

Государственный комитет Российской Федерации
по высшему образованию

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

Б. В. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
В ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ

Учебное пособие

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
1993

Одобрено Редакционно-издательским советом института.

Рецензенты:

Белоцерковский А. В. Спектральный анализ в гидрометеорологии.

Учебное пособие. СПб, изд. РГГМИ, 1993 г., 64 с.

Рассмотрены общие принципы преобразования Фурье, спектрального анализа детерминированных и случайных процессов реальных гидрометеорологических данных по записям конечной длины, ориентированные на использование персонального компьютера.

Учебное пособие предназначено для студентов гидрометеорологических вузов и географических факультетов университетов, может быть полезно аспирантам и инженерам, занимающимся прикладным анализом временных рядов.

Ил. 10. Табл. 2. Библ. 6.

This textbook discusses the general ideas for the Fourier transformation, for the computer-added deterministic and stochastic spectral analysis for actual meteorological hydrological data using records of limited length. The textbook is dedicated to the students of meteorology and hydrology, both graduate and post-graduate and may be of certain help for those who are involved with the time-series analysis.

Кафедра механики и процессов управления (С.-Петербургский гос. технический университет); С. Г. Дзлиев (С.-Петербургский гос. электротехнический университет).

© Российский государственный гидрометеорологический институт (РГГМИ).
1993.
ISBN 5-86813-071-5



ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших видов анализа гидрометеорологических наблюдений является спектральный анализ, заключающийся в разложении реализаций во времени (или в пространстве) исследуемого явления на различные частотные составляющие (спектр), показывающий вклад колебаний с разными частотами в общую энергию процесса.

Применение спектрального анализа покрывает широкий диапазон практических задач.

Приведем несколько примеров.

1. Спектр способствует пониманию физических причин, лежащих в основе изменений во времени гидрометеорологических величин, указывая периоды доминирующих колебаний и тех, чей вклад в энергию процесса незначителен. Физический анализ, основываясь на подобной информации, позволяет проникнуть в причину превалирования одних периодов над другими, предсказать устойчивость и неустойчивость соответствующих волн и, в конечном счете, объяснить их природу.

2. Значимые максимумы и минимумы спектра важны для предсказания погоды. Если, например, в спектре имеется ложбина, соответствующая примерно четырехдневному периоду, то можно заключить, что повторение погодных явлений с периодами от 3,5 до 4,5 дня редки, в то время как пик, соответствующий какому-либо иному периоду, будет говорить о правдоподобии повторения явления с этим периодом.

3. Метеорологи, занимающиеся проблемами активных воздействий на атмосферные процессы, часто оценивают эффективность воздействий по изменениям в спектральных характеристиках явлений.

4. Протяженность спектра указывает на то, какая должна быть инерция приборов, чтобы измерить изменчивость любой величины, и какой следует ожидать ошибки, если прибор реагирует медленно.

5. Спектральные характеристики помогают выбрать интервал осреднения или шаг дискретизации по времени для достоверного измерения гидрометеорологических величин.

6. При обеспечении полетов летательных аппаратов (ЛА) необходимо определять спектр пульсаций скорости ветра в приземном слое. Дело в том, что каждый ЛА подвергается динамическому воздействию ветрового потока. При совпадении частоты пульсаций скорости ветра с собственной частотой упругих колебаний конструкции ЛА может возникнуть нежелательное явление резонанса. Поэтому всегда нужно контролировать появление в спектре пульсаций опасных частотных составляющих. По тем же причинам полезно знать спектр морского волнения.

7. Современные метеорологические радиолокаторы постепенно вытесняются поляризованными доплеровскими локаторами. Основным элементом доплеровской обработки является спектральный анализ отраженных радиолокационных сигналов.

Кроме приведенных задач следует упомянуть и о выявлении скрытых периодических сигналов и помех, автоматическом распознавании образов, также в значительной степени опирающихся на результаты спектрального анализа.

Все это обуславливает широкое развитие средств и методов получения спектра. Если раньше в основном преобладали аппаратные методы, то в последнее время с развитием вычислительной техники, особенно в связи с появлением высокопроизводительных дешевых персональных компьютеров, наиболее распространены методы численного спектрального анализа. Настоящий переворот произошел после разработки алгоритмов быстрого преобразования Фурье, сделавшего

численный спектральный анализ обычным элементом стандартного математического обеспечения, что в свою очередь еще более расширило области его возможного применения. Однако оборотной стороной массовой и доступности программ спектрального анализа стало не критичное отношение пользователей к внутреннему содержанию анализа, границам его применимости, вследствие чего столь же массовыми стали правдоподобные ошибочные результаты. Существует к тому же значительное количество прикладных пакетов программ, в которых раздел анализа Фурье просто неудачен, а даже в лучших из них без специальных манипуляций и трансформаций данных в общем случае результат также может оказаться неправильным.

Казалось бы, какие сложности и неожиданности могут произойти при выполнении обычного преобразования Фурье, лежащего в основе спектрального анализа? Простые формулы ряда и интеграла Фурье, известные всем студентам 2-го курса, на первый взгляд, не таят в себе никакого коварства. И тем не менее при численной реализации этих формул простые операции вроде дискретизации данных, ограничения их числа вдруг проявляются искаженными до неузнаваемости результатами. При анализе случайных процессов по отдельным их реализациям использование классических формул Фурье оказывается вообще бесполезным с точки зрения ценности полученного результата. Все это требует внимательного знакомства с процедурами спектрального анализа, эффектами квантования по времени и использования конечной длины записи процесса, с анализом случайных процессов, особенностями дискретного и быстрого преобразования Фурье. Только понимание этих особенностей позволит правильно провести спектральный анализ даже с использованием отработанных стандартных программ. Успешно пользоваться программами преобразования Фурье можно лишь предвидя, какие изменения в результатах произойдут, если мы начнем варьировать параметры исходных данных: их количество, шаг во времени, количество добавленных нулей и т. д., а также предвидя точность полученного спектра, степень, в которой на него можно опираться в дальнейшем решении конкретной метеорологической задачи.

К сожалению, все эти существенные вопросы в учебной литературе, как правило, не обсуждаются, хотя, конечно, фрагментами содержится в различных специальных работах. Восполнить в определенной степени этот пробел предполагается настоящим учебным пособием. Его цель — дать представление о проблемах и путях их преодоления в практическом спектральном анализе, ориентированном на персональный компьютер. Задача-максимум, после изучения данного пособия и рекомендуемой литературы — самостоятельно составлять программы проблемно-ориентированного надежного спектрального анализа. Задача-минимум — осознанно и правильно пользоваться стандартными программами, отдавать себе отчет в достоверности полученных результатов.

Материал разбит на три главы. В первой главе рассмотрены основные свойства преобразования Фурье, лежащие в основе спектрального анализа. Во второй главе обсуждаются аспекты практического спектрального анализа детерминированных процессов, эффект конечной длины записи и дискретизации, свойства дискретного и быстрого преобразования Фурье. Третья глава посвящена особенностям анализа случайных процессов. В конце каждого параграфа выделяются наиболее важные моменты и выводы.

Известно выражение: «Чистая математика делает то, что можно, так, как нужно, прикладная — то, что нужно, так, как можно». Практический спектральный анализ построен в духе прикладной математики.

Глава I

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Спектральный анализ объединяет два важных теоретических подхода: статистический анализ временных рядов и методы анализа Фурье. В этой главе будут описаны те понятия преобразования Фурье, которые необходимы для анализа метеорологических временных рядов. В последующих главах будет показано, как должны быть модифицированы методы Фурье для обработки функций времени, которые являются как детерминированными, так и статистическими.

1.1. Ряд Фурье

Любая ограниченная периодическая функция $x(t)$ периода T

$$x(t) = x(t + kT), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (1.1)$$

может быть разложена в ряд Фурье, т. е. представлена в виде

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{-\infty}^{\infty} (a_k \cos 2\pi f_k t + b_k \sin 2\pi f_k t), \quad (1.2)$$

где $f_k = kf = \frac{k}{T}$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Другими словами, периодическая функция описывается суммой синусоид и косинусоид, частоты которых меняются дискретно с шагом

$$f = f_1 = \frac{1}{T}. \quad (1.3)$$

Амплитуды синусоид и косинусоид определяются в соответствии с соотношением

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos 2\pi f_k t dt, \quad (1.4)$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin 2\pi f_k t dt, \quad (1.5)$$

постоянная составляющая (среднее значение за период) равна

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt. \quad (1.6)$$

Набор амплитуд синусоидальных и косинусоидальных гармоник в функции их дискретных частот называется **линейчатым синусно-косинусным спектром Фурье** представляемого сигнала $x(t)$.

Иногда (1. 2) удобнее записывать в виде

$$x(t) = R_0 + \sum_{k=1}^{\infty} R_k \cos(2\pi f_k t - \theta_k), \quad (1.7)$$

$$R_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$R_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2},$$

$$\theta_k = \arctg(b_k/a_k),$$

где R_k — амплитуда и θ_k — фаза k -й гармоники. Набор амплитуд и фаз гармоник в функции их дискретных частот называется соответственно **амплитудным и фазовым линейчатым спектром Фурье** представляемого сигнала $x(t)$.

Приведенные выше формулы громоздки, поэтому вместо (1. 2), (1. 4), (1. 5) для компактности удобно использовать комплексное представление ряда Фурье

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \exp\{j2\pi f_k t\}, \quad (1.8)$$

$$S_0 = \frac{a_0}{2},$$

$$S_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\{-j2\pi f_k t\} dt.$$

При этом комплексные амплитуды гармоник S_k связаны с введенными ранее амплитудами и фазами следующим соотношением:

$$S_k = |S_k| \exp\{j \arg(S_k)\} = R_k \exp\{j \arctg(b_k/a_k)\}.$$

Набор комплексных амплитуд гармоник в функции их дискретных частот называется **комплексным линейчатым спектром Фурье** представляемого сигнала $x(t)$.

В заключение подчеркнем следующее:

1. Периодическая функция взаимнооднозначно представляется линейчатым спектром Фурье. Справедливо и обратное — функция, имеющая линейчатый спектр, периодична.

2. Шаг по частоте линейчатого спектра периодической функции равен величине, обратной периоду $1/T$. Самая низкая частота в линейчатом спектре (за исключением нулевой—частоты постоянной составляющей) также равна $1/T$, частоты всех представляющих функцию гармоник кратны $1/T$.

1.2. Интеграл Фурье

Реальные гидрометеорологические процессы, подвергаемые спектральному анализу, как правило, не являются периодическими функциями. В этом случае не может быть использовано их представление в виде рядов Фурье. Необходимо произвести обобщение анализа Фурье на случай непериодических сигналов.

Непериодическая функция может рассматриваться как предельный случай периодической функции с периодом, стремящимся к бесконечности. Соответствующий предельный переход должен произойти и в представлении функции рядом Фурье. По мере того как период T стремится к бесконечности, частотный интервал $1/T$ между соседними гармониками («линейками» спектра) уменьшается, становится бесконечно малым и спектральные линии сгущаются, преобразуясь в непрерывное распределение амплитуд по частоте.

Чтобы математически продемонстрировать эти «предельные» рассуждения, можно переписать (1.8.) в виде

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (TS_k) \exp \{j2\pi kt/T\} \frac{1}{T}. \quad (1.9)$$

В пределе, когда $T \rightarrow \infty$, $k/T \rightarrow f$, $1/T \rightarrow df$ и $TS_k \rightarrow S(f)$, выражение (1.9) стремится к интегралу

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \exp \{j2\pi ft\} dt. \quad (1.10)$$

Аналогично TS_k можно переписать в виде

$$TS_k = \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp \{ -j2\pi (k/T) t \} dt, \quad (1.11)$$

что стремится к

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp \{ -j2\pi ft \} dt, \quad (1.12)$$

когда $T \rightarrow \infty$. Функция $S(f)$ называется **непрерывным комплексным спектром Фурье**, или **преобразованием Фурье** функции $x(t)$.

Физически преобразование (спектр) Фурье $S(f)$ представляет собой распределение интенсивности сигнала по частоте, т. е. является функцией плотности. Если x измеряется в $^{\circ}\text{C}$ и t —в секундах, то размерность $S(f)$ есть « $^{\circ}\text{C}$ —секунда», или « $^{\circ}\text{C}$ на единицу частоты», т. к. f имеет размерность частоты, т. е. с^{-1} .

В (1.10) для компактности записи использована комплексная экспонента, что требует как положительных, так и отрицательных значений аргумента. Физический смысл отрицательных частот состоит лишь в изменении фазы соответствующих спектральных составляющих на противоположную.

Для вещественных функций $x(t)$ действительная часть преобразования Фурье обладает свойством четности, а мнимая часть — нечетности. Поэтому достаточно рассмотреть спектр $S(f)$ только для положительных значений f и распространить ее на отрицательные значения f .

Функцию (1.10) и ее спектр (1.12) называют парой Фурье. Иногда эти соотношения записываются в виде $S(f) = F\{x(t)\}$ — прямое преобразование Фурье, $x(t) = F^{-1}\{S(f)\}$ — обратное преобразование Фурье. Замечательным оказывается сходство (симметрия) функциональных операций прямого и обратного преобразования Фурье. В дальнейшем мы увидим, что симметрия прямого и обратного преобразования Фурье обеспечивает симметрию свойств.

В заключение подчеркнем следующее:

1. Непериодический сигнал, определенный на интервале $-\infty < t < \infty$, может быть взаимнооднозначно представлен непрерывным спектром Фурье, выражающим распределение интенсивности сигнала по частоте. Справедливо и обратное — функция, имеющая непрерывный спектр, непериодична.
2. Соотношения (1.10) и (1.12) позволяют перейти от функции к ее спектру и обратно с использованием математически эквивалентных преобразований. Вследствие этого спектр $S(f)$ имеет свойства, похожие на обращения соответствующих свойств $x(t)$ и обратно.

1.3. Свойства преобразования Фурье

Приведем основные свойства преобразования Фурье, существенные для спектрального анализа.

Преобразование Фурье обладает свойством линейности

$$F\{cx(t)\} = cF\{x(t)\}, \quad (1.13)$$

$$F\{x(t) + y(t)\} = F\{x(t)\} + F\{y(t)\}, \quad (1.14)$$

т. е. изменение масштаба и аддитивность во временной области эквивалентны тем же операциям в частотной области. Произведение же функций во временной области неэквивалентно произведению их спектров. Если во временной области имеется произведение двух функций, т. е.

$$x(t) = y(t)h(t), \quad (1.15)$$

причем известны спектры сомножителей $Y(f) = F\{y(t)\}$, $H(f) = F\{h(t)\}$, то в частотной области спектр произведения $S(f) = F\{y(t)h(t)\}$ равен свертке спектров (теорема о свертке):

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(g) H(f-g) dg. \quad (1.16)$$

Если же имеется произведение в частотной области

$$S(f) = Y(f) H(f), \quad (1.17)$$

то во временной области ему соответствует свертка

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Y(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (1.18)$$

Иными словами, свертка сигналов во временной области эквивалентна перемножению их спектров в частотной области и, наоборот, свертка в частотной области эквивалентна перемножению во временной.

Операции дифференцирования и интегрирования во временной области эквивалентны алгебраическим операциям в частотной области

$$F\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} = j2\pi f F\{x(t)\}, \quad (1.19)$$

$$F\left\{\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j2\pi f} F\{x(t)\}. \quad (1.20)$$

Запаздыванию во временной области соответствует умножение на гармонику в частотной области, и, наоборот, умножению на гармонику во временной области соответствует сдвиг частоты

$$F\{x(t-t_0)\} = \exp\{-j2\pi f t_0\} F\{x(t)\}, \quad (1.21)$$

$$F\{x(t) \exp[j2\pi f_0 t]\} = S(f-f_0). \quad (1.22)$$

Еще одно важное свойство преобразования Фурье дается теоремой Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(f)|^2 df, \quad (1.23)$$

т. е. среднеквадратическое значение функции $x(t)$, или средняя мощность, может быть разложено на составляющие, даваемые каждой элементарной гармоникой.

В заключение приведем сводку основных свойств преобразования Фурье.

Таблица 1.1

Функция	Преобразование Фурье
1. $x(t)$	$S(f)$
2. $y(t)$	$Y(f)$
3. $cx(t)$	$cS(f)$
4. $x(t) + y(t)$	$S(f) + Y(f)$
5. $x(t)y(t)$	$\int_{-\infty}^{\infty} S(g)Y(f-g)dg$
6. $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(-\tau)d\tau$	$S(f)Y(f)$
7. $x(t-t_0)$	$S(f)\exp\{-j2\pi ft_0\}$
8. $x(t)\exp\{j2\pi f_0t\}$	$S(f-f_0)$
9. $\frac{dx(t)}{dt}$	$j2\pi fS(f)$
10. $\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f}S(f)$
11. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt$	$\int_{-\infty}^{\infty} S(f) ^2df$

1.4. Примеры преобразования Фурье

Рассмотрим некоторые практически важные частные случаи формул (1.10) и (1.12).

С преобразованием Фурье тесно связано понятие дельта-функции. Дельта-функцию $\delta(t)$ можно попытаться представить себе как функцию, график которой имеет бесконечную высоту, нулевую ширину и площадь, равную единице. С точки зрения использования дельта-функции полезными будут следующие два замечания: а) она предназначена для использования в интегралах и б) должна аппроксимироваться сходящейся последовательностью функций, обладающей некоторыми свойствами.

Первое замечание приводит к следующему определению дельта-функции:

$$x(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt. \quad (1.24)$$

Отметим, что левая часть этого равенства постоянна. Поэтому применение дельта-функции и интегрирование в правой части мо-

гут представиться в виде процесса, дающего значение $x(t)$ при определенном значении t_0 .

