, какой X является родителем pat? Во-вторых, является ли тот же X родителем tom?

Goel: parent(X,pat),(X,jon)

X=bob

X=ann

Из дерева родственных отношений, представленного на рисунке 1 очевиден еще один факт – это пол людей, участвующих в отношении «Родитель».

Для разнообразия введем в программу унарное (одноместное) отношение. Отношение «Родитель», введенное выше – бинарное - отношение между двумя объектами.

Male(bob).
Male(tom).
Male(jon).
Female(ann).
Female(pat).
Female(olga).
Female(kate).

Более никаких фактов (исходных данных) из представленного рисунка 7 взять не возможно.

Далее будем расширять программу с помощью правил, то есть таких предложений, результат выполнения которых зависит от того, выполняется условие или нет, в то время как факт не зависит от условия, а является всегда безусловной истиной.

Из сказанного следует, что правило имеет условную часть – тело предложения и часть вывода – голову предложения.

Введем отношение «ребенок», которое обратно отношению «родитель». Чтобы правильно записать правило, необходимо сначала правильно его сформулировать: предложение-правило должно начинаться с условной части «ЕСЛИ» и завершаться выводом «ТО». Сформулируем правило «ребенок»:

Для всех X и Y, ЕСЛИ X является родителем Y, ТО Y является ребенком X.

На прологе запишется это так:

Child(Y,X):-parent(X,Y).

Здесь «:-» - обозначение условия ЕСЛИ

Введем отношение «мать». Сформулируем: Для всех X и Y ЕСЛИ X является родителем Y и X – женщина, ТО X является матерью Y.

Mother(X,Y):-parent(X,Y),female(X).

Знак «,» указывает, что оба условия должны быть истинными.

Введем отношение «сестра». Сформулируем: Для любого X и Y ЕСЛИ у X и Y есть общий родитель и X – женщина, то X является сестрой Y.

Sister(X,Y):-parent(Z,X).parent(Z,Y),female(X).

5.3 Последовательность выполнения работы

1. По дереву родственных отношений, указанному в варианте задания выпишите факты
2. Написать правила, которые указаны в варианте задания.

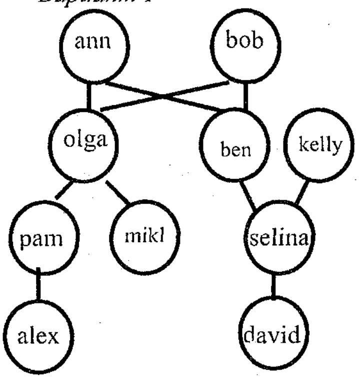
3. Протестировать программу, проверить все правила.

5.4 Контрольные вопросы

1. Какие модели называются логическими.
2. Можно ли разработать логическую модель, если в ней отсутствуют факты.
3. Дайте определение цели, факта и правила логической модели.
4. Какие аргументы – конкретные или абстрактные объекты участвуют в правилах логической модели.
5. В каких случаях в правилах логической модели применяется операция дизъюнкции.

5.5 Варианты задания для выполнения лабораторной работы

Вариант 1

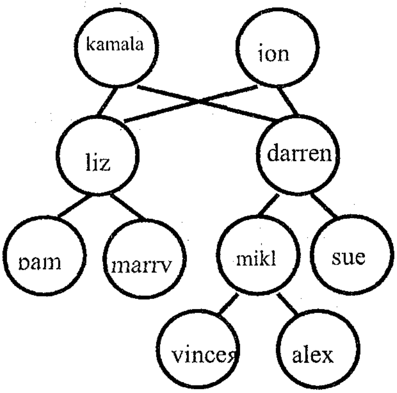


Известны факты: ***родитель, пол*** - двухаргументные.

Написать правила: ***прадедушка, сын, мать, счастлив тот, кто имеет детей, сестра***

Проверить все правила.

Вариант 2

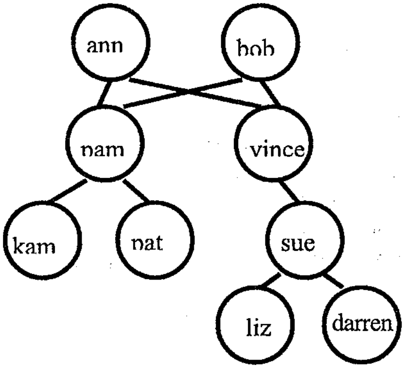


Известны факты: ***родитель*** - двухаргументное, ***мужчина, женщина*** - одноаргументные.

