

Д. И. Казакевич

Основы теории случайных функций в задачах гидрометеорологии

*Допущено Государственным комитетом
СССР по народному образованию
в качестве учебного пособия для студентов
вузов, обучающихся по специальностям:
«Гидрология», «Океанология»,
«Метеорология»*



Ленинград
Гидрометеоиздат 1989

51
К14
УДК [551.46 + 551.5 + 556](0.75) : 519.2

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. Е. П. Школьный (кафедра общей метеорологии ОГМИ), д-р физ.-мат. наук, проф. И. И. Поляк (ГГИ)

Научный редактор д-р физ.-мат. наук, проф. В. А. Рожков (ЛО ГОИН)

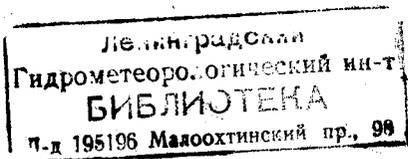
В книге излагаются основы теории случайных функций и методы их применения при решении практических задач. Главное внимание уделено тем аспектам теории, которые широко используются в гидрометеорологии; рассматриваются спектральное разложение стационарных случайных процессов и однородных полей, линейные их преобразования, вопросы оптимальной экстраполяции и определение статистических характеристик по экспериментальным данным. Основные положения теории иллюстрируются примерами приложений.

Книга предназначена для специалистов гидрометеорологов, студентов и аспирантов гидрометеорологических вузов и соответствующих факультетов университетов, а также для лиц, занимающихся вопросами приложений теории вероятностей и теории случайных функций в других областях.

The book «Basic Concepts of the Random Functions Theory in Hydrometeorological Problems» by D. I. Kazakevich is devoted to the basic concepts of the random functions theory and its application. Special attention is paid to those aspects of the theory which are widely used in hydrometeorology. Along with one-dimensional processes the author includes the consideration of space random fields.

The application of general methods is shown through solving a number of typical hydrological and meteorological problems.

The book will be valuable for specialists in hydrometeorology, students of hydrometeorological higher schools and universities and for those who deal with the application of random function theory in other branches of science.



К 1805040400-071 16-89
069(02)-89

ISBN 5-286-00149-1

© Гидрометеоиздат, 1989 г.

Предисловие редактора

Объектом изучения теории вероятностей являются случайные события, величины и функции. Изложение этой теории в лекционных курсах, как правило, ведется на двух уровнях строгости: для специальностей математического профиля на языке теории множеств, меры и интеграла и для прикладных специальностей — на базе общего курса высшей математики. Настоящее учебное пособие задумано автором как дополнение к лекциям по теории случайных событий и величин для студентов-гидрометеорологов.

Специалисты гидрологи, метеорологи и океанологи широко используют в своей научной и практической деятельности методы теории случайных функций. Однако учебника по основам теории случайных функций для подготовки студентов-гидрометеорологов до сих пор не было.

Данный учебник назван «Основы теории случайных функций в задачах гидрометеорологии». Это название можно интерпретировать по-разному.

Исходной информацией в гидрометеорологии являются временные ряды данных измерений на станциях и постах. Для обработки и анализа этих данных вполне естественно интерпретировать временные ряды как реализации случайных процессов и выявлять их закономерности в терминах вероятностных характеристик. Этой задаче в учебнике уделено достаточно много внимания — от определения случайной функции и случайного поля до разъяснения, что означает та или иная вероятностная характеристика.

Надо отметить, что в задачах гидрометеорологии наибольшее внимание уделяется моделям стационарных, авторегрессионных, периодически нестационарных процессов. В математических курсах основное внимание уделяется процессам со стационарными и независимымиращениями — марковским, гауссовским, пуассоновским, а в радиотехнических курсах — широкополосным и узкополосным, модулированным и импульсным процессам. Таким образом, детализация классификации случайных процессов, учитывающая специфику гидрологических, метеорологических и океанологических процессов, является одной из характерных особенностей настоящего учебника.

Из-за ограниченного объема курса в настоящем учебном пособии мало внимания уделено статистике случайных процессов, в частности, методам статистического оценивания вероятностных характеристик. Для детального изложения указанных вопросов необходим отдельный курс лекций. Учебник А. А. Исаева «Статистика в метеорологии и климатологии» далеко не полно отвечает этим задачам.

Как теория вероятностей случайных событий и величин, так и теория случайных процессов традиционно включает раздел действия над случайными событиями, функции от случайных величин, операции над случайными функциями. Для задач гидрометеорологии этот раздел необходим как для интерпретации результатов анализа натуральных данных, так и для конструирования моделей исследуемых процессов. Наиболее общей моделью природного процесса является случайный процесс, удовлетворяющий уравнениям термо- и гидродинамики. В настоящем учебном пособии содержатся лишь самые общие сведения по этому вопросу: определены операции дифференцирования и интегрирования случайного процесса; дано понятие о линейных операторах и динамической системе; приведены примеры решения стохастических дифференциальных уравнений. Дальнейшее развитие этой теории целесообразно давать в специальных курсах (ветровое волнение, турбулентность и т. д.). В пособии приводятся сведения из теории случайных процессов, служащие математическим обоснованием или пояснением обсуждаемых понятий. Эти сведения необходимы студентам для более глубокого понимания того или иного раздела.

Настоящее учебное пособие следует считать одним из серии учебных пособий для студентов-гидрометеорологов, которые должны сформировать систему понятий, необходимых для работы по избранной специальности.

В. А. Рожков,
д-р физ.-мат. наук, проф.

Предисловие автора

В связи с широким применением статистических методов в гидрометеорологической науке и практике в учебные планы гидрометеорологических институтов в последние годы включен ряд специальных курсов: «Основы теории случайных функций в задачах гидрометеорологии», «Численные методы анализа и обработки океанологической информации», «Численный анализ метеорологической информации», «Статистические методы в метеорологии», «Статистические методы в гидрологии», в которых излагаются статистические методы обработки и анализа гидрометеорологической информации, прогнозирования процессов океанологии, метеорологии и гидрологии и решения целого ряда других задач. Вместе с тем в настоящее время не существует учебников или учебных пособий по этим дисциплинам. Студентам приходится пользоваться большим числом монографий, справочных пособий и научных работ, что существенно затрудняет процесс обучения. Поэтому создание специальных учебных пособий по указанным курсам крайне необходимо. Кроме того, статистические методы широко используются и в ряде других специальных дисциплин.

Следует отметить, что отсутствуют также учебники и учебные пособия по теории случайных функций, являющейся математической и методологической основой всех указанных выше специальных дисциплин, которые удовлетворяли бы студентов-гидрометеорологов. Учебники, предназначенные для математических специальностей государственных университетов, сложны для студентов-гидрометеорологов, не имеющих достаточной математической подготовки. Также малопригодны для студентов-гидрометеорологов учебные пособия, излагающие теорию случайных функций применительно к потребностям чисто технических дисциплин (радиотехники, теории автоматического регулирования, теории связи). Книги этого типа, во-первых, не отражают многих аспектов теории, весьма важных при ее применении в гидрометеорологии, во-вторых, требуют знания специфики соответствующих дисциплин. Поэтому в первую очередь необходимо создание специального учебного пособия по теории случайных функций для гидрометеорологов.

Настоящее учебное пособие написано на основе курса лекций по теории случайных функций, который автор читает в течение многих лет студентам Ленинградского гидрометеорологического института и монографии автора «Основы теории случайных функций и ее применение в гидрометеорологии», вышедшей в Гидрометеоиздате двумя изданиями. Учебное пособие рассчитано на студентов специальностей: гидрология, океанология,

метеорология. Вместе с тем, может быть использовано специалистами-гидрометеорологами в их практической работе.

При создании учебного пособия ставилась конкретная цель — изложение основных методов теории случайных функций, нашедших применение в гидрометеорологии, при разумном компромиссе научной строгости изложения с методической разработкой, доступной пониманию и усвоению студентами-гидрометеорологами. При этом гидрометеорологические приложения служат в основном иллюстрацией применения общих методов теории на конкретных примерах, их цель — способствовать лучшему усвоению этих методов. Ни в коей мере не ставилась задача детального рассмотрения всего комплекса задач гидрометеорологии. Это является предметом специальных учебных дисциплин, о которых говорилось выше, и должно содержаться в учебниках и учебных пособиях по этим дисциплинам. Эти учебники или учебные пособия, как и положено, должны быть составлены отдельно по каждому из читаемых курсов с соответствующим охватом практических задач и конкретизацией общих методов применительно к специфике данной специальности — гидрологии, метеорологии или океанологии.

Настоящее учебное пособие следует рассматривать как первую часть из этой серии, излагающей общие методические основы.

Учебное пособие предполагает, что студенты уже прослушали общий курс высшей математики, читаемый в вузах гидрометеорологического профиля, а также основы теории вероятностей и математической статистики. Вместе с тем для удобства основных, используемых в книге положений теории вероятностей, кратко излагаются во введении.

Научным редактором были написаны пять параграфов: периодически нестационарные случайные процессы (п. 1.5); векторные случайные процессы (п. 1.8); спектральный анализ нестационарных процессов (п. 3.4); спектральный тензор векторного процесса (п. 3.5); оценки характеристик периодически коррелированных случайных процессов (п. 8.5), что является необходимым для правильного описания закономерностей годовой и суточной ритмики гидрометеорологических процессов, а также для анализа временных рядов скоростей ветра и морских течений, кроме того, им были сделаны дополнения в пп. 1.6, 2.3, 4.4.

Введение. Некоторые понятия теории случайных величин

Теория случайных функций, являющаяся разделом теории вероятностей, быстро развивалась и нашла самое широкое применение в различных областях науки и техники и прежде всего в радиотехнике, теории связи, теории автоматического управления, потребности которых в свою очередь способствовали развитию самой теории случайных функций.

В последние десятилетия наблюдается широкое использование аппарата теории случайных функций в метеорологии, океанологии, гидрологии. Основой этого явилась идея рассмотрения фиксированных мгновенных значений гидрометеорологических процессов и пространственных полей как отдельных реализаций некоторого случайного процесса или случайного поля. Такой подход позволяет отказаться от рассмотрения особенностей отдельных мгновенных значений гидрометеорологических полей, зависимость которых от пространственных координат, а также их временной ход носят весьма сложный и запутанный характер, и перейти к рассмотрению некоторых осредненных свойств статистической совокупности их реализации, отвечающей некоторой совокупности фиксированных внешних условий.

Теоретико-вероятностный подход к изучению явлений метеорологии, океанологии и гидрологии с использованием аппарата теории случайных функций оказался весьма эффективным в теории турбулентности; при создании методики прогноза погоды; при объективном анализе метеорологических полей; оценке репрезентативности данных наблюдений, точности измерительных приборов; при решении вопросов рационального размещения сети метеостанций; при создании методов прогноза речного стока и других гидрометеорологических характеристик; при изучении волнения на морях и океанах, а также при решении многих других вопросов.

Основным понятием в теории вероятностей является случайная величина.

Случайной величиной называют такую величину, которая при проведении ряда опытов в одинаковых условиях может каждый раз принимать то или иное значение, заранее неизвестно какое именно.

Различают случайные величины дискретного типа, когда все возможные значения случайной величины можно заранее перечислить, т. е. пронумеровать числами натурального ряда, и случайные величины непрерывного типа, когда все возможные значения случайной величины целиком заполняют некоторый промежуток числовой оси и, следовательно, их нельзя пронумеровать.

Случайной величиной непрерывного типа является такая случайная величина, которая в результате опыта может принять любое вещественное значение из некоторого интервала или из нескольких интервалов. Например, температура воздуха, давление воздуха или их отклонения от средней многолетней нормы, составляющие вектора скорости ветра можно рассматривать как случайные величины непрерывного типа.

В качестве случайных величин могут выступать ошибки приборов, с помощью которых производятся измерения. Как правило, эти ошибки будут представлять собой случайную величину непрерывного типа.

Условимся обозначать случайные величины прописными буквами: A, B, C, D, X, Y, \dots , а их возможные значения — соответствующими строчными буквами: a, b, c, d, x, y, \dots

В качестве универсальной характеристики пригодной как для случайных величин дискретного, так и непрерывного типов, используют интегральный закон распределения, называемый также функцией распределения.

Интегральный закон распределения $F(x)$ случайной величины X определяют как вероятность того, что случайная величина примет значение меньше некоторого числа x

$$F(x) = P(X < x),$$

где $P(X < x)$ означает вероятность того, что $X < x$.

$F(x)$ является неубывающей функцией своего аргумента, т. е. при $x_2 > x_1$ имеет место $F(x_2) \geq F(x_1)$; $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

Для случайной величины непрерывного типа, функция распределений которой дифференцируема, в качестве закона распределения можно использовать производную от функции распределения

$$f(x) = F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},$$

которую обозначают $f(x)$ и называют дифференциальным законом распределения или плотностью распределения. Плотность распределения как производная от неубывающей функции $F(x)$ является неотрицательной функцией, т. е. $f(x) \geq 0$ при всех x .

Функция распределения выражается через плотность распределения в виде интеграла

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

Так как $F(+\infty) = 1$, то для плотности распределения выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

Функция распределения и плотность распределения выражаются друг через друга и, следовательно, для непрерывной случайной величины каждая из них является исчерпывающей характеристикой. График плотности распределения $f(x)$ называют кривой распределения, он наглядно представляет вид рассматриваемого распределения.

Закон распределения случайной величины является ее исчерпывающей характеристикой. Однако его не всегда удается установить и часто используют отдельные числовые характеристики, выражающие некоторые существенные черты распределения случайной величины. В качестве таких характеристик рассматривают моменты распределения различного порядка.

Начальным моментом k -го порядка $m_k[x]$ дискретной случайной величины X называют сумму вида

$$m_k[X] = \sum_i x_i^k p_i,$$

где x_i — все возможные значения случайной величины, а p_i — соответствующие им вероятности.

Если дискретная случайная величина принимает бесконечное множество значений x_i , то ряд должен быть абсолютно сходящимся.

Для непрерывной случайной величины суммирование по дискретным значениям x_i заменяется интегрированием по всем значениям непрерывного аргумента x . При этом вероятности p_i заменяются элементом вероятности $f(x)dx$.

Таким образом, для непрерывной случайной величины

$$m_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Первый начальный момент $m_1[x]$ называют математическим ожиданием случайной величины X и обозначают $M[X]$ или m_x . Для дискретной случайной величины

$$M[X] = \sum_i x_i p_i,$$

для непрерывной случайной величины

$$M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Начальный момент k -го порядка представляет собой математическое ожидание k -й степени случайной величины, т. е.

$$m_k[X] = M[X^k].$$

Отклонение случайной величины X от ее математического ожидания называют центрированной случайной величиной и обозначают $\overset{\circ}{X}$

$$\overset{\circ}{X} = X - m_x.$$

Центральным моментом k -го порядка $\mu_k[X]$ случайной величины X называют начальный момент k -го порядка центрированной случайной величины $\overset{\circ}{X}$

$$\mu_k[X] = m_k[\overset{\circ}{X}] = M[\overset{\circ}{X}^k] = M[(X - m_x)^k].$$

Центральный момент k -го порядка есть математическое ожидание k -й степени центрированной случайной величины.

Для дискретной случайной величины

$$\mu_k[X] = \sum_i (x_i - m_x)^k \cdot p_i,$$

для непрерывной случайной величины

$$\mu_k[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k \cdot f(x) dx.$$

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю.

Начальные моменты есть моменты кривой распределения относительно оси ординат. Центральные моменты есть моменты кривой распределения относительно оси, проходящей через центр тяжести этой кривой.

Центральный момент второго порядка называют дисперсией случайной величины и обозначают $\overset{\circ}{D}[X]$ или D_x

$$D[X] = \mu_2[X] = M[(X - m_x)^2].$$

Дисперсия есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от математического ожидания.

Для дискретной случайной величины

$$D[X] = \sum_i (x_i - m_x)^2 p_i.$$

Для непрерывной случайной величины

$$D[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 f(x) dx.$$

Дисперсия случайной величины служит мерой ее рассеяния. Она характеризует разброс значений случайной величины около ее математического ожидания. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины. Чтобы получить характеристику

рассеяния с размерностью случайной величины, используют среднее квадратическое отклонение, равное корню квадратному из дисперсии, которое обозначают $\sigma[X]$ или $\sigma_x = \sqrt{D_x}$.

Третий центральный момент служит для характеристики асимметрии распределения. Если кривая распределения симметрична относительно математического ожидания, то все центральные моменты нечетного порядка равны нулю.

Для характеристики асимметрии выбирается первый из неравных нулю нечетных центральных моментов, т. е. μ_3 . Чтобы при этом получить безразмерную величину, в качестве характеристики асимметрии распределения принимают величину

$$S = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

которую называют асимметрией или коэффициентом асимметрии.

Четвертый центральный момент характеризует островершинность, крутость кривой распределения, мерой чего служит эксцесс, определяемый по формуле

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Для наиболее часто встречающегося так называемого нормального распределения $\frac{\mu_4}{\sigma^4} = 3$, т. е. $E = 0$.

Для кривых распределения, более островершинных по сравнению с кривой нормального распределения, $E > 0$, для более плосковершинных кривых $E < 0$.

Между начальными и центральными моментами имеют место соотношения:

$$\mu_2 = m_2 - m_1^2;$$

$$\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3;$$

$$\mu_4 = m_4 - 4m_3m_1 + 6m_2m_1^2 - 3m_1^4.$$

Первое из них удобно использовать при вычислении дисперсии, а второе и третье — при вычислении асимметрии и эксцесса распределения.

Гидрометеорологические величины — температура воздуха, давление, облачность, влажность, составляющие вектора скорости ветра, количество осадков, годовой сток реки и другие — очень часто рассматривают как случайные величины. При этом как случайные величины они могут быть охарактеризованы законами распределения.

Наиболее часто на практике встречаются случайные величины, плотность распределения которых имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

В силу своей распространенности закон распределения, характеризующий этой функцией, получил название нормального закона распределения, а случайные величины, имеющие плотность распределения такого вида, называют нормально распределенными.

Многие процессы в природе или технике являются результатом совокупного воздействия целого ряда случайных факторов. При этом случайная величина, численно характеризующая данный процесс, представляет собой сумму ряда случайных величин, каждая из которых подчиняется некоторому закону распределения. Если случайная величина представляет собой сумму большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин, причем каждая из слагаемых случайных величин имеет сравнительно небольшой вес в общей сумме, то независимо от того, каковы законы распределения слагаемых, закон распределения суммы случайных величин является нормальным или близок к нормальному.

Кривая распределения нормального закона носит название кривой Гаусса. Кривая распределения является симметричной относительно вертикальной прямой, проходящей через точку $x = m$ и имеет максимум в этой точке, равный $\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}$.

Плотность вероятности нормального закона распределения полностью определяется двумя параметрами — математическим ожиданием случайной величины m и ее средним квадратическим отклонением σ (или дисперсией).

Для нормального распределения асимметрия и эксцесс равны нулю, так как $\mu_3 = 0$, а $\mu_4 = 3\sigma^4$.

Многие сложные явления природы обусловлены совокупным воздействием ряда различных случайных величин. Например, синоптическая обстановка зависит от многих случайных факторов: температуры воздуха, давления, влажности и др. При анализе этих явлений мы должны рассматривать все случайные величины, их обуславливающие, как систему случайных величин. При этом наличие связей и взаимных зависимостей между отдельными случайными величинами системы приводит к тому, что ее свойства не исчерпываются характеристиками отдельных входящих в систему величин.

Систему n случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) удобно геометрически интерпретировать как координаты случайной точки

в n -мерном пространстве или как n -мерный случайный вектор. В качестве универсальной характеристики системы (X_1, X_2, \dots, X_n) используют n -мерную функцию распределения $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определяемую как вероятность совместного выполнения n неравенств $X_i < x_i$:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n).$$

Функция распределения является неубывающей функцией своих аргументов. Так как события $X_i < -\infty$ невозможны, то при стремлении хотя бы одного из аргументов к $-\infty$ функция распределения стремится к нулю.

Так как события $X_i < +\infty$ достоверны, то для получения функции распределения подсистемы X_{k+1}, \dots, X_n , выделенной из системы, нужно аргументы x_{k+1}, \dots, x_n положить равными $+\infty$. В частности, для получения функции распределения одной случайной величины X_j нужно все аргументы x_i при $i \neq j$ положить равными $+\infty$.

Если для системы непрерывных случайных величин существует смешанная частная производная от функции распределения, взятая один раз по каждому аргументу

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n},$$

то она называется плотностью распределения системы или случайного вектора (X_1, X_2, \dots, X_n) .

Функцию распределения системы можно выразить через ее плотность распределения в виде

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(-\infty < X_1 < x_1, \dots, -\infty < X_n < x_n) = \\ &= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \dots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Зная n -мерную плотность распределения системы, можно определить k -мерную ($k < n$) плотность распределения ее подсистемы в виде

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_{k+1} \dots dx_n.$$

В частности, для определения плотности распределения одной случайной величины X_j нужно проинтегрировать плотность распределения системы в бесконечных пределах по всем аргументам x_i при $i \neq j$.

Для характеристики зависимости между случайными величинами рассматривают так называемые условные законы распределения. Условным законом распределения подсистемы $(X_i,$

X_{i_2}, \dots, X_{i_k}) называется закон распределения системы, вычисленный при условии, что остальные случайные величины $X_{i_{k+1}}, \dots, X_{i_{k+n}}$ приняли определенные значения $x_{i_{k+1}}, \dots, x_{i_{k+n}}$.

Случайные величины системы называются независимыми, если закон распределения любой ее подсистемы не зависит от того, какие значения приняли остальные величины. Для системы независимых случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n выполняется равенство

$$P(X_{i_1} < x_{i_1}, X_{i_2} < x_{i_2}, \dots, X_{i_k} < x_{i_k}) = \\ = P(X_{i_1} < x_{i_1}) \cdot P(X_{i_2} < x_{i_2}) \dots P(X_{i_k} < x_{i_k}),$$

где $X_{i_1}, X_{i_2}, \dots, X_{i_k}$ — любая подсистема этой системы.

Применяя эту формулу для величин X_1, X_2, \dots, X_n , можем записать

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdot F_2(x_2) \dots F_n(x_n),$$

т. е. функция распределения системы независимых случайных величин равна произведению функций распределения отдельных случайных величин, входящих в эту систему. Это условие является не только необходимым для независимости случайных величин системы, но и достаточным. Необходимое и достаточное условие независимости случайных величин системы можно выразить аналогичным соотношением для плотностей распределения

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \dots f_n(x_n).$$

Как и для одной случайной величины в качестве числовых характеристик системы случайных величин используют начальные и центральные моменты распределения.

Начальным моментом m_{k_1, k_2, \dots, k_n} , порядка $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ системы n случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) называется математическое ожидание произведения $X_1^{k_1} \cdot X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}$

$$m_{k_1, k_2, \dots, k_n} = M[X_1^{k_1} \cdot X_2^{k_2} \dots X_n^{k_n}].$$

Центральным моментом $\mu_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ порядка $k_1 + k_2 + \dots + k_n$ называется математическое ожидание произведения $\overset{\circ}{X}_1^{k_1} \cdot \overset{\circ}{X}_2^{k_2} \dots \overset{\circ}{X}_n^{k_n}$, где $\overset{\circ}{X}_i$ — центрированные случайные величины

$$\mu_{k_1, k_2, \dots, k_n} = M \left[\prod_{i=1}^n \overset{\circ}{X}_i^{k_i} \right].$$

Определим моменты распределения системы двух случайных величин (X, Y) .

Для дискретных случайных величин имеем

$$m_{k_1, k_2} = \sum_i \sum_j x_i^{k_1} y_j^{k_2} p_{i, j},$$

где $p_{i, j} = P(X = x_i, Y = y_j)$;

$$\mu_{k_1, k_2} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)^{k_1} (y_j - m_y)^{k_2} p_{i, j}.$$

Для непрерывных случайных величин

$$m_{k_1, k_2} = \iint_{-\infty}^{\infty} x^{k_1} y^{k_2} f(x, y) dx dy;$$

$$\mu_{k_1, k_2} = \iint_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^{k_1} (y - m_y)^{k_2} f(x, y) dx dy.$$

Так же как и для одной случайной величины, моменты системы случайных величин не являются ее исчерпывающими характеристиками, однако они определяют ряд ее важных свойств.

Первые моменты $m_{1, 0}$ и $m_{0, 1}$ есть математические ожидания отдельных случайных величин системы

$$m_{1, 0} = M[XY^0] = M[X] = m_x,$$

$$m_{0, 1} = M[X^0Y] = M[Y] = m_y.$$

Геометрически это координаты средней точки, вокруг которой происходит рассеивание случайных точек $N(X, Y)$.

Рассмотрим вторые центральные моменты системы:

$$\mu_{2, 0} = M[\overset{\circ}{X}{}^2 \overset{\circ}{Y}{}^0] = M[\overset{\circ}{X}{}^2] = D[X],$$

$$\mu_{0, 2} = M[\overset{\circ}{X}{}^0 \overset{\circ}{Y}{}^2] = M[\overset{\circ}{Y}{}^2] = D[Y].$$

Это дисперсии случайных величин, характеризующие рассеивание в направлении координатных осей.

Второй смешанный центральный момент, равный

$$\mu_{1, 1} = M[\overset{\circ}{X}\overset{\circ}{Y}] = M[(X - m_x)(Y - m_y)] = R_{xy},$$

называется корреляционным моментом или моментом связи случайных величин X и Y .

Для дискретных случайных величин

$$R_{xy} = \sum_i \sum_j (x_i - m_x)(y_j - m_y) p_{i, j}.$$

Для непрерывных случайных величин

$$R_{xy} = \iint_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f(x, y) dx dy.$$

Для независимых случайных величин $R_{xy} = 0$. Действительно,

$$\begin{aligned} R_{xy} &= \iint_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)(y - m_y) f_1(x) f_2(y) dx dy = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) f_1(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} (y - m_y) f_2(y) dy = \mu_1[X] \mu_1[Y] = 0. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что если $R_{xy} \neq 0$, то X и Y — зависимые случайные величины.

Величина

$$r_{xy} = \frac{R_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

называется коэффициентом корреляции величин X и Y .

Для независимых случайных величин $r_{xy} = 0$. Обратное неверно, т. е. $r_{xy} = 0$ есть необходимое условие независимости, но не достаточное.

Случайные величины X и Y , для которых $r_{xy} = 0$, называются некоррелированными.

Из независимости случайных величин следует их некоррелированность. Из некоррелированности случайных величин их независимость не следует.

В качестве числовых характеристик системы n случайных величин X_1, X_2, \dots, X_n принимают n математических ожиданий m_{x_i} , $i = 1, 2, \dots, n$ исходных случайных величин, n их дисперсий D_{x_i} и $n(n-1)$ корреляционных моментов $R_{x_i x_j}$

$$R_{x_i x_j} = M[(X_i - m_{x_i})(X_j - m_{x_j})].$$

Дисперсию D_{x_i} можно рассматривать как корреляционный момент величины X_i с самой собой, т. е.

$$D_{x_i} = R_{x_i x_i} = M[(X_i - m_{x_i})^2].$$

Корреляционные моменты удобно располагать в виде квадратной матрицы, которая называется корреляционной матрицей системы случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) .

Из определения корреляционного момента видно, что

$$R_{ij} = M[\overset{\circ}{X}_i \overset{\circ}{X}_j] = M[\overset{\circ}{X}_j \overset{\circ}{X}_i] = R_{x_j x_i} = R_{ji}.$$

Поэтому можно заполнять только половину корреляционной матрицы сверху от главной диагонали

$$\|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & R_{nn} \end{pmatrix}.$$

В случае когда случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n не коррелированы, корреляционная матрица является диагональной. По главной диагонали матрицы стоят дисперсии случайных величин, а все остальные элементы равны нулю.

Вместо корреляционных моментов часто используют коэффициенты корреляции

$$r_{ij} = r_{x_i x_j} = \frac{R_{x_i x_j}}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}$$

и составляют нормированную корреляционную матрицу, элементы главной диагонали которой равны единице,

$$\|r_{ij}\| = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ & 1 & \dots & r_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Система случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) называется нормально распределенной, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \sqrt{(2\pi)^n D}} \times \\ \times e^{-\frac{1}{2D} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n D_{ik} \frac{x_i - m_i}{\sigma_i} \cdot \frac{x_k - m_k}{\sigma_k}},$$

где D — определитель нормированной корреляционной матрицы

$$\|r_{x_i x_k}\| = \begin{pmatrix} 1 & r_{x_1 x_2} & \dots & r_{x_1 x_n} \\ & 1 & \dots & r_{x_2 x_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

D_{ik} — алгебраические дополнения элементов $r_{x_i x_k}$ в определителе D . n -мерная плотность распределения для нормального закона зависит от n математических ожиданий, n средних квадратических отклонений (дисперсий) и $n(n-1)/2$ коэффициентов корреляции.

Если случайные величины X_1, X_2, \dots, X_n независимы, то плотность распределения равна

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f_1(x_1) f_2(x_2) \dots f_n(x_n) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m_i)^2}{\sigma_i^2}} \end{aligned}$$

Эта формула получается из общей формулы при $r_{x_i x_k} = 0$ в случае $i \neq k$ и $r_{x_i x_k} = 1$ при $i = k$. Тогда $D = 1$, $D_{i, k} = 0$ при $i \neq k$, $D_{ik} = 1$ при $i = k$.

Глава 1

Случайные процессы и их вероятностные характеристики

1.1. Случайная функция и ее законы распределения

Случайный процесс или случайная функция есть обобщение понятия случайной величины, когда результатом опыта является не число, а некоторая функция одного или нескольких аргументов, которая при повторении опытов в одинаковых условиях каждый раз случайным образом меняет свой вид.

При этом неслучайная функция, получающаяся в результате каждого опыта, называется реализацией случайной функции. При каждом повторении опыта будем получать новую реализацию. Таким образом, случайную функцию можно рассматривать как множество всех ее реализаций. Такой статистический подход весьма удобен при изучении многих процессов физики, техники, биологии и гидрометеорологии.

Для атмосферы характерны неупорядоченные турбулентные движения, обуславливающие изменчивость метеорологических элементов как во времени, так и в пространстве. Турбулентные пульсации имеют место как для крупномасштабных процессов, так и для движений самого малого масштаба. Наличие турбулентности приводит к тому, что начальные условия не определяют полностью течение процесса и, следовательно, опыты, проведенные при одинаковых внешних условиях, будут приводить к различным результатам.

Допустим, что мы в один и тот же день и час каждого года в течение некоторого интервала времени проводим измерение температуры воздуха в данной точке. При каждом таком измерении мы получим температуру как функцию от времени $T(t)$. Функции, полученные при повторении опытов, будут отличаться друг от друга. Каждую функцию $T_i(t)$, полученную при i -м опыте, можем рассматривать как отдельную реализацию, а множество всех полученных функций даст нам совокупность наблюдаемых реализаций случайной функции.

Аналогично и другие метеорологические элементы — давление, вектор скорости ветра и другие — можно рассматривать как случайные функции времени и пространственных координат.

Наглядным примером случайной функции может служить турбулентная диффузия. Допустим, что в некоторой точке турбулентного потока жидкости или газа помещена примесь, например большое число окрашенных мелких твердых частиц. В результате переноса этой примеси беспорядочно перемешивающимися струйками жидкости или газа, составляющими в своей совокупности турбулентный поток, она быстро распростра-

няется и окрашивает значительный объем. Это явление и называют турбулентной диффузией. Турбулентная диффузия широко распространена в природе. Ею определяются распространение в атмосфере бактерий и вирусов, пыльцы растений, загрязнение воздуха дымами и газами, выделенными промышленными предприятиями и транспортом и т. д. Одним из методов экспериментального изучения турбулентной диффузии в реальной атмосфере является применение трансозондов — уравновешенных шаров-пилотов, вес которых подбирается так, чтобы они свободно плавали в воздухе вдоль некоторой изобарической поверхности. Каждый трансозонд рассматривается как частица в

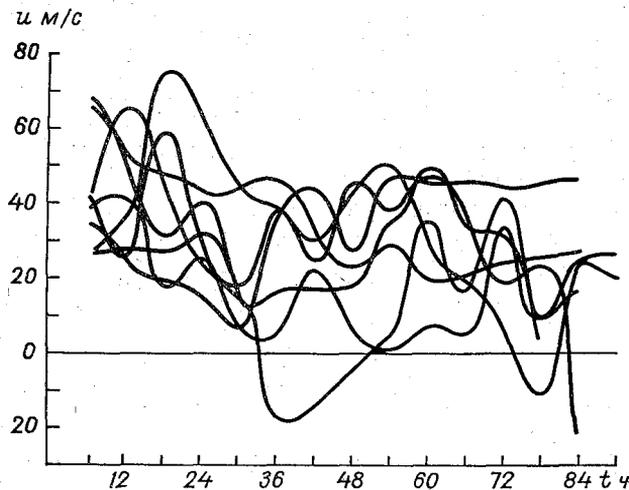


Рис. 1.1

потоке газа. Регистрируя значение какой-нибудь координаты одной из таких частиц через определенные промежутки времени, мы получим реализацию случайной функции. На рис. 1.1 изображено несколько реализаций зональной составляющей траектории частицы, дискретные значения каждой реализации соединены сплошной линией. Каждая кривая на рис. 1.1 представляет собой реализацию случайной функции. Если зафиксировать момент времени $t = t_0$ и провести прямую, перпендикулярную оси абсцисс, то она пересечет каждую реализацию в одной точке. Точки пересечения представляют собой значения случайной величины, которую называют сечением случайной функции, соответствующим значению аргумента $t = t_0$.

Исходя из этого можно дать другое определение случайной функции. Случайной функцией аргумента t называют функцию $X(t)$, значение которой при каждом данном значении аргумен-

та $t = t_0$ (каждое сечение, соответствующее $t = t_0$) является случайной величиной.

Дадим теперь более строгое математическое определение случайной функции, основанное на аксиоматическом методе построения вероятностей, предложенном советским математиком А. Н. Колмогоровым.

В аксиоматике А. Н. Колмогорова в качестве элементарных событий ω рассматриваются такие возможные исходы опыта, один из которых произойдет обязательно и которые исключают друг друга, т. е. являются несовместными.

Множество всех элементов ω образует исходное пространство элементарных событий Ω . Каждое случайное событие A можно рассматривать как множество тех элементарных исходов ω , которые приводят к осуществлению этого события, т. е. как некоторое подмножество пространства Ω . В частности, событие, рассматриваемое как все пространство Ω , является достоверным, так как к его осуществлению приводят все элементарные исходы опыта, один из которых по условию произойдет обязательно.

На пространстве элементарных событий Ω выделяется система F его подмножеств, называемых случайными событиями, или случайными исходами, которая обладает тремя свойствами.

1. Система F в качестве элемента содержит все множество Ω , $\Omega \in F$.

2. Если A и B являются элементами F , $A \in F$, $B \in F$, то их сумма $A + B$; произведение $A \cdot B$ и дополнения \bar{A} , \bar{B} до множества Ω также являются элементами F , $A + B \in F$, $A \cdot B \in F$, $\bar{A} \in F$, $\bar{B} \in F$.

Напомним, что суммой двух множеств $A + B$ называется множество всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B . Произведением множеств $A \cdot B$ называется множество всех элементов, принадлежащих обоим множествам A и B . Дополнением \bar{A} множества A до множества Ω , $\bar{A} = \Omega - A$, называется множество всех элементов множества Ω , не являющихся элементами множества A .

Дополнением множества Ω является так называемое пустое множество, которое не содержит ни одного элемента ω . Пустому множеству соответствует невозможное событие.

3. Вместе с каждой последовательностью множеств $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, принадлежащих F , их сумма $A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$ и произведение $A_1 A_2 \dots A_n \dots$ также принадлежит F .

Система F подмножеств с указанными свойствами носит название « σ -алгебра» событий.

На множествах A из σ -алгебры F вводится вероятностная мера $P(A)$ — вероятность случайных событий A , которая представляет собой функцию множеств, обладающую следующими свойствами:

1) $P(A) \geq 0$, т. е. $P(A)$ является неотрицательной функцией;

2) $P(\Omega) = 1$;

3) если события $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ попарно несовместны, т. е. произведение $A_i \times A_j$ есть пустое множество при $i \neq j$, то $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$.

Указанные три свойства вероятностной меры представляют собой аксиомы теории вероятностей.

Аксиома 1. Каждому случайному событию $A \in F$ поставлено в соответствии неотрицательное число $P(A)$, называемое его вероятностью.

Аксиома 2. Вероятность достоверного события равна единице.

Аксиома 3. Если событие A состоит в осуществлении хотя бы одного из конечного или счетного числа попарно несовместных событий, то вероятность события A равна сумме вероятностей этих событий. Эта аксиома устанавливает свойство аддитивности вероятностной меры.

Пространство элементарных событий Ω с выделенной на нем σ -алгеброй случайных событий F , для которых определена вероятностная мера $P(A)$, называют вероятностным пространством и обозначают (Ω, F, P) .

Функция $X = X(\omega)$ от элементарных событий (исходов) $\omega \in \Omega$, определенная на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , значения которой образуют некоторое числовое множество E на числовой оси, называется случайной величиной.

Случайную функцию можно определить как функцию $X(\omega, t)$ элементов ω основного вероятностного пространства (Ω, F, P) и параметра t , пробегающего произвольное множество T . При фиксированном значении $t \in T$ случайная функция будет являться случайной величиной, которую называют сечением случайной функции.

При фиксированном значении элементарного исхода опыта $\omega \in \Omega$ случайная функция превращается в неслучайную функцию $x(t)$ аргумента $t \in T$, которая соответствует элементарному исходу опыта ω и называется реализацией случайной функции.

Будем обозначать случайную функцию большими буквами с указанием аргумента $X(t), Y(t)$ и т. д., а ее реализации — малыми буквами $x_1(t), x_2(t), \dots$ с индексом, указывающим номер опыта, при котором данная реализация получена. Сечение случайной функции, отвечающее значению аргумента t_0 , будем обозначать $X(t_0)$.

Множество T часто представляет собой подмножество вещественной прямой, при этом аргумент t может принимать либо любые вещественные значения в заданном интервале (конечном или бесконечном), либо только определенные дискретные значения. В первом случае $X(t)$ называют случайным процессом, во втором — случайной последовательностью.

Термин случайная функция охватывает оба эти понятия. Аргументом случайной функции не обязательно является время. Можно, например, рассматривать температуру воздуха как случайную функцию высоты.

В случае, когда множество T представляет собой некоторую область в n -мерном векторном пространстве, случайная функция будет зависеть уже не от скалярного, а от векторного аргумента $t(t_1, t_2, \dots, t_n)$, ее можно рассматривать как функцию от n скалярных аргументов t_1, t_2, \dots, t_n . Случайную функцию нескольких аргументов называют случайным полем.

В метеорологии, например, изучают поля температуры, ветра, давления, т. е. температуру, давление или вектор скорости ветра рассматривают как случайные функции четырех аргументов — трех пространственных координат и времени. При этом случайное поле может быть скалярным, как в случаях поля температуры или поля давления, или векторным, как в случае поля скорости ветра, когда каждая реализация является векторной функцией.

Гидрометеорологические процессы являются функциями непрерывных аргументов, поэтому не будем касаться теории слу-

чайных последовательностей, а рассмотрим только случайные процессы одного непрерывного аргумента и случайные поля как случайные функции нескольких непрерывных аргументов.

Случайная величина считается полностью определенной, если известна ее функция распределения

$$F(x) = P(X < x). \quad (1.1.1)$$

Система случайных величин определена, если задана ее функция распределения

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \quad (1.1.2)$$

Рассматривая случайный процесс $X(t)$ как совокупность всех его сечений, каждое из которых представляет собой случайную величину, и фиксируя значения аргумента $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$, получим n сечений случайного процесса

$$X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), \dots, X_n = X(t_n).$$

При этом приближенно случайный процесс можно охарактеризовать функцией распределения полученной системы случайных величин

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \quad (1.1.3)$$

Очевидно, что такая функция распределения тем полнее будет характеризовать случайный процесс, чем ближе друг к другу расположены значения аргумента t_i и чем большее число n их взято.

Исходя из этого случайный процесс $X(t)$ считают заданным, если для каждого значения t определена функция распределения случайной величины $X(t)$

$$F_1(x; t) = P[X(t) < x], \quad (1.1.4)$$

для каждой пары значений t_1 и t_2 аргумента t определена функция распределения системы случайных величин $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$

$$F_2(x_1, x_2; t_1, t_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2) \quad (1.1.5)$$

и вообще для любых n значений t_1, t_2, \dots, t_n аргумента t определена n -мерная функция распределения системы случайных величин $X_1 = X(t_1), X_2 = X(t_2), \dots, X_n = X(t_n)$

$$\begin{aligned} F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) &= \\ &= P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n). \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

Функция $F_1(x; t)$ называется одномерной функцией распределения случайного процесса, она характеризует закон распределения каждого его сечения, но не учитывает взаимную зависимость между различными сечениями.

Функция $F_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$, называемая двумерной функцией распределения случайного процесса, также не является его исчерпывающей характеристикой.

Для полной характеристики случайного процесса нужно задать все многомерные функции распределения.

Для непрерывных случайных процессов, таких, каждое сечение которых представляет собой непрерывную случайную величину, можно пользоваться многомерными дифференциальными законами распределения. Если $F_1(x; t)$ имеет частную производную по x

$$\frac{\partial F_1(x; t)}{\partial x} = f_1(x; t), \quad (1.1.7)$$

то она называется одномерной плотностью распределения или одномерным дифференцированным законом распределения случайного процесса.

Одномерный дифференциальный закон распределения $f_1(x; t)$ есть закон распределения случайной величины — сечения случайного процесса, соответствующего данному значению t . Аналогично определяются многомерные дифференциальные законы распределения случайного процесса. Если существует смешанная частная производная от n -мерной функции распределения

$$\frac{\partial^n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n), \quad (1.1.8)$$

то она называется n -мерной плотностью распределения случайного процесса.

Функции распределения и плотности распределения должны удовлетворять условиям симметрии, т.е. должны быть одними и теми же при любом выборе значений аргумента t_1, t_2, \dots, t_n .

Для любой перестановки i_1, i_2, \dots, i_n из чисел $1, 2, \dots, n$ должны выполняться соотношения:

$$\begin{aligned} F_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}; t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}) &= \\ &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n); \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

$$\begin{aligned} f_n(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}; t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}) &= \\ &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n). \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Если известна n -мерная функция распределения или плотность распределения, то тем самым заданы все функции и плотности распределения более низкого порядка.

Характеристика случайного процесса с помощью задания многомерных законов распределения большей частью является неприемлемой в практическом применении, как вследствие сложности экспериментального определения многомерных законов

распределения, так и вследствие их громоздкости и трудности использования при решении прикладных задач.

Поэтому вместо использования самих многомерных законов распределения в большинстве случаев ограничиваются заданием отдельных характеристик этих законов, аналогично тому, как в теории случайных величин вместо законов распределения пользуются их числовыми характеристиками.

1.2. Моментные характеристики случайных процессов

В качестве характеристик случайных процессов, как и случайных величин, принимают моменты распределения.

Моментом случайного процесса порядка $i_1 + i_2 + \dots + i_n$ называется математическое ожидание произведения соответствующих степеней различных сечений случайного процесса

$$m_{i_1, i_2, \dots, i_n}(t_1, t_2, \dots, t_n) = M \{ [X(t_1)]^{i_1} \cdot [X(t_2)]^{i_2} \dots [X(t_n)]^{i_n} \}. \quad (1.2.1)$$

Момент первого порядка

$$m_1(t) = M [X(t)] = m_x(t) \quad (1.2.2)$$

называется математическим ожиданием случайного процесса.

Математическим ожиданием случайного процесса является неслучайная функция $m_x(t)$, значение которой для каждого t равно математическому ожиданию соответствующего сечения.

Математическое ожидание $m_x(t)$ полностью определяется законом распределения первого порядка

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_{1,1}(x; t) dx. \quad (1.2.3)$$

Начальные моменты второго порядка могут быть двух типов: момент второго порядка для одного и того же сечения случайного процесса

$$m_{2,0}(t) = M \{ [X(t)]^2 \} \quad (1.2.4)$$

и смешанный момент второго порядка для двух различных сечений

$$m_{1,1}(t_1, t_2) = M [X(t_1) X(t_2)]. \quad (1.2.5)$$

Момент $m_{2,0}$ зависит только от одного значения аргумента t ; смешанный момент $m_{1,1}$ зависит от двух значений t_1 и t_2 аргумента t .

Наряду с начальными моментами рассматривают центральные моменты случайного процесса.

Разность между случайным процессом и его математическим ожиданием

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t) \quad (1.2.6)$$

называют центрированным случайным процессом.

Центральным моментом случайного процесса $X(t)$ называется начальный момент соответствующего порядка от центрированного случайного процесса $\overset{\circ}{X}(t)$.

Центральный момент первого порядка равен нулю

$$\mu_1(t) = M[\overset{\circ}{X}(t)] = M[X(t) - m_x(t)] = m_x(t) - m_x(t) = 0.$$

Центральные моменты второго порядка имеют вид

$$\mu_{2,0}(t) = M\{\overset{\circ}{X}(t)^2\} = M\{[X(t) - m_x(t)]^2\}, \quad (1.2.7)$$

$$\mu_{1,1}(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{X}(t_1)\overset{\circ}{X}(t_2)] = M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\}. \quad (1.2.8)$$

Центральный момент $\mu_{2,0}(t)$, являющийся функцией аргумента t , при каждом фиксированном значении t есть дисперсия соответствующего сечения случайного процесса. Эта неслучайная функция аргумента t

$$D_x(t) = M\{[X(t) - m_x(t)]^2\} \quad (1.2.9)$$

называется дисперсией случайного процесса.

Центральный момент $\mu_{1,1}(t_1, t_2)$ есть функция двух аргументов t_1 и t_2 , для каждой пары значений t_1 и t_2 это есть момент связи, или корреляционный момент между соответствующими сечениями случайного процесса.

Неслучайную функцию двух аргументов t_1 и t_2

$$R_x(t_1, t_2) = M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\} \quad (1.2.10)$$

называют корреляционной функцией случайного процесса $X(t)$.

Очевидно, что при $t_1 = t_2 = t$ имеет место $R_x(t, t) = D_x(t)$, т. е. при одинаковых значениях аргументов корреляционная функция превращается в дисперсию.

Корреляционную функцию $R_x(t_1, t_2)$ можно записать, пользуясь двумерным дифференциальным законом распределения случайного процесса

$$R_x(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_x(t_1)][x_2 - m_x(t_2)] f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \quad (1.2.11)$$

Из определения корреляционной функции $R_x(t_1, t_2)$ видно, что она симметрична относительно своих аргументов

$$R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2, t_1). \quad (1.2.12)$$

Вместо корреляционной функции можно пользоваться нормированной корреляционной функцией¹ $r_x(t_1, t_2)$, определяемой в виде

$$r_x(t_1, t_2) = \frac{R_x(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma_x(t_2)}, \quad (1.2.13)$$

где $\sigma_x(t) = \sqrt{D_x(t)}$ — среднее квадратическое отклонение случайного процесса.

Для каждой пары значений t_1 и t_2 нормированная корреляционная функция $r_x(t_1, t_2)$ есть коэффициент корреляции соответствующих сечений случайного процесса.

Задание первого и второго моментов — математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса, не дает полной его характеристики, а определяет лишь ряд существенных свойств.

Математическое ожидание $m_x(t)$ при каждом фиксированном значении аргумента t определяет центр распределения каждого сечения случайного процесса.

Корреляционная функция $R_x(t_1, t_2)$, превращаясь при одинаковых значениях $t_1 = t_2 = t$ в дисперсию, характеризует разброс случайных значений данного сечения около своего центра распределения.

При различных значениях t_1 и t_2 корреляционная функция характеризует степень линейной зависимости между каждой парой сечений случайного процесса. При решении многих прикладных задач достаточно знать только эти два момента — математическое ожидание и корреляционную функцию случайного процесса. Раздел теории случайных функций, оперирующий только этими характеристиками, носит название корреляционной теории случайных функций.

Для нормально распределенных случайных процессов математическое ожидание и корреляционная функция являются исчерпывающими характеристиками случайного процесса.

Случайный процесс называется нормально распределенным, если любая система его сечений $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$ подчиняется нормальному закону распределения системы случайных величин.

Плотность распределения нормально распределенной системы случайных величин однозначно определяется математическими

¹ Применяются также и другие наименования. Функцию (1.2.10) называют ковариационной функцией, а корреляционной функцией называют функцию (1.2.13).

ожиданиями случайных величин системы и корреляционной матрицей.

Так как математические ожидания сечений случайного процесса есть значения математического ожидания $m_x(t)$, отвечающие фиксированным значениям аргумента t , а элементы корреляционной матрицы есть значения корреляционной функции $R_x(t_1, t_2)$ при фиксированных парах ее аргументов, то математическое ожидание и корреляционная функция случайного процесса полностью определяют все n -мерные плотности распределения нормально распределенного случайного процесса.

В настоящее время корреляционная теория разработана наиболее полно, и с ее помощью удастся решать ряд важных прикладных задач. Корреляционная теория позволяет определять статистическую структуру метеорологических и гидрологических процессов и полей, решать задачи прогнозирования этих процессов и ряд других задач.

Рассмотрим, как меняются характеристики случайного процесса при прибавлении к нему неслучайной функции.

Пусть

$$Y(t) = X(t) + \varphi(t), \quad (1.2.14)$$

где $\varphi(t)$ — неслучайная функция.

По теореме сложения математических ожиданий

$$m_y(t) = m_x(t) + \varphi(t).$$

Определим корреляционную функцию случайного процесса $Y(t)$

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= M\{[Y(t_1) - m_y(t_1)][Y(t_2) - m_y(t_2)]\} = \\ &= M\{[X(t_1) + \varphi(t_1) - m_x(t_1) - \varphi(t_1)][X(t_2) + \varphi(t_2) - \\ &- m_x(t_2) - \varphi(t_2)]\} = M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\} = R_x(t_1, t_2), \end{aligned}$$

т. е. видно, что от прибавления неслучайного слагаемого корреляционная функция случайного процесса не меняется.

Пользуясь этим свойством, часто вместо самого случайного процесса рассматривают центрированный случайный процесс.

При изучении гидрометеорологических процессов математическое ожидание, полученное осреднением по всем реализациям случайного процесса, представляет собой климатическую норму данного процесса. Это может быть средняя многолетняя, средняя месячная, средняя суточная норма и т. д. в зависимости от характера изучаемого процесса. Изменчивость процесса, характеризуемую отклонением случайной реализации от нормы, называют аномалией.

Наибольший интерес при статистическом изучении случайных процессов представляет характеристика этих аномалий.

Например, при прогнозировании нас интересует характер отклонения искомого элемента от нормы, т. е. будет этот элемент больше или меньше климатической нормы.

Исходя из этого чаще всего рассматриваются центрированные случайные процессы с нулевым математическим ожиданием. При этом корреляционная функция центрированного процесса совпадает с корреляционной функцией исходного процесса.

Пример. Рассмотрим случайный процесс, представляющий собой синусоиду

$$X(t) = A \sin \omega t,$$

амплитуда которой A является случайной величиной с заданным математическим ожиданием m и дисперсией D .

Определим характеристики этого случайного процесса — математическое ожидание $m_x(t)$, корреляционную функцию $R_x(t_1, t_2)$ и дисперсию $D_x(t)$.

$$\begin{aligned} m_x(t) &= M[A \sin \omega t] = M[A] \sin \omega t = m \sin \omega t, \\ R_x(t_1, t_2) &= M\{[X(t_1) - m_x(t_1)][X(t_2) - m_x(t_2)]\} = \\ &= M[(A - m) \sin \omega t_1 (A - m) \sin \omega t_2] = M[(A - m)^2] \times \\ &\quad \times \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 = D \sin \omega t_1 \sin \omega t_2, \\ D_x(t) &= R_x(t, t) = D \sin^2 \omega t. \end{aligned}$$

1.3. Система случайных процессов, корреляционная функция связи

Часто приходится рассматривать совместно несколько случайных процессов. При этом, помимо характеристики каждого случайного процесса, существенным является установление связи между различными процессами.

Так, при изучении явлений погоды приходится совместно рассматривать ряд случайных процессов: изменение температуры воздуха, давления, влажности и др.

Подобно системе случайных величин, систему n случайных процессов можно рассматривать как n -мерный случайный вектор, зависящий от аргумента t .

Не описывая многомерные законы распределения системы случайных процессов вследствие их громоздкости и невозможности практического использования, ограничимся первыми двумя моментами, которые только и используются в корреляционной теории. Начальные моменты первого порядка совпадают с математическими ожиданиями соответствующих случайных процессов.

Центральные моменты второго порядка могут быть двух видов.

Во-первых, можно рассматривать второй центральный момент для двух сечений одного и того же случайного процесса,

который будет представлять собой корреляционную функцию каждого случайного процесса системы.

Во-вторых, можно рассматривать второй центральный момент для сечения одного из случайных процессов системы, соответствующего значению аргумента t_1 , и для сечения другого случайного процесса, соответствующего значению аргумента t_2 .

Этот центральный момент называется корреляционной функцией связи между двумя случайными процессами. Употребляют также и другое название — взаимная корреляционная функция.

Рассмотрим систему из двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$. В корреляционной теории ее характеристиками будут: математические ожидания $m_x(t)$ и $m_y(t)$; корреляционные функции $R_x(t_1, t_2)$ и $R_y(t_1, t_2)$ и корреляционная функция связи

$$R_{xy}(t_1, t_2) = M \{ [X(t_1) - m_x(t_1)] [Y(t_2) - m_y(t_2)] \}. \quad (1.3.1)$$

Корреляционная функция связи (1.3.1) характеризует степень линейной зависимости между сечениями $X(t_1)$ и $Y(t_2)$. При $t_1 = t_2$ корреляционная функция связи будет характеризовать степень линейной зависимости сечений случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, соответствующих одному и тому же значению аргумента.

Корреляционную функцию каждого случайного процесса, характеризующую степень связи между различными сечениями одного и того же процесса, иногда называют автокорреляционной функцией.

Корреляционная функция связи $R_{xy}(t_1, t_2)$ не является симметричной относительно своих аргументов, однако обладает тем свойством, что не изменяется при одновременной перестановке аргументов и индексов.

Действительно, из (1.3.1) видно, что

$$R_{xy}(t_1, t_2) = R_{yx}(t_2, t_1). \quad (1.3.2)$$

Легко показать, что корреляционная функция связи не изменится при прибавлении к каждому из случайных процессов неслучайных слагаемых, поэтому ее можно вычислять, пользуясь центрированными случайными процессами.

При фиксированных значениях аргументов t_1 и t_2 функция $R_{xy}(t_1, t_2)$ есть момент связи между двумя случайными величинами $X(t_1)$ и $Y(t_2)$, поэтому

$$|R_{xy}(t_1, t_2)| \leq \sigma_x(t_1) \sigma_y(t_2). \quad (1.3.3)$$

Вместо корреляционной функции связи рассматривают безразмерную величину, называемую нормированной корреляционной функцией связи

$$r_{xy}(t_1, t_2) = \frac{R_{xy}(t_1, t_2)}{\sigma_x(t_1) \sigma(t_2)}. \quad (1.3.4)$$

Согласно (1.3.3),

$$|r_{xy}(t_1, t_2)| \leq 1. \quad (1.3.5)$$

Нормированная корреляционная функция связи $r_{xy}(t_1, t_2)$ при фиксированных значениях t_1 и t_2 представляет собой коэффициент корреляции случайных величин $X(t_1)$, $Y(t_2)$.

Если корреляционная функция связи тождественно равна нулю, то случайные процессы называются несвязанными, или некоррелированными.

Так же как и для случайных величин, условие несвязанности является необходимым, но недостаточным для независимости случайных процессов. Оно характеризует только отсутствие линейной зависимости между ними.

Если имеется система n случайных процессов $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$, то для характеристики этой системы в корреляционной теории нужно задать n математических ожиданий $m_{x_i}(t)$, n корреляционных функций $R_{x_i}(t_1, t_2)$ и $n(n-1)/2$ корреляционных функций связи, которые достаточно задать только для пар индексов x_i, x_j при $i < j$, так как

$$R_{x_i x_j}(t_1, t_2) = R_{x_j x_i}(t_2, t_1). \quad (1.3.6)$$

Корреляционные функции и корреляционные функции связи удобно записывать в виде корреляционной матрицы $\|R_{ij}(t_1, t_2)\|$, каждый элемент которой представляет собой соответственно автокорреляционную или взаимную корреляционную функцию аргументов t_1 и t_2

$$\|R_{ij}(t_1, t_2)\| = \begin{pmatrix} R_{11}(t_1, t_2) & R_{12}(t_1, t_2) & \dots & R_{1n}(t_1, t_2) \\ & R_{22}(t_1, t_2) & \dots & R_{2n}(t_1, t_2) \\ & & \dots & \\ & & & R_{nn}(t_1, t_2) \end{pmatrix}.$$

Пусть случайный процесс $Z(t)$ представляет собой сумму двух других случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$

$$Z(t) = X(t) + Y(t). \quad (1.3.7)$$

Найдем математическое ожидание и корреляционную функцию случайного процесса $Z(t)$.

При каждом фиксированном значении t , согласно свойству математического ожидания суммы случайных величин, получаем

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y(t). \quad (1.3.8)$$

т. е. двумерная плотность распределения зависит не от двух аргументов t_1, t_2 , а только от одного аргумента — их разности $\tau = t_2 - t_1$.

Отсюда, для стационарного случайного процесса, согласно (1.4.2), получаем

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x) dx = m_x = \text{const}, \quad (1.4.4)$$

т. е. математическое ожидание стационарного случайного процесса не зависит от аргумента t и является постоянной величиной.

Согласно (1.4.3) и (1.4.4),

$$R_x(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x_1 - m_x)(x_2 - m_x) f_2(x_1, x_2; \tau) dx_1 dx_2 = R_x(\tau). \quad (1.4.5)$$

Таким образом, корреляционная функция стационарного случайного процесса является функцией только одного аргумента $\tau = t_2 - t_1$.

Условия (1.4.4) и (1.4.5) выполняются для любого стационарного процесса, т. е. являются необходимыми условиями его стационарности. Однако они не являются достаточными для стационарности процесса, т. е. их выполнение не гарантирует выполнение условий (1.4.1) при $n \geq 3$.

В корреляционной теории случайных функций используются не многомерные законы распределения, а только первые два момента распределения, при этом выполнение условий (1.4.4) и (1.4.5) является весьма существенным и приводит к значительному упрощению описания случайных процессов и решения многих задач.

Поэтому в корреляционной теории выделяют класс случайных процессов, для которых выполняются условия (1.4.4) и (1.4.5), т. е. для которых математическое ожидание есть постоянная величина, а корреляционная функция является функцией только одного аргумента. Такие процессы называют стационарными в широком смысле.

В дальнейшем, занимаясь только корреляционной теорией случайных функций, говоря о стационарности, будем подразумевать стационарность в широком смысле.

Для нормальных случайных процессов стационарность в широком смысле эквивалентна строгой стационарности, так как все n -мерные плотности распределения в этом случае полностью определяются математическим ожиданием и корреляционной функцией случайного процесса. А, следовательно, независимость

последних от выбора начала отсчета аргумента t приводит к инвариантности относительно такого сдвига всех n -мерных плотностей распределения для нормального случайного процесса.

Из свойства симметричности корреляционной функции (1.2.12) следует

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau), \quad (1.4.6)$$

т. е. корреляционная функция стационарного случайного процесса является четной. Исходя из этого, можно также сказать, что его корреляционная функция зависит только от абсолютной величины разности $t_2 - t_1$, т. е. считать $\tau = |t_2 - t_1|$.

Для стационарного случайного процесса $X(t)$ дисперсия

$$D_x(t) = R_x(t, t) = R_x(0), \quad (1.4.7)$$

т. е. дисперсия также является постоянной величиной, не зависящей от аргумента t . Она получается из корреляционной функции $R_x(\tau)$ при $\tau = 0$.

Нормированная корреляционная функция стационарного процесса, согласно (1.2.13), определится в виде

$$r_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{D_x} = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)}. \quad (1.4.8)$$

В частности,

$$r_x(0) = \frac{R_x(0)}{R_x(0)} = 1. \quad (1.4.9)$$

Рассмотрим систему случайных процессов $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$. Эта система называется стационарной в широком смысле, если каждый из случайных процессов $X_i(t)$ является стационарным и, кроме того, корреляционные функции связи $R_{x_i x_j}(t_1, t_2)$ являются функциями только одного аргумента $\tau = t_2 - t_1$, т. е.

$$R_{x_i x_j}(t_1, t_2) = R_{x_i x_j}(\tau). \quad (1.4.10)$$

Такую систему называют также стационарной и стационарно связанной.

Для такой системы из свойства корреляционных функций связи (1.2.16) получаем

$$R_{x_i x_j}(\tau) = R_{x_j x_i}(-\tau). \quad (1.4.11)$$

Это показывает, что взаимную корреляцию двух случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ можно описать одной корреляционной функцией связи $R_{x_i x_j}(\tau)$, заданной как при положительных, так и при отрицательных значениях аргумента. При этом функции $R_{x_i x_j}(\tau)$ в общем случае не являются четными функциями.

