Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. А. МАКАРОВ, А. Б. МЕНЗИН

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОКЕАНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

(гидравлическое и аналоговое)

Учебное пособие

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Океанология»

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
имени М. И. КАЛИНИНА

ЛЕНИНГРАД
1979

УДК 551.46.001.57

Одобрено Ученым советом Ленинградского гидрометеорологического института

Рецензенты:

кафедра океанологии Ленинградского государственного университета имени А. А. Жданова,

Ю. В. Николаев, доктор физ.-мат. наук (Арктический и Антарктический научно-исследовательский институт).

Излагаются методы исследования процессов в океане с помощью гидравлических и аналоговых моделей.

Даются основы теории подобия и размерности. Выводятся критерии подобия и проводится их анализ применительно к движению вод и процессам тепло- и массопереноса в океане.

Рассматриваются принципы моделирования различных океанических процессов и приводятся примеры решения путем моделирования некоторых задач в реальных бассейнах.

Научный редактор проф. *Ю. П. Доронин*

ВВЕДЕНИЕ

Моделирование как метод исследования объектов познания на их заместителях — моделях широко применяется в различных областях науки и техники.

Понятие моделирования является гносеологической категорией, характеризующей один из важнейших путей познания. Моделирование всегда используется вместе с другими методами исследования и тесно связано с экспериментом.

В данной книге рассматривается (применительно к задачам океанологии) моделирование двух видов — гидравлическое, относящееся к физическому моделированию, и электрическое аналоговое, входящее в разряд математического моделирования. Численное моделирование процессов в океане с использованием ЦВМ широко освещено в целом ряде опубликованных работ, к которым авторы и отсылают читателя.

Гидравлическое моделирование обладает большой физической наглядностью и во многих случаях позволяет вести исследование и тогда, когда не известны уравнения связи, а лишь имеются сведения о существенных для процесса величинах. Правда, при изучении больших акваторий построение гидравлических моделей весьма сложно, особенно, если надо учитывать отклоняющую силу вращения Земли. Определенные ограничения на эксперимент накладывает также невозможность одновременного учета всех необходимых критериев подобия.

Метод электрического моделирования основан на аналогии процессов, происходящих в гидродинамическом или каком-либо другом исследуемом поле и в построенном по законам подобия поле электрического тока.

Уступая ЦВМ в точности решения задачи и в универсальности, электрическая модель имеет и несомненные преимущества, так как в ней, например, удается просто задавать различного рода граничные условия, использовать разностную сетку с произвольным шагом по расстоянию и т. д. Задачи на ЦВМ реализуются с помощью разностной аппроксимации дифференциальных уравнений как в пространстве, так и во времени. Это приводит к возможности появления неустойчивости решения задачи. На электрической модели процесс во времени может быть непрерывным, решение при этом всегда устойчиво.

Выбор метода моделирования зависит от поставленной задачи. Иногда ее решение возможно только на гидравлической модели, иногда на ЦВМ, иногда на аналоге. Лучше всего использовать положительные стороны всех этих методов, которые при комплексном подходе будут лишь усиливать друг друга.

В настоящее время ведутся работы по созданию аналого-цифровых вычислительных машин, состоящих из элементов, присущих как аналогам, так и цифровым машинам. Таким гибридным вычислительным системам, использующим преимущества как АВМ, так и ЦВМ, несомненно принадлежит большое будущее.

Глава I. ОБЩИЕ ВОПРОСЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

§ 1.1. МОДЕЛИРОВАНИЕ КАК МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ ЯВЛЕНИЙ В ПРИРОДЕ. КЛАССИФИКАЦИЯ МОДЕЛЕЙ

При исследовании тех или иных явлений мы сталкиваемся с необходимостью решения задач, сущность которых сводится либо к анализу, либо к синтезу систем. При этом, если имеется некоторая физическая система с известными параметрами, описываемая известными уравнениями, и если на эту систему действуют определенные внешние силы и требуется определить реакцию системы на эти силы, то задача называется *прямой*. Несмотря на трудности, могущие возникнуть при решении этой задачи, она все же оказывается относительно простой. Более сложными являются другие типы задач, тем не менее требующие своего решения.

Обратная задача состоит в определении сил воздействия на систему при известных ее параметрах, уравнениях процесса и реакции системы на воздействие.

Инверсная задача заключается в определении параметров системы по известным уравнениям процесса, силам воздействия и реакции системы.

Сложной является также *индуктивная* задача, состоящая в составлении или уточнении уравнений процесса, если известны параметры системы, силы воздействия и реакция системы на эти силы.

Все эти задачи в той или иной степени связаны с одним из видов моделирования явлений. В последнее время термины «моделирование» и «модель» получили широкое распространение. В одних случаях под моделированием понимают метод экспериментального исследования, основанный на замещении конкретного объекта эксперимента подобным ему объектом, т. е. моделью. В других случаях термин «модель» применяют тогда, когда хотят изобразить какое-то явление с помощью другого, более изученного, более понятного.

Термин «модель» используется иногда в качестве синонима теории, математического описания или некой формализованной системы.Такое его применение ошибочно, так как, во-первых, с гносеологической точки зрения отождествление модели либо с теорией, либо с математическим описанием, либо с формальной системой затушевывает специфические познавательные функции модели, во-вторых, существенным признаком, отличающим модель как от теории, так и от математического описания или формализованной системы, является способ выражения абстракций, упрощений и отвлечений. Модель всегда является некоторым конкретным построением, являющимся в большей или меньшей степени наглядным и доступным для обозрения или использования. *Модель — это такая мысленно представляемая или материально реализованная система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что ее изучение дает нам новую информацию об этом объекте.* Общим свойством всех моделей является их способность в той или иной степени отображать действительность.

Классификация моделей может быть построена как по форме, так и по содержанию. Не вызывает сомнения тот факт, что классификация моделей по их содержанию весьма многообразна, зависит от конкретной области знания и не обладает необходимой общностью. Рассмотрим классификацию моделей **по способу построения,** т. е. по их форме.

В зависимости от способа построения все модели могут быть разделены на два больших класса — *материальные* и *мысленные* модели. При этом необходимо подчеркнуть, что никакого противопоставления между этими двумя классами моделей не делается: мысленные модели также имеют материальную основу.

Материальные модели могут быть разделены на три основные группы: пространственно подобные модели, физически подобные и математически подобные модели. Обязательным условием первой группы моделей является сохранение пространственных свойств и отношений объектов. К этой группе относятся различные макеты, компановки и т. д. Вторую группу моделей образуют модели, обладающие механическим, динамическим, кинематическим и другими видами физического подобия с исследуемым объектом. Иногда при этом говорят о *подобии в узком смысле.* В третью группу материальных моделей входят системы, не обладающие с объектом одной и той же физической природой, но имеющие с ним либо одинаковую структуру, либо выполняющие с ним одинаковые функции. Когда оригинал и модель имеют одинаковую структуру, то мы имеем дело с *изоморфизмом* систем или *подобием в широком смысле.* К третьей группе материальных моделей относятся аналоговые модели (модели физических полей, модели физических систем, структурные модели), цифровые вычислительные машины, функциональные кибернетические устройства.

Ко второму классу моделей относятся так называемые *мысленные модели,* т. е. те модели, которые исследователь мысленно представляет себе, прежде чем создать материальную модель. Мысленные модели не обязательно должны воплощаться в действительность, причем они продолжают оставаться мысленными и тогда, когда выражаются в такой материальной форме, как схема, рисунок, чертеж и т. д., так как все связи, все преобразования в них осуществляются в сознании человека.

Мысленные модели по способу их построения делятся на образные, построенные из наглядных элементов; знаковые, построенные из символов-знаков и смешанные (образно-знаковые).

Как и любая классификация, приведенная классификация в какой-то степени условна, особенно это относится к делению материальных моделей на физически и математически подобные.

Нельзя считать лишь удобным для нас совпадением, дающим возможность решить поставленную задачу, одинаковую структуру двух систем, позволяющую создать аналог исследуемого процесса. Одинаковая структура уравнений связана с общностью физических законов в разных материальных системах. «Единство природы обнаруживается в «поразительной аналогичности» дифференциальных уравнений, относящихся к различным областям явлений»[1].

Рассмотрим, например, колебательный процесс, вводя понятие об активных (диссипирующих энергию) и реактивных (перераспределяющих энергию) сопротивлениях. Тогда любую из трех систем — гидравлическую, акустическую или электрическую — можно считать *физически подобной* двум остальным.

Любая модель основана на аналогии. Причем не на недостаточно ясной аналогии, но тем не менее представляющей интерес и полезность, а на так называемой *выясненной аналогии.*

Обычно под аналогией понимают тот частный случай относительного тождества явлений, который заключается в сходстве отношений. Эти отношения могут управляться **одними и теми же законами**; могут обеспечивать **взаимно однозначное соответствие**, сохраняющее законы некоторых отношений (так называемый изоморфизм, который Д. Пойа называет «правильным переводом»), либо явиться обобщением изоморфизма, получаемым за счет отказа от требования взаимной однозначности (по определению Д. Пойа, гомоморфизм — «систематически сокращенный перевод»). Аналогия между системами может существовать на различных уровнях:

1) на уровне **результатов**, которые дают сравниваемые системы;

2) на уровне **функций** систем, которые приводят к этим результатам;

3) на уровне **структур**, которые обеспечивают выполнение данных функций;

4) на уровне **элементов**, из которых состоят структуры.

В любой модели не может быть совпадения на всех этих уровнях, так как в противном случае был бы неизбежен переход от аналогии к тождеству.

Любая, даже самая совершенная модель является лишь гомоморфным образом исследуемого явления, так как любое моделирование связано, во-первых, с подражанием моделируемому объекту, во-вторых, с его загрублением. При этом учитываются

[1] В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 18, с. 306.

лишь определенные свойства объекта, так как необходимо избавиться от избытка информации. Часть информации, бесспорно, нам недоступна, часть просто несущественна. Моделируя, надо упрощать, чтобы выделить явление в как можно более чистом виде. И лишь выяснив роль определенных (для нас — основных) параметров, следует идти путем постепенного усложнения модели. Практика моделирования всегда предполагает учет одних переменных и отказ от других (для нас — несущественных).

Результаты эксперимента на модели неизбежно должны отличаться от натурных наблюдений. При этом на степень различия влияют, во-первых, упрощенность модели по сравнению с натурой, во-вторых, свойства модели, чуждые натуре, и в-третьих, те свойства натуры, которые нам пока неизвестны. Если отбросить третий фактор, так как в каждый данный момент исследования всегда остаются неизвестные свойства объекта, то к весьма существенным ошибкам могут привести как раз те свойства модели, которыми не обладает моделируемое явление. Поэтому всегда лучше не учесть какое-либо свойство объекта, если оно нам неясно, чем учесть его неверно. Предпочтительнее упростить картину, чем вводить в нее настолько неопределенные факторы, что они равносильны ошибкам. Сюда, как нельзя лучше, подходит известное высказывание Р. Фейнмана (если только не воспринимать его уже слишком прямолинейно) о том, что существует «способ убедиться, что наши представления ... правильны; мало оправданный по существу, он, пожалуй, самый мощный из всех способов. Это путь грубых приближений» (приближений, но не ошибок!).

Моделирование процессов основано на теории подобия или ее обобщении — теории изоморфизма систем. Однако значение теории подобия гораздо шире, фактически это учение о методах исследования явлений, основанное на том, что каждая задача должна рассматриваться в своих, характерных для нее переменных, представляющих собой безразмерные степенные комплексы, составленные из существенных для данной задачи величин.

§ 1.2. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ

Несмотря на огромное многообразие явлений, всегда можно выделить два или целую группу явлений, обладающих известной общностью свойств. В этом случае можно говорить *о подобии явлений*. Причем степень общности может быть весьма различной. Мы можем встретиться с системами тел, геометрически подобных друг другу, в которых протекают процессы одинаковой физической природы и в которых одноименные величины, характеризующие явления, относятся между собой как постоянные числа. Этот случай подобия физически однородных явлений называется *физическим подобием* либо *подобием в узком смысле*. Если же два явления описываются одинаковыми по структуре уравнениями, но принадлежат к различной физической природе, то этот случай называется *математическим подобием* либо *подобием в широком смысле.*

В основе теории подобия лежит идея преобразования переменных величин, изменение которых определяется заданными дифференциальными уравнениями и условиями однозначности. Пусть явление описывается некоторой системой уравнений с соответствующими условиями единственности решения. Любое другое явление, подобное данному, определяется решением, которое можно представить как результат умножения каждой из величин, входящих в состав полученного решения, на некоторый постоянный, выбранный для этой величины множитель. Используя различные множители, получаем бесчисленное множество решений, которыми определяется группа подобных между собой явлений. Эта операция называется *подобным преобразованием.*

Пусть исследуемое явление описывается уравнением

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{1.1}$$

где φ — функция произвольного вида n переменных величин. Произведем подобное преобразование всех величин

$$x_i' = C_i x_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.2}$$

Так как при этом уравнение не должно изменяться (должно быть инвариантным по отношению к преобразованиям), то

$$\varphi(C_1 x_1, \ldots, C_n x_n) = 0, \tag{1.3}$$

уравнения (1.1) и (1.3) совместны тогда и только тогда, если

$$\varphi(C_1 x_1, \ldots C_n x_n) = \chi(C_1, \ldots, C_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n). \tag{1.4}$$

Следовательно, подобное преобразование отдельных переменных привело к подобному преобразованию функции в целом. Функции, обладающие таким свойством, называются *гомогенными* (подобнородными), причем, если преобразование не подчинено никаким особым условиям, то эти функции *безусловно гомогенные*, а отвечающие гомогенным функциям уравнения (1.2) называются *моногенными* (однородными), при этом они *безусловно моногенные*, так как нет надобности в обусловливающих моногенность условиях. Можно показать, что в этом случае инвариантность уравнений будет присуща только очень узкому классу функций, т. е. только тем функциям, которые представляют собой либо степенной одночлен, либо сумму степенных комплексов одинаковых размерностей. Следовательно, свойством безусловной гомогенности обладают функции, гомогенные по самой своей структуре. А теперь попытаемся определить условия, необходимые для подобных преобразований, которые приводили бы к инвариантности уравнений независимо от их структуры. Совершенно очевидно, что инвариантность уравнений обеспечивается условием $\hat{C}_1 = \hat{C}_2 = \ldots \hat{C}_n = 1$. Отбросим этот тривиальный случай, не представляющий для нас интереса.

Введем в качестве новых переменных степенные комплексы π_j, являющиеся безусловно гомогенными функциями, тогда из (1.1) имеем

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv \Phi(\pi_1, \ldots, \pi_k), \tag{1.5}$$

причем в число этих степенных комплексов включены также комплексы, являющиеся аргументами у трансцендентных функций.

Произведем теперь подобные преобразования

$$\Phi(K_1 \pi_1, \ldots, K_k \pi_k) = 0, \tag{1.6}$$

где $K_j = C_1^{\alpha_{j,1}} \ldots C_r^{\alpha_{j,r}} \quad (j = 1, \ldots, k)$,

а число множителей преобразования r определяется количеством переменных x_i в каждом из степенных комплексов.

Для инвариантности исходного уравнения необходимо потребовать, чтобы все множители K_j были равны единице, т. е.

$$K_j = C_1^{\alpha_{j,1}} \ldots C_r^{\alpha_{j,r}} = 1 \quad (j = 1, \ldots, k). \tag{1.7}$$

Соотношения (1.7) являются обусловливающими уравнениями, причем они *условно моногенны*, а функции, которые становятся гомогенными вследствие этих соотношений, называются *условно гомогенными*.

Понятие об условной гомогенности и обусловливающих уравнениях, введенные Т. А. Афанасьевой-Эренфест, являются основными понятиями теории подобия.

Перейдем теперь к изучению теорем подобия. В **первой теореме подобия** говорится о необходимых условиях подобия явлений. Для случая движения твердых тел эта теорема была впервые сформулирована И. Ньютоном в 1686 г. Лучше всего рассмотреть первую теорему подобия на основании вывода Бертрана, который за исходное уравнение связи взял второй закон Ньютона:

$$f = m\frac{dv}{dt}. \tag{1.8}$$

Это уравнение **буквенно** одинаково для двух подобных систем; пусть оно соответствует какой-нибудь точке первого явления; для сходственной точки второго явления имеем

$$f' = m'\frac{dv'}{dt'}. \tag{1.9}$$

Подобие явлений одной и той же физической природы предполагает пропорциональность друг другу всех величин, характеризующих явление, причём коэффициент пропорциональности сохраняет постоянное значение во всех точках системы для определенного наименования величин (отношение одноименных величин называют в теории подобия и анализе размерностей *симплексом* в отличие от безразмерного комплекса, составленного из величин разного наименования), но будет различным для величин разного наименования. Этот коэффициент пропорциональности называется *константой подобия*.