Написать правила ***прабабушка, мать, двоюродный брат, родственник, сестра.***

Проверить все правила.

Вариант 3

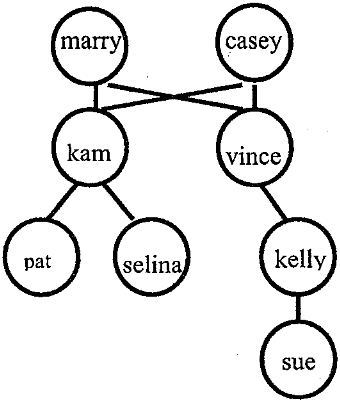


Известны факты: ***родитель, пол*** - двухаргументные.

Написать правила ***дядя, двоюродная сестра, прадедушка, брат, сестра.***

Проверить все правила.

Вариант 4

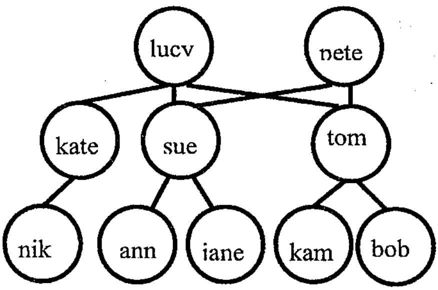


Известны факты: ***родитель, пол*** - двухаргументные.

Написать правила ***сестра, двоюродная сестра, дедушка, мать, бабушка, сын.***

Проверить все правила.

Вариант 5

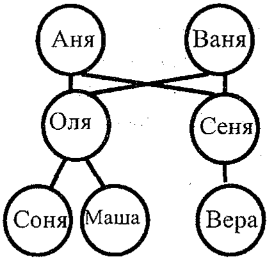


Известны факты: ***родитель*** - двухаргументное, ***мужчина, женщина*** - одноаргументные.

Написать правила ***отец, тетя, брат, родственник, бабушка, предок.***

Проверить все правила.

Вариант 6



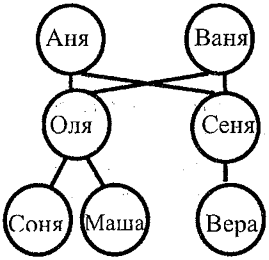
Определить генеалогическое дерево через факты: ***родитель***, ***пол*** - двухаргументные.

Написать правила ***бабушка***, ***дочь***, ***счастлив тот, кто имеет детей.***

Проверить все правила.

Отчет содержит: дерево решений, текст программы, результат выполнения каждого правила.

Вариант 8



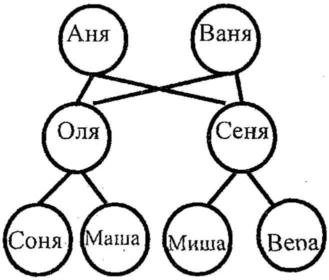
Определить генеалогическое дерево через факты: ***родитель*** – двухаргументное и ***мужчина***, ***женщина*** - одноаргументные.

Написать правила ***дедушка***, ***сын***, ***кто имеет двух детей, счастлив вдвойне.***

Проверить все правила.

Отчет содержит: дерево решений, текст программы, результат выполнения каждого правила.

Вариант 9



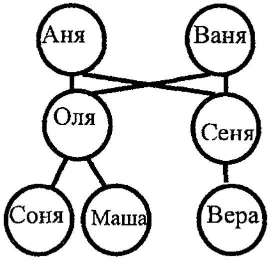
Определить генеалогическое дерево через факты: ***родитель*** - двухаргументное, ***мужчина***, ***женщина*** - одноаргументные.

Написать правила ***дядя***, ***двоюродный брат***, ***родственник.***

Проверить все правила.

Отчет содержит: дерево решений, текст программы, результат выполнения каждого правила.

Вариант 10



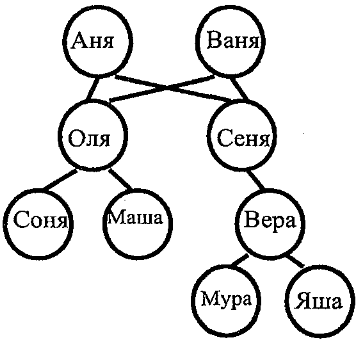
Определить генеалогическое дерево через факты: ***родитель***, ***пол*** - двухаргументные.