Из изложенного видно, что стационарность случайной функции значительно упрощает ее статистическое описание.

Это позволило разработать достаточно эффективные математические методы решения в рамках корреляционной теории вопросов преобразования стационарных случайных функций, их прогнозирования и др.

Поэтому всякую случайную функцию, с которой имеют дело на практике, прежде всего рассматривают с точки зрения возможности считать ее стационарной. Стационарности в идеальном смысле в природе не бывает — это математическая абстракция, но если хорошо понимать суть стационарности, то из физических предпосылок и статистических доводов можно прийти к важным практическим результатам, введя для нестационарного процесса стационарное приближение к нему.

Для процессов, имеющих место в атмосфере и гидросфере, предположение об их стационарности достаточно хорошо оправдывается для сравнительно небольших интервалов времени или расстояний. С увеличением интервалов изменения аргумента наблюдается нарушение стационарности.

При исследовании статистической структуры процессов атмосферы и гидросферы чаще всего встречаются стационарные случайные процессы, корреляционные функции которых аппроксимируются функциями следующих типов:

- 1) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \alpha > 0;$
- 2) $R(\tau) = \sigma^2 (1 + \alpha|\tau|) e^{-\alpha|\tau|}, \alpha > 0;$
- 3) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}, \alpha > 0;$
- 4) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau, \alpha > 0, \beta > 0;$
- 5) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2} \cos \beta\tau, \alpha > 0, \beta > 0;$
- 6) $R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \alpha > 0, \beta > 0;$
- 7) $R(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0} \right) & \text{при } |\tau| \leq \tau_0 \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_0. \end{cases}$

Для всех приведенных случаев корреляционная функция стремится к нулю при стремлении τ к бесконечности. Это свойство обычно выполняется для всех практически встречающихся в гидрометеорологии случайных процессов.

Исключение составляет тот случай, когда в структуре случайного процесса в качестве слагаемого имеется постоянная случайная величина. В этом случае корреляционная функция будет содержать постоянное слагаемое, равное дисперсии этой случайной величины. При $\tau \rightarrow \infty$ функции $R(\tau)$ будет стремиться к этой дисперсии.

Возникает вопрос, всякая ли четная функция может являться корреляционной функцией стационарного случайного процесса.

Функция $f(t)$, для которой справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j f(t_i - t_j) \geq 0 \quad (1.4.12)$$

для любых вещественных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и любых значений аргумента t_1, t_2, \dots, t_n называется положительно определенной.

Рассмотрим сумму такого вида для корреляционной функции

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j R_x(t_i - t_j) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M[\hat{X}(t_i) \hat{X}(t_j)] \times \\ &\times \alpha_i \alpha_j = M \left\{ \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{X}(t_i) \right]^2 \right\} \geq 0. \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

Сумма (1.4.13) неотрицательна как математическое ожидание неотрицательной величины.

Следовательно, корреляционная функция является положительно определенной. Отсюда видно, что корреляционной функцией стационарного случайного процесса может быть только положительно определенная функция.

Справедливым является и обратное утверждение, что всякая положительно определенная функция является корреляционной функцией для некоторого стационарного случайного процесса.

Можно показать, что все рассмотренные в 1) — 7) функции являются положительно определенными.

Максимальное значение автокорреляционной функции, равное дисперсии случайного процесса, достигается при $\tau = 0$.

Для корреляционной функции связи двух случайных процессов это не всегда имеет место. Действительно, влияние одного процесса на другой может происходить с некоторым запаздыванием. Например, нагревание стратосферы за счет солнечного излучения происходит лишь спустя некоторое время τ . В этом случае значение момента связи между сечениями этих процессов при интервале τ между ними будет больше, чем между одновременными сечениями этих процессов. Наличие такого запаздывания может служить и причиной несимметричности корреляционной функции связи относительно аргумента τ , т. е. того, что $R_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau)$.

В качестве характеристики стационарного случайного процесса наряду с корреляционной функцией рассматривают структурную функцию, которую определяют как математическое ожидание квадрата разности сечений случайного процесса, соответствующих значениям аргумента t и $t + \tau$

$$B_x(\tau) = M \{ [X(t + \tau) - X(t)]^2 \}. \quad (1.4.14)$$

Из определения видно, что структурная функция неотрицательна, $B_x(\tau) \geq 0$.

Структурную функцию можно выразить через корреляционную функцию

$$\begin{aligned} B_x(\tau) &= M \{[(X(t+\tau) - m_x) - (X(t) - m_x)]^2\} = \\ &= M \{[X(t+\tau) - m_x]^2\} + M \{[X(t) - m_x]^2\} - \\ &- 2M \{[X(t+\tau) - m_x][X(t) - m_x]\} = 2[R_x(0) - R_x(\tau)]. \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Из (1.4.15) и свойств корреляционной функции получаем

$$B_x(0) = 0, \quad (1.4.16)$$

$$B_x(-\tau) = B_x(\tau), \quad (1.4.17)$$

т. е. структурная функция стационарного случайного процесса является четной.

Если для случайного процесса выполняется условие

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0, \quad (1.4.18)$$

то из (1.4.15) получаем

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau) = 2R_x(0) = 2\sigma_x^2.$$

Обозначив $\lim_{\tau \rightarrow \infty} B_x(\tau) = B_x(\infty)$, при выполнении (1.4.18) запишем (1.4.15) в виде

$$B_x(\tau) = B_x(\infty) - 2R_x(\tau), \quad (1.4.19)$$

откуда можно выразить корреляционную функцию через структурную

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} [B_x(\infty) - B_x(\tau)]. \quad (1.4.20)$$

Таким образом, при выполнении условий (1.5.18), зная структурную функцию на бесконечном интервале изменения аргумента, можно определить корреляционную функцию.

Практически мы никогда не имеем записи реализаций случайного процесса на бесконечном интервале, однако в ряде случаев структурная функция довольно быстро достигает значения, которое при дальнейшем увеличении интервала τ меняется мало.

Это значение, которое иногда называют насыщающим значением структурной функции, и принимают за $B(\infty)$. Между структурной и корреляционной функциями имеет место соотношение

$$R_x(\tau) + \frac{1}{2} B_x(\tau) = \sigma_x^2. \quad (1.4.21)$$

Пример 1. Случайный процесс имеет вид

$$X(t) = A \sin(\omega t + \varphi),$$

где амплитуда A и частота ω — неслучайные положительные величины, а фаза φ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$, т. е. имеющая плотность распределения

$$f(\varphi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & \text{при } \varphi \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{при } \varphi \notin [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Найдем характеристики этого случайного процесса. По формуле (1.2.4) находим математическое ожидание

$$\begin{aligned} m_x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x; t) dx = \int_0^{2\pi} A \sin(\omega t + \varphi) \frac{1}{2\pi} d\varphi = \\ &= -\frac{A}{2\pi} \cos(\omega t + \varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Определим корреляционную функцию.

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= M[A \sin(\omega t_1 + \varphi) A \sin(\omega t_2 + \varphi)] = \\ &= A^2 M[\sin \omega t_1 \cos \varphi + \cos \omega t_1 \sin \varphi] (\sin \omega t_2 \cos \varphi + \cos \omega t_2 \sin \varphi) = \\ &= A^2 \{ \sin \omega t_1 \sin \omega t_2 M[\cos^2 \varphi] + \cos \omega t_1 \cos \omega t_2 M[\sin^2 \varphi] + \\ &\quad + (\sin \omega t_1 \cos \omega t_2 + \cos \omega t_1 \sin \omega t_2) M[\sin \varphi \cos \varphi] \}; \end{aligned}$$

$$M[\cos^2 \varphi] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos^2 \varphi f(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2};$$

$$M[\sin^2 \varphi] = \frac{1}{2}, \quad M[\sin \varphi \cos \varphi] = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi = 0.$$

Таким образом получаем

$$\begin{aligned} R_x(t_1, t_2) &= \frac{A^2}{2} (\sin \omega t_1 \sin \omega t_2 + \cos \omega t_1 \cos \omega t_2) = \\ &= \frac{A^2}{2} \cos \omega(t_2 - t_1) = \frac{A^2}{2} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Проведенный анализ показывает, что математическое ожидание рассмотренного случайного процесса $X(t)$ является постоянной величиной $m_x = 0$, а корреляционная функция является функцией одной переменной τ , т. е. данный процесс является стационарным в широком смысле.

Пример 2. Рассмотрим тот же случайный процесс, когда случайная фаза φ распределена на отрезке $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ с плотностью распределения $f(\varphi) = \cos \varphi$. Математическое ожидание $m_x(t)$ определится в виде

$$\begin{aligned} m_x(t) &= A \int_0^{\pi/2} \sin(\omega t + \varphi) \cos \varphi d\varphi = \\ &= A \left(\sin \omega t \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi d\varphi + \cos \omega t \int_0^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi \right) = \\ &= \frac{\pi A}{4} \sin \omega t + \frac{A}{2} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что математическое ожидание $m_x(t)$ не является постоянной величиной и, следовательно, данный случайный процесс не является стационарным.

1.5. Периодически нестационарные случайные процессы

Многим гидрометеорологическим процессам свойственна ритмика годовой и суточной цикличности.

На рис. 1.2 в качестве примера приведены временные ряды среднемесячных значений температуры воды ($T^{\circ}\text{C}$) в Финском

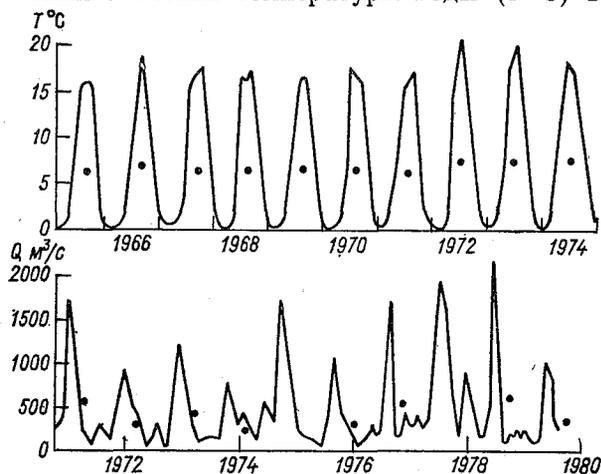


Рис. 1.2

заливе Балтийского моря и расходов воды Q р. Даугавы. Из приведенных примеров видно, что из года в год происходит повышение температуры воды от весны к лету и последующее понижение к зиме; увеличение расхода воды в реке во время весенних половодий и осенних паводков. Однако наряду с повторяемостью годовых колебаний имеет место и стохастичность (изменчивость) параметров этих колебаний. Математической моделью для описания закономерностей таких колебаний служит периодически нестационарный случайный процесс (ПНСП).

Случайный процесс называют периодически нестационарным, если его вероятностные характеристики инвариантны относительно сдвигов на положительное число T . Процесс будет периодически нестационарным в узком смысле, если инвариантны его конечномерные распределения

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1 + T, \dots, t_n + T) = F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) \quad (1.5.1)$$

и периодически нестационарным в широком смысле, если инвариантно математическое ожидание

$$m(t + T) = m(t), \tag{1.5.2}$$

дисперсия

$$D(t + T) = D(t), \tag{1.5.3}$$

корреляционная функция

$$R(t_1 + T, t_2 + T) = R(t_1, t_2). \tag{1.5.4}$$

Случайный процесс, периодически нестационарный в широком смысле, называют периодически коррелированным случай-

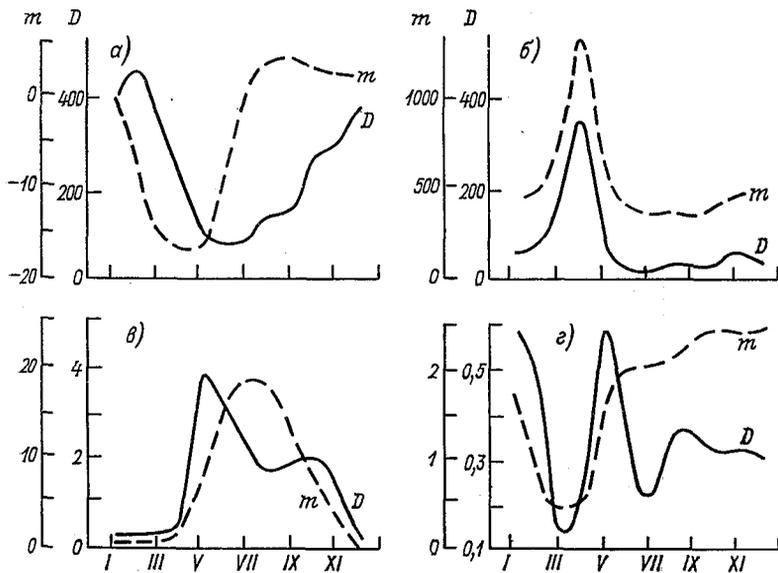


Рис. 1.3

ным процессом (ПКСП). Для ПКСП свойство (1.5.4) для переменных $t = (t_1 + t_2)/2$ и $\tau = t_1 - t_2$ записывают в виде

$$R(t + T, \tau) = R(t, \tau). \tag{1.5.5}$$

Вследствие периодичности функций $m(t)$ и $R(t, \tau)$ их можно разложить на периоде нестационарности (или периоде коррели-

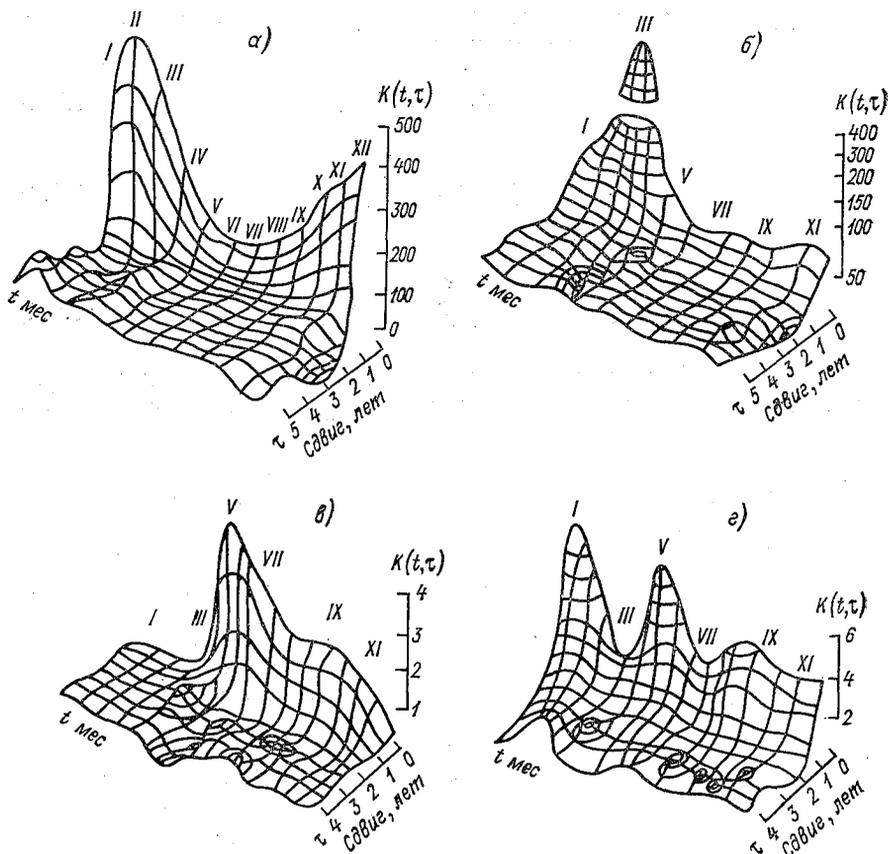


Рис. 1.4

рованности) в ряды Фурье вида

$$m(t) = \sum_{k=0}^{\infty} m_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right); \quad (1.5.6)$$

$$D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right); \quad (1.5.7)$$

$$R(t, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k(\tau) \exp\left(i \frac{2\pi k}{T} t\right), \quad (1.5.8)$$

где m_k , D_k , $R_k(\tau)$ — коэффициенты, которые можно рассматривать как вероятностные характеристики ПКСП, наряду с функциями $m(t)$, $D(t)$ и $R(t, \tau)$.

На рис. 1.3 в качестве примера приведены графики функций $m(t)$ и $D(t)$ для колебаний уровня (а); речного стока (б); температуры (в) и солености (г) морской воды.

Математическое ожидание $m(t)$ представляет регулярную составляющую изменений случайного процесса $X(t)$ и позволяет найти средний повторяющийся образ сезонного или суточного хода. В гидрометеорологии функцию $m(t)$ называют нормой.

Из рис. 1.3 видно, что соленость вод Финского залива имеет минимум в марте — апреле. Такое распределение солености вполне объяснимо, так как соленость залива зависит от стока р. Невы и поступления талых вод. Температура воды в курортной зоне Ленинграда достигает 18°C в июле — августе. Дисперсия $D(t)$ характеризует изменчивость процесса $X(t)$ относительно функции $m(t)$.

На рис. 1.4 приведены корреляционные поверхности сезонных и межгодовых изменений: колебаний уровня (а); речного стока (б); температуры (в) и солености (г) морской воды. Из рисунка видно, что наибольшая изменчивость температуры воды наблюдается в переходные сезоны весной и осенью, а наименьшая — зимой. По существу речь идет о межгодовой изменчивости среднемесячных значений гидрометеорологических элементов по отношению к среднегодовой норме $m(t)$. Функция $R(t, \tau)$ характеризует взаимосвязь значений гидрометэлемента в различные месяцы года или в аналогичные месяцы разных лет.

По определению

$$D(t) = R(t, 0) \quad (1.5.9)$$

и, кроме того,

$$R(t, \tau) \neq R(t, -\tau), \quad (1.5.10)$$

т. е. корреляционная функция несимметрична, но обладает свойством

$$R(t - \tau, \tau) = R(t, -\tau). \quad (1.5.11)$$

1.6. Эргодичность случайных процессов

До сих пор мы определяли характеристики случайного процесса — математическое ожидание и корреляционную функцию — путем осреднения по множеству всех реализаций.

Однако возможен и другой способ осреднения, когда мы имеем одну реализацию большой продолжительности. Если связь между различными сечениями случайного процесса убывает быстро, то те части реализации, которые можно считать независимыми между собой, рассматривают как совокупность реализаций.

Этот способ, естественно, может рассматриваться только для стационарного процесса, так как для процесса нестационарного

статистические свойства меняются с изменением аргумента, и отдельные куски реализации нельзя считать различными реализациями, отвечающими одинаковым условиям опыта.

Для стационарного случайного процесса математическое ожидание (среднее значение) не зависит от аргумента, поэтому можно попытаться, не разделяя реализацию на отдельные части, определить его как среднее арифметическое из всех значений данной реализации.

В этом случае математическое ожидание определится по формуле

$$m_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt, \quad (1.6.1)$$

где T — интервал осреднения.

Аналогично корреляционную функцию $R_x(\tau)$ определим как среднее арифметическое произведения

$$[x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x]$$

из всех значений данной реализации по формуле

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T - \tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - m_x][x(t + \tau) - m_x] dt. \quad (1.6.2)$$

Возникает вопрос, будут ли эти значения близки к соответствующим значениям, полученным осреднением по совокупности. Оказывается, что это будет иметь место не для всех стационарных процессов.

Говорят, что случайный процесс, для которого статистические характеристики, полученные осреднением по одной реализации, при увеличении интервала осреднения T с вероятностью сколь угодно близкой к единице могут быть приближены к соответствующим характеристикам, полученным осреднением по всему множеству реализаций, обладает эргодическим свойством.

В этом определении использовано понятие сходимости по вероятности. Говорят, что последовательность случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n \dots$ сходится по вероятности к случайной величине X , если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность неравенства $|X_n - X| < \varepsilon$ стремится к единице при n , стремящемся к бесконечности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1.$$

Характеристики m_x и $R_x(\tau)$, определенные по формулам (1.6.1) и (1.6.2), представляют собой случайные величины, зависящие от интервала осреднения T .

Если при безграничном увеличении интервала осреднения T последовательности этих случайных величин сходятся по вероятности соответственно к значениям математического ожида-

ния и корреляционной функции, полученным осреднением по всему множеству реализаций, то случайный процесс $X(t)$ обладает эргодическим свойством. Эргодическим свойством обладают такие случайные процессы, каждая реализация которых имеет одни и те же статистические свойства.

Если отдельные реализации имеют свои специфические особенности, например, представляют собой колебания около различных средних, то среднее значение, полученное по одной реализации, может значительно отличаться от среднего по совокупности всех реализаций.

Математическим условием эргодичности стационарного случайного процесса по отношению к математическому ожиданию является стремление корреляционной функции $R(\tau)$ к нулю при стремлении τ к бесконечности.

Это условие обычно выполняется для всех встречающихся на практике случайных процессов. Однако оно не будет выполняться, если в состав случайного процесса в качестве постоянного слагаемого входит некоторая случайная величина.

Действительно, пусть случайный процесс $Z(t)$ представляет собой сумму стационарного случайного процесса $X(t)$ и не связанной с ним случайной величины Y с нулевым математическим ожиданием.

Тогда, согласно (1.3.17), имеет место равенство

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + D_y,$$

и $R_z(\tau)$, даже при выполнении условия $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0$, будет стремиться при $\tau \rightarrow \infty$ не к нулю, а к некоторому положительному числу D_y .

В этом случае, согласно (1.3.16), имеем

$$m_z(t) = m_x(t) + m_y = m_x(t). \quad (1.6.3)$$

Каждая реализация $z_i(t)$ будет содержать при всех значениях аргумента t постоянное слагаемое, равное значению y_i случайной величины Y , т. е.

$$z_i(t) = x_i(t) + y_i, \quad (1.6.4)$$

поэтому среднее значение, полученное осреднением по этой реализации и равное

$$m_z = m_x + y_i, \quad (1.6.5)$$

будет отличаться от истинного значения m_z на величину y_i даже при совпадении значений m_x в обоих случаях.

При определении характеристик случайных процессов, обладающих эргодическим свойством, по одной реализации весьма важным является длительность интервала осреднения. Так как характеристики, полученные осреднением по одной реализации,

достаточно близко совпадают с истинными их статистическими характеристиками только в пределе при бесконечном увеличении интервала осреднения, то при наличии наблюдений только на малом интервале изменения аргумента можно получить искомые характеристики с недопустимо большими ошибками.

Показано, что для дисперсии разностей между истинными значениями математического ожидания случайного процесса $X(t)$ указанного типа и значением, полученным осреднением по одной реализации, при достаточно большом T справедлива асимптотическая формула

$$D \approx 2 \frac{T_1}{T} R_x(0), \quad (1.6.6)$$

где T — интервал осреднения, а T_1 — величина, называемая временем корреляции, определяется по формуле

$$T_1 = \frac{1}{R_x(0)} \int_0^{\infty} R_x(\tau) d\tau. \quad (1.6.7)$$

Таким образом, для надежного определения искомых характеристик нужно брать интервал осреднения во много раз больше, чем время корреляции T_1 .

Условия эргодичности по отношению к корреляционной функции формулируются более сложно. Проверку их выполнимости на практике, как правило, осуществить не удастся, поэтому суждение об эргодичности выносят обычно, исходя из физической сущности процесса.

Свойство эргодичности имеет большое практическое значение, так как при его выполнении для определения статистических характеристик не требуется большого числа реализаций. При изучении статистической структуры метеорологических элементов далеко не всегда удается осуществить многократное повторение эксперимента в одинаковых условиях. Еще сложнее это сделать в гидрологии. Например, данные о годовом стоке реки могут представлять собой только одну реализацию.

Если имеется несколько реализаций одинаковой продолжительности, отвечающих одинаковым условиям опыта, то, пользуясь эргодическим свойством, можно получить статистические характеристики осреднением по каждой реализации, а затем взять в качестве искомых значений средние арифметические из них. Если продолжительность реализаций различна, то осреднение результатов по ним нужно производить с учетом веса каждой реализации.

Пример. Докажем эргодичность стационарного случайного процесса, рассмотренного в примере 1 п. 1.4. Для этого достаточно показать, что математическое ожидание \hat{m}_x и корреляционная функция $\hat{R}_x(\tau)$, определенные

осреднением по любой реализации на промежутке $[0, T]$, будут сходиться при $T \rightarrow \infty$ к значениям m_x и $R_x(\tau)$, полученным при решении примера 1 п. 1.4.

$$\hat{m}_x = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T A \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{A}{T\omega} [\cos \varphi - \cos(\omega T + \varphi)].$$

При $T \rightarrow \infty$ это выражение действительно стремится к $m_x = 0$.

$$\begin{aligned} \hat{R}_x(\tau) &= \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} x(t+\tau) X(t) dt = \frac{A^2}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \sin[\omega(t+\tau) + \varphi] \times \\ &\times \sin(\omega t + \varphi) dt = \frac{A^2}{T-\tau} \left[\cos \omega \tau \int_0^{T-\tau} \sin^2(\omega t + \varphi) dt + \right. \\ &\left. + \sin \omega \tau \int_0^{T-\tau} \sin(\omega t + \varphi) \cos(\omega t + \varphi) dt \right] = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau + \\ &+ \frac{A^2}{T-\tau} \left\{ \frac{1}{4} \sin 2\varphi \cos \omega \tau - \frac{1}{4} \sin 2[\omega(T-\tau) + \varphi] \cos \omega \tau + \right. \\ &\left. + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \cos \omega \tau + \frac{1}{2} \sin \omega \tau [\sin^2(\omega(T-\tau) + \varphi) - \sin^2 \varphi] \right\}. \end{aligned}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках, есть величина ограниченная, следовательно, при $T \rightarrow \infty$ все второе слагаемое будет стремиться к нулю.

Отсюда получаем

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \hat{R}_x(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega \tau = R_x(\tau).$$

Эргодичность не является исключительным свойством стационарных процессов. Периодически нестационарные случайные процессы обладают свойством эргодичности, если их вероятностные характеристики, вычисленные по одной реализации и их ансамблю, совпадают. Для периодически коррелированных случайных процессов (ПКСП) можно ввести понятие среднего значения на периоде коррелированности

$$m_N^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(t + kT)$$

и коррелограммы

$$R_N^*(t, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overset{\circ}{X}(t + kT) \overset{\circ}{X}(t + \tau + kT).$$

1.7. Производная и интеграл от случайного процесса

Определим вначале понятие предела случайного процесса $X(t)$ при стремлении аргумента t к некоторому значению t_0 . Если $f(t)$ — неслучайная функция, то, как известно, число A на-

зывается пределом функции $f(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех t , для которых $|t - t_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(t) - A| < \varepsilon$. Это означает, что для всех t , достаточно близких к t_0 , соответствующие значения $f(t)$ будут сколь угодно близки к A .

Для случайной функции пределом будет служить некоторая случайная величина.

Будем считать, что случайная величина Y является пределом функции $X(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если предел математического ожидания квадрата их разности стремится к нулю

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M \{ [X(t) - Y]^2 \} = 0. \quad (1.7.1)$$

Последний предел понимается уже в обычном смысле, так как математическое ожидание есть неслучайная функция.

Таким образом, будем называть случайную величину Y пределом случайной функции $X(t)$ при t , стремящемся к t_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех значений t , для которых $|t - t_0| < \delta$ будет выполняться неравенство $M \{ [X(t) - Y]^2 \} < \varepsilon$. Определенный таким образом предел называют пределом в среднем квадратическом.

Часто для отличия предела случайной функции, который понимается как предел в среднем квадратическом, от обычного предела неслучайной функции, его обозначают $\text{l.i.m.}_{t \rightarrow t_0} X(t)$. В дальнейшем мы будем применять обычное обозначение \lim , понимая его в указанном смысле.

Случайную функцию $X(t)$ будем называть непрерывной в точке t_0 , если ее пределом при $t \rightarrow t_0$ является сечение $X(t_0)$, $\lim_{t \rightarrow t_0} X(t) = X(t_0)$, т. е. если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} M \{ [X(t) - X(t_0)]^2 \} = 0. \quad (1.7.2)$$

Производная от случайного процесса

Будем говорить, что случайный процесс $X(t)$ дифференцируем в точке t_0 , если существует такая случайная величина $Y(t_0)$, что

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} = Y(t_0). \quad (1.7.3)$$

В соответствии с определением предела случайной функции это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\Delta t| < \delta$ будет выполняться неравенство

$$M \left\{ \left[\frac{X(t_0 + \Delta t) - X(t_0)}{\Delta t} - Y(t_0) \right]^2 \right\} < \varepsilon. \quad (1.7.4)$$

Случайная величина $Y(t_0)$ называется производной случайного процесса $X(t)$ в точке t_0 и обозначается

$$Y(t_0) = \left. \frac{dX(t)}{dt} \right|_{t=t_0}. \tag{1.7.5}$$

Если случайный процесс дифференцируем при всех значениях t из некоторого интервала, то производная $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ также является случайным процессом аргумента t .

Рассмотренное определение производной случайной функции аналогично определению производной для неслучайной функции, с той лишь разницей, что предел понимается как предел в среднем квадратическом.

Пусть случайная функция $X(t)$ имеет математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционную функцию $R_x(t_1, t_2)$. Определим математическое ожидание $m_y(t)$ и корреляционную функцию $R_y(t_1, t_2)$ производной $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

$$\begin{aligned} m_y(t) &= M[Y(t)] = M\left[\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right] = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} M\left[\frac{X(t + \Delta t) - X(t)}{\Delta t}\right] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m_x(t + \Delta t) - m_x(t)}{\Delta t} = \\ &= \frac{dm_x(t)}{dt}. \end{aligned} \tag{1.7.6}$$

Таким образом, математическое ожидание производной от случайной функции равно производной от ее математического ожидания.

Определим корреляционную функцию производной $R_y(t_1, t_2)$

$$R_y(t_1, t_2) = M[\overset{\circ}{Y}(t_1)\overset{\circ}{Y}(t_2)]. \tag{1.7.7}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Y}(t) &= Y(t) - m_y(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{[X(t + \Delta t) - m_x(t + \Delta t)] - [X(t) - m_x(t)]}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overset{\circ}{X}(t + \Delta t) - \overset{\circ}{X}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overset{\circ}{X}(t)}{dt}. \end{aligned} \tag{1.7.8}$$

Подставляя (1.7.8) в (1.7.7), получим

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= M\left\{\lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{\overset{\circ}{X}(t_1 + \Delta t_1) - \overset{\circ}{X}(t_1)}{\Delta t_1} \lim_{\Delta t_2 \rightarrow 0} \frac{\overset{\circ}{X}(t_2 + \Delta t_2) - \overset{\circ}{X}(t_2)}{\Delta t_2}\right\} = \\ &= \lim_{\substack{\Delta t_1 \rightarrow 0 \\ \Delta t_2 \rightarrow 0}} \frac{1}{\Delta t_1 \Delta t_2} \{[R_x(t_1 + \Delta t_1, t_2 + \Delta t_2) - R_x(t_1 + \Delta t_1, t_2)] - \\ &- [R_x(t_1, t_2 + \Delta t_2) - R_x(t_1, t_2)]\} = \lim_{\Delta t_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t_1} \left[\frac{\partial R_x(t_1 + \Delta t_1, t_2)}{\partial t_2} - \right. \\ &\left. - \frac{\partial R_x(t_1, t_2)}{\partial t_2} \right] = \frac{\partial^2 R_x(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}. \end{aligned} \tag{1.7.9}$$

Таким образом, корреляционная функция производной от случайной функции равна второй смешанной производной от корреляционной функции самой случайной функции.

Рассмотрим операцию дифференцирования для стационарного случайного процесса $X(t)$. В этом случае математическое ожидание m_x есть постоянная, следовательно

$$\frac{dm_x}{dt} = 0, \quad (1.7.10)$$

т. е. математическое ожидание производной от стационарного случайного процесса равно нулю.

Корреляционная функция есть функция одного аргумента, где $\tau = t_2 - t_1$, отсюда

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2 R_x(\tau)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial}{\partial t_2} \left[\frac{\partial R_x(\tau)}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t_1} \right] = \\ &= - \frac{\partial}{\partial t_2} \left[\frac{dR_x(\tau)}{d\tau} \right] = - \frac{d^2 R_x(\tau)}{d\tau^2}, \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

т. е. корреляционная функция производной от стационарного случайного процесса равна взятой с обратным знаком производной второго порядка от корреляционной функции самого случайного процесса как функции одного аргумента τ .

Отсюда видно, что корреляционная функция производной от стационарного случайного процесса также зависит только от одного аргумента τ , т. е. производная от стационарной случайной функции также является стационарной $R_y(t_1, t_2) = R_y(\tau)$.

Мы определили характеристики производной от случайной функции в предположении ее дифференцируемости.

Можно показать, что необходимым и достаточным условием дифференцируемости случайной функции является существование производной ее математического ожидания и второй смешанной частной производной ее корреляционной функции при $t_1 = t_2$ (существование производной второго порядка от корреляционной функции при $\tau = 0$ для стационарной случайной функции). Из этого следует, что не всякая случайная функция является дифференцируемой. Например, недифференцируемой является случайная функция, имеющая корреляционную функцию вида

$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|}, \quad \alpha > 0. \quad (1.7.12)$$

Действительно,

$$R'_x(\tau) = \begin{cases} -\sigma^2 \alpha e^{-\alpha \tau} & \text{при } \tau > 0, \\ \sigma^2 \alpha e^{\alpha \tau} & \text{при } \tau < 0. \end{cases} \quad (1.7.13)$$

Отсюда видно, что в точке $\tau = 0$ производная $R'_x(\tau)$ терпит разрыв, так как производная в этой точке справа равна $-\sigma^2 \alpha$,

а производная слева равна $\sigma^2\alpha$. Следовательно, второй производной $R_x''(\tau)$ в точке $\tau = 0$ не существует.

Найдем характеристики производной от некоторых стационарных случайных процессов.

1. Пусть случайный процесс имеет корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2}, \quad \alpha > 0. \quad (1.7.14)$$

Корреляционная функция производной от этого случайного процесса равна

$$R_y(\tau) = 2\sigma^2\alpha(1 - 2\alpha\tau^2)e^{-\alpha\tau^2}. \quad (1.7.15)$$

При $\tau = 0$ получаем

$$R_y(0) = 2\sigma^2\alpha. \quad (1.7.16)$$

Отсюда видно, что случайный процесс $X(t)$ является дифференцируемым.

Дисперсия производной $Y(t)$ при этом зависит не только от дисперсии случайного процесса $X(t)$, но и от коэффициента α , характеризующего степень убывания корреляционной функции $R_x(\tau)$ при возрастании ее аргумента τ .

$$2. \quad R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.7.17)$$

В этом случае производная от корреляционной функции терпит разрыв при $\tau = 0$ и, следовательно, вторая производная не существует.

Таким образом, случайный процесс $X(t)$, имеющий корреляционную функцию такого вида, является недифференцируемым.

$$3. \quad R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha\tau^2} \cos \beta\tau, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.7.18)$$

$$R_x'(\tau) = -\sigma^2(2\alpha\tau \cos \beta\tau + \beta \sin \beta\tau)e^{-\alpha\tau^2}; \quad (1.7.19)$$

$$R_y = -R_x''(\tau) = \sigma^2[(\beta^2 + 2\alpha - 4\alpha^2\tau^2) \cos \beta\tau - 4\alpha\beta\tau \sin \beta\tau] e^{-\alpha\tau^2}.$$

При $\tau = 0$ получаем

$$R_y(0) = \sigma^2(2\alpha + \beta^2). \quad (1.7.20)$$

Случайный процесс $X(t)$ дифференцируем, дисперсия производной этого процесса зависит не только от дисперсии $X(t)$, но также и от коэффициентов α и β , определяющих вид корреляционной функции $R_x(\tau)$.

$$4. \quad R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad \alpha > 0, \beta > 0. \quad (1.7.21)$$

$$R_x(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 e^{-\alpha\tau} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau \right) & \text{при } \tau > 0, \\ \sigma^2 e^{\alpha\tau} \left(\cos \beta\tau - \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta\tau \right) & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$R_y(\tau) = -R_x''(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} (\beta \cos \beta\tau - \alpha \sin \beta\tau) e^{-\alpha\tau} & \text{при } \tau > 0, \\ \sigma^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} (\beta \cos \beta\tau + \alpha \sin \beta\tau) e^{\alpha\tau} & \text{при } \tau < 0. \end{cases} \quad (1.7.22)$$

$R_y(\tau)$ можно записать в виде одного выражения

$$R_y(\tau) = \sigma^2 \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\beta} e^{-\alpha|\tau|} (\beta \cos \beta\tau - \alpha \sin \beta|\tau|). \quad (1.7.23)$$

При $\tau = 0$

$$D_y = R_y(0) = \sigma^2(\alpha^2 + \beta^2). \quad (1.7.24)$$

Таким образом, случайный процесс $X(t)$, имеющий корреляционную функцию данного вида, является дифференцируемым.

$$5. \quad R_x(\tau) = \sigma^2(1 + \alpha|\tau|) e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0. \quad (1.7.25)$$

$$R_x(\tau) = \begin{cases} \sigma^2(1 + \alpha\tau) e^{-\alpha\tau} & \text{при } \tau > 0, \\ \sigma^2(1 - \alpha\tau) e^{\alpha\tau} & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$R_y(\tau) = R_x''(\tau) = \begin{cases} \sigma^2\alpha^2(1 - \alpha\tau) e^{-\alpha\tau} & \text{при } \tau > 0, \\ \sigma^2\alpha^2(1 + \alpha\tau) e^{\alpha\tau} & \text{при } \tau < 0. \end{cases} \quad (1.7.26)$$

$R_y(\tau)$ можно записать в виде одного выражения

$$R_y(\tau) = \sigma^2\alpha^2(1 - \alpha|\tau|) e^{-\alpha|\tau|}. \quad (1.7.27)$$

При $\tau = 0$ получаем

$$D_y = R_y(0) = \sigma^2\alpha^2.$$

Отсюда видно, что рассмотренный стационарный случайный процесс является дифференцируемым.

Определим еще корреляционную функцию связи $R_{xy}(t_1, t_2)$ между случайной функцией $X(t)$ и ее производной $Y(t) = \frac{dX(t)}{dt}$.

В соответствии с (1.3.1) получаем

$$\begin{aligned} R_{xy}(t_1, t_2) &= M \{ [X(t_1) - m_x(t_1)] [Y(t_2) - m_y(t_2)] \} = \\ &= M \left\{ [X(t_1) - m_x(t_1)] \frac{d}{dt_2} [X(t_2) - m_x(t_2)] \right\}. \end{aligned}$$

Меняя местами операции дифференцирования и нахождения математического ожидания и обозначая производную как частную производную по переменной t_2 , поскольку переменная t_1

рассматривается как постоянная величина, можем записать

$$\begin{aligned} R_{xy}(t_1, t_2) &= \frac{\partial}{\partial t_2} M \{ [X(t_1) - m_x(t_1)] [X(t_2) - m_x(t_2)] \} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t_2} R_x(t_1, t_2). \end{aligned} \quad (1.7.28)$$

В частности, для стационарной, случайной функции $X(t)$

$$\frac{\partial}{\partial t_2} R_x(t_1, t_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} R_x(t_2 - t_1) = \frac{dR_x(\tau)}{d\tau}, \quad (1.7.29)$$

где $\tau = t_2 - t_1$.

Отсюда видно, что корреляционная функция связи между стационарной случайной функцией и ее производной является функцией одного аргумента τ , т. е. стационарная случайная функция и ее производная являются стационарно связанными.

Корреляционная функция связи между стационарной случайной функцией и ее производной равна производной от корреляционной функции самой случайной функции.

Интеграл от случайного процесса

Пусть случайный процесс $X(t)$ задан на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n частей точками $a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b$

и составим сумму $\sum_{k=1}^n X(t_k) \Delta t_k$, где $X(t_k)$ есть сечения случайного процесса при $t = t_k$, а $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$.

По аналогии с определением интеграла от неслучайной функции определенным интегралом по промежутку $[a, b]$ случайной функции $X(t)$ будем называть предел в среднем квадратическом этой интегральной суммы при стремлении к нулю величины λ — наибольшей из разностей Δt_k и обозначать его

$$\int_a^b X(t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X(t_k) \Delta t_k. \quad (1.7.30)$$

Определенный интеграл от случайной функции как предел суммы случайных величин представляет собой случайную величину.

Если этот предел существует и не зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$ на части точками t_k , то случайная функция $X(t)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Можно показать, что для существования указанного интеграла достаточно существования интеграла от математического ожидания случайной функции $X(t)$ и двойного интеграла от ее корреляционной функции.

Рассмотрим теперь интеграл с переменным верхним пределом от случайной функции $X(t)$

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau. \quad (1.7.31)$$

Этот интеграл представляет собой новую случайную функцию $Y(t)$.

Определим математическое ожидание $m_y(t)$ и корреляционную функцию $R_y(t_1, t_2)$ случайной функции $Y(t)$, считая соответствующие характеристики $X(t)$ заданными:

$$m_y(t) = M \left[\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n X(\tau_k) \Delta\tau_k \right] = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n m_x(\tau_k) \Delta\tau_k. \quad (1.7.32)$$

Последняя сумма есть интегральная сумма для неслучайной функции $m_x(t)$, следовательно,

$$m_y(t) = \int_0^t m_x(\tau) d\tau. \quad (1.7.33)$$

Так как

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{Y}(t) &= Y(t) - m_y(t) = \int_0^t [\overset{\circ}{X}(\tau) + m_x(\tau)] d\tau - m_y(t) = \\ &= \int_0^t X(\tau) d\tau + m_y(t) - m_y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (1.7.34)$$

то

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= M [\overset{\circ}{Y}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2)] = M \left[\int_0^{t_1} \overset{\circ}{X}(\tau) d\tau \int_0^{t_2} \overset{\circ}{X}(\tau) d\tau \right] = \\ &= M \left[\int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \overset{\circ}{X}(\tau_1) \overset{\circ}{X}(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \right] = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} M [\overset{\circ}{X}(\tau_1) \overset{\circ}{X}(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 = \\ &= \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (1.7.35)$$

Таким образом, математическое ожидание интеграла от случайного процесса равно интегралу от его математического ожидания. Корреляционная функция интеграла от случайного процесса равна двойному интегралу от его корреляционной функции, взятому по обоим ее аргументам.

Если $X(t)$ является стационарной случайной функцией, то

$$m_x(t) = m_x = \text{const}, \quad R_x(t_1, t_2) = R_x(t_2 - t_1).$$

При этом

$$m_y(t) = \int_0^t m_x d\tau = m_x t, \quad (1.7.36)$$

т. е. математическое ожидание $m_y(t)$ зависит от t .

$$R_y(t_1, t_2) = \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (1.7.37)$$

Выражение, стоящее справа в (1.7.37), зависит от t_1 и t_2 , а не только от их разности. Следовательно, интеграл от стационарной случайной функции не обладает свойством стационарности.

Рассматривают также интеграл от случайного процесса $X(t)$ следующего вида:

$$Y(t) = \int_a^b \varphi(t, \tau) X(\tau) d\tau, \quad (1.7.38)$$

где $\varphi(t, \tau)$ — некоторая неслучайная функция.

Этот интеграл определяется так же, как предел в среднем квадратическом интегральной суммы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \varphi(t, \tau_k) X(\tau_k) \Delta\tau_k \quad (1.7.39)$$

и называется интегралом от случайной функции с весовой функцией $\varphi(t, \tau)$.

Совершенно так же, как и для интеграла с переменным верхним пределом, найдем $m_y(t)$ и $R_y(t_1, t_2)$.

$$m_y(t) = \int_a^b \varphi(t, \tau) m_x(\tau) d\tau, \quad (1.7.40)$$

$$R_y(t_1, t_2) = \int_a^b \int_a^b \varphi(t_1, \tau_1) \varphi(t_2, \tau_2) R_x(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2. \quad (1.7.41)$$

Пример. Пусть случайный процесс имеет корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0.$$

Найдем дисперсию случайного процесса

$$Y(t) = \int_0^t X(\tau) d\tau.$$

В соответствии с (1.7.37),

$$\begin{aligned}
 D_y(t) = R_y(t, t) &= \int_0^t \int_0^t R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \sigma^2 \int_0^t \int_0^t e^{-\alpha |\tau_2 - \tau_1|} d\tau_1 d\tau_2 = \\
 &= \sigma^2 \int_0^t \left[\int_0^{\tau_1} e^{\alpha(\tau_2 - \tau_1)} d\tau_2 + \int_{\tau_1}^t e^{-\alpha(\tau_2 - \tau_1)} d\tau_2 \right] d\tau_1 = \\
 &= \frac{\sigma^2}{\alpha} \int_0^t (2 - e^{-\alpha\tau_1} - e^{\alpha t} e^{-\alpha\tau_1}) d\tau_1 = \frac{2\sigma^2}{\alpha^2} (\alpha t + e^{-\alpha t} - 1).
 \end{aligned}$$

1.8. Векторные случайные процессы

В гидрометеорологии, помимо скалярных случайных процессов, часто приходится рассматривать случайные векторные процессы, примерами чего могут служить векторы скорости ветра и морских течений. Наиболее распространенной формой представления закона распределения вероятностей векторов скорости ветра и морских течений являются круговые диаграммы (или «роза»). На рис. 1.5 представлена роза скорости ветра для Ленинграда. Специфика этого представления состоит в том, что в каждом из заданных направлений (румбов) показано условное распределение скорости ветра по модулю. При изучении временных рядов изменений скорости ветра или течений они рассматриваются как реализации векторного случайного процесса $\mathbf{V}(t)$ с проекциями $v_1(t)$ и $v_2(t)$ на координатные оси абсцисс и ординат. Базисные орты будем обозначать \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 .

Тогда математическое ожидание $\mathbf{m}_V(t)$ определяется как вектор-функция

$$\mathbf{m}_V(t) = M[\mathbf{V}(t)] = M[v_1(t)\mathbf{e}_1 + v_2(t)\mathbf{e}_2]. \quad (1.8.1)$$

Центрированный векторный процесс $\mathring{\mathbf{V}}(t)$ получаем путем вычитания из вектора $\mathbf{V}(t)$ вектор $\mathbf{m}_V(t)$, т. е.

$$\mathring{\mathbf{V}}(t) = \mathbf{V}(t) - \mathbf{m}_V(t). \quad (1.8.2)$$

Корреляционная функция векторного случайного процесса $\mathbf{V}(t)$ определяется как математическое ожидание тензорного произведения векторов

$$\mathbf{R}_V(t_1, t_2) = M[\mathring{\mathbf{V}}(t_1) \otimes \mathring{\mathbf{V}}(t_2)]. \quad (1.8.3)$$

Функция $\mathbf{R}_V(t_1, t_2)$, характеризующая взаимосвязь направленных изменений $\mathbf{V}(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 , дает количественную меру интенсивности этих изменений и их ориента-

цию в заданной системе координат. При фиксированных t_1 и t_2 функция $R_V(t_1, t_2)$ представляет собой тензор второго ранга, а все множество значений $R_V(t_1, t_2)$ — корреляционную тензор-функцию. Функция $R_V(t_1, t_2)$ всегда действительная и может иметь как положительное, так и отрицательное значение.

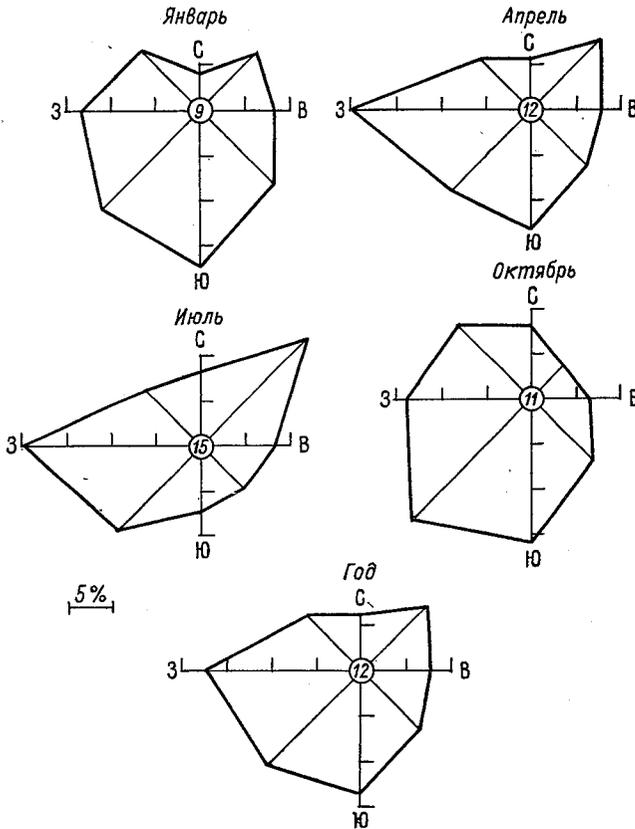


Рис. 1.5

Тензор $R_V(t_1, t_2)$ относительно декартовых проекций скорости течений удобно представить матрицей вида

$$R_V(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} R_{v_1 v_1} & R_{v_1 v_2} \\ R_{v_2 v_1} & R_{v_2 v_2} \end{pmatrix}. \quad (1.8.4)$$

Аргументы функций, стоящих в правой части, опущены в связи с их совпадением с аргументами в левой части равенства.

В связи с представлением тензора (1.8.3) матрицей (1.8.4) следует помнить, что тензор есть единый объект, характеризую-

щий закономерности процесса $\mathbf{V}(t)$. Элементы его матрицы не инвариантны, поскольку значение каждого из них зависит от выбора системы координат

$$R_{v_k v_j}(t_1, t_2) = M \{[\mathbf{V}(t_1) \cdot \mathbf{e}_k][\mathbf{V}(t_2) \cdot \mathbf{e}_j]\}, \quad k, j = 1, 2.$$

Значение корреляционной функции при $t_1 = t_2 = t$ является дисперсией \mathbf{D}_V векторного процесса $\mathbf{V}(t)$ и может быть определено как математическое ожидание тензорного квадрата векторов

$$\mathbf{D}_V(t) = M [\overset{\circ}{\mathbf{V}}(t) \otimes \overset{\circ}{\mathbf{V}}(t)]. \quad (1.8.5)$$

Дисперсия \mathbf{D}_V характеризует интенсивность направленных изменений векторных процессов и их ориентацию в заданной системе координат. Вследствии некоммутативности тензорного произведения корреляционная тензор-функция \mathbf{R}_V в общем случае не является четной, что является одним из наиболее существенных отличий автокорреляционной функции векторного процесса от автокорреляционной функции скалярного процесса. При этом \mathbf{R}_V обладает следующим свойством

$$\mathbf{R}_V(t_2, t_1) = \mathbf{R}_V^T(t_1, t_2), \quad (1.8.6)$$

где \mathbf{R}_V^T — транспонированный тензор. Покажем справедливость указанного свойства.

В матричной форме корреляционный тензор $\mathbf{R}_V(t_2, t_1)$ имеет вид

$$\mathbf{R}_V(t_2, t_1) = \begin{pmatrix} R_{v_1 v_1}(t_2, t_1), & R_{v_1 v_2}(t_2, t_1) \\ R_{v_2 v_1}(t_2, t_1), & R_{v_2 v_2}(t_2, t_1) \end{pmatrix},$$

но, учитывая, что $R_{v_k v_k}(t_1, t_2) = R_{v_k v_k}(t_2, t_1)$; $R_{v_k v_j}(t_1, t_2) = R_{v_j v_k}(t_2, t_1)$

$$\mathbf{R}_V(t_2, t_1) = \begin{pmatrix} R_{v_1 v_1}(t_1, t_2), & R_{v_2 v_1}(t_1, t_2) \\ R_{v_1 v_2}(t_1, t_2), & R_{v_2 v_2}(t_1, t_2) \end{pmatrix}. \quad (1.8.7)$$

Правая часть равенства (1.8.7) по форме записи совпадает с определением транспонированного тензора, что и доказывает соотношение (1.8.6).

Корреляционный тензор \mathbf{R}_V (аргументы опущены) может быть единственным образом представлен в виде суммы его симметричной и косимметричной частей

$$\mathbf{R}_V = \mathbf{C}_V + \mathbf{A}_V, \quad (1.8.8)$$

где

$$\mathbf{C}_V = 0,5(\mathbf{R}_V + \mathbf{R}_V^T);$$

$$\mathbf{A}_V = 0,5(\mathbf{R}_V - \mathbf{R}_V^T).$$

Относительно декартовых проекций симметричная и кососимметричная части тензора (1.8.8) определяются матрицами вида

$$C_V = \begin{pmatrix} R_{v_1v_1}, & 0,5(R_{v_1v_2} + R_{v_2v_1}) \\ 0,5(R_{v_2v_1} + R_{v_1v_2}), & R_{v_2v_2} \end{pmatrix}, \quad (1.8.9)$$

$$A_V = \begin{pmatrix} 0, & 0,5(R_{v_1v_2} - R_{v_2v_1}) \\ -0,5(R_{v_1v_2} - R_{v_2v_1}), & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8.10)$$

Из выражения (1.8.9) следует, что

$$C_V = C_V^T, \quad (1.8.11)$$

а с учетом свойства (1.8.6)

$$C_V(t_2, t_1) = C_V(t_1, t_2), \quad (1.8.12)$$

т. е. тензор-функция C_V является четной функцией своих аргументов. Из (1.8.10) следует, что

$$A_V = -A_V^T, \quad (1.8.13)$$

а с учетом свойства (1.8.6)

$$A_V(t_2, t_1) = -A_V(t_1, t_2), \quad (1.8.14)$$

т. е. тензор-функция A_V является нечетной относительно своих аргументов. В частности, при $t_1 = t_2 = t$ все компоненты тензор-функции $A_V(t)$ нулевые, следовательно, тензор дисперсии $D_V(t)$ является симметричным.

Корреляционный тензор является многомерной инвариантной функцией, содержащей разностороннюю информацию о свойствах анализируемого векторного процесса. Наиболее наглядно эта информация выявляется через различные инварианты симметричной и кососимметричной частей тензора R_V .

Рассмотрим вначале инварианты I_1 и \mathcal{D} тензора R_V , поскольку они не связаны с ориентацией собственного базиса R_V .

Линейным, или первым инвариантом корреляционного тензора называется функция

$$I_1(t_1, t_2) = R_{v_1v_1} + R_{v_2v_2} \Rightarrow M \{ \mathring{V}(t_1) \cdot \mathring{V}(t_2) \}. \quad (1.8.15)$$

Следовательно, линейный инвариант равен следу матрицы тензора R_V , ему может быть поставлено в соответствие математическое ожидание скалярного произведения векторов. Линейный инвариант автокорреляционной функции векторного случайного процесса всегда является действительной четной функцией, так как

$$\begin{aligned} I_1(t_1, t_2) &= R_{v_1v_1}(t_1, t_2) + R_{v_2v_2}(t_1, t_2) = \\ &= R_{v_1v_1}(t_2, t_1) + R_{v_2v_2}(t_2, t_1) = I_1(t_2, t_1). \end{aligned}$$

Эта функция имеет максимум при $t_1 = t_2 = t$, а линейный инвариант тензора дисперсии $I_1(t)$ характеризует модуль изменения векторного процесса, так как из (1.8.15) при $t_1 = t_2 = t$ следует

$$I_1(t) = R_{v_1 v_1}(t) + R_{v_2 v_2}(t) \Rightarrow M \{\dot{\mathbf{V}}(t)\}^2. \quad (1.8.16)$$

«Индикатором вращения» процесса $\mathbf{V}(t)$ называется инвариант кососимметричной части корреляционного тензора

$$\mathcal{D}(t_1, t_2) = R_{v_1 v_2} - R_{v_2 v_1} \Rightarrow M \{\dot{\mathbf{V}}(t_1) \times \dot{\mathbf{V}}(t_2)\}. \quad (1.8.17)$$

Инвариант \mathcal{D} равен разности компонентов матрицы (стоящих не на главной диагонали) тензора \mathbf{R}_V , ему может быть поставлено в соответствие математическое ожидание косога произведения векторов. Инвариант \mathcal{D} автокорреляционной функции векторного случайного процесса всегда является действительной нечетной функцией с нулевым значением в точке $t_1 = t_2 = t$, так как

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t_1, t_2) &= R_{v_1 v_2}(t_1, t_2) - R_{v_2 v_1}(t_1, t_2) = \\ &= -[R_{v_1 v_2}^{\text{ср}}(t_2, t_1) - R_{v_2 v_1}(t_2, t_1)] = -\mathcal{D}(t_2, t_1). \end{aligned} \quad (1.8.18)$$

Инварианты I_1 и \mathcal{D} могут интерпретироваться как корреляционная функция соответственно коллинеарных (\mathbf{V}'') и ортогональных (\mathbf{V}^\perp) составляющих

$$\begin{aligned} I_1 &\equiv M \{\dot{\mathbf{V}}(t_1) \cdot \dot{\mathbf{V}}(t_2)\} = M \{\dot{\mathbf{V}}(t_1) \cdot \dot{\mathbf{V}}''(t_2)\} = \\ &= M \{\dot{\mathbf{V}}''(t_1) \cdot \dot{\mathbf{V}}(t_2)\}; \\ \mathcal{D} &\equiv M \{\dot{\mathbf{V}}(t_1) \times \dot{\mathbf{V}}(t_2)\} = M \{\dot{\mathbf{V}}(t_1) \times \dot{\mathbf{V}}^\perp(t_2)\} = \\ &= M \{\dot{\mathbf{V}}^\perp(t_1) \times \dot{\mathbf{V}}(t_2)\}. \end{aligned}$$

Поскольку в общем случае функции I_1 и \mathcal{D} являются знакопеременными по t , то при их интерпретации целесообразно рассматривать абсолютные значения этих функций как показатели интенсивности соответствующих изменений, а знаки — как показатели преимущественной направленности этих изменений, что непосредственно следует из определений скалярного и косога произведения векторов, учитывающих как модули перемножаемых векторов, так и углы между ними, т. е.

$$I_1(t_1, t_2) = M \{|\dot{\mathbf{V}}(t_1)| \cdot |\dot{\mathbf{V}}(t_2)| \cos \angle \dot{\mathbf{V}}(t_1) \dot{\mathbf{V}}(t_2)\}; \quad (1.8.19)$$

$$\mathcal{D}(t_1, t_2) = M \{|\dot{\mathbf{V}}(t_1)| \cdot |\dot{\mathbf{V}}(t_2)| \sin \angle \dot{\mathbf{V}}(t_1), \dot{\mathbf{V}}(t_2)\}. \quad (1.8.20)$$

Абсолютное значение $|I_1|$ характеризует модуль коллинеарных изменений $\mathbf{V}(t)$, а знак I_1 — их направленность. Если знак

положительный, то взаимосвязь на интервале (t_1, t_2) определяется преимущественно однонаправленными составляющими векторов; если знак отрицательный, то преимущественно противоположно направленными составляющими векторов.

Абсолютное значение «индикатора вращения» $|\mathcal{D}|$ характеризует модуль ортогональных изменений $\mathbf{V}(t)$. Если знак \mathcal{D} положительный, то при фиксированном интервале (t_1, t_2) это означает, что вектор $\mathbf{V}(t_2)$ преимущественно ориентирован вправо относительно вектора $\mathbf{V}(t_1)$; если знак отрицательный, то преимущественно влево от $\mathbf{V}(t_1)$.

Таким образом, можно сделать вывод, что инварианты I_1 и \mathcal{D} корреляционного тензора позволяют охарактеризовать (безотносительно к выбранной системе координат) структуру коллинеарных и ортогональных изменений векторов $\mathbf{V}(t)$.

Для удобства геометрической интерпретации используем квадратичный инвариант симметричной части тензора \mathbf{R}_V в виде

$$I_2 = R_{v_1 v_1} R_{v_2 v_2} - 0,25 [R_{v_1 v_2} + R_{v_2 v_1}]^2 \quad (1.8.21)$$

I_2 является индикатором формы тензорной кривой (центральной кривой второго порядка) и совпадает с детерминантом матрицы тензор-функции \mathbf{C}_V . Если $I_2 > 0$, то кривая есть эллипс (в частном случае — окружность); если $I_2 < 0$, то это гипербола; если $I_2 = 0$, то прямая (изменения реверсивного типа).

Характерные размеры этих кривых второго порядка определяются через инварианты I_1 и I_2 в виде

$$\lambda_{1,2} = 0,5 \{I_1 \pm (I_1^2 + 4I_2)^{0,5}\}. \quad (1.8.22)$$

Инварианты $\lambda_{1,2}$ есть главные, или собственные, значения симметричного тензора \mathbf{C} ; они являются экстремальными значениями корреляционных функций проекций $\mathbf{V}(t)$ по ортогональным направлениям. Эти величины могут также интерпретироваться как большая и малая оси центральной кривой второго порядка, которую можно поставить в соответствие симметричному тензору \mathbf{C} (рис. 1.6). В зависимости от того, какие значения и знаки имеют $\lambda_{1,2}$, эта кривая может быть эллипсом, если $\lambda_{1,2} > 0$ или $\lambda_{1,2} < 0$; окружностью, если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$; гиперболой, если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$. Кривая второго порядка вырождается в отрезок прямой, если $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$, и в точку, если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Ориентация большой оси λ_1 относительно исходной координатной системы определяется углом

$$\alpha = \text{arctg} \{ [R_{v_1 v_2} + R_{v_2 v_1}] / [R_{v_1 v_1} - R_{v_2 v_2}] \}. \quad (1.8.23)$$

Инварианты $\lambda_{1,2}$, \mathcal{D} полностью характеризуют тензор \mathbf{R}_V , так как он может быть однозначно представлен в виде

$$\mathbf{R}_V = \lambda_1 (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + \lambda_2 (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + 0,5 \mathcal{D} (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) \quad (1.8.24)$$

или в виде

$$\mathbf{R}_V = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + 0,5D \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8.25)$$

Взаимная корреляционная функция двух векторных процессов $\mathbf{V}(t)$ и $\mathbf{U}(t)$ определяется как математическое ожидание тензорного произведения векторов

$$\mathbf{R}_{VU}(t_1, t_2) = M \{ \dot{\mathbf{V}}(t_1) \otimes \dot{\mathbf{U}}(t_2) \}, \quad (1.8.26)$$

где $\dot{\mathbf{V}}, \dot{\mathbf{U}}$ — центрированные значения процессов $\mathbf{V}(t)$ и $\mathbf{U}(t)$.