В качестве последовательности, о которой шла речь во втором замечании, можно взять последовательность $\{i=1, 2, \dots\}$

$$\delta_i(t) = \begin{cases} i, & -\frac{1}{2i} \leq t \leq \frac{1}{2i}, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (1.25)$$

Предположим, что требуется получить обратное преобразование Фурье функции $\delta(f-f_0)$. Его можно записать и вычислить следующим образом:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f-f_0) \exp\{j2\pi ft\} df = \exp\{j2\pi f_0 t\} = \cos 2\pi f_0 t + j \sin 2\pi f_0 t. \quad (1.26)$$

Найдем преобразование Фурье функции $\delta(f+f_0)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f+f_0) \exp\{j2\pi ft\} df = \exp\{-j2\pi f_0 t\} = \cos 2\pi f_0 t - j \sin 2\pi f_0 t. \quad (1.27)$$

Рассмотрим обратное преобразование Фурье суммы двух дельта-функций

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\} \exp\{j2\pi ft\} df = \cos 2\pi f_0 t. \quad (1.28)$$

Значит, преобразование Фурье от функции $\cos 2\pi f_0 t$ есть полусумма двух дельта-функций $S(f) = \{\delta(f-f_0) + \delta(f+f_0)\}/2$.

На рис. 1.1, а изображена соответствующая пара Фурье. Вся информация о $\cos 2\pi f_0 t$ после преобразования в спектральную область сконцентрирована в частотах $\pm f_0$ Гц.

Преобразование Фурье ряда, состоящего из дельта-функций, отстоящих друг от друга на Δ единиц времени

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n\Delta), \quad (1.29)$$

представляет собой функцию

$$S(f) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{\Delta}\right), \quad (1.30)$$

т. е. также ряда из дельта-функций в частотной области. Отметим, что этот результат симметричен по отношению к частотной и временной областям.

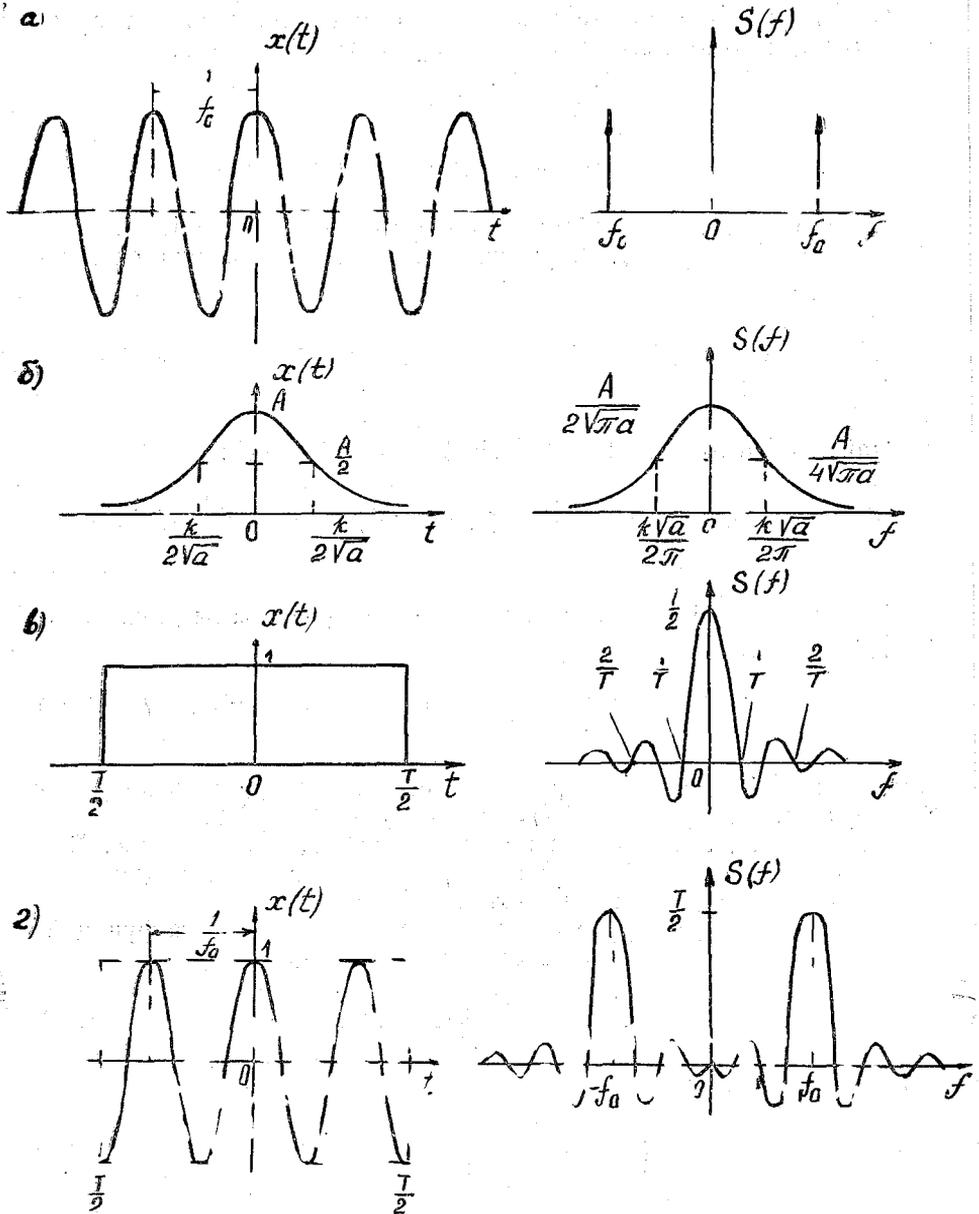


Рис. 1.1. Функции и их преобразования Фурье: а) гармоническая бесконечной длительности; б) колоколообразная функция; в) прямоугольный импульс; г) отрезок гармонической функции

Рассмотрим колоколообразную функцию (функцию Гаусса) $x(t)$

$$x(t) = Ae^{-at^2}, \quad (1.31)$$

где A, a — константы.

Выполнив интегрирование (1.12), можно убедиться, что спектр также выражается функцией Гаусса (см. рис. 1.1, б)

$$S(f) = \frac{1}{2} (\pi a)^{-0.5} e^{-\pi^2 f^2 / a}. \quad (1.32)$$

И здесь имеет место симметрия по отношению к частотной и временной областям.

Прямоугольный импульс, описываемый так называемой селективирующей функцией

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2, \\ 0, & |t| > T/2, \end{cases} \quad (1.33)$$

имеет преобразование Фурье (см. рис. 1.1, б)

$$S(f) = T \frac{\sin \pi f T}{\pi f T}. \quad (1.34)$$

Если сигнал представляет собой такой же прямоугольный импульс, но с косинусоидальной несущей (частота заполнения f_0)

$$x(t) = \Pi_T(t) \cos 2\pi f_0 t, \quad (1.35)$$

то его спектр (рис. 1.1, г)

$$S(f) = \frac{1}{2} \left[T \frac{\sin \pi (f - f_0) T}{\pi (f - f_0) T} + T \frac{\sin \pi (f + f_0) T}{\pi (f + f_0) T} \right]. \quad (1.36)$$

Введем ширину функции Δt — интервал изменения аргумента, в котором функция уменьшается до $1/2$ максимального значения. Ширина функции (1.31) определяется из условия

$$\frac{x(0)}{x(0 + \Delta t/2)} = 2, \quad (1.37)$$

а, следовательно, из условия $\exp\{a(\Delta t/2)^2\} = 2$, и равна

$$\Delta t = 2 (\ln 2/a)^{0.5} = k(a)^{-0.5}. \quad (1.38)$$

Аналогично определяется ширина соответствующего спектра

$$\Delta f = 2 (a \ln 2)^{0.5} / \pi = k(a)^{0.5} / \pi. \quad (1.39)$$

Отметим, что $\Delta f \times \Delta t = 4 (\ln 2) / n \approx 1$. Это является проявлением еще одного общего свойства: в парах Фурье значения ширины функций (если функции ограничены и непрерывны на заданном интервале) всегда обратно пропорциональны друг другу. Обычно при приближенных оценках считают $\Delta f = 1/\Delta t$.

Приведенные выше примеры демонстрируют некоторые общие свойства преобразования Фурье, а именно, как проявляются особенности формы сигналов в их спектрах (и наоборот). В заключение подчеркнем эти характерные свойства:

1. Плавность функции приводит к тому, что в ее спектре доминируют низкие частоты (рис. 1.1, б).
2. Изломы (разрывы значений) в функции создают вторичные высокочастотные максимумы в спектре (рис. 1.1, в).
3. Периодичности в $x(t)$ проявляются в спектре в виде пиков на частоте, соответствующей периоду (рис. 1.1, г).
4. Гармонический сигнал бесконечной длительности имеет в спектре единственный бесконечный пик на своей частоте (рис. 1.1, а).
5. Наличие высокочастотного заполнения в импульсном сигнале приводит к смещению спектра как единого целого, причем сдвиг равен несущей частоте (рис. 1.1, г).
6. Функции большой длительности, как правило, имеют узкий спектр. Функции, спектр которых занимает широкий диапазон частот, имеют малую длительность.

Глава II. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ ПРОЦЕССОВ

Непосредственное выполнение преобразования Фурье (1.12) на ЭВМ для получения спектральных характеристик реальных данных совершенно неожиданно может привести к значительным искажениям или, что особенно неприятно, к правдоподобным неверным результатам. Для избежания подобных ситуаций необходимо более детально рассмотреть процедуру цифрового спектрального анализа и все возникающие при этом особенности в преобразовании Фурье по сравнению с его классическим определением. Анализ этих эффектов применительно к детерминированным временным рядам посвящена настоящая глава.

2.1. Эффекты конечной длины записи

Все рассмотренные до сих пор функции определялись на бесконечном временном интервале. Для измерения этих функций в реальном спектральном анализе потребовались бы эксперименты невозможной продолжительности. Такие эксперименты проводить невозможно, и возникает естественный вопрос об эффектах, обусловленных конечной длиной записи. Иначе говоря, возникает вопрос, что происходит со спектром, если анализу подвергается лишь часть, отрезок процесса.

Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим временное окно, определяемое с помощью соотношения

$$w(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T/2, \\ 0, & |t| > T/2, \end{cases} \quad (2.1)$$

т. е. прямоугольный импульс.

Если $x(t)$ является детерминированным сигналом в интервале $-\infty < t < \infty$, то действительно измеренный сигнал на конечном интервале длительностью T можно записать в виде

$$x_T(t) = x(t) w(t). \quad (2.2)$$

Таким образом, операция взятия конечного участка записи равносильна умножению подлинного сигнала $x(t)$ на временное окно $w(t)$. Отсюда, используя теорему о свертке (1.16), получаем, что

преобразование Фурье $S_T(f)$ сигнала $x_T(t)$ на конечном интервале является сверткой преобразований Фурье от $x(t)$ и $w(t)$

$$S_T(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(g) W(f-g) dg = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) \frac{\sin \pi(f-g)}{\pi(f-g)} dg, \quad (2.3)$$

где спектральное окно $W(f-g)$ является преобразованием Фурье от временного окна $w(t)$ и определялось ранее (1.34). Поэтому эффект перехода к конечной длине записи сводится к свертке исходной функции и функции $(\sin x)/x$. Это приводит к «размыванию» истинного спектра. Для небольших T спектр $S_T(f)$ может дать очень искаженное изображение $S(f)$, так как спектральное окно $W(f-g)$ будет очень широким, а следовательно, значения $S(g)$, отстоящие далеко от $g=f$, будут давать вклад в $S_T(f)$ согласно формуле (2.3). По мере того, как T увеличивается, эти искажения будут уменьшаться. Наконец, когда T устремляется к бесконечности, $W(f-g)$ стремится к дельта-функции, сосредоточенной в точке $g=f$, и тогда, по свойству дельта-функции (1.23), $S_T(f)$ стремится к $S(f)$.

Рассмотрим пример с косинусом, имеющим единичную амплитуду и частоту f_0 . Как было показано (1.28), преобразование Фурье этой функции на бесконечном интервале имеет вид (см. рис. 1.1, а)

$$S(f) = [\delta(f-f_0) - \delta(f+f_0)]/2.$$

Поэтому для преобразования Фурье отрезка косинуса длительностью T получим с учетом (2.3)

$$S_T(f) = \frac{\sin \pi(f-f_0)}{2\pi(f-f_0)} + \frac{\sin \pi(f+f_0)}{2\pi(f+f_0)}. \quad (2.4)$$

Эта функция изображена на рис. 1.1, г. Фактически на рис. 1.1, а показаны исходные дельта-функции, а на рис. 1.1, г — те же дельта-функции, но уже свернутые с функцией $(\sin x)/x$, появление которой обусловлено переходом к интервалу конечной длины. Следует обратить внимание на следующее. $S_T(f)$ нигде не обращается в ноль — это и есть размывание по сравнению с $S(f)$. Информация размывается по всей области частот, а не концентрируется точно в частотах $\mp f_0$. С увеличением длины записи T высота главных пиков в $S_T(f)$ увеличится, а ширина уменьшится, и при $T \rightarrow \infty$ функции $(\sin x)/x$ перейдут к дельта-функциям.

Совсем необязательно, чтобы временное окно было прямоугольным. Интуитивно ясно, что прямоугольное окно (т. е. резкое включение и выключение записи) не является наилучшим, так как в начальный и конечный момент данным придается несвойственный им скачок, который, как мы знаем, приводит к появлению высокочастотных составляющих в спектре (вторичные максимумы спектрального окна на рис. 1.1, в). Для подавления «паразитных» высокочастотных максимумов спектрального окна (эта операция назы-

вается аподизацией) необходимо данные просматривать в окно со сглаженными границами, т. е. использовать временные окна с плавно возрастающими и убывающими значениями на краях. Тогда в спектральном окне вторичные максимумы ослабевают. Однако, аподизация ведет к расширению спектрального окна, что также нежелательно, так как из (2.3) следует, что спектральное окно тем лучше, чем оно ближе по форме к дельта-функции.

Влияние формы и ширины окна на точность определения спектра иллюстрируется рис. 2.1 для одного частотного сигнала $x(t)$ (смесь трех гармоник бесконечной длительности), преобразование Фурье которого состоит из трех дельта-функций, сосредоточенных в f_0 , f_1 и f_2 . Только два главных пика появляются в спектре для окон а, в и г, так как два истинных пика на частотах f_1 и f_2 сливаются в один. Это происходит из-за использования слишком короткого временного окна. Спектры для окон а и б имеют несколько ложных максимумов между настоящими главными пиками. Эти «паразитные» максимумы вызваны резкими границами временного окна. Возможность различать пики (разрешающая способность) зависит от длительности временного окна, что иллюстрируется спектрами для окон а и б, которые имеют одну и ту же форму, но разную длительность. Разрешающая способность зависит также от формы временного окна, что иллюстрируется спектрами для окон б, в и г, которые имеют одинаковую длительность, но различную форму.

На рис. 2.1 расстояние между частотами ($f_2 - f_1$) было выбрано равным $1/T$. Рисунок показывает, что с помощью прямоугольного временного окна длины T невозможно различить два пика на частотах f_1 и f_2 . Однако с помощью прямоугольного окна длины $2T$ эти пики легко различаются. Следовательно, для разделения двух пиков на частотах f_1 и f_2 с помощью прямоугольного окна необходимо использовать длину записи T порядка

$$T \geq \frac{1}{f_2 - f_1}. \quad (2.5)$$

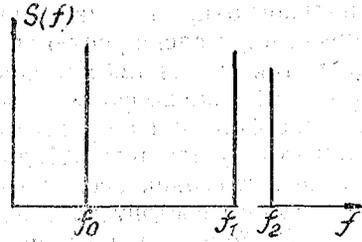
Рис. 2.1, в и г показывают, что для различения пиков с помощью окон, не являющихся прямоугольными, длительность окон должна быть больше $2/(f_2 - f_1)$.

С конечной длиной записи связан и другой эффект. Он заключается в невозможности точного измерения частоты. Поскольку информация размыта, точно определить максимум главного всплеска практически невозможно.

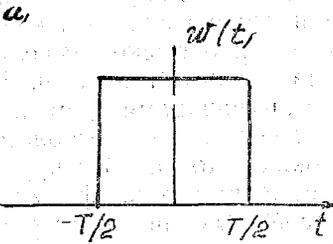
В заключение подчеркнем следующее:

1. Использование конечной длины записи T анализируемого процесса приводит к размыванию его спектра — ухудшение спектральной разрешающей способности.
2. Величина, обратная длине записи — $1/T$, определяет предельную разрешающую способность и, следовательно,

Входной сигнал, спектр



Временные окна



Выходной сигнал, спектр

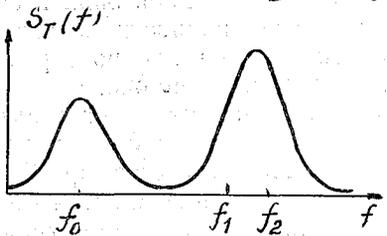
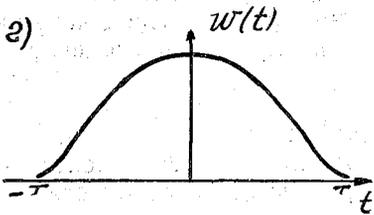
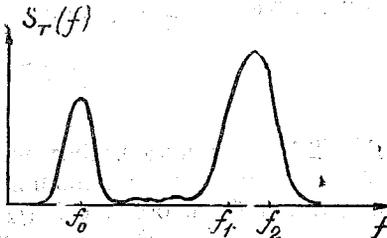
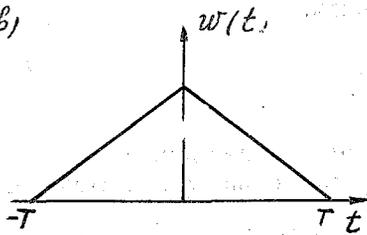
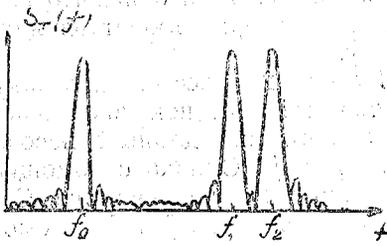
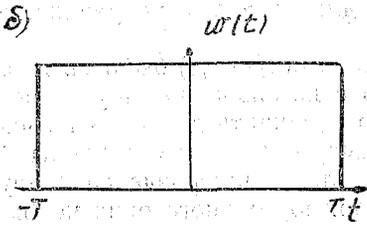
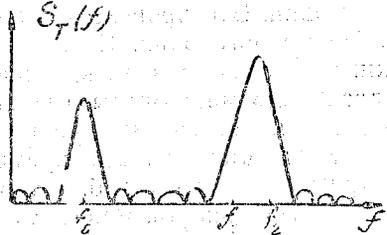


Рис. 2.1. Влияние формы и длительности временного окна на спектр сигнала

минимальный шаг по частоте, с которым может быть вычислен спектр, а также самую низкую из частот, представленных в спектре.