Введем константы подобия для всех величин уравнений (1.8) и (1.9):

$$C_f = \frac{f'}{f}; \quad C_m = \frac{m'}{m}; \quad C_v = \frac{v'}{v}; \quad C_t = \frac{t'}{t}. \tag{1.10}$$

Затем выразим величины второго явления через константы подобия и величины первого явления:

$$\left(\frac{C_f C_t}{C_m C_v}\right) f = m \frac{dv}{dt}. \tag{1.11}$$

Уравнения (1.8) и (1.11) совместимы только тогда, когда

$$\frac{C_f C_t}{C_m C_v} = 1. \tag{1.12}$$

Следовательно, все константы подобия не могут выбираться произвольно. Лишь три константы для явления, описываемого уравнением (1.8), могут быть произвольными, а четвертая определится из выражения (1.12). Равенство (1.12) называется *индикатором подобия*, оно является математическим выражением первой теоремы подобия: *у подобных явлений индикаторы подобия равны единице*.

Равенство (1.12) можно записать в несколько ином виде

$$\frac{ft}{mv} = \frac{f' t'}{m' v'}. \tag{1.13}$$

Полученный безразмерный комплекс *одинаков для всех подобных между собой явлений*, т. е.

$$\frac{ft}{mv} = \pi = \mathrm{idem} = \mathrm{inv}. \tag{1.14}$$

Выражение (1.14) определяет *критерий* или *инвариант подобия*.

Из выражения (1.14) можно получить несколько иную формулировку первой теоремы подобия:

У подобных явлений критерии (инварианты) подобия численно одинаковы.

Причем критерий типа (1.14) называется *полидромным*, меняющимся от точки к точке системы в соответствии с переменными величинами, из которых он составлен.

Критерий подобия может быть получен непосредственно из уравнения (1.8). Для этого перейдем к **относительной системе единиц**, пригодной только для одного явления данного класса. За единицы измерения величин рассматриваемой системы возьмем значения этих величин в каких-нибудь точках самой системы. Лучше всего выбирать **характерные** для этой системы значения величин. Тогда **численные** значения величин как для первого явления, так и для любого другого явления, подобного первому, выраженные в этих относительных единицах измерения, **не изменятся**, они превратятся в инварианты подобия:

$$F = \frac{f}{f_0}, \quad M = \frac{m}{m_0}, \quad V = \frac{v}{v_0}, \quad T = \frac{t}{t_0}, \tag{1.15}$$

где индексом «0» обозначены относительные единицы измерения, выбранные в определенных точках системы. F, M, V и T **одинаковы** для всех групп подобных явлений. Подставляя выражения (1.15) в исходное уравнение связи, получим

$$\frac{f_0 t_0}{m_0 v_0} F = M \frac{dV}{dT}. \tag{1.16}$$

Чтобы уравнение (1.16) было **численно** одинаково для всей группы подобных явлений, надо выполнить условие

$$\frac{f_0 t_0}{m_0 v_0} = \pi^{(0)} = \text{idem}. \tag{1.17}$$

Критерий (1.17), сохраняющий постоянное значение для всех точек системы, называется *адромным*.

Адромные критерии путем соединения их с симплексами можно преобразовать в монодромные, содержащие одну переменную величину, а остальные — постоянные. Действительно:

$$\frac{f_0 t_0}{m_0 v_0} \cdot F = \frac{f_0 t_0}{m_0 v_0} \frac{f}{f_0} = \frac{f t_0}{m_0 v_0} = \pi_f = \text{idem}. \tag{1.18}$$

Если выбрать для измерения f новую единицу $f_0^{(K)} = \frac{m_0 v_0}{t_0}$, то монодромный критерий π_f можно представить в виде *критериального симплекса*

$$\pi_f = F^{(K)} = \frac{f}{f_0^{(K)}}. \tag{1.19}$$

Монодромные критерии, являющиеся относительными переменными комплексного типа, называют иногда *числами* в отличие от адромных критериев (комплексного типа), полностью составленных из параметров (характерных величин), заданных по условию. Отношение одноименных параметров в этом случае называют *критерием параметрического типа.*

Вторая теорема подобия имеет исключительно большое значение для теории подобия. Эта теорема говорит о том, что между инвариантами подобия существует однозначная зависимость.

Для n физических величин, удовлетворяющих конечному уравнению, вторая теорема подобия была впервые доказана А. Федерманом. Развивая теорию условно гомогенных функций, Т. А. Афанасьева-Эренфест обобщила теорему Федермана на случай, когда кроме физических величин $x_1, \ldots, x_n$ даны их частные значения $x'_1, \ldots, x'_q$:

$$\Phi\left(\pi_1, \ldots, \pi_{k-1};\ \frac{x'_1}{x_1}, \ldots, \frac{x'_q}{x_q}\right) = 0. \qquad (1.20)$$

Число безразмерных комплексов в уравнении (1.20) равно числу членов суммы уравнения (1.5) без одного плюс число аргументов трансцендентных функций, входящих в эти члены. Число симплексов равно числу одноименных напарников $x'_1, \ldots, x'_q$.

Широко используемая в теории размерностей π-теорема Букингэма является частным случаем обобщенной теоремы Федермана, когда трансцендентные функции не входят в исследуемое уравнение. К π-теореме мы вернемся несколько позднее при рассмотрении анализа размерностей.

Приведем доказательство второй теоремы подобия, данное М. В. Кирпичевым на основе логического анализа.

Пусть имеется система дифференциальных уравнений

$$D_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad (1.21)$$

допускающая подобное преобразование, тогда она преобразуется в

$$D_i(X_1, \ldots, X_m;\ \pi^{(0)}_{m+1} X_{m+1}, \ldots, \pi^{(0)}_n X_n) = 0 \qquad (1.22)$$

либо в

$$D_i(X_1, \ldots, X_m;\ X^{(K)}_{m+1}, \ldots, X^{(K)}_n) = 0. \qquad (1.23)$$

Доказательство второй теоремы применительно к системе дифференциальных уравнений необходимо оговорить рядом ограничений и допущений. Предположим, что для уравнений (1.21) можно сформулировать условия однозначности, тогда их решение приводит к новой системе

$$\Phi_j(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad (1.24)$$

содержащей только конечные величины. Уравнения (1.24) представляют собой частные интегралы, отвечающие заданным условиям однозначности.

Преобразования (1.22) и (1.23) оставляют неизменными математическую структуру исходных уравнений (1.21). Следовательно, можно утверждать, что и система

$$\Phi_j(X_1, \ldots, X_m;\ X^{(K)}_{m+1}, \ldots, X^{(K)}_n) = 0 \tag{1.25}$$

также будет решением (1.21), причем вид функций Φ_j в выражениях (1.24) и (1.25) одинаков. Так как при интегрировании системы (1.21) в уравнениях (1.24) должны появиться постоянные интегрирования, то в уравнениях (1.25) им должны отвечать соответствующие адромные критерии и симплексы.

В выражениях (1.25) дифференциальные барьеры отсутствуют. Таким образом, доказано, что уравнения (1.24), представляющие собой решение системы (1.21), имеют одинаковые с ними критерии подобия. Следовательно, *операция интегрирования не изменяет условий подобия и все выводы теории подобия можно получать непосредственно из дифференциальных уравнений без их решения.*

Третья теорема подобия устанавливает *достаточные* условия подобия заданного множества явлений.

Доказательство третьей теоремы подобия, также основанное на логическом анализе условий подобия двух явлений, было дано М. В. Кирпичевым.

Пусть уравнения связи по-прежнему имеют вид (1.21), преобразование их к относительным единицам дает:

$$D_i(X_1, \ldots, X_n) = 0, \tag{1.26}$$

где по-прежнему $X_i = \dfrac{x_i}{x_{0\,i}}$, причем некоторые из величин X_i содержат критериальные единицы измерения $X_i^{(K)} = \dfrac{x_i}{x_{0\,i}^{(K)}}$. Для подобных явлений имеем: $X_1 = \text{idem}, \ldots, X_n = \text{idem}$. Присоединим к уравнениям (1.21) условия однозначности, или условия *моновалентности*. Численные значения величин, входящих в условия однозначности, называются *моновалентами*. Пусть для системы (1.21) они имеют значения $z_1, \ldots, z_q$. Для уравнений (1.26) они примут вид

$$\frac{z_1}{x_{0\,1}} = Z_1 = \text{idem}, \ \ldots, \ \frac{z_q}{x_{0\,q}} = Z_q = \text{idem}, \tag{1.27}$$

причем соответственные относительные единицы измерения могут выбираться из самих моновалентов.

Система уравнений (1.26) одинакова для всей группы подобных явлений. Следовательно, **условия подобия моновалентов** уравнений (1.21) превращаются в **условия единственности решения** уравнений (1.26), т. е. моновалентами системы (1.26) являются $Z_1, \ldots, Z_q$. Таким образом, для подобных явлений должно быть

$$Z_1 = \text{idem}, \ \ldots, \ Z_q = \text{idem}. \tag{1.28}$$

Среди величин $X_i^{(K)}$ могут оказаться такие, которые содержат лишь моноваленты.

Итак, мы можем дать следующую формулировку третьей теоремы подобия: *подобны те явления, моноваленты которых подобны*; либо: *явления подобны, если у них моноваленты находятся в численно постоянном отношении и составленные из них критерии равны.*

§ 1.3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ РАЗМЕРНОСТЕЙ

С теорией подобия непосредственно связана теория размерностей, устанавливающая связи между численными значениями величин, существенных для исследуемого физического процесса.

Когда характеристиками процесса становятся численные значения величин, исследование приобретает количественную форму.

В зависимости от того, каким образом определяются эти численные значения, следует различать два рода величин.

Одни величины вводятся в качестве характеристики объекта исследования безотносительно к каким-либо другим величинам. Их численное значение определяется в результате так называемого *прямого измерения*, представляющего собой сопоставление измеряемой величины с величиной той же физической природы, принятой за единицу; причем сама единица измерения выбирается произвольно. Пусть x — измеряемая величина, а x_0 — ее единица измерения, тогда численное значение величины x, выраженное в единицах x_0, изобразится как $X = \dfrac{x}{x_0}$. Предположим, что для величин рода x существует две единицы измерения, x_0' и x_0'', причем $x_0'' = kx_0'$, тогда можно написать, что $X'' = \dfrac{1}{k} X'$ или $X'' = CX'$.

Следовательно, численное значение величины является относительной характеристикой, так как зависит от выбора единиц измерения. С другой стороны, для различных конкретных значений получаем $X_1'' = CX_1'$, $X_2'' = CX_2' \ldots$, $X_m'' = CX_m'$ или $X_1' : X_2' : \ldots$ $\ldots : X_m' = X_1'' : X_2'' : \ldots : X_m''$.

Таким образом, несмотря на относительность численных значений отдельных величин, их отношения носят *абсолютный* характер.

Величины, которые обладают всеми выше перечисленными свойствами, называются *первичными*.

Кроме первичных величин существуют и так называемые *вторичные* величины.

Если первичные величины вполне автономны, то вторичные величины определяются через соответствующие первичные, эта связь устанавливается *определительными уравнениями.*

Так как первичные величины обладают свойством абсолютности отношений, то переход к новой единице измерения для первичных величин является *пропорциональным* преобразованием.

Численные значения вторичных величин изменяются в зависимости от произвольного выбора единиц измерения соответствующих первичных величин. В то же время необходимо, чтобы это изменение также представляло собой пропорциональное преобразование. Возникающее при этом противоречие может быть разрешено лишь путем наложения ограничений на структуру определительного уравнения.

Пусть это уравнение имеет вид

$$y = \varphi\,(x_1,\ \ldots,\ x_m) \tag{1.29}$$

и пусть применяются две системы единиц: x'_{01}, ..., x'_{0m} и x''_{01}, ..., x''_{0m}, причем $x''_{0i} = k_i x'_{0i}$ $(i = 1,\ \ldots,\ m)$.

Тогда получаются два численных значения вторичной величины:

$$Y' = \varphi\,(X'_1,\ \ldots,\ X'_m), \tag{1.30}$$

$$Y'' = \varphi\,(X''_1,\ \ldots,\ X''_m), \tag{1.31}$$

где $X''_i = C_i X'_i$ $C_i = \dfrac{1}{k_i}$ $(i = 1,\ \ldots,\ m)$.

Из условия пропорциональности преобразования имеем $Y'' = KY'$, т. е.

$$Y' = \varphi\,(X'_1,\ \ldots,\ X'_m), \tag{1.32}$$

$$KY' = \varphi\,(C_1 X'_1,\ \ldots,\ C_m X'_m). \tag{1.33}$$

Как нетрудно заметить, данная задача сводится к задаче об определении структуры безусловно гомогенной функции, о которой шла речь в предыдущем параграфе. Действительно, с формальной точки зрения и подобное (физическое) преобразование, соответствующее переходу от одного явления к другому, ему подобному, и пропорциональное (метрическое) преобразование, связанное с переходом к другим единицам измерения, совершенно тождественны. Следовательно, функция φ может представлять собой лишь степенной комплекс, т. е.

$$Y = AX_1^{a_1} \ldots X_m^{a_m}, \tag{1.34}$$

где A — произвольная постоянная; определительное же уравнение имеет вид

$$y = Ax_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}. \qquad (1.35)$$

Таким образом, множитель преобразования для функции, эквивалентный выражениям (1.34) и (1.35), изображается как

$$K = C_1^{\alpha_1} \ldots C_m^{\alpha_m}. \qquad (1.36)$$

Показатель степени при первичной величине называется *размерностью.* Совокупность размерностей данной вторичной величины принято записывать в виде *формулы размерности.* Формулой размерности вполне может служить выражение (1.36). Обычно множители преобразования заменяются соответствующими символами. Полученное нами определительное уравнение (1.35) не дало законченного решения, так как вторичная величина была определена через первичные лишь с точностью до постоянного множителя A. Можно положить этот множитель равным единице, что соответствует одновременному обращению в единицу первичных величин и определяемой вторичной величины. Действительно, если $A = 1$, то при $x_i = x_{0i}$ также $y = y_0$. Если для некоторой величины y оказывается возможным составить два уравнения типа (1.35) и выбрать одно из них в качестве определительного, то это неизбежно приводит к появлению во втором уравнении размерной постоянной.

Следует отметить, что точно так же, как величины делятся на первичные и вторичные, их единицы измерения делятся на *основные*, выбираемые произвольно, и *производные*, формируемые в соответствии с формулами размерности.

Величина, имеющая нулевую размерность, называется безразмерной, она обладает свойством не изменяться при переходе к другим единицам измерения, т. е. инвариантна по отношению к метрическим преобразованиям. Безразмерными являются симплексы, а также инварианты (критерии) подобия. Эти безразмерные комплексы инварианты как к подобным преобразованиям, так и к метрическим преобразованиям, которые по количественным результатам тождественны друг другу.

Число безразмерных комплексов в зависимости от числа величин, существенных для исследуемого процесса, можно получить из π-теоремы. Рассмотрим ее доказательство, приводимое А. А. Гухманом.

Пусть имеется комплекс, составленный из m первичных и r вторичных величин,

$$\pi = x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m} y_1^{\beta_1} \ldots y_r^{\beta_r}. \qquad (1.37)$$

Условие его инвариантности записывается как

$$C_1^{\alpha_1} \ldots C_m^{\alpha_m} K_1^{\beta_1} \ldots K_r^{\beta_r} = 1 \qquad (1.38)$$

или

$$C_1^{\gamma_1} \ldots C_m^{\gamma_m} = 1, \qquad (1.39)$$

где $\gamma_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \beta_i \ (i = 1, \ldots, m)$,

a_{ij} — размерности вторичных величин в отношении соответствующих первичных. Так как множители преобразования выбираются произвольно, условия (1.38) или (1.39) неизбежно приводят к следующей системе уравнений:

$$\alpha_i + \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \beta_j = 0 \ (i = 1, \ldots, m). \qquad (1.40)$$

Таким образом, получаем m уравнений, содержащих $m + r = n$ неизвестных величин. Следовательно, система (1.40) имеет $n - m$ различных решений, позволяющих построить $n - m$ различных несводимых друг к другу безразмерных степенных комплексов. Итак, число безразмерных комплексов равно числу всех величин, существенных для процесса, за вычетом числа первичных величин. Если все первичные величины входят в число существенных, то $n - m = r$, в противном случае $n - m < r$.

Доказанная π-теорема является частным случаем обобщенной теоремы Федермана, когда трансцендентные функции не входят в исследуемое уравнение и в каждом его одночлене содержится по одной вторичной величине (см. § 1.2).

Теория подобия и теория размерностей построены по существу на одном математическом аппарате. Различие между ними заключается в том, что в теории подобия этот аппарат применяется к уравнениям процесса, а в теории размерностей тот же самый аппарат применяется к определительным уравнениям или формулам размерности.