Функция \mathbf{R}_{VU} характеризует взаимосвязь направленных изменений процессов $\mathbf{V}(t)$ и $\mathbf{U}(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 , дает

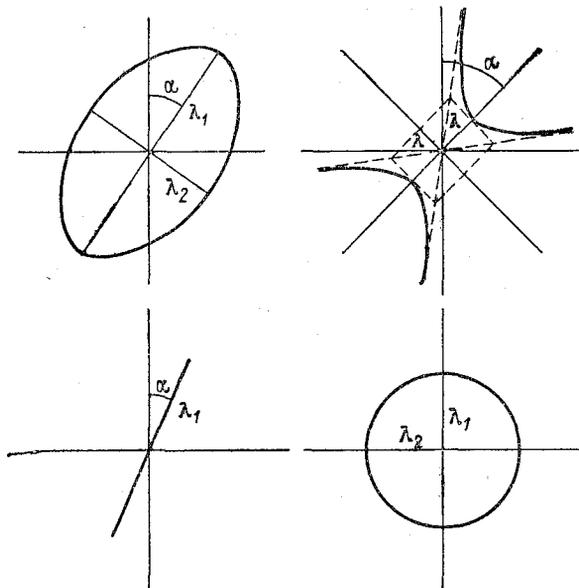


Рис. 1.6

количественную меру интенсивности этих изменений и их ориентацию в заданной системе координат. При фиксированных t_1 и t_2 функция $\mathbf{R}_{VU}(t_1, t_2)$ представляет собой тензор второго ранга, а все множество значений $\mathbf{R}_{VU}(t_1, t_2)$ — корреляционную тензор-функцию. Эта функция всегда действительна и может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Относительно декартовых проекций тензор (1.8.26) удобно представить матрицей вида

$$\mathbf{R}_{VU}(t_1, t_2) = \begin{pmatrix} R_{v_1 u_1} & R_{v_1 u_2} \\ R_{v_2 u_1} & R_{v_2 u_2} \end{pmatrix}, \quad (1.8.27)$$

в которой аргументы функций, стоящих в правой части, опущены в связи с их совпадением с аргументами в левой части равенства.

Тензор R_{VU} есть единый объект, характеризующий закономерности взаимосвязи изменений $V(t)$ и $U(t)$. Элементы матрицы тензора не инвариантны, поскольку значение каждого из элементов зависит от выбора системы координат

$$R_{v_k u_j} = M \{ (V \cdot e_k) (U \cdot e_j) \} \quad k, j = 1, 2.$$

Корреляционная функция $R_{VU}(t_1, t_2)$ в общем случае не является четной или нечетной функцией, но обладает свойством

$$R_{VU}(t_2, t_1) = \tilde{R}_{VU}^T(t_1, t_2), \quad (1.8.28)$$

где \tilde{R} есть тензор, сопряженный с тензором R .

Взаимный корреляционный тензор R_{VU} может быть единственным образом представлен в виде суммы его симметричной и косимметричной частей

$$R_{VU} = C_{VU} + A_{VU}, \quad (1.8.29)$$

где

$$C_{VU} = 0,5 (R_{VU} + R_{VU}^T); \quad A_{VU} = 0,5 (R_{VU} - R_{VU}^T).$$

Относительно декартовых проекций симметричная и косимметричная части тензора R_{VU} определяются матрицами вида

$$C_{VU} = \begin{pmatrix} R_{v_1 u_1} & 0,5 (R_{v_1 u_2} + R_{v_2 u_1}) \\ 0,5 (R_{v_2 u_1} + R_{v_1 u_2}) & R_{v_2 u_2} \end{pmatrix}; \quad (1.8.30)$$

$$A_{VU} = \begin{pmatrix} 0 & 0,5 (R_{v_1 u_2} - R_{v_2 u_1}) \\ -0,5 (R_{v_1 u_2} - R_{v_2 u_1}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8.31)$$

Из (1.8.30) следует, что

$$C_{VU}(t_1, t_2) = C_{VU}^T(t_1, t_2);$$

легко показать, что

$$C_{VU}(t_1, t_2) = C_{VU}(t_2, t_1).$$

Из (1.8.31) следует, что

$$A_{VU}(t_1, t_2) = -A_{VU}(t_1, t_2);$$

с учетом свойства (1.8.28)

$$A_{VU}(t_2, t_1) = \tilde{A}_{VU}(t_1, t_2).$$

Взаимный корреляционный тензор является многомерной инвариантной функцией, содержащей разностороннюю информацию о свойствах взаимосвязи двух анализируемых векторных процессов, которая выявляется через различные инварианты симметричной и косимметричной частей тензора R_{VU} .

Рассмотрим вначале инварианты $I_1^{(vu)}$ и $\mathcal{D}^{(vu)}$ тензора R_{vu} , которые не связаны с ориентацией его собственного базиса.

Линейный инвариант тензор-функции может быть представлен как

$$I_1^{vu}(t_1, t_2) = R_{v_1u_1} + R_{v_2u_2} \Rightarrow M\{\overset{\circ}{V}(t_1) \overset{\circ}{U}(t_2)\} = M\{\overset{\circ}{V}(t_1) \overset{\circ}{U}''(t_2)\}, \quad (1.8.32)$$

т. е. линейный инвариант равен следу матрицы тензора R_{vu} , и ему в соответствие может быть поставлено математическое ожидание скалярного произведения векторных процессов временных рядов $V(t)$ и $U(t)$ на интервале (t_1, t_2) , определяющее взаимосвязь их коллинеарных изменений. Правая часть равенства (1.8.32) раскрывает термин «коллинеарных изменений», так как под вектором $\overset{\circ}{U}''$ понимается вектор, имеющий величину, равную $|U| \cos(\angle V, U)$, и направление, совпадающее с V .

Линейный инвариант $I_1^{(vu)}$, в отличие от линейного инварианта автокорреляционного тензора, в общем случае, не является четной функцией, но обладает свойством

$$I_1^{vu}(t_2, t_1) = \tilde{I}_1^{vu}(t_1, t_2). \quad (1.8.33)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} I_1^{vu}(t_2, t_1) &= R_{v_1u_1}(t_2, t_1) + R_{v_2u_2}(t_2, t_1) = \\ &= R_{u_1v_1}(t_1, t_2) + R_{u_2v_2}(t_1, t_2) = I_1^{uv}(t_1, t_2) = \tilde{I}_1^{vu}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Отметим, что

$$I_1^{vu}(t_1, t_2) \neq I_1^{vu}(t_2, t_1),$$

так как

$$M\{\overset{\circ}{V}(t_1) \cdot \overset{\circ}{U}(t_2)\} \neq M\{\overset{\circ}{V}(t_2) \cdot \overset{\circ}{U}(t_1)\}.$$

Индикатор поворота (вращения) векторных процессов $V(t)$ и $U(t)$ может быть представлен как

$$\mathcal{D}^{vu}(t_1, t_2) = R_{v_1u_2} - R_{v_2u_1} \Rightarrow M\{\overset{\circ}{V}(t_1) \times \overset{\circ}{U}(t_2)\} = M\{\overset{\circ}{V}(t_1) \times \overset{\circ}{U}^\perp(t_2)\}, \quad (1.8.34)$$

т. е. инвариант \mathcal{D}^{vu} равен разности компонентов матрицы тензора R_{vu} , стоящих не на главной диагонали, и ему может быть поставлено в соответствие математическое ожидание косога произведения векторов $V(t)$ и $U(t)$, определяющее взаимосвязь их ортогональных изменений.

Правая часть равенства (1.8.34) раскрывает термин «ортогональных изменений», так как под вектором $\overset{\circ}{U}^\perp$ понимается

вектор, имеющий величину, равную $|U| \sin(\angle V, U)$, и направление, ортогональное V .

В отличие от аналогичного инварианта автокорреляционного тензора инвариант \mathcal{D}^{VU} , в общем случае, не является нечетной функцией, но обладает свойством

$$\mathcal{D}^{VU}(t_2, t_1) = -\tilde{\mathcal{D}}^{VU}(t_1, t_2). \quad (1.8.35)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{VU}(t_2, t_1) &= R_{v_1 u_2}(t_2, t_1) - R_{v_2 u_1}(t_2, t_1) = \\ &= R_{u_2 v_1}(t_1, t_2) - R_{u_1 v_2}(t_1, t_2) = -\mathcal{D}^{UV}(t_1, t_2) = \tilde{\mathcal{D}}^{VU}(t_1, t_2). \end{aligned}$$

Отметим, что

$$\mathcal{D}^{VU}(t_2, t_1) \neq \mathcal{D}^{VU}(t_1, t_2),$$

так как

$$M\{\overset{\circ}{V}(t_1) \times \overset{\circ}{U}(t_2)\} \neq M\{\overset{\circ}{V}(t_2) \times \overset{\circ}{U}(t_1)\}.$$

Собственные значения и квадратичный инвариант симметричной части тензора \mathbf{C}_{VU} определяются и интерпретируются аналогично соответствующим инвариантам симметричной части тензора \mathbf{C}_V , но, в отличие от последних, не являются четными функциями.

Квадратичный инвариант $I_2^{(VU)}$ записывается в виде

$$I_2^{VU} = R_{v_1 u_1} R_{v_2 u_2} - 0,25 (R_{v_1 u_2} + R_{v_2 u_1})^2 \quad (1.8.36)$$

и определяет форму кривой второго порядка при каждом фиксированном значении аргумента.

Собственные значения тензора \mathbf{C}_{VU} имеют вид

$$\lambda_{1,2}^{VU} = 0,5 [I_1^{VU} \pm \sqrt{(I_1^{VU})^2 + 4I_2^{VU}}] \quad (1.8.37)$$

и могут быть интерпретированы как главные оси кривой второго порядка, характеризующей особенности взаимосвязи двух векторных процессов (независимо от выбора координатных осей) при каждом фиксированном значении аргумента.

Направление большой оси $\lambda^{(VU)}$ определяется по формуле

$$\alpha = 0,5 \arctg [(R_{v_1 u_2} + R_{v_2 u_1}) / (R_{v_1 u_1} - R_{v_2 u_2})] \quad (1.8.38)$$

и характеризует ориентацию тензорной кривой относительно исходной системы координат, т. е. не является инвариантной величиной.

Инварианты $\lambda_{1,2}$ и \mathcal{D} полностью характеризуют тензор \mathbf{R}_{VU} , так как он может быть однозначно представлен в виде

$$\mathbf{R}_{VU} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + 0,5 \mathcal{D} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.8.39)$$

Глава 2

Случайное поле

2.1. Характеристики случайного поля

Помимо случайных процессов, являющихся функциями одного аргумента, в гидрометеорологии очень часто приходится иметь дело со случайными функциями от нескольких независимых переменных, которые называют случайными полями.

Рассмотрим случайное поле $U(x, y, z, t)$, где x, y, z — пространственные координаты точки; t — время.

Можно рассматривать x, y, z, t как координаты некоторого четырехмерного вектора $\rho(x, y, z, t)$ и сокращенно обозначать случайное поле в виде $U(\rho)$.

Аналогично тому, как мы делали для случайных процессов, случайное поле можем рассматривать как совокупность всех его реализаций, или как совокупность всех его сечений, понимая под сечением случайного поля случайную величину, получающуюся при фиксированных значениях всех аргументов, т. е. при фиксированном значении вектора ρ .

Реализацией случайного поля будет являться неслучайное поле, полученное в результате данного опыта.

Тогда простой заменой t на ρ все формулы для n -мерных функций распределения, начальных и центральных моментов, рассмотренные в пп. 1.1 и 1.2 для случайных процессов, распространяются и на случайные поля.

Будем называть n -мерной функцией распределения случайного поля $U(x, y, z, t) = U(\rho)$ функцию распределения системы случайных величин

$$\begin{aligned} F_u(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) &= \\ &= P(U_1 < u_1, U_2 < u_2, \dots, U_n < u_n). \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Для полной характеристики случайного поля нужно задать все его n -мерные функции распределения.

Если существуют смешанные частные производные от функций распределения $F_n(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$, то их называют n -мерными плотностями распределения случайного поля

$$\begin{aligned} f_n(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) &= \\ &= \frac{\partial^n F_n(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_n}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

Как и для случайных процессов, на практике редко удается определить n -мерные функции распределения или плотности распределения, поэтому для характеристики случайных полей используются главным образом моменты распределения. Так,

n -точечным начальным моментом случайного поля $U(\rho) = U(x, y, z, t)$ порядка $i_1 + i_2 + \dots + i_n$ будем называть математическое ожидание произведения соответствующих степеней n сечений случайного поля, отвечающих n точкам пространственно-временной области

$$\begin{aligned} & m_{i_1, i_2, \dots, i_n}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) = \\ & = M \{ [U(\rho_1)]^{i_1} \cdot [U(\rho_2)]^{i_2} \dots [U(\rho_n)]^{i_n} \}. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Момент первого порядка

$$m_1(\rho) = M[U(\rho)] = m_u(\rho) \quad (2.1.4)$$

называется математическим ожиданием случайного поля.

Отклонение случайного поля от его математического ожидания называют центрированным случайным полем

$$\overset{\circ}{U}(\rho) = U(\rho) - m_u(\rho). \quad (2.1.5)$$

Начальные моменты от центрированного случайного поля называют центральными моментами поля

$$\begin{aligned} & \mu_{i_1, i_2, \dots, i_n}(\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n) = \\ & = M \{ [\overset{\circ}{U}(\rho_1)]^{i_1} \cdot [\overset{\circ}{U}(\rho_2)]^{i_2} \dots [\overset{\circ}{U}(\rho_n)]^{i_n} \}. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Одноточечный центральный момент второго порядка

$$\mu_2(\rho) = M \{ [U(\rho) - m_u(\rho)]^2 \} = D_u(\rho) \quad (2.1.7)$$

называется дисперсией случайного поля.

Математическое ожидание и дисперсия случайного поля являются неслучайными функциями координат точек пространственно-временной области:

$$\begin{aligned} m_u(\rho) &= m_u(x, y, z, t); \\ D_u(\rho) &= D_u(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Двухточечный центральный момент второго порядка

$$\mu_{1,1}(\rho_1, \rho_2) = M \{ [U(\rho_1) - m_u(\rho_1)][U(\rho_2) - m_u(\rho_2)] \} = R_u(\rho_1, \rho_2) \quad (2.1.8)$$

называется корреляционной функцией случайного поля.

Корреляционная функция $R_u(\rho_1, \rho_2)$ является уже функцией координат двух точек пространственно-временной области

$$R_u(\rho_1, \rho_2) = R_u(x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_2).$$

Корреляционная функция случайного поля обладает теми же свойствами, что и корреляционная функция случайного процес-

са. В частности, выполняется свойство симметрии

$$R_u(\rho_1, \rho_2) = R_u(\rho_2, \rho_1).$$

При одинаковых значениях векторных аргументов $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ корреляционная функция превращается в дисперсию случайного поля

$$R_u(\rho, \rho) = D_u(\rho). \quad (2.1.9)$$

Рассматривают также нормированную корреляционную функцию случайного поля

$$r_u(\rho_1, \rho_2) = \frac{R_u(\rho_1, \rho_2)}{\sqrt{D_u(\rho_1) D_u(\rho_2)}}, \quad (2.1.10)$$

которая для каждой фиксированной пары точек ρ_1 и ρ_2 представляет коэффициент корреляции между сечениями случайного поля, соответствующими этим точкам.

Рассмотренные моменты называются пространственно-временными. Пространственно-временная корреляционная функция может характеризовать связь между значениями случайного поля в двух различных точках пространства в различные моменты времени. Наряду с пространственно-временными моментами рассматривают отдельно временные и отдельно пространственные моменты.

При определении временных моментов пространственные координаты точек поля считаются фиксированными и изучается изменчивость поля во времени в данной фиксированной точке пространства. В этом случае мы имеем дело со случайным процессом.

При рассмотрении пространственных моментов фиксируют момент времени и изучают случайное поле в данный момент времени. В этом случае случайное поле является случайной функцией координат точек пространства.

Так как случайные процессы были рассмотрены ранее, остановимся подробнее на рассмотрении пространственных случайных полей.

2.2. Однородное и изотропное случайное поле

При изучении случайных процессов весьма важным является условие стационарности, существенно упрощающее описание случайного процесса.

Для пространственных полей аналогичными условиями являются условия однородности и изотропности.

Случайное поле называется однородным, если все n -мерные законы распределения не изменятся при переносе системы точек $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ на один и тот же вектор, т. е. если функции рас-

пределения (плотности распределения) не изменяются при замене сечений, соответствующих точкам $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ сечениями, соответствующими точкам $\rho_1 + \rho_0, \rho_2 + \rho_0, \dots, \rho_n + \rho_0$ при любом векторе ρ_0 .

Для однородного случайного поля

$$f_1(u_1; \rho_1) = f_1(u_1; \rho_1 + \rho_0), \quad (2.2.1)$$

$$f_2(u_1, u_2; \rho_1, \rho_2) = f_2(u_1, u_2; \rho_1 + \rho_0, \rho_2 + \rho_0). \quad (2.2.2)$$

Полагая $\rho_0 = -\rho_1$, получим

$$f_1(u_1; \rho_1) = f_1(u_1; 0) = f_1(u_1), \quad (2.2.3)$$

$$f_2(u_1, u_2; \rho_1, \rho_2) = f_2(u_1, u_2; \rho_2 - \rho_1). \quad (2.2.4)$$

А так как

$$m_u(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} u f_1(u; \rho) du = \int_{-\infty}^{\infty} u f_1(u) du = m_u, \quad (2.2.5)$$

$$\begin{aligned} R_u(\rho_1, \rho_2) &= \iint_{-\infty}^{\infty} [u_1 - m_u(\rho_1)] [u_2 - m_u(\rho_2)] f_2(u_1, u_2; \rho_1, \rho_2) du_1 du_2 = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} (u_1 - m_u)(u_2 - m_u) f_2(u_1, u_2; \rho_2 - \rho_1) du_1 du_2 = \\ &= R_u(\rho_2 - \rho_1) = R_u(\mathbf{l}), \quad \mathbf{l} = \rho_2 - \rho_1, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

то для однородного случайного поля математическое ожидание не зависит от координат точек поля, т. е. является постоянной величиной m_u , а корреляционная функция $R_u(\rho_1, \rho_2) = R_u(\mathbf{l})$ зависит только от разности векторов $\mathbf{l} = \rho_2 - \rho_1$.

Указанное условие однородности случайного поля по аналогии с условием стационарности можно назвать строгой однородностью. Полем однородным в широком смысле называют такое поле, для которого математическое ожидание является постоянной величиной, а корреляционная функция зависит только от одного векторного аргумента — разности векторов \mathbf{l} .

Случайное однородное поле называют изотропным, если все его n -мерные законы распределения не изменяются при всевозможных вращениях системы точек $N_1(\rho_1), N_2(\rho_2), \dots, N_n(\rho_n)$ вокруг любой оси, проходящей через начало координат, и при зеркальном их отражении относительно любой плоскости, проходящей через начало координат.

Таким образом, для однородного и изотропного поля n -мерные плотности распределения $f_n(u_1, u_2, \dots, u_n; \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n)$ не изменяются при параллельном переносе, вращении и зеркальном отображении системы точек $N_1(\rho_1), N_2(\rho_2), \dots, N_n(\rho_n)$. При этом корреляционная функция $R_u(\rho_1, \rho_2)$ должна принимать одни и те же значения для любой пары точек $N_1(\rho_1), N_2(\rho_2)$,

для которых одинаков модуль разности $l = |\rho_2 - \rho_1|$, так как такие пары точек всегда могут быть совмещены друг с другом с помощью параллельного переноса, вращения и зеркального отражения.

Следовательно, корреляционная функция однородного и изотропного поля является функцией одного скалярного аргумента $l = |\rho_2 - \rho_1|$ — расстояния между точками $N_1(\rho_1)$ и $N_2(\rho_2)$. Иногда это условие принимают за определение изотропности поля.

Таким образом, для однородного и изотропного поля математическое ожидание есть величина постоянная $m_u(\rho) = m_u$, а корреляционная функция является функцией одного скалярного аргумента l — расстояния между двумя точками $R_u(\rho_1, \rho_2) = R_u(l)$, где

$$l = |\rho_2 - \rho_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.2.7)$$

Наряду со случайными полями, однородными во всем трехмерном пространстве, можно рассматривать поля, однородные лишь на некоторой прямой или в некоторой плоскости, для которых все n -мерные плотности распределения не изменяются при параллельном переносе всех n точек на вектор ρ_0 , параллельный данной прямой или данной плоскости.

Аналогично можно рассматривать поля, изотропные не во всем трехмерном пространстве, а только на некоторой плоскости.

Многочисленные исследования структуры метеорологических полей указывают на существенное различие изменений метеорологических элементов в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Поэтому при изучении статистической структуры мезо- и макромасштабных метеорологических полей считают допустимым предположение о приближенной однородности и изотропности поля только по отношению к двумерному горизонтальному полю. При этом предполагается, что однородным является централизованное случайное поле, т. е. поле отклонений данного метеоэлемента от его математического ожидания. Само математическое ожидание нельзя считать постоянным.

Как и для стационарного случайного процесса, если однородное изотропное случайное поле обладает эргодическим свойством, его математическое ожидание и корреляционную функцию можно находить осреднением по одной реализации, заданной в достаточно большой пространственной области. В этом случае математическое ожидание определится по формуле

$$m_u = \frac{1}{v} \iiint_{(D)} u(x, y, z) dx dy dz, \quad (2.2.8)$$

где D — пространственная область, по которой производится осреднение, а v — объем этой области.

Для плоского поля

$$m_u = \frac{1}{S} \iint_{(D)} u(x, y) dx dy, \quad (2.2.9)$$

где S — площадь плоской области D .

Аналогичные формулы можно написать для получения осреднением по одной реализации корреляционной функции $R_u(l)$

$$R_u(l) = \frac{1}{v_1} \iiint_{(D_1)} [u(x, y, z) - m_u][u(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - m_u] dx dy dz. \quad (2.2.10)$$

Область D_1 при этом должна быть такой, чтобы точки $(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$ не вышли из области D (v_1 — объем области D_1).

Говорят, что однородное изотропное поле обладает эргодическим свойством, если математическое ожидание и корреляционная функция, полученные осреднением по одной реализации по формулам (2.2.8) и (2.2.10), при безграничном увеличении диаметра области могут быть с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, приближены к соответствующим характеристикам, полученным осреднением по всему множеству реализаций случайного поля. На практике обычно не удается осуществить пространственное осреднение метеорологического случайного поля, так как запись реализаций производится лишь в дискретных точках, число которых невелико.

Для характеристики однородного изотропного поля наряду с корреляционной функцией пользуются также структурной функцией $B_u(l)$

$$B_u(l) = M \{ [U(\rho + l) - U(\rho)]^2 \}. \quad (2.2.11)$$

Как и для случайного процесса структурная функция случайного поля однозначно определяется через ее корреляционную функцию

$$B_u(l) = 2[R_u(0) - R_u(l)]. \quad (2.2.12)$$

Для однородного изотропного поля структурная функция является функцией скалярного аргумента $l = |l|$.

Если $\lim_{l \rightarrow \infty} R_u(l) = 0$, то корреляционную функцию можно выразить через структурную функцию

$$R_u(l) = \frac{1}{2} [B_u(\infty) - B_u(l)]. \quad (2.2.13)$$

Как и в случае стационарного случайного процесса, для однородного случайного поля безразлично, что использовать для

его характеристики — корреляционную или структурную функции. Однако для характеристики случайного поля, однородность которого является лишь приближенной, использование структурных функций иногда является предпочтительным.

В частности, это имеет место при исследовании пространственной мезо- и макроструктуры метеорологических полей, когда широтные различия в притоке солнечной энергии, различный характер движений над океанами и материками и другие факторы вызывают нарушение однородности поля. Однако при этом следует иметь в виду, что не всегда удается получить по опытным данным значение структурной функции $B_u(l)$ для достаточно больших расстояний l , которые можно было бы принять за «насыщающее значение» структурной функции $B_u(\infty)$.

Исходя из возрастающих потребностей в сведениях о статистической структуре полей различных метеоэлементов в последние десятилетия, был выполнен ряд работ по экспериментальной обработке накопленного обширного материала метеорологических наблюдений. Под исследованиями статистической структуры поля понимают определение его статистических характеристик: математического ожидания, корреляционной или структурной функции, которые необходимы при решении широкого круга задач.

На основе этих данных производится объективный анализ и сглаживание метеорологических полей для целей прогноза погоды; рационализация размещения сети метеостанций; оценка различных членов в уравнениях динамики атмосферы; решаются вопросы экстраполяции метеоданных и другие.

В зависимости от масштабов исследуемых полей в метеорологии разделяют микроструктуру, мезоструктуру и макроструктуру.

Первая описывает особенности полей в интервалах от долей миллиметров до сотен метров. В этой области имеет место локальная однородность и изотропность в трех измерениях.

Статистическая мезоструктура описывает особенности полей в интервале от километра до десятков километров. В этой области четко проявляется различие между вертикальными и горизонтальными направлениями. Однородность и изотропность приблизительно выполняется лишь в горизонтальном направлении.

Изменчивость и взаимные связи при пространственных масштабах порядка сотен и более километров описывается статистической макроструктурой.

Макропроцессы связаны с атмосферными образованиями синоптического и даже глобального характера, физическая природа которых в корне отличается от природы неупорядоченных мелкомасштабных турбулентных пульсаций. Во многих случаях все же оказывается удобным рассматривать макропроцессы

как случайные и описывать их по аналогии с мелкомасштабными процессами как своего рода макротурбулентный обмен. Однако эта аналогия имеет формальный характер. В этой области условия однородности и изотропности грубо приближенно выполняются лишь в горизонтальной плоскости.

В области мезо- и макротурбулентности можно говорить об однородности и изотропности только отклонений метеозлементов от климатической нормы, так как сами климатические нормы в этих масштабах могут претерпевать существенные изменения.

Экспериментальные исследования статистической структуры поля геопотенциала показали, что в средних широтах условия однородности и изотропности по отношению к структурным функциям выполняются довольно хорошо. Однако дисперсии поля претерпевают некоторые изменения с высотой. Аналогично, поле отклонений температуры воздуха от нормальной также приближенно можно считать однородным и изотропным в горизонтальной плоскости или на данной изобарической поверхности.

2.3. Векторное случайное поле

Рассмотрим теперь векторное пространственное случайное поле, которое задается векторной случайной функцией

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \mathbf{U}(\rho).$$

Выберем декартову систему координат и обозначим через $X(\rho)$, $Y(\rho)$, $Z(\rho)$ — проекции вектора $\mathbf{U}(\rho)$ на соответствующие координатные оси. Тогда векторное случайное поле можно рассматривать как систему трех скалярных случайных полей.

При таком рассмотрении законами распределения векторного случайного поля $\mathbf{U}(\rho)$ будут являться $3n$ -мерные функции распределения системы из трех скалярных случайных полей.

Векторное поле $\mathbf{U}(\rho)$ называют однородным и изотропным, если все $3n$ -мерные его плотности распределения инвариантны относительно параллельных переносов системы точек $N_1(\rho_1)$, $N_2(\rho_2)$, ..., $N_n(\rho_n)$, а также при ее вращениях и зеркальных отображениях, сопровождающихся одновременным вращением и зеркальным отображением системы координат, относительно которой берутся компоненты вектора.

В этом определении предполагается, что вся система точек $N_i(\rho_i)$ поворачивается или зеркально отражается вместе с закрепленной с нею системой координат. При этом все проекции векторов ρ_i в старой и в новой системах координат совпадают.

Геометрически условие однородности и изотропности векторного поля означает, что если систему координат жестко связать с системой точек N_1, N_2, \dots, N_n , то $3n$ -мерные плотности

распределения проекций поля на оси этой системы координат не изменятся при всевозможных сдвигах, вращениях и зеркальных отображениях этой системы.

Для векторного однородного изотропного поля математическое ожидание вектора $\mathbf{U}(\rho)$ равно нулю, $M[\mathbf{U}(\rho)] = 0$. Действительно, для однородного поля $M[\mathbf{U}(\rho)]$ является постоянным вектором, а так как поле изотропно, то этот вектор не должен меняться при вращениях, т. е. он должен быть нулевым.

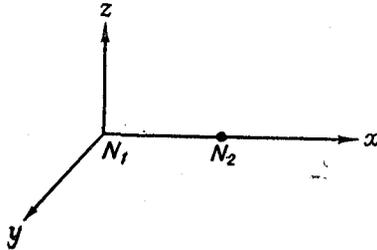


Рис. 2.1

Однородность и изотропность векторного поля накладывают определенные условия на корреляционные функции проекций вектора $\mathbf{U}(\rho)$ на координатные оси и на взаимные корреляционные функции между различными его проекциями.

Пусть $X(\rho)$, $Y(\rho)$, $Z(\rho)$ — проекции вектора $\mathbf{U}(\rho)$ на координатные оси некоторой системы координат $xOyz$.

Тогда векторное поле можно характеризовать тремя корреляционными функциями:

$$R_x(\rho_1, \rho_2), \quad R_y(\rho_1, \rho_2), \quad R_z(\rho_1, \rho_2)$$

и тремя корреляционными функциями связи:

$$R_{xy}(\rho_1, \rho_2), \quad R_{xz}(\rho_1, \rho_2), \quad R_{yz}(\rho_2, \rho_2).$$

Для однородного и изотропного поля все эти функции являются функциями только одного скалярного аргумента $l = |\rho_2 - \rho_1|$ — расстояния между точками $N_1(\rho_1)$ и $N_2(\rho_2)$.

Выберем систему координат $xOyz$ следующим образом. Начало координат поместим в точке N_1 , ось Ox направим вдоль вектора $\mathbf{N}_1\mathbf{N}_2$, а оси Oy и Oz — в плоскости, перпендикулярной к нему (рис. 2.1).

Корреляционные функции и корреляционные функции связи для однородного изотропного поля не изменяются при любых поворотах системы координат.

Повернем систему координат на 180° вокруг оси N_1x , тогда направления осей N_1y и N_1z изменятся на противоположные, отсюда получим:

$$R_{xy}(l) = -R_{xy}(l), \quad R_{xz}(l) = -R_{xz}(l), \quad (2.3.14)$$

т. е.

$$R_{xy}(l) = R_{xz}(l) = 0. \quad (2.3.15)$$

При помощи отражения относительно плоскости xN_{1z} можем ось N_{1y} перевести в ось N_{1z} , а ось N_{1z} в N_{1y} , тогда

$$R_{yz}(l) = -R_{yz}(l), \quad (2.3.16)$$

т. е.

$$R_{yz}(l) = 0. \quad (2.3.17)$$

При помощи вращения вокруг оси N_{1x} можно ось N_{1y} совместить с осью N_{1z} , тогда

$$R_y(l) = R_z(l). \quad (2.3.18)$$

Отсюда видно, что в выбранной системе координат корреляционные функции связи равны нулю, а для автокорреляционных функций выполняется условие (2.3.18).

Таким образом, однородное изотропное векторное поле можно охарактеризовать с помощью двух корреляционных функций:

$$R_x(l) = M[X(\rho_1)X(\rho_2)] = G(l); \quad (2.3.19)$$

$$R_y(l) = M[Y(\rho_1)Y(\rho_2)] = F(l), \quad (2.3.20)$$

где $X(\rho)$ — проекция векторного поля $U(\rho)$ на направление вектора $I = N_1N_2$; $Y(\rho)$ — проекция этого поля на какое-либо направление, перпендикулярное к вектору I .

Функцию $R_x(l)$ обычно обозначают $G(l)$ и называют продольной корреляционной функцией векторного поля, а функцию $R_y(l)$ обозначают $F(l)$ и называют поперечной корреляционной функцией.

Для векторного случайного поля вводят также понятие продольной и поперечной структурных функций.

Продольной структурной функцией $B_r(l)$ называют математическое ожидание квадрата разности проекций значений однородного изотропного векторного поля в точках $N_1(\rho_1)$ и $N_2(\rho_2)$ на направление вектора N_1N_2

$$B_r(l) = M\{[X(\rho_2) - X(\rho_1)]^2\}. \quad (2.3.21)$$

Поперечной структурной функцией $B_n(l)$ называют математическое ожидание квадрата проекции разности значений поля в точках N_1 и N_2 на плоскость, перпендикулярную к вектору N_1N_2

$$B_n(l) = M\{[Y(\rho_2) - Y(\rho_1)]^2\}. \quad (2.3.22)$$

Примером векторного поля может служить поле ветра. Выяснению закономерностей структуры поля ветра посвящен ряд теоретических и экспериментальных исследований. Основополагающими в этом направлении явились работы А. Н. Колмогорова и А. М. Обухова. В этих работах теоретическим путем для

локально однородного и изотропного поля установлено, что структурная функция пульсаций скорости ветра описывается формулой

$$B_u(l) = Al^{2/3}, \quad (2.3.23)$$

где A — некоторый коэффициент пропорциональности.

Это соотношение называют «законом 2/3». Экспериментальная обработка данных ветрового зондирования подтвердила выполнение «закона 2/3» в реальной атмосфере в определенной пространственной области. Ограниченность пространственных масштабов в пределах которых удовлетворительно выполняется «закон 2/3», является естественной, так как реальное турбулентное поле ветра может считаться однородным и изотропным лишь для достаточно малых пространственных объемов. При увеличении масштабов начинает сказываться анизотропность, проявляющаяся в неравноправности горизонтальных и вертикальных направлений. Для реальных атмосферных движений больших размеров структурная функция пульсаций ветра описывается соотношением

$$B_u(l) = Cl, \quad (2.3.24)$$

где C — коэффициент пропорциональности, т. е. структурная функция пульсаций ветра пропорциональна расстоянию.

Соотношение (2.3.24), установленное М. И. Юдиным, носит название закона первой степени.

Результаты экспериментальной обработки подтвердили удовлетворительную выполнимость в реальной атмосфере закона первой степени в интервале расстояний $l = 500 \div 1400$ км.

В качестве случайных полей в океанологии рассматривают поле ветра и поля течений в морях и океанах. Источником информации о них служат результаты судовых наблюдений. В частности по этим данным строят гидрометеорологические карты в виде «роз» ветров или течений для участков моря в виде одно-, пяти- или десятиградусных трапедий, ограниченных соответствующими меридианами и параллелями.

Рассмотрим эти данные как реализации векторного процесса $\mathbf{V}(x, y, z)$.

Ограничиваясь моментами первого \mathbf{m}_V и второго \mathbf{D}_V порядка, поставим в соответствие каждой «розе» 5 величин: модуль $|\mathbf{m}_V|$ и направление φ вектора средней скорости; инварианты λ_1 и λ_2 тензора дисперсии \mathbf{D}_V ; направление α большей оси эллипса дисперсии. Кроме того, для характеристики устойчивости течений используем инвариант $Y = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{|\mathbf{m}_V|}$, а для характеристики степени вытянутости эллипса — инвариант $\chi = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

На рис. 2.2 в качестве примера приведено распределение средних скоростей течений и эллипсы дисперсии в северной части Атлантического океана. Из рисунка видно, что совмещенный с вектором средней скорости течения эллипс дисперсии дает

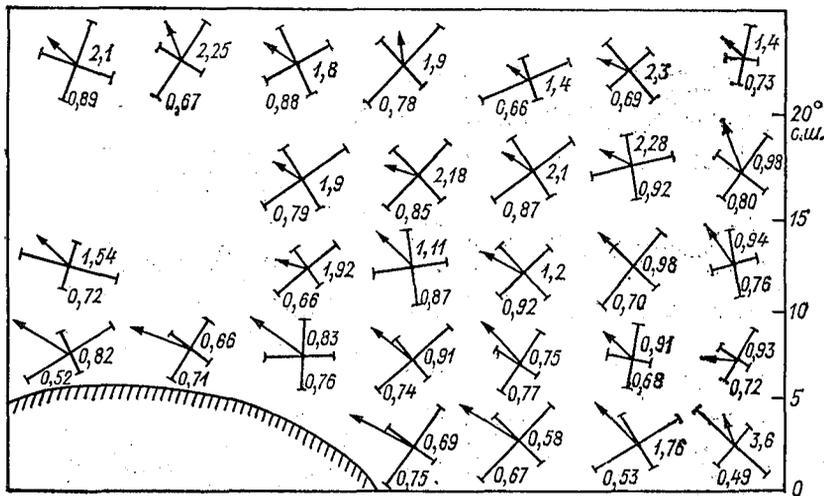


Рис. 2.2

довольно наглядную схему циркуляции. Кроме того, такой способ картирования позволяет перейти к районированию по каждому из параметров или их совокупности; при желании — с использованием методов объективной классификации, приняв систему параметров в качестве элементов призначного пространства. Обратим внимание на отдельные детали рисунка. Эллипсы дисперсий довольно существенно различаются между собой не только суммарной длиной обеих осей, но и степенью вытянутости. Направление φ вектора средней скорости (довольно стабильное в этом районе) не совпадает с направлением α , причем весьма часто φ и α различаются до 90° . Коэффициент вариации скоростей течений Y в большей части района больше 1, лишь в южной прибрежной зоне он уменьшается до 0,6.

Хотя при составлении атласа течений обобщение исходных данных (независимо от года наблюдений) ведется по месяцам, т. е. подчеркиваются возможные изменения распределений скоростей течений от сезона к сезону, однако из-за многомерности этих распределений детально сезонный ход до сих пор не рассмотрен. При введенной выше системе параметров ($|m_v|$, φ , $\lambda_1, \lambda_2, \alpha$) и принятой (помесечной) группировке данных можно для каждого района моря или океана ввести параметрическое описание закономерностей сезонного хода.

На рис. 2.3 приведены сезонные изменения средней скорости течений и инвариантов тензора их дисперсии для ряда районов северной части Атлантического океана. Наблюдается большое разнообразие сезонной ритмики: от постоянства различных ве-

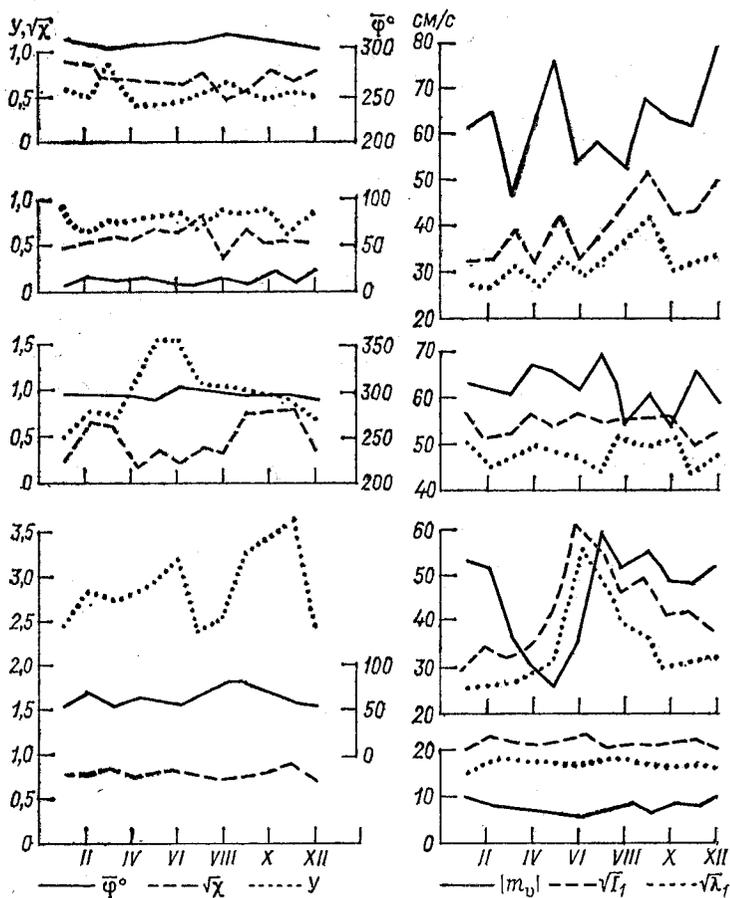


Рис. 2.3

роятностных характеристик течений до сложных синхронных и асинхронных кривых.

Несомненно, что сезонные изменения векторного процесса сложнее, чем скалярного, из-за большей мерности характеристик и что сезонные изменения скоростей океанических течений сложны из-за опосредованной связи с обуславливающими астрофизическими факторами.

Глава 3

Спектральный анализ стационарных случайных процессов и однородных полей

3.1. Спектр случайного процесса

Для исследования неслучайных функций весьма широкое распространение получил гармонический анализ, т. е. представление периодических функций в виде ряда Фурье, а непериодических — в виде интеграла Фурье.

Известно, что если периодическая, с периодом $2T$, функция $f(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле, то ее можно разложить в ряд Фурье в комплексной форме вида

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{\pi k}{T} t}, \quad (3.1.1)$$

где коэффициенты Фурье c_k определяются по формулам

$$c_k = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i \frac{\pi k}{T} t} dt. \quad (3.1.2)$$

Формула (3.1.1) позволяет представить функцию $f(t)$ в виде бесконечной суммы гармонических колебаний с частотами $\omega_k = \frac{\pi k}{T}$ и амплитудами c_k .

Последовательность комплексных чисел c_k называется спектральной последовательностью функции $f(t)$ или спектром. Комплексные числа c_k можно представить в виде

$$c_k = |c_k| e^{i\psi_k}.$$

Последовательность вещественных чисел $|c_k|$ называется амплитудным спектром функции $f(t)$, а последовательность чисел ψ_k — ее фазовым спектром.

Спектр показывает, какого рода колебания преобладают в данной функции, т. е. какова ее внутренняя структура. Так как в рассматриваемом случае частоты принимают дискретные значения $\omega_k = \frac{k\pi}{T}$, то функция вида (3.1.1) называется функцией с дискретным спектром.

Аналогично, если непериодическая функция $f(t)$, заданная на всей вещественной оси, удовлетворяет условиям Дирихле и абсолютно интегрируема,

т. е. для нее существует несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$, то ее можно представить в виде интеграла Фурье

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (3.1.3)$$

где

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.1.4)$$

Формулы (3.1.3) и (3.1.4) называются формулами преобразования Фурье. Формулу (3.1.4) называют прямым преобразованием Фурье, а формулу (3.1.3) — обратным преобразованием Фурье.

Сумма (3.1.1) по дискретным значениям частот в формуле (3.1.3) заменилась интегралом по всем частотам, а постоянные коэффициенты c_k заменились функцией $F(\omega)$ непрерывного аргумента ω .

Смысл функции $F(\omega)$ виден из того, что на малый интервал частот $(\omega, \omega + d\omega)$ в интеграле (3.1.3) приходится слагаемое $F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$, т. е. $F(\omega) d\omega$ есть амплитуда, соответствующая данному интервалу частот. Следовательно, $F(\omega)$ представляет собой плотность амплитуды. Функцию $F(\omega)$ называют спектральной плотностью функции $f(t)$, а функцию вида (3.1.3) — функцией с непрерывным спектром.

Таким образом, мы видим, что функции с дискретным спектром ставится в соответствие ее спектральная последовательность комплексных чисел c_k ; функция $f(t)$ с непрерывным спектром ставится в соответствие другая функция — ее спектральная плотность $F(\omega)$.

Из формул (3.1.1), (3.1.2) или (3.1.3) или (3.1.4) следует, что, задав функцию $f(t)$, можно однозначно определить ее спектр (спектральную плотность), и, наоборот, задав спектр (спектральную плотность), можно однозначно определить функцию $f(t)$.

Рассмотрим применение аппарата спектральных разложений к стационарным случайным функциям и однородным изотропным полям.

Пусть реализации стационарного случайного процесса заданы на промежутке $[-T, T]$, тогда каждую реализацию можно разложить в ряд Фурье (3.1.1). При этом каждой реализации будут соответствовать свои значения коэффициентов разложения c_k . Следовательно, при представлении случайного процесса $X(t)$ в виде ряда гармонических колебаний

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i\omega_k t} \quad (3.1.5)$$

с частотами $\omega_k = \frac{k\pi}{T}$ следует рассматривать амплитуды разложения X_k как случайные величины.

Будем считать, что математическое ожидание случайного процесса равно нулю, $m_x = 0$. Если это не так, то будем рассматривать центрированный случайный процесс. Тогда, очевидно, должны равняться нулю математические ожидания всех случайных величин X_k .

Для упрощения выкладок часто удобно использовать комплексные случайные функции, рассматривая вещественные случайные функции, с которыми мы оперировали до сих пор и с которыми только и имеют дело на практике, как частный случай комплексных случайных функций.

Комплексной случайной функцией будем называть функцию вида

$$Z(t) = X(t) + iY(t), \quad (3.1.6)$$

где $X(t)$ и $Y(t)$ — вещественные случайные функции.

Вещественная случайная функция при этом рассматривается как частный случай комплексной функции, у которой $Y(t) = 0$.

Определим характеристики комплексной случайной функции: математическое ожидание; дисперсию; корреляционную функцию таким образом, чтобы для вещественных случайных функций (при $Y(t) = 0$) они совпали с ранее введенными. Математическим ожиданием комплексной случайной функции будем называть неслучайную функцию $m_z(t)$, определяемую в виде

$$m_z(t) = m_x(t) + im_y(t). \quad (3.1.7)$$

Дисперсией комплексной случайной функции $D_z(t)$ будем называть математическое ожидание квадрата модуля отклонения случайной функции от ее математического ожидания

$$D_z(t) = M \{ |Z(t) - m_z(t)|^2 \}. \quad (3.1.8)$$

Так как

$$Z(t) - m_z(t) = [X(t) - m_x(t)] + i[Y(t) - m_y(t)], \quad (3.1.9)$$

то

$$|Z(t) - m_z(t)|^2 = [X(t) - m_x(t)]^2 + [Y(t) - m_y(t)]^2. \quad (3.1.10)$$

Тогда

$$D_z(t) = M \{ [X(t) - m_x(t)]^2 \} + M \{ [Y(t) - m_y(t)]^2 \} = D_x(t) + D_y(t). \quad (3.1.11)$$

Отсюда видно, что дисперсия комплексной случайной функции является вещественной функцией.

Для вещественной функции $D_y(t) = 0$, следовательно,

$$D_z(t) = D_x(t).$$

Корреляционной функцией комплексной случайной функции будем называть неслучайную функцию вида

$$R_z(t_1, t_2) = M \{ [Z(t_1) - m_z(t_1)] [Z^*(t_2) - m_z^*(t_2)] \}. \quad (3.1.12)$$

Звездочка означает, что берется комплексно-сопряженная величина.

При $t_1 = t_2 = t$ корреляционная функция обращается в дисперсию

$$\begin{aligned} R_z(t, t) &= M \{ [Z(t) - m_z(t)] [Z^*(t) - m_z^*(t)] \} = \\ &= M \{ |Z(t) - m_z(t)|^2 \} = D_z(t). \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Корреляционную функцию комплексной случайной функции можно выразить через характеристики ее вещественной и мнимой частей.

Обозначив

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_x(t);$$

$$\overset{\circ}{Y}(t) = Y(t) - m_y(t),$$

получим

$$\begin{aligned} R_z(t_1, t_2) &= M \{ [\overset{\circ}{X}(t_1) + i\overset{\circ}{Y}(t_1)] [\overset{\circ}{X}(t_2) - i\overset{\circ}{Y}(t_2)] \} = \\ &= M [\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_2)] + M [\overset{\circ}{Y}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2)] + i \{ M [\overset{\circ}{Y}(t_1) \overset{\circ}{X}(t_2)] - \\ &\quad - M [\overset{\circ}{X}(t_1) \overset{\circ}{Y}(t_2)] \} = R_x(t_1, t_2) + R_y(t_1, t_2) + \\ &\quad + i [R_{xy}(t_2, t_1) - R_{xy}(t_1, t_2)], \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

где $R_{xy}(t_1, t_2)$ — корреляционная функция связи случайных функций $X(t)$ и $Y(t)$.

Если действительная и мнимая части комплексной случайной функции не коррелированы между собой, т. е. $R_{xy}(t_1, t_2) = 0$, то

$$R_z(t_1, t_2) = R_x(t_1, t_2) + R_y(t_1, t_2). \quad (3.1.15)$$

Если вещественная и мнимая части комплексной случайной функции являются стационарными и стационарно связанными случайными функциями, то $m_z(t) = m_z$, $D_z(t) = D_z$ есть постоянные величины, а $R_z(t_1, t_2) = R_z(t_2 - t_1)$ зависит только от одного параметра $\tau = t_2 - t_1$.

Комплексную случайную функцию $Z(t)$, обладающую этими свойствами, т. е. $m_z = \text{const}$ и $R_z(t_1, t_2) = R_z(\tau)$ будем называть стационарной в широком смысле.

Для корреляционной функции $R_z(t_1, t_2)$ выполняется свойство

$$R_z(t_1, t_2) = R_z^*(t_2, t_1), \quad (3.1.16)$$

т. е. перестановка аргументов у корреляционной функции дает выражение, комплексно-сопряженное с исходным.

В частности, для стационарной комплексной функции выполняется равенство

$$R_z(-\tau) = R_z^*(\tau),$$

которое для вещественной функции выражает свойство четности

$$R_z(-\tau) = R_z(\tau).$$

Корреляционная функция связи $R_{z_1 z_2}(t_1, t_2)$ системы двух комплексных случайных функций $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ определяется в виде

$$R_{z_1 z_2}(t_1, t_2) = M \{ [Z_1(t_1) - m_{z_1}(t_1)] [Z_2^*(t_2) - m_{z_2}^*(t_2)] \}. \quad (3.1.17)$$

Для функции $R_{z_1 z_2}(t_1, t_2)$ выполняется соотношение

$$R_{z_1 z_2}(t_1, t_2) = R_{z_1 z_2}^*(t_2, t_1). \quad (3.1.18)$$

Система комплексных случайных функций $Z_1(t)$ и $Z_2(t)$ называется стационарной в широком смысле, если, помимо стационарности каждой из функций в этом смысле выполняется еще соотношение

$$R_{z_1 z_2}(t_1, t_2) = R_{z_1 z_2}(t_2 - t_1) = R_{z_1 z_2}(\tau). \quad (3.1.19)$$

Выясним, каким условиям должны удовлетворять случайные величины X_k , чтобы случайный процесс $X(t)$, представленный в виде (3.1.5), был стационарным в широком смысле, т. е. чтобы его корреляционная функция $R_x(t + \tau, t)$ зависела только от одного аргумента τ и не зависела от t .

По определению корреляционной функции комплексного случайного процесса (3.1.12) имеем

$$R_x(t + \tau, t) = M[X(t + \tau)X^*(t)]. \quad (3.1.20)$$

Согласно (3.1.5), можно записать

$$X(t + \tau) = \sum_k X_k e^{i\omega_k(t + \tau)}; \quad (3.1.21)$$

$$X^*(t) = \sum_l X_l^* e^{-i\omega_l t}. \quad (3.1.22)$$

Подставляя (3.1.21) и (3.1.22) в (3.1.20), получаем

$$\begin{aligned} R_x(t + \tau, t) &= M \left[\sum_k X_k e^{i\omega_k(t + \tau)} \sum_l X_l^* e^{-i\omega_l t} \right] = \\ &= M \left\{ \sum_k \sum_l X_k X_l^* e^{i[\omega_k(t + \tau) - \omega_l t]} \right\} = \\ &= \sum_k \sum_l M[X_k X_l^*] e^{i[\omega_k(t + \tau) - \omega_l t]}. \end{aligned} \quad (3.1.23)$$

Для того чтобы корреляционная функция $R_x(t + \tau, t)$ не зависела от t , необходимо, чтобы в двойной сумме, стоящей в правой части формулы (3.1.23), содержались только те слагаемые, для которых не зависят от t выражение $e^{i[\omega_k(t + \tau) - \omega_l t]}$, что имеет место при $k = l$.

Следовательно, для того, чтобы случайная функция $X(t)$ была стационарной, должны выполняться условия

$$M[X_k X_l^*] = 0 \text{ при } k \neq l. \quad (3.1.24)$$

Условие (3.1.24) означает, что случайные величины X_k должны быть попарно некоррелированными.

При условии (3.1.24) формула (3.1.23) запишется в виде

$$R_x(\tau) = \sum_k M[X_k X_k^*] e^{i\omega_k \tau}. \quad (3.1.25)$$

Величины $M[X_k X_k^*]$ есть дисперсии случайных величин X_k . Обозначим их через D_k , тогда получим

$$R_x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k e^{i\omega_k \tau}. \quad (3.1.26)$$

Для существования корреляционной функции ряд (3.1.26) должен быть сходящимся, т. е. должен сходиться ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |D_k e^{i\omega_k \tau}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_k. \quad (3.1.27)$$

Мы предположили, что случайный стационарный процесс может быть разложен в ряд (3.1.5), ничем не оговорив условий

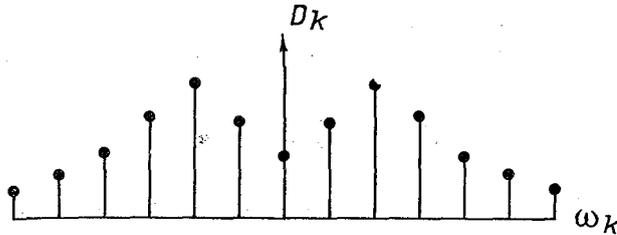


Рис. 3.1

этого разложения. При этом получили, что случайные амплитуды X_k являются взаимно некоррелированными случайными величинами, а корреляционная функция определяется в виде ряда (3.1.26).

Советским математиком Е. Е. Слуцким было показано, что всякий стационарный случайный процесс, имеющий корреляционную функцию вида (3.1.26), может быть представлен в виде ряда (3.1.5).

Для случайного стационарного процесса спектром называют распределение дисперсий D_k случайных амплитуд по частотам ω_k . Так как ряд (3.1.27) должен сходиться, то его общий член должен стремиться к нулю, т. е. с возрастанием частоты ω_k соответствующие значения дисперсии стремятся к нулю.

Спектр случайного процесса можно изобразить в виде графика, откладывая по оси абсцисс значения амплитуд, а по оси ординат — соответствующие им дисперсии (рис. 3.1).

Дисперсию случайного процесса D_x получим, положив в формуле (3.1.26) $\tau = 0$:

$$D_x = R_x(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_x. \quad (3.1.28)$$

Следовательно, дисперсия случайного процесса равна сумме ряда, составленного из всех ординат спектра.

Стационарный случайный процесс вида (3.1.5) может быть как комплексным, так и вещественным.

Процесс (3.1.5) будет вещественным, если каждому k соответствует в сумме (3.1.5) пара комплексно-сопряженных слагаемых $X_k e^{i\omega_k t}$ и $X_k^* e^{-i\omega_k t}$.

Тогда

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (X_k e^{i\omega_k t} + X_k^* e^{-i\omega_k t}). \quad (3.1.29)$$

Записав X_k в виде

$$X_k = \frac{A_k}{2} - i \frac{B_k}{2}; \quad X_k^* = \frac{A_k}{2} + i \frac{B_k}{2}, \quad (3.1.30)$$

получим

$$\begin{aligned} X_k e^{i\omega_k t} + X_k^* e^{-i\omega_k t} &= \left(\frac{A_k}{2} - i \frac{B_k}{2} \right) \times \\ &\times (\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t) + \left(\frac{A_k}{2} + i \frac{B_k}{2} \right) (\cos \omega_k t - i \sin \omega_k t) = \\ &= A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t. \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

Подставляя (3.1.31) в (3.1.29), получим вещественный случайный стационарный процесс

$$X(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t. \quad (3.1.32)$$

где A_k и B_k — вещественные случайные величины с математическими ожиданиями, равными нулю.

Применяя, в частности, условие (3.1.24) для двух различных слагаемых $X_k e^{i\omega_k t}$ и $X_k^* e^{-i\omega_k t}$, получаем

$$M[X_k (X_k^*)^*] = M[X_k X_k] = 0. \quad (3.1.33)$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} M[X_k X_k] &= M\left[\left(\frac{A_k}{2} - i \frac{B_k}{2}\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{4} \{M[A_k^2] - M[B_k^2] - 2iM[A_k B_k]\} = 0. \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Приравнивая нулю вещественную и мнимую части, получаем

$$M[A_k^2] = M[B_k^2] = d_k; \quad (3.1.35)$$

$$M[A_k B_k] = 0, \quad (3.1.36)$$

т. е. случайные величины A_k и B_k являются некоррелированными с одинаковыми дисперсиями d_k . Из равенства (3.1.24) следует попарная некоррелированность величин A_k, A_l, B_k, B_l при $k \neq l$.

Выразим D_k через d_k

$$\begin{aligned} D_k &= M[X_k X_k^*] = M\left[\left(\frac{A_k}{2} - i \frac{B_k}{2}\right)\left(\frac{A_k}{2} + i \frac{B_k}{2}\right)\right] = \\ &= \frac{1}{4} \{M[A_k^2] + M[B_k^2]\} = \frac{d_k}{2}. \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

Тогда формула для корреляционной функции (3.1.26) запишется в виде

$$R_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k [e^{i\omega_k \tau} + e^{-i\omega_k \tau}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d_k}{2} 2 \cos \omega_k \tau, \quad (3.1.38)$$

т. е.

$$R_x(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \cos \omega_k \tau. \quad (3.1.39)$$

Для вещественного случайного процесса частотам ω_k и $-\omega_k$ соответствуют одинаковые амплитуды d_k , следовательно, спектр вещественного случайного процесса симметричен относительно оси ординат (см. рис. 3.1), и его можно строить только для положительных частот.

3.2. Спектральная плотность стационарного случайного процесса

Рассмотрим теперь стационарный случайный процесс $X(t)$, заданный на всей вещественной оси.

Для определения корреляционной функции в этом случае осуществим в формуле (3.1.26) предельный переход, устремив T к бесконечности, что равносильно беспредельному уменьшению разности между соседними частотами

$$\Delta\omega_k = \omega_k - \omega_{k-1}.$$

Обозначим через $S_x(\omega)$ среднюю плотность дисперсии в диапазоне частот $\Delta\omega_k$. Тогда приближенно можно записать корреляционную функцию (3.1.26) в виде интегральной суммы

$$R_x(\tau) \approx \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_x(\omega_k) e^{i\omega_k \tau} \Delta\omega_k. \quad (3.2.1)$$

В пределе при $T \rightarrow \infty$ и, следовательно, $\Delta\omega_k \rightarrow 0$, интегральная сумма превратится в интеграл

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.2.2)$$

Функция $S_x(\omega)$ есть предел средней плотности дисперсии при стремлении к нулю интервала частот $\Delta\omega_k$, т. е. представляет собой плотность дисперсии случайного процесса $X(t)$ при данной частоте ω . Эта функция называется спектральной плотностью стационарного случайного процесса $X(t)$. Спектральная плотность является неотрицательной функцией при всех значениях частоты ω .

Из формулы (3.2.2) видно, что корреляционная функция и спектральная плотность являются взаимными преобразованиями Фурье. Исходя из этого, в соответствии с (3.1.4), можем записать

$$S_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3.2.3)$$

Так как спектральная плотность является неотрицательной функцией, то, следовательно, корреляционной функцией стационарного случайного процесса может служить только функция, преобразование Фурье которой является неотрицательной функцией при всех значениях частоты ω .

А. Я. Хинчин показал, что и каждая функция, являющаяся обратным преобразованием Фурье от неотрицательной функции, является корреляционной функцией некоторого стационарного случайного процесса.

Полагая в формуле (3.2.2) $\tau=0$, получим выражение для дисперсии случайной функции

$$D_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (3.2.4)$$

Отсюда видно, что если случайная функция $X(t)$ имеет конечную дисперсию, то функция $S_x(\omega)$ является интегрируемой. Функция

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} S_x(\omega) d\omega \quad (3.2.5)$$

называется спектральной функцией или интегральным спектром стационарной случайной функции.

Спектральная плотность при некоторых значениях ω может обращаться в бесконечность, оставаясь интегрируемой в окрестности этих значений.

Из формул (3.2.2) и (3.2.3) видно, что, зная корреляционную функцию, можно найти спектральную плотность и наоборот. Однако спектральная плотность более наглядно представляет вклад различных частот в общую дисперсию процесса, т. е. характеризует внутреннюю структуру случайного процесса. Вследствие этого использование ее в различных приложениях является более удобным.

