

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Э. Г. ПАЛАГИН, И. А. СЛАВИН

О С Н О В Ы ГИДРОМЕХАНИКИ

*Учебное пособие
для метеорологов*

Ленинградский
Гидрометеорологический ин-т
БИБЛИОТЕКА
Л-д 195196 Малоохтинский пр., 98

ЛЕНИНГРАД
1974

*Одобрено Ученым советом
Ленинградского гидрометеорологического института*

Книга представляет собой учебное пособие по гидромеханике для студентов и инженеров, специализирующихся в области физики атмосферы. В ней представлены все разделы программы соответствующего курса. Специальное внимание уделено примерам, значительная часть которых иллюстрирует значение различных положений гидромеханики для понимания ряда вопросов динамической метеорологии и синоптики.

Редактор *З. Б. Ваксенбург*

М-06632	Подп. к печати 23.12.74 г.	Объем 15,25 п. л.	Зак. 112
Типография ВОК ВМФ	Тираж 1000	Цена 1 руб. 05 коп.	

ОТ АВТОРОВ

Предлагаемое учебное пособие представляет собой переработанный вариант «Курса аэрогидромеханики» И. А. Славина (изд. ЛКВВИА им. А. Ф. Можайского, Л., 1959).

При написании курса авторы исходили из следующих соображений. Гидромеханика — специальная дисциплина. Она является теоретическим фундаментом для изучения динамической метеорологии, гидродинамических прогнозов, общей циркуляции атмосферы и прочих теоретических дисциплин, входящих в программу обучения по специальности метеорология. Все указанные разделы физики атмосферы бурно развивались в последние годы и претерпели качественные изменения в связи с появлением ЭВМ, позволяющих реализовывать принципиально новые идеи и в корне изменившие методику исследования атмосферных процессов. В итоге имеет место очевидный сдвиг в сторону точных количественных методов, значительно возрос удельный вес теоретических дисциплин как основы физического понимания факторов, определяющих состояние атмосферы.

Существующие монографии и курсы по гидромеханике, к сожалению, не могут быть рекомендованы в качестве учебников, ибо излагаемый в них материал либо узко специализирован и не связан с метеорологией, либо по охвату значительно превышает программу, в соответствии с которой обучаются будущие метеорологи. Рекомендовать, в последнем случае для изучения отдельные главы обширных учебников не представляется возможным, ибо теряется последовательность изложения, а следовательно, и возможность понимания.

В то же время, имевшийся до сих пор учебник для гидрометеорологов «Гидродинамика» Кузнецова Д. С., переизданный в 1951 г., по структуре, подбору материала и ориентации общего курса к настоящему моменту уже не отвечает предъявляемым требованиям.

Предыдущее издание «Аэрогидромеханики» основывалось на опыте чтения лекций, рассчитанных исключительно на специалистов по метеорологическому обеспечению авиации. В связи с этим, общая тенденция изложения была подчинена практическим потребностям указанной профессии.

Все эти обстоятельства и вызвали к жизни появление данного пособия, где объединены опыт преподавания гидромеханики как в ЛКВВИА им. А. Ф. Можайского, так и на метеорологическом факультете ЛГМИ. Курс рассчитан на метеорологов, но может быть использован гидрологами и океанологами, ибо часть иллюстративных примеров взята и из этих областей, хотя, конечно, в основном приведены задачи, связанные с метеорологией.

ВВЕДЕНИЕ

ГЛАВА I

ПРЕДМЕТ И МЕТОД ГИДРОМЕХАНИКИ

§ 1. ОБЛАСТЬ ПРИМЕНЕНИИ

1. Предмет гидромеханики. Объектом изучения гидромеханики являются свойства жидких сред, законы их движения и силовое взаимодействие между жидкостью и твердыми телами.

В основу определения понятия жидкости можно положить ее главное свойство, а именно: жидкая среда не оказывает сопротивления деформирующим усилиям. Иначе говоря, любая сколь угодно малая нагрузка приводит к сколь угодно большим деформациям, если усилие действует достаточно длительное время.

Жидкости делятся на капельные и газообразные. Первые — практически несжимаемы и образуют поверхности уровня в поле сил тяжести (например, вода). Вторые изменяют объем при приложении незначительных усилий и всегда стремятся заполнить любое пространство, к которому имеют доступ (атмосферный воздух).

2. Методы гидромеханики. Исследования гидромеханических явлений ведутся как теоретическими методами, так и с помощью эксперимента. При этом в основе вывода всех дифференциальных уравнений лежат фундаментальные физические принципы в виде законов сохранения количества и момента количества движения, энергии и массы. Основные выводы делаются математическими методами. Это относится как к формулировке задач, так и к их решению, при котором используются точные и приближенные методы интегрирования исходных дифференциальных уравнений, описывающих ту или иную рассматриваемую модель. При построении модели реального явления в гидромеханике, как и в других естественных науках, идут по следующему пути: из общего комплекса взаимосвязанных признаков и событий выделяется главное, наиболее существенное для процесса, а все второстепенное из рассмотрения исключается. В итоге создается упрощенная схема, именуемая моделью, которая описывается соответствующими уравнениями и в дальнейшем подвергается количественному анализу. При этом

очевидно, что модель в той или иной степени отклоняется от действительного явления. На первых порах она, ради доступности ее аналитического изучения, выбирается наиболее простой и лишь последующие этапы развития теории вносят в нее все большие и большие приближения к действительности. Поэтому выводы теории, имеющей дело с моделью, должны быть обязательно подвергнуты проверке опытом, практикой. Если данные опыта значительно отклоняются от выводов теории, то теория либо неверна, либо неполна. Если же данные опыта находятся в хорошем согласии с выводами теории, то последняя получает возможность самостоятельно развиваться и может предсказать новые, еще не известные из опыта результаты.

Следует указать, что схематическая модель всегда заключает в себе внутренние противоречия, приводящие к тем или иным отклонениям характеризуемого моделью развития явления от действительных процессов. По мере разработки модели эти противоречия нарастают и в конце концов приводят теорию к явному конфликту с действительными формами явления. Когда этот конфликт захватывает вопросы, относящиеся к существу изучаемого явления доверие к теории падает и возникает необходимость перейти к более совершенной модели путем снятия некоторых приводящих к конфликтам абстракций, дать теории новое качественное оформление.

Эксперимент, эмпирические приемы исследования играют в гидромеханике гораздо большую роль, чем в теоретической механике, например, в механике твердого тела. Это можно объяснить во-первых, большой сложностью и недостаточной изученностью многих явлений, протекающих в жидкостях и газах. Второй причиной является тот факт, что необычайно быстрое развитие геофизических наук и техники вообще ставит много сложных задач, которые не всегда могут быть сразу решены дедуктивными методами. Поэтому в ряде случаев в гидромеханике приходится отказываться от строгой последовательной физико-математической трактовки вопроса, характерной для теоретической механики, и прибегать к помощи различных эмпирических приемов и так называемых «полуэмпирических» теорий, в построении которых большую роль играют отдельные опытные факты.

Эксперимент настолько прочно вошел в научную работу в области механики жидкостей и газов, что здесь важное место занимает теория подобия и метод размерностей, показывающие, как строить опыт, как проводить измерения и, что особенно важно, как обобщать результаты отдельных экспериментов на целые классы явлений.

3. Область применения результатов. Как и всякая наука, гидромеханика вызвана к жизни человеческой практикой, содержание ее отражает потребности этой практики, потребности производства и соответственно потребности других отраслей знания. Укажем

основные задачи, которые ставят перед гидромеханикой некоторые отрасли науки и техники.

а. Метеорология нуждается в знании общих законов движения и равновесия газов, не ограниченных каналами и трубами. По существу современная динамическая метеорология представляет собой механику и термодинамику газа, занимающего большее пространство по площади и в высоту и движущегося со сравнительно небольшой скоростью (порядка скорости ветра). Поэтому в законах равновесия и движения жидкостей и газов динамическая метеорология находит прочный фундамент для построения механической модели атмосферы. Так, статика атмосферы базируется на уравнениях гидростатики, кинематика атмосферы — на законах кинематики жидкости. Динамика базируется на уравнениях движения, требует знания теории турбулентности и законов волнового движения. Динамическая метеорология применяет законы гидромеханики к атмосфере, учитывая при этом такие факторы, как приток солнечной радиации, лучистый и турбулентный теплообмен с подстилающей поверхностью, испарение воды, конденсацию водяного пара в атмосфере и т. п. Современные количественные методы прогноза погоды основаны на решении уравнений гидромеханики в сочетании с уравнениями термодинамики применительно к атмосферным условиям.

б. Гидротехника и гидрология требуют знания законов движения жидкостей в каналах, волновых и турбулентных процессов.

в. Самолетостроение. Самолет в воздухе, во-первых, поддерживается силами, действующими со стороны окружающей среды, во-вторых, затрачивает определенную мощность для преодоления сопротивления среды. Поэтому основная задача, которую ставит самолетостроение перед гидромеханикой, — определить силы и моменты, действующие со стороны среды на движущееся в ней тело.

Кораблестроение, автомобилестроение, производство гидротурбин, паровых и газовых турбин ставят аналогичную задачу.

§ 2. ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕАЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

1. Гипотеза сплошной среды. Реальные твердые тела, жидкости и газы имеют дискретную молекулярную структуру, причем среднее расстояние между отдельными молекулами значительно превышает их собственные размеры. Частицы, составляющие среду, находятся в непрерывном движении, которое складывается из теплового хаотического движения и направленного макроскопического, которое возникает за счет внешних сил (тяжести, градиента давления и т. д.). Гидромеханика изучает только макроскопические движения, отвлекаясь от реального дискретного строения вещества. При этом рассматриваемой среде приписывается свойство сплошности. Под сплошной понимают некоторую фиктивную среду,

представляющую собой систему материальных точек, заполняющих пространство непрерывно, без образования пустот.

Для того, чтобы избавиться от молекулярных эффектов, необходимо провести осреднение по достаточно большому молекулярному ансамблю, для которого средний вектор скорости тепловых движений равнялся бы нулю, и отдельные флуктуации не могли бы сказаться на результате осреднения. С другой стороны, объем осреднения должен быть физически бесконечно малым по сравнению с масштабом неоднородности поля изучаемой величины. В противном случае в пределах рассматриваемого объема будут иметь место существенные изменения значений рассматриваемой характеристики, и точность получаемых результатов будет снижена. По отношению к каждой из конкретных сред вопрос о замене реальной среды сплошной решается экспериментально, и в случае отрицательного результата изучение ведется не методами гидромеханики, а с помощью кинетической теории газов. Введение гипотезы сплошной среды представляется обстоятельством чрезвычайной важности, ибо дает возможность рассматривать все характеристики потока как непрерывные функции координат и времени *. Последнее означает, что при изучении гидромеханических явлений в полной мере можно использовать аппарат дифференциального и интегрального исчисления, составлять и решать соответствующие дифференциальные уравнения.

Кроме того, появляется возможность введения ряда макроскопических характеристик, получаемых как результат осреднения. К их описанию мы приступаем ниже.

2. Плотность и давление. Средней плотностью среды в объеме $\Delta\tau$ называется отношение $\frac{\Delta m}{\Delta\tau}$, где Δm — масса, заключенная в объеме $\Delta\tau$. Плотностью ρ в данной точке называется предел:

$$\rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau}.$$

Размерность ρ $[\rho]^{**} = ML^{-3}$.

Будем рассматривать величину отношения $\frac{\Delta m}{\Delta\tau}$. Так как реальная среда имеет дискретное строение, то плавное уменьшение $\Delta\tau$ будет сопровождаться скачкообразным изменением Δm , соответствующим пересечению поверхности молекулы. Этому соответствует

* Нарушение непрерывности допускается лишь для отдельных, так называемых, особых точек, линий и поверхностей.

** Размерность в физической литературе обозначается заключением рассматриваемой величины в квадратные скобки [].

скачкообразное изменение отношения $\frac{\Delta m}{\Delta \tau}$, но пока знаменатель $\Delta \tau$

велик, эти скачки являются малыми, а величина $\frac{\Delta m}{\Delta \tau}$ стремится

к определенному предельному значению. Однако, начиная с некоторого малого значения объема $\Delta \tau_0$, скачкообразное изменение $\frac{\Delta m}{\Delta \tau}$

становится заметным и кривая принимает вид пилообразной линии (пересечение поверхности молекулы сопровождается скачком кривой вниз, последующее уменьшение $\Delta \tau$ при постоянном Δm вызывает рост отношения; затем при пересечении следующей молекулы снова происходит скачок вниз и т. д.), причем амплитуда скачков по мере уменьшения $\Delta \tau$, очевидно, должна возрасти. При $\Delta \tau \rightarrow 0$

отношение $\frac{\Delta m}{\Delta \tau}$ становится либо очень большим, если рассматриваемая точка совпадает с положением какой-либо молекулы, либо оказывается равным нулю, если точка оказалась в промежутке между молекулами. Таким образом, в дискретной среде ρ не может быть непрерывной функцией координат, а оказывается величиной, скачкообразно меняющейся от точки к точке от нуля до очень больших величин. Если же учесть еще постоянное движение молекул, которые непрерывно меняют свое положение, то станет ясным, что ρ не может быть и непрерывной функцией времени.

Однако, если кривую $\frac{\Delta m}{\Delta \tau}$ экстраполировать от значения, соответствующего $\Delta \tau_0$, к нулевому объему, полагая формально

$$\rho = \lim_{\Delta \tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta \tau} = \frac{dm}{d\tau} \approx \frac{\Delta m_0}{\Delta \tau_0},$$

где Δm_0 — масса, заключенная в объеме $\Delta \tau_0$, то этим мы допустим плавное изменение величины $\frac{\Delta m}{\Delta \tau}$, что соответствует переходу от

рассмотрения вещества как дискретной системы материальных точек к представлению о сплошной среде.

Из приведенного рассуждения следует, что объем $\Delta \tau_0$, среднюю плотность в котором можно отождествить с плотностью в данной точке, должен быть мал по сравнению с масштабом неоднородности в распределении массы и в то же время должен быть достаточно велик по сравнению с расстояниями между молекулами и содержать достаточно большое количество молекул. Так, при нормальных условиях длина свободного пробега молекул воздуха равна $6 \cdot 10^{-6}$ см, а в 1 см^3 содержится $2,7 \cdot 10^{13}$ молекул. Поэтому объем, равный 1 см^3 , для большинства задач гидромеханики является достаточным, чтобы обеспечить надежные средние значе-

ния и статистическое постоянство количества молекул во времени. Однако на высоте 120 км длина свободного пробега молекулы воздуха составляет 30 см и объем в 1 см³ не удовлетворяет требуемому условию.

Совершенно аналогичные рассуждения можно провести при введении понятия гидродинамического давления p , которое представляет собой предел отношения совокупности импульсов ударов отдельных молекул ΔF в единицу времени на рассматриваемую площадку ΔS , т. е.

$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S},$$

$$[p] = FL^{-2} = ML^{-1}T^{-2}.$$

3. Сжимаемость. Понятие несжимаемой жидкости. Плотность жидкостей и газов меняется при изменении температуры и давления, хотя и в разной степени для различных сред. Так, при возрастании температуры от 4 до 16°C плотность воды убывает на 0,1%, а плотность газов — на 4%. При изменении давления от 1 до 100 атмосфер плотность воды возрастает на 0,5%, а плотность газа увеличивается в 100 раз. Изменчивость плотности ρ в зависимости

от давления p можно характеризовать производной $\frac{\partial \rho}{\partial p}$ или свя-

занной с нею величиной скорости звука: $a = \frac{1}{\sqrt{\frac{\partial \rho}{\partial p}}}$. Чем больше

сжимаемость, т. е. $\frac{\partial \rho}{\partial p}$, тем, очевидно, меньше a . Так, для воды

$a \approx 1450$ м/сек, тогда как для воздуха при 15°C $a = 340$ м/сек, а в газе фреоне при 0°C $a = 150$ м/сек.

Жидкость, в которой плотность при движении остается постоянной, называется *несжимаемой жидкостью*. Это имеет место в том случае, когда ρ сохраняет одно и то же значение во всех точках пространства в данный момент времени и в каждой зафиксированной точке во времени не меняется (хотя можно представить себе неоднородную жидкость, в которой плотность меняется во времени так, что при движении частиц жидкости их плотность будет оставаться постоянной, — случай, который мы будем считать исключенным).

Возможность замены данной реальной среды моделью несжимаемой жидкости зависит не от того, мала или велика сжимаемость этой среды, а от того, сколь большую роль играет сжимаемость в рассматриваемом явлении. Так, в большинстве задач гидромеханики капельные жидкости и, прежде всего, воду можно рассматривать как несжимаемые. Однако в ряде задач, как, например, при

* * * $\frac{m \cdot v^2}{r}$ * *

расчете подводного взрыва или гидравлического удара, сжимаемость играет основную роль, и модель несжимаемой жидкости является неприменимой. На распределение давления по поверхности тела, обтекаемого воздушным потоком, изменение плотности при малых скоростях потока (меньше 70 м/сек) оказывает незначительное влияние, поэтому воздух в задачах об обтекании с малыми скоростями можно рассматривать как жидкость несжимаемую. При больших скоростях обтекающего потока и особенно при скоростях, приближающихся к скорости звука, сжимаемость воздуха существенно меняет картину распределения давления по поверхности тела по сравнению с тем, что имело бы место в несжимаемой жидкости. Поэтому в задачах аэродинамики больших скоростей замена воздуха моделью несжимаемой жидкости является недопустимой.

4. Вязкость реальных жидкостей и газов. Понятие идеальной жидкости. Как уже указывалось, любое сколь угодно малое усилие, приложенное к частицам реальных жидкостей и газов, вызывает смещение частиц друг относительно друга. Однако опыты обнаруживают, что сдвигающие усилия, стремящиеся вызвать скольжение одного слоя частиц по другому, сопровождаются возникновением специальных сил, препятствующих этому. Эти силы прилагаются к каждому слою и направлены противоположно направлению относительного смещения этого слоя. На рис. 1.1 слева

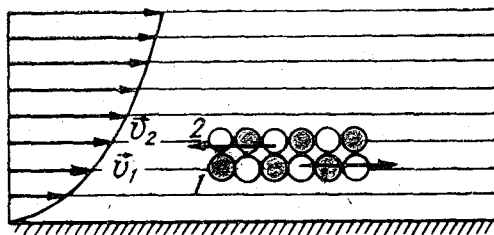


Рис. 1.1

показано распределение скоростей в потоке, обтекающем плоскую стенку. Возрастание скорости по мере удаления от стенки приводит к тому, что вышележащий слой жидкости опережает нижележащий и со стороны последнего на вышележащий слой действует сила, препятствующая этому опережению, т. е. направленная противоположно движению. Напротив, нижележащий слой отстает от вышележащего, что вызывает возникновение силы, приложенной к нижележащему слою и препятствующий этому отставанию, т. е. направленной в сторону движения.

Свойство жидкостей и газов оказывать сопротивление сдвигающим усилиям называется *внутренним трением* или *вязкостью*, а соответствующие этому сопротивлению силы называются *силами вязкости*.

Сущность этого процесса заключается в обмене молекулами между слоями. При этом из нижнего слоя в верхний в среднем поступают молекулы с меньшим количеством движения, а на их место — сверху приходят более быстрые. Таким образом именно молекулярный обмен количеством движения и обуславливает вязкое взаимодействие между слоями. Силу вязкости F_v следует понимать как результат осреднения, в указанном выше смысле, что позволяет ввести ее определение в виде предельного отношения.

$$F_v = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

$$[F_v] = ML^{-1}T^{-1}$$

(ΔF — молекулярный обмен количеством движения за единицу времени).

Жидкая сплошная среда, в которой силы вязкости отсутствуют, т. е. скольжение одного слоя относительно другого не встречает сопротивления, называется *идеальной жидкостью*. Известны жидкости со сравнительно малой вязкостью (спирт, воздух и др.) и с большой вязкостью (смола, нефть, глицерин и др.), причем вязкость меняется с изменением температуры. Но возможность замены реальной среды моделью идеальной жидкости зависит не столько от абсолютной величины сил вязкости, сколько от их относительной величины в сравнении с другими, действующими на частицы среды силами, а это, в основном, определяется сущностью решаемой задачи. Так, например, в тонком слое жидкости или газа, непосредственно прилегающем к поверхности обтекаемого потоком твердого тела (пограничном слое), скорость меняется очень быстро, возрастая от нуля на поверхности тела до значений порядка скорости невозмущенного потока (на внешней границе слоя). Скорости сдвига в этом слое оказываются весьма значительными, поэтому возникают большие силы вязкости, сравнимые, например, с силами инерции. Ввиду этого, исследуя движение жидкости в пограничном слое или решая задачи, связанные со свойствами этого слоя, мы не можем отвлечься от сил вязкости и считать жидкость идеальной. Напротив, вне пограничного слоя скорость движения меняется сравнительно медленно, скорости сдвига малы и вместе с ними малы и силы вязкости. Поэтому во многих задачах, касающихся движения жидкостей и газов вне пограничного слоя, силами вязкости пренебрегают и пользуются моделью идеальной жидкости.

В большинстве задач гидромеханики предполагается, что скорость является непрерывной функцией координат, т. е. меняется плавно от одной точки к другой. Но легко видеть, что плавность изменения скорости является прямым результатом действия вязкости, как фактора, сглаживающего различия в скоростях смежных слоев. Для идеальной жидкости допущение непрерывности

скоростного поля представляется противоречащим самому определению идеальной жидкости, так как при отсутствии сил вязкости здесь должно иметь место беспрепятственное скольжение одного слоя по другому, т. е. скачкообразное изменение скорости. В этом и заключается внутреннее противоречие понятия идеальной жидкости. Мы пренебрегаем силами вязкости в уравнениях движения, пренебрегаем ими как источниками потерь энергии, но не можем пренебречь действием этих сил, как фактора, формирующего непрерывное скоростное поле.

Жидкость, в которой силами вязкости пренебречь нельзя, называется *вязкой жидкостью*.

5. Понятие температуры. Теплопроводность жидкостей. По своему смыслу температура T суть понятие статистическое и представляет собой осредненную кинетическую энергию молекул W .

Так, для случая двухатомного газа $W = \frac{3}{2} kT$, где k — постоянная

Больцмана. Согласно эмпирическому закону Фурье, поток тепла через единичную поверхность в единицу времени q равен взятому с обратным знаком произведению градиента температуры на коэффициент теплопроводности, т. е.

$$q = -\lambda_r \frac{\partial T}{\partial n},$$

$$[q] = QL^{-2} T^{-1}, \quad \left[\frac{\partial T}{\partial n} \right] = \theta L^{-1}.$$

Коэффициент теплопроводности λ_r представляет собой поток тепла, возникающий при единичном градиенте

$$[\lambda_r] = QL^{-1} T^{-1} \theta^{-1},$$

$[Q]$ — размерность тепла.

В заключение данного параграфа еще раз подчеркнем, что возможность замены в большинстве задач реальных сред представлением о сплошной жидкой среде оправдывается тем, что полученные из теоретических расчетов осредненные характеристики жидкости количественно правильно отражают протекающие процессы в реальных средах, что подтверждается соответствующими измерениями. Однако этот вопрос должен всегда решаться по отношению к каждому конкретному изучаемому явлению.

Раздел 1

КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

Как уже упоминалось, кинематика изучает геометрические свойства движения. При этом используется условие непрерывности всех кинематических элементов во времени и пространстве, что обеспечивает их дифференцируемость по координатам и времени. К кинематическим элементам мы будем относить все векторные и скалярные величины, характеризующие движение среды и ее термодинамическое состояние.

ГЛАВА II

СПОСОБЫ КИНЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

§ 1. ДВА МЕТОДА ИССЛЕДОВАНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Существует два метода изучения движения и свойств жидкости — Лагранжа и Эйлера.

В первом из них рассматривается изменение во времени некоторого свойства f (это может быть скорость, плотность, давление и т. п.) в фиксированной частице, индивидуальность которой может быть задана ее координатами x_{0i} в начальный момент времени t_0 , так что $f = f(x_{0i}, t)$ *. Имея результаты подобных наблюдений для различных частиц, можно составить себе полное представление об эволюции любой рассматриваемой характеристики. Этот метод носит еще наименование *субстанционального*. Координаты ускорения и скорости частицы в этом случае записываются в виде:

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_i(x_{0i}, t), \\ \frac{\partial x_i}{\partial t} &= v_i(x_{0i}, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

* В декартовой системе мы там, где это удобно, будем использовать тензорные обозначения для координат, скоростей и ускорений, так что $x \equiv x_1$; $y \equiv x_2$; $z \equiv x_3$; $v_x \equiv v_1$; $v_y \equiv v_2$; $v_z \equiv v_3$ и т. д. Таким образом $f = f(x_{0i}, t)$ эквивалентно записи $f = f(x_0, y_0, z_0, t)$.

В методе Эйлера рассматриваются не отдельные частицы, а пространство, в каждой точке которого прослеживается изменение во времени изучаемой характеристики. Естественно, что она будет меняться от точки к точке, т. е. является функцией координат. Таким образом в данном случае следует записать

$$f = f(x_i, t).$$

Этот подход носит название *локального*.

В методе Эйлера производные от координат по времени запишутся в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, t). \quad (2.1')$$

Оба метода взаимосвязаны. Так, в переменных Лагранжа (2.1') имеет вид: $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, t)$ и, интегрируя последние соотношения при условии, что при $t = t_0$, $x = x_{0i}$, получим

$$x_i = x_i(x_{0i}, t),$$

что совпадает с первым из уравнений (2.1).

Легко понять, что изучение свойств воздушного потока с помощью свободных аэростатов или уравновешенных шаров-пилотов, снабженных приборами, которые, перемещаясь вместе с окружающей массой воздуха, фиксируют изменение свойств этой массы, соответствует субстанциональному методу. Для получения полной картины движения воздуха необходимо иметь результаты наблюдений с помощью возможно большего количества аэростатов или шаров-пилотов.

Наблюдение же свойств воздуха с помощью приборов (флюгеры, анемометры, барометры, термометры и т. п.), закрепленных в неподвижной точке на метеостанции, соответствует локальному методу. Для получения достаточно полного представления о движении и свойствах воздуха необходимо иметь данные с возможно большего числа станций. Очевидно, что анализ погодных условий с помощью синоптических карт, на которых показаны эти данные, с точки зрения гидромеханики представляет собой изучение свойств и движения воздуха по методу Эйлера.

При рассмотрении вопросов кинематики мы будем опираться на метод Эйлера. Во-первых, он проще, а во-вторых, соответствует тому способу описания движения воздуха, который используется в службе погоды.

§ 2. ПОЛЕ СКОРОСТЕЙ

Если каждой точке пространства поставлена в соответствие какая-либо векторная или скалярная величина, то мы будем гово-

рить, что определено векторное или скалярное поле этой характеристики. Конкретно, если в каждой точке задан вектор скорости, то будем иметь поле скоростей.

1. **Установившиеся и неуставившиеся движения.** В общем случае движения его скорость, плотность жидкости и другие характеристики являются функциями не только точки пространства, но и времени:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t), \rho = \rho(x, y, z, t) \text{ и т. п.}$$

Это значит, что в зафиксированной точке пространства, т. е. при зафиксированных x, y, z скорость, плотность и другие характеристики меняются во времени. Такое движение называется *неуставившимся* или *нестационарным*.

Однако часто встречаются такие движения, при которых характеристики движения жидкости являются функциями только точки пространства, но не зависят от времени: $\vec{v} = \vec{v}(x, y, z), \rho = \rho(x, y, z)$. Это значит, что в любой зафиксированной точке пространства скорость, плотность и другие величины не меняются во времени. Такие движения называются *установившимися* или *стационарными*.

Очевидно, что это определение стационарности движения можно записать в виде $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ или в координатной форме $\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0$. Аналогично $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ и т. п.

Таким образом, установившемуся движению воздуха соответствует постоянство во времени направления и силы ветра, отмечаемых на каждой метеостанции рассматриваемого района, хотя показания флюгера на разных станциях, вообще говоря, будут различны.

Движения воздуха в атмосфере, строго рассуждая, всегда являются неуставившимися. Однако, если оценивать скорость ветра по его среднему значению за достаточно большой промежуток времени (что в сущности и дается метеорологическими приборами для измерения ветра), то в ряде задач с достаточной для практических целей точностью можно считать скорость ветра в данной точке в течение известного периода неизменной во времени. Если пренебречь также и изменениями давления, температуры и плотности воздуха, то движение в этих случаях можно считать установившимся.

Следует отметить, что понятие установившегося движения нельзя отождествлять с понятием равномерного движения, которому соответствует постоянство скорости любой частицы жидкости при ее перемещении. Действительно, движение может быть установившимся, т. е. скорость в каждой точке будет постоянной во времени, но по мере перехода частицы из одной точки в другую

скорость ее будет меняться. Так, если вода движется по трубе переменного сечения (рис. 2.1) при постоянной разности давлений на концах трубы, то движение является установившимся, хотя частицы движутся в направлении сужения трубы со все возрастающей скоростью.

Одно и то же движение может оказаться установившимся или неустановившимся в зависимости от того, в какой системе координат оно рассматривается.

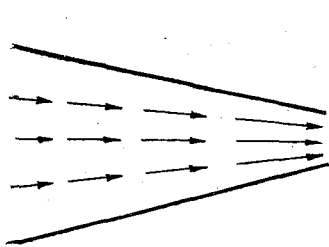


Рис. 2.1

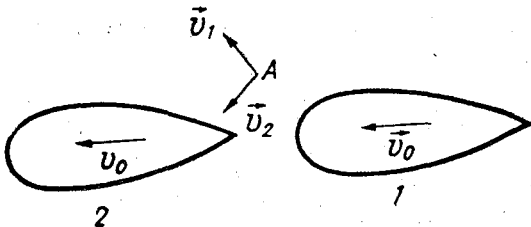


Рис. 2.2

В справедливости этого проще всего убедиться на следующем примере.

Тело движется с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ в неподвижной жидкой среде (рис. 2.2). Если рассматривать движение в неподвижной системе координат, связанной с невозмущенной частью среды, то в зафиксированной точке пространства скорость во времени будет меняться. Например, если в момент времени t_1 , когда тело занимает положение 1, скорость в точке A равна $\vec{v}_1$ и направлена от тела (частицы жидкости вытесняются приближающимся телом), то в момент времени t_2 , когда тело занимает положение 2, скорость в той же точке A будет равна $\vec{v}_2$ и будет направлена к телу (частицы заполняют пространство, освобождающееся при удалении тела). Таким образом, скорость в точке A не остается постоянной и движение является неустановившимся.

Рассмотрим теперь то же движение в системе координат, связанной с движущимся телом (рис. 2.3). Зафиксированной точкой в этой системе координат является точка, неподвижная относительно тела и, следовательно, перемещающаяся со скоростью $\vec{v}_0$ относительно невозмущенной жидкости. Если допустить, что в этой точке помещен прибор, измеряющий скорость (анемометр, гидрометрическая вертушка и т. п.), то этот прибор следует представлять себе жестко связанным с телом. Легко понять что скорость отмечаемая таким прибором, например скорость $\vec{v}_B$ в точке B или скорость $\vec{v}_C$ в точке C, будет оставаться одной и той же как по модулю, так и по направлению. Иными словами, данное движение,

рассматриваемое в системе координат, связанной с движущимся телом, является установившимся.

2. Линии тока, траектории. Трубка тока, струя. Пусть задано поле вектора $\vec{a}(x, y, z)$. Выберем произвольную точку A_1 , которой соответствует вектор $\vec{a}_1$ и отложим в направлении этого вектора малый отрезок A_1A_2 (рис. 2.4). Затем из точки A_2 в направлении соответствующего этой точке вектора $\vec{a}_2$, отложим малый отрезок A_2A_3 , затем из точки A_3 отложим малый отрезок A_3A_4 в направлении вектора $\vec{a}_3$ и т. д.

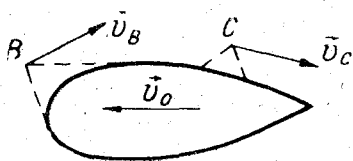


Рис. 2.3

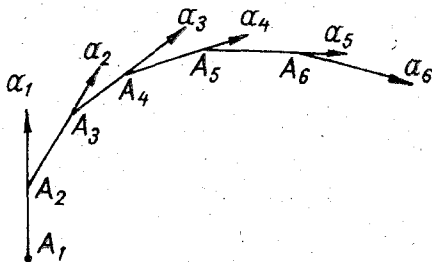


Рис. 2.4

В итоге получим ломаную линию $A_1A_2A_3A_4\dots$. Предельное положение этой ломаной при уменьшении составляющих ее отрезков представляет собой кривую, называемую *векторной линией данного поля*. Основное свойство векторной линии вытекает из способа ее построения и заключается в следующем: в каждой точке векторной линии вектор поля совпадает по направлению с касательной к этой линии или, иначе, в каждой своей точке векторная линия касается векторов поля, т. е. является огибающей векторов.

Проводя векторные линии через различные точки поля, получаем бесконечное множество векторных линий. Запишем дифференциальные уравнения семейства векторных линий. В соответствии с основным свойством векторной линии вектор элементарного перемещения вдоль нее $\vec{dr}(dx, dy, dz)$ является коллинеарным с вектором $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$ поля: $\vec{dr} \parallel \vec{a}$. Отсюда следует равенство:

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z)},$$

которое равносильно системе двух дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_y(x, y, z)}{a_x(x, y, z)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{a_z(x, y, z)}{a_x(x, y, z)}$$

Решение этих уравнений дает общий интеграл системы в виде двух равенств: $f_1(x, y, z) = C_1$, $f_2(x, y, z) = C_2$, определяющих собой семейство векторных линий. Действительно, каждому из равенств соответствует семейство поверхностей. Пересечение любых двух поверхностей, принадлежащих к разным семействам, дает ту или иную векторную линию.

Линией тока называется векторная линия поля скорости в зафиксированный момент времени, т. е. линия, касательная в каждой точке которой по направлению совпадает с вектором скорости в данный момент времени. Система дифференциальных уравнений семейства линий тока имеет вид:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)}, \quad (2.2)$$

где t нужно рассматривать как зафиксированный параметр.

Легко видеть, что линии тока не могут пересекаться друг с другом. Действительно, если бы две линии тока пересекались бы в точке A , то частица, находящаяся в этой точке, должна была бы участвовать в двух движениях (по касательным к двум линиям тока) *.

Система линий тока дает картину движения жидкости в зафиксированный момент времени, как бы моментальный фотографический снимок направлений векторов скорости потока. В случае установившегося движения картина линий тока со временем не меняется, поскольку не меняется поле скорости. В системе дифференциальных уравнений линий тока и в интеграле этой системы время, очевидно, не фигурирует (v_x, v_y, v_z от времени не зависят).

В случае неустановившегося движения поле скорости в разные моменты времени будет различным и, следовательно, картина линий тока будет непрерывно меняться во времени. Это же видно и из того, что в этом случае время t входит в выражения v_x, v_y, v_z , т. е. вид дифференциальных уравнений линий тока и вид интеграла их будут параметрически зависеть от времени.

Поле скорости, а значит, и конфигурация линий тока существенным образом зависят от того, в какой системе координат рассматривается движение. В самом деле, пусть $\vec{v}_1$ — скорость в одной системе координат, $\vec{v}_2$ — скорость в другой системе, движущейся относительно первой со скоростью $\vec{v}_{\text{пер}}$. Тогда $\vec{v}_1 = \vec{v}_{\text{пер}} + \vec{v}_2$, откуда $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_{\text{пер}})$. Таким образом, во второй системе координат векторы скорости получаются из векторов скорости, в первой системе — путем прибавления одного и того же вектора $(-\vec{v}_{\text{пер}})$, что существенно меняет картину движения.

* В некоторых особых точках может иметь место пересечение бесконечного числа линий тока, но при этом понятие направления не имеет смысла и, следовательно, скорость равна $\pm \infty$.

В виде примера рассмотрим линии тока около обтекаемого тела, равномерно движущегося со скоростью $\vec{v}_0$ в покоящейся жидкой среде. В неподвижной системе координат линии тока имеют вид, показанный на рис. 2.5. Частицы жидкости, находящиеся вблизи передней части тела, оттесняются телом вперед и в сторону, частицы, находящиеся вблизи тыловой части тела, движутся вслед за телом, заполняя пространство, освобождающееся при его перемещении. Такова будет картина движения частиц жидкости, которую увидит неподвижный наблюдатель. Это подтверждается моментальным снимком (рис. 2.6), сделанным неподвижным фотоаппаратом, причем конфигурация линий тока здесь стала заметной, благодаря мелким алюминиевым стружкам, рассыпанным по поверхности жидкости.

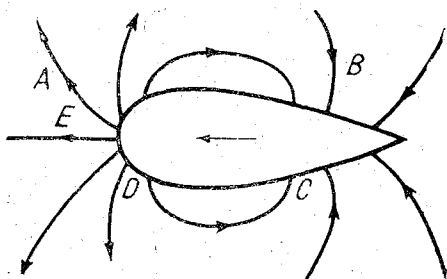


Рис. 2.5

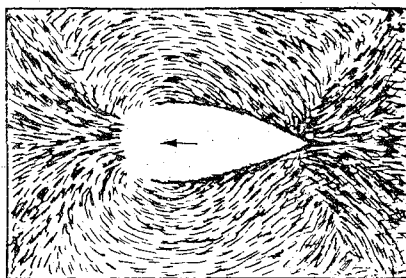


Рис. 2.6

Для того, чтобы получить поле скорости в системе координат, связанной с движущимся телом в соответствии со сказанным выше достаточно к вектору скорости в неподвижной системе координат прибавить один и тот же вектор $(-\vec{v}_0)$ (рис. 2.7). При этом частицы жидкости, которые находились на достаточно большом удалении от тела и в неподвижной системе координат были в покое, теперь приобретают скорость $(-\vec{v}_0)$; само же тело получает скорость $\vec{v}_0 + (-\vec{v}_0) = 0$, т. е. представляется неподвижным, что, впрочем, очевидно из того, что система координат жестко связана с телом. В целом получается картина движения, которая имела бы место при обтекании неподвижного тела жидкостью, движущейся со скоростью $(-\vec{v}_0)$, и эту картину движения и будет видеть наблюдатель, находящийся на движущемся теле. Фотоснимок, произведенный аппаратом, движущимся со скоростью $\vec{v}_0$, т. е. неподвижным относительно тела, подтверждает сказанное (рис. 2.8).

В отличие от линии тока траектория частицы жидкости представляет собой линию, проходимую этой частицей при ее движе-

нии. Таким образом, если линия тока характеризует направление скорости разных частиц в один и тот же момент времени, то траектория характеризует направление скорости одной и той же частицы в разные моменты времени.

Очевидно, что вектор элементарного перемещения частицы по ее траектории определяется выражением: $\vec{dr} = \vec{v} \cdot dt$ или $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$.

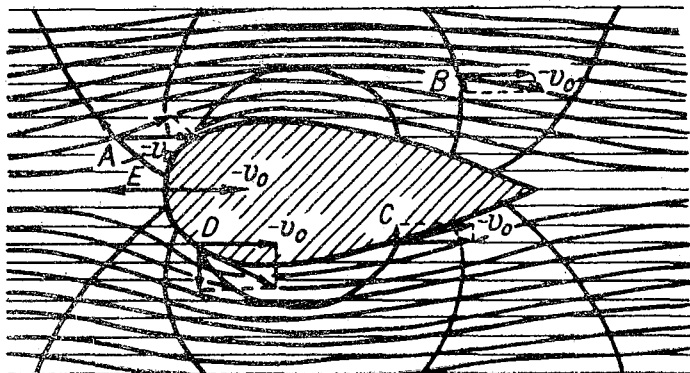


Рис. 2.7

Поэтому система дифференциальных уравнений траектории имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t). \quad (2.3)$$

В этих уравнениях независимым переменным является время t , а координаты x, y, z суть неизвестные функции времени. Решение получается в виде трех равенств:

$$f_1(x, y, z, t) = C_1, \quad f_2(x, y, z, t) = C_2, \quad f_3(x, y, z, t) = C_3.$$

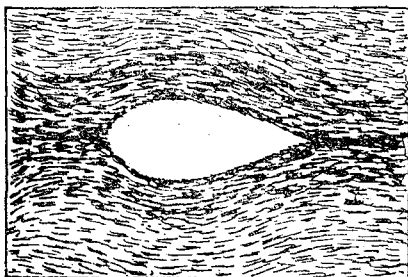


Рис. 2.8

Исключая из них t , получаем два уравнения, представляющие собой уравнения семейства траектории. Это семейство, очевидно, зависит от трех произвольных постоянных.

В общем случае неустановившегося движения траектории частиц жидкости не совпадают с линиями тока, построенными для какого-либо зафиксированного момента времени. В самом деле, пусть частица жидкости в момент времени t_1 находится в точке A (рис. 2.9). За малый промежуток времени $t_2 - t_1$ частица пройдет малый отрезок $AB = v_{A_1} (t_2 - t_1)$ в направлении вектора $\vec{v}_{A_1}$, т. е. по линии тока для момента времени t_1 . Если движение было бы установившимся, то в течение следующего промежутка времени частица двигалась бы в направлении вектора скорости $\vec{v}_{B_1}$ в точке B в момент t_1 , поскольку за время $t_2 - t_1$ скорость в точке B не может измениться. Таким образом, в случае установившегося движения частица все время двигалась бы по линии тока. В случае же неустановившегося движения в течение промежутка времени $t_2 - t_1$ скорость в точке B , вообще говоря, изменится по направлению. Поэтому, придя в точку B , частица в течение последующего малого промежутка времени $t_3 - t_2$ будет перемещаться в направлении вектора $\vec{v}_{B_2}$ скорости в точке B в момент t_2 т. е. сойдет с линии тока, построенной для момента времени t_1 .

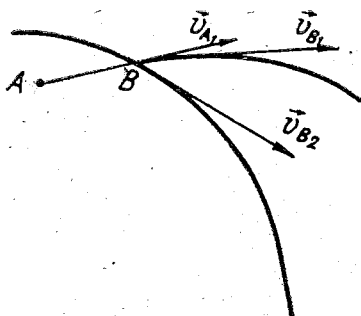


Рис. 2.9

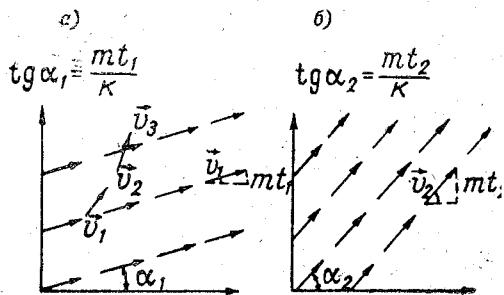


Рис. 2.10

Как видно из этого рассуждения в частном случае установившегося движения траектории частиц совпадают с линиями тока, не меняющимися во времени.

В виде иллюстрации рассмотрим линии тока и траектории в случае неустановившегося движения, скорость которого определяется равенствами: $v_x = k$, $v_y = mt$, $v_z = 0$ (k и m постоянные). Очевидно, что в любой зафиксированный момент времени t_1 скорость во всех точках имеет один и тот же модуль и одинаковое направление ($v_0 = \sqrt{k^2 + m^2 t_1^2}$), а линии тока представляют собой прямые, наклонные по отношению к оси Ox под углом α_1 , причем $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{mt_1}{k}$ (рис. 2.10, а). В последующий момент времени t_2 ско-

рость во всех точках имеет другой модуль и другое направление ($v_2 = \sqrt{k^2 + m^2 t_2^2}$; $\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{m t_2}{k}$) и наклон линий тока отличен от того, который имеет место в момент t_1 (рис. 2.10, б).

Частица, вышедшая в момент времени t_1 из точки A , в течение малого промежутка времени будет двигаться в направлении вектора $\vec{v}_1$, затем в направлении вектора $\vec{v}_2$ и т. д., т. е. опишет кривую, отличную от линии тока, как в момент t_1 , так и в момент t_2 .

Нетрудно найти вид этой кривой. Дифференциальные уравнения траектории имеют вид:

$$\frac{dx}{dt} = k, \quad \frac{dy}{dt} = mt,$$

что дает уравнения траектории в параметрической форме:

$$x = kt + C_1, \quad y = \frac{mt^2}{2} + C_2.$$

Откуда

$$y = \frac{m}{2} \left(\frac{x - C_1}{k} \right)^2 + C_2.$$

Это значит, что траектории частиц имеют вид парабол с осью, параллельной Oy , параллельно смещенных друг относительно друга.

Легко видеть, что скорость частицы в каждый момент времени направлена по касательной как к траектории частицы, так и к линии тока, построенной для этого момента времени (рис. 2.11). Имея общую касательную, траектория и линия тока являются таким образом, соприкасающимися кривыми, однако кривизна этих линий в точке соприкосновения является, вообще говоря, различной.

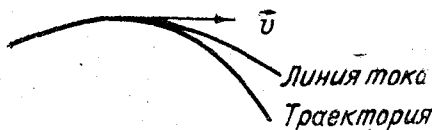


Рис. 2.11

В заключение введем понятие трубки тока и струи. Для этого возьмем замкнутую непересекающую себя кривую, не содержащую особых точек, и через каждую ее точку проведем либо линию тока либо траекторию. Образовавшиеся при этом цилиндрические поверхности носят название в первом случае *трубки тока*, во втором — *струи*. Если площади сечения трубки тока или струи настолько малы, что скорость в любой их точке можно считать постоянной, то, соответственно, будем иметь элементарную трубку тока или элементарную струю. В силу понятных причин сквозь эти поверхности не может быть протечения жидкости, и она движется

вдоль стенки. При стационарном течении обе поверхности совпадают друг с другом. Тривиальным примером может служить обычная трубка, стенки которой являются непроницаемыми для потока.

3. Плоское движение. Важным частным случаем общего распределения гидродинамических величин является плоское поле.

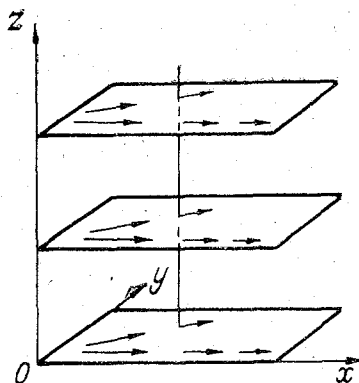


Рис. 2.12

Назовем, в частности, *плоско-параллельным*, или *плоским*, такое движение, при котором: 1) во всех точках потока векторы скорости параллельны данной плоскости; 2) во всех точках, лежащих на одном и том же перпендикуляре к этой плоскости, векторы скорости равны, т. е. во всех плоскостях, параллельных данной плоскости, картина движения совершенно одинакова (рис. 2.12).

Если ввести декартову систему координат, расположив плоскость xOy в плоскости движения, то первое условие дает, что $v_z = 0$, а из второго условия следует, что v_x и v_y не зависят от z , т. е. все производные по z равны нулю. Таким образом, в случае плоско-параллельного движения

$$v_x = v_x(x, y), \quad v_y = v_y(x, y), \quad v_z = 0. \quad (2.4)$$

Легко видеть, что если пренебречь скоростью вертикальных движений в атмосфере, значительно менее интенсивных, чем горизонтальные, то движение воздуха в различных барических системах удовлетворяет первому условию. Второе же условие не выполняется, так как скорость ветра с высотой меняется как по модулю, так и по направлению, а оси таких барических систем, как циклоны и антициклоны, имеют значительный наклон. Таким образом, движение воздуха в атмосфере, вообще говоря, не является плоско-параллельным. Впрочем, рассматривая явления в достаточно тонком слое атмосферы, в ряде случаев схематизируют движение, сводя его к плоско-параллельному.

Ясно, что уравнения линий тока и траекторий в этом случае упрощаются и принимают соответственно вид:

$$\frac{dx}{v_x(x, y, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, t)}; \quad (2.5)$$

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, t). \quad (2.6)$$

§ 3. ПРИМЕРЫ ПОЛЕЙ СКОРОСТЕЙ

Рассмотрим ряд примеров описания движения по методу Эйлера, причем поле скорости будем устанавливать в результате схематизации действительной картины движения.

1. Пространственный источник. Представим себе, что в маленький полый шарик, в котором по направлению радиусов просверлены отверстия, по тонкой трубке под давлением непрерывно подается несжимаемая жидкость в количестве Q единиц объема в единицу времени (рис. 2.13, а). Упрощая явление, будем полагать, что истечение происходит из одной точки и картина движения совершенно симметрична относительно этой точки (рис. 2.13, б). Такой поток называется *пространственным источником*, точка A , на которой происходит истечение, называется *центром источника*, величина Q называется *интенсивностью источника*.

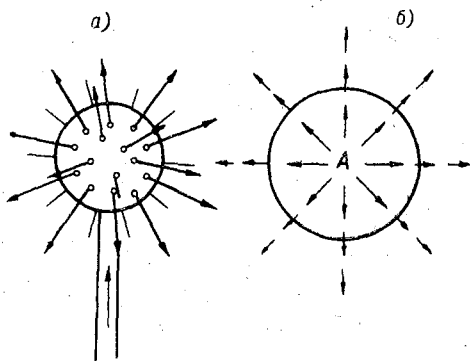


Рис. 2.13

Из условия симметричности движения очевидно, что векторы скорости направлены по лучам, исходящим от центра. Чтобы определить модуль скорости на расстоянии r от центра, окружим его воображаемой сферической поверхностью радиуса r . Легко, видеть, что через единицу площади этой поверхности за единицу времени проходит объем, равный v единиц объема, а через всю поверхность $4\pi r^2 v$ единиц. Но через любую поверхность, окружающую центр источника, за единицу времени должен проходить один и тот же объем жидкости, равный интенсивности Q источника, так как в противном случае имело бы место изменение массы жидкости, заключенной внутри поверхности, и, в конечном счете, изменение плотности, что противоречит условию несжимаемости.

Таким образом, $4\pi r^2 v = Q$, т. е. $v = \frac{Q}{4\pi r^2}$. Как видно из этого выражения, модуль скорости меняется обратно пропорционально квадрату расстояния от центра источника.

Поле скорости можно представить в векторной форме, учитывая, что скорость коллинеарна с ортом радиуса-вектора:

$$\vec{v} = \frac{Q}{4\pi r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q}{4\pi r^3} \vec{r}.$$

Введя декартову прямоугольную систему координат с началом в центре источника, из предыдущего равенства получаем:

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{Qx}{4\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, & v_y &= \frac{Qy}{4\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ v_z &= \frac{Qz}{4\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Если имеет место не истечение жидкости из точки, а, напротив, втекание в нее, то такой поток называется *пространственным стоком*. В этом случае скорость просто меняет знак.

Из физических соображений ясно, что скорости, а следовательно, и линии тока направлены радиально. Убедимся, ради примера, в этом аналитически. Подставляя (2.7) в уравнение (2.5), получим:

$$\begin{aligned} \frac{4\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dx}{Qx} &= \frac{4\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dy}{Qy} = \\ &= \frac{4\pi (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dz}{Qz}. \end{aligned}$$

Сокращая на общий множитель при $x, y, z \neq 0$, будем иметь:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{z}{y}.$$

Интегрируя последние соотношения, приходим к уравнениям семейств двух плоскостей, проходящих через начало координат:

$$y = Cx, \quad z = C_1 y.$$

Прямые, по которым они попарно пересекаются, есть линии тока, проходящие через начальную точку, т. е. являющиеся радиусами.

При $x=y=z=0$ имеем особую точку. Здесь пересекается бесчисленное множество линий тока. Скорость в этой точке, как следует из (2.7), равна ∞ . Это следствие математической схематизации, при которой площадь источника $4\pi r^2 \rightarrow 0$, а количество поступающей из него жидкости Q конечно. Поэтому должна иметь

неопределенность вида $0 \cdot \infty$, раскрытие которой и может только дать $0 \cdot \infty = Q$.

Для определения линий тока подставим (2.7) в (2.6) и после сокращений при $x=y=z \neq 0$ получим уравнения вида:

$$\frac{dx}{x} = dt, \quad \frac{dy}{y} = dt, \quad \frac{dz}{z} = dt.$$

Интегрируя их и исключая t , вновь получим:

$$y = Cx, \quad z = C_1 y.$$

(При $x=y=z=0$ вновь имеем особую точку).

Траектории и линии тока совпали. Это и должно было иметь место, ибо рассматриваемое движение стационарно. Поэтому можно было бы не решать последнюю задачу, и мы это проделали лишь с целью иллюстрации.

2. Плоский источник. Представим себе тонкую прямую трубку, в которую под давлением подается несжимаемая жидкость, вытекающая из трубки через многочисленные отверстия, равномерно расположенные на ее поверхности (рис. 2.14 а). Схематизируя

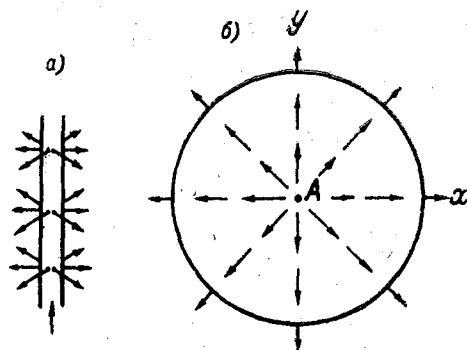


Рис. 2.14

явление, будем представлять себе в пространстве прямую линию, от которой по всем направлениям оттекает несжимаемая жидкость, причем все частицы движутся в плоскостях, перпендикулярных к прямой, и картина движения в каждой плоскости (рис. 2.14, б) является симметричной относительно точки A пересечения плоскости с прямой. Очевидно, что описанное движение удовлетворяет обоим условиям плоско-параллельности.

Такой поток мы будем называть *плоским источником*, точку A — *центром источника* на рассматриваемой плоскости, объем Q жидкости, оттекающей за единицу времени от каждой единицы длины прямой, — *интенсивностью источника*.

Определим поле скорости плоскости источника. Прежде всего очевидно, что векторы скорости направлены по лучам, идущим от

центра источника. Чтобы определить модуль скорости на расстоянии r от центра, представим себе прямой цилиндр, основание которого представляет собой круг радиуса r , лежащий в плоскости движения, а высота равна единице длины. За единицу времени через боковую поверхность этого цилиндра протекает объем жидкости, равный произведению скорости на площадь боковой поверхности, т. е. $2\pi r v$. В то же время из условия несжимаемости жидкости следует, что эта величина равна интенсивности Q источника. Таким образом, $2\pi r v = Q$ и $v = \frac{Q}{2\pi r}$, т. е. модуль скорости

в случае плоского источника меняется обратно пропорционально расстоянию от центра.

Поле скорости можно представить в векторной форме, учитывая, что вектор скорости коллинеарен с радиусом-вектором $\vec{r}$ точки, имеющей начало в центре источника. Тогда

$$\vec{v} = \frac{Q}{2\pi r} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{Q}{2\pi r^2} \vec{r}.$$

В декартовой системе координат с осями Ox и Oy , лежащими в плоскости движения, будем иметь:

$$v_x = \frac{Qx}{2\pi(x^2+y^2)}, \quad v_y = \frac{Qy}{2\pi(x^2+y^2)}.$$

3. Вращение жидкости как твердого тела. Допустим, что жидкость находится в цилиндрическом сосуде, который вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Благодаря силам вязкости жидкость сама будет приведена в состояние вращения и, когда процесс стационарируется, она будет покоиться относительно сосуда, вращаясь вместе с ним как твердое тело. Подобное движение жидкости будет, очевидно, плоско-параллельным. Скорость частицы жидкости, находящейся на расстоянии r от оси, направлена по касательной к окружности радиуса r в ту или другую сторону в зависимости от направления вращения, а по модулю равна ωr , т. е. растет пропорционально расстоянию от оси (рис. 2.15).

Введем декартову систему координат, направив ось Oz по оси вращения. Допустим, что жидкость вращается около оси Oz против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси. Тогда:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v \cdot \cos \alpha = v \cos \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) = -v \cdot \sin \beta = -\omega r \frac{y}{r} = -\omega y \\ v_y &= v \cdot \sin \alpha = v \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} + \beta \right) = v \cdot \cos \beta = \omega r \frac{x}{r} = \omega x \\ v_z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

В векторной форме $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$.

4. Безвихревое вращение жидкости. Допустим теперь, что частицы жидкости движутся по круговым траекториям, как и в предыдущем случае, но в отличие от него скорость движения частиц меняется обратно пропорционально расстоянию от оси, т. е. при удалении от оси убывает по закону $v = \frac{C}{r}$, где C — величина, постоянная для всех точек данного потока (рис. 2.16). Такой тип движения мы будем называть *безвихревым вращением* (смысл термина «безвихревое» и причины присвоения его рассматриваемому движению будут объяснены ниже).

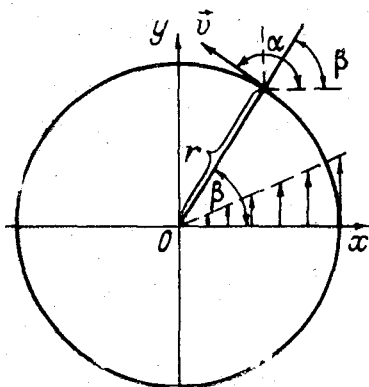


Рис. 2.15

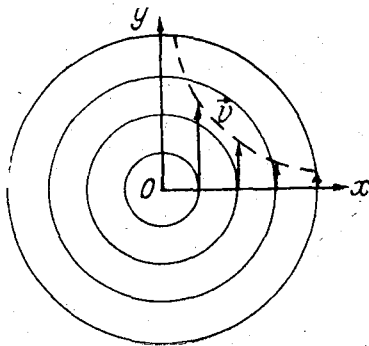


Рис. 2.16

Движение, подобное описанному, можно осуществить, поместив в жидкость весьма длинный (по сравнению с поперечными размерами) цилиндр и заставив его вращаться вокруг оси. Тогда частицы жидкости, непосредственно прилегающие к поверхности цилиндра, вследствие сцепления между ними и поверхностью цилиндра, будут двигаться со скоростью частиц цилиндра. По мере же удаления от оси вращения скорость будет убывать, постепенно приближаясь к нулю.

Введем систему декартовых координат, направив ось Oz по оси вращения. Тогда с помощью рассуждений, совершенно аналогичных тем, которые применялись в предыдущем случае, найдем, что при движении против часовой стрелки:

$$v_x = -v \cdot \sin \beta = -\frac{C}{r} \frac{y}{r} = -\frac{Cy}{x^2 + y^2},$$

$$v_y = -v \cdot \cos \beta = -\frac{C}{r} \frac{x}{r} = -\frac{Cx}{x^2 + y^2}.$$

Определим, как дополнительный пример, для этого случая линии тока. Соответствующее уравнение:

$$-\frac{dx}{\omega y} = \frac{dy}{\omega x},$$

или

$$-y dy = x dx.$$

После интегрирования получим уравнения семейства окружностей:

$$y^2 + x^2 = C^2.$$

Уравнения траекторий в силу стационарности процесса имеют аналогичный вид.

5. Изолированный вихрь. Под этим будем понимать такое вращательное движение жидкости, при котором вблизи оси вращения (оси вихря) жидкость вращается как твердое тело, а, начиная с некоторого радиуса r_0 имеет место безвихревое вращение. Иными словами, при удалении от оси вихря скорость сначала растет пропорционально радиусу: $v = \omega r$, а, начиная с $r = r_0$, убывает обратно пропорционально радиусу: $v = \frac{C}{r}$ (рис. 2.17). Легко видеть, что при $r = r_0$ оба закона изменения скорости должны давать одну и ту же величину $v(r_0)$, т. е. $\omega r_0 = \frac{C}{r_0}$, откуда $C = \omega r_0^2$.

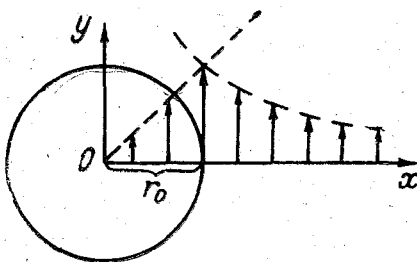


Рис. 2.17

Часть жидкости, вращающаяся как твердое тело (т. е. ограниченная цилиндрической поверхностью с радиусом основания r_0) носит название *ядра вихря*. Очевидно, что движение, рассмотренное в предыдущем примере, можно рассматривать как тривиальный случай изолированного вихря, у которого радиус ядра равен нулю.

Движение, подобное движению в изолированном вихре, имеет место в атмосфере в тайфунах, торнадо, смерчах.

§ 4. ВИХРЬ (РОТОР) СКОРОСТИ

Напомним, что в математическом анализе под ротором $\vec{\Omega}$ какой-либо векторной величины $\vec{a}$, подразумевается векторное произведение

$$\vec{\Omega} = [\vec{\nabla} \times \vec{a}], \quad (2.8)$$

где $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$ — оператор Гамильтона, представляющий собой символический вектор с проекциями: $\vec{\nabla} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ ($\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные орты, соответственно, в направлении осей x, y, z).

Выражение (2.8), как и любое векторное произведение, можно записать через определитель

$$\vec{\Omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}.$$

Раскрывая его, получим выражение для $\vec{\Omega}$ в проекции на оси координат

$$\vec{\Omega} = \vec{i} \underbrace{\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right)}_{\Omega_x} + \vec{j} \underbrace{\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} \right)}_{\Omega_y} + \vec{k} \underbrace{\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right)}_{\Omega_z}. \quad (2.9)$$

Ротор скорости $\vec{v}$, согласно данному выше определению, должен записаться в виде

$$\vec{\Omega} \equiv \text{rot } \vec{v} = [\vec{\nabla} \times \vec{v}], \quad (2.10)$$

или в проекциях на оси координат

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{i} \underbrace{\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)}_{\text{rot}_x \vec{v}} + \vec{j} \underbrace{\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)}_{\text{rot}_y \vec{v}} + \vec{k} \underbrace{\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)}_{\text{rot}_z \vec{v}}. \quad (2.11)$$

В случае плоского движения, параллельного xOy , сохраняется лишь одна вертикальная компонента ротора

$$\text{rot}_z \vec{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \text{rot}_x \vec{v} = \text{rot}_y \vec{v} = 0,$$

ибо

$$\frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_x}{\partial z} = v_z = 0.$$

Обратимся к физической интерпретации ротора скорости. С этой целью рассмотрим вначале скорость вращения твердого тела вокруг какой-либо точки. Как известно, она равна

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}],$$

где $\vec{r} = \{x, y, z\}$ — радиус-вектор.