Глава II. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ОКЕАНЕ

§ 2.1. УСЛОВИЯ ПОДОБИЯ ДИНАМИКИ ВОД И ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА

Процессы, происходящие в сплошной среде, при всем своем многообразии обладают некоторыми характерными чертами, свойственными всем им в одинаковой степени, что позволяет при их изучении использовать общую схему постановки и решения задач.

Внутренний механизм исследуемого процесса определяется основными уравнениями, выражающими взаимодействие элементов среды в данный момент и их изменения во времени. Граничные и начальные условия увеличивают информацию, заложенную в основных уравнениях, дополнительными сведениями, обеспечивая единственность решения задачи.

При интегрировании дифференциальных уравнений во многих случаях приходится переходить от полных решений к приближенным, что связано с принятием многих физических величин постоянными.

Теория подобия не связана этим допущением при выводе критериев подобия, которые получаются независимо от того, постоянные или переменные величины входят в уравнение связи. Однако, если некоторые физические параметры зависят от состояния среды, необходимо в число основных уравнений процесса включить уравнения, выражающие вид этих зависимостей. Соответственно критерии подобия, отвечающие этим уравнениям, следует рассматривать как аргументы полученных обобщенных зависимостей. В результате обобщенные уравнения при этом существенно усложняются и теряют свою практическую ценность. Поэтому обычно используют приближенные решения, поскольку отсутствует достаточно общий и строгий метод учета влияния изменения физических параметров.

Приближенное моделирование используется, кроме того, из-за трудностей соблюдения условий подобия.

Естественно, что применять общие выводы теории подобия следует на основе не общих уравнений определенного класса явлений, а исходя из частных уравнений связи, относящихся к конкретному случаю исследуемого явления. Это связано с тем, что решение общих уравнений может привести к неопределенности постановки задачи и к неправильному ее решению, поскольку не вводится условие однозначности. Поэтому для получения обусловливающих зависимостей необходимо рассматривать все уравнения связи, включая в них условия однозначности.

Рассмотрим процессы, происходящие в движущейся жидкости на вращающейся Земле и описываемые уравнениями сохранения количества движения и масс:

$$\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho u\frac{\partial u}{\partial x}+\rho v\frac{\partial u}{\partial y}+\rho w\frac{\partial u}{\partial z}-\rho f u=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2 u, \quad (2.1)$$

$$\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho u\frac{\partial w}{\partial x}+\rho v\frac{\partial w}{\partial y}+\rho w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g+\mu\nabla^2 w, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}=0, \quad (2.3)$$

где u, v, w — компоненты скорости вдоль осей координат x, y, z, направленных соответственно на восток, север и вертикально вверх; ρ — плотность воды; p — давление; t — время; f — параметр Кориолиса; μ — коэффициент молекулярной вязкости; g — ускорение силы тяжести.

$$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Поскольку уравнения движения для составляющих вдоль горизонтальных осей координат тождественны по структуре, то для вывода критериев подобия достаточно написать одно из них.

Каждое из уравнений (2.1) и (2.2) складывается поочередно с уравнением (2.3), умноженным соответственно на u и w, и после осреднения получается система уравнений для турбулентного режима в случае установившегося пульсационного движения:

$$\frac{\partial\overline{\rho uu}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\rho uv}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\rho uw}}{\partial z}-f\overline{\rho u}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\mu\nabla^2\overline{u}; \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial\overline{\rho wu}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\rho wv}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\rho ww}}{\partial z}=-\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}-\overline{\rho}g+\mu\nabla^2\overline{w}; \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial\overline{\rho u}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\rho v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\rho w}}{\partial z}=0. \quad (2.6)$$

Нестационарные уравнения, имеющие нулевое среднее значение, можно получить, вычитая уравнения (2.4), (2.5), (2.6) из соответствующих им выражений, имевших место до осреднения. В результате нестационарные уравнения запишутся в виде:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t}+\frac{\partial(\rho uu-\overline{\rho uu})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho uv-\overline{\rho uv})}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial(\rho uw-\overline{\rho uw})}{\partial z}-f(\rho u-\overline{\rho u})=-\frac{\partial(p-\overline{p})}{\partial x}+\mu\nabla^2(u-\overline{u})\,; \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \rho w}{\partial t}+\frac{\partial(\rho wu-\overline{\rho wu})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho wv-\overline{\rho wv})}{\partial y}+$$

$$+\frac{\partial(\rho ww-\overline{\rho ww})}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}(p-\overline{p})-g(\rho-\overline{\rho})+\mu\nabla^2(w-\overline{w}); \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u-\overline{\rho u})}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v-\overline{\rho v})}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w-\overline{\rho w})}{\partial z}=0. \quad (2.9)$$

Представим компоненты скорости, давление и плотность в виде суммы осредненных во времени и пульсационных значений:

$$\left.\begin{aligned}u&=\overline{u}+u',\\ v&=\overline{v}+v',\\ w&=\overline{w}+w',\\ p&=\overline{p}+p',\\ \rho&=\overline{\rho}+\rho'.\end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

При осреднении произведений в уравнениях (2.7)—(2.9) будем иметь в виду, что флуктуация плотности в океане на несколько порядков меньше ее среднего значения, тогда как флуктуации скорости одного порядка со средней величиной или несколько больше. Поэтому корреляцией флуктуаций плотности и скорости можно пренебречь. Тогда выражения (2.4)—(2.6) примут вид:

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}-f\overline{u}=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}-\overline{u'^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}-\overline{u'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}-\overline{u'w'}\right); \quad (2.11)$$

$$\overline{u}\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}=-\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}-g+\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}-\right.$$

$$-\overline{w'u'}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}-\overline{w'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}-\overline{w'^2}\right); \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial\overline{\rho}\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\rho}\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\rho}\overline{w}}{\partial z}=0. \qquad (2.13)$$

Нестационарные уравнения (2.7)—(2.9) с учетом равенства (2.10) будут представлены в виде выражений:

$$\overline{\rho}\frac{\partial u'}{\partial t}+\overline{\rho}\overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+\overline{\rho}\overline{v}\frac{\partial u'}{\partial y}+\overline{\rho}u'\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{\rho}v'\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{\rho}\overline{w}\frac{\partial u'}{\partial z}+\overline{\rho}w'\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}-$$

$$-f\overline{\rho}u'=-\frac{\partial p'}{\partial x}+\mu\nabla^2u'+\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho}\overline{u'u'}-\overline{\rho}u'u')+$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho}\overline{u'v'}-\overline{\rho}u'v')+\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}\overline{u'w'}-\overline{\rho}u'w'); \qquad (2.14)$$

$$\overline{\rho}\frac{\partial w'}{\partial t}+\overline{\rho}\overline{u}\frac{\partial w'}{\partial x}+\overline{\rho}\overline{v}\frac{\partial w'}{\partial y}+\overline{\rho}\overline{w}\frac{\partial w'}{\partial z}+\overline{\rho}u'\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+$$

$$+\overline{\rho}v'\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\overline{\rho}w'\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}=-\frac{\partial p'}{\partial z}-\rho'g+\mu\nabla^2w'+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}(\overline{\rho}\overline{w'u'}-\overline{\rho}w'u')+\frac{\partial}{\partial y}(\overline{\rho}\overline{w'v'}-\overline{\rho}w'v')+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(\overline{\rho}\overline{w'^2}-\overline{\rho}w'^2); \qquad (2.15)$$

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\frac{\partial\overline{\rho}u'}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\rho}v'}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\rho}w'}{\partial z}=0. \qquad (2.16)$$

Введем характерные размеры f_0, l, h, $\overline{u}_0$, $\overline{w}_0$, u'_0, w'_0, $\overline{p}_0$, p'_0, $\overline{\rho}_0$, ρ'_0, t_0. Тогда уравнения неразрывности для стационарного (2.13) и нестационарного движения (2.16) запишутся соответственно следующим образом:

$$\frac{\partial\overline{\rho}\overline{u}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{\rho}\overline{v}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{\rho}\overline{w}}{\partial z}\left(\frac{\overline{w}_0 l}{\overline{u}_0 h}\right)=0; \qquad (2.17)$$

$$\frac{\rho'_0 l}{\overline{\rho}_0 t_0 u'_0}\frac{\partial\rho'}{\partial t}+\frac{\overline{\partial}\rho u'}{\partial x}+\frac{\overline{\partial}\rho v'}{\partial y}+\frac{w'_0 l}{u'_0 h}\frac{\overline{\partial}\rho w'}{\partial z}=0. \qquad (2.18)$$

Из уравнений (2.17) и (2.18) получим безразмерные комплексы — критерии подобия:

$$\pi_1=\frac{\overline{w}_0 l}{\overline{u}_0 h},\quad \pi_2=\frac{w_0' l}{u_0' h},\quad \pi_3=\frac{\rho_0' l}{\overline{\rho}_0 t_0 u_0'}.$$

Стационарные уравнения движения запишутся (если принять безразмерные числа, имеющие порядок единицы, $\pi_1 = 1$, $\pi_2 = 1$) в виде

$$\mathrm{Ro}\left[\overline{u}\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}+\left(\frac{u_0'}{\overline{u}_0}\right)^2\left(\frac{\partial\overline{u'^2}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{u'v'}}{\partial y}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial\overline{u'w'}}{\partial z}\right)\right]-f\overline{u}=-\frac{\mathrm{Eu}\,\mathrm{Ro}}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial x}+\frac{\mathrm{Ro}}{\mathrm{Re}}\left[\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial x^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial y^2}+\left(\frac{l}{h}\right)^2\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2}\right]; \qquad (2.19)$$

$$\mathrm{Fr}\left(\frac{h}{l}\right)^2\left[\overline{u}\frac{\partial\overline{w}}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial\overline{w}}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial\overline{w}}{\partial z}+\left(\frac{u_0'}{\overline{u}_0}\right)^2\left(\frac{\partial\overline{w'u'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{w'v'}}{\partial y}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\partial\overline{w'^2}}{\partial z}\right)\right]=-1-\frac{Fr\,Eu}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{p}}{\partial z}+\frac{\mathrm{Fr}}{\mathrm{Re}}\left(\frac{h}{l}\right)^2\left[\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial y^2}+\left(\frac{l}{h}\right)^2\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial z^2}\right]. \qquad (2.20)$$

Здесь $\mathrm{Re}=\dfrac{\overline{u}_0 l}{\nu}$ — *критерий Рейнольдса*; $\mathrm{Fr}=\dfrac{\overline{u}_0^2}{gh}$ — *критерий Фруда*; $\mathrm{Eu}=\dfrac{\overline{p}_0}{\overline{\rho}_0\overline{u}_0^2}$ — *критерий Эйлера*; $\mathrm{Ro}=\dfrac{\overline{u}_0}{f_0 l}$ — *критерий Россби (Кибеля)*; $\pi_4=\dfrac{h}{l}$, $\pi_5=\dfrac{u_0'}{\overline{u}_0}$.

В рассмотренных уравнениях комплексы Re, Fr, Fu, Ro — критерии комплексного типа, а π_4 и π_5 — критерии параметрического типа. Комплексы π_1, π_2 представляют собой произведения параметрических критериев.

Нестационарные уравнения движения можем записать в безразмерном виде следующим образом:

$$\frac{1}{f_0 t_0}\frac{\partial u'}{\partial t}+\mathrm{Ro}\left\{\overline{u}\frac{\partial u'}{\partial x}+\overline{v}\frac{\partial u'}{\partial y}+\overline{w}\frac{\partial u'}{\partial z}+u'\frac{\partial\overline{u}}{\partial x}+v'\frac{\partial\overline{u}}{\partial y}+\right.$$

$$+ w' \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} + \frac{u'}{\bar{u}_0 \bar{\rho}} \left[\frac{\partial (\bar{\rho}\, \overline{u'u'} - \bar{\rho}\, u'u')}{\partial x} + \frac{\partial (\bar{\rho}\, \overline{u'u'} - \bar{\rho}\, u'v')}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial (\bar{\rho}\, \overline{u'w'} - \bar{\rho}\, u'w')}{\partial z} \right]\Bigg\} - f u' = - \frac{\mathrm{Eu}' \, \mathrm{Ro}'}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\mathrm{Ro}}{\mathrm{Re}} \left[\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y'} + \left(\frac{l}{h} \right)^2 \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \right]. \tag{2.21}$$

$$\mathrm{Fr}' \left(\frac{u'_0}{\bar{u}_0} \right) \left(\frac{h}{l} \right)^2 \left\{ \frac{l}{\bar{u}_0 t_0} \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial w'}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial w'}{\partial z} + u' \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \right.$$

$$+ v' \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + w' \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} + \frac{u'_0}{\bar{u}_0} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho}\, \overline{w'u'} - \bar{\rho}\, w'u') + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}\, \overline{w'u'} - \bar{\rho}\, w'v') + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho}\, \overline{w'^2} - \bar{\rho}\, w'^2) \right] \right\} =$$

$$= - \frac{\mathrm{Eu}' \, \mathrm{Fr}'}{\bar{\rho}} \left(\frac{u'_0}{\bar{u}_0} \right)^2 \frac{\partial p'}{\partial z} - \rho' + \frac{\mathrm{Fr}'}{\mathrm{Re}} \frac{u'_0}{\bar{u}_0} \left(\frac{h}{l} \right)^2 \left[\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} + \left(\frac{l}{h} \right)^2 \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} \right]. \tag{2.22}$$

Итак, для нестационарного движения помимо Ro и Re имеем критерии, аналогичные соответствующим критериям, выведенным из стационарных уравнений:

$\mathrm{Ro}' = \dfrac{u'_0}{f_0 l}$ — *«пульсационный» критерий Россби;*

$\mathrm{Fr}' = \dfrac{\bar{u}_0^2 \bar{\rho} \bar{\rho}_0}{g h \rho'_0}$ — *«плотностной» критерий Фруда;*

$\mathrm{Eu}' = \dfrac{p'_0}{\bar{\rho}_0 (u'_0)^2}$ — *«пульсационный» критерий Эйлера;*

$\mathrm{Sh} = \dfrac{l}{t_0 u_0}$ — *критерий Струхаля;*

а также критерий $\pi_7 = \dfrac{1}{f_0 t_0}$.

Обычно вместо напряжений Рейнольдса используют выражения, связывающие их со скоростями деформации по обобщенному закону Ньютона, вводя коэффициенты горизонтальной и вертикальной вязкости A_l и A_z.

В этом случае справедливы следующие безразмерные соотношения:

$$-\bar{\rho}\left(\frac{u_0'}{\bar{u}_0}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\right)=\frac{1}{\mathrm{Re}^*}\left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}+\frac{A_z}{A_l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}\right]; \qquad (2.23)$$

$$-\bar{\rho}\left(\frac{u_0'}{\bar{u}_0}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}\right)=\frac{l}{\mathrm{Re}^* h}\left[\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}+\frac{A_z}{A_l}\left(\frac{l}{h}\right)^2\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}\right]. \qquad (2.24)$$

Здесь критерий $\mathrm{Re}^*=\frac{\bar{\rho}_0\bar{u}_0 l}{A_l}$ может быть рассмотрен как аналог критерия Рейнольдса для молекулярного трения. Его обычно называют *критерием Буссинеска.*

Из уравнений (2.19) с учетом выражения (2.23) можно получить критерий Экмана (Ek):

$$\mathrm{Ek}=\frac{\mathrm{Re}^*}{\mathrm{Ro}}\,\frac{A_l}{A_z}\left(\frac{h}{l}\right)^2=\frac{f_0\bar{\rho}_0 h^2}{A_z},$$

которым определяется отношение кориолисовых сил к интенсивности вертикального переноса количества движения, а из выражения (2.22) — критерий Струхаля

$$\mathrm{Sh}=\frac{1}{f_0 t_0}\cdot\frac{1}{\mathrm{Ro}}=\frac{l}{t_0 u_0}.$$

Если за характерные размеры величин выбрать их максимальные значения, то безразмерные переменные будут изменяться в пределах от нуля до единицы. При этом с помощью безразмерных комплексов Re, Ro, Fr, Sh и других, полученных из рассматриваемых уравнений, можно оценить роль участвующих в процессе сил.

С другой стороны, полученные адромные критерии можно использовать для определения таких горизонтальных и вертикальных масштабов процессов, при которых те или иные члены уравнений становятся соизмеримыми с единицей.

Каждый из безразмерных комплексов, являющихся критериями подобия, имеет простой физический смысл, представляя собой меру отношения соответствующих сил, и определяет важные свойства процесса. Отношение инерционных сил, зависящих от пространственного изменения скорости, к силе Кориолиса выражает критерий Ro, к силе внутреннего трения — критерий Re, а к интенсивности горизонтального турбулентного переноса количества движения — критерий Re*. Критерий Струхаля (являющийся *критерием гомохронности*, который в данном случае обычно записывается в виде $\mathrm{Ho} = \frac{1}{\mathrm{Sh}} = \frac{\overline{u}_0 t_0}{l}$) выражает отношение локальной составляющей ускорения к конвективной и устанавливает соответствие между характерным значением времени t_0 и длительностью $\frac{l}{\overline{u}_0}$. Отношение $\frac{l}{\overline{u}_0}$ определяет темпы изменений, возникающих в среде вследствие ее движения, и представляет собой промежуток времени, в течение которого частицы, движущиеся с постоянной скоростью $\overline{u}_0$, проходят расстояние l.