Вместо спектральной плотности $S_x(\omega)$ часто рассматривают нормированную спектральную плотность $s_x(\omega)$

$$s_x(\omega) = \frac{S_x(\omega)}{\int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega} = \frac{S_x(\omega)}{D_x}. \quad (3.2.6)$$

Нормированная корреляционная функция и нормированная спектральная плотность также являются взаимными преобразованиями Фурье и определяются по формулам

$$r_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega; \quad (3.2.7)$$

$$s_x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} r_x(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3.2.8)$$

По формуле (3.2.2) имеем

$$S_x(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau. \quad (3.2.9)$$

Для вещественного случайного процесса, полагая $\tau = -\tau'$ и учитывая четность $R_x(\tau)$, получим

$$\begin{aligned} S_x(-\omega) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\infty}^{-\infty} R_x(-\tau') e^{-i\omega\tau'} d\tau' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau') e^{-i\omega\tau'} d\tau' = S_x(\omega). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Отсюда видно, что для вещественного случайного процесса $S_x(\omega)$ также является четной функцией, ее вещественность следует из вещественности $R_x(\tau)$.

В силу четности $R_x(\tau)$ и $S_x(\omega)$ для вещественного случайного процесса можно записать

$$R_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \quad (3.2.11)$$

$$S_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (3.2.12)$$

Аналогичные формулы можем записать для нормированной корреляционной функции $r_x(\tau)$ и нормированной спектральной плотности $s_x(\omega)$ вещественного случайного процесса

$$r_x(\tau) = 2 \int_0^{\infty} s_x(\omega) \cos \omega \tau d\omega; \quad (3.2.13)$$

$$s_x(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} r_x(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (3.2.14)$$

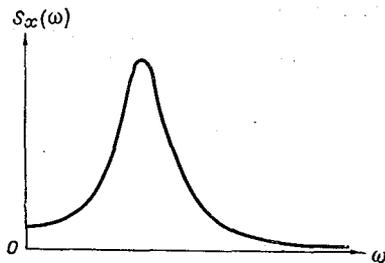


Рис. 3.2

Функцию $S_x(\omega)$ можно изобразить графически (рис. 3.2). Так как

$$D_x = R_x(0) = 2 \int_0^{\infty} S_x(\omega) d\omega, \quad (3.2.15)$$

то дисперсия есть удвоенная площадь, ограниченная кривой $S_x(\omega)$, построенной для $\omega \geq 0$, или площадь, ограниченная кривой $S_x(\omega)$ во всем интервале $(-\infty, \infty)$.

Если построить график нормированной спектральной плотности, то площадь, лежащая под ним, равна единице, так как

$$r_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) d\omega = 1. \quad (3.2.16)$$

Определим спектральные плотности стационарных случайных процессов, рассмотренных в п. 1.3.

Пример 1. Пусть стационарный случайный процесс $X(t)$ имеет нормированную корреляционную функцию

$$r_x(\tau) = e^{-\alpha |\tau|}, \quad \alpha > 0. \quad (3.2.17)$$

Согласно (3.2.8), нормированная спектральная плотность при этом определится в виде

$$\begin{aligned} s_x(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-i\omega)\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-(\alpha+i\omega)\tau} d\tau \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha-i\omega} + \frac{1}{\alpha+i\omega} \right] = \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Это четная функция, достигающая наибольшего значения, равного $\frac{1}{\pi\alpha}$, при частоте $\omega = 0$.

Рассмотрим зависимость корреляционной функции и соответствующей ей спектральной плотности от параметра α . На рис. 3.3 а, б приведены соответ-

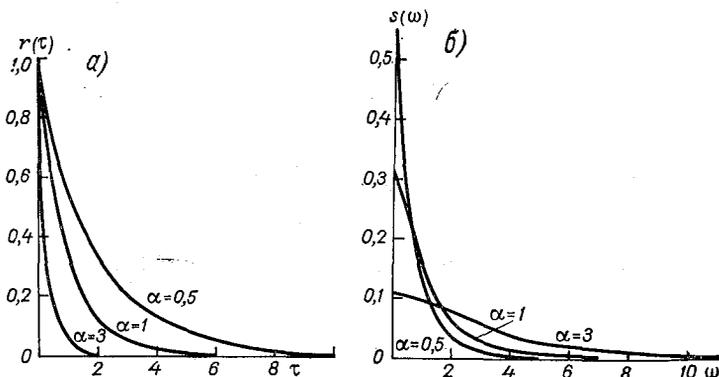


Рис. 3.3

ственно графики $r(\tau)$ и $s(\omega)$ для значений $\alpha = 0,5; 1; 3$. Видно, что корреляционная функция с ростом параметра α убывает быстрее, т. е. корреляционная связь между сечениями случайной функции $X(t)$ и $X(t + \tau)$ при одном и том же интервале τ уменьшается с ростом α (см. рис. 3.3 а).

В п. 1.6 мы называли величину T_1 (1.6.7) временем корреляции. Для рассматриваемого случая

$$T_1 = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{1}{\alpha}, \quad (3.2.19)$$

т. е. временем корреляции, характеризующим скорость затухания корреляционной связи, является величина $1/\alpha$.

Сравнение кривых на рис. 3.3 б показывает, что при малых значениях α спектральная плотность быстро убывает с ростом частоты ω , т. е. преобладающее значение в спектре случайного процесса имеют малые частоты.

Процессы такого типа называют узкополосными, так как энергия такого процесса сосредоточена в узкой полосе частот. Узкополосному процессу соответствует большое время корреляции, т. е. наличие корреляционной связи

между сечениями случайного процесса, медленно убывающей с возрастанием интервала между сечениями.

С увеличением α , т. е. с уменьшением времени корреляции, спектральная плотность изменяется более плавно, медленнее убывая с ростом частоты. Для больших значений α спектральная плотность с увеличением ω убывает весьма медленно. Такие процессы называют широкополосными. Для них характерно быстрое убывание корреляционной связи между сечениями случайного процесса.

Случайный процесс, спектральная плотность которого постоянна во всем диапазоне частот $S_x(\omega) = S_x(0) = \text{const}$, называют «белым шумом» по аналогии с белым светом, у которого спектральный состав примерно однороден. Такой процесс физически не реализуем, так как его дисперсия $D_x =$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega \text{ обращается в бесконечность. Однако его можно рассматри-}$$

вать как предел реального широкополосного случайного процесса при стремлении α к бесконечности.

Часто случайный процесс, спектральная плотность которого мало изменяется на достаточно большом диапазоне частоты, приближенно рассматривают как белый шум, пренебрегая большими частотами. Белый шум представляет собой случайный процесс, все сечения которого являются некоррелированными, такой процесс иногда называют чисто случайным процессом. Примером такого процесса являются практически независимые между собой ошибки измерений некоторых гидрометеорологических параметров.

Пример 2. Для нормированной корреляционной функции вида

$$r(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}, \quad \alpha > 0 \quad (3.2.20)$$

функция

$$\begin{aligned} s(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau^2} e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\left(\tau + \frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2} d\tau. \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Последний интеграл заменой переменной сводится к интегралу Пуассона, равному $\sqrt{\pi}$. Отсюда

$$s(\omega) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}. \quad (3.2.22)$$

Из рис. 3.4 а, б, на которых приведены графики $r(\tau)$ и $s(\omega)$ для $\alpha = 0,5$; 1; 3, видно, что характер зависимостей $r(\tau)$ и $s(\omega)$ качественно такой же, как и в предыдущем примере, изменился лишь вид кривых.

Пример 3.

$$r(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (3.2.23)$$

Выразим $\cos \beta\tau$ через показательные функции по формуле Эйлера

$$\cos \beta\tau = \frac{1}{2} (e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}). \quad (3.2.24)$$

Тогда

$$s(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} (e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau}) d\tau \right] = \\ = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-i(\omega-\beta)\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} e^{-i(\omega+\beta)\tau} d\tau \right]. \quad (3.2.25)$$

Аналогично (3.2.18), получим

$$s(\omega) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + (\omega - \beta)^2)} + \frac{\alpha}{\pi[\alpha^2 + (\omega + \beta)^2]} \right\} = \\ = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\omega^2\beta^2}. \quad (3.2.26)$$

В данном случае корреляционная функция и спектральная плотность определяются двумя параметрами α и β . Параметр α определяет скорость

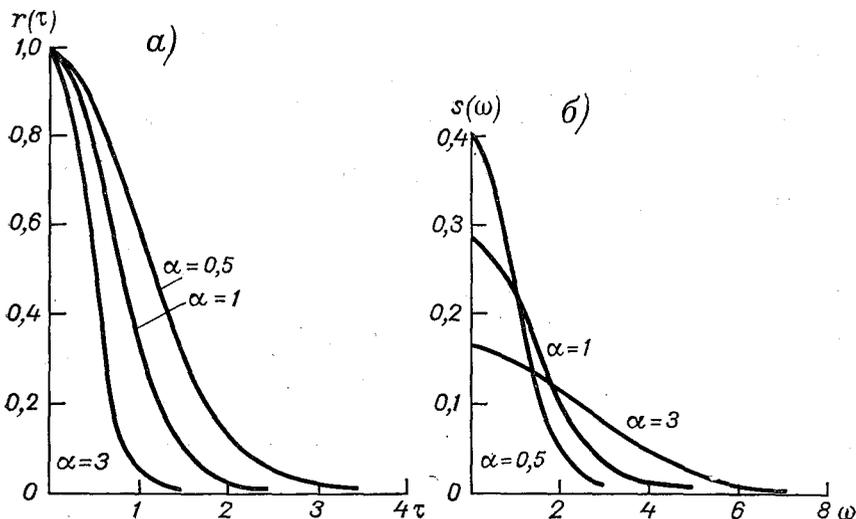


Рис. 3.4

затухания амплитуды колебаний корреляционной функции; параметр β определяет период этого колебательного процесса.

Выясним характер зависимости корреляционной функции и соответствующей ей спектральной плотности от соотношения этих параметров.

На рис. 3.5 а, б приведены графики функций $r(\tau)$ и $s(\omega)$ для трех случаев: 1) $\alpha = 0,5$, $\beta = 2$ (кривая I); 2) $\alpha = 1$, $\beta = 1$ (кривая II); 3) $\alpha = 2$, $\beta = 0,5$ (кривая III). Из рис. 3.5 видно, что при малой величине отношения α/β (кривая I $\alpha/\beta = 0,25$) график корреляционной функции близок к гармоническим колебаниям частоты ω . В этом случае спектральная плотность имеет ярко выраженный максимум при $\omega = \beta$; в спектре случайного процесса преобладают частоты, близкие к частоте β , т. е. имеется узкополосный про-

цесс, спектральная плотность которого имеет ярко выраженный максимум при $\omega = \beta$. Основная энергия процесса сосредоточена на частотах, близких к β . При этом график спектральной плотности вытягивается, а ширина полосы спектра уменьшается с уменьшением α , т. е. с увеличением амплитуды колебаний корреляционной функции.

С увеличением отношения α/β ускоряется затухание корреляционной функции; максимум спектральной плотности становится более размытым.

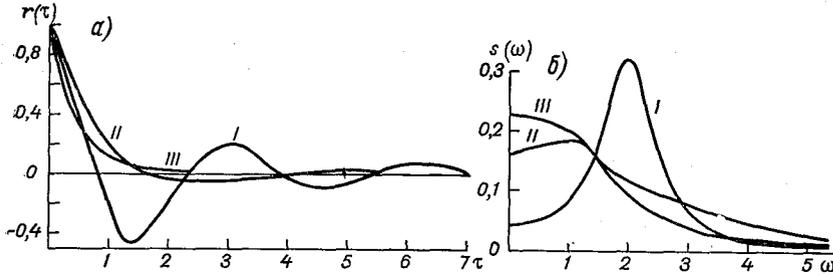


Рис. 3.5

При больших значениях α/β (кривая III $\alpha/\beta = 4$) корреляционная функция практически отлична от нуля только при небольших значениях τ . При этом спектральная плотность с ростом частоты ω изменяется медленно, оставаясь в значительном диапазоне часто близкой к начальному значению $s(0)$, процесс становится широкополосным.

Пример 4.

$$r(\tau) = e^{-\alpha\tau^2} \cos \beta\tau, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (3.2.27)$$

Заменяя $\cos \beta\tau$ по (3.2.24), получаем

$$s(\omega) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau^2 + i(\omega - \beta)\tau} d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\tau^2 - i(\omega + \beta)\tau} d\tau \right]. \quad (3.2.28)$$

Используя пример 2, получим

$$s(\omega) = \frac{1}{4\sqrt{\pi\alpha}} \left[e^{-\frac{(\omega - \beta)^2}{4\alpha}} + e^{-\frac{(\omega + \beta)^2}{4\alpha}} \right]. \quad (3.2.29)$$

На рис. 3.6 а, б приведены графики $r(\tau)$ и $s(\omega)$ для тех же значений α и β , что и на рис. 3.5.

Характер зависимости корреляционной функции и спектральной плотности от соотношения параметров качественно тот же, что и в примере 4.

Пример 5.

$$r(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right), \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (3.2.30)$$

Заменяя $\sin \beta|\tau|$ показательными функциями по формуле Эйлера

$$\sin \beta|\tau| = \frac{1}{2i} (e^{i\beta|\tau|} - e^{-i\beta|\tau|}), \quad (3.2.31)$$

получаем

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau d\tau + \frac{\alpha}{2i\beta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha-i\beta)|\tau|-i\omega\tau} d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\alpha+i\beta)|\tau|-i\omega\tau} d\tau \right\}. \quad (3.2.32)$$

Первое слагаемое есть $s(\omega)$ в примере 3, слагаемые в фигурных скобках есть $s(\omega)$ в примере 1, получающиеся при замене α соответственно на $\alpha - i\beta$ и $\alpha + i\beta$.

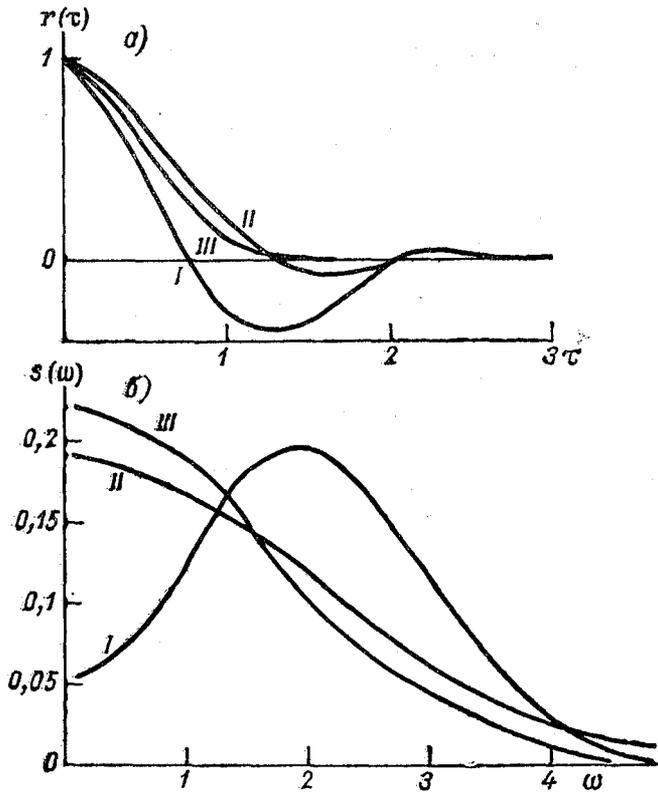


Рис. 3.6

Отсюда получаем

$$s(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)^2 - 4\omega^2\beta^2} + \frac{4}{2\pi i\beta} \times \left\{ \frac{\alpha}{\omega^2 + (\alpha - i\beta)^2} + \frac{\alpha}{\omega^2 + (\alpha + i\beta)^2} \right\} = \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^3}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2\omega^2}. \quad (3.2.33)$$

Графики функций $r(\tau)$ и $s(\omega)$ приведены на рис. 3.7 а, б для тех же значений α и β , что и на рис. 3.5.

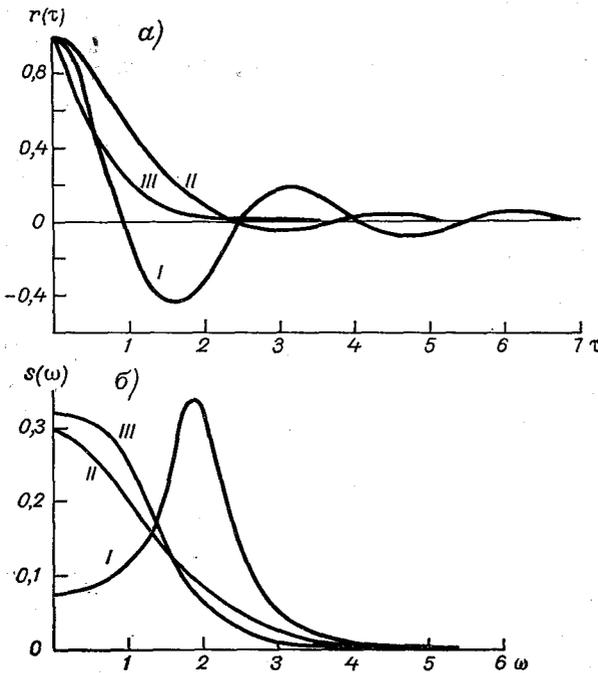


Рис. 3.7

Пример 6.

$$r(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{\tau}{\tau_0} & \text{при } 0 \leq \tau \leq \tau_0 \\ 0 & \text{при } \tau > \tau_0. \end{cases} \quad (3.2.34)$$

Считая случайный процесс вещественным, можем вычислять спектральную плотность по формуле (3.2.14)

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau_0} \left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) \cos \omega \tau \, d\tau. \quad (3.2.35)$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получим

$$s(\omega) = \frac{1}{\pi \omega^2 \tau_0} (1 - \cos \omega \tau_0). \quad (3.2.36)$$

Значение $s(0)$ нужно рассматривать как предел $s(\omega)$ при стремлении ω к нулю

$$s(0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \omega^2 \tau_0} (1 - \cos \omega \tau_0) = \frac{\tau_0}{2\pi}. \quad (3.2.37)$$

На рис. 3.8 а, б приведены графики функций $r(\tau)$ и $s(\omega)$ при значениях параметра $\tau_0 = 1, 2, 3$. Из рисунка видно, что изменение спектральной плотности с частотой представляет собой колебательный процесс: $s(\omega)$ принимает минимальные значения

$$s(\omega) = 0 \quad \text{при} \quad \omega = \frac{2k\pi}{\tau_0}, \quad k = 1, 2, \dots$$

и достигает максимальных значений, уменьшающихся с ростом частоты ω .

С увеличением параметра τ_0 растут значения относительных максимумов спектральной плотности, и более ярко выраженным становится преобладание

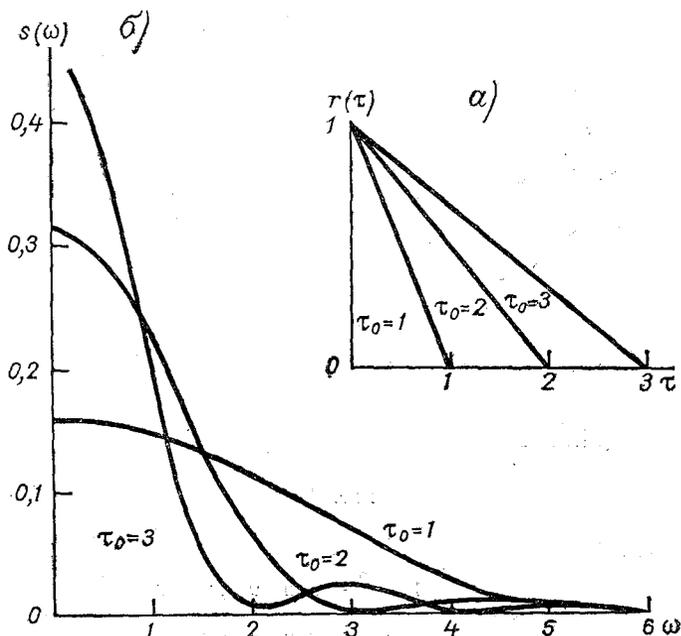


Рис. 3.8

в спектре случайного процесса отдельных дискретных частот, а именно частоты $\omega = 0$.

Во всех рассмотренных случаях спектральные плотности являются неотрицательными функциями при всех значениях частоты ω . Следовательно, в соответствии с теоремой Хинчина, функции $r(\tau)$, являющиеся обратными преобразованиями Фурье спектральных плотностей, действительно являются корреляционными функциями стационарных случайных процессов.

Пример 7. Рассмотрим функцию

$$r(\tau) = (1 + \beta |\tau|) e^{-\alpha |\tau|}, \quad \alpha > 0. \quad (3.238)$$

Выясним при каких значениях параметра β она может служить нормированной корреляционной функцией стационарного случайного процесса. Най-

дем для нее нормированную спектральную плотность по формуле (3.2.15)

$$s(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau + \frac{\beta}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\tau| e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau. \quad (3.2.39)$$

Обозначив

$$I(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha|\tau| - i\omega\tau} d\tau = \frac{\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} \quad (3.2.40)$$

и пользуясь правилом дифференцирования по параметру под знаком интеграла, можем записать

$$s(\omega) = I(\alpha) - \beta \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2(\alpha - \beta) + \alpha^2(\alpha + \beta)}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}. \quad (3.2.41)$$

Эта функция будет являться неотрицательной функцией при всех значениях частоты ω , только при выполнении неравенства $\alpha - \beta \geq 0$. Следовательно, функция (3.2.38) может служить корреляционной функцией стационарного случайного процесса только при $\beta \leq \alpha$.

При максимальном значении $\beta = \alpha$ спектральная плотность запишется в виде

$$s(\omega) = \frac{2\alpha^3}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2}. \quad (3.2.42)$$

Пример 8. Рассмотрим функцию более общего вида

$$r(\tau) = (1 + \alpha|\tau| + \beta\tau^2) e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (3.2.43)$$

Выясним, при каких значениях параметра β она может служить корреляционной функцией стационарного случайного процесса.

Используя обозначение (3.2.40), можем записать спектральную плотность в виде

$$\begin{aligned} s(\omega) &= I(\alpha) - \alpha \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} + \beta^2 \frac{d^2I(\alpha)}{d\alpha^2} = \\ &= \frac{2\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^3} [\alpha^2(\alpha^2 + \beta) + \omega^2(\alpha^2 - 3\beta)]. \end{aligned} \quad (3.2.44)$$

Из условия неотрицательности спектральной плотности при всех значениях частоты должно выполняться соотношение $\alpha^2 - 3\beta \geq 0$, т.е. $\beta \leq \frac{\alpha^2}{3}$.

При максимальном значении $\beta = \frac{\alpha^2}{3}$ спектральная плотность имеет вид

$$s(\omega) = \frac{8\alpha^5}{3\pi(\omega^2 + \alpha^2)^3}. \quad (3.2.45)$$

3.3. Взаимный спектральный анализ

Для системы стационарных и стационарно связанных случайных процессов $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$, помимо спектральных плотностей $S_{x_i}(\omega)$ каждого процесса, рассматривают еще взаимные спектральные плотности $S_{x_i x_j}(\omega)$, которые представляют собой преобразования Фурье от соответствующих взаимных корреляционных функций.

ляционных функций

$$S_{x_i x_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_{x_i x_j}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (3.3.1)$$

При этом взаимные корреляционные функции, являющиеся обратными преобразованиями Фурье от взаимных спектральных плотностей определяются по формулам

$$R_{x_i x_j}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{x_i x_j}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (3.3.2)$$

Как уже было отмечено, взаимная корреляционная функция не обладает свойством четности.

Обозначим через $R_{x_i x_j}^+(\tau)$ четную часть взаимной корреляционной функции $R_{x_i x_j}(\tau)$, а через $R_{x_i x_j}^-(\tau)$ — ее нечетную часть. Тогда можем записать

$$R_{x_i x_j}(\tau) = R_{x_i x_j}^+(\tau) + R_{x_i x_j}^-(\tau), \quad (3.3.3)$$

где

$$R_{x_i x_j}^+(\tau) = \frac{1}{2} [R_{x_i x_j}(\tau) + R_{x_i x_j}(-\tau)];$$

$$R_{x_i x_j}^-(\tau) = \frac{1}{2} [R_{x_i x_j}(\tau) - R_{x_i x_j}(-\tau)].$$

Подставляя (3.3.3) в (3.3.1) и выражая $e^{-i\omega\tau}$ по формуле Эйлера

$$e^{-i\omega\tau} = \cos \omega\tau - i \sin \omega\tau,$$

получим

$$S_{x_i x_j}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_{x_i x_j}^+(\tau) \cos \omega\tau d\tau - \frac{i}{\pi} \int_0^{\infty} R_{x_i x_j}^-(\tau) \sin \omega\tau d\tau. \quad (3.3.4)$$

Отсюда видно, что взаимная корреляционная функция является комплексной функцией частоты ω . Введя обозначения для ее вещественной и мнимой частей

$$C_{x_i x_j}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_{x_i x_j}^+(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (3.3.5)$$

$$Q_{x_i x_j}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_{x_i x_j}^-(\tau) \sin \omega\tau d\tau, \quad (3.3.6)$$

получим

$$S_{x_i x_j}(\omega) = C_{x_i x_j}(\omega) - iQ_{x_i x_j}(\omega). \quad (3.3.7)$$

Функцию $C_{x_i x_j}(\omega)$ называют коспектром, а функцию $Q_{x_i x_j}(\omega)$ — квадратурным спектром пары случайных процессов $X_i(t)$, $X_j(t)$. Коспектр как косинус-преобразование Фурье от четной функции $R_{x_i x_j}^+(\tau)$ является четной функцией; квадратурный спектр есть функция нечетная.

Подставляя (3.3.7) в (3.3.2) и выражая $e^{i\omega\tau}$ по формуле Эйлера, получим выражение для взаимной корреляционной функции в виде

$$R_{x_i x_j}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{x_i x_j}(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} Q_{x_i x_j}(\omega) \sin \omega\tau \, d\omega. \quad (3.3.8)$$

Полагая в (3.3.8) $\tau = 0$, получим

$$R_{x_i x_j}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C_{x_i x_j}(\omega) \, d\omega. \quad (3.3.9)$$

Отсюда видно, что коспектр дает разложение по различным частотам взаимной корреляции двух случайных процессов при одном и том же значении аргумента (при нулевом сдвиге τ). Аналогично, полагая $\tau = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{T}{4}$, получаем

$$R_{x_i x_j}\left(\frac{T}{4}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_{x_i x_j}(\omega) \, d\omega. \quad (3.3.10)$$

Откуда видно, что квадратурный спектр характеризует вклад в общую взаимную корреляцию пары случайных процессов содержащихся в них гармоник различной частоты при сдвиге фаз этих гармоник на четверть периода T .

Комплексную функцию (3.3.7) можно записать в показательной форме

$$S_{x_i x_j}(\omega) = |S_{x_i x_j}(\omega)| e^{i\Psi_{x_i x_j}(\omega)}. \quad (3.3.11)$$

Модуль взаимной спектральной функции

$$|S_{x_i x_j}(\omega)| = \sqrt{C_{x_i x_j}^2(\omega) + Q_{x_i x_j}^2(\omega)} \quad (3.3.12)$$

называют амплитудным спектром.

Функцию $\Psi_{x_i x_j}(\omega)$, представляющую собой фазу взаимной спектральной плотности

$$\Psi_{x_i x_j}(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{Q_{x_i x_j}(\omega)}{C_{x_i x_j}(\omega)}, \quad (3.3.13)$$

называют фазовым спектром, или разностью фаз.

Аналогично введению нормированной корреляционной функции связи рассматривают относительную величину вида

$$F_{x_i x_j}(\omega) = \frac{|S_{x_i x_j}(\omega)|}{\sqrt{S_{x_i}(\omega) S_{x_j}(\omega)}} = \sqrt{\frac{C_{x_i x_j}^2(\omega) + Q_{x_i x_j}^2(\omega)}{S_{x_i}(\omega) S_{x_j}(\omega)}}, \quad (3.3.14)$$

которую называют функцией когерентности, или когерентностью. Поскольку справедливо соотношение

$$|S_{x_i x_j}(\omega)| \leq S_{x_i}(\omega) S_{x_j}(\omega), \quad (3.3.15)$$

то когерентность есть безразмерная величина, изменяющаяся от 0 до 1.

Таким образом, взаимный спектр двух случайных процессов $X_i(t)$ и $X_j(t)$ можно охарактеризовать комплексной функцией $S_{x_i x_j}(\omega)$, либо двумя вещественными функциями — амплитудным спектром (или когерентностью) и фазовым спектром.

3.4. Спектральный анализ нестационарных процессов

Временные ряды гидрометеорологических процессов имеют колебательный характер практически во всех диапазонах изменчивости (межгодовой, сезонной, синоптической, внутрисуточной мелкомасштабной). С течением времени спектральная структура этих процессов изменяется. Например, ветровое волнение с уменьшением скорости ветра переходит в зыбь; скорость ветра летом обычно меньше чем зимой; бриз лучше выражен при антициклоническом типе погоды и т. д. Следовательно, для описания закономерностей таких процессов их необходимо рассматривать как нестационарные случайные процессы с переменной во времени спектральной плотностью. Обычно столь общее понятие нестационарности содержит смысловое значение лишь как отрицание стационарности. Необходимо конкретизировать по какому закону во времени меняются их вероятностные характеристики.

С. М. Раевский ввел понятие частотно-временной спектральной плотности, как преобразование Фурье корреляционной функции по переменной τ

$$S(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (3.4.1)$$

М. Лоэв ввел понятие двухчастотной спектральной плотности как двойного преобразования Фурье корреляционной функции по

обоим аргументам

$$S(\omega, \Omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} R(t, \tau) \exp[-i(\omega\tau + \Omega t)] dt d\tau. \quad (3.4.2)$$

Функция $S(\omega t)$ применяется для описания эволюционной, а функция $S(\omega, \Omega)$ — циклической нестационарности процесса.

Смысл такой интерпретации становится понятным из следующих примеров. На рис. 3.9 приведена частотно-временная спектральная плотность для ветрового волнения, развивающегося на озере. По осям координат отложены значения переменных t и ω ; равные значения $S(\omega, t)$ соединены изолиниями (с оцифровкой). От полного штиля 18 октября 1967 г. в 13 ч 43 мин началось усиление скорости ветра от 2 до 12 м/с за первые 17 мин, а в следующие 40 мин вектор скорости ветра был стабилен как по модулю, так и по направлению. Волнение быстро развивалось, о чем свидетельствует рост высоты волн (по увеличению значений $S(\omega, t)$), и увеличение среднего периода волн (по смещению максимума спектра в сторону низких частот).

На рис. 3.10 изображена двухчастотная спектральная плотность ветрового волнения в диапазоне синоптической изменчивости. По осям координат отложены значения переменных ω и Ω ; равные значения $S(\omega, \Omega)$ соединены изолиниями с оцифровкой. Видно, что двухчастотный спектр имеет вид многовершинной поверхности с отличными от нуля значениями в диапазоне циклическостей от 0,5 до 20 сут по переменной (Ω) и от 3 до 15 с — переменной (ω). Двухвершинность $S(\omega, \Omega)$ по переменной ω обусловлена

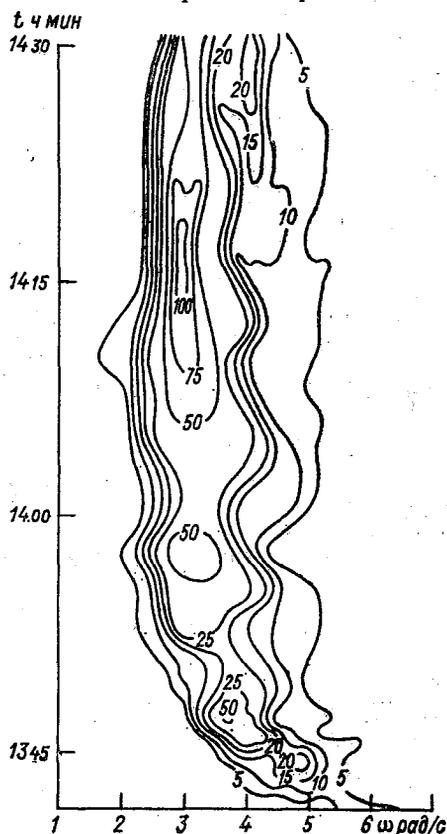


Рис. 3.9

тем, что в районе наблюдений преобладает смешанное волнение и максимумы соответствуют максимумам спектров компонент — ветрового волнения и зыби. Флюктуации $S(\omega, \Omega)$ по переменной Ω обусловлены циклическостью штормов, проходящих через район колебаний.

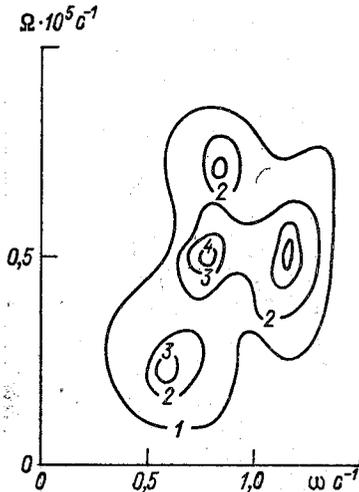


Рис. 3.10

Функция $S(\omega, \Omega)$ обычно используется тогда, когда исследуемый процесс можно рассматривать как амплитудно-модулированный. В данном случае синоптическая изменчивость волнения рассматривается как отклик волновой поверхности на циклическое возмущение в виде последовательности штормов.

Как было показано ранее, коэффициенты Фурье c_k определяют свойства периодической функции $f(t)$, спектральная функция $F(\omega)$ определяет через преобразование Фурье (3.1.3) свойства непериодической функции $f(t)$.

В наиболее общем виде стационарный случайный процесс $X(t)$ допускает не только представление в виде ряда (3.1.5), но и в виде стохастического интеграла

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it\omega) dZ_{\zeta}(\omega), \quad (3.4.3)$$

где $dZ_{\zeta}(\omega)$ — случайный процесс с некоррелированными приращениями, связанный со спектральной плотностью процесса $\zeta(t)$ соотношением

$$dS_{\zeta}(\omega) = M \{ |dZ_{\zeta}(\omega)|^2 \}. \quad (3.4.4)$$

Интеграл (3.4.3) является интегралом Лебега. В отличие от обычных интегралов Римана, когда разбивается на части множество значений аргумента функции, интеграл Лебега строится путем разбиения множества значений функции и составления суммы произведений значения из интервала разбиения на суммарную меру множеств аргумента, значения функции из которых попадают в интервал.

Часто (3.4.3) записывают в виде

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it\omega) Z_{\zeta}(d\omega), \quad (3.4.5)$$

что лучше отражает смысл операции суммирования. Теперь будет уместно сформулировать вопрос — что должно измениться в записи стохастического интеграла (3.4.3) при переходе от стационарных случайных процессов со спектральной плотностью $S_{\zeta}(\omega)$ к нестационарным случайным процессам со спектральными плотностями $S_{\zeta}(\omega, t)$, или $S_{\zeta}(\omega, \Omega)$, определяемыми из соотношений (3.4.1) и (3.4.2).

Разложимость нестационарных случайных процессов по гармоникам впервые была определена М. Лозовом в 1947 г. Он назвал процессы гармонизируемыми, если их можно представить в виде (3.4.3) аналогично разложению стационарного процесса, но случайная мера $dZ_{\zeta}(\omega)$ в (3.4.3) или $Z_{\zeta}(d\omega)$ в (3.4.5) обладает коррелированными значениями.

Конкретизируем эти общие понятия применительно к периодически коррелированным случайным процессам (ПКСП).

Для стационарного случайного процесса заданного на конкретном отрезке $[0, T]$ справедливо разложение на гармонические составляющие в виде ряда С. Райса, являющегося рядом Фурье со случайными коэффициентами

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k \exp\left(ik \frac{2\pi}{T} t\right). \quad (3.4.6)$$

Периодически нестационарный случайный процесс представим в виде

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_k(t) \exp\left(ik \frac{2\pi}{T} t\right), \quad (3.4.7)$$

где $\zeta_k(t)$ — стационарные случайные процессы с математическим ожиданием m_k и корреляционными функциями $R_k(\tau)$, являющиеся коэффициентами разложения функций $m(t)$ и $R(t, \tau)$ в ряд Фурье.

Следовательно у ПКСП в отличие от стационарного процесса ζ_k уже не случайные величины, а случайные функции $\zeta_k(t)$ — стационарные компоненты и свойства этих функций формулируются через коэффициенты Фурье m_k и $R_k(\tau)$.

Теперь можно развить более широко теоретические концепции по процессам, родственным ПКСП.

Прежде всего, если у ПКСП частоты $\omega_k = \frac{2\pi k}{T}$ кратны основной частоте $\frac{2\pi}{T}$, то уместно обобщить это представление на класс почти периодически коррелированных случайных процессов (почти ПКСП), у которых $\{\omega_k\}$ образуют произвольное

дискретное множество. У таких процессов

$$R(t, \tau) = \sum_k R_k(\tau) \exp(i\omega_k t); \quad (3.4.8)$$

$$\zeta(t) = \sum \zeta_k(t) \exp(i\omega_k t). \quad (3.4.9)$$

Терминология почти ПКСП полностью соответствует отличиям периодической функции от почти периодической.

В качестве примера природного процесса, для которого наиболее подходящей моделью является почти ПКСП, можно назвать внутренние волны приливного характера, вызываемые приливообразующей силой в условиях стратифицированного океана со многими возмущающими факторами. Частными случаями почти ПКСП является бипериодически коррелированные (БПКСП) и полипериодически коррелированные (ППКСП) случайные процессы.

БПКСП называют такой случайный процесс, корреляционная функция которого является почти периодической и ее показатели Фурье имеют вид

$$\omega_{kj} = k \frac{2\pi}{T_1} + j \frac{2\pi}{T_2}. \quad (3.4.10)$$

Соответствующим образом записывается корреляционная функция

$$R(t, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} k_{kj} \exp(j\omega_{kj} t). \quad (3.4.11)$$

и процесс

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{kj}(t) \exp(i\omega_{kj} t). \quad (3.4.12)$$

Ярким примером природного БПКСП является годовая и суточная ритмика температуры воздуха, когда в (3.4.10) $T_1 = 1$ год, $T_2 = 1$ сут. У ППКСП

$$\omega_k = \sum_{j=1}^N r_{kj} \Omega_j. \quad (3.4.13)$$

В свете этого свойства ППКСП называют N -кратно периодически коррелированным. Внутренние волны приливного происхождения и приливные течения можно рассматривать как ППКСП, так как на них оказывают влияние суточные и полусуточные лунные и солнечные составляющие с периодами 24 ч и 50 мин и 24 ч соответственно.

Вернемся к вопросу о спектральной структуре периодически нестационарного случайного процесса на примере ПКСП. Из-за периодичности корреляционной функции $R(t, \tau)$ ПКСП по аргументу t имеет смысл рассмотреть частотно-временную спектральную плотность $S(\omega, t)$ в виде (3.4.1)

Поскольку $R(t, \tau)$ не является четной или нечетной, то $S(\omega, t)$ будет содержать и вещественную и мнимую части, т. е.

$$S(\omega, t) = \operatorname{Re} S(\omega, t) - i \operatorname{Im} S(\omega, t) \quad (3.4.14)$$

В соответствии с изложенным в п. 1.8 представим $S(\omega, t)$ через спектральные компоненты $S_k(\omega)$

$$S(\omega, t) = \sum_{k=0}^{\infty} S_k(\omega) \exp\left(ik \frac{2\pi}{T} t\right) \quad (3.4.15)$$

причем

$$S_k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_k(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (3.4.16)$$

Переход от ПКСП к БПКСП, ППКСП и почти ПКСП производится путем модификации выражения (3.4.15) за счет соответствующей записи для показателей Фурье.

3.5. Спектральный тензор векторного процесса

Спектральная плотность стационарного векторного случайного процесса $\mathbf{V}(t)$ является преобразованием Фурье корреляционной функции $\mathbf{R}_V(\tau)$

$$\mathbf{S}_V(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau) \mathbf{R}_V(\tau) d\tau. \quad (3.5.1)$$

Тензор-функция $\mathbf{S}_V(\omega)$ характеризует распределение по частотам направленных колебаний значений процесса $\mathbf{V}(t)$, дает количественную меру интенсивности этих колебаний и их ориентацию в заданной системе координат; при каждом фиксированном значении ω она является тензором второго ранга, представляемым относительно декартовых координат матрицей

$$\mathbf{S}_V(\omega) = \begin{pmatrix} S_{v_1 v_1} & S_{v_1 v_2} \\ S_{v_2 v_1} & S_{v_2 v_2} \end{pmatrix}, \quad (3.5.2)$$

где

$$\begin{aligned} S_{v_1 v_2}(\omega) &= C_{v_1 v_2}(\omega) + iQ_{v_1 v_2}(\omega); \\ S_{v_2 v_1}(\omega) &= C_{v_2 v_1}(\omega) + iQ_{v_2 v_1}(\omega); \\ C_{v_1 v_2}(\omega) &= C_{v_2 v_1}(\omega); \quad Q_{v_1 v_2}(\omega) = -Q_{v_2 v_1}(\omega). \end{aligned}$$

Рассмотрим свойства тензора $\mathbf{S}_V(\omega)$, используя уже известные (п.1.8.) свойства корреляционного тензора $\mathbf{R}_V(\tau)$.

Поскольку $R_V(\tau)$ всегда действительная функция, в общем случае не обладающая свойством четности, то в общем случае $S_V(\omega)$ есть комплексная функция, не являющаяся четной.

Представим спектральный тензор $S_V(\omega)$ в виде суммы симметричной $C_V(\omega)$ и кососимметричной $A_V(\omega)$ частей

$$S_V(\omega) = C_V(\omega) + A_V(\omega). \quad (3.5.3)$$

Относительно декартовых проекций симметричная и кососимметричная части тензора (3.5.3) определяются матрицами вида

$$C_V(\omega) = \begin{pmatrix} S_{v_1 v_1} & C_{v_1 v_2} \\ C_{v_1 v_2} & S_{v_2 v_2} \end{pmatrix};$$

$$A_V = -iQ_{v_1 v_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.4)$$

Симметричная и кососимметричная части тензора $S_V(\omega)$ являются преобразованием Фурье тензор-функций $C_V^K(\tau)$ и $A_V^K(\tau)$ соответственно. Поскольку симметричная корреляционная тензор-функция $C_V(\tau)$ есть действительная и четная, то ее преобразованием Фурье можно записать в виде

$$C_V(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} C_V^K(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (3.5.5)$$

т. е. $C_V(\omega)$ есть действительная и четная функция.

Поскольку кососимметричная корреляционная тензор-функция $A_V(\tau)$ есть действительная и нечетная, то ее преобразование Фурье можно записать в виде

$$A_V(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} A_V^K(\tau) \sin \omega \tau d\tau, \quad (3.5.6)$$

т. е. $A_V(\omega)$ есть мнимая и нечетная функция.

Тензор спектральной плотности является многомерной инвариантной функцией, содержащей разностороннюю информацию о колебательных свойствах анализируемого векторного процесса.

Рассмотрим свойства тензора $S_V(\omega)$ через его инварианты, вначале через $I_{1,2}$ и \mathcal{D} не зависящие от собственного базиса тензора, а затем через $\lambda_{1,2}$ и α , характеризующие размеры и ориентацию тензорной кривой.

Линейным, или первым инвариантом тензора спектральной плотности называется функция

$$I_1(\omega) = S_{v_1 v_1}(\omega) + S_{v_2 v_2}(\omega). \quad (3.5.7)$$

Линейный инвариант $I_1(\omega)$ равен следу матрицы $S_V(\omega)$, ему может быть поставлено в соответствие косинус-преобразование Фурье линейного инварианта автокорреляционного тензора

$$I_1(\omega) \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} I_1^K(\tau) \cos \omega \tau d\tau. \quad (3.5.8)$$

Следовательно, этот инвариант является действительной, неотрицательной и четной функцией. Линейный инвариант $I_1(\omega)$, как скалярная величина, характеризует распределение модуля интенсивности изменений процесса $V(t)$ в частотной области.

Исходя из (3.5.4), индикатор вращения $\mathcal{D}(\omega)$ запишем, пользуясь определением, в виде

$$\mathcal{D}(\omega) = S_{v_1 v_2} - S_{v_2 v_1} = 2iQ_{v_1 v_2}(\omega). \quad (3.5.9)$$

Ему может быть поставлено в соответствие преобразование Фурье инварианта $\mathcal{D}(\tau)$, которое вследствие нечетности функции $\mathcal{D}(\tau)$, имеет вид

$$\mathcal{D}(\omega) \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \mathcal{D}^K(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (3.5.10)$$

Следовательно, $\mathcal{D}(\omega)$ является мнимой и нечетной функцией. Индикатор вращения $\mathcal{D}(\omega)$ характеризует распределение ортогональных составляющих изменений $V(t)$ в частотной области, причем $|\mathcal{D}(\omega)|$ описывает модуль этих изменений, знак — направление вращения, а символ i — фазовый сдвиг относительно $I_1(\omega)$, равный $\pi/2$. Можно показать, что

$$I_1(\omega) \geq |\mathcal{D}(\omega)|. \quad (3.5.11)$$

Действительно, так как

$$S_{v_1 v_1} + S_{v_2 v_2} - 2S_{v_1 v_2} \geq 0,$$

то

$$S_{v_1 v_1} + S_{v_2 v_2} \geq S_{v_1 v_2} + S_{v_2 v_1}.$$

Так как из-за замены в правой части неравенства суммы двух положительных слагаемых на модуль их разности знак неравенства не изменится, то

$$S_{v_1 v_1} + S_{v_2 v_2} \geq |S_{v_1 v_2} - S_{v_2 v_1}|,$$

что и доказывает неравенство (3.5.11). Таким образом, согласно (3.5.11) модуль общей изменчивости векторного процесса не может быть меньше модуля его ортогональных изменений.

Если $\mathcal{D}(\omega) = 0$, то это лишь свидетельствует об отсутствии закономерности (однаправленности) вращательных изменений $V(t)$, так как возможна ситуация, когда интенсивности вращательных изменений $V(t)$ по и против часовой стрелки равны.

Таким образом, инварианты $I_1(\omega)$ и $\mathcal{D}(\omega)$ спектрального тензора позволяют охарактеризовать (безотносительно к выбранной системе координат) структуру изменений векторов $\mathbf{V}(t)$ в частной области.

Для удобства геометрической интерпретации используем квадратичный инвариант симметричной части тензора $\mathbf{S}_V(\omega)$ в виде

$$I_2(\omega) = S_{v_1 v_1}(\omega) S_{v_2 v_2}(\omega) - C_{v_1 v_2}^2(\omega). \quad (3.5.12)$$

Этот инвариант является индикатором формы тензорной кривой; он совпадает с детерминантом матрицы тензор-функции $\mathbf{C}_V(\omega)$. Так как

$$0 \leq |S_{v_1 v_2}|^2 \leq S_{v_1 v_1} S_{v_2 v_2}, \quad (3.5.13)$$

то при каждом фиксированном значении аргумента тензору $\mathbf{S}_V(\omega)$, будет соответствовать только эллипс (окружность или отрезок прямой), но не гипербола.

Характерные размеры тензорной кривой определяются через инварианты I_1 и I_2 . Инварианты $\lambda_{1,2}$ есть главные или собственные значения симметричного тензора $\mathbf{C}_V(\omega)$; они являются экстремальными значениями спектральных плотностей проекций $\mathbf{V}(t)$ по ортогональным направлениям. Через них могут быть вычислены значения спектральных плотностей проекций скоростей течения на любое заданное направление θ по формуле

$$S(\omega, \theta) = \lambda_1(\omega) \cos^2 \theta + \lambda_2(\omega) \sin^2 \theta.$$

В общем случае $I_2(\omega)$ и $\lambda_{1,2}(\omega)$ не могут быть вычислены через преобразование Фурье функций $I_2(\tau)$ и $\lambda_{1,2}(\tau)$ и определяются через компоненты тензора (3.5.4).

Отметим также, что необходимым и достаточным условием отсутствия вращательных изменений $\mathbf{V}(t)$ в стационарном приближении является равенство

$$I_1(\omega) = \lambda_1(\omega).$$

Ориентация большой оси $\lambda_1(\omega)$ относительно исходной системы координат определяется углом (не инвариантной величиной)

$$\alpha = 0,5 \operatorname{arctg} [2C_{v_1 v_2}(\omega) / (S_{v_1 v_1}(\omega) - S_{v_2 v_2}(\omega))]. \quad (3.5.14)$$

Инварианты $\lambda_{1,2}$, \mathcal{D} полностью характеризуют тензор $\mathbf{S}_V(\omega)$ так как он может быть однозначно представлен в виде

$$\mathbf{S}_V(\omega) = \lambda_1(\omega) (\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + \lambda_2(\omega) (\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) + 0,5\mathcal{D}(\omega) [\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1], \quad (3.5.15)$$

или в виде

$$\mathbf{S}_V(\omega) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} + 0,5\mathcal{D} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5.16)$$

Хотя все изложение велось в предположении о стационарности процесса, однако полученные в данном параграфе результаты могут быть легко переформулированы и для нестационарного векторного случайного процесса.

Частотно-временная спектральная плотность определяется в виде

$$S_V(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_V(t, \tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau, \quad (3.5.17)$$

а двухчастотная спектральная плотность в виде

$$S_V(\omega, \Omega) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} R_V(t, \tau) \exp[-i(\omega\tau + \Omega t)] d\tau dt. \quad (3.5.18)$$

Функция $S_V(\omega, t)$ характеризует распределение квадратов амплитуд (дисперсий) спектральных составляющих процесса $V(t)$ по частотам ω и изменение этого распределения во времени; эту характеристику целесообразно использовать при описании эволюционного развития процесса.

Функция $S_V(\omega, \Omega)$ применяется для описания динамики процесса при достаточно сложном характере временных изменений спектрального состава его колебаний, например, для описания процесса, имеющего вид модулированных колебаний.

Вид и интерпретация инвариантов корреляционного и спектрального тензоров, как характеристик векторного случайного процесса остаются справедливыми как для стационарного, так и для нестационарного процесса, увеличивается лишь количество аргументов этих функций. Функция взаимной спектральной плотности процессов $V(t)$ и $U(t)$ определяется как преобразование Фурье тензор-функции

$$S_{VU}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega\tau) R_{VU}(\tau) d\tau. \quad (3.5.19)$$

Эта функция характеризует общность распределения по частотам направленных изменений векторных процессов $V(t)$ и $U(t)$ и дает количественную меру взаимосвязи интенсивности этих изменений и их ориентацию в заданной системе координат.

Если записать тензор-функцию $S_{VU}(\omega)$ в виде матрицы, то каждый ее элемент есть взаимный спектр проекций

$$S_{v_k u_j}(\omega) = C_{v_k u_j}(\omega) + iQ_{v_k u_j}(\omega), \quad (3.5.20)$$

полученный путем преобразования Фурье (соответствующий по индексам) корреляционной функции проекций $R_{v_k u_j}(\tau)$.

Представим спектральный тензор $S_{VU}(\omega)$ в виде суммы симметричной $C_{VU}(\omega)$ и кососимметричной $A_{VU}(\omega)$ частей

$$S_{VU}(\omega) = C_{VU}(\omega) + A_{VU}(\omega). \quad (3.5.21)$$

Так как симметричная и кососимметричная части тензор-функции $R_{VU_i}(\tau)$ есть действительные функции, в общем случае не являющиеся четными или нечетными, их преобразования Фурье являются комплексными функциями с матрицами вида

$$\begin{aligned} C_{VU}(\omega) &= \begin{pmatrix} C_{v_1u_1} + iQ_{v_1u_1}, & 0,5 [(C_{v_1u_2} + C_{v_2u_1}) + i(Q_{v_1u_2} + Q_{v_2u_1})] \\ 0,5 [(C_{v_1u_2} + C_{v_2u_1}) + i(Q_{v_1u_2} + Q_{v_2u_1})], & C_{v_2u_2} + iQ_{v_2u_2} \end{pmatrix}; \\ A_{VU}(\omega) &= \begin{pmatrix} 0, & 0,5 [(C_{v_1u_2} - C_{v_2u_1}) + i(Q_{v_1u_2} - Q_{v_2u_1})] \\ -0,5 [(C_{v_1u_2} - C_{v_2u_1}) + i(Q_{v_1u_2} - Q_{v_2u_1})], & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

Тензор взаимной спектральной плотности представляет собой многомерную инвариантную функцию, содержащую разностороннюю информацию о взаимосвязях изменений двух векторных процессов в частотной области. Рассмотрим свойства тензора $S_{VU}(\omega)$ через его инварианты, вначале через $I_{1,2}$ и D , не зависящие от собственного базиса тензора, а затем через $\lambda_{1,2}$ и α , характеризующие размеры и ориентацию тензорной кривой.

Линейным, или первым инвариантом тензора взаимной спектральной плотности называется функция

$$\begin{aligned} I_1^{(VU)}(\omega) &= S_{v_1u_1}(\omega) + S_{v_2u_2}(\omega) = \\ &= C_{v_1u_1}(\omega) + C_{v_2u_2}(\omega) + i(Q_{v_1u_1}(\omega) + Q_{v_2u_2}(\omega)). \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

Линейный инвариант $I_1^{(VU)}(\omega)$ равен следу матрицы $S_V(\omega)$, он характеризует общность интенсивностей коллинеарных изменений процессов $V(t)$, $U(t)$ в частотной области, и ему может быть поставлено в соответствие преобразование Фурье линейного инварианта $I_1^{VU}(\tau)$. Линейный инвариант $I_1^{(VU)}(\omega)$ есть, в общем случае, комплексная функция, не являющаяся четной или нечетной.

Действительная часть этого инварианта

$$\operatorname{Re} I_1^{VU}(\omega) = C_{v_1v_1}(\omega) + C_{v_2v_2}(\omega) \quad (3.5.24)$$

характеризует модуль общности интенсивностей синфазных коллинеарных изменений $V(t)$ и $U(t)$, а мнимая часть

$$\operatorname{Im} I_1^{VU}(\omega) = [Q_{v_1u_1}(\omega) + Q_{v_2u_2}(\omega)] \quad (3.5.25)$$

— модуль общности интенсивностей квадратурных коллинеарных изменений. Подчеркнем, что использование термина «модуль» связано с необходимостью определить скалярный вид

функций (3.5.24) и (3.5.25), и непосредственно следует из определения скалярного произведения векторов.

Поскольку действительной части линейного инварианта может быть поставлено в соответствие преобразование Фурье четной функции

$$\operatorname{Re} I_1^{\text{VU}}(\omega) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [I_1^{\text{VU}}(\tau) + I_1^{\text{VU}}(-\tau)] \cos \omega \tau d\tau, \quad (3.5.26)$$

а мнимой части — преобразование Фурье нечетной функции

$$\operatorname{Im} I_1^{\text{VU}}(\omega) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [I_1^{\text{VU}}(\tau) - I_1^{\text{VU}}(-\tau)] \sin \omega \tau d\tau, \quad (3.5.27)$$

то $\operatorname{Re} I_1^{\text{VU}}(\omega)$ является четной функцией, а $\operatorname{Im} I_1^{\text{VU}}(\omega)$ — нечетной функцией частоты.

В отличие от линейного инварианта спектра (3.5.7) инварианты (3.5.24) и (3.5.25) могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. При этом положительные значения указывают на преимущественно однонаправленный характер коллинеарных изменений, а отрицательные — на их противоположную направленность.

Линейный инвариант $I_1^{\text{VU}}(\omega)$, исходя из записи комплексных чисел в показательной форме, можно представить в виде произведения

$$I_1^{\text{VU}}(\omega) = |I_1^{\text{VU}}(\omega)| \exp \{-i\psi(\omega)\}, \quad (3.5.28)$$

где

$$|I_1^{\text{VU}}(\omega)| = \sqrt{|\operatorname{Re} I_1^{\text{VU}}(\omega)|^2 + |\operatorname{Im} I_1^{\text{VU}}(\omega)|^2}; \quad (3.5.29)$$

— взаимный амплитудный спектр;

$$\psi(\omega) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im} I_1^{\text{VU}}(\omega)}{\operatorname{Re} I_1^{\text{VU}}(\omega)} \right\} \quad (3.5.30)$$

— фазовый спектр.

Инвариант $|I_1^{\text{VU}}(\omega)|$ характеризует модуль общности интенсивностей коллинеарных изменений, а инвариант $\psi(\omega)$ — величину фазового запаздывания соответствующих гармоник временных рядов $V(t)$ и $U(t)$ относительно друг друга.

Исходя из (3.5.22), запишем индикатор вращения $D^{\text{VU}}(\omega)$ в виде

$$D^{\text{VU}}(\omega) = S_{v_1 v_2} - S_{v_2 u_1} = C_{v_1 u_2} - C_{v_2 u_1} + i(Q_{v_1 u_2} - Q_{v_2 u_1}). \quad (3.5.31)$$

Этот инвариант характеризует общность интенсивности ортогональных изменений в частотной области процессов $V(t)$ и

$U(t)$, и ему можно поставить в соответствие преобразование Фурье инварианта $\mathcal{D}^{\text{VU}}(\tau)$.

Индикатор поворота (вращения) $\mathcal{D}^{\text{VU}}(\omega)$ в общем случае есть комплексная функция, не являющаяся четной или нечетной. Действительная часть этого инварианта

$$\operatorname{Re} \mathcal{D}^{\text{VU}}(\omega) = C_{v_1 u_2} - C_{v_2 u_1} \quad (3.5.32)$$

характеризует модуль общности интенсивности синфазных ортогональных изменений анализируемых процессов, а мнимая часть

$$\operatorname{Im} \mathcal{D}^{\text{VU}}(\omega) = Q_{v_1 u_2}(\omega) - Q_{v_2 u_1}(\omega) \quad (3.5.33)$$

— модуль общности интенсивностей квадратурных ортогональных изменений. Здесь использование термина «модуль» также подчеркивает скалярный вид функции (3.5.32) и (3.5.33), вытекающий из определения косога произведения векторов.

Поскольку действительной части инварианта $\mathcal{D}^{\text{VU}}(\omega)$ можно поставить в соответствие преобразование Фурье четной функции

$$\operatorname{Re} \mathcal{D}^{\text{VU}}(\omega) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [\mathcal{D}^{\text{VU}}(\tau) + \mathcal{D}^{\text{VU}}(-\tau)] \cos \omega \tau d\tau, \quad (3.5.34)$$

а мнимой части — преобразование Фурье нечетной функции

$$\operatorname{Im} \mathcal{D}^{\text{VU}}(\omega) \Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [\mathcal{D}^{\text{VU}}(\tau) - \mathcal{D}^{\text{VU}}(-\tau)] \sin \omega \tau d\tau, \quad (3.5.35)$$

то $\operatorname{Re} \mathcal{D}^{\text{VU}}$ является четной функцией, а $\operatorname{Im} \mathcal{D}^{\text{VU}}$ — нечетной функцией частоты.

Положительные значения инвариантов $\operatorname{Re} \mathcal{D}^{\text{VU}}$ и $\operatorname{Im} \mathcal{D}^{\text{VU}}$ указывают на то, что векторы ряда $U(t)$ развернуты относительно векторов ряда $V(t)$ на положительный угол, т. е. по часовой стрелке, а отрицательные значения — что векторы $U(t)$ развернуты относительно $V(t)$ на отрицательный угол.

Инвариант $\mathcal{D}^{\text{VU}}(\omega)$ можно представить по аналогии с (3.5.28) в виде произведения

$$\mathcal{D}^{\text{VU}}(\omega) = |\mathcal{D}^{\text{VU}}(\omega)| \exp\{-if(\omega)\}, \quad (3.5.36)$$

где

$$|\mathcal{D}^{\text{VU}}| = \sqrt{|\operatorname{Re} \mathcal{D}^{\text{VU}}|^2 + |\operatorname{Im} \mathcal{D}^{\text{VU}}|^2} \quad (3.5.37)$$

— взаимный амплитудный спектр;

$$f(\omega) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Im} \mathcal{D}^{\text{VU}}}{\operatorname{Re} \mathcal{D}^{\text{VU}}} \right\} \quad (3.5.38)$$

— фазовый спектр.

Взаимный амплитудный спектр $|\mathcal{D}^{VU}|$ является четной функцией и характеризует модуль общности интенсивности ортогональных изменений, а инвариант $f(\omega)$ — величину фазового запаздывания соответствующих гармоник.

С помощью инвариантов I_1 и \mathcal{D} тензора $S_{VU}(\omega)$ можно сконструировать еще ряд инвариантов, позволяющих дополнительно проанализировать некоторые свойства взаимосвязи векторных процессов $V(t)$ и $U(t)$. Так, инвариант

$$|L_c^{VU}(\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re} I_1^{VU})^2 + (\operatorname{Re} \mathcal{D}^{VU})^2} \quad (3.5.39)$$

характеризует модуль общности интенсивности синфазных (т. е. при нулевом запаздывании соответствующих гармоник) изменений $V(t)$ и $U(t)$. Из (3.5.39) следует, что L_c^{VU} есть функция действительная, положительная и четная. Инвариант

$$\gamma_c^{VU}(\omega) = \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\operatorname{Re} \mathcal{D}^{VU}(\omega)}{\operatorname{Re} I_1^{VU}(\omega)} \right\} \quad (3.5.40)$$

определяет угол между синфазными составляющими $V(t)$ и $U(t)$ и является действительной функцией.