В проекции на оси координат:

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x.$$

Найдем $\text{rot } \vec{v} = \text{rot } [\vec{\omega} \times \vec{r}]$. В проекции на ось x имеем

$$\text{rot}_x \vec{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \omega_x + \omega_x = 2\omega_x.$$

Таким образом мы убедились, что $\frac{1}{2} \text{rot}_x \vec{v}$ равна угловой скорости вращения частицы жидкости как твердого тела вокруг оси x . Рассуждая совершенно аналогичным образом, легко показать, что $\frac{1}{2} \text{rot}_y \vec{v} = \omega_y$ и $\frac{1}{2} \text{rot}_z \vec{v} = \omega_z$, а в общем случае трехмерного движения

$$\vec{\Omega} \equiv \text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega}. \quad (2.12)$$

Следовательно, ротор скорости равен удвоенной угловой скорости вращения затвердевшей (фиктивно) жидкой частицы вокруг мгновенной оси вращения проходящей через точку, принятую за центр.

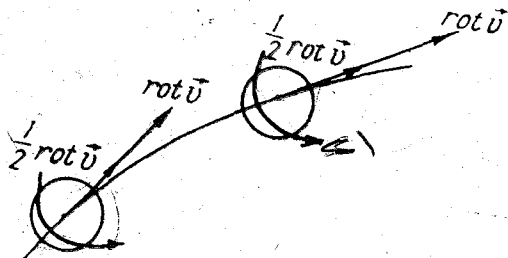


Рис. 2.18

Векторные линии поля векторов $\text{rot } \vec{v}$ носят название вихревых линий. Это значит, что вихревая линия представляет собой такую линию, которая в каждой своей точке касается векторов $\text{rot } \vec{v}$ или векторов угловой скорости вращения частиц, равных $\frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$ (рис. 2.18). Элементарные частицы жидкости, расположенные на

вихревой линии, вращаются вокруг этих векторов. Поэтому вихревая линия является огибающей мгновенных осей вращения, т. е. играет роль криволинейной оси вращения для расположенных на этой линии частиц.

Поверхность, образуемая вихревыми линиями, проходящими через каждую точку произвольно проведенной замкнутой линии, не пересекающей саму себя и не содержащей особых точек, называется *вихревой трубкой*.

Уравнение вихревых линий, согласно общему определению векторных линий, имеет вид:

$$\frac{dx}{\frac{1}{2} \text{rot}_x \vec{v}} = \frac{dy}{\frac{1}{2} \text{rot}_y \vec{v}} = \frac{dz}{\frac{1}{2} \text{rot}_z \vec{v}},$$

или

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z}.$$

В заключение этого пункта остановимся на записи $\text{rot}_z \vec{v}$ в натуральной системе координат. Последняя зачастую оказывается удобной при рассмотрении горизонтальных движений в атмосфере. Вводится она следующим образом. Начало этой системы располагается в рассматриваемой точке пространства, одна ось (l) направлена по горизонтальной линии тока, другая ось (n) располагается в горизонтальной плоскости по нормали к скорости влево от направления движения, третья ось (z) направлена по вертикали снизу вверх (рис. 2.19). Желая записать те или иные дифференциальные соотношения в натуральных координатах, можно воспользоваться соответствующими выражениями в общей декартовой системе, причем ось Ox отождествить с осью l , ось Oy — с осью n , ось Oz — с вертикальной осью.

В случае горизонтального движения имеем выражения проекций скорости:

$$v_l (= v_x) \equiv v, \quad v_n (= v_y) \equiv 0, \quad v_z \equiv 0.$$

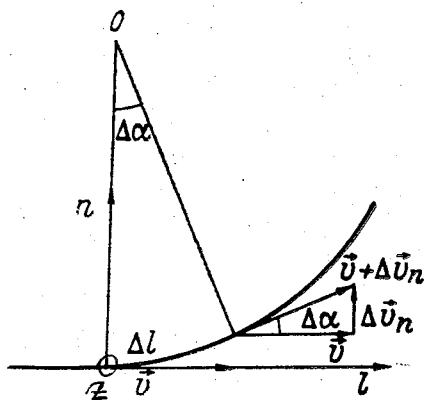


Рис. 2.19

Преобразуем теперь выражение для $\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$. Прежде всего, имеем (рис. 2.20):

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta x} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{v \Delta \alpha}{\Delta l} = v \frac{\partial \alpha}{\partial l} = kv = \frac{v}{R}.$$

Здесь $\Delta \alpha$ это угол поворота вектора скорости против часовой стрелки при смещении вдоль линии тока на отрезок Δl ; $\frac{\partial \alpha}{\partial l}$ — поворот вектора скорости при смещении на единицу длины, т. е. кривизна k линии тока; R — радиус кривизны; R и k будут величинами

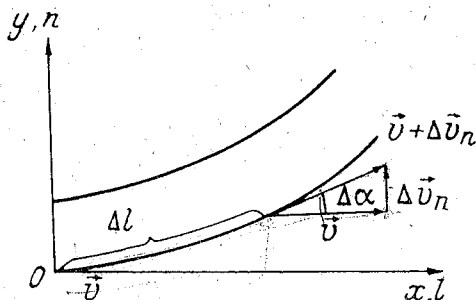


Рис. 2.20

положительными, если вектор скорости поворачивается против часовой стрелки, т. е. центр кривизны располагается влево от направления движения; k и R будут величинами отрицательными, если центр кривизны находится справа от направления движения. Далее

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial n}.$$

Таким образом,

$$\Omega_z = kv - \frac{\partial v}{\partial n},$$

или

$$\Omega_z = \frac{v}{R} - \frac{\partial v}{\partial n}. \quad (2.13)$$

Первый член правой части в обоих последних равенствах обусловлен кривизной линий тока, а второй — изменением модуля ско-

рости по нормали к линии тока. Он положителен, если модуль скорости убывает влево от линии тока, и отрицателен при росте модуля в этом же направлении.

§ 5. РАЗЛОЖЕНИЕ СКОРОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ. (ПЕРВАЯ ТЕОРЕМА ГЕЛЬМГОЛЬЦА)

Скорость $\vec{v}$ какой-либо точки твердого тела представляет собой векторную сумму скорости $\vec{v}_0$ поступательного движения точки, выбранной за центр, и скорости вращения вокруг мгновенной оси, проходящей через него, т. е. $[\vec{\omega} \times \vec{r}]$. Таким образом,

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}],$$

где $\vec{r}$ — расстояние между центром и рассматриваемой точкой ($\vec{r} = \{\xi, \eta, \zeta\}$).

В жидкости к обоим упомянутым скоростям добавляется еще деформационная скорость, возникающая за счет изменяемости среды. Ниже мы выведем для нее соответствующие выражения.

Запишем скорость $\vec{v}$ некоторой точки, находящейся на расстоянии $\vec{r}$ от выбранного нами центра движения, в виде суммы скорости поступательного движения центра $\vec{v}_0$ и некоторого приращения $\delta\vec{v}$, т. е. $\vec{v} = \vec{v}_0 + \delta\vec{v}$. Или в проекциях на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \delta v_x, \\ v_y &= v_{0y} + \delta v_y, \\ v_z &= v_{0z} + \delta v_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Рассматривая весьма малую окрестность вокруг центральной точки (малые $\vec{r}$ и, соответственно, его проекции ξ, η, ζ), мы можем, разлагая приращения в ряд по ξ, η, ζ ограничиться первыми членами, так что (2.14) запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{x0} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_x}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_x}{\partial z} \zeta, \\ v_y &= v_{y0} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_y}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_y}{\partial z} \zeta, \\ v_z &= v_{z0} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \xi + \frac{\partial v_z}{\partial y} \eta + \frac{\partial v_z}{\partial z} \zeta. \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Из (2.15) следует, что приращение скорости выражается совокупностью девяти величин, т. е. тензором второго ранга, который мы в дальнейшем разбиваем на симметричный и антисимметричный*:

$$T = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \right\}.$$

Введя обозначения:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v_y}{\partial y}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\theta_1 = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \quad \theta_2 = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \theta_3 = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

и учитывая выражения для компонент ротора скорости, можем исходный тензор переписать в виде:

$$T = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2} \theta_3 & \frac{1}{2} \theta_2 \\ \frac{1}{2} \theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2} \theta_1 \\ \frac{1}{2} \theta_2 & \frac{1}{2} \theta_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \text{rot}_z \vec{v} & \frac{1}{2} \text{rot}_y \vec{v} \\ \frac{1}{2} \text{rot}_z \vec{v} & 0 & -\frac{1}{2} \text{rot}_x \vec{v} \\ -\frac{1}{2} \text{rot}_y \vec{v} & \frac{1}{2} \text{rot}_x \vec{v} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

* Операции с тензорами и само понятие напоминаются в приложении А.

Подставляя полученное разложение (2.16) в (2.15), получим:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{x0} + \varepsilon_1 \xi + \frac{1}{2} \theta_3 \eta + \frac{1}{2} \theta_2 \zeta + \frac{1}{2} \zeta \operatorname{rot}_y \vec{v} - \frac{1}{2} \eta \operatorname{rot}_z \vec{v}, \\ v_y &= v_{y0} + \varepsilon_2 \eta + \frac{1}{2} \theta_3 \xi + \frac{1}{2} \theta_1 \zeta + \frac{1}{2} \xi \operatorname{rot}_z \vec{v} - \frac{1}{2} \zeta \operatorname{rot}_x \vec{v}, \\ v_z &= v_{z0} + \frac{1}{2} \theta_2 \xi + \frac{1}{2} \theta_1 \eta + \varepsilon_3 \zeta + \frac{1}{2} \eta \operatorname{rot}_x \vec{v} - \frac{1}{2} \xi \operatorname{rot}_y \vec{v}. \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Введя функцию $\Phi = \frac{1}{2} (\varepsilon_1 \xi^2 + \varepsilon_2 \eta^2 + \varepsilon_3 \zeta^2 + \theta_1 \eta \zeta + \theta_2 \xi \zeta + \theta_3 \xi \eta)$ и имея в виду, что последние два слагаемых в каждом из написанных выше выражений, суть компоненты векторного произведения, можно соотношения (2.17) представить в более компактном виде:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{x0} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \left[\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{r} \right]_x, \\ v_y &= v_{y0} + \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \left[\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{r} \right]_y, \\ v_z &= v_{z0} + \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \left[\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{r} \right]_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Или в векторной форме, поскольку $\frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\omega}$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + [\vec{\omega} \times \vec{r}] + \left(\vec{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \vec{j} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} + \vec{k} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right). \quad (2.19)$$

Мы видим, что в отличие от твердого тела, в разложении скорости жидкости имеется в наличии еще один член, появление которого, как мы убедимся, связано с ее деформируемостью. Для этого обратимся к физическому смыслу величин, входящих в функцию Φ и являющихся компонентами симметричного тензора, который мы ниже выписываем отдельно.

$$T^{(c)} = \left\{ \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \frac{1}{2} \theta_3 & \frac{1}{2} \theta_2 \\ \frac{1}{2} \theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2} \theta_1 \\ \frac{1}{2} \theta_2 & \frac{1}{2} \theta_1 & \varepsilon_3 \end{array} \right\}. \quad (2.20)$$

Рассмотрим вначале величину $\epsilon_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x}$. Пусть при $x=x_1$ x -ая проекция (рис. 2.21) скорости равна v_{x_1} , а при $x=x_2$ v_{x_2} . Тогда изменение ее на единице расстояния будет

$$\frac{v_{x_2} - v_{x_1}}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta x},$$

или в пределе

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta x}.$$

Таким образом, ϵ_1 представляет собой изменение x -ой составляющей скорости на единицу расстояния параллельно оси x .

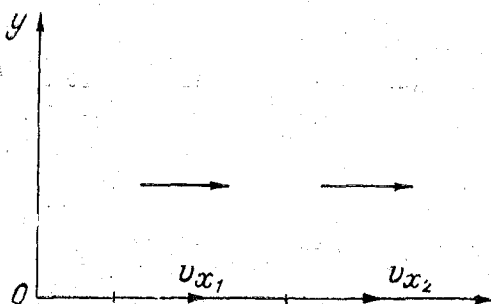


Рис. 2.21

Скорость есть путь в единицу времени, поэтому частицы, находящиеся в начальный момент на $x=x_1$, пройдут расстояние v_{x_1} , а на $x=x_2$ расстояние v_{x_2} за единичный отрезок времени. В итоге, поскольку $v_{x_2} \neq v_{x_1}$, элемент жидкости растягивается (сжимается) вдоль x .

Следовательно, величина $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta x} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$ представляет собой удлинение (сжатие) элемента на единичном расстоянии вдоль x в единицу времени. Аналогичная трактовка имеет место и по отношению к $\epsilon_2 = \frac{\partial v_y}{\partial y}$ и $\epsilon_3 = \frac{\partial v_z}{\partial z}$, где рассмотренный эффект имеет место соответственно по осям y и z . Таким образом можно констатировать, что величины $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ отражают деформацию растяжения (сжатия*) элемента жидкости. Количественно они равны относительному удлинению, происходящему за единицу времени по осям x, y и z .

* В случае сжатия вдоль какой-либо оси соответствующая производная имеет, естественно, знак минус. Разумеется, что могут иметь место случаи одновременного растяжения по одной и сжатия по другой оси.

Рассмотрим далее какую-либо величину θ_3 , например $\theta_3 = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}$. В этом случае мы, очевидно, анализируем процессы, протекающие в плоскости xOy . Физический смысл θ_3 легко усмотреть, исходя из следующих рассуждений.

Представим себе малую частицу жидкости, центр которой совпадает с заданной точкой A . Выделим в частице два отрезка, параллельных осям Ox и Oy , имеющих малую длину Δx и Δy и делящихся точкой A пополам (рис. 2.22). За малый промежуток времени Δt отрезки, претерпев то или иное изменение своей длины, займут новое положение, повернувшись относительно прежнего положения против часовой стрелки (если смотреть с конца оси z) на угол $\Delta\delta_1$ и на угол $\Delta\delta_2$. Этот поворот мы можем представить себе как результат двух движений:

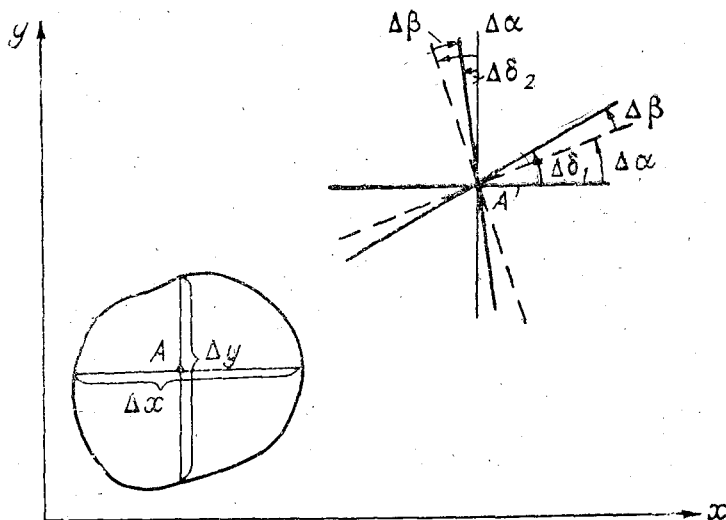


Рис. 2.22

а) вращения, т. е. поворота обоих отрезков против часовой стрелки (если смотреть с конца оси z) на один и тот же угол $\Delta\alpha$, причем изменения прямого угла, первоначально образованного отрезками, не происходит;

б) перекоса прямого угла в результате поворота отрезков навстречу друг другу на один и тот же угол $\Delta\beta$. Здесь имеется в виду угол поворота частей отрезков, идущих в положительном направлении осей.

При этих условиях углы будут удовлетворять следующим соотношениям:

$$\Delta\delta_1 = \Delta\alpha + \Delta\beta,$$

$$\Delta\delta_2 = \Delta\alpha - \Delta\beta,$$

откуда

$$\Delta\alpha = \frac{1}{2}(\Delta\delta_1 + \Delta\delta_2),$$

$$\Delta\beta = \frac{1}{2}(\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2).$$

Разделив эти равенства на промежуток времени Δt и перейдя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\delta_1}{dt} + \frac{d\delta_2}{dt} \right),$$

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\delta_1}{dt} - \frac{d\delta_2}{dt} \right).$$

В этих выражениях $\frac{d\alpha}{dt}$ представляет собой угловую скорость вращения отрезков против часовой стрелки, $\frac{d\beta}{dt}$ — угловую скорость перекоса прямого угла, $\frac{d\delta_1}{dt}$ и $\frac{d\delta_2}{dt}$ — угловую скорость по-

ворота отрезков против часовой стрелки.

Две последние производные можно выразить через производные по координатам от проекций скорости. Для этого рассмотрим движения отрезка AC , параллельного оси Ox , в направлении оси Oy , отвлечшись пока от его перемещения в направлении осей Ox и Oy (рис. 2.23). Точка A — центр частицы — перемещается в направлении Oy со скоростью v_y , точка C — со скоростью $v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \frac{1}{2} \Delta x$.

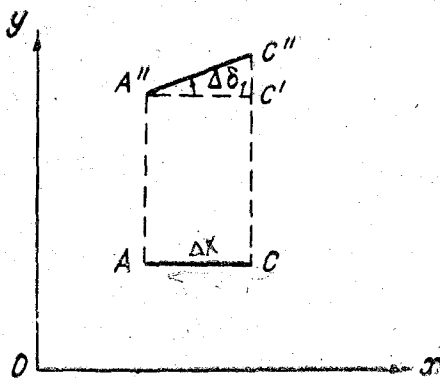


Рис. 2.23

В результате этого за малый промежуток времени Δt точка A проходит расстояние $AA' = v_y \Delta t$, точка C — рас-

стояние $CC'' = \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \Delta x \right) \Delta t$. Поэтому разность этих расстояний имеет величину

$$C'C'' = CC'' - CC' = \frac{\partial v_y}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} \Delta x \Delta t,$$

угол поворота отрезка в направлении от Ox к Oy равен

$$\Delta \delta_1 \approx \operatorname{tg} \Delta \delta_1 = \frac{C'C''}{\frac{1}{2} \Delta x} = \frac{\partial v_y}{\partial x} \Delta t,$$

а угловая скорость поворота

$$\frac{\Delta \delta_1}{\Delta t} = \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

Таким образом угловая скорость поворота отрезка, параллельного Ox , в направлении от Ox к Oy определяется производной $\frac{\partial v_y}{\partial x}$. Движение отрезка AC в направлении оси Ox может при-

вести к растяжению или сжатию отрезка, но вклада в поворот отрезка около точки A не внесет. Точно так же не вызовет добавочного поворота в плоскости xOy и движение отрезка в направлении оси Oz (хотя оно и может вызвать поворот в плоскости xOz).

Подобным же образом нетрудно показать, что жидкий отрезок, параллельный оси Oy , поворачивается в плоскости xOy в направлении от Oy к Ox с угловой скоростью $\frac{dv_x}{dy}$.

В результате этих рассуждений мы имеем:

$$\frac{d\delta_1}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial x}; \quad \frac{d\delta_2}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial y}.$$

Следовательно, получаем

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right).$$

Таким образом θ_3 есть величина перекоса прямого угла в результате поворота отрезков навстречу друг другу с угловой скоростью.

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \theta_3.$$

Аналогичным образом легко показать, что θ_1 и θ_2 отражают перекосы частиц соответственно в плоскостях yOz и xOz .

ГЛАВА III

ПОТОК И ДИВЕРГЕНЦИЯ СКОРОСТИ

§ 1. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПОТОКА ВЕКТОРА СКОРОСТИ

1. Поток вектора. Представим себе, что в поле вектора $\vec{a}(x, y, z)$ задана некоторая поверхность σ (рис. 3.1). Будем полагать, что эта поверхность является ориентированной, т. е. в каждой точке ее задано определенное положительное направление нормали (орт нормали $\vec{n}$), причем это направление при перемещении вдоль по-

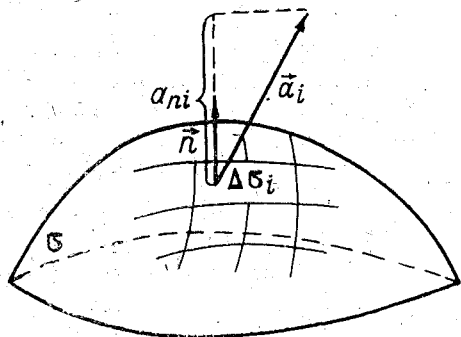


Рис. 3.1

верхности меняется непрерывно. Таким образом, мы полагаем, что задана не только геометрическая форма поверхности но и показаны ее «внешняя» (та, куда направлены нормали) и «внутренняя» стороны. Если поверхность является замкнутой, то принято направлять нормали изнутри вовне объема, ограниченного поверхностью. Разобьем поверхность на элементарные площадки $\Delta\sigma_i$ и составим произведения вида $a_{in}\Delta\sigma_i$, где a_{in} — проекция вектора

$\vec{a}_i$, взятого в произвольной точке площадки $\Delta\sigma_i$, на нормаль. Просуммируем все подобные произведения и найдем предел этой суммы при условии, что все $\Delta\sigma_i$ стремятся к нулю, а число их неограниченно возрастает. Этот предел

$$Q = \lim_{\Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_i a_{in}\Delta\sigma_i = \int_{(\sigma)} a_n d\sigma$$

называется *поток вектора $\vec{a}$ через поверхность σ* .

По своему смыслу это скалярная величина, численно равная количеству $\vec{a}$, проходящему через поверхность σ . В частном случае σ может быть замкнута. Тогда $Q = \oint a_n d\sigma$ дает разность между входящим и выходящим потоками, т. е., в конечном счете, накопление (или наоборот) $\vec{a}$ в объеме τ , стягиваемом поверхностью σ .

2. Расход жидкости. Поставим себе задачей установить физический смысл потока вектора скорости через заданную поверхность σ :

$$Q = \int_{(\sigma)} v_n d\sigma.$$

Для этого представим себе сначала, что поверхность σ является неподвижной «контрольной» поверхностью, через которую жидкость способна свободно протекать. Легко видеть, (рис. 3.2), что через площадку $d\sigma$ за единицу времени проходит объем

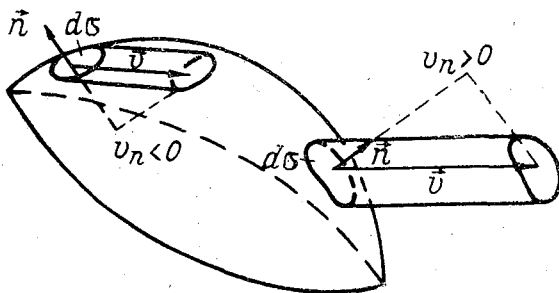


Рис. 3.2

жидкости, заключенный в цилиндре с основанием $d\sigma$ и образующей $\vec{v}$. Величина объема равна $v_n d\sigma$. В силу этого $v_n d\sigma$ соответствует объему жидкости, протекающей через $d\sigma$, взятому со знаком «+», если жидкость течет в сторону нормали, и со знаком «—», если жидкость течет в противоположном направлении. Интеграл $\int_{(\sigma)} v_n d\sigma$ равен разности между объемом жидкости, протекающей

в сторону, куда направлены нормали, и объемом жидкости, протекающей в противоположном направлении. Таким образом, поток скорости через поверхность представляет собой объемный расход, т. е. объем жидкости, протекающей через эту поверхность (считаемую неподвижной) за единицу времени. Равенство потока нулю при наличии движения возможно лишь в том случае, когда объем жидкости, протекающей в сторону, куда направлены нормали, равен объему жидкости, протекающему «внутри» поверхности.

Поток скорости через замкнутую поверхность $Q = \oint_{\sigma} v_n d\sigma$ (нормали к которой, как указывалось, направлены вовне) выражает собой общий объем жидкости, вытекающей за пределы пространства, ограниченного поверхностью (или, наоборот, остающийся в нем), за единицу времени. Очевидно, что в случае несжимаемой

жидкости объем жидкости, текущей внутрь поверхности, должен быть равен объему жидкости вытекающей, так как только при этом условии плотность жидкости, заключенной внутри поверхности, может оставаться неизменной (объемный расход равен нулю). Неравенство нулю потока скорости через замкнутую поверхность возможно лишь в случае сжимаемой жидкости.

Если вместо v_n рассматривать ρv_n , то величина $M = \int_{\sigma} \rho v_n d\sigma$ дает массовый расход т. е. массу, проносимую потоком через поверхность σ за единицу времени. В случае замкнутой поверхности: $M = \oint_{\sigma} \rho v_n d\sigma$, и мы получаем массу, выходящую (входящую) из объема, также за единичный интервал времени. Ясно, что в случае несжимаемой жидкости накопление массы в объеме τ не имеет места.

§ 2. ДИВЕРГЕНЦИЯ СКОРОСТИ

1. Физический смысл дивергенции скорости. В курсах математического анализа* дивергенция вектора $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ определяется как

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

или, через посредство оператора Гамильтона, как скалярное произведение:

$$\operatorname{div} \vec{a} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{a}).$$

Там же выводится формула связи между потоком вектора и его дивергенцией (формула Гаусса-Остроградского):

$$\oint_{\sigma} a_n d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{div} \vec{a} d\tau,$$

где τ — объем, ограниченный поверхностью σ .

Поэтому для вектора скорости следует записать:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (3.1)$$

* См., например, Смирнов В. И. «Курс высшей математики», т. II. ГИФМЛ. М., 1958.

или

$$\operatorname{div} \vec{v} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (3.1')$$

и

$$\oint_{\sigma} v_n d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{div} \vec{v} d\tau. \quad (3.2)$$

Последнее выражение расшифровывается следующим образом: объем жидкости, выходящий за единицу времени за пределы τ (или, наоборот, остающийся в нем) равен объемному интегралу от дивергенции скорости. (В случае вытекания дивергенция отрицательна).

Отсюда легко перейти к физической интерпретации $\operatorname{div} \vec{v}$. Для этого, воспользовавшись теоремой о среднем, вынесем в (3.2) $\operatorname{div} \vec{v}$ из-под знака интеграла. Тогда

$$\oint_{\sigma} v_n d\sigma = \overline{\operatorname{div} \vec{v}} \int_{\tau} d\tau.$$

Поскольку $\oint_{\sigma} v_n d\sigma$ равен разности входящих Q_2 и выходящих Q_1 потоков, т. е. $Q_2 - Q_1 = \Delta Q$, то, считая τ малой величиной $\tau = \Delta\tau$, последнее выражение можно переписать в виде

$$\overline{\operatorname{div} \vec{v}} = \frac{\Delta Q}{\Delta\tau}.$$

Переходя к пределу, получим

$$\operatorname{div} \vec{v} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta\tau} = \frac{dQ}{d\tau}.$$

Таким образом, дивергенция скорости равна относительному изменению объема фиксированной частицы жидкости в единицу времени. Или, иначе говоря, она представляет собой разность входящих в единичный объем и выходящих из него потоков жидкости за единицу времени.

Все сказанное выше может быть перефразировано и по отношению к секундной массе $\rho \vec{v}$, для которой выражение для дивергенции должно иметь вид

$$\operatorname{div} \rho \vec{v} = \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z}.$$

Физический смысл $\operatorname{div} \rho \vec{v}$ тот же, что и $\operatorname{div} \vec{v}$. Просто вместо объема в приведенных выше определениях будет фигурировать масса.

2. Запись плоской дивергенции в натуральных координатах.

Дивергенцию двумерного движения $\text{div } \vec{v}_1$ будем называть плоской. Для горизонтального движения (параллельно xOy) она запишется как

$$\text{div } \vec{v}_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}.$$

Запишем ее в натуральных координатах, направив, как и ранее, ось Ox (l) вдоль горизонтальной линии тока, а ось Oy (n) по нормали к ней влево от направления движения. Тогда имеем (рис. 3.3).

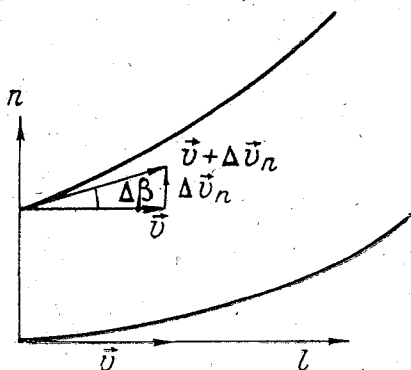


Рис. 3.3

$$\text{div } \vec{v}_1 = \frac{\partial v}{\partial l} + v \frac{\partial \beta}{\partial n}. \quad (3.3)$$

Производная $\frac{\partial v}{\partial l}$, равная приращению модуля скорости при смещении вдоль линии тока на единицу длины, называется дивергенцией модуля. Она является величиной положительной, если модуль скорости в направлении движения растет, и величиной отрицательной, если модуль скорости в направлении движения убывает. Производная $\frac{\partial \beta}{\partial n}$ представляет собой угол поворота (в радианах) вектора скорости при смещении по нормали к линии тока на единицу длины. Величина $v \frac{\partial \beta}{\partial n}$ представляет собой часть дивергенции, обусловленную непараллельностью линий тока, различием их направления; поэтому ее часто называют дивергенцией направления. Она является величиной положительной, если $\frac{\partial \beta}{\partial n} > 0$, т. е. линии тока в направлении движения расходятся, и величиной отрицательной, если $\frac{\partial \beta}{\partial n} < 0$, т. е. линии тока сходятся.

В виде иллюстрации приведем примеры дивергенции модуля и дивергенции направления различных знаков (рис. 3.4).

В общем случае негоризонтального движения дивергенция скорости может быть представлена в виде

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{v}_1 + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

где $\operatorname{div} \vec{v}_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$ представляет собой дивергенцию горизонтальной составляющей $\vec{v}_1$ скорости, которую мы можем представить в виде суммы дивергенции модуля и дивергенции направления. Тогда будем иметь

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v}{\partial l} + v \frac{\partial \beta}{\partial n} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (3.4)$$

где v — модуль скорости горизонтального движения.

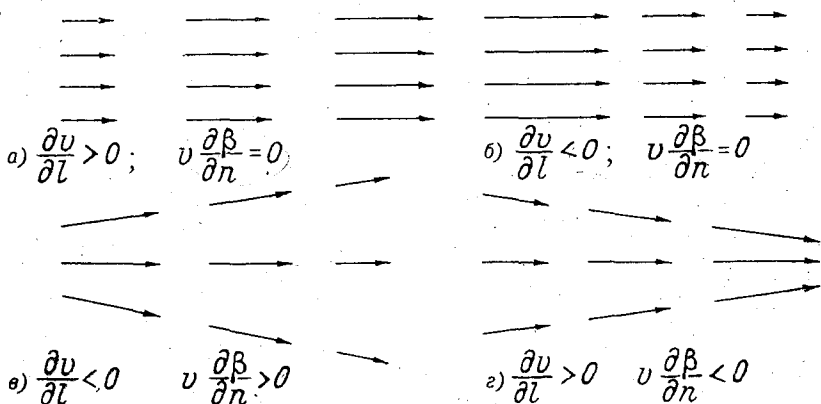


Рис. 3.4

3. **Определение вертикальной скорости при движении несжимаемой жидкости.** Из физического смысла дивергенции скорости ясно, что для несжимаемой жидкости она равна нулю, ибо в этом случае не может быть накопления или уменьшения жидкости в единичном объеме. (Входит столько же сколько и выходит). Таким образом,

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

(В случае плоского движения $\operatorname{div} \vec{v}_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$).

При горизонтальном движении, пользуясь натуральными координатами, будем иметь

$$\frac{\partial v}{\partial l} + v \frac{\partial \beta}{\partial n} = 0.$$

Из последнего соотношения следует, что в случае плоско-параллельного движения несжимаемой жидкости положительная дивергенция направления (расхождение линий тока в направлении движения) сопровождается отрицательной дивергенцией модуля, т. е. убыванием модуля скорости вдоль линий тока (рис. 3.5, а). Напротив, при сближении линий тока в направлении движения имеет место возрастание скорости (рис. 3.5, б).

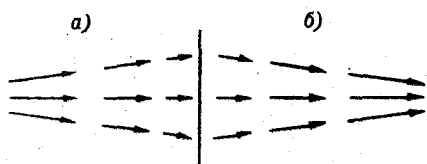


Рис. 3.5

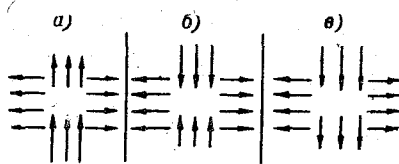


Рис. 3.6

Остановимся на вопросе об оценке знака и величины скорости вертикальных движений в атмосфере. При грубых оценках воздух можно рассматривать как жидкость несжимаемую, т. е. можно пользоваться равенством $\text{div } \vec{v} = 0$.

Если направить ось Oz по вертикали вверх, то поток можно представить в форме

$$\text{div } \vec{v}_1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

где $\text{div } \vec{v}_1$ — дивергенция горизонтальной составляющей скорости, равная либо $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}$, либо $\frac{\partial v}{\partial l} + v \frac{\partial \beta}{\partial n}$. Таким образом,

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\text{div } \vec{v}_1.$$

Это значит, что положительная дивергенция горизонтальной составляющей скорости (т. е. вектора скорости ветра на синоптических картах) сопровождается уменьшением вертикальной составляющей скорости в направлении снизу вверх (рис. 3.6). Напротив, отрицательным значениям $\text{div } \vec{v}_1$ соответствует рост v_z с высотой.

Полагая начало координат находящимся на земной поверхности и интегрируя последнее равенство от нуля до некоторой высоты h , имеем

$$v_z(h) = - \int_0^h \operatorname{div} \vec{v}_1 dz,$$

или

$$v_z(h) = -h (\operatorname{div} \vec{v}_1)_{\text{cp}},$$

где $(\operatorname{div} \vec{v})_{\text{cp}}$ есть среднее значение дивергенции горизонтальной составляющей скорости. Так, например, в области повышенного давления в слое трения имеет место $\operatorname{div} \vec{v}_1 > 0$ (рис. 3.7, а), что обусловлено действием сил трения. Этому соответствует $v_z(h) < 0$, т. е. в области повышенного давления имеют место нисходящие движения воздуха. Напротив, в области пониженного давления, где $\operatorname{div} \vec{v}_1 < 0$ (рис. 3.7, б), $v_z(h) > 0$.

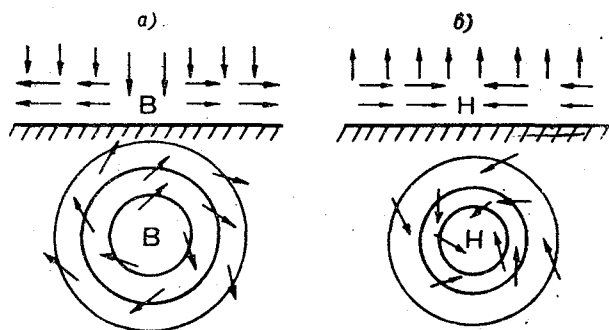


Рис. 3.7

Приведем несколько примеров грубой оценки порядка величины v_z .

Пример 1. В области антициклона с круговыми изобарами радиальная составляющая скорости на расстоянии $r=500$ км от центра в среднем равна 1 м/сек до высоты $h=1$ км. Оценим среднее значение скорости нисходящих движений на высоте 1 км.

Определим $\operatorname{div} \vec{v}_1$, для чего достаточно объем воздуха, протекающего в единицу времени через боковую поверхность цилиндра с радиусом основания r и высотой h , разделить на объем этого цилиндра:

$$\operatorname{div} \vec{v}_1 = \frac{2\pi r h v_r}{\pi r^2 h} = \frac{2v_r}{r}.$$

Тогда

$$v_z(h) = -h \frac{2v_r}{r}; \quad v_z(1 \text{ км}) = -1000 \text{ м} \cdot \frac{2 \cdot 1 \text{ м/сек}}{500 \cdot 10^3 \text{ м}} = -0,004 \text{ м/сек.}$$

В течение суток это приведет к опусканию слоя воздуха на 350 м и адиабатическому повышению температуры в нем на 3,5°C, что может вызвать полное рассеяние или значительное уменьшение облачности.

Пример 2. Линии тока параллельны друг другу, причем величина скорости в направлении движения убывает на 1 м/сек на каждые 100 км. В этом случае

$$\operatorname{div} \vec{v}_1 = \frac{\partial v}{\partial l} \approx \frac{\Delta v}{\Delta l} = \frac{-1 \text{ м/сек}}{100 \cdot 10^3 \text{ м}} = -10^{-5} \text{ сек}^{-1}.$$

Таким образом, в этом случае на высоте 1 км имеют место восходящие движения воздуха со скоростью порядка 1 см/сек.

Пример 3. Скорость ветра равна 10 м/сек и вдоль линии тока не меняется. Линии тока, расположенные на расстоянии 1 км друг от друга, расходятся на 6° (0,1 радиана). В этом случае

$$\operatorname{div} \vec{v}_1 = v \frac{\partial \beta}{\partial n} \approx v \frac{\Delta \beta}{\Delta n} = 10 \text{ м/сек} \cdot \frac{0,1}{10^3 \text{ м}} = 10^{-3} \text{ сек}^{-1},$$

$$v_z(1 \text{ км}) = -1 \text{ м/сек.}$$

т. е. на высоте 1 км имеют место нисходящие движения воздуха со скоростью 1 м/сек.

ГЛАВА IV

ЛОКАЛЬНАЯ, КОНВЕКТИВНАЯ И ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ПРОИЗВОДНЫЕ

Здесь мы ставим своей задачей установить физический смысл и найти выражения производных по времени от плотности, температуры, проекций скорости и других скалярных характеристик жидкости, для которых введем унифицированное обозначение

$$f = f(x, y, z, t).$$

§ 1. ГРАДИЕНТ СКАЛЯРНЫХ ВЕЛИЧИН

Предварительно напомним, что *эквискалярной поверхностью* называется поверхность равных значений скалярной величины, т. е. $f(x, y, z) = \text{const}$. Если построены эквискалярные поверхности, соответствующие значениям функции $f_0, f_0 + \Delta f, f_0 + 2\Delta f$ и т. д., т. е. такие, у которых переход от одной поверхности к соседней сопровождается изменением f на одну и ту же величину Δf , то густота

расположения поверхностей характеризует собой быстроту изменения f : чем ближе друг к другу лежат поверхности, тем быстрее меняется f .

Поместим теперь начало системы координат на какой-либо эквискалярной поверхности (рис. 4.1), направив одну ось n к ней по нормали. Тогда две другие t_1 и t_2 расположатся в соприкасающейся плоскости, за счет чего $\frac{\partial f}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial t_2} = 0$ (в направлении этих осей значение f не меняется).

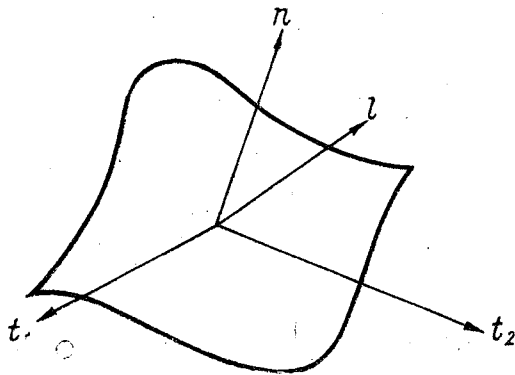


Рис. 4.1

Запишем производную от f по любому направлению l в данной системе координат:

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial t_1} \frac{\partial t_1}{\partial l} + \frac{\partial f}{\partial t_2} \frac{\partial t_2}{\partial l}.$$

В указанной системе координат это эквивалентно равенству

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial n} \cos(n, l),$$

где $\frac{\partial n}{\partial l} = \cos(n, l),$ (4.1)

Максимальное изменение f будет иметь место в том случае, если l совпадает с n ($\cos(n, l) = 1$).

Величина $\frac{\partial f}{\partial n}$ называется градиентом скалярной величины f . Это вектор, характеризующий изменение f при смещении на единицу длины в направлении нормали. Как мы только что установили, модуль градиента равен производной функции по направлению ее быстрого изменения n .

Найдем теперь проекции градиента на оси любым образом заданной прямоугольной системы координат $x y z$. Для этого укажем, что формула (4.1) представляет собой запись проекции градиента на любое направление l . Если, в частности, l совпадает с осью x ($l \equiv x$), то получим x -ю проекцию градиента:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial n} \cos (n, x) \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_x.$$

Аналогично по осям y и z , соответственно:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_y = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad \left(\frac{\partial f}{\partial n} \right)_z = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Таким образом,

$$\frac{\vec{\partial f}}{\partial n} = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}. \quad (4.2)$$

Модуль градиента:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial n} \right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2}. \quad (4.3)$$

Отметим, что градиент часто еще обозначается как $\text{grad } f$. Через посредство оператора Гамильтона он может быть записан в виде ∇f . Таким образом

$$\frac{\vec{\partial f}}{\partial n} \equiv \text{grad } f \equiv \nabla f.$$

В качестве примера запишем градиент для случая, когда $f \equiv v_x$ или $f \equiv p$. Ясно, что:

$$\text{grad } p = \vec{i} \frac{\partial p}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial p}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial p}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = \left\{ \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right\};$$

$$\text{grad } v_x = \vec{i} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial n} = \left\{ \frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_x}{\partial y}, \frac{\partial v_x}{\partial z} \right\}.$$

Аналогично:

$$\frac{\partial v_y}{\partial n} = \left\{ \frac{\partial v_y}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial y}, \frac{\partial v_y}{\partial z} \right\}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial n} = \left\{ \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_z}{\partial y}, \frac{\partial v_z}{\partial z} \right\}.$$

Таким образом, можно констатировать, что градиент вектора скорости $\text{grad } \vec{v}$ выражается через посредство совокупности девяти величин, т. е. является тензором второго ранга:

$$\text{grad } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Отметим, что скалярное поле при переходе к градиенту порождает векторное, а векторное — тензорное с рангом два.

§ 2. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЛОКАЛЬНОЙ, КОНВЕКТИВНОЙ И ИНДИВИДУАЛЬНОЙ ПРОИЗВОДНЫХ

Как известно, полный дифференциал какой-либо скалярной функции $f = f(x, y, z, t)$ записывается в виде

$$df = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz,$$

а полная производная по времени

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

или (поскольку $\frac{dx}{dt} = v_x$, $\frac{dy}{dt} = v_y$, $\frac{dz}{dt} = v_z$)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \quad (4.5)$$

Рассмотрим смысл каждого из слагаемых в выражении (4.5).

1. Локальная производная. Частная производная по времени $\frac{\partial f}{\partial t}$ представляет собой изменение величины f за единицу времени при фиксированных координатах, т. е. дает скорость изменения свойства в неподвижной точке пространства. В силу этого она называется *локальной*. Знак производной характеризует собой возрастание $\left(\frac{\partial f}{\partial t} > 0\right)$ или убывание $\left(\frac{\partial f}{\partial t} < 0\right)$ f во времени.

Показания приборов на станциях гидрометсети соответствуют измерениям локальной производной. Так, например, если имеются

обработанные наблюдения самописцев давления или температуры (рис. 4.2), то для приближенного определения $\frac{\partial p}{\partial t}$ или $\frac{\partial T}{\partial t}$ до-

статочно взять на барограмме или термограмме приращение соот-

ветствующей величины за малый промежуток времени Δt и разделить это приращение на Δt . Очевидно, что барометрическую тенденцию, т. е. приращение давления на станции за 3 часа мы можем рассматривать как приближенное значение локальной производной давления, когда за единицу времени принят промежуток времени, равный 3 часам.

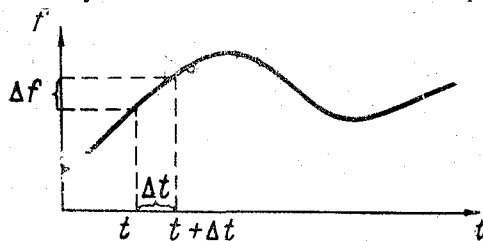


Рис. 4.2.

В случае установившегося движения, по определению которого, характеристики жидкости в любой зафиксированной точке пространства не претерпевают изменения,

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

2. Конвективная производная. Это наименование предопределяется физическим смыслом рассматриваемой производной. Дей-

ствительно, под ней подразумевается сумма $v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z}$.

При этом $\frac{\partial f}{\partial x}$ представляет собой приращение f на единицу длины

в направлении оси Ox ; $v_x \frac{\partial f}{\partial x}$ равно приращению f на расстоянии

v_x в том же направлении, т. е. приращению, обусловленному сме-

щением частицы за единицу времени на расстояние v_x в направле-

нии оси Ox . Подобно этому $v_y \frac{\partial f}{\partial y}$ выражает собой приращение f ,

обусловленное смещением частицы в направлении Oy , и аналогич-

ное истолкование получает $v_z \frac{\partial f}{\partial z}$. Сумма всех трех слагаемых равна

приращению f , обусловленному одновременным смещением в на-

правлении каждой координатной оси за единицу времени.

Легко видеть, что конвективную производную можно рассма-

тривать как скалярное произведение двух векторов:

$$\vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k},$$

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

и записывать ее в виде: $(\vec{v} \cdot \text{grad } f)$.

Нетрудно и этому выражению дать физическое истолкование, ибо

$$(\vec{v} \cdot \text{grad } f) = |\vec{v}| |\text{grad } f| \cos(\vec{v}, \text{grad } f) = |\vec{v}| \text{grad } f,$$

где $\text{grad } f$ есть проекция $\text{grad } f$ на направление линии тока. В силу этого

$$(\vec{v} \cdot \text{grad } f) = |\vec{v}| \frac{\partial f}{\partial l},$$

причем $\frac{\partial f}{\partial l}$ определяет собой приращение f при смещении на единицу длины по линии тока. Поэтому $|\vec{v}| \frac{\partial f}{\partial l}$ представляет собой

приращение f при смещении по линии тока на отрезок $|\vec{v}|$, т. е. приращение, обусловленное перемещением частицы по линии тока за единицу времени. Вывод тождественный предыдущему.

Конвективная производная обращается в нуль в следующих случаях:

1) когда $\vec{v} = 0$, что соответствует отсутствию перемещения частицы;

2) когда $\text{grad } f = 0$, что соответствует условиям, когда во всех точках, близких к данной точке, f имеет одну и ту же величину (так как производная в данной точке по любому направлению равна нулю). При этом изменение положения частицы в пространстве само по себе не вызывает изменения f ;

3) когда $\vec{v} \perp \text{grad } f$. Это имеет место в том случае, когда частица смещается по эквискалярной поверхности функции f , и в этом случае изменение положения частицы не сопровождается изменением величины f в этой частице.

Наконец, отметим, что, если угол между $\vec{v}$ и $\text{grad } f$ острый ($\cos(\vec{v}, \text{grad } f) > 0$), то f вдоль линии тока возрастает, в противном случае, наоборот, падает.

3. **Индивидуальная производная** *. Для выявления ее физического смысла перепишем (4.5) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{df}{dt} - \left(v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (4.6)$$

* Она еще носит название субстанциональной.

Ясно, что изменение свойства f в точке может вызываться, во-первых, тем, что в нее непрерывно поступает жидкость из других точек. (Это отражает конвективная производная). Так, например, если в нее пришла частица, находившаяся в момент $t-1$ в другой точке, то она принесла в рассматриваемую значение $\dot{f}=\dot{f}$, которое имелось у нее в исходном положении. Во-вторых, за время движения свойства в самой частице также меняются за счет взаимодействия с окружающей средой. (Так, если происходит поглощение тепла, то температура ее повышается). Этот последний фактор, как показывает (4.6), и отражает индивидуальная производная. Иначе говоря, она характеризует изменение рассматриваемой величины в фиксированной частице, которое происходит в процессе ее движения за единицу времени. Указанное изменение оценивается по показаниям прибора, связанного с движущейся массой.

Итак, согласно (4.5), $\frac{df}{dt}$ равна сумме локальной и конвективной производных. В частном случае стационарного движения имеет место равенство индивидуальной и конвективной производных, а в тех случаях, когда конвективная обращается в нуль, $\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t}$. При этом изменение положения частицы в пространстве не вызывает приращения f в точке.

В заключение заметим, что с учетом модификаций записи конвективной производной величина $\frac{df}{dt}$ может быть представлена либо в виде (4.5), либо как:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad } f), \quad (4.7)$$

или

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + |\vec{v}| |\text{grad } f| \cos (\vec{v}, \text{grad } f). \quad (4.8)$$

§ 3. ПРИМЕРЫ

Пример 1. Определение барометрической тенденции по данным судовых наблюдений.

Выражение для индивидуальной производной оказывается справедливым не только применительно к движущейся частице данной среды, но и в том случае, когда нужно записать изменение во времени характеристики среды в каком-либо объекте, перемещающемся относительно среды произвольным образом, например в самолете, на корабле и т. п. В этом случае в формуле (4.7) $\vec{v}$ представляет собой вектор скорости движущегося объекта, а в

формуле (4,5) фигурируют проекции этого вектора на оси координат. Такое обобщение позволяет применить эти формулы к решению практической задачи, с которой встречаются при анализе синоптических материалов.

Барометрической тенденцией называется изменение атмосферного давления в данном пункте за 3 час, т. е. локальная производная давления, при вычислении которой за единицу времени принято 3 час. Задача ставится следующим образом. Известны скорость и направление движения корабля, а также распределение давления на уровне моря (карта изобар). Зная изменение давления за 3 час, показываемое барометром на корабле, определить величину барометрической тенденции в пункте, где находится корабль.

Для определения локальной производной воспользуемся равенством

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{dt} - (\vec{v} \cdot \text{grad } p).$$

Индивидуальная производная $\frac{dp}{dt}$ равна приращению давления за единицу времени, показываемому барометром на корабле.

Конвективная производная определяется следующим выражением:

$$(\vec{v} \cdot \text{grad } p) = (\vec{v} \cdot \text{grad}_1 p) = |\vec{v}| \left| \frac{\partial p}{\partial n_1} \right| \cos \alpha,$$

где $\text{grad}_1 p$ — горизонтальный градиент давления; α — угол между курсом корабля и направлением градиента давления (рис. 4.3).

Скорость корабля обычно указывается в узлах. Поскольку 1 узел = 1 миля/час = 1,85 км/час, то v (км/час) = 1,85 v (узлов);

$\frac{\partial p}{\partial n_1} \approx \frac{\Delta p}{\Delta n_1}$ определяется с помощью

синоптической карты, где величине Δp соответствует разность давления на двух соседних изобарах, равная 5 мб, а Δn_1 представляет собой расстояние между изобарами в километрах, равное расстоянию на карте в сантиметрах, умноженному на 100.

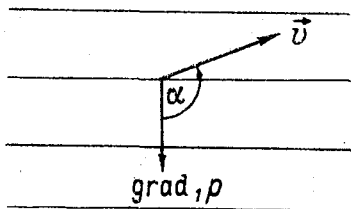


Рис. 4.3

Таким образом,

$$(\vec{v} \cdot \text{grad } p) = 1,85 v \text{ (узлов)} \frac{5}{\Delta n_1 (\text{см}) \cdot 100} \cos \alpha =$$

$$= 0,093 \frac{v (\text{узлов}) \cos \alpha}{\Delta n_1 (\text{см})} \text{ (мб/час)},$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} \left(\frac{\text{мб}}{\text{час}} \right) = \frac{dp}{dt} \left(\frac{\text{мб}}{3 \text{ час}} \right) - 0,093 \frac{v (\text{узлов})}{\Delta n_1 (\text{см})} \cos \alpha$$

и окончательно

$$\frac{\partial p}{\partial t} \left(\frac{\text{мб}}{3 \text{ час}} \right) = \frac{dp}{dt} \left(\frac{\text{мб}}{3 \text{ час}} \right) - 0,28 \frac{v (\text{узлов})}{\Delta n_1 (\text{см})} \cos \alpha.$$

Пример 2. Изобары на синоптической карте представляют собой параллельные линии, расположенные в широтном направлении на расстоянии 1 см друг от друга; давление растет с юга на север (рис. 4.4). Корабль в точке А движется в северо-западном направлении со скоростью 30 узлов, причем барометр на нем показывает рост давления на 2 мб за 3 часа. Определим величину барометрической тенденции в точке А:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 2 - 0,28 \frac{30}{1} \cos 45^\circ = -4 \left(\frac{\text{мб}}{3 \text{ час}} \right).$$

Таким образом, действительная величина барометрической тенденции равна не $+2 \frac{\text{мб}}{3 \text{ час}}$, как показывает барометр на корабле, а $-4 \frac{\text{мб}}{3 \text{ час}}$. Легко понять, что отличие объясняется тем,

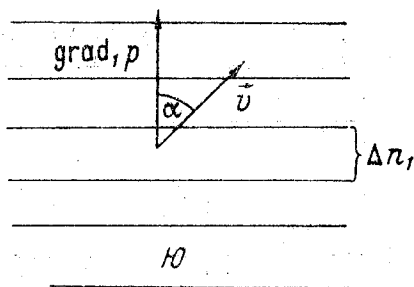


Рис. 4.4

что за 3 час корабль смещается в сторону высокого давления на 90 миль или на 63 мили (118 км) по нормали к изобарам. Смещение корабля само по себе приводит к росту давления на 6 мб за 3 час и этот рост перекрывает отрицательную барометрическую тенденцию, т. е. общее падение давления в рассматриваемом районе. В силу этого барометр на корабле показывает величину разности $6 - 4 = +2$ мб за 3 час.

Различие между показаниями барометра на корабле и истинной величиной барометрической

тенденции, очевидно, оказывается тем большим, чем больше скорость корабля, чем сильнее его курс отклоняется от направления изобар, чем гуще располагаются изобары.

§ 4. УСКОРЕНИЕ

1. Запись ускорения в декартовых координатах и векторной форме. Если последовательно положить $f \equiv v_x$, $f \equiv v_y$, $f \equiv v_z$, то, согласно (4.5), получим, соответственно, производные от проекций скорости на оси координат, т. е. проекции ускорения. Они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

В тензорных обозначениях три последние зависимости можно записать более компактно, в виде одной формулы:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}. \quad (4.9')$$

Из приведенных формул мы видим, что проекции ускорения, а следовательно, и само ускорение, складывается из локального и конвективного ускорений. Первое может быть оценено по показаниям прибора, способного непрерывно регистрировать скорость и неподвижно укрепленного в данной точке пространства. Примерами таких приборов могут служить: в метеорологии — анеморумбограф, в гидрологии — гидрометрическая вертушка. Индивидуальное изменение скорости, т. е. полное ускорение частицы, легко получить через посредство показаний регистратора скорости, неподвижно скрепленного с движущейся частицей. По разности этих величин можно определить и конвективную составляющую.

Умножая 1-е, 2-е и 3-е уравнения (4.9) соответственно на $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ и складывая результаты, получим выражение для ускорения в векторной форме:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}. \quad (4.10)$$

Здесь $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$ представляет собой скалярное произведение вектора скорости на оператор Гамильтона, т. е.

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \equiv v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \text{а}$$

$$(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \equiv v_j \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j}^*$$

Формула (4.10) еще раз подтверждает, что полное ускорение, выражаемое индивидуальной производной от вектора скорости, складывается из локального и конвективного. Смысл производных при переходе к векторным величинам, естественно, не меняется, так что можно констатировать следующее. Ускорение частицы обусловлено изменением поля скорости в точке и изменением положения частиц в пространстве. Подчеркнем еще раз, что факт стационарности

($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$) отнюдь не означает равенства нулю ускорения в целом, ибо сохраняется конвективная составляющая.

2. Запись ускорения плоского движения в натуральных координатах. Касательная к линии тока составляющая ускорения получится, если в равенстве

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}$$

произвести замену: $v_x = v$, $\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial l}$, $v_y = v_n = 0$, $v_z = 0$. В результате получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l}. \quad (4.11)$$

Это выражение характеризует собой индивидуальное изменение модуля скорости: $\frac{\partial v}{\partial t}$ есть локальная производная, $v \frac{\partial v}{\partial l}$ — конвективная производная ($\frac{\partial v}{\partial l}$ представляет собой приращение модуля скорости при смещении вдоль линии тока на единицу длины, $v \frac{\partial v}{\partial l}$ — приращение модуля при смещении частицы на расстояние v , проходимое за единицу времени). Нормальную составляющую ускорения найдем, воспользовавшись выражением

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z},$$

* В соответствии с принятым в физической литературе соглашением, если не оговорено противное, будем считать: а) каждый буквенный индекс, записанный один раз, принимает значение 1, 2, 3, т. е. $i, j=1, 2, 3$; б) по дважды встречающемуся индексу подразумевается суммирование от 1 до 3, так что запись $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ эквивалентна сумме $\sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

в котором произведем замену: $v_x = v$, $v_y = v_n = 0$, $v_z = 0$. Заметим, что хотя в начале координат $v_n = 0$, но производные от v_n , вообще говоря, нулю не равны. Так,

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_n}{\partial l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{v \Delta \alpha}{\Delta l} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{v \Delta \alpha}{R \Delta \alpha} = \frac{v}{R},$$

где $\Delta \alpha$ — угол поворота вектора скорости на малом отрезке линии тока Δl ; R — радиус кривизны.

Таким образом,

$$\frac{dv_n}{dt} = \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{R}. \quad (4.12)$$

Величина $\frac{v^2}{R}$ представляет собой конвективную производную от нормальной составляющей скорости, обусловленную поворотом вектора скорости при смещении вдоль линии тока и называемую, как известно, центростремительным ускорением.

ГЛАВА V

ЦИРКУЛЯЦИЯ СКОРОСТИ

§ 1. ПОНЯТИЕ И ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЦИРКУЛЯЦИИ СКОРОСТИ

1. Циркуляция вектора скорости. Пусть в поле вектора $\vec{a} = \{x, y, z\}$ проведена замкнутая кривая l , не пересекающая саму себя и не содержащая особых точек. Будем называть ее контуром $\vec{l}$, если дополнительно задано направление обхода, т. е. ориентация кривой. В каждой точке контура определен вектор $\vec{a}$ и, следовательно, его проекция на $\vec{l}$.

Циркуляцией вектора по контуру называется криволинейный интеграл от проекции вектора на контур, т. е. $\oint_l \vec{a} \cdot d\vec{l}$. Он считается положительным, если направление интегрирования совпадает с ориентацией контура, и отрицательным, если контур ориентирован противоположно. (Напомним, что положительная ориентация соответствует случаю, когда внешняя нормаль при обходе оставляет контур слева).

Выражение для циркуляции, согласно определению, может быть записано в одной из следующих форм:

$$\oint_l (\vec{a} \cdot d\vec{l}) = \oint_l a_i dl = \oint_l a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Соответственно, циркуляция вектора скорости:

$$\Gamma = \oint_l (\vec{v} \cdot d\vec{l}) = \oint_l v_i dl = \oint_l v_x dx + v_y dy + v_z dz. \quad (5.1)$$

2. **Примеры определения Г.** Чтобы нагляднее понять смысл Г можно представить себе, что с контуром совпадает лента, на которой имеется большое число лопастей (рис. 5.1). Если циркуляция скорости положительна, то лопасти будут двигаться в направлении ориентации контура, причем скорость перемещения Γ ; если же она отрицательна, то лопасти будут двигаться в направлении, противоположном ориентации контура.

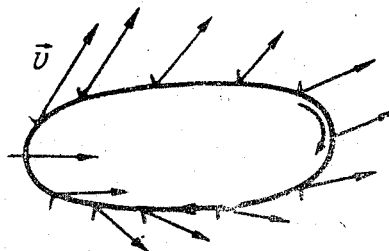


Рис. 5.1

Пример 1. Поток представляет собой вихрь с радиусом ядра r_0 и угловой скоростью вращения жидкости в ядре α , причем вращение происходит против часовой стрелки (рис. 5.2).

Найдем циркуляцию скорости по контуру $ABCD$, лежащему внутри ядра и ограниченному двумя дугами AD и BC , радиусы которых $r_1 < r_2 < r_0$, и отрезками AB и DC радиусов, угол между которыми равен α . Направление обхода контура полагаем противоположным движению часовой стрелки.

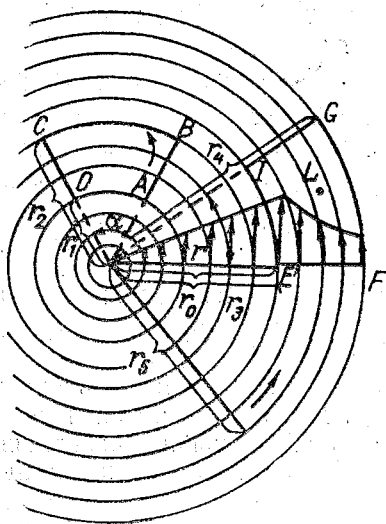


Рис. 5.2

$$\oint_{(ABCD)} v_i dl = \int_{(AB)} v_i dl + \int_{(BC)} v_i dl + \int_{(CD)} v_i dl + \int_{(DA)} v_i dl.$$

На участках AB и CD $v_i = 0$, так как здесь вектор скорости перпендикулярен к пути интегрирования, на участке BC $v_i = ar_2$, на участке DA $v_i = -ar_1$, поскольку в последнем случае скорость направлена по касательной в сторону, противоположную направлению обхода. Таким образом,

$$\begin{aligned} \oint_{(ABCD)} v_i dl &= \int_{(BC)} ar_2 dl - \int_{(DA)} ar_1 dl = ar_2 \overline{BC} - ar_1 \overline{DA} = \\ &= ar_2 r_2 \alpha - ar_1 r_1 \alpha = a \alpha (r_2^2 - r_1^2). \end{aligned}$$

Если изменить ориентацию контура, т. е. производить обход в направлении движения часовой стрелки, то циркуляция изменит знак, сохранив свою абсолютную величину.

Пример 2. Найдем в том же потоке циркуляцию скорости по контуру $EFGIE$, лежащему вне ядра и ограниченному дугами EI и FG , радиусы которых r_2 и r_4 , и отрезками радиусов, угол между которыми равен β :

$$\oint_{(EFGIE)} v_l dl = \int_{(EF)} v_l dl + \int_{(FG)} v_l dl + \int_{(GI)} v_l dl + \int_{(IE)} v_l dl.$$

На участках EF и GI $v_l = 0$, на участке FG $v_l = \frac{C}{r_4}$, где $C = ar_0^2$ (см. § 3 гл. II), на участке IE $v_l = -\frac{C}{r_3}$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{(EFGIE)} v_l dl &= \int_{(FG)} \frac{C}{r_4} dl - \int_{(IE)} \frac{C}{r_3} dl = \frac{C}{r_4} \widehat{FG} - \frac{C}{r_3} \widehat{IE} = \\ &= \frac{C}{r_4} \beta r_4 - \frac{C}{r_3} \beta r_3 = 0. \end{aligned}$$

Пример 3. Найдем в том же потоке циркуляцию скорости по контуру l , представляющему собой окружность радиуса r_5 , охватывающую ядро и обходимую в направлении, противоположном часовой стрелке:

$$\begin{aligned} \int_{(l)} v_l dl &= \int_{(l)} \frac{C}{r_5} dl = \\ &= \frac{C}{r_5} 2\pi r_5 = 2\pi C = 2\pi ar_0^2. \end{aligned}$$

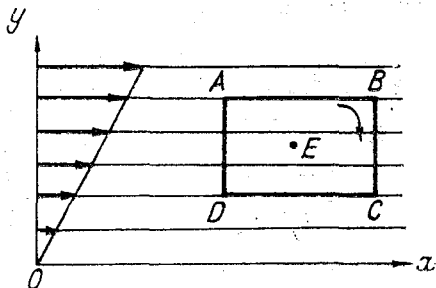


Рис. 5.3

Пример 4. Линии тока представляют собой прямые, параллельные оси Ox причем величина скорости меняется по закону $v = ky$ (рис. 5.3).