Критерий Эйлера $\mathrm{Eu} = \frac{\overline{p}_0}{\overline{\rho_0}\,\overline{u_0^2}}$ выражает отношение силы давления к пространственной инерционной силе или давления к удвоенному динамическому напору $(\overline{\rho_0}\,\overline{u_0^2})$. Отметим, что в уравнения входит не давление, а производная от него. Помимо этого в задачах движения несжимаемой жидкости обычно требуется определить перепады давления, а не сами давления. Поэтому при составлении критерия Eu можем выбирать не характерный размер давления, а характерный размер перепадов давления.

В случае несжимаемой жидкости кинематические условия процесса независимы от давления. В то время как силы, действующие на единицу массы — инерционная, Кориолиса и трения, — определяются заданием поля скорости, а сила тяжести постоянная, сила давления не зависит непосредственно от распределения скорости. Однако, если все силы, за исключением силы давления, могут быть определены на основании краевых кинематических условий процесса, то сила давления при этом получает возможность однозначного выражения. Следовательно, если краевые условия не содержат никаких сведений о давлении, то динамические условия подлежат определению. Значения давления на границах потоков являются искомыми, и в этом случае невозможно задать ни одного характерного размера p_0 (параметрического значения). Поэтому безразмерное давление может быть построено только в виде относительной переменной комплексного типа, в результате чего получаем *число Эйлера*:

$$\mathrm{Eu} = \frac{\overline{p}}{\overline{\rho_0}\,\overline{u_0^2}}.$$

Следовательно, критерий Эйлера в рассматриваемом случае заранее, до решения задачи, применить нельзя. Он является зависимым критерием (числом Эйлера).

Поэтому в потоках несжимаемой жидкости число Эйлера является функцией кинематических критериев подобия Рейнольдса, гомохронности, Фруда и турбулентности (π_5):

$$\mathrm{Eu} = f(\mathrm{Ho}, \mathrm{Fr}, \mathrm{Re}, \pi_5).$$

Критерий Эйлера становится независимым (определяющим), если по роду задачи требуется найти давление в определенных точках области. Переход критерия Эйлера в разряд независимых определяется соответствующими краевыми условиями, которые позволяют ввести характерный размер давления.

При рассмотрении процессов тепло- и массопереноса в океане необходимо дополнить систему уравнений уравнениями теплопроводности и диффузии солей:

$$\frac{dT}{dt} = K_{Tz} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + K_{Tl} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (2.25)$$

$$\frac{dS}{dt} = K_{Sz} \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} + K_{Sl} \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right), \quad (2.26)$$

где T, S — осредненные значения потенциальной температуры и солености, а K_{Tl}, K_{Tz}, K_{Sl}, K_{Sz} — коэффициенты турбулентного обмена теплом и количеством вещества.

Введя характерные размеры T_0 и S_0, получим из уравнений (2.25) и (2.26) безразмерные комплексы (критерии подобия)

$$\mathrm{Sh} = \frac{l}{\overline{u}_0 t_0}, \quad \pi_7 = \frac{\overline{u}_0 l}{K_{Tl}}, \quad \pi_8 = \frac{\overline{u}_0 h^2}{l K_{Tz}},$$

$$\pi_9 = \frac{\overline{u}_0 l}{K_{Sl}}, \quad \pi_{10} = \frac{\overline{u}_0 h^2}{l K_{Sz}}. \quad (2.27)$$

Критерии $\pi_7 - \pi_{10}$ имеют сходство с критериями Буссинеска, Физические константы в их знаменателях представляют собой соответственно кинематические коэффициенты турбулентного обмена теплотой, количеством вещества и турбулентной вязкости.

Так же как при молекулярном переносе критерию Рейнольдса соответствует *критерий Пекле* $\mathrm{Pe} = \frac{\overline{u}_0 l}{a}$, характеризующий молекулярный перенос теплоты (a — коэффициент молекулярной температуропроводности), при турбулентном движении критерию

Буссинеска соответствуют *турбулентные критерии Пекле* π_7, π_8 и их аналоги — *диффузионные критерии Пекле* π_9, π_{10}.

Если в системе уравнений, описывающих процессы в океане, присутствуют уравнения диффузии плотности

$$\frac{d\bar{\rho}}{dt} = K_{\rho l}\left(\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial y^2}\right) + K_{\rho z}\frac{\partial^2\bar{\rho}}{\partial z^2}, \qquad (2.28)$$

то появляются критерии

$$\pi_{11} = \frac{\bar{u}_0 l}{K_{\rho l}} \text{ и } \pi_{12} = \frac{\bar{u}_0 h^2}{l K_{\rho z}}, \qquad (2.29)$$

характеризующие обмен плотностными свойствами. Коэффициенты $K_V = \frac{A}{\rho_0}$; K_T; K_S; K_ρ играют одинаковую роль в турбулентных процессах, характеризуя способность полей скорости, температуры, солености и плотности реагировать соответственно на потоки количества движения, теплоты и вещества.

Расширяя круг турбулентных аналогов, введем *турбулентный критерий Прандтля*

$$\mathrm{Pr}^*_\theta = \frac{\pi_7}{\mathrm{Re}^*} = \frac{K_V}{K_{Tl}}$$

и подобный ему *диффузионный критерий Прандтля (критерий Шмидта)*

$$\mathrm{Pr}^*_S = \frac{\pi_9}{\mathrm{Re}^*} = \frac{K_V}{K_{Sl}} \text{ и } \mathrm{Pr}^*_\rho = \frac{\pi_{11}}{\mathrm{Re}^*} = \frac{K_V}{K_{\rho l}}.$$

Такие же выражения можно записать и для коэффициентов вертикального обмена $\frac{A_z}{\rho_0}$, K_{Tz}, K_{Sz}, $K_{\rho z}$. При молекулярном переносе критерий Прандтля представляет собой отношение коэффициентов молекулярного обмена

$$\mathrm{Pr} = \frac{\mathrm{Pe}}{\mathrm{Re}} = \frac{\nu}{a},$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости.

Комбинируя критерии (2.27), (2.29), полученные из нестационарных уравнений теплопроводности, диффузии частиц и диффузии плотности, можно получить критерии подобия, устанавливающие соотношения между скоростью развития различных эффектов, которые влияют на ход процесса. Они характерны для всех нестационарных процессов и относятся к критериям гомохронности (временной однородности). Эти критерии определяются в виде комплексов

$$\pi_{13} = \frac{t_0 K_l}{l^2}, \quad \pi_{14} = \frac{t_0 K_z}{h^2}.$$

Все эти критерии (аналогичные *критерию Фурье* $\mathrm{Fo} = \frac{at_0}{l^2}$, где a — коэффициент молекулярной температуропроводности, который находится из уравнения молекулярной теплопроводности) выражают отношение между характерным значением времени, определяющим обычно темпы изменения условий во внешней относительно к исследуемой системе среде, и темпом перестройки соответствующего поля (температурного, плотностного, поля солености) внутри системы. Это отношение определяет характер развивающегося процесса.

§ 2.2. АНАЛИЗ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ

С помощью рассмотренных безразмерных параметров — критериев подобия — можно оценить роль участвующих в процессе сил и сформировать затем необходимые условия для их моделирования.

При исследовании крупномасштабных океанических течений и оценке при этом численных значений безразмерных параметров обнаруживается равновесие между силой Кориолиса и градиентом давления, что выражается равенством $\mathrm{Eu} \cdot \mathrm{Ro} = 1$ в уравнении (2.19) и вырождением этого уравнения в геострофическое.

При таких характерных значениях параметров анализ уравнений теплопроводности, диффузии солей и плотности приводит к заключению о решающей роли адвективных членов.

Критерий Ro будет соизмерим с единицей, если исследуемое течение ограничено в горизонтальных размерах или расположено в низких широтах. В этом случае члены уравнений (2.19), включающие в себя напряжения Рейнольдса, соизмеримы с наибольшими членами, когда флуктуации скорости превышают их средние значения для стационарного потока $(u_0' > \overline{u_0})$ или напряжения Рейнольдса быстро меняются с расстоянием.

Критерии Re и Fr становятся равными единице при малых горизонтальных и вертикальных масштабах движения, поэтому при рассматриваемых характерных размерах молекулярным трением и вертикальными ускорениями можно пренебречь. Получаем уравнения гидростатики.

После замены рейнольдсовых напряжений соответствующими выражениями, согласно равенствам (2.23) и (2.24), получаем условие соизмеримости турбулентного обмена количеством движения и конвективных ускорений. Для этого необходимо, чтобы $\mathrm{Re}^* = 1$, т. е.

$$A_l \sim \overline{\rho}_0 \frac{\overline{u}_0}{l} \cdot l^2,$$

где $\frac{\overline{u}_0}{l}$ — характерная величина скорости деформации среднего потока.

Аналогично при учете вертикального обмена количеством движения получим

$$A_z \sim \overline{\rho}_0 \frac{\overline{u}_0}{l} \cdot h^2.$$

Сила турбулентного трения превысит по значению инерционную силу, связанную с конвективным ускорением, при $\mathrm{Re}^* < \mathrm{Ro}$, т. е. когда

$$A_l > \overline{\rho}_0 f_0 l^2.$$

Из анализа нестационарных движений становится очевидным, что локальные ускорения в уравнении движения сравнимы с единицей при масштабе времени, имеющем порядок половины маятниковых суток.

При малости $f_0 t_0$ по сравнению с единицей инерционная сила, связанная с локальным ускорением, будет превышать силу Кориолиса и может быть уравновешена только градиентом давления. Конвективные ускорения становятся одного порядка с локальными при

$$\mathrm{Ro} \sim \frac{1}{f_0 t_0}, \text{ т. е. } \overline{u}_0 \sim \frac{l}{t_0}.$$

Если принять за l длину волны при нестационарном движении, а за t_0 — ее период, то следует вывод о недопустимости пренебрежения конвективными ускорениями при приближении скорости стационарного потока к фазовой скорости волн в нестационарном движении.

Члены уравнения (2.21), характеризующие взаимодействие между стационарными и нестационарными движениями, при $\mathrm{Ro} \to 1$ имеют порядок величин одинаковый с силой Кориолиса и градиентом давления; следовательно, в системах узких течений этим взаимодействием нельзя пренебречь.

Дивергенцию потоков количества движения в уравнении (2.21), являющуюся частью количества движения, передаваемого от стационарного к нестационарному потоку, необходимо учитывать при значении $\mathrm{Ro} \frac{u_0'}{u_0}$ близком к единице.

В уравнении (2.22) критерий Fr′ для океанических течений может приближаться к единице. Однако из-за малости h/l вертикальные ускорения становятся существенными лишь при высокочастотных колебаниях.

Моделирование процессов, представляющее собой прежде всего метод экспериментального исследования, состоит в замещении изучаемого объекта подобным ему — моделью с соблюдением условий подобия, выраженных равенством критериев подобия в обеих системах или равенством единице индикаторов подобия. Эти условия подобия определяют и в некоторой степени ограничивают свободу выбора параметров модели, темпа развития процессов в ней, режимных характеристик.

Поскольку на основе анализа уравнений, описывающих процессы в океане, было получено несколько критериев подобия, удовлетворение условий подобия при этом сопряжено с существенными трудностями.

В большинстве случаев не представляется возможным удовлетворить на лабораторных установках все критерии подобия, число которых зависит от начальных и граничных условий, отличающихся в конкретных задачах большим разнообразием.

В качестве примера рассмотрим частный случай моделирования стационарного движения, в котором определяющими будут критерии Re, Fr, Eu. Тогда условия подобия запишутся в виде индикаторов подобия:

$$\frac{C_v^2}{C_l C_g} = 1, \quad \frac{C_p}{C_\rho C_v^2} = 1, \quad \frac{C_\rho C_l C_v}{C_\mu} = 1.$$

Здесь константы подобия выражают отношения одноименных параметров натуры и модели. Если модель неподвижна относительно Земли, то $C_g = 1$, при условии ее заполнения водой имеем $C_\rho = 1$, $C_\mu = 1$. Отсюда $C_v = 1$, $C_l = 1$, $C_p = 1$. Модель и натура тождественны, поэтому моделирование реальных бассейнов исключено.

Уменьшим число определяющих критериев, выразив условие подобия в виде

$$\mathrm{Fr} = \mathrm{idem}, \ \mathrm{R} = \mathrm{idem}.$$

Тогда

$$\frac{C_v^2}{C_l} = 1, \quad \frac{C_l C_v}{C_\nu} = 1 \quad \text{и} \quad C_l^{3/2} = C_\nu = \frac{\nu_{\text{натура}}}{\nu_{\text{модель}}}.$$

Так как обычно $C_l \gg 1$, то $C_\nu \gg 1$.

Например, при $C_l = 50$ $\nu_{\text{натура}} = 354\,\nu_{\text{модель}}$. Капельных жидкостей столь малой вязкости в природе нет. Следовательно, одновременно удовлетворить критериям Fr и Re невозможно.

Использование при моделировании жидкости с плотностью, отличающейся от плотности воды (вязкость будем считать той же самой), т. е. при $C_\rho \neq 1$, приведет к зависимостям:

$$\frac{C_v^2}{C_l} = 1\,, \quad C_\rho C_l C_v = 1\,, \quad C_\rho = \frac{1}{C_l^{3/2}}\,.$$

Если $C_l > 1$, тогда $C_\rho < 1$.

Необходимо при этом для модели выбрать жидкость с большей плотностью, чем плотность воды. Для этой цели в частных случаях можно использовать ртуть, плотность которой превышает плотность воды в 13,6 раза. Однако ртуть мало пригодна для лабораторных экспериментов — она ядовита и непрозрачна.

Вариант, предусматривающий удовлетворение критериям Re и Fr на вращающейся модели, трудно осуществить технически. При этом, когда $C_g \neq 1$,

$$C_\nu = 1, \quad C_g = \frac{1}{C_l^3}\,, \quad C_v = C_l^{-1}\,.$$

Проще и плодотворнее является использование автомодельности течения по Рейнольдсу, когда в некоторой области значений этого критерия характеристика потока не зависит от него. Опыты показали, что значительное уменьшение масштаба модели мало изменяет условия подобия. Пределом уменьшения масштаба является требование не понижать скорости течения ниже критической. Для этой цели вводят искаженный масштаб модели, изменяя высоту в меньшей степени, чем горизонтальные размеры.

Итак, одновременно удовлетворить нескольким критериям подобия, т. е. смоделировать все силы, представленные в уравнениях движения, невозможно. Однако в практических задачах действующие силы имеют разный порядок величин. Поэтому частью из них можно пренебречь, что упрощает эксперимент.

В ряде задач не все из оставшихся критериев подобия являются определяющими, т. е. выражаемыми через характерные величины, которые задаются граничными и начальными условиями. При этом неопределяющие или зависимые критерии будут функциями определяющих. Отсутствие определяющих критериев приводит к единственному условию подобия — выполнению тождественности граничных условий.

Геометрическое и кинематическое подобие на границе моделируемой области влечет за собой динамическое подобие, и в результате — автомодельность движения, при котором критерии подобия выражаются константой.

Примером автомодельности движения в океане является геострофическое течение, когда наблюдается равновесие составляющих силы Кориолиса и градиента давления:

$$f \rho v = \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$f \rho u = -\frac{\partial p}{\partial y}.$$

После преобразований уравнений можно получить выражение:

$$f \rho \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0.$$

Для подобных в натуре и на модели движений можно записать:

$$f_{\text{н}} \rho_{\text{н}} \left(\frac{\partial v_{\text{н}}}{\partial y_{\text{н}}} + \frac{\partial u_{\text{н}}}{\partial x_{\text{н}}} \right) = f_{\text{м}} \rho_{\text{м}} \left(\frac{\partial v_{\text{м}}}{\partial y_{\text{м}}} + \frac{\partial u_{\text{м}}}{\partial x_{\text{м}}} \right),$$

где индексами «н» и «м» обозначены физические характеристики явления соответственно в натуре и на модели.

Введя константы подобия

$$C_f = \frac{f_{\text{н}}}{f_{\text{м}}}, \quad C_\rho = \frac{\rho_{\text{н}}}{\rho_{\text{м}}}, \quad C_v = \frac{u_{\text{н}}}{u_{\text{м}}} = \frac{v_{\text{н}}}{v_{\text{м}}}, \quad C_l = \frac{x_{\text{н}}}{x_{\text{м}}} = \frac{y_{\text{н}}}{y_{\text{м}}},$$

получим

$$\frac{C_f C_v C_\rho}{C_l} \left(\frac{\partial v_{\text{м}}}{\partial y_{\text{м}}} + \frac{\partial u_{\text{м}}}{\partial x_{\text{м}}} \right) = 0.$$

При любом значении индикатора $\frac{C_f C_v C_\rho}{C_l}$ движение удовлетворяет условиям подобия.