Развороту векторов $U(t)$ относительно векторов $V(t)$ по часовой стрелке соответствуют положительные значения γ_c^{VU} , а против часовой стрелки — отрицательные значения.

Аналогичные инварианты $L_Q^{VU}(u)$ и γ_Q^{VU} могут быть введены (путем замены в соотношениях (3.5.39) и (3.5.40) действительных частей $\operatorname{Re}\{ \}$ комплексных величин I_1 и \mathcal{D} мнимыми $\operatorname{Im}\{ \}$) и для выявления квадратурной общности изменений процессов $V(t)$ и $U(t)$.

Подчеркнем, что при анализе $I_1^{VU}(\omega)$ и $\mathcal{D}^{VU}(\omega)$ необходимо рассматривать и инварианты спектральных тензоров $S_V(\omega)$ и $S_U(\omega)$. Поясним это требование к анализу результатов расчета конкретным примером. Рассмотрим два процесса $V(t)$ и $U(t)$ векторы скорости которых одинаковы по модулю, но вращаются в противоположных направлениях с заданным периодом колебания T . В этом случае значения инвариантов $I_1^{VU}(\omega_1)$ и $\mathcal{D}^{VU}(\omega_1)$ взаимоспектрального тензора $S_{VU}(\omega_1)$ на заданной частоте $\omega_1 = 2\pi/T_1$ будут равны нулю, т. е.

$$\operatorname{Re} I_1(\omega_1) = \operatorname{Im} I_1(\omega_1) = \operatorname{Re} \mathcal{D}(\omega_1) = \operatorname{Im} \mathcal{D}(\omega_1) = 0,$$

хотя при этом значения инвариантов тензоров $S_V(\omega_1)$ и $S_U(\omega_1)$ на частоте ω_1 будут отличны от нуля

$$I_1^V(\omega_1) = I_1^U(\omega_1) > 0;$$

$$\mathcal{D}^V(\omega) = -\mathcal{D}^U(\omega_1).$$

Таким образом, равенство нулю значений инвариантов I_1 и \mathcal{D} на фиксированной частоте свидетельствует о полном отсутствии взаимосвязи между процессами $V(t)$ и $U(t)$, даже несмотря на одинаковость модулей скорости этих процессов.

Из обсуждения определений и интерпретации инвариантов $I_1^{VU}(\omega)$ и $\mathcal{D}^{VU}(\omega)$ следует, что эти инварианты спектрального тензора $S_{VU}(\omega)$ позволяют охарактеризовать структуру взаимосвязи изменений векторов $V(t)$ и $U(t)$ в частотной области.

Для удобства геометрической интерпретации результатов вероятностного анализа введем инвариант симметричной части тензора $S_{VU}(\omega)$ в виде

$$I_2^{VU}(\omega) = S_{v_1u_1}S_{v_2u_2} - 0,25(S_{v_1u_2} + S_{v_2u_1})^2. \quad (3.5.41)$$

Этот инвариант является индикатором формы тензорной кривой. Он совпадает с детерминантом матрицы тензор-функции $S_{VU}(\omega)$. Из (3.5.41) видно, что $I_2^{VU}(\omega)$ есть, в общем случае, комплексная функция, действительная часть которой равна

$$\operatorname{Re} I_2^{VU}(\omega) = C_{v_1u_1}C_{v_2u_2} - Q_{v_1u_1}Q_{v_2u_2} - 0,25(C_{v_1u_2}C_{v_2u_1} - Q_{v_1u_2}Q_{v_2u_1}), \quad (3.5.42)$$

а мнимая часть равна

$$\operatorname{Im} I_2^{VU}(\omega) = C_{v_2u_2}Q_{v_1u_1} + C_{v_1u_1}Q_{v_2u_2} - 0,25(C_{v_1u_2}Q_{v_2u_1} - Q_{v_2u_1}Q_{v_1u_2}).$$

Для наглядности представим тензорную кривую, соответствующую $S_{VU}(\omega)$ в виде образа, реальная часть которого соответствует проекции тензорной кривой на действительную плоскость с индикатором формы $\operatorname{Re} I_2^{(VU)}$, а мнимая — проекции этой кривой на мнимую плоскость с индикатором формы $\operatorname{Im} I_2^{(VU)}$. Формы этих проекций могут представлять собой любые центральные кривые второго порядка (эллипс, окружность, гипербола и т. д.)

Характерные размеры проекций тензорной кривой $S_{VU}(\omega)$ на действительную и мнимую плоскости определяются через инварианты I_1 и I_2 по следующим формулам:

$$\lambda_{1,2} = 0,5 [I_1 \pm \sqrt{I_1^2 + 4I_2}].$$

В зависимости от того, какие значения и знаки имеют действительная и мнимая части осей $\lambda_{1,2}(\omega)$, кривые проекций могут быть эллипсами, гиперболами или прямыми, т. е. интерпретация этих инвариантов отличается от приведенной в п. 1.8 лишь тем, что относится к действительной или мнимой плоскости.

Ориентация проекций тензорной кривой вычисляется по соот-

ношению по следующим формулам:

$$\operatorname{Re} \alpha^{\nu\mu}(\omega) = 0,5 \operatorname{arctg} \left[\frac{C_{v_1 u_2} + C_{v_2 u_1}}{C_{v_1 u_1} - C_{v_2 u_2}} \right];$$

$$\operatorname{Im} \alpha^{\nu\mu}(\omega) = 0,5 \operatorname{arctg} \left[\frac{Q_{v_1 u_2} + Q_{v_2 u_1}}{Q_{v_1 u_1} - Q_{v_2 u_2}} \right].$$

Инварианты $\lambda_{1,2}$ и \mathcal{D} полностью характеризуют тензор $S_{\nu\mu}(\omega)$, так как он может быть представлен в виде (3.5.15) и (3.5.16).

Частотно-временная взаимная спектральная плотность и двухчастотная взаимная спектральная плотность определяются в виде (3.5.17) и (3.5.18) с заменой $R_{\nu}(t, \tau)$ на $R_{\nu\mu}(t, \tau)$ и характеризуют изменение во времени спектральной структуры взаимосвязи двух векторных процессов.

3.6. Спектральный анализ однородных случайных полей

Применяя рассуждения, аналогичные изложенным в п. 3.2 для случайного стационарного процесса, можем записать корреляционную функцию однородного случайного поля $U(\rho) = U(x, y, z)$ в виде

$$R_u(l) \int e^{i(k \cdot l)} S_u(k) dk. \quad (3.6.1)$$

Здесь роль гармонических колебаний играют волны $e^{i(k \cdot l)}$, где $(k \cdot l)$ есть скалярное произведение вектора k и вектора l . Интеграл распространен по всему пространству волновых векторов k , dk — элемент объема в волновом пространстве. Функция $S_u(k)$, называемая спектральной плотностью случайного поля $U(\rho)$ должна быть неотрицательной функцией.

Корреляционная функция является трехмерным обратным преобразованием Фурье от спектральной плотности. Отсюда спектральную плотность как преобразование Фурье для корреляционной функции можно определить по формуле

$$S_u(k) = \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i(k \cdot l)} R_u(l) dl. \quad (3.6.2)$$

В случае, когда $U(\rho)$ является однородным изотропным полем, корреляционная функция является функцией скалярного аргумента $l = |\rho_2 - \rho_1|$. При этом интеграл в формуле (3.4.2) легко вычисляется при переходе к сферическим координатам.

Скалярное произведение $k \cdot l$ представим в виде

$$k \cdot l = kl \cos(k, l). \quad (3.6.3)$$

Ориентируем сферическую систему координат таким образом, чтобы угол между векторами k и l совпадал со сферической координатой — углом θ .

При этом

$$\begin{aligned} S_u(\mathbf{k}) &= \frac{1}{8\pi^3} \int e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{l})} R_u(\mathbf{l}) d\mathbf{l} = \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ikl \cos \theta} R_u(l) l^2 \sin \theta d\theta d\varphi dl. \end{aligned} \quad (3.6.4)$$

Делая замену переменной $\cos \theta = t$ в двойном интеграле, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{-ikl \cos \theta} \sin \theta d\theta d\varphi &= 2\pi \int_0^\pi e^{-ikl \cos \theta} \sin \theta d\theta = \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 e^{-iklt} dt = \frac{4\pi}{kl} \sin(kl). \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Подставляя (3.6.5) в (3.6.4), получаем

$$S_u(\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin(kl)}{kl} R_u(l) l^2 dl. \quad (3.6.6)$$

Отсюда видно, что спектральная плотность однородного изотропного поля есть функция от скалярного аргумента k

$$S_u(k) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\sin(kl)}{kl} R_u(l) l^2 dl. \quad (3.6.7)$$

Применив аналогичный метод к вычислению интеграла (3.6.1), получим для однородного изотропного поля

$$R_u(l) = 4\pi \int_0^\infty \frac{\sin(kl)}{kl} S_u(k) k^2 dk. \quad (3.6.8)$$

Так как спектральная плотность должна быть неотрицательной функцией, то корреляционными функциями однородных изотропных полей могут быть только такие функции $R_u(l)$, для которых интеграл (3.6.7) является неотрицательным при всех $k \geq 0$.

Для случайного однородного и изотропного поля на плоскости формулы для корреляционной функции $R_u(l)$ и спектральной плотности $S_u(k)$ выразятся как взаимные преобразования Фурье по формулам

$$R_u(\mathbf{l}) = \int e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{l})} S(\mathbf{k}) d\mathbf{k}; \quad (3.6.9)$$

$$S_u(\mathbf{k}) = \frac{1}{4\pi^2} \int e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{l})} R_u(\mathbf{l}) d\mathbf{l}. \quad (3.6.10)$$

Здесь $d\mathbf{k}$ и $d\mathbf{l}$ — элементы площади.

Переходя к полярным координатам и направив полярную ось по вектору \mathbf{k} , получим

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{l} = kl \cos \varphi, \quad (3.6.11)$$

отсюда

$$S_u(k) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-ikl \cos \varphi} R_u(l) l dl d\varphi. \quad (3.6.12)$$

Так как

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikl \cos \varphi} d\varphi = I_0(kl) \quad (3.6.13)$$

есть функция Бесселя первого рода нулевого порядка, то (3.6.12) запишется в виде

$$S_u(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty I_0(kl) R_u(l) l dl. \quad (3.6.14)$$

Здесь

$$l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Аналогично получаем

$$R_u(l) = 2\pi \int_0^\infty I_0(kl) S_u(k) k dk. \quad (3.6.15)$$

Для того чтобы функция $R_u(l)$ была корреляционной функцией плоского однородного изотропного поля, необходимо, чтобы интеграл (3.6.14) был неотрицательным при любом $k \geq 0$.

Рассмотрим несколько примеров вычисления спектральных плотностей.

Пример 1. Пусть корреляционная функция трехмерного однородного изотропного поля имеет вид

$$R(l) = \sigma^2 l^{-\alpha} |l|, \quad \alpha > 0. \quad (3.6.16)$$

Тогда спектральная плотность определится по формуле

$$S(k) = \frac{\sigma^2}{2\pi^2 k} \int_0^\infty e^{-\alpha l} l \sin(kl) dl. \quad (3.6.17)$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^\infty e^{-\alpha l} l \sin(kl) dl. \quad (3.6.18)$$

Применяя метод интегрирования по частям, получим

$$I = \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha l} \sin(kl) dl + \frac{k}{\alpha} \int_0^\infty e^{-\alpha l} l \cos(kl) dl. \quad (3.6.19)$$

Применяя аналогичный метод к интегралу

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-\alpha l} l \cos(kl) dl, \quad (3.6.20)$$

получим

$$I_1 = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha l} \cos(kl) dl - \frac{k}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha l} l \sin(kl) dl. \quad (3.6.21)$$

Подставляя (3.6.21) в (3.6.19), получим

$$I = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha l} \sin(kl) dl + \frac{k}{\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha l} \cos(kl) dl - \frac{k^2}{\alpha^2} I. \quad (3.6.22)$$

Отсюда

$$I = \frac{\alpha}{k^2 + \alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha l} \left[\sin(kl) + \frac{k}{\alpha} \cos(kl) \right] dl. \quad (3.6.23)$$

Применяя к интегралу (3.6.23) дважды метод интегрирования по частям, получим

$$I = \frac{2k\alpha}{(k^2 + \alpha^2)^2}. \quad (3.6.24)$$

Подставляя (3.6.24) в (3.6.17), окончательно получаем

$$S(k) = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi (\alpha^2 + k^2)^2}. \quad (3.6.25)$$

Спектральная плотность (3.6.25) неотрицательна при всех значениях k , следовательно, функция (3.6.16) может служить корреляционной функцией трехмерного случайного поля.

Пример 2. Для функции

$$R(l) = \sigma^2 e^{-\alpha l^2}, \quad \alpha > 0. \quad (3.6.26)$$

Спектральная плотность в этом случае определится в виде

$$S(k) = \frac{\sigma^2}{2\pi^2 k} \int_0^{\infty} e^{-\alpha l^2} l \sin(kl) dl = \frac{\sigma^2}{8(\pi\alpha)^{3/2}} e^{-k^2/4\alpha}. \quad (3.6.27)$$

Функция (3.6.27) также является неотрицательной при всех k , следовательно, функция (3.6.26) может служить корреляционной функцией трехмерного случайного поля.

Пример 3. Для функции

$$R(l) = \sigma^2 e^{-\alpha |l|} \cos \beta l, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0 \quad (3.6.28)$$

спектральная плотность равна

$$S(k) = \frac{\sigma^2}{2\pi^2 k} \int_0^{\infty} e^{-\alpha l} \cos \beta l \sin(kl) l dl = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi^2} \frac{k^4 + 2k^2 b^2 + (2a - b^2) b^2}{(k^4 + 2ak^2 + b^4)^2}, \quad (3.6.29)$$

где $a = \alpha^2 - \beta^2$, $b^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

В этом случае $S(k) \geq 0$ при любом $k \geq 0$ только при выполнении неравенства $\alpha^2 > 3\beta^2$ или $\alpha > \sqrt{3}\beta$ и, следовательно, только при $\alpha > \sqrt{3}\beta$ функция $R(l)$ может быть корреляционной функцией трехмерного случайного поля.

Как показано в п. 3.2, функция $R(\tau) = \sigma^2 l^{-\alpha} |\tau| \cos \beta \tau$ при любых $\alpha > 0$ и $\beta > 0$ может служить корреляционной функцией случайного процесса (одномерного поля). Корреляционная функция трехмерного (или двухмерного) случайного однородного изотропного поля $R(l)$ при замене $l = \tau$ всегда может служить корреляционной функцией случайного стационарного процесса (одномерного однородного поля), так как во всех точках прямой $Y = Z = 0$ однородное изотропное трехмерное поле представляет собой однородное одномерное поле.

Как показывает последний пример, обратное не имеет места, т. е. из того, что функция $R(\tau)$ является корреляционной функцией одномерного однородного поля, не следует, что эта функция, рассматриваемая как функция расстояния между точками, может служить корреляционной функцией двух- или трехмерного поля.

Глава 4

Линейные преобразования

4.1. Преобразование функций линейным оператором

При практическом применении теории случайных функций одной из важных задач является задача преобразования случайных процессов. В технике часто приходится рассматривать задачу прохождения сигнала через некоторую систему.

Предполагается, что на вход физической системы поступает функция $x(t)$, называемая входным сигналом. Система осуществляет некоторое преобразование этого сигнала, после чего на выходе системы получается функция $y(t)$, называемая выходным сигналом или реакцией системы. Поскольку входной сигнал обычно представляет собой либо чисто случайный процесс, либо сумму полезного сигнала и случайной помехи, то и выходной сигнал является случайным процессом.

Возникает задача, как, зная характеристики случайного процесса $X(t)$ на входе и характер операций, осуществляемых системой над этим сигналом, определить характеристики выходного сигнала $Y(t)$. Отвлекаясь от физической природы реальных физических систем, можно сформулировать задачу в общей математической форме как задачу преобразования некоторой системы функции $\{X(t)\}$ посредством некоторых математических операций. Правило, по которому одно множество функций отображается на другое множество функций, называется в математике оператором.

В качестве примера задач указанного типа можно рассмотреть прохождение сигналов через радиотехнические устройства, когда входной сигнал является суммой полезного сигнала и искажающих его помех. Другим примером может служить поведение самолета в турбулентной атмосфере, когда в результате случайных изменений вектора скорости ветра самолет получает случайные угловые и линейные ускорения.

В последнее время предпринимались попытки рассматривать атмосферу и океан как динамические системы и описывать взаимодействие различных факторов в рамках указанной теории. Например, было проведено рассмотрение атмосферы как системы, на вход которой действуют интенсивные потоки тепла из океана, а выходом служит разность давления ΔP в данном районе океана.

Наиболее простым и вместе с тем важным видом преобразований случайных функций являются линейные преобразования. Преобразование называется линейным, если оно осуществляется линейным оператором. Аналогично физическая система, описываемая линейным оператором, называется линейной системой.

Будем говорить, что функция $y(t)$ есть результат применения оператора L к функции $x(t)$, т. е.

$$y(t) = L[x(t)]. \quad (4.1.1)$$

Оператор L называют линейным, если он удовлетворяет условиям однородности и аддитивности

$$1) \quad L[cx(t)] = cL[x(t)]; \quad (4.1.2)$$

$$2) \quad L[x_1(t) + x_2(t)] = L[x_1(t)] + L[x_2(t)]. \quad (4.1.3)$$

Операторы, не удовлетворяющие этим условиям, называются нелинейными.

Линейным является, например, оператор дифференцирования, так как имеют место равенства

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[cx(t)] &= c \frac{d}{dt}[x(t)]; \\ \frac{d}{dt}[x_1(t) + x_2(t)] &= \frac{d}{dt}[x_1(t)] + \frac{d}{dt}[x_2(t)]. \end{aligned}$$

Линейными являются: оператор интегрирования; оператор, получающийся при последовательном применении нескольких линейных операторов; оператор нахождения математического ожидания случайной функции.

Примерами нелинейных операторов могут служить операторы возведения в степень, оператор нахождения дисперсии случайной функции.

Функцию $x(t)$, непрерывную при $t = \tau$, можно представить в виде интегрального преобразования

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau, \quad (4.1.4)$$

где $\delta(t - \tau)$ есть дельта-функция Дирака, обладающая свойствами

$$\delta(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq \tau \\ \infty & \text{при } t = \tau; \end{cases} \quad (4.1.5)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau) dt = 1. \quad (4.1.6)$$

Равенство (4.1.4) есть основное свойство дельта-функции. Обозначим через $g(t, \tau)$ результат применения линейного оператора L к дельта-функции $\delta(t - \tau)$

$$g(t, \tau) = L[\delta(t - \tau)]. \quad (4.1.7)$$

Выразим с помощью этой функции $g(t, \tau)$ результат применения данного оператора L к функции $x(t)$. Применяя линейный оператор L к обеим частям равенства (4.1.4), получим

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \tau) x(\tau) d\tau. \quad (4.1.8)$$

В частности, если оператор L является стационарным, т. е. инвариантным во времени, то функция $g(t, \tau)$ зависит только от разности аргументов $t - \tau$. Тогда можем записать

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) x(t - \tau) d\tau. \quad (4.1.9)$$

Функция $g(t)$, представляющая собой результат воздействия оператора L на дельта-функцию $\delta(t)$, называется весовой функцией (в технике ее называют также импульсной переходной функцией). Интеграл (4.1.9) называется сверткой функций $x(t)$ и $g(t)$. Весовая функция $g(t)$ является важной характеристикой линейной системы.

В ряде приложений вместо функции $g(t)$ для характеристики линейной системы удобно использовать функцию

$$L(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (4.1.10)$$

которая называется передаточной функцией системы, или линейного оператора L .

Рассмотрим применение линейного стационарного оператора к гармоническим колебаниям вида

$$x(t) = e^{i\omega t}.$$

Согласно (4.1.9), получаем

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\tau = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = L(\omega) e^{i\omega t}. \quad (4.1.11)$$

Отсюда видно, что применение линейного стационарного оператора к гармоническому колебанию сводится к умножению его на передаточную функцию оператора.

Рассмотрим способ определения передаточной функции. Линейную стационарную систему можно описать линейным диффе-

ренциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + \\
 + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots \\
 \dots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t).
 \end{aligned}
 \tag{4.1.12}$$

Здесь заданная функция $x(t)$ представляет собой входное воздействие, а решение уравнения $y(t)$ есть реакция системы.

В качестве функции $x(t)$ рассмотрим гармонические колебания $x(t) = e^{i\omega t}$, тогда $y(t)$ согласно (4.1.11) запишется в виде

$$y(t) = L(\omega) e^{i\omega t}.$$

Так как

$$\begin{aligned}
 \frac{d^k e^{i\omega t}}{dt^k} &= (i\omega)^k e^{i\omega t}; \\
 \frac{d^k y(t)}{dt^k} &= L(\omega) (i\omega)^k e^{i\omega t},
 \end{aligned}$$

то (4.1.12) переписывается в виде

$$\begin{aligned}
 [a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (i\omega) + a_0] L(\omega) e^{i\omega t} = \\
 = [b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (i\omega) + b_0] e^{i\omega t}.
 \end{aligned}
 \tag{4.1.13}$$

Отсюда получаем выражение для передаточной функции

$$L(\omega) = \frac{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (i\omega) + b_0}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (i\omega) + a_0}. \tag{4.1.14}$$

Обозначив

$$\begin{aligned}
 B_m(i\omega) &= b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (i\omega) + b_0; \\
 A_n(i\omega) &= a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (i\omega) + a_0,
 \end{aligned}$$

где $B_m(i\omega)$ и $A_n(i\omega)$ есть многочлены соответствующей степени от $i\omega$, получим выражение для передаточной функции в виде

$$L(\omega) = \frac{B_m(i\omega)}{A_n(i\omega)}. \tag{4.1.15}$$

Передаточная функция (4.1.15) определяет поведение линейной стационарной системы, описываемой оператором L .

4.2. Спектральная плотность линейного преобразования стационарного случайного процесса

Рассмотрим теперь случайный стационарный процесс $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием и заданной корреляционной функцией $R_x(\tau)$. И пусть другой случайный процесс $Y(t)$ есть результат воздействия линейного стационарного оператора L на случайный процесс $X(t)$

$$Y(t) = L[X(t)]. \quad (4.2.1)$$

Тогда случайный процесс $Y(t)$ можно представить в виде

$$Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) X(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) X(t - \tau) d\tau, \quad (4.2.2)$$

где $g(t - \tau)$ — весовая функция.

Действительно, каждая реализация $y_i(t)$ случайного процесса $Y(t)$ есть результат применения оператора L к неслучайной функции, соответствующей реализации $x_i(t)$ случайного процесса $X(t)$ и, следовательно, для нее справедливо соотношение (4.2.2), а тогда оно справедливо и для всего множества реализаций.

Определим корреляционную функцию случайного процесса $Y(t)$.

$$\begin{aligned} R_y(t_1, t_2) &= M[Y(t_1)Y(t_2)] = M \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) X(t_1 - \tau_1) d\tau_1 \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) X(t_2 - \tau_2) d\tau_2 \right] \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) M[X(t_1 - \tau_1)(t_2 - \tau_2)] d\tau_2 \right\} d\tau_1 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) R_x(t_2 - t_1 - \tau_2 + \tau_1) d\tau_2. \quad (4.2.3) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что корреляционная функция $R_y(t_1, t_2)$ зависит только от разности $t_2 - t_1 = \tau$, т. е. $Y(t)$ есть стационарный в широком смысле случайный процесс

$$R_y(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) R_x(\tau - \tau_2 + \tau_1) d\tau_2. \quad (4.2.4)$$

Определим спектральную плотность случайного процесса $Y(t)$.

$$\begin{aligned} S_y(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_y(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) R_x(\tau - \tau_2 + \tau_1) d\tau_2. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Меняя порядок интегрирования в тройном интеграле и делая замену $\tau - \tau_2 + \tau_1 = t$, получим произведение трех однократных интегралов

$$S_y(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) e^{i\omega\tau_1} d\tau_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) e^{-i\omega\tau_2} d\tau_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (4.2.6)$$

При этом сомножитель $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) e^{-i\omega t} dt = S_x(\omega)$ есть спектральная плотность случайного процесса $X(t)$.

Интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_2) e^{-i\omega\tau_2} d\tau_2 = L(\omega)$ есть передаточная функция оператора L . Так как весовая функция принимает только вещественные значения, то интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) e^{i\omega\tau_1} d\tau_1 = L^*(\omega)$ есть величина, комплексно-сопряженная передаточной функции.

Таким образом, формулу (4.2.6) можно записать в виде

$$S_y(\omega) = L(\omega) L^*(\omega) S_x(\omega), \quad (4.2.7)$$

или

$$S_y(\omega) = |L(\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (4.2.8)$$

Следовательно, спектральная плотность результата преобразования стационарного случайного процесса $X(t)$ с помощью линейного стационарного оператора L равна произведению спектральной плотности случайного процесса на квадрат модуля передаточной функции оператора.

Зная спектральную плотность $S_y(\omega)$, можно найти корреляционную функцию $R_y(\tau)$.

При определенных допущениях одномерное движение (проекция на заданную ось) в горизонтальной плоскости частицы в воздушном потоке может быть описано уравнением

$$m \frac{dv(t)}{dt} + bv(t) = F(t), \quad (4.2.9)$$

где $v(t)$ — проекция пульсаций скорости частицы на данную ось; $F(t)$ — проекция силы, действующей на частицу под влиянием турбулентности атмосферы; член $bv(t)$ характеризует силу трения.

Если (4.2.9) поделить на массу частицы m , то это уравнение запишется в виде

$$\frac{dv(t)}{dt} + \alpha v(t) = F_1(t). \quad (4.2.10)$$

Уравнение (4.2.10) представляет собой так называемое уравнение Ланжевена.

Будем считать, что сила $F_1(t)$ представляет собой стационарную случайную функцию времени, спектральная плотность которой $S_f(\omega)$ может быть принята постоянной, т. е. представляет собой белый шум

$$S_f(\omega) = c = \text{const}. \quad (4.2.11)$$

Как уже указывалось (см. п. 3.2, пример 1), спектральная плотность не может быть постоянной во всем диапазоне частот, так как при этом обращается в бесконечность дисперсия случайного процесса. Предполагается, что спектральная плотность имеет вид кривой, которая мало изменяется в некотором достаточно большом интервале $(-T, T)$ и может приближенно считаться в нем постоянной.

Найдем корреляционную функцию случайного процесса $V(t)$, являющегося решением уравнения (4.2.10) в установившемся режиме.

Для уравнения (4.2.1) передаточная функция запишется в виде

$$L(\omega) = \frac{1}{i\omega + \alpha}. \quad (4.2.12)$$

Отсюда спектральную плотность $S_v(\omega)$ решения $V(t)$ получим в виде

$$S_v(\omega) = \left| \frac{1}{i\omega + \alpha} \right|^2 S_f(\omega), \quad (4.2.13)$$

или

$$S_v(\omega) = \frac{c}{\omega^2 + \alpha^2}. \quad (4.2.14)$$

Из формулы (4.2.14) видно, что $S_v(\omega)$ убывает с ростом ω и диапазон больших частот, для которых значения $S_f(\omega)$ отличаются от принятого нами значения c , не является существенным.

Зная спектральную плотность $S_v(\omega)$, можем найти корреляционную функцию $R_v(\tau)$.

В примере 1 из п. 3.2 мы видели, что спектральной плотности

$$S(\omega) = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}$$

соответствует корреляционная функция

$$R(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha |\tau|}.$$

Сравнивая с (4.2.14), видим, что, приняв $\frac{\sigma^2 \alpha}{\pi} = c$, откуда $\sigma^2 = \frac{\pi c}{\alpha}$, получим корреляционную функцию решения уравнения (4.2.10) в виде

$$R_v(\tau) = \frac{\pi c}{\alpha} e^{-\alpha |\tau|}. \quad (4.2.15)$$

В п. 1.7 было показано, что случайный процесс, имеющий корреляционную функцию вида (4.2.15), является недифференцируемым. Поэтому следует уточнить смысл уравнения (4.2.10). Недифференцируемость процесса $V(t)$ является следствием того, что за $F_1(t)$ был принят белый шум, имеющий постоянную спектральную плотность. В этом случае более точный подход заключается в рассмотрении решения уравнения (4.2.10) как предела некоторой последовательности решений этого уравнения со стационарными правыми частями, спектральная плотность которых стремится к постоянной.

Рассмотрим стационарное решение дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\alpha \frac{dy(t)}{dt} + k^2 y(t) = F(t). \quad (4.2.16)$$

Уравнение вида (4.2.16) описывает многие физические колебательные процессы. В частности, это уравнение описывает броуновское движение частицы. В этом случае $y(t)$ — координата частицы в момент времени t ; $2\alpha \frac{dy}{dt}$ — вязкое трение, вызывающее торможение частицы, $\alpha > 0$; $k^2 y$ — так называемая восстанавливающая сила; $F(t)$ — неупорядоченная сила, определяемая колебанием числа молекулярных толчков.

Предположим, что сила $F(t)$ есть случайный стационарный процесс с постоянной спектральной плотностью $S_f(\omega) = c$.

Согласно (4.1.15), передаточная функция уравнения (4.2.16) имеет вид

$$L(\omega) = \frac{1}{(i\omega)^2 + 2\alpha i\omega + k^2} = \frac{1}{k^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega}. \quad (4.2.17)$$

Спектральная плотность стационарного случайного процесса $Y(t)$, являющегося решением уравнения (4.2.16) определится,

согласно (4.2.8), в виде

$$S_y(\omega) = \left| \frac{1}{k^2 - \omega^2 + 2i\alpha\omega} \right|^2 c^2 = \frac{c^2}{(k^2 - \omega^2)^2 + (2\alpha\omega)^2}. \quad (4.2.18)$$

С помощью обозначений

$$k^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad c = \frac{2\alpha\sigma^2 k^2}{\pi} \quad (4.2.19)$$

выражение (4.2.18) можно записать в виде

$$S_y(\omega) = \frac{2\sigma^2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}. \quad (4.2.20)$$

Этой спектральной плотности (как было показано в п. 3.2, пример 5) соответствует корреляционная функция

$$R_y(\tau) = \sigma^2 e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta|\tau| \right). \quad (4.2.21)$$

Выражая β и σ из (4.2.19) через коэффициенты уравнения

$$\beta = \sqrt{k^2 - \alpha^2}, \quad \sigma^2 = \frac{\pi c}{2\alpha k^2}, \quad (4.2.22)$$

запишем корреляционную функцию (4.2.21) в виде

$$R_y(\tau) = \frac{\pi c}{2\alpha k^2} e^{-\alpha|\tau|} \left(\cos \sqrt{k^2 - \alpha^2} \tau + \frac{\alpha}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \sin \sqrt{k^2 - \alpha^2} |\tau| \right). \quad (4.2.23)$$

Случайный процесс $Y(t)$, имеющий корреляционную функцию вида (4.2.21), является дифференцируемым, однако можно показать, что для него не существует второй производной. Поэтому решение уравнения (4.2.16) нужно рассматривать в том же смысле, как это было указано для уравнения (4.2.10).

Примером линейного преобразования могут служить различные виды сглаживания случайного процесса. В частности среднеарифметическое сглаживание, когда случайный процесс осредняют по промежутку времени T , т. е. преобразуют случайный процесс по формуле

$$Y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t X(\tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_0^T X(t-\tau) d\tau. \quad (4.2.24)$$

Это есть линейное преобразование случайного процесса с весовой функцией $g(t) = 1/T$ при $0 \leq t \leq T$ и $g(t) = 0$ при $t \leq 0$ и $t \geq T$. Этой весовой функции соответствует передаточная функция

$$L(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{-i\omega T/2} \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2}. \quad (4.2.25)$$

Среднеарифметическое сглаживание применяют в случаях, когда интересуются лишь низкочастотными (длиннопериодными) колебаниями, а высокочастотные колебания с периодами, меньшими некоторого фиксированного периода T , хотят отсечь.

Помимо среднеарифметического сглаживания применяют экспоненциальное сглаживание, задаваемое формулой

$$Y(t) = \frac{1}{T} \int_0^T t^{-\tau/T} X(t - \tau) d\tau. \quad (4.2.26)$$

Передаточная функция преобразования (4.2.26) равна

$$L(\omega) = \frac{1}{T} \int_0^{\infty} t^{-i\omega t - \tau/T} d\tau = \frac{1}{1 + i\omega T}. \quad (4.2.27)$$

Сравнивая с (4.2.12), видим, что она пропорциональна передаточной функции дифференциального уравнения первого порядка (4.2.10) при $\alpha = 1/T$. Экспоненциальное осреднение по промежутку времени T равносильно умножению спектральной плотности $S_x(\omega)$ случайного процесса $X(t)$ на коэффициент $|L(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \omega^2 T^2}$.

4.3. Фильтрация случайных процессов

Одним из видов линейного преобразования случайного процесса $X(t)$ является его представление в виде суммы двух процессов

$$X(t) = \hat{X}(t) + m(t). \quad (4.3.1)$$

Эту операцию традиционно называют фильтрацией.

В технике фильтром называют такое устройство, которое пропускает гармонические колебания из определенного диапазона частот (полосы пропускания данного фильтра), но не пропускают (или резко ослабляют) все гармонические колебания с частотами вне указанного диапазона.

Применяют следующие типы фильтров. Фильтры низких частот, пропускающие гармонические колебания с частотой, меньшей некоторой частоты ω_0 , но задерживающие все колебания с частотой $\omega > \omega_0$. Фильтры высоких частот, пропускающие колебания с частотой ω , большей некоторой частоты ω_0 , но задерживающие колебания при $\omega < \omega_0$. Полосовые фильтры, пропускающие лишь колебания с частотой из некоторого диапазона $\omega_1 < \omega < \omega_2$.

Операцию фильтрации можно рассматривать как результат преобразования случайного процесса некоторым линейным оператором L таким образом, чтобы процесс, получающийся на выходе, не содержал в своем составе гармонических колебаний определенного диапазона частоты.

Результат применения линейного оператора L к случайной функции $Y(t)$ можно записать в виде

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) Y(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) Y(\tau) d\tau, \quad (4.3.2)$$

где $g(t)$ — весовая функция.

При этом спектральная плотность $S_z(\omega)$ результата воздействия линейного оператора L на случайную функцию $Y(t)$ равна произведению спектральной плотности $S_y(\omega)$ функции $Y(t)$ на квадрат модуля передаточной функции оператора $L(\omega)$

$$S_z(\omega) = |L(\omega)|^2 S_y(\omega). \quad (4.3.3)$$

Для исключения изменяющегося математического ожидания, которое будем рассматривать как гармоническое колебание частоты ω , необходимо применить фильтр высоких частот, пропускающий все низкочастотные составляющие, период которых не меньше длины реализации T , т. е. частоты $\omega < \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.

Оператор L нужно подобрать так, чтобы спектральная плотность преобразованного процесса имела вид

$$S_z(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \omega < \omega_0, \\ S_y(\omega) & \text{при } \omega \geq \omega_0. \end{cases} \quad (4.3.4)$$

Это будет достигнуто при умножении спектральной плотности $S_y(\omega)$ на функцию $L(\omega)$, удовлетворяющую условию

$$L^2(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \omega < \omega_0, \\ 1 & \text{при } \omega_0 \leq \omega < \pi. \end{cases} \quad (4.3.5)$$

Весовая функция $g(t)$, соответствующая этой передаточной функции, определится в виде

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\pi t} \sin \omega_0 t. \quad (4.3.6)$$

Эта функция называется идеальным фильтром.

Если преобразовать реализацию $y(t)$ по формуле (4.3.2) с помощью идеального фильтра (4.3.6), то фазы и амплитуды пропускаемых гармоник не изменяются, остальные составляющие подавляются.

Рассмотрим случай, когда реализация $y(t)$ задана дискретным рядом из N значений.

В этом случае фильтрация определяется как линейное преобразование

$$z_n(t) = L[y_n] = \sum_{i=-m}^m g_i y_{n+i}, \quad (4.3.7)$$

где $n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$, $N\Delta t = T$ — продолжительность наблюдений; $2m\Delta t = T_0$ — интервал задания весовой функции; Δt — интервал дискретности наблюдений; g_i — последовательность весовых коэффициентов.

Рассмотрим случай, когда процесс $y(t)$ вещественный и содержит только одну гармонику

$$y(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.3.8)$$

Подставляя (4.3.8) в (4.3.7)

$$\begin{aligned} z(t) &= A \sum_{j=-m}^m g_j \cos[\omega_0(t+j) + \varphi] = \\ &= A \cos(\omega_0 t + \varphi) \sum_{j=-m}^m g_j \cos j\omega_0 - A \sin(\omega_0 t + \varphi) \times \\ &\quad \times \sum_{j=-m}^m g_j \sin j\omega_0, \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

получим ряд, содержащий составляющую той же частоты, амплитуда которой умножилась на величину

$$L^2(\omega) = \left(\sum_{j=-m}^m g_j \cos j\omega_0 \right)^2 + \left(\sum_{j=-m}^m g_j \sin j\omega_0 \right)^2, \quad (4.3.10)$$

а фаза получила приращение

$$Q = - \operatorname{arctg} \frac{\sum_{j=-m}^m g_j \sin j\omega_0}{\sum_{j=-m}^m g_j \cos j\omega_0}. \quad (4.3.11)$$

Обычно неудобно иметь фильтр, порождающий фазовый сдвиг, и поэтому естественно потребовать, чтобы $Q(\omega) = 0$. Этого легко добиться, полагая $g_j = g_{-j}$, такой фильтр называется симметричным или косинусоидальным.

При косинусоидальном фильтре фаза для каждой частоты не изменится, а амплитуда умножится на величину

$$L^2(\omega) = \left(g_0 + 2 \sum_{j=1}^m g_j \cos j\omega_0 \right)^2. \quad (4.3.12)$$

Таким образом, передаточная функция фильтра (4.3.7) имеет вид

$$L(\omega) = g_0 + 2 \sum_{j=1}^m g_j \cos j\omega_0. \quad (4.3.13)$$

Для получения идеального фильтра нужно подобрать весовые коэффициенты так, чтобы передаточная функция (4.3.13) удовлетворяла условию (4.3.5). Для конечного m коэффициенты g_j в формуле (4.3.13) не могут быть подобраны так, чтобы $L(\omega)$ имела идеальную форму (4.3.5), и поэтому приходится воспользоваться некоторым приближенным выражением. В качестве разумного приближения можно выбрать передаточную функцию, исходя из условия минимизации площади между кривой $L(\omega)$ и осью абсцисс на интервале частот $[0, \omega_0]$

$$\int_0^{\omega_0} L(\omega) d\omega = \min,$$

$$L(\omega) = 1 \quad \text{при} \quad \omega > \omega_0.$$

Так как вблизи $\omega = 0$ функция $\cos j\omega$ пологая, то обычно функция $L(\omega)$, определяемая равенством (4.3.13), имеет первый главный пик, за которым следует ряд боковых пиков. Исходя из этого задача сводится к отысканию аппроксимирующего выражения, минимизирующего высоту первого бокового пика.

Таким свойством, в частности, обладает высокочастотный фильтр Тьюки, которому соответствует передаточная функция вида

$$L(\omega) = 1 - \frac{\sin \pi \frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\pi \omega}{\omega_0} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}. \quad (4.3.14)$$

Фильтру Тьюки соответствуют весовые коэффициенты

$$g_0 = 1 - \frac{2}{2m+1}, \quad h_j = -\frac{1 + \cos \frac{3\pi j}{2m+1}}{2m+1}. \quad (4.3.15)$$

При использовании фильтра (4.3.7) длиной $2m+1$ для исключения изменяющегося математического ожидания происходит потеря по m значений в начале и в конце исходного ряда и для выборки небольшого объема это может установить верхний предел длины применяемого фильтра.

Следует иметь в виду, что любой физически реализуемый фильтр, в отличие от идеального, не подавляет полностью те колебания, от которых желают избавиться.

Часть энергии низких частот «просачивается» за счет боковых лепестков передаточной функции. Появление дополнительной энергии в отфильтрованном процессе исказит оценку корреляционной функции, в частности, ее первую ординату, представляющую собой дисперсию случайного процесса. При спектральном анализе это будет соответствовать искажению на частоте $\omega = 0$. Однако этим искажением можно пренебречь, так как участок спектра от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_0$ исключается из рассмотрения.

Другим методом исключения низкочастотных колебаний больших периодов является скользящее осреднение, при котором из текущих значений рассматриваемого процесса $Y(t)$ вычитают среднее значение по фиксированному промежутку τ , т. е. получают процесс $X(t)$ в виде

$$X(t) = Y(t) - m(t) = Y(t) - \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t Y(u) du. \quad (4.3.16)$$

В данном случае мы определяем переменное математическое ожидание как линейное преобразование процесса $Y(t)$ с весовой функцией

$$g(u) = \begin{cases} 1/\tau & \text{при } 0 \leq u \leq \tau, \\ 0 & \text{при } u < 0, u > \tau. \end{cases} \quad (4.3.17)$$

Этой весовой функции соответствует передаточная функция

$$L(\omega) = 1 - e^{-i\omega\tau/2} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}. \quad (4.3.18)$$

Квадрат модуля $|L(\omega)|^2$ передаточной функции (4.3.18)

$$|L(\omega)|^2 = 1 - \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right|^2. \quad (4.3.19)$$

обращается в нуль при $\omega = 0$, быстро возрастает с ростом $|\omega|$, а затем начинает колебаться со все затухающей амплитудой около своего предельного значения, равного единице. Отсюда видно, что преобразование (4.3.16) представляет некоторый фильтр высоких частот. Скользящее осреднение оптимально выделяет изменяющееся математическое ожидание лишь в том случае, когда интервал осреднения τ точно совпадает с периодом высокочастотных колебаний.

4.4. Выделение скрытых периодичностей

Методы гармонического анализа наиболее эффективны в том случае, когда речь идет об анализе детерминированных процессов. Методы спектрального анализа стационарных случайных

процессов эффективны при описании свойств нерегулярных флюктуаций процессов около своего равновесного состояния. Модель ритмики природных процессов, обладающих и повторяемостью колебаний и стохастичностью, приводит к методам теории периодически коррелированных случайных процессов (ПКСП).

В гидрометеорологии часто рассматриваются процессы такие как сезонный ход температуры воздуха, колебания уровня в приливных морях, которые удобно представить в виде аддитивной модели ПКСП

$$Y(t) = X(t) + m(t), \quad (4.4.1)$$

где $X(t)$ — стационарный случайный процесс; $m(t)$ — детерминированная функция, периодическая или почти периодическая.

Для этой модели весьма эффективными оказываются методы обобщенного гармонического анализа, или методы выявления скрытых периодичностей.

Рассмотрим простейшую периодическую функцию — гармоническое колебание с амплитудой A , частотой $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ и начальной фазой φ

$$m(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (4.4.2)$$

Будем считать, что периодическая функция $m(t)$ является реализацией случайного процесса и определим корреляционную функцию этого процесса

$$\begin{aligned} R(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T m(t) m(t + \tau) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T A \cos(\omega_0 t + \varphi) A \cos[\omega_0(t + \tau) + \varphi] dt = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau. \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Отсюда видно, что корреляционная функция периодического процесса также является периодической функцией с тем же периодом. Амплитуда корреляционной функции равна половине квадрата амплитуды исходного процесса, причем корреляционная функция не зависит от начальной фазы.

При этом корреляционная функция случайного процесса (4.4.1) будет иметь вид

$$R_y(\tau) = \frac{A^2}{2} \cos \omega_0 \tau + R_x(\tau). \quad (4.4.4)$$

Отсюда видно, что наличие непериодического слагаемого $R_x(\tau)$ в корреляционной функции $R_y(\tau)$ смазывает выраженность периодичности суммарной корреляционной функции.

Однако, как мы видели в главе 2, корреляционная функция стационарного случайного процесса, как правило, убывает с ростом τ , $\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) = 0$.

Поэтому, если реализация $y(t)$ задана на бесконечном интервале, т. е. на достаточно большом интервале, на котором $R_x(\tau)$ практически обращается в нуль, то при достаточно больших значениях τ корреляционная функция $R_y(\tau)$ будет иметь вид чисто гармонического колебания. Определив период этого колебания, мы и найдем период искомой гармонической функции $m(t)$. Для нахождения амплитуды A нужно определить значения повторяющегося с периодом T максимума корреляционной функции и извлечь корень квадратный из его удвоенного значения.

Проведенное рассуждение показывает, что для успешного выделения гармонической составляющей с помощью корреляционного анализа необходимо выполнение двух условий — достаточно большого интервала (в идеале бесконечного) задания обрабатываемой реализации случайного процесса и достаточно быстрого затухания корреляционной функции непериодической составляющей $X(t)$. Второе условие хорошо выполняется для процессов $X(t)$, близких к белому шуму, сечения которых при различных t некоррелированы, либо слабо коррелированы.

Если же процесс $X(t)$ узкополосный, то его корреляционная функция убывает слабо и метод корреляционного анализа может оказаться неэффективным для выделения периодической составляющей.

Мы рассмотрели случай, когда периодическая составляющая $m(t)$ представляет собой простое гармоническое колебание вида (4.4.2). В общем случае периодическая функция $m(t)$ периода T может быть представлена в виде ряда Фурье

$$m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n). \quad (4.4.5)$$

В этом случае задача заключается в определении периода T (или основной частоты ω_0) и коэффициентов Фурье (амплитуд гармоник) A_n .

Определим корреляционную функцию $R_m(\tau)$

$$\begin{aligned} R_m(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T m(t) m(t + \tau) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} A_n A_k \int_{-T}^T \cos(\omega_n t + \varphi_n) \cos[\omega_n(t + \tau) + \varphi_n] dt. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

В силу ортогональности тригонометрических функций интегралы в двойной сумме равны нулю при $n \pm k$ и $\frac{1}{2} \cos \omega_n \tau$ при $n = k$. Получаем

$$R_m(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n^2}{2} \cos \omega_n \tau. \quad (4.4.7)$$

Отсюда видно, что корреляционная функция любого периодического процесса также является периодической функцией с тем же периодом, причем амплитуды гармоник корреляционной функции равны половинам квадратов амплитуд соответствующих гармоник исходного процесса. При этом корреляционная функция не зависит от фаз и, следовательно, не дает никакой информации о фазах гармоник исходного процесса.

Поскольку квадраты чисел различаются между собой лучше, чем сами числа, то для последовательного выделения амплитуд A_n различных гармоник можно применять многократную корреляцию. Пусть амплитуды A_n исходного процесса расположены в порядке возрастания $A_0 > A_1 > A_2 > \dots$

Относительный вес гармоник с амплитудой $A_0^2/2$ в сумме (4.4.7) является более выраженным, чем в сумме (4.4.5).

Вычислим теперь корреляционную функцию $R_m^1(\tau)$ от функции (4.4.7), она будет иметь вид

$$R_m^1(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{A_n^2}{2} \right)^2 \cos \omega_n \tau. \quad (4.4.8)$$

В функции (4.4.8) вес слагаемого частоты ω_0 еще более возрос.

После нескольких повторений этого процесса в полученной кривой будет доминировать только колебание с наибольшей амплитудой, а влияние остальных колебаний будет практически несущественным. Определив колебание с наибольшей амплитудой, можно выделить его из исследуемого процесса и провести аналогичный анализ оставшегося процесса для выделения колебания следующей по значению амплитуды.

Следует иметь в виду, что каждая последовательная корреляция уменьшает интервал задания функции. Поэтому при задании исходной реализации $y(t)$ на конечном промежутке $[-L, L]$ нужно следить за тем, чтобы интервал обработки, по которому проводится очередная корреляция, не был слишком малым. Практика вычислений показывает, что этот интервал должен быть не меньше $5/6$ интервала задания исходной реализации $y(t)$. Как мы уже видели, корреляционная функция реализации не всегда позволяет обнаружить периодичность, кроме

того она не дает возможности выделить периодическую составляющую процесса, так как не содержит информации о начальной фазе гармоник.

В ряде случаев лучшие результаты дает анализ взаимной корреляционной функции двух реализаций. Пусть имеются реализации двух случайных процессов

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) + m_1(t); \\ y_2(t) &= x_2(t) + m_2(t), \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

где $m_1(t)$ и $m_2(t)$ — реализации периодических составляющих; $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — реализации непериодических составляющих.

Взаимная корреляционная функция определится в виде

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = R_{x_1 x_2}(\tau) + R_{m_1 m_2}(\tau) + R_{x_1 m_2}(\tau) + R_{x_2 m_1}(\tau). \quad (4.4.10)$$

Считая, что составляющие x_1 и x_2 взаимно некоррелированы и не коррелированы с периодическими составляющими, т. е.

$$R_{x_1 x_2}(\tau) = R_{x_1 m_2}(\tau) = R_{x_2 m_1}(\tau) = 0,$$

получаем

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = R_{m_1 m_2}(\tau). \quad (4.4.11)$$

Отсюда видно, что во взаимной корреляционной функции периодическая составляющая проявляется в чистом виде.

Для периодических процессов одинаковой частоты ω_0 , но с разными фазами

$$\begin{aligned} m_1(t) &= A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1); \\ m_2(t) &= A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

взаимная корреляционная функция имеет вид

$$\begin{aligned} R_{m_1 m_2}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) A_2 \times \\ &\times \cos[\omega_0(t + \tau) + \varphi_2] dt = \frac{1}{2} A_1 A_2 \cos[\omega_0 \tau + (\varphi_2 - \varphi_1)], \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

т. е. является периодической функцией той же частоты, но зависит еще от разности фаз.

Аналогично

$$R_{m_1 m_2}(\tau) = R_{m_1 m_2}(-\tau) = \frac{1}{2} A_1 A_2 \cos[\omega_0 \tau - (\varphi_2 - \varphi_1)]. \quad (4.4.14)$$

Зависимость взаимной корреляционной функции от разности фаз используется для определения фазы выявленного гармонического колебания. При этом может использоваться метод взаимной корреляции с некоторым заранее выбранным гармоническим колебанием с известной частотой и начальной фазой,

которое используется в качестве теста для выявления фазы искомой гармоники.

Применение корреляционного анализа для выявления скрытой периодичности существенно затрудняется, когда исследуемый процесс содержит колебания различной некрatной друг другу частоты. В этом случае корреляционная функция имеет сложную структуру и не дает наглядного представления о наличии периодичности. Более эффективным методом в этом случае является спектральный анализ. Рассмотрим методику определения скрытой периодичности с помощью спектрального анализа.

Зная корреляционную функцию гармонического колебания (4.4.2), можно определить его спектральную плотность

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau R(\tau) d\tau = \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega \tau \times \\ \times \cos \omega_0 \tau d\tau = \frac{A^2}{4} \delta(\omega - \omega_0). \quad (4.4.15)$$

Отсюда видно, что спектральная плотность гармонического колебания выражается через дельта-функцию, т. е. представляет собой пик бесконечной высоты на частоте ω_0 . По месту расположения этого пика можно определить значение основной частоты гармоники $m(t)$.

Аналогично для общего периодического процесса (4.4.5) спектральная плотность имеет вид

$$S(\omega) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2 \delta(\omega - \omega_n), \quad (4.4.16)$$

т. е. представляет собой совокупность бесконечных пиков на дискретных частотах ω_n , равных основным частотам процесса.

Поскольку на практике реализация случайного процесса имеется не на всем бесконечном интервале изменения аргумента, а лишь на некотором конечном интервале, то и корреляционную функцию можно получить лишь на некотором ограниченном промежутке $\tau \in [0, \tau_m]$. Вычисляя по ней спектральную плотность гармонического колебания (4.4.2) получим

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau_m} R(\tau) \cos \omega \tau d\tau = \frac{A^2}{2\pi} \int_0^{\tau_m} \cos \omega_0 \tau \times \\ \times \cos \omega \tau d\tau = \frac{A^2}{4} \left[\frac{\sin(\omega - \omega_0) \tau_m}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(\omega + \omega_0) \tau_m}{\omega + \omega_0} \right]. \quad (4.4.17)$$

Эта функция имеет максимум в точке $\omega = \omega_0$, равный

$$S(\omega_0) = \frac{A^2}{4} \left(\tau_m + \frac{\sin 2\omega_0 \tau_m}{2\omega_0} \right). \quad (4.4.18)$$

Отсюда видно, что спектральная плотность гармонического колебания, вычисленная по конечному интервалу изменения его аргумента, имеет ограниченный пик на частоте ω , равной собственной частоте ω_0 , причем высота этого пика возрастает с увеличением максимального значения аргумента корреляционной функции τ_m .

В случае, когда на гармонический процесс наложена непрерывная случайная функция, т. е. случайная реализация имеет вид (4.4.1), спектральная плотность суммарного случайного процесса определится в виде

$$S_y(\omega) = S_x(\omega) + S_m(\omega). \quad (4.4.19)$$

В этом случае наличие слагаемого $S_x(\omega)$ непрерывной частоты ω в суммарной спектральной плотности будет искажать пики спектральной плотности $S_m(\omega)$ периодической составляющей. Кроме того, могут появляться пики на частоте, отличной от собственной частоты гармонического колебания $m(t)$, в частности в том случае, когда спектральная плотность $S_x(\omega)$ имеет выраженный островеершинный характер. Отсюда видно, что наличие пика спектральной плотности не позволяет вынести достоверное суждение о наличии периодической компоненты в случайном процессе.

Поэтому при выявлении скрытых периодичностей с помощью спектрального анализа весьма важным является вопрос оценки статистической значимости выявленных пиков спектральной плотности, т. е. оценки достоверности гипотезы о том, что данный пик характеризует наличие гармонического колебания соответствующей собственной частоты.

Наиболее антагонистической по отношению к гипотезе о наличии периодической составляющей в исследуемом процессе является гипотеза о том, что исследуемый случайный процесс представляет собой белый шум и, следовательно, истинная его спектральная плотность есть постоянная величина, а выявленный пик спектральной плотности является следствием наложения случайных факторов.

Определяется вероятность осуществления этой гипотезы. Если эта вероятность мала (например, менее 0,05), то гипотеза о том, что исследуемый по имеющейся реализации $y(t)$ случайный процесс представляет собой белый шум, должна быть отброшена как маловероятная. Более вероятным в этом случае следует считать, что исследуемый процесс либо действительно содержит периодическую составляющую, либо же представляет собой узкополосный процесс с сильно коррелированными сечениями, спектральная плотность которого по своему виду, весьма схожа со спектральной плотностью гармонического процесса. Если у нас нет оснований для априорного суждения о наличии

периодической компоненты в изучаемом процессе, то дальнейшее уточнение вопроса является невозможным.

При этом может оказаться полезным провести взаимный спектральный анализ имеющейся реализации с гармоническим колебанием той же частоты. Это позволит также определить фазы гармонических колебаний. Как мы видели, для двух гармонических процессов $X_1(t)$ и $X_2(t)$ одинаковой частоты взаимные корреляционные функции $R_{x_1x_2}(\tau)$ и $R_{x_2x_1}(\tau) = R_{x_1x_2}(-\tau)$ имеют вид (4.4.13) и (4.4.14). Определим коспектр $C(\omega)$ и квадратный спектр $Q(\omega)$ этой пары гармонических процессов. В соответствии с (3.3.5) и (3.3.6)

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_m} [R_{x_1x_2}(\tau) + R_{x_1x_2}(-\tau)] \cos \omega \tau d\tau = \\ = \frac{\pi A_1 A_2}{4} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \left[\frac{\sin(\omega - \omega_0) \tau_m}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(\omega + \omega_0) \tau_m}{\omega + \omega_0} \right]. \quad (4.4.20)$$

$$Q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\tau_m} [R_{x_1x_2}(\tau) - R_{x_1x_2}(-\tau)] \sin \omega \tau d\tau = \\ = -\frac{\pi A_1 A_2}{4} \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \left[\frac{\sin(\omega - \omega_0) \tau_m}{\omega - \omega_0} - \frac{\sin(\omega + \omega_0) \tau_m}{\omega + \omega_0} \right]. \quad (4.4.21)$$

В частности, при $\omega = \omega_0$ получаем

$$\frac{Q(\omega_0)}{C(\omega_0)} = -\frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (4.4.22)$$

Отсюда

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{Q(\omega_0)}{C(\omega_0)}. \quad (4.4.23)$$

Предположим теперь, что в качестве $x_2(t)$ выбрано гармоническое колебание с известной фазой той же частоты ω_0 , которая соответствует максимуму спектральной плотности реализации $x(t)$, тогда зная их коспектр и квадратурный спектр, по формуле (4.4.23) определим разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$, а отсюда получим и искомую фазу φ гармоники $x(t)$. Гармоническое колебание $x_2(t)$ в данном случае представляет собой тест для выделения фазы гармоники $x(t)$. Если процесс $x(t)$ является полигармоническим, спектральная плотность его имеет несколько пиков, то нужно последовательно проводить анализ с отдельными тестовыми гармониками.

При этом способе выделения фаз гармоник $x(t)$ необходимо убедиться, что процесс $x(t)$ хорошо согласуется с тестовой гармоникой при разности фаз, определяемой формулой (4.4.23). Мерой указанного согласования служит когерентность, опреде-

ляемая по формуле

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{C^2(\omega) + Q^2(\omega)}{S_{x_1}(\omega) S_{x_2}(\omega)}}, \quad (4.4.24)$$

где $S_{x_1}(\omega)$ и $S_{x_2}(\omega)$ — соответственно спектральные плотности реализации $x(t)$ и тестовой гармоники $x_2(t)$.

Для гармонических колебаний вида (4.4.12) когерентность на частоте $\omega = \omega_0$ определится в виде

$$F(\omega_0) = \sqrt{\sin^2(\varphi_2 - \varphi) + \cos(\varphi_2 - \varphi)} = 1. \quad (4.4.25)$$

Таким образом, при $F(\omega_0) = 1$ процесс $x(t)$ и тестовая гармоника $x_2(t)$ полностью согласуются друг с другом при постоянной разности фаз (4.4.23). С уменьшением когерентности начинает все больше проявляться неустойчивость, т. е. случайный характер разности фаз. Близость когерентности к нулю свидетельствует о том, что между исследуемым процессом и тестовой гармоникой отсутствует связь на частоте ω_0 .

Глава 5

Разложение случайных процессов и полей на естественные ортогональные составляющие

5.1. Постановка задачи

В математике широко используется метод разложения функций в ряд по некоторой системе ортогональных и нормированных (ортонормированных) функций. Применяют разложение функций по различным ортонормированным системам: разложение в тригонометрический ряд Фурье; разложение в ряд Фурье — Бесселя по системе функций Бесселя; разложение по различным ортогональным полиномам — Чебышева, Эрмита и другим. Метод разложения по ортонормированной системе функций можно применить и к случайной функции.

Пусть $X(t)$ — случайная функция, определенная на интервале $[a, b]$, с нулевым математическим ожиданием $m_x(t) = 0$ и заданной корреляционной функцией $R_x(t_1, t_2)$, $t_1, t_2 \in [a, b]$; $\{\varphi_k(t)\}$ — полная ортонормированная система функций. Представим случайную функцию $X(t)$ в виде ряда Фурье

$$X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \varphi_k(t), \quad (5.1.1)$$

где коэффициенты Фурье A_k представляют собой случайные величины.

Обозначим через

$$X_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(t) \quad (5.1.2)$$

сумму n первых членов разложения и будем аппроксимировать случайную функцию $X(t)$ суммой $X_n(t)$. При этом средняя квадратическая ошибка аппроксимации

$$\delta_n = \sqrt{\int_a^b [X(t) - X_n(t)]^2 dt} \quad (5.1.3)$$

будет представлять собой случайную величину.

В качестве меры точности аппроксимации примем математическое ожидание квадрата случайной величины δ_n

$$\sigma_n^2 = M[\delta_n^2]. \quad (5.1.4)$$

Величина σ_n^2 , представляющая собой дисперсию ошибок аппроксимации, зависит от выбора системы функций $\{\varphi_k(t)\}$ и от числа n . При этом можно, не задаваясь заранее системой функций

$\{\varphi_k(t)\}$, определить эту систему, исходя из удовлетворения некоторому естественному условию. В частности, можно определить такую систему из заданного числа n функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$, чтобы величина σ_n^2 при этой системе функций обращалась в минимум. Такие функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ называют естественными ортогональными функциями. При выбранных таким образом функциях представление случайной функции $X(t)$ в виде суммы n слагаемых

$$X(t) \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi_k(t)$$

называют ее разложением на сумму естественных ортогональных составляющих.

Сформулируем задачу для случая, когда нет непрерывной записи случайной функции, а есть только ее сечения в дискретных точках, что обычно имеет место при экспериментальном изучении случайных функций.