3. При выборе участка данных для спектрального анализа в зависимости от особенностей конкретной задачи следует использовать прямоугольное временное окно, если важна высокая разрешающая способность отдельных пиков и не столь существенны высокочастотные искажения в спектре, и окно с плавными границами, если наибольший интерес представляет неискаженная (пусть даже сглаженная) форма спектра.

2.2. Эффекты дискретизации сигнала по времени

Для численного анализа отсчеты непрерывного сигнала $x(t)$ производятся через некоторый фиксированный интервал Δ , и полученные таким образом дискретизованные сигналы используются для цифровых вычислений. Возникает вопрос, как процедура дискретизации сказывается на точности определения спектра.

Для ответа на этот вопрос рассмотрим дискретизованный сигнал как результат умножения первоначального непрерывного сигнала на функцию $i(t)$, состоящую из бесконечного ряда равноотстоящих дельта-функций

$$i(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n\Delta). \quad (2.6)$$

Это дает дискретизованный, или импульсно-модулированный, сигнал

$$x_i(t) = x(t) i(t). \quad (2.7)$$

Отсюда, воспользовавшись теоремой о свертке, находим спектр дискретизованного сигнала

$$S_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f-g) I(g) dg, \quad (2.8)$$

где $I(g)$ является преобразованием Фурье от $i(t)$. Используя для $I(g)$ выражение (1.30) преобразуем (2.8)

$$S_i(f) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f-g) \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(g - \frac{n}{\Delta}\right) dg = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{n}{\Delta}\right). \quad (2.9)$$

Равенство (2.9) дает, казалось бы, неожиданный результат: дискретизованный сигнал $x_i(t)$ имеет периодическое преобразование Фурье с периодом $1/\Delta$, и если истинный спектр недискретизованного сигнала $S(f)$ обращается в нуль при $|f| \geq 1/2\Delta$, то спектр дискретизованного сигнала $S_i(f)$ является просто периодически

повторяющейся функцией $S(f)$, как показано на рис. 2.2, б и в. Если вспомнить (см. гл. I), что дискретный спектр имеют периодические сигналы, то результат (2.9) является зеркальным отражением этого свойства: дискретные сигналы имеют периодически повторяющийся спектр.

Для того, чтобы по $S_i(f)$ восстановить $S(f)$, необходимо из периодически повторяющегося спектра вырезать один период. Это можно сделать, умножив $S_i(f)$ на $H(f)$, где

$$H(f) = \begin{cases} \Delta, & |f| \leq 1/2\Delta, \\ 0, & |f| > 1/2\Delta. \end{cases} \quad (2.10)$$

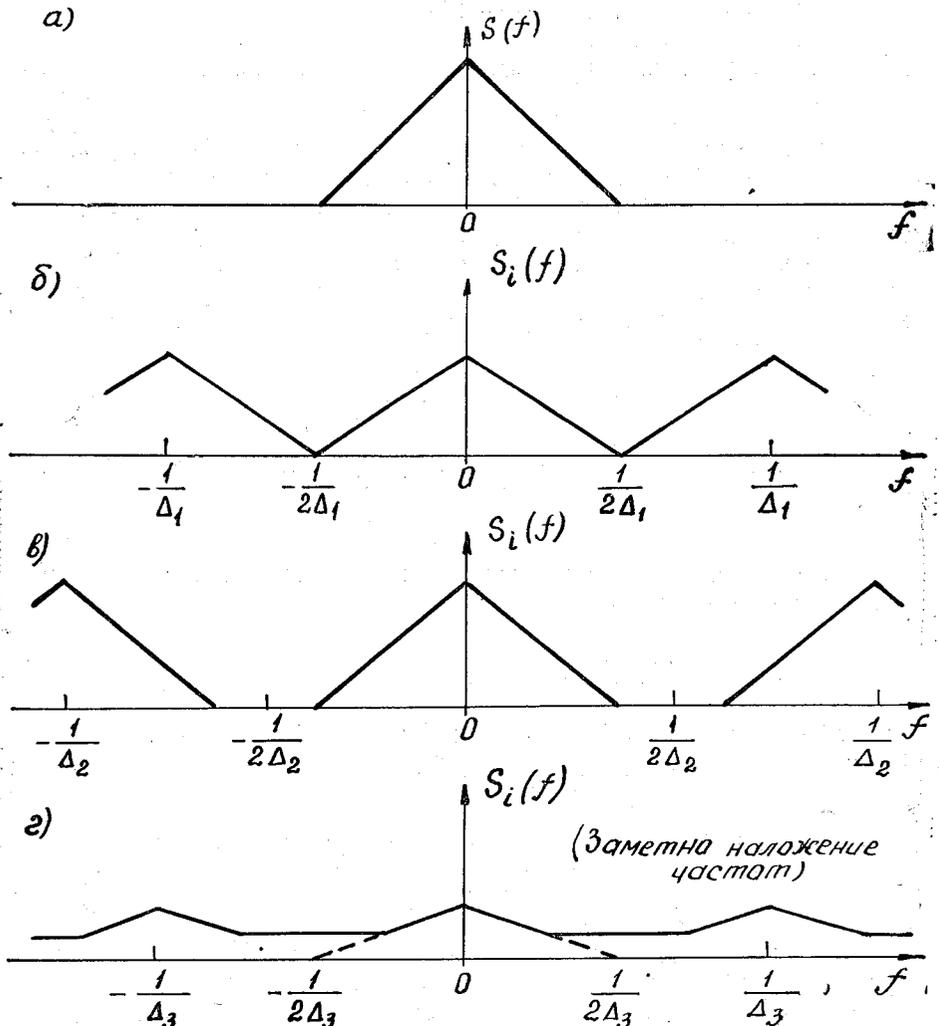


Рис. 2.2. Эффекты дискретизации по времени и возникновение наложения частот

Так как умножение в частотной области соответствует свертке во временной области, то

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi u/\Delta)}{\pi u/\Delta} x_i(t-u) du. \quad (2.11)$$

Функция $\sin(\pi u/\Delta)/(\pi u/\Delta)$ является идеальным фильтром для восстановления непрерывного сигнала $x(t)$ из дискретизованного сигнала $x_i(t)$. Иначе говоря, функция $\sin(\pi u/\Delta)/(\pi u/\Delta)$ является идеальной интерполирующей функцией для равноотстоящих ординат и формулу (2.11) иногда называют интерполяционной формулой Уиттекера.

Если интервал отсчета таков, что $S(f)$ убывает до нуля, не доходя до $|f|=1/2\Delta$, как в случаях б или в на рис. 2.2, то можно абсолютно точно восстановить $S(f)$ по $S_i(f)$. Если же $S(f)$ не равна нулю за частотой $f=1/2\Delta$, то частотные компоненты от частот выше $1/2\Delta$ присутствуют в $S_i(f)$ в диапазоне $-1/2\Delta \leq f \leq 1/2\Delta$, как например, в случае г на рис. 2.2. Частота $f_N=1/2\Delta$ называется частотой Найквиста и является наивысшей частотой, которую можно обнаружить на данных, полученных с интервалом отсчета Δ .

Если, например, $\Delta=0,1$ с, то частота Найквиста равна 5 Гц. Преобразование Фурье $S_i(f)$ дискретизованного сигнала на 4 Гц будет состоять из вкладов преобразования $S(f)$ на 4 Гц, на $10+4=14$ Гц, на $-10+4=-6$ Гц, на $20+4=24$ Гц, на $-20+4=-16$ Гц и т. д. Все эти частоты, кроме первой, называют обычно двойниками частоты 4 Гц, а их влияние на преобразование Фурье — явлением наложения частот. Следовательно, при дискретизации по времени непрерывных временных частот нужно надлежащим образом позаботиться о выборе частоты отсчетов $f_N=1/2\Delta$, чтобы избежать искажающего влияния наложения частот на $S_i(f)$.

С этим обстоятельством тесно связана теорема Котельникова, которая позволяет ответить на вопрос, насколько хорошо выборочные дискретные данные представляют исходную непрерывную функцию. Теорема Котельникова гласит, что такое представление будет хорошим, если выполняются следующие условия:

- 1) функция $x(t)$ определена при $-\infty < t < \infty$,
- 2) существует преобразование Фурье $S(f)$ функции $x(t)$,
- 3) функция $S(f)$ имеет ограниченный носитель, т. е. $|S(f)|=0$ при $|f| > f_N$ Гц.

Тогда функция $x(t)$ может быть точно восстановлена по последовательности $x_i(t)$, если интервал дискретизации $\Delta \leq 1/2f_N$, в соответствии с формулой (2.11).

Фактически теорема Котельникова устанавливает условия, позволяющие избежать наложения частот. Используя симметрию свойств преобразования Фурье, можно сформулировать теорему

Котельникова для восстановления непрерывного спектра по его дискретным значениям при соответствующем выборе шага дискретизации по частоте. Что предлагается читателю в качестве самостоятельного упражнения.

Чтобы проиллюстрировать примером обсуждаемые в п. 2.1 и 2.2 вопросы, предположим, что желательны вычислить длину записи T и интервал отсчета Δ , необходимые для достижения некоторых целей. Пусть известно, что изучаемый сигнал предположительно содержит две синусоидальные компоненты на частотах 100 и 99 Гц. Тогда, если мы хотим различать эти пики в спектре, определенном по конечной записи, нам нужно взять $1/T$ порядка $100 - 99 = 1$ Гц, т. е. T должно быть порядка 1 с. Чтобы оценивать частоты порядка 100 Гц, величина $1/2\Delta$ должна быть, по меньшей мере, равной 100 Гц и, следовательно, $\Delta \leq 5$ мс. Таким образом, нужно взять по крайней мере 200 точек. Если бы нам захотелось различить две частотные компоненты 999 и 1000 Гц, необходимая длительность записи была бы еще 1 с, однако интервал отсчета в этом случае нужно было бы взять 0,5 мс, так что потребовалось бы 2000 точек.

В заключение подчеркнем следующее:

1. Дискретизация исходной функции приводит к периодическому повторению ее спектра с периодом, обратным интервалу дискретизации.
2. Интервал дискретизации определяет высшую частоту в спектре, которую можно различить.
3. Во избежание наложения частот интервал дискретизации должен быть выбран таким, чтобы частота Найквиста $1/2\Delta$ была не ниже самой высокой частоты в анализируемом спектре. Как правило, эта высшая частота определяется инерционными свойствами измерительного устройства, поставляющего исходные данные.

2.3. Дискретное преобразование Фурье

Как уже указывалось, по многим причинам целесообразно проводить спектральный анализ на ЭВМ. Это означает, что преобразование Фурье должно быть выполнено численно и необходимо рассматривать только дискретные отсчеты как временной функции, так и спектра, и только конечное число их отсчетов. Возникает вопрос, по какой формуле производить численное интегрирование в (1.12) и какие эффекты возникают при этом переходе. Ответу на этот вопрос с учетом сведений, полученных в п. 2.1, 2.2, посвящен настоящий параграф.

Вспомним формулу (1.12), задающую прямое преобразование Фурье $S(f)$ непрерывной функции $x(t)$:

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp\{-j2\pi ft\} dt.$$

Введем теперь дискретную аппроксимацию этой формулы для выборочных данных, пригодную для реализации на ЭВМ. Предположим, что исходная временная функция $x(t)$ представлена последовательностью из N отсчетов с шагом дискретизации во времени Δ (длина записи $T = N\Delta$)

$$x_i = x(i\Delta), \quad 0 \leq i \leq N-1. \quad (2.12)$$

Предполагается, что шаг дискретизации выбран правильно, с учетом изложенного в п. 2.2, частота Найквиста не ниже высшей частоты, имеющейся в данных, и наложения частот не произойдет.

Полученный в результате расчета на ЭВМ спектр $S(f)$ также должен быть представлен последовательностью значений с шагом дискретизации по частоте F

$$S_k = S(kF), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

Вспоминая материал п. 2.1, можно указать, каким именно должен быть шаг по частоте F — он должен равняться (не превышать) предельной спектральной решающей способности, обратной длине записи T , т. е.

$$F = \frac{1}{T} = \frac{1}{N\Delta}. \quad (2.14)$$

Тогда (2.13) преобразуется к виду

$$S_k = S\left(\frac{k}{N\Delta}\right). \quad (2.15)$$

Переходя теперь от интеграла к конечной сумме и проводя преобразования с учетом замены t на $i\Delta$, f на $k/N\Delta$, получим

$$S_k(f) = \Delta \sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp\left\{-j2\pi \frac{k}{N\Delta} i\Delta\right\} = \Delta \sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp\left\{-j2\pi \frac{k}{N} i\right\}. \quad (2.16)$$

Соотношение (2.16) определяет прямое дискретное преобразование Фурье (ДПФ). При таком определении существует только N различных значений спектра S_i , а именно при $k=0, 1, \dots, N-1$. Для того, чтобы это доказать, рассмотрим (2.16) для произвольного целого k , выраженного как

$$k = rN + k_0, \quad (2.17)$$

где $k_0 = k$ по модулю N , а $r = (k - k_0)/N$. Тогда

$$\begin{aligned} S_k(f) &= \Delta \sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp\left\{-j2\pi \frac{rN + k_0}{N} i\right\} = \\ &= \Delta \sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp\{-j2\pi r i\} \exp\left\{-j2\pi \frac{k_0}{N} i\right\}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

но поскольку $\exp\{-i2\pi r\} = 1$, то последнее выражение можно упростить до вида

$$S_k = S_{k_0}. \quad (1.19)$$

Мы можем считать (2.16) формулой, дающей последовательность только из N чисел ($k=0, 1, \dots, N-1$), или формулой, дающей периодическую последовательность чисел с периодом N .

Подобным же образом определяется обратное ДПФ

$$x_i = \frac{1}{N\Delta} \sum_{k=0}^{N-1} S_k \exp\left\{j \frac{2\pi ik}{N}\right\}. \quad (2.20)$$

Отметим, что существует только N различных значений функции x_i при $i=0, 1, \dots, N-1$, остальные i дают периодически повторяющуюся последовательность с периодом N .

Следует обратить внимание на интерпретацию частот в ДПФ. Частота Найквиста, т. е. наивысшая частота, которая может быть обнаружена в данных, полученных с интервалом отсчета Δ , равна $1/2\Delta$.

Соответствующий этой частоте номер k в последовательности значений спектра определяется из равенства

$$k/N\Delta = 1/2\Delta, \quad (2.21)$$

т. е. $k=N/2$. Таким образом, частота Найквиста соответствует середине последовательности S_k .

При детальном рассмотрении ДПФ (2.16) и (2.20) обнаруживается ряд весьма интересных свойств.

Первое из них уже указывалось — периодичность функций x_i и S_k . Поскольку значениям k в промежутке $0, 1, \dots, N/2$ соответствуют частоты, не превосходящие частоту Найквиста, закономерен вопрос о смысле, который имеют величины S_k при $k > N/2$. Оказывается, этим величинам соответствуют отрицательные частоты. Предположим, что индекс k в определении S_k заменен на $-p$, т. е.

$$S_{-p} = \Delta \sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp\left\{-j \frac{2\pi i (-p)}{N}\right\}. \quad (2.22)$$

После умножения экспоненциального члена на величину $\exp\left\{-i \frac{\pi i N}{N}\right\}$, равную единице, получим

$$\Delta \sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp\left\{-j \frac{2\pi i (N-p)}{N}\right\} = S_{N-p} = S_{-p}. \quad (2.23)$$

Таким образом, $S_{-1} = S_{N-1}$, $S_{-2} = S_{N-2}$ и т. д. Итак, второй половине преобразования отвечает преобразование для отрицательных значений k .

Второе важное свойство связано со сверткой. Предположим, что заданы величины y_i и для них ДПФ определяется по формуле

$$Y_k = \Delta \sum_{i=0}^{N-1} y_i \exp \left\{ -j \frac{2\pi i k}{N} \right\}. \quad (2.24)$$

Если спектр Z_k определяется соотношением

$$Z_k = S_k Y_k, \quad (2.25)$$

то вполне естественно ожидать, что ее обратное ДПФ z_i будет сверткой x_i и y_i . Сложность заключается в том, что результирующая свертка тоже периодична. Приведем для нее формулы

$$z_i = \Delta \sum_{k=0}^{N-1} x_p y_{i-p} = \Delta \sum_{p=0}^{N-1} x_{i-p} y_p. \quad (2.26)$$

С этой формой преобразования связана еще одна особенность. Поскольку x_p и y_{i-p} тоже периодически повторяющиеся последовательности (как результат обратного ДПФ), при суммировании их встречных произведений будут возникать искажения, связанные с участием в произведении «хвостов» x_p и y_{i-p} , являющихся началом и концом соответствующих периодических повторений. Этот эффект носит название межпериодной интерференции. Если с ним не бороться, z_i будет искажена до неузнаваемости. Для подавления этого эффекта при вычислении свертки (2.26) в конце последовательности x_p и y_{i-p} искусственно добавляется до N нулей.

В заключение подчеркнем следующее:

1. Дискретное преобразование Фурье в отличие от аппроксимируемого им непрерывного приводит к несуществующей в данных периодичности как временной функции, так и ее спектра. Это проявление уже известного свойства преобразования Фурье: дискретному спектру соответствует периодическая функция, дискретной функции соответствует периодический спектр. Числу отсчетов функции соответствует такое же количество значений спектра.
2. Свертка ДПФ также периодична, и при попытке построения моделей причинных систем с ее помощью можно ввести себя в заблуждение в связи с явлением межпериодной интерференции. Это явление должно быть подавлено добавлением нулей.

2.4. Быстрое преобразование Фурье

Прямое вычисление ДПФ в соответствии с (2.16) для всех N частот требует N^2 комплексных умножений и сложений, и для умеренно большого N , скажем, для N большего, чем 1000, это прямое вычисление связано с большими затратами машинного времени.