Написать правила ***тетя***, ***двоюродная сестра***, ***родственник.***

Проверить все правила.

Отчет содержит: дерево решений, текст программы, результат выполнения каждого правила.

Вариант 11



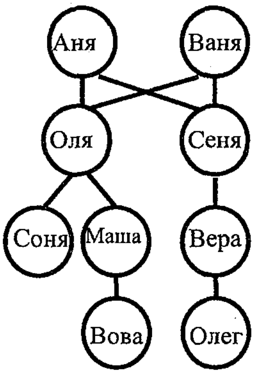
Определить генеалогическое дерево через факты: ***родитель***, ***пол*** - двухаргументные.

Написать правила ***прадедушка***, ***сын***, ***счастлив тот, кто имеет детей, прабабушка, тетя***

Проверить все правила.

Отчет содержит: дерево решений, текст программы, результат выполнения каждого правила.

Вариант 12



Определить генеалогическое дерево через факты: ***родитель*** - двухаргументное, ***мужчина***, ***женщина*** - одноаргументные.

Написать правила ***дядя***, ***тетя***, ***дедушка***,***предок.***

Проверить все правила.

Отчет содержит: дерево решений, текст программы, результат выполнения каждого правила.

5.6 Содержание отчета по лабораторной работе

- Дерево родственных отношений
- Листинг программы
- Результаты проверки правил.

5.7 Литература

1. Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы/Пер. с польского. М.: Горячая линия-Телеком, 2004 – 452 с.

Лабораторная работа №6
ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Цель работы: разработать математическую модель и решить задачу линейного программирования.

6.1 Описание объекта исследования

Линейное программирование представляет собой математический аппарат, разработанный для решения оптимальных задач с линейными выражениями для критерия оптимальности и линейными ограничениями на область изменения переменных. Такие задачи обычно встречаются при решении вопросов оптимального планирования производства с ограниченным количеством ресурсов, при определении оптимального плана перевозок (транспортные задачи) и т. д.

Для решения большого круга задач линейного программирования имеется практически универсальный алгоритм - *симплексный метод,* позволяющий за конечное число итераций находить оптимальное решение подавляющего большинства задач. Тип используемых ограничений (равенства или неравенства) не сказывается на возможности применения указанного алгоритма. Дополнительной проверки на оптимальность для получаемых решений не требуется. Как правило, практические задачи линейного программирования отличаются весьма значительным числом независимых переменных. Поэтому для их решения обычно используют вычислительные машины, необходимая мощность которых определяется размерностью решаемой задачи.

В общем виде задача линейного программирования может быть представлена следующим образом:

$$\left.\begin{array}{l} F=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max, \min \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \text{ или } \ge b_i \\ q_j \le x_j \le Q_j, \text{ где } i=\overline{1,m};\, j=\overline{1,n} \end{array}\right\}, \qquad (6.1)$$

где F – целевая функция;
a_{ij}, b_i – постоянные коэффициенты для уравнений;
c_j – постоянный коэффициент для целевой функции;
x_j – неизвестные переменные;
q_j, Q_j – ограничения, соответственно нижняя и верхняя границы для возможных значений x_j.

В процессе решения задачи необходимо определить численные значения x_j, которые лежали бы в пределах от q_j до Q_j доставляли бы экстремум целевой функции F.

6.2 Пример решения задачи линейного программирования

Рассмотрим пример следующей задачи линейного программирования. Некоторое предприятие может выпускать продукцию: вид1, вид2, вид3, вид4. Для изготовления продукции требуются трудовые ресурсы, сырье и финансы. Количество ресурсов, необходимое для изготовления единицы продукции назовем нормой.

Введем следующие обозначения и на их основе составим математическую модель распределения ресурсов:

x_j - количество выпускаемой продукции j–го вида $j=\overline{1,4}$;

b_j - количество рассматриваемого ресурса j–го вида, $j=\overline{1,3}$;

a_{ij} - нормы расходов i–го ресурса для выпуска единицы продукции j–го типа;

c_j - прибыль, получаемая от реализации единицы продукции типа j.