Пусть случайная функция $X(t)$ с нулевым математическим ожиданием задана в конечном числе точек t_1, t_2, \dots, t_m ; $\{\varphi_k(t)\}$ — система функций, также заданная в точках t_1, t_2, \dots, t_m . Будем рассматривать случайную функцию $X(t)$ как m -мерный случайный вектор $\mathbf{X}(X_1, X_2, \dots, X_m)$, компонентами которого являются сечения случайной функции

$$X_1 = X(t_1), \quad X_2 = X(t_2), \quad \dots, \quad X_m = X(t_m).$$

Функции $\varphi_k(t)$ также будем рассматривать как m -мерные векторы

$$\varphi^k(\varphi_1^k, \varphi_2^k, \dots, \varphi_m^k),$$

компонентами которых являются значения функции $\varphi_k(t)$ в точках t_i , т. е.

$$\begin{aligned} \varphi_1^k &= \varphi_k(t_1); \\ \varphi_2^k &= \varphi_k(t_2), \quad \dots, \quad \varphi_m^k = \varphi_k(t_m). \end{aligned}$$

Будем считать векторы φ^k ортогональными и нормированными (ортонормированными).

Два вектора $\mathbf{a}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $\mathbf{b}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^m a_i b_i = 0. \quad (5.1.5)$$

Вектор \mathbf{a} называется нормированным, если его длина равна единице

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^m a_i^2} = 1. \quad (5.1.6)$$

Условие ортонормированности векторов $\{\varphi^k\}$ запишется в виде

$$\sum_{i=1}^m \varphi_i^k \varphi_i^l = \begin{cases} 1 & \text{при } k = l, \\ 0 & \text{при } k \neq l. \end{cases} \quad (5.1.7)$$

Представим случайный вектор \mathbf{X} в виде линейной комбинации векторов $\{\varphi^k\}$

$$\mathbf{X} \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi^k. \quad (5.1.8)$$

где коэффициенты A_k представляют собой линейные комбинации компонент случайного вектора

$$A_k = \sum_{j=1}^m X_j \varphi_j^k. \quad (5.1.9)$$

Векторное равенство (5.1.8), записанное для компонент векторов, приводит к системе равенств

$$X_i \approx \sum_{k=1}^n A_k \varphi_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.1.10)$$

Дисперсия ошибки аппроксимации случайного вектора \mathbf{X} суммой (5.1.8) определится в виде

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= M \left\{ \sum_{i=1}^m \left[X_i - \sum_{k=1}^n A_k \varphi_i^k \right]^2 \right\} = \\ &= M \left\{ \sum_{i=1}^m \left[X_i^2 - 2X_i \sum_{k=1}^n A_k \varphi_i^k + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_k A_l \varphi_i^k \varphi_i^l \right] \right\} = \\ &= M \left\{ \sum_{i=1}^m X_i^2 - 2 \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^m X_i X_j \varphi_i^k \varphi_j^l + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_k A_l \sum_{i=1}^m \varphi_i^k \varphi_i^l \right\}. \quad (5.1.11) \end{aligned}$$

Последняя сумма в равенстве (5.1.11), в силу (5.1.7) равна

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_k A_l \sum_{i=1}^m \varphi_i^k \varphi_i^l = \sum_{k=1}^n A_k A_k = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m X_i X_j \varphi_i^k \varphi_j^k. \quad (5.1.12)$$

Отсюда получаем

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^m R_{ii} - \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij} \varphi_i^k \varphi_j^k, \quad (5.1.13)$$

где R_{ij} — корреляционные моменты между сечениями случайной функции $X_i = X(t_i)$ и $X_j = X(t_j)$, т. е. элементы корреляционной матрицы $\|R_{ij}\|$ случайного вектора \mathbf{X} .

Будем искать такую систему ортонормированных векторов $\{\varphi^k\}$, при которой величина σ_n^2 принимает наименьшее значение, или, что то же самое, при которой тройная сумма в (5.1.13) принимает наибольшее значение.

Такие векторы будем называть естественными ортогональными векторами случайного вектора \mathbf{X} , а разложение (5.1.8) при таком выборе векторов $\{\varphi^k\}$ — разложением случайного вектора на естественные ортогональные составляющие.

Так как корреляционная функция случайного процесса является положительно определенной, то каждое слагаемое

$$b_k = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij} \varphi_i^k \varphi_j^k \quad (5.1.14)$$

является неотрицательным, следовательно, задача сводится к определению таких ортонормированных векторов $\{\varphi^k\}$, чтобы каждое слагаемое b_k принимало наибольшее значение.

5.2. Нахождение естественных ортогональных составляющих

Рассмотрим систему уравнений

$$\sum_{j=1}^m R_{ij} \varphi_j = \lambda \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.2.1)$$

Значения параметра λ , при которых система (5.2.1) имеет решения $\varphi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$, отличные от нулевого вектора, называются собственными числами матрицы $\|R_{ij}\|$ коэффициентов этой системы, а решения φ^k , получающиеся при данном собственном числе λ_k , называются собственными векторами матрицы $\|R_{ij}\|$, соответствующими собственному числу λ_k .

Корреляционная матрица $\|R_{ij}\|$ системы (5.2.1), как известно, является симметричной.

Собственные векторы действительной симметричной матрицы, соответствующие различным собственным числам, ортогональны между собой.

Действительно, возьмем два собственных вектора φ^k и φ^l , соответствующих собственным числам λ_k и λ_l , $k \neq l$, имеем

$$\sum_{j=1}^m R_{ij} \varphi_j^k = \lambda_k \varphi_i^k, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.2.2)$$

$$\sum_{j=1}^m R_{ij} \varphi_j^l = \lambda_l \varphi_i^l, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (5.2.3)$$

Умножим каждое из равенств (5.2.2) на φ_i^l и сложим, каждое из равенств (5.2.3) умножим на φ_i^k и также сложим:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij} \varphi_j^k \varphi_i^l = \lambda_k \sum_{i=1}^m \varphi_i^k \varphi_i^l, \quad (5.2.4)$$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij} \varphi_j^l \varphi_i^k = \lambda_l \sum_{i=1}^m \varphi_i^k \varphi_i^l, \quad (5.2.5)$$

Вычитая (5.2.5) из (5.2.4), получаем

$$(\lambda_k - \lambda_l) \sum_{i=1}^m \varphi_i^k \varphi_i^l = 0. \quad (5.2.6)$$

Так как $\lambda_k - \lambda_l \neq 0$, то $\sum_{i=1}^m \varphi_i^k \varphi_i^l = 0$, т. е. векторы φ^k и φ^l ортогональны.

Вычислим дисперсии линейных комбинаций (5.1.9)

$$\begin{aligned} D[A_k] &= M \left\{ \left[\sum_{j=1}^m X_j \varphi_j^k \right]^2 \right\} = \\ &= M \left\{ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m X_i X_j \varphi_i^k \varphi_j^k \right\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij} \varphi_i^k \varphi_j^k. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Если λ_k есть собственное число корреляционной матрицы, а φ^k ($\varphi_1^k, \varphi_2^k, \dots, \varphi_m^k$) — соответствующий ему собственный вектор, то (5.2.7) можем записать в виде

$$D[A_k] = \sum_{i=1}^m \varphi_i^k \sum_{j=1}^m R_{ij} \varphi_j^k = \lambda_k \sum_{i=1}^m \varphi_i^k \varphi_i^k = \lambda_k. \quad (5.2.8)$$

Отсюда видно, что собственные числа корреляционной матрицы представляют собой дисперсии линейных комбинаций A_k . Это показывает, в частности, что собственные числа корреляционной матрицы являются неотрицательными.

Расположим собственные числа корреляционной матрицы в порядке убывания $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots$ и пусть $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \dots$ — соответствующие им собственные векторы.

Имеет место следующая теорема об экстремальных свойствах собственных чисел и собственных векторов симметричной матрицы.

Теорема. На множестве нормированных векторов φ ($\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$) сумма

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij} \varphi_i \varphi_j \quad (5.2.9)$$

имеет максимум, равный наибольшему собственному числу λ_1 матрицы $\|R_{ij}\|$. Этот максимум достигается при векторе Φ равном собственному вектору Φ^1 , соответствующему собственному числу λ_1 .

На множестве нормированных векторов, ортогональных к первым $n-1$ собственным векторам $\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^{n-1}$ матрицы $\|R_{ij}\|$, сумма (5.2.9) имеет максимум, равный собственному числу λ_n , который достигается при $\Phi = \Phi^n$.

Доказательство. Пусть $\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^m$ — линейно независимые собственные векторы матрицы $\|R_{ij}\|$, тогда вектор Φ можно представить в виде их линейной комбинации

$$\Phi = c_1 \Phi^1 + c_2 \Phi^2 + \dots + c_m \Phi^m. \quad (5.2.10)$$

Подставляя (5.2.10) в (5.2.9), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij} \Phi_i \Phi_j &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m c_k c_l \Phi_i^k \Phi_j^l = \\ &= \sum_{k=1}^m c_k^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij} \Phi_i^k \Phi_j^k. \end{aligned} \quad (5.2.11)$$

в силу ортогональности собственных векторов.

Используя (5.1.5) и условие нормированности векторов Φ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij} \Phi_i \Phi_j &= \sum_{k=1}^m c_k^2 \lambda_k \sum_{i=1}^m [\Phi_i^k]^2 = \\ &= \sum_{k=1}^m \lambda_k c_k^2 \leq \lambda_1 \sum_{k=1}^m c_k^2 = \lambda_1 \end{aligned} \quad (5.2.12)$$

Сумма (5.2.9) будет иметь максимальное значение, равное λ_1 , при $\Phi = \Phi^1$, так как в этом случае

$$c_1 = 1, \quad c_2 = \dots = c_m = 0.$$

Пусть теперь вектор Φ ортогонален к собственным векторам $\Phi^1, \Phi^2, \dots, \Phi^{n-1}$, тогда в разложении (5.2.10) $c_1 = c_2 = \dots = c_{n-1} = 0$ и из (5.2.12) получим

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij} \Phi_i \Phi_j = \sum_{k=n}^m \lambda_k c_k^2 \leq \lambda_n. \quad (5.2.13)$$

Равенство в (5.2.13) достигается при $\Phi = \Phi^n$. Если выбрать в качестве системы векторов $\{\Phi^k\}$ при разложении случайного вектора X (5.1.8) собственные векторы корреляционной матрицы $\|R_{ij}\|$, то дисперсия ошибки аппроксимации σ_n^2 определится в виде

$$\sigma_n^2 = \sum_{i=1}^n R_{ii} - \sum_{k=1}^n \lambda_k, \quad (5.2.14)$$

где λ_k — собственные числа корреляционной матрицы.

Таким образом, в качестве естественных ортогональных векторов при разложении случайного вектора на сумму n естественных ортогональных составляющих нужно взять n собственных векторов корреляционной матрицы, соответствующих первым n собственным ее числам.

При выборе в качестве векторов $\{\varphi^k\}$ собственных векторов корреляционной матрицы коэффициенты A_k разложения (5.1.8) являются попарно некоррелированными. Действительно,

$$\begin{aligned} M[A_k A_l] &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m M[X_i X_j] \varphi_i^k \varphi_j^l = \\ &= \sum_{i=1}^m \varphi_i^k \sum_{j=1}^m R_{ij} \varphi_j^l = \lambda_l \sum_{i=1}^m \varphi_i^k \varphi_i^l = 0 \text{ при } k \neq l. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

Так как собственные числа λ_k корреляционной матрицы являются дисперсиями коэффициентов разложения случайного вектора по собственным векторам корреляционной матрицы, то задачу о разложении случайного вектора на сумму естественных ортогональных составляющих можно рассматривать в следующей постановке. Пусть имеется, например, m значений метеоэлемента x_1, x_2, \dots, x_m . Это могут быть значения на m различных уровнях или в m различных точках на одной изобарической поверхности, или значения в одной точке, но в различные моменты времени. Ищутся такие ортонормированные векторы φ^k ($\varphi_1^k, \varphi_2^k, \dots, \varphi_m^k$), т. е. такие линейные комбинации метеоэлементов $x_i, i = 1, 2, \dots, m$ вида

$$A_k = \sum_{i=1}^m x_i \varphi_i^k, \quad (5.2.16)$$

при которых дисперсии этих линейных комбинаций

$$D[A_k] = M \left\{ \left[\sum_{i=1}^m x_i \varphi_i^k \right]^2 \right\} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m R_{ij} \varphi_i^k \varphi_j^k \quad (5.2.17)$$

были бы максимальными.

Каждый такой вектор φ^k представляет собой собственный вектор корреляционной матрицы $\|R_{ij}\|$. Соответствующее такому вектору собственное число матрицы $\|R_{ij}\|$ равно дисперсии линейной комбинации A_k .

Смысл разложения случайной функции на сумму естественных ортогональных составляющих состоит в том, что из большого числа экспериментальных данных прежде всего отбирается линейная комбинация A_1 , имеющая наибольшую изменчивость (дисперсию). Эта линейная комбинация соответствует собственному вектору корреляционной матрицы φ^1 , соответствующему наибольшему из собственных чисел. Далее рассматриваются линейные комбинации A_k , некоррелированные с A_1 , и из них выбирается та комбинация A_2 , которая имеет наибольшую изменчивость, и т. д. После отбора небольшого числа таких комбинаций изменчивость всех остальных линейных комбинаций оказывается уже малой. Поэтому, стремясь описать боль-

шую часть изменчивости, присущей совокупности значений x_1, x_2, \dots, x_m , можно использовать не все линейные комбинации A_k , а лишь несколько таких комбинаций, соответствующих наибольшим собственным числам λ_k .

Для оценки допущенной при этом погрешности можно использовать относительную дисперсию ошибки

$$\eta_n^2 = \frac{M \left\{ \sum_{i=1}^m \left[X_i - \sum_{k=1}^n A_k \varphi_i^k \right]^2 \right\}}{M \left\{ \sum_{i=1}^m X_i^2 \right\}}, \quad (5.2.18)$$

которая для минимальной дисперсии в соответствии с (5.2.14) и с учетом известного равенства

$$\sum_{i=1}^m R_{ii} = \sum_{k=1}^m \lambda_k \quad (5.2.19)$$

запишется в виде

$$\eta_n^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k}{\sum_{k=1}^m \lambda_k}. \quad (5.2.20)$$

Величина

$$d_n = \frac{\sum_{k=1}^n \lambda_k}{\sum_{k=1}^m \lambda_k} \quad (5.2.21)$$

характеризует долю первых n естественных составляющих в суммарной дисперсии.

Таким образом, разложение случайной функции по естественным ортогональным составляющим по сравнению с разложением ее по любой другой системе ортонормированных функций или векторов дает наиболее быстрое убывание дисперсии от одной составляющей к другой.

Задача отыскания собственных чисел и собственных векторов матрицы является одной из фундаментальных задач линейной алгебры. Систему (5.2.1), перенеся члены из правой части уравнения в левую, можно записать в виде

$$\begin{aligned} (R_{11} - \lambda) \varphi_1 + R_{12} \varphi_2 + \dots + R_{1m} \varphi_m &= 0 \\ R_{21} \varphi_1 + (R_{22} - \lambda) \varphi_2 + \dots + R_{2m} \varphi_m &= 0 \\ \dots & \\ R_{m1} \varphi_1 + R_{m2} \varphi_2 + \dots + (R_{mm} - \lambda) \varphi_m &= 0 \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

Система однородных уравнений (5.2.22) будет иметь решения, отличные от нулевого вектора, в том и только в том случае, когда определитель системы равен нулю, т. е. когда имеет место уравнение

$$\begin{vmatrix} R_{11} - \lambda & R_{12} & \dots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} - \lambda & \dots & R_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{m1} & R_{m2} & \dots & R_{mm} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (5.2.23)$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением матрицы коэффициентов $\|R_{ij}\|$ или вековым уравнением. Раскрывая определитель (5.2.23), можем записать его в виде алгебраического уравнения относительно λ

$$\lambda^m - p_1 \lambda^{m-1} - p_2 \lambda^{m-2} - \dots - p_{m-1} \lambda - p_m = 0. \quad (5.2.24)$$

Таким образом, собственные числа матрицы $\|R_{ij}\|$ являются корнями уравнения m -й степени (5.2.24) и, следовательно, вообще говоря, имеется m собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, которые можно расположить в убывающем порядке. Для определения собственного вектора $\Phi^1(\varphi_1^1, \varphi_2^1, \dots, \varphi_m^1)$, соответствующего наибольшему собственному числу λ_1 , который и будет представлять собой первый естественный ортогональный вектор при разложении случайного вектора (5.1.8), нужно в системе (5.2.22) положить $\lambda = \lambda_1$ и найти решение этой системы. Каждый последующий естественный ортогональный вектор $\Phi^2, \Phi^3, \dots, \Phi^n$ будем находить как решение системы (5.2.22) при $\lambda = \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$.

Коэффициенты характеристического уравнения (5.2.24) являются с точностью до знака суммами всех миноров определителя матрицы $\|R_{ij}\|$ порядка i , опирающихся на главную диагональ. Непосредственное вычисление коэффициентов p_i является чрезвычайно громоздким и требует огромного числа операций.

В линейной алгебре разработан ряд методов, упрощающих решение задачи определения собственных чисел и собственных векторов матрицы. Большинство таких методов включает предварительное вычисление коэффициентов характеристического уравнения, минуя вычисление многочисленных миноров. Собственные числа затем вычисляются по какому-либо методу приближенного вычисления корней полинома. По большей части собственные векторы матрицы удается определить, используя промежуточные результаты вычислений, проведенных для определения коэффициентов характеристического уравнения.

При разложении случайного вектора на сумму естественных ортогональных составляющих обычно ограничиваются несколькими первыми составляющими, т. е. используются только не-

сколько собственных векторов корреляционной матрицы, соответствующих ее наибольшим собственным числам. Задача нахождения одного или нескольких собственных чисел матрицы и соответствующих им собственных векторов носит в линейной алгебре название частичной проблемы собственных значений, в отличие от полной проблемы, когда требуется определить все собственные числа и собственные векторы матрицы. Для решения частичной проблемы весьма эффективными оказываются итерационные методы, в которых собственные числа получают как пределы некоторых числовых последовательностей, так же как и компоненты соответствующих им собственных векторов. В итерационных методах собственные числа обычно вычисляются непосредственно, без предварительного вычисления коэффициентов характеристического уравнения, что существенно облегчает задачу. Итерационные методы более приспособлены для решения на электронных вычислительных машинах, что является особенно важным. Имеются стандартные программы для определения собственных чисел и собственных векторов с помощью ЭВМ.

Метод разложения случайных функций на естественные ортогональные составляющие, позволяющий выделить из большого числа экспериментальных данных наиболее существенные особенности и исключить мелкие детали, нашел широкое применение при описании статистической структуры метеорологических полей.

Для примера рассмотрим разложение по естественным ортогональным составляющим вертикальных профилей поля геопотенциала, выполненное Л. В. Руховцом. В качестве исходного эмпирического материала использовались значения геопотенциала на шести изобарических поверхностях (1000, 850, 700, 500, 200 и 200 гПа) по четырем выборкам: первая выборка охватывает период 10 дней, с 23 января по 1 февраля 1969 года; вторая — 10 дней, с 15 по 24 апреля 1959 г.; третья — 11 дней, с 6 по 16 июля 1959 г.; четвертая — 10 дней, с 20 по 29 октября 1959 г. Несколько выборок взято для того, чтобы исследовать вопрос об устойчивости разложения. Если полученные по одной выборке оптимальные ортогональные естественные составляющие теряют свою оптимальность при переходе к другим выборкам, то использование таких разложений в практических приложениях становится малоэффективным и не будет обладать преимуществами перед использованием разложений по другим заданным системам ортогональных функций.

Данные снимались в узлах регулярной сетки над территорией Европы. Для каждого сезона имелось не менее 990 значений суточных изменений геопотенциала, хотя не все значения являлись независимыми. Для исследования зависимости есте-

ственных ортогональных функций от широты вся территория по широте была разбита на три района. По данным третьей выборки, содержащей максимальное число значений, для каждого из трех районов были вычислены корреляционные матрицы $\|R_{ij}\|$, описывающие межуровневую связь суточных изменений геопотенциала на всех шести изобарических поверхностях. Так как рассматривались данные на шести стандартных уровнях, то корреляционная матрица $\|R_{ij}\|$ есть матрица шестого порядка.

Вычисление суточных изменений, корреляционных матриц,

Таблица 5.1

k	Выборка							
	1		2		3		4	
	λ_k	$d_n \%$						
1	559,8	80,9	195,2	66,2	184,7	73,5	625,2	80,2
2	93,4	94,4	59,4	86,3	40,8	89,7	115,5	95,0
3	22,5	97,6	18,5	92,6	14,2	95,3	21,0	97,7
4	10,6	99,2	11,0	96,3	5,5	97,5	10,7	99,0
5	3,6	99,7	8,7	99,3	4,2	99,2	5,1	99,7
6	2,1	100	2,1	100	1,9	100	2,4	100

собственных чисел и собственных векторов производилось на ЭВМ.

Корреляционные матрицы для разных районов вследствие роста изменчивости геопотенциала с широтой оказались существенно различными. Вместе с тем, собственные векторы этих матриц довольно близки друг к другу.

Для выявления характера устойчивости собственных векторов были рассчитаны их значения для каждой из четырех выборок по одному району. Оказалось, что формы собственных векторов для различных сезонов близки между собой, особенно это относится к первым двум собственным векторам.

В табл. 5.1 приведены значения собственных чисел корреляционной матрицы для каждой выборки и величины d_n (см. (5.2.21)), характеризующие долю первых n естественных ортогональных составляющих в дисперсии разложения (5.1.8) при $n = 1, 2, 3, \dots, 6$, т. е. при ограничении одним, двумя, тремя и т. д. слагаемыми в сумме (5.1.8).

Из таблицы видно, что на первые две естественные ортогональные составляющие приходится примерно 90% суммарной дисперсии, т. е. разложения по естественным ортогональным составляющим обладают хорошей скоростью сходимости.

Глава 6

Экстраполяция и интерполяция случайных функций

6.1. Постановка задачи

Одной из важнейших задач гидрометеорологии является прогноз различных метеоэлементов для обеспечения нужд народного хозяйства.

Разработаны различные методы прогнозирования, одним из которых является метод статистического прогнозирования, состоящий в прогнозе будущего значения элемента на основе его значений в прошлом и известных статистических связей между этими значениями.

Математической основой статистического прогнозирования является метод оптимальной линейной экстраполяции, который будет рассмотрен в настоящем разделе.

Пусть на некотором промежутке $[a, t]$ изменения аргумента, предшествующем моменту времени t , имеется реализация $x(t)$ случайного процесса $X(t)$, статистические характеристики которого известны. Требуется дать прогноз значения этой реализации $x(t+T)$ в некоторый последующий момент $t+T$, $T > 0$. Величина T называется упреждением.

Поскольку мы имеем дело со случайными процессами, то нас интересует нахождение такого способа решения задачи, который давал бы наилучший в некотором смысле результат по всему множеству реализаций, т. е. нахождение такого оператора, который в применении к множеству реализаций $x(t)$ давал бы наилучшее в некотором смысле значение $x(t+T)$. Обозначив искомый оператор через L , можем записать

$$X(t+T) = L[X(t)]. \quad (6.1.1)$$

Обозначим через δ разность между истинным значением $X(t+T)$ и значением, полученным по формуле (6.1.1).

Можно назвать наилучшим тот оператор L , который обращает в минимум среднее значение некоторой выбранной функции от разности δ , например, математическое ожидание модуля разности.

Более удобным с математической точки зрения критерием качества экстраполяции является обращение в минимум математического ожидания квадрата разности

$$M\{\delta^2\} = M\{[X(t+T) - L[X(t)]]^2\}. \quad (6.1.2)$$

Оператор L , при котором выражение (6.1.2) обращается в минимум, называют оптимальным оператором, а формулу (6.1.1) — формулой оптимальной экстраполяции. В настоящее

время практически приемлемое решение указанной задачи получено для случая, когда оператор L является линейным и стационарным, а случайный процесс $X(t)$ — стационарным. При этих допущениях, рассматриваемая задача носит название оптимальной линейной экстраполяции стационарных случайных процессов. Впервые эта задача была поставлена и решена А. Н. Колмогоровым. Дальнейшее развитие этих идей дано в работах Н. Винера, А. М. Яглома и других авторов.

Способ решения поставленной задачи существенно зависит от того, является ли интервал, на котором задана реализация $x(t)$ конечным или бесконечным.

6.2. Оптимальная линейная экстраполяция (интерполяция) случайной функции, заданной на конечном числе точек

Начнем рассмотрение с того случая, когда известно конечное число значений реализации стационарного случайного процесса $X(t)$, т. е. известны значения реализации $x(t)$ в моменты $t_1, t_2, \dots, t_n (t_1 < t_2 < \dots < t_n)$.

Математическое ожидание, без нарушения общности, можно положить равным нулю, перейдя к рассмотрению централизованного процесса $X(t)$, представляющего собой отклонение рассматриваемого элемента от нормы.

Искомое значение $x(t_n + T)$, являющееся результатом применения линейного оператора ко всем значениям $x(t_k)$ записать в виде линейной комбинации этих значений

$$x(t_n + T) = \sum_{k=1}^n a_k x(t_k), \quad (6.2.1)$$

где a_k — постоянные коэффициенты.

Задача сводится к отысканию таких значений коэффициентов a_1, a_2, \dots, a_n , при которых величина

$$\sigma^2(a_1, a_2, \dots, a_n) = M \left\{ \left[X(t_n + T) - \sum_{k=1}^n a_k X(t_k) \right]^2 \right\}, \quad (6.2.2)$$

рассматриваемая как функция n переменных a_1, a_2, \dots, a_n , принимает наименьшее значение.

Как известно, необходимым условием минимума функции n переменных является равенство нулю частных производных по каждой переменной.

Отсюда следует, что a_1, a_2, \dots, a_n должны быть решениями системы уравнений

$$\frac{\partial \sigma^2(a_1, a_2, \dots, a_n)}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2.3)$$

Преобразуем выражение (6.2.2)

$$\begin{aligned} \sigma^2(a_1, a_2, \dots, a_n) &= M \left\{ \left[X(t_n + T) - \sum_{k=1}^n a_k X(t_k) \right]^2 \right\} = \\ &= M[X^2(t_n + T)] - 2 \sum_{k=1}^n a_k M[X(t_n + T)X(t_k)] + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k a_j M[X(t_k)X(t_j)] = R_x(0) - 2 \sum_{k=1}^n a_k R_x(t_n - t_k + T) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k a_j R_x(t_k - t_j). \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Беря частные производные от правой части (6.2.4) по a_k и приравнявая их к нулю, получим систему уравнений

$$R_x(t_n - t_k + T) - \sum_{j=1}^n a_j R_x(t_k - t_j) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2.5)$$

Условия (6.2.5) являются необходимыми условиями экстремума функции $\sigma^2(a_1, a_2, \dots, a_n)$. Можно показать, что при значениях a_1, a_2, \dots, a_n , являющихся решениями системы уравнений (6.2.5), функция (6.2.2) действительно обращается в минимум.

Таким образом, задача об оптимальной линейной экстраполяции в рассматриваемом случае сводится к решению системы уравнений (6.2.5) и подстановке найденных значений a_1, a_2, \dots, a_n в формулу (6.2.1). Поскольку коэффициенты $R_x(t_k - t_j)$ при неизвестных a_j есть значения корреляционной матрицы, а корреляционная функция является положительно определенной, то, как известно из алгебры, система уравнений всегда имеет единственное решение.

Для получения среднего квадрата ошибки оптимальной экстраполяции $\sigma^2(a_1, a_2, \dots, a_n)$ при найденных значениях a_1, a_2, \dots, a_n умножим каждое из равенств (6.2.5) на a_k и сложим:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k a_j R_x(t_k - t_j) = \sum_{k=1}^n a_k R_x(t_n - t_k + T). \quad (6.2.6)$$

Подставляя это в выражение (6.2.4), получим дисперсию ошибок оптимальной экстраполяции

$$\sigma^2(a_1, a_2, \dots, a_n) = R_x(0) - \sum_{k=1}^n a_k R_x(t_n - t_k + T). \quad (6.2.7)$$

Пользуясь равенством (6.2.6), можем получить дисперсию ошибок оптимальной экстраполяции в виде

$$\sigma^2(a_1, a_2, \dots, a_n) = R_x(0) - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_k a_j R_x(t_k - t_j). \quad (6.2.8)$$

Так как корреляционная функция $R_x(\tau)$ положительно определенная функция, то двойная сумма в (6.2.8) неотрицательна, следовательно, дисперсия ошибок оптимальной экстраполяции не превосходит дисперсии случайной функции $X(t)$. Это показывает, что точность оптимальной линейной экстраполяции всегда выше (точнее не ниже) точности климатического прогноза, когда в качестве прогнозируемого значения элемента принимается его норма (математическое ожидание). Можно показать, что она выше также точности инерционного прогноза, когда в качестве упрежденного значения отклонения от нормы элемента $x(t_n + T)$ принимается его значение в последний известный момент t_n .

Точность оптимальной линейной экстраполяции зависит от упреждения T , как правило с увеличением упреждения точность экстраполяции снижается. Легко видеть, что если величина T выбрана столь большой, что сечение случайного процесса при $t = t_n + T$ не связано с его сечениями в моменты t_1, t_2, \dots, t_n , т. е. $R_x(t_n - t_k + T) = 0$ при всех $k = 1, 2, \dots, n$, то система (6.2.5) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^n a_j R_x(t_k - t_j) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.2.9)$$

Как было уже показано, система (6.2.5) имеет только единственное решение, следовательно, однородная система (6.2.9) имеет только нулевое решение $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$, при котором (6.2.1) дает значение $x(t_n + T) = 0$, т. е. равное математическому ожиданию, что совпадает с климатическим прогнозом. При этом дисперсия $\sigma^2(a_1, a_2, \dots, a_n) = R_x(0)$ совпадает с дисперсией случайного процесса.

Методика, изложенная здесь применительно к стационарному процессу, аргументом которого является время t , годится и при пространственной экстраполяции однородного изотропного поля $U(\rho)$. Соответствующие формулы легко получаются при замене скалярного аргумента t векторным аргументом ρ .

При этом часто приходится решать задачу оптимальной линейной интерполяции, когда известны значения поля $U(\rho)$ в точках $N_1(\rho_1), N_2(\rho_2), \dots, N_n(\rho_n)$ и требуется определить его значение в некоторой точке $N_0(\rho_0^*)$, лежащей между ними.

В этом случае формулу оптимальной линейной интерполяции, аналогично (6.2.1), запишем в виде

$$U(\rho_0) = \sum_{k=1}^n a_k U(\rho_k).$$

Нахождение коэффициентов a_k сведется к решению системы уравнений

$$R_u(|\rho_0 - \rho_k|) - \sum_{j=1}^n a_j R_u(|\rho_k - \rho_j|) = 0. \quad (6.2.10)$$

Для однородного и изотропного поля, как было указано в главе 2, корреляционная функция $R_u(l)$ является функцией одного аргумента l , представляющего собой модуль разности $l = |\rho_k - \rho_j|$, т. е. расстояние между точками $N_k(\rho_k)$ и $N_j(\rho_j)$.

Оптимальная линейная интерполяция метеорологических полей с сети станций наблюдения в узлы регулярной сетки вошла в повседневную практику как этап подготовки данных для составления оперативных метеопрогнозов и решения других задач.

На первый взгляд может показаться, что чем больше слагаемых использовано в сумме (6.2.1) формулы оптимальной экстраполяции, тем больше информации привлечено для получения прогнозируемого значения и тем точнее оно определено. В действительности это не так. При большом числе n практическое решение системы из большого числа уравнений может оказаться затруднительным, а неизбежные ошибки, возникающие при определении корреляционной функции, могут привести к плохой обусловленности этой системы или ее неустойчивости, что вызовет большие ошибки в найденных значениях коэффициентов a_k .

В следующем параграфе мы рассмотрим другой метод оптимальной линейной экстраполяции, основанный на предварительной экстраполяции корреляционной функции аналитическим выражением, позволяющий в ряде практически важных случаев получить готовые аналитические выражения для формулы оптимальной линейной экстраполяции и дисперсии ошибок.

6.3. Оптимальная линейная экстраполяция случайного процесса, заданного на бесконечном интервале

Предположим теперь, что реализация $x(t)$ стационарного случайного процесса $X(t)$ задана на бесконечном интервале $(-\infty, t]$, предшествующем данному моменту t и известна корреляционная функция $R_x(\tau)$.

Практически это означает, что реализация $x(t)$ задана на достаточно большом интервале изменения аргумента, на котором полностью затухают корреляционные связи между различными сечениями случайного процесса.

Искомое значение $x(t + T)$ как результат применения линейного оператора к функции $x(t)$ можно в соответствии с (5.1.9) представить в виде

$$x(t + T) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) x(\tau) d\tau. \quad (6.3.1)$$

Поскольку реализация $x(t)$ задана на промежутке $(-\infty, t)$, то формулу (6.3.1) следует переписать в виде

$$x(t+T) = \int_{-\infty}^t g(t-\tau) x(\tau) d\tau, \quad (6.3.2)$$

считая, что при $\tau > t$ весовая функция $g(t-\tau)$ равна нулю. Сделав замену переменной в интеграле (6.3.2), получим

$$x(t+T) = \int_0^{\infty} g(\tau) x(t-\tau) d\tau, \quad g(t) = 0 \text{ при } t < 0. \quad (6.3.3)$$

Задача сводится к такому подбору весовой функции $g(t)$, чтобы величина

$$\sigma^2 = M \left\{ \left[X(t+T) - \int_0^{\infty} g(\tau) X(t-\tau) d\tau \right]^2 \right\} \quad (6.3.4)$$

обратилась в минимум.

Весовая функция зависит при этом от упреждения T . Преобразуем (6.3.4).

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= M[X^2(t+T)] - 2 \int_0^{\infty} g(\tau) M[X(t+T)X(t-\tau)] d\tau + \\ &+ \int_0^{\infty} g(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\infty} g(\tau_2) M[X(t-\tau_1)X(t-\tau_2)] d\tau_2 = \\ &= R_x(0) - 2 \int_0^{\infty} g(\tau) R_x(T+\tau) d\tau + \int_0^{\infty} g(\tau_1) \int_0^{\infty} g(\tau_2) R_x(\tau_2-\tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

Установим условие, которому должна удовлетворять весовая функция $g(t)$, чтобы σ^2 обращалось в минимум.

Пусть функция $g(t)$ обращает σ^2 в минимум, тогда, если в (6.3.5) подставить вместо $g(t)$ функцию

$$g_1(t) = g(t) + \alpha \alpha(t), \quad (6.3.6)$$

где α — любое вещественное число; $\alpha(t)$ — произвольная функция, то значение σ^2 может только увеличиться.

Следовательно, при этом σ^2 , рассматриваемая как функция аргумента α , обращается в минимум при $\alpha = 0$, т. е. ее производная по α при $\alpha = 0$ должна быть равна нулю.

Подставляя (6.3.6) в (6.3.5), получим

$$\begin{aligned}
 \sigma^2(a) &= R_x(0) - 2 \int_0^{\infty} [g(t) + a\alpha(t)] R_x(T + \tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^{\infty} d\tau_1 \int_0^{\infty} [g(\tau_1) + a\alpha(\tau_1)] [g(\tau_2) + a\alpha(\tau_2)] R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_2 = \\
 &= R_x(0) - 2 \int_0^{\infty} g(\tau) R_x(T + \tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 + \\
 &+ 2a \int_0^{\infty} \alpha(t) \left[-R_x(T + \tau) + \int_0^{\infty} g(\tau) R_x(t - \tau) d\tau \right] dt + \\
 &+ a^2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \alpha(\tau_1) \alpha(\tau_2) R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (6.3.7)
 \end{aligned}$$

Дифференцируя (6.3.7) по параметру a под знаком интеграла, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma^2(a)}{da} &= -2 \int_0^{\infty} \alpha(\tau) R_x(T + \tau) d\tau + \\
 &+ \int_0^{\infty} \alpha(\tau_2) d\tau_2 \int_0^{\infty} g(\tau_1) R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 + \\
 &+ \int_0^{\infty} \alpha(\tau_1) d\tau_1 \int_0^{\infty} g(\tau_2) R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_2 = 0. \quad (6.3.8)
 \end{aligned}$$

Заменим в последнем интеграле τ_1 на τ_2 , а τ_2 на τ_1 , в силу четности корреляционной функции равенство (6.3.8) запишется в виде

$$-2 \int_0^{\infty} \alpha(\tau) R_x(T + \tau) d\tau + 2 \int_0^{\infty} \alpha(\tau_2) d\tau_2 \int_0^{\infty} g(\tau_1) R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 = 0, \quad (6.3.9)$$

или

$$\int_0^{\infty} \alpha(t) \left[R_x(t + T) - \int_0^{\infty} g(\tau) R_x(t - \tau) d\tau \right] dt = 0. \quad (6.3.10)$$

Так как равенство (6.3.10) имеет место для любой функции $\alpha(t)$, то должно выполняться равенство

$$R_x(t+T) - \int_0^{\infty} g(\tau) R_x(t-\tau) d\tau = 0 \quad \text{при всех } t \geq 0. \quad (6.3.11)$$

Таким образом, условие (6.3.11) является необходимым условием для обращения σ^2 в минимум.

Можно показать, что это условие является и достаточным.

Таким образом, задача нахождения весовой функции, обеспечивающей минимум σ^2 , эквивалентна задаче нахождения функции $g(t)$, являющейся решением интегрального уравнения (6.3.11). Это интегральное уравнение носит название уравнения Винера — Хопфа, по имени авторов, впервые рассмотревших уравнения такого типа.

Весовую функцию $g(t)$, являющуюся решением уравнения Винера — Хопфа будем называть оптимальной весовой функцией, а формулу (6.3.3) при подстановке в нее оптимальной весовой функции $g(t)$ будем называть формулой оптимальной экстраполяции.

Определим средний квадрат ошибки σ^2 при оптимальной экстраполяции. Перепишем (6.3.5) в виде

$$\begin{aligned} \sigma^2 = R_x(0) - 2 \int_0^{\infty} \left[R_x(T + \tau) - \int_0^{\infty} g(\tau) R_x(t - \tau) \right] g(t) dt - \\ - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \end{aligned} \quad (6.3.12)$$

Для оптимальной весовой функции, в силу (6.3.11), второе слагаемое обращается в нуль, откуда

$$\sigma^2 = R_x(0) - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (6.3.13)$$

Преобразуем двойной интеграл в (6.3.13), для этого обозначим через $S_x(\omega)$ спектральную плотность случайного процесса $X(t)$, тогда корреляционную функцию $R_x(\tau_2 - \tau_1)$ можно записать в виде

$$R_x(\tau_2 - \tau_1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(\tau_2 - \tau_1)} S_x(\omega) d\omega. \quad (6.3.14)$$

При этом

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \\ & = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) \int_0^{\infty} e^{i\omega(\tau_2 - \tau_1)} S_x(\omega) d\omega d\tau_1 d\tau_2 = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\infty} e^{-i\omega\tau_1} g(\tau_1) d\tau_1 \right] \left[\int_0^{\infty} e^{i\omega\tau_2} g(\tau_2) d\tau_2 \right] S_x(\omega) d\omega. \quad (6.3.15) \end{aligned}$$

Согласно (4.1.10), интеграл

$$\int_0^{\infty} g(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = L(\omega)$$

есть передаточная функция, соответствующая оптимальной весовой функции $g(t)$, будем называть ее оптимальной передаточной функцией.

Аналогично, интеграл

$$\int_0^{\infty} g(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau = L^*(\omega) \quad (6.3.16)$$

есть величина, комплексно сопряженная оптимальной передаточной функции.

Отсюда (6.3.15) запишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) R_x(\tau_2 - \tau_1) d\tau_1 d\tau_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \quad (6.3.17)$$

Подставляя (6.3.17) в (6.3.13), получим формулу дисперсии ошибок оптимальной экстраполяции

$$\sigma^2 = R_x(0) - \int_0^{\infty} |L(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - |L(\omega)|^2] S_x(\omega) d\omega. \quad (6.3.18)$$

Таким образом, задача оптимальной линейной экстраполяции в рассматриваемом случае свелась к решению уравнения Винера—Хопфа (6.3.11) и подстановке найденной весовой функции $g(t)$ в формулу оптимальной экстраполяции (6.3.3).

Выразим корреляционную функцию $R_x(\tau)$ через спектральную плотность $S_x(\omega)$, а весовую функцию $g(t)$ через переда-

точную функцию $L(\omega)$.

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} S_x(\omega) d\omega; \quad (6.3.19)$$

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} L(\omega) d\omega \quad (6.3.20)$$

и подставим в уравнение (6.3.11)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} L(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t-\tau)} S_x(\omega) d\omega \right] d\tau - \\ & - \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t+T)} S_x(\omega) d\omega \quad \text{при } t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.3.21)$$

Меняя порядок интегрирования, перепишем (6.3.21) в виде

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 t} L(\omega) S_x(\omega_1) \left[\int_0^{\infty} e^{i(\omega-\omega_1)\tau} d\tau \right] d\omega_1 - \right. \\ & \left. - e^{i\omega(t+T)} S_x(\omega) \right\} d\omega = 0 \quad \text{при } t \geq 0. \end{aligned} \quad (6.3.22)$$

По свойству дельта-функции имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{i(\omega-\omega_1)\tau} d\tau = \delta(\omega - \omega_1). \quad (6.3.23)$$

При этом внутренний интеграл в (6.3.22) равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1 t} L(\omega) S_x(\omega_1) \delta(\omega - \omega_1) d\omega_1 = e^{i\omega t} L(\omega) S_x(\omega) \quad (6.3.24)$$

по свойству дельта-функции.

Таким образом, (6.3.22) примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} [L(\omega) S_x(\omega) - e^{i\omega T} S_x(\omega)] d\omega = 0 \quad \text{при } t \geq 0. \quad (6.3.25)$$

Будем рассматривать левую часть (6.3.25) как некоторую функцию $f(t)$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} [L(\omega) S_x(\omega) - e^{i\omega T} S_x(\omega)] d\omega. \quad (6.3.26)$$

Эта функция есть обратное преобразование Фурье для функции

$$F(\omega) = [L(\omega) - e^{i\omega T}] S_x(\omega). \quad (6.3.27)$$

Следовательно, $F(\omega)$ является преобразованием Фурье для функции $f(t)$, тождественно равной нулю при $t \geq 0$ в силу (6.3.25).

В теории преобразований Фурье доказывается следующая теорема.

Пусть $f(t)$ — интегрируемая функция, равная тождественно нулю на интервале $(0, \infty)$ и имеющая преобразование Фурье

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t) dt.$$

Тогда $F(\omega)$ является значением на вещественной оси аналитической и ограниченной в верхней полуплоскости функции $F(\zeta)$ комплексной переменной

$$\zeta = \omega + i\lambda.$$

Если $F(\zeta)$ является аналитической и ограниченной функцией комплексной переменной в верхней полуплоскости, то обратное преобразование Фурье ее значения $F(\omega)$ на вещественной оси равно нулю на интервале $(0, \infty)$, $f(t) = 0$.

Аналогичная теорема будет иметь место, если заменить интервал $(0, \infty)$ интервалом $(-\infty, 0)$, а верхнюю полуплоскость нижней.

Согласно этой теореме, функция (6.3.27) является значением на вещественной оси аналитической и ограниченной функции $F(\zeta)$ в верхней полуплоскости.

В большинстве прикладных задач случайные процессы являются процессами с рациональным спектром, т. е. их спектральные плотности являются дробно-рациональными функциями частоты ω . Дробно-рациональную четную функцию вещественной переменной ω можно представить в виде произведения двух функций $S_1(\omega)$ и $S_2(\omega)$, из которых первая $S_1(\omega)$ является значением на вещественной оси аналитической, ограниченной и не имеющей нулей в верхней полуплоскости функции комплексного переменного $\zeta = \omega + i\lambda$, $S_2(\omega)$ — значением на вещественной оси аналитической, ограниченной и не имеющей нулей в нижней полуплоскости функцией комплексного переменного.

Действительно, пусть

$$S(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)},$$

где $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ — многочлены с вещественными коэффициентами от ω .

Разложим числитель и знаменатель на линейные множители. В функцию $S_1(\omega)$ включим те множители числителя и знаменателя, которые обращаются в нуль в нижней полуплоскости, а в качестве $S_2(\omega)$ возьмем все оставшиеся множители числи-

теля и знаменателя, которые в силу того, что $S(\omega)$ — четная функция, а коэффициенты многочленов $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ являются вещественными, будут представлять собой величины, комплексно-сопряженные множителям, вошедшим в $S_1(\omega)$, т. е. будут обращаться в нуль только в верхней полуплоскости. В соответствии с этим представим спектральную плотность в виде

$$S_x(\omega) = S_1(\omega) S_2(\omega), \quad (6.3.28)$$

где $S_1(\omega)$ не имеет нулей и полюсов в верхней полуплоскости; $S_2(\omega)$ — в нижней полуплоскости. Подставим (6.3.28) в (6.3.27)

$$F(\omega) = [L(\omega) - e^{i\omega T}] S_1(\omega) S_2(\omega) \quad (6.3.29)$$

и разделим на $S_1(\omega)$, получим

$$\frac{F(\omega)}{S_1(\omega)} = [L(\omega) - e^{i\omega T}] S_2(\omega). \quad (6.3.30)$$

Функция $\frac{F(\omega)}{S_1(\omega)}$ является аналитической и ограниченной в верхней полуплоскости, так как в ней ограничена и аналитична функция $F(\omega)$, а $S_1(\omega)$ не имеет нулей и полюсов.

Следовательно, по второй части теоремы обратное преобразование Фурье этой функции равно нулю на интервале $(0, \infty)$, т. е. в силу (6.3.30), имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{S_1(\omega)} e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} [L(\omega) - e^{i\omega T}] S_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 0 \quad \text{при } t \geq 0. \quad (6.3.31)$$

Отсюда получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} L(\omega) S_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega) e^{i\omega(t+T)} d\omega, \quad t \geq 0. \quad (6.3.32)$$

Функция $L(\omega)$ как передаточная функция реально осуществимой системы, которую предполагаем устойчивой, может иметь корни знаменателя только в верхней полуплоскости, следовательно, она не имеет полюсов в нижней полуплоскости.

Таким образом, функция $L(\omega) S_2(\omega)$ является аналитической и ограниченной в нижней полуплоскости, следовательно, в силу приведенной теоремы, ее обратное преобразование Фурье равно нулю

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega) S_2(\omega) e^{i\omega t} d\omega = 0 \quad \text{при } t < 0. \quad (6.3.33)$$

Тогда, взяв преобразование Фурье от $\varphi(t)$, получим

$$\begin{aligned} L(\omega) S_2(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-i\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} L(\omega_1) S_2(\omega_1) e^{i\omega_1 t} d\omega_1 dt. \end{aligned} \quad (6.3.34)$$

Согласно формуле (6.3.32) при $t \geq 0$ внутренний интеграл в (6.3.34) можно заменить правой частью (6.3.32)

$$L(\omega) S_2(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega_1) e^{i\omega_1(t+T)} d\omega_1 dt. \quad (6.3.35)$$

Отсюда получаем формулу для оптимальной передаточной функции

$$L(\omega) = \frac{1}{2\pi S_2(\omega)} \int_0^{\infty} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} S_2(\omega_1) e^{i\omega_1(t+T)} d\omega_1 dt. \quad (6.3.36)$$

Зная передаточную функцию, найдем весовую функцию $g(t)$.

В соответствии с изложенным, для определения оптимальной передаточной функции $L(\omega)$ нужно сделать следующее:

- 1) определить спектральную плотность $S_x(\omega)$;
- 2) числитель и знаменатель спектральной плотности $S_x(\omega)$ разложить на линейные множители, в функцию $S_1(\omega)$ включить те множители числителя и знаменателя, которые обращаются в нуль в нижней полуплоскости, а в функцию $S_2(\omega)$ — оставшиеся множители;
- 3) определить передаточную функцию по формуле (6.3.36). При вычислении по формуле (6.3.36) удобно пользоваться формулой

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\omega t} d\omega}{[\omega - (a + ib)]^n} = \begin{cases} \frac{i^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{i(a+ib)t} & \text{при } t > 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (6.3.37)$$

А. М. Яглом показал, что в ряде случаев удается найти оптимальную передаточную функцию $L(\omega)$, не производя вычислений по формуле (6.3.36), а пользуясь установленными свойствами функций, входящих в равенство (6.3.27).

Мы установили, выше, что

- 1) функция $F(\omega)$ является аналитической и ограниченной функцией в верхней полуплоскости;
- 2) функция $L(\omega)$ не имеет нулей и полюсов в нижней полуплоскости;

3) согласно (6.3.18) должен сходиться несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \quad (6.3.38)$$

Проиллюстрируем метод Яглома на конкретных примерах экстраполяции случайных процессов, спектральные плотности которых являются дробно-рациональными функциями частоты ω .

Пример 1. Рассмотрим случай, когда на интервале $(-\infty, t)$ имеется реализация случайного процесса $X(t)$, имеющего корреляционную функцию вида

$$R_x(\tau) = D e^{-\alpha |\tau|}.$$

Спектральная плотность $S_x(\omega)$, соответствующая этой корреляционной функции, как было показано в п. 3.2, пример 1, имеет вид

$$S_x(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}.$$

Следовательно, формула (6.3.27) запишется в виде

$$F(\omega) = [L(\omega) - e^{i\omega T}] \frac{D\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)} = \frac{D\alpha}{\pi} \frac{L(\omega) - e^{i\omega T}}{(\omega - i\alpha)(\omega + i\alpha)}.$$

По условию 1 функция $F(\omega)$ должна быть аналитической в верхней полуплоскости. Но знаменатель правой части имеет в верхней полуплоскости нуль в точке $\omega = i\alpha$, следовательно, и числитель правой части также должен иметь нуль в точке $\omega = i\alpha$, который сократится с нулем знаменателя.

Таким образом, должно выполняться условие

$$L(i\alpha) - e^{i(i\alpha)T} = 0,$$

откуда

$$L(i\alpha) = e^{-\alpha T}.$$

Из условий 1 и 2 следует, что функция $L(\omega)$ вообще не может иметь конечных особых точек. Действительно, функция $F(\omega)$ — аналитическая в верхней полуплоскости, а значит, и правая часть должна быть аналитической в верхней полуплоскости, т. е. и функция $L(\omega)$. А из условия 2 следует, что $L(\omega)$ не имеет особых точек и в нижней полуплоскости. Для выполнения условия 3 достаточно положить функцию $L(\omega)$ равной постоянной величине. При этом несобственный интеграл (6.3.38) сходится

$$\int_{-\infty}^{\infty} |L(\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega = |L(\omega)|^2 \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = |L(\omega)|^2 D.$$

Таким образом, в качестве оптимальной передаточной функции можем взять

$$L(\omega) = e^{-\alpha T} = \text{const}.$$

Соответствующая этой передаточной функции весовая функция определится в виде

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} L(\omega) d\omega = e^{-\alpha T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = e^{-\alpha T} \delta(t).$$

При этом формула оптимальной экстраполяции (6.3.3) запишется в виде

$$x(t+T) = e^{-\alpha T} \int_0^{\infty} x(t-\tau) \delta(\tau) d\tau = e^{-\alpha T} x(t)$$

по свойству дельта-функции.

Отсюда видно, что для процессов рассматриваемого типа упрежденное значение реализации $x(t+T)$ определяется только ее значением в момент t . Знание значений реализации во все предшествующие моменты ничего не может дать для улучшения прогноза. С возрастанием величины упреждения T величина $e^{-\alpha T}$ уменьшается, стремясь к нулю при $T \rightarrow \infty$, при этом упрежденное значение $x(t+T)$ стремится к математическому ожиданию случайного процесса.

Подставляя оптимальную передаточную функцию $L(\omega)$ в (6.3.18), получим дисперсию ошибок оптимальной экстраполяции

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) ((1 - e^{-2\alpha T}) d\omega = (1 - e^{-2\alpha T}) \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega = D(1 - e^{-2\alpha T}).$$

Откуда видно, что точность прогноза снижается с увеличением упреждения T .

Пример 2. Рассмотрим случай реализации $x(t)$, заданной на интервале $(-\infty, t)$, когда случайный процесс имеет корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau.$$

Этой корреляционной функции, как было показано в п. 3.2 пример 3, соответствует спектральная плотность.

$$S_x(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{(\omega^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} = \\ = \frac{D\alpha}{\pi} \frac{\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2}{[\omega + (\beta + i\alpha)][\omega - (\beta + i\alpha)][\omega + (\beta - i\alpha)][\omega - (\beta - i\alpha)]}.$$

Формула (6.3.27) запишется в виде

$$F(\omega) = \frac{D\alpha}{\pi} \frac{[L(\omega) - e^{i\omega T}](\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{[\omega + (\beta + i\alpha)][\omega - (\beta + i\alpha)][\omega + (\beta - i\alpha)][\omega - (\beta - i\alpha)]}.$$

Знаменатель правой части имеет в верхней полуплоскости нули в точках $\omega = \beta + i\alpha$ и $\omega = -\beta + i\alpha$. Так как выражение $\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2$ в этих точках в нуль не обращается, то при этих значениях должна быть равна нулю функция $L(\omega) - e^{i\omega T}$.

Отсюда получаем

$$L(\beta + i\alpha) = e^{i(\beta + i\alpha)T} = e^{-(\alpha - i\beta)T}, \\ L(-\beta + i\alpha) = e^{i(-\beta + i\alpha)T} = e^{-(\alpha + i\beta)T}. \quad (6.3.39)$$

Функция $F(\omega)$ имеет нули в точках $\pm i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, из которых в верхней полуплоскости лежит точка $i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, следовательно, функция $L(\omega)$ может иметь простой полюс только в точке $\omega = i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, а значит, функция $L(\omega) (\omega - i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$ должна быть целой, т. е. она не может иметь конечных особых точек.

Для выполнения условия 3 достаточно принять эту функцию равной линейной функции, т. е. положить

$$L(\omega) (\omega - i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}) = A\omega + B.$$

откуда

$$L(\omega) = \frac{A\omega + B}{\omega - i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

Используя условия (6.3.39), получим систему для определения коэффициентов A и B

$$\begin{aligned} e^{-\alpha T} [\beta + i(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})] e^{i\beta T} &= A(\beta + i\alpha) + B, \\ e^{-\alpha T} [-\beta + i(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})] e^{-i\beta T} &= A(-\beta + i\alpha) + B. \end{aligned}$$

Решив эту систему, получим

$$\begin{aligned} A &= \left(\cos \beta T + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{\beta} \sin \beta T \right) e^{-\alpha T}, \\ B &= i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{\beta} \sin \beta T - \cos \beta T \right) e^{-\alpha T}. \end{aligned}$$

При найденных значениях A и B оптимальную передаточную функцию целесообразно представить в виде

$$\begin{aligned} L(\omega) &= A - \frac{A\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - iB}{i\omega + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \left(\cos \beta T + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{\beta} \sin \beta T \right) e^{-\alpha T} - \\ &\quad - \frac{2}{i\omega + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\beta} \sin \beta T e^{-\alpha T}. \end{aligned}$$

По (6.3.20) найдем оптимальную весовую функцию

$$\begin{aligned} g(t) &= \left(\cos \beta T + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{\beta} \sin \beta T \right) e^{-\alpha T} \frac{1}{2\pi} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega - \frac{2(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\beta} \sin \beta T e^{-\alpha T} \frac{1}{2} \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{i\omega + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}. \end{aligned}$$

По свойству дельта-функции

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega = \delta(t).$$

Интеграл во втором слагаемом равен

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{i\omega + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \frac{d\omega}{\omega - i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \\ &= \begin{cases} e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} t} & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Получаем оптимальную весовую функцию при $t \geq 0$

$$g(t) = \left(\cos \beta T + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{\beta} \sin \beta T \right) e^{-\alpha T} \delta(t) - \frac{2(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\beta} \sin \beta T e^{-\alpha T} e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} t}$$

При этом формула оптимальной экстраполяции, в соответствии с (6.3.3), запишется в виде

$$x(t+T) = \left(\cos \beta T + \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{\beta} \sin \beta T \right) e^{-\alpha T} x(t) - \frac{2(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{\beta} \sin \beta T e^{-\alpha T} \int_0^{\infty} x(t-\tau) e^{-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \tau} d\tau$$

Эта формула показывает, что прогнозируемое значение $x(t+T)$ зависит не только от последнего из известных нам значений реализации $x(t)$, но и от значений ее при всех предшествующих значениях аргумента, по которым производится интегрирование.

Дисперсия ошибок экстраполяции в рассматриваемом случае определится, согласно (6.3.18), в виде

$$\sigma^2 = \frac{D}{2} \left[1 - e^{-2\alpha T} \left(\cos \beta T - \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha}{\beta} \sin \beta T \right)^2 \right]$$

Пример 3. Рассмотрим случай, когда случайный процесс $X(t)$ имеет корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = D e^{-\alpha |\tau|} \left(\cos \beta \tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta |\tau| \right)$$

Этой корреляционной функции соответствует спектральная плотность

$$S_x(\omega) = \frac{2D\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2) + 4\alpha^2\omega^2}$$

В этом случае формула (6.3.27) запишется в виде

$$F(\omega) = \frac{2D\alpha}{\pi} \frac{[L(\omega) - e^{i\omega T}](\alpha^2 + \beta^2)}{[\omega + (\beta + i\alpha)][\omega - (\beta + i\alpha)][\omega + (\beta - i\alpha)][\omega - (\beta - i\alpha)]}$$

Проведя те же рассуждения, что и в примере 2, получим оптимальную передаточную функцию в виде

$$L(\omega) = \left(\cos \beta T + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta T \right) e^{-\alpha T} + \frac{i\omega \sin \beta T}{\beta} e^{-\alpha T}$$

По (6.3.20) найдем оптимальную весовую функцию

$$g(t) = \left(\cos \beta T + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta T \right) e^{-\alpha T} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega + \frac{\sin \beta T e^{-\alpha T}}{\beta} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega t} d\omega$$

Интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega t} d\omega = \delta'(t)$$

представляет собой производную от дельта-функции. Отсюда оптимальную весовую функцию можем записать в виде

$$g(t) = \left(\cos \beta T + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta T \right) e^{-\alpha T} \delta(t) + \frac{\sin \beta T e^{-\alpha T}}{\beta} \delta'(t).$$

Подставляя найденную весовую функцию в (6.3.3), получим формулу оптимальной экстраполяции

$$x(t+T) = \left(\cos \beta T + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta T \right) e^{-\alpha T} x(t) + \frac{\sin \beta T e^{-\alpha T}}{\beta} x'(t),$$

так как

$$\int_0^{\infty} x(t-\tau) \delta'(\tau) d\tau = x'(t).$$

Из формулы оптимальной экстраполяции видно, что упрежденное значение зависит как от значения самой реализации $x(t)$ в момент t , так и от ее производной $x'(t)$ в этот момент.

Дисперсия ошибок экстраполяции в данном случае определится в виде

$$\sigma^2 = D \left[1 - e^{-2\alpha T} \left(\cos \beta T + \frac{\alpha}{\beta} \sin \beta T \right)^2 \right].$$

Пример 4. Поясним теперь методику непосредственного использования формулы (6.3.36) на примере прогнозирования случайного процесса, имеющего корреляционную функцию вида

$$R_x(\tau) = D(1 + \alpha|\tau|)e^{-\alpha|\tau|}.$$

В соответствии с (3.2.42), соответствующая спектральная плотность $S_x(\omega)$ имеет вид

$$S_x(\omega) = \frac{2D\alpha^3}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)^2} = \frac{2D\alpha^3}{\pi(\omega + i\alpha)^2(\omega - i\alpha)^2}.$$

Множитель знаменателя $(\omega + i\alpha)$ имеет корень $\omega = -i\alpha$, лежащий в нижней полуплоскости, множитель $\omega - i\alpha$ имеет корень $\omega = i\alpha$, лежащий в верхней полуплоскости. Поэтому в качестве функции $S_1(\omega)$ берем $S_1(\omega) = \frac{1}{(\omega + i\alpha)^2}$, а в качестве функции $S_2(\omega)$ возьмем

$$S_2(\omega) = \frac{2D\alpha^3}{\pi(\omega - i\alpha)^2}.$$

Подставляя в (6.3.36), получим

$$L(\omega) = \frac{(\omega - i\alpha)^2}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-t\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\omega_1 - i\alpha)^2} e^{i\omega_1(t+T)} d\omega_1 dt.$$

Интегрируя и пользуясь формулой (6.3.37), получим передаточную функцию

$$L(\omega) = (1 + \alpha T + i\omega T) e^{-\alpha T}.$$

Найдем соответствующую весовую функцию

$$g(t) = \left[\frac{(1 + \alpha T)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\omega + \frac{T}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega e^{i\omega t} d\omega \right] e^{-\alpha T} = \\ = [(1 + \alpha T) \delta(t) + T\delta'(t)] e^{-\alpha T},$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция, а $\delta'(t)$ — ее производная.

При этом формула оптимальной линейной экстраполяции запишется в виде

$$x(t + T) = \int_0^{\infty} x(t - \tau) g(\tau) d\tau = e^{-\alpha T} \left[(1 + \alpha T) \int_0^{\infty} x(t - \tau) \delta(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + T \int_0^{\infty} x(t - \tau) \delta'(\tau) d\tau \right] = [(1 + \alpha T) x(t) + Tx'(t)] e^{-\alpha T}.$$

Отсюда видно, что упрежденное значение процесса в момент $t + T$ зависит не только от самого значения процесса в момент t , но и от его производной, т. е. скорости его изменения.