Найдем циркуляцию скорости по контуру $ABCD$, где $AB = CD = m$, $AD = BC = n$.

$$\begin{aligned} \oint_{(ABCD)} v_l dl &= \int_{(AB)} v_l dl + \int_{(BC)} v_l dl + \int_{(CD)} v_l dl + \int_{(DA)} v_l dl = \\ &= \int_{(AB)} ky_A dl + \int_{(CD)} (-ky_D) dl \end{aligned}$$

поскольку на участках BC и DA $v_t=0$, а на участке CD $v_t = -ky_D$.

Таким образом,

$$\oint_{(AB\bar{C}DA)} v_t dl = ky_A AB - ky_D CD = km (y_A - y_D) = kmn.$$

Если известно распределение скорости по контуру, то циркуляция скорости по этому контуру определяется однозначным образом. Однако обратное не имеет места: знание величины циркуляции по данному контуру не позволяет однозначно судить о распределении скорости вдоль контура. Так, в последнем примере величина циркуляции kmn будет получаться и в том случае, когда на фигурирующее там поле скорости будет наложен общий перенос со скоростью $\vec{v}_0$. Тогда скорость станет равной $\vec{v} + \vec{v}_0$ и

$$\oint_{(AB\bar{C}DA)} (\vec{v} + \vec{v}_0) dl = \oint_{(AB\bar{C}DA)} v_t dl + \oint_{(AB\bar{C}DA)} v_{0t} dl = \oint_{(AB\bar{C}DA)} v_t dl = kmn,$$

поскольку циркуляция постоянного вектора $\vec{v}_0$, как легко видеть, равна нулю. На рис. 5.4 показаны различные поля скорости, при которых циркуляция скорости по контуру $AB\bar{C}DA$ имеет одно и то же значение kmn . Под каждым чертежом указан вектор $\vec{v}_0$, прибавление которого к скоростям примера 4 дает показанные на чертеже скорости.

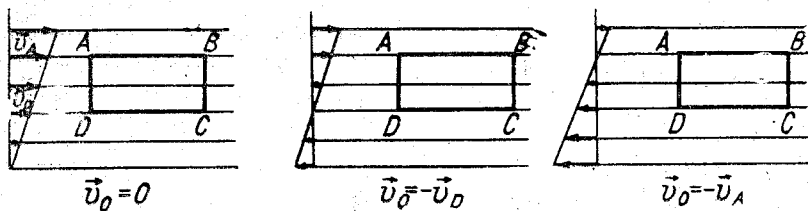


Рис. 5.4

В частности, из того факта, что циркуляция по данному контуру имеет положительный знак, вовсе не следует, что векторы скорости во всех точках контура ориентированы в направлении обхода контура или имеют слагающую в этом направлении.

3. Циркуляция в плоском движении. В приведенных выше примерах рассматривалась циркуляция скорости в ряде конкретных случаев плоско-параллельного движения, причем брались контуры, лежащие в плоскости движения. Установим важное для дальнейшего свойство циркуляции при плоском движении: в случае плоско-параллельного движения циркуляция скорости по любому

контур равна циркуляции скорости по проекции этого контура на плоскость движения.

Для доказательства представим элемент контура в виде векторной суммы:

$$\vec{dl} = \vec{dl}' + \vec{dl}'',$$

где $\vec{dl}'$ представляет собой составляющую элемента $\vec{dl}$, лежащую в плоскости движения, а $\vec{dl}''$ — составляющую, перпендикулярную к этой плоскости (рис. 5.5). Тогда $\oint_{(l)} \vec{v} d\vec{l} = \oint_{(l)} \vec{v} d\vec{l}' + \oint_{(l)} \vec{v} d\vec{l}''$.

Второй интеграл правой части равен нулю, так как во всех точках контура $\vec{v} \perp \vec{dl}''$. В первом интеграле $\vec{v}$ берется в точках контура, в то время как $\vec{dl}'$ представляет собой элемент проекции l' контура на плоскость движения. Но так как в случае плоско-параллельного движения во всех точках прямой, перпендикулярной к плоскости движения, скорость имеет одну и ту же величину, то $\vec{v}$ представляет собой скорость в соответствующих точках контура l' и, следовательно:

$$\oint_{(l)} \vec{v} d\vec{l} = \oint_{(l')} \vec{v} d\vec{l}',$$

или

$$\oint_{(l)} v_t dl = \oint_{(l')} v_t dl',$$

что и нужно было доказать.

Из доказанного положения следует, в частности, что циркуляция скорости по любому контуру, лежащему в плоскости, перпендикулярной к плоскости движения, будет равна нулю.

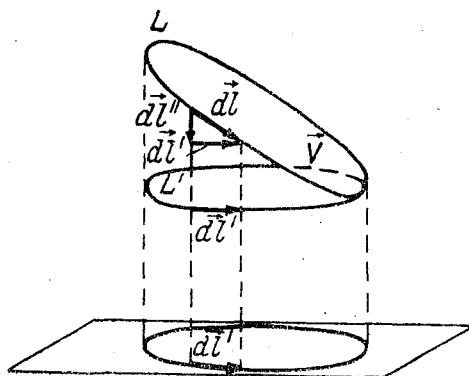


Рис. 5.5

§ 2. СВЯЗЬ МЕЖДУ ЦИРКУЛЯЦИЕЙ СКОРОСТИ И ПОЛЕМ РОТОРА СКОРОСТИ

1. Физический смысл взаимосвязи завихренности и циркуляции.

Предположим, что в поле вектора скорости $\vec{v}$ имеется поверхность σ , натянутая на некоторый контур $\vec{l}$. Если во всех точках

этой поверхности вектор $\vec{v}$ определен и непрерывен вместе со своими частными производными, то справедлива теорема Стокса (см. сноску на стр. 44), которую мы перефразируем по отношению к скорости. Именно: циркуляция скорости по контуру $\vec{l}$ равна потоку ротора скорости через поверхность, натянутую на этот контур, т. е.

$$\Gamma = \oint_{\vec{l}} v_i dl_i = \oint_{\sigma} \text{rot}_n \vec{v} d\sigma.$$

При этом ориентация нормалей к поверхности связана с ориентацией контура правилом правого винта.

Или, используя общепринятое обозначение $\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\Omega}$:

$$\Gamma = \int_{\sigma} \Omega_n d\sigma. \quad (5.2)$$

Если взять малые $\sigma \sim \Delta\sigma$ и $\Gamma \sim \Delta\Gamma$, то, воспользовавшись теоремой о среднем из (5.2), получим

$$\bar{\Omega}_n = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta\sigma}.$$

В пределе

$$\Omega_n = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta\sigma} = \frac{d\Gamma}{d\sigma}, \quad (5.3)$$

т. е.

$$d\Gamma = \Omega_n d\sigma.$$

Таким образом, мы убеждаемся, что наличие циркуляции по бесконечно малому контуру $\Delta l \rightarrow 0$, связано с наличием потока вихря через площадку $\Delta\sigma \rightarrow 0$, выражаемого величиной $\Delta\Gamma$ и $\Delta\sigma$. Или, в предельном случае, наличием Ω_n в рассматриваемой точке.

Для того, чтобы дать физическое истолкование связи между циркуляцией и потоком вихря, рассмотрим произвольную поверхность σ , ограниченную контуром l . Разобьем эту поверхность на малые площадки $\Delta\sigma$, ограниченные элементарными контурами dl , которые мы будем считать ориентированными так же, как и контур l . В этом случае

$$\Gamma = \int d\Gamma, \quad (5.4)$$

где $d\Gamma$ — циркуляция по контуру, ограничивающему площадку $d\sigma$.

Действительно, как видно из рис. 5.6, линейные интегралы по общим участкам соседних контуров будут иметь одинаковую абсолютную величину, но противоположные знаки. Поэтому при суммировании циркуляции по всем элементарным контурам в ре-

зультате останутся лишь линейные интегралы по участкам, лежащим на контуре l , сумма которых дает $\oint_{(l)} v_i dl = \Gamma$.

Таким образом можно констатировать, что наличие циркуляции обусловлено завихренностью жидкости или, иначе говоря, вращением жидкости в каждой точке

с угловой скоростью $\frac{1}{2} \vec{\Omega}$.

Применим формулу (5.2) к вычислению циркуляции скорости в примерах § 1 этой главы. В примере 1 ротор скорости направлен от чертежа к читателю и по модулю равен $2a$. Беря за поверхность σ плоскость контура $ABCD$ и учитывая, что нормали к поверхности σ по направлению будут совпадать с $\text{rot } \vec{v}$, получаем

$$\oint_{(ABCD)} v_i dl = \int_{(\sigma)} 2a d\sigma = 2a \left(\frac{\pi r_2^2}{2} - \frac{\pi r_1^2}{2} \right) = \pi a (r_2^2 - r_1^2).$$

В примере 2 $\text{rot } \vec{v} = 0$ и $\oint_{(EFGIE)} v_i dl = 0$.

В примере 3 $\text{rot}_n \vec{v} = 0$ на части поверхности, не принадлежащей к ядру. Поэтому.

$$\oint_l v_i dl = 2a \cdot \pi r_0^2. \quad (5.5)$$

Легко видеть, что этой же величине будет равна циркуляция по любому контуру, охватывающему ядро вихря.

Наконец, в примере 4 ротор скорости направлен в глубь чертежа и по модулю равен k . Поэтому

$$\oint_{(ABCD)} v_i dl = \int_{(\sigma)} k d\sigma = kmn. \quad (5.6)$$

Как видно, с помощью теоремы Стокса мы пришли к тем же результатам, что и при непосредственном вычислении циркуляции скорости.

2. Интенсивность вихревой трубки. Прежде всего, определим интенсивность вихревой трубки как величину потока вихря, проходящего через какое-либо ее сечение и далее выявим ее основное

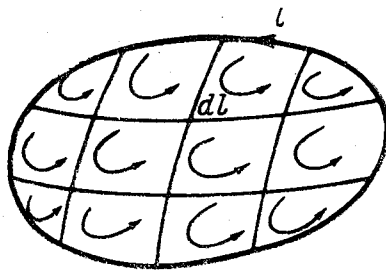


Рис. 5.6

свойство. Для этого рассмотрим объем τ , заключенный внутри вихревой трубки и ограниченный двумя произвольно выбранными основаниями σ_1 и σ_2 (см. рис. 5. 7). В соответствии с формулой (3.2), можно записать

$$\oint_{\sigma} \Omega_n d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{div} \vec{\Omega} d\tau \quad (5.7)$$

($\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, σ_3 — боковая поверхность). В векторном анализе доказывается равенство $\operatorname{div} \vec{\Omega} = 0^*$. Если подинтегральная функция непрерывна и дифференцируема, что мы предполагаем, то это означает равенство нулю правой части (5.7). Таким образом,

$$\oint_{\sigma} \Omega_n d\sigma = 0.$$

Или, что эквивалентно:

$$-\int_{\sigma_1} \Omega_n d\sigma + \int_{\sigma_2} \Omega_n d\sigma + \int_{\sigma_3} \Omega_n d\sigma = 0.$$

В этом равенстве перед первым интегралом взят знак минус, ибо мы считаем, что поток втекает через σ_1 , т. е. направлен против внешней нормали. Кроме того, $\int_{\sigma_3} \Omega_n d\sigma \equiv 0$, ибо σ_3 есть по-

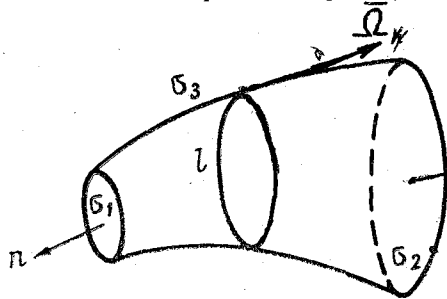


Рис. 5.7

верхность трубки тока, в силу чего $\Omega_n = 0$. Таким образом приходим к равенству:

$$\int_{\sigma_1} \Omega_n d\sigma = \int_{\sigma_2} \Omega_n d\sigma. \quad (5.8)$$

Оно означает, что интенсивность вихревой трубки есть величина постоянная. Из (5.8) ясно также, что количество вихревых ли-

ний, вошедших через одно сечение, равно количеству вошедших через другое. Отсюда следует вывод, что внутри трубки тока вихревые линии не могут ни начинаться, ни заканчиваться, ибо иначе это привело бы к нарушению равенства. (Но они могут замыкаться сами на себя).

* Его легко проверить, раскрывая выражение $\operatorname{div} \vec{\Omega} = \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \Omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \Omega_z}{\partial z}$ после подстановки в него значений проекций ротора (2.11).

Поскольку циркуляция по любому контуру, охватывающему вихревую трубку, согласно формуле Стокса $\Gamma = \oint_l v_i dl = \int_{\sigma} \Omega_n d\sigma$, то,

учитывая полученный выше результат $\int_{\sigma} \Omega_n d\sigma = \text{const}$, будем иметь

$$\Gamma = \oint_l v_i dl = \text{const}. \quad (5.9)$$

Следовательно циркуляция по любому контуру, охватывающему вихревую трубку, равна одной и той же величине. Это означает, например, что если в сосуде с небольшим отверстием жидкость, в силу каких-либо причин, начала вращаться, то при истечении она будет резко закручиваться. (Стенки сосуда можно трактовать как вихревую поверхность).

§ 3. УСКОРЕНИЕ ЦИРКУЛЯЦИИ (1 ТЕОРЕМА ТОМПСОНА)

Будем называть жидким контуром непрерывный ряд одних и тех же частиц жидкости, образующих замкнутую линию, на которой задано направление обхода (ориентация). Во время перемещения эта линия деформируется, растягивается или укорачивается, но можно показать, что в непрерывном скоростном поле она все время остается замкнутой. Приращение тех или иных величин при элементарном перемещении вдоль контура, положение которого в некоторый момент зафиксировано, будем обозначать буквой δ . В соответствии с этим циркуляция скорости по контуру в данный момент времени определяется выражением

$$\Gamma = \oint_{(t)} v_i dl.$$

При движении жидкости циркуляция скорости по данному жидкому контуру будет меняться. Это будет происходить как за счет изменения каждого элемента δl длины контура, его растяжения или укорачивания, так и за счет изменения v_i , поскольку меняется модуль вектора $\vec{v}$ и наклон вектора по отношению к элементу контура. Это видно из рис. 5.8, где показано положение контура в два последовательных момента времени t_1 и t_2 .

Субстанциональная производная

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_{(t)} v_i \delta l, \quad (5.10)$$

т. е. приращение циркуляции скорости по жидкому контуру при перемещении контура за единицу времени, условно называется *ускорением циркуляции*.

Наряду с вектором скорости в каждой точке потока в данный момент времени можно определить вектор ускорения соответствующей частицы и тем самым выделить поле ускорения. При этом циркуляция ускорения по контуру в данный момент времени определится выражением

$$\oint_{(i)} \frac{dv_i}{dt} \delta l.$$

Теорема Томпсона. Ускорение циркуляции равно циркуляции ускорения.

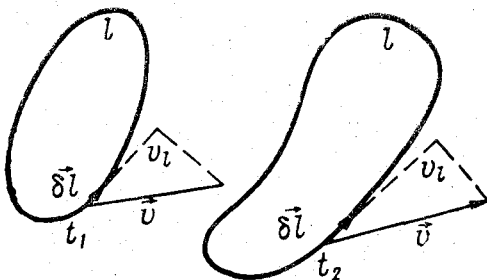


Рис. 5.8

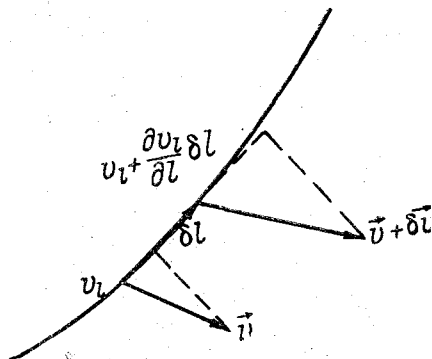


Рис. 5.9

Для доказательства произведем дифференцирование в правой части равенства (5.10):

$$\frac{d}{dt} \oint_{(i)} v_i \delta l = \oint_{(i)} \frac{dv_i}{dt} \delta l + \oint_{(i)} v_i \frac{d}{dt} \delta l.$$

Первое слагаемое правой части выражает собой вклад в изменение циркуляции, обусловленный исключительно изменением проекции v_i скорости. Второе слагаемое представляет собой часть изменения, обусловленную удлинением (в алгебраическом смысле)

элементов контура при его перемещении. Производная $\frac{d}{dt} \delta l$ вы-

ражает собой величину удлинения отрезка δl за единицу времени. Легко видеть, что это удлинение может произойти лишь в результате различия касательных составляющих скорости на концах элемента (рис. 5.9). За малый отрезок времени Δt начало элемента

пройдет в направлении касательной расстояние $v_l \Delta t$, конец — расстояние $\left(v_l + \frac{\partial v_l}{\partial l} \delta l\right) \Delta t$, и приращение длины элемента окажется равным $\frac{\partial v_l}{\partial l} \delta l \Delta t$. За единицу времени удлинение составит величину $\frac{\partial v_l}{\partial l} \delta l$. Таким образом,

$$\frac{d}{dt} \delta l = \frac{\partial v_l}{\partial l} \delta l$$

и

$$\oint_{(l)} v_l \frac{d}{dt} \delta l = \oint_{(l)} v_l \frac{\partial v_l}{\partial l} \delta l = \oint_{(l)} \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v_l^2}{2} \right) \delta l = \oint_{(l)} \delta \left(\frac{v_l^2}{2} \right) = 0,$$

поскольку интегрирование по замкнутому контуру в том случае, когда под интегралом находится полный дифференциал, дает нуль. Поэтому

$$\frac{d}{dt} \oint_{(l)} v_l \delta l = \oint_{(l)} \frac{dv_l}{dt} \delta l,$$

что и доказывает теорему. Итак,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_{(l)} \frac{dv_l}{dt} \delta l. \quad (5.11)$$

ГЛАВА VI

ФУНКЦИЯ ТОКА И ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТИ

Для определения поля скорости в общем случае нужно найти три скалярные функции координат и времени v_x , v_y и v_z . Однако в некоторых случаях движения существует такая скалярная функция, производные которой по координатам равны проекциям скорости. В этих случаях для определения поля скорости достаточно найти одну лишь эту функцию, что значительно упрощает задачу. Такой функцией в одних случаях служит функция тока, в других — потенциал скорости.

§ 1. ФУНКЦИЯ ТОКА ДЛЯ ПЛОСКО-ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

1. Понятие и важнейшие свойства функции тока. Рассмотрим плоско-параллельное движение. *Функцией тока* будем называть такую скалярную функцию координат и времени, градиент кото-

рой равен по модулю скорости, но повернут относительно вектора скорости на 90° , в одном и том же направлении во всех точках (рис. 6.1).

Располагая оси Ox и Oy так, чтобы поворот от первой оси ко второй происходил бы в том же направлении, что поворот от $\vec{v}$ к $\text{grad } \Psi$, имеем:

$$\text{grad}_x \Psi = -v_y, \quad \text{grad}_y \Psi = v_x.$$

Иными словами, Ψ это такая функция, производные которой по координатам удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v_y, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x. \quad (6.1)$$

Отсюда следует, что если Ψ_1 есть функция тока, то и $\Psi_1 + C$, где C — произвольная постоянная, также будет функцией тока. Иначе говоря, функция тока определяется с точностью до аддитивной произвольной постоянной.

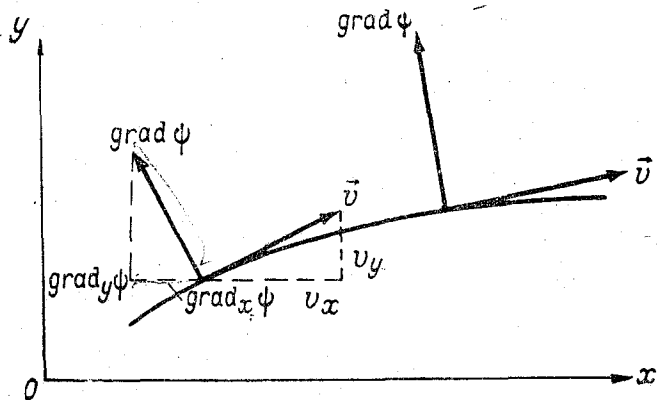


Рис. 6.1

Если известна функция тока, то равенство (6.1) позволяет без труда найти проекции скорости. Обратная задача, т. е. определение функции тока по полю скорости, разрешима не всегда, так как функция тока существует не во всех случаях движения. Действительно, для существования функции Ψ , удовлетворяющей условиям (6.1), необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$\frac{\partial}{\partial y} (-v_y) = \frac{\partial v_x}{\partial x},$$

$$\frac{z_1 > z_2}{h_1 > h_2} \quad \frac{z_1 > z_2}{p_2 < p_1}$$

так как лишь в этом случае смешанные вторые производные $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y \partial x}$, определяемые из (6.1), будут равны. Это значит, что функция существует в том и только в том случае, когда выполняется условие

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \text{div } \vec{v} = 0.$$

Иначе говоря, введенная вышеуказанным образом функция тока существует лишь в случае плоскопараллельного движения несжимаемой жидкости. Следует указать, что функции тока, определяемые, правда, по-иному, могут быть введены также и для плоскопараллельного движения сжимаемой жидкости и для осесимметричного потока.

Важнейшим свойством функции тока является следующее: во всех точках линии тока функция тока имеет одну и ту же величину. В самом деле, поскольку $\text{grad } \Psi \perp \vec{v}$, а вектор $\vec{v}$ направлен по касательной к линии тока, то проекция $\text{grad } \Psi$ на направление линии тока, т. е. производная $\frac{\partial \Psi}{\partial l}$, равна нулю, и, значит, в направлении линии тока Ψ не меняется. Это означает, что эквискалярные линии функции Ψ , т. е. линии $\Psi = \text{const}$, представляют собой линии тока.

Докажем другое свойство функции тока: разность между значениями функции тока в двух точках равна объему жидкости, протекающей за единицу времени между этими точками, рассчитанному на единицу высоты потока.

Действительно, указанный объем равен, очевидно, потоку Q скорости через цилиндрическую поверхность σ , опирающуюся на линию A, B , которая соединяет обе точки A и B , причем высота поверхности σ равна единице.

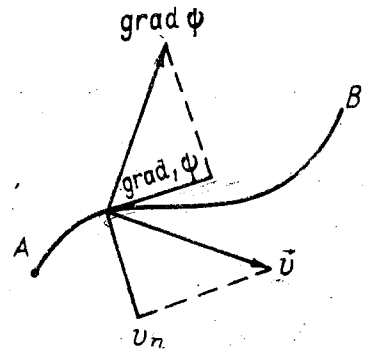


Рис. 6.2

$$Q = \int_{(\sigma)} v_n d\sigma = \int_{(AB)} v_n dl.$$

Но из рис. 6.2 видно, что $v_n = \text{grad}_l \Psi$, т. е. $v_n = \frac{\partial \Psi}{\partial l}$. Поэтому

$$Q = \int_{(AB)} \frac{\partial \Psi}{\partial l} dl = \int_{(AB)} d\Psi = \Psi_B - \Psi_A.$$

Учитывая (6.1), легко выразить Ω_z через Ψ . А именно,

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right).$$

Если движение безвихревое ($\Omega_z=0$), то $\Delta\Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0$.

Функция тока в этом случае удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. является гармонической функцией.

2. Определение функции тока по заданному полю скорости. Эта задача сводится к отысканию функции по известным частным производным. В интересах последующего изложения напомним путь решения подобных задач на следующем конкретном примере.

Найдем функцию F , удовлетворяющую следующим условиям:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 = f_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 + 2y = f_2. \quad (6.2)$$

Функция F существует не при любых f_1 и f_2 , а лишь в том случае, когда последние функции удовлетворяют условию

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial f_2}{\partial x},$$

так как только в этом случае смешанные вторые производные $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$

и $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ будут равны. Легко убедиться в том, что в нашем случае это условие выполняется и, значит, функция F существует.

Для отыскания ее используем сначала первое из условий (6.2). Из него получим

$$F = \int 2xy^3 dx = x^2y^3 + C_1(y),$$

где о величине $C_1(y)$ можно сказать лишь то, что она не зависит от x , но, вообще говоря, может зависеть от y . Действительно дифференцируя последнее равенство по x , тотчас же убеждаемся в том, что оно равносильно первому из равенств (6.2).

Для определения функции $C_1(y)$ используем теперь второе из условий (6.2), которое требует, чтобы имело место равенство

$$\frac{\partial}{\partial y} [x^2y^3 + C_1(y)] = 3x^2y^2 + 2y.$$

Отсюда находим $C_1'(y) = 2y$, $C_1(y) = y^2 + C$, где C — произвольная постоянная, и окончательно

$$F = x^2y^3 + y^2 + C.$$

При отыскании функции тока задача сводится к определению функции Ψ , удовлетворяющей условиям $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v_y$ и $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_x$.

Убедившись в том, что $\frac{\partial(-v_y)}{\partial y} = \frac{\partial v_x}{\partial x}$, т. е. жидкость является несжимаемой, производим определение Ψ в указанном выше порядке. Приведем примеры отыскания Ψ .

а. Плоский источник. Так как в этом случае $v_x = \frac{Qx}{x^2 + y^2}$, $v_y = \frac{Qy}{x^2 + y^2}$, то для определения Ψ имеем равенства:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{Qy}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{Qx}{x^2 + y^2}. \quad (6.3)$$

Условие существования Ψ при этом выполняется, так как выражения для v_x и v_y получены с помощью допущения о несжимаемости жидкости. Используя теперь первое из равенств (6.3), находим

$$\Psi = - \int \frac{Qy dx}{x^2 + y^2} = -Q \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C_1(y).$$

Для определения $C_1(y)$ используем второе из равенств (6.3):

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[-Q \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C_1(y) \right] = \frac{Qx}{x^2 + y^2},$$

откуда $C_1'(y) = 0$, т. е. $C_1(y) = \text{const} = C_2$. Таким образом,

$$\Psi = -Q \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \text{const}. \quad (6.4)$$

Уравнение линий тока плоского источника найдем, приравняв функцию тока постоянной величине. Тогда получим $Q \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + C_2 = \text{const}$, что равносильно равенству $\frac{x}{y} = C_3$ или $y = C_4 x$, где C_4 — произвольная постоянная. Отсюда следует, что линии тока представляют собой лучи, исходящие из начала координат, в чем легко убедиться непосредственно.

В случае плоского стока функция тока имеет вид

$$\Psi = Q \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \text{const}. \quad (6.5)$$

б. Безвихревое вращение жидкости. В случае вращения против часовой стрелки мы имеем: $v_x = -\frac{Cy}{x^2+y^2}$, $v_y = \frac{Cx}{x^2+y^2}$. Поэтому для определения Ψ служат равенства:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{Cx}{x^2+y^2}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \frac{Cy}{x^2+y^2}.$$

Условие существования Ψ выполняется, так как жидкость является несжимаемой. С помощью рассуждений, аналогичных предыдущим, находим:

$$\Psi = -C \ln(x^2+y^2) + \text{const.} \quad (6.6)$$

Уравнение линий тока $\Psi = \text{const}$ сведется, очевидно, к уравнению семейства концентрических окружностей $x^2+y^2 = \text{const}$. (Результат совпадает с полученным ранее, см. § 3, гл. II).

В случае безвихревого вращения по часовой стрелке будем иметь:

$$\Psi = C \ln(x^2+y^2) + \text{const.} \quad (6.7)$$

в. Источник+безвихревое вращение по часовой стрелке (модель стационарного антициклона).

В случае сложного движения, складывающегося из двух движений со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, для определения Ψ имеем уравнения:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -v_{1y} - v_{2y}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = v_{1x} + v_{2x}.$$

Очевидно, что если Ψ_1 и Ψ_2 — функции тока каждого из движений, то сумма их $\Psi_1 + \Psi_2$ будет удовлетворять написанным уравнениям, т. е. будет являться функцией тока сложного движения.

Если сложное движение складывается из движения в плоском источнике и безвихревого вращения по часовой стрелке, как это можно было бы представить, моделируя движение в антициклоне, то функция тока получится путем сложения выражения (6.4) и (6.7)

$$\Psi = -Q \arctg \frac{x}{y} + C \ln(x^2+y^2) + \text{const.} \quad (6.8)$$

Уравнение линий тока в этом случае имеет вид

$$-Q \arctg \frac{x}{y} + C \ln(x^2+y^2) = \text{const.}$$

Если перейти к полярным координатам, положив $\frac{x}{y} = \operatorname{ctg} \varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$, то будем иметь

$$-Q \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + C \ln r^2 = \text{const}$$

откуда

$$r = k e^{-\frac{Q}{2C} \varphi}, \quad (6.9)$$

где k — произвольная постоянная. Легко убедиться в том, что линии, соответствующие этому уравнению, представляют собой логарифмические спирали.

Движение в стационарном циклоне можно моделировать как сумму движения в стоке и безвихревого вращения против часовой стрелки. Путем рассуждений, подобных предыдущим, получим выражение для функции тока в этом случае:

$$\Psi = Q \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} - C \ln(x^2 + y^2) + \text{const}, \quad (6.10)$$

а линии тока будут определяться уравнением вида (6.9), т. е. будут представлять собой логарифмические спирали.

Таким образом, линии тока в стационарном циклоне и в стационарном антициклоне близки к логарифмическим спиралям. Определяя функцию тока для сложного движения: плоский сток + безвихревое движение против часовой стрелки + равномерный перенос, можно без труда найти линии тока для случая равномерно перемещающегося циклона. Аналогичным образом можно моделировать движение и определить функцию тока и линии тока в ряде других случаев движения в атмосфере.

§ 2. ПОТЕНЦИАЛ СКОРОСТИ

1. Понятие и важнейшие свойства потенциала скорости.

Потенциалом скорости называется скалярная функция φ , градиент которой равен скорости:

$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{v}. \quad (6.11)$$

Иными словами, φ — это функция, удовлетворяющая условиям:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_y, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_z \quad (6.12)$$

или условию

$$d\varphi = v_x dx + v_y dy + v_z dz. \quad (6.13)$$

Очевидно, что если некоторая функция φ удовлетворяет равенствам (6.11), (6.12) или (6.13), то и функция $\varphi + C$, где C — произвольная постоянная, будет удовлетворять им. Таким образом, потенциал скорости определяется с точностью до аддитивной произвольной постоянной.

Эквипотенциальные поверхности функции φ называются *эквипотенциальными поверхностями*.

Если потенциал скорости известен, то равенства (6.12) позволяют тотчас же найти проекции скорости. Обратная задача, т. е. определение φ по известному полю скорости, разрешима не всегда, так как потенциал скорости существует лишь при выполнении определенных условий. В самом деле, в математике показывается, что для существования функции φ , удовлетворяющей условиям (6.12) или условию (6.13), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (6.14)$$

(очевидно, что лишь в этом случае смешанные вторые производные от φ не будут зависеть от порядка дифференцирования).

Равенства (6.14) равносильны условиям

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \text{rot}_z \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = \text{rot}_y \vec{v} = 0, \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \text{rot}_x \vec{v} = 0$$

или условию

$$\text{rot } \vec{v} = 0.$$

С учетом этих равенств, из теоремы Стокса следует, что

$$\Gamma = \oint v_i dl = 0.$$

Таким образом, для существования потенциала скорости необходимо и достаточно, чтобы движение было безвихревым. Отсюда вытекает, в частности, что в случае потенциального движения линии тока не могут быть замкнуты. Действительно циркуляция по замкнутой линии тока не может быть равна нулю, ибо суммирование проекций скорости идет по всему контуру с одним и тем же знаком. С другой стороны, в нашем случае $\Gamma \equiv 0$. Полученное противоречие и доказывает высказанное выше утверждение.

Укажем важнейшие свойства φ .

а. Эквипотенциальные поверхности и линии тока взаимно ортогональны, так как в каждой точке поверхности $\varphi = \text{const}$ вектор $\text{grad } \varphi = \vec{v}$ нормален к поверхности и в то же время совпадает

по направлению с касательной к линии тока. (Очевидно, что в направлении движения φ растет). Это же означает, что изолинии φ и Ψ взаимно ортогональны.

б. В случае несжимаемой жидкости потенциал скорости является гармонической функцией. В самом деле, условие несжимаемости означает, что проекции скорости удовлетворяют равенству

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Вводя в него выражения v_x , v_y , v_z из равенства (6.12), получаем

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (6.15)$$

т. е. потенциал скорости представляет собой решение уравнения Лапласа (является функцией гармонической).

Поэтому задачи отыскания поля скорости безвихревого потока несжимаемой жидкости сводятся к отысканию решения уравнения Лапласа, удовлетворяющего граничным условиям, которыми одна задача собственно и отличается от другой.

2. Примеры определения потенциала скорости. Задача об определении потенциала скорости по заданному полю скорости сводится к отысканию функции по ее частным производным. В случае плоско-параллельного движения задача решается подобно тому, как находится функция тока. Приведем примеры определения φ .

а. Плоский источник. В этом случае движение является безвихревым, т. е. потенциал скорости существует и для его определения служат уравнения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{Qx}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{Qy}{x^2 + y^2},$$

откуда получаем

$$\varphi = Q \ln(x^2 + y^2) + \text{const.} \quad (6.16)$$

Эквипотенциальные поверхности $\varphi = \text{const}$ определяются уравнением $x^2 + y^2 = \text{const}$, т. е. представляют собой семейство соосных круговых цилиндров, ось которых совпадает с осью Oz .

В случае плоского стока

$$\varphi = -Q \ln(x^2 + y^2) + \text{const.} \quad (6.17)$$

б. Безвихревое вращение жидкости. Если жидкость вращается против часовой стрелки, то для определения φ имеем уравнения:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{Cy}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{Cx}{x^2 + y^2},$$

из которых находим

$$\varphi = -C \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \operatorname{const}. \quad (6.18)$$

Эквипотенциальные поверхности определяются уравнением $y=kx$, где k — произвольная постоянная, т. е. представляют собой пучок плоскостей, исходящих от оси Oz .

В случае вращения по часовой стрелке

$$\varphi = +C \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x}{y} + \operatorname{const}, \quad (6.19)$$

а эквипотенциальные поверхности также, очевидно, представляют собой пучок плоскостей, проходящих через ось Oz .

Следует указать, что, используя свойство ортогональности линий тока и эквипотенциальных поверхностей, можно в ряде простых случаев определить форму и положение последних непосредственно, исходя из рассмотрения линий тока и не прибегая к определению φ . В частности, это можно было бы сделать и в приведенных выше примерах.

Раздел II

ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ГЛАВА VII

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ В ГИДРОМЕХАНИКЕ

Уравнения, которыми оперирует гидромеханика, являются математическим выражением фундаментальных физических принципов, именуемых законами сохранения. Это, в первую очередь, законы сохранения массы, количества движения и энергии. Первый из них выражает условия баланса массы рассматриваемого вещества и на нем базируется вывод уравнения неразрывности. Закон сохранения количества движения дает возможность сформулировать уравнения движения, а закон сохранения энергии — уравнение теплопроводности среды.

§ 1. ВЫВОД И АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ НЕРАЗРЫВНОСТИ

Рассмотрим массу, содержащуюся в объеме $\delta\tau$, т. е. $\rho\delta\tau$. Из факта сохранения массы* вытекает, что полное изменение массы за единицу времени равно нулю, т. е.

$$\frac{d\rho\delta\tau}{dt} = 0. \quad (7.1)$$

Дифференцируя (7.1), получим

$$\frac{d\rho}{dt}\delta\tau + \frac{\rho}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt}\delta\tau = 0. \quad (7.2)$$

(Второе слагаемое умножаем и делим на $\delta\tau$). Но величина $\frac{1}{\delta\tau} \frac{d\delta\tau}{dt}$ есть относительное изменение объема за единицу времени, т. е. является дивергенцией скорости. Тогда из (7.2) следует

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad \text{— из дивергенции} \quad (7.3)$$

* Масса может только переходить из одной формы в другую, но общее ее количество остается неизменным.

Соотношение (7.3) представляет собой уравнение неразрывности, являющееся математическим выражением условия неизменности общей массы. Раскрывая индивидуальную производную, формулу (7.3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad } \rho) + \rho \text{ div } \vec{v} = 0 \quad (7.4)$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0. \quad (7.5)$$

Последнее соотношение в особенно отчетливой форме подчеркивает тот факт, что изменение плотности за единичное время в точке обусловлено лишь разностью потоков массы, втекающих и вытекающих из единичного объема за единицу времени, а всевозможные ее источники равны нулю.

Рассмотрим частный случай движения, при котором плотность в каждой зафиксированной точке потока не меняется во времени, т. е. $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$. Это имеет место, во-первых, в случае установившегося движения любой жидкости, во-вторых, в случае любого движения несжимаемой однородной жидкости.

При выполнении условия $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ уравнение неразрывности приобретает вид

$$\text{div } \rho \vec{v} = 0. \quad (7.6)$$

Физический смысл этого равенства очевиден: при отсутствии локального изменения плотности общая масса жидкости, вытекающей за пределы неподвижного единичного объема, равна нулю, т. е. масса жидкости, втекающая в объем, должна быть равна массе жидкости, вытекающей из объема.

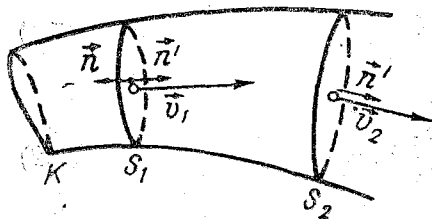


Рис. 7.1

Полученное соотношение можно представить в интегральной форме, которая отличается большей наглядностью.

Рассмотрим интеграл $\oint_{(\sigma)} \rho v_n d\sigma$, взятый по замкнутой поверхности σ , образованной частью трубки тока и двумя ее произвольными сечениями σ_1 и σ_2 (рис. 7.1). Очевидно, что

$$\oint_{(\sigma)} \rho v_n d\sigma = \int_{(\sigma_1)} \rho v_n d\sigma + \int_{(\sigma_2)} \rho v_n d\sigma,$$

так как на остальной части поверхности $v_n = 0$.

Далее, v_n в написанных интегралах представляет собой проекцию скорости на внешнюю по отношению к поверхности σ нормаль $\vec{n}$; в сечении σ_1 нормаль направлена противоположно скорости. Если же ввести проекции скорости на нормаль $\vec{n}'$, направленную в сторону движения жидкости, то в сечении $\sigma_1: v_n = -v_{n'}$, а в сечении $\sigma_2: v_n = v_{n'}$ и

$$\oint_{(\sigma)} \rho v_n d\sigma = \int_{(\sigma_2)} \rho v_{n'} d\sigma - \int_{(\sigma_1)} \rho v_{n'} d\sigma.$$

С другой стороны, ~~на~~ на основании теоремы Остроградского-Гаусса

$$\oint_{(\sigma)} \rho v_n d\sigma = \int_{\tau} \operatorname{div} \rho \vec{v} d\tau,$$

где τ — объем, ограниченный поверхностью σ . Так как при условии $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, имеем $\operatorname{div} \rho \vec{v} = 0$, то

$$\oint_{(\sigma)} \rho v_n d\sigma = 0.$$

Отсюда следует

$$\int_{(\sigma_1)} \rho v_{n'} d\sigma = \int_{(\sigma_2)} \rho v_{n'} d\sigma. \quad (7.7)$$

Линии тока не могут ни начинаться, ни заканчиваться внутри трубки тока, ибо при отсутствии локального изменения плотности масса жидкости, протекающая за единицу времени через любое поперечное сечение трубки тока, является величиной постоянной для данной трубки тока.

Впрочем справедливость этого утверждения можно понять и непосредственно: если бы массы, протекающие через два сечения одной и той же трубки тока, были бы различны, то имело бы место изменение массы жидкости, заключенной между сечениями. Это вызвало бы изменение плотности в соответствующих точках потока, что противоречит условию.

Трубку тока, имеющую столь малые поперечные сечения, что в точках одного и того же сечения плотность и скорость можно считать величинами постоянными, мы будем называть *элементарной трубкой тока*. Для элементарной трубки тока, у которой σ представляет собой нормальное к линиям тока поперечное сечение,

$\int_{(\sigma)} \rho v_{n'} d\sigma = \rho v \sigma$ и полученный нами результат принимает вид

$$\rho v \sigma = \text{const} \quad (7.8)$$

во всех сечениях одной и той же трубки тока. Это условие называют *уравнением неразрывности для трубки тока*.

В случае, когда $\rho = \text{const}$, уравнение (7.3) переходит в равенство

$$\text{div } \vec{v} = 0, \quad (7.9)$$

которое и является самым общим видом уравнения неразрывности для несжимаемой жидкости.

В декартовых координатах полученное соотношение имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (7.10)$$

В случае плоского движения

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0. \quad (7.11)$$

В натуральных координатах

$$\frac{\partial v}{\partial l} + v \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0. \quad (7.12)$$

Уравнению неразрывности для несжимаемой жидкости можно придать форму, весьма удобную для решения практических задач. Если σ_1 и σ_2 — два произвольных сечения одной и той же трубки тока, то из равенства $\text{div } \vec{v} = 0$ на основании рассуждений, совершенно аналогичных приведенным выше следует

$$\int_{(\sigma_1)} v_n' d\sigma = \int_{(\sigma_2)} v_n' d\sigma.$$

Это значит, что в случае несжимаемой жидкости объем ее, протекающий в единицу времени через любое поперечное сечение трубки тока, является величиной, постоянной для данной трубки тока.

В частности, при движении несжимаемой жидкости по трубе переменного сечения мы можем писать:

$$v_{\text{ср}_1} \sigma_1 = v_{\text{ср}_2} \sigma_2,$$

где $v_{\text{ср}_1}$ и $v_{\text{ср}_2}$ — осредненные по соответствующим сечениям значения скорости. Иначе говоря,

$$\frac{v_{\text{ср}_1}}{v_{\text{ср}_2}} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1},$$

т. е. в случае движения идеальной жидкости величина средней по сечению скорости меняется обратно пропорционально величине площади поперечного сечения трубы.

Для элементарной трубки тока, у которой σ представляет собой поперечное сечение, нормальное к линиям тока, мы получаем

$$v \cdot \sigma = \text{const} \quad (7.13)$$

во всех сечениях одной и той же трубки тока, т. е. в случае несжимаемой жидкости модуль скорости меняется вдоль элементарной трубки тока обратно пропорционально сечению трубки. Отсюда легко прийти к результату, уже найденному нами выше: расхождение (сближение) линий тока, т. е. расширение (сужение) трубок тока сопровождается соответствующим уменьшением (возрастанием) модуля скорости.

§ 2. УРАВНЕНИЯ СОХРАНЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ. УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ В НАПРЯЖЕНИЯХ

1. Внешние силы. Инерциальные и неинерциальные системы координат. Прежде, чем приступить к выводу уравнений, обсудим принципиально важный вопрос о системах координат и связанное с ним представление о действующих на частицу силах.

Перемещение тел или, шире, масс в пространстве фиксируется с помощью определенной системы координат. Они подразделяются на инерциальные и неинерциальные. Примером первой является галилеева система координат, жестко связанная с квазинеподвижными звездами. Известно, что если некоторая координатная система является галилеевой, то и любая другая, движущаяся по отношению к ней прямолинейно и равномерно суть также галилеева. По отношению к ним справедлив принцип инерции Галилея—Ньютона, утверждающий, что тело, достаточно удаленное от других тел, сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. В них выполняются все законы Ньютона. Однако с практической точки зрения удобно формулировать законы движения не в абсолютных, а относительных системах координат, имеющих ускорение по отношению к неподвижным звездам. Это, так называемые, неинерциальные системы координат. В них законы Ньютона в своей канонической форме не выполняются. Помимо сил, вызываемых действием тел друг на друга, появляются дополнительные силовые факторы, связанные с наличием ускорения системы. Это силы инерции, которые должны быть добавлены к фактическим. Само абсолютное ускорение складывается, во-первых, из относительного, связанного лишь с движением тела или, в случае сплошной среды, частицы, во-вторых, переносного, зависящего лишь от переносного движения, и, в-третьих, ускорения, связанного с характером и относительного и переносного движений. Последнее суть ускорение Кориолиса.

Подчеркнем одно важное следствие. В неинерционных системах координат не может быть изолированных систем, ибо силы инерции всегда являются внешними. Из второго закона Ньютона

вытекает, что производная по времени от общего количества движения системы равна сумме всех внешних сил, но теперь в их число необходимо включить и силы инерции. Только в этом случае возможна его формулировка как закона сохранения. Аналогично и по отношению к энергии, при расчете которой должна быть учтена работа сил инерции.

Пусть система вращается. Этот случай для нас наиболее интересен, ибо атмосферные движения предпочтительно рассматривать в системе координат, связанной с земной поверхностью. Тогда в уравнениях движения появляются центробежная сила и сила Кориолиса. В атмосфере обе они связаны с суточным вращением Земли. Как известно, они равны (на единицу массы):

$$\vec{F}_ц = \omega^2 \vec{r},$$

$$\vec{F}_k = -2[\vec{\omega} \times \vec{v}] = 2[\vec{v} \times \vec{\omega}],$$

где $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения системы; $\vec{r}$ — расстояние от рассматриваемой точки пространства до оси вращения; $\vec{v}$ — относительная скорость.

Таким образом следует иметь в виду, что в случае неинерциальной системы координат сумма сил включает в себя соответствующие силы инерции, а ускорение является ускорением относительного движения. В инерциальных системах, о которых пока будет идти речь, под ускорением понимается ускорение абсолютного движения, а инерциальные силы в рассмотрении не участвуют. И в том и другом случае эти действующие на жидкость силы приложены со стороны тел, не относящихся к рассматриваемой системе. Поэтому их следует интерпретировать как внешние.

2. Внутренние силы. Тензор напряжений. Помимо внешних, на частицу действуют внутренние силы. Последние есть результат молекулярного взаимодействия частицы с окружающей средой, осуществляющегося через ее поверхность. Оно сводится к гидродинамическому давлению и вязким эффектам, механизм которых в принципе рассмотрен в вводной части курса. По сути дела это поверхностные силы K , приложенные к элементу объема со стороны частиц. Они действуют в каждой точке жидкости и определяют ее напряженное состояние. Интенсивность последнего p_n , именуемая напряжением, определяется величиной усилия, приходящегося на единичную площадку, т. е. как предел

$$p_n = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta K}{\Delta\sigma} = \frac{dK}{d\sigma}.$$

Существенно, что напряжение в каждой точке зависит не только от величины и направления приложенных усилий, но и от ориентации площадки.

Действительно, рассмотрим течение с распределением скоростей соответствующим чертежу (рис. 7.2).

На горизонтальную площадку 1 действуют как касательные (силы трения), так и нормальные напряжения*, а на площадке 2, расположенной перпендикулярно к течению, имеет место лишь нормальная составляющая, а силы трения отсутствуют. В любом промежуточном положении, коих может быть бесчисленное множество, происходит перераспределение касательных и нормальных напряжений, т. е. характер напряжения меняется. Именно это обстоятельство мы имели в виду, записав напряжение в виде $p_{\vec{n}}$,

где индекс $\vec{n}$ указывает направление нормали к площадке, т. е. ее ориентацию.

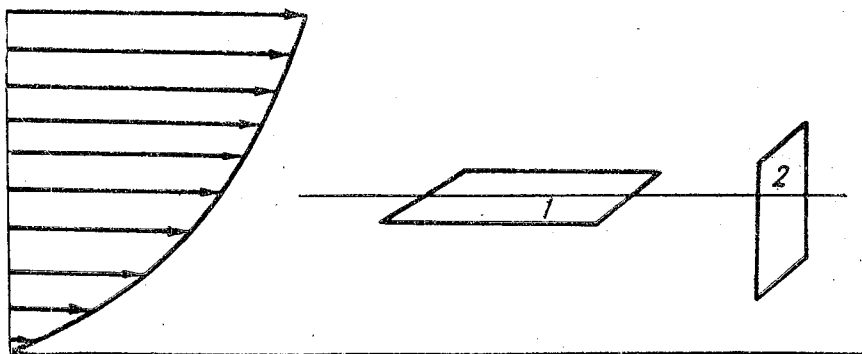


Рис. 7.2

При количественном описании напряжений встает вопрос о том, как избавиться от произвола в ориентации площадки. Очевидно, для этого необходимо напряжение $p_{\vec{n}}$ разложить на усилия, приложенные к площадкам, ориентация которых фиксирована с помощью выбранной системы координат. Наиболее простым и естественным представляется случай, когда они совпадают с координатными плоскостями. Тогда (рис. 7.3) $p_{\vec{n}}$ разложится на три век-

тора $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$, приложенных к элементарным площадкам, совпадающим, соответственно, с плоскостями yOz, xOz, xOy . Ориентация последних определяется заданием их внешних нормалей, которыми являются $-\vec{x}, -\vec{y}, -\vec{z}$, что и отмечено индексами у запи-

* Как мы далее убедимся, они складываются из гидродинамического давления и сил сцепления, обусловленных вязкостью и проявляющихся при деформации частиц жидкости.

санных выше векторов. Из принципа равенства действия и противодействия следует, что $\vec{p}_{-x} = -\vec{p}_x$, $\vec{p}_{-y} = -\vec{p}_y$, $\vec{p}_{-z} = -\vec{p}_z$, т. е.

$$\vec{p}_n = \{-\vec{p}_x, -\vec{p}_y, -\vec{p}_z\},$$

Рассмотрим результирующий эффект, оказываемый действием этих сил на выделенный на рис. 7.3 объем $d\tau = dx dy dz$. Ясно, что

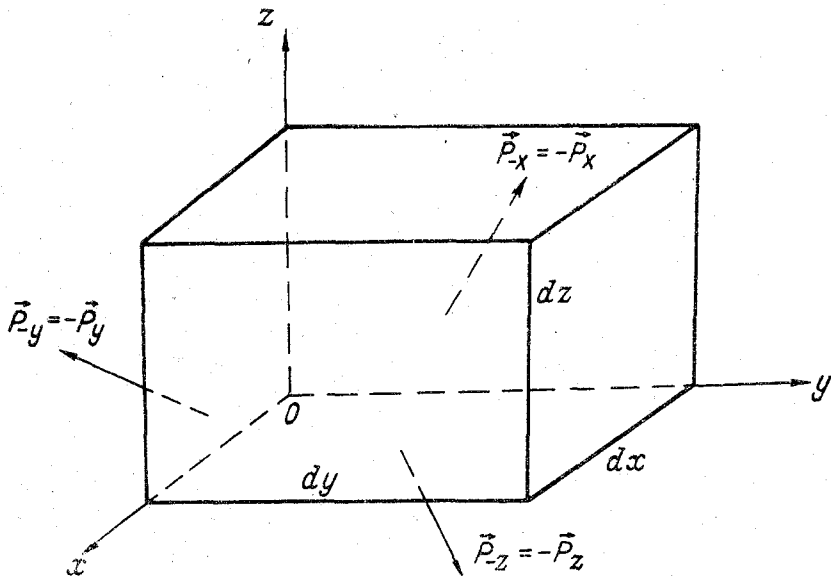


Рис. 7.3

к площадке с координатой $z=0$ и площадью $dx dy$ приложено усилие $-\vec{p}_z dx dy$. Далее, поскольку изменение $\vec{p}_z$ на единицу z выражается производной $\frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}$, то, следовательно, на расстоянии dz оно равно $\frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dz$. Поэтому на площадку $z=dz$ действует сила $\vec{p}_z dx dy + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dx dy dz$. Знак последнего выражения (+) определяется тем, что внешняя нормаль к плоскости $z=dz$ совпадает с осью z . В итоге на обе площадки действует сумма:

$$-\vec{p}_z dx dy + \vec{p}_z dx dy + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dx dy dz = \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} dx dy dz.$$

Аналогично по оси y будем иметь: $\frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} dx dy dz$ и, наконец, по x :

$\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} dx dy dz$. Таким образом, на выделенный объем действует сила

$\left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dx dy dz$. На единицу объема:

$$\operatorname{div} \vec{p}_n = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z}. \quad (7.14)$$

Это и есть разность потоков количества движения, приходящаяся на единицу объема и выражаемая дивергенцией напряжения. Заметим, что, если обе части разделить на ρ , то получим силу, отне-

сенную к единице массы, т. е. $\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{p}_n$ — массовая сила.

Каждый из векторов $\vec{p}_x, \vec{p}_y, \vec{p}_z$ может быть разложен по осям координат, так что:

$$\vec{p}_x = i P_{xx} + j P_{xy} + k P_{xz},$$

$$\vec{p}_y = i P_{yx} + j P_{yy} + k P_{yz},$$

$$\vec{p}_z = i P_{zx} + j P_{zy} + k P_{zz}.$$

Таким образом напряжение $\vec{p}_n$ в координатной форме выражается совокупностью девяти величин, т. е. представляет собой тензор второго ранга вида

$$P = \begin{Bmatrix} P_{xx} & P_{xy} & P_{xz} \\ P_{yx} & P_{yy} & P_{yz} \\ P_{zx} & P_{zy} & P_{zz} \end{Bmatrix}. \quad (7.15)$$

Или в тензорных обозначениях

$$P = (P_{ji}) \quad (i, j = 1, 2, 3). \quad (7.16)$$

Следовательно, $\vec{p}_n$ можно представить в виде

$$\vec{p}_n = \vec{n} P. \quad (7.17)$$

Первый индекс каждой из компонент тензора указывает площадку, к которой приложена соответствующая величина, а второй направление ее действия. Так, например, P_{yz} приложена к площадке, перпендикулярной оси y , т. е. xOz , и действует по оси z . Иначе говоря, это проекция $\vec{p}_y$ на ось z . Также, естественно, интерпретируются и остальные компоненты. Подчеркнем, что компоненты, стоящие на главной диагонали, направлены по нормали к соответствующим площадкам.

3. Уравнения движения в напряжениях. Из всего сказанного выше ясно, что проекция массовой силы $\frac{1}{\rho} \operatorname{div} \vec{p}_n$ на оси координат будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} \vec{p}_n)_x &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right), \\ \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} \vec{p}_n)_y &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} \right), \\ \frac{1}{\rho} (\operatorname{div} \vec{p}_n)_z &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

В тензорных обозначениях

$$\frac{1}{\rho} (\operatorname{div} \vec{p}_n)_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j} \quad (7.19)$$

Таким образом, второй закон Ньютона $\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \Phi$, где Φ сумма всех сил, действующих на единицу объема, может быть представлен в виде

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \operatorname{div} P + \rho \vec{F}, \quad (7.20)$$

или в проекции на оси координат:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} + \rho X, \\ \rho \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} + \rho Y, \\ \rho \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} + \rho Z, \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

$$(\vec{F} = \{X, Y, Z\}).$$

В правой части (7.20) явно выделены внешние и внутренние силы. В тензорных обозначениях

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial P_{ji}}{\partial x_j} + \rho F_i. \quad (7.22)$$

Поскольку $\vec{v}$ есть удельное, т. е. отнесенное к единице массы, количество движения, то очевидно, что три последних соотношения есть различные формы записи закона сохранения указанной субстанции.

§ 3. БАЛАНС МЕХАНИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

1. Кинетическая и потенциальная энергия. Удельная механическая энергия есть сумма кинетической и потенциальной энергии, отнесенных к единице массы.

Кинетическая энергия представляет собой работу, которую может совершить система, обладающая скоростью $\vec{v}$.

Потенциальная энергия есть та работа, которую способна совершить система, находящаяся в поле консервативных сил. При этом ее отсчет ведется от некоторого условно выбранного состояния, при котором потенциальная энергия считается равной нулю. Таким образом, она всегда определяется с точностью до константы*.

Консервативными называются силы, обладающие потенциалом, так что для них справедлива запись $\vec{F} = -\text{grad } U$ (здесь U — потенциал или, иначе говоря, потенциальная энергия). Ясно, что работа, совершаемая ими при движении по какому-либо замкнутому контуру $\oint (\vec{F} d\vec{l}) = \oint dU = 0$. Типичным примером

такой силы является сила тяжести g . Если ось z направить по линии ее действия и вверх, а начало координат расположить на земной поверхности, то потенциальная энергия единицы массы может быть записана в виде $U = gz$. При этом потенциальная энергия частиц на уровне земли считается равной нулю.

В отличие от приведенного примера сила Кориолиса действует всегда по нормали к вектору скорости, поэтому работы совершать не может и, следовательно, потенциальной энергией не обладает.

2. Вывод уравнения. Запишем (7.20) в виде

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) + \rho \vec{F},$$

* Однако это не вызывает каких-либо осложнений, ибо всегда нас интересует лишь ее изменение.

и умножим его скалярно на $\vec{v}$. Тогда получим

$$\rho \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \right) = \left(\frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} \cdot \vec{v} \right) + \left(\frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} \cdot \vec{v} \right) + \left(\frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \cdot \vec{v} \right) + \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}).$$

Вводя скорость под знак производных, можем получить уравнение баланса удельной кинетической энергии $\frac{v^2}{2}$ в виде

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \frac{\partial (\vec{p}_x \cdot \vec{v})}{\partial x} + \frac{\partial (\vec{p}_y \cdot \vec{v})}{\partial y} + \frac{\partial (\vec{p}_z \cdot \vec{v})}{\partial z} - \left[\left(\vec{p}_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) + \left(\vec{p}_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right) + \left(\vec{p}_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) \right] + \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}),$$

или

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) = \text{div} (\vec{p}_n \cdot \vec{v}) - \left[\left(\vec{p}_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) + \left(\vec{p}_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right) + \left(\vec{p}_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) \right] + \rho (\vec{F} \cdot \vec{v}). \quad (7.23)$$

В (7.23) первый дивергентный член правой части дает молекулярный приток кинетической энергии, а два последних выражают источники. При этом смысл последнего слагаемого ясен — это работа внешних сил, а к выяснению физического содержания величины

$$E = \left[\left(\vec{p}_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) + \left(\vec{p}_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right) + \left(\vec{p}_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right) \right] \quad (7.24)$$

мы обратимся в гл. IX.

Далее будем полагать, что внешние силы обладают потенциалом, так что возможна их запись через удельную потенциальную энергию:

$$\vec{F} = -\text{grad } U.$$

Мы будем полагать, что внешние силы *, что чаще всего имеет место, не зависят от времени, т. е. $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$. Поэтому.

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho (\vec{v} \cdot \text{grad } U),$$

* Сила Кориолиса (если система неинерциальна) в общем нестационарна, но в баланс механической энергии, как мы уже указывали, она входить не может, ибо совершаемая ею работа равна нулю.

или

$$\rho \frac{dU}{dt} = \rho (\vec{v} \cdot \vec{F}). \quad (7.25)$$

Складывая (7.23) и (7.25) получим уравнение баланса механической энергии в одной из возможных форм записи:

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + U \right) = \operatorname{div} (p_n \cdot \vec{v}) - \rho E. \quad (7.26)$$

§ 4. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ

Полная удельная энергия системы e складывается из удельных кинетической, потенциальной и внутренней энергии u , т. е.

$$e = \frac{1}{2} v^2 + U + u.$$

Внутренняя энергия по своему смыслу является кинетической и потенциальной энергией молекул.

Изменение полной энергии какой-либо системы может быть связано только с потоком ее через границы, ибо источники и стоки, согласно закону сохранения энергии, существовать не могут.

На этом основании

$$\rho \frac{de}{dt} = -\operatorname{div} \vec{J}_e, \quad (7.27)$$

где $\vec{J}_e$ — поток энергии, который с учетом (7.26) можно записать в виде

$$\vec{J}_e = -(p_n \cdot \vec{v}) + \vec{J}_u;$$

$\vec{J}_u$ — поток энергии, обусловленный теплопроводностью и диффузией.

Теперь, вместо (7.27) можно записать

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} + U + u \right) = \operatorname{div} (p_n \cdot \vec{v}) - \operatorname{div} \vec{J}_u. \quad (7.28)$$

Вычитая из (7.27) выражение (7.25), получим уравнение баланса внутренней энергии

$$\rho \frac{dU}{dt} = -\operatorname{div} \vec{J}_u + \rho E. \quad (7.29)$$

Внутренняя энергия меняется за счет конвективного и молекулярного притоков, а также в силу наличия источника. Последний,

как мы далее убедимся, отражает изменения энергии за счет сжатия (расширения) объема и работы вязких сил, переходящей в тепло.

ГЛАВА VIII

УРАВНЕНИЯ ДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ФОРМЕ НАВЬЕ — СТОКСА

§ 1. СВЯЗЬ МЕЖДУ ТЕНЗОРОМ НАПРЯЖЕНИЙ И ТЕНЗОРОМ СКОРОСТЕЙ ДЕФОРМАЦИИ

1. Тензор напряжений в покоящейся жидкости. В покоящейся жидкости проявление сил вязкости не может иметь места, в силу отсутствия движения. Тогда внутренние силы сведутся лишь к гидродинамическому давлению*, которое всегда направлено по нормали внутрь жидкости, в силу чего его следует всегда брать со

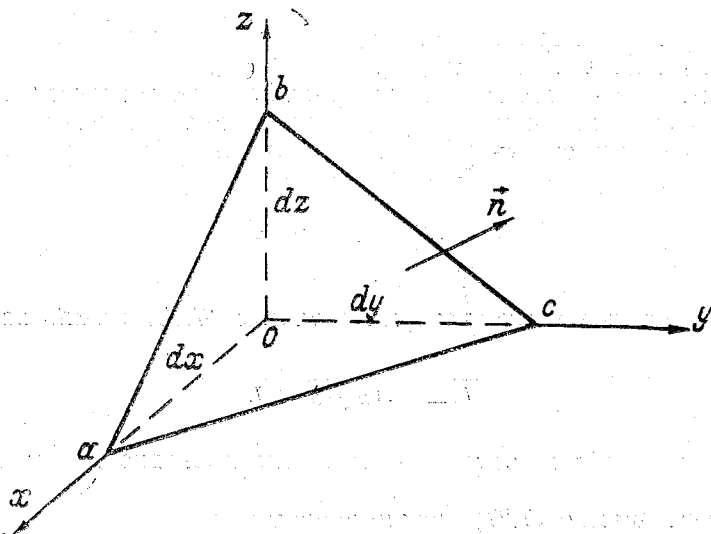


Рис. 8.1

знаком минус ($-p$). В тензоре напряжений при этом должны сохраниться только члены, расположенные на главной диагонали, причем $p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p$. Мы не случайно написали равенство всех членов, ибо, как мы сейчас покажем, давление не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует. Для доказательства выделим в жидкости элементарный призматический объем $Oabc$ (рис. 8.1).