Существует много методов, экономящих машинное время, в большинстве случаев основанных на том, что сумма произведений может быть иногда упрощена, если сделать сложение до умножения, или на том, что комплексные операции могут быть заменены действительными операциями. Общим для этих методов является то, что полное преобразование rN точек занимает в r^2 больше времени, чем преобразование N точек. Наиболее эффективными и широко распространенными алгоритмами подобного типа являются так называемые быстрые преобразования Фурье (БПФ). Эти алгоритмы не применяются в тех случаях, когда число точек в последовательности является простым, но зато при N сложносоставном (имеющем много сомножителей) экономия может быть чрезвычайно большой. Когда N есть степень числа 2 (состоит из максимального числа сомножителей), то алгоритмы БПФ требуют проведения числа операций, пропорционального не N^2 , а $N \log_2 N$, что, например, при $N=1024$ составляет 99%-ную экономию в вычислениях. Для эффективного использования БПФ требуется, чтобы N разлагалось на возможно большее число множителей, например, являлось степенью числа 2. В большинстве задач на преобразуемые данные можно наложить это ограничение, добавив необходимое число нулей, с тем, чтобы использовать преимущества БПФ.

Рассмотрим главные принципы, положенные в основу БПФ. Введем обозначения

$$\exp \left\{ -j \frac{2\pi}{N} \right\} = W. \quad (2.27)$$

Тогда (2.16), определяющее ДПФ, примет вид

$$S_k = \Delta \sum_{i=0}^{N-1} x_i W^{ik}. \quad (2.28)$$

Из уравнения (2.28) не следует делать вывод, что W не зависит от N . Для последовательности с $N/2$ точками в (2.28) не только верхний предел суммы должен стать равным $(N/2) - 1$, но и W должно быть заменено на W^2 .

Предположим, что число отсчетов N делится на два. Тогда полезно рассмотреть ДПФ двух более коротких последовательностей: g_m , состоящей из четно пронумерованных отсчетов x_i , и h_m , состоящей из нечетно пронумерованных отсчетов x_i . Формально это задается как

$$\begin{cases} g_m = x_{2m}, \\ h_m = x_{2m+1}, \quad m = 0, 1, \dots, (N/2) - 1. \end{cases} \quad (2.29)$$

ДПФ для этих последовательностей является также последовательностями, состоящими из $N/2$ точек, или, как было показано в предыдущем параграфе, могут считаться периодическими последовательностями с периодом $N/2$. Они могут быть записаны в виде

$$\begin{cases} G_k = \Delta \sum_{m=0}^{N/2-1} g_m (W^2)^{mk} \\ H_k = \Delta \sum_{m=0}^{N/2-1} h_m (W^2)^{mk} \end{cases} \quad (2.30)$$

Для нас представляет интерес ДПФ от полной последовательности, которое может быть выражено через g_m и h_m из (2.29)

$$S_k = \Delta \sum_{m=0}^{N/2-1} (g_m W^{2mk} + h_m W^{(2m+1)k}). \quad (2.31)$$

Простая манипуляция с выражением (2.31) дает

$$S_k = \Delta \sum_{m=0}^{N/2-1} g_m (W^2)^{mk} + W^k \Delta \sum_{m=0}^{N/2-1} h_m (W^2)^{mk} = G_k + W^k H. \quad (2.32)$$

Соотношение (2.32) между S_k , G_k и H_k имеет важное значение для вычислений. В самом деле, G_k и H_k могут быть вычислены при прямом методе с помощью $(N/2)^2$ операций каждая, а соединение их, дающее S_k , требует проведения только N операций, что в сумме составляет $N + N^2/2$ операций (под операцией здесь подразумевается комплексное умножение и сложение). Прямое же вычисление требует N^2 операций и поэтому (2.32) экономит вычисления почти в два раза для больших N .

В (2.32) индекс k изменяется от 0 до $N-1$. Однако G_k и H_k имеют период $N/2$ и вычисляются только в диапазоне от 0 до $(N/2)-1$. Поэтому необходимы особые рецепты для вычисления S_k при $0 \leq k \leq (N/2)-1$ и при $N/2 \leq k \leq N-1$, а именно, с учетом свойств (2.23)

$$S_k = \begin{cases} G_k + W^k H_k, & 0 \leq k \leq (N/2) - 1, \\ G_{k-N/2} + W^k H_{k-N/2}, & N/2 \leq k \leq N - 1. \end{cases} \quad (2.33)$$

Может случиться, что $N/2$ тоже делится на 2. В этом случае, поскольку G_k и H_k являются ДПФ, время их вычисления может быть уменьшено тем же способом, каким было уменьшено S_k . Следуя этим путем, объем вычислений S_k можно успешно уменьшать, если все более и более увеличивать число ДПФ от все меньшего и меньшего числа точек со все большей и большей экономией вычислительных операций. В этом и заключается сущность метода БПФ.

Конкретные численные варианты реализации алгоритма БПФ отличаются большим разнообразием и нахождением дополнительных приемов, ускоряющих проведение преобразования. Благодаря возросшей скорости, с которой можно вычислять ДПФ при использовании БПФ, постоянно расширяется область применения спектрального анализа. Интересное применение находит БПФ и в других областях, например при интерполяции. Здесь задача состоит в нахождении значений точек на кривой между уже известными точками. Напомним, что по теореме Котельникова в случае

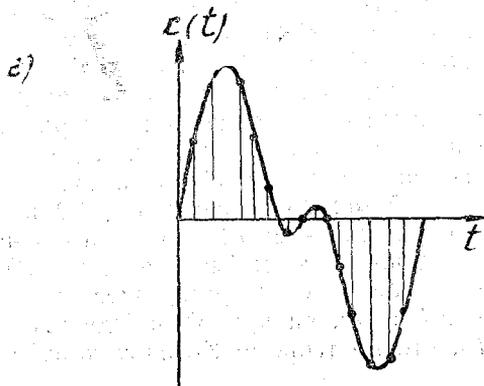
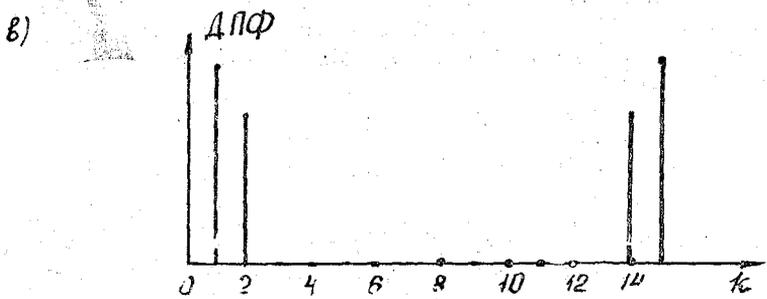
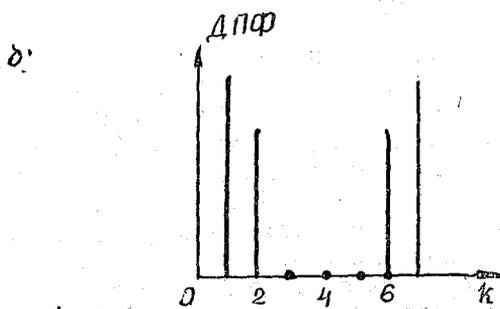
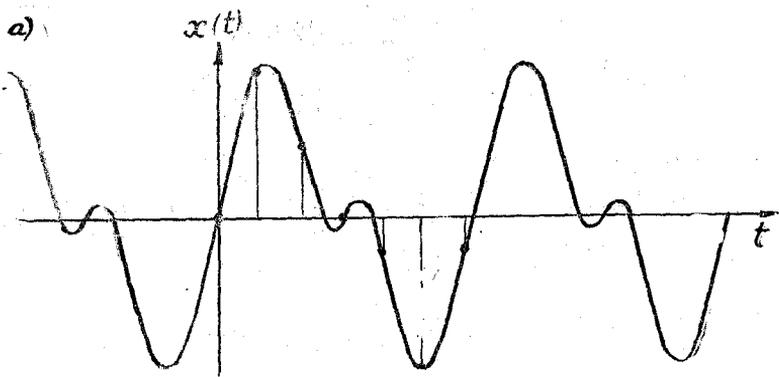


Рис. 2.3. Интерполяция с помощью БПФ

непрерывной функции, дискретизованной при $t=i\Delta$, имеющей ограниченный носитель с частотой Найквиста, превышающей $1/2\Delta$, функция точно воссоздается интерполяционной формулой Уиттекера (2.11). Это выражение требует бесконечного множества вычислений для каждой точки на кривой $x(t)$, но так как $(\sin x)/x$ быстро убывает, то возможна аппроксимация $x(t)$ некоторой конечной суммой вместо бесконечной в (2.11). Теперь предположим, что известно только N точек функции. Функция, которая равна нулю вне интервала от 0 до $M\Delta$, не может иметь ограниченный носитель — ее спектр точно обращается в ноль только на бесконечности. Следовательно, строгая ограниченная по полосе частот интерполяция невозможна. Допустим поэтому, что известные N точек представляют один период периодической, ограниченной по полосе частот функции. Тогда можно оценить функцию в r раз большем количестве точек, вычислив N -точечное ДПФ и поместив $(r-1)N$ нулей в середину последовательности S_n , то есть выше Найквистовой частоты, находящейся, как мы помним (см. п. 2.3), в точке $k=N/2$. Обратное преобразование тогда будет иметь rN точек, соответствующих интерполяции периодической функции с ограниченной полосой. Это иллюстрируется рис. 2.3.

В заключение подчеркнем следующее:

1. Для числа точек данных, выражаемого степенью числа 2, существует семейство очень экономичных вычислительных алгоритмов, реализующих быстрое преобразование Фурье.
2. В случае, если число данных не равно 2, его можно дополнить необходимым количеством нулей вслед за последним отсчетом. Это искусственно увеличит длину записи и, следовательно, уменьшит шаг по частоте значений спектра, т. е. увеличит число его значений в данном частотном интервале. При этом не произойдет реального улучшения спектральной разрешающей способности, а лишь интерполяция функции спектра. Зеркальным отображением этого свойства является возможность интерполяции значений временной функции путем добавления нулей в ее спектр выше частоты Найквиста.

2.5. Сбор и предварительная обработка данных

Остановимся на некоторых основных задачах, возникающих в начальной стадии спектрального анализа временных метеорологических рядов. Данные могут быть разбиты по типу на два разных класса: непрерывные (или аналоговые) и данные, имеющие дискретный цифровой характер.

Для численного спектрального анализа более удобны данные второго типа. К ним можно отнести годовые уровни осадков, среднемесячной температуры, максимальные значения скорости ветра за определенный период и многие другие. Исследованию же непре-

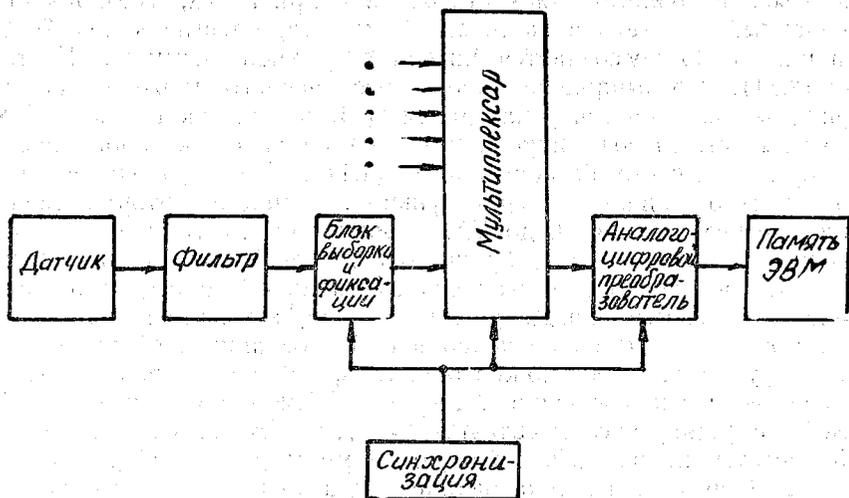


Рис. 2.4. Схема сбора и цифрового преобразования данных

рывных данных сопутствует ряд проблем. Среди них измерение, передача и (или) запись данных, преобразование из аналоговой формы в цифровую. На каждом из этапов возникают погрешности, которые необходимо знать и отдавать себе отчет об их вкладе в ошибки спектрального анализа.

На рис. 2.4 изображена типичная система для сбора данных и преобразования их в цифровую форму.

Первым элементом является датчик, проводящий измерения того или иного метеорологического параметра. Обычно датчик выбирается так, чтобы его передаточная функция была линейной в пределах предусмотренного (подлежащего анализу) интервала частот. Выход датчика поступает сначала в фильтр для подавления эффекта наложения частот (см. п. 2.2). Если частота выборки (эффективная скорость отсчетов) будет равна $1/\Delta$, то, чтобы предотвратить явление наложения частот, фильтр должен гасить все частоты свыше $1/2\Delta$ Гц. Другими словами, частотная характеристика фильтра должна иметь вид

$$H(f) = \begin{cases} 1, & -1/2\Delta < f < 1/2\Delta, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.34)$$

Однако построить фильтр с такой идеальной частотной характеристикой невозможно. На практике к ней можно лишь приближаться. Поэтому ребра графика реальной частотной характеристики фильтра оказываются сглаженными, и насколько бы незначительной не была информация с частотами, превосходящими $|1/2\Delta|$, полностью избавиться от нее не удастся. Типичную форму низкочастотного фильтра, применяемого для устранения наложе-

ния частот, имеет фильтр Баттерворта. Квадрат модуля частотной характеристики этого фильтра имеет вид

$$|H(f)|^2 = \left[1 + \left(\frac{2\pi f}{2\pi B} \right)^{2M} \right]^{-1}, \quad (2.35)$$

где M, B — параметры фильтра.

За фильтром на рис. 2.4 следует устройство выборки и фиксации. Теоретическим описанием такого устройства служит формула взятия дискретного отсчета типа (2.6), (2.7)

$$x_i = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \delta(i\Delta - t) dt. \quad (2.36)$$

Осуществить операцию, идеально схожую с дельта-функцией, невозможно. Поэтому дельта-функцию заменяют щелевой функцией с конечным носителем. Если щель имеет прямоугольную форму, то (2.36) преобразуется к виду

$$x_i = \frac{1}{a} \int_{i\Delta - a/2}^{i\Delta + a/2} x(t) dt, \quad (2.37)$$

где a — ширина щели.

Вычисление по этой формуле есть, по сути дела, определение среднего значения функции $x(t)$ в промежутке от $i\Delta - a/2$ до $i\Delta + a/2$. Естественно, что ширина a должна быть меньше интервала дискретизации Δ , и чем она будет меньше, тем лучше. Как всякое усреднение, щелевой эффект приводит к затуханию информации более высоких частот. С блоком выборки и фиксации связана еще одна проблема — так называемое дрожание, т. е. процесс, в силу которого выборки происходят не точно в моменты $t = i\Delta$, а в моменты $i\Delta + J(t)$, где $J(t)$ — случайный процесс. В конечном итоге дрожание также приводит к занижению высокочастотной информации.

Дискретизованные значения x_i обычно фиксируются блоком выборки и фиксации в виде разности потенциалов заряженного конденсатора и хранятся до тех пор, пока мультимплексор не выберет их для пересылки в аналого-цифровой преобразователь для перевода отсчетов в цифровой формат. При этом также появляются погрешности квантования по уровню или вычислительный шум.

Упомянем другие проблемы, связанные с применением систем сбора данных. Среди них назовем в первую очередь посторонние электрические шумы, вызванные внешними условиями, а также шумы, обусловленные применением усилителей, проблемы, связанные с искажениями, имеющими причиной слишком высокие уровни сигналов, и чрезмерный уровень шума, возникающий вследствие слишком низкого уровня сигналов.

Чтобы избежать этих проблем или уменьшить их значение, следует обратить внимание на три важных вопроса.

1. Прежде чем определять комплект оборудования для сбора и обработки данных с целью последующего спектрального анализа,

все нужно взвесить с точки зрения конечного результата: какова природа решаемой задачи? Каковы параметры, которые нужно вычислять? Насколько точными должны быть их значения, чтобы получить исчерпывающие ответы? На практике не всегда можно ответить на все эти вопросы, но экспериментатор должен задавать их себе, иначе он обнаружит, что характер решения определяется не поиском решения, а оборудованием.

2. Система должна быть как можно более автоматизированной. Как правило, система сбора данных управляется ЭВМ. Последняя должна комплектоваться и программироваться так, чтобы быть подчиненной эксперименту. Например, ЭВМ может выдавать такие ключевые параметры, как скорость выборки и калибровочные множители. Если их не регистрировать независимо, то станет весьма вероятным появление ошибки или при задании системе параметров, или при записи их значений.

3. Систему необходимо сделать самоконтролирующейся и периодически проводить контрольные проверки. Сравнительно просто к системе можно присоединить цифро-аналоговый преобразователь (ЦАП). С его помощью можно провести круговой тест: получить с помощью ЭВМ системы какие-либо цифровые данные и преобразовать их в аналоговую форму посредством ЦАП, затем выход ЦАП ввести в систему как данные, дискретизовать их и преобразовать в цифровую форму, после этого сравнить начальную функцию и конечный результат. Такого типа круговые проверки могут выявить нелинейности, некоторые виды исчезновения знаков, нарушения в наборе коэффициентов цифрового преобразования и другие особенности. Такую процедуру настоятельно рекомендуется проводить всегда, когда для этого есть возможность.

2.6. Основные этапы спектрального анализа детерминированных процессов

Подведем основные итоги изложенного во II главе с практической точки зрения, в виде логической схемы анализа.

1. Первым этапом спектрального анализа какого-либо метеорологического процесса является четкая формулировка задачи: выбор частотного диапазона $[f_0, f_N]$, в котором особенности спектра могут дать новую физическую информацию о процессе, и задание разрешающей способности анализа по частоте Δf , т. е. формулировка требования к точности определения спектра.

2. В зависимости от значений выбранных на первом этапе параметров предъявляются требования к аппаратуре: а) полоса пропускания датчика не должна быть уже интервала анализа $[f_0, f_N]$, б) в случае, если верхняя частота полосы пропускания датчика превышает значение f_N (малоинерционный датчик), необходимо к его выходу подключить фильтр, частота среза которого равна f_N , для избежания наложения частот. Операцию фильтрации можно

выполнить и численно на ЭВМ с использованием методов цифровой фильтрации до проведения спектрального анализа.