Квадрат модуля передаточной функции

$$|L(\omega)|^2 = [(1 + \alpha T)^2 + \omega^2 T^2] e^{-2\alpha T}.$$

Поэтому дисперсия ошибок экстраполяции равна

$$\sigma^2 = D - e^{-2\alpha T} \left[(1 + \alpha T)^2 \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega + T^2 \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S(\omega) d\omega \right] = \\ = D \left[1 - (1 + \alpha T)^2 e^{-2\alpha T} + T^2 e^{-2\alpha T} \frac{2D\alpha^3}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 d\omega}{(\omega^2 + \alpha^2)^2} \right].$$

Вычисляя последний интеграл по частям, окончательно получаем

$$\sigma^2 = D \{ 1 - [(1 + \alpha T)^2 + \alpha^2 T^2] e^{-2\alpha T} \}.$$

6.4. Примеры оптимальной линейной экстраполяции гидрометеорологических процессов

В последние годы метод оптимальной линейной экстраполяции применялся для прогноза различных гидрометеорологических элементов. При этом, по-видимому, не следует противопоставлять его другим методам прогнозирования, в частности динамическим методам, основанным на использовании уравнений гидродинамики, а стараться сочетать различные методы прогноза для получения более надежных результатов. Одним из путей такого сочетания является получение так называемого «взвешенного» прогноза. Допустим, что получены прогнозы одного и того же элемента двумя различными методами. Пер-

вый метод дает прогнозируемое значение x_1 , второй — x_2 . Тогда в качестве прогнозируемого значения можно использовать величину

$$x = px_1 + (1 - p)x_2,$$

где веса p и $q = (1 - p)$ выбираются из тех или иных разумных соображений. В частности, если известны дисперсии ошибок каждого метода прогноза, то веса можно выбирать как величины, обратно пропорциональные этим дисперсиям.

Рассмотрим два примера практического применения оптимальной линейной экстраполяции.

Прогноз речного стока

Ю. М. Алехин применил теорию оптимальной линейной экстраполяции для прогнозирования речного стока. Он рассматривал отклонение годового стока реки от нормы как случайный стационарный процесс, заданный при целочисленных значениях аргумента.

Исходными данными для расчетов послужили средние годовые расходы воды за 50—70 лет, взятые из «Материалов по режиму рек СССР» и гидрологических ежегодников. По этим данным были рассчитаны автокорреляционные функции отклонений годового стока от нормы для шести рек, расположенных на Европейской территории СССР. Задача прогнозирования речного стока рассматривалась в следующей постановке. Имеются данные отклонений годового стока реки от нормы $q(t - n)$, $q(t - (n - 1))$, ..., $q(t - 1)$, $q(t)$, зафиксированные в течение ряда из n лет, заканчивающегося годом, обозначенным через t . Прогнозируемое значение $q(t + T)$ с заблаговременностью прогноза T , равной 1, 2, 3 и 5 годам, ищется в виде линейной комбинации

$$q(t + T) = \sum_{k=0}^m a_k q(t - k). \quad (6.4.1)$$

Коэффициенты a_k для каждого значения T , определяемые из условия минимума дисперсии ошибок экстраполяции, в соответствии с изложенным в п. 6.3, являются решениями системы из m уравнений

$$R_q(T + k) = \sum_{j=0}^m a_j R_q(k - j), \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (6.4.2)$$

где $R_q(\tau)$ — автокорреляционная функция отклонений годового стока. Система уравнений (6.4.2) решалась на ЭВМ по методу Гаусса.

Для оценки качества прогноза полученные по формуле оптимальной линейной экстраполяции (6.4.2) значения сравнивались с истинными значениями отклонений годового стока. Вычислен-

ные коэффициенты корреляции фактических и спрогнозированных значений оказались порядка $0,84 \div 0,80$, что свидетельствует о достаточно хорошем их совпадении.

Прогноз индекса зональной циркуляции

При изучении крупномасштабных атмосферных процессов необходимо знать закономерности основного звена общей циркуляции атмосферы — зональной циркуляции, т. е. переноса воздуха с запада на восток, обусловленного притоком тепла от Солнца и вращением Земли вокруг своей оси.

При выявлении закономерностей циркуляции обычно используют различные интегральные характеристики макропроцессов. Наиболее распространенной из таких характеристик является так называемый индекс зональной циркуляции.

Индекс зональной циркуляции J определяется как безразмерная величина, равная отношению угловой скорости вращения атмосферы α к угловой скорости вращения Земли ω

$$J = \frac{\alpha}{\omega} \quad (6.4.3)$$

Величина α связана с линейной скоростью движения атмосферы соотношением

$$v_\lambda = \alpha(z) r_0 \cos \varphi, \quad (6.4.4)$$

где v_λ — скорость зонального потока; r_0 — средний радиус Земли; φ — географическая широта; z — высота над уровнем моря.

Ввиду важности знания закономерностей изменения во времени индекса зональной циркуляции, в частности для целей совершенствования методики долгосрочных прогнозов погоды, в ряде работ было предпринято изучение статистической структуры индекса зональной циркуляции и сделаны попытки его статистического прогноза.

Была произведена статистическая обработка довольно большого эмпирического материала и вычислены корреляционные функции и спектральные плотности индекса зональной циркуляции.

Корреляционные функции рассчитывались по ежедневным значениям индекса зональной циркуляции для высот изобарических поверхностей 1000, 700, 500, 300, 200 и 100 гПа.

На всех уровнях вид корреляционных функций примерно одинаков, корреляционные функции вначале довольно быстро убывают, а затем приобретают характер стохастических колебаний. При этом наблюдается выраженная периодичность этих колебаний со средним периодом, довольно близким для всех кривых.

Прогноз суточных значений индекса зональной циркуляции осуществлялся по методике, изложенной в п. 6.2. Упрежденное

значение $J(t+T)$ с заблаговременностью T лет находилось по ряду из n его предшествующих значений $J(t-n)$, $J(t-(n-1))$, ..., $J(t-1)$, $J(t)$ по формуле

$$J(t+T) = \sum_{k=0}^n a_k J(t-k). \quad (6.4.5)$$

Расчеты производились при различном числе слагаемых n в сумме (6.4.5).

Для оценки точности полученного прогноза при различном числе n была рассчитана средняя величина модуля разности между фактическими значениями индекса зональной циркуляции и их значениями, определенными по (6.4.5).

Наименьшее значение ошибки получилось при малых значениях n , т. е. при использовании лишь значений ближайших предшествующих дней.

В ряде работ изучалась статистическая структура и осуществлялся прогноз среднемесячных индексов зональной циркуляции. Характер корреляционных функций средних месячных индексов зональной циркуляции оказался аналогичным характеру этих функций для ежедневных значений. Для прогноза средних месячных индексов зональной циркуляции была использована методика, изложенная в п. 6.3. С этой целью определенная по эмпирическим данным корреляционная функция среднего месячного индекса зональной циркуляции, была аппроксимирована аналитическим выражением

$$R(\tau) = e^{-\sigma_1|\tau|} + e^{-\sigma_2|\tau|} (0,135 \sin \sigma_2|\tau| + 0,51 \sin \sigma_1|\tau|), \quad (6.4.6)$$

где $\sigma_1 = 2,465$, $\sigma_2 = 0,01$.

Были определены оптимальная передаточная функция и формула оптимальной линейной экстраполяции с заблаговременностью в один и два месяца, содержащая значение $J(t)$ и его производные первого и второго порядка.

Результаты прогноза с заблаговременностью в один месяц сравнительно хорошо совпали с истинными значениями. Прогноз величины $J(t+2)$ не дал положительного результата.

Глава 7

Параметрические методы исследования случайных процессов

7.1. Статистические модели случайных процессов

В предыдущих главах мы рассматривали методы описания случайных процессов с помощью корреляционных функций и спектров.

Наряду с этими непараметрическими методами в настоящее время разработаны и получают все большее распространение параметрические методы, основанные на описании случайных процессов с помощью статистических моделей с малым числом параметров.

Суть рассматриваемых методов заключается в построении некоторых моделей изучаемых случайных процессов, к которым предъявляют два основных требования. Во-первых, модель должна быть достаточно простой, описываемой небольшим числом параметров и, во-вторых, достаточно адекватно описывать рассматриваемый процесс, в частности, хорошо согласовываться с имеющимися данными наблюдений.

Наиболее употребительными для описания стационарных случайных процессов являются модели авторегрессии; модели скользящего среднего и смешанные модели авторегрессии — скользящего среднего.

Модели авторегрессии

В этой модели текущее значение случайного процесса выражается как конечная линейная комбинация предыдущих его значений и случайного импульса.

Пусть $X(t)$, $X(t-1)$, $X(t-2)$, ... есть значения стационарного случайного процесса $X(t)$ в равноотстоящие моменты t , $t-1$, $t-2$, ..., а $Z(t)$ — белый шум.

Обозначим через $\hat{X}(t) = X(t) - m_x$ центрированный случайный процесс.

Выражение

$$\hat{X}(t) = \alpha_1 \hat{X}(t-1) + \alpha_2 \hat{X}(t-2) + \dots + \alpha_p \hat{X}(t-p) + Z(t) \quad (7.1.1)$$

называется процессом авторегрессии порядка p .

Эта модель содержит $p+2$ параметров: m_x ; α_1 , α_2 , ..., α_p ; σ_z^2 , где σ_z^2 — дисперсия белого шума $Z(t)$.

Модели скользящего среднего

В этой модели текущее значение процесса $X(t)$ выражается через предыдущие значения $Z(t-1)$, $Z(t-2)$, ... белого шума $Z(t)$.

Процесс

$$\overset{\circ}{X}(t) = Z(t) + \beta_1 Z(t-1) + \beta_2 Z(t-2) + \dots + \beta_q Z(t-q) \quad (7.1.2)$$

называется процессом скользящего среднего порядка q .

Модель скользящего среднего содержит $q+2$ параметров: m_x ; $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$; σ_z^2 .

Смешанные модели авторегрессии — скользящего среднего.

Для достижения большей гибкости в подборе моделей для описания реальных случайных процессов иногда целесообразно объединить в одной модели авторегрессию и скользящее среднее.

Это приводит к комбинированной модели авторегрессии — скользящего среднего

$$\overset{\circ}{X}(t) = \alpha_1 \overset{\circ}{X}(t-1) + \dots + \alpha_p \overset{\circ}{X}(t-p) + Z(t) + \beta_1 Z(t-1) + \dots + \beta_q Z(t-q). \quad (7.1.3)$$

В этой модели $p+q+2$ параметров: m_x ; $\alpha_1, \dots, \alpha_p$; β_1, \dots, β_q ; σ_z^2 . На практике часто оказывается, что адекватное описание реальных случайных процессов достигается при помощи моделей авторегрессии, или скользящего среднего, в которых p или q не больше двух, или смешанной модели авторегрессии — скользящего среднего при $p=1$ и $q=1$.

Преимущество параметрических методов заключается в их экономичности, т. е. в том, что имеющиеся наблюдения расходуются на оценивание малого числа параметров. Вместе с тем, эти методы по сравнению с непараметрическими методами требуют более полной априорной информации о физической сущности рассматриваемых случайных процессов.

В главе 4 мы рассматривали процессы, представляющие собой реакцию некоторой линейной системы, описываемой линейным дифференциальным уравнением, на вход которой действует некоторый случайный процесс. В частности, уже был рассмотрен случайный процесс $X(t)$, описываемый линейным дифференциальным уравнением первого порядка

$$\alpha \frac{dx}{dt} + x(t) = Z(t),$$

когда входным воздействием является белый шум $Z(t)$.

Заменяя дифференциальное уравнение разностным, получим процесс авторегрессии первого порядка

$$\overset{\circ}{X}(t) = \alpha_1 \overset{\circ}{X}(t-1) + Z(t). \quad (7.1.4)$$

Аналогично для процесса, который описывался дифференциальным уравнением второго порядка, получаем процесс авторегрессии второго порядка

$$\dot{X}(t) = \alpha_1 \dot{X}(t-1) + \alpha_2 \dot{X}(t-2) + Z(t). \quad (7.1.5)$$

В этих примерах мы сумели построить модели, зная физическую природу рассматриваемых случайных процессов. Однако на практике обычно физическая природа изучаемого процесса априорно неизвестна, имеется лишь ряд данных наблюдений, который и используется для построения статистической модели. При этом построение статистической модели включает в себя три этапа.

1. Методом идентификации определяются классы моделей, пригодные для описания изучаемого процесса.

2. Производится подгонка выбранной модели к рассматриваемому процессу и определяются по имеющимся данным наблюдений оценки параметров модели.

3. Выясняется согласованность полученной модели с данными наблюдений и, если такого согласования нет, проводится соответствующая корректировка модели.

В настоящей главе будут коротко изложены основные принципы построения линейных статистических моделей и их использования. Подробному изложению этих вопросов посвящена книга Дж. Бокса и Г. Дженкинса «Анализ временных рядов: прогноз и управление».

7.2. Идентификация моделей

Первым этапом построения линейной модели случайного процесса является выбор типов моделей, которые следует использовать для дальнейших исследований. Этот этап носит название идентификации моделей. Задача заключается в выборе из общего класса моделей авторегрессии — скользящего среднего моделей такого порядка p и q , которые можно считать пригодными для описания данного случайного процесса.

Основой метода идентификации является сравнение теоретической автокорреляционной функции данной модели авторегрессии, скользящего среднего, или смешанной с полученной путем статистической обработки имеющихся данных наблюдений оценкой корреляционной функции изучаемого случайного процесса.

Рассмотрим автокорреляционные функции моделей авторегрессии, скользящего среднего и смешанных. В главе 4 стационарный случайный процесс был выражен как реакция линейной системы на некоторое входное воздействие.

Рассмотрим центрированный случайный процесс $\overset{\circ}{X}(t)$, а в качестве входного воздействия рассмотрим белый шум $Z(t)$. Тогда в соответствии с формулой (4.2.2) можем записать

$$\overset{\circ}{X}(t) = \int_0^{\infty} g(\tau) Z(t - \tau) d\tau, \quad (7.2.1)$$

где $g(\tau)$ весовая функция, $g(\tau) = 0$ при $\tau < 0$.

Такой случайный процесс называют линейным. При этом корреляционная функция в соответствии с (4.2.4) запишется в виде

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\tau_1) g(\tau_2) R_z(\tau - \tau_2 + \tau_1) d\tau_1 d\tau_2. \quad (7.2.2)$$

Белый шум $Z(t)$ представляет собой последовательность некоррелированных сечений с нулевым средним значением и постоянной дисперсией σ_z^2 .

Его корреляционная функция $R_z(\tau)$ имеет вид

$$R_z(\tau) = \sigma_z^2 \delta(t), \quad (7.2.3)$$

где $\delta(\tau)$ — дельта-функция, рассмотренная в главе 4.

Используя свойство дельта-функции (4.1.4), получаем выражение для корреляционной функции $R_x(\tau)$ в виде

$$R_x(\tau) = \sigma_z^2 \int_0^{\infty} g(t) g(t - \tau) dt. \quad (7.2.4)$$

При этом нормированная корреляционная функция линейного процесса определится в виде

$$r_x(\tau) = \frac{\int_0^{\infty} g(t) g(t - \tau) dt}{\int_0^{\infty} g^2(t) dt}. \quad (7.2.5)$$

Для дискретного аргумента t линейный процесс можно записать в виде суммы

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k Z(t - k). \quad (7.2.6)$$

Это позволяет нам представить случайный процесс как линейную комбинацию настоящего и предшествующих значений белого шума.

Формулу для корреляционной функции такого процесса получим из (7.2.4), заменяя интеграл на сумму, в виде

$$R_x(k) = \sigma_z^2 \sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+k}. \quad (7.2.7)$$

Нормированная корреляционная функция дискретного линейного процесса имеет вид

$$r_x(k) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} g_i g_{i+k}}{\sum_{i=0}^{\infty} g_i^2}. \quad (7.2.7a)$$

Процесс скользящего среднего можно рассматривать как линейный процесс вида (7.2.6), в котором коэффициенты $g_k = 0$ при $k > q$.

Из (7.2.7) получаем, что корреляционная функция процесса скользящего среднего порядка q равна нулю при $k > q$, а при $k \leq q$ равна

$$R_x(k) = \sigma_z^2 \sum_{i=0}^{q-k} \beta_i \beta_{i+k}, \quad (7.2.8)$$

т. е. корреляционная функция процесса скользящего среднего обрывается при $k = q$.

Линейный процесс (7.2.6) можно представить и в виде линейной комбинации прошлых значений самого процесса плюс случайный импульс

$$\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \overset{\circ}{X}(t-k) + Z(t). \quad (7.2.9)$$

Соотношение между коэффициентами α_k и g_k можно установить с помощью оператора сдвига B , обладающего свойством

$$Bx(t) = x(t-1), \quad B^k x(t) = x(t-k).$$

Например, процесс авторегрессии первого порядка

$$\overset{\circ}{X}(t) = \alpha_1 \overset{\circ}{X}(t-1) + Z(t) \quad (7.2.10)$$

можем записать в виде

$$\overset{\circ}{X}(t) = \alpha_1 B \overset{\circ}{X}(t) + Z(t)$$

или

$$Z(t) = (1 - \alpha_1 B) \overset{\circ}{X}(t).$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{X}(t) &= \frac{Z(t)}{1 - \alpha_1 B} = (1 + \alpha_1 B + \alpha_1^2 B^2 + \dots) Z(t) = \\ &= Z(t) + \alpha_1 B Z(t) + \alpha_1^2 B^2 Z(t) + \dots \\ &\dots = Z(t) + \alpha_1 Z(t-1) + \alpha_2 Z(t-2) + \dots\end{aligned}\quad (7.2.11)$$

Процесс авторегрессии свелся к линейному процессу вида (7.2.6), в котором коэффициенты $g_k = \alpha_1^k$.

В соответствии с (7.2.7а) видим, что нормированная корреляционная функция процесса авторегрессии первого порядка равна

$$r_x(k) = \alpha_1^k, \quad k = 0; 1; 2; \dots \quad (7.2.12)$$

Можно показать, что процесс авторегрессии первого порядка будет стационарным только при $|\alpha_1| < 1$. В этом случае при $\alpha_1 > 0$ корреляционная функция процесса является убывающей функцией, причем убывание происходит быстро при малом значении α_1 , а при большом значении $\alpha_1 = 0,8; 0,9$ соседние сечения процесса имеют большую корреляцию и убывание корреляционной функции происходит медленно. При отрицательном значении α_1 корреляционная функция осциллирует от отрицательных значений к положительным.

Для процессов авторегрессии второго порядка можно показать, что нормированная корреляционная функция определяется формулой

$$r(k) = \frac{d^k \cos(\beta k - \varphi_0)}{\cos \varphi_0}, \quad (7.2.13)$$

где

$$d = \sqrt{-\alpha_2}, \quad \cos \beta = \alpha_1/2 \sqrt{-\alpha_2}, \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{1-d^2}{1+d^2} \operatorname{tg} \beta.$$

Эта корреляционная функция представляет собой затухающее гармоническое колебание. Аналогичное выражение (4.2.21) ранее было получено для корреляционной функции процесса авторегрессии второго порядка непрерывного аргумента t .

Для смешанного процесса авторегрессии — скользящего среднего

$$\overset{\circ}{X}(t) = \alpha_1 \overset{\circ}{X}(t-1) + \beta_1 Z(t-1) + Z(t) \quad (7.2.14)$$

корреляционную функцию можно определить по формулам

$$\begin{aligned}R(k) &= \alpha_1 R(k-1), \quad k \geq 2; \\ R(0) &= \frac{1 + \beta_1^2 - 2\alpha_1\beta_1}{1 - \alpha_1^2} \sigma_z^2; \\ R(1) &= \frac{(1 - \alpha_1\beta_1)(\alpha_1 - \beta_1)}{1 - \alpha_1^2} \sigma_z^2.\end{aligned}\quad (7.2.15)$$

Эта корреляционная функция экспоненциально убывает с ростом k .

Выяснив характер поведения теоретических корреляционных функций процессов авторегрессии, скользящего среднего и смешанного процесса, мы можем теперь сравнить их с поведением выборочной корреляционной функции изучаемого процесса, полученной по имеющимся данным наблюдений и на основании такого сравнения выбрать типы моделей для описания рассматриваемого процесса.

При этом следует помнить, что выборочные оценки корреляционной функции лишь приближенно отражают характер поведения истинной корреляционной функции процесса. Поэтому при использовании их для идентификации моделей нужно основываться лишь на главных характерных чертах этих функций. По этой причине иногда целесообразно на этапе идентификации подобрать для дальнейшего оценивания и диагностической проверки не одну, а две или более возможных моделей процесса.

7.3. Оценивание параметров линейной модели

Одним из эффективных методов оценивания параметров выбранной модели является метод максимального правдоподобия. Напомним коротко суть метода максимального правдоподобия, изучавшегося в общем курсе теории вероятностей и математической статистики.

Пусть мы имеем выборку из n значений случайной величины X , имеющей плотность распределения заданного вида $f(x, \theta)$ с неизвестным параметром θ . Совместное распределение наблюдений для этой выборки равно

$$L(\theta) = f(x_1, \theta) \cdot f(x_2, \theta) \dots f(x_n, \theta).$$

Эта функция, рассматриваемая как функция параметра θ , называется функцией правдоподобия. Принцип максимального правдоподобия заключается в том, что в качестве оценки параметра θ принимается такое его значение $\hat{\theta}$, которое обращает в максимум функцию правдоподобия. Эта оценка дает предпочтительное значение параметра θ , так как при этом значении вероятность получения данной выборки является наибольшей. Если максимум правдоподобия лежит внутри области возможных значений параметра θ , то для дифференцируемой функции $L(\theta)$ оценку максимального правдоподобия (ОМП) найдем как корень уравнения

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0.$$

Если же максимум правдоподобия лежит на границе области возможных значений, то эту оценку можно найти, построив график функции $L(\theta)$.

В случае, когда функция правдоподобия зависит от k параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, оценки максимального правдоподобия параметров $\theta_1, \dots, \theta_k$ должны максимизировать функцию правдоподобия $L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ одновременно по всем параметрам. В этом случае оценки $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$ находятся как корни системы уравнений

$$\frac{\partial L(\theta_1, \dots, \theta_k)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, k.$$

Так как функция правдоподобия является положительной, то обычно для упрощения выкладок максимизируют функцию $\ln L(\theta_1, \dots, \theta_k)$, которая имеет максимум при тех же значениях параметра, что и $L(\theta_1, \dots, \theta_k)$. Показано, что при весьма общих условиях оценки, получаемые по методу максимального правдоподобия, состоятельны и асимптотически эффективны.

Проведем оценивание методом максимального правдоподобия параметров модели авторегрессии. Пусть имеется N значений x_1, x_2, \dots, x_n реализации $x(t)$ стационарного случайного процесса $X(t)$, зафиксированные в равноотстоящие моменты $t, t-1, \dots, t-N-1$.

Требуется по этим наблюдаемым данным оценить параметры процесса авторегрессии порядка p

$$\dot{X}(t) = \alpha_1 \dot{X}(t-1) + \alpha_2 \dot{X}(t-2) + \dots + \alpha_p \dot{X}(t-p) + Z(t), \quad (7.3.1)$$

т. е. получить оценки параметров $m_x, \alpha_1, \dots, \alpha_p$.

Предполагая, что случайный процесс $Z(t)$ (белый шум) является нормальным, можем записать функцию правдоподобия как совместную плотность распределения $f(z_1, z_2, \dots, z_N)$ в виде

$$f(z_1, \dots, z_N) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_z)^N} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma_z^2} \sum_{j=1}^N z^2(t-j) \right]. \quad (7.3.2)$$

Выражая $Z(t)$ по формуле (7.3.1), получаем совместную плотность распределения величин $X(t), X(t-1), \dots, X(t-N)$, которая представляет собой функцию максимального правдоподобия

$$f(m_x, \alpha_1, \dots, \alpha_p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi}\sigma_z)^N} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_z^2} \times \right. \\ \left. \times \sum_{i=0}^{N-1} [\dot{X}(t-i) - \alpha_1 \dot{X}(t-i-1) - \dots - \alpha_p \dot{X}(t-i-N)]^2 \right\}. \quad (7.3.3)$$

Логарифмируя, получаем

$$\begin{aligned} \ln f(m_x, \alpha_1, \dots, \alpha_p) = & -N \ln \sqrt{2\pi} - N \ln \sigma^2 - \\ & - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=0}^{N-1} [\hat{X}(t-j) - \alpha_1 \hat{X}(t-j-1) - \dots - \alpha_p \hat{X}(t-j-p)]^2. \end{aligned} \quad (7.3.4)$$

Для получения оценок максимального правдоподобия параметров нужно приравнять нулю частные производные правой части (7.3.4) по параметрам $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$.

Определим оценки параметров для моделей авторегрессии первого и второго порядка.

Для процесса авторегрессии первого порядка логарифмическая функция правдоподобия имеет вид

$$\begin{aligned} f(m_x, \alpha_1) = & -(N-1) \ln \sqrt{2\pi} - (N-1) \ln \sigma_z - \\ & - \frac{1}{2\sigma_z^2} \sum_{j=1}^N [x_j - m_x - \alpha_1 (x_{j+1} - m_x)]^2 \end{aligned} \quad (7.3.5)$$

при наблюдаемых значениях x_1, x_2, \dots, x_N . Отсюда получаем систему из двух уравнений для получения параметров m_x и α_1 .

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(m_x, \alpha_1)}{\partial m_x} = & \frac{1}{\sigma_z^2} \sum_{j=1}^N [(x_j - \hat{m}_x) - \alpha_1 (x_{j+1} - \hat{m}_x)] (1 - \hat{\alpha}_1) = 0, \\ \frac{\partial f(m_x, \alpha_1)}{\partial \alpha_1} = & \frac{1}{\sigma_z^2} \sum_{j=1}^N [(x_j - \hat{m}_x) - \alpha_1 (x_{j+1} - \hat{m}_x)] (x_{j+1} - \hat{m}_x) = 0. \end{aligned} \quad (7.3.6)$$

Решая эту систему при $\alpha_1 \neq 1$, получаем оценки

$$\hat{m}_x = \frac{\sum_{j=1}^N x_j - \hat{\alpha}_1 \sum_{j=2}^N x_j}{N(1 - \hat{\alpha}_1)} \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j = \bar{x}, \quad (7.3.7)$$

где \bar{x} — среднее арифметическое из наблюдаемых значений x_1, x_2, \dots, x_N .

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\sum_{j=1}^N (x_j - \hat{m}_x)(x_{j+1} - \hat{m}_x)}{\sum_{j=1}^N (x_{j+1} - \hat{m}_x)^2} \approx \frac{\hat{R}_x(1)}{\hat{R}_x(0)} = \hat{r}_x(1). \quad (7.3.8)$$

Следовательно, за оценку математического ожидания \hat{m}_x можно принять среднее арифметическое из наблюдаемых значений, а за оценку параметра $\hat{\alpha}_1$ — выборочную нормированную корреляцию.

ляционную функцию $\hat{f}_x(\tau)$ при τ , равном интервалу времени между соседними наблюдениями.

Аналогично составив функцию правдоподобия для модели авторегрессии второго порядка и приравняв нулю ее частные производные по параметрам m_x , α_1 , α_2 , получим приближенные оценки для параметров

$$\hat{m}_x \approx \bar{x}; \quad (7.3.9)$$

$$\hat{\alpha}_1 \approx \frac{\hat{f}_x(1)[1 - \hat{f}_x(2)]}{1 - \hat{f}_x^2(1)}; \quad (7.3.10)$$

$$\hat{\alpha}_2 \approx \frac{\hat{f}_x(2) - \hat{f}_x^2(1)}{1 - \hat{f}_x^2(1)}. \quad (7.3.11)$$

После того как выбрана модель и оценены ее параметры, нужно убедиться в том, насколько данная модель адекватно отражает рассматриваемый случайный процесс, т. е. насколько она согласуется с имеющимися данными наблюдений. О мере неадекватности модели можно судить по характеру остаточных ошибок между подобранной моделью и данными наблюдений. Если подогнанная модель верна, то остаточные ошибки должны быть некоррелированы и распределены приблизительно нормально относительно нулевого математического ожидания. Наличие же существенной корреляции остаточных ошибок свидетельствует о том, что либо неудачно выбран вид модели, либо не точно оценены ее параметры. Разработан ряд методов диагностической проверки моделей. Одним из таких методов является введение избыточных параметров, который заключается в том, что наряду с выбранной моделью, рассматривается модель с большим числом параметров.

7.4. Спектр линейных моделей

В главе 4 было установлено соотношение между спектральными плотностями случайных процессов на входе и выходе стационарной линейной системы. Спектральная плотность случайного процесса на выходе равна произведению спектральной плотности на входе на квадрат модуля передаточной функции системы $L(\omega)$. Поскольку линейный процесс можно рассматривать как реакцию линейной системы на белый шум $Z(t)$, имеющий постоянную спектральную плотность σ_z^2 , то спектральную плотность $S_x(\omega)$ линейного процесса $X(t)$ можно представить в виде

$$S_x(\omega) = |L(\omega)|^2 \sigma_z^2. \quad (7.4.1)$$

Непрерывный линейный стационарный процесс был описан с помощью дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (4.1.12). При этом передаточная функция $L(\omega)$ определялась по формуле (4.1.14).

Дискретный случайный линейный процесс можно описать с помощью разностного уравнения

$$y(t) = \alpha_1 y(t-1) + \alpha_2 y(t-2) + \dots + \alpha_m y(t-m) + \beta_0 x(t) + \beta_1 x(t-1) + \dots + \beta_n x(t-n). \quad (7.4.2)$$

Величины $y(t)$, $y(t-1)$, ..., $y(t-m)$, $x(t)$, $x(t-1)$, ..., $x(t-n)$ можно рассматривать как дискретные значения непрерывных случайных процессов $Y(t)$ и $X(t)$ в соответствующие моменты времени.

Определим передаточную функцию $L(\omega)$ для этого случая. Как и для непрерывного процесса в качестве входного воздействия рассмотрим гармонические колебания $x(t) = e^{i\omega t}$. Тогда

$$\begin{aligned} y(t) &= L(\omega) e^{i\omega t}, \\ y(t-1) &= L(\omega) e^{i\omega(t-1)} = L(\omega) e^{i\omega t} e^{-i\omega}, \\ y(t-k) &= L(\omega) e^{i\omega t} e^{-ik\omega}, \\ x(t-1) &= e^{i\omega t} e^{-i\omega}, \\ x(t-k) &= e^{i\omega t} e^{-ik\omega}. \end{aligned} \quad (7.4.3)$$

Подставляя (7.4.3) в уравнение (7.4.2), получим

$$\begin{aligned} (1 - \alpha_1 e^{-i\omega} - \alpha_2 e^{-2i\omega} - \dots - \alpha_m e^{-im\omega}) L(\omega) &= \\ = \beta_0 + \beta_1 e^{-i\omega} + \beta_2 e^{-2i\omega} + \dots + \beta_n e^{-in\omega}. \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

Отсюда получаем выражение для передаточной функции дискретного линейного стационарного процесса.

$$L(\omega) = \frac{\beta_0 + \beta_1 e^{-i\omega} + \beta_2 e^{-2i\omega} + \dots + \beta_n e^{-in\omega}}{1 - \alpha_1 e^{-i\omega} - \alpha_2 e^{-2i\omega} - \dots - \alpha_m e^{-im\omega}}. \quad (7.4.5)$$

При этом спектральная плотность общего процесса авторегрессии — скользящего среднего, определяемого уравнением (7.4.2) согласно формуле (7.4.1), будет иметь вид

$$S(\omega) = \left| \frac{\beta_0 + \beta_1 e^{-i\omega} + \beta_2 e^{-2i\omega} + \dots + \beta_n e^{-in\omega}}{1 - \alpha_1 e^{-i\omega} - \alpha_2 e^{-2i\omega} - \dots - \alpha_m e^{-im\omega}} \right|^2 \sigma_z^2. \quad (7.4.6)$$

Определим спектральные плотности процесса авторегрессии первого и второго порядка.

Для процесса авторегрессии первого порядка (7.1.4) передаточная функция запишется в виде

$$L(\omega) = \frac{1}{1 - \alpha_1 e^{-i\omega}}. \quad (7.4.7)$$

Отсюда, согласно (7.4.6), находим спектральную плотность процесса авторегрессии первого порядка

$$S(\omega) = \frac{\sigma_z^2}{1 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1 \cos \omega}. \quad (7.4.8)$$

При положительном значении коэффициента α_1 большая часть спектра сосредоточена на малых частотах, при отрицательном — на больших частотах.

Для процесса авторегрессии второго порядка (7.1.5) передаточная функция запишется в виде

$$L(\omega) = \frac{1}{1 - \alpha_1 e^{-i\omega} - \alpha_2 e^{-i2\omega}}. \quad (7.4.9)$$

Спектральная плотность будет иметь вид

$$S(\omega) = \frac{\sigma_z^2}{1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_1(1 - \alpha_2) \cos \omega - 2\alpha_2 \cos 2\omega}. \quad (7.4.10)$$

Вид спектра в этом случае зависит от соотношения коэффициентов α_1 и α_2 . При одних значениях α_1 и α_2 можно получить низкочастотный или высокочастотный спектр, при других — спектры, имеющие максимум или минимум на некоторой частоте ω_0 .

В п. 8.3 будут рассмотрены методы оценки спектральной плотности стационарного случайного процесса, основанные на осреднении периодограммы. Выведенные в данном разделе формулы для спектров линейных моделей дают еще один способ оценивания. Этот способ сводится к аппроксимации изучаемого процесса с помощью достаточно удачно выбранной линейной модели. По данным наблюдений производится оценивание параметров этой модели, а в качестве оценки спектра случайного процесса принимается спектр выбранной модели.

В последние годы этот метод находит все более широкое применение в практике спектрального анализа случайных процессов. Полученные таким образом оценки спектральных плотностей, описываемые несложными аналитическими выражениями, являются весьма удобными во многих случаях при решении различных прикладных задач гидрометеорологии.

7.5. Прогнозирование стохастических моделей

В главе 6 был рассмотрен метод оптимальной линейной экстраполяции стационарных случайных процессов. Задача заключалась в том, чтобы, зная значения реализации $x(t)$ до неко-

торого текущего значения t и корреляционную функцию процесса $R_x(\tau)$, найти прогнозируемое значение $x(t+T)$ с заблаговременностью прогноза T таким образом, чтобы обращалась в минимум средняя квадратическая ошибка.

В настоящей главе будет рассмотрено решение этой же задачи другим способом, основанным на использовании построенной модели процесса. При этом будем считать, что модель достаточно адекватна процессу, так что ошибки в оценках параметров не оказывают существенного влияния на прогноз.

Рассмотрим прогнозирование линейного процесса на T шагов. Как было показано в п. 7.2, линейный процесс в соответствии с (7.2.6) может быть представлен как бесконечная линейная комбинация текущего и предшествующих импульсов $Z(t)$, $Z(t-1)$, $Z(t-2)$, ...

Тогда искомое значение $\hat{X}(t+T)$ запишется в виде

$$\hat{X}(t+T) = g_0 Z(t+T) + g_1 Z(t+T-1) + g_2 Z(t+T-2) + \dots, \quad (7.5.1)$$

где $g_0 = 1$

Предположим, что выражение

$$\hat{X}(t+T) = g_T^* Z(t) + g_{T+1}^* Z(t-1) + g_{T+2}^* Z(t-2) + \dots \quad (7.5.2)$$

дает наилучший прогноз, обращающий в минимум среднюю квадратическую ошибку.

При этом средняя квадратическая ошибка прогноза определится как математическое ожидание квадрата разности

$$\begin{aligned} \sigma^2(T) &= M[(\hat{X}(t+T) - \hat{X}(t+T))^2] = \\ &= (1 + g_1^2 + \dots + g_{T-1}^2) \sigma_z^2 + \sum_{j=0}^{\infty} (g_{T+j} - g_{T+j}^*). \end{aligned} \quad (7.5.3)$$

Из (7.5.3) видно, что величина $\sigma^2(T)$ обращается в минимум при $g_{T+j}^* = g_{T+j}$.

Таким образом, в качестве оптимального прогноза на T шагов можем принять выражение

$$\hat{X}(t+T) = g_T Z(t) + g_{T+1} Z(t-1) + g_{T+2} Z(t-2) + \dots \quad (7.5.4)$$

Выражение (7.5.4) представляет собой условное математическое ожидание $\hat{X}(t+T)$ при условии, что все значения $\hat{X}(t)$ до момента t известны. Обозначим его через $M_t[\hat{X}(t+T)]$. Тогда видно, что оптимальный прогноз на T шагов представляет собой условное математическое ожидание $\hat{X}(t+T)$ в момент t

$$\hat{X}(t+T) = M_t[\hat{X}(t+T)]. \quad (7.5.5)$$

Сравнивая (7.5.4) с (7.5.1), видим, что ошибка прогноза равна

$$\delta(T) = Z(t+T) + g_1 Z(t+T-1) + \dots + g_{T-1} Z(t+1). \quad (7.5.6)$$

Так как математическое ожидание $M[\delta(T)] = 0$, то прогноз будет несмещенным.

Дисперсия ошибок прогноза равна

$$\sigma^2(T) = (1 + g_1^2 + \dots + g_{T-1}^2) \sigma_2^2. \quad (7.5.7)$$

Мы рассмотрели прогнозирование случайного процесса, представленного в виде бесконечной суммы случайных импульсов. Как уже было показано в п. 7.2, этот процесс можно представить и в виде линейной комбинации значений самого процесса в текущий и предшествующие моменты плюс случайный импульс

$$\dot{X}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \dot{X}(t-j) + Z(t). \quad (7.5.8)$$

Перейдя в (7.5.8) к условным математическим ожиданиям, получим выражение для оптимального прогноза

$$\hat{X}(t+T) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j M_t[\dot{X}(t+T-j)] + M_t[Z(t+T)]. \quad (7.5.9)$$

Условные математические ожидания требуют знания всех прошлых значений случайного процесса. Однако на практике веса α_j обычно довольно быстро затухают и для прогноза достаточно значения не очень большого числа предшествующих моменту t значений процесса.

Условные математические ожидания в формуле (7.5.9) определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} M_t[\dot{X}(t-j)] &= \dot{X}(t-j), \quad j=0, 1, 2, \dots \\ M_t[\dot{X}(t+j)] &= \dot{X}(t+j), \quad j=1, 2, \dots \\ M_t[Z(t-j)] &= Z(t-j) = \dot{X}(t-j) - \dot{X}(t-j-1), \\ & \quad j=0, 1, 2, \dots, \\ M_t[Z(t+j)] &= 0, \quad j=1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.5.10)$$

Это позволяет выразить прогноз на T шагов в виде линейной комбинации наблюдений, предшествующих данному моменту t , и прогнозов, сделанных в момент t с меньшим упреждением.

Можно сформулировать следующее правило. Для получения прогноза $\hat{X}(t+T)$ на T шагов нужно члены $\dot{X}(t-j) \times \times (j=0, 1, 2, \dots)$; известные к моменту t , оставить без изме-

нения; члены $\overset{\circ}{X}(t+j)$ ($j=1, 2, \dots$), еще не известные, заменить их прогнозами на j шагов $\widehat{X}(t+j)$ с момента t ; члены $Z(t-j)$ ($j=0, 1, 2, \dots$), уже известные, определить по разностям $\overset{\circ}{X}(t-j) - \widehat{X}(t-j-1)$; члены $Z(t+j)$ ($j=1, 2, \dots$), еще не известные, заменить нулями.

В качестве примера рассмотрим прогнозирование процесса авторегрессии второго порядка

$$\overset{\circ}{X}(t) = \alpha_1 \overset{\circ}{X}(t-1) + \alpha_2 \overset{\circ}{X}(t-2) + Z(t).$$

В соответствии с (7.5.9) и сформулированным правилом прогнозы в момент t на $T=1, 2, \dots$ шагов будут иметь вид

$$\widehat{X}(t+1) = \alpha_1 \overset{\circ}{X}(t) + \alpha_2 \overset{\circ}{X}(t-1),$$

$$\widehat{X}(t+2) = \alpha_1 \widehat{X}(t+1) + \alpha_2 \overset{\circ}{X}(t),$$

$$\widehat{X}(t+T) = \alpha_1 \widehat{X}(t+T-1) + \alpha_2 \widehat{X}(t+T-2), \quad T=3, 4, \dots$$

Отсюда видно, что прогнозы на 1, 2, 3 и т. д. шагов вычисляются рекуррентным способом.

Глава 8

Определение характеристик случайных функций по экспериментальным данным

8.1. Определение характеристик случайной функции осреднением по множеству реализаций

В главах 1 и 2 было показано, что случайную функцию можно рассматривать как множество всех ее сечений. Исходя из этого, можно свести определение характеристик случайной функции — математического ожидания и корреляционной функции — к определению соответствующих характеристик системы случайных величин.

Пусть в результате эксперимента получено n реализаций $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) случайного процесса $X(t)$ на промежутке $[t_0, t_0 + T]$ (рис. 8.1). Разобьем этот промежуток на m равных

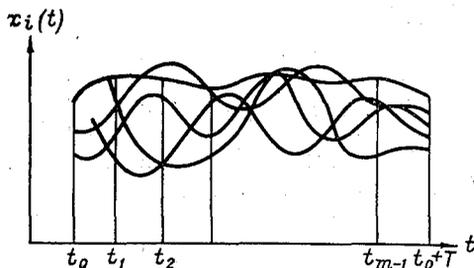


Рис. 8.1

частей точками $t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_0 + T$. Для каждого значения аргумента t_j ($j = 1, 2, \dots, m$) получим сечение случайного процесса $X(t_j)$, которое представляет собой случайную величину. Получили систему из m случайных величин и в качестве характеристик случайного процесса будем рассматривать характеристики этой системы, их математические ожидания

$$M[X_j] = m_x(t_j) \quad (8.1.1)$$

и корреляционную матрицу

$$\|R_{j,l}\| = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1m} \\ & R_{22} & \dots & R_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & R_{mm} \end{pmatrix}. \quad (8.1.2)$$

Математические ожидания $M[X_j]$ представляют собой значения математического ожидания $m_x(t)$ случайного процесса при дискретных значениях аргумента t_j . Элементы корреляционной матрицы $R_{j, l}$ являются значениями корреляционной функции $R_x(t_1, t_2)$, соответствующими дискретным значениям аргументов t_j и t_l , $R_{j, l} = R_x(t_j, t_l)$.

Аналогичная методика сведения к системе сечений применима и для определения характеристик пространственного случайного поля.

Часто на практике измерение метеорологических или гидрологических случайных процессов и полей производится не непрерывно, а лишь для дискретных значений аргумента. В этом случае мы не сможем произвольно разбивать интервал задания аргумента на части, а имеем систему сечений для данных конкретных значений аргумента, с которой только и можем оперировать.

При использовании экспериментальных данных мы никогда не располагаем всем множеством возможных реализаций случайной функции, которое называют генеральной совокупностью реализаций, а имеем лишь конечное число реализаций, представляющее собой некоторую частную выборку из генеральной совокупности. Определенные по этой частной выборке характеристики случайной функции сами носят случайный характер и могут отличаться от истинных значений этих характеристик.

Характеристики, определяемые по экспериментальным данным, называют их статистическими оценками. В отличие от истинных значений характеристик будем обозначать их оценки теми же символами, но с «крышкой» наверху — $\hat{m}_x(t)$, $\hat{R}_x(t_1, t_2)$.

Для определения дискретных значений оценок математического ожидания $\hat{m}_x(t_j)$ и корреляционной функции $\hat{R}_x(t_j, t_l)$ по выборке из n реализаций можно использовать разработанные в математической статистике методы оценивания характеристик случайных величин по данным экспериментов.

При этом предполагается, что эксперименты являются независимыми и производятся в одинаковых условиях. Опыты считаются произведенными в одинаковых условиях, если во время их проведения комплекс всех учитываемых воздействий, исходных условий и связей остается неизменным. Опыты являются независимыми, если результаты каждого из них не зависят от результатов других.

Независимость реализаций случайной функции эквивалентна независимости распределений случайной функции при проведении опытов, в результате которых получены эти реализации. А наличие одинаковых условий при проведении этих опытов эквивалентно тому, что законы распределения случайной функции одинаковы при всех опытах.

Задача оценивания заключается в выборе таких характеристик, которые были бы наилучшими в некотором смысле при их массовом применении.

Говоря о качестве оценок, обычно подразумевают выполнимость некоторых существенных свойств. К таким свойствам относятся состоятельность, несмещенность и эффективность оценки.

Статистическая оценка $\hat{\theta}$ характеристики случайной величины θ , определяемая по выборке объема n , называется состоятельной, если с увеличением числа наблюдений n с вероятностью сколь угодно близкой к единице оценка $\hat{\theta}$ стремится к истинному значению θ , т. е. оценка $\hat{\theta}$ сходится к θ по вероятности.

Состоятельность оценки обеспечивает асимптотическую ее близость к искомой характеристике при беспредельном возрастании объема выборки, но не характеризует меру ее близости при конечном n . Состоятельность не гарантирует единственность оценки. Существует бесчисленное множество различных оценок, являющихся состоятельными.

Оценку называют несмещенной, если ее математическое ожидание для всех выборок равно значению искомой характеристики, т. е. если $M[\hat{\theta}] = \theta$.

Состоятельная оценка является асимптотически несмещенной, так как ее среднее значение близко к искомому при больших n , однако она может не являться несмещенной при не слишком большом объеме выборки.

Третье свойство оценок — эффективность — связано с желанием получить среди несмещенных оценок такую, разброс случайных значений которой около искомой величины был бы наименьшим. Так как мерой такого разброса является дисперсия, то естественно искать оценку, имеющую наименьшую дисперсию.

Оценка, имеющая минимальную дисперсию, называется эффективной. Если оценка имеет минимальную дисперсию для больших выборок, то она называется асимптотически эффективной.

В качестве оценки математического ожидания случайной величины X в математической статистике используют среднее арифметическое из имеющихся n независимых наблюдений x_i

$$\hat{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (8.1.3)$$

Для оценки корреляционного момента R_{xy} пары случайных величин X и Y используют формулу

$$\hat{R}_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{m}_x)(y_i - \hat{m}_y). \quad (8.1.4)$$

Показано, что эти оценки являются несмещенными, состоятельными и эффективными.

Исходя из этого, для оценок математического ожидания $\hat{m}_x(t_j)$ сечений случайной функции и элементов корреляционной матрицы $\hat{R}_x(t_j, t_l)$ получаем формулы

$$\hat{m}_x(t_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i(t_j), \quad j = 1, 2, \dots, m, \quad (8.1.5)$$

$$\hat{R}_x(t_j, t_l) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_j) - \hat{m}_x(t_j)][x_i(t_l) - \hat{m}_x(t_l)]. \quad (8.1.6)$$

В частности, при $j = l$ из (8.1.6) получаем оценку дисперсии сечения случайной функции

$$D_x(t_j) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_j) - \hat{m}_x(t_j)]^2. \quad (8.1.7)$$

Оценки элементов нормированной корреляционной матрицы определяются в виде:

$$\hat{r}_x(t_j, t_l) = \frac{\hat{R}_x(t_j, t_l)}{\hat{\sigma}_x(t_j) \hat{\sigma}_x(t_l)}, \quad (8.1.8)$$

где $\hat{\sigma}_x(t) = \sqrt{\hat{D}_x(t)}$.

В случае стационарного случайного процесса или однородного изотропного поля математическое ожидание является постоянной величиной, а корреляционная функция является функцией одного аргумента. В этом случае объем выборки, по которой находится оценка математического ожидания, может быть существенно увеличен за счет объединения в одну статистическую совокупность сечений, выбранных на различных участках интервала задания реализаций. Аналогично увеличивается объем выборки при определении корреляционной функции за счет объединения в одну статистическую совокупность пар сечений с одинаковым расстоянием между этими сечениями.

В качестве примера рассмотрим определение оценок характеристик метеорологического поля геопотенциала.

При образовании исходной статистической совокупности реализаций для метеорологических полей следует учитывать, что метеорологические поля принципиально не допускают массового повторения при одинаковых внешних условиях. В распоряжении метеоролога нет статистического ансамбля планет, аналогичных Земле, поэтому, строго говоря, метеорологические поля могут быть названы случайными в смысле теории случайных функций лишь условно. В метеорологии единый процесс обычно дробится на части, которые и принимаются условно за различ-

ные реализации, т. е. в качестве реализаций случайного поля используются наблюдения, проводившиеся в различных пространственных областях или в различные моменты времени. При этом в качестве реализаций, соответствующих одинаковым внешним условиям, принимаются наблюдения, проводившиеся в аналогичных в некотором смысле пространственных областях или временных интервалах, которые могут быть использованы для совместной статистической обработки.

Ситуациями, соответствующими одинаковым внешним условиям, являются такие, при которых сохраняются законы распределения случайного поля. На практике обычно не известны эти законы распределения, поэтому отбор аналогичных ситуаций производится, исходя из повседневного метеорологического опыта и результатов предыдущих исследований.

От того как в каждом случае решается вопрос о выборе сходных ситуаций, по которым производится осреднение, зависят полученные сведения о структуре рассматриваемого поля. Другим требованием к совокупности реализаций является независимость отдельных реализаций. Если реализации тесно связаны между собой, то все они будут содержать очень мало новой информации по сравнению с одной из них и, следовательно, увеличение числа реализаций в этом случае не приведет к заметному уточнению полученных статистических характеристик.

Исходя из указанных требований и физической сущности метеорологических процессов, можно отметить некоторые основные положения, которые следует учитывать при объединении экспериментальных данных в одну статистическую совокупность.

При выборе моментов времени, соответствующих аналогичным ситуациям, следует исходить из наличия суточного и годового хода метеозлементов. Наличие суточного хода приводит к тому, что аналогичными можно считать моменты, относящиеся к одному определенному времени суток. Вследствие годового хода нельзя считать соответствующими аналогичным ситуациям моменты, относящиеся к различным сезонам года. Строго говоря, аналогичными следует считать только реализации, полученные в один и тот же день и час каждого года. Однако это оказывается практически невыгодным, так как при этом мы сможем оперировать лишь с весьма небольшим набором реализаций, осреднение по которому будет недостаточным для надежного получения статистических характеристик. Поэтому на практике обычно объединяют в одну совокупность реализации, относящиеся не к одному дню, а к некоторому интервалу года, например месяцу или сезону, т. е. в одну совокупность объединяют все имеющиеся реализации, относящиеся к определенному времени суток и к рассматриваемому сезону, полученные по наблюдениям, проводившимся в течение ряда лет. Для того, чтобы

реализации были независимыми, следует выбирать достаточный временной интервал между наблюдениями. Например, известно, что в течение суток давление воздуха изменяется мало, следовательно, велика зависимость между его значениями в различные моменты суток. Эта зависимость остается заметной и на протяжении следующих двух суток, поэтому при подборе совокупности реализаций поля давления обычно используют наблюдения с интервалом не менее трех суток.

Кроме учета суточного и годового хода, при объединении различных реализаций в одну статистическую совокупность можно еще проводить дополнительную классификацию эмпирического материала по некоторым специальным признакам. Так, при изучении поля ветра разделяют реализации, соответствующие различным условиям циркуляции, выделяя, например, отдельно струйные течения или классифицируя реализации по значениям скорости ветра и т. д. Разделение по типам циркуляции иногда производят и при изучении поля давления (геопотенциала).

При объединении аналогичных пространственных объемов, т. е. реализаций, полученных в различных географических пунктах, исходят из того, что эти пункты должны относиться к одинаковым климатическим районам.

При изучении пространственной структуры метеорологических полей весьма важным является соблюдение условий однородности и изотропности поля, которое накладывает определенные ограничения на его пространственную протяженность.

Работу по определению статистической структуры метеорологического поля следует начинать с анализа имеющегося эмпирического материала и сведений реализаций, соответствующих аналогичным ситуациям, в одну статистическую совокупность.

При изучении поля давления пунктами, соответствующими аналогичным ситуациям, считают точки земного шара, имеющие одинаковую широту и различающиеся только по долготе.

Исследования показали, что в средних широтах условия однородности и изотропности по отношению к структурным функциям поля геопотенциала выполняются довольно хорошо, однако дисперсии поля все же претерпевают некоторые изменения с долготой. Обычно зависимость статистических характеристик от долготы не принимают во внимание, т. е. поле считается однородным по долготе. При этом исходят из соображений, что зависимость от долготы не является очень резкой, вместе с тем предположение об однородности по долготе очень облегчает статистическую обработку, так как дает возможность считать соответствующими аналогичным ситуациям все пункты наблюдений, расположенные вблизи одной параллели и, следовательно,

но, позволяет значительно увеличить число реализаций, по которым производится осреднение.

При этом, естественно, полученные характеристики будут представлять собой некоторые осредненные по долготе величины. Ниже использованы материалы наблюдений 20 метеостанций, расположенных на территории Евразии, приблизительно вдоль параллели 55° с. ш. за четыре сезона 1955—1959 гг. Минимальное расстояние между станциями 210 км, максимальное около 5500 км. Данные снимались с проанализированных карт через каждые три дня.

Пары станций, расположенные примерно на одинаковых расстояниях друг от друга, объединялись в одну статистическую совокупность. Корреляционные функции поля геопотенциала $R_H(l)$ вычислялись для трех изобарических поверхностей 850, 500 и 300 гПа по формуле (8.1.6).

Корреляционные функции, вычисленные для дискретных значений расстояния l , аппроксимировались аналитическими выражениями вида

$$R_H(l) = De^{-\alpha |l|} \cos \beta l,$$

где $D = R_H(0)$, а коэффициенты α и β определялись по методу наименьших квадратов.

В частности, для $H = 500$ гПа получена корреляционная функция

$$R_H(l) = 235e^{-0,29|l|} \cos 0,70l.$$

При определении оценок характеристик случайной функции осреднением по совокупности реализаций имеется ограниченное число реализаций, обычно не очень большое.

Вопросы влияния числа наблюдений на точность определения оценок характеристик случайной величины и системы случайных величин по данным наблюдений подробно рассматриваются в курсах математической статистики. Выводятся формулы дисперсий ошибок, доверительных интервалов. Эти формулы пригодны для оценки точности определения оценок характеристик случайной функции по формулам (8.1.5)—(8.1.8). В частности, формула дисперсии оценки математического ожидания случайной величины \bar{X} по n наблюдениям имеет вид

$$D\bar{m}_x = \frac{\sigma_x^2}{n}. \quad (8.1.9)$$

Следовательно, точность определения оценки математического ожидания сечений случайной функции по n реализациям $\bar{m}_x(t_j)$ обратно пропорциональна корню квадратному из числа реализаций.

Дисперсия оценки коэффициента корреляции для случайных величин, распределение которых близко к нормальному, имеет вид

$$D_{r_x} \approx \frac{(1 - r_x^2)^2}{n - 1}. \quad (8.1.10)$$

Из (8.1.10) видно, что точность определения коэффициента корреляции \hat{r}_x существенно зависит от его значения.

Обозначив

$$\gamma = \frac{\sigma_r}{r} = \frac{1 - r^2}{r \sqrt{n - 1}}, \quad (8.1.11)$$

получим, что при $r = 0,9$ $\gamma \approx \frac{0,2}{\sqrt{n - 1}}$; при $r = 0,5$ $\gamma \approx \frac{1,5}{\sqrt{n - 1}}$; при $r = 0,1$ $\gamma \approx \frac{9,9}{\sqrt{n - 1}}$.

Это показывает, что оценки коэффициентов корреляции, полученные для пар сечений случайной функции, тесно связанных между собой, более надежны, чем для слабо связанных сечений.

Для случайных процессов, встречающихся в метеорологии и гидрологии, корреляционная связь обычно довольно быстро убывает с ростом параметра τ . Таким образом, значения $R(\tau)$, полученные по экспериментальным данным, являются более точными при малых значениях τ и малонадежными при больших τ . Исходя из этого, при аппроксимации полученных значений корреляционной функции $R(\tau)$ аналитическим выражением следует добиваться хорошего совпадения опытных и сглаженных значений при небольших τ , считая отклонения при больших τ в значительной мере случайными.

Для стационарных случайных функций значения коэффициентов корреляции могут быть уточнены путем их вычисления для одинаковых значений τ , взятых на различных участках интервала изменения аргумента t и последующего их осреднения. При этом средняя квадратическая ошибка определения искомой величины уменьшается. Уменьшение этой ошибки тем существеннее, чем меньше связаны между собой сечения случайной величины на тех участках интервала t , на которых вычисляются значения $\hat{r}(\tau)$, участвующие в осреднении. Учитывая это, следует повторять вычисления $\hat{r}(\tau)$ через достаточно большие интервалы изменения параметра t , в течение которых корреляционные связи между сечениями становятся незначительными.

Если коэффициенты корреляции, участвующие в осреднении, вычислены на практически независимых между собой участках, то средняя квадратическая ошибка σ_r , как известно, уменьшается в \sqrt{k} раз, где k — число величин $\hat{r}(\tau)$, участвующих в осреднении.

8.2. Влияние ошибок в исходных данных

Используемые при обработке экспериментальные данные неизбежно содержат ошибки, зависящие от точности используемых методов наблюдений и приборов измерения.

Будем считать, что ошибки измерений представляют собой случайный процесс $Y(t)$ с математическим ожиданием $m_y(t)$ и корреляционной функцией $R_y(t_1, t_2)$. Тогда каждая реализация $z_i(t)$ случайного процесса $X(t)$, полученная в результате опыта, будет представлять собой сумму истинного значения реализации $x_i(t)$ и ошибки измерения $y_i(t)$

$$z_i(t) = x_i(t) + y_i(t), \quad (8.2.1)$$

при этом оценка математического ожидания $\hat{m}_z(t)$ в соответствии с (8.1.5) будет равна

$$\hat{m}_z(t_j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [x_i(t_j) + y_i(t_j)] = \hat{m}_x(t_j) + \hat{m}_y(t_j). \quad (8.2.2)$$

Поскольку в данном случае нас интересует только влияние ошибки измерения, будем считать, что число реализаций достаточно велико, так что статистические характеристики рассматриваемых процессов практически не отличаются от соответствующих истинных значений. Тогда (8.2.2) можно записать в виде

$$\hat{m}_z(t_j) = m_x(t_j) + m_y(t_j), \quad (8.2.3)$$

т. е. ошибка определения оценки математического ожидания равна математическому ожиданию ошибки измерения.

Оценка корреляционной функции, согласно (8.1.6), определится в виде

$$\begin{aligned} \hat{R}_z(t_j, t_i) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [z_i(t_j) - \hat{m}_z(t_j)][z_i(t_i) - \hat{m}_z(t_i)] = \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [x_i(t_j) + y_i(t_j) - m_x(t_j) - m_y(t_j)] \times \\ &\quad \times [x_i(t_i) + y_i(t_i) - m_x(t_i) - m_y(t_i)] = \\ &= R_x(t_j, t_i) + R_y(t_j, t_i) + R_{xy}(t_j, t_i) + R_{yx}(t_j, t_i). \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

В практике гидрометеорологических измерений обычно принимают, что ошибки измерений не связаны с истинными значениями измеряемой величины, ошибки при различных значе-

ниях аргумента не связаны между собой, т. е.

$$R_{xy}(t_j, t_l) = R_{yx}(t_j, t_l) = 0, \quad (8.2.5)$$

$$R_y(t_j, t_l) = \begin{cases} \sigma_y^2(t_j) & \text{при } j=l, \\ 0 & \text{при } j \neq l. \end{cases} \quad (8.2.6)$$

При этом формула (8.2.4) запишется в виде

$$\hat{R}_z(t_j, t_l) = \begin{cases} R_x(t_j, t_l) & \text{при } j \neq l, \\ \sigma_x^2(t_j) + \sigma_y^2(t_j) & \text{при } j=l. \end{cases} \quad (8.2.7)$$

Из формулы (8.2.7) следует, что в рассматриваемом случае ошибки измерения не влияют на оценку корреляционной функции случайного процесса при $t_j \neq t_l$, но завышают оценку дисперсии $\hat{\sigma}_z^2(t_j)$, получающуюся из (8.2.4) при $t_j = t_l$, на величину дисперсии ошибок измерения $\sigma_y^2(t_j)$. Оценка нормированной корреляционной функции, согласно (8.1.8), определится при этом так:

$$\begin{aligned} \hat{r}_z(t_j, t_l) &= \frac{\hat{R}_z(t_j, t_l)}{\hat{\sigma}_z(t_j) \hat{\sigma}_z(t_l)} = \\ &= \frac{R_x(t_j, t_l)}{\sqrt{\sigma_x^2(t_j) + \sigma_y^2(t_j)} \sqrt{\sigma_x^2(t_l) + \sigma_y^2(t_l)}}. \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

Из (8.2.8) видно, что ошибки измерения занижают оценку нормированной корреляционной функции.

Для стационарных случайных процессов $X(t)$, $Y(t)$ корреляционные функции зависят от одного параметра $\tau = |t_2 - t_1|$, а дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 есть постоянные величины, тогда (8.2.8) запишется в виде

$$\hat{r}_z(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \quad (8.2.9)$$

Разделив числитель и знаменатель (8.2.9) на σ_x^2 , получим

$$\hat{r}_z(\tau) = r_x(\tau) \frac{1}{1 + \delta}, \quad (8.2.10)$$

где $r_x(\tau)$ — истинное значение нормированной корреляционной функции, а $\delta = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_y^2}$.