* В дальнейшем, для краткости, будем именовать его просто давлением.

К основанию призмы abc с площадью dS приложена сила $-p_n \vec{d\tau}$ ($\vec{n}$ — орт нормали, $|\vec{n}|=1$). Спроектировав ее на ось x , получим $-p \cos(n, x) dS = -p dy dz$. Аналогично, в проекции на ось y : $-p dx dz$ и на ось z : $-p dx dy$. На единичную площадь во всех случаях будет действовать величина $-p$. Поскольку выбор площадки dS произволен, то по отношению к любой из них будет правомочен сделанный выше вывод. Таким образом, величина давления не зависит от ориентации площадки, что и требовалось доказать. Также не зависит она и от выбора координатной системы, т. е. является скалярной величиной. Следовательно, тензор напряжений в неподвижной жидкости будет иметь вид

$$P = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -p \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -pU, \quad (8.1)$$

где U — единичный тензор.

2. Формулы связи. В полученных ранее уравнениях динамики в напряжениях (7.21) все компоненты тензора напряжений являются неизвестными величинами, и естественно попытаться выразить их через другие искомые величины, связь с которыми является физически достаточно очевидной, т. е. через проекции скорости. Смысл этой взаимосвязи заключается в следующем.

Прежде всего ясно, что напряженное состояние вызывает деформированное. Но, с другой стороны, мы знаем, что жидкость не оказывает сопротивления деформациям: так, камень, опущенный в воду, может погрузиться на любую глубину. В то же время, положенный на гибкую, достаточно прочную, чтобы не вызывать ее разрушения, мембрану, он опустится лишь на величину ее прогиба в месте контакта, и в дальнейшем его вес будет компенсироваться напряжениями, возникающими в материале.

Тот же камень, опускаемый с большей или меньшей скоростью, вызывает, соответственно, большие или меньшие возмущения в жидкости. Это же испытывает на себе прыгун, неудачно входящий в воду. Сила встречного удара зависит от предварительно набранной им скорости, т. е. от исходной высоты прыжка.

Это обстоятельство приводит нас к необходимости связать тензор напряжений с тензором, выражающим деформированное состояние жидкости, т. е. тензором скоростей деформации. Он, как известно, отражает перекося жидкого элемента и растяжение жидких линий. В последнем случае могут измениться размеры жидкой частицы, а, следовательно, и ее объем, что характеризуется дивергенцией скорости.

В отношении характера этой связи вводится предположение, что во-первых, она носит линейный характер, и, во-вторых, соответствующие коэффициенты не зависят от выбора системы координат, т. е. являются скалярными величинами.

Эти гипотезы вполне естественны, так как линейная зависимость является наиболее простой и представляет собой расширенный вариант экспериментально подтвержденной простейшей формулы Ньютона. (Как известно из курса физики, она устанавливает факт пропорциональности между напряжением P_{zx} и градиентом скорости $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ в случае одномерного движения, направленного по оси x). Второе ограничение эквивалентно условию изотропности жидкости, т. е. неизменности ее свойств по различным направлениям, что чаще всего и имеет место*.

Общий вид линейной зависимости для тензоров имеет вид

$$P = a_1 T^{(c)} + a_2 U.$$

Или, если ввести обозначения $a_1 \equiv 2\mu$ и $a_2 \equiv \lambda$:

$$P = 2\mu T^{(c)} + \lambda U.$$

Раскрывая выражения для тензоров (см. формулы (7.15) и (2.20), получим

$$\begin{pmatrix} P_{xx} & P_{yx} & P_{zx} \\ P_{xy} & P_{yy} & P_{zy} \\ P_{xz} & P_{yz} & P_{zz} \end{pmatrix} = 2\mu \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \frac{1}{2} \theta_3 & \frac{1}{2} \theta_2 \\ \frac{1}{2} \theta_3 & \varepsilon_2 & \frac{1}{2} \theta_1 \\ \frac{1}{2} \theta_2 & \frac{1}{2} \theta_1 & \varepsilon_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Равенство тензоров эквивалентно равенству элементов, находящихся на соответствующих местах. Таким образом, имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= 2\mu\varepsilon_1 + \lambda, \\ P_{yy} &= 2\mu\varepsilon_2 + \lambda, \\ P_{zz} &= 2\mu\varepsilon_3 + \lambda, \\ P_{xy} &= P_{yx} = \mu\theta_3, \\ P_{zx} &= P_{xz} = \mu\theta_2, \\ P_{zy} &= P_{yz} = \mu\theta_1. \end{aligned} \right\} \quad (8.2)$$

Для определения λ вводим еще одну гипотезу о том, что сумма напряжений, направленных перпендикулярно к соответствующим координатным плоскостям, равна утроенному гидродинамическому давлению, взятому с обратным знаком, т. е.

$$P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} = -3p.$$

* Разумеется, справедливость обоих положений должна оправдываться близостью между экспериментально определяемыми и получаемыми при решении выведенных уравнений результатами.

Откуда, учитывая (8.2), имеем

$$2\mu(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) + 3\lambda = -3p.$$

Вводя значение $\varepsilon_1 = \frac{\partial v_x}{\partial x}$, $\varepsilon_2 = \frac{\partial v_y}{\partial y}$, $\varepsilon_3 = \frac{\partial v_z}{\partial z}$, последнее выражение можно переписать в виде

$$2\mu \operatorname{div} \vec{v} + 3\lambda = -3p.$$

Отсюда получаем

$$\lambda = -p - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}.$$

После подстановки полученного значения λ в формулы (8.2) можно, раскрывая ε_i , θ_{ij} , окончательно выражения для напряжений записать как:

$$\left. \begin{aligned} P_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}, \\ P_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}, \\ P_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v}, \\ P_{xy} &= P_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \\ P_{zx} &= P_{xz} = \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ P_{zy} &= P_{yz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Из (8.3) мы видим, что касательные напряжения вызывают перекос жидкого элемента, а нормальные его растяжение и связанное с этим изменение объема, что и следовало ожидать и на что указывалось выше.

В идеальной жидкости при $\mu = 0$ все напряжения сводятся лишь к нормальному давлению и соответствующий тензор совпадает с тензором напряжений в покоящейся среде (8.1).

3. Коэффициент динамической и кинематической вязкости. Величина μ называется коэффициентом динамической вязкости. Он отражает физические свойства жидкости, а именно ее вязкость, и численно равен касательному напряжению, имеющему место в случае, когда скорость на единичном расстоянии меняется также на единицу.

Поскольку напряжение есть сила, приложенная к единице площади, то размерность компонент тензора напряжений есть $ML^{-1}T^{-2}$. Размерность составляющих тензора скоростей деформаций T^{-1} . Поэтому $[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$. В системе СГС $[\mu] = \text{г} \cdot \text{см}^{-1} \text{сек}^{-1}$. Эта единица называется *пуазом*.

В кинетической теории газов дается вывод закона трения, позволяющий теоретическим путем определить величину коэффициента вязкости и ее зависимость от параметров состояния. Между слоями газа, движущимися с разными скоростями, имеет место обмен молекулами вследствие их беспорядочного теплового движения. Воздействие молекул «внешнего» слоя на молекулы «внутреннего» слоя сводится к тому, что при указанном обмене молекулы, вышедшие из первого слоя, входя в глубь «внутреннего» слоя и обладая отличной от него скоростью упорядоченного движения, изменяют количество движения «внутреннего» слоя. Как показывает расчет, проведенный при ряде упрощающих допущений, прирост количества движения «внутреннего» слоя за единицу времени, отнесенный к единице площади, определяется выражением

$$\frac{1}{3} \rho c l \frac{\partial v}{\partial n},$$

где ρ — плотность газа; c — средняя скорость движения молекул; l — средняя длина свободного пробега молекул.

То, что указанный прирост должен быть пропорционален $l \frac{\partial v}{\partial n}$, явствует из того, что последняя величина выражает собой разность скоростей слоя, из которого вышла молекула, и слоя, которому она, пройдя расстояние l , передала свое количество движения. Общая масса молекул, прошедших за единицу времени через единичную площадку на границе между слоями, очевидно, пропорциональна ρ и c и соответственно пропорционален этим величинам прирост количества движения внутреннего слоя. Как известно из механики, изменение за единицу времени количества движения системы равно сумме действующих на нее внешних сил. Поэтому приведенный выше прирост количества движения внутреннего слоя можно рассматривать как результат действия на этот слой со стороны внешнего слоя поверхностной силы — силы вязкости. Величина этой силы, отнесенная к единице площади, т. е. касательное напряжение вязкости, как раз равно $\frac{1}{3} \rho c l \frac{\partial v}{\partial n}$.

Отсюда следует, что

$$\mu = \frac{1}{3} \rho c l. \quad (8.4)$$

Средняя скорость s движения молекул однозначно связана с температурой газа, возрастая с увеличением T . Средняя длина l свободного пробега молекул обратно пропорциональна числу молекул в единице объема и, значит, обратно пропорциональна плотности газа. Из этого следует, что при неизменной температуре коэффициент вязкости не меняется при изменении плотности и, следовательно, при изменении давления. Таким образом, коэффициент вязкости газа зависит только от температуры, увеличиваясь при ее возрастании.

Приведем данные о величине коэффициента вязкости для сухого воздуха при различных температурах:

$T [^{\circ}\text{C}]$. . .	-70	-30	-20	-10	0
μ [г/см·сек] . . .	$1,42 \cdot 10^{-4}$	$1,52 \cdot 10^{-4}$	$1,56 \cdot 10^{-4}$	$1,62 \cdot 10^{-4}$	$1,68 \cdot 10^{-4}$
	10	20	40		
	$1,73 \cdot 10^{-4}$	$1,79 \cdot 10^{-4}$	$1,91 \cdot 10^{-4}$		

В большинстве метеорологических задач достаточно точные значения дает формула Кузнецова

$$\mu_{\text{возд}} = \mu_0 + 0,0057 \cdot 10^{-4} T \text{ (пуазов)},$$

справедливая для интервала температур от -100 до 100°C . Таким образом, в этих пределах можно считать, что коэффициент вязкости воздуха линейно зависит от температуры.

Вязкость смеси двух газов может быть вычислена по формуле

$$\mu = \frac{\mu_1}{1 + \frac{a \varphi_2}{b \varphi_1}} + \frac{\mu_2}{1 + \frac{c \varphi_1}{d \varphi_2}},$$

где μ_1 и μ_2 — значения коэффициентов вязкости смешиваемых газов; φ_1 и φ_2 — объемное содержание каждого газа в смеси; a , b , c и d — константы, определяемые из опыта.

Приведенная формула может быть использована для вычисления точных значений коэффициента вязкости влажного воздуха. Коэффициенты вязкости капельных жидкостей с возрастанием температуры убывают. Для иллюстрации приведем значения μ для воды при разных температурах:

$T [^{\circ}\text{C}]$. . .	0	10	20	40
μ [г/см·сек] . . .	$179 \cdot 10^{-4}$	$130 \cdot 10^{-4}$	$101 \cdot 10^{-4}$	$66 \cdot 10^{-4}$

Подобная зависимость вязкости от температуры объясняется следующим. У капельных жидкостей молекулы лишены возможности свободно двигаться по всем направлениям, а лишь совершают колебания вокруг некоторого среднего положения. Силы вязкости в этом случае в основном обусловлены силами сцепления между молекулами. При возрастании температуры усиливаются колебательные движения молекул. Силы сцепления между ними убывают и соответственно убывают силы вязкости и величина μ .

Кроме коэффициента вязкости μ , большое применение в теории вязкой жидкости находит так называемый *кинематический коэффициент вязкости* ν . Под этим понимают отношение коэффициента вязкости жидкости к ее плотности:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}.$$

Как известно, μ характеризует собой величину касательного напряжения вязкости, создающегося при данном поле скорости. Если поставить вопрос о том, какое ускорение может вызвать это напряжение, будучи приложенным к одной из граней единичного кубика жидкости, то для получения ответа следует μ разделить на плотность жидкости. В результате ускорение оказывается равным $\frac{\mu}{\rho} \frac{\partial v}{\partial n} = \nu \frac{\partial v}{\partial n}$. Таким образом, кинематический коэффициент вязкости характеризует собой ускорение частиц жидкости, вызываемое напряжением вязкости.

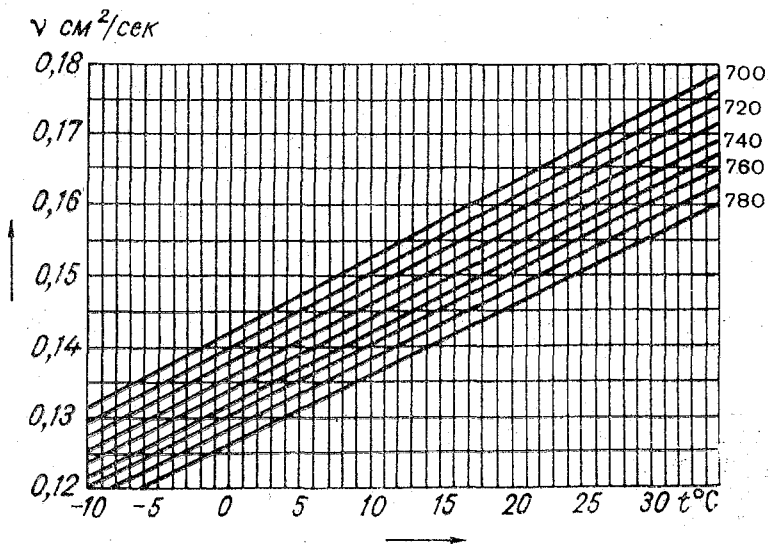


Рис. 8.2

Размерность коэффициента $[\nu] = L^2 T^{-1}$, в системе СГС

$$[\nu] = \frac{[\mu]}{[\rho]} = \frac{\text{см}^2}{\text{сек}}.$$

Приведем значения ν для воздуха, взятого при давлении 760 мм и при различных температурах:

$T [^\circ\text{C}]$. . .	-20	-10	0	10	20	30
$\nu [\text{см}^2/\text{сек}]$. . .	0,113	0,121	0,130	0,139	0,149	0,170

Как видно из этих данных, с ростом температуры ν возрастает, причем эта закономерность имеет место у всех газов. Напротив, с ростом давления ν убывает. На рис. 8.2 показана зависимость кинематического коэффициента вязкости воздуха от температуры и давления, а на рис. 8.3 — зависимость ν от высоты над уровнем моря в условиях Международной стандартной атмосферы.

Из формулы (8.4) имеем следующее выражение для кинематического коэффициента вязкости:

$$\nu = \frac{1}{3} cl.$$

Отсюда и следует, что с возрастанием температуры, вызывающем увеличение c , ν возрастает, а с возрастанием давления, вызывающем уменьшение l , ν убывает.

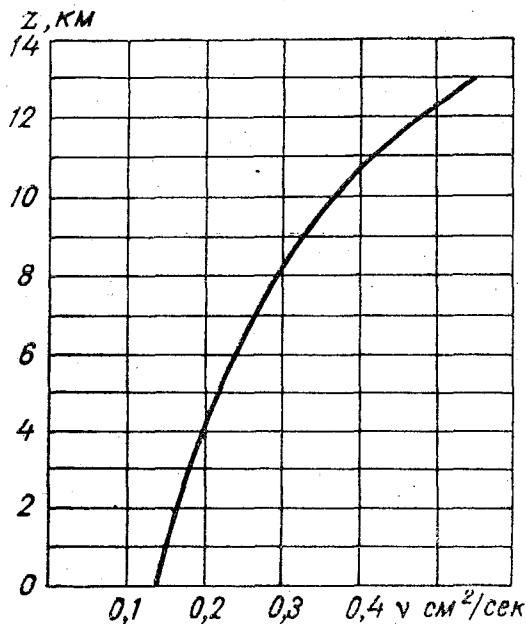


Рис. 8.3

Приведем значения ν для воды, взятой при различных температурах:

T [°C] . . .	0	10	20	40
ν [см²/сек] . . .	0,0180	0,0130	0,0101	0,0066

Сравнение с данными для воздуха обнаруживает, что у воды ν значительно меньше, чем у воздуха, хотя μ у воды и больше. Это связано, очевидно, с тем, что плотность воздуха в несколько сот

раз меньше плотности воды, и кинематический эффект от приложения напряжения вязкости в случае воздуха оказывается большим, хотя сами напряжения здесь являются меньшими.

Убывание ν с возрастанием температуры объясняется теми же причинами, что и соответствующее изменение μ , поскольку влияние температуры на плотность жидкости, очевидно, является весьма малым в сравнении с ее влиянием на коэффициент вязкости.

§ 2. УРАВНЕНИЕ НАВЬЕ — СТОКСА

Ввиду малой изменчивости μ в интересующем нас диапазоне температур (для большинства метеорологических задач $-50^\circ\text{C} \div +50^\circ\text{C}$), в дальнейшем будем полагать $\mu = \text{const}$, что позволяет выносить ее из-под знака дифференцирования.

1. Запись составляющих силы $\frac{1}{\rho} \operatorname{div} P$. Подставляя вначале формулы (8.3) в выражение для проекции силы трения на ось x , получим ее запись через компоненты вектора скорости. Так,

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-p + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{v} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \\ + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{v}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{2}{3} \nu \frac{\partial \operatorname{div} \vec{v}}{\partial x}.$$

Далее:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} = \nu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} \right)$$

и

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} = \nu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} \right).$$

Объединяя результаты получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \\ + \nu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) - \frac{2}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \Delta v_x + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{v}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

где Δv_x — оператор Лапласа.

Проведя аналогичные выкладки, получим

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v_y + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{v}; \quad (8.5')$$

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta v_z + \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (8.5'')$$

2. Различные формы представления уравнения Навье — Стокса.

Подставляя (8.5), (8.5'), (8.5'') в (7.21), получим уравнения динамики вязкой жидкости в проекции на оси координат. Именно:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \nu \Delta v_x + \\ &+ \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{v}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \nu \Delta v_y + \\ &+ \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{v}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \nu \Delta v_z + \\ &+ \frac{\nu}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{v}. \end{aligned} \right\} \quad (8.6)$$

В тензорных обозначениях:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + F_i + \nu \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_i \partial x_i} \right). \quad (8.7)$$

Умножая уравнения (8.6) соответственно на $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$ и складывая результаты, получим уравнение движения в векторной форме

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \vec{F} + \nu \Delta \vec{v} + \frac{\nu}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (8.8)$$

В итоге имеем запись второго закона Ньютона для жидких сред. Сила инерции $\frac{d\vec{v}}{dt}$ равна сумме внешних массовых сил градиента давления $\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$ и вязкости $\nu \left(\Delta \vec{v} + \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} \right)$.

Напомним, что все они отнесены к единице массы.

Для случая несжимаемой жидкости ($\text{div } \vec{v} = 0$) они упрощаются и вместо (8.8) будем иметь

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \vec{F} + \Delta \vec{v}. \quad (8.9)$$

Аналогичным образом перерабатываются (8.6) и (8.7).

В заключение заметим, что наличие вязких членов в уравнениях движения обуславливает необратимость процессов, протекающих в жидкости при ее движении. Действительно, если мы попытаемся вернуть систему в исходное положение, подставив вместо $t, x, y, z, v_x, v_y, v_z$ значения $-t, -x, -y, -z, -v_x, -v_y, -v_z$, то получающиеся при этом уравнения не будут тождественны системе (8.6), ибо перед вязкими членами появится знак минус.

ГЛАВА IX

УРАВНЕНИЕ ПРИТОКА ТЕПЛА

§ 1. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА

Внутренняя энергия есть функция состояния, которая для случая однокомпонентной среды однозначно определяется двумя термодинамическими параметрами, например $u = u(\alpha, T)$, где $\alpha = \frac{1}{\rho}$ — удельный объем.

Рассмотрим вид этой функции для совершенного газа. Как известно, эта модель предполагает, что молекулы совершенного газа имеют сферическую форму и взаимодействие между ними сводится к столкновениям, подчиняющимся закону абсолютно упругого удара. Определяющим фактором в этом процессе является кинетическая энергия молекул и, следовательно, температура. Поскольку других энергетических переходов между молекулами нет, расстояние между ними a , следовательно, и удельный объем на величине внутренней энергии совокупности молекул не отражается.

Ввиду того, что кинетическая, а, следовательно, для рассматриваемого случая и внутренняя энергия, зависит только от температуры, то $u = u(T)$. Величина $c_v = \left| \frac{\partial u}{\partial T} \right|_\alpha$ называется коэффициентом

объемной теплоемкости или, иначе, *изохорной теплоемкостью*. Кинетическую энергию можно представить себе состоящей из энергии поступательного, вращательного и колебательного движений молекул, в соответствии с чем и величина c_v разлагается на три составляющих: $c_v = c_{vp} + c_{vv} + c_{vk}$. Как показывают эксперименты, для газов, близких по своим свойствам к совершенным, из трех слагаемых лишь величина, связанная с колебаниями (c_{vk}), зависит

от температуры, да и то, если $T > 2000^\circ \text{K}$. К тому же она мала в сравнении с первыми двумя слагаемыми, так что ею, а с ней и зависимостью c_v от температуры, можно пренебречь, т. е. $c_v = c_{vp} + c_{vb}$, причем $c_v = \text{const}$. Поэтому $du = c_v dT$.

Возьмем интеграл от обеих частей этого уравнения в пределах от $T=0$ до $T=T$, чему соответствует $u=0$, $u=u$. Тогда получим

$$u = c_v T. \quad (9.1)$$

Теперь ясно, что изменение внутренней энергии эквивалентно изменению количества тепла в единице массы и связано с изменением ее температуры.

Атмосфера по своим свойствам, и это подтверждается многочисленными экспериментами, является совершенной смесью совершенных газов. В силу этого выведенное соотношение (9.1) применимо к ней в полной мере. В дальнейшем мы будем использовать именно это выражение для внутренней энергии тем более, что оно применимо и ко многим другим средам.

Молекулярный поток внутренней энергии для случая $u = c_v T$ представляет собой поток тепла, который будет определяться эмпирическим уравнением Фурье (о нем говорилось в вводной части):

$$\vec{J}_u \equiv \vec{q} = -\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n}.$$

Приток тепла:

$$\text{div } \vec{J}_u = -\text{div} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} \right). \quad (9.2)$$

§ 2. ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ. УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

1. Диссипация в жидкости. Прежде всего, опираясь на выведенные в предыдущей главе формулы (8.3), получим явный вид функции E . Как установлено (см. 7.24), она представляет собой сумму скалярных произведений вида

$$E = \left(\vec{p}_x \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \right) + \left(\vec{p}_y \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \right) + \left(\vec{p}_z \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \right).$$

Раскрывая его, получим:

$$E = P_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + P_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + P_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} + P_{xy} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \\ + P_{xz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + P_{yz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right).$$

В промежуточных выкладках здесь использовалось свойство взаимности касательных напряжений, выражаемое полученными выше равенствами: $P_{xy}=P_{yx}$, $P_{xz}=P_{zx}$, $P_{yz}=P_{zy}$.

Подставляя в последнее выражение формулы (8.3), после простейших преобразований получим

$$E = -p \operatorname{div} \vec{v} - \frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{v})^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ + \mu \left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (9.3)$$

Из (9.3) мы убеждаемся в том, что механическая энергия переходит в тепло за счет следующих факторов. Во-первых, под действием сил давления (член $-p \operatorname{div} \vec{v}$) происходит изменение объема, что ведет при его уменьшении ($\operatorname{div} \vec{v} < 0$) к возрастанию температуры, а при возрастании ($\operatorname{div} \vec{v} > 0$) к ее понижению. Во-вторых, из-за наличия сил вязкости, действие которых проявляется двояким образом, при изменении объема при растяжении (сжатии) жидких линий внутренняя энергия уменьшается (член $-\frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{v})^2$); при изменении длины жидких линий и перекосе силы трения совершают работу, которая полностью переходит в тепло (два последних члена).

Величина

$$D = -\frac{2}{3} \mu (\operatorname{div} \vec{v})^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ + \mu \left[\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (9.4)$$

носит название *диссипативной функции*. Еще раз подчеркнем, что она представляет собой отнесенную к единице объема и единице времени часть кинетической энергии потока, затраченную на преодоление сил вязкости и переходящую в тепло*.

Очевидно, что в случае несжимаемой жидкости выражения (9.3) и (9.4) упрощаются за счет того, что уходят члены с $\operatorname{div} \vec{v}$. Если жидкость идеальна ($\mu=0$), то $D=0$, а $E = -p \operatorname{div} \vec{v}$. Наконец, для идеальной несжимаемой жидкости справедливо $D=E=0$.

* Здесь вновь имеет место эффект необратимости процессов за счет действия сил вязкости, ибо кинетическая энергия переходит в тепло, а обратное не имеет места.

2. Запись уравнения теплопроводности применительно к различным моделям жидких сред. Из всего сказанного выше вытекает, что уравнение притока тепла для вязкой сжимаемой жидкости должно иметь вид (см. (7.29), (9.1), (9.2), (9.3), (9.4))

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} \right) + D. \quad (9.5)$$

Для несжимаемой жидкости

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} \right) + D_1, \quad (9.6)$$

где $D_1 = 2\mu(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \epsilon_3^2) + \mu(\theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2)$.

Мы видим, что в этом случае работа давления не оказывает влияния на тепловой баланс, ибо изменения объема в данном случае не происходит.

Для идеальной жидкости будем иметь вместо (9.5) и (9.6) соответственно:

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} \right); \quad (9.7)$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} = \operatorname{div} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} \right). \quad (9.8)$$

Для неподвижной среды вместо уравнения (9.5) и (9.6) будем иметь

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} \right). \quad (9.9)$$

В этом случае уравнение теплопроводности жидкости совпадает с уравнением теплопроводности твердого тела. Если же при этом и $\lambda_T = \text{const}$, то получаем классическое уравнение теплопроводности — уравнение Фурье

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \Delta T, \quad (9.10)$$

где $a^2 = \frac{\lambda_T}{\rho c_v}$ — коэффициент температуропроводности;

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.$$

1. **Различные формы представления.** По сути дела уравнение (9.5) представляет собой форму записи 1-го начала термодинамики. Обозначив

$$\rho \frac{dQ}{dt} = \operatorname{div} \left(\lambda_r \frac{\partial T}{\partial n} \right) + D$$

можем записать

$$c_v \frac{dT}{dt} + \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \vec{v} = \frac{dQ}{dt}. \quad (9.11)$$

Поскольку из уравнения неразрывности следует, что

$$\operatorname{div} \vec{v} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

то

$$\frac{p}{\rho} \operatorname{div} \vec{v} = - \frac{p}{\rho^2} \cdot \frac{d\rho}{dt} = p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = p \frac{d\alpha}{dt}, \quad (9.12)$$

где α — удельный объем.

Подставив этот результат в последнее уравнение и помножив обе части на dt , получим первое начало в классической форме записи

$$c_v dT + p d\alpha = dQ. \quad (9.13)$$

Таким образом, изменение внутренней энергии складывается из работы внешних сил и притока извне.

Как известно, уравнение состояния совершенных газов имеет вид (формула Клапейрона)

$$p = \rho RT, \quad (9.14)$$

где R — газовая постоянная.

Уравнение состояния атмосферы имеет такой же вид.

Воспользовавшись (9.14), уравнение первого начала можно модифицировать. Для этого сначала, в соответствии со вторым равенством соотношения (9.12), перепишем его в виде

$$c_v dT - \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = dQ.$$

Подставляя p из (9.14) и деля обе части получаемого выражения на T , будем иметь

$$c_v \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dQ}{T}. \quad (9.15)$$

Прологарифмировав и продифференцировав (9.14), можем получить

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{dp}{p} - \frac{dT}{T}.$$

Используя последнее равенство, запишем (9.15) в форме

$$c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p} = \frac{dQ}{T}. \quad (9.16)$$

Величина $c_p = c_v + R$ называется *изобарной теплоемкостью*, т. е. *теплоемкостью при постоянном давлении*. $c_p > c_v$, ибо c_v количественно равно затратам тепла на изменение температуры одного грамма массы жидкости на один градус при постоянном объеме, а c_p при постоянном давлении. Но в последнем случае для сохранения давления внутри объема жидкость должна расширяться, совершая при этом работу на преодоление сил внешнего давления. Поэтому и необходимо для того, чтобы изменить ее температуру на один градус затрачивать соответственно большее количество энергии.

Подчеркнем еще раз, что все выведенные выше формулы суть различные случаи и формы первого начала термодинамики.

2. Политропические процессы. Адиабатический случай. Если предположить, что приток тепла к частице пропорционален температуре, т. е. $dQ = c dT$, то такие процессы называются *политропическими*, а величина c — *политропической теплоемкостью*. В этом случае вместо (9.15) и (9.16) будем соответственно иметь:

$$(c_v - c) \frac{dT}{T} = R \frac{d\rho}{\rho},$$

$$(c_p - c) \frac{dT}{T} = R \frac{dp}{p}.$$

Интегрируя эти уравнения в пределах от T_0 до T , от ρ_0 до ρ и от p_0 до p , получим:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{R}{c_v - c}}; \quad (9.17)$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p - c}}. \quad (9.18)$$

Важным частным случаем политропического является адиабатический процесс, протекающий в частице без теплообмена со

внешней средой. Тогда $dQ = cdT = 0$, в силу чего $c = 0$. Из (9.17) и (9.18) сразу следуют две формы записи адиабат:

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{R}{c_v}}; \quad (9.19)$$

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R}{c_p}}. \quad (9.20)$$

Поделив (9.20) на (9.19), после элементарных преобразований, будем иметь (уравнение Пуассона)

$$\frac{p}{\rho^\kappa} = \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} = k = \text{const},$$

где $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$.

В итоге получаем уравнение адиабатического процесса в виде

$$p = k\rho^\kappa. \quad (9.21)$$

ГЛАВА X

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРИМЕРЫ

§ 1. ПРОБЛЕМЫ ЗАМЫКАНИЯ

В предыдущих главах выведены уравнения гидромеханики. Прежде, чем приступить к обсуждению вопросов, связанных с их интегрированием, мы выпишем их здесь с целью подвести итог и сконцентрировать внимание на полученных результатах. Итак, уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + v \Delta v_x + \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{v}, \\ \frac{dv_y}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + v \Delta v_y + \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{div} \vec{v}, \\ \frac{dv_z}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + v \Delta v_z + \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{div} \vec{v}; \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

неразрывности:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0; \quad (10.2)$$

теплопроводности:

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} \right) + D. \quad (10.3)$$

Мы видим, что система незамкнута, ибо для шести неизвестных $v_x, v_y, v_z, \rho, p, T$ имеем пять уравнений. Шестым недостающим соотношением является эмпирическое уравнение состояния (иначе называемое характеристическим). Оно связывает плотность, давление, температуру и концентрацию тех или иных примесей (например, водяной пар в атмосфере или соленость в океане), и в общем случае записывается как

$$\rho = f(p, T, c_1, c_2, \dots, c_k).$$

Такая постановка требует привлечения системы уравнений диффузии примесей*. Но мы будем рассматривать лишь однокомпонентные среды, для которых уравнение состояния записывается в более простой форме

$$\rho = f(p, T). \quad (10.4)$$

(Частный случай $p = \rho RT$, справедливый для совершенных газов, уже использовался нами ранее).

В некоторых задачах нет необходимости в решении всей системы в целом. Это связано со спецификой поставленной задачи и выбранной в соответствии с этим модели жидкости. Ниже мы разберем основные аспекты этого вопроса.

1. Бароклинная и баротропная жидкость. Жидкость, в которой плотность является функцией как давления, так и других величин, называется *бароклинной*. Уравнение состояния для нее, если она является однокомпонентной, имеет вид (10.4). В этом случае при решении какой-либо конкретной задачи приходится использовать полную систему уравнений (10.1) — (10.4).

Жидкость, в которой плотность зависит лишь от одного давления, носит название *баротропной*. Уравнение состояния для нее имеет вид

$$\rho = f(p). \quad (10.5)$$

Примером может служить выведенное выше уравнение Пуассона (9.20), справедливое для адиабатических течений. В этом случае

$$\rho = k_1 p^{\frac{1}{\gamma}} \quad (k_1 = \text{const}).$$

* Отдельно уравнения диффузии мы не рассматриваем, ибо отыскание величин c_i является более узкой специальной задачей. Разумеется, для ее решения необходимо знать v_x, v_y, v_z , которые могут быть получены из решения общей системы.

Если изменение состояния газа происходит при постоянной температуре, то справедлив закон Бойля—Мариотта

$$\rho = k_2 p.$$

Жидкость в этом случае также баротропна.

Отметим одно весьма важное обстоятельство. В баротропной жидкости изобарические и изостерические поверхности совпадают. Изостерические поверхности — поверхности равного удельного объема $\alpha = \text{const}$. Поскольку $\rho = f(p)$, то во всех точках поверхности $p = \text{const}$ ρ также постоянна, а следовательно, и $\alpha = \frac{1}{\rho} = \text{const}$.

Легко видеть, что при наличии баротропности для определения v_x, v_y, v_z, ρ, p достаточно решить систему (10.1), (10.2), (10.5). Она замкнута и без уравнения теплопроводности. Если же нас интересует поле температур, то (10.3) можно решать отдельно, опираясь на результаты решений системы (10.1), (10.2), (10.5).

2. Несжимаемая жидкость. Тривиальным случаем баротропной жидкости является несжимаемая среда, в уравнении состояния которой $\rho = \tilde{k} p^m$ показатель степени равен нулю, т. е. $\rho = \tilde{k} = \text{const}$.

Модель несжимаемой жидкости является наиболее важной для геофизических проблем, ибо вода, а также воздух, движущийся со скоростями порядка скорости ветра (~ 10 м/сек), практически несжимаемы.

Поэтому соответствующие уравнения мы выпишем отдельно, тем более, что в дальнейшем мы будем к ним неоднократно обращаться. Очевидно, что все уравнения получаются как частный случай общей системы при $\rho = \text{const}$ и $\text{div } \vec{v} = 0$.

Уравнения движения:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \nu \Delta v_x; \quad (10.6)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y + \nu \Delta v_y; \quad (10.7)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z + \nu \Delta v_z. \quad (10.8)$$

Неразрывности:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (10.9)$$

Теплопроводности:

$$c_v \frac{dT}{dt} = \text{div} \left(\lambda_r \frac{\partial T}{\partial n} \right) + D_1. \quad (10.10)$$

Разумеется, в этом случае (10.6)—(10.9) можно решать отдельно от (10.10). А затем уже эти результаты использовать в готовом виде при отыскании поля температуры с помощью (10.10), если в этом есть необходимость.

§ 2. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ

Выписанные системы уравнений в рамках использованной модели справедливы для любых течений жидкости. Это могут быть атмосферные движения, перемещение масс воды в океане, течение в реках, трубах и т. д. При решении же конкретного вопроса возникает необходимость индивидуализировать постановку, т. е. сформулировать задачу таким образом, чтобы при этом была отражена ее специфика с точки зрения свойств конкретной жидкости, геометрических форм потока, его исходного состояния и условий взаимодействия с окружающей средой. Это же даст возможность найти значения произвольных постоянных и функций, которые войдут в решение после интегрирования системы уравнений.

1. Физические свойства. Прежде всего, нам необходимо знать среду, с которой мы имеем дело. Это означает, что нам должны быть известны физические свойства жидкости: капельная или сжимаемая, ее вязкость (μ , ν), теплоемкость, теплопроводность, плотность (в случае несжимаемости) и т. п. Если все эти параметры меняются в зависимости от тех или иных факторов, то вид и характер этой зависимости должен быть известен. Эти данные получаются экспериментально для каждой капельной жидкости или газа, а результаты представляются в виде таблиц или эмпирических формул с указанием диапазона применимости рекомендуемых данных. Сюда же примыкает и уравнение состояния.

2. Начальные условия. Искомые величины представляют собой функции координат и времени. Начальные условия сводятся к требованию, чтобы поля всех искомых гидродинамических величин были бы известны в некоторый момент времени $t=t_0$.

Иными словами, выражения искомых функций должны удовлетворять условиям:

$$v_x(x, y, z, t_0) = f_0(x, y, z), \quad v_y(x, y, z, t_0) = f_1(x, y, z), \quad p = p(x, y, z, t_0)$$

и т. д.

При установившемся движении элементы потока в любой точке его от времени не зависят, т. е. время в выражениях искомых величин не входит. Поэтому при установившемся движении начальные условия отсутствуют, так как если бы они были заданы, то течение стало бы полностью известным в любой момент времени и интегрировать систему не было бы нужды.

3. Граничные условия. Под заданными граничными условиями мы понимаем следующее: во-первых, нам известна геометрическая конфигурация системы, т. е. форма изучаемого потока; во-вторых, на границах потока все искомые величины принимают определен-

ные значения или удовлетворяют соотношениям, вид которых нам известен. В большинстве задач границами потока являются неподвижные непроницаемые стенки (поверхность неподвижного обтекаемого тела, стенки и дно канала и т. п.), подвижные непроницаемые стенки (поверхность движущегося в жидкости тела), поверхности, отделяющие одну жидкость от другой (например, свободная поверхность жидкости, отделяющая данную жидкость от другой — воздуха), поверхности разрыва каких-либо элементов потока (например, тропопауза или фронтальная поверхность в атмосфере), а чаще всего различные комбинации их.

Для случая несжимаемой жидкости граничные условия можно подразделить на кинематические и динамические.

Остановимся на кинематических граничных условиях на неподвижной непроницаемой стенке. Хотя значение скорости на самой стенке при современной измерительной аппаратуре определить не удастся, можно оценить изменение скорости по мере приближения к стенке. Большое количество опытов обнаружило, что при таком приближении скорость потока непрерывно убывает (хотя на расстоянии 0,005 мм от стенки трубы скорость в ряде опытов еще составляла примерно 40% от максимальной скорости в трубе). В гидромеханике принимается достаточно хорошо обоснованная гипотеза о том, что скорость вязкой жидкости на неподвижной непроницаемой стенке равна нулю. Это условие часто называют *условием прилипания*.

Представление о том, что жидкость в буквальном смысле слова прилипает к стенке, оказывается не вполне правильным, поскольку оно не подходит к случаю несмачиваемой стенки, около которой скорость, однако, распределяется так же, как и около смачиваемой. Правильнее под прилипанием понимать следующее. Силы молекулярного взаимодействия, радиус влияния которых очень мал, удерживают на твердой стенке в неподвижном состоянии лишь несколько рядов молекул. Движение жидкости поэтому происходит не по самой стенке, а по задержанному ею слою молекул. Поскольку размеры молекул 10^{-6} — 10^{-5} мм, то допустимо считать, что на расстоянии 10^{-5} мм $v=0$. Косвенные опыты подтверждают применимость подобного допущения в огромном большинстве задач.

Если стенка движется, то в точках соприкосновения с ней жидкость должна иметь скорость, равную скорости стенки.

Динамическое граничное условие на неподвижной стенке сводится к равенству между величиной напряжения, приложенного к стенке, и величиной напряжения, приложенного к жидкости на границе со стенкой. Направление векторов указанных напряжений, очевидно, противоположно. Динамическое граничное условие на свободной поверхности выражается в виде равенства между величиной нормального напряжения в жидкости на свободной поверхности и величиной давления внешней среды на свободную по-

верхность (например, величиной атмосферного давления). Направления этих напряжений, разумеется, противоположны.

Если жидкость баротропна, но сжимаема, и нас не интересуют вопросы теплообмена, то на границах должно быть известно значение также плотности, а при решении полной задачи еще и температуры. В случае бароклинности при отыскании любой характеристики, наряду со скоростью и давлением, задаются одновременно и плотность и температура.

Таким образом, если записаны уравнения и заданы вышеозначенные ограничительные условия, задача сформулирована полностью. При этом не следует полагать, что всегда используются полные уравнения*. В каждом конкретном случае уравнения упрощаются и подвергаются модификациям, которые приближают математическую модель к реальному физическому процессу. На этом обстоятельстве мы остановимся подробно после того, как дадим ряд простейших примеров интегрирования уравнений.

§ 3. ПРИМЕРЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ

В нижеследующих примерах мы будем ставить своей задачей отыскание поля скорости при следующих упрощающих предположениях:

а) течение является плоским и ось x направлена по линии движения. Таким образом,

$$v_y = v_z = 0, \quad Y = 0, \quad v_x = v_x(t, x, z), \quad p = p(t, x, z);$$

б) процесс установившийся так, что

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0, \quad v_x = v_x(z, x), \quad p = p(x, z);$$

в) жидкость несжимаема и с учетом равенства $v_y = v_z = 0$ уравнение неразрывности сводится к виду

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0.$$

Последнее означает, что v_x не может зависеть от x , так что $v_x = v_x(z)$, в силу чего

$$\Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = \frac{d^2 v_x}{dz^2}.$$

* Следует помнить, что при выводе самих уравнений использовались гипотезы (см. гл. 8 § 1), и поэтому их применимость ограничена пределами справедливости этих аксиом.

Следовательно, для рассматриваемых случаев уравнения (10.6), (10.7), (10.8) упрощаются и система принимает вид:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X + \nu \frac{d^2 v_x}{dz^2}; \quad (10.11)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad (10.12)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z. \quad (10.13)$$

Причем

$$v_x = v_x(z), \quad p = p(x, z).$$

(К)

1. Движение жидкости между двумя параллельными пластинами. Рассмотрим течение между двумя горизонтальными пластинами, отстоящими друг от друга на расстоянии $2h$. Начало координат поместим в центре так, чтобы ось z была направлена против силы тяжести g (рис. 10.1).

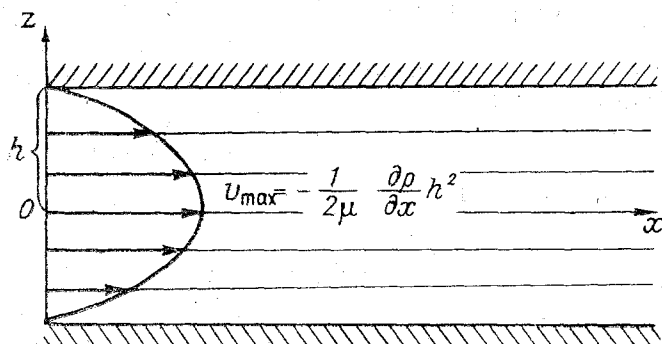


Рис. 10.1

Других массовых сил не имеется, так что $X=0$, $Z=-g$. Тогда исходные уравнения примут вид:

$$\begin{cases} \frac{d^2 v_x}{dz^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}; \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \end{cases}$$

Ясно, что $\frac{\partial p}{\partial x}$ может зависеть только от x , ибо, интегрируя последнее уравнение, имеем $p = -\rho g z + \theta(x)$, где $\theta(x)$ — произвольная функция. Поэтому $\frac{\partial p}{\partial x} = \theta'(x)$. В то же время, как мы видели, v_x от x не зависит, а является лишь функцией координаты z . В этих условиях первое из написанных равенств может иметь место лишь в том случае, когда обе его части тождественно равны постоянной, т. е.

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = C = \text{const}$$

($C < 0$, так как движение всегда происходит от области более высокого давления в сторону более низкого). Таким образом, получаем

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} \equiv C. \quad (10.14)$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} z^2 + C_1 z + C_2.$$

Произвольные постоянные легко найти из граничных условий, которые сводятся к равенству нулю скоростей на стенках (условие прилипания), так что

$$v_x|_{z=h} = v_x|_{z=-h} = 0.$$

С учетом этих обстоятельств, имеем

$$v_x = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial x} (z^2 - h^2).$$

Расход жидкости на единицу ширины по y

$$Q = \int_{-h}^h v_x dz = -\frac{2}{3} \frac{h^3}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{Q}{2h} = -\frac{h^2}{3\mu} \frac{\partial p}{\partial x}.$$

2. Движение жидкости, когда одна из стенок неподвижна, а вторая движется со скоростью v_0 . Для простоты будем считать $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Движение существует за счет того, что жидкость увлекается движущейся пластиной. При этом вместо (10.14) будем иметь

$$\frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0.$$

Граничные условия:

$$v_x|_{z=-h} = 0; \quad v_x|_{z=h} = v_0.$$

Интегрируя последнее уравнение и определяя постоянные с помощью граничных условий, получаем

$$v_x = \frac{v_0}{2} \left(1 + \frac{z}{h} \right),$$

т. е. скорость меняется по линейному закону.

Расход на единицу ширины

$$Q = \int_{-h}^h v_x dz = v_0 h.$$

Средняя скорость

$$v_{cp} = \frac{Q}{2h} = \frac{v_0}{2}.$$

3. Течение по наклонной пластине. Этот пример позволит нам проиллюстрировать постановку и использование граничных условий при наличии свободной поверхности.

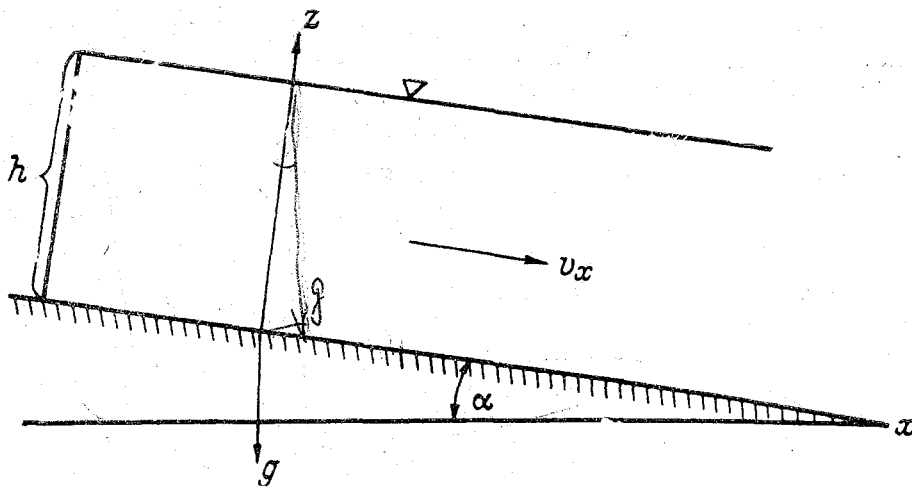


Рис.10.2

При указанном выборе системы координат (рис. 10.2)

$$X = g \sin \alpha; \quad Z = -g \cos \alpha.$$

С целью упрощения примем еще $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, т. е. будем считать, что движение происходит только под действием силы тяжести.

Тогда исходная система (10.11), (10.12), (10.13) примет вид:

$$-\rho g \sin \alpha = \mu \frac{d^2 v_x}{dz^2}; \quad (10.15)$$

$$-\rho g \cos \alpha = \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (10.16)$$

Граничные условия:

$$v_x|_{z=0} = 0. \quad (10.17)$$

Напряжения на свободной поверхности, с учетом сделанных выше упрощений, принимают вид:

$$P_{zz}|_{z=h} = p_0, \quad (10.18)$$

где p_0 — давление атмосферы;

$$P_{zx}|_{z=h} = \mu \frac{dv_x}{dz}|_{z=h} = 0 \quad (10.19)$$

(P_{zy} равно нулю тривиальным образом).

Два последних равенства представляют собой динамические граничные условия, а первое, естественно, является кинематическим.

Проинтегрировав второе из написанных выше уравнений, получим распределение давления в движущейся массе

$$p = C - \rho g \cos \alpha \cdot z.$$

Поскольку при $z=h$ $p=p_0$, то $C = p_0 + \rho g \cos \alpha \cdot h$ и окончательно

$$p = p_0 + \rho g (h - z) \cos \alpha.$$

В результате интегрирования уравнения (10.15) находим

$$v_x = -\frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} z^2 + C_1 z + C_2.$$

Условия (10.17) и (10.19) дают возможность определить произвольные постоянные C_1 и C_2 , так что в итоге будем иметь

$$v_x = \frac{\rho g \sin \alpha \cdot z (2h - z)}{2\mu}.$$

Расход на единицу ширины потока

$$Q = \int_0^h v_x dx = \frac{\rho g \sin \alpha \cdot h^3}{3\mu}.$$

Средняя скорость

$$v_{\text{cp}} = \frac{Q}{h} = \frac{\rho g \sin \alpha \cdot h^2}{3\mu}.$$

Поскольку движение жидкости происходит без ускорения, то работа сил тяжести должна затрачиваться только на преодоление трения, т. е., в конечном итоге, переходить в тепло. Убедимся в этом.

Прежде всего, работа, совершаемая над элементом жидкости с объемом $1 \cdot 1 \cdot dz$ за единицу времени равна

$$dA = \rho g v_x \sin \alpha \cdot dz.$$

По всей глубине потока

$$A = \rho g \sin \alpha \int_0^h v_x dz = \frac{(\rho g \sin \alpha)^2 \cdot h^3}{3\mu}.$$

Диссипация в элементарном объеме

$$dD_1 = \mu \left(\frac{dv_x}{dz} \right)^2 dz = \frac{(\rho g \sin \alpha)^2 (h-z)^2 dz}{\mu}.$$

Во всем потоке (при единичных поперечных и продольных размерах)

$$D_1 = \int_0^h dD_1 = \frac{(\rho g \sin \alpha)^2}{\mu} \int_0^h (h-z)^2 dz = \frac{(\rho g \sin \alpha)^2 \cdot h^3}{3\mu}.$$

Как и следовало ожидать, $A = D_1$.

ГЛАВА XI

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

§ 1. ПОНЯТИЕ ПОДОБИЯ

При установлении количественных закономерностей, характеризующих какой-либо физический процесс, могут быть использованы два метода. Первый сводится к экспериментальному исследованию, второй основан на аналитическом решении дифференциальных уравнений, описывающих рассматриваемое явление. Достоинство первого в его конкретности, непосредственной реализуемости результатов. Однако, с другой стороны, это же является его слабым местом, ибо полученные выводы применимы только к данному единичному факту и непосредственно не могут быть обобщены и распространены на другие сколько-нибудь отличные, пусть даже родственные по своему физическому содержанию, явления. В отличие от этого методы математической физики характеризуют

ся чрезвычайной общностью подхода, ибо выведенные уравнения, базируясь на фундаментальных законах природы, охватывают всю совокупность явлений данного класса, но и тем самым обезличивают конкретное явление. Например, уравнения гидромеханики описывают класс явлений, связанных с любым движением жидкой среды, не учитывая ни геометрической конфигурации системы, ни условий ее взаимодействия с окружающей средой. Для того, чтобы выделить интересующий нас процесс из всей совокупности (класса), охватываемой соответствующей системой уравнений, необходимо однозначно задать условия, определяющие его специфику. Сюда, как уже указывалось, относятся:

а) геометрические характеристики системы (размеры, конфигурация);

б) параметры, характеризующие ее физические свойства (например, вязкость жидкости, ее теплопроводность и т. д.);

в) распределение искомых величин, известных для какого-либо момента времени (начальное условие);

г) значения искомых переменных на границе системы, отражающих ее взаимодействие с окружающей средой.

Эти условия, вкупе с корректно записанными уравнениями, вполне достаточны для математической формулировки любой задачи. Этот метод универсален. Но, к сожалению, его практическая реализация наталкивается, в большинстве случаев, на непреодолимые в настоящее время математические трудности. Это связано со сложностью уравнений, а также граничных и начальных условий, обычно включающих в себя большое количество взаимозависимых величин.

Естественно поставить вопрос, во-первых, о возможности обобщения результатов эксперимента, а, во-вторых, об уменьшении количества фигурирующих в уравнениях величин или теоретическом анализе процесса.

Ответ на него дает теория подобия, которая в известной мере синтезирует оба метода исследования.

Кроме того, и это очень важно, она позволяет выявить ряд закономерностей физических явлений на основании системы дифференциальных уравнений (с соответствующими условиями однозначности) не прибегая к их интегрированию.

Вначале кратко остановимся на ее предпосылках. В основе здесь, по сути дела, лежит расширение простейшего понятия геометрического подобия. Напомним, что две фигуры геометрически подобны, если одна из другой может быть получена умножением

на некоторый постоянный масштабный множитель $k_f = \frac{l_2}{l_1}$ (l_2 и l_1

какие-либо размеры рассматриваемых фигур). При этом, естественно, деформации исходного геометрического образа не происходит. Две точки, которые переводятся при этом одна в другую, называются *сходственными*. Аналогично вводится временное по-

добие: $k_t = t_2/t_1$. При $k_t = 1$ оба рассматриваемых процесса протекают синхронно. При наличии подобия систем такие же требования предъявляются по отношению к их физическим параметрам, т. е. в сходственные моменты времени в сходственных точках должно быть, например, что $k_v = \frac{v_2}{v_1}$ (v — кинематическая вяз-

кость), а также всем прочим величинам, определяющим рассматриваемые процессы. При этом между масштабными множителями может иметь место вполне определенная связь, т. е. не все они являются взаимно независимыми. Например, можно ввести $k_v = \frac{v_2}{v_1}$

и $k_w = \frac{w_2}{w_1}$ (v, w — соответственно скорость и ускорение). С другой

стороны, поскольку $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$ и $w = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$, то можно запи-

сать, что $k_v = \frac{v_2}{v_1} = \lim_{\substack{\Delta t_1 \rightarrow 0 \\ \Delta t_2 \rightarrow 0}} \left(\frac{\Delta l_2}{\Delta l_1} \cdot \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \right)$, $k_w = \frac{w_2}{w_1} = \lim_{\substack{\Delta t_1 \rightarrow 0 \\ \Delta t_2 \rightarrow 0}} \left(\frac{\Delta v_2}{\Delta v_1} \cdot \frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} \right)$.

Так как, согласно определению, отношение всех длин и времен при подобных процессах неизменно, то записанные соотношения эквивалентны выражениям:

$$k_v = k_l \cdot k_t^{-1}, \quad k_w = k_v \cdot k_t^{-1} = k_l \cdot k_t^{-2}.$$

Аналогично, пользуясь соответствующими определениями, можно получить $k_\rho = k_m \cdot k_l^{-3} \left(\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \right)$, m — масса, V — объем, $k_m = \frac{m_2}{m_1}$);

$$k_F = k_m \cdot k_w = k_m \cdot k_l \cdot k_t^{-2}, \quad (F = m \cdot w) \text{ и т. д.}$$

Можно сказать, что две системы будут подобны:

- а) геометрически, если $k_l = \text{const}$;
- б) кинематически, если $k_l = \text{const}$, $k_t = \text{const}$ (все коэффициенты пересчета для кинематических элементов определяются при этом через k_l и k_t на основе соответствующих определений);
- в) динамически, если $k_l = \text{const}$, $k_t = \text{const}$, $k_m = \text{const}$ (отношения сил k_F также выражаются через k_l , k_t , k_m с помощью известных определительных уравнений).

Если налицо геометрическое, кинематическое и динамическое подобие двух систем, то они называются *механически подобными*. Подчеркнем, что подобные явления могут быть получены из одного путем умножения всех величин на соответствующие им масштабные множители. Причем множеству значений k отвечает и мно-

жество решений. В этом смысле подобные явления образуют группу — понятие более узкое, чем класс, но более широкое, чем единичное явление.

Между понятиями подобия и размерностей существует тесная связь, ибо пересчет всех величин подобных явлений с помощью постоянных множителей, по сути дела, эквивалентен изменению соответствующих единиц измерения в k раз. К тому же и соответствующие формулы для коэффициентов совершенно тождественны соотношениям, связывающим вторичные и первичные размерности. Так $k_v = k_l \cdot k_t^{-1} \rightarrow [v] = LT^{-1}$,

$$k_F = k_m \cdot k_l \cdot k_t^{-2} \rightarrow [F] = MLT^{-2} \text{ и т. д.}$$

§ 2. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ПОДОБИЯ

Подобие обусловлено, в первую очередь, физической однотипностью рассматриваемых процессов. Поэтому они относятся к одному классу и описываются одними и теми же уравнениями. Последнее означает, что уравнения должны быть инвариантны по отношению к преобразованиям подобия, т. е. не могут менять своего вида при умножении всех входящих в них величин на постоянные множители. Посмотрим, что это означает на практике.

Запишем уравнения, отвечающие двум подобным процессам в виде суммы операторов Φ_i ($i=1, 2, \dots, n$; n — число слагаемых в уравнении). т. е.

$$\Phi_1^{(1)} + \Phi_2^{(1)} + \dots + \Phi_n^{(1)} = 0; \quad (11.1)$$

$$\Phi_1^{(2)} + \Phi_2^{(2)} + \dots + \Phi_n^{(2)} = 0. \quad (11.2)$$

Имея в виду, что во втором уравнении, на основании свойства подобия, произведен пересчет всех величин, перепишем его в виде

$$C_1 \Phi_1^{(1)} + C_2 \Phi_2^{(1)} + \dots + C_n \Phi_n^{(1)} = 0, \quad (11.3)$$

где C_i представляет собой комбинации из масштабных коэффициентов, построенные по типу формул размерностей в виде степенных одночленов*.

Заметим, что если бы все $C_i=1$, то условие инвариантности уравнений выполнялось бы тривиальным образом.

Теперь поделим в (11.3) все C_i на C_1 (это не умаляет общности рассуждений). Тогда будем иметь

$$\Phi_1^{(1)} + K_2 \Phi_2^{(1)} + K_3 \Phi_3^{(1)} + \dots + K_n \Phi_n^{(1)} = 0. \quad (11.4)$$

Здесь $K_i = \frac{C_i}{C_1}$ — некоторые приведенные множители**.

* Как указывалось выше, при этом каждая первичная размерность просто должна быть заменена соответствующим коэффициентом.

** Общее число отличных друг от друга приведенных множителей K_i может быть меньше числа слагаемых в уравнении, ибо часть из них при этом имеет совершенно одинаковый вид.

Сравнивая (11.1) и (11.4) видим, что первые члены уравнений совпадают, а для равенства прочих достаточно положить $K_i=1$. При этих условиях сформулированные выше требования удовлетворяются.

С точки зрения общего подобия систем инвариантность уравнений дает необходимые, но не достаточные условия, ибо без учета начальных и граничных условий, одинаковые системы дадут одинаковые решения для разных по своему физическому содержанию процессов. Поэтому аналогичные требования следует наложить также на начальные и граничные условия. Их выполнение даст достаточные условия подобия.

Таким образом, можно констатировать, что для подобия двух систем необходимо и достаточно, чтобы все приведенные множители K_i , составленные на основании известных уравнений и заданных начальных и граничных условиях были бы тождественно равны единице.

Пример. Для уяснения деталей обратимся к конкретному примеру. Рассмотрим подобные преобразования уравнений Навье—Стокса для несжимаемой жидкости, взяв лишь одну проекцию на ось z (z — направлено по линии действия силы тяжести в обратную сторону). Как известно, в этом случае

$$\frac{\partial v_{z_1}}{\partial t_1} + v_{x_1} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial y_1} + v_{z_1} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial z_1} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} - g_1 - \nu_1 \left(\frac{\partial^2 v_{z_1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_{z_1}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v_{z_1}}{\partial z_1^2} \right) \quad (11.5)$$

(обозначения общепринятые).

$$\frac{\partial v_{z_2}}{\partial t_2} + v_{x_2} \frac{\partial v_{z_2}}{\partial x_2} + v_{y_2} \frac{\partial v_{z_2}}{\partial y_2} + v_{z_2} \frac{\partial v_{z_2}}{\partial z_2} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial z_2} - g_2 - \nu_2 \left(\frac{\partial^2 v_{z_2}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 v_{z_2}}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2 v_{z_2}}{\partial z_2^2} \right) \quad (11.6)$$

(индексы 1 и 2 обозначают разные подобные процессы).

Вводя масштабные множители, (11.6) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{k_v}{k_t} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial t_1} + \frac{k_v^2}{k_L} \left(v_{x_1} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial y_1} + v_{z_1} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial z_1} \right) = \\ = -\frac{k_p}{k_L k_\rho} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} - k_g g_1 - \frac{k_v \cdot k_v}{k_L^2} \nu_1 \left(\frac{\partial^2 v_{z_1}}{\partial x_1^2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 v_{z_1}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v_{z_1}}{\partial z_1^2} \right). \end{aligned} \quad (11.7)$$

Здесь принято для простоты, что $k_x = k_y = k_z = k_L$ и $k_{vx} = k_{vy} = k_{vz} = k_v$.

Поделив все члены уравнения на общий множитель, стоящий перед каким-либо оператором (например, на k_v^2/k_L), получим в (11.7) некоторые приведенные комплексные множители K_i , т. е.

$$\frac{k_L}{k_t \cdot k_v} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial t_1} + v_{x_1} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial x_1} + v_{y_1} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial y_1} + v_{z_1} \frac{\partial v_{z_1}}{\partial z_1} = - \frac{k_p}{k_p \cdot k_v^2} \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial z_1} - \frac{k_g \cdot k_L}{k_v^2} \cdot g_1 - \frac{k_v}{k_v \cdot k_L} \cdot v_1 \left(\frac{\partial^2 v_{z_1}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_{z_1}}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 v_{z_1}}{\partial z_1^2} \right). \quad (11.7')$$

Здесь $K_1 = \frac{k_L}{k_t \cdot k_v}$; $K_2 = \frac{k_p}{k_p \cdot k_v^2}$; $K_3 = \frac{k_L \cdot k_g}{k_v^2}$; $K_4 = \frac{k_v}{k_v \cdot k_L}$.

Должно быть $K_1 = K_2 = K_3 = K_4 = 1$, т. е.:

$$\frac{k_L}{k_t \cdot k_v} = 1, \quad \frac{k_p}{k_p \cdot k_v^2} = 1, \quad \frac{k_L \cdot k_g}{k_v^2} = 1, \quad \frac{k_v}{k_L \cdot k_v} = 1. \quad (11.8)$$

По смыслу: $k_L = \frac{l_2}{l_1}$, $k_t = \frac{t_2}{t_1}$, $k_v = \frac{v_2}{v_1}$, $k_p = \frac{p_2}{p_1}$, $k_g = \frac{g_2}{g_1}$, $k_v = \frac{v_2}{v_1}$.

Поэтому равенства (11.8) можно представить в виде:

$$\frac{l_2}{t_2 v_2} = \frac{l_1}{t_1 v_1} = \text{idem}, \quad \frac{p_2}{\rho_2 v_2^2} = \frac{p_1}{\rho_1 v_1^2} = \text{idem},$$

$$\frac{l_2 g_2}{v_2^2} = \frac{l_1 g_1}{v_1^2} = \text{idem}, \quad \frac{v_2}{l_2 v_2} = \frac{v_1}{l_1 v_1} = \text{idem}^{**}. \quad (11.8')$$

Записанные равенства должны выполняться в случае подобия явлений в обоих рассматриваемых процессах, т. е. указанные комплексы, составленные из некоторых характеристик величин явления 1 и 2 должны быть одинаковыми (термин idem — одинаковый).