3. Исходя из частоты f_N , назначается шаг дискретизации по времени Δ анализируемого процесса в соответствии с равенством $\Delta = 1/2f_N$. Другими словами, частота выборок f_D должна быть равна $2f_N$.

4. На основании заданной разрешающей способности Δf определяется время экспозиции — необходимая для анализа длина записи процесса T из соотношения $T > 1/\Delta f$. Необходимо также выполнение условия $T > 1/f_0$ с тем, чтобы в анализируемом отрезке процесса была представлена самая низкая из интересующих частот.

5. С учетом требований к точности спектра определяется и сам способ «вырезания» отрезка данных длительностью T , т. е. вид используемого временного окна. Если увеличение длительности записи ничем не лимитировано, то имеет смысл удлинить анализируемый отрезок, но использовать временное окно с плавными границами во избежание высокочастотных искажений.

6. Определив необходимую длительность регистрации и шаг дискретизации, можно оценить объем выборки $N = T/\Delta$ и необходимые для анализа объем памяти и быстродействия ЭВМ, а также выбрать подходящий алгоритм БПФ.

7. Заключительным этапом является проведение дискретного преобразования Фурье и получение спектральных характеристик. Всегда полезно по полученному спектру восстановить исходный временной ряд с помощью обратного преобразования Фурье и сравнить его с оригиналом.

Глава III. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Большинство реальных гидрометеорологических процессов не могут считаться детерминированными функциями времени и должны рассматриваться лишь в рамках теории случайных процессов. Классический анализ Фурье неприменим к случайным процессам в силу того, что результат его применения к одной реализации процесса также оказывается случайным процессом. Так, оценка спектра, полученная прямым преобразованием Фурье, а именно выборочный спектр, обладает тем нежелательным свойством, что ее дисперсия не уменьшается при увеличении длины реализации. Поэтому для случайных процессов методы спектрального анализа из гл. II нужно видоизменить. Ответу на вопрос, как по записи одной реализации случайного процесса построить хорошую оценку его спектра, посвящена настоящая глава.

3.1. Случайный процесс

Под случайным процессом обычно понимают функцию времени $x(t)$, проявляющую свойства нерегулярного изменения. Имея запись такого процесса, невозможно точно предсказать его будущие значения, в отличие от детерминированного сигнала. Следовательно, такой процесс может быть описан только с помощью статистических законов. В формировании мгновенных значений метеорологических величин, особенно в приземном слое, участвует значительное количество неконтролируемых или принципиально случайных (например, турбулентность) факторов. Эти обстоятельства обуславливают необходимость учета случайности при анализе гидрометеорологических величин. Для этого рассмотрим более детально понятие случайного процесса.

При анализе данных возникает необходимость выполнять операции над фактическими числами, полученными из эксперимента. До того, как данные собраны, удобно рассматривать их как один из возможных наборов данных, которые могли бы быть получены из этого эксперимента. Это достигается тем, что с каждым моментом времени t в интервале $(-\infty, \infty)$ связывается некоторая случайная величина $X(t)$, которая может принимать значения $-\infty < X(t) < \infty$ и имеет плотность вероятности $P_{x(t)}(x)$. Кроме того,

нужно задать совместные плотности вероятности, относящиеся к любому произвольному набору моментов времени (t_1, t_2, \dots, t_m) . Таким образом, временной ряд можно описать с помощью упорядоченного множества случайных величин $X(t)$, $-\infty < t < \infty$.

Упорядоченное множество случайных величин называется случайным процессом. Случайный процесс дает вероятностное описание физического явления, которое развивается во времени по вполне определенным вероятностным законам. Заметим, что выборочное пространство, связанное со случайным процессом, дважды бесконечно: по значениям в любой момент времени и по времени. Дважды бесконечное множество функций времени, которые могут быть определены на этом выборочном пространстве, называется ансамблем.

Наблюденный временной ряд $x(t)$ рассматривается как одна реализация из бесконечного ансамбля функций, которые в принципе могли бы быть наблюдаемы. Этот один или несколько временных рядов, предназначенных для анализа, рассматриваются как выбранные случайным образом «полномочные представители» ансамбля функций. Соотношение между воображаемым теоретическим ансамблем и конкретной реализацией случайного процесса аналогично соотношению генеральной совокупности и выборки случайных величин. Вопрос о том, из чего должен состоять ансамбль возможных временных рядов в любой конкретной задаче, должен решаться на основе разумных физических заключений, а не на чисто статистической основе.

Если ансамбль ясно определен, то наиболее полным описанием случайного процесса является совокупность совместных плотностей вероятности

$$P_{X(t_1) X(t_2) \dots X(t_n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

для произвольно выбранного набора моментов времени t_1, t_2, \dots, t_m , характеризующая степень «размазанности» или распределения возможных реализаций по ансамблю. Однако такое описание весьма сложно, громоздко и, как правило, в реальных задачах недостижимо. На практике необходим более простой подход, позволяющий даже ценой некоторых допущений компактно описывать случайный процесс. Такая возможность представляется при использовании младших моментов.

Для любого t можно определить одномерные моменты аналогично тому, как это делается для обычной случайной величины

$$M\{[X(t)]^k\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_{X(t)}(x) dx. \quad (3.1)$$

Отсюда очень просто описать случайный процесс, построив функцию среднего значения $\mu(t)$ при $k=1$ и функцию дисперсии $\sigma^2(t)$

при $k=2$ в зависимости от времени. Аналогично двумерные моменты

$$M\{[X(t_1)]^k [X(t_2)]^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1^k x_2^m p_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (3.2)$$

можно было бы использовать для описания зависимости между соседними значениями временного ряда в двух точках t_1 и t_2 . Простейшим из моментов (3.2) и наиболее важным на практике является ковариационная функция

$$c_{XX}(t_1, t_2) = M\{[X(t) - \mu(t_1)][X(t_2) - \mu(t_2)]\}. \quad (3.3)$$

Отметим, что $c_{XX}(t_1, t_2) = \sigma^2(t_1)$.

Поскольку $c_{XX}(t_1, t_2)$ зависит от масштаба измерения X , удобно при сравнении двух рядов, которые могут иметь различные масштабы измерения, определить нормированную величину, называемую корреляционной функцией

$$r_{XX}(t_1, t_2) = \frac{c_{XX}(t_1, t_2)}{\sigma(t_1)\sigma(t_2)}. \quad (3.4)$$

Заметим, что корреляционная функция случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2 имеет те же свойства, что и коэффициент корреляции между двумя случайными величинами X_1 и X_2 , а именно. выражает степень линейной зависимости между ними, может принимать значения в диапазоне $[-1, 1]$, границы которого соответствуют полной отрицательной и положительной линейным зависимостям.

Возникает вопрос: а может ли в каких-либо случаях описание случайного процесса с помощью функции среднего и ковариационной функции являться его полным вероятностным описанием, эквивалентным заданию совокупности совместных плотностей вероятности? Оказывается, что может, причем практически довольно часто. Для этого необходимо, чтобы случайный процесс имел нормальное распределение, т. е. его совместные плотности вероятности относились к классу гауссовских распределений. В этом случае конкретная форма распределений полностью определяется ковариационной функцией и функцией среднего случайного процесса. Гипотеза нормальности с достаточной для практики точностью оказывается приемлемой для большинства (но не для всех) гидрометеорологических случайных процессов.

Полное описание случайного процесса еще более упрощается, если выполняется предположение о его стационарности.

В общем случае свойства случайного процесса будут зависеть от времени. Часто ради упрощения предполагают, что ряд достиг некоторой формы устойчивого равновесия в том смысле, что статистические свойства ряда не зависят от абсолютного времени. Наименьшее требование для того, чтобы это было верно, состоит

в том, что плотность вероятности $p_{X(t)}(t)$ не должна зависеть от времени и, следовательно, иметь постоянное среднее значение μ и постоянную дисперсию σ^2 . Из условия равновесия вытекает и еще более общее следствие, а именно: свойства совместной плотности вероятности, соответствующей любому набору моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n , зависят только от разностей $|t_i - t_j|$, а не от их абсолютных значений. Другими словами, если любой набор моментов времени t_1, t_2, \dots, t_n перенести вперед или назад на величину k , то плотность вероятности не изменится. Математически это означает, что равенство

$$p_{X(t_1) \dots X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) = p_{X(t_1+k) \dots X(t_n+k)}(x_1, \dots, x_n) \quad (3.5)$$

справедливо для любых наборов времени и для всех смещений k . Случайный процесс, удовлетворяющий условиям (3.5), называется строго стационарным.

Из предположения стационарности сразу следует, что ковариационная функция $c_{XX}(t_1, t_2)$ зависит только от разности $u = t_2 - t_1$ и, следовательно, ее можно записать в виде

$$c_{XX}(u) = M \{ [X(t) - \mu] [X(t+u) - \mu] \}. \quad (3.6)$$

Смещение u называется запаздыванием. Ковариационная функция показывает, как изменяется степень линейной связи между соседними значениями случайного процесса в зависимости от временной дистанции (запаздывания) между ними.

Для стационарного процесса корреляционная функция

$$r_{XX}(u) = \frac{c_{XX}(u)}{c_{XX}(0)} \quad (3.7)$$

зависит только от запаздывания u .

Платой за столь существенное упрощение описания случайного процесса является довольно сильное ограничение на класс анализируемых процессов. Строго говоря, стационарных процессов в природе вообще не существует. Стационарность — математическое понятие, введенное человеком для упрощения описания. Тем не менее, распространен ряд приемов, позволяющих в некоторых случаях с приемлемой точностью оперировать со случайными процессами как со стационарными. Временные ряды, встречающиеся обычно на практике, можно разделить на три категории:

а) ряды, могущие считаться стационарными в течение относительно больших промежутков времени благодаря некоторой форме контроля над внешними условиями, их стабильности;

б) ряды, с которыми можно обращаться как со стационарными при условии, что рассматриваются достаточно короткие реализации, в течение которых вероятностные свойства не успевают значительно измениться;

в) ряды, которые являются нестационарными как по своему виду, так и из-за априорных сведений об изучаемом явлении.

Спектральный анализ может применяться только для рядов первых двух категорий, формы же проявления нестационарности в третьей категории могут быть самыми разнообразными. Однако в некоторых случаях их удается компенсировать и свести ряд к стационарному. Для этого применяются приемы удаления очевидных трендов путем приближения данных некоторыми математическими функциями, такими, как экспоненты, гармоники или многочлены. Отклонения значений случайного процесса от этих аппроксимирующих функций могут оказаться стационарными. Другим приемом является устранение низкочастотного тренда с помощью соответствующим образом рассчитанного фильтра.

В заключение подчеркнем следующее:

1. Стационарный случайный процесс, имеющий нормальное распределение, полностью статистически описывается средним значением и ковариационной функцией, выражающей зависимость степени линейной связи между соседними отсчетами от разделяющей их временной дистанции.
2. В случае отклонения закона распределения от нормального среднее и ковариационная функция по-прежнему остаются важнейшими характеристиками структуры случайного процесса, правда, не обеспечивающими его полного вероятностного описания.
3. В случае нарушения гипотезы стационарности всегда целесообразно попытаться свести наблюдаемый ряд к стационарному для существенного упрощения его описания.

3.2. Оценивание ковариационных функций

В силу важности ковариационной функции стационарного случайного процесса необходимо остановиться подробнее на ее получении по записям конечной длины. Имеется еще один стимул для изучения ковариационной функции: как станет видно в дальнейшем, она служит промежуточным этапом в получении оценок спектра случайного процесса.

Задача построения оценки характеристики случайного процесса по его реализации решается в рамках теории оценивания. Сложность состоит в том, что сама оценка также является случайной величиной, вероятностные свойства которой обусловлены тем или иным способом ее получения. Способ получения оценки может быть в статистическом смысле плохим и хорошим. Хорошей оценкой среди других возможных по данной реализации считается та, которая приближается своим математическим ожиданием к истинному (неизвестному) значению оцениваемой характеристики (свойство несмещенности); уменьшает свою дисперсию относительно истинного значения по мере удлинения записи (свойство состоя-

тельности); при одинаковой длине записи обладает наименьшей дисперсией среди других оценок (свойство эффективности). Наиболее мощным методом аналитического получения эффективных состоятельных оценок является метод максимального правдоподобия. Суть его — нахождение оценок, доставляющих максимум функций правдоподобия данной реализации. В идеальном случае при выборе оценок ковариационной функции нужно было бы выписать функцию правдоподобия наблюдаемого временного ряда. Затем, дифференцируя эту функцию правдоподобия и приравнявая нулю производные, мы получили бы систему уравнений для выборочных оценок максимального правдоподобия этих ковариаций. Предполагая, что плотность вероятности нормальная, нетрудно выписать функцию правдоподобия, но, к сожалению, полученные в результате дифференцирования уравнения поддаются решению лишь в случае целого ряда допущений. Поэтому приходится пользоваться интуитивно построенными оценками, сравнивать их между собой по смещению и дисперсии (или среднеквадратической ошибке) и затем выбирать наилучшую из доступных оценок. Именно такой подход и будет использован ниже.

Итак, предположим, что имеется реализация конечной длины T случайного процесса $X(t)$. По этой реализации необходимо построить оценку ковариационной функции всего случайного процесса. Наиболее широко распространенными выборочными оценками ковариационной функции являются следующие:

$$\hat{C}_{XX}(u) = \begin{cases} \frac{1}{T} \int_0^{T-|u|} [X(t) - \mu][X(t+|u|) - \mu] dt, & |u| \leq T, \\ 0, & |u| > T, \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\hat{C}_{XX}^1(u) = \begin{cases} \frac{1}{T-|u|} \int_0^{T-|u|} [X(t) - \mu][X(t+|u|) - \mu] dt, & |u| \leq T, \\ 0, & |u| > T. \end{cases} \quad (3.9)$$

Оценки $\hat{C}_{XX}(u)$, $\hat{C}_{XX}^1(u)$ построены по интуиции, а не потому, что они являются наилучшими в каком-нибудь известном смысле. Следует подчеркнуть, что $\hat{C}_{XX}^1(u)$ относительно чаще используются в литературе. Сравним эти оценки между собой и выберем, какая из них лучше, предполагая что функция $x(t)$, $0 \leq t \leq T$ является реализацией стационарного случайного процесса $X(t)$, обладающего нулевым средним ($\mu=0$) и теоретической ковариационной функцией $C_{XX}(u)$.

Рассмотрим средние значения оценок ковариационной функции $\hat{C}_{XX}(u)$, $\hat{C}_{XX}^1(u)$. Легко показать, что

$$M\{\hat{C}_{XX}(u)\} = \begin{cases} C_{XX}(u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right), & |u| \leq T, \\ 0, & |u| > T. \end{cases} \quad (3.10)$$

$$M\{\hat{C}_{XX}^1(u)\} = \begin{cases} C_{XX}(u), & |u| \leq T, \\ 0, & |u| > T. \end{cases} \quad (3.11)$$

Таким образом, $\hat{C}_{XX}^1(u)$ являются несмещенной оценкой $C_{XX}(u)$, в то время как $\hat{C}_{XX}(u)$ только асимптотически несмещенная, когда длина записи T стремится к бесконечности. С этой точки зрения оценка $\hat{C}_{XX}^1(u)$ лучше, чем $\hat{C}_{XX}(u)$. Однако оказывается, что смещенная оценка имеет меньшую среднеквадратическую ошибку.

Можно показать, что дисперсии (среднеквадратические ошибки) оценок ковариационной функции приближенно оцениваются как величины порядка

$$M\{[\hat{C}_{XX}(u) - C_{XX}(u)]^2\} \sim \frac{1}{T^2}, \quad (3.12)$$

$$M\{[\hat{C}_{XX}^1(u) - C_{XX}(u)]^2\} \sim \frac{1}{(T - |u|)^2}. \quad (3.13)$$

Отсюда видно, что эти дисперсии совпадают при запаздывании $u=0$, но при $u \rightarrow T$ дисперсия несмещенной оценки стремится к бесконечности. Именно это отрицательное свойство несмещенной оценки $\hat{C}_{XX}^1(u)$ делает ее неприемлемой. На практике это будет означать, что верить можно только значениям ковариационной функции при самых малых запаздываниях, дальше ее ненадежность (дисперсия ошибки) становится все значительнее, и особенности формы кривой $\hat{C}_{XX}^1(u)$ могут ввести в серьезное заблуждение, так как они связаны не с физическими причинами, а с неудачным методом обработки данных. Эти обстоятельства заставляют использовать в качестве выборочной оценки ковариационной функции асимптотически несмещенную оценку $\hat{C}_{XX}(u)$.

Здесь, как и во многих статистических задачах, идут на смещение оценки функции ради сохранения особенностей ее формы. Это меньшая жертва по сравнению с флуктуационными искажениями формы при несмещенном среднем значении.

Приведенные выше соображения справедливы и для дискретного времени. Если наблюдения x_1, x_2, \dots, x_N получены дискретизацией непрерывного отрезка реализации случайного процесса $X(t)$, то «хорошая» дискретная выборочная оценка ковариационной функции, соответствующей непрерывной оценке (3.8), равна

$$\hat{C}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-k} (x_i - \bar{x})(x_{i+k} - \bar{x}), \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.14)$$

где

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

является выборочным средним значением всего ряда.

При вычислении на компьютере выборочной оценки ковариационной функции обычно пользуются записью (3.14) в виде

$$\hat{C}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{i=1}^{N-k} x_i x_{i+k} - \bar{x} \left[\sum_{i=1}^{N-k} (x_i + x_{i+k}) \right]^2 + (N-k) (\bar{x})^2 \right\}. \quad (3.15)$$

Следует привести еще одно полезное соотношение, устанавливающее ковариацию между собой соседних значений выборочной оценки ковариационной функции. Для дискретной оценки (3.14) оно будет иметь вид

$$\begin{aligned} & M \{ [\hat{C}_{xx}(k) - C_{xx}(k)] [\hat{C}_{xx}(l) - C_{xx}(l)] \} \approx \\ & \approx \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} [C_{xx}(r) C_{xx}(r+l-k) + C_{xx}(r+l) C_{xx}(r-k)]. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Равенство (3.16) показывает, что в общем случае соседние значения оценок ковариационной функции будут сильно коррелированы и, следовательно, выборочные ковариационные функции не всегда затухают с такой же быстротой, как их математические ожидания.