При $\tau \rightarrow 0$ нормированная корреляционная функция стремится к единице, следовательно $\hat{r}_z(\tau) \rightarrow \frac{1}{1 + \delta}$, что и позволяет определить величину δ путем построения графика функции $\hat{r}_z(\tau)$, начиная со значения $\tau = \tau_0$, и экстраполяции ее в точку $\tau = 0$. Если τ_0 малая величина, то экстраполяцию можно произвести графически. Можно это сделать и путем аппроксимации функ-

Следовательно, такая оценка является несмещенной. Определим дисперсию оценки

$$\begin{aligned}\sigma^2[\hat{m}_x] &= M[(\hat{m}_x - m_x)^2] = M\left[\left(\frac{1}{T} \int_0^T X(t) dt - m_x\right)^2\right] = \\ &= M\left\{\frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T [X(t_1) - m_x][X(t_2) - m_x] dt_1 dt_2\right\} = \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T R_x(t_2 - t_1) dt_1 dt_2.\end{aligned}$$

Делая замену переменной $t_2 - t_1 = \tau$ во внутреннем интеграле, получим

$$\sigma^2[\hat{m}_x] = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_{-t_1}^{T-t_1} R_x(\tau) d\tau dt.$$

Меняя порядок интегрирования и интегрируя по переменной t , получим

$$\sigma^2[\hat{m}_x] = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) R_x(\tau) d\tau. \quad (8.3.6)$$

Из (8.3.6) видно, что средний квадрат ошибки $\eta^2[\hat{m}_x]$ совпадает с дисперсией оценки $\sigma^2[\hat{m}_x]$ математического ожидания и зависит от интервала осреднения и вида корреляционной функции.

Например, для случайного процесса $X(t)$, имеющего корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = D_x e^{-\alpha|\tau|}, \quad \alpha > 0, \quad (8.3.7)$$

$$\sigma^2[\hat{m}_x] = \frac{2D_x}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) e^{-\alpha\tau} d\tau = \frac{2D_x}{\alpha T} \left[1 - \frac{1}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha T})\right]. \quad (8.3.8)$$

Отсюда видно, что величина $\sigma^2[\hat{m}_x]$ зависит от произведения αT . При больших значениях αT справедлива асимптотическая формула

$$\sigma^2[\hat{m}_x] \approx \frac{2D_x}{\alpha T} \quad (8.3.9)$$

или

$$\frac{\sigma[\hat{m}_x]}{\sqrt{D_x}} \approx \sqrt{\frac{2}{\alpha T}}. \quad (8.3.10)$$

Формула (8.3.10) показывает, что относительный вес дисперсии ошибок определения оценки математического ожидания случайного процесса обратно пропорционален корню квадратному из значения интервала осреднения T . Из (8.3.10) можно найти необходимую длительность интервала осреднения T , задаваясь

допустимой относительной погрешностью $\frac{\sigma[\hat{m}_x]}{\sqrt{D_x}}$ при данном значении α . Из формулы (8.3.6) видно, что при $T \rightarrow \infty$ дисперсия оценки $\sigma^2[\hat{m}_x]$ стремится к нулю, следовательно оценка (8.3.5) является состоятельной.

Оценка корреляционной функции

Для оценки автокорреляционной функции стационарного случайного процесса $X(t)$, обладающего эргодическим свойством по одной реализации $x(t)$, заданной на промежутке $[0, T]$, можно использовать формулу

$$\hat{R}_x(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [x(t) - \hat{m}_x][x(t+\tau) - \hat{m}_x] dt. \quad (8.3.11)$$

Для оценки взаимной корреляционной функции $\hat{R}_{xy}(\tau)$ двух стационарных и стационарно связанных случайных процессов в этой формуле нужно заменить второй сомножитель подынтегральной функции выражением $y(t+\tau) - \hat{m}_y$. Поэтому все дальнейшие рассуждения об оценке автокорреляционной функции будут справедливы при указанной замене и для взаимных корреляционных функций.

Поскольку мы не имеем истинного значения математического ожидания, то в (8.3.11) придется использовать его оценку.

Определим смещение оценки (8.3.11):

$$\begin{aligned} b[\hat{R}_x(\tau)] &= R_x(\tau) - M[\hat{R}_x(\tau)] = R_x(\tau) - \\ &- M \left\{ \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} [X(t) - \hat{m}_x][X(t+\tau) - \hat{m}_x] dt \right\} = \\ &= R_x(\tau) - R_x(\tau) + \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} M \{ (\hat{m}_x - m_x)[X(t+\tau) - m_x] \} dt - \\ &- \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} M \{ (\hat{m}_x - m_x)[X(t) - m_x] \} dt + \\ &+ \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} M [(\hat{m}_x - m_x)^2] dt. \quad (8.3.12) \end{aligned}$$

Подставляя в (8.3.12) оценку (8.3.5) математического ожидания \hat{m}_x , после преобразований получим

$$\begin{aligned} b[\hat{R}_x(\tau)] &= \frac{1}{(T-\tau)T} \int_0^T (T+\tau-2\tau_1)[R_x(\tau_1) + R_x(\tau_1-\tau)] \times \\ &\times d\tau_1 - \frac{2}{(T-\tau)T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau_1}{T}\right) [\tau R_x(\tau_1) + T R_x(\tau_1-\tau)] d\tau_1. \quad (8.3.13) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что оценка корреляционной функции (8.3.11) не является несмещенной.

При $\tau = 0$ из (8.3.13) получаем смещение оценки дисперсии, вычисляемой по формуле (8.3.11) при $\tau = 0$.

$$b[\hat{D}_x] = -\frac{2}{T^2} \int_0^T (T - \tau) R_x(\tau) d\tau. \quad (8.3.14)$$

Из (8.3.13) и (8.3.14) видно, что величины $b[\hat{R}_x(\tau)]$ и $b[\hat{D}_x]$ при больших значениях интервала осреднения имеют порядок $1/T$ и, следовательно, при $T \rightarrow \infty$ смещение оценок стремится к нулю, т. е. эти оценки являются асимптотически несмещенными.

Из формулы (8.3.12) следует, что смещение оценки вызвано тем, что в качестве математического ожидания m_x принята его оценка \hat{m}_x . Во все слагаемые (8.3.12), вызывающие смещение оценки, входит множитель $\hat{m}_x - m_x$. Отсюда видно, что для случая, когда математическое ожидание m_x случайного процесса известно точно, либо для центрированного случайного процесса, когда $m_x = 0$, оценка корреляционной функции (8.3.11) является несмещенной.

Определим дисперсию оценки корреляционной функции (8.3.11). При этом для упрощения выкладок будем рассматривать центрированный случайный процесс. Тогда оценка является несмещенной и дисперсия ее равна среднему квадрату ошибки

$$\begin{aligned} \sigma^2[\hat{R}_x(\tau)] &= M\{[\hat{R}_x(\tau) - R_x(\tau)]^2\} = M[\hat{R}_x^2(\tau)] - \\ &- R_x^2(\tau) = \frac{1}{(T - \tau)^2} \int_0^{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \{M[X(t_1)X(t_1 + \tau)X(t_2)X(t_2 + \tau)] - \\ &- R_x^2(\tau)\} dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

В выражение (8.3.15) входит момент четвертого порядка. Для наиболее часто встречающихся нормально распределенных случайных процессов он выражается в виде

$$\begin{aligned} M[X(t_1)X(t_1 + \tau)X(t_2)X(t_2 + \tau)] &= R_x^2(\tau) + \\ &+ R_x^2(t_1 - t_2) + R_x(t_1 - t_2 + \tau)R_x(t_1 - t_2 - \tau). \end{aligned} \quad (8.3.16)$$

Подставляя (8.3.16) в (8.3.15), делая подстановку $t_1 - t_2 = t$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} \sigma^2[\hat{R}_x(\tau)] &= \frac{2}{(T - \tau)^2} \int_0^{T-\tau} \left(1 - \frac{t}{T - \tau}\right) [R_x^2(t) + \\ &+ R_x(t + \tau)R_x(t - \tau)] dt. \end{aligned} \quad (8.3.17)$$

При условии сходимости несобственного интеграла

$$\int_0^{\infty} [R_x^2(t) + R_x(t + \tau) R_x(t - \tau)] dt$$

дисперсия оценки корреляционной функции $\sigma^2[\hat{R}_x(\tau)]$ стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$. Отсюда видно, что оценка (8.3.11) является состоятельной.

Для больших значений T получаем приближенную формулу

$$\sigma^2[\hat{R}_x(\tau)] \approx \frac{2}{T - \tau} \int_0^{\infty} [R_x^2(t) + R_x(t + \tau) R_x(t - \tau)] dt. \quad (8.3.18)$$

Пользуясь формулой (8.3.18), можно получить значение $\sigma^2[\hat{R}_x(\tau)]$ для случайной функции, имеющей корреляционную функцию вида (8.3.7):

$$\sigma^2[\hat{R}_x(\tau)] \approx \frac{D_x}{\alpha(T - \tau)} [1 + (1 + 2\alpha\tau) e^{-2\alpha\tau}]. \quad (8.3.19)$$

В частности, при $\tau = 0$ получаем приближенную формулу для дисперсии оценок

$$\sigma^2[\hat{D}_x] \approx \frac{D_x}{\alpha T}. \quad (8.3.20)$$

Из формулы (8.3.20) видно, что $\sigma[\hat{D}_x]$ обратно пропорционально корню квадратному из интервала осреднения T . При этом дисперсия оценки пропорциональна интервалу корреляции $1/\alpha$, т. е. дисперсия оценки тем меньше, чем быстрее затухает автокорреляционная функция. Из (8.3.19) следует, что дисперсия оценок корреляционной функции при данном интервале осреднения T увеличивается с ростом τ . По формуле (8.3.19) можно определить допустимое соотношение между T и τ , при котором увеличение дисперсии оценки не превышает заданного значения.

Влияние дискретности наблюдений

Как уже отмечалось при использовании данных гидрометеорологических наблюдений мы не всегда располагаем непрерывной записью реализации случайной функции, а имеем лишь ее значения при дискретных значениях аргументов. Но даже и в случае непрерывной записи реализации мы обычно не имеем ее аналитического выражения. При статистической обработке такой реализации обычно разбивают весь промежуток $[0, T]$ записи реализации на n равных частей длины Δt и снимают значения реализации в точках $t_j = j\Delta t$ ($j = 1, 2, \dots, n$). При этом в формулах (8.3.5) и (8.3.11) интегралы заменяют интеграль-

ными суммами, получая выражение

$$\hat{m}_x = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x(j\Delta t), \quad (8.3.21)$$

$$\hat{R}_x(\tau_k) = \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} [x(j\Delta t) - \hat{m}_x][x[(j+k)\Delta t] - \hat{m}_x], \quad (8.3.22)$$

где $\tau_k = k\Delta t$ ($k = 1, 2, \dots, m$)

Если запись реализации является дискретной, то в качестве значений t_j берутся те значения аргумента, при которых зафиксированы значения реализации $x(t)$.

Определим средний квадрат η^2 ошибки оценок математического ожидания и корреляционной функции по формулам (8.3.21) и (8.3.22)

$$\begin{aligned} \eta^2[\hat{m}_x] &= M \left\{ \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X(t_j) - m_x \right]^2 \right\} = \\ &= \frac{1}{n^2} M \left\{ \left[\sum_{j=1}^n X(t_j) \right]^2 \right\} - \frac{2m_x}{n} \sum_{j=1}^n M[X(t_j)] + \\ &+ m_x^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n M\{[X(t_j) - m_x] \times [X(t_k) - m_x]\} = \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n R_x(t_k - t_j). \end{aligned} \quad (8.3.23)$$

При разбиении интервала осреднения T на n равных частей $t_k = kT/n$, $t_j = jT/n$, следовательно,

$$t_k - t_j = (k - j) \frac{T}{n} = (k - j) \Delta, \quad (8.3.24)$$

где $\Delta = \frac{T}{n}$.

Пользуясь (8.3.24), можно записать (8.3.23) в виде

$$\eta^2[\hat{m}_x] = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n R_x(k - j) \Delta. \quad (8.3.25)$$

По этой формуле, зная корреляционную функцию случайного процесса $R_x(\tau)$, можно оценить значение $\eta^2[\hat{m}_x]$ при выбранном шаге разбиения Δ , а также, задаваясь допустимым значением $\eta^2[\hat{m}_x]$, выбрать соответствующий ей шаг разбиения.

В частности, для корреляционной функции (8.3.7) величина

$\eta^2[\hat{m}_x]$, вычисленная по формуле (8.3.25), равна

$$\eta^2[\hat{m}_x] = D_x \left[\frac{\Delta}{T} + \frac{2\Delta}{T} \frac{1}{e^{\alpha\Delta} - 1} + \frac{2\Delta^2}{T^2} \frac{e^{\alpha\Delta}}{(e^{\alpha\Delta} - 1)^2} (1 - e^{-\alpha T}) \right]. \quad (8.3.26)$$

Отсюда видно, что средний квадрат ошибки оценки математического ожидания зависит от интервала осреднения T и от шага его разбиения Δ при замене определенного интеграла интегральной суммой.

При безграничном уменьшении шага разбиения, т. е. при $\Delta \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) в формуле (8.3.26)

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \eta^2[\hat{m}_x] = \frac{D_x}{\alpha T} \left[1 - \frac{1}{\alpha T} (1 - e^{-\alpha T}) \right]. \quad (8.3.27)$$

Из выражения (8.3.27) видно, что при малых значениях шага разбиения значение $\eta^2[\hat{m}_x]$ уменьшается с ростом αT .

При достаточно малых значениях Δ и достаточно больших значениях αT получаем приближенную формулу

$$\eta^2[\hat{m}_x] \approx \sqrt{\frac{D_x}{\alpha T}}. \quad (8.3.28)$$

Средний квадрат ошибки оценки корреляционной функции, возникающей при замене интеграла интегральной суммой, определится по формуле

$$\begin{aligned} \eta^2[\hat{R}_x(\tau)] &= M \{ [\hat{R}_x(\tau) - R_x(\tau)]^2 \} = \\ &= M \left\{ \frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} [X(t_j) - m_x][X(t_j + k\Delta) - m_x] \right\}. \end{aligned} \quad (8.3.29)$$

Применяя тот же метод упрощения выражения (8.3.29), что и для выражения (8.3.15), от которого (8.3.29) отличается лишь тем, что в нем интегрирование заменено суммированием, получаем приближенную формулу для нормальной случайной функции

$$\begin{aligned} \eta^2[\hat{R}_x(\tau_k)] &\approx \frac{1}{n-k} \left\{ R_x^2(0) + R_x^2(k\Delta) + 2 \sum_{j=1}^n [R_x^2(j\Delta) + \right. \\ &\quad \left. + R_x[(j+k)\Delta] R_x[(j-k)\Delta]] \right\}. \end{aligned} \quad (8.3.30)$$

Эта формула справедлива для достаточно больших значений интервала осреднения T и для тех значений k , для которых корреляционная функция $R_x(k\Delta)$ имеет еще существенное значение.

Для случайного процесса, имеющего корреляционную функцию (8.3.7), величина $\eta^2[\hat{R}_x(\tau_k)]$, вычисленная по (8.3.30), равна

$$\eta^2[\hat{R}_x(\tau_k)] \approx \frac{D_x^2}{n-k} \left\{ \frac{1 + e^{-2\alpha\Delta}}{1 - e^{-2\alpha\Delta}} (1 - e^{-2k\Delta}) + 2ke^{-2\alpha k\Delta} \right\}. \quad (8.3.31)$$

В частности, при $k = 0$ получаем приближенную формулу для среднего квадрата ошибки оценки дисперсии

$$\eta^2 [\hat{D}_x] \approx D_x^2 \frac{2}{n} \frac{1 + e^{-2\alpha\Delta}}{1 - e^{-2\alpha\Delta}}. \quad (8.3.32)$$

Мы рассмотрели статистическую обработку одной реализации. Если имеется не одна реализация случайной функции, а несколько реализаций, полученных при одинаковых условиях, то обработка производится указанным способом по каждой реализации, а полученные оценки характеристик усредняются.

Все приведенные рассуждения относительно оценок стационарного случайного процесса применимы и для оценивания характеристик однородного и изотропного случайного поля, обладающего эргодическим свойством. В качестве примера использования рассмотренной в данном параграфе теории оценивания рассмотрим вопрос определения средней высоты снежного покрова в некотором районе.

Для удовлетворения запросов различных отраслей народного хозяйства на гидрометеорологической сети станций проводятся многочисленные снегосъемки, которые требуют значительных затрат труда большого числа наблюдателей. При этом возникает важный вопрос о рациональном размещении пунктов наблюдения по территории.

Высота снежного покрова от точки к точке на очень значительных расстояниях может существенно различаться. Эти различия в распределении высот снежного покрова по территории обусловлены неравномерным распределением скоростей ветра в приземном слое, рельефом и микрорельефом местности, ориентацией и крутизной склонов, характером подстилающей поверхности и особенностями метеорологического режима.

Указанные факторы, накладываясь друг на друга, создают подчас довольно пеструю и запутанную картину залегания снега. Вследствие этого данные о высоте снежного покрова в отдельной точке не представляют существенного интереса, а необходимо знать величины, осредненные по той или иной площади. Такое осреднение удобно производить, рассматривая высоту снежного покрова в данном районе как случайное плоское поле $H(x, y)$.

Задача заключается в том, чтобы по данным измерений в ряде пунктов на маршруте снегосъемки ограниченной протяженности определить среднее значение высоты снежного покрова в районе существенно большей протяженности. Рассмотрим для простоты случай, когда искомое значение можно получить путем осреднения данных измерений на прямолинейном маршруте.

Пусть на отрезке $[0, L]$ равномерно расположено n точек $x_1 = 0, x_2, \dots, x_n = L$. В этих точках производится измерение высоты снежного покрова $h(x_i)$ и из данных измерений определяется среднее арифметическое \bar{h} , которое принимается в качестве средней высоты снежного покрова в данном районе.

Возникающая при этом задача о точности определения истинного значения искомой величины полностью аналогична задаче о точности определения оценок математического ожидания случайной функции по дискретному ряду ее значений, рассмотренной в данном параграфе. Как указано выше, при этом возникают ошибки двух видов — ошибки вследствие ограниченности интервала $[0, L]$ записи реализации и ошибки вследствие замены интегрального осреднения по всему промежутку $[0, L]$ осреднением по n дискретным точкам x_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Средний квадрат ошибки η_1^2 , возникающей вследствие ограниченности длины интервала записи реализации, определяется формулой (8.3.6), которая для рассматриваемого случая запишется в виде

$$\eta_1^2 = \frac{2}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{l}{L}\right) R_H(l) dl, \quad (8.3.33)$$

где $R_H(l)$ — корреляционная функция высоты снежного покрова.

Средний квадрат ошибки η_2^2 , возникающей вследствие замены интегрального осреднения средним арифметическим значением в n равноотстоящих точках x_i , расстояние между которыми равно Δ , в соответствии с (8.3.25) запишется в виде

$$\eta_2^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n R_H(k-j) \Delta. \quad (8.3.34)$$

При этом можно использовать также структурную функцию $B_H(l)$ предварительно преобразовав формулы (8.3.33) и (8.3.34) с помощью (1.4.20)

$$\eta_1^2 = \frac{B_H(\infty)}{2} - \frac{1}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{l}{L}\right) B_H(l) dl, \quad (8.3.35)$$

$$\eta_2^2 = \frac{B_H(\infty)}{2} - \frac{1}{n^2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n B_H(k-j) \Delta. \quad (8.3.36)$$

Имея корреляционную или структурную функцию и производя расчеты по указанным формулам, можно получить зависимость η_1 и η_2 от длины интервала и числа точек, в которых производятся измерения, а по ним найти оптимальное число точек, в которых следует производить замеры высоты снежного покрова, и оптимальное расстояние между этими точками.

Для реализации этой методики требуются данные о структуре поля высоты снежного покрова. Такие данные получены в специальных исследованиях по статистической обработке имеющегося эмпирического материала по различным районам.

В частности определялась пространственная структурная функция $V_H(l)$ высоты снежного покрова. В качестве исходного материала были выбраны данные снегосъемки, выполненной 5 февраля 1957 г. в районе ст. Дубовская (около 3000 измерений высоты снежного покрова). Весь участок снегосъемки был

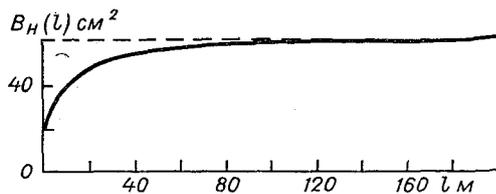


Рис. 8.2

покрыт параллельными промерными линиями, удаленными друг от друга на расстояние 200 м. Всего на участке было проложено 16 промерных линий различной длины — от 1 до 2 км. Высота снежного покрова на промерных линиях измерялась через 10 м. Результаты расчета показали, что значения структурных функций на отдельных промерных линиях существенно отличаются друг от друга.

Разброс полученных структурных функций, по-видимому, с одной стороны, характеризует неоднородный характер распределения высоты снежного покрова по участку, а с другой стороны, вызван погрешностями измерений и малым числом точек измерения.

Для получения более надежной характеристики структуры изучаемого поля все полученные структурные функции осреднились, а полученная осредненная структурная функция была затем сглажена. Сглаженная средняя структурная функция $V_H(l)$ приведена на рис. 8.2.

Полученная структурная функция хорошо описывается формулой

$$V_H(l) = 58,7 - 40,8e^{-0,158l^{2/3}}. \quad (8.3.37)$$

Произведены расчеты погрешностей η_1 и η_2 при подстановке в формулы (8.3.35) и (8.3.36) структурной функции (8.3.37).

На рис. 8.3 представлена средняя квадратическая погрешность η_1 определения средней высоты снежного покрова, возникающая за счет конечности маршрута снегосъемки L . Средняя квадратическая погрешность η_2 , возникающая за счет конеч-

ности числа точек на маршруте снегосъемки, показана на рис. 8.4.

Задавшись точностью определения средней высоты снежного покрова, по рис. 8.3 можно определить требуемую длину маршрута L снегосъемки. При меньшей длине маршрута заданная

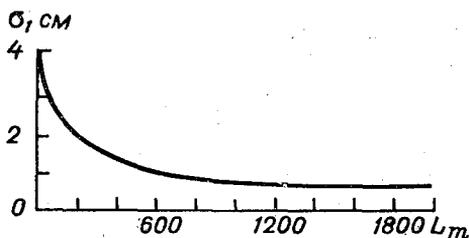


Рис. 8.3

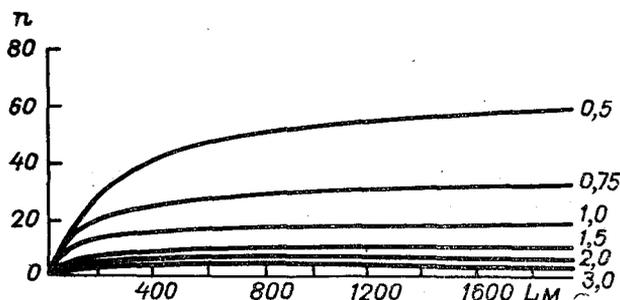


Рис. 8.4

точность не может быть достигнута за счет увеличения числа измерений.

Аналогично по рис. 8.4 можно определить требуемое число точек измерения n . При меньшем числе точек заданную точность нельзя обеспечить путем увеличения маршрута снегосъемки.

8.4. Оценка спектральной плотности

Спектральная плотность стационарного случайного процесса или однородного изотропного поля может быть определена как преобразование Фурье от соответствующей корреляционной функции. При этом необходимо знать корреляционную функцию на всем бесконечном интервале изменения ее аргумента. При определении характеристик случайной функции по экспериментальным данным мы имеем реализации случайной функции, зафиксированные на некотором конечном интервале изменения их аргумента, следовательно, и корреляционную функцию можем

получить лишь для конечного интервала. При этом, как было показано выше, мы не имеем истинного значения корреляционной функции, а можем оперировать лишь с ее оценкой, значение которой может существенно отличаться от истинной корреляционной функции. Возникает вопрос о получении по ней оценки спектральной плотности, которая удовлетворяла бы основным требованиям статистических оценок, т. е. была бы состоятельной, несмещенной и эффективной.

При определении оценки спектральной плотности случайного процесса проще всего, казалось бы, воспользоваться формулой (3.2.3), заменив в ней бесконечные пределы интегрирования конечными значениями, равными наибольшему значению аргумента $\tau = T$, при котором имеется оценка корреляционной функции. Это равносильно тому, что мы заменили истинную корреляционную функцию $R(\tau)$ ее оценкой $\hat{R}(\tau)$ на промежутке $[-T, T]$, а вне этого промежутка положили $R(\tau) = 0$. Однако, показано, что оценка спектральной плотности вида

$$\hat{S}_1(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \hat{R}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (8.4.1)$$

не является состоятельной, так как дисперсия этой оценки не стремится к нулю при стремлении T к бесконечности. Оценки (8.4.1) могут существенно колебаться, причем разброс их не уменьшается с увеличением интервала T . Вследствие этого такая оценка не дает надежной информации об истинной спектральной плотности.

К лучшим оценкам спектральной плотности приводят методы, основанные на предварительном сглаживании корреляционной функции.

Рассмотрим функцию $\hat{R}(\tau)$, равную истинному значению корреляционной функции $R(\tau)$ при $|\tau| \leq \tau_m$ и равную нулю при $|\tau| > \tau_m$. Эту функцию можно рассматривать как произведение функции $R(\tau)$ на функцию $\lambda(\tau)$

$$\hat{R}(\tau) = \lambda(\tau) R(\tau), \quad (8.4.2)$$

где

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \quad (8.4.3)$$

Функция $\hat{R}(\tau)$ задана на всей вещественной оси. Найдем преобразование Фурье от нее и примем его за оценку $\hat{S}(\omega)$ спектральной плотности $S(\omega)$, т. е. определим $\hat{S}(\omega)$ по формуле

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \hat{R}(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \lambda(\tau) R(\tau) d\tau. \quad (8.4.4)$$

Обозначим через $S(\omega)$ истинную спектральную плотность случайного процесса, т. е. преобразование Фурье истинной корреляционной функции $R(\tau)$, а через $Q(\omega)$ преобразование Фурье, т. е. спектр функции $\lambda(\tau)$

$$Q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \lambda(\tau) d\tau. \quad (8.4.5)$$

В силу (8.4.4), произведение $\lambda(\tau)R(\tau)$ есть преобразование Фурье функции $\hat{S}(\omega)$

$$\lambda(\tau)R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \hat{S}(\omega) d\omega. \quad (8.4.6)$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \lambda(\tau)R(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_1\tau} S(\omega_1) d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_2\tau} Q(\omega_2) d\omega_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1+\omega_2)\tau} Q(\omega_2) d\omega_2 \right] d\omega_1. \end{aligned}$$

Делая во внутреннем интеграле замену $\omega_1 + \omega_2 = \omega$ и меняя порядок интегрирования, получим

$$\lambda(\tau)R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega\tau} \left[\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1) Q(\omega - \omega_1) d\omega_1 \right] d\omega. \quad (8.4.7)$$

Сравнивая (8.4.6) и (8.4.7), устанавливаем связь между истинной спектральной плотностью $S(\omega)$ и приближенным ее значением (8.4.4)

$$\hat{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega_1) Q(\omega - \omega_1) d\omega_1. \quad (8.4.8)$$

Отсюда видно, что $\hat{S}(\omega)$ представляет собой значение истинной спектральной плотности $S(\omega)$, осредненное по всему интервалу частот с весовой функцией $Q(\omega)$.

Для функции $\lambda(\tau)$ вида (8.4.3) спектр $Q(\omega)$ определится в виде

$$Q(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_m}^{\tau_m} e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{\sin \omega\tau_m}{\pi\omega}. \quad (8.4.9)$$

Таким образом, используя при определении спектральной плотности в качестве оценки корреляционной функции произведение вида (8.4.2), мы получаем не истинную спектральную

плотность $S(\omega)$, а ее значение, сглаженное с помощью весовой функции, представляющей собой спектр функции $\lambda(\tau)$. При этом способ сглаживания определяется выбором функции $\lambda(\tau)$. Отсюда возникает идея такого подбора функции $\lambda(\tau)$, чтобы сглаживание (8.4.8) было наилучшим, т. е. давало значение $\hat{S}(\omega)$, наиболее близкое к истинному значению $S(\omega)$.

Таким образом, задачу определения спектральной плотности можно сформулировать в следующем виде. Пусть имеется оценка корреляционной функции $\hat{R}(\tau)$ при $|\tau| \leq T$, будем искать оценку спектральной плотности $\hat{S}(\omega)$ по формуле

$$\hat{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_m}^{\tau_m} e^{-i\omega\tau} \lambda(\tau) \hat{R}(\tau) d\tau, \quad (8.4.10)$$

подбирая функцию $\lambda(\tau)$ и значение τ_m так, чтобы удовлетворить некоторому критерию оптимальности. Функцию $\lambda(\tau)$ называют сглаживающей весовой функцией, а значение τ_m — точкой среза корреляционной функции.

Смысл функции $\lambda(\tau)$ состоит в том, что с ее помощью происходит сглаживание оценки корреляционной функции, по которой определяется спектральная плотность. Выбор сглаживающей функции $\lambda(\tau)$ соответствует сглаживанию истинного спектра случайного процесса вида (8.4.8) с весовой функцией, представляющей собой спектр функции $\lambda(\tau)$.

В качестве критерия для оценки величины $\hat{S}(\omega)$ и выбора оптимальной сглаживающей функции $\lambda(\tau)$ можно принять среднюю квадратическую ошибку $\eta[\hat{S}(\omega)]$, определяемую по формуле

$$\eta^2[\hat{S}(\omega)] = M \{[\hat{S}(\omega) - S(\omega)]^2\} = \sigma^2[\hat{S}(\omega)] + b^2[\hat{S}(\omega)]. \quad (8.4.11)$$

В этой формуле величина

$$\sigma^2[\hat{S}(\omega)] = M \{[\hat{S}(\omega) - M[\hat{S}(\omega)]]^2\} \quad (8.4.12)$$

представляет собой дисперсию значений $\hat{S}(\omega)$ и характеризует разброс оценок спектральной плотности около их математического ожидания.

Величина

$$b[\hat{S}(\omega)] = M[\hat{S}(\omega)] - S(\omega) \quad (8.4.13)$$

называется смещением и характеризует отклонение математического ожидания оценок $\hat{S}(\omega)$ от истинного значения $S(\omega)$. Смещение характеризует наличие систематической ошибки, вследствие которой значения $\hat{S}(\omega)$ будут группироваться не около истинного значения $S(\omega)$, а около некоторого значения $M[\hat{S}(\omega)]$.

Другим критерием, при помощи которого можно оценить точность определения величины $\hat{S}(\omega)$ и выбрать оптимальную сглаживающую функцию $\lambda(\tau)$, является интегральная средняя квадратическая ошибка

$$I[\hat{S}(\omega)] = M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{S}(\omega) - S(\omega)]^2 d\omega \right\}. \quad (8.4.14)$$

Задача подбора оптимальной сглаживающей функции состоит в том, чтобы при заданном значении длины интервала T подобрать такую функцию $\lambda(\tau)$, которая обращала бы в минимум значение выбранного критерия оценки. Решение этой задачи существенно зависит от вида истинной корреляционной функции $R(\tau)$.

Получено решение этой задачи по отношению к критерию (8.4.14) для двух видов корреляционных функций $R(\tau)$.

Первый из них представляет собой класс корреляционных функций экспоненциально убывающих с коэффициентом $\rho > 0$, т. е. таких, для которых выполняется неравенство $|R(\tau)| \leq R_0 e^{-\rho|\tau|}$, где R_0 — некоторая константа.

Показано, что для таких корреляционных функций оптимальными являются сглаживающие функции вида

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{1+|u|}, \quad \lambda(\tau) = \begin{cases} 1 - |u| & \text{при } |u| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |u| > 1, \end{cases}$$

$$\lambda(\tau) = \frac{\sin u}{u},$$

(через u обозначено τ/τ_m), а также и некоторые другие функции.

Второй вид корреляционных функций, представляет собой класс алгебраически убывающих функций, т. е. таких, которые при больших значениях τ имеют вид τ^{-r} , где $r < 1$. Для функций такого вида оптимальными весовыми функциями, обращающимися в минимум интегральную среднюю квадратическую ошибку, могут служить функции вида

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{1 + Bu^{2r}},$$

где константа B выражается через истинную корреляционную функцию $R(\tau)$.

Оптимальная весовая функция $\lambda(\tau)$, обращающая в минимум интегральную среднюю квадратическую ошибку (8.4.14), имеет вид

$$\lambda(\tau) = \frac{R^2(\tau)}{R^2(\tau) + D[\hat{R}(\tau)]}. \quad (8.4.15)$$

Это показывает, что оптимальная сглаживающая функция зависит от истинной корреляционной функции исследуемого случайного процесса и, следовательно, не существует единой сглаживающей функции, пригодной для всех случайных процессов.

Кроме того, поскольку при экспериментальном определении статистических характеристик случайного процесса истинная корреляционная функция неизвестна, а имеется лишь приближенная ее оценка, то нельзя непосредственно воспользоваться выведенными формулами для определения функции $\lambda(\tau)$. Эти формулы можно использовать лишь как ориентировочные при выборе конкретного вида сглаживающей функции в формуле (8.4.10).

В настоящее время различными авторами предложен ряд частных видов сглаживающих функций, обладающих различными свойствами. Рассмотрим наиболее употребительные из этих функций.

1. Функция Барлетта

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \quad (8.4.16)$$

2. Модифицированная функция Барлетта

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{\tau_m} & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \quad (8.4.17)$$

3. Функция Тьюки

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 - 2a + 2a \cos \frac{\pi\tau}{\tau_m} & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \quad (8.4.18)$$

Тьюки предложил брать коэффициент $a = 0,23$, не указав причину такого выбора значения. Парзен показал, что оптимальным, согласно критерию (8.4.14), является значение $a = 0,25$.

4. Функция Хеннинга

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 0,5 \left(1 - \cos \frac{\pi\tau}{\tau_m} \right) & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \quad (8.4.19)$$

5. Функция Парзена

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{|\tau|}{\tau_m} \right)^q & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_m \end{cases} \quad (8.4.20)$$

для $q > 1$. В частности, Парзен рассматривал эту функцию при $q = 2$.

6. Функции вида

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \left(\frac{|\tau|}{\tau_m}\right)^q} & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \quad (8.4.21)$$

тоже рассмотренные Парзенем для значений $q = 1$ и $q = 2$.

7. Функция Хемминга

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi\tau}{\tau_m} & \text{при } |\tau| \leq \tau_m, \\ 0 & \text{при } |\tau| > \tau_m. \end{cases} \quad (8.4.22)$$

Все предложенные сглаживающие функции являются наилучшими с точки зрения оптимизации какого-либо из желательных свойств получаемой с их помощью оценки значения спектральной плотности.

При определении оценки спектральной плотности по формуле (8.4.10) с выбранной сглаживающей функцией $\lambda(\tau)$ полученное значение будет существенно зависеть от выбора τ_m . Выбор точки среза корреляционной функции τ_m будет вызывать смещение оценки спектральной плотности при малых значениях τ_m и существенно увеличивать дисперсию оценки при больших τ_m .

Действительно, при малых значениях τ_m в формуле (8.4.10) используют оценку корреляционной функции, не очень отличающуюся от истинного ее значения, полагая ее равной нулю при значении $|\tau| > \tau_m$, при которых корреляционная функция может существенно отличаться от нуля. Тем самым мы допускаем систематическую ошибку, вызывающую смещение оценки.

Увеличение τ_m приводит к уменьшению этой систематической ошибки, однако при этом в формуле (8.4.10) используют оценку $\hat{R}(\tau)$, которая при больших τ может существенно отличаться от истинного значения $R(\tau)$. Вследствие этого увеличивается дисперсия оценок $\hat{S}(\omega)$, особенно при небольшом интервале записи реализации случайного процесса T . Например, для сглаживающей функции (8.4.2) спектр $Q(\omega)$ (8.4.9) в основном сосредоточен в диапазоне частот $(-\pi/\tau_m, \pi/\tau_m)$ и, следовательно, сглаживание спектральной плотности, согласно (8.4.8), осуществляется в полосе частот шириной $2\pi/\tau_m$. При малом значении τ_m эта полоса будет широкой, вследствие чего оценка спектральной плотности при таком сглаживании будет существенно искажаться, так как будут сглаживаться пики спектральной плотности. С увеличением значения τ_m ширина полосы сглаживания будет уменьшаться, а, следовательно, будут менее сказываться искажения, вызываемые сглаживанием, т. е. все больше будут проявляться пики спектральной плотности. Однако при этом

все больше начнут проявляться искажения за счет отличия оценки корреляционной функции от ее истинного значения.

Желание выбрать величину τ_m , минимизирующую как смещение оценки спектральной плотности, так и дисперсию этой оценки, приводит к необходимости удовлетворения двух противоречивых требований.

До сих пор мы рассматривали оценку спектральной плотности, получающуюся путем преобразования Фурье сглаженной оценки корреляционной функции по формуле (8.4.10). Однако может быть применен и другой метод. Пусть имеется реализация $x(t)$ стационарного эргодического процесса $X(t)$, заданная на промежутке $[0, T]$.

Рассмотрим величину

$$\hat{S}_1(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T x(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2, \quad (8.4.23)$$

которую называют выборочным спектром или периодограммой, она получается посредством преобразования Фурье самой реализации. Если реализация задана в дискретных точках, то заменяя интеграл суммой получим

$$\hat{S}_1(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \sum_{t=1}^T x(t) e^{-i\omega t} \right|^2.$$

Периодограмма не является состоятельной оценкой спектральной плотности, так как ее дисперсия не стремится к нулю при $T \rightarrow \infty$. При больших значениях T периодограмма носит крайне нерегулярный характер, ее значения резко изменяются при незначительных изменениях аргумента. Для получения состоятельной оценки нужно провести сглаживание периодограммы по формуле

$$\hat{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(\omega) Q(\omega - \omega_1) d\omega_1, \quad (8.4.24)$$

выбрав сглаживающую функцию $Q(\omega)$ такой, чтобы оценка получалась состоятельной.

Таким образом при втором способе оценивания спектральной плотности выполняется преобразование Фурье самой реализации случайного процесса, строится периодограмма, которая затем усредняется по частоте.

При этом, сравнивая (8.4.24) и (8.4.8), мы видим, что, если в качестве функции $Q(\omega)$ взят спектр весовой функции $\lambda(\tau)$, по которой сглаживалась корреляционная функция при первом способе оценивания спектральной плотности, то при втором способе получится та же оценка.

Часто в литературе сглаживающую функцию $\lambda(\tau)$ называют корреляционным окном, а ее преобразование Фурье $Q(\omega)$ — спектральным окном.

Оба рассмотренных способа оценивания дают один и тот же результат, однако сопровождаются различными вычислительными трудностями. Практическое использование описанных методов оценки спектральной плотности определяется трудоемкостью необходимых для этого вычислений.

С появлением и широким распространением универсальных цифровых вычислительных машин основными методами стали численные методы оценивания спектральной плотности с использованием ЭВМ. При этом на начальном этапе предпочтение отдавалось первому методу, основанному на осреднении корреляционной функции, так как обычные методы вычисления преобразования Фурье ряда из T чисел при большом T оказывались весьма трудоемким и требовало большого машинного времени.

Однако появление во второй половине 60-х годов так называемого быстрого преобразования Фурье привело к тому, что второй способ оценивания спектральной плотности посредством сглаживания коррелограмм с использованием спектрального окна оказался более рациональным. Метод быстрого преобразования Фурье подробно излагается в общем курсе приближенных вычислений. В настоящее время построены алгоритмы этого метода и программы его реализации на ЭВМ. С применением этого метода резко сократилось машинное время, требуемое для вычисления периодограммы и ее осреднения даже при большом T . В настоящее время этот метод широко распространен в прикладном спектральном анализе.

Другим методом оценивания спектральной плотности, который находит все более широкое применение в настоящее время, является метод основанный на построении стохастических моделей описания случайных процессов, изложенный в главе 7.

Рассмотрим методику определения спектральной плотности на примере нахождения спектра морских волн.

Спектральная теория стационарных случайных процессов в настоящее время широко используется при анализе морских волн. При этом колебания уровня моря в фиксированной точке рассматривают как случайную функцию времени. Экспериментальные исследования ветровых волн показывают, что случайную функцию $Z(t)$, описывающую вертикальные колебания уровня во времени в фиксированной точке относительно среднего уровня, с известной степенью приближения можно рассматривать как квазистационарный случайный процесс, обладающий эргодическим свойством.

Допускается, что каждую реализацию можно разделить на участки стационарности, в пределах которых вероятностные характеристики остаются неизменными, а при переходе от одного участка стационарности к другому вероятностные характеристики меняются скачками. Квазистационарность реального волнения, а также технические трудности выполнения продолжительных измерений волн приводят к тому, что для определения статистических характеристик приходится использовать лишь одну или небольшое число реализации ограниченной продолжительности.

В соответствии с принятой гипотезой эргодичности оценку корреляционной функции $\hat{R}(\tau)$ по одной реализации продолжительности T определяют по формуле (8.3.11).

Анализ записей установившегося ветрового волнения в океанах, морях и водохранилищах показал, что корреляционные функции ветровых волн можно аппроксимировать выражением вида

$$R_z(\tau) = D e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta\tau. \quad (8.4.25)$$

При выбранном типе корреляционной функции спектральная плотность определяется по формуле (8.4.10). Для анализа влияния величины τ_m выберем сначала в качестве сглаживающей функции $\lambda(\tau)$ функцию Бартлетта (8.4.16). При этом формула (8.4.10) для вещественного случайного процесса $Z(t)$ может быть записана в виде

$$\hat{S}_z(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau_m} R_z(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau. \quad (8.4.26)$$

Подставив в (8.4.26) корреляционную функцию (8.4.25) и выполнив интегрирование, получим

$$\begin{aligned} \hat{S}_z(\omega) = & \frac{D\alpha}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} + \frac{1}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} \right] + \\ & + \frac{D e^{-\alpha\tau_m}}{2\pi} \left\{ \frac{-\alpha \cos(\beta + \omega)\tau_m + (\beta + \omega) \sin(\beta + \omega)\tau_m}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{-\alpha \cos(\beta - \omega)\tau_m + (\beta - \omega) \sin(\beta - \omega)\tau_m}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} \right\}. \quad (8.4.27) \end{aligned}$$

Сравнивая с (3.2.26) видим, что первое слагаемое (8.4.27) есть истинная спектральная плотность, соответствующая корреляционной функции (8.4.25). Следовательно, второе слагаемое представляет собой систематическое смещение величины $\hat{S}(\omega)$. Это смещение, как видно из (8.4.27), уменьшается с увеличением τ_m . Таким образом, если корреляционная функция определена без ошибок, то τ_m должно быть таким, чтобы выражение в фигурных скобках в формуле (8.4.27) не оказывало существенного влияния на величину $\hat{S}(\omega)$.

Однако при ограниченном интервале стационарности процесса T оценка корреляционной функции может существенно отличаться от истинного ее значения, вследствие чего будет наблюдаться большой разброс оценок спектральной плотности $\hat{S}(\omega)$ при выборе большего значения τ_m . Согласование этих противоречивых требований может быть произведено путем варьирования параметров T и τ_m , если интервал стационарности случайного процесса достаточно большой. Если же интервал стационарности процесса не позволяет значительно увеличивать продолжительность реализации, то существенное значение имеет выбор сглаживающей функции $\lambda(\tau)$.

8.5. Оценки характеристик периодически коррелированных случайных процессов

Для периодически коррелированных случайных процессов (ПКСП), обладающих эргодическим свойством, возможны два подхода к оцениванию вероятностных характеристик по одной реализации ограниченной продолжительности.

Когерентный метод исходит из того, что отсчеты значений ПКСП $\hat{X}(t)$ через период коррелированности при любом начале отсчета $t \in [0, T]$ образуют стационарную эргодическую случайную последовательность $\hat{X}(t + kT)$. Пусть длина исходной реализации $\theta = NT$, тогда оценка $m^*(t)$ математического ожидания $m(t)$ может быть записана в виде

$$m^*(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}(t + kT), \quad (8.5.1)$$

а оценка $R^*(t, \tau)$ корреляционной функции $R(t, \tau)$ в виде

$$R^*(t, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{X}^\circ(t + kT) \hat{X}^\circ(t + \tau + kT), \quad (8.5.2)$$

где

$$\hat{X}^\circ(t) = \hat{X}(t) - m^*(t). \quad (8.5.3)$$

Компонентный метод исходит из того, что характеристики $m(t)$ и $R(t, \tau)$ являются периодическими функциями времени и могут быть представлены в виде отрезков ряда Фурье. Коэффициенты m_k и $k_k(\tau)$ этих разложений вычисляются по формулам

$$m_k = \frac{1}{T} \int_0^T m(t) \exp\left(-ik \frac{2\pi}{T} t\right) dt; \quad (8.5.4)$$

$$k_k(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T R(t, \tau) \exp\left(-ik \frac{2\pi}{T} t\right) dt. \quad (8.5.5)$$

Оценки этих «компонент» могут быть вычислены по исходной реализации как

$$m_k^* = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \xi(t) \exp\left(-ik \frac{2\pi}{T} t\right) dt; \quad (8.5.6)$$

$$k_k^*(\tau) = \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \hat{X}(t + \tau) \hat{X}(t) \exp\left(-ik \frac{2\pi}{T} t\right) dt. \quad (8.5.7)$$

Теоретически оба метода эквивалентны, так как все операции линейны и поэтому их порядок безразличен. Однако, из-за различия свойств статистических оценок и различий в характерных свойствах исследуемых процессов, оценки $m(t)$ и $R(t, \tau)$, а также m_k и $k_k(\tau)$, вычисленные по компонентному и когерентному методам будут различаться между собой.

Алгебраически более прост когерентный метод. Рассмотрим на его примере свойства оценок $m^*(t)$ и $R^*(t, \tau)$.

Математическое ожидание статистики (8.5.1) равно оцениваемой величине

$$M\{m^*(t)\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k-1} m(t + kT) = m(t). \quad (8.5.8)$$

Поэтому оценка (8.5.1) будет несмещенной
Дисперсия оценки (8.5.1) равна

$$\begin{aligned} D_{m^*}(t) &= M\{m^*(t) - M\{m^*(t)\}\}^2 = \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} M\{X(t + kT) X(t + lT)\} - \\ &- m^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R(t, kt). \end{aligned} \quad (8.5.9)$$

Из (8.5.9) видно, что по сравнению с дисперсией оценок математического ожидания некоррелированных случайных величин (равных D/N , где D — дисперсия), $D_{m^*}(t)$ больше и тем больше, чем сильнее корреляция. Для изучения годовой ритмики, когда межгодовые корреляционные связи практически мало значимы, можно использовать формулу для независимых случайных величин. Для суточной ритмики, когда межсуточной корреляцией пренебречь нельзя необходимо использовать формулу (8.5.9). Математическое ожидание оценки корреляционной функции (8.5.2) равно

$$\begin{aligned} M\{R^*(t, \tau)\} &= R(t, \tau) - \frac{1}{N} R(t, \tau) - \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} R(t, \tau + kT) + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) R(t, \tau + kT). \end{aligned} \quad (8.5.10)$$

Следовательно, оценка (8.5.2) является смещенной на величину

$$\varepsilon_{k^*} = -\frac{1}{N} \left[R(t, \tau) + \sum_{k=-N+1}^{N-1} \frac{|k|}{N} R(t, \tau + kT) \right]. \quad (8.5.11)$$

Из выражения (8.5.11) видно, что при $N \rightarrow \infty$ оценка $R^*(t, \tau)$ является асимптотически несмещенной. При конечных N величина смещения отлична от нуля, источником смещения $R^*(t, \tau)$ является отличие $m^*(t)$ от $m(t)$ в операции центрирования в (8.5.3). При практических оценочных расчетах вместо выражения (8.5.11) можно пользоваться $D_{m^*}(t)$ со знаком минус.

В предположении, что ПКСП гауссовский и при известном его математическом ожидании дисперсия оценки (8.5.2) равна

$$D_{R^*}(t, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N+1}^{N-1} \left[1 - \frac{|k|}{N} \right] G_{00 \ kk}(t, \tau), \quad (8.5.12)$$

где

$$G_{00 \ kk}(t, \tau) = M \overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t + \tau) \overset{\circ}{X}(t + kT) \overset{\circ}{X}(t + \tau + kT) - \\ - M \{ \overset{\circ}{X}(t) \overset{\circ}{X}(t + \tau) \} M \{ \overset{\circ}{X}(t + kT) \overset{\circ}{X}(t + \tau + kT) \}$$

— четвертый момент распределения, преобразуемый для гауссовских процессов через произведение вторых моментов. Строго рассуждая значения оценок $m^*(t)$ и $R^*(t, \tau)$ будут коррелированными. Однако выражения для корреляционных функций $R_{m^*}(t_1, t_2)$ и $R_{k^*}(t_1, t_2, \tau_1, \tau_2)$ довольно громоздки.

Перейдем к вопросам оценивания спектральных плотностей. Прежде всего отметим, что в качестве оценок частотно-временной спектральной плотности $S(\omega, t)$ и спектральных компонент $S_k(\omega)$ в соответствии с корреляционным методом эмпирического спектрального анализа используются следующие модификации выражения (8.4.10):

$$S^*(\omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_{\max}}^{\tau_{\max}} R^*(t, \tau) \lambda(\tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau; \quad (8.5.13)$$

$$S_k^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\tau_{\max}}^{\tau_{\max}} R_k^*(\tau) \lambda(x) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (8.5.14)$$

Эти оценки являются смещенными, вследствие усечения коррелограмм $R^*(t, \tau)$ и $k_k^*(\tau)$ в точках $\pm \tau_{\max}$, отличия весовых функций $\lambda(\tau)$ от 1 и из-за смещения $\varepsilon_{R^*}(t, \tau)$ и $\varepsilon_{k_k^*}(\tau)$. Дисперсия и корреляционная функция оценок (8.5.13) и (8.5.14) имеет довольно сложное выражение через двойное преобразование Фурье корреляционной функции оценок $R^*(t, \tau)$ и $k_k^*(\tau)$.

Список литературы

1. Бартлетт М. С. Введение в теорию случайных процессов. М., Изд-во иностр. лит., 1958. — 384 с.
2. Бендат Дж., Пирсол А. Измерение и анализ случайных процессов. М., Мир, 1974. — 463 с.
3. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. М., Мир, 1974. — 406 с.
4. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961. — 406 с.
5. Гренджер К., Хатанака М. Спектральный анализ временных рядов в экономике. М., Статистика, 1972. — 312 с.
6. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М., Мир, вып. 1, 1971. — 316 с., вып. 2, 1972. — 287 с.
7. Казакевич Д. И. Основы теории случайных функций и ее применение в гидрометеорологии. Изд. 2-е, Л., Гидрометеиздат, 1977. — 319 с.
8. Картвелишвили Н. А. Теория вероятностных процессов в гидрологии и регулировании речного стока. Л., Гидрометеиздат, 1967. — 291 с.
9. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. М., Наука, 1965. — 639 с.
10. Николаев Ю. В. Преобразование информации в приложении к задачам гидрометеорологии. Л., Гидрометеиздат, 1969. — 64 с.
11. Поляк И. И. Численные методы анализа наблюдений. Л., Гидрометеиздат, 1975. — 211 с.
12. Поляк И. И. Методы анализа случайных процессов и полей в климатологии. Л., Гидрометеиздат, 1979. — 255 с.
13. Рожков В. А. Методы вероятностного анализа океанологических процессов. Л., Гидрометеиздат, 1979. — 280 с.
14. Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., Наука, 1969. — 511 с.
15. Яглом А. М. Корреляционная теория стационарных случайных функций. Л., Гидрометеиздат, 1981. — 279 с.
16. Бelyшев А. П., Клеванцев Ю. П., Рожков В. А. Вероятностный анализ морских течений. Л.: Гидрометеиздат, 1983. — 264 с.
17. Драган Я. П., Рожков В. А., Яворский И. Н. Методы вероятностного анализа ритмики океанических процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1987. — 319 с.

Предметный указатель

А

Алгебра событий (σ -алгебра) 21
Аксиомы теории вероятностей 21
Ансамбль реализаций 20
Асимметрия 11

Б

Белый шум 91, 126
Броуновское движение 127
БПКСП 104

В

Вектор случайный 13
Векторы ортонормированные 144
Величина случайная 7
— — дискретная 7
— — непрерывная 7
— — нормально распределенная 12, 17
— — центрированная 10
Величины случайные коррелированные 16
— — независимые 18
Время корреляции 46, 90

Д

Дельта-функция 121
Дисперсия случайной величины 10
— случайного поля 67
— случайного процесса 26
— — — комплексного 81
— — — стационарного 35
Диффузия турбулентная 20

Е

Естественные ортогональные составляющие 145

З

Закон распределения случайной величины 8
— — — функции 23
— — дифференциальный 8
— — интегральный 8
— — нормальный 12
— — системы случайных величин 13
Значения собственные корреляционной матрицы 145

И

- Инварианты тензора 59
- — корреляционного 59
- — — взаимного 65
- — спектральной плотности 106
- — — — взаимного 109
- Индекс зональной циркуляции 173
- Интеграл от случайного процесса 53
- Интеграл Фурье 79

К

- Когерентность 100
- Коэффициент корреляции 16

М

- Математическое ожидание случайной величины 9
- — случайного поля 67
- — случайного процесса 25
- — — — комплексного 81
- — — — периодически коррелированного 41
- — — — эргодического 45
- Матрица корреляционная 17
- — нормированная 17
- Мера вероятностная 21
- Метод максимального правдоподобия 181
- Модель авторегрессии 175
- — скользящего среднего 175
- — смешанной авторегрессии — скользящего среднего 176
- Момент корреляционный 15
- — начальный случайной величины 9
- — системы случайных величин 74
- — случайной функции 25
- — центральной случайной функции 26

Н

- Непрерывность случайного процесса 48

О

- Оператор линейный 121
- дифференциального уравнения 123
- Определение случайной величины 7
- случайного процесса 19
- Оценка статистическая 191
- дисперсии 193
- корреляционного момента 193
- корреляционной функции 203
- максимального правдоподобия 181
- математического ожидания 201
- несмещенная 192

- ПКСП 221
- состоятельная 192
- спектральной плотности 214
- эффективная 192

П

- Периодограмма 218
- ПКСП 40
- Плотность распределения 8
 - — случайного вектора 13
 - — — поля 66
 - — — процесса 24
 - спектральная 86
 - — взаимная 98
 - — линейного преобразования случайного процесса 124
 - — нормированная 86
- ПНСП 40
- Поле случайное 66
 - — векторное 73
 - — изотропное 69
 - — однородное 69
 - — центрированное 67
- ППКСП 104
- Предел случайного процесса 48
- Преобразование Фурье 80
 - линейное случайных процессов 124
- Произведение множеств 21
- Производная случайного процесса 49
- Пространство элементарных событий 21
- Процесс случайный 22
 - — векторный 56
 - — нестационарный периодически 40
 - — нормальный 182
 - — стационарный 33
 - — центрированный 26
 - узкополосный 90
 - широкополосный 91

Р

- Распределение нормальное 12
- Реализация случайной функции 22

С

- Сглаживание случайного процесса 129
 - корреляционной функции 212
 - спектральной плотности 212
- Сечение случайной функции 22
- Система случайных величин 12
 - — — нормально распределенная 17
 - — процессов 29
- Спектр дискретный 84
 - интегральный 87

Спектр квадратурный 99
— косинус (коспектр) 99
Сумма множеств 21

Т

Тензор корреляционный 62
— спектральный 106

Ф

Фильтрация 129
Функция автокорреляционная 26
— Бартлетта 216
— весовая 122
— корреляционная 26
— — нормированная 27
— — однородного изотропного слоя 69
— — связи (взаимная корреляционная) 30
— — стационарного процесса 35
— Парзена 216
— передаточная 125
— правдоподобия 181
— распределения случайной величины 8
— — случайного вектора 13
— — случайного поля 66
— — случайного процесса 23
— структурная 37
— случайная 19
— — комплексная 81
— Тьюки 216
— Хемминга 217
Функции ортонормированные 144
— собственные 145

Х

Характеристики числовые случайной величины 9
— — случайного вектора 15
— — случайного поля 67
— — случайного процесса 25
— — эргодического случайного поля 69
— — — случайного процесса 44

Э

Экстраполяция случайного процесса 153
Экссесс 11
Эргодическое свойство 43

Оглавление

Предисловие редактора	3
Предисловие автора	5
Введение. Некоторые понятия теории случайных величин	7
Глава 1. Случайные процессы и их вероятностные характеристики	19
1.1. Случайная функция и ее законы распределения	—
1.2. Моментные характеристики случайных процессов	25
1.3. Система случайных процессов, корреляционная функция связи	29
1.4. Стационарные случайные процессы	33
1.5. Периодически нестационарные случайные процессы	40
1.6. Эргодичность случайных процессов	43
1.7. Производная и интеграл от случайного процесса	47
1.8. Векторные случайные процессы	56
Глава 2. Случайное поле	66
2.1. Характеристики случайного поля	—
2.2. Однородное и изотропное случайное поле	68
2.3. Векторное случайное поле	73
Глава 3. Спектральный анализ стационарных случайных процессов и однородных полей	79
3.1. Спектр случайного процесса	—
3.2. Спектральная плотность стационарного случайного процесса	86
3.3. Взаимный спектральный анализ	97
3.4. Спектральный анализ нестационарных процессов	100
3.5. Спектральный тензор векторного процесса	105
3.6. Спектральный анализ однородных случайных полей	115
Глава 4. Линейные преобразования	120
4.1. Преобразование функций линейным оператором	—
4.2. Спектральная плотность линейного преобразования стационарного случайного процесса	124
4.3. Фильтрация случайных процессов	129
4.4. Выделение скрытых периодичностей	133
Глава 5. Разложение случайных процессов и полей на естественные ортогональные составляющие	142
5.1. Постановка задачи	—
5.2. Нахождение естественных ортогональных составляющих	145
Глава 6. Экстраполяция и интерполяция случайных функций	153
6.1. Постановка задачи	—
6.2. Оптимальная линейная экстраполяция (интерполяция) случайной функции, заданной на конечном числе точек	154
6.3. Оптимальная линейная экстраполяция случайного процесса, заданного на бесконечном интервале	157
6.4. Примеры оптимальной линейной экстраполяции гидрометеорологических процессов	171
Глава 7. Параметрические методы исследования случайных процессов	175
7.1. Статистические модели случайных процессов	—
7.2. Идентификация моделей	177

7.3. Оценивание параметров линейной модели	181
7.4. Спектр линейных моделей	184
7.5. Прогнозирование стохастических моделей	186
Глава 8. Определение характеристик случайных функций по эксперимен- тальным данным	190
8.1. Определение характеристик случайной функции осреднением по множеству реализаций	—
8.2. Влияние ошибок в исходных данных	198
8.3. Оценки характеристик стационарных случайных функций, обладающих эргодическим свойством	200
8.4. Оценка спектральной плотности	211
8.5. Оценки характеристик периодически коррелированных слу- чайных процессов	221
Список литературы	224
Предметный указатель	225

Учебное пособие

Давид Ильич Казакевич

**Основы теории случайных функций
в задачах гидрометеорологии**

Редактор С. С. Судакова. Художник Е. Е. Городная. Художественный редактор Б. А. Денисовский. Технический редактор Л. М. Шишкова. Корректор Л. И. Хромова

ИБ № 1928

Сдано в набор 06.12.88. Подписано в печать 30.03.89. М-17566. Формат 60×90^{1/16}. Бумага тип. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 14,5. Кр.-отг. 14,5. Уч.-изд. л. 14,31. Тираж 2100 экз. Индекс МОЛ-140. Заказ № 1261. Цена 80 коп.

Гидрометеоздат, 199226. Ленинград, ул. Беринга, 38.

Отпечатано в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств полиграфии и книжной торговли. 190000, Ленинград, Прачечный переулок, 6. С набора Ленинградской типографии № 2 головного предприятия ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

Готовится к изданию в 1989 году

**монография ПОЛЯКА И. И.
«Многомерные статистические
модели климата».**

В книге рассмотрена теория аппроксимации систем временных рядов линейными моделями. Основное внимание уделяется теоретической интерпретации зависимости точности прогнозов от величин автокорреляций. Кратко рассмотрены нелинейные и нестационарные модели, вопросы идентификации, анализирует статистическая природа наблюдений за климатом. Подведены итоги непараметрического спектрального и корреляционного анализа климатических временных рядов. Построено несколько десятков моделей климата с помощью наиболее полных из существующих аэрологических и приземных температурных архивов. Приводится анализ оценок их параметров.

Книга рассчитана на специалистов, занимающихся построением статистических моделей, климатологов.

Объем 15 л., цена 2 р. 60 к.

Заказы просим направлять по адресу: 197101, Ленинград, Большой пр., д. 57, магазин № 15 «Ленкниги».

ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