§ 2.3. ИССЛЕДОВАНИЕ НА МОДЕЛЯХ ВЕТРОВОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ

Для моделирования ветровой циркуляции необходимо имитировать передачу энергии ветра водной поверхности и диссипацию энергии у твердых границ, вследствие чего существенное значение приобретает вязкость среды. Поэтому в основу моделирования должен быть положен критерий подобия Рейнольдса.

Механизм передачи энергии ветра водной среде на модели и в натуре существенно различен. Передача энергии движения через взволнованную поверхность моря не может быть количественно воспроизведена из-за искажения вертикального масштаба и преувеличенного значения на модели сил поверхностного натяжения, так как малые скорости ветра вызывают не гравитационные, а капиллярные волны.

При большом разгоне воды и установившемся процессе полагают, что поверхность воды движется со скоростью 2—3% от скорости устойчивого ветра, измеренного в слое от 3 до 10 м над поверхностью моря. Опыт показывает, что при таком грубом приближении ветровые течения на модели обнаруживают вполне удовлетворительное соответствие натуре по горизонтальному распределению и относительной интенсивности, хотя количественное подобие и не соблюдается.

Ввиду того, что ветровой коэффициент не моделируется, нет нужды в регистрации абсолютных значений скорости во время эксперимента. Необходимо измерение относительных скоростей ветра, которые, так же как и поперечная неравномерность ветра, оказывают решающее значение на формирование картин течения. Поэтому не имеет смысла требовать от модельного эксперимента совпадения таких количественных характеристик, как ветровой коэффициент, вертикальный градиент скорости, время развития и затухания течения и т. д.

Моделирование ветровых течений осложняется еще тем, что в формировании морских течений молекулярная вязкость не является существенной. Определяющую роль при этом играет турбулентная вязкость, переменная во времени и в пространстве, которая входит в «турбулентный критерий Рейнольдса» (критерий Буссинеска)

$$\mathrm{Re}^* = \frac{\overline{u}_0 l}{K_V},$$

где K_V — кинематический коэффициент турбулентной вязкости.

В мелком море, где диссипация энергии происходит в основном у дна, можно принять следующее:

$$\mathrm{Re}^* = \frac{\overline{u}_0 h^2}{l K_V}.$$

При характерных размерах $\overline{u}_0 \cong 1\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$, $l \cong 10^5$ м, $h \cong 100$ м, $K_V \cong 10^{-2}\ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ критерий Буссинеска имеет значение порядка $\mathrm{Re}^* \cong 10$.

При представлении на модели такого турбулентного потока ламинарным, толщиной около 1,5 см, движущимся со скоростью порядка 1 см/с, отношение инерционных к вязкостным силам, выражаемое числом Рейнольдса, будет порядка $\mathrm{Re} \cong 10^2$, что не на много отличается от натурного.

При моделировании крупномасштабных явлений, имеющих характерные размеры $l \cong 10^7$ м, $K_{vl} \cong 10 \ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$, вязкостные силы приобретают чрезмерно большое влияние.

Действительно, процессы планетарного масштаба необходимо моделировать на вращающихся установках. Константа подобия времени (C_t) при этом выбирается в пределах $C_t = 10^4 \div 10^5$.

Тогда константа подобия динамической вязкости имеет значение

$$C_A = \frac{A_{l\,\text{натура}}}{A_{l\,\text{модель}}} = \frac{C_l^2}{C_t} = \frac{10^{14}}{10^4} = 10^{10},$$

а коэффициент вязкости на модели должен быть равен

$$K_{vl\,\text{модель}} = 10^{-9} \ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}.$$

Коэффициент молекулярной вязкости воды при 20° С равен $\nu = 10^{-6} \ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

Турбулентность при $K_{vl} = 10 \ \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ на модели будет неощутима.

Поэтому для воспроизведения турбулентности на модели необходимо либо увеличить константу подобия времени, либо уменьшить C_l. Увеличение C_t ограничено значением 10^5, а C_l по техническим причинам не может быть меньше 10^6.

На моделях, выполненных в искаженных пространственных масштабах, силы трения обычно имеют меньшее относительное значение, чем в натуре, поэтому для бóльшего соответствия этих сил приходится искусственно турбулизировать потоки введением дополнительных шероховатостей или форсированием скорости на модели.

Ветровое поле воспроизводится либо с помощью патрубков, либо вентиляторов, либо путем отсасывания воздуха из пространства между водной поверхностью и перекрытием, ограничивающим модель сверху, чем достигается большая поперечная равномерность скоростей ветра.

При моделировании ветровых нагонов с учетом вращения Земли решающее значение приобретает соблюдение равенства в натуре и на модели числа Экмана:

$$\text{Ek} = \frac{f_0 h^2}{A_z}.$$

Циркуляцию во вращающейся жидкости можно создать за счет движения граничных поверхностей модели. Течения, создаваемые во вращающемся резервуаре с жидкостью с помощью расположенного на ее поверхности горизонтального диска, вращающегося с несколько измененной скоростью, эффективно моделируют океаническую циркуляцию, возбуждаемую касательным напряжением ветра. Во время переходного режима при изменении скорости вращения диска около него возникает сдвиговый слой и в результате формируется квазистационарный экмановский пограничный слой.

При вращении жидкости в усеченном цилиндре, основание которого имеет наклон, неустановившийся режим связан с образованием волн Россби. Процессы, возникающие в этом случае на модели, приобретают сходство с явлениями, отмеченными при изучении океанических течений на β-плоскости. Надо отметить, что изменение глубины усеченного цилиндра влияет на характер течений на модели так же, как широтное изменение силы Кориолиса на океаническую циркуляцию. Здесь наблюдается одинаковая роль параметра Кориолиса в океанической циркуляции и h^{-1} в осредненных по глубине течениях на модели.

Следовательно, можно воспроизводить в лаборатории океанические течения путем соответствующего подбора рельефа дна на вращающейся модели соответственно изменению параметра Кориолиса с широтой.

Неустановившийся режим, возникающий в усеченной цилиндрической модели при изменении скорости вращения поверхностного диска, имитирующего касательное напряжение ветра, связан с переносом завихренности волнами Россби и является аналогом перехода от одной стационарной циркуляции к другой.

Эксперименты, выполненные на вращающейся модели Атлантического океана, позволили отметить крупномасштабные особенности планетарной циркуляции в океане, формирование бокового погранчного слоя, аналогичного Гольфстриму, и его отрыв от побережья у мыса Хаттерас.

На формирование планетарных океанических течений большое влияние оказывают нелинейные процессы. Исследование их связано с рассмотрением инерционных пограничных слоев, существование которых определяется относительными значениями конвективных членов в уравнениях.

При малых, но не равных нулю Ro и Ek^{-1} соотношение этих чисел определяет структуру вязкого и инерционного пограничных слоев.

Для исследования роли нелинейных эффектов используются лабораторные эксперименты на вращающихся моделях с переменной глубиной. При очень малых значениях числа Россби картина течений такова, какой она должна быть согласно линейной теории. По мере увеличения Ro центр вихря на модели резко перемещается в направлении течения в пограничном слое. В случае дальнейшего увеличения Ro центр вихря мало меняет свое положение, но при этом усиливается нелинейность пограничного слоя, который отделяется от стенки, проникая во внутреннюю область в виде широкого меандрирующего потока. В дальнейшем происходит флюктуация меандр и движение волн Россби поперек этой области при сохранении стационарного движения в остальной части бассейна.

§ 2.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Моделирование процессов в среде с неоднородной плотностью по критерию Фруда должно проводиться с соблюдением условия: $C_\rho = 1$, $C_{\Delta\rho} = \dfrac{\Delta\rho_{\text{натура}}}{\Delta\rho_{\text{модель}}} = 1$. В этом случае получается удовлетворительный результат при исследовании кинематики процесса, например при рассмотрении выклинивания солей морской воды в пресноводном эстуарии. Скорости, объемы и время поступления водных масс будут получены с достаточной точностью.

Для учета разности плотностей жидкости в условиях стратификации $\Delta\rho$ при моделировании используют понятие плотностной скорости

$$u_\Delta = \left(\frac{\Delta\rho}{\bar{\rho}} gh\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $\bar{\rho}$ — средняя плотность.

Этой величине пропорциональны скорость распространения длинных внутренних волн и начальная скорость движения фронта жидкости повышенной плотности.

Используя плотностную скорость, вводят *плотностное число Рейнольдса*, равное

$$\mathrm{Re}_\rho = \frac{u_\Delta h}{\nu}.$$

В частности, при изучении распространения клина соленой воды против течения реки получена зависимость между безразмерными величинами в виде

$$\frac{u}{u_\Delta} = F_1\left(\frac{L}{h},\ \frac{u_p}{u_\Delta},\ \mathrm{Re}_\rho,\ \frac{h}{B}\right).$$

Здесь u — скорость фронта распространения соленой воды; h — глубина речного потока; B — ширина потока; $u_р$ — скорость течения реки; L — длина клина соленой воды.

Длина сформировавшегося неподвижного клина солености L_0 находится из соотношения

$$\frac{L_0}{h} = F_2\left(\frac{u_p}{u_\Delta},\ \mathrm{Re}_\rho,\ \frac{h}{B}\right).$$

Приведенные соотношения выражают структуру зависимостей между безразмерными параметрами в рассматриваемом процессе. Справедливость этих соотношений подтверждена экспериментами при разных значениях скорости реки, глубины и ширины ее русла, плотности морской воды. На основании лабораторных экспериментов находится и вид функциональных зависимостей между безразмерными величинами. Так, для оценки длины клина солености в широких каналах, сечения которых приближаются по своему характеру к сечениям рек, получена из экспериментальных данных зависимость

$$\frac{L_0}{h} = 6{,}0\left(\frac{u_\Delta h}{\nu}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{2u_\mathrm{p}}{u_\Delta}\right)^{-\frac{5}{2}}.$$

Для определения высоты клина солености h_s на расстоянии l от устья реки относительно высоты клина в устье реки h_0 получено соотношение

$$\frac{h_s}{h_0} = F_3\left(\frac{l}{L_0}\right).$$

Это соотношение не зависит от сечения русла реки, скорости ее течения и плотности морской воды.

Отношение скоростей $\left(\frac{u}{u_\Delta}\right)^2 = \frac{u^2}{\frac{\Delta\rho}{\rho} gh} = \mathrm{Fr}^*$ является числом Фруда, в котором g умножено на $\frac{\Delta\rho}{\rho}$.

Это отношение, названное *плотностным числом Фруда*, аналогично *числу Ричардсона*

$$\mathrm{Ri} = \frac{g\frac{\partial\rho}{\partial z}}{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

В качестве примера моделирования потоков с различной плотностью в море рассмотрим эксперименты, выполненные в Лаборатории водных исследований Ленинградского гидрометеорологического института.

Так как до этого времени не было опыта лабораторного изучения проливов типа Босфор, особенностью которых является разнонаправленное движение потоков по вертикали, использовался опыт моделирования донных плотностных течений.

Двухслойная система разнонаправленных течений вызвана тем, что градиент давления с глубиной меняет знак. Вблизи поверхности он связан с продольным наклоном уровня, а на глубине — с разностью плотностей соединяемых бассейнов, значительная стратификация в таких проливах связана с тем, что в них встречаются водные массы различного происхождения.

По результатам эксперимента были получены некоторые важные соотношения, характеризующие структуру разнонаправленных потоков, при этом сам процесс схематизировался, так как не учитывалось влияние внешних воздействий по длине пролива. Были определены изменения глубины расположения максимума скорости в нижнем потоке, соотношение средних и максимальных скоростей в верхнем и нижнем течениях, толщины слоев перемешивания относительно границы раздела течений для верхнего и нижнего потоков и др. Эти соотношения определялись как функции плотностного критерия Фруда в виде

$$\mathrm{Fr}^* = \frac{(u_{\text{в}} + u_{\text{н}})^2}{g\,(h_{\text{в}} + h_{\text{н}})\,\dfrac{\rho_{\text{н}} - \rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{н}}}}, \qquad (2.30)$$

где $u_{\text{в}}$, $u_{\text{н}}$ — скорости верхнего и нижнего течений соответственно; $\rho_{\text{в}}$, $\rho_{\text{н}}$ — плотности верхнего и нижнего потоков; $h_{\text{в}}$, $h_{\text{н}}$ — толщины верхнего и нижнего слоев.

Особенно интересны результаты опытов по исследованию условий запирания нижнебосфорского течения и изучению причин различного растекания средиземноморских вод в прибосфорском районе Черного моря.

Систематическое поступление средиземноморских вод в Черное море показано в работах В. А. Водяницкого, А. К. Богдановой и других авторов, были известны также отдельные случаи, когда средиземноморские воды не поступали в Черное море. В 1946 г. Иллиот и Ильгаз предположили, что средиземноморские воды запираются у северного босфорского порога и в основном не поступают в Черное море. Эксперименты, выполненные для условий, близких к существующим в Босфоре, показали, что средиземноморский поток будет запираться у северного входа в пролив при средней по глубине скорости черноморского потока в этом месте не меньшей, чем 0,9 м/с. Гидрологический же анализ условий на северном входе в Босфор показывает, что такой скорости верхнебосфорское течение может достигать лишь в течение трех-четырех дней в году.

Гидрологические съемки прибосфорского района Черного моря свидетельствуют о различном характере растекания здесь средиземноморских вод. Так как разность плотностей втекающей водной массы и окружающих вод от съемки к съемке менялась мало, то различное растекание может быть связано лишь с воздействием меняющегося по направлению и скорости основного черноморского течения.

Опыты выполнялись в лотке со стеклянными стенками (рис. 2.1).

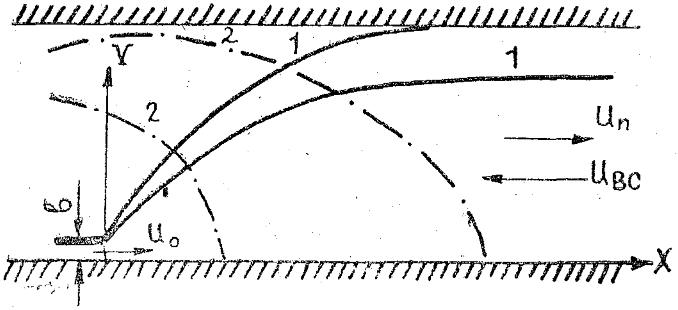

Рис. 2.1. Схема опытов при исследовании влияния течений на поведение плотностного потока (b — полуширина источника, $u_п$ — осредненная на участке скорость попутного течения, $u_{вс}$ — осредненная скорость встречного течения):

1 — струя при попутном течении; *2* — струя при встречном течении

Некоторые результаты экспериментов представлены в табл. 2.1 и на рис. 2.2.

Таблица 2.1

Номера кривых на рис. 2.2	Расширение струй							
	1	2	3	4	5	6	7	8
$\rho_н - \rho_в$ (г/см^3)	0,02	0,02	0,02	0,005	0,01	0,01	0,005	0,005
Уклон дна	10°	0° 10′	0° 10′	0° 10′	0° 10′	0° 10′	0° 10′	0° 10′
$u_п$ (см/с)	0,50	2,92	14,30	6,25	—	—	—	—
$u_{вс}$ (см/с)	—	—	—	—	2,63	3,90	4,67	3,90

Итак, результаты опытов показывают решающую роль в трансформации плотностных попутных и встречных течений, что выясняет причины различного растекания вод в предпроливных районах.

Процессы смешения и разбавления двух масс воды требуют более полного соблюдения условий подобия, особенно в том случае, когда вертикальные и горизонтальные масштабы модели не одинаковы. Для этого необходимо удовлетворить критериям Re и Fr, что технически невозможно.

В качестве приближенного метода моделирования можно использовать уменьшение плотностного контраста между слоями, что приведет к более интенсивному перемешиванию. Для оценки

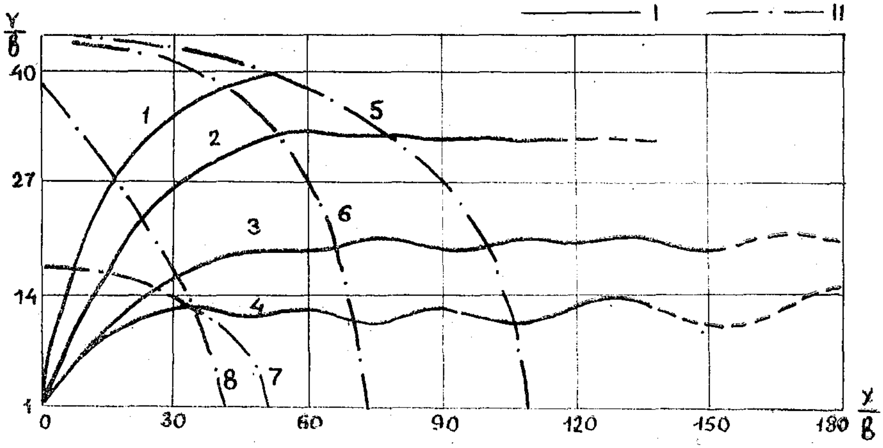

Рис. 2.2. Расширение струй при попутных и встречных течениях (I — попутные, II — встречные).