Численные значения коэффициентов представлены на рисунке 8.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Ресурс	Вид1	Вид2	Вид3	Вид4	Знак	Наличие	
2	Прибыль	60	70	120	130	max		
3	Трудовые	1	1	1	1	<=	16	
4	Сырье	6	5	4	3	<=	110	
5	Финансы	4	6	10	13	<=	100	
6	Нижняя граница	0	0	0	0			
7	Верхняя границ	Не огран.	Не огран.	Не огран.	Не огран.			
8								

Рисунок 8 - Исходные данные

С учетом этих данных модель распределения ресурсов может быть такой:

$$\left.\begin{array}{c} F=60x_1+70x_2+120x_3+130x_4 \rightarrow \max \\ x_1+x_2+x_3+x_4 \geq 16 \\ 6x_1+5x_2+4x_3+3x_4 \geq 110 \\ 4x_1+6x_2+10x_3+13x_4 \geq 100 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0. \end{array}\right\} \qquad (6.2)$$

Для решения задачи составляется форма, представленная на рисунке 9.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2	**Имя**	**прод1**	**прод2**	**прод3**	**прод4**			
3	Значение	0	0	0	0			
4	Нижняя граница	0	0	0	0			
5	Верхняя граница					ЦФ	напр.	
6	Коэф. в ЦФ	60	70	120	130	0	макс	
7		Не огран.	Не огран.	Не огран.	Не огран.			
8			**Ограничения**					
9	**Вид**					**Левая часть**	**знак**	**Правая часть**
10	Трудовые	1	1	1	1		<=	16
11	Сырье	6	5	4	3		<=	110
12	Финансы	4	6	10	13		<=	100
13								

Рисунок 9 - Форма для ввода условий задачи

Форма, представленная на рисунке 10 заполняется в соответствии с данными, представленными на рисунке 8 и математической моделью (6.2). Затем производится ввод функций в адреса F6 (целевая функция-значение), F9, F10 и F11. Лучше при данном вводе использовать режим представления формул «Сервис» / «Параметры» / «Вид» / «Формулы»

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2	**Имя**	**прод1**	**прод2**	**прод3**	**прод4**			
3	Значение	10	0	6	0			
4	Нижняя граница	0	0	0	0			
5	Верхняя граница					ЦФ	напр.	
6	Коэф. в ЦФ	60	70	120	130	=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B6:E6)	макс	
7			**Ограничения**					
8	**Вид**					**Левая часть**	**знак**	**Правая часть**
9	Трудовые	1	1	1	1	СУММПРОИЗВ(B3:E3;B9:E9)	<=	16
10	Сырье	6	5	4	3	=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B10:E10)	<=	110
11	Финансы	4	6	10	13	=СУММПРОИЗВ(B3:E3;B11:E11)	<=	100
12								
13								

Рисунок 10 - Ввод функций

В данные адреса вводится функция СУММПРОИЗВ (массив1; массив2;массив3;...). Первый массив - это диапазон адресов B3:E3, где будут процессе решения неизвестные x_1,x_2,x_3,x_4. Следующие массивы – это коэффициенты целевой функции B6: E6, трудовые ресурсы B9:E9, сырья B 10:E10, финансов B11:E11.

Ввод функций начинается в адрес F6. Нажимается кнопка “Мастер функций”, в категории “Математические “ отмечается функция СУММПРОИЗВ, затем нажимается кнопка ОК (рисунок 11).

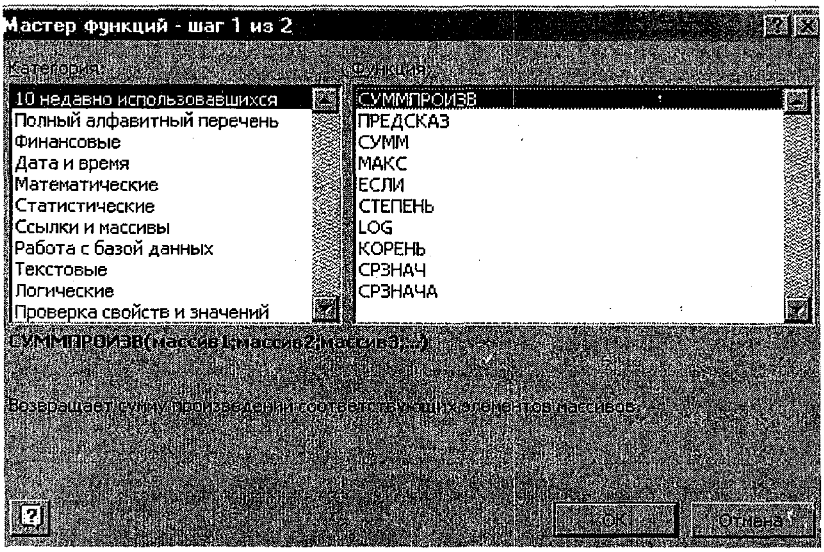


Рисунок 11 - Мастер функций шаг 1

В открывшемся окне (рисунок 12) отметить массив1 – B3:E3, затем массив2 – B6:E6.