В заключение обратим внимание на следующие важные моменты:

1. Для выборочной оценки ковариационной функции необходимо использовать нормирующий множитель $1/T$. При этом достигается уменьшение дисперсии ошибки оценки, правда, ценой ее смещения.
2. Равенство (3.16) показывает, что если корреляции в исходном ряде достаточно сильны, то будут и сильные корреляции оценок. Выборочную ковариационную функцию, аргументом которой является запаздывание, можно рассматривать как новый временной ряд, полученный из первоначального ряда $x(t)$. Этот новый временной ряд будет сильнее коррелирован, чем исходный.
3. Иногда опасно придавать слишком большое значение видимым особенностям выборочной корреляционной функции, особенно сосчитанной по коротким рядам. Корреляционная функция должна использоваться главным образом как промежуточная ступень при оценивании спектра, а также как источник рекомендаций при спектральном анализе.

3.3. Оценивание спектра мощности

С той же степенью полноты, что обеспечивается ковариационной функцией, стационарный случайный процесс может быть описан спектром мощности. Спектр мощности показывает, как дисперсия случайного процесса распределена по частоте.

В п. 1.3 было указано, что дисперсию, или среднюю мощность сигнала $x(t)$ на отрезке $-T/2 \leq t \leq T/2$ можно разложить на вклады от гармоник $f_k = k/T$ основной частоты $f_1 = 1/T$ согласно формуле (теорема Парсавалья)

$$\sigma_T^2 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |S_k|^2, \quad (3.17)$$

где S_k — комплексные амплитуды гармоник $f_k = k/T$

$$S_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\{-j2\pi kT/T\} dt.$$

Главное различие в анализе детерминированных и случайных сигналов выявляется как раз тогда, когда длина записи неограниченно возрастает. Во многих технических учебниках это различие не объясняется, а используются рассуждения следующего характера. Из (3.17) дисперсия бесконечной записи равна

$$\sigma^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (T|S_k|^2) \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} P(f) df, \quad (3.18)$$

где функция

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} T|S_k|^2$$

называется спектром мощности Фурье. Воспользовавшись формулой (3.17), функцию $T|S_k|^2$ можно записать в виде

$$T|S_k|^2 = P_T(f_k) = \frac{1}{T} \left| \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \exp\{-j2\pi f_k t\} dt \right|^2. \quad (3.19)$$

Функция $P_T(f_k)$ определена на дискретном множестве частот $f_k = k/T$, $k = 1, 2, \dots$, с шагом $\Delta f = 1/T$ (разрешающая способность). Она называется выборочным спектром мощности, при этом словом «выборочный» подчеркивается, что она определена по конечной записи длины T . Для дискретного случая выборочный спектр мощности равен

$$P_T(f) = \frac{\Delta}{N} \left| \sum_{i=0}^{N-1} x_i \exp\{-j2\pi f_k i\Delta\} \right|^2, \quad -\frac{1}{2\Delta} \leq f_k \leq \frac{1}{2\Delta}, \quad (3.20)$$

$$k = 0, \mp 1, \mp 2, \dots, \mp \left(\frac{N}{2} - 1 \right).$$

Частота $1/2\Delta$ в (3.20) называется найквастовой. Мы упоминали ее в п. 2.2, это — наивысшая из частот, которую можно обнаружить по данным, отсчитываемым через Δ с.

Для детерминированных сигналов $P_T(f_k)$ сходится к $P(f)$ плавно в том смысле, что функция $P_{T_1}(f)$, полученная при увеличении длины записи от T до T_1 , является сглаженным вариантом функции $P_T(f)$, вычисленной по записи длины T . Однако, как будет показано ниже, определение (3.19) не подходит для случая, когда $x(t)$ является реализацией случайного процесса. Основное различие в анализе Фурье детерминированных и случайных процессов состоит в том, что во втором случае при увеличении длины записи от T до $T_1 < T$ функция $P_{T_1}(f_k)$ не становится более устойчивой, т. е. $P_T(f_k)$ не сходится в каком-либо статистическом смысле к предельному значению при $T \rightarrow \infty$. Иначе говоря, оценка спектра мощности (3.19) не является состоятельной.

Чтобы проиллюстрировать результат применения анализа Фурье «в лоб» к случайному процессу, был взят ряд из $N=400$ значений температуры в приземном слое, измеренных с дискретностью $\Delta = 1$ с. Теоретический спектр и выборочный спектр, рассчитанный по формуле (3.19), приведены на рис. 3.1. Выборочный спектр очень сильно колеблется и мало похож на теоретический. Улучшение не происходит и при увеличении N .

Таким образом, для детерминированных сигналов спектр является пределом (в обычном математическом смысле) выборочного спектра $P_T(f)$ при безграничном увеличении длины записи. Однако, как показывает пример на рис. 3.1, поведение $P_T(f)$ для случайного процесса является настолько неустойчивым, что она становится бесполезной для оценивания. Основная причина, по которой анализ Фурье неприменим к случайным процессам, заключается в том, что оценка спектра сама по себе становится случайной величиной, не обладающей к тому же свойством эргодичности. Поэтому методы спектрального анализа должны быть видоизменены.

Прежде чем перейти к поиску путей трансформации спектрального анализа применительно к стационарным случайным процессам, приведем фундаментальное соотношение, связывающее выборочный спектр мощности (3.19) и выборочную ковариационную функцию (теорема Винера — Хинчина)

$$P_T(f_k) = \int_{-T}^T \hat{C}_{xx}(u) \exp\{-j2\pi f_k u\} du. \quad (3.21)$$

Следовательно, выборочный спектр мощности является преобразованием Фурье от выборочной ковариационной функции. Обратное преобразование Фурье можно записать в виде

$$\hat{C}_{xx}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} P_T(f) \exp\{j2\pi f u\} df, \quad (3.22)$$

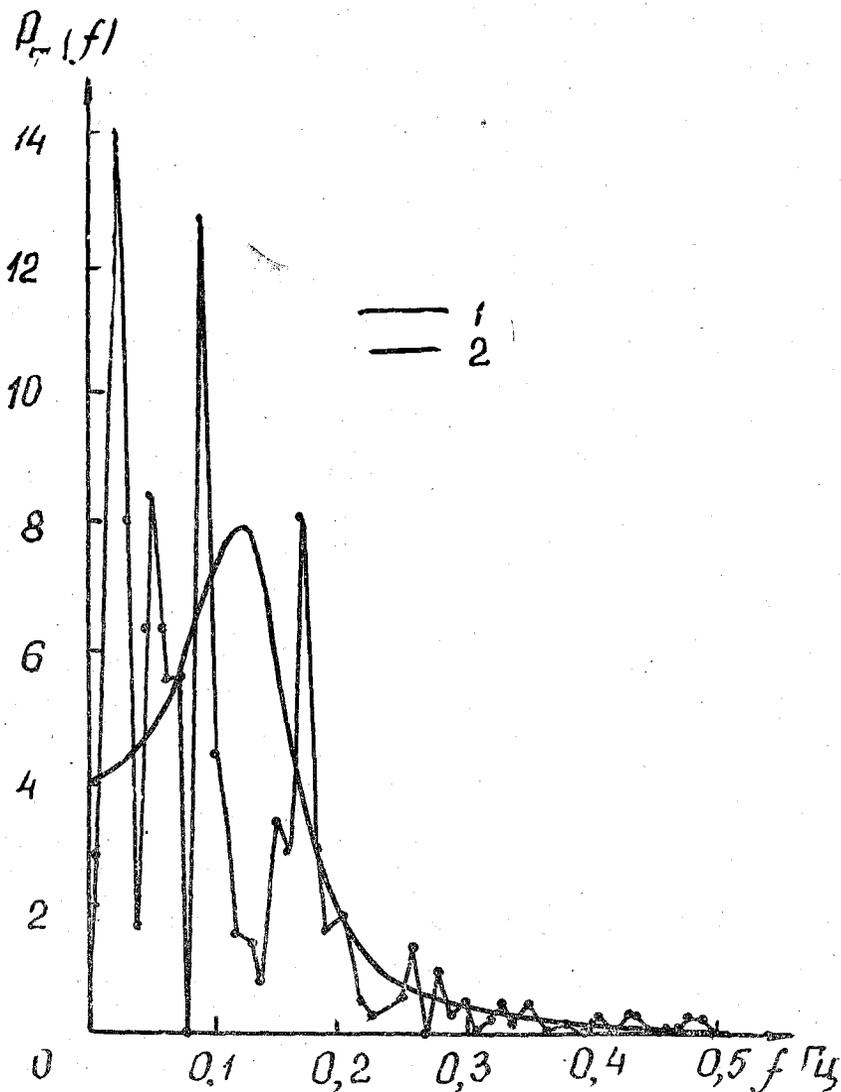


Рис. 3.1. Выборочный (1) и теоретический (2) спектры пульсации температуры в приземном слое

откуда при $u=0$ получаем

$$\hat{C}_{xx}(0) = \sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} P_T(f) df.$$

Таким образом, выборочный спектр мощности показывает, как дисперсия, или средняя мощность сигнала $x(t)$ распределена по частотам.

Для дискретного времени выборочный спектр равен

$$P_T(f_k) = \Delta \sum_{i=-N+1}^{N-1} C_{XX}(i) \exp\{-j2\pi f_k i \Delta\}, \quad -\frac{1}{2\Delta} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta}, \quad (3.23)$$

что соответствует формуле (3.21). Обратное преобразование (3.23) дает

$$\hat{C}_{XX}(i) = \sum_{k=-N+1}^N P_T(f_k) \exp\{j2\pi f_k i \Delta\} df, \quad -N \leq i \leq N, \quad (3.24)$$

что соответствует формуле (3.22).

Пары Фурье (3.21), (3.22) и (3.23), (3.24) являются математическими тождествами, которые верны независимо от того, является ли $x(t)$ детерминированным сигналом или реализацией случайного процесса. Для описания изменчивости функции $P_T(f_k)$ необходимо рассмотреть запись $x(t)$, $-T/2 \leq t \leq T/2$ как один из многих возможных временных рядов, которые могли бы быть наблюдаемы, т. е. как реализацию случайного процесса. Таким образом, изменчивость записи будет охарактеризована случайными величинами $X(t)$, $-T/2 \leq t \leq T/2$, как указывалось в п. 3.1. При этом выборочный спектр мощности $P_T(f_k)$ в некоторой точке f_k рассматривается как реализация случайной величины $P_T(f_k)$, точно так же, как ковариационная функция $\hat{C}_{XX}(u)$ считается реализацией случайной величины $\hat{C}_{XX}(u)$. Получив распределение $P_T(f_k)$ или его моменты, можно объяснить неустойчивое поведение $P_T(f_k)$, показанное на рис. 3.1.

Используя (3.21), получаем первый момент оценки, соответствующий выборочному спектру

$$M\{P_T(f)\} = \int_{-T}^T M\{\hat{C}_{XX}(u)\} \exp\{-j2\pi fu\} du, \quad (3.25)$$

что можно с помощью (3.10) записать в виде

$$M\{P_T(f)\} = \int_{-T}^T \hat{C}_{XX}(u) \left(1 - \frac{|u|}{T}\right) \exp\{-j2\pi fu\} du. \quad (3.26)$$

Таким образом, (3.21) дает среднее распределение (по всем возможным временным рядам длины T) мощности по частотам. При увеличении длины записи T первый момент $M\{P_T(f_k)\}$ стремится к

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} M\{P_T(f_k)\} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{XX}(u) \exp\{-j2\pi fu\} du. \quad (3.27)$$

Равенство показывает, что спектр мощности является преобразованием Фурье от ковариационной функции процесса $X(t)$. Следовательно, $P(f)$ показывает, как дисперсия процесса $X(t)$ распре-

делена по частотам аналогично тому, как (3.21) показывает, как распределена по частотам средняя мощность одной конкретной реализации длины T .

Выше мы уже сделали ряд критических замечаний по поводу часто приводящегося в учебниках определения спектра мощности:

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} P_T(f).$$

Возражение против такого определения состоит в том, что если $x(t)$ — реализация стационарного случайного процесса, то соответствующая случайная величина $P_T(f_k)$ не сходится ни в каком статистическом смысле к предельному значению. Правильным, правда, не имеющим практического смысла, определением является (3.27)

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} M \{P_T(f_k)\}, \quad (3.28)$$

т. е. истинное значение спектра мощности есть предел математического ожидания выборочного спектра. Иначе говоря, $P_T(f_k)$ есть несмещенная оценка теоретического спектра. Однако мы знаем, что несмещенность оценки еще не значит, что она «хорошая», т. к. ее дисперсия относительно правильного математического ожидания может быть сколь угодно большой, и такая оценка становится бесполезной, что мы видели в примере на рис. 3.1. Возникшее при рассмотрении рисунка подозрение о несостоятельности оценки $P_T(f_k)$ (3.19) (ее неулучшение при увеличении T) можно доказать, рассмотрев второй момент оценки $P_T(f_k)$ как случайной величины. Выкладки показывают, что дисперсия оценки $P_T(f_k)$, определяемой выражением (3.19), может быть оценена величиной

$$M \{[P_T(f_k) - P(f_k)]\} \approx P^2(f_k), \quad (3.29)$$

т. е. имеет порядок квадрата значения теоретического спектра мощности на данной частоте, и, что самое важное, не зависит от длины записи T . Это и показывает несостоятельность оценки $P_T(f_k)$ вида (3.19), т. к. никакое удлинение реализации не делает оценку точнее, не уменьшает ее дисперсию. Таким образом, использование формального определения спектра мощности в качестве способа его оценки для случайных процессов бесперспективно и приведет к ошибкам.

В заключение подчеркнем следующее:

1. Спектр мощности стационарного случайного процесса дает столь же полное его вероятностное описание, что и ковариационная функция, так как они связаны взаимно-однозначным преобразованием Фурье. В то же время спектральные характеристики, несущие то же количество информации, всегда удобнее для анализа, чем временные, в том числе удобнее и ковариационной функции.

2. Оценка спектра мощности случайного процесса по его реализации конечной длины, выполняемая по формальному определению и вполне приемлемая для детерминированных процессов, является несмещенной, но несостоятельной и не концентрируется около истинного значения по мере удлинения реализации.

3. Бесполезность оценки (3.19), являющейся средней по времени и не сходящейся к средней по ансамблю величине теоретического спектра, объясняется тем, что преобразование Фурье не обладает свойством эргодичности, в отличие от ковариационной функции.

3.4. Сглаженные спектральные оценки

Невыполнение эргодического свойства для преобразования Фурье вынуждает проводить осреднение по ансамблю для получения «хорошей» оценки спектра. Для этого пришлось бы получить набор реализации случайного процесса, посчитать спектр каждой из них, а затем провести осреднение значений для каждой частоты по всему набору. Однако этот путь чрезвычайно обременителен. И здесь естественно напрашивается более простой выход: а нельзя ли взять одну достаточно длинную реализацию случайного процесса, разбить ее на равные отрезки и каждый из отрезков считать псевдореализацией из ансамбля? Тогда, определив среднее значение выборочных спектров по отрезкам, можно получить оценку, в которой в какой-то степени соблюдено требование осреднения по ансамблю, и, хочется надеяться, снижена дисперсия оценки при использовании всего лишь одной реализации. Оказывается, что можно, несмотря на некую эвристичность такого подхода. Впервые эта идея была предложена Бартлеттом, который экспериментально установил, что при разбиении исходной реализации на n рядов дисперсия оценки осредненного спектра уменьшается приблизительно в n раз. В дальнейшем идея Бартлетта получила значительное развитие и составила основу современного спектрального анализа случайных процессов. Соответствующие значения оценок спектра мощности носят название выборочных сглаженных спектральных оценок.

Рассмотрим подробно процедуру получения и свойства сглаженных оценок.

При разбиении исходного ряда длиной T на n рядов, каждый из которых имеет длину M ($M = T/n$), выборочный спектр i -го ряда из (3.19) представляет собой

$$P_M^i(f_k) = \int_{-M}^{M} C_{XX}^i(u) \exp\{-j2\pi f_k u\} du, \quad (3.30)$$

где шаг по частоте $\Delta f = 1/M$ и k меняется от $(-L/2+1)$ до $(L/2-1)$, $L = M/\Delta$. Отсюда среднее значение этих n выборочных спектров, или сглаженная спектральная оценка на частоте f_k равна

$$\hat{P}_M(f_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{P}_M^i(f_k) \int_{-M}^M \bar{C}_{XX}(u) \exp\{j2\pi f_k u\} du, \quad (3.31)$$

где

$$\bar{C}_{XX}(u) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{M} \int_{(i-1)M}^{iM-u} X(t) X(t+u) du \right\}, \quad (3.32)$$

математическое ожидание $\bar{C}_{XX}(u)$ в таком случае равно

$$M\{\bar{C}_{XX}(u)\} = C_{XX}(u) \left(1 - \frac{|u|}{M}\right)$$

и с использованием теоремы о свертке

$$\begin{aligned} M\{\hat{P}_M(u)\} &= \int_{-M}^M C_{XX}(u) \left(1 - \frac{|u|}{M}\right) \exp\{-j2\pi f_k u\} du = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(f_k - g) M\left(\frac{\sin \pi g M}{\pi g M}\right)^2 dg. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Следовательно, разделение записи длины T на n частей длины M каждая и построение сглаженной оценки математически эквивалентно свертке истинного спектра со спектральным окном

$$W(f) = M \left(\frac{\sin \pi f M}{\pi f M} \right)^2.$$

Во временной области разбиение и осреднение математически эквивалентно умножению ковариационной функции на корреляционное окно

$$W(u) = \begin{cases} 1 - \frac{|u|}{M}, & |u| \leq M, \\ 0, & |u| > M. \end{cases} \quad (3.34)$$

Окна (3.34) и (3.35) называют спектральным и корреляционным окном Бартлетта.