уменьшения плотностного контраста на модели используют *критерий Ричардсона*

$$\mathrm{Ri} = \frac{g\,\dfrac{\partial \rho}{\partial z}}{\rho\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Если положить $C_\rho = 1$ и $C_g = 1$ и принять $C_v = C_l^{\frac{1}{2}}$, как для неискаженной модели Фруда, получим из критерия Ричардсона

$$C_{\Delta\rho} = \frac{C_l}{C_z}.$$

Большие отклонения горизонтальных и вертикальных масштабов, используемые при моделировании океанических процессов, могут привести к слишком малой контрастности плотности на модели, выходящей за пределы возможности ее измерения существующими приборами. Это обстоятельство налагает определенные условия на выбор горизонтальных и вертикальных масштабов модели.

Создание модели при условии, что $C_\rho \neq 1$, представляет существенные трудности, так как в этом случае возникают нереальные градиенты плотности и внутренние напряжения.

Более реален подогрев поверхности воды, так как он дает непрерывный градиент плотности. Однако этот прием приводит к необходимости контролировать фазовые превращения на поверхности и масштабы горизонтального и вертикального турбулентного перемешивания.

Существует аналогия между вращательным движением однородной жидкости и движением без вращения в условиях стратификации.

В первом случае систему исходных уравнений приводят к безразмерному виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + \mathrm{Ro}\,\vec{v}\cdot\nabla\vec{v} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v} = -\nabla p - \frac{1}{\mathrm{Ek}}\nabla^2\vec{v}.$$

Здесь $\vec{v}$ — скорость движения частицы жидкости, $\vec{\Omega}$ — угловая скорость вращения системы координат, $\mathrm{Ro} = \frac{U}{\Omega l}$, $\mathrm{Ek} = \frac{\nu}{\Omega l^2}$, ν — кинематическая вязкость. Массовая сила, отнесенная к единице массы, предполагается консервативной и вместе с центробежной силой включена в давление p. Переменные расстояние, время, скорость, угловая скорость и давление заменены их нормированными значениями $l\vec{l}$, $\Omega^{-1}t$, $U\vec{v}$, $\Omega\vec{\Omega}$, $\rho\Omega Ulp$, где l, Ω^{-1}, U представляют соответственно характерную длину, время и скорость движения частицы.

При почти «твердом» вращении жидкости, когда движение представляет собой малое отклонение от установившегося состояния вращения, скорости течения относительно малы и $\mathrm{Ro} \ll 1$. В этом случае исходные уравнения запишутся в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v} = -\nabla p - \frac{1}{\mathrm{Ek}}\nabla^2\vec{v},$$

$$\nabla\cdot\vec{v} = 0.$$

Исключением из уравнений скорости получают уравнение в частных производных шестого порядка для давления

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{Ek}}\nabla^2\right)^2\nabla^2 p + 4\frac{\partial^2}{\partial z^2}p = 0. \tag{2.31}$$

К подобному уравнению можно прийти при рассмотрении движения стратифицированной жидкости без вращения.

Для характеристики масштабов движения в этом случае выбирают масштабы длины времени и скорости, равные соответственно l, $\left(\dfrac{l}{\dfrac{\Delta\rho}{\rho_0}g}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\mathrm{Ro}^{\Delta}\left(lg\dfrac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{2}}$, и полагают плотность, температуру и давление равными

$$\rho = \rho_0 + \Delta\rho\,(\rho_0'(z) + \mathrm{Ro}^{\Delta}\rho'),$$

$$T = T_0 + \Delta T\,(T_0(z) + \mathrm{Ro}^{\Delta}T),$$

$$p = \rho_0 g l p_0 + \mathrm{Ro}^{\Delta}\,\Delta\rho g l p.$$

Здесь $\Delta\rho$ — мера стратификации вблизи равновесного состояния, ρ_0, ρ_0', ρ' — значения плотности соответственно средней по всему полю, безразмерной равновесной и безразмерной возмущенной. Малый параметр Ro^{Δ} аналогичен числу Россби во вращающейся системе.

Приведя с помощью введенных характерных масштабов исходные уравнения к безразмерному виду и отбросив все члены с малыми параметрами, получают простейшую систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{v} = -\nabla p - \rho' g + \frac{1}{\mathrm{Ek}^{\Delta}}\nabla^2\vec{v},$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla T_0 = \frac{1}{\mathrm{Ek}^{\Delta}\,\mathrm{Pr}}\nabla^2 T,$$

$$\nabla\vec{v} = 0,$$

$$\rho' = -T,$$

где безразмерный комплекс $\mathrm{Ek}^{\Delta} = \nu\left[\left(\dfrac{\Delta\rho}{\rho_0}\right)gl\right]^{-\frac{1}{2}} l^{-1}$ аналогичен числу Экмана (Ek), Pr — число Прандтля.

Если принять при двухмерном движении $\mathrm{Pr} = 1$ и $\vec{v}\nabla T_0 = w$, то получается уравнение, аналогичное (2.31):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{\mathrm{Ek}^{\Delta}}\nabla^2\right)^2\nabla^2 p + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,p = 0.$$

Здесь координата x, характеризующая расстояние вдоль изопикнической поверхности, идентична координате z в уравнении (2.31), которая определяет расстояние вдоль оси вращения. Эффект формирования столбиков Тейлора — Праудмена во вращающейся жидкости с препятствием на дне должен иметь аналогию в виде скачков уплотнения в стратифицированной среде.

В результате, движения с вращением, которые экспериментально создать гораздо проще, могут быть успешно использованы для имитации движения в стратифицированной жидкости.

§ 2.5. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ПРИБРЕЖНЫХ РАЙОНАХ. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИЛИВНЫХ ЯВЛЕНИЙ

В прибрежных районах морей существенны силы трения и тяжести. Поскольку не удается удовлетворить одновременно критериям Рейнольдса и Фруда, в основе моделирования лежит, как правило, соблюдение условия гравитационного подобия, т. е.

$$\mathrm{Fr} = \frac{u_0^2}{gh} = \mathrm{idem}.$$

Принимая C_g равным единице, можно записать, что $C_v = C_h^{\frac{1}{2}}$.

Модель по Фруду может быть геометрически подобна прототипу (неискаженная модель), тогда $C_l = C_h$, либо $C_h < C_l$ (искаженная модель), что приводит к выражению

$$\frac{C_l}{C_t} = C_h^{\frac{1}{2}}.$$

В итоге для искаженной модели Фруда константы времени и скорости запишутся соответственно в виде

$$C_t = C_l C_h^{-\frac{1}{2}}, \quad C_v = C_h^{\frac{1}{2}},$$

а для неискаженной — $C_t = C_l^{\frac{1}{2}}, \quad C_v = C_l^{\frac{1}{2}}$.

В силу зависимостей между временными и пространственными характеристиками выбор вертикального масштаба для искаженной модели определяется минимальной глубиной, которая на модели должна быть представлена толщиной слоя не менее 1 см. Затем подбирают константы C_l и C_t по формуле $C_l = C_t C_h^{\frac{1}{2}}$ соответственно размерам лаборатории. Временной масштаб при этом является наименее консервативной величиной.

Если моделируемое явление находится в турбулентной области по Рейнольдсу, то необходимо выдержать соответствующий режим и на модели, рассчитанной по Фруду. В этом случае подбирается такой вертикальный масштаб, при котором скорость на модели поддается измерению, а критерий Рейнольдса на модели $\mathrm{Re}_{\text{м}}$ превышает некоторое предельное значение $\mathrm{Re}_{\text{пр}}$. Для водохранилищ, морских устьев рек и прибрежных зон морей это условие записывается в виде

$$\mathrm{Re}_{м} \geqslant \mathrm{Re}_{пр} = \frac{AR_{м}}{\sqrt{r}\,d},$$

где R — гидравлический радиус, а d — величина выступа шероховатости на модели; r — коэффициент сопротивления; $r = 2g/C^2$, C — коэффициент Шези, связанный со скоростью, гидравлическим радиусом и уклоном J выражением $v = C\sqrt{RJ}$; A — коэффициент пропорциональности.

Если при расходах воды, рассчитанных по критерию Фруда, не выдерживается условие $\mathrm{Re}_{м} \geqslant \mathrm{Re}_{пр}$, то прибегают к форсированию расхода воды для перехода в автомодельную область по Рейнольдсу. Величина форсированного расхода находится из выражения:

$$Q_{ф} = \frac{\mathrm{Re}_{пр}\,\nu\,(R \cdot B)_{\mathrm{Fr}}}{R},$$

где $(R \cdot B)_{\mathrm{Fr}}$ — гидравлический радиус и ширина в замыкающих створах модели, рассчитанные по критерию Фруда.

Степень форсирования расхода на искаженной модели Фруда определяется формулой

$$\Phi = \frac{Q_{ф}}{Q_{\mathrm{Fr}}} = \frac{\mathrm{Re}_{пр}\,C_h^{3/2}\,\nu\,B_{натура}}{Q_{натура}} = \frac{C_h^{3/2}}{C_{Re}},$$

где Q_{Fr} — расход воды на модели, рассчитанный согласно критерию Фруда,

$$C_{\mathrm{Re}} = \frac{\mathrm{Re}_{натура}}{\mathrm{Re}_{модель}}.$$

В качестве примера моделирования динамических процессов в прибрежных районах моря без учета силы вращения Земли можно привести исследование на пространственной модели трансформации волны цунами в районе Камчатского залива, которое было проведено в русловой лаборатории Государственного гидрологического института. Конечным результатом исследования являлось определение границ и уровней затопления берега, происходящего вследствие наката длинной волны.

В основу моделирования был положен закон гравитационного подобия (равенство числа Фруда в натуре и на модели). Для проверки соответствия явлений в натуре и на модели использовался критерий гравитационного подобия, полученный на основании анализа экспериментов А. С. Офицеровым:

$$K_g = \frac{h^2}{H\lambda},$$

где h — высота волны на модели; H — глубина воды; λ — длина волны.

Оценка действия сил вязкости на гравитационные волны проводилась с помощью критерия А. С. Офицерова, этот критерий был аналогичен числу Рейнольдса:

$$K_\nu = \frac{h\sqrt{gH}}{\nu}.$$

Моделирование проводилось в три этапа. На первом этапе на мелкомасштабной модели Камчатского залива и прилегающей части Тихого океана исследовалось влияние рельефа дна и местоположения эпицентра цунами на расположение фронта волны при подходе ее к берегу. Мелкомасштабная модель имитировала длинноволновые колебания на акватории площадью 1000×650 км² и была выполнена в искаженном масштабе ($C_l = 65\,000$, $C_h = 12\,500$). Моделирование производилось по критерию Фруда, константы подобия скоростей и времени были приняты равными соответственно

$$C_v = C_h^{\frac{1}{2}} = 112, \quad C_t = 588.$$

На модели был воспроизведен рельеф дна до глубин 7000 м. С помощью пневматического волнопродуктора на участке модели соответствующей зоне очага цунами задавались исходные возмущения уровня, в результате чего воспроизводились длинные волны, сходные по природе с волнами цунами, возникающими при резком поднятии участка дна океана.

На рис. 2.3 изображены положения гребня волны при одном из вариантов имитации исходного возмущения уровня в очаге цунами.

Анализ экспериментов на мелкомасштабной модели позволил выявить решающее влияние рефракции на ориентацию гребня волны при подходе ее к берегу и получить граничные условия на водной границе крупномасштабной модели, на которой проводился второй этап исследований в целях определения границ и уровней затопления береговой зоны в районе города Усть-Камчатска при волнах различной высоты.

Крупномасштабная модель части Камчатского залива воспроизводила акваторию площадью 90×45 км² до глубины 200 м в искаженном масштабе. Константы подобия были приняты равными

$$C_l = 5000, \quad C_h = 350, \quad C_v = 18{,}7, \quad C_t = 270{,}3.$$

Волны цунами на модели воспроизводились вытеснением объема воды волнопродуктором — металлической трубой, сбрасываемой в воду с заданной высоты, — расположенным, согласно результатам экспериментов на мелкомасштабной модели, параллельно береговой черте.

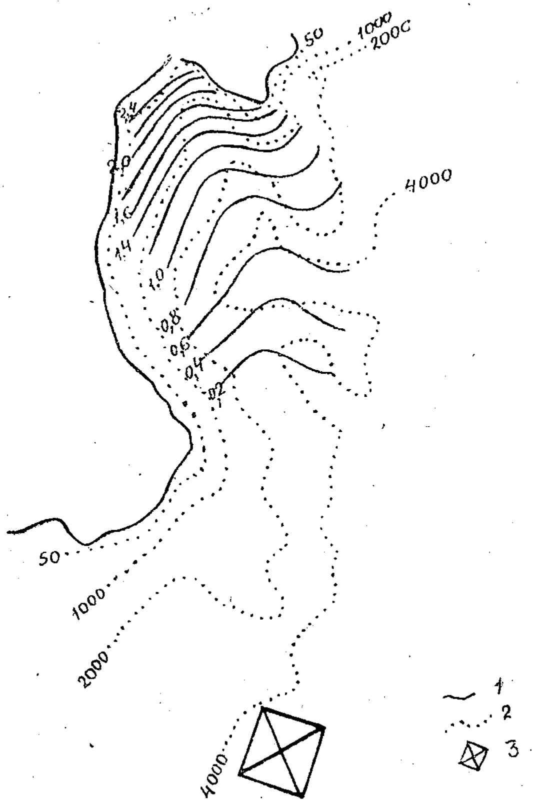

Рис. 2.3. Последовательное положение гребня первой волны через 0,2 с:

1 — положение гребня первой волны; 2 — изобаты; 3 — положение волнопродуктора

На модели воспроизводились волны одной длины, близкой к минимальной из наблюденных в период прохождения цунами. Во время экспериментов наблюдались накат волны на берег, обрушение волны, границы и уровни затопления при различных высотах гребня волны (рис. 2.4).

Получено совпадение экспериментальных данных с натурными наблюдениями.

Если размеры моделируемой области порядка 1000 км и сила трения о дно мала по сравнению с силой Кориолиса, необходимо вращать модель Фруда.

Такая вращающаяся модель отличается от обычной тем, что ее рельеф дна построен с учетом вогнутости свободной поверхности воды. При незначительном изменении силы Кориолиса с широтой достаточно вращать модель вокруг оси, проходящей через

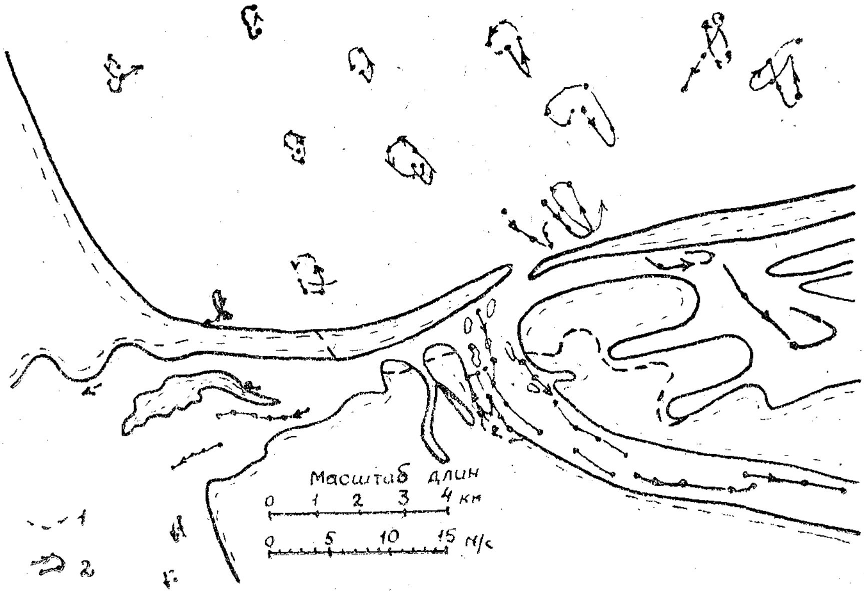

Рис. 2.4. Схема затопления и поверхностных скоростей при высоте гребня волны в вершине Камчатского залива. $H_{\text{гр}} = 8{,}5$ м:

1 — граница затопления; *2* — поверхностные течения и скорости (в соответствии с масштабом)

центр тяжести. Для определения скорости вращения модели исходят из подобия на модели и в натуре инерционных течений, считая, что ускорение свободного падения остается неизменным при вращении жидкости.