К более подробной расшифровке понятия характерных величин и физического смысла полученных комплексов мы обратимся несколько ниже, после введения некоторых дополнительных определений.

* Обратим внимание, что здесь число K_i меньше числа операторов, ибо часть из них повторяется.

** Если искусственно не менять силу тяжести, то $g_2 = g_1$, и индексы можно опустить.

§ 3. ОБЕЗРАЗМЕРИВАНИЕ УРАВНЕНИЙ. КРИТЕРИИ ПОДОБИЯ

Все исследуемые величины, так же как и их производные всех порядков, непрерывно меняются во времени и пространстве. Если при этом они остаются ограниченными, то возможно ввести понятие характерных масштабов, которые выбираются следующим образом. Если в математической формулировке задачи фигурируют сами искомые величины, то в качестве характерных целесообразно использовать их средние значения. Обозначив $\langle \rangle$ знак осреднения по ансамблю (множеству реализаций) можем для любой из них f записать $\langle f \rangle = f_0$ (f_0 — масштаб). Для случая производной масштаб функции выбираем на основе разности ее максимальных (f_2) и минимальных (f_1) значений

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\langle f_2 - f_1 \rangle}{\langle x_{i2} - x_{i1} \rangle} \frac{\partial f_0}{\partial x_{i0}} = \frac{\Delta f_0}{\Delta x_{i0}} \frac{\partial f_0}{\partial x_{i0}},$$

где $i=1, 2, 3, 4$; $x_1 \equiv x$; $x_2 \equiv y$; $x_3 \equiv z$; $x_4 \equiv t$;
индекс б — безразмерный.

При этом масштаб координат и времени (Δx_{i0}) определяется таким образом, чтобы $\left\langle \frac{\partial f_0}{\partial x_{i0}} \right\rangle \cong 1$.

Аналогично для второй производной

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\Delta f_0}{\Delta x_{i0}} \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_{i0}^2}, \text{ т. е. } \left\langle \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_{i0}^2} \right\rangle \cong 1.$$

Хочется подчеркнуть, что размерность соответствующих величин переходит к масштабам. Индекс «б» и соответствует тому, что означенные им функции и аргументы являются безразмерными.

Наиболее важным выводом из приведенных соотношений является то, что при указанном выборе масштабов средние значения безразмерных функций и их производных равны единице*.

Сразу оговоримся, что масштаб для какой-либо из величин не всегда возможно определить в условиях конкретной задачи. Так, например, если рассматривается процесс распространения тепла в неограниченном пространстве, то линейного размера задать не удастся. То же по отношению к масштабу времени в случае аperiodического процесса.

Вновь обратимся к примеру, рассмотренному в предыдущем параграфе.

* Суть обезразмеривания заключается в том, что мы переходим к новым единицам измерения, которые постулируются самой задачей. Так, если характерным размером является длина какого-либо тела, мы сопоставляем все линейные размеры с этой длиной. Она является масштабом измерения для всех подобных процессов, т. е. по сути дела, единицей длины.

Пусть для простоты:

$$\langle \Delta v_i \rangle = \langle v_i \rangle \equiv v_0,$$

$$\langle \Delta p \rangle \equiv p_0, \quad \langle \rho \rangle \equiv \rho_0, \quad \langle v \rangle \equiv v_0, \quad \langle g \rangle g_0 \equiv g;$$

$$\langle \Delta x \rangle = \langle \Delta y \rangle = \langle \Delta z \rangle \equiv L, \quad \langle \Delta t \rangle \equiv t_0.$$

Все величины, включая независимые переменные, можно представить как произведение характерных масштабов на безразмерные, т. е., например, $v_x = \langle \Delta v \rangle v_{x6} \equiv v_0 \cdot v_{x6}$, $g = \langle g \rangle g_0 \equiv g_0 g_6 = g$, $x = \langle \Delta x \rangle x_6 = L \cdot x_6$.

Тогда уравнение (11.5) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{v_{01}}{t_{01}} \frac{\partial v_{z,6}}{\partial t_{16}} + \frac{v_{01}^2}{L_1} \left(v_{x,6} \frac{\partial v_{z,6}}{\partial x_{16}} + v_{y,6} \frac{\partial v_{z,6}}{\partial y_{16}} + v_{z,6} \frac{\partial v_{z,6}}{\partial z_{16}} \right) = \\ & = - \frac{p_{01}}{\rho_{01} L_1} \frac{\partial p_{16}}{\partial z_{16}} - g - \frac{v_{01}}{L_1^2} v_{16} \left(\frac{\partial^2 v_{z,6}}{\partial x_{16}^2} + \frac{\partial^2 v_{z,6}}{\partial y_{16}^2} + \frac{\partial^2 v_{z,6}}{\partial z_{16}^2} \right). \quad (11.9) \end{aligned}$$

Аналогичный вид примет и уравнение (11.6), где вместо индекса 1 следует использовать 2.

Индивидуальность какого-либо явления отражается в его масштабах, которые в известной степени характеризуют количественную сторону процесса.

В то же время каждый член уравнения отражает вклад тех или иных физических эффектов в рассматриваемый процесс. Поэтому комбинация характерных величин, стоящая в виде множителя перед каждым из слагаемых, дает их некоторую среднюю величину, отражает интенсивность влияния того или иного фактора на всю картину в целом. Поделив все прочие на один из них мы получим набор некоторых безразмерных множителей, ибо размерности всех членов уравнения одинаковы. Тем самым мы как бы выявляем относительную меру влияния различных физических факторов, сравнивая их с единицей. (Последнее следует из того, что безразмерный член, с характерным значением которого мы ведем сравнение имеет порядок единицы).

Конкретно разделим левую и правую части нашего уравнения на $\frac{v_{01}^2}{L_1}$. Поскольку $\frac{v_{01}^2}{L_1}$ дает характерную величину сил инерции, то тем самым сравниваем с ней все прочие силы. Будем иметь

$$\begin{aligned} & \frac{L_1}{t_{01} v_{01}} \frac{\partial v_{z,6}}{\partial t_{16}} + v_{x,6} \frac{\partial v_{z,6}}{\partial x_{16}} + v_{y,6} \frac{\partial v_{z,6}}{\partial y_{16}} + v_{z,6} \frac{\partial v_{z,6}}{\partial z_{16}} = - \frac{p_{01}}{\rho_{01} v_{01}} \frac{\partial p_{16}}{\partial z_{16}} - \\ & - g \frac{L_1}{v_{01}^2} - \frac{v_{01}}{v_{01} L_1} v_{16} \left(\frac{\partial^2 v_{z,6}}{\partial x_{16}^2} + \frac{\partial^2 v_{z,6}}{\partial y_{16}^2} + \frac{\partial^2 v_{z,6}}{\partial z_{16}^2} \right). \quad (11.10) \end{aligned}$$

Требование идентичности уравнений при подобии явлений должно вести к выполнению равенств типа:

$$\left. \begin{aligned} \frac{L_1}{t_{01} \cdot v_{01}} &= \frac{L_2}{t_{02} \cdot v_{02}} = \text{idem}, & \frac{p_{01}}{\rho_{01} v_{01}^2} &= \frac{p_{02}}{\rho_{02} v_{02}^2} = \text{idem}, \\ \frac{gL_1^3}{v_{01}^2} &= \frac{gL_2}{v_{02}^2} = \text{idem}, & \frac{v_{01}}{v_{01} L_1} &= \frac{v_{02}}{v_{02} L_2} = \text{idem}. \end{aligned} \right\} \quad (11.11)$$

Сравнивая (11.11) с (11.8'), видим, что выражения тождественны, причем (11.11) эквивалентно (11.8). В этом смысле масштабные множители можно трактовать как отношение характерных (средних в указанном выше смысле) значений величин. Таким образом, например,

$$k_l = \frac{L_2}{L_1}, \quad k_v = \frac{v_{02}}{v_{01}}, \quad k_p = \frac{p_{02}}{p_{01}} \quad \text{и т. д.}$$

Следует подчеркнуть, что из всего вышеизложенного следует вывод, что обезразмеренные уравнения при подобии явлений должны быть тождественны. То же относится к начальным и граничным условиям.

Полученные безразмерные комплексы типа (11.11), состоящие из характерных масштабов для случая подобных явлений должны быть равны. Это требование подобия и, в этом смысле, они могут быть названы *критериями подобия*. Единичному численному значению критерия отвечает бесчисленное множество значений входящих в них величин, т. е. подобные явления образуют группу.

Все сказанное может быть обобщено по отношению к уравнениям любого типа.

Отметим, что решение безразмерного уравнения с присоединением безразмерных начальных и граничных условий универсально. Оно относится ко всей группе подобных явлений, а каждый конкретный случай может быть получен из него путем простейшего пересчета, т. е. умножением на соответствующие характерные масштабы. Метод чрезвычайно эффективен, ибо, позволяя получать универсальные решения, экономит массу сил и времени.

§ 4. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

Полученные в нашем примере критерии подобия известны как:

$$\begin{aligned} \frac{v_0 L}{\nu} &= \text{Re} — \text{критерий Рейнольдса}, \\ \frac{v_0^2}{gL} &= \text{Fr} — \text{критерий Фруда}, \\ \frac{p}{\rho v_0^2} &= \text{Eu} — \text{критерий Эйлера}, \\ \frac{v_0 t_0}{L} &= \text{Sh} — \text{критерий Струхала}. \end{aligned}$$

(Индексы везде опущены).

Тогда (11.10) может быть переписано в виде

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial v_{z6}}{\partial t_6} + v_{x6} \frac{\partial v_{z6}}{\partial x_6} + v_{y6} \frac{\partial v_{z6}}{\partial y_6} + v_{z6} \frac{\partial v_{z6}}{\partial z_6} = -Eu \frac{\partial p_6}{\partial z_6} - \frac{1}{Fr} - \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v_{z6}}{\partial x_6^2} + \frac{\partial^2 v_{z6}}{\partial y_6^2} + \frac{\partial^2 v_{z6}}{\partial z_6^2} \right). \quad (11.12)$$

(Индекс 1 также опущен).

Легко видеть, что критерий Рейнольдса $Re = \frac{v_0^2/L}{\nu_0/L^2}$ по физическому смыслу дает отношение сил инерции к силам вязкости (разумеется в среднем); $Fr = \frac{v_0^2/L}{g}$ — отношение сил инерции к силам тяжести; $Eu = \frac{p}{\rho v_0^2}$ — отношение статического напора к динамическому.

Поскольку задание соответствующих характерных значений не всегда возможно по условиям задачи, то критерии подобия могут представлять собой отношение текущих величин к эквивалентной им по размерности комбинации из заданных внешних параметров. Примером служит: выписанный выше критерий Струхала, где вместо масштаба времени t_0 стоит величина L/v_0 , имеющая размерность t . Однако в случае периодического процесса характерным значением t_0 может служить период, и в этом случае он имеет вид $Sh = \frac{t}{t_0}$.

Кроме критериев подобия в задаче могут появиться критерии другого типа, которые мы будем называть *параметрическими*. Они возникают, если для какой-либо величины может быть задано два или более характерных значения, и представляют собой отношения таких одноименных характеристик.

Например, если по условию имеем дело с двумя жидкостями, обладающими вязкостями ν_1 и ν_2 , то появится безразмерная величина ν_2/ν_1 .

Заметим, что равенство критериев подобия и параметрических критериев обеспечивает подобие двух систем, ибо в них находят отражение все внешние параметры задачи. Подобие самих явлений обуславливается еще равенством безразмерных переменных. Последнее означает, что при $t_{62} = t_{61}$, в точках $x_{62} = x_{61}$, $y_{61} = y_{61}$, $z_{62} = z_{61}$ имеет место пространственно-временное соответствие. А эквивалентные масштабы дают конкретные условия для пересчета координат и времени ($x_2 \rightarrow x_1$, $y_2 \rightarrow y_1$, $z_2 \rightarrow z_1$, $t_2 \rightarrow t_1$).

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ В ГИДРОМЕХАНИКЕ

§ 1. УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Появление критериев подобия в уравнении служит удобным аппаратом оценки влияния тех или иных членов на весь процесс в целом. Если безразмерный множитель перед каким-либо оператором значительно меньше единицы, то вклад соответствующих членов пренебрежимо мал, и они могут быть опущены. Это дает возможность упростить уравнение, устраняя несущественные эффекты и приближая математическую модель к реальному положению вещей. Естественно, что аналитическое или численное решение упрощенных таким образом уравнений значительно менее трудоемко.

Зачастую только лишь на этой основе возможно получение позитивных результатов при рассмотрении какого-либо процесса, общая математическая формулировка которого не позволяет, ввиду сложности, получить ни численного, ни тем более аналитического решения.

Рассмотрим варианты упрощений системы уравнений гидромеханики. Для целей большей наглядности будем считать процессы адиабатическими. Впрочем, сама по себе эта модель является одной из наиболее важных в силу наличия широкого класса задач, которые решаются в адиабатическом приближении.

Выпишем исходную систему:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + g\vec{k} + \nu \text{grad div } \vec{v} + \nu \Delta \vec{v}; \quad (12.1)$$

$$\frac{dp}{dt} + \rho \text{div } \vec{v} = 0; \quad (12.2)$$

$$p = k\rho^\gamma. \quad (12.3)$$

Из массовых сил в (12.1) мы учитывали только силу тяжести, направление которой определяем ортом $\vec{k}$.

Далее действуем аналогично тому, как и в рассмотренном выше примере, т. е. вводим характерные масштабы и обезразмериваем систему. В итоге получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{Sh} \frac{\partial \vec{v}_6}{\partial t_6} + (\vec{v}_6 \cdot \nabla_6) \vec{v}_6 = -Eu \frac{1}{\rho_6} \text{grad}_6 p_6 + \frac{\vec{k}}{Fr} + \\ + \frac{1}{Re} (\nu_6 \text{grad}_6 \text{div } \vec{v}_6 + \nu_6 \Delta \vec{v}_6). \end{aligned} \quad (12.4)$$

Теперь легко перейти к той или иной модели. Так, процесс можно считать стационарным, если, $Sh \gg 1$ ($\frac{1}{Sh} \ll 1$). Последнее не просто означает $t_0 \rightarrow \infty$, а соответствует неравенству $t_0 \gg \frac{L}{v_0}$, что может осуществиться также при весьма малых L или больших v_0 . Вопрос о том, что считать малым или большим решается применительно к каждому рассматриваемому процессу и конкретные цифры определяются с учетом той степени точности, которая задается постановкой задачи.

Аналогично, силой тяжести можно пренебречь, если $\frac{1}{Fr} \ll 1$, что означает $\frac{v_0^3}{L} \gg g$, т. е. опять же это результат сопоставления трех величин v_0 , L и g . Мы видим, что влияние силы тяжести падает с ростом скорости и уменьшением характерного масштаба.

Вклад вязких членов определяется численным значением множителя $\frac{1}{Re}$. Влияние вязкости убывает при увеличении скорости и масштаба, ибо $\frac{1}{Re} \ll 1$ эквивалентно неравенству $v \ll v_0 L$.

Критерий Эйлера всегда $O(1)$, ибо через силу градиента давления уравниваются все прочие силовые факторы, т. е. это по своей сути реакция среды на приложенные к ней усилия. Она, естественно, существует всегда. Таким образом $\frac{p_0}{\rho_0 v_0^2} = O(1)$, или

$$\rho_0 \sim \rho_0 v_0^2. \quad (12.5)$$

Для оценки эффекта сжимаемости обратимся к уравнению неразрывности (12.2), которое вначале представим в несколько ином виде, используя (12.3).

Прологарифмировав и продифференцировав по времени (12.3), получим

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\rho}{xp} \frac{dp}{dt}.$$

Величина $\frac{xp}{\rho} = a^2$ как мы убедимся далее, есть квадрат скорости звука a . Теперь (12.2) можно переписать в виде

$$\frac{1}{a^2} \frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0.$$

Обезразмеривая это уравнение, получим

$$\frac{p_0 L}{a^2 t_0 \rho_0 v_0} \frac{dp_0}{dt_0} + \rho_0 \operatorname{div} v_0 = 0.$$

Для большинства аperiodических задач для масштаба времени можно считать справедливой оценку $t_0 \sim L/v_0$. Подставляя это равенство в последнее уравнение и заменяя ρ_0 согласно (12.5), окончательно получаем

$$M^2 \frac{dp_0}{dt_0} + \rho_0 \operatorname{div} v_0 = 0. \quad (12.6)$$

Здесь введено обозначение $M = \frac{v}{a}$.

Величина M носит название *критерия Маха* и, как видим, представляет собой отношение характерной скорости к скорости звука. Жидкость можно считать несжимаемой, если $M \ll 1$, т. е. $v \ll a$. Оценивая численные значения критериев, мы с учетом заданной точности, можем прийти к той или иной математической модели. При этом малые члены можно из рассмотрения исключить, что всегда ведет к существенным упрощениям задачи.

Следует иметь в виду, что иногда простое отбрасывание слабых может повести к не вполне корректным результатам. Дело в том, что, производя оценки членов дифференциальных уравнений, мы должны быть уверены, что их порядок во всей исследуемой области сохраняется одинаковым ($\langle f \rangle = 1$), т. е. тем самым мы полагаем, что и решение является гладким во всех точках. Неприятностей следует ожидать при наличии в уравнении сингулярностей, или, если имеются значительные градиенты величин в какой-либо локализованной зоне (тогда $\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \rangle \neq 1$). В частности, это имеет место при наличии резко пульсирующего характера f .

Иногда, даже в среднем малый член, действующий в течение длительного промежутка времени окажет весьма существенное влияние на протекание процесса в целом. Поэтому нередко возникает необходимость дополнительного учета действия опущенных членов. В этих случаях целесообразно использовать метод разложения по малому параметру. Суть последнего сводится к представлению решений в виде ряда по степеням малого параметра α в виде

$$f = f^{(0)} + \alpha f^{(1)} + \alpha^2 f^{(2)} + \dots \quad (12.7)$$

Подставляя (12.7) в исходные уравнения, начальные и граничные условия, мы будем получать соответствующие математические формулировки задачи, отбирая последовательно члены при α^0 , α^1 , α^2 и т. д. Это дает нам нулевое, первое, второе, и т. д. приближе-

ния. Следует иметь в виду, что в некоторых случаях при этом может быть отброшен член с высшей производной, за счет чего могут возникнуть особенности. Как правило (но не всегда), они устраняются приближениями более высокого порядка.

Ниже мы проиллюстрируем метод малого параметра на примере вывода уравнений пограничного слоя.

Теория подобия дает нам возможность выявить и сформулировать физически обоснованный малый параметр. Это одно из важнейших ее достоинств, так как процедура отыскания малого параметра вполне унифицируется.

§ 2. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ

Динамический пограничный слой возникает на границе раздела между жидкостью и твердым телом. Он характеризуется сильно выраженным влиянием вязких сил, величина которых соизмерима с силами инерции. Вне его пределов движущуюся жидкость можно рассматривать как идеальную. Экспериментально установлено, что толщина этого слоя по сравнению с горизонтальной протяженностью процесса весьма мала.

Выведем соответствующие уравнения, используя оба упомянутых выше фактора. При этом используем декартову плоскую систему координат (x, y) , считая кривизну поверхности обтекания величиной пренебрежимо малой. Жидкость полагаем несжимаемой, движение плоским.

Общие уравнения движения и неразрывности при отсутствии сил тяжести имеют вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

где $v_x \equiv u$, $v_y \equiv v$; u , v — продольная и поперечная компоненты скорости.

Введем характерные масштабы: $x \sim x_0$, $y \sim y_0$, $u \sim u_0$, $v \sim v_0$, $t_0 \sim \frac{x_0}{u_0}$; $p_0 \sim \rho u_0^2$.

Подставляя их в уравнение и поделив все члены 1-го уравнения на $\frac{u_0^2}{x_0}$, второго — на $\frac{u_0 v_0}{x_0}$, а 3-го — на $\frac{u_0}{x_0}$, будем иметь:

$$\frac{x_0}{u_0 t_0} \frac{\partial u_0}{\partial t_0} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + \frac{x_0 v_0}{u_0 y_0} v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y_0} = -\frac{p_0}{\rho u_0^2} \frac{\partial p_0}{\partial x_0} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\nu}{x_0 u_0} \frac{\partial^2 u_6}{\partial x_6^2} + \frac{\nu x_0}{y_0^2 u_0} \frac{\partial^2 u_6}{\partial y_6^2}, \\
& \frac{x_0}{u_0 t_0} \frac{\partial v_6}{\partial t_6} + u_6 \frac{\partial v_6}{\partial x_6} + \frac{x_0 v_0}{y_0 u_0} v_6 \frac{\partial v_6}{\partial y_6} = - \frac{p_0 x_0}{\rho y_0 u_0 v_0} \frac{\partial p_6}{\partial y_6} + \\
& + \frac{\nu}{x_0 u_0} \frac{\partial^2 v_6}{\partial x_6^2} + \frac{\nu x_0}{y_0^2 u_0} \frac{\partial^2 v_6}{\partial y_6^2}, \\
& \frac{\partial u_6}{\partial x_6} + \frac{x_0 v_0}{y_0 u_0} \frac{\partial v_6}{\partial y_6} = 0.
\end{aligned}$$

Из уравнения неразрывности ясно, что $\frac{x_0 v_0}{y_0 u_0} = 1$, а из условия равенства порядков сил трения и инерции вытекает, что $\frac{\nu x_0}{y_0^2 u_0} = 1$. Отсюда, вводя число Рейнольдса $Re = \frac{x_0 u_0}{\nu}$, получим:

$$y_0 = \frac{x_0}{\sqrt{Re}}, \quad v_0 = \frac{u_0}{\sqrt{Re}}.$$

Теперь после установления соответствующих масштабов, уравнения перепишутся в виде:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial u_6}{\partial t_6} + u_6 \frac{\partial u_6}{\partial x_6} + v_6 \frac{\partial u_6}{\partial y_6} = - \frac{\partial p_6}{\partial x_6} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_6}{\partial x_6^2} + \frac{\partial^2 u_6}{\partial y_6^2}; \\
& \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial v_6}{\partial t_6} + u_6 \frac{\partial v_6}{\partial x_6} + v_6 \frac{\partial v_6}{\partial y_6} \right) = - \frac{\partial p_6}{\partial y_6} + \frac{1}{Re^2} \frac{\partial^2 v_6}{\partial x_6^2} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v_6}{\partial y_6^2}, \\
& \frac{\partial u_6}{\partial x_6} + \frac{\partial v_6}{\partial y_6} = 0.
\end{aligned}$$

Так как $O(y_0) = \delta_*$, где δ_* — толщина пограничного слоя, являющаяся по условию малой величиной, то можно считать, что $\delta \sim \frac{1}{\sqrt{Re}}$. Отсюда следует, что наличие пограничного слоя характеризуется большими значениями числа Re . Принимая величину $\frac{1}{\sqrt{Re}}$ за малый параметр, можно формально разложить по нему искомые величины, т. е.:

$$\begin{aligned}
u_6 &= u_6^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{Re}} u_6^{(1)} + \dots, \\
v_6 &= v_6^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{Re}} v_6^{(1)} + \dots, \\
p_6 &= p_6^{(0)} + \frac{1}{\sqrt{Re}} p_6^{(1)} + \dots
\end{aligned}$$

Подставляем эти разложения в нашу систему и приравниваем члены с нулевыми степенями при малом параметре. Это дает нам нулевые приближения:

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} = - \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2},$$

$$0 = - \frac{\partial p_0}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = 0.$$

Аналогичный результат получается при $Re \rightarrow 0$. Возвращаясь к размерным переменным, получаем уравнения пограничного слоя в виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (12.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (12.9)$$

В таком виде они были впервые опубликованы в 1904 г. Л. Прандтлем.

Условие $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ означает, что в пределах пограничного слоя давление не меняется т. е., точнее, ввиду малой толщины его изменение практически несущественно. Поэтому можно считать, что оно равно давлению в набегающем потоке, где оно, в свою очередь, определяется по уравнению Бернулли (см. ниже) как: $p = - \frac{\rho \bar{u}^2}{2}$ ($\bar{u} = \bar{u}(x, t)$ считается известным из решения уравнения для внешней идеальной жидкости, где силами трения можно пренебречь).

Таким образом,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (12.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (12.11)$$

В случае стационарности:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (12.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (12.13)$$

Метод пограничного слоя весьма эффективен, ибо за счет упрощений уравнения легче поддаются анализу. С другой стороны, здесь математическая постановка приводится в соответствие с физическим содержанием.

§ 3. ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОГРАНСЛОЙ НА ПЛАСТИНЕ

Рассмотрим течение жидкости по горизонтальной полубесконечной пластине, исходя из приближений пограничного слоя, т. е. рассматривая лишь тонкий непосредственно прилегающий к ней слой жидкости. Будем, в целях упрощения, полагать жидкость несжимаемой, движение стационарным, и пусть скорость внешнего потока, вне пределов пограничного слоя, является постоянной $\bar{u} = \text{const}$. В этом случае уравнение (12.12) упростится, ибо $\bar{u} \frac{d\bar{u}}{dx} = 0$, а (12.13) останется без изменений, так что имеем систему:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (12.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (12.15)$$

Располагая начало координат на передней кромке пластины, направим ось x по потоку, а ось y перпендикулярно к пластине. Тогда граничные условия примут вид:

$$\left. \begin{aligned} u &= 0 \text{ при } y=0 \text{ и } 0 \leq x < \infty, \\ u &\rightarrow \bar{u} \text{ при } y \rightarrow \infty \text{ и } u - \infty < x < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (12.16)$$

Вводя функцию тока Ψ и имея в виду, что $u = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, $v = \frac{\partial \Psi}{\partial y}$, приходим к одному уравнению относительно Ψ , которое получается заменой u и v через Ψ в уравнении (12.14). Оно имеет вид

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}. \quad (12.17)$$

Граничные условия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= 0 \text{ при } y=0 \text{ и } 0 \leq x < \infty, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} &\rightarrow \bar{u} \text{ при } y \rightarrow \infty \text{ и } -\infty < x < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (12.18)$$

Поскольку Ψ определяется с точностью до аддитивной постоянной, будем считать, что $\Psi = 0$ при $y=0$ и $-\infty < x < \infty$.

Введя масштабы $\langle \Psi \rangle = \Psi_0$, $\langle x \rangle = x_0$, $\langle y \rangle = y_0$, безразмерим (12.17) и (12.18). Получаем:

$$\frac{\partial \Psi_6}{\partial y_6} \cdot \frac{\partial^2 \Psi_6}{\partial x_6 \partial y_6} - \frac{\partial \Psi_6}{\partial x_6} \frac{\partial^2 \Psi_6}{\partial y_6^2} = \frac{\nu x_0}{y_0 \Psi_0} \frac{\partial^3 \Psi_6}{\partial y_6^3}; \quad (12.17')$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Psi_6}{\partial y_6} &= 0 \text{ при } y_6 = 0 \text{ и } 0 \leq x_6 < \infty, \\ \frac{\partial \Psi_6}{\partial y_6} &= \frac{\bar{u} y_0}{\Psi_0} \text{ при } y_6 \rightarrow \infty \text{ и } -\infty < x_6 < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (12.18')$$

В (12.17') все члены поделены на общий множитель перед левой частью $\frac{\Psi_0^2}{x_0 y_0^2}$, а в (12.18') на $\frac{\Psi_0}{y_0}$.

Полученные в (12.17') и (12.18') безразмерные комплексы идентичны приведенным комплексным множителям K_i , в которых масштабные коэффициенты заменены отношением характерных размеров величин. Поэтому из требования подобия вытекает их равенство единице. Таким образом,

$$\frac{\nu x_0}{y_0 \Psi_0} = \frac{\bar{u} y_0}{\Psi_0} = 1. \quad (12.19)$$

Имеем два соотношения, связывающие масштабы трех переменных величин x_0 , y_0 , Ψ_0 . Предположив первоначально, что масштаб x_0 нами задан и равен L , определим y_0 и Ψ_0 .

Для удобства изменим первый комплекс, взяв вместо него произведение

$$\frac{\nu L}{y_0 \Psi_0} \cdot \frac{\Psi_0}{\bar{u} y_0} = \frac{\nu L}{y_0^2 \bar{u}}.$$

Теперь вместо (12.19) имеем

$$\frac{\nu L}{y_0^2 \bar{u}} = \frac{\bar{u} y_0}{\Psi_0} = 1. \quad (12.19')$$

В (12.19') величина y_0 входит лишь в один комплекс. Откуда находим $y_0 = \sqrt{\frac{\nu L}{\bar{u}}}$, а затем из второго равенства $\Psi_0 = \sqrt{\bar{u} L}$. Безразмерная функция тока должна быть функцией безразмерных координат:

$$\Psi_6 = f(x_6, y_6),$$

или, с учетом полученных выше выражений для масштабов;

$$\Psi = \sqrt{\nu \bar{u} L} f\left(\frac{x}{L}, y \sqrt{\frac{\bar{u}}{\nu L}}\right).$$

Однако, по сути дела, масштаб L нам по условиям задачи не задан. Поэтому он не может фигурировать и в решении. Отсюда следует, что все безразмерные комплексы должны объединиться в такой комбинации, чтобы исключилось L . Например, $\frac{\Psi}{\sqrt{\bar{u}L}} \left(\frac{x}{L}\right)^\alpha$

и $y \sqrt{\frac{\bar{u}}{\nu L}} \left(\frac{x}{L}\right)^\beta$. Легко видеть, что $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$.

Тогда получим

$$\Psi = \sqrt{\bar{u}x} \cdot u \left(y \sqrt{\frac{\bar{u}}{\nu x}} \right). \quad (12.20)$$

Мы видим, что вместо двух в решении задачи осталась лишь одна комплексная переменная $\eta = y \sqrt{\frac{\bar{u}}{\nu x}}$. Таким образом, рассмотренный подход привел нас к выбору криволинейной системы координат, вид которой продиктован самой задачей. По отношению к ней задача обладает физической симметрией. Замена двух переменных одной означает, что при переходе к новой системе координат мы вместо уравнений в частных производных, где все функции зависят от двух аргументов, должны получить обыкновенное дифференциальное уравнение.

Легко видеть, что

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{y}{2x^{3/2}} \sqrt{\frac{\bar{u}}{\nu}}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \sqrt{\frac{\bar{u}}{\nu x}}.$$

Поэтому:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\sqrt{\bar{u}x} \varphi(\eta) \right] = \sqrt{\bar{u}x} \frac{\partial \varphi(\eta)}{\partial y} = \sqrt{\bar{u}x} \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \\ &= \bar{u} \frac{d\varphi}{d\eta}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \bar{u} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{d\varphi}{d\eta} \right) = \bar{u} \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \bar{u} \sqrt{\frac{\bar{u}}{\nu x}} \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2};$$

$$\frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = \frac{\bar{u}^2}{\nu x} \frac{d^3 \varphi}{d\eta^3};$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\sqrt{\bar{u}x} \varphi(\eta) \right] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{u}}{x}} \varphi(\eta) + \\ &+ \sqrt{\bar{u}x} \frac{d\varphi}{d\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{u}}{x}} \left[\varphi(\eta) - \eta \frac{d\varphi}{d\eta} \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{u}}{x}} \left[\varphi(\eta) - \eta \frac{d\varphi}{d\eta} \right] \right\} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\bar{u}}{x}} \left\{ \frac{d}{d\eta} \left[\varphi(\eta) - \eta \frac{d\varphi}{d\eta} \right] \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} \right\} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{u}}{x} \eta \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2}.$$

Подставляя полученные значения производных в уравнение (12.17) и производя соответствующие сокращения, убеждаемся что оно переходит в обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$2 \frac{d^3 \varphi}{d\eta^3} + \varphi \frac{d^2 \varphi}{d\eta^2} = 0. \quad (12.21)$$

Граничные условия (18) перерабатываются следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{d\eta} &= 0 \text{ при } \eta = 0, \\ \frac{d\varphi}{d\eta} &\rightarrow 1 \text{ при } \eta \rightarrow \infty. \end{aligned} \right\} \quad (12.22)$$

Результаты численного решения этого уравнения приводятся в специальной литературе*.

§ 4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СТРУИ

Эти задачи служат хорошей иллюстрацией идей пограничного слоя и использования методов теории подобия.

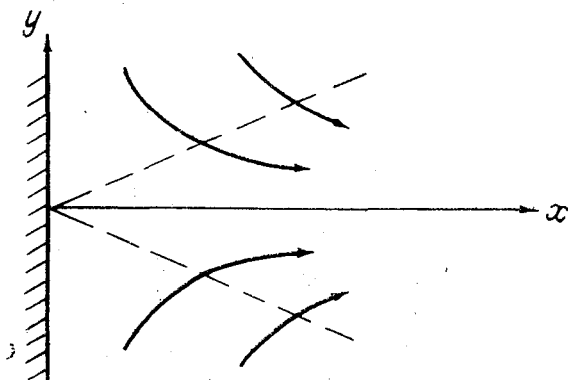


Рис. 12.1

Плоская ламинарная струя. Из бесконечно тонкой щели, расположенной по оси z , в направлении оси x истекает струя с бесконечно большой скоростью, но конечным импульсом J_0 (рис. 12.1).

* См., например, Л. Г. Лойцянский. Ламинарный пограничный слой, М., ГИФМЛ, 1962.

Так как $f_0 = v \cdot Q \neq \infty$ или 0 (v — скорость, Q — секундный расход), то при $Q \rightarrow 0$, $v \rightarrow \infty$. Это означает, что в случае весьма узкой щели, скорость велика, а расход мал. Истекающую струю можно трактовать как пограничный слой в окружающей ее большой массе жидкости. Последнюю считаем неподвижной, откуда следует $\frac{dp}{dx} = 0$. Тогда в случае стационарности уравнения движения

и неразрывности, как и ранее, примут вид:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}; \quad (12.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (12.24)$$

(жидкость несжимаема).

Опять вводим функцию тока:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = - \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

За нулевую линию тока $\Psi = 0$ примем ось Ox . Тогда уравнение и граничные условия запишутся как:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \Psi}{\partial y^3}; \quad (12.25)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \Big|_{y=0} &= 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} \Big|_{y \rightarrow \pm \infty} &\rightarrow 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.26)$$

Первое из условий (12.26) следует из симметрии струи, что означает $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, а второе вытекает из того, что $v \rightarrow 0$, когда $y \rightarrow \pm \infty$. Поставленной задаче отвечает тривиальное решение $\Psi = 0$. Однако это противоречит заданию конечного импульса, который при отсутствии внешних сил $\frac{dp}{dx} = 0$ должен быть конечным. Выражение для импульса может быть получено из уравнения (12.23), которое с учетом (12.24) может быть записано в виде

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho uv) = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Интегрируя его от $-\infty$ до $+\infty$, получим

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 dy + [\rho uv]_{-\infty}^{\infty} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right]_{-\infty}^{\infty}.$$

Так как при $y \rightarrow \pm \infty$ $u=v=\frac{\partial u}{\partial y}=0$, то

$$\frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dy = 0.$$

Откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho u^2 dy = \text{const} = J_0,$$

или

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 dy = J_0. \quad (12.27)$$

Вводя характерные масштабы $x \sim x_0$, $y \sim y_0$, $\Psi \sim \Psi_0$ и перейдя к безразмерным комплексам, можно (12.25) — (12.27) записать как

$$\frac{\partial \Psi_6}{\partial y_6} \frac{\partial^2 \Psi_6}{\partial x_6 \partial \bar{y}_6} - \frac{\partial \Psi_6}{\partial x_6} \frac{\partial^2 \Psi_6}{\partial y_6^2} = \frac{\nu x_0}{\Psi_0 y_0} \frac{\partial^3 \Psi_6}{\partial y_6^3}; \quad (12.28)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \Psi_6}{\partial y_6^2} \Big|_{y_6=0} &= 0, \\ \frac{\partial \Psi_6}{\partial y_6} \Big|_{y_6 \rightarrow \pm \infty} &\rightarrow 0; \end{aligned} \right\} \quad (12.29)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Psi_6}{\partial y_6} \right)^2 dy_6 = \frac{J_0 y_0}{\rho \Psi_0^2}. \quad (12.30)$$

Тогда

$$\Psi = \Psi_0 \Psi_6 \left(\frac{x}{x_0}, \frac{y}{y_0}, \frac{\nu x_0}{\Psi_0 y_0}, \frac{J_0 y_0}{\rho \Psi_0^2} \right).$$

Поскольку масштабы x_0 , y_0 , Ψ_0 не заданы, то комбинируя безразмерные переменные и комплексы, приходим к зависимости вида

$$\Psi = \left(\frac{\nu J_0 x}{\rho} \right)^{1/2} \cdot \Psi_6 \left(\frac{J_0 y^3}{\nu^2 x^2} \right) = \left(\frac{\nu J_0 x}{\rho} \right)^{1/2} \cdot f(\eta),$$

где

$$\eta = \sqrt[3]{\frac{J_0}{\nu^2}} \cdot \frac{y}{x^{2/3}}.$$

Перейдя к новой переменной, вместо (12.28) — (12.30) получим

$$\frac{d^3 f}{d\eta^3} + \frac{1}{3} \left[\left(\frac{df}{d\eta} \right)^2 + f \cdot \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right] = 0; \quad (12.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \Big|_{\eta=0} &= 0, \\ \frac{df}{d\eta} \Big|_{\eta \rightarrow \pm \infty} &\rightarrow 0; \end{aligned} \right\} \quad (12.32)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{df}{d\eta} \right) d\eta = 1. \quad (12.33)$$

Опуская детали интегрирования уравнения*, выпишем лишь окончательный результат:

$$\Psi = 1,651 \sqrt[3]{\frac{\nu J_0 x}{\rho}} \operatorname{th} \left(0,275 \sqrt[3]{\frac{J_0}{\rho \nu^2}} \cdot \frac{y}{x^{\frac{2}{3}}} \right).$$

Расход в струе

$$Q = \Psi(\infty) - \Psi(-\infty) = 3,302 \cdot \sqrt[3]{\frac{\nu J_0 x}{\rho}}.$$

Скорости:

$$u = 0,454 \sqrt[3]{\frac{J_0^2}{\rho^2 \nu x}} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2(0,275 \eta)},$$

$$v = 0,550 \sqrt[3]{\frac{\nu J_0}{\rho x^2}} \cdot \left[\frac{0,550 \eta}{\operatorname{ch}^2(0,275 \eta)} - \operatorname{th}(0,275 \eta) \right].$$

Таким образом, расход возрастает от нулевого значения в щели пропорционально $x^{\frac{2}{3}}$.

Максимальная скорость при $\eta = 0$

$$u_m = 0,454 \sqrt[3]{\frac{J_0^2}{\rho^2 \nu x}}.$$

Приняв за полуширину струи b значение y , при котором $u = 0,0161 u_m$, получим

$$b(x) \cong 10,91 \left(\frac{\rho \nu^2}{J_0} \right)^{\frac{1}{3}} x^{\frac{2}{3}}.$$

Тогда

$$\frac{u}{u_m} = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 \left(\frac{3y}{b} \right)}.$$

* Решение можно найти в литературе (см. сноску на стр. 139).

Раздел III

ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

ГЛАВА XIII

УРАВНЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ В ФОРМЕ ЭЙЛЕРА

Выше мы определили идеальную жидкость как жидкость, лишенную трения. Но, во-первых, в реальных средах вязкость всегда есть, во-вторых, если для какого-либо случая нами получено решение уравнений с вязкими членами, а затем осуществлен переход $\nu \rightarrow 0$, то полученный в итоге результат не всегда эквивалентен решению уравнений, в которых члены с вязкостью опущены сразу. Поэтому более правильно говорить о модели идеальной жидкости, справедливой в тех случаях, когда вязкие эффекты малы в сравнении с прочими силовыми факторами.

Уравнения движения идеальной жидкости можно получить из (12.4) при $Re = \frac{uL}{\nu} \rightarrow \infty$. Это означает, что либо велики характерные скорости или размеры, либо мала вязкость. Такая трактовка физически более полноценна, ибо указывает пределы применимости модели идеальной среды. Так, например, в задачах газовой динамики, где мы имеем дело с высокими скоростями, можно не учитывать действие сил вязкости, ибо они малы в сравнении с силами инерции. Или другой пример, за пределами пограничного слоя, рассмотренного нами выше, жидкость также полагают идеальной, ибо вклад вязких сил быстро убывает с удалением от стенки.

Итак, устремляя $Re \rightarrow \infty$, мы получим систему уравнений динамики идеальной жидкости. Перейдя после этого к размерному виду, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z. \end{aligned} \right\} \quad (13.1)$$

В векторной форме:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + \vec{F}. \quad (13.1')$$

Обратим внимание, что уравнения движения сжимаемой и несжимаемой жидкости для случая невязкой жидкости записываются одинаково.

Уравнение неразрывности имеет вид такой же, как и ранее.

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (13.2)$$

А в уравнении теплопроводности диссипативная функция просто равна нулю, так что оно имеет вид

$$c_v \frac{dT}{dt} + p \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{div} \left(\lambda_T \frac{\partial T}{\partial n} \right). \quad (13.3)$$

Если сюда присоединить уравнение состояния, то задача будет замкнута:

$$\rho = f(p, T). \quad (13.4)$$

В отношении замыкания системы можно сказать то же, что и в случае вязкой жидкости, т. е. для баротропной жидкости уравнения (13.1), (13.2), (13.4) могут быть разрешены без использования (13.3), а в бароклининой среде следует решать всю систему (13.1) — (13.4).

§ 2. НАЧАЛЬНЫЕ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Начальные условия, как и ранее, означают, что для исходного момента времени $t = t_0$ заданы поля всех искомых величин как функции координат, т. е. $v_x(x, y, z, t_0) = f_1(x, y, z)$, $p(x, y, z, t_0) = f_2(x, y, z)$ и т. д.

Различают кинематические и динамические граничные условия.

1. Кинематические граничные условия — это условия, определяющие значения скорости на границах потока.

Рассмотрим в виде примера кинематическое граничное условие на неподвижной непроницаемой стенке. Оно сводится к тому, что на стенке нормальная к ней составляющая скорости потока должна быть равна нулю, хотя касательная составляющая, вообще говоря, нулю не равна.

В самом деле, если бы на стенке нормальная составляющая скорости была бы направлена внутрь стенки, то это означало бы, что жидкость проходит через стенку, а это противоречит условию непроницаемости последней. Если бы нормальная составляющая была направлена от стенки, то это вызвало бы образование пусто-

ты между жидкостью и стенкой, а это противоречит представлению о сплошном заполнении жидкостью пространства. Таким образом, должно иметь место $v_n = 0$, т. е. скорость должна быть направлена по касательной к стенке.

Эти условия можно выразить в аналитической форме. Если $f(x, y, z) = 0$ представляет собой уравнение поверхности стенки, то орт $\vec{n}$ нормали к поверхности имеет проекции:

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}, \quad \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}.$$

Условие $v_n = 0$ равносильно равенству $(\vec{v} \cdot \vec{n}) = 0$, т. е.

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + v_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0.$$

Если границей потока является подвижная непроницаемая стенка или свободная поверхность, то, поскольку жидкость не может протекать сквозь стенку или свободную поверхность и сплошным образом заполняет пространство, нормальная составляющая скорости v_n любой частицы жидкости, соприкасающейся со стенкой или свободной поверхностью, и нормальная составляющая скорости $v_{n \text{ ст}}$ соответствующей точки стенки или поверхности должны быть равны:

$$v_n = v_{n \text{ ст}}.$$

В задачах на обтекание тел жидкостью одним из кинематических граничных условий служит требование, чтобы на достаточно большом удалении от тела (там, где поток не возмущен, строго говоря, — в бесконечности) скорость жидкости становилась бы равной определенной скорости v_0 (скорости невозмущенного потока). Это условие обычно записывают так:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} v(x, y, z) = v_0.$$

2. Динамические граничные условия — это условия, определяющие значения давления на границах потока. Исходя из закона о равенстве действия и противодействия, получаем, что давление, оказываемое на жидкость внешней средой или стенкой, и давле-

ние, испытываемое частицами жидкости, расположенными на стенке или на свободной поверхности, должны быть равны по величине.

Отсюда следует, что на свободной поверхности давление жидкости равно атмосферному давлению.

§ 3. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМЫ ЗАПИСИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

1. Уравнения движения в натуральных координатах. При рассмотрении плоского движения удобно пользоваться записью уравнений движения в натуральных координатах. Используя выражения соответственно для касательной и нормальной составляющих ускорения, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial l} &= F_t - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial l}, \\ \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{v^2}{R} &= F_n - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}, \end{aligned} \right\} \quad (13.5)$$

где F_t и F_n — касательная и нормальная проекции напряжения массовой силы.

2. Уравнения движения в форме И. С. Громеко. Преобразуем левую часть первого из уравнений движения в форме Эйлера (13.1):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Для этого возьмем тождество

$$\frac{v^2}{2} = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2},$$

дифференцирование которого дает

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) = v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial x},$$

откуда

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) - v_y \frac{\partial v_y}{\partial x} - v_z \frac{\partial v_z}{\partial x}.$$

Введя полученное выражение в левую часть первого из уравнений движения в форме Эйлера, приводим его к виду

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) v_z - \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) v_y.$$

Учитывая, что

$$[\vec{a} \times \vec{b}] = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k},$$

мы можем предыдущее выражение записать как

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + [\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}]_x,$$

и первое из уравнений движения в форме Эйлера приобретает вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + [\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}]_x = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (13.6)$$

Аналогичные преобразования, примененные ко второму и третьему уравнениям, дают:

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v^2}{2} \right) + [\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}]_y = Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}; \quad (13.6')$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v^2}{2} \right) + [\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}]_z = Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (13.6'')$$

Эти три уравнения носят название *уравнений движения в форме Громеко*. Их можно представить в виде одного векторного уравнения:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + [\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}] = \vec{F} - \frac{\text{grad } p}{\rho}. \quad (13.7)$$

3. Уравнение А. А. Фридмана. Возьмем ротор от обеих частей векторного уравнения движения в форме Громеко:

$$\text{rot} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{rot grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \text{rot} [\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}] = \text{rot } \vec{F} - \text{rot} \left(\frac{\text{grad } p}{\rho} \right).$$

Преобразуем каждый из членов этого уравнения, для чего воспользуемся тождествами векторного анализа, в справедливости которых легко убедиться, представив их в координатной форме:

$$1) \text{rot} \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{a};$$

$$2) \text{rot grad } \varphi = 0;$$

$$3) \text{rot} (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} + \vec{a} \text{ div } \vec{b} - \vec{b} \text{ div } \vec{a};$$

$$4) \text{rot} (\varphi \vec{a}) = \varphi \text{rot } \vec{a} + [\text{grad } \varphi \times \vec{a}].$$

Учитывая эти соотношения, получаем следующие выражения:

$$1) \text{rot} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \vec{v} = \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} \quad (\vec{\Omega} \equiv \text{rot } \vec{v});$$

$$2) \operatorname{rot} \operatorname{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) = 0;$$

$$3) \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{v} \times \vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{\Delta}) \vec{\Omega} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\Delta}) \vec{v} + \vec{\Omega} \cdot \operatorname{div} \vec{v};$$

$$4) \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right) = - \frac{1}{\rho^2} [\operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p] = \frac{1}{\rho^2} [\operatorname{grad} p \times \operatorname{grad} \rho].$$

Подставляя эти выражения в наше уравнение и учитывая, что

$$\checkmark \quad \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Omega} = \frac{d \vec{\Omega}}{dt},$$

получим

$$\forall \quad \frac{d \vec{\Omega}}{dt} - (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{\Omega} \operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{rot} \vec{F} + \frac{1}{\rho^2} [\operatorname{grad} p \times \operatorname{grad} \rho]. \quad (13.8)$$

Это соотношение представляет собой одну из форм уравнений динамики, весьма удобную для изучения вихревых движений. Оно носит название *уравнения Фридмана*.

✓ Уравнение (13.8) показывает, что изменение вихря в точке может происходить за счет конвективного переноса (член $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\Omega}$), деформаций жидкого элемента $((\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v})$, изменения его объема $(\vec{\Omega} \operatorname{div} \vec{v})$, а также ввиду действия внешних сил (если $\operatorname{rot} \vec{F} \neq 0$) и наличия фактора бароклинности $\left(\frac{1}{\rho^2} [\operatorname{grad} p \times \operatorname{grad} \rho] \right)$. Очевидно, что в случае баротропной среды, поскольку поверхности $p = \text{const}$ и $\rho = \text{const}$ совпадают, векторное произведение равно нулю.

Если массовые силы имеют потенциал ($\vec{F} = -\operatorname{grad} U$, $\operatorname{rot} \vec{F} = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$) и жидкость баротропна, то левая часть уравнения (13.8), именуемая *гельмгольцианом*, равна нулю. Это обстоятельство обуславливает удобство исследования движений идеальной жидкости в указанной форме записи.

ГЛАВА XIV

ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

§ 1. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ В ОБЩЕЙ ФОРМЕ

1. **Функция давления.** *Функцией давления* называется величина

$$P(p) = \int_0^p \frac{dp}{\rho}. \quad (14.1)$$

Очевидно, что она однозначно определяется в каждой точке пространства лишь в том случае, когда p зависит только от p и не является функцией каких-либо других переменных, т. е. когда среда представляет собой жидкость баротропную.

Установим физический смысл функции давления. Результирующая поверхностных сил, приложенных к единице объема, равна — $\text{grad } p$, а результирующая поверхностных сил, действующих на единицу массы, равна — $\frac{\text{grad } p}{\rho}$. Работа сил градиента давления

при перемещении единицы массы на элементарный отрезок $\vec{dr}$ равна

$$-\left(\frac{\text{grad } p}{\rho} \cdot \vec{dr}\right) = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) = -\frac{dp}{\rho},$$

а при перемещении единицы массы из точки A с давлением p в точку B с давлением, равным нулю, определяется выражением

$$-\int_{A(p)}^{B(p=0)} \left(\frac{\text{grad } p}{\rho} \cdot \vec{dr}\right) = -\int_p^0 \frac{dp}{\rho} = \int_0^p \frac{dp}{\rho} = P(p).$$

Таким образом, функция давления представляет собой работу, которую должны совершить силы градиента давления, чтобы переместить единицу массы жидкости из данной точки в точку с нулевым давлением или, что то же самое, работу, которую нужно приложить к единице массы, чтобы, преодолевая силы градиента давления, переместить ее из точки, где $p=0$, в данную точку.

Далее, элементарная работа сил градиента давления, приложенных к единице массы

$$-\frac{dp}{\rho} = -d \int_0^p \frac{dp}{\rho} = -dP(p),$$

равна, как мы видим, уменьшению функции давления, т. е. функцию давления можно рассматривать как потенциальную энергию единицы массы жидкости в поле массовой силы градиента давления.

Наконец, последнее равенство можем представить в виде

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz\right) = -\left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz\right),$$

откуда следует

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial P(p)}{\partial x}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial P(p)}{\partial y}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial P(p)}{\partial z},$$

что равносильно векторному равенству

$$-\frac{\text{grad } p}{\rho} = -\text{grad } P(p),$$

соответствующему представлению о функции давления как потенциале силы $-\frac{\text{grad } p}{\rho}$.

Подводя итог, можно сказать, что в идеальной баротропной жидкости результирующая поверхностных сил, приложенных к единице массы жидкости, имеет потенциал, равный функции давления

$$P(p) = \int_0^p \frac{dp}{\rho}.$$

2. Интегрирование уравнений движения. Дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости допускают интегрирование лишь при следующих упрощающих условиях:

1) массовая сила имеет потенциал, т. е.

$$\vec{F} = -\text{grad } U;$$

2) жидкость баротропна, т. е.

$$\frac{\text{grad } p}{\rho} = \text{grad } P.$$

При выполнении этих условий уравнение движения в форме Громеко приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + [\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}] = -\text{grad } U - \text{grad } P,$$

или

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + [\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}] = -\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + U + P \right).$$

Величина $\frac{v^2}{2} + U + P$ представляет собой сумму кинетической энергии единицы массы жидкости, потенциальной энергии ее

в поле массовой силы и потенциальной энергии в поле массовой силы градиента давления. Иными словами, $\frac{v^2}{2} + U + P$ есть удельная полная механическая энергия жидкости в данной точке потока.

Интегралы уравнения движения удастся получить лишь в некоторых частных случаях движения жидкости. Рассмотрим их.

а) *Установившееся движение.* В этом случае $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, и уравнение движения может быть представлено в виде

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + U + P \right) = [\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}].$$

Спроектируем обе части этого соотношения на направление $\vec{l}$, касательной к линии тока, т. е. на направление скорости. Проекция левой части равна $\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + U + P \right)$, проекция правой части равна нулю, так как векторное произведение $[\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}]$ перпендикулярно к l . Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{v^2}{2} + U + P \right) = 0,$$

и, значит,

$$\frac{v^2}{2} + U + P = \text{const} \quad (14.2)$$

вдоль одной и той же линии тока.

Соотношение (14.2) носит название *интеграла Бернулли* или *уравнения Бернулли для установившегося движения идеальной жидкости*. Оно говорит о том, что при установившемся движении сумма удельной кинетической энергии, удельной потенциальной энергии в поле массовой силы и удельной потенциальной энергии в поле поверхностных сил имеет одну и ту же величину во всех точках одной и той же линии тока. Однако при переходе от одной линии тока к другой величина этой суммы в общем случае установившегося движения может меняться.

Учтем теперь, что в случае установившегося движения линия тока одновременно является и траекторией частиц жидкости, а v , U и P — это значения соответствующих величин, которые приобретает частица, проходя по своей траектории. Поэтому полученный выше результат мы можем сформулировать также и следующим образом: при установившемся движении сумма кинетической энергии зафиксированной частицы и ее потенциальной энергии в поле массовых и поверхностных сил остается величиной постоянной. Легко видеть, что здесь мы имеем выражение закона живых сил для установившегося движения идеальной жидкости.

Спроектируем далее обе части уравнения на направление касательной к вихревой линии, т. е. на направление $\text{rot } \vec{v}$. Поскольку вектор $[\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}]$ перпендикулярен к $\text{rot } \vec{v}$, то проекция его будет равна нулю. Проектирование же левой части уравнения дает нам производную от величины $\frac{v^2}{2} + U + P$ по направлению вихревой линии. Поскольку эта производная оказывается равной нулю, то

$$\frac{v^2}{2} + U + P = \text{const} \quad (14.3)$$

вдоль одной и той же вихревой линии (а не только вдоль линии тока).

Интегралы уравнения движения для случая установившегося движения можно также получить, исходя из несколько иных по форме соображений. Уравнение геометрически интерпретируется следующим образом: $\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + U + P \right)$ перпендикулярен как к ли-

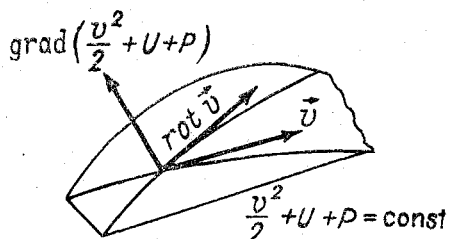


Рис. 14.1

нии тока, так и к вихревой линии (рис. 14.1). Это значит, что обе линии лежат на эквискалярной поверхности функции $\frac{v^2}{2} + U + P$, т. е., что эта функция при смещении вдоль каждой из линий не меняет своей величины.

б) *Безвихревое движение.* В этом случае $\text{rot } \vec{v} = 0$ и $\vec{v} = \text{grad } \varphi$, где φ — потенциал скорости. Поэтому

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \varphi = \text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

При этих условиях уравнение движения приобретает вид

$$\text{grad } \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + U + P \right),$$

или

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + U + P + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = 0.$$

Это значит, что производная по любому направлению от величины стоящей в скобках, равна нулю, т. е. что $\frac{v^2}{2} + U + P + \frac{\partial \varphi}{\partial t}$

имеет одно и то же значение во всех точках потока. Однако, поскольку производная от этой величины по времени, вообще говоря, не равна нулю, то рассматриваемая величина является функцией времени

$$\frac{v^2}{2} + U + P + \frac{\partial \varphi}{\partial t} = C(t). \quad (14.4)$$

Это соотношение называют *интегралом Лагранжа* или *интегралом Коши*.

в) *Установившееся безвихревое движение*. При этом $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$ и $\text{rot } \vec{v} = 0$ и уравнение движения приобретает вид

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + U + P \right) = 0.$$

Очевидно, что теперь проектирование левой части на любое направление дает нуль, т. е. производная от функции $\frac{v^2}{2} + U + P$ по любому направлению равна нулю, и, значит,

$$\frac{v^2}{2} + U + P = \text{const} \quad (14.5)$$

во всех точках потока.

Это соотношение называют *интегралом Эйлера*; мы будем называть его также *уравнением Бернулли для установившегося безвихревого движения*. Отличие смысла уравнения Бернулли в рассматриваемом случае от его смысла в общем случае установившегося движения заключается в том, что теперь удельная полная механическая энергия остается постоянной не только вдоль одной и той же линии тока, но и при переходе от одной линии тока к другой. ✓

Уравнение Бернулли для установившегося безвихревого движения нетрудно получить также и из интеграла Лагранжа для безвихревого движения, если учесть, что в случае установившегося движения $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$, а величины v , U и P не зависят от времени, поэтому $C(t) = C$.

г) *Установившееся винтовое движение*. Винтовым движением называется такое, при котором частицы жидкости движутся вдоль траекторий, одновременно вращаясь вокруг них. Это значит, что вектор скорости и вектор $\vec{\omega}$ угловой скорости вращения частиц в каждой точке потока коллинеарны, поэтому

$$[\text{rot } \vec{v} \times \vec{v}] = 2 [\vec{\omega} \times \vec{v}] = 0.$$

В случае установившегося винтового движения уравнение движения принимает вид

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + U + P \right) = 0,$$

т. е.

$$\frac{v^2}{2} + U + P = \text{const} \quad (14.6)$$

во всех точках потока (как и в случае установившегося безвихревого движения).

3. Зависимость между изменением скорости и изменениями плотности и сечения трубки тока. Рассмотрим случай установившегося движения идеальной жидкости, причем будем полагать, что частицы движутся только под действием разностей давления, т. е., что слагающей массовой силы вдоль линии тока по сравнению со слагающей результирующей поверхностных сил можно пренебречь.

Так как $\vec{F} = -\text{grad } U$, то последнее условие означает, что $\frac{\partial U}{\partial l} = 0$,

т. е. $U = \text{const}$ вдоль линии тока, причем это оказывается допустимым в большом ряде задач гидромеханики. Таким образом, при выполнении указанного условия мы вправе пользоваться уравнением Бернулли в виде

$$\frac{v^2}{2} + \int_0^p \frac{dp}{\rho} = \text{const}. \quad (14.7)$$

Последнее уравнение позволяет сделать ряд важных выводов об изменении характеристик потока при изменении скорости вдоль линии тока в общем случае сжимаемой жидкости.

а) *Изменение плотности.* Если частицы жидкости движутся только под действием разностей давления, то возрастание скорости в направлении движения возможно лишь в том случае когда давление в этом направлении убывает. Это означает, что при перемещении частиц они должны расширяться, т. е. возрастание скорости вдоль линии тока сопровождается уменьшением плотности жидкости. Напротив, уменьшение скорости, т. е. затормаживание частиц, должно сопровождаться их сжатием и соответственно возрастанием плотности жидкости.

Найдем количественные выражения этой закономерности. Запишем уравнение в дифференциальной форме, для чего возьмем дифференциал вдоль линии тока от обеих частей уравнения (14.7)

$$v dv + \frac{dp}{\rho} = 0.$$

Вводя сюда выражение $dp = a^2 d\rho$, получаемое из формулы $a = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$ для скорости звука, находим

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{a^2} v dv. \quad (14.8)$$

Из последнего равенства тотчас же следует, что относительное изменение плотности оказывается тем большим, чем больше скорость движения. Это значит что данная жидкость может с известной точностью рассматриваться как несжимаемая, если движения, происходящие в ней, являются достаточно медленными, и в ней должна учитываться сжимаемость, если скорости движения велики.

Найдем приближенное выражение относительного изменения плотности, полагая, что скорость меняется от нуля до некоторого значения v_1 , а плотность — от ρ_0 до ρ_1 , и считая, что скорость звука при этом остается постоянной. Для этого проинтегрируем уравнение (14.8) в соответствующих пределах:

$$\int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{a^2} \int_0^{v_1} v dv.$$

Используя теорему о среднем в интегральном исчислении и интегрируя правую часть равенства, находим

$$\frac{\rho_1 - \rho_0}{\rho_{\text{ср}}} = -\frac{v_1^2}{2a^2},$$

или

$$\frac{\Delta\rho}{\rho_{\text{ср}}} = \frac{M^2}{2},$$

где, как и ранее,

$$M = \frac{v_1}{a}.$$

В виде примера установим диапазон скоростей, в пределах которого относительное изменение плотности будет менее 1%. Полагая в равенстве левую часть равной 0,01, находим $M^2 = 0,02$, чему в условиях стандартной атмосферы у поверхности земли соответствует $v = 49$ м/сек. В подавляющем большинстве случаев скорость ветра у земли не достигает этой величины и изменения плотности оказываются меньшими 1%. Однако, если скорость меняется от нуля до величины порядка скорости звука, то относительное изменение плотности будет иметь порядка 10%.

Таким, образом, применяя уравнение Бернулли, в задачах метеорологии, где имеют дело со сравнительно малыми скоростями движения воздуха, последний в большинстве случаев можно считать жидкостью несжимаемой. Напротив, в задачах газовой динамики, рассматривающей движение газов с большими скоростями,

когда изменения плотности велики, сжимаемость играет существенную роль и пренебрегать ею нельзя.

Представим теперь равенство (14.8) в виде

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dv}{v}. \quad (14.9)$$

Это равенство гласит, что изменение плотности по знаку противоположно изменению скорости; при дозвуковых скоростях ($M < 1$) относительное изменение плотности меньше относительного изменения скорости и во всех случаях сопровождается увеличением объема движущихся масс жидкости («разбуханием» потока), но в дозвуковых потоках относительный прирост объема (выраженный, скажем в процентах) меньше, чем относительный прирост скорости, тогда как в сверхзвуковых ($M > 1$) он оказывается большим.

б) *Изменение сечения трубки тока.* Изменение сечения трубки тока вдоль ее длины тесно связано с изменениями скорости движения и плотности жидкости. Эта связь определяется уравнением неразрывности для трубки тока

$$\rho \cdot v S = \text{const},$$

которое путем логарифмирования и последующего дифференцирования мы представим в дифференциальной форме:

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dS}{S} = 0.$$

Но относительное изменение плотности $\frac{d\rho}{\rho}$ связано с относительным изменением скорости $\frac{dv}{v}$ формулой (14.9), с помощью которой получаем

$$\frac{dS}{S} = (M^2 - 1) \frac{dv}{v}. \quad (14.10)$$

Последнее равенство устанавливает в самой общей форме связь между относительным изменением скорости и изменением сечения трубки тока.