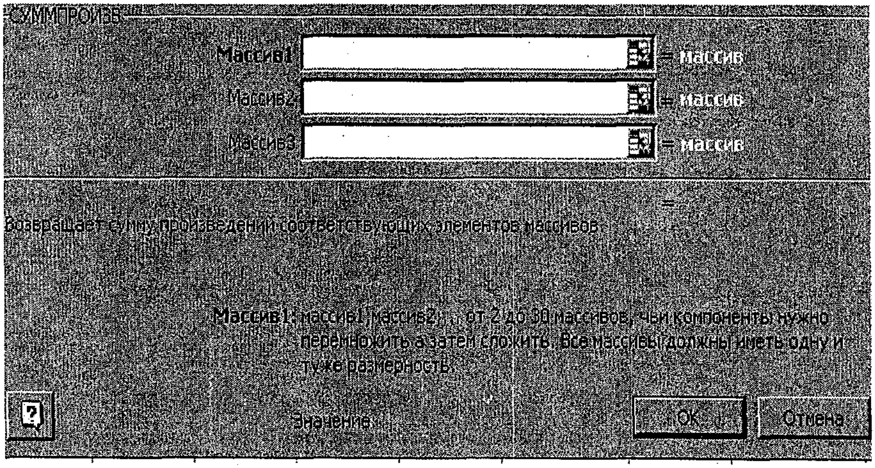


Рисунок 12 - Мастер функций шаг 2

При правильном вводе функций получается форма рисунке 13.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			Переменные					
2	Имя	прод1	прод2	прод3	прод4			
3	Значение	10	0	6	0			
4	Нижняя граница	0	0	0	0			
5	Верхняя граница					ЦФ	напр.	
6	Коэф. в ЦФ	60	70	120	130	1320	макс	
7			Ограничения					
8	Вид					Левая часть	знак	Правая часть
9	Трудовые	1	1	1	1	16	<=	16
10	Сырье	6	5	4	3	84	<=	110
11	Финансы	4	6	10	13	100	<=	100
12								
13								
14								

Рисунок. 13 - Результаты введения функций

Далее работа выполняется в окне «Поиск решения»

Откройте пункт меню "Сервис", затем вызовите диалоговое окно «Поиск решения», рисунок 14.

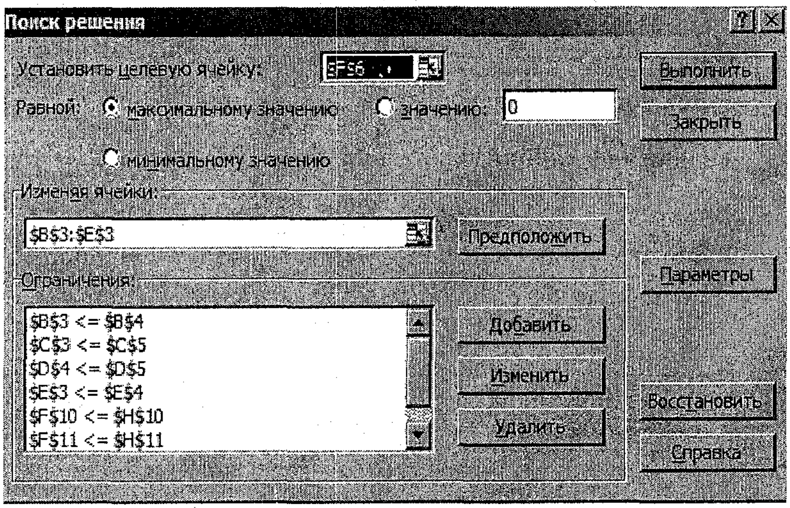


Рисунок 14 - диалоговое окно 'Поиск решения»

Установить селектор таблицы в целевую ячейку F6 (рисунок 9). Это можно сделать заранее перед вызовом окна "Поиск решения" или непосредственно из его, свернув окно кнопкой в поле "Установить целевую ячейку" а затем отметить мышкой адрес F6. Снова развернуть окно. Выбрать экстремум (min, max, const): минимальное значение, максимальное значение, значение. В нашем выражении это максимальное значение.