Таким образом, операция «эргодизации» Бартлетта сводится просто к умножению (просмотру в окно) ковариационной функции на весовую функцию, равную единице при $u=0$ и снижающуюся до 0 по достижении u значения M . В этом кроется кажущийся парадокс: для получения хорошей оценки спектра намеренно искажается основа этой оценки — ковариационная функция. Однако, если вспомнить, что значения выборочной ковариационной функ-

ции сильно коррелированы между собой, то станет ясно, что наиболее надежная оценка получается при $u=0$, а затем с ростом и степень доверия к значениям ковариационной функции постепенно падает. В какой-то степени «взвешивание» корреляционным окном при получении хорошей оценки спектра количественно выражает постепенное снижение степени нашего доверия к значениям выборочной ковариационной функции. Совершенно разные интуитивные соображения эргодизации и «вотума доверия» приводят к одному результату — необходимости использования корреляционного окна. Это наводит на мысль о том, чтобы рассмотреть общий класс сглаженных спектральных оценок вида

$$\hat{P}_T(f_k) = \int_{-\infty}^{\infty} w(u) \check{C}_{XX}(u) \exp\{-j2\pi f_k u\} du, \quad (3.36)$$

где $w(u)$ — корреляционное окно, удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} w(0) = 1, \\ w(u) = w(-u), \\ w(u) = 0, \quad |u| \geq M, \quad M < T. \end{cases} \quad (3.37)$$

При этом ковариации достаточно вычислять лишь до запаздывания M . Примеры корреляционных окон, широко применяемых в спектральном анализе, приведены в табл. 3.1, а их графики построены на рис. 3.2. Преобразования Фурье этих корреляционных окон, т. е. спектральные окна $W(f)$, показаны на рис. 3.3.

Таблица 3.1

Название	Корреляционное окно	Спектральное окно
Прямоугольное	$w_R(u) = \begin{cases} 1, & u \leq M \\ 0, & u > M \end{cases}$	$W_R(f) = 2M \left(\frac{\sin 2\pi f M}{2\pi f M} \right)$
Бартлетта	$w_B(u) = \begin{cases} 1 - \frac{ u }{M}, & u \leq M \\ 0, & u > M \end{cases}$	$W_B(f) = M \left(\frac{\sin \pi f M}{\pi f M} \right)^2$
Тьюки	$w_T(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi u}{M} \right), & u \leq M \\ 0, & u > M \end{cases}$	$W_T(f) = M \left(\frac{\sin 2\pi f M}{2\pi f M} \right) \times \left(\frac{1}{1 - (2fM)^2} \right)^2$
Парзена	$w_P(u) = \begin{cases} 1 - 6 \left(\frac{u}{M} \right)^2 + 6 \left(\frac{ u }{M} \right)^3, & u \leq M/2 \\ 2 \left(1 - \frac{ u }{M} \right)^3, & M/2 < u < M \\ 0, & u > M \end{cases}$	$W_P(f) = \frac{3}{4} M \left(\frac{\sin \pi f M/2}{\pi f M/2} \right)^4$

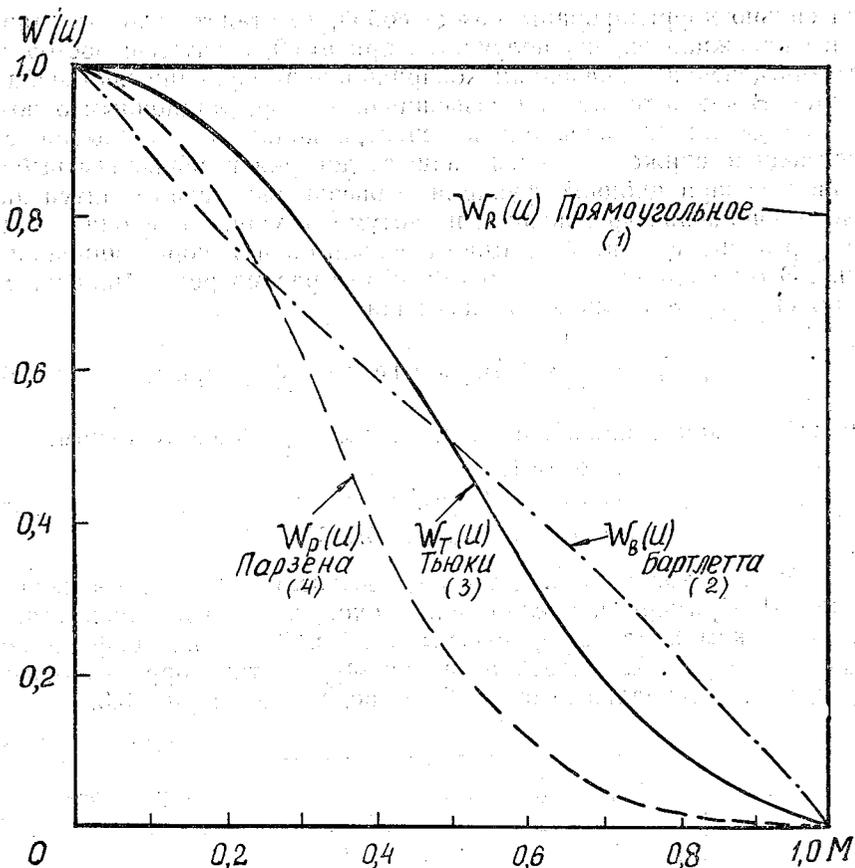


Рис. 3.2. Корреляционные окна

Используя теорему о свертке, равенство (3.36) можно записать в виде

$$\hat{P}_T(f_k) = \int_{-\infty}^{\infty} W(g) P_T(f_k - g) dg, \quad (3.38)$$

где

$$W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} w(u) \exp(-j2\pi fu) du. \quad (3.39)$$

Обратное преобразование

$$W(u) = \int_{-\infty}^{\infty} W(f) \exp(-j2\pi fu) df \quad (3.40)$$

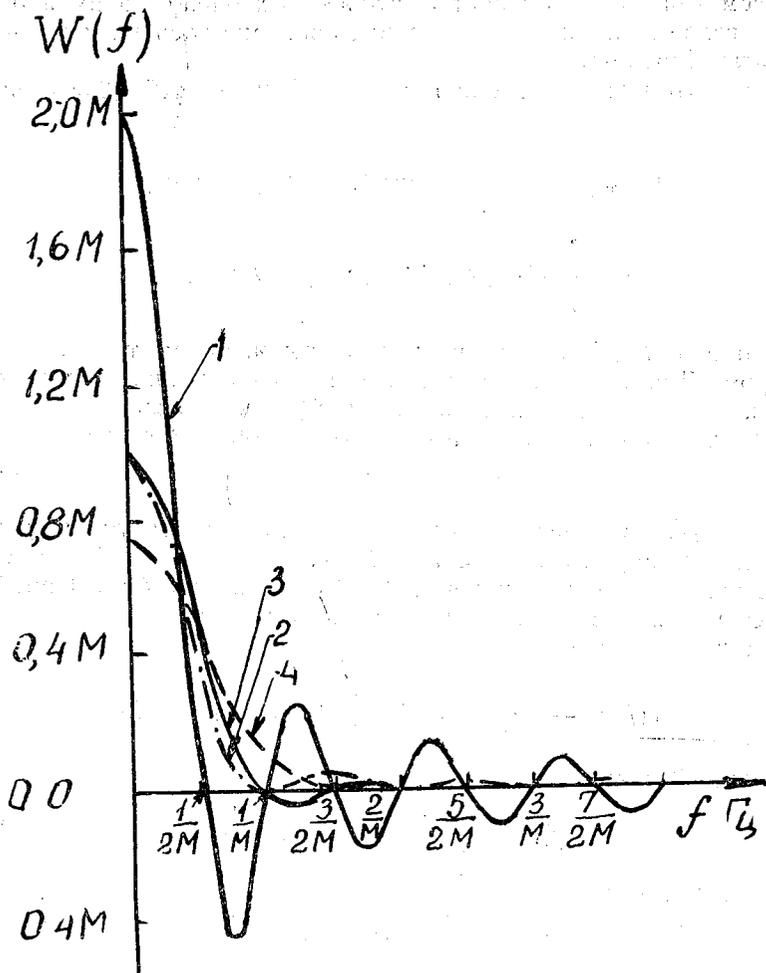


Рис. 3.3. Спектральные окна

дает возможность по спектральному окну $W(f)$ вычислить корреляционное окно $W(u)$. В соответствии со свойствами (3.37) спектральное окно удовлетворяет следующим условиям:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} W(f) df = w(0) = 1, \\ W(f) = W(-f), \\ W(f) \text{ действует при сглаживании как щель в} \\ \text{частотной области шириной } 2/M. \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Рассмотрим теперь свойства сглаженных оценок, а именно математическое ожидание и дисперсию, проверив экспериментальный результат Бартлетта.

Беря математическое ожидание от обеих частей (3.36), получаем

$$\begin{aligned} M\{\hat{P}_T(f_k)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} W(g) M\{P_T(f_k - g)\} dg = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} W(g) P(f_k - g) dg = \bar{P}(f_k). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Функцию $\bar{P}(f_k)$ будем называть сглаженным теоретическим спектром. Для того, чтобы математическое ожидание сглаженной оценки, или сглаженный теоретический спектр незначительно отличался от теоретического, необходимо, чтобы смещение

$$B(f) = \bar{P}(f) - P(f) \quad (3.43)$$

было малым. Смещение можно сделать малым лишь сужая $W(f)$, т. е. выбирая ее как можно ближе к δ -функции. Этого можно достичь, увеличивая значение M . Для окон из табл. 3.1 приближенные значения смещений представляют собой:

а) окно Бартлетта:

$$B(f) \approx -\frac{1}{M} \int_{-\infty}^{\infty} |u| C_{xx}(u) \exp(-j2\pi u) du, \quad (3.44)$$

б) окно Тьюки

$$B(f) = \frac{0,063}{M^2} P''(f) + 0 \left(\frac{1}{M^4} \right), \quad (3.45)$$

в) окно Парзена

$$B(f) = \frac{0,152}{M^2} P''(f) + 0 \left(\frac{1}{M^3} \right), \quad (4.46)$$

где $P''(f)$ — вторая производная теоретического спектра.

Эти формулы показывают следующее:

1. Если $P''(f)$ отрицательна (как, например, в окрестности пика), то смещение отрицательно, и поэтому в окрестностях пиков оценки будут обычно давать заниженные значения.

2. Чем меньше ширина пика или впадины, тем больше $P''(f)$ и, следовательно, тем больше смещение.

3. Смещение для окна Бартлетта имеет порядок $1/M$, и поэтому оно будет, вообще говоря, больше, чем смещение для окон Тьюки и Парзена, которые имеют порядок $1/M^2$.

4. Смещение уменьшается с увеличением M , т. е. с уменьшением ширины спектрального окна.

5. При одинаковом значении точки отсечения M , т.е. максимального запаздывания, на котором корреляционное окно отлично от нуля, окно Парзена дает большее смещение, чем окно Тьюки. Это происходит из-за того, что спектральное окно Парзена шире, чем спектральное окно Тьюки (см. рис. 3.3).

Рассмотрим теперь дисперсию сглаженной спектральной оценки. Можно показать, что приближенно дисперсия равна

$$M \{[\hat{P}_T(f) - P(f)]^2\} \approx \frac{P^2(f)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} W^2(g) dg. \quad (3.47)$$

Воспользовавшись теоремой Парсеваля, равенство (3.47) можно переписать в эквивалентном виде

$$M \{[\hat{P}_T(f) - P(f)]^2\} \approx \frac{P^2(f)}{T} \int_{-\infty}^{\infty} w^2(u) du = P^2(f) \frac{I}{T}. \quad (3.48)$$

Первое, что бросается в глаза в выражениях (3.47), (3.48), — дисперсия оценки уменьшается при возрастании длины записи T . Следовательно, сглаженная оценка спектра мощности состоятельная, в отличие от (3.19), что и подтверждает экспериментальный результат Бартлетта. Оценим влияние точки отсечения M корреляционного окна (ширины спектрального окна) на дисперсию сглаженной оценки. Для этого необходимо вычислить значение I из (3.48).

Например, для окна Бартлетта имеем

$$I = \int_{-M}^M \left(1 - \frac{|u|}{M}\right)^2 du = \frac{2}{3} M \quad (3.49)$$

и, следовательно,

$$M \{[\hat{P}_T(f) - P(f)]^2\} \approx \frac{P^2(f)}{T} \left(\frac{2}{3} M\right). \quad (3.50)$$

Это показывает, что дисперсию сглаженной спектральной оценки можно уменьшить при той же длине записи T , выбрав точку отсечения M окна малой (широким спектральное окно). Но как указывалось выше, при уменьшении M увеличивается смещение, искажающее теоретический спектр. Поэтому, как и для всех статистических оценок, необходимо выбирать компромиссное решение о значении M , учитывая и дисперсию, и смещение.

Заметим, что поскольку дисперсия выборочного спектра мощности (несглаженного) приближенно равна $P^2(f)$ (см. (3.29)), то величина

$$\frac{M \{[\hat{P}_T(f) - P(f)]^2\}}{P^2(f)} = \frac{I}{T} \quad (3.51)$$

равна относительному уменьшению дисперсии, вызванному сглаживанием, т.е. использованием сглаженной спектральной оценки

$\hat{P}_T(f)$ вместо оценки, соответствующей выборочному спектру $P_T(f)$. Значение отношений (3.51) для спектральных окон из табл. 3.1 следующие:

- а) прямоугольное $I/T=2M/T$,
- б) Бартлетта $I/T=0,667M/T$,
- в) Тьюки $I/T=0,75M/T$,
- г) Парзена $I/T=0,539M/T$.

Предположим, например, что точка отсечения корреляционного окна M равна $0,1T$. Тогда для окна Бартлетта $1/T=2/3(0,1)=0,067$. Следовательно, беря точку отсечения на расстоянии 10 % длины записи, мы снизили дисперсию сглаженной спектральной оценки до 6,7 % от дисперсии оценки, соответствующей выборочному спектру. Соответствующие величины для окон Тьюки и Парзена равны 7,5 и 5,4 %. Следовательно, при фиксированном M из трех рассматриваемых окон наименьшую дисперсию дает окно Парзена. Это объясняется тем, что, как видно из рис. 3.3, окно Парзена является более широким и плоским, чем два остальных. Но оно приводит и к большим смещениям (см. (3.46)). Поэтому сравнение окон, сделанное только с учетом дисперсии, могут ввести в заблуждение.

В заключение подчеркнем следующие обстоятельства:

1. Для получения состоятельных оценок (концентрирующихся по мере увеличения длины записи вокруг истинного значения) спектра мощности стационарного случайного процесса по его одной реализации необходимо использование операции сглаживания.
2. Сглаживание спектральных оценок состоит в умножении ковариационной функции на корреляционное окно перед ее преобразованием Фурье. В спектральной области эта операция эквивалентна скользящему усреднению спектра щелью шириной $2/M$ единиц частоты.
3. Увеличение значения точки отсечения корреляционного окна при заданной длине записи ведет к уменьшению смещения оценки от истинного значения с одновременным ростом ее дисперсии. Точный выбор M — это нахождение компромисса между смещением и дисперсией для конкретного вида окна.
4. Расчет ковариационной функции для сглаженных оценок достаточно проводить лишь до запаздывания $u=M$, реальная спектральная разрешающая способность сглаженных оценок составляет $2/M$ и не зависит от длины записи T .
5. Соседние значения сглаженного спектра мощности, отстоящие друг от друга по частоте более, чем на величину $2/M$, некоррелированы и в этом смысле предпочтительнее выборочной ковариационной функции в качестве исчерпывающей характеристики нормального стационарного процесса.

3.5. Основные этапы спектрального анализа случайных процессов

Поиск компромисса между дисперсией и смещением сглаженной спектральной оценки представляет собой типичную оптимизационную задачу. Полное ее решение требует построения критерия оптимальности, характеризующего погрешность оценки и нахождения точки отсечения M , минимизирующей критерий. Главный недостаток такого подхода состоит в том, что он требует точного знания теоретического спектра $P(f)$. Если же таким значением мы располагаем, то в принципе не нужен и спектральный анализ. Это обстоятельство указывает на то, что необходим некоторый эмпирический способ сглаживания. Иными словами, нужен гибкий метод, дающий возможность узнать достаточно много об искомом спектре $P(f)$ по имеющимся данным, с тем, чтобы выбрать подходящее сглаживание для любого интересующего нас диапазона частот.

Это требование можно сформулировать так: нужно, чтобы решение о том, когда достигается разумный компромисс между малой степенью искажения и высокой устойчивостью, можно было получить из самих данных.

Сглаживание спектральной оценки полностью определяется видом, т. е. математической формой окна и его шириной полосы частот, или, что эквивалентно, его точкой отсечения. Поскольку, как показывают расчеты, влияние формы окна на выборочные спектральные оценки имеет второстепенное значение, эмпирический подход к сглаживанию должен основываться на изменении полосы частот. Наиболее распространенным эмпирическим подходом, укладывающимся в изложенную схему, является так называемый метод **стягивания окна**. Метод стягивания окна состоит в выборе приемлемой формы окна и вычислении нескольких сглаженных выборочных спектральных оценок сначала для широкой полосы частот (малое значение M), а затем для все более и более узких (большие M). Этот метод позволяет узнать многое о форме спектра. Так, выбранная первоначально широкая полоса частот окна обычно будет скрадывать некоторые детали в спектре. Сужая полосу, т. е. увеличивая точку отсечения M и повышая разрешающую способность, можно исследовать более тонкие детали. Наконец, наступает момент, когда оценка вследствие все возрастающей дисперсии теряет устойчивость. Значение точки отсечения, при котором эмпирически обнаруживается переход от устойчивости к расходимости, и является неким оптимумом.

Теперь рассмотрим практические аспекты оценивания спектров стационарных случайных процессов. Здесь можно выделить два этапа:

- 1) этап планирования спектрального анализа (до сбора данных);
- 2) этап получения выборочных оценок спектра.

Познакомимся подробнее, с учетом всего вышеизложенного, с каждым из этих этапов.

На этапе планирования, как и в случае детерминированных процессов, должны решаться вопросы о шаге дискретизации, длине записи, форме выдачи данных, форме окна, динамических характеристиках измерительных устройств и т. д. Имеются четыре основных требования, которые должны быть удовлетворены:

1. Интервал отсчета Δ должен быть настолько мал, чтобы спектр можно было оценить в интересующем нас диапазоне частот $0 \leq f \leq f_N$. Следовательно, Δ должен согласовываться с частотой Найквиста и быть не больше $1/2f_N$.