Если жидкость несжимаема, то скорость звука в ней бесконечно велика и $M = \frac{v}{a} = 0$. Равенство (14.10) дает в этом случае

$$\frac{dS}{S} = - \frac{dv}{v},$$

т. е. относительное изменение сечения трубки тока противоположно по знаку относительному изменению скорости, но равно ему по абсолютной величине (рис. 14.2). Например, возрастание скорости на 50% должно сопровождаться уменьшением на 50% сечения трубки тока.

Если жидкость является сжимаемой, а скорости дозвуковыми, то $M < 1$, а величина $M^2 - 1$ будет отрицательной и по абсолютной величине меньше единицы. Это значит, что относительное изменение сечения трубки тока по знаку противоположно относительному изменению скорости, но меньше его по абсолютной величине.

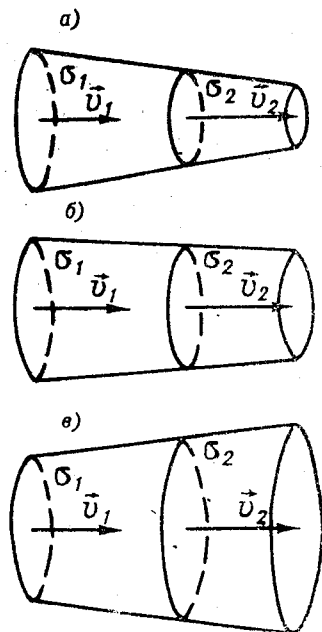


Рис. 14.2

Таким образом, при возрастании скорости трубка тока должна суживаться в меньшей степени, чем в случае не сжимаемой жидкости (рис. 14.2, б). Нетрудно качественно уяснить причины этого. Возрастание скорости в данном случае сопровождается некоторым увеличением объема движущихся масс жидкости и, чтобы пропустить их, сечения трубки должны убывать медленнее, чем в том случае, когда объем не меняется.

Наконец, при сверхзвуковых скоростях, когда $M > 1$, величина $M^2 - 1$ оказывается положительной. Поэтому относительное изменение сечения трубки тока имеет здесь тот же знак, что и относительное изменение скорости. В частности, возрастание скорости сверхзвукового потока должно сопровождаться уже

не сужением, как в предыдущих случаях, а расширением трубки тока (рис. 14.2, в). Это, очевидно, связано с тем, что возрастание скорости здесь сопровождается большим относительным возрастанием объема движущихся масс жидкости и для обеспечения их перемещения необходимо, чтобы сечение трубки тока соответственно увеличивалось.

Из сказанного следует, что для получения сверхзвуковых скоростей при истечении газа из резервуара, где давление значительно превышает наружное, необходимо, чтобы выводная труба (сопло) имела форму насадка, вначале суживаю-

щегося для того, чтобы увеличить скорость от нуля внутри резервуара до звуковой в наиболее узком сечении, затем расширяющегося чтобы обеспечить дальнейшее нарастание скорости сверх скорости звука (рис. 14.3). Подобная форма придается выходному соплу реактивного двигателя, когда необходимо получить сверхзвуковую скорость истечения продуктов сгорания.

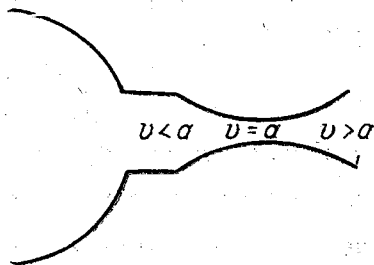


Рис. 14.3

§ 2. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

1. Различные формы уравнения. Примем следующие условия:

а) единственной массовой силой является сила тяжести;

б) жидкость несжимаемая.

Эти условия можно считать выполняющимися в большом ряде технических задач. В частности, в гидравлике, где в основном рассматриваются вопросы расчета различных трубопроводов, каналов, насадков, по которым движется капельная жидкость, а также в аэродинамике малых скоростей, где исследуется движение газа со скоростями, меньшими 100—150 м/сек, сжимаемостью жидкости или газа в большинстве случаев можно пренебречь.

Из первого условия следует

$$U = gz + \text{const},$$

из второго

$$P = \int_0^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}.$$

При этом уравнение Бернулли для установившегося движения приобретает следующий вид:

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (14.11)$$

вдоль одной и той же линии тока, причем каждое слагаемое здесь представляет собой определенный вид механической энергии, отнесенной к единице массы.

В аэродинамике уравнение Бернулли обычно используется в несколько иной форме, которая получается умножением уравнения (14.11) на ρ :

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gz + p = \text{const}. \quad (14.12)$$

В этом уравнении слагаемые представляют собой различные виды энергии, отнесенные к единице объема: $\frac{\rho v^2}{2}$ — кинетическую энергию, ρgz — потенциальную энергию в поле силы тяжести, p — потенциальную энергию единицы объема в поле поверхностных сил, равную давлению.

Все члены уравнения имеют размерность давления. При этом $\frac{\rho v^2}{2}$ называют *динамическим давлением* или *скоростным напором*, ρgz — *весовым давлением*, а p — *статическим давлением*. Следует подчеркнуть условность этих названий. Действительным давлением в физическом смысле этого слова является лишь статическое.

Итак, при установившемся движении идеальной несжимаемой жидкости сумма динамического, весового и статического давлений имеет постоянное значение во всех точках одной и той же линии тока; при установившемся безвихревом движении эта сумма остается постоянной во всех точках потока.

Уравнение Бернулли определяет собой связь между тремя переменными величинами: скоростью движения жидкости, высотой над некоторым уровнем, принятым за начало отсчета, и давлением. Рассмотрим вид этой связи в некоторых частных случаях движения.

а) Жидкость покоится или движется с постоянной вдоль линии тока скоростью. При этом $\frac{\rho v^2}{2} = \text{const}$ и уравнение может быть представлено в виде

$$\rho g z + p = \text{const},$$

где постоянная в правой части равна, очевидно, давлению p_0 на уровне $z=0$, т. е. на том уровне, от которого отсчитывается высота. Иначе говоря,

$$p = p_0 - \rho g z,$$

что соответствует известному закону распределения давления в покоящейся несжимаемой жидкости.

б) Давление вдоль линии тока остается неизменным. Это имеет место, например, на свободной поверхности движущейся жидкости; во всех точках такой поверхности p можно считать одним и тем же и равным атмосферному давлению.

При $p = \text{const}$ уравнение принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + g z = \text{const}.$$

Из этого соотношения следует, что в рассматриваемых условиях скорость и высота меняются противоположным образом.

Пример. При движении жидкости в открытом канале переменной ширины скорость потока меняется, очевидно, обратно пропорционально сечению канала. На свободной поверхности жидкости в сжатом сечении, где скорость велика, уровень жидкости оказывается меньшим, чем в других сечениях, где скорость меньше.

в) Движение горизонтальное. При этом $z = \text{const}$ и уравнение дает

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}. \quad (14.13)$$

Это значит, что вдоль линии тока скорость и давление меняются в противоположных направлениях: возрастание скорости сопровождается уменьшением давления, уменьшение скорости — ростом давления.

В задачах аэродинамики уравнение (14.13) является наиболее употребительной формой уравнения Бернулли, применяемой во всех случаях установившегося движения (разумеется, когда газ можно считать несжимаемой жидкостью). Дело в том, что здесь изменение $\rho g z$ вдоль линии тока обычно оказывается весьма малым в сравнении с изменениями $\frac{\rho v^2}{2}$ и p . Например, при обтекании

крыла самолета скорость потока вблизи поверхности крыла меняется от нуля до величин порядка 10^4 см/сек. Поэтому изменение $\frac{\rho v^2}{2}$ имеет порядок 10^5 — 10^6 г/см·сек² ($\rho \sim 10^{-3}$ г/см³). В то же вре-

мя z вдоль линии тока меняется на величину порядка одного или нескольких метров, т. е. изменение $\rho g z$ имеет порядок 10^2 — 10^3 г/см·сек². Изменение p , в соответствии с уравнением (14.13), должно иметь тот же порядок, что и изменение $\frac{\rho v^2}{2}$. Это

позволяет в большинстве задач о движении газов считать $\rho g z$ величиной постоянной вдоль линии тока и пользоваться уравнением Бернулли в форме (14.13).

Однако в большинстве задач динамики атмосферы, в которых рассматривается движение воздуха со сравнительно малыми скоростями при значительном изменении высот, изменения всех слагаемых уравнений (14.12) оказываются величинами одного порядка и ни одно из них, вообще говоря, постоянным считать нельзя.

В гидравлике уравнение Бернулли чаще всего используется в форме получающейся путем деления уравнения (14.12) на ρg :

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\gamma} = \text{const},$$

где $\gamma = \rho g$ — вес единицы объема жидкости.

Очевидно, что слагаемые в этом уравнении представляют собой различные виды механической энергии, отнесенные к единице веса.

При этом z называют геометрической высотой, величину $\frac{p}{\gamma}$, равную высоте столба жидкости, создающего своим весом давление p , — пьезометрической высотой, величину $\frac{v^2}{2g}$, равную высоте, на

которую поднялась бы в пустоте материальная точка, брошенная вертикально вверх со скоростью v , — скоростной высотой. Таким образом, при установившемся движении несжимаемой жидкости сумма геометрической, пьезометрической и скоростной высот остается неизменной вдоль линии тока.

2. Распределение давления вдоль трубки тока. Будем рассматривать установившееся движение, при котором изменение весового давления вдоль линии тока настолько мало по сравнению

с изменением скоростного напора и статического давления, что можно им пренебречь и считать $\rho g z$ величиной постоянной. Как уже указывалось это допустимо при горизонтальном движении капельной жидкости и в большинстве случаев движения газа. При этих условиях мы имеем

$$\frac{\rho v^2}{2} + p = \text{const}, \quad (14.14)$$

т. е. сумма скоростного напора и статического давления, называемая *полным давлением*, имеет одно и то же значение во всех точках одной и той же линии тока. Очевидно, что полное давление равно величине статического давления в тех точках, где $v=0$, т. е., где жидкость покоится.

Выделим некоторую линию тока и представим себе окружающую ее элементарную трубку тока. Из уравнения неразрывности следует, что скорость вдоль линии тока меняется обратно пропорционально площади сечения трубки тока. Ввиду этого уравнение (14.14) приводит к следующему выводу: сужение трубки тока сопровождается уменьшением давления, расширение — возрастанием давления.

Приведем примеры, иллюстрирующие это важное положение.

Рассмотрим распределение давления вдоль трубы переменного сечения (рис. 14.4), полагая, что жидкость поступает в трубу из

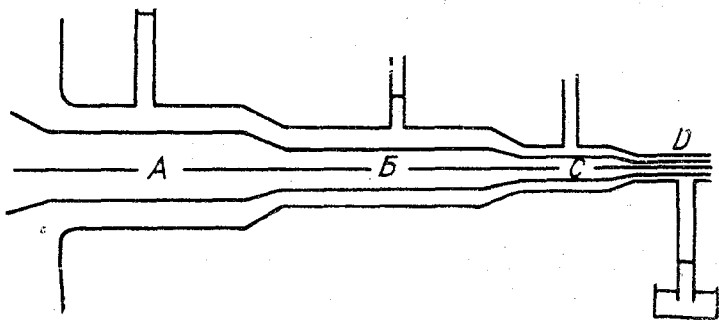


Рис. 14.4

обширного резервуара, где давление p_k превышает атмосферное, а скорость жидкости можно считать равной нулю. Давление определяется по высоте поднятия жидкости в открытых трубках, присоединенных к различным сечениям трубы.

Выделив горизонтальную трубку тока $ABCD$, запишем уравнение (14.14) в следующем виде:

$$\frac{\rho v_A^2}{2} + p_A = \frac{\rho v_B^2}{2} + p_B = \frac{\rho v_C^2}{2} + p_C = \frac{\rho v_D^2}{2} + p_D = p_k.$$

Сужение трубы сопровождается возрастанием скорости, т. е.

$$v_A < v_B < v_C < v_D,$$

поэтому

$$p_A > p_B > p_C > p_D.$$

Допустим, что в сечении c давление убывает до величины атмосферного давления, тогда уровень жидкости в трубке, измеряющей давление будет равен нулю. В этом случае в еще более узком сечении D установится давление, меньшее атмосферного. При наличии отверстий в этой части трубы жидкость не только не будет выливаться, но, напротив, наружный воздух будет засасываться в трубу, а в измерительной трубке, соединенной с открытым сосудом с жидкостью, последняя поднимается на некоторую высоту.

При возрастании скорости давление может понизиться настолько, что станет меньше упругости насыщения при температуре жидкости. При этом, как известно, начинается кипение, в жидкости возникают полости, наполненные паром, что сопровождается характерным шумом, треском и вибрациями. Описанное явление носит название *кавитации*. Оно имеет место не только при течении жидкости в трубе с местным сжатием но и везде, где в жидкости возникает пониженное давление, близкое к упругости насыщения, например, при обтекании лопастей гребных судов в гидравлических турбинах и т. п.

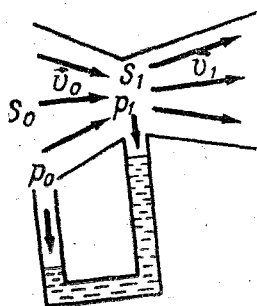


Рис. 14.5

Другим примером может служить образование разрежения в суженном сечении S_1 цилиндрической трубки (трубки Вентури), в широкое сечение S_0 которой поступает снаружи атмосферный воздух (рис. 14.5).

Если скорость воздуха у входа v_0 , давление p_0 , а в суженном сечении трубки соответственно v_1 и p_1 , то, очевидно,

$$\frac{\rho v_0^2}{2} + p_0 = \frac{\rho v_1^2}{2} + p_1.$$

Но $\frac{v_1}{v_0} = \frac{S_0}{S_1}$, т. е. $v_1 = v_0 \frac{S_0}{S_1}$. Поэтому

$$p_0 - p_1 = \frac{\rho v_0^2}{2} \left[\left(\frac{S_0}{S_1} \right)^2 - 1 \right]. \quad (14.15)$$

Такое же разрежение в сечении S_1 будет иметь место, если трубка перемещается со скоростью v_0 относительно неподвижного воздуха, будучи, например, установлена на самолете. Подобное устройство находит себе применение в авиации для создания раз-

режения в камере гигроскопических приборов, а также в жиклере карбюратора мотора.

Формула (14.15) может быть применена для определения скорости v_0 , если измерена разность давлений $p_0 - p_1$. В этом случае мы имеем

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{\rho \left[\left(\frac{S_0}{S_1} \right)^2 - 1 \right]}} \cdot \sqrt{p_0 - p_1}.$$

Этот принцип используется для определения скорости воздушных потоков в аэродинамических трубах, для определения скорости движения капельных жидкостей в трубопроводах и т. п.

§3. Распределение давления в вихре. Представим себе в несжимаемой идеальной жидкости вертикальный вихрь с радиусом ядра r_0 и угловой скоростью вращения в ядре a . Как мы уже знаем, вне ядра скорость меняется обратно пропорционально радиусу: $v = \frac{C}{r}$,

где $C = ar_0^2$, причем движение является безвихревым. Внутри ядра скорость меняется по линейному закону: $v = ar$, при этом движение является вихревым.

Распределение давления по горизонтальному сечению вихря вне его ядра найдем, применив уравнение Бернулли для безвихревого движения несжимаемой жидкости. Это уравнение в нашем случае сводится к утверждению, что сумма $\frac{\rho v^2}{2} + p$ имеет одно и

то же значение во всех точках безвихревой части сечения и это значение равно, очевидно, величине p_0 давления в точках, где $v = 0$, т. е. на бесконечно большом удалении от оси вихря. Поскольку по мере приближения из бесконечности к границам ядра скорость возрастает, то давление должно соответственно убывать. Закон изменения давления находим, введя в уравнение

$$-\frac{\rho v^2}{2} + p = p_0$$

выражение скорости $v = \frac{ar^2}{r^2}$. В результате этого получим

$$p = p_0 - \frac{\rho a^2 r_0^4}{2} \frac{1}{r^2}, \quad (14.16)$$

т. е. при приближении из бесконечности к границам ядра давление убывает от p_0 до $p_1 = p_0 - \frac{\rho a^2 r_0^4}{2}$, причем по мере приближения к ядру быстрота убывания все возрастает.

Распределение давления внутри ядра, т. е. вихревой части потока, не может быть полностью определено с помощью уравнения

Бернулли, так как оно в этом случае утверждает постоянство суммы $\frac{\rho v^2}{2} = p$ лишь вдоль линии тока. Это значит лишь то, что давление остается постоянным во всех точках окружности с центром на оси вихря, т. е. распределяется по сечению ядра симметрично относительно его оси.

Чтобы найти закон распределения давления внутри ядра, воспользуемся уравнением движения в проекциях на нормаль к линии тока. В условиях установившегося горизонтального движения в поле силы тяжести оно принимает вид

$$\frac{v^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n}.$$

Так как в нашем случае $R=r$, $\frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial p}{\partial r}$ (напомним, что нормаль ориентируется к центру кривизны), то для движения в ядре имеем

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\rho v^2}{r}$$

или, поскольку $v = ar$,

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho a^2 r.$$

Нетрудно понять физический смысл последнего уравнения. Оно утверждает, что при приближении к оси давление падает, причем перепад давления на единицу длины вдоль радиуса уравновешивает центробежную силу, приложенную к единичному объему.

Интегрируя полученное уравнение в пределах от r до r_0 , получаем

$$p_1 - p = \frac{\rho a^2}{2} r_0^2 - \frac{\rho a^2}{2} r^2,$$

откуда находим

$$p = p_1 - \frac{\rho a^2}{2} r_0^2 + \frac{\rho a^2}{2} r^2. \quad (14.17)$$

Как мы видим, давление внутри ядра меняется по параболическому закону, убывая от значения p_1 на границах ядра до значения $p_1 - \frac{\rho a^2 r_0^2}{2}$ на оси вихря.

На рис. 14.6 показан график распределения давления по сечению вихря, построенный по формулам (14.16) и (14.17). Из него видно, что в центральной части вихря развивается значительное «подсасывание» (пониженное давление). В результате этого всякое тело, находящееся в поле вихря, испытывает подсасывающую силу, направленную к оси вихря и обусловленную тем, что к части поверхности тела, обращенной к оси вихря, приложены давления, меньшие, чем к противоположной части. Подсасывающим действием объясняется затягивание в центральную часть смерча песка, воды и прочих попадающих на его пути предметов. Как видно из графика, градиенты давления и соответственно подсасывающее действие вихря оказываются особенно значительными лишь в сравнительно узкой центральной его части. Этим объясняются резкие границы области разрушений, производимых смерчем на его пути.

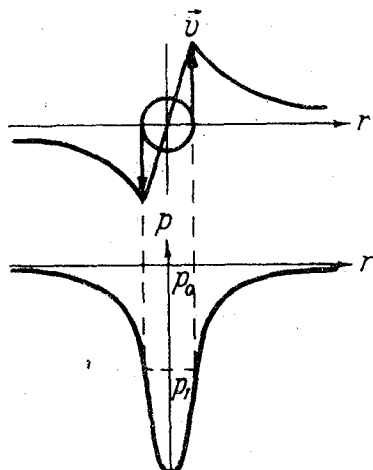


Рис. 14,6

§ 3. УРАВНЕНИЕ БЕРНУЛЛИ ДЛЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В этом параграфе будет рассмотрено уравнение Бернулли применительно к движению сжимаемой жидкости в поле силы тяжести. При этом мы будем полагать условия движения таковыми, что можно изменением потенциала массовой силы $U = gz + \text{const}$ пренебречь и пользоваться уравнением Бернулли в виде

$$\frac{v^2}{2} + p = \text{const.} \quad (14.18)$$

Кроме того, будем считать, что процессы сжатия и расширения частиц газа при их движении являются адиабатическими, т. е. протекающими без отдачи тепла или притока тепла от других частиц. Это обуславливает определенное выражение для работы сил давления и соответствующий вид функции давления P .

Ниже обратимся к различным формам представления рассматриваемого уравнения.

а) Первая форма. По определению функции давления она в случае адиабатически движущегося идеального газа представляет собой ту работу, которую произвели бы силы давления при адиабатическом перемещении единицы массы газа из точки, где

давление равно нулю и, значит, равна нулю температура (последнее следует из уравнения адиабаты $\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{R}{c_p}}$).

Исходя из выражения функции давления $P = \int_0^p \frac{dp}{\rho}$ и подставляя сюда зависимость ρ от p , в случае адиабатического процесса в идеальном газе $\rho = k_1 p^{\frac{c_p}{c_p - c_v}}$. Тогда

$$\begin{aligned} P &= \int_0^p \frac{dp}{k_1 p^{\frac{c_p}{c_p - c_v}}} = \frac{1}{k_1 \left(1 - \frac{c_v}{c_p}\right)} p^{1 - \frac{c_v}{c_p}} = \\ &= \frac{c_p}{k_1 (c_p - c_v)} p^{1 - \frac{c_v}{c_p}}. \end{aligned} \quad (14.19)$$

Введя сюда $k_1 = \frac{p}{\rho^{\frac{c_p}{c_p - c_v}}}$ и $c_p - c_v = R$, найдем $P = \frac{c_p}{R} \frac{p}{\rho}$, откуда с помощью уравнения состояния $p = \rho R T$ получаем выражение

$$P = c_p T. \quad (14.20)$$

Итак, потенциальная энергия единицы массы в поле сил давления в случае адиабатически движущегося идеального газа равна его удельному теплосодержанию в данной точке.

В соответствии с этим уравнение (14.18) принимает вид

$$\frac{v^2}{2} + c_p T = \text{const.} \quad (14.21)$$

Это значит, что при установившемся адиабатическом движении идеального газа сумма удельной кинетической энергии и удельного теплосодержания имеет одно и то же значение во всех точках данной линии тока (а в случае установившегося безвихревого движения — во всех точках потока). Так как при установившемся движении линии тока одновременно являются и траекториями частиц жидкости, то тот же результат можно сформулировать в несколько иной форме: при установившемся адиабатическом движении газа сумма кинетической энергии данной частицы и ее теплосодержания во время движения остается неизменной, возможен лишь переход кинетической энергии в теплосодержание и обратно.

Из уравнения (14.21) следует, что возрастание скорости неизбежно сопровождается уменьшением температуры, а уменьшение скорости — ростом температуры. Это легко понять, исходя из следующих элементарных соображений. Возрастание скорости частицы в условиях, когда учитывается лишь действие поверхностных сил, означает, что частица перемещается в сторону меньшего давления. Это сопровождается расширением частицы, что при условии адиабатичности процесса приводит к уменьшению температуры. Напротив, затормаживание частицы возможно лишь при росте давления вдоль ее траектории, что приводит к адиабатическому сжатию частицы и возрастанию температуры.

б) Вторая форма. Введем в формулу (14.20) выражение температуры из уравнения состояния газа: $T = \frac{p}{\rho R}$. Тогда

$$p = \frac{c_p}{R} \frac{p}{\rho} = \frac{c_p}{c_p - c_v} \frac{p}{\rho}. \text{ Разделив числитель и знаменатель правой}$$

части на c_v и воспользовавшись обозначением $\frac{c_p}{c_v} = \kappa$, находим

$$p = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho}. \quad (14.22)$$

Для воздуха $c_p = 0,24 \text{ кал/г} \cdot \text{град}$, $c_v = 0,17 \text{ кал/г} \cdot \text{град}$, $\frac{\kappa}{\kappa - 1} = 3,5$, поэтому

$$p = 3,5 \frac{p}{\rho}. \quad (14.23)$$

Выражение (14.23) свидетельствует о том, что потенциальная энергия единицы массы в поле сил давления оказывается в случае адиабатически движущегося газа большей, чем в случае несжимаемой жидкости. Нетрудно качественно объяснить этот факт. При перемещении единицы массы газа из точки с давлением p в точку с нулевым давлением перемещаемая масса испытывает расширение. Поэтому равнодействующая сил давления, приложенных к ней ($-\text{град } p \cdot \alpha$), будет возрастать, а общая работа сил давления окажется большей, чем в том случае, когда объем не меняется, т. е. жидкость является несжимаемой.

Теперь уравнение (14.18) мы можем представить в виде

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (14.24)$$

В частности, для воздуха

$$\frac{v^2}{2} + 3,5 \frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (14.25)$$

в) Третья форма. Введем в формулу (14.20) $c_p = R + c_v$. Тогда $P = RT + c_v T$ или

$$P = \frac{P}{\rho} + c_v T. \quad (14.26)$$

Первое слагаемое правой части представляет собой ту величину функции давления, которая имела бы место, если бы жидкость была бы несжимаемой. Второе слагаемое есть внутренняя энергия единицы массы газа, выраженная в единицах механической энергии.

К выражению (14.26) можно придти и другим путем, позволяющим понять физическую природу выражения. Функцию давления P мы можем представить себе как величину внешней работы, которую нужно совершить, чтобы, преодолевая сопротивление сил градиента давления, адиабатическим путем переместить единицу массы газа из точки с нулевым давлением в точку с давлением p так, чтобы эта масса приняла здесь присущие данной точке значения давления, температуры и плотности. Из закона сохранения энергии следует, что при условии адиабатичности процесса работа перемещения не будет зависеть от конкретного способа, которым будет осуществлен процесс. Представим себе вначале единицу массы газа в точке, где давление и температура равны нулю. Произведем адиабатическое сжатие этой массы до тех пор, пока температура ее не станет равной T , давление p , а плотность ρ , для этого потребуется работа, как раз равная внутренней энергии массы в конечном состоянии: $c_v T$; после этого, заключив нашу частицу в жесткую теплоизолирующую оболочку, переместим ее в точку с давлением p , после чего оболочку удалим. Работа потребная для такого перемещения, будет как раз равна соответствующему значению P в случае несжимаемой жидкости, т. е. $\frac{P}{\rho}$.

В конечном счете общая работа окажется равной сумме, стоящей в правой части формулы (14.26).

С учетом последнего выражения для P уравнение (14.18) приобретает вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + c_v T = \text{const}. \quad (14.27)$$

В динамике атмосферы выводится аналогичное соотношение, в котором, однако, изменением потенциала массовой силы (силы тяжести) не пренебрегают, в силу чего оно имеет вид

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{P}{\rho} + c_v T = \text{const}. \quad (14.28)$$

Это соотношение иногда называют *уравнением Бернулли—Бьеркнеса*.

Константа в правой части уравнения Бернулли в любой из рассмотренных выше форм может быть выражена различным образом.

Во-первых, ее можно приравнять потенциальной энергии единицы массы газа в поле поверхностных сил в тех точках линии тока, где кинетическая энергия равна нулю, т. е. удельному теплосодержанию в тех точках, где жидкость неподвижна. В этих точках удельное теплосодержание и соответственно температура газа достигают своего максимального значения. Таким образом, правую часть уравнения Бернулли можно представить в виде $c_p T_h$

или в виде $\frac{x}{x-1} \frac{p_k}{\rho_k}$, где значком «к» отмечены значения параметров в точках с нулевой скоростью.

Во-вторых, правая часть уравнения может быть приравнена кинетической энергии единицы массы газа в точках, где обращается в нуль потенциальная энергия ее в поле поверхностных сил, т. е. равны нулю теплосодержание, температура и давление газа. Очевидно, что в этих точках достигают своего максимального (вдоль линии тока) значения кинетическая энергия и скорость потока. В соответствии со сказанным правая часть уравнения

Бернулли может быть представлена как $\frac{v_{\text{пред}}^2}{2}$.

Рассмотрим температуру торможения. Представим себе, что установившийся равномерный поток идеального газа встречает на своем пути препятствие в виде твердого тела. По мере приближения к телу будет происходить уменьшение скорости потока, и поскольку действием массовых сил пренебрегаем, то затормаживание частиц может быть обеспечено лишь соответствующим распределением давления, ростом его в направлении движения. Возрастание давления сопровождается адиабатическим сжатием движущихся частиц, в результате чего происходит увеличение плотности и температуры газа, причем изменения p и T связаны друг с другом уравнениями адиабатического процесса.

Поставим себе задачей определить значение температуры T_k газа в критических точках тела, где имеет место полное затормаживание потока. Выделим для этого линию тока, проходящую у критической точки, и запишем уравнение Бернулли для двух точек этой линии тока: для точки, расположенной в невозмущенной части потока, где $v=v_0$, $T=T_0$ и для критической точки, где $v=0$, $T=T_k$:

$$\frac{v_0^2}{2} + c_p T_0 = c_p T_k,$$

или

$$\frac{v_0^2}{2} = c_p (T_k - T_0). \quad (14.29)$$

Физический смысл последнего равенства очевиден: при затормаживании частиц газа их кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию в поле сил давления, т. е. в теплосодержание. Из (14.29) находим

$$T_{\kappa} = T_0 + \frac{1}{2c_p} v_0^2. \quad (14.30)$$

Величина $\frac{1}{2c_p} v_0^2 = \Delta T$ называется *динамическим добавком* к температуре. Найдем выражение ΔT для воздуха:

$$\Delta T(^{\circ}\text{C}) \approx 5 \cdot 10^{-8} [v_0(\text{см/сек})]^2 = \left[\frac{v_0(\text{м/сек})}{2000} \right]^2 = 5 \left[\frac{v_0(\text{м/сек})}{100} \right]^2,$$

или

$$\Delta T(^{\circ}\text{C}) = 3.8 \cdot 10^{-5} [v_0(\text{км/час})]^2. \quad (14.31)$$

Так, для $v_0 = 100 \text{ км/час}$ $\Delta T = 0,4^{\circ}\text{C}$;

» $v_0 = 500 \text{ км/час}$ $\Delta T = 9,5^{\circ}\text{C}$;

» $v_0 = 1000 \text{ км/час}$ $\Delta T = 38^{\circ}\text{C}$.

Для скорости порядка скорости советских искусственных спутников Земли ($28\,000 \text{ км/час}$) $\Delta T \approx 30\,000^{\circ}\text{C}$.

Как видно из формулы (14.30), динамический добавок к температуре не зависит от плотности воздуха, т. е. при данной скорости полета ΔT будет одним и тем же на любой высоте. Нетрудно найти элементарное объяснение этого кажущегося вначале странным факта. Если, например, плотность воздуха на высоте в n раз меньше приземной плотности, то и кинетическая энергия данного объема воздуха будет в n раз меньшей, и таково же будет отношение между количествами тепла, выделяющимися при торможении. Но на высоте выделившееся тепло идет на нагревание массы в n раз меньшей, чем у земли, поэтому температурный эффект процесса будет здесь таким же, как и в приземном воздухе.

В аэродинамике часто пользуются выражением температуры торможения, получающимся из формулы (14.30) в результате введения в нее величины скорости звука, в невозмущенном воздушном потоке $a = \sqrt{\kappa R T_0} = 2000 \sqrt{T_0}$:

$$\begin{aligned} T_{\kappa} &= T_0 \left(1 + \frac{1}{2c_p T} v_0^2 \right) = T_0 \left(1 + \frac{2,3 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 0,24 \frac{a^2}{4 \cdot 10^6}} v_0^2 \right) = \\ &= T_0 (1 + 0,2 M^2). \end{aligned}$$

ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ ЦИРКУЛЯЦИИ

Положения, рассматриваемые в этой главе, имеют особо важное значение для понимания вопросов динамики атмосферы. Действительно, циклоны, антициклоны, фронтальные зоны, бризовая и муссонная циркуляции, различные типы местных ветров — все это представляет собой те или иные формы вихревых движений воздуха. При вихревом движении ротор скорости, вообще говоря, не равен нулю и, значит, не равна нулю циркуляция скорости по тому или иному контуру. Условия возникновения и развития вихревых движений будем исследовать, оценивая изменения этой циркуляции во времени.

§ 1. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ДЛЯ АБСОЛЮТНОГО ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим в некоторый зафиксированный момент времени поле скорости $\vec{v}_a$ абсолютного движения, т. е. движения, рассматриваемого в системе координат, не вращающейся вместе с Землей вокруг ее оси. Как доказывалось ранее (гл. V, § 3), приращение циркуляции Γ_a этой скорости за единицу времени определяется циркуляцией вектора ускорения в данный момент времени. Но выражение ускорения, как следует из уравнения движения, при наличии только потенциальных сил, имеет вид

$$\frac{d\vec{v}_a}{dt} = -\text{grad } U - \frac{1}{\rho} \text{ grad } p,$$

где $U = gz$ — потенциал массовых сил.

Поэтому

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = \oint_{(L)} \frac{d\vec{v}_a}{dt} \cdot \delta l = - \oint_{(L)} \text{grad}_l U \cdot \delta l - \oint_{(L)} \frac{1}{\rho} \text{grad}_l p \cdot \delta l.$$

Поскольку

$$\oint_{(L)} \text{grad}_l U \cdot \delta l = \oint_{(L)} \frac{\partial U}{\partial l} \delta l = \oint_{(L)} \delta U = 0,$$

то

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = - \oint_{(L)} \frac{1}{\rho} \text{grad}_l p \cdot \delta l. \quad (15.1)$$

Это равенство выражает собой теорему о циркуляции для абсолютного движения.

Полученный результат можно представить в различных формах. Простейшая из них получится, если учесть, что $\frac{1}{\rho} = \alpha$, где α — удельный объем, и $\text{grad}_l p \, \delta l = \frac{\partial p}{\partial l} \delta l = \delta p$. Тогда

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = - \oint_{(L)} \alpha \delta p. \quad (15.2)$$

Выражение (15.2) позволяет представить теорему о циркуляции во второй, особенно наглядной форме. Представим себе, что в пространстве, занимаемом жидкостью, определены изобарические поверхности, соответствующие значениям давления, различающимся на единицу, т. е. поверхности $p = p_0$, $p = p_0 + 1$, $p = p_0 + 2$, $p = p_0 + 3$ и т. д., а также определены изостерические поверхности, построенные аналогичным образом, т. е. поверхности $\alpha = \alpha_0$, $\alpha = \alpha_0 + 1$, $\alpha = \alpha_0 + 2$, $\alpha = \alpha_0 + 3$ и т. д. В общем случае бароклиной жидкости изобарические и изостерические поверхности, как мы уже знаем, не параллельны друг другу, а пересекаются. Поверхность, образованная двумя соседними изобарическими и пересекающимися их двумя соседними изостерическими поверхностями, представляет собой трубку, называемую *изобаро-изостерическим соленоидом* (рис. 15.1)

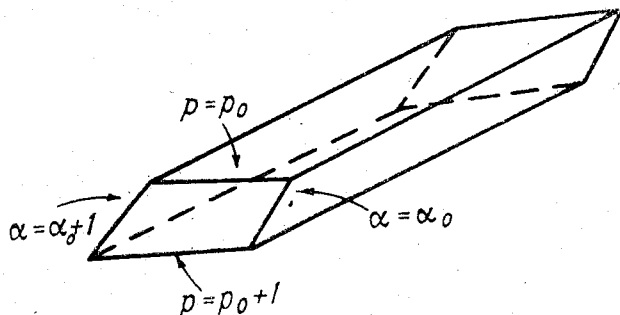


Рис. 15.1

Допустим вначале, что контур L составлен из кривых, лежащих на двух изобарических поверхностях $p = p_0$ и $p = p_0 + m$ и на двух изостерических поверхностях α и $\alpha = \alpha_0 + n$ (рис. 15.2). Будем полагать, что контур ориентирован в направлении кратчайшего поворота от $\text{grad } \alpha$ к $-\text{grad } p$. Необходимо помнить, что здесь речь идет о градиентах в математическом смысле, т. е. о векторах, направленных в сторону роста соответствующей величины.

Поэтому — grad p , очевидно, направлен по нормали к изобарической поверхности в сторону падения давления. В таком случае

$$-\oint_{(L)} \alpha \delta p = -\oint_{(ABCD A)} \alpha \delta p = -\int_{(AB)} \alpha \delta p - \int_{(BC)} \alpha \delta p - \int_{(CD)} \alpha \delta p - \int_{(DA)} \alpha \delta p.$$

На участках BC и DA $p = \text{const}$ и, значит, $\delta p = 0$, на участке AB $\alpha = \alpha_0$, на участке CD $\alpha = \alpha_0 + n$. Поэтому в результате интегрирования получаем

$$-\oint_{(L)} \alpha \delta p = -\alpha_0 [(p_0 + m) - p_0] - (\alpha_0 + n) [p_0 - (p_0 + m)] = mn.$$

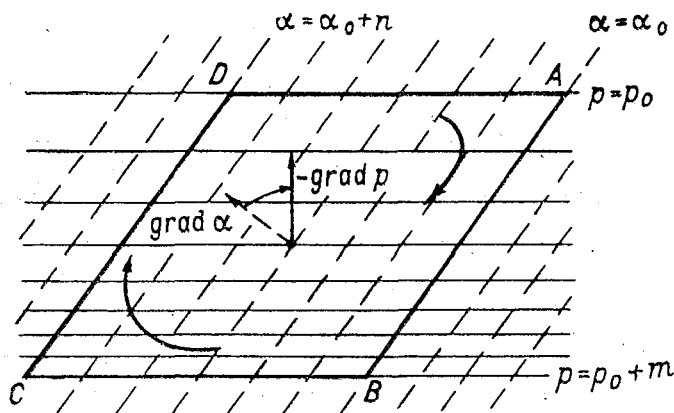


Рис. 15.2

Но произведение mn , очевидно, представляет собой положительную величину, равную числу изобаро-изостерических соленоидов, охватываемых контуром.

В общем случае контур L можно представлять себе состоящим из элементов, расположенных на различных изобарических и изостерических поверхностях (рис. 15.3). Ориентируя контур указанным выше образом и разбив его на меньшие контуры, подобные только рассмотренному, легко видеть, что интеграл $-\oint_{(L)} \alpha \delta p$ будет

равен сумме интегралов по малым контурам и, значит, будет определяться общим числом N единичных соленоидов, охватываемых контуром L , т. е. $\frac{d\Gamma_a}{dt} = N$.

При изменении ориентации контура, т. е. при обходе контура в направлении от $-\text{grad } p$ к $\text{grad } \alpha$, результат интегрирования

будет иметь ту же величину N , но окажется величиной отрицательной, т. е. мы будем иметь

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = -N.$$

Общий итог сводится к следующему: ускорение циркуляции для абсолютного движения равно числу единичных изобаро-изостерических соленоидов, охватываемых контуром, взятому со знаком плюс, если контур ориентирован в направлении кратчайшего поворота от $\text{grad } \alpha$ к $-\text{grad } p$, и со знаком минус, если контур ориентирован противоположным образом. Кратко это будем записывать так

$$\boxed{\frac{d\Gamma_a}{dt} = \pm N.} \quad (15.3)$$

В самом общем случае, когда в разных частях пространства, где находится контур, направление кратчайшего поворота от $\text{grad } \alpha$ к $-\text{grad } p$ является неодинаковым, следует контур разбить на меньшие контуры, каждый из которых охватывает пространство, где указанный поворот происходит в одном направлении

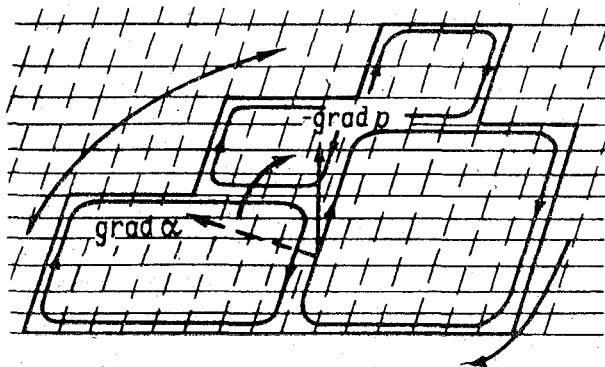


Рис. 15.3

(рис. 15.3). Ускорение циркуляции в этом случае равно алгебраической сумме чисел соленоидов в каждом контуре, взятых с соответствующим знаком.

Третью форму теоремы о циркуляции получим, применив к правой части равенства (15.1) теорему Стокса:

$$-\oint_{(L)} \frac{1}{\rho} \text{grad}_t p \, \delta l = - \int_{(\sigma)} \text{rot}_n \left(\frac{1}{\rho} \text{grad } p \right) \delta \sigma, \quad (15.4)$$

но

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \right) = -\frac{1}{\rho^2} [\operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p],$$

поэтому

$$\frac{d\Gamma_a}{dt} = \int_{(\sigma)} \frac{1}{\rho^2} [\operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p]_n d\sigma. \quad (15.5)$$

Интеграл, стоящий в правой части (15.5), является положительным в том случае, когда нормали к поверхности составляют острый угол с векторным произведением

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^2} [\operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p] &= - \left[\operatorname{grad} \frac{1}{\rho} \times \operatorname{grad} p \right] = \\ &= [\operatorname{grad} \alpha \times (-\operatorname{grad} p)]. \end{aligned}$$

Учитывая ориентацию этого векторного произведения и условие о направлении нормалей, принимаемое в теореме Стокса, приходим к выводу, что положительная величина ускорения циркуляции имеет место лишь в том случае, когда контур ориентирован в направлении кратчайшего поворота от $\operatorname{grad} \alpha$ к $-\operatorname{grad} p$. Тем самым мы приходим к результату, полученному выше путем непосредственного интегрирования.

Подводя итог рассмотрению теоремы о циркуляции для абсолютного движения, мы можем записать теорему в следующем виде:

$$\boxed{\frac{d\Gamma_a}{dt} = B}, \quad (15.6)$$

где

$$B = - \oint_{(L)} \alpha \delta p = \pm N = \int_{(\sigma)} \frac{1}{\rho^2} [\operatorname{grad} \rho \times \operatorname{grad} p]_n d\sigma.$$

Если жидкая среда является баротропной, то $B=0$. Это следует из того, что в баротропной жидкости $\alpha = \frac{1}{\rho(p)}$ и

$$\oint_{(L)} \alpha \delta p = \oint_{(L)} \frac{\delta p}{\rho(p)} = \oint_{(L)} \delta P = 0,$$

где δP — дифференциал функции давления, взятый в направлении контура. Тот же результат получим, учитывая, что в баротропной среде изобарические и изостерические поверхности не пересекаются и, значит, число соленоидов, охватываемых контуром, всегда равно нулю. Наконец, к тому же выводу мы придем, исходя из того, что векторы $\operatorname{grad} \rho$ и $\operatorname{grad} p$ в каждой точке баротропной среды лежат на одной прямой и их векторное произведение обращается в нуль. Таким образом, в идеальной баротропной жидкости,

если массовые силы имеют потенциал, то ускорение циркуляции для абсолютного движения всегда равно нулю, т. е. циркуляция абсолютной скорости по жидкому контуру при перемещении контура остается постоянной.

Отсюда тотчас же следует, что B не равно нулю лишь в случае бароклинной среды, т. е. ускорение циркуляции абсолютного движения целиком определяется бароклинностью жидкости, отсутствием потенциала у массовых сил, а также вязкостью жидкости.

§ 2. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ДЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

1. Циркуляция скорости относительного движения. Представим себе, что жидкая среда, под которой можно понимать либо воду океанов, либо атмосферу, является неподвижной по отношению к поверхности Земли, т. е. вращается вокруг земной оси как твердое тело с угловой скоростью вращения Земли $\vec{\omega}$. Скорость такого движения обозначим $\vec{v}^1$.

Допустим теперь, что жидкая среда движется относительно земной поверхности, причем скорость $\vec{v}$ этого движения есть, очевидно, та скорость, которую в случае воздуха измеряют приборы на метеорологической станции и которая наносится на синоптические карты.

Скорость $\vec{v}_a$ «абсолютного» движения, т. е. движения относительно системы координат, связанной с земной осью, но не вращающейся около этой оси, будет складываться из скорости $\vec{v}$ относительного движения и скорости $\vec{v}^1$ переноса системы координат:

$$\vec{v}_a = \vec{v} + \vec{v}^1. \quad (15.7)$$

Зафиксируем поля скоростей $\vec{v}_a$, $\vec{v}$, $\vec{v}^1$ в некоторый момент времени и определим для этого момента времени циркуляцию по заданному контуру L скоростей каждого из указанных движений. Введя обозначения $\oint_{(L)} \vec{v}_a d\vec{l} = \Gamma_a$, $\oint_{(L)} \vec{v} d\vec{l} = \Gamma$, $\oint_{(L)} \vec{v}^1 d\vec{l} = \Gamma^1$, имеем

$$\Gamma_a = \Gamma + \Gamma^1. \quad (15.8)$$

Установим величину Γ^1 , т. е. циркуляцию скорости при вращении жидкости как твердого тела с угловой скоростью $\vec{\omega}$. При этом будем полагать, что ориентация контура соответствует направлению вращения жидкости, т. е., если смотреть со стороны вектора $\vec{\omega}$, то направление обхода будет представляться происходящим противоположно часовой стрелке. Представим себе вначале, что кон-

тур L является плоским и располагается в плоскости вращения. Тогда $v^1 = \omega r$ (r — расстояние от оси вращения), $v_l^1 = \omega r \cos \alpha$, где α — угол между $\vec{v}^1$ и $d\vec{l}$ (рис. 15.4). Следовательно,

$$\Gamma^1 = \oint_{(L)} \omega r \cos \alpha \, dl = 2 \omega \oint_{(L)} \frac{r}{2} \cos \alpha \, dl.$$

Учитывая ориентацию контура, легко понять, что $\frac{r}{2} dl \cos \alpha$ — это площадь элементарного сектора, взятая со знаком «—» при обходе его внутренней части. В таком случае интеграл $\oint_{(L)} \frac{r}{2} \cos \alpha \, dl$ равен площади S , ограниченной контуром L и

$$\Gamma^1 = 2 \omega S. \quad (15.9)$$

В общем случае, когда контур не лежит в плоскости вращения и не является плоским, для определения Γ^1 воспользуемся положением, установленным ранее (см. гл. V, § 1). Как там показано, Γ^1 равно циркуляции скорости по проекции L^1 контура L на плоскость вращения. Но циркуляция скорости по контуру L^1 равна $2 \omega S^1$, где S^1 площадь, охватываемая контуром L .

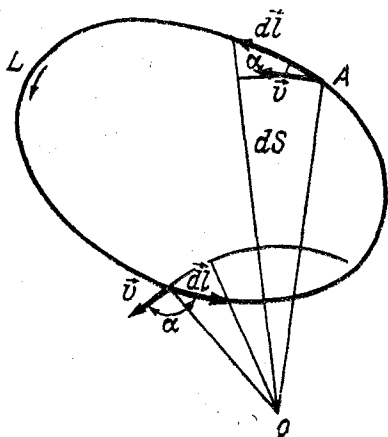


Рис. 15.4

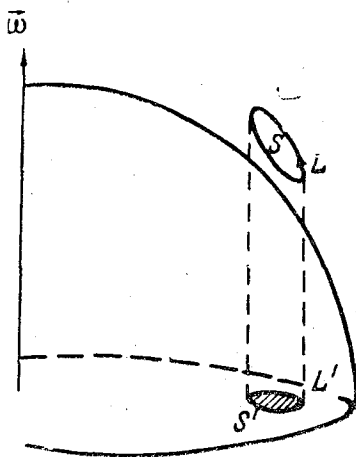


Рис. 15.5

Таким образом, циркуляция скорости влечения по контуру, ориентированному соответственно направлению вращения Земли, определяется выражением

$$\Gamma^1 = 2 \omega S^1, \quad (15.10)$$

где S^1 — площадь, охватываемая проекцией контура L на плоскость экватора (рис. 15.5).

Поэтому

$$\Gamma_a = \Gamma + 2\omega S^1. \quad (15.11)$$

Таким образом,

$$\Gamma_a = \Gamma + \Gamma^1,$$

где Γ^1 — циркуляция переносной скорости по рассматриваемому контуру.

7.6 **2. Вывод теоремы.** Если контур ориентирован в направлении вращения Земли, т. е. направление обхода, если смотреть со стороны Северного полюса, представляется противоположным движению часовой стрелки (циклоническая ориентация), то Γ^1 является величиной положительной, равной $2\omega S^1$. Если же контур ориентирован противоположным образом (антициклонически); то Γ^1 представляет собой величину отрицательную, равную $-2\omega S^1$. Итак,

$$\Gamma_a = \Gamma \pm 2\omega S^1. \quad (15.12)$$

Вводя выражение (15.12) в равенство (15.6), имеем

$$\frac{d}{dt} (\Gamma \pm 2\omega S^1) = B,$$

откуда

$$\frac{d\Gamma}{dt} = B \pm 2\omega \frac{dS^1}{dt}, \quad (15.13)$$

где знак плюс соответствует антициклонической ориентации контура, знак минус — циклонической. Это равенство и выражает собой теорему о циркуляции для относительного движения. Мы видим, что ускорение циркуляции в этом случае складывается из двух частей. Величина B представляет собой ускорение циркуляции, обусловленное бароклинностью среды. Величина $\pm 2\omega \frac{dS^1}{dt}$

✓ есть ускорение циркуляции, обусловленное переносным движением, т. е. тем фактом, что система координат, относительно которой рассматривается движение, вращается вместе с Землей, и появляющаяся сила Кориолиса, в силу своей неконсервативности, обуславливает ускорение циркуляции, т. е.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = - \oint_i \frac{dp}{\rho} - \oint_i [\vec{\omega} \times \vec{v}] dl$$

3. Ускорение циркуляции, обусловленное бароклинностью жидкости. Допустим, что ускорение циркуляции, обусловленное переносным движением, равно нулю, что имеет место при $\frac{dS^1}{dt} = 0$,

т. е. в том случае, когда площадь проекции контура на плоскость экватора остается постоянной. Подобное допущение оправдано,

в частности, при таком выборе контура, когда векторы скорости во всех точках контура направлены по касательным и не дают слагающих, способных изменить площадь охватываемую контуром.

При сделанном допущении имеем

$$\frac{d\Gamma}{dt} = B = - \oint_{(L)} \alpha dp = \pm N = \int_S \frac{1}{\rho^2} [\text{grad } \rho \times \text{grad } p]_n d\sigma,$$

т. е. ускорение циркуляции относительного движения целиком определяется бароклинностью среды.

Приведем примеры возникновения ускорения циркуляции, обусловленного бароклинностью, причем будем пользоваться теоремой в виде

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \pm N,$$

т. е. изменение циркуляции будем связывать с наличием изобаро-изостерических соленоидов, охватываемых контуром.

Пример 1. Бризовая циркуляция. [Бризами называются местные ветры, возникающие в прибрежных районах больших водоемов, например морей, озер и т. п., и объясняемые различиями в нагревании воздуха над сушей и над водой] Рассмотрим возникновение дневного бриза характеризующегося тем, что вблизи поверхности воды и суши ветер дует от воды к суше, а, начиная с некоторой высоты, — в противоположном направлении.

Допустим, что первоначально воздух находится в покое относительно земной поверхности. Это возможно лишь в том случае, когда отсутствуют изменения давления по горизонтали, т. е. изобарические поверхности горизонтальны. При переходе от изобарической поверхности p к близкой изобарической поверхности $p+dp$ давление всюду изменится на одну и ту же величину $dp = -\rho g dz$. Поскольку во всех точках изобарической поверхности $g dz$ имеет

одну и ту же величину, то и $\rho = -\frac{dp}{g dz}$ не должно меняться вдоль изобарической поверхности и, значит, изостерические поверхности не пересекаются с изобарическими. В этом случае изобаро-изостерические соленоиды не образуются, и ускорение циркуляции по любому жидкому контуру равно нулю.

Однако вскоре после восхода солнца вследствие различия в нагревании поверхности суши и воды воздух над сушей становится теплее, чем над водой. Так как с высотой плотность воздуха убывает, а, значит, удельный объем растет, то прогревание воздуха и соответствующий рост α сопровождается опусканием изостерических поверхностей, которое над сушей будет большим, чем над водой. В результате этого изостерические поверхности оказываются наклоненными от воды к суше, так как над сушей возросший удельный объем равен теперь удельному объему более холодного

воздуха над водой на большой высоте. В то же время в более теплом и, значит, менее плотном воздухе для изменения давления на величину dp нужно пройти по вертикали большее расстояние, чем в менее холодном. Поэтому изобарические поверхности над сушей оказываются на большем расстоянии друг от друга, чем над водой. Таким образом, различие в нагревании воздуха приводит к пересечению в прибрежной зоне изостерических поверхностей и к образованию здесь изобаро-изостерических соленидов (рис. 15.6).

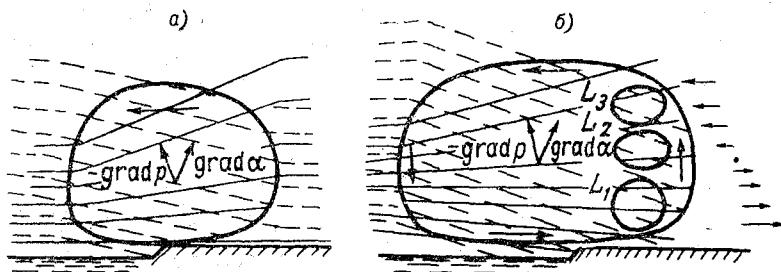


Рис. 15.6

Выделим вертикальный жидкий контур L , расположенный частично над водой и частично над сушей и охватывающий образовавшиеся солениды. Если считать его ориентированным в направлении кратчайшего поворота от $\text{grad } \alpha$ к $-\text{grad } p$, то, как утверждает теорема о циркуляции, ускорение циркуляции окажется величиной положительной. Поэтому циркуляция скорости, прежде равная нулю, с образованием соленидов будет возрастать, т. е. станет величиной положительной, и появятся слагающие скорости ветра в направлении ориентации контура.

Собственно говоря, большего теорема о циркуляции дать не может. В частности, она не позволяет предугадать распределение скорости вдоль контура. Однако последнее получится на основании простых физических соображений. Вследствие рассмотренного наклона изобарических поверхностей на высотах создается падение давления по горизонтали, направленное от суши к воде. В результате воздух будет перетекать в этом направлении, масса его в вертикальном столбе над сушей уменьшится, а над водой возрастет и соответственно этому изменится величина атмосферного давления у подстилающей поверхности. Таким образом, изобарические поверхности над сушей должны будут несколько опуститься, а над водой приподняться, и картина примет вид, показанный на рис. 15.6. Под влиянием горизонтальных разностей давления в нижних слоях атмосферы, прилегающих к подстилающей поверхности, возникает движение, направленное от воды к суше, тогда как, начиная с некоторого уровня, ветер дует в противоположном направлении.

Если не учитывать внутреннее трение и трение о подстилающую поверхность, то распределение скорости ветра по вертикали в соответствии с наклоном изобарических поверхностей должно иметь вид, показанный в правой части рис. 15.6. Легко видеть, что при этом циркуляция по любому контуру, охватывающему солениды, например по контурам L_1 , L_2 , L_3 , оказывается положительной, хотя циркуляционное движение воздуха вдоль контура не имеет места. Это позволяет подчеркнуть тот факт, что знак циркуляции и ее величина не дают еще указаний о распределении скорости вдоль контура.

В течение большей части дня воздух над сушей оказывается более теплым, чем над водой, и, значит, солениды не исчезают. Поэтому ускорение циркуляции все время остается положительным и, казалось бы, циркуляция скорости должна в течение дня непрерывно возрастать и вместе с этим должна возрастать интенсивность дневного бриза. В действительности дело обстоит иначе. Вместе с возрастанием скорости ветра возрастает действие трения, как известно, не учитываемого теоремой о циркуляции. Трение вначале неспособно полностью компенсировать действие соленидов, и от восхода солнца до полудня интенсивность бризовой циркуляции действительно возрастает. Однако в послеполуденные часы действие трения становится настолько значительным, что эффект бароклинности полностью компенсируется и интенсивность бриза перестает возрастать. К вечеру различия в температуре воздуха сглаживаются. Число соленидов убывает и интенсивность бриза ослабевает.

Вечером и ночью воздух над водой оказывается более теплым, чем над сушей. Как легко получить из соображений, аналогичных приведенным выше, воздушные потоки изменят свое направление, т. е. ветер в нижних слоях будет дуть от суши к воде, а в верхних слоях — от воды к суше.

Подобные же рассуждения применимы и для объяснения различных типов циркуляции, обусловленных местными различиями в нагревании воздуха, например муссонной циркуляции, горнодолинных ветров и др. На рис. 15.7 схематически показана система соленидов, вызывающих возникновение и развитие циркуляции при процессах конвекции в атмосфере, определяемых термической неоднородностью воздушной массы.

Пример 2. Циркуляция во фронтальной зоне. Как известно, фронтальной зоной называется переходная зона между двумя воздушными массами, характеризующаяся резким изменением метеорологических элементов в горизонтальном направлении. Фронтальную зону представляют в виде узкой полосы, наклонной в сторону холодного воздуха. На определенном уровне в теплом воздухе удельный объем является большим, чем на том же уровне в холодном воздухе, где то же значение α имеет место на большей высоте. Поэтому при переходе из теплой воздушной массы в холодную изостерические поверхности резко изгибаются вверх. Изобари-

ческие поверхности также испытывают излом, но в сравнении с изменением изостерических поверхностей, он оказывается незначительным и его можно во внимание не принимать.

В результате всего сказанного во фронтальной зоне наблюдается концентрация изобаро-изостерических соленоидов

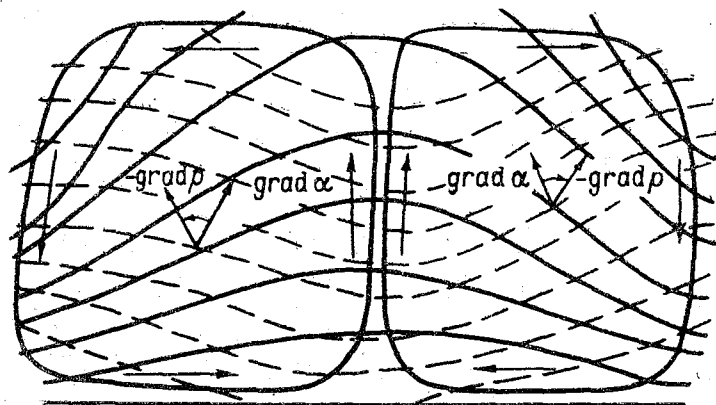


Рис. 15.7

(рис. 15.8), обусловленная сближением термически разнородных воздушных масс, т. е. кинематическими факторами. Беря контур, охватывающий соленоиды фронтальной зоны, и ориентируя его в направлении кратчайшего поворота от $\text{grad } \alpha$ к $-\text{grad } p$, видим,

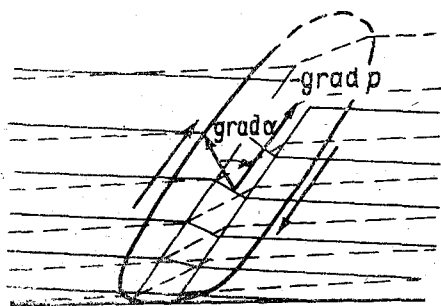


Рис. 15.8

что в контуре должна будет возникнуть положительная циркуляция в направлении ориентации контура. Интенсивность циркуляции будет возрастать до тех пор, пока ускоряющее действие соленоидов не будет компенсировано тормозящим действием внутреннего трения, возрастающего вместе с ростом скорости. Очевидно, что чем резче фронтальная зона, т. е. чем больше контрасты температуры и чем

уже зона, тем больше число соленоидов будет концентрироваться в ней и тем интенсивнее будет циркуляция.

Заметим, что и здесь нельзя утверждать, что воздух в теплой массе будет обязательно совершать восходящие движения. Положительная циркуляция по контуру будет иметь место при различ-

ных распределениях скорости, получающихся наложением той или иной общей скорости переноса вдоль фронтальной зоны.

Пример 3. *Циркуляция, обусловленная различиями в солености морской воды.* Под влиянием возрастания давления плотность морской воды с глубиной растет, а удельный объем соответственно убывает. Таким же образом меняются ρ и α с возрастанием солености воды. Поэтому в воде с большим содержанием соли данное значение α будет наблюдаться на меньшей глубине, чем в менее соленой воде, а изостерические поверхности поднимаются в сторону возрастания солености. Изобарические поверхности можно приблизительно считать горизонтальными. Таким образом, мы имеем здесь пересечение изобарических и изостерических поверхностей и образование соленидов (рис. 15.9). Беря

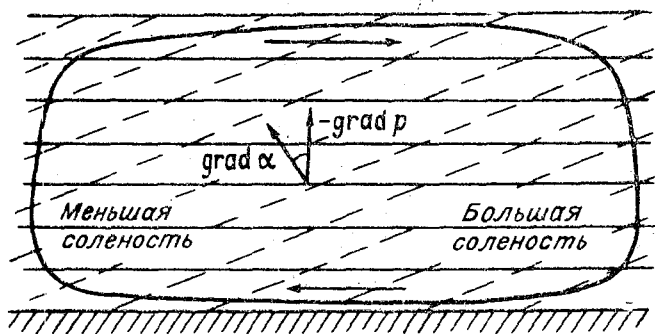


Рис. 15.9

жидкий контур L , ориентированный в направлении поворота от $\text{grad } \alpha$ к $-\text{grad } p$, имеем, что ускорение циркуляции по такому контуру должно быть величиной положительной, что обусловит возникновение положительной циркуляции. Этому соответствует наличие донного течения более соленой воды в сторону уменьшения солености и поверхностное течение менее соленой воды в противоположном направлении. Примерами могут служить течения в проливах, соединяющих Средиземное море, где вода особенно богата солями, с Черным морем и с Атлантикой, где в воде имеется меньше соли. Донное течение соленой воды из Средиземного моря в Черное через Босфор и Дарданеллы и противоположное течение менее соленой воды поверху были обнаружены адмиралом С. О. Макаровым.

Бароклинность жидкой среды порождает в последней движение, которое направлено так, чтобы ликвидировать различия плотности вдоль изобарических поверхностей. Действительно, во всех рассмотренных случаях в нижних слоях более плотная среда движется в сторону менее плотной, вытесняя, последнюю вверх, а в верхних слоях имеет место движение в противоположном на-

правлении. Это должно было бы привести к выравниванию плотности вдоль изобаро-изостерических соленоидов и вызванного ими ускорения циркуляции. Затормаживающее действие трения, создавая отрицательное ускорение циркуляции, сделало бы циркуляцию равной нулю. Поэтому для поддержания движения необходимо, чтобы в среде непрерывно поддерживались различия в плотности и давлении, обуславливающие образование соленоидов, например, чтобы более холодный и плотный воздух, переместившись на место теплого и менее плотного, прогрелся бы здесь и его плотность бы уменьшалась.