Теперь необходимо установить диапазон ячеек B3 :E3 в поле «Изменяя ячейки», где будут располагаться найденные значения неизвестных x_j. Затем необходимо ввести ограничения, для нашего примера (рисунок 8) они соответствуют нижней границе $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$; $x_3 \geq 0$; $x_4 \geq 0$: B3≥B4, C3≥C4, D3≥D4, E3≥E4.

Ограничения вводятся и для уравнений (6.2), в рассматриваемом выражении это: F9≤H9, F10≤H10, F11≤H11.

При установке ограничений, адреса по умолчанию являются абсолютными. Последовательность введения ограничений следующая. В окне рисунка 14 нажать кнопку "Добавить» В окне "Добавление ограничений" рисунка 15 установить ссылку на ячейку, знак ограничения и адрес ячейки, где находятся сами ограничения. С помощью кнопки «Добавить» ввести последовательно все необходимые ограничения.

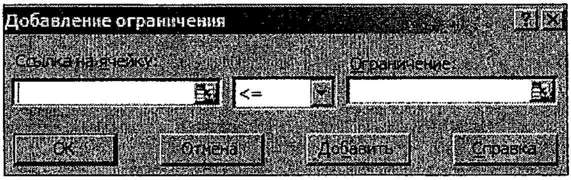


Рисунок 15 – Добавление ограничения

Вернуться в окно "Поиск решения" и вызвать "Параметры поиска решения" (кнопка Параметры). Установить все необходимые параметры, нажать «ОК» (рисунок 16).

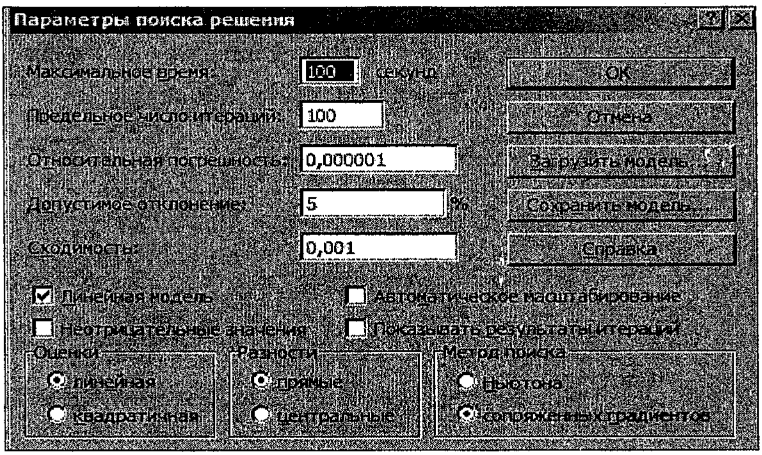


Рисунок 16 – Параметры поиска решений

В окне "Поиск решения" нажать кнопку "Выполнить". Появляется о "результаты поиска решения" (рисунок 17).

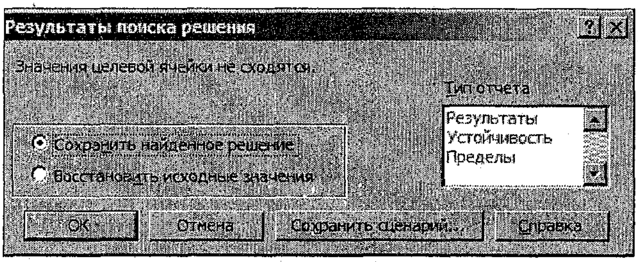


Рисунок 17 – Результаты поиска решения

Если решение найдено, то его следует сохранить, если возникли ошибки, то надо восстановить исходные данные и продолжить решение.

6.3 Последовательность выполнения работы

1. Ввести обозначения и на их основе составить математическую модель решения задачи линейного программирования, соответствующей варианту задания.
2. Представить численные значения коэффициентов в электронной таблице в виде исходных данных, пример приведен на рисунке 8.
3. Составить форму для ввода условий задачи.
4. Заполнить форму в соответствии с данными и математической моделью задачи.
5. Выполнить поиск решения задачи линейного программирования.
6. Оформить отчет по результатам поиска решения задачи линейного программирования.

6.4 Контрольные вопросы

1. Приведите общий вид математической модели задачи линейного программирования
2. Назовите основные условия задачи линейного программирования
3. Какие задачи можно назвать задачами линейного программирования
4. Можно ли назвать задачу линейного программирования оптимизационной задачей. Обоснуйте.
5. Как определить число итераций при решении задачи линейного программирования.
6. Сказывается ли тип используемых ограничений (равенства или неравенства) на возможности применения Симплекс метода.