2. Следует позаботиться о том, чтобы избежать наложения частот. Это можно сделать путем фильтрации сигнала до взятия отсчетов, так что мощность на частоте выше f_N фактически устраняется. Это легче всего сделать в аналоговом виде, однако можно и с помощью цифровой фильтрации на ЭВМ. Следует отметить, что некоторая предусмотрительность на этой стадии обработки данных может в дальнейшем избавить от значительных неприятностей и сэкономить усилия. Здесь, как и в предыдущем пункте, полная аналогия со спектральным анализом детерминированных процессов.

3. Допустим, что можно сделать предположение о ширине Δf самой узкой существенной детали спектра или, наоборот, требуется обнаружить деталь спектра шириной не менее Δf . Для этого необходимо обеспечить соответствующую спектральную разрешающую способность. В детерминированном случае этот вопрос решается выбором длины записи T . При анализе случайных процессов здесь возникает различие: варьировать нужно значением точки отсечения корреляционного окна M , а именно, M нужно выбрать так, чтобы ширина полосы частот окна b была меньше Δf . Например, для окна Тьюки это означает, что $b = 1,33/M \leq \Delta f$ или $M = L\Delta \geq 1,33/\Delta f$. При этом для числа L значений дискретной ковариационной функции, которые нужно сосчитать, должно выполняться неравенство $L \geq 1,33/\Delta f\Delta$. В общем случае точку отсечения следует выбирать из равенства

$$M = \frac{b_1}{\Delta f}, \quad (3.52)$$

где b_1 — так называемая нормированная ширина полосы частот окна, представляющая собой

$$b_1 = \frac{M}{\int_{-\infty}^{\infty} w^2(u) du}. \quad (3.53)$$

Для окон из табл. 3.1 соответствующие значения нормированной ширины полосы часто равны:

а) прямоугольное $b_1 = 0,5$,

б) Бартлетта $b_1=1,5$,

в) Тьюки $b_1=1,33$,

г) Парзена $b_1=1,86$.

Минимально необходимое число ковариаций из (3.52)

$$L = \frac{M}{\Delta} = \frac{b_1}{\Delta f \Delta}. \quad (3.54)$$

4. Для конечных записей возможность точного оценивания ширины пиков или степень выявления тонких деталей спектра зависит не только от разрешающей способности, но и от дисперсии оценки.

В этом также существенное различие с детерминированным анализом. Как нам известно из (3.48), дисперсия сглаженной выборочной оценки уменьшается с ростом T . Следовательно, выбор длины записи реализации случайного процесса должен определяться требуемым уровнем дисперсии ошибки. Ясно, что ценой увеличения времени вычислений и усилий, потраченных на сбор данных, можно обеспечить любую достаточно низкую дисперсию ошибки. Точно решить этот вопрос можно с привлечением доверительных интервалов и таблиц χ^2 -распределения. Однако в большинстве практических случаев приемлемой оказывается оценка длины записи, обеспечивающая примерно 20%-ную относительную ошибку, полученную по формуле

$$T = 40 \frac{M}{b_1} = \frac{40}{\Delta f}. \quad (3.55)$$

В дискретном виде с учетом (3.54) это эквивалентно следующему числу отсчетов

$$N = \frac{T}{\Delta} = \frac{40}{\Delta f \Delta} = \frac{40L}{b_1}. \quad (3.66)$$

Важная особенность формулы (3.56) состоит в том, что длину записи можно задавать независимо от спектрального окна и она зависит лишь от Δf .

Пример. Предположим, что требуется оценить спектр мощности в диапазоне до $f_N=2$ Гц и можно без опасений считать, что за этой частотой нет сколько-нибудь заметной мощности. Таким образом, не будет неприятностей из-за наложения частот. Тогда, согласно требованию 1), мы имеем $\Delta=1/2f_N=0,25$ с. Если можно предположить, что ширина Δf самого узкого пика в спектре равна, по крайней мере, 0,20 Гц, а устойчивость, обеспечивающая 20%-ную относительную ошибку, представляется подходящей, то длина записи должна быть не менее $T=40/0,2=200$ с. Следовательно, требуется $N=200/0,25=800$ точек данных.

Приведенные выше вычисления имеют некоторое значение, когда заранее решается вопрос о длине записи, однако следует подчеркнуть, что после того, как данные собраны, требуется дру-

гой подход. Если анализ предназначен для разделения пиков шириной Δf , то может случиться, что после сбора данных перед началом анализа обнаружится неправильность наших представлений о величине Δf . Следовательно, нужно приспособить действительный анализ спектра к имеющимся данным. Это и дает основание воспользоваться описанной выше процедурой стягивания окна.

Теперь перейдем ко второму этапу спектрального анализа, а именно к практическому получению выборочных оценок с помощью компьютера. Эта операция состоит из следующих четырех стадий:

1. Предварительная стадия. Исследуем временной ряд с целью обнаружить в нем явные тренды. Затем решим, использовать ли исходные данные или предварительно отфильтровать их, сведя по возможности к стационарному процессу. На этом этапе решается вопрос о числе L_{\max} , примерно равном $N/4$, если это не потребует слишком больших затрат машинного времени.

2. Первая стадия вычислений. Сперва вычисляются выборочные ковариационные функции для исходных данных по формуле (3.15) при $k=0, 1, \dots, L_{\max}$. Точки отсечения можно выбрать, проверяя, с какого места выборочные ковариации становятся пренебрежимыми. Три значения точек отсечения L_1, L_2, L_3 , которые будут использованы в процедуре стягивания окна, нужно выбирать так, чтобы они отличались довольно сильно, например $L_3/L_1=4$.

3. Вторая стадия вычислений. Вычисляются и строятся на одном графике сглаженные выборочные спектральные оценки, соответствующие этим трем точкам отсечения. Вычисления проводятся путем использования алгоритма БПФ, исходными данными для которого являются значения выборочной ковариационной функции, полученные на первой стадии вычислений, умноженные на выбранное корреляционное окно. Здесь справедливы все замечания, касающиеся применения ДПФ и БПФ, приведенные в гл. II. Шаг по частоте следует брать порядка $1/L$.

4. Интерпретация выборочных спектральных оценок. Общий график спектров, полученный на 3-й стадии, попадет, вообще говоря, в одну из трех категорий, которую можно назвать: идеальной, промежуточной и плохой.

А) Идеальный спектральный анализ. Исследуется вариация выборочных спектральных оценок при увеличении значения точки отсечения, т. е. при уменьшении (стягивании) ширины полосы частот окна. Если после некоторого значения L^* дальнейшее увеличение L сопровождается лишь незначительным изменением в выборочных оценках, то можно считать, что процедура стягивания окна уже выявила большую часть деталей спектра. Поэтому можно принять выборочную оценку, соответствующую L^* . В таком случае выборочная оценка имеет малую степень искажения и высокую устойчивость.

Б) Промежуточный случай спектрального анализа. На практике ситуация, когда одновременно можно достичь высокой устойчивости и малой степени искажения, редки. Как правило, выборочная оценка проявляет признаки сходимости при малых L , а затем начинает расходиться при дальнейшем росте L . Обычно это означает, что выборочная оценка стала неустойчивой до того, как в спектре выявились тонкие детали. В таких случаях предлагается строить дополнительно несколько спектров с промежуточными значениями L с тем, чтобы «поймать» момент, когда сходимость выборочных спектральных оценок уступает место расходимости. Сужая полосу частот окна и, как следует из (3.48), увеличивая дисперсию оценки, можно получить ложные пики в спектре, поэтому в таком случае лучше проявить осторожность, отдавая предпочтение грубым, но надежным оценкам (малое значение точек отсечения).

Иногда случается так, что выборочная спектральная оценка быстро сходится в одних частотных интервалах, где спектр плавный, и медленно в других, где спектр меняется быстро. Поэтому в разных частотных интервалах могут потребоваться разные значения L .

В) Случай плохого спектрального анализа. Иногда выборочные спектральные оценки настолько заметно меняются при уменьшении полосы частот окна, что невозможно рекомендовать даже несколько спектров. В такой неблагоприятной ситуации, возможно, следует предпочесть выборочную спектральную оценку с малым значением точки отсечения, сознавая, что при этом широкое спектральное окно может замаскировать важные тонкие детали спектра. Однако основная неприятность в том, что N слишком мало, поэтому нужно собрать больше данных, увеличив длину записи.

Следует подчеркнуть, что приведенные выше рекомендации не являются строгими. В конкретных задачах может потребоваться и несколько иной способ действия. Например, нас может интересовать пик с известной средней частотой, но с шириной, которая известна лишь приближенно. В этом случае полосу частот окна можно было бы стягивать к этой частоте для исследования данного пика, не слишком заботясь об устойчивости на других частотах.

Изложенную выше процедуру мы проиллюстрируем ниже.

При исследовании спектральных свойств пульсаций ветрового потока в приземном слое была взята реализация во времени значений скорости ветра длительностью $T=10$ мин. В пределах этого интервала процесс может считаться квазистационарным. Запись скорости ветра осуществлялась с помощью анеморумбометра М-47, имеющего постоянную времени (инерционность) около секунды. Дискретизация записи по времени осуществлялась с шагом $\Delta=1$ с, что избавляло от необходимости борьбы с наложением частот путем предварительной фильтрации данных. Наивыс-

шая частота в спектре, которая при этом могла быть обнаружена, составляла $f_N = 1/2\Delta = 0,5$ Гц. Таким образом, число отсчетов $N = T/\Delta = 600$.

1. Предварительный анализ. Проверка данных не выявила какого-либо очевидного тренда, в пределах анализируемого интервала процесс стационарен. Максимальное число запаздываний $L_{\max} = N/4 = 150$.

2. Первая стадия вычислений. Корреляционная функция, рассчитанная по $N = 600$ значениям исследуемого времени ряда, представлена на рис. 3.4. Из рисунка видно, что начиная с запаздывания $k = 20 - 25$ корреляции можно считать пренебрежимыми. Это позволяет выбрать три значения точек отсечения, перекрывающие предельно значимое k : $L_1 = 16$; $L_2 = 32$; $L_3 = 64$. Значения точек отсечения взяты в виде степени числа 2, чтобы воспользоваться алгоритмом БПФ.

3. Вторая стадия вычислений. На рис. 3.5 представлены результаты расчета с помощью БПФ сглаженных выборочных оценок спектра мощности, соответствующие этим трем точкам отсечения с корреляционным окном Тьюки.

4. Интерпретация выборочных спектральных оценок. С уменьшением ширины полосы частот окна (ростом L) на рис. 3.5 дисперсия оценки растет, что вполне естественно. Кривая 1 выяв-

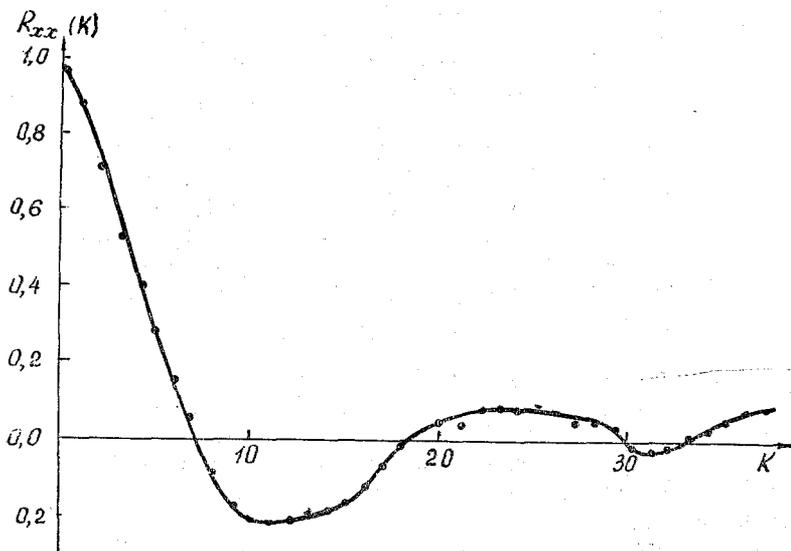


Рис. 3.4. Выборочная корреляционная функция пульсаций ветрового потока в приземном слое

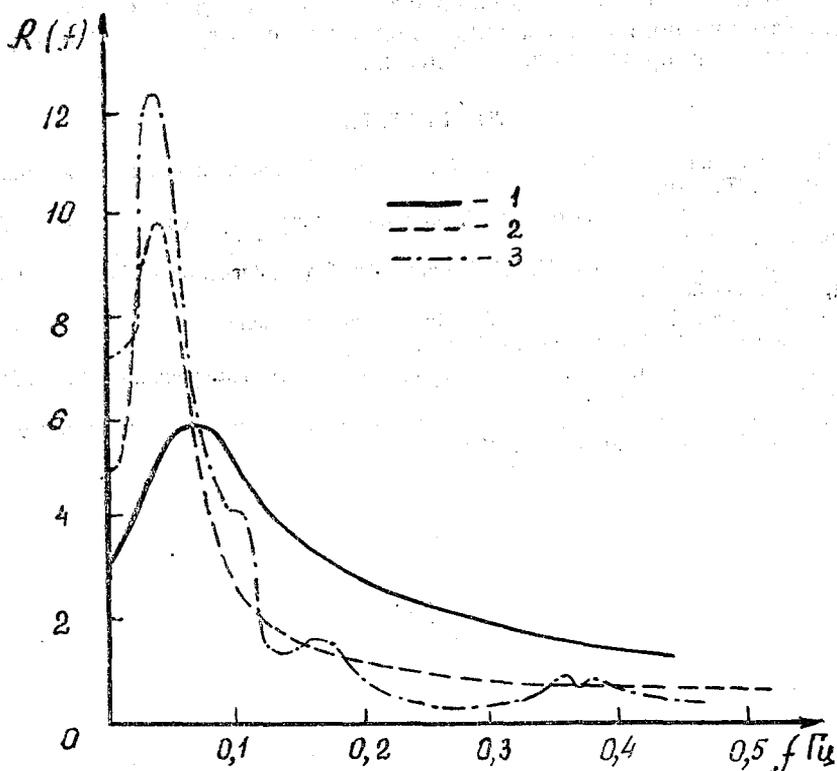


Рис. 3.5. Сглаженные выборочные оценки спектра мощности пульсаций ветрового потока в приземном слое с тремя значениями точек отсечения окна Тьюки.

ляет основные детали спектра — наличие пика, постепенное затухание. Кривая 2 сохраняет этот же характер, но пик несколько смещается по частоте (средняя частота 0,033 Гц), спектральная характеристика имеет больший наклон. Наконец, кривая 3, соответствующая самой узкой полосе частот окна (следовательно, имеющая самую малую степень смещения и самую большую неустойчивость оценки), не вносит существенных изменений, имеются небольшие флуктуации относительно 2 — ложные пики. Важно отметить, что кривые 2 и 3 имеют основные пики на одной и той же частоте. Смещение пика у кривой 1 объясняется тем, что здесь точка отсечения взята там, где ковариации еще значительны. Таким образом, можно считать, что удовлетворительная выборочная оценка спектра получается при $L=32$.

На основании такого спектрального анализа можно сделать предположение, что в области низких частот случайный процесс изменения ежесекундных значений скорости ветра в приземном

слое можно описать с помощью стохастической динамической модели второго порядка, имеющей подобный спектр, и использовать эту модель в прогностических целях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. — М.: Мир, 1972, вып. 1, 2.
2. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. — М.: Мир, 1982, — 430 с.
3. Голд Б., Рейдер И. Цифровая обработка сигналов. — М.: Советское радио, 1973, — 368 с.
4. Бендат Дж., Пирсол А. Применение корреляционного и спектрального анализа. — М.: Мир, 1983, — 312 с.
5. Качурин Л. Г. Методы метеорологических измерений. — Л.: Гидрометеоиздат, 1985, — 456 с.
6. Пановский Г. А., Брайер Г. В. Статистические методы в метеорологии. — Л.: Гидрометеоиздат, 1967, — 242 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава I. Преобразование Фурье	5
1.1. Ряд Фурье	5
1.2. Интеграл Фурье	7
1.3. Свойства преобразования Фурье	8
1.4. Примеры преобразования Фурье	10
Глава II. Спектральный анализ детерминированных процессов	15
2.1. Эффекты конечной длины записи	15
2.2. Эффекты дискретизации сигнала по времени	19
2.3. Дискретное преобразование Фурье	22
2.4. Быстрое преобразование Фурье	25
2.5. Сбор и предварительная обработка данных	29
2.6. Основные этапы спектрального анализа детерминированных процессов	32
Глава III. Спектральный анализ случайных процессов	34
3.1. Случайный процесс	34
3.2. Оценивание ковариационных функций	38
3.3. Оценивание спектра мощности	42
3.4. Сглаженные спектральные оценки	47
3.5. Основные этапы спектрального анализа случайных процессов	55
Литература	61

CONTENTS

Introduction	3
Chapter I. Fourier Transformation	5
1.1. Fourier Series	5
1.2. Fourier Integral	7
1.3. Fourier Transformation Attributes	8
1.4. Examples of Fourier Transformation	10
Chapter II. Spectral analysis for a deterministic process	15
2.1. Record's finite duration effect	15
2.2. Sampling effect	19
2.3. Discrete Fourier Transformation	22
2.4. Fast Fourier Transformation	25
2.5. Data acquisition and pre-processing	29
2.6. Deterministic Spectral Analysis essentials	32
Chapter III. Spectral analysis for a stochastic process	34
3.1. Stochastic process	34
3.2. Estimation of covariance function	38
3.3. Estimation of power spectrum	42
3.4. Smoothed spectral estimates	47
3.5. Stochastic Spectral Analysis essentials	55
Recommended references	61

Учебное пособие

Андрей Владленович Белоцерковский
Спектральный анализ в гидрометеорологии

Редактор И. Г. Максимова
ЛР № 020309 от 28.11.91.

Сдано в набор 22.09.93.

Подписано в печать 30.12.93 г.

Печ. 4 л., уч.-изд. л. 4,5

Тираж 800.

Зак. 489.

Формат 60×90¹/₁₆. Бумага тип. № 2. Печать высокая. Гарнитура литературная.

РГГМИ, 195196, СПб, Малоохтинский пр., 98.

Тип. ВАС