4. Ускорение циркуляции, обусловленное переносным движением. Допустим, что в равенстве (15.13) бароклиный член B по сравнению с членом $\pm 2\omega \frac{dS'}{dt}$ настолько мал, что им можно пре-

небречь. Это имеет место во многих случаях и, в частности, в тех, когда контур является горизонтальным и взят в достаточно однородной воздушной массе, так что число соленоидов, охватываемых им, невелико. При сделанном допущении изменение циркуляции целиком определяется изменением циркуляции скорости переносного движения (т. е. величины $\pm 2\omega S'$), а теорема о циркуляции приобретает вид

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \pm 2\omega \frac{dS'}{dt}. \quad (15.14)$$

Напомним, что плюс здесь соответствует антициклонической, а минус — циклонической ориентации контура.

Из равенства (15.14) следует вывод: увеличение площади проекции контура на экваториальную плоскость вызывает развитие антициклонической циркуляции по контуру, уменьшение площади — развитие циклонической циркуляции. В самом деле, в случае антициклонической ориентации контура $\frac{d\Gamma}{dt} = 2\omega \frac{dS'}{dt}$, ибо

при возрастании $S' \frac{dS'}{dt} > 0$ и, значит, $\frac{d\Gamma}{dt} > 0$, т. е. будет развиваться циркуляция в направлении ориентации контура. При убывании $S' \frac{dS'}{dt} < 0$, поэтому $\frac{d\Gamma}{dt} < 0$ и будет развиваться циркуляция в направлении, противоположном ориентации контура, т. е. циклоническая.

Каковы же процессы, которые могут вызвать изменение величины S' . Считая для простоты контур плоским, имеем $S' = S \cdot \cos \alpha$, где S — площадь контура, а α — угол между плоскостью контура и плоскостью экватора. В этом случае процессы, изменяющие S' , можно отнести к одному из двух типов:

1) процессы, вызывающие изменение угла наклона контура по отношению к плоскости экватора;

2) процессы, вызывающие изменение площади контура.

Для того, чтобы сделать более ясной и наглядной физическую природу рассматриваемого явления, обратимся к модели его, представленной на рис. 15.10. На диске, вращающемся против часовой стрелки и представляющем собой аналог экваториального круга, на двух стойках установлена трубка $ABCD$ с жидкостью — аналог жидкого контура. Путем поворота плоскости трубки или растяжения (сжатия) трубки мы получаем возможность менять площадь проекции ее на плоскость диска.

Допустим, что угол наклона плоскости контура по отношению к диску уменьшается и соответственно возрастает его проекция. Тем самым мы обращаемся к рассмотрению процессов типа 1. Один участок AB трубки, удаляясь при этом от оси вращения, приобретает большую линейную скорость, тогда как частицы жидкости в этом участке, сохраняя прежнюю скорость, должны будут отставать от стенок трубки, т. е. двигаться в направлении от B и A . Напротив, противоположный участок CD , приближаясь к оси, приобретает меньшую скорость вращения и частицы жидкости будут здесь опережать стенки трубки, т. е. двигаться от D и C . В результате этого в трубке установится движение по часовой стрелке, т. е. антициклоническая циркуляция. Легко видеть, что чем быстрее будет меняться

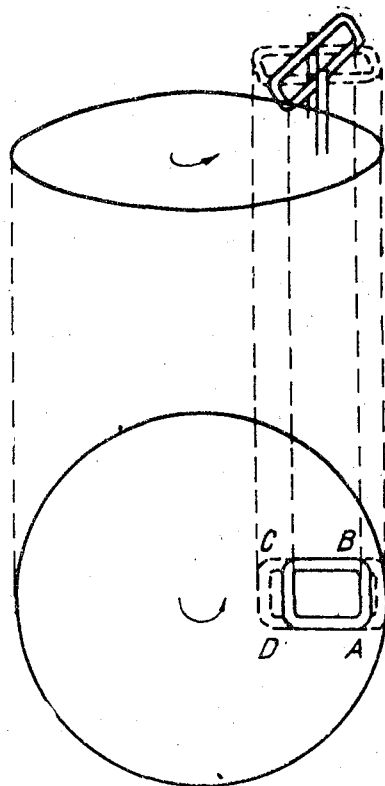


Рис. 15.10

S' тем сильнее будет расти интенсивность этой циркуляции, т. е. тем больше будет $\frac{d\Gamma}{dt}$. Увеличение наклона плоскости трубки по

отношению к диску, т. е. уменьшение проекции контура, должно вызывать возникновение циклонической циркуляции.

Пример 1. Широтный эффект. В виде иллюстрации рассмотрим следующее явление. Допустим, что имеет место смещение антициклона с юга на север (в северном полушарии). Представим себе горизонтальный жидкий контур, совпадающий с одной из изобар, которые охватывают центр повышенного давления. При

сместении к северу, проекция контура на плоскость экватора возрастает (рис. 15.11) и, значит, в контуре будет развиваться дополнительная антициклоническая циркуляция. Легко понять, что это связано с тем, что северная часть контура смещается в сторону меньших линейных скоростей вращения Земли быстрее, чем южная, и возникающее в первой части инерционное движение воздуха по часовой стрелке будет интенсивнее, чем инерционное движение в южной части контура, стремящееся перемещать воздух против часовой стрелки.

В результате этого антициклоническая циркуляция при движении к северу будет усиливаться, циклоническая же — ослабевать. Напротив, при движении с севера на юг (в северном полушарии) уменьшение S' будет сопровождаться возникновением циклонической циркуляции. В результате этого циклоны должны усиливаться, антициклоны — ослабевать.

Рассмотренное здесь изменение интенсивности циркуляции, обусловленное меридиональным движением, т. е. изменением широты, часто называют *широтным эффектом*.

Допустим теперь, что в рассматриваемой модели наклон плоскости трубки не меняется, но площадь S' возрастает за счет растяжения участков AB и BC и смещения участка AB от центра, участка BC — к центру. Тем самым мы, очевидно, моделируем процессы типа 2. Легко видеть, что и в этом случае линейная скорость вращения участков AB и CD трубки будет меняться так же, как и при увеличении наклона трубки, и в последней возникает антициклоническая циркуляция.

Пусть увеличение S' происходит за счет растяжения участков AB и CD трубки при смещении BC в направлении вращения диска, а AD — в противоположном направлении. Очевидно, что вследствие возрастания скорости вращения участка BC центростремительное ускорение, приложенное к его стенкам, возрастет и возникает отставание частиц жидкости, т. е. инерционное движение в направлении от D к B . Смещение AD в направлении, противоположном направлению вращения диска, сопровождается уменьшением центростремительного ускорения и инерционным движением жидкости в направлении от A к D . Таким образом, и эти деформации трубки $ABCD$ приводят к возникновению антициклонической циркуляции в жидкости. Подобные же рассуждения позволяют понять, почему при уменьшении S' в трубке возникает циклоническая циркуляция.

Пример 2. Циркуляция в областях высокого и низкого давления. Возникновение области высокого давления сопровождается у земли оттоком воздуха от центра области к периферии с более низким давлением (рис. 15.12). Представим себе жидкий контур, охватывающий центр области. Движение частиц от центра будет сопровождаться возрастанием площади, охватываемой контуром. Поэтому в контуре возникает антициклоническая циркуляция, т. е. появится слагающая скорости, направленная по часовой стрелке.

В области низкого давления у земли имеет место движение воздуха к центру области, которое сопровождается сжатием жидкого контура, охватывающего центр области. Поэтому в контуре возникает циклоническая циркуляция, т. е. движение против часовой стрелки.

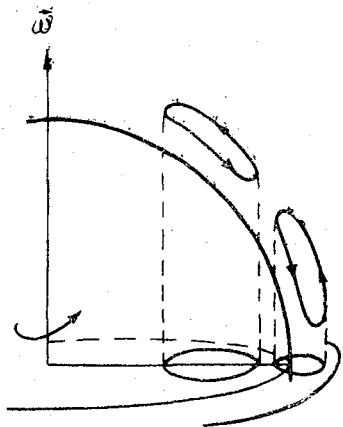


Рис. 15.11

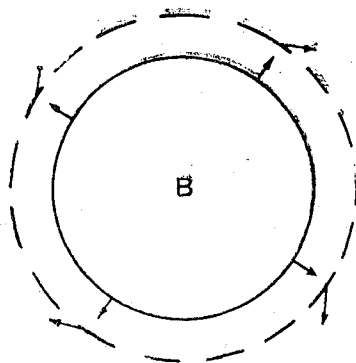


Рис. 15.12

Пример 3. *Пассатная циркуляция.* Известно, что в субтропических широтах располагается полоса высокого давления с наивысшим давлением на широтах $30-40^\circ$. В южной части этой полосы у земли имеет место отток воздуха к более низкому давлению в экваториальной зоне. Если представить себе жидкий контур в виде окружности, охватывающей земной шар по параллели, то движение воздуха к экватору будет сопровождаться возрастанием площади, охватываемой контуром, и развитием в нем антициклонической циркуляции. Иными словами, в контуре возникнут составляющие скорости, направленные по часовой стрелке (если смотреть с севера), благодаря чему потоки приобретут направление с северо-востока на юго-запад (рис. 15.13). Легко видеть, что в появлении слагающей, противоположной направлению вращения Земли, отражается инерционное движение (отставание) частиц воздуха при смещении контура в область с большими значениями линейной скорости вращения.

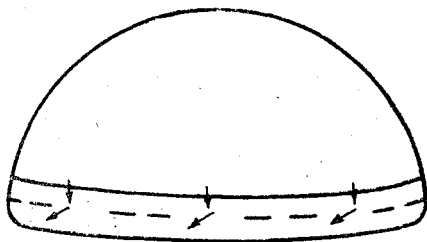


Рис. 15.13

Пример 4. *Изменение циркуляции при перетекании воздуха через горный хребет.* Представим себе, что воздушный поток встречает на своем пути препятствие в виде длинного горного

хребта, расположенного перпендикулярно направлению потока (рис. 15.14, а). Возмущающее действие препятствия уменьшается по мере поднятия над хребтом, и на некоторой высоте линии тока практически деформированы не будут. Поэтому можно представить себе, что в нижних слоях воздух входит в постепенно суживающуюся горизонтальную щель, что, очевидно, вызывает возрастание горизонтальной составляющей скорости потока при движении воздуха от подножья хребта к его вершине. Представим себе теперь

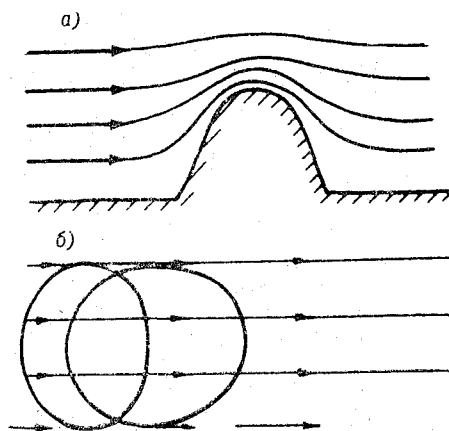


Рис. 15.14

в потоке горизонтальный жидкий контур (рис. 15.14, б). При движении по наветренной стороне хребта передняя часть контура ускоряется, происходит возрастание площади, охватываемой контуром, и соответственно возникновение антициклонической циркуляции. За хребтом скорость потока убывает, поэтому после перехода контура через гребень площадь контура убывает, чему соответствует возникновение в контуре циклонической циркуляции, компенсирующей образовавшуюся прежде антициклоническую циркуляцию. С этими явлениями

можно связать тот факт, что циклоны на наветренной стороне хребта ослабевают, а за хребтом имеет место их возрождение или новообразование.

ГЛАВА XVI

ВОЛНЫ

§ 1. ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС

Волновые движения по своей природе являются колебательными процессами. Их характерной особенностью является периодичность, т. е. общая картина движения точно или приблизительно повторяется через некоторый интервал времени, называемый *периодом*. Их полностью определяет, помимо периода, закон, по которому происходит движение, а также амплитуда. Под последней понимается величина наибольшего отклонения от положения равновесия.

Волны в жидкости условно могут быть подразделены на три типа, каждый из которых в чистом виде может существовать при выполнении некоторых вполне определенных условий. Это про-

дольные, вертикально-поперечные и горизонтально-поперечные волны. Первые имеют место, если колебания частиц происходят в направлении, параллельном фронту движения волны. Вторые характеризуются тем, что частицы двигаются в вертикальной плоскости, а сама волна распространяется горизонтально. Третий тип волн возникает в атмосфере или океане при движениях большого масштаба, причем траектории частиц направлены меридионально, в то время как сама волна перемещается в широтном направлении.

Указанная условная классификация находится в соответствии с причинами, порождающими волновые движения в жидкости. Так, продольные волны возникают в связи с импульсом давления, который, благодаря упругим свойствам среды, распространяется в виде сферической волны. При этом система волн состоит из чередующихся волн сжатия и разряжения. Это тип внутренней акустической волны.

Второй тип соответствует гравитационным волнам, которые могут иметь место на поверхности раздела двух сред с различными свойствами. Если граница возмущена, то в дальнейшем она начинает колебаться около своего положения равновесия под действием сил тяжести и инерции, пока демпфирующие силы трения не приведут к затуханию колебаний.

Наконец, последний тип называется *волнами Россби*. Их появление связано с действием отклоняющей силы вращения Земли. Они достигают порядка 10 000 км и имеют скорость не более 50 м/сек. Как уже упоминалось, они движутся вдоль параллелей.

Фактически в жидкой массе одновременно существуют все указанные выше типы волн. Поэтому, в общем, волновой процесс должен определяться всеми теми факторами, которые определяют каждый из них в отдельности.

Надо отметить, что, как правило, в реально протекающих процессах волновые колебания, имеющие различные амплитуды и периоды, накладываются на основное движение. При этом иногда малые в начале амплитуды волновых возмущений возрастают с течением времени, что приводит к образованию различного типа вихрей, которые существенно искажают первоначальные поля гидродинамических элементов. В некоторых случаях вызываемые этим эффекты малозначительны в плане решения общей задачи. Но сам факт существования усложняет картину и, естественно, затрудняет теоретический анализ рассматриваемого конкретного явления. Кроме того, степень влияния различных типов волн оказывается соответственно большей или меньшей, а иногда и пренебрежимо малой. Все это приводит к необходимости выделения этих волн с целью упрощения общего анализа. Эта процедура широко распространена в соответствующих теоретических исследованиях и носит название *фильтрации волн*.

Однако в любом случае прежде всего необходимо выяснить основные факторы, которые определяют свойства типов волн. Если же при анализе какого-либо процесса выявляется необходимость

их фильтрации, то в соответствии с конкретно намечаемой целью намечаются и пути фильтрации.

Ниже мы обращаемся к методике исследования волновых движений и выявлению физического механизма, соответствующего каждому из указанных типов.

§ 2. МЕТОД МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ. ПАРАМЕТРЫ ВОЛН

Обычно волновые возмущения характеризуются весьма малой амплитудой, так что их исследование целесообразно вести методом малых возмущений, которые накладываются на основное движение. При этом все характеристики движения могут быть представлены в виде суммы:

$$v_i = \tilde{v}_i + v'_i, \quad p = \tilde{p} + p', \quad \rho = \tilde{\rho} + \rho', \quad T = \tilde{T} + T'. \quad (16.1)$$

Здесь величины со знаком тильда ($\sim$) относятся к среднему движению, а отмеченные штрихом соответствуют малым возмущениям. При этом:

$$\frac{v'_i}{\tilde{v}} \ll 1, \quad \frac{p'}{\tilde{p}} \ll 1, \quad \frac{\rho'}{\tilde{\rho}} \ll 1, \quad \frac{T'}{\tilde{T}} \ll 1. \quad (16.2)$$

Подставляя (16.1) в уравнения движения (13.1) будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial v'_i}{\partial t} + \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \tilde{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = \\ = - \frac{1}{\tilde{\rho} + \rho'} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right) - g \delta_{iz}. \end{aligned}$$

Прежде всего, преобразуем член с давлением в правой части. Для этого учтем, что

$$\frac{1}{\tilde{\rho} + \rho'} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{1}{\left(1 + \frac{\rho'}{\tilde{\rho}}\right)} = \frac{1}{\tilde{\rho}} \left(1 - \frac{\rho'}{\tilde{\rho}}\right).$$

(Здесь использовано разложение в ряд функции вида $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots$, где мы ограничились линейным приближением). Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tilde{\rho} + \rho'} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{\rho'}{\tilde{\rho}^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} - \\ - \frac{\rho'}{\tilde{\rho}^2} \frac{\partial p'}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Подставим последнее выражение в полученное выше уравнение и опустим члены второго порядка малости, представляющие собой произведение малых величин. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'}{\partial t} + v'_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \tilde{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} - g \delta_{33}.$$

Уравнения для основного движения запишутся как обычно

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial t} + \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} - g \delta_{33}.$$

Вычитая это уравнение из предыдущего, получим уравнение для возмущений в виде

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} + v'_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \tilde{v}_j \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\rho'}{\rho^2} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i}. \quad (16.3)$$

Если характеристики основного движения нам известны, то (16.3) представляет собой линейные уравнения относительно неизвестных v'_i , p' , ρ' . Мы добились этого отбрасыванием нелинейных членов второго порядка малости. Такого рода процедура носит название *линеаризации*, а сами уравнения являются линеаризованными по отношению к исходным.

Аналогичным образом можно получить линеаризованные уравнения неразрывности (13.2) и притока тепла (13.3), которые соответственно принимают вид:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \frac{\partial \rho' \tilde{v}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\rho} v'_i}{\partial x_i} = 0; \quad (16.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial t} + v'_j \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} + \tilde{v}_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} - \left(\frac{\partial p'}{\partial t} + v'_j \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_j} + \tilde{v}_j \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda \frac{\partial T'}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (16.5)$$

Поскольку волновые возмущения являются периодическими как по времени, так и в пространстве, то естественно искать их решение в виде периодических функций, например синусоиды. Тогда следует записать:

$$\begin{aligned} v'_i &= v_{0i} \sin(k_i x_i - \sigma t), \\ p' &= p_0 \sin(k_i x_i - \sigma t), \\ \rho' &= \rho_0 \sin(k_i x_i - \sigma t), \\ T' &= T_0 \sin(k_i x_i - \sigma t). \end{aligned} \quad (16.6^*)$$

(Напомним, что $k_i x_i = \sum_{i=1}^3 k_i x_i$).

В (16.6) величины, отмеченные индексом «0», представляют собой амплитуду соответствующей характеристики.

Из условия периодичности вытекает, что:

$$\sigma = \frac{2\pi}{T}, \quad k_i = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (16.7)$$

где T — период, т. е. время повторения одинаковых состояний, а λ_i — расстояние по различным осям между одинаково расположенными на профиле волны точками, например между двумя, наиболее удаленными от оси x точками A и B (рис. 16.1), лежащими на соседних гребнях (точка C лежит на подошве волны)*.

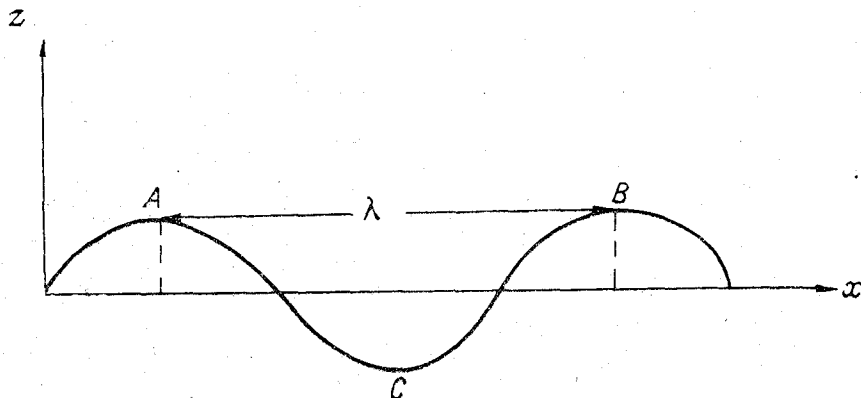


Рис. 16.1

Общая длина волны $\lambda = \sqrt{\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2}$, $\sigma = \frac{2\pi}{T}$ — круговая частота, k_i именуется волновыми числами. Общий аргумент $k_i x_i - \sigma t$ называется *фазой*. Форма волнового возмущения какого-либо элемента в (16.6) может быть получена приравниванием ее постоянной. Например, для давления, если обозначить $p' \equiv f(x_1, x_2, x_3, t)$

$$p_0 \sin(k_i x_i - \sigma t) = f(x_1, x_2, x_3, t) = \text{const.} \quad (16.8)$$

[Скорость перемещения волны называется *фазовой скоростью*. Следует подчеркнуть, что это не скорость движения частиц жидкости, а именно скорость перемещения формы поверхности. Наглядным примером является скорость распространения колебаний (бегущая волна) вдоль упругой нити, один конец которой колеблется по гармоническому закону.

* Ясно, что таким образом мы задаем только форму поверхности, а величины k_i , σ , а также амплитуды нам неизвестны.

Составляющие фазовой скорости c_i легко найти через посредство соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x_3} \frac{dx_3}{dt} = 0,$$

получаемого дифференцированием (16.8) по времени. Поскольку $c_i = \frac{dx_i}{dt}$ суть производные от координат профиля по времени, то они находятся как результат дифференцирования неявной функции нескольких переменных, т. е.

$$\frac{dx_i}{dt} = - \frac{\partial f / \partial t}{\partial f / \partial x_i}.$$

С учетом равенства (16.8) будем иметь

$$c_i = \frac{dx_i}{dt} = \frac{\sigma}{k_i} = \frac{\lambda_i}{T}$$

или

$$c = \sqrt{\sum_{i=1}^3 c_i^2} = \frac{1}{T} \sqrt{\sum_{i=1}^3 \lambda_i^2} = \frac{\lambda}{T}. \quad (16.9)$$

Формула (16.9) утверждает, что фазовая скорость равна отношению длины волны к периоду. Отметим, что в силу специфики задач часто существует зависимость $\sigma = \sigma(k_1, k_2, k_3)$, именуемая *дисперсионным уравнением*.

До сих пор мы рассматривали одиночную волну. Однако фактически этот случай является исключительным, ибо в реальных условиях наблюдается обычно система волн, отличающихся друг от друга всеми своими параметрами. По отношению к ним справедлив принцип суперпозиции, т. е. наложения друг на друга.

Любую периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье, представляющий собой сумму бесконечного числа гармоник с различными амплитудами и частотами, и изучать процесс с этих позиций. Разумеется, практически рассматривается конечное число членов этого ряда, исходя при этом из заданной точности. Так или иначе, практически мы, как правило, имеем дело с совокупностью волн, так называемым *волновым пакетом*. Тогда для любой функции j в (16.6) следует записать

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} f_{0m} \sin(k_{im}x - \sigma_m t). \quad (16.10)$$

Установим фазовую скорость группы волн, иначе именуемую *групповой скоростью*.

Вначале рассмотрим две волны, имеющие одинаковую амплитуду и близкие по своим значениям величины волновых чисел k_i , k_i' и частот σ , σ' , т. е.:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 \sin(k_i x_i - \sigma t), \\ f_2 &= f_0 \sin(k_i' x_i - \sigma' t). \end{aligned}$$

Суммарный эффект

$$\begin{aligned} f &= f_1 + f_2 = 2 f_0 \cos \left(\frac{k_i - k_i'}{2} x_i - \frac{\sigma - \sigma'}{2} t \right) \sin \times \\ &\times \left(\frac{k_i + k_i'}{2} x_i - \frac{\sigma + \sigma'}{2} t \right). \end{aligned}$$

В силу близости k_i и k_i' , а также σ и σ' множитель

$$F = 2 f_0 \cos \left(\frac{k_i - k_i'}{2} x_i - \frac{\sigma - \sigma'}{2} t \right) \quad (16.11)$$

слабо меняется и его можно рассматривать как переменную амплитуду, значения которой меняются в пределах от 0 до $2 f_0$ на длине $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{k_i - k_i'}{k_i - k_i'} = \frac{\pi}{k_i - k_i'}$ вдоль каждой оси.

Общая скорость перемещения обеих волн может быть охарактеризована как скорость точки с каким-либо постоянным значением $F(x_1, x_2, x_3, t) = \text{const}$. Отсюда, как и ранее, находим компоненты фазовой скорости

$$c_{ri} = \frac{dx_i}{dt} = - \frac{\partial F / \partial t}{\partial F / \partial x_i} = \frac{\sigma_i - \sigma_i'}{k_i - k_i'}.$$

Если же имеем непрерывную последовательность волн, то групповая скорость должна определяться как предел

$$c_{ri} = \lim_{\Delta k_i \rightarrow 0} \frac{\Delta \sigma}{\Delta k_i} = \frac{d\sigma}{dk_i}. \quad (16.12)$$

Очевидно, что групповая скорость отлична от фазовой скорости отдельной волны.

В заключение заметим, что в математическом плане удобнее работать с экспонентами, а не с синусами или косинусами. Поэтому форму волны часто задают в виде

$$f = \sum_{m=1}^{\infty} f_{0m} \cdot \exp [i(k_{1m} x_1 + k_{2m} x_2 + k_{3m} x_3 - \sigma_m t)]. \quad (16.13)$$

(Напомним, что согласно формуле Эйлера, $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, т. е. вещественная часть дает косинусоидальную волну, мнимая — синусоидальную, i — комплексная единица).

На этом мы заканчиваем определение параметров, с помощью которых ведется описание волновых процессов и приступаем к рассмотрению наиболее распространенных форм волнового движения.

§ 3. АКУСТИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ

Упругие волны с диапазоном частот $20 \div 20 \cdot 10^3$ герц, которые воспринимаются человеческим ухом, называются *акустическими* или *звуковыми волнами*. Существенно, что последовательные скачки сжатия и разрежения, представляющие собой звуковую волну, происходят настолько быстро, что обмен теплом между областью волновых движений и средой происходить не успевает, и процесс протекает адиабатически. Таким образом, уравнение притока тепла имеет вид (9.21):

$$p = k\rho^z \quad \left(z = \frac{c_p}{c_v} \right). \quad (16.14)$$

Кроме того, силой тяжести в данном случае можно пренебречь, что, как мы убедимся далее, связано с большими числами Фруда, характерными для этого процесса. Таким образом $\frac{1}{Fr} \ll 1$.

Если источник звуковых колебаний находится в покоящейся среде, то

$$\tilde{v}_i = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_2} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_1} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_2} = 0, \quad (16.15)$$

а если игнорировать силу тяжести:

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_3} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_3} = 0. \quad (16.15')$$

В этом случае (16.3) и 16.4) упрощаются и соответственно принимают вид:

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t} = - \frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x_i}; \quad (16.16)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \tilde{\rho} \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (16.17)$$

$$\left(\text{Напомним, что } \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v'_i}{\partial x_i} \right).$$

Поскольку адиабатическое течение соответствует случаю баротропной жидкости, то можно записать

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}.$$

Логарифмируя и дифференцируя выражение (16.14), в свою очередь получим

$$\frac{dp}{p} = \frac{z d\rho}{\rho}.$$

Откуда

$$\frac{dp}{d\rho} = \frac{zp}{\rho}. \quad (16.18)$$

Поэтому

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{zp}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}.$$

Подставив сюда разложение (16.1) с учетом (16.15) и (16.15'), будем иметь

$$\frac{\partial p'}{\partial x_i} = \frac{z(\tilde{p} + p')}{\tilde{\rho} \left(1 + \frac{p'}{\tilde{p}}\right)} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} = \frac{z}{\tilde{\rho}} (\tilde{p} + p') \left(1 - \frac{p'}{\tilde{p}}\right) \frac{\partial \rho'}{\partial x_i}.$$

Опуская в последнем произведении величины второго и третьего порядка малости, приходим к зависимости

$$\frac{\partial p'}{\partial x_i} = -\frac{z\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i} = -a^2 \frac{\partial \rho'}{\partial x_i}.$$

Здесь введено обозначение $a^2 = \frac{z\tilde{p}}{\tilde{\rho}}$. Из (16.18) ясно, что $\frac{z\tilde{p}}{\tilde{\rho}}$ всегда положительно, ибо с увеличением давления плотность также возрастает и наоборот, так что $\frac{dp}{d\rho} > 0$. Это обстоятельство и отмечено тем, что величина a взята в квадрате.

Таким образом, в итоге уравнения (16.16) можно представить в виде

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{a^2}{\tilde{\rho}} \frac{\partial \rho'}{\partial x_i}. \quad (16.19)$$

Если продифференцировать каждое из уравнений (16.19) по x_i и сложить результаты, то получим

$$\frac{\partial^2 v'_1}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial^2 v'_2}{\partial t \partial x_2} + \frac{\partial^2 v'_3}{\partial t \partial x_3} = -\frac{a^2}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x_3^2} \right).$$

В свою очередь, дифференцируя (16.17) по t , получаем зависимость

$$\frac{\partial^2 v'_1}{\partial t \partial x_1} + \frac{\partial^2 v'_2}{\partial t \partial x_2} + \frac{\partial^2 v'_3}{\partial t \partial x_3} = -\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2}.$$

Сравнивая оба последних выражения, мы видим, что их левые части, а следовательно, и правые равны. Это дает возможность получить одно волновое уравнение, где в качестве неизвестной фигурирует только ρ' , т. е.

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = a^2 \Delta \rho' \quad (\Delta \rho' - \text{лапласиан}). \quad (16.20)$$

Наиболее часто встречающаяся звуковая волна является сферически симметричной, так что в рассмотрение следует принять только одну координату r . При этом (см. Б. 26) $\Delta \rho' = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial r}$ и уравнение (16.20) примет вид

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right). \quad (16.21)$$

Решение этого уравнения будем искать в виде

$$\rho' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{r} \exp [i(k_m r - \sigma_m t)] \quad (16.22)$$

($A_m = \text{const}$).

В данном случае амплитуда обратно пропорциональна радиусу, ибо, помещая источник в начало координат, мы там должны иметь особенность первого порядка.

Выполнив все дифференцирования (16.22) по t и r и подставив результаты в (16.21), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{r} \exp [i(k_m r - \sigma_m t)] (\sigma_m^2 - k_m^2 a^2) = 0.$$

Последнее выражение может обратиться в нуль, если только

$$\sigma_m^2 = k_m^2 a^2. \quad (16.23)$$

С учетом (16.7) последнее равенство можно преобразовать и представить в виде

$$a^2 = \frac{\lambda_m}{T_m}.$$

Из (16.9) следует, что фазовая скорость всех волновых гармоник равна постоянной величине

$$c_m = \pm a. \quad (16.24)$$

Таким образом a представляет собой скорость распространения малых возмущений в сжимаемой жидкости и называется *скоростью звука*.

Общее решение уравнения (16.21) получим если в (16.22) подставим (16.23) и (16.24). Оно имеет вид

$$\rho' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{r} \{ \exp [i k_m(r - at)] + \exp [i k_m(r + at)] \}.$$

Или, используя формулы Эйлера и отбирая члены с вещественной частью,

$$\rho' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{r} [\cos k_m(r - at) + \cos k_m(r + at)].$$

Аналогичные выражения, естественно, получаются и для других характеристик, отличаясь друг от друга лишь величиной постоянной A_m . Таким образом волны распространяются в противоположных направлениях со скоростью a .

Введенное нами понятие скорости звука относится к невозмущенной среде, так что $a = \sqrt{\frac{\chi p}{\rho}}$. При наличии общего движения

под ней следует понимать величину $a_1 = \sqrt{\frac{\chi p}{\rho}}$. Это, так назы-

ваемая, *местная скорость звука*, представляющая собой скорость распространения колебания относительно среды в какой-либо точке. Из (16.18) следует, что скорость звука повышается с уменьшением упругости, ибо при этом одному и тому же изменению плотности соответствуют большие изменения давления. Так, скорость звука в воде больше скорости звука в воздухе. В пределе, если среда абсолютно жесткая, $a \rightarrow \infty$.

С учетом уравнения состояния $p = R\rho T$ скорость звука в газе можно представить в виде

$$a = \sqrt{\chi RT}. \quad (16.25)$$

Мы видим, что она зависит лишь от физических констант газа и его температуры в $^{\circ}\text{К}$. Для воздуха, в частности, $\chi = 1,4$; $R = 287 \text{ м}^2 \cdot \text{сек}^{-2} \cdot \text{град}^{-1}$ и $a \cong 20,1 \sqrt{T} \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$. С повышением температуры скорость звука возрастает. Поскольку в атмосфере в большинстве случаев температура с высотой уменьшается, то скорость звука в нижних слоях выше, чем в верхних. Поэтому звуковые лучи, идущие от наземного источника, искривляются с высотой.

Наконец, оценим влияние силы тяжести на распространение звука. Для воздуха при 0°C $a = 332 \text{ м/сек}$. Считая a характерной скоростью, а длину волны $\lambda = \frac{2\pi a}{\sigma}$ характерным линейным разме-

ром, можем число Фруда представить в виде $\text{Fr} = \frac{a^2}{g\lambda} = \frac{a^2}{2\pi g}$. Даже

при $\sigma = 20 \text{ сек}^{-1}$, чему соответствует минимальное значение Fr , оно равно ~ 100 и, следовательно, $\frac{1}{Fr} \ll 1$. Таким образом пренебрежение влиянием гравитации вполне оправдано.

§ 4. ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

Этот тип волн существует на границе двух масс с различными свойствами, например вода — воздух или воздух — воздух. В последнем случае может иметь место различие по скорости, плотности, температуре или по совокупности всех этих характеристик. Обращаясь к конкретному анализу рассматриваемого типа будем исходить из некоторых упрощающих предпосылок, которые, с одной стороны, позволяют выявить характерные особенности этих волн, а с другой — дают возможность избежать математических осложнений.

Во-первых, будем полагать, что волна перемещается вдоль оси x и является плоской, т. е. ее характеристики не зависят от y . Из этого вытекает, что $\tilde{v}_2 = v_2' = 0$ и, кроме того, все производные $\frac{\partial}{\partial x_2} \equiv 0$. Во-вторых, считаем жидкость несжимаемой, т. е. $\rho = \bar{\rho} = \text{const}$, $\rho' = 0$. Последнее условие означает, что в получающихся при этом упрощенных уравнениях не находят отражения акустические эффекты, ибо звук может распространяться только в сжимаемой среде. Тем самым мы отфильтровываем звуковые волны и рассматриваем интересующий нас процесс в чистом виде, без включения не интересующих нас в данный момент звуковых колебаний.

В результате этих предположений уравнения (16.3) и (16.4) упрощаются и принимают соответственно вид:

$$\frac{\partial v_x'}{\partial t} + v_x' \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial x} + v_z' \frac{\partial \tilde{v}_x}{\partial z} + \tilde{v}_x \frac{\partial v_x'}{\partial x} + \tilde{v}_z \frac{\partial v_x'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x}; \quad (16.26)$$

$$\frac{\partial v_z'}{\partial t} + v_x' \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial x} + v_z' \frac{\partial \tilde{v}_z}{\partial z} + \tilde{v}_x \frac{\partial v_z'}{\partial x} + \tilde{v}_z \frac{\partial v_z'}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z}; \quad (16.27)$$

$$\frac{\partial v_x'}{\partial x} + \frac{\partial v_y'}{\partial y} = 0. \quad (16.28)$$

Рассмотрим теперь волны на границе раздела двух несжимаемых жидкостей, ограниченных снизу твердой стенкой, а сверху свободной поверхностью. При этом будем считать, что два потока с плотностями $\tilde{\rho}_1 = \rho_1$ и $\tilde{\rho}_2 = \rho_2$ * движутся друг над другом, причем

* Индекс 1 относится к верхнему потоку, а 2 к нижнему.

скорости невозмущенных течений постоянны и направлены вдоль оси x , так что имеем $\tilde{u}_1 = \text{const}$, $\tilde{u}_2 = \text{const}$. (Здесь обозначено $\tilde{v}_i \equiv \tilde{u}_i$ при $i=1$). Поместим начало координат на границе раздела невозмущенных течений и направим ось z вверх. Тогда координата нижней твердой границы будет $z = -h_2$, а верхней, имеющей свободную поверхность, $z = h_1$ (h_1 и h_2 — толщины обоих потоков). Если ввести еще обозначение $v_3 \equiv \omega$, то, согласно (16.26) — (16.28), оба возмущенных течения будут соответственно описываться системами уравнений:

$$\frac{\partial u'_1}{\partial t} + \tilde{u}_1 \frac{\partial u'_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p'_1}{\partial x}; \quad (16.29)$$

$$\frac{\partial w'_1}{\partial t} + \tilde{u}_1 \frac{\partial w'_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p'_1}{\partial z}; \quad (16.30)$$

$$\frac{\partial u'_1}{\partial x} + \frac{\partial w'_1}{\partial z} = 0; \quad (16.31)$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial t} + \tilde{u}_2 \frac{\partial u'_2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p'_2}{\partial x}; \quad (16.29')$$

$$\frac{\partial w'_2}{\partial t} + \tilde{u}_2 \frac{\partial w'_2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p'_2}{\partial z}; \quad (16.30')$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial x} + \frac{\partial w'_2}{\partial z} = 0. \quad (16.31')$$

Сформулируем вначале кинематические граничные условия. Если координату поверхности раздела обозначить $z = \zeta(x, t)$, то, учитывая что в невозмущенном состоянии поверхность горизонтальна, будем иметь $\tilde{\zeta} = 0$. Тогда для возмущенной поверхности следует записать

$$z' = \zeta'(x, t).$$

Вертикальные скорости на этой границе будут равны:

$$w'_1|_{z=0} = \frac{dz'}{dt} = \frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \tilde{u}_1 \frac{\partial \zeta'}{\partial x}; \quad (16.32)$$

$$w'_2|_{z=0} = \frac{\partial \zeta'}{\partial t} + \tilde{u}_2 \frac{\partial \zeta'}{\partial x}. \quad (16.33)$$

На твердой стенке

$$w'_2|_{z=-h_2} = 0. \quad (16.34)$$

На свободной поверхности *

$$w'_1|_{z=h_1} = \frac{\partial \zeta'_1}{\partial t} + \tilde{u}_1 \frac{\partial \zeta'_1}{\partial x}. \quad (16.35)$$

Динамические граничные условия можно получить из следующих соображений. Прежде всего очевидно, что давление на границе обоих потоков не может терпеть разрыва, так что

$$|\tilde{p}_1(x, z, t) + p'_1(x, z, t) = \tilde{p}_2(x, z, t) + p'_2(x, z, t)|_{z=\zeta'}.$$

Разлагая это равенство в ряд и пользуясь малостью ζ' , получим

$$\begin{aligned} & |\tilde{p}_1(x, 0, t) + p'_1(x, 0, t) + \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} \Big|_{z=0} \zeta' + \frac{\partial p'_1}{\partial z} \Big|_{z=0} \zeta' = \\ & = \tilde{p}_2(x, 0, t) + p'_2(x, 0, t) + \frac{\partial \tilde{p}_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \zeta' + \frac{\partial p'_2}{\partial z} \Big|_{z=0} \zeta' \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad **$$

Поскольку для невозмущенного движения выполняется равенство $\tilde{p}_1(x, 0, t) = \tilde{p}_2(x, 0, t)$ и, кроме того, справедливы уравнения гидростатики $\frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial z} = -g\rho_1$, $\frac{\partial p'_2}{\partial z} = -g\rho_2$, то, опуская еще члены второго порядка малости, мы можем искомое условие записать в виде

$$|p'_1 - p'_2 = g((\rho_1 - \rho_2)\zeta')|_{z=0}. \quad (16.36)$$

Для свободной поверхности легко получить аналогичное соотношение

$$|p'_1 = -g\rho_1\zeta'_1|_{z=h_1}. \quad (16.37)$$

Решая системы (16.29) — (16.31), искомые функции будем искать в виде

$$f' = f(z) \exp[i(kx - \sigma t)], \quad (16.38)$$

а уравнение поверхностей запишем:

$$\zeta = a \exp[i(kx - \sigma t)], \quad \zeta_1 = a_1 \exp[i(kx - \sigma t)], \quad (16.39)$$

где a и a_1 — амплитуды.

Существенно отметить, что в данном случае периодического решения по z уже не может быть, ибо по этой оси имеются в наличии непериодические граничные условия. Подставляя выражения типа (16.38) для всех искомых величин в уравнения и гра-

* В невозмущенном состоянии уравнение этой поверхности

$$z = \zeta_1 = \text{const.}$$

** Строго говоря, следует писать $p(x, \zeta, t) = 0$ и т. д., но ввиду малости ζ , можно полагать $p(x, 0, t)$ и т. п.

ничные условия, после простейших преобразований соответственно получим*:

$$\rho_j (\sigma - k\tilde{u}_j) u_j = -kp_j; \quad (16.40)$$

$$\rho_j (\sigma - k\tilde{u}_j) w_j = i \frac{dp_j}{dz}; \quad (16.41)$$

$$ik u_j + \frac{dw_j}{dz} = 0; \quad (16.42)$$

$$(j=1,2)$$

$$w_1(0) = -ia (\sigma - k\tilde{u}_1); \quad (16.43)$$

$$w_2(0) = -ia (\sigma - k\tilde{u}_2); \quad (16.44)$$

$$w_2(-h_2) = 0; \quad (16.45)$$

$$w_1(h_1) = -ia (\sigma - k\tilde{u}_1); \quad (16.46)$$

$$p_1(0) - p_2(0) = ga (\rho_1 - \rho_2); \quad (16.47)$$

$$p(h_1) = -ga_1 \rho_1. \quad (16.48)$$

Систему (16.40) — (16.42) легко свести к одному уравнению. Для этого умножим (16.40) на ik и, продифференцировав (16.41) по z сложим результаты. Тогда, с учетом (16.42), получим

$$\frac{d^2 p_j}{dz^2} - k^2 p_j = 0. \quad (16.49)$$

Общее решение уравнения (16.49) имеет вид

$$p_j = C_j^{(1)} e^{kz} + C_j^{(2)} e^{-kz}. \quad (16.50)$$

Из (16.40) и (16.41) получаем

$$u_j = -\frac{k}{\rho_j (\sigma - k\tilde{u}_j)} (C_j^{(1)} e^{kz} + C_j^{(2)} e^{-kz}); \quad (16.51)$$

$$w_j = \frac{ik}{\rho_j (\sigma - k\tilde{u}_j)} (C_j^{(1)} e^{kz} - C_j^{(2)} e^{-kz}). \quad (16.52)$$

Условия (16.43) — (16.46) дают возможность найти все постоянные из (16.52), которые соответственно равны:

$$\left. \begin{aligned} C_1^{(1)} &= \frac{\rho_1 (\sigma - k\tilde{u}_1)^2}{k} \left(\frac{a_1 \exp kh_1 - a_1}{2 \operatorname{sh} kh_1} - a \right), \\ C_1^{(2)} &= \frac{\rho_1 (\sigma - k\tilde{u}_1)^2}{k} \cdot \frac{a_1 \exp kh_1 - a_1}{2 \operatorname{sh} kh_1}; \end{aligned} \right\} \quad (16.53)$$

* При этом все величины, обозначенные по типу $u_1 = u_1(z)$, естественно, не эквивалентны исходным, входящим в уравнения (16.3).

$$\left. \begin{aligned} C_2^{(1)} &= - \frac{a \rho_2 (\sigma - k\tilde{u}_2)^2 \exp kh_2}{2k \operatorname{sh} kh_2}, \\ C_2^{(2)} &= - \frac{a_1 \rho_2 (\sigma - k\tilde{u}_2)^2 \exp(-kh_2)}{2k \operatorname{sh} kh_2}. \end{aligned} \right\} \quad (16.53')$$

Условия (16.47) и (16.48) позволяют связать величины a , a_1 , σ , k .

Таким образом, искомые величины имеют вид:

$$\begin{aligned} p'_j &= p_j \exp [i(kx - \sigma t)], \\ u'_j &= u_j \exp [i(kx - \sigma t)], \\ w'_j &= w_j \exp [i(kx - \sigma t)], \end{aligned}$$

где p_j , u_j , w_j выражаются через посредство соотношений (16.50) — (16.53). Воспользовавшись формулой Эйлера, выделим вещественную часть. Тогда окончательно получим:

$$\left. \begin{aligned} p'_j &= p_j \cos(kx - \sigma t), \\ u'_j &= u_j \cos(kx - \sigma t), \\ w'_j &= -\bar{w}_j \sin(kx - \sigma t). \\ (\bar{w}_j &= i w_j) \end{aligned} \right\} \quad (16.54)$$

Если вместо свободной поверхности на верхней границе имеется твердая стенка, то $a_1 = 0$. Поэтому условие (16.48) будет отсутствовать, а вместо (16.46) будем иметь

$$w(h_1) = 0. \quad (16.46')$$

В этом случае общий вид решения не изменится и лишь в (16.53) следует положить $a_1 = 0$.

Если длина волны значительно меньше толщины верхнего потока $\lambda = \frac{2\pi}{k} \ll h_1$, т. е. $kh_1 \gg 1$, то можно полагать $kh_1 \rightarrow \infty$. Тогда решение еще более упрощается. При этом условие (16.46') вообще отсутствует, а из (16.53) при $a_1 = 0$ и $kh_1 \rightarrow \infty$ получаем:

$$C_1^{(1)} = 0; \quad C_1^{(2)} = \frac{a \rho_1 (\sigma - k\tilde{u}_1)^2}{k}. \quad (16.55)$$

Проанализируем этот случай более детально. Условие (16.47) позволяет нам связать величины σ и k . Подставляя в него p_1 , p_2 из (16.50), а также значения постоянных из (16.53') и (16.55),

после простейших преобразований, получим дисперсионное уравнение вида

$$\sigma = \frac{k(\alpha \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \operatorname{cth} kh_2)}{\alpha + \operatorname{ctn} kh_2} \pm \sqrt{\frac{kg(1-\alpha)}{\alpha + \operatorname{cth} kh_2} - \frac{\alpha k^2(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)^2 \operatorname{cth} kh_2}{(\alpha + \operatorname{cth} kh_2)^2}}, \quad (16.56)$$

где введено обозначение $\alpha = \frac{\rho_1}{\rho_2}$.

Если в (16.56) под корнем будет отрицательная величина, то такой волновой процесс существовать не может. Это случай неустойчивости основного движения, когда амплитуды волн растут неограниченно.

Обратимся к частным случаям. Вначале предположим, что глубина нижнего потока значительно больше длины волны ($kh_2 \gg 1$). Выражение для σ получим при этом из (16.56), устремляя $kh_2 \rightarrow \infty$. В итоге, поскольку $\lim_{kh_2 \rightarrow \infty} \operatorname{cth} kh_2 = 1$, будем иметь

$$\sigma = \frac{k(\alpha \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2)}{\alpha + 1} \pm \sqrt{\frac{kg(1-\alpha)}{1+\alpha} - \frac{\alpha k^2(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)^2}{(1+\alpha)^2}}. \quad (16.57)$$

Случай малой глубины $kh_2 \ll 1$ получим из (16.56), разлагая $\operatorname{cth} kh_2$ в ряд и ограничиваясь линейным приближением, так что $\operatorname{cth} kh_2 = 1 + kh_2$. В результате приходим к зависимости

$$\sigma_1 = \frac{k(\alpha \tilde{u}_1 kh_2 + \tilde{u}_2)}{2kh_2 + 1} \pm \sqrt{\frac{gk^2h_2(1-\alpha)}{\alpha kh_2 + 1} - \frac{\alpha k^3h_2(\tilde{u}_1 - \tilde{u}_2)^2}{(\alpha kh_2 + 1)^2}}. \quad (16.58)$$

Если плотность верхней жидкости значительно меньше плотности нижней, то $\alpha \sim 0$. Например, для случая воздух — вода $\alpha \cong \frac{1}{770}$, поэтому, полагая $\alpha \sim 0$, из (16.57) и (16.58) получим наиболее простые соотношения:

$$\sigma_2 = k\tilde{u}_2 \pm \sqrt{kg}; \quad (16.59)$$

$$\sigma_3 = k\tilde{u}_2 \pm k\sqrt{gh_2}. \quad (16.60)$$

Соответствующие фазовые скорости:

$$c_1 = \frac{\sigma_2}{k} = \tilde{u}_2 \pm \sqrt{\frac{g}{k}} = \tilde{u}_2 \pm \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}; \quad (16.61)$$

$$c_2 = \tilde{u}_2 \pm \sqrt{gh_2}. \quad (16.62)$$

Из (16.61) мы видим, что скорость движения волны, возникающей на поверхности глубокой воды, зависит от ее длины, причем

более длинные распространяются быстрее. Поэтому в случае группы волн они будут накладываться друг на друга и профиль волны будет все время меняться. Групповая скорость, как следует из (16.59), при этом равна

$$\frac{d\sigma}{dk} = \tilde{u}_2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}. \quad (16.63)$$

Таким образом, она, при отсутствии среднего движения, составляет половину фазовой скорости одиночной волны.

Формула (16.62) показывает, что на мелкой воде скорость движения волн не зависит от их длины. Все они перемещаются с одинаковой скоростью, вследствие чего профиль волны сохраняется неизменным.

В заключение заметим, что траектории движения частиц или линии тока легко получить обычным путем, используя уравнения (2.2), (2.3) и формулы (16.54). Мы не будем решать конкретно этой задачи, ибо процедура сама по себе проста, но займет весьма много места, что методически представляется нам неоправданным.

§ 5. ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ

Длинные волны наблюдаются в атмосфере, причем, как уже упоминалось, их возникновение обусловлено отклоняющим действием вращения Земли, т. е. силой Кориолиса. При этом сами волны движутся вдоль параллелей, а колебания частиц происходят в меридиональном направлении.

При анализе этого процесса будем пользоваться системой координат, у которой ось Ox направлена с запада на восток, Oy на север и Oz перпендикулярно земной поверхности. Тогда, пренебрегая сферичностью Земли, можем считать, что волновые движения происходят в плоскости параллельной xOy ($\tilde{v}_3 = v_3' = \tilde{v}_2 = 0$), причем сами волны движутся вдоль Ox . Будем далее полагать, что основное движение невозмущенной атмосферы носит чисто зональный характер, т. е. имеет только x -ю составляющую скорости, которую к тому же будем считать постоянной $\tilde{u} = \text{const}$. Атмосферу считаем несжимаемой, т. е. $\tilde{\rho} = \rho = \text{const}$. Тогда уравнения для волновых возмущений будут иметь вид:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + lw'; \quad (16.64)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} - lv'; \quad (16.65)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0. \quad (16.66)$$

(Здесь введено обозначение $v_1' \equiv u'$, $v_2' \equiv v$).

Появление вторых слагаемых в правой части (16.64) и (16.65) обусловлено наличием силы Кориолиса, ибо в данном случае рассматривается движение относительно земной поверхности. Как известно,

$$\vec{F}_k = -2 [\vec{\omega} \times \vec{v}] = -2 [\vec{i}(\omega_y v_z - \omega_z v_y) + \vec{j}(\omega_z v_x - \omega_x v_z) + \vec{k}(\omega_x v_y - \omega_y v_x)].$$

При $v_z = 0$, что соответствует рассматриваемому случаю, мы в наших обозначениях, имеем: $F_{kx} = 2 \omega_z v$, $F_{ky} = -2 \omega_z u$. Перейдя к отклонениям и учитывая, что $\tilde{v} = 0$, мы получаем в правой части обоих уравнений члены lv' и $-lu'$, где введено обозначение $l = 2\omega_z$. Поскольку ω_z есть проекция угловой скорости вращения Земли на перпендикуляр к земной поверхности, то нетрудно убедиться в том, что $l = 2\omega \sin \varphi$, где φ — широта рассматриваемой точки.

Вместо (16.64) и (16.65) можно исследовать одно уравнение, которое мы получим, предварительно введя функцию тока $u' = \frac{\partial \Psi'}{\partial y}$, $v' = -\frac{\partial \Psi'}{\partial x}$. Тогда (16.64) и (16.65) переписутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial y} \right) + \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} - l \frac{\partial \Psi'}{\partial x}, \\ -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial x} \right) - \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial x} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} - l \frac{\partial \Psi'}{\partial y}. \end{aligned}$$

Продифференцировав первое из этих уравнений по y , а второе по x и вычитая результаты, получим искомое уравнение для функции Ψ' в виде

$$\frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial t} + \tilde{u} \frac{\partial \Delta \Psi'}{\partial x} + f \cdot \frac{\partial \Psi'}{\partial x} = 0. \quad (16.67)$$

Здесь

$$\Delta \Psi' = \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial y^2}; \quad f = \frac{dl}{dy}.$$

(Заметим, что $\frac{\partial l}{\partial x} = 0$, что обусловлено выбором координатной системы).

Решение (16.67) ищем в виде

$$\Psi' = \Psi(y) \exp [i(kx - \sigma t)].$$

Подставляя это значение Ψ' в уравнение (16.67), получаем соотношение

$$\frac{d^2 \Psi}{dy^2} + \left(\frac{kf}{ku - \sigma} - k^2 \right) \Psi = 0.$$

Или, поскольку $c = \frac{\sigma}{k}$,

$$\frac{d^2\Psi}{dy^2} + \left(\frac{f}{u-c} - k^2 \right) \Psi = 0. \quad (16.68)$$

В качестве граничных условий по y примем, что v' имеет максимум при $y=0$ и обращается в нуль при $y = \pm \frac{d}{4}$, где d — поперечный размер волны. Тогда будем иметь $v' \Big|_{y=0} = - \frac{\partial^2 \Psi'}{\partial x \partial y} \Big|_{y=0} = 0$ и

$\frac{\partial \Psi'}{\partial x} \Big|_{y = \pm \frac{d}{4}} = 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{d\Psi}{dy} \Big|_{y=0} = 0, \quad \Psi \Big|_{y = \pm \frac{d}{4}} = 0. \quad (16.69)$$

Общее решение (16.40), как известно, имеет вид

$$\Psi = C_1 \cos \alpha y + C_2 \sin \alpha y,$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{kf}{u-c} - k^2}.$$

Из первого условия (16.69) следует, что $C_2 = 0$. Тогда

$$\Psi = C_2 \cos \alpha y.$$

Второе условие дает

$$0 = C_1 \cos \frac{\alpha d}{4}.$$

Поскольку $C_2 \neq 0$ (в этом случае $\Psi \equiv 0$), то отсюда должно следовать: $\cos \frac{\alpha d}{4} = 0$, что может быть только при $\frac{\alpha d}{4} = \frac{n\pi}{2}$. Полагая $n=1$, получим равенство

$$\alpha^2 = \frac{4\pi^2}{d^2}.$$

Или учитывая, что $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, из последнего соотношения легко получить формулу

$$u - c = \frac{\lambda^2 f}{4\pi^2 \left(1 + \frac{\lambda^2}{d^2} \right)}. \quad (16.70)$$

В случае отсутствия ограничений по y $d \rightarrow \infty$, $\frac{\lambda}{d} \rightarrow 0$ и из (16.70) получаем формулу Россби для скорости распространения длинных волн в атмосфере

$$c = \tilde{u} - \frac{\lambda^2 f}{4\pi^2}. \quad (16.71)$$

Из (16.71) видно, что фазовая скорость зависит от длины волны. Если $\tilde{u} > \frac{\lambda^2 f}{4\pi^2}$, то волны движутся с запада на восток, а при $\tilde{u} < \frac{\lambda^2 f}{4\pi^2}$ в противоположном направлении. При $c=0$ волна называется *стационарной* и ее длина равна

$$\lambda = 2\pi \sqrt{\frac{\tilde{u}}{f}}. \quad (16.72)$$

Существенно, что величина c зависит от широты местности, ибо

$$f = \frac{dl}{dy} = 2\omega \frac{d}{dy} \sin \varphi = \frac{2\omega}{R} \frac{d \sin \varphi}{d\varphi} = 2\omega \cos \varphi$$

(R — радиус Земли, $dy = R d\varphi$).

Тогда (16.71) может быть записана в виде

$$c = \tilde{u} - \frac{2\omega \lambda^2 \cos \varphi}{4\pi^2}. \quad (16.73)$$

В общем случае решение уравнения (16.67) следует искать в виде ряда

$$\Psi' = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(y) \exp [i \cdot (k_m x - \sigma_m t)].$$

Групповую скорость можно при этом получить с помощью формулы (16.71), которая может быть представлена в виде

$$\sigma = k\tilde{u} - \frac{f}{k}.$$

Отсюда:

$$c_r = \frac{d\sigma}{dk} = \tilde{u} + \frac{\lambda^2 f}{4\pi^2}. \quad (16.74)$$

Сравнивая (16.74) с (16.71), мы видим, что $c_r > \tilde{u} > c$.



Раздел IV

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

ГЛАВА XVII

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Все рассмотренные ранее гидромеханические задачи относятся к классу ламинарных течений. Их отличительная черта — плавный характер изменения всех гидромеханических величин, который четко обусловлен либо пространственно-временным ходом граничных условий, либо изменением внешних сил. Однако большинство встречающихся как в технике, так и в периоде течений, носит преимущественно турбулентный характер. В отличие от ламинарных, турбулентные движения характеризуются неупорядоченным, случайным характером изменения во времени и пространстве всех элементов потока: скорости, давления, плотности, температуры и концентрации примесей. При развитом турбулентном режиме перенос любых субстратов в потоке осуществляется через посредство хаотических движений отдельных масс жидкости, так называемых турбулентных молей. Естественно, что интенсивность обмена, в сравнении с ламинарными потоками, намного выше, ибо в последнем случае этот процесс реализуется за счет движений отдельных молекул. Из сказанного ясно, что основная особенность турбулентного режима — случайный пульсирующий характер всех гидродинамических полей, сопровождающийся интенсивным перемешиванием.)

Попытки дать точное математическое описание движения отдельно взятых турбулентных молей обречены на неудачу, как за счет хаотичности их движений, так и ввиду их громадного числа и многообразия. В формальном отношении здесь наблюдается известная аналогия с флуктуационным молекулярным движением, где также имеет место перемещение большого числа частиц. При этом исключается возможность нахождения траектории каждой из них в отдельности, и вопрос всегда ставится лишь об определении статистических средних. Подчеркнем и принципиальную разницу, наблюдаемую в обоих механизмах. Турбулентные моли, взаимодействуя с окружающей жидкостью, непрерывно деформируются, изменяя свою кинетическую энергию, как за счет внешних поступлений, так и за счет диссипации в тепло. В то же время кинетическая

энергия молекулярных ансамблей меняется только за счет внешних факторов, а диссипация не имеет места.

Изучение турбулентных течений жидкости несомненно сложнее, чем исследование ламинарных, имеющих хорошо разработанный теоретический аппарат и фундаментальные экспериментальные обоснования. В то же время турбулентный характер движения является наиболее распространенным как в природе, так и в технике. Это предопределяет интенсивность исследований, которые ведутся в направлении накопления эмпирических данных и поисков путей создания достаточно корректной физической теории турбулентности.

§ 1. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Вопрос о переходе ламинарного движения в турбулентное весьма сложен и к настоящему моменту в целом недостаточно ясен. Мы не будем останавливаться на нем детально, а лишь коснемся некоторых принципиальных моментов, концентрируя внимание, в основном, на физическом содержании процесса.

Критерием смены режимов течения может служить число Рейнольдса $Re = \frac{vL}{\nu}$. Оно, как известно, представляет собой отношение

характерных значений сил инерции и вязкости. Первые способствуют порождению контрастов и неоднородностей в потоке, а вторые, наоборот, их сглаживанию. Соотношение обоих эффектов и дает возможность, в большей мере качественно, судить о степени турбулизации течения.

Для различных потоков существует свое критическое значение числа рейнольдса Re , выше которого начинается процесс турбулизации. Можно условно выделить две основные причины смены режима течения: а) гидродинамическую неустойчивость, б) конечные возмущения.

В целом вопрос о гидродинамической неустойчивости сводится к рассмотрению поведения в потоке наложенных на него бесконечно малых возмущений. Если они со временем затухают — движение устойчиво. Может быть, однако, что амплитуда хотя бы одного из них возрастает неограниченно. При этом имеющийся вначале почти чисто периодический режим нарушается, возникают нерегулярные пульсации. Вслед за этим появляются турбулентные пятна, которые смещаются вниз по течению, сливаются с другими, пока турбулентный режим не захватывает всего потока. Именно этот процесс и носит название *потери гидродинамической устойчивости* *.

Отметим, что на предел устойчивости влияют самые разнообразные факторы — как-то градиент давления, центробежные си-

* Формально исследование потери устойчивости ведется методом малых колебаний, предполагающим линеаризацию рассматриваемых уравнений.

лы, расслоение плотности, условия теплопередачи в жидкости и теплообмен ее с границами, сжимаемость среды, а также шероховатость стенок.

Вторая из упомянутых причин возникновения турбулентности

связана с интенсивностью возмущений $J = \frac{\sqrt{\frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (\overline{v_i'})^2}}{\bar{v}}$, прони-

кающих в поток извне или возникающих в нем самом из-за наличия различных сопротивлений ($\bar{v}$ — средняя скорость потока, $(\overline{v_i'})^2$ — осредненные среднеквадратичные величины пульсаций, соответственно по осям x_i при $i=1, 2, 3$).

Ясно, что турбулизация потока при отсутствии конечных возмущений происходит при больших значениях Re. Поэтому последняя величина может служить той мерой, за пределами которой поток заведомо будет неустойчив *.

§ 2. МЕТОДЫ ОСРЕДНЕНИЯ

Поскольку все величины в турбулентном потоке испытывают нерегулярные хаотические изменения, количественное описание всех процессов возможно лишь при переходе к осредненным характеристикам. При этом целесообразно, как в свое время предложил еще О. Рейнольдс, представлять интересующие нас гидродинамические величины в виде $\chi = \bar{\chi} + \chi'$. Здесь χ , $\bar{\chi}$, χ' соответственно мгновенные, осредненные и пульсационные значения величины χ (χ — унифицированное обозначение v_i , p , ρ , T).

Однако здесь встает вопрос о смысле получаемых средних и, следовательно, о принципах самого осреднения.

Вообще говоря, поля всех гидродинамических элементов в турбулентном потоке являются случайными. Это означает, что в случае постановки ряда экспериментов при совершенно идентичных внешних условиях каждая реализация будет осуществляться с некоторой степенью вероятности. (Для сравнения вспомним, что в ламинарном потоке при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта результаты будут тождественны). Таким образом в турбулентном потоке средним будет являться среднее по множеству реализаций, образующих статистический ансамбль. Иными словами, под средним значением следует понимать предел, к которому стремится та или иная пульсирующая величина, если внешние условия, соответствующие каждому отдельному случаю, остаются неизменными. Однако на практике его определение

* Последнее еще не означает, что поток сразу турбулизуется, ибо неустойчивость может означать, что данное ламинарное течение существовать не может, но может перейти в другое уже устойчивое ламинарное течение. Но это всегда начало правильного периодического режима.