6.5 Варианты заданий

Вариант 1. Завод производит электронные приборы трех видов (прибор А, прибор В и прибор С), используя при сборке микросхемы трех видов (тип 1, тип 2, тип 3). Расход микросхем задается следующей таблицей:

	Прибор А	Прибор В	Прибор С
Тип 1	2	5	1
Тип 2	2	0	4
Тип 3	2	1	1

Стоимость изготовления приборов одинакова.

Ежедневно на склад завода поступает 500 микросхем типа 1 и по 400 микросхем типов 2 и 3. каково оптимальное соотношение дневного производства приборов различного типа, если производственные мощности завода позволяют использовать запас поступивших микросхем полностью?

Вариант 2. Некоторое предприятие может выпускать продукцию: вид 1, вид 2, вид 3, вид 4. Для изготовления продукции требуются трудовые ресурсы, сырье, финансы (приведены на единицу продукции). Найти количество выпускаемой продукции каждого вида для получения максимальной прибыли.

ресурс (на единицу)	вид 1	вид 2	вид 3	вид 4	наличие
прибыль	60	70	120	130	ЦФ
трудовые	1	1	1	1	16
сырье	6	5	4	3	110
финансы	4	6	10	13	100
нижняя граница	0	0	0	0	
верхняя граница	не огран.	не огран.	не огран.	не огран.	

Вариант 3. Некоторое предприятие может выпускать продукцию: вид 1, вид 2, вид 3, вид 4. Для изготовления продукции требуются трудовые ресурсы, сырье, финансы (приведены на единицу продукции). Найти количество выпускаемой продукции каждого вида для получения максимальной прибыли.

ресурс (на единицу)	вид 1	вид 2	вид 3	вид 4	наличие
прибыль	60	70	120	130	ЦФ
трудовые	2	1	2	1	16
сырье	6	5	5	4	110
финансы	4	6	7	10	100
нижняя граница	0	0	0	0	
верхняя граница	не огран.	не огран.	не огран.	не огран.	не огран.

Вариант 4. Завод производит электронные приборы трех видов (прибор А, прибор В и прибор С), используя при сборке микросхемы трех видов (тип 1, тип 2, тип 3). Расход микросхем задается следующей таблицей:

	Прибор А	Прибор В	Прибор С
Тип 1	2	4	2
Тип 2	3	2	3
Тип 3	2	1	1

Стоимость изготовления приборов одинакова.

Ежедневно на склад завода поступает 400 микросхем типа 1, 300 микросхем типа 2 и 200 микросхем типа 3. каково оптимальное соотношение дневного производства приборов различного типа, если производственные мощности завода позволяют использовать запас поступивших микросхем полностью?

Вариант 5. Фирме необходимо организовать перевозку продукции с четырех складов в пять магазинов. Найти оптимальный план перевозок. Исходные данные приведены в табл.

Склады		магазин 1	магазин 2	магазин 3	магазин 4	магазин 5
номер	запас	Стоимость перевозок				
1	18	2	1	2	1	3
2	24	6	5	5	4	2
3	23	4	6	4	3	1
4	15	1	2	2	1	3
потребности магазинов		20	30	10	12	8

Вариант 6. Фирме необходимо организовать перевозку продукции с четырех складов в четыре магазинов. Найти оптимальный план перевозок. Исходные данные приведены в табл.

Склады		магазин 1	магазин 2	магазин 3	магазин 4
номер	запас	Стоимость перевозок			
1	10	2	1	2	1
2	18	2	5	3	4
3	19	4	3	4	3
4	8	1	2	0	1
потребности магазинов		15	18	10	12

Вариант 7. Задача «упаковки ранца».

Дано: Имеются n=5 объектов, каждый из которых характеризуется свойствами: важности и размерности, соответственно:

$\{c_i\}=\{2,5,4,7,3\}$ – значения показателя важности объектов;

$\{v_i\}=\{4,3,1,5,2\}$ – значения показателя размерности объектов;

$w=11$ – вместимость ранца.

Найти: Оптимальную упаковку ранца, с целью максимизации суммарной важности взятых объектов при соблюдении ограничения на вместимость ранца.

Вариант 8. Задача «о назначении».