Иными словами, должно соблюдаться условие:

$$\frac{\left(\dfrac{u^2}{r}\right)_{\text{н}}}{\left(\dfrac{u^2}{r}\right)_{\text{м}}} = \frac{f_{\text{н}} \sin \varphi_{\text{н}}\, u_{\text{н}}}{f_{\text{м}} \sin \varphi_{\text{м}}\, u_{\text{м}}},$$

где r — радиус круга инерции.

Так как ось вращения модели вертикальна, $\sin \varphi_м = 1$ и

$$\frac{u_н r_м}{u_м r_н} = \frac{C_v}{C_l} = \frac{f_н \sin \varphi_н}{f_м}.$$

Для искаженной модели Фруда $C_v = C_h^{\frac{1}{2}}$, $C_t = C_l C_h^{-\frac{1}{2}}$, поэтому

$$f_м = C_t f_н \sin \varphi_н.$$

Угловая скорость вращения модели не должна превышать значения, при котором уровень воды приобретает форму эллиптического параболоида. При увеличении крутизны склона поверхности параболоида вращения становится неправомерным условие $\sin \varphi_м = 1$, так же как и предположение подобия гравитационных сил в натуре и на модели.

Чтобы избежать этого, необходимо уменьшить C_t, т. е. уменьшить горизонтальный или увеличить вертикальный масштабы модели. Все высказанные соображения относятся к однородной по плотности жидкости.

Примером наиболее удачного моделирования приливов в лабораторных условиях могут служить опыты на вращающейся модели в Гренобльской лаборатории гидромеханики. Эти опыты были в основном посвящены моделированию приливной волны в Ла-Манше. Общеизвестен тот факт, что при распространении приливной волны у берегов происходит ее трансформация, приводящая к возникновению так называемых мелководных составляющих. В районе Ла-Манша к ним относятся, например, волны M_4 и M_6, амплитуда которых может составлять 20% от основной волны M_2.

Численное решение задачи распространения длинной волны в условиях мелководья чрезвычайно затруднено ее нелинейностью. Эта нелинейность обусловлена тремя причинами: во-первых, нелинейным характером трения; во-вторых, нелинейными эффектами, связанными с тем, что колебания уровня в мелководных районах имеют тот же порядок, что и глубина места; в-третьих, нелинейность определяется возрастающей ролью конвективных членов.

По-видимому, гидравлическое моделирование в настоящее время является наиболее удобным и, пожалуй, единственным средством для получения картины распространения приливной волны в условиях реального мелководья.

Модель Ла-Манша была сконструирована в масштабе 1 : 50 000 по горизонтали и 1 : 500 — по вертикали. Таким образом, вертикальный масштаб превышал горизонтальный в 100 раз. Так как любая длинная волна может моделироваться лишь при удовлетворении критерия Фруда, в условиях искажения вертикального масштаба масштаб времени составил 1 : 2 230, а масштаб скоростей 1 : 22,3.

На входе в Ла-Манш волнопродуктором воссоздавалась приливная волна. Специальная амортизационная система позволяла моделировать влияние Северного моря. Модель располагалась на вращающейся платформе диаметром 14 м, которая совершала один оборот за 50,4 с, что создавало эффект вращения Земли на средней широте 50°.

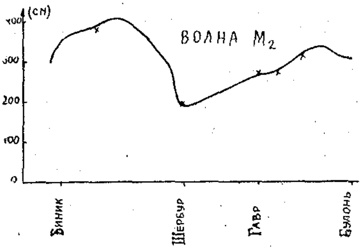

Рис. 2.5. Распределение амплитуды волны M_2 в Ла-Манше вдоль побережья Франции. Крестиками обозначены результаты натурных наблюдений

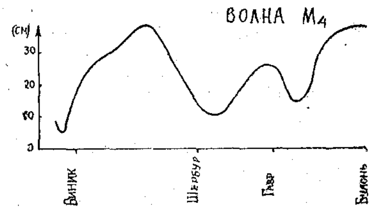

Рис. 2.6. Распределение амплитуды волны M_4 в Ла-Манше вдоль побережья Франции

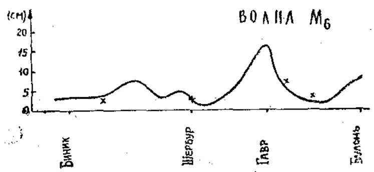

Рис. 2.7. Распределение амплитуды волны M_6 в Ла-Манше вдоль побережья Франции. Крестиками обозначены результаты натурных наблюдений

На рис. 2.5—2.7 показаны амплитуды волн M_2, M_4 и M_6, полученные на модели и по данным наблюдений. Результаты моделирования и данные наблюдений мало отличаются друг от друга.

Глава III. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ОКЕАНЕ

§ 3.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Существует глубокая связь между понятиями подобия и модели как инструмента исследования. Установление подобия явлений свидетельствует об определенной общности их свойств, которая выражается в тождественности уравнений, описывающих явления в безразмерном виде, и в равенстве критериев подобия — безразмерных комплексов, входящих в уравнения.

Признаки общности свойств отдельных конкретных подобных явлений однозначно определяют так называемый обобщенный случай, который не ограничивается требованием физической однородности явлений, поскольку он основывается на применении безразмерных величин, при котором используются отвлеченные числа, не ограниченные никакими конкретными физическими представлениями.

Следовательно, понятие обобщенного случая может включать в себя совершенно различные по своей физической природе явления на основе единственного признака — тождественности безразмерных представлений. Поэтому ранее рассмотренное нами так называемое гидравлическое моделирование, использующее физически подобные системы, является одним из видов применения методов модели для исследования процессов в водной среде. Другой формой исследования, основанной на подобии явлений, различных по физической природе, является метод аналогии.

Если применение метода модели, основанного на подобии физически однородных явлений, создает определенные удобства для эксперимента, позволяя изменять численное значение параметров исследуемого процесса, то применение метода аналогии представляет более широкие возможности для построения модели, проведения эксперимента, совершенствования методики измерения и т. д.

Ранее нами была рассмотрена общность явлений, связанных с тепло- и массообменом и возникновением сил внутреннего напряжения в движущейся жидкости. Эти явления аналогичны с точки зрения переноса теплоты, вещества и количества движения. Метод аналогии может быть использован при исследовании этих явлений путем замены одного из них подобным.

Более эффективным методом исследования является замена явления в водной среде его электрической аналогией. Электрическая модель легко монтируется, на ней легко создаются необходимые режимные условия, измерения производятся с высокой степенью точности и сравнительно просто.

Поскольку в основе анализа процессов, протекающих в различных физических полях, лежат принципы сохранения и непрерывности, можно выделить в электродинамике аналогии других физических полей. Так, рассматриваются и находят практическое применение при исследовании явлений различной физической природы электромеханическая, электроакустическая, электрогидродинамическая, электротермическая и ряд других аналогий.

В таблице приводятся соответствующие величины, характеризующие различные физические системы.

Область физики	Величина, характеризующая режим		Параметр системы		
	Переменная 1-го вида	Переменная 2-го вида	определяющий рассеивание энергии	определяющий накопление энергии	
Электродинамика	Напряжение	Ток	Омическое сопротивление	Индуктивность (определяет накопление энергии магнитного поля)	Емкость (определяет накопление электрического поля конденсатора)
Гидродинамика	Потенциал скорости	Скорость потока	Вязкость	Инерция (определяет накопление кинетической энергии)	Сжимаемость (определяет накопление потенциальной энергии)
Упругость	Деформация	Упругое напряжение	Внутреннее трение	Инерция	Податливость
Теплопередача	Температура	Тепловой поток	Тепловое сопротивление	—	Теплоемкость
Диффузия частиц	Удельная концентрация	Скорость диффузии	Сопротивление диффузии	Инерция	Сжимаемость

Электродинамическая система может быть построена и с помощью так называемых дуальных цепей (цепей-двойников), для которых в первой строке таблицы величины напряжения и тока, а также индуктивность и емкость поменяются местами.

При таком соответствии величин, характеризующих режим, получаем вторую систему электрогидродинамической и других аналогий.

При построении электрических моделей, обобщении исходных данных и получении решения используется теория подобия. Вводятся константы подобия (размерные в общем случае) и определяются индикаторы и критерии подобия.

Как при гидравлическом, так и при электрическом моделировании для определения критериев подобия необходимо знать уравнение, описывающее процессы. Эксперимент, проведенный на основе теории подобия, освобождает только от необходимости интегрировать дифференциальные уравнения.

Поскольку аналогия между явлениями устанавливается по уравнениям, то принципиально возможно обобщение метода электрического моделирования и перевод его в разряд экспериментальных методов решения задач математической физики.

Такой путь ведет к созданию универсальных электрических моделей, которые предназначаются для решения определенных типов дифференциальных уравнений. Условия задачи и результаты решения выражаются в них электрическими величинами.

Создание универсальных электрических моделей, предназначенных для решения определенного класса задач, например дифференциальных уравнений в частных производных, систем обыкновенных дифференциальных уравнений и т. д., является одним из направлений развития метода электромоделирования. Модели, создаваемые при этом, в силу их назначения называются обычно электроинтеграторами, дифференциальными анализаторами или математическими аналоговыми машинами.

Другое направление в развитии электрического моделирования определяется стремлением создать модели конкретных процессов, конкретных объектов.

§ 3.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛИННОВОЛНОВЫХ КОЛЕБАНИЙ В МОРЕ

Колебания уровня моря, присущие приливам, сейшам, штормовым нагонам, цунами, описываются сравнительно простыми дифференциальными уравнениями и моделируются с помощью несложных электрических схем.

При изучении длинноволновых движений в море используется линейная теория мелкой воды, согласно которой уравнения гидродинамики записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + Kz\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\,\frac{\partial \zeta}{\partial y} + Kz\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \tag{3.3}$$

где u и v — составляющие скорости течения по направлениям осей x и y; t — время; g — ускорение силы тяжести; ζ — отклонение уровня от его невозмущенного положения; K_z — коэффициент вертикального турбулентного обмена; H — глубина моря; f — параметр Кориолиса.

Горизонтальным турбулентным обменом пренебрегают.

Перейдем к рассмотрению интегральных по вертикали потоков, положив, что

$$W_x = \int_0^H u dz\,, \quad W_y = \int_0^H v dz\,, \quad K_z \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = 0,$$

$$K_z \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=0} = 0, \quad K_z \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H} = rW_x\,, \quad K_z \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=H} = rW_y\,. \tag{3.4}$$

Система уравнений примет вид

$$\frac{\partial W_x}{\partial t} - fW_y = -gH\,\frac{\partial \zeta}{\partial x} - rW_x\,, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial W_y}{\partial t} + fW_x = -gH\,\frac{\partial \zeta}{\partial y} - rW_y\,, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\left(\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y}\right). \tag{3.7}$$

Здесь коэффициент трения r — некоторая постоянная. Для электрического моделирования длинных волн в море необходимо иметь поле электрического тока, которое описывалось бы такими же математическими выражениями.

Если ограничиться одномерным случаем и пренебречь действием силы Кориолиса, то уравнения (3.5) — (3.7) примут вид, не отличающийся от вида уравнений, описывающих электромагнитные процессы в линиях, которые служат для передачи энергии.

Для одномерного случая уравнения гидродинамики запишутся в виде

$$\frac{\partial W_x}{\partial t} = -gH\,\frac{\partial \zeta}{\partial x} - rW_x\,, \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial W_x}{\partial x}\,. \tag{3.9}$$

Уравнение однородной линии, т. е. электрической цепи, все параметры которой равномерно распределены вдоль ее длины, если пренебречь проводимостью между проводами, имеет вид:

$$L_0 \frac{\partial I}{\partial t} = - \frac{\partial V}{\partial x} - R_0 I; \tag{3.10}$$

$$C_0 \frac{\partial V}{\partial t} = - \frac{\partial I}{\partial x}. \tag{3.11}$$

Здесь L_0, R_0 и C_0 — индуктивность, омическое сопротивление и емкость, равномерно распределенные вдоль длины линии; I — ток в проводах линии; V — напряжение между проводами.

Уравнения (3.8), (3.9), (3.10) и (3.11) тождественны при различии в них по физическим свойствам соответственных величин, за исключением пространственно-временных характеристик.

Таким образом, однородная линия, параметры которой R_0, L_0, C_0, приходящиеся на единицу ее длины, постоянны, может служить электрической моделью канала постоянного сечения; причем в канале распространяются длинные волны.

При замене непрерывного поля физических величин дискретным, что представляет определенные удобства для конструирования электрических моделей, элемент длины линии может быть с известным приближением представлен Т- или П-схемой замещения, а вся линия — цепочкой схем R, L, C.

При рассмотрении двухмерных полей подобного рода схема замещения представляет собой электрическую сетку из продольных и поперечных цепочек R, L, C (рис. 3.1), которая является моделью длинноволновых процессов в бассейне, описываемых дифференциальным уравнением, полученным из выражений (3.5)—(3.7) при условии, что $f = 0$:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gH \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + g \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - r \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{3.12}$$

После перехода к конечным разностям с шагом l, принимая глубины в пределах шага как среднее арифметическое из их значений в узлах H_0, H_n, преобразуем уравнение (3.12):

$$\frac{\partial \zeta^2}{\partial t^2} = gH_0 \sum_{n=1}^{4} \frac{\zeta_n - \zeta_0}{l^2} + \frac{g}{2l^2} \sum_{n=1}^{4} (H_n - H_0)(\zeta_n - \zeta_0) - r \frac{\partial \zeta_0}{\partial t}, \tag{3.13}$$

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{g(\zeta_n - \zeta_0)(H_0 + H_n)}{2} = l^2 \frac{\partial^2 \zeta_0}{\partial t^2} + rl^2 \frac{\partial \zeta_0}{\partial t}. \tag{3.14}$$

Идентичное уравнение для электрической сетки получим, записав, согласно закону Кирхгофа, для центрального узла сетки (рис. 3.1) выражение

$$\sum_{n=1}^{4} (I_n - I_0) = 0, \tag{3.15}$$

где I_0, I_n — сила тока в ветвях цепи.

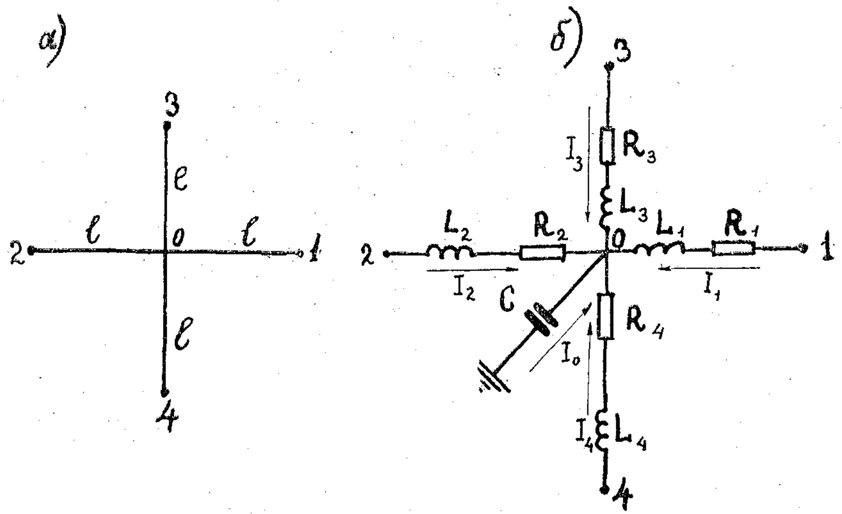

Рис. 3.1. Принципиальная схема электрической сетки для моделирования длинноволновых процессов: *а*) схема расчетного узла; *б*) принципиальная схема модели

Так как

$$I_0 = -C \frac{\partial V_0}{\partial t_э},$$

$$V_n - V_0 = L_n \frac{\partial I_n}{\partial t_э} + R_n I_n = L_n \left(\frac{\partial}{\partial t_э} + \frac{R_n}{L_n} \right) I_n. \tag{3.16}$$

Здесь $t_э$ — время в электрической системе; V_0, V_n — напряжение в центральном и соседнем узлах.

Преобразуем уравнение (3.16), положив $\frac{R_n}{L_n} = \text{const}$:

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{V_n - V_0}{L_n} = C \frac{\partial^2 V_0}{\partial t_э^2} + \frac{R_n C}{L_n} \frac{\partial V_0}{\partial t_э}. \tag{3.17}$$

Явления, описываемые уравнениями (3.14) и (3.17), будут подобными, если отношения характеризующих их соответственных величин есть постоянные числа, называемые обычно константами подобия или масштабами величин.

Сопоставляя уравнения (3.14) и (3.17), введем следующие константы подобия:

$$C_V = \frac{\zeta}{V}, \quad C_t = \frac{t}{t_э}, \quad C_c = \frac{l^2}{C},$$

$$C_L = \frac{2}{g(H_0 + H_n) L_n}, \quad C_R = \frac{2r}{g(H_0 + H_n) R_n}. \qquad (3.18)$$

Подставив в уравнение (3.14) значения параметров модели из равенств (3.18), получим:

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{(V_n - V_0) C_V}{C_L L_n} = \frac{C_c C_V C}{C_t^2} \frac{\partial^2 V_0}{\partial t_э^2} + \frac{C_c C_R C_V R_n C}{C_t L_n C_L} \frac{\partial V_0}{\partial t_э}. \qquad (3.19)$$

Уравнения (3.17) и (3.19) будут тождественными при условии равенства единице индикаторов подобия:

$$\frac{C_L C_c}{C_t^2} = 1, \quad \frac{C_R C_t}{C_L} = 1. \qquad (3.20)$$

Эти соотношения определяют отношения между масштабами величин, которые необходимо выдержать на модели.

Из индикаторов подобия можно получить критерии подобия — безразмерные комплексы величин, которые для натуры и модели имеют одинаковые численные значения.

В данном случае получим следующие критерии подобия:

$$\frac{2l^2}{g(H_0 + H_n) t^2} = \frac{L_n C}{t_э^2} = \mathrm{idem}, \quad \frac{2rl^2}{g(H_0 + H_n) t} =$$
$$= \frac{R_n C}{t_э} = \mathrm{idem}. \qquad (3.21)$$

Мы рассмотрели сеточную модель, параметры которой были определены на основе приближенной замены уравнений моделируемого поля уравнениями в конечных разностях.

Использование прямоугольной системы координат и сетки с равными шагами не является обязательным. В данном случае квадратная сетка выбрана в целях упрощения математических выкладок.

В отличие от непрерывного электрического поля, характеризующегося распределенными параметрами, сеточная модель составлена из сосредоточенных параметров.

Соотношения между ними при разностной аппроксимации следующие:

$$L_0 l_э = L, \quad C_0 l_э = C, \quad R_0 l_э = R. \qquad (3.22)$$

Поэтому равенство (3.17) можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{4} \frac{V_n - V_0}{L_{0n} l_э^2} = C_0 \frac{\partial^2 V_0}{\partial t_э^2} + \frac{R_{0n} C_0}{L_{0n}} \frac{\partial V_0}{\partial t_э}. \qquad (3.23)$$

При бесконечном увеличении числа элементов сетки и $l_э \to 0$ получим уравнение

$$\frac{1}{L_0 C_0}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{C_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{L_0}\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{L_0}\right)\frac{\partial V}{\partial y}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 V}{\partial t_э^2} + \frac{R_0}{L_0} \frac{\partial V}{\partial t_э^2}. \qquad (3.24)$$

Уравнения (3.24) и (3.12) идентичны.

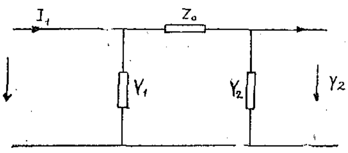

Рис. 3.2. П-образная схема замещения четырехполюсника

Представление непрерывной области в дискретном виде с помощью разностной аппроксимации приводит к погрешностям, которые могут быть легко оценены для случая гармонических колебаний путем рассмотрения замены элемента однородной линии эквивалентной Т-образной или П-образной схемой. При этом параметры П-звена запишутся в виде

$$Z_0 = Z \operatorname{sh} \alpha l, \quad Y_1 = Y_2 = \frac{\operatorname{ch} \alpha l - 1}{Z \operatorname{sh} \alpha l} = \frac{\operatorname{sh} \alpha l}{Z(\operatorname{ch} \alpha l + 1)}, \qquad (3.25)$$

где Y_1, Y_2, Z_0 — параметры эквивалентной П-схемы (рис. 3.2); $Z = \sqrt{\dfrac{R_0 + i\omega L_0}{G_0 + i\omega C_0}}$ — волновое или характеристическое сопротивление линии; $\alpha = \beta + i\gamma = \sqrt{(R_0 + i\omega L_0)(G_0 + i\omega C_0)}$ — коэффициент распространения.

Здесь G_0 — проводимость между проводами линии, $i = \sqrt{-1}$.

Отсюда

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R_0 + i\omega L_0}{G_0 + i\omega C_0}}\ \operatorname{sh}\alpha l, \qquad (3.26)$$

$$Y_1 = Y_2 = \sqrt{\frac{G_0 + i\omega C_0}{R_0 + i\omega L_0}}\ \frac{\operatorname{ch}\alpha l - 1}{\operatorname{sh}\alpha l}. \qquad (3.27)$$

Запишем

$$R + i\omega L = Z_0 = (R_0 + i\omega L_0)\, l\, \frac{\operatorname{sh}\alpha l}{\alpha l} \simeq$$

$$\simeq (R_0 + i\omega L_0)\, l \left[1 + \frac{\alpha^2 l^2}{6} + \frac{(\alpha l)^4}{120}\right] \qquad (3.28)$$

и при незначительном G_0

$$i\omega C = Y_1 = Y_2 = i\omega C_0 \cdot \frac{l}{2}\left[1 - \frac{(\alpha l)^2}{12} + \frac{(\alpha l)^4}{120}\right]. \qquad (3.29)$$

Следовательно, для замены участка сплошной проводящей среды (однородной линии) между соседними узлами модели П-образной схемой замещения при частоте ω необходимо рассчитывать параметры схемы R, L и C по точным формулам (3.25).

При расчете параметров с помощью разностных схем появляются погрешности, для оценки которых воспользуемся выражением, полученным из уравнения (3.25):

$$\operatorname{ch}\alpha l = 1 + Z_0 Y. \qquad (3.30)$$

Подставим в последнее выражение приближенные значения

$$Z_0 \simeq (R_0 + i\,\omega\, L_0)\, l,$$

$$Y_1 = Y_2 = Y' \simeq \frac{i\,\omega\, C_0\, l}{2} \qquad (3.31)$$

и введем обозначения

$$Q = \frac{R_0}{\omega L_0} = \frac{d}{\pi}, \qquad (3.32)$$

где d — декремент затухания, характеризующий убывание амплитуды за один период колебания.

Пусть k — отношение длины ячейки к длине волны, которая распространяется в однородной линии без затухания. Тогда

$$\operatorname{ch}\alpha l = 1 - 2\pi^2 k^2 + i\, 2\pi k^2 Q. \qquad (3.33)$$

Отсюда легко найти

$$\alpha l = \vartheta + i\varphi,$$

где $\vartheta = Re\,(\alpha l)$, $\varphi = I_m\,(\alpha l)$.

Относительные погрешности в амплитуде и фазе можно выразить отношениями

$$\Theta_A = \frac{\vartheta}{\beta} - 1, \quad \Theta_\Phi = \frac{L}{\gamma} - 1. \tag{3.34}$$

Для оценки влияния размеров ячейки на точность представления непрерывного поля обозначим

$$\gamma' = \gamma^* l = 2\pi k, \tag{3.35}$$

где γ^* — волновое число при $R = 0$.

Тогда

$$\operatorname{th} \alpha l = i\gamma' \left[\frac{1 - iQ - (\gamma')^2 (1 - iQ)^2 \cdot \dfrac{1}{4}}{1 - (1 - iQ)(\gamma')^2 + \dfrac{(\gamma')^4 (1 - iQ)}{4}} \right]^{\frac{1}{2}}. \tag{3.36}$$

Раскладывая в ряд числитель и знаменатель и пренебрегая членами порядка выше $(\gamma')^2$, после некоторых преобразований получим

$$\alpha = i\gamma^* (1 - iQ)^{\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{\pi^2 k^2}{6} (1 - iQ) \right]. \tag{3.37}$$

Для канала при $k = 0$ имеем

$$\alpha = i\gamma^* (1 - iQ)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.38}$$

Погрешность, возникшая при замене линии сеткой с разными шагами, характеризуется вторым членом в квадратных скобках.

Например, при пренебрежении сопротивлением ($Q = 0$) погрешность, равная или меньшая 5%, будет иметь место, когда на расстоянии, равном длине волны, уложится число шагов большее или равное 6. Если

$$k = \frac{l}{\lambda} = \frac{1}{4}, \quad \frac{\pi^2 k^2}{6} = 0{,}1. \tag{3.39}$$

На электрических моделях, составленных из продольных и поперечных цепочек R, L, C, рассматривались вопросы, связанные с формированием и распространением длинных волн в различных бассейнах. В частности, было рассмотрено распространение волн в каналах переменного сечения. Подобные эксперименты удобно выполнять на электрических сетках, поскольку на них легко имитируются разнообразные граничные условия от полного отражения волны на береговой линии до свободного распространения ее за пределы исследуемого бассейна.

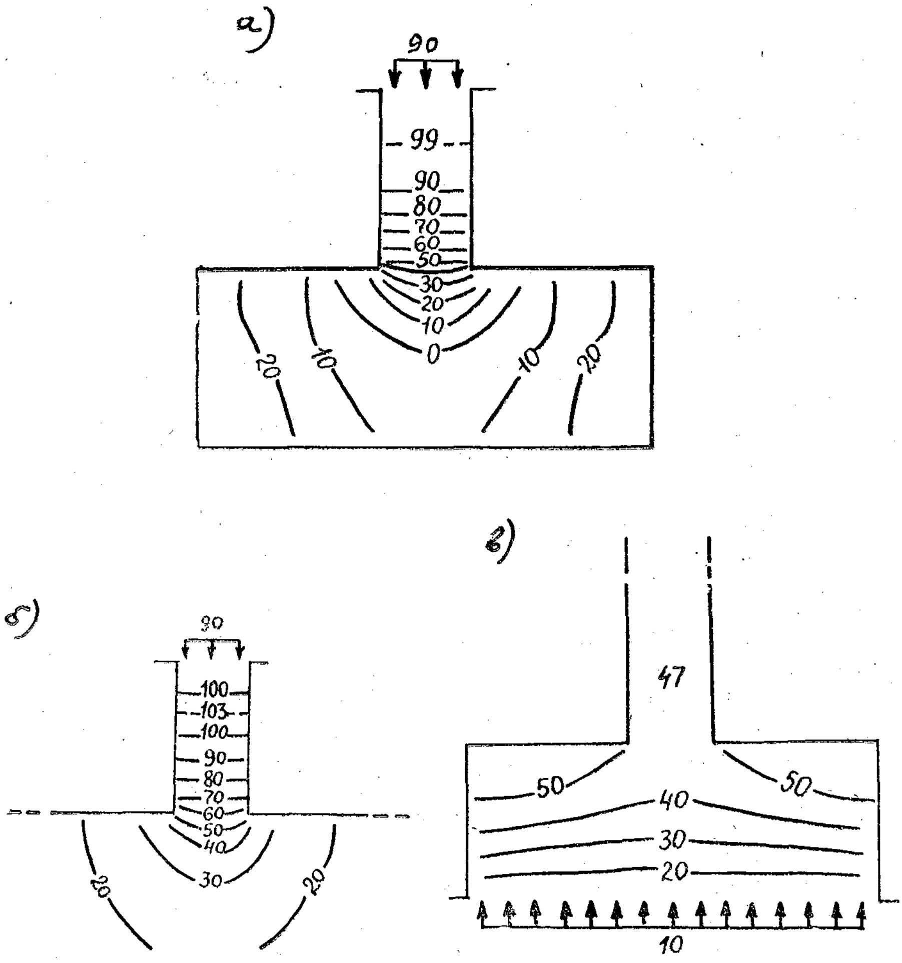

Рис. 3.3. Изоамплитуда волн, распространяющихся в каналах переменного сечения: *а*) резкое расширение канала; *б*) бесконечное расширение канала; *в*) резкое сужение канала

На рис. 3.3 представлена часть результатов моделирования полусуточных колебаний уровня в канале, состоящем из двух частей различной ширины. Стрелками обозначены места возбуждения колебаний, сплошной линией — твердая граница. Отсутствие на рисунках ограничивающей линии обозначает безграничность бассейна.

Эксперименты подтвердили теоретические схемы формирования прогрессивно-стоячей волны в узкой части канала при распространении колебаний в сторону его расширения и выявили зависимость расположения изоамплитуд и изофаз уровня от характера изменения поперечного сечения канала.

Двумерные модели — аналоги с использованием *R*, *L*, *С*-сетки применялись для исследования длинноволновых колебаний в бассейнах без учета вращения Земли.

Так, С. Ишигуро моделировал длинные волны с линеализированным трением о дно в бассейне прямоугольной формы и постоянной глубины.

Тот же автор на модели *V*-образного бассейна со сложным профилем дна исследовал гармонические колебания уровня, возбуждаемые на внешней границе бассейна.

Аналогичные эксперименты проводились Ишигуро на электрической модели Ирландского озера Лох-Ней в целях исследования его колебательных характеристик, они включали рассмотрение неустановившихся колебаний уровня, вызванных внезапно возникшими ветрами.

Г. Шолер использовал двумерную электрическую модель, состоящую из *LC*-сетки, для анализа длиннопериодных стоячих волн в портах, исследуя реакции бассейна на колебания сложной формы.

С помощью двумерной сетки *R*, *L*, *С* определялись периоды свободных колебаний жидкости в прямоугольном бассейне и Северном море. Результаты моделирования в прямоугольном бассейне оказались близкими к расчетным.

Двумерные задачи решались на моделях-аналогах при использовании колебаний приливного характера в Белом море. При пренебрежении силой Кориолиса была получена картина, близкая к реальной.

На подобной модели И. Джой исследовал длинные волны в Чесапикском заливе (США) и гавани Кабрилло Марина (Лос-Анджелес).

Все перечисленные модели, а также некоторые другие, которые будут рассмотрены ниже, конструировались с имитацией линейной зависимости силы трения от скорости.

Даже в тех случаях, когда резисторы не вводились в электрическую сетку, существовало активное сопротивление в цепях, определяемое омическим сопротивлением катушек индуктивности. Для моделирования процессов, в которых трение пренебрежимо мало, необходимо использовать катушки, имеющие высокую добротность.

§ 3.3. АНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

При исследовании приливов на больших акваториях необходимо учитывать отклоняющую силу вращения Земли. Электрические модели, используемые для этого, могут быть двух видов:

— состоящие из пассивных электрических цепей, включающих в себя катушки индуктивности, конденсаторы и резисторы (последние имитируют диссипацию энергии при линейном учете трения);

— модели, состоящие из сеток R, L, C и усилителей, имитирующих действие силы Кориолиса.

Модели первого типа конструируются на основе дифференциальных уравнений эллиптического типа (уравнений Гельмгольца) путем подбора соответствующего вида электрической сетки и требуют при моделировании задания на границе области значений напряжения, соответствующего превышению уровня моря в надлежащих точках.

Такая модель представляет собой, в сущности, вычислительную машину непрерывного действия — электроинтегратор для решения дифференциальных уравнений, описывающих длинноволновые процессы в море, — не являясь в общем системой, в которой колебания распространяются аналогично подобным процессам в море.

Модели второго типа близки по своей физической природе к гидродинамической системе, представленной в дискретном виде. В ней в каждой ячейке имитируется действие силы Кориолиса и граничные условия выполняются автоматически как и на модели, не учитывающей вращения Земли.

Непосредственно имитируя действие силы Кориолиса на волновые процессы, активные модели могут быть применены и для исследования неустановившихся движений в поле вращения Земли.

Модели, не содержащие внутри области источников (пассивные модели)

В основе конструирования электрических моделей лежит требование идентичности уравнений, описывающих процессы на модели и в моделируемой области. При этом условии появляется возможность использовать для решения определенной задачи несколько вариантов электрических схем.

Дифференциальное уравнение, описывающее приливные колебания в море с угловой частотой σ, может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{\sigma^2}{gH}\left(\frac{\sigma^2 + r^2 - f^2}{\sigma^2 + r^2}\right) - i\,\frac{\sigma r}{gH}\left(\frac{\sigma^2 + r^2 + f^2}{\sigma^2 + r^2}\right) = 0. \tag{3.40}$$

При переходе к конечным разностям с шагом $\Delta x = \Delta y = l$ получим

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 - 4\zeta_0 \simeq -l^2(M^2 + iN)\cdot\zeta_0, \tag{3.41}$$

где

$$M = \frac{\sigma^2}{gH}\ \frac{\sigma^2 - f^2 + r^2}{\sigma^2 + r^2}, \quad N = -\frac{\omega r}{gH}\ \frac{\omega^2 + f^2 + r^2}{\sigma^2 + r^2}.$$

Согласно схеме рис. 3.4, индексы 0, 1, 2, 3, 4 обозначают номера центрального и четырех соседних узлов.

Уравнение (3.41) можно решить с помощью нескольких вариантов электрической сетки.