весьма затруднительно. Поэтому приходится прибегать к помощи эргодической теоремы. Она утверждает, что при определенных условиях возможна замена средних по множеству средними по времени или пространству. В частности, если процесс стационарен, то

$$\bar{\chi}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \chi(t+\tau) d\tau = \text{const} \quad \text{совпадает со средним по мно-}$$

жеству. В общем случае поля гидродинамических элементов не являются эргодическими, ибо в большинстве случаев зависят от времени. Поэтому указанная замена средних служит лишь приближением к реальной ситуации. При этом вместо $T \rightarrow \infty$ мы выбираем некоторый конечный интервал осреднения, исходя из следующих соображений. Во-первых, должно выполняться неравенство $T_2 \ll T$, где T_2 характерный период турбулентных пульсаций. Во-вторых, период колебаний осредненного поля T_1 должен значительно превосходить T ($T_1 \gg T$), т. е. в течение времени T течение можно считать квазистационарным.

При конечном периоде осреднения выражение для средних по времени величин будет иметь вид

$$\bar{\chi}(x_1, x_2, x_3, t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \chi(x_1, x_2, x_3, t+\tau) d\tau. \quad (17.1)$$

Понимая T в указанном выше смысле* и используя (17.1), легко убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\overline{\chi + \chi_1} = \bar{\chi} + \bar{\chi}_1;$$

$$\bar{C} = C, \text{ если } C = \text{const};$$

$$\overline{C\chi} = C\bar{\chi},$$

$$\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial x_i} = \bar{\frac{\partial \chi}{\partial x_i}},$$

$$\overline{\chi\chi_1} = \bar{\chi}\bar{\chi}_1,$$

$$\overline{\chi'} = \overline{\chi - \bar{\chi}} = \bar{\chi} - \bar{\bar{\chi}} = \bar{\chi} - \bar{\chi} = 0,$$

$$\overline{\chi\chi'} = \overline{\chi\chi - \chi\bar{\chi}} = 0.$$

(17.2)

Предпоследнее соотношение показывает, что средние значения мгновенных пульсаций равны нулю.

* Из условия квазистационарности движения по отношению ко времени T , в частности, вытекает $\bar{\bar{\chi}} = \bar{\chi}$.

§ 3. УРАВНЕНИЯ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Используя полученные в предыдущем параграфе соотношения (17.1), проведем процедуру осреднения по отношению к выведенным выше уравнениям ламинарного движения. Прежде всего, представим все гидродинамические величины в виде суммы средней и пульсационной составляющих, т. е.:

$$\left. \begin{aligned} v_j &= \bar{v}_j + v'_j, \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho', \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho', \\ T &= \bar{T} + T'. \end{aligned} \right\} \quad (17.3)$$

Рассмотрим вначале уравнение неразрывности, которое с учетом (17.3) можно записать

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \rho'}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{v}_j) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho' v'_j). \quad (17.4)$$

Осредняя (17.4) и пренебрегая пульсациями плотности ($\rho' = 0$, $\rho \equiv \bar{\rho}$), получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial \rho v_j^*}{\partial x_j}. \quad (17.5)$$

Уравнение (17.5) легко преобразовать к виду

$$\frac{d\rho}{dt} = - \rho \frac{\partial v_j}{\partial x_j}. \quad (17.6)$$

Таким образом, если пренебречь пульсациями плотности, то уравнение неразрывности после осреднения своего вида не меняет.

Аналогичным образом можно провести осреднение уравнения движения. Используя уравнение неразрывности, предварительно перепишем его в виде

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \Pi_{ij}}{\partial x_j} - \rho g \delta_{33}. \quad (17.7)$$

Подставляя (17.3) в последнее уравнение и проводя осреднение, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho}' v'_i}{\partial t} = & - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{v}_i \bar{v}_j + \bar{v}_j \bar{\rho}' v'_j + \bar{\rho} \bar{v}'_i v'_j + \bar{v}_i \bar{\rho}' v'_j + \\ & + \overline{\rho' v'_i v'_j}) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \bar{\Pi}_{ij}}{\partial x_j} - (\bar{\rho} + \rho') g \delta_{33}. \end{aligned} \quad (17.8)$$

* Здесь и далее в окончательных уравнениях знак осреднения над членами, не содержащими пульсационных величин, опущен.

Отметим, что поскольку $\Pi_{ij} = \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, то

$$\bar{\Pi}_{ij} + \bar{\Pi}'_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right) + \mu \left(\frac{\partial \bar{v}'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}'_j}{\partial x_i} \right) = \mu \left(\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} \right).$$

Таким образом, если пренебречь пульсациями коэффициента динамической вязкости, то пульсационная составляющая тензора вязких напряжений при осреднении уходит, т. е. $\frac{\partial \bar{\Pi}'_{ij}}{\partial x_j} = 0$.

Это также связано с линейным характером связи тензора вязких напряжений и тензора скоростей деформаций. При $\rho' = 0$, $\rho = \bar{\rho}$ уравнение (17.8) существенно упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial \rho \bar{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{v}_i \bar{v}_j}{\partial x_j} = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (-\bar{\Pi}_{ij} + \tau_{ij}) - \rho g \delta_{33}. \quad (17.9)$$

Используя уравнение неразрывности, уравнение (17.9) можно еще представить как

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial t} + \bar{v}_j \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (-\bar{\Pi}_{ij} + \tau_{ij}) - g \delta_{33}. \quad (17.9')$$

В (17.9), (17.9') введено обозначение $\tau_{ij} = -\overline{\rho v'_i v'_j}$. Последняя величина носит название *тензора турбулентных напряжений* или, иначе, *тензора напряжений Рейнольдса*. По внешнему виду записи можно сделать вывод, что его действие идентично влиянию вязких сил, что в полной мере соответствует и физическому содержанию процесса, ибо он отражает перенос количества движения путем турбулентного перемешивания, и возникает при осреднении в силу нелинейности членов, отражающих конвективный перенос. Существенно, что $\bar{\Pi}_{ij} \ll \tau_{ij}$, так как интенсивность турбулентного переноса почти всегда на несколько порядков выше молекулярного. Исключением является лишь весьма тонкий слой жидкости, непосредственно прилегающий к твердым границам.

Опуская малое, по сравнению с τ_{ij} , слагаемое $\bar{\Pi}_{ij}$, мы можем окончательно записать осредненные уравнения движения в виде;

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - g \delta_{33}. \quad (17.10)$$

Наконец, осредняя обычным порядком уравнение теплопроводности, мы приходим к соотношению

$$c_p \left(\frac{\partial \bar{\rho} \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \bar{v}_j \bar{T}}{\partial x_j} \right) = -c_p \frac{\partial \bar{\rho}' \bar{T}'}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{J}_{Tj} + c_p (\bar{T} \bar{\rho}' \bar{v}' + \bar{v}_j \bar{\rho}' \bar{T}' + \bar{\rho} \bar{v}_j' \bar{T}' + \bar{\rho}' \bar{v}_j' \bar{T}')] + \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{d\bar{p}'}{dt}.$$

Если пренебречь пульсациями плотности и давления, то получим соответствующее уравнение в виде

$$c_p \bar{\rho} \frac{d\bar{T}}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{J}_{Tj} + c_p \bar{\rho} \bar{v}_j' \bar{T}') + \frac{d\bar{p}}{dt}.$$

Член с молекулярной теплопроводностью ($\bar{J}_{Tj}$) может быть опущен, так как, также как и в случае переноса количества движения $\bar{\rho} c_p \bar{v}_j' \bar{T}' \gg \bar{J}_{Tj}$. Тогда уравнение тепла упрощается и принимает вид

$$c_p \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) - \frac{dp}{dt} = \frac{\partial P_i}{\partial x_i}. \quad (17.11)$$

Здесь $P_i = -\bar{\rho} c_p \bar{v}_i' \bar{T}'$ — турбулентный поток тепла в проекции на i -ю ось.

Итак мы видим, что осреднение уравнений гидротермодинамики повлекло появление новых неизвестных: шести в тензоре турбулентных напряжений (вместо девяти, ибо, как легко видеть, тензор симметричен) и трех в уравнении теплопроводности. Для замыкания системы уравнений приходится привлекать дополнительные гипотезы.

§ 4. ПРОБЛЕМА ЗАМЫКАНИЯ

Проблемы замыкания сводятся к отысканию новых соотношений, которые бы позволяли уравнять число уравнений и неизвестных. При этом привлекаются как теоретические соображения, так и экспериментальные данные. На этой основе создаются так называемые полуэмпирические теории, с помощью которых формулируются недостающие связи. Именно с такой ситуацией мы сталки-

* Поскольку, согласно закону Фурье, поток тепла через единичную площадку в единицу времени равен $\vec{J}_T = -\lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial n}$ (λ_T — коэффициент теплопроводности), то $\text{div } \vec{J}_T = -\frac{\partial}{\partial x_j} \lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \lambda_T \frac{\partial \bar{T}'}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}$, т. е. в силу линейного представления потока $\text{div } \vec{J}_T' = 0$.

ваемся в теории турбулентности. При этом система, состоящая из трех уравнений движения, уравнений неразрывности, притока тепла и состояния*, связывает девять неизвестных компонент турбулентных потоков количества движения и тепла, а также величины $v_1, v_2, v_3, p, \rho, T$. Вопрос ставится таким образом, чтобы τ_{ij}, P_i выразить через прочие неизвестные.

Наиболее естественно, по аналогии с молекулярными потоками, предположить наличие линейной связи между тензором турбулентных напряжений τ_{ij} и тензором осредненных скоростей деформаций v_{ij} . При этом в простейшем случае коэффициент пропорциональности будем считать скалярной величиной, хотя, разумеется, линейная связь тензора 2-го ранга осуществляется с помощью тензора 4-го ранга (см. приложение А). Тогда можем записать

$$\overline{v'_i v'_j} = -K \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + C \delta_{ij}, \quad (17.12)$$

где K — коэффициент турбулентности.

Заметим, что в данном случае аналогия с ламинарным потоком чисто внешняя. Это понятно, ибо в последнем случае в качестве коэффициента пропорциональности мы имеем μ — величину, отражающую физические свойства жидкости, ее вязкость, а введя величину K , мы просто выражаем неизвестные величины через новую неизвестную. Причем она существенно зависит от структуры турбулентного потока, масштабов течения и т. д., а в конечном итоге, является функцией координат.

Определим коэффициент C в написанном выше выражении. Для этого просуммируем элементы, стоящие на главных диагоналях обоих тензоров (17.12). Тогда получим

$$2b = -2K \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + 3C.$$

Откуда

$$C = \frac{2}{3} (b + K \operatorname{div} \vec{v}).$$

И, следовательно,

$$\overline{v'_i v'_j} = -K \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} (b + K \operatorname{div} \vec{v}) \delta_{ij}.$$

Здесь $b = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \overline{v'_i v'_i}$ — удельная кинетическая энергия турбулентных пульсаций.

* Если пренебречь, как и выше, пульсациями плотности, то вид уравнения $p = \rho RT$ при осреднении не меняется.

Обычно, в целях простоты, полагают

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{v'_i v'_j} = K\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad (17.13)$$

т. е. считают $C=0$.

Это еще более огрубляет схему, тем более, что и принципиально это не может быть верным, так как, например, в случае несжимаемой жидкости, суммируя в (17.13) элементы главной диагонали, слева вновь получим $2b$, а справа нуль; ибо $\text{div } v=0$.

Все вышесказанное в полной мере применимо и к членам $\overline{v'_i T'}$, так что можно записать

$$\overline{v'_i T'} = -K_\tau \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\alpha_\tau K \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad (17.14)$$

где

$$\alpha_\tau = \frac{K_\tau}{K}.$$

Во многих работах считают $\alpha_\tau=1$, т. е. $K_\tau=K$, хотя это справедливо далеко не всегда. Последнее объясняется тем, что при наличии градиента температуры механизмы переноса тепла и количества движения в турбулентных потоках не идентичны, ибо тепло не является пассивной субстанцией. Поэтому, если, например, в атмосфере температура с высотой падает, то архимедовы силы помогают перемешиванию, увеличивая его интенсивность, а при обратной ситуации, наоборот, затрудняют.

После всего сказанного можно турбулентные уравнения неразрывности, движения, тепла и состояния записать в виде:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[K \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] - g; \quad (17.15)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0; \quad (17.16)$$

$$\begin{aligned} c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = \\ = c_p \rho \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha_\tau K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right); \end{aligned} \quad (17.17)$$

$$p = \rho RT. \quad (17.18)$$

ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ. ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ПЛАСТИНЕ

§ 1. ПУТЬ СМЕШЕНИЯ

Обратимся к выяснению физического смысла коэффициента турбулентности. Для этого, прежде всего, введем одно из центральных понятий теории турбулентности — путь смешения. Под ним, по аналогии с длиной свободного пробега молекул, понимают путь, проходимый турбулентным молекул с момента зарождения до момента его полного исчезновения. При этом предполагается, что на всем пути индивидуальность моля сохраняется, и лишь в конце он полностью и мгновенно смешивается с окружающей средой. Разумеется, на самом деле молекула взаимодействует с остальной жидкостью, теряя массу и затрачивая часть своей энергии на преодоление вязких сил. Таким образом, аналогия с молекулярными процессами здесь чисто внешняя и подобная параллель оправдывается в основном лишь простотой представления.

Установим теперь, исходя из данной концепции, выражение для коэффициента турбулентности какой-либо субстанции a . Для этого выделим в жидкости на уровне z горизонтальную площадку единичной площади, и рассмотрим количество a , проносимое через нее в единицу времени. Соответствующий поток, естественно, равен $av_z = m_z a$, где m — масса. Осредняя эту величину, получим

$$\overline{av_z} = \overline{am_z} + \overline{a'm'_z}.$$

Следовательно, полный поток складывается из осредненного и пульсационного, вызванного турбулентностью.

Если $z + l_a$ уровень зарождения молей, то можно записать

$$a(z + l_a) = \overline{a}(z) + a'.$$

Разлагая левую часть последнего равенства в ряд и ограничиваясь первым членом, находим, что

$$a' = l_a \frac{da}{dz}. \quad (18.1)$$

Поэтому

$$\overline{a'm'_z} = -\overline{l_a m'_z} \frac{da}{dz}. \quad (18.2)$$

Знак минус в (18.2) появляется за счет того, что для молей, движущихся вниз, v'_z и, следовательно, $m'_z < 0$, а $l_a > 0$ и, наоборот, при перемещении вверх $l_a < 0$, $m'_z > 0$.

Множитель, стоящий перед градиентом осредненной характеристики, называется коэффициентом турбулентного обмена, а величина $K = \frac{\overline{l_a m_z'}}{\rho}$ есть коэффициент турбулентности. Значит,

$$\frac{\overline{a' m_z'}}{\rho} = -K_a \frac{da}{dz}. \quad (18.3)$$

Если речь идет о переносе количества движения в потоке несжимаемой жидкости, движущейся со скоростью v_x , то

$$K = \overline{l_x v_z'}$$

и

$$-\overline{v_x' v_z'} = K \frac{dv_x}{dz}^*.$$

Аналогично для потока тепла $K_T = \overline{l_T T'}$,

$$\overline{T' v_z'} = -K_T \frac{dT}{dz} = -\alpha_T K \frac{dT}{dz}.$$

Таким образом, мы видим, что коэффициент турбулентности по своему физическому смыслу есть интенсивность турбулентного обмена. Однако опять же вопрос о его количественном определении остается открытым, ибо без дополнительных предположений мы не можем найти длину пути смешения l .

Наиболее простой путь в этом направлении был предложен Л. Прандтлем, который впервые ввел понятие пути смешения. Он предположил, что для пограничного слоя справедливо условие пропорциональности $l \sim z$, где z — расстояние от стенки. Основанием для этого послужило то, что наличие твердой стенки, сквозь которую молекулы проникать не могут, является естественным ограничением и для величины l . Следовательно, в этом случае

$$l = \kappa z, \quad (18.4)$$

где κ — экспериментальная константа.

Более физически обоснованной является гипотеза Т. Кармана, в основу которой заложен факт зависимости интенсивности турбулентности, а следовательно, и пути смешения от характера распределения скорости в потоке. В этом случае ищется зависимость

$$l = \tilde{f} \left(\frac{dv_x}{dz}, \frac{d^2 v_x}{dz^2}, \dots \right).$$

Если ограничиться 1-й и 2-ой производными, то будем иметь $l = f \left(\frac{dv_x}{dz}, \frac{d^2 v_x}{dz^2} \right)$. Последнее означает, что

*Ясно, что эта формула и предшествующие ей рассуждения о пути смешения, могут быть легко обобщены и на случай трехмерного движения.

характер турбулентности определяется градиентом скорости и кривизной ее профиля, от которых зависит возможность и степень вихреобразований в потоке. Анализ размерностей приводит нас к простой формуле

$$l = \tilde{\kappa} \frac{\frac{dv_x}{dz}}{\frac{d^2 v_x}{dz^2}},$$

где $\tilde{\kappa}$ — эмпирическая константа.

Ее можно переписать несколько иначе:

$$l = \tilde{\kappa} \frac{\left(\frac{dv_x}{dz}\right)^2}{\frac{d}{dz} \left(\frac{dv_x}{dz}\right)^2}.$$

Если скорость потока не параллельна оси x , то последнее выражение легко обобщается и на этот случай, приобретая вид

$$l = \tilde{\kappa} \frac{\left(\frac{dv_x}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dz}\right)^2}{\frac{d}{dz} \left[\left(\frac{dv_x}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dz}\right)^2 \right]}. \quad (18.5)$$

Формулы (18.4) или (18.5) в принципе позволяют замкнуть задачу, ибо, с учетом (18.1), сможем для коэффициента турбулентности записать выражение:

$$K = \frac{\overline{lm'}}{\rho} = l^2 \left| \frac{dv_x}{dz} \right| \frac{da}{dz}. \quad (18.6)$$

Здесь принято $l_a = l$.

Однако обе рассмотренные схемы являются с физической точки зрения весьма грубыми и, кроме того, справедливы только для случая нейтральной стратификации. Расширить сферу их применения и уточнить можно с помощью уравнения баланса турбулентной энергии, которое в данном кратком очерке мы рассматривать не будем.

§ 2. ТУРБУЛЕНТНОЕ ТЕЧЕНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТИ ГЛАДКОЙ ПЛАСТИНЫ

Для иллюстрации применения идей теории пути смещения и выявления отличий между ламинарными и турбулентными течениями, обратимся к простейшему, но принципиально важному примеру. А именно, рассмотрим движение несжимаемой жидкости

вблизи поверхности плоской гладкой стенки бесконечной протяженности.

При этом будем предполагать отсутствие внешних сил и считаем, что движение происходит без ускорения. Последнее означает, что если ось x направить вдоль осредненной скорости v_x , то $v_y = 0$ и все производные по x от осредненных величин равны нулю $\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0\right)$. Поскольку речь будет идти о движении в области, находящейся вблизи стенки, то в задаче справедливы приближения пограничного слоя. Это означает, что изменение напряжений по y значительно превосходит изменение их по x . Поэтому логично оставить только производные от напряжений по y и не учитывать производных по x . В такой постановке уравнения ламинарного движения вырождаются и лишь из первого следует равенство

$$\mu \frac{d^2 v_x}{dy^2} = 0.$$

Интегрируя это соотношение, получим

$$v_x = Cy + C_1.$$

Таким образом, имеем линейный профиль скорости. Постоянные интегрирования легко определить, зная, что $v_x|_{y=0} = 0$, и полагая известной величину напряжений на стенке $\tau_0 = \mu \left. \frac{dv_x}{dy} \right|_{y=0}$.

Используя эти условия, будем иметь

$$v_x = \frac{\tau_0}{\mu} y. \quad (18.7)$$

В случае турбулентного движения вся система уравнений в нашем случае сводится к равенству

$$-\frac{\partial \overline{v'_x v'_y}}{\partial y} = 0.$$

Интегрирование этого равенства дает

$$-\overline{v'_x v'_y} = C_2.$$

При $y \rightarrow 0$ $v'_y \rightarrow 0$, а следовательно, $\overline{v'_x v'_y} \rightarrow 0$. Поэтому C_2 должно быть равно τ_0 , т. е. в самом тонком, непосредственно прилегающем к стенке слое, движение должно быть ламинарным (ламинарный подслой). При удалении от нее турбулентная вязкость начинает доминировать и влиянием молекулярного трения можно пренебречь. Поэтому

$$-\rho \overline{v'_x v'_y} = \tau_0 = \text{const.}$$

С учетом (18.6) последнее равенство может быть переписано в виде

$$-\overline{v_x'v_y'} = K \frac{dv_x}{dy} = l^2 \left(\frac{dv_x}{dy} \right)^2 = \frac{\tau_0}{\rho},$$

или, с использованием гипотезы Прандтля относительно пути смешения $l = \kappa y$, приходим к уравнению

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \frac{1}{y}.$$

После интегрирования получим

$$u = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \ln y + C_3. \quad (18.8)$$

Сравнивая (18.7) и (18.8), мы убеждаемся в том, что в турбулентном потоке имеет место совершенно другое распределение скоростей, чем в ламинарном*. При этом, как и следовало ожидать, профиль скорости при наличии турбулентности внизу изменяется значительно быстрее, что связано с большей интенсивностью обмена количеством движения.

В заключение заметим, что постоянную C_3 следует определять из условия сопряжения турбулентного слоя с ламинарным подслоем, ибо логарифмический профиль не может быть проэкстраполирован вплоть до самой стенки.

* Разумеется, этот вывод справедлив не только по отношению к данной задаче, но носит общий характер.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Объекты различной физической природы требуют при математическом описании различного числа компонент. Так скалярные величины типа температуры, плотности, давления могут быть полностью охарактеризованы только своими численными значениями. Другие являются векторами (перемещение, скорость, ускорение, сила, момент силы и т. д.). Для их определения надо указать не только численное значение величины, но и ее направление в пространстве. Однозначно заданы они могут быть совокупностью трех величин, например проекциями на оси какой-либо координатной системы. Примерами более сложных объектов являются тензор напряжений и тензор скоростей деформаций в жидкости, требующие для своего описания девяти компонент. Свойства анизотропных тел определяются совокупностью 81 величины и т. д.

Удобно с целью унификации назвать скалярные величины тензором нулевого ранга (3^0 — одна компонента), векторные — тензором первого ранга (3^1 — три компоненты), тензор второго ранга требует 3^2 величин, четвертого — 3^4 и т. д. Таким образом, приходим к понятию тензора n -го ранга, имеющего 3^n компонент, и будем с этих позиций рассматривать операции над конкретными физическими объектами.

Примером возникновения понятия тензоров может служить напряженное состояние в жидкости. Напряжение есть сила внутреннего взаимодействия частиц жидкости, отнесенная к единице площади. Ее векторное описание в принципе невозможно, ибо помимо величины и направления в пространстве должна быть также известна ориентация площадки, к которой она приложена. Чтобы избавиться от последнего ограничения, напряжение в точке следует выразить через три величины, приложенные к площадкам строго фиксированным в пространстве. В качестве последних удобно выбрать координатные поверхности или плоскости в случае декартовых координат. Тогда сила, приложенная к каждой из этих поверхностей, является уже вектором и может быть задана тремя компонентами, а всего их, естественно, будет девять (см. гл. VII).

Напряжение, как мы видели, записывается в виде матрицы (P_{ij}):

$$\vec{p} = \vec{n} P = \vec{n} \begin{Bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Отметим, что для тензоров вообще удобна матричная запись. При этом скалярная величина запишется просто (a). Если $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — вектор, то будем иметь матрицу-столбец

$$\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}.$$

Для тензора второго ранга (a_{ij}) ($i, j=1, 2, 3$) матрица имеет вид

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.2})$$

Суммой (разностью) тензоров является тензор, компоненты которого представляют собой сумму (разность) компонент слагаемых. Для тензора второго ранга, например, имеем

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Ясно, что складывать (вычитать) можно лишь тензор одного ранга и в результате получаем тензор того же ранга. По сути дела речь идет о сложении или вычитании двух аналогичного вида матриц.

Умножение тензора на скалярную величину α сводится к умножению на нее всех его компонент, т. е. $\alpha (a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$.

Внешним произведением тензоров называется новый тензор, ранг которого равен сумме рангов сомножителей. Его компоненты представляют собой всевозможные комбинации произведений компонент сомножителей. Пример произведения тензоров первого ранга дает диада $\vec{v} \vec{v}$ ($\vec{v}$ — скорость)

$$\vec{v} \vec{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_1 v_1 & v_1 v_2 & v_1 v_3 \\ v_2 v_1 & v_2 v_2 & v_2 v_3 \\ v_3 v_1 & v_3 v_2 & v_3 v_3 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

В итоге получаем тензор второго ранга. Аналогично при умножении тензоров второго ранга a_{ij} , b_{km} получаем тензор четвертого ранга $a_{ijkm} = a_{ij} b_{km}$.

Существует тензор, называемый единичным, при умножении на который каждый тензор 2-го ранга переходит сам в себя. Он обозначается U , а его компоненты δ_{ij} , причем $\delta_{ij}=1$, если $i=j$ и $\delta_{ij}=0$, если $i \neq j$.

Таким образом,

$$U = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

Легко удостовериться, что

$$aU \rightarrow a_{ij} \delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix}.$$

Тензор может быть симметричным или антисимметричным по паре индексов, если при их взаимной перестановке его компоненты или не меняются (симметричный) или изменяют свой знак на противоположный (антисимметричный).

Поэтому, если S_{ij} симметричный тензор, то

$$S_{ij} = S_{ji}.$$

Легко убедиться, что это эквивалентно равенству компонент, расположенных симметрично относительно главной диагонали, так что справедливо следующее:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Следовательно, у симметричного тензора имеется лишь шесть независимых компонент.

Для антисимметричного тензора A_{ij} должно выполняться условие $A_{ij} = -A_{ji}$.

Ясно, что все диагональные элементы антисимметричного тензора равны нулю, при $i=j$ имеем $A_{ii} = -A_{ii}$, т. е. величина равна себе самой с обратным знаком, что означает $A_{ii}=0$. Матрица для антисимметричного тензора имеет вид

$$\begin{Bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} - A_{23} & 0 & 0 \end{Bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

В этом случае имеется три независимых компоненты.

Любой тензор второго ранга a_{ij} может быть разложен на сумму симметричного и антисимметричного тензоров, т. е.

$$c_{ij} = \frac{1}{2} (c_{ij} + c_{ji}) + \frac{1}{2} (c_{ij} - c_{ji}). \quad (\text{A.7})$$

Обозначая $S_{ij} = \frac{1}{2} (c_{ij} + c_{ji})$ и $A_{ij} = \frac{1}{2} (c_{ij} - c_{ji})$, видим, что $S_{ij} = S_{ji}$ и $A_{ij} = -A_{ji}$.

Все рассмотренные операции над тензорами отражают конкретные свойства величин, с которыми приходится сталкиваться в различных областях физики и, в частности, гидромеханике.



ПРИЛОЖЕНИЕ Б

ЗАПИСЬ УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ КООРДИНАТАХ

§ 1. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

При аналитическом описании физических явлений, как правило, используется координатный метод. Выбор системы координат носит, в известной мере, субъективный характер. Поэтому естественно поставить вопрос, во-первых о математической формулировке какой-либо физической задачи, выраженной в самой общей инвариантной форме, независимой от системы координат; и, во-вторых, о переходе от обобщенной записи к конкретной с использованием той координатной сетки, которая наиболее целесообразна при решении поставленного вопроса.

Ниже мы приведем основные сведения, касающиеся методов записи уравнений в инвариантной форме и способов их преобразования при переходе от одной координатной системы к другой. При этом основное внимание будет уделяться наиболее употребительным в практике ортогональным системам координат.

Наиболее часто используются декартовы косоугольные или прямоугольные координаты $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$. Однако, наряду с ними, широко применяются криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 *. Они однозначно связаны с декартовыми, т. е.

$$q_1 = q_1(x_1, x_2, x_3); \quad q_2 = q_2(x_1, x_2, x_3); \quad q_3 = q_3(x_1, x_2, x_3)$$

и обратно

$$x_1 = x_1(q_1, q_2, q_3); \quad x_2 = x_2(q_1, q_2, q_3); \quad x_3 = x_3(q_1, q_2, q_3).$$

Естественно, это предполагает: что якобиан $\det \left\| \frac{\partial q_i}{\partial x_k} \right\|$ отличен от нуля и от бесконечности.

* Переход к криволинейным координатам производится с целью упрощения рассматриваемой задачи, ибо за счет их удачного выбора можно, например, упростить уравнения или уменьшить число аргументов. Так при наличии осевой симметрии целесообразно ввести цилиндрические координаты. Направляя ось z по оси симметрии, получаем двумерную задачу, так как рассматриваемое явление не зависит от угла поворота.

Условие $q_i = \text{const}$ определяет координатную поверхность. Ясно, что координатные поверхности, соответствующие одной и той же координате, не пересекаются между собой. Наоборот поверхности, отвечающие $q_i = \text{const}$ и $q_j = \text{const}$, пересекаясь образуют координатную линию $q_k = \text{const}$. Каждая точка пространства фиксируется как результат пересечения трех координатных поверхностей или двух координатных линий. В качестве примера укажем, что в цилиндрической системе координат (R, φ, z) координатными поверхностями являются:

$R = \text{const}$ — круговой цилиндр,

$\varphi = \text{const}$ — полуплоскость,

$z = \text{const}$ — плоскость перпендикулярная оси z , а координатные линии:

$R = \text{const}, \varphi = \text{const}$ — прямая,

$\varphi = \text{const}, z = \text{const}$ — прямая,

$R = \text{const}, z = \text{const}$ — окружность.

Радиус-вектор любой точки пространства в декартовой прямоугольной системе координат может быть представлен как

$$\vec{r} = x_1 \vec{i}_1 + x_2 \vec{i}_2 + x_3 \vec{i}_3 \equiv x_i \vec{i}_i, \quad (\text{Б.1})$$

где $\vec{i}$ — орты.

Расстояние между двумя бесконечно близкими точками соответственно запишется в виде

$$d\vec{r} = dx_i \cdot \vec{i}_i. \quad (\text{Б.2})$$

Перейдя к ортогональной криволинейной системе координат q_1, q_2, q_3 , мы можем рассматривать $d\vec{r}$ как диагональ элементарного криволинейного параллелепипеда, образованного координатными поверхностями.

Если ds_j ($j=1, 2, 3$) есть длины ребер (рис. Б.1), то

$$d\vec{r} = ds_1 \vec{e}_1 + ds_2 \vec{e}_2 + ds_3 \vec{e}_3 \equiv ds_j \cdot \vec{e}_j, \quad (\text{Б.3})$$

где $\vec{e}_j$ — орты рассматриваемой системы координат.

Величины ds_j можно записать через координаты dq_j , введя коэффициенты пропорциональности H_j , называемые параметрами Ламе. Тогда

$$ds_j = H_j \cdot dq_j. \quad (\text{Б.4})$$

Теперь вместо (Б.3) будем иметь выражение

$$d\vec{r} = H_j dq_j \cdot \vec{e}_j. \quad (\text{Б.5})$$

Дифференцируя (Б.5) по каждой из координат, получим

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = H_j \cdot \vec{e}_j.$$

Возведем в квадрат обе части последнего равенства. Это равносильно скалярному умножению левой и правой частей уравнения на себя, т. е.

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right) \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right) = H_j^2 \cdot (\vec{e}_j \cdot \vec{e}_j).$$

Или, поскольку $\vec{e}_j$ — орты, то $(\vec{e}_j \cdot \vec{e}_j) = |\vec{e}_j|^2 = 1$.

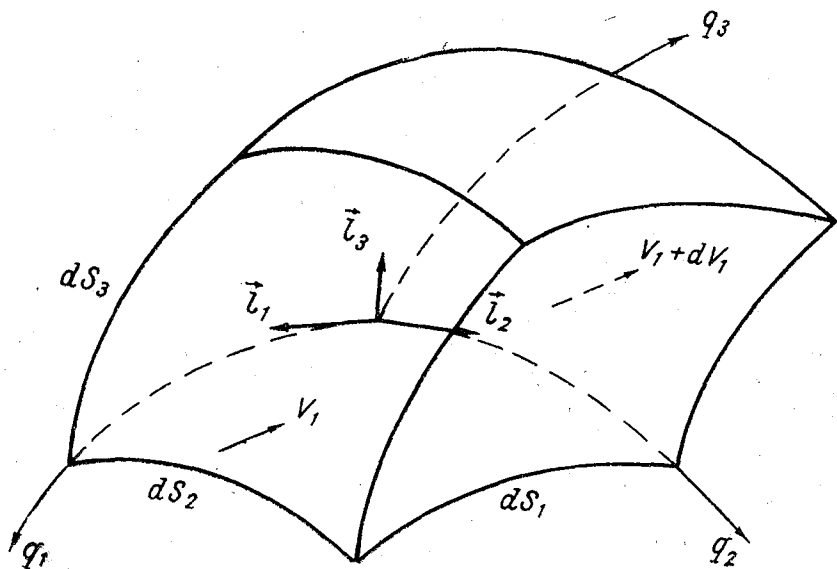


Рис. Б.1

Поэтому

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right) = H_j^2. \quad (\text{Б.6})$$

В свою очередь, продифференцировав (Б.1), приходим к соотношению

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \vec{l}_i.$$

Откуда

$$\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j} \right) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2. \quad (\text{Б.7})$$

Подставляя (Б.7) в (Б.6), находим

$$H_j^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)^2,$$

или

$$H_j = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial q_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial q_j} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial q_j} \right)^2}. \quad (\text{Б.8})$$

Элемент поверхности $d\sigma_i$ с учетом (Б.4) можно записать в виде

$$d\sigma_i = ds_j ds_k = H_j \cdot H_k dq_j dq_k \quad (\text{Б.9})$$

где i, j, k образуют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3.

Элемент объема $d\tau$:

$$d\tau = ds_1 \cdot ds_2 \cdot ds_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (\text{Б.10})$$

§ 2. ЗАПИСЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Рассмотрим теперь некоторые дифференциальные операторы в ортогональных криволинейных координатах.

1. Градиент скалярной величины. Согласно определению градиента скалярной величины φ его проекции на координатные линии

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_{s_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial s_i} = \frac{1}{H_i} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}. \quad (\text{Б.11})$$

2. Дивергенция потока. По своему физическому смыслу дивергенция — это разность потоков свойства a , переносимого жидкостью, втекающих в единичный объем и вытекающих из него за единицу времени. Рассмотрим элементарный объем $d\tau$ (рис. Б.1) Через площадку $d\sigma_1 = ds_2 ds_3$ втекает $-av_1 ds_2 ds_3$, а вытекает $av_1 ds_2 ds_3 + \frac{\partial(av_1 ds_2 ds_3)}{\partial q_1} dq_1$. (Знак минус в первом потоке появляется за счет того, что он направлен против внешней нормали). Их сумма $\frac{\partial(av_1 ds_2 ds_3)}{\partial q_1}$ или, с учетом (Б.4), $\frac{\partial(av_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} \times dq_1 dq_2 dq_3$. Аналогично, для площадок $ds_1 ds_3$ и $ds_1 ds_2$, соответственно: $\frac{\partial(av_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3$ и $\frac{\partial(av_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3$. Общая

сумма, отнесенная к объему (Б.10), дает нам дивергенцию

$$\operatorname{div} \vec{av} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (av_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (av_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial (av_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right]. \quad (\text{Б.12})$$

3. Оператор Лапласа скалярной функции φ . На основании формулы векторного анализа $\Delta \varphi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$, учитывая (Б.11) и (Б.12) можно записать, что

$$\Delta \varphi = \operatorname{div} \left[\frac{1}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} + \frac{1}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right] = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial \varphi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_1 H_3}{H_2} \frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial \varphi}{\partial q_3} \right) \right]. \quad (\text{Б.13})$$

Здесь роль av_i играют компоненты градиента $\frac{1}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}$.

4. Вихрь (ротор) скорости ($\vec{\Omega} \equiv \operatorname{rot} \vec{v}$). На основании формулы Стокса $\oint_{\vec{s}} v_s ds = \iint_{\vec{\sigma}} \operatorname{rot}_n \vec{v} d\sigma$, используя теорему о среднем, можно записать, что $\vec{\Omega}_n \cdot \vec{\sigma} = \oint_{\vec{s}} v_s ds$. Для элементарной координатной поверхности (рис. Б. 2) $d\sigma_3$ последнее соотношение

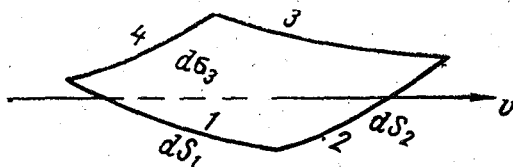


Рис. Б.2

можно переписать в виде

$$\Omega_3 d\sigma_3 = \sum_{m=1}^4 v_m ds_m.$$

Знак осреднения опущен, ибо в пределе мы имеем точное равенство.

При указанном на рисунке направлении обхода и скорости это равенство можно развернуть и представить в виде

$$\Omega_3 d\sigma_3 = v_{s_1} ds_1 - v_{s_2} ds_2 + \left[v_{s_2} ds_2 + \frac{\partial (v_{s_2} ds_2)}{\partial q_1} dq_1 \right] - \\ - \left[v_{s_1} ds_1 + \frac{\partial (v_{s_1} ds_1)}{\partial q_2} dq_2 \right] = \frac{\partial (v_2 ds_2)}{\partial q_1} dq_1 - \frac{\partial (v_1 ds_1)}{\partial q_2} dq_2.$$

Имея в виду, что $ds_i = H_i dq_i$ и $d\sigma_i = H_j H_k dq_j dq_k$, получаем

$$\Omega_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial (v_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (v_1 H_1)}{\partial q_2} \right].$$

Аналогично могут быть получены Ω_1 и Ω_2 , так что, обобщая, можно записать

$$\Omega_i = \frac{1}{H_j H_k} \left[\frac{\partial (v_k H_k)}{\partial q_j} - \frac{\partial (v_j H_j)}{\partial q_k} \right], \quad (\text{Б.14})$$

где i, j, k образуют циклическую перестановку чисел 1, 2, 3.

5. Оператор Лапласа для вектора скорости. Для отыскания его выражения следует воспользоваться известной формулой векторного анализа $\vec{\Delta} \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \text{rot rot } \vec{v}$. Выведенных выше соотношений вполне достаточно для того, чтобы найти проекции $\vec{\Delta} \vec{a}$ на оси координат. Опуская элементарные, но весьма длинные выкладки сразу запишем

$$\begin{aligned} \Delta v_i = & \frac{1}{H_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 v_m}{H_m} \right) \right] - \\ & - \frac{H_i}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\frac{H_k}{H_i H_j} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} (v_j H_j) - \frac{\partial}{\partial q_j} (v_i H_i) \right) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\frac{H_j}{H_i H_k} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} (v_i H_i) - \frac{\partial}{\partial q_i} (v_k H_k) \right) \right] \right\}. \quad (\text{Б.15}) \end{aligned}$$

6. Конвективная производная скорости. В векторном анализе выводится формула

$$(\vec{v} \cdot \vec{\Delta}) \vec{v} = \text{grad } \frac{v^2}{2} + (\vec{\Omega} \times \vec{v}), \quad (\text{a})$$

или в координатной форме

$$v_\alpha \frac{\partial v_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial}{\partial s_i} \left(\frac{v^2}{2} \right) + (\Omega_j v_k - \Omega_k v_j). \quad (\text{б})$$

Поскольку скалярное произведение $(\vec{v} \cdot \vec{v}) = v^2$ должно быть неизменно в любой системе координат, то, например, при $i=1$ можно записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1} \left(\frac{v^2}{2} \right) &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{H_1} \left(v_1 \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + v_3 \frac{\partial v_3}{\partial q_1} \right). \quad (\text{в}) \end{aligned}$$

Соответственно при $i=1$ два последних слагаемых в соотношении (б) будут $\Omega_2 v_3 - \Omega_3 v_2$.

Раскрывая Ω_2 и Ω_3 на основании (Б. 14), получим

$$\begin{aligned} \Omega_2 v_3 - \Omega_3 v_2 = & \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial v_1}{\partial q_3} - \frac{v_3}{H_1} \frac{\partial v_3}{\partial q_1} + \frac{v_1 v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \\ & - \frac{v_3^2}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} - \frac{v_2}{H_1} \frac{\partial v_2}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} - \frac{v_2^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} + \frac{v_1 v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2}. \end{aligned}$$

Складывая последнее выражение с (в), будем иметь

$$\begin{aligned} v_a \frac{\partial v_1}{\partial q_a} = & \frac{v_1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_2} \frac{\partial v_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_3} \frac{\partial v_1}{\partial q_3} + \frac{v_1 v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \\ & + \frac{v_1 v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{v_2^2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{v_3^2}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1}. \end{aligned}$$

Аналогично могут быть получены формулы для $i=2, 3$. В общем виде выражение для конвективной производной можно представить как

$$\begin{aligned} v_a \frac{\partial v_i}{\partial q_a} = & \sum_{k=1}^3 \frac{v_k}{H_k} \frac{\partial v_i}{\partial q_k} + \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \frac{v_k v_i}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} - \\ & - \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \frac{v_k^2}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial q_i}. \end{aligned} \quad (\text{Б.16})$$

7. Конвективная производная для скалярной функции φ . Как известно она может быть записана в виде скалярного произведения

$$(\vec{v} \cdot \text{grad } \varphi) = \sum_{i=1}^3 v_i \frac{\partial \varphi}{\partial s_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{v_i}{H_i} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i}. \quad (\text{Б.17})$$

§ 3. УРАВНЕНИЯ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Теперь мы можем приступить к выводу сформулированных выше законов сохранения в любых ортогональных координатах.

1. Уравнения неразрывности. Полагая в (Б. 12) $a \equiv \rho$, мы можем сразу записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (\rho v_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (\rho v_2 H_1 H_3)}{\partial q_2} + \right. \\ \left. + \frac{\partial (\rho v_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right] = 0. \end{aligned} \quad (\text{Б.18})$$

Или с учетом (Б. 17)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{1}{H_k} \left(v_k \cdot \frac{\partial \rho}{\partial q_k} \right) + \frac{\rho}{H_1 H_2 H_3} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 v_k}{H_k} \right) = 0. \quad (\text{Б.18'})$$

2. Уравнения движения. Учитывая формулы (Б. 11), (Б. 15), (Б. 16), мы вместо (8.7) должны записать уравнение вида

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{v_k}{H_k} \frac{\partial v_i}{\partial q_k} + \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \frac{v_k v_i}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} - \frac{1}{H_i} \sum_{k=1}^3 \frac{v_k^2}{H_k} \frac{\partial H_k}{\partial q_i} \right) = \\ = - \frac{1}{H_i} \frac{\partial p}{\partial q_i} + \frac{4}{3} \mu \frac{1}{H_i} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{m=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_m} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 v_m}{H_m} \right) \right] - \\ - \mu \frac{H_i}{H_1 H_2 H_3} \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\frac{H_2}{H_i H_j} \left(\frac{\partial}{\partial q_i} (v_j H_j) - \frac{\partial}{\partial q_j} (v_i H_i) \right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\frac{H_j}{H_i H_k} \left(\frac{\partial}{\partial q_k} (v_i H_i) - \frac{\partial}{\partial q_i} (v_k H_k) \right) \right] \right\} + \rho F_{ig}. \quad (\text{Б.19}) \end{aligned}$$



3. Уравнение теплопроводности. Оно может быть получено на основе формул (Б. 13), (Б. 17), где $\varphi \equiv T$. Формулу для диссипативной функции дадим без предварительного вывода, который в принципе прост, но слишком громоздок. Тогда вместо (9.11) получим

$$\begin{aligned} c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{v_i}{H_i} \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{v_i}{H_i} \frac{\partial p}{\partial q_i} \right) = \\ = \frac{\lambda_T}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i^2} \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{1}{H_1^2 H_2^2 H_3^2} \times \\ \times \left[\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 v_i}{H_i} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[\frac{1}{H_k} \frac{\partial v_i}{\partial q_k} + \frac{1}{H_i} \frac{\partial v_k}{\partial q_i} - \right. \\ \left. - \frac{1}{H_i H_k} \left(v_i \frac{\partial H_i}{\partial q_k} + v_k \frac{\partial H_k}{\partial q_i} \right) + \delta_{ik} \cdot 2 \sum_{\lambda=1}^3 \frac{v_\lambda}{H_\lambda H_i} \cdot \frac{\partial H_i}{\partial q_\lambda} \right]^2. \quad (\text{Б.20}) \end{aligned}$$

Уравнения для случая общих неортогональных систем координат могут быть представлены в следующем виде:
неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \left(v^k \frac{\partial \rho}{\partial q^k} \right) + \frac{\rho}{\sqrt{G}} \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^k} (v^k \sqrt{G}) = 0;$$

количества движения

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \nabla_k v^i \right) = - g^{ik} \frac{\partial p}{\partial q^k} + \frac{1}{3} \mu g^{ik} \frac{\partial}{\partial q^k} \left[\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G} v^j}{\partial q^j} \right] + \\ + \mu g^{jk} \nabla_j \nabla_k v^i + \rho F_g^i - \frac{2\rho}{\sqrt{G}} (\omega_j v_k - \omega_k v_j); \end{aligned}$$

теплопроводности

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v^i \frac{\partial T}{\partial q^i} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 v^i \frac{\partial p}{\partial q^i} \right) =$$

$$= \frac{\lambda_T}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^i} \left[\sqrt{G} \sum_{l=1}^3 g^{il} \frac{\partial T}{\partial q^l} \right] + \frac{1}{2} \mu \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 (\nabla_i v^k + \nabla_k v^i) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 g^{im} g^{kn} (\nabla_n v_m + \nabla_m v_n) - \frac{2}{3} \mu \left[\frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q^i} (v^i \sqrt{G}) \right]^2.$$

Все они составлены для случая контравариантных компонент. Здесь G — фундаментальный определитель метрического тензора $\|g_{ik}\|$; g^{ik} — контравариантные компоненты метрического тензора; $\nabla_i v_k$ — ковариантная производная контравариантного вектора. Остальные обозначения сохранены.

§ 4. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ

Теперь обратимся к наиболее употребительным цилиндрическим и сферическим координатам и запишем их с помощью уравнений (Б. 18'), (Б. 19) и (Б. 20) *.

1. Цилиндрические координаты. $q_1=r$, $q_2=\varphi$, $q_3=z$; $v_1=v_r$, $v_2=v_\varphi$, $v_3=v_z$ (рис. Б. 3).

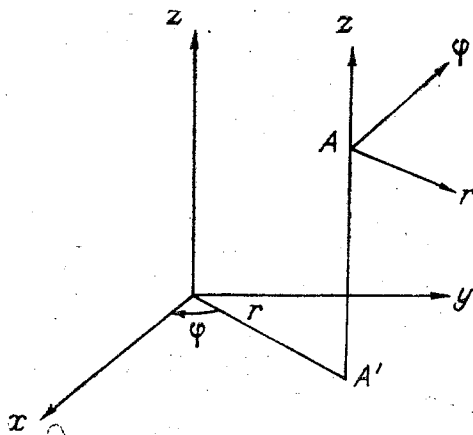


Рис. Б.3

При этом декартовы координаты связаны с цилиндрическими формулами: $x_1=r \cos \varphi$, $x_2=r \sin \varphi$, $x_3=z$ ($x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$).

По формулам (Б. 8) легко найти, что $H_1=1$, $H_2=r$, $H_3=1$. Подставляя эти значения H_i в (Б. 18), (Б. 19), (Б. 20) соответственно будем иметь:

* При этом мы не будем расписывать вязкие члены, ибо в принципе процедура ясна, а сама запись занимает слишком много места.

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} \right) = 0; \quad (\text{Б.21})$$

уравнения динамики в проекции на оси координат

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\varphi^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r, \quad (\text{Б.22})$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + F_\varphi, \quad (\text{Б.22}')$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z; \quad (\text{Б.22}'')$$

уравнение теплопроводности

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \lambda_T \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right). \quad (\text{Б.23})$$

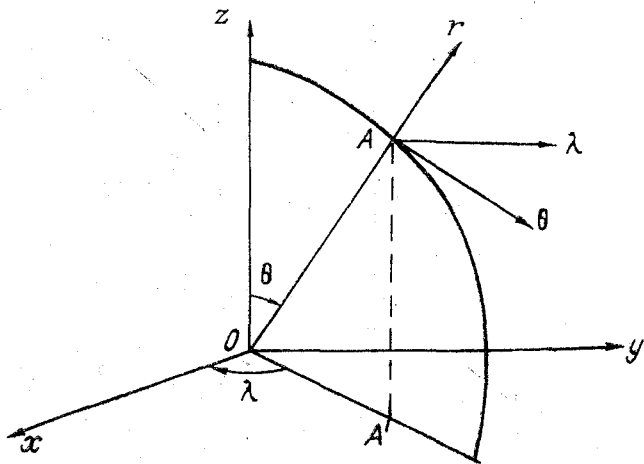


Рис. Б.4

2. Сферические координаты. Рассмотрим сферическую систему координат на земле, направив ось r по радиусу Земли, θ — угол дополнения к широте, λ — долгота (рис. Б.4). В этом случае $q_1 = r$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \lambda$, $v_1 = v_r$, $v_2 = v_\theta$, $v_3 = v_\lambda$. При данном выборе координат $\omega_\lambda = 0$, ибо угловая скорость вращения Земли перпендикулярна широтным кругам.

Из рисунка ясно, что $x=r \sin \theta \cos \lambda$, $y=r \sin \theta \sin \lambda$, $z=r \cos \theta$.

По формуле (Б.8) находим, что $H_1=1$, $H_2=r$, $H_3=r \sin \theta$. Тогда уравнения (Б.18'), (Б.19) и (Б.20) соответственно запишутся в виде:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_r \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{2 v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) = 0; \quad (\text{Б.24})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} - \frac{v_\theta^2 + v_\lambda^2}{r} = \\ = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + F_r, \end{aligned} \quad (\text{Б.25})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \frac{v_r v_\theta}{r} - \\ - \frac{v_\lambda^2 \operatorname{ctg} \theta}{r} = - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + F_\theta, \end{aligned} \quad (\text{Б.25'})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_r v_\lambda}{r} + \frac{v_\theta v_\lambda \operatorname{ctg} \theta}{r} = \\ = - \frac{1}{\rho r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + F_\lambda - 2\omega (v_\theta \cos \theta + v_r \sin \theta); \end{aligned} \quad (\text{Б.25''})$$

$$\begin{aligned} c_p \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right) - \\ - \left(\frac{\partial p}{\partial t} + v_r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right) = \lambda_r \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.26})$$

§ 5. ТУРБУЛЕНТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

К ранее выведенным уравнениям (Б.19) и (Б.20) нам необходимо подключить члены отражающие турбулентные потоки количества движения и тепла *. Поэтому прежде всего остановимся на выводе выражений для тензора скоростей деформаций, где скорости понимаются как осредненные. Для этого рассмотрим инвариант δs^2 (δs — элемент дуги в пространстве).

* Последние члены, отражающие эффекты молекулярной вязкости, мы опускаем в виду их малости в сравнении с эффектом турбулентного переноса.

В любых ортогональных координатах

$$\delta s^2 = \sum_{i=1}^3 H_i^2 \delta q_i^2.$$

Продифференцировав последнее соотношение по времени, получим

$$\delta s \frac{d \delta s}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left[H_i \frac{d H_i}{dt} \delta q_i^2 + H_i^2 \delta q_i \frac{d \delta q_i}{dt} \right].$$

Поскольку $v_i = \frac{ds_i}{dt} = H_i \frac{dq_i}{dt}$, то справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{d H_i}{dt} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial H_i}{\partial q_k} dq_k = \sum_{k=1}^3 \frac{v_k}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k}, \\ \frac{d \delta q_i}{dt} &= \delta \left(\frac{dq_i}{dt} \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{v_i}{H_i} \right) \delta q_k. \end{aligned}$$

Учитывая последние выражения, будем иметь

$$\delta s \frac{d \delta s}{dt} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[\frac{H_i v_k}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \delta q_i^2 + H_i^2 \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{v_i}{H_i} \right) \delta q_k \delta q_i \right].$$

Или, ввиду того что $\delta s_i = H_i \delta q_i$, получим

$$\delta s \frac{d \delta s}{dt} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[\frac{v_k}{H_i H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \delta s_i^2 + \frac{H_i}{H_k} \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{v_i}{H_i} \right) \delta s_k \cdot \delta s_i \right]. \quad (\text{Б.27})$$

В прямоугольных декартовых координатах $H_i = 1$, поэтому $\delta s_i = \delta x_i$, и, как легко видеть,

$$\begin{aligned} \delta s \frac{d \delta s}{dt} &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta x_1^2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \delta x_2^2 + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \delta x_3^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \delta x_1 \delta x_2 + \\ &+ \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \delta x_1 \delta x_3 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \delta x_2 \delta x_3. \end{aligned}$$

Сравнивая последнее выражение с (2.13), мы убеждаемся, что множителями при элементарных площадках $\delta x_i \cdot \delta x_j$ являются составляющие тензора скоростей деформаций. Естественно, что это же имеет место и в любых других системах координат, т. е. можно записать

$$\delta s \frac{d \delta s}{dt} = \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 S_{ik} \delta s_i \delta s_k. \quad (\text{Б.28})$$

Из (Б. 28) и (Б. 27), опуская элементарные промежуточные выкладки, находим

$$S_{11} = \sum_{k=1}^3 \frac{v_k}{H_1 H_k} \frac{\partial H_1}{\partial q_k} + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{v_1}{H_1} \right) = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v_1}{\partial q_1} + \frac{v_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{v_3}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3}; \quad (\text{Б.29})$$

$$S_{23} = \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{v_2}{H_2} \right) + \frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{v_3}{H_3} \right) = \frac{1}{H_3} \frac{\partial v_2}{\partial q_3} + \frac{1}{H_2} \frac{\partial v_3}{\partial q_2} - \frac{v_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \frac{v_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2}. \quad (\text{Б.30})$$

Все прочие выражения получаются из предыдущих циклической перестановкой чисел 1, 2, 3. Для случая цилиндрических координат из (Б. 29) и (Б. 30) следуют следующие выражения для составляющих тензора турбулентных напряжений (17.13):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{rr} &= 2K\rho \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\ \tau_{\varphi\varphi} &= 2K\rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), \\ \tau_{zz} &= 2K\rho \frac{\partial v_z}{\partial z}, \\ \tau_{r\varphi} &= K\rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right), \\ \tau_{rz} &= K\rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \\ \tau_{\varphi z} &= K\rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right). \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б.31})$$

Для сферических координат:

$$q_1 \equiv r, \quad q_2 \equiv \theta, \quad q_3 \equiv \lambda, \quad H_1 = 1, \quad H_2 = r, \quad H_3 = r \cdot \sin \theta,$$

$$v_1 \equiv v_r, \quad v_2 \equiv v_\theta, \quad v_3 \equiv v_\lambda$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tau_{rr} &= 2K\rho \frac{\partial v_r}{\partial r}, \\
 \tau_{\theta\theta} &= 2K\rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right), \\
 \tau_{\lambda\lambda} &= 2 \frac{K\rho}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + v_r + v_\theta \operatorname{ctg} \theta \right), \\
 \tau_{r\theta} &= K\rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} \right), \\
 \tau_{r\lambda} &= K\rho \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_\lambda}{\partial r} - \frac{v_\lambda}{r} \right), \\
 \tau_{\theta\lambda} &= \frac{K\rho}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} - v_\lambda \operatorname{ctg} \theta \right).
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{Б.32})$$

Дивергенция тензора турбулентных напряжений может быть записана как *

$$\begin{aligned}
 (\nabla_i \tau_{ik}) &= \frac{1}{H_1 H_2 H_3 H_k} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3 H_k}{H_i} \tau_{ik} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{H_k} \sum_{j=1}^3 \frac{\tau_{jj}}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q_k}.
 \end{aligned} \quad (\text{Б.33})$$

Таким образом, правая часть уравнения (Б. 19) изменится за счет того, что вместо членов с молекулярным трением, входящих в уравнения с множителем μ , мы должны писать соотношения (Б. 33). Соответственно дивергенция тензора в цилиндрических координатах имеет вид

$$(\nabla_i \tau_k) = \frac{1}{r H_k} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{r H_k}{H_i} \tau_{ik} \right) - \frac{1}{H_k} \sum_{j=1}^3 \frac{\tau_{jj}}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q_k}; \quad (\text{Б.34})$$

в сферических —

$$\begin{aligned}
 (\nabla_i \tau_k) &= \frac{1}{r^2 H_k \sin \theta} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{r^2 H_k \sin \theta}{H_i} \tau_{ik} \right) - \\
 &\quad - \frac{1}{H_k} \sum_{j=1}^3 \frac{\tau_{jj}}{H_j} \frac{\partial H_j}{\partial q_k}.
 \end{aligned} \quad (\text{Б.35})$$

Добавляя к правой части (Б. 19), (Б. 22), (Б. 25) турбулентные члены соответственно (Б.33), (Б. 34), (Б. 35) и опуская молекулярные, мы получим уравнения движения турбулентного потока.

* Детальный вывод мы опускаем ввиду его громоздкости и отсылаем читателя к литературе, указанной в конце приложения Б.

Что касается уравнения неразрывности, то его вид (Б. 18) в случае пренебрежения пульсациями плотности при осреднении не меняется. При этом под скоростью и плотностью следует понимать их осредненные величины.

В уравнении теплопроводности дивергенцию турбулентного потока тепла в ортогональных координатах, согласно (Б. 12), можно записать в виде

$$\operatorname{div} \vec{P} = - \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i^2} \alpha_T K \frac{\partial T}{\partial q_i} \right). \quad (\text{Б.36})$$

Для цилиндрических координат

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{P} = & - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{r}{H_i^2} \alpha_T K \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \alpha_T K \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \\ & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\alpha_T K \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha_T K \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.37})$$

Для сферических координат

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{P} = & - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{r^2 \sin \theta}{H_i^2} \alpha_T K \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) = \\ = & - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \alpha_T K \frac{\partial T}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \cdot \alpha_T K \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \\ & - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\alpha_T K \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.38})$$

В (Б. 20), (Б. 23), (Б. 26) также прибавляем к правой части соответственно выражения (Б. 36) либо (Б. 37) или (Б. 38) и, опуская молекулярный поток тепла и члены с диссипацией, получаем турбулентные уравнения притока тепла.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М., ОНТИ, 1934.
2. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М., «Наука», 1967.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От авторов	3
------------	---

ВВЕДЕНИЕ

Глава I. Предмет и метод гидромеханики

§ 1. Область применений	5
§ 2. Физические свойства реальных жидкостей	7

Раздел I. КИНЕМАТИКА ЖИДКОСТИ

Глава II. Способы кинематического описания движения жидкости

§ 1. Два метода исследования движения жидкости	14
§ 2. Поле скоростей	15
§ 3. Примеры полей скоростей	25
§ 4. Вихрь (ротор) скорости	30
§ 5. Разложение скорости в окрестности точки. (Первая теорема Гельмгольца)	35

Глава III. Поток и дивергенция скорости

§ 1. Физический смысл потока вектора скорости	42
§ 2. Дивергенция скорости	44

Глава IV. Локальная, конвективная и индивидуальная производные

§ 1. Градиент скалярных величин	50
§ 2. Физический смысл локальной, конвективной и индивидуальной производных	53
§ 3. Примеры	56
§ 4. Ускорение	59

Глава V. Циркуляция скорости

§ 1. Понятие и физический смысл циркуляции скорости	61
§ 2. Связь между циркуляцией скорости и полем ротора скорости	65
§ 3. Ускорение циркуляции (1 теорема Томпсона)	69

Глава VI. Функция тока и потенциал скорости

§ 1. Функция тока для плоско-параллельного движения несжимаемой жидкости	71
§ 2. Потенциал скорости	77

Раздел II. ДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Глава VII. Законы сохранения в гидромеханике

§ 1. Вывод и анализ уравнения неразрывности	81
§ 2. Уравнения сохранения количества движения. Уравнения динамики в напряжениях	85
§ 3. Баланс механической энергии	91
§ 4. Закон сохранения энергии. Уравнение баланса внутренней энергии	93

Глава VIII. Уравнения динамики вязкой жидкости в форме Навье — Стокса

§ 1. Связь между тензором напряжений и тензором скоростей деформации	94
§ 2. Уравнение Навье — Стокса	102

Глава IX. Уравнение притока тепла

§ 1. Внутренняя энергия совершенного газа	104
§ 2. Диссипативная функция. Уравнение теплопроводности для вязкой жидкости	105
§ 3. Первое начало термодинамики	108

Глава X. Постановка задачи интегрирования уравнений гидромеханики. Простейшие примеры

§ 1. Проблемы замыкания	110
§ 2. Условия однозначности	113
§ 3. Примеры интегрирования уравнений динамики	115

Глава XI. Основы теории подобия

§ 1. Понятие подобия	110
§ 2. Необходимые и достаточные условия подобия	123
§ 3. Обезразмеривание уравнений. Критерии подобия	126
§ 4. Физический смысл критериев подобия	128

Глава XII. Использование теории подобия в гидромеханике

§ 1. Упрощение уравнений	130
§ 2. Динамический пограничный слой	133
§ 3. Динамический погранслой на пластине	136
§ 4. Распространение струй	139

Раздел III. ДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Глава XIII. Уравнения идеальной жидкости

§ 1. Запись уравнений в форме Эйлера	143
§ 2. Начальные и граничные условия	144
§ 3. Различные формы записи уравнений движения	146

Глава XIV. Интегралы уравнений движения идеальной жидкости

§ 1. Уравнение Бернулли в общей форме	148
§ 2. Уравнение Бернулли для несжимаемой жидкости	158
§ 3. Уравнение Бернулли для сжимаемой жидкости	165

Глава XV. Теоремы об изменении циркуляции

§ 1. Теорема о циркуляции для абсолютного движения	171
§ 2. Теорема о циркуляции для относительного движения	176

Глава XVI. Волны

§ 1. Волновой процесс	188
§ 2. Метод малых возмущений. Параметры волн	190
§ 3. Акустические волны	195
§ 4. Гравитационные волны	199
§ 5. Длинные волны	205

Раздел IV. ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

Глава XVII. Общие положения

§ 1. Возникновение турбулентности	210
§ 2. Методы осреднения	211
§ 3. Уравнения гидротермодинамики турбулентных течений	213
§ 4. Проблема замыкания	215

Глава XVIII. Полуэмпирические теории турбулентности. Турбулентный пограничный слой на пластине

§ 1. Путь смешения	218
§ 2. Турбулентное течение по поверхности гладкой пластины	220

Приложение А. Элементы тензорного исчисления	223
---	-----

Приложение Б. Запись уравнений гидромеханики в криволинейных координатах	227
---	-----

§ 1. Ортогональные координаты	—
§ 2. Запись дифференциальных операторов в ортогональных координатах	230
§ 3. Уравнения в ортогональных координатах	233
§ 4. Цилиндрические и сферические координаты	235
§ 5. Турбулентные уравнения в криволинейных ортогональных координатах	237