Дано: Имеются $n=4$ вида работ и $m=4$ исполнителя (кандидата), каждый из которых характеризуется соответствующими затратами необходимых ресурсов на выполнение работ, соответственно:

1-й исполнитель: $\{t_{1j}\}=(3,4,5,5\}$,

2-й исполнитель: $\{t_{2j}\}=(4,3,2,4\}$,

3-й исполнитель: $\{t_{3j}\}=(2,4,3,5\}$,

4-й исполнитель: $\{t_{4j}\}=(3,4,5,5\}$.

Найти: Оптимальное назначение исполнительной на работы, с целью минимизации суммарных затрат ресурсов на выполнение всех работ.

Вариант 9. Задача «упаковки контейнеров».

Дано: Имеются $n=3$ контейнера, имеющие соответствующие значения показателя вместимости: $\{w_i\}=\{11,7,9\}$, и $m=8$ объектов, каждый из которых характеризуется свойствами: важности и размерности, соответственно:

$\{c_j\}=\{2,5,4,7,3,4,7,6\}$ – значения показателя важности объектов;

$\{v_i\}=\{4,3,1,5,2,6,4,7\}$ – значения показателя размерности объектов

Найти: Оптимальную упаковку контейнеров (т.е. какой объект – в какой контейнер), с целью максимизации суммарной важности взятых объектов при соблюдении ограничения на вместимость контейнеров.

Вариант 10. Задача «об ассортименте продукции».

Дано: Имеются $n=3$ вида продукции, которые выпускает фирма, прибыль от продажи которых соответственно равна $\{c_j\}=\{3,2,5\}$, в процессе производства видов продукции используются (последовательно) $m=3$ технологические операции, при этом производство каждого вида характеризуется соответствующими продолжительностями операций на изготовление единицы продукции:

для 1-го вида: $\{t_{1j}\}=(1,3,1\}$ единиц времени,

для 2-го вида: $\{t_{2j}\}=(2,0,4\}$ единиц времени,

для 3-го вида: $\{t_{3j}\}=(1,2,0\}$ единиц времени,

фонд рабочего времени, в течении которого могут выполняться технологические операции ограничен соответствующими предельными значениями $\{T_j\}=\{430,460,420\}$ единиц времени в сутки.

Найти: Оптимальный суточный объем производства каждого вида продукции с целью минимизации суммарной прибыли от ее реализации при соблюдении ограничений на общую продолжительность технологических операций.

Вариант 11. Задача «транспортная».

Дано: Имеются $n=3$ склада товаров, имеющие соответствующие значения запасов: $\{w_j\}=\{8,4,6\}$ и $m=4$ магазина, каждый из которых характеризуется ежедневными потребностями в товарах, соответственно $\{v_j\}=\{4,3,6,5\}$, известны соответствующие расходы по доставке единицы товара со складов в магазины:

с 1-го склада: $\{c_{1j}\}=(2,2,4,5\}$,

со 2-го склада: $\{c_{2j}\}=(3,2,2,3)$,

с 3-го склада: $\{c_{3j}\}=(3,6,7,6)$.

Найти: Оптимальный план перевозки товаров со складов в магазины (с какого склада – в какой магазин сколько товара), с целью минимизации суммарных транспортных расходов по доставке требуемого количества товаров в соответствующие магазины.

Вариант 12. Задача «минимизации суммарного штрафа».

Дано: Имеются n=6 работ, характеризующиеся продолжительностью выполнения: $\{d_j\}=\{1,2,3,4,5,6\}$. При этом заданы директивные сроки окончания выполнения соответствующих $D_j=\{2,6,3,5,4,5\}$ и штрафы за их нарушение $h_j=\{1,1,2,1,3,4\}$.

Найти: Оптимальное расписание (очередность выполнения работ) с целью минимизации суммы штрафов за нарушение директивных сроков завершения выполнения соответствующих работ.

6.6 Содержание отчета по лабораторной работе

– Исходные данные
– Форма для ввода условий задачи
– Введенные функции
– Отчет по результатам поиска решения задачи

6.7 Литература

1. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel. – СПб:BHV – Санкт-Петербург. – 2007. – 384 с.

2. Таха Х.А. Введение в исследование операций. – М: Издательский дом «Вильямс». – 2001. – 912 с.

Содержание

Т.М. Татарникова

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

Подписано в печать 25.11.08 Формат 60x84/16 Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 3,35
Тираж 100 экз.
Заказ №2511/01-Р

Мини-типография «Знак» издательства «Знак»
191025, Санкт-Петербург, ул. Восстания, д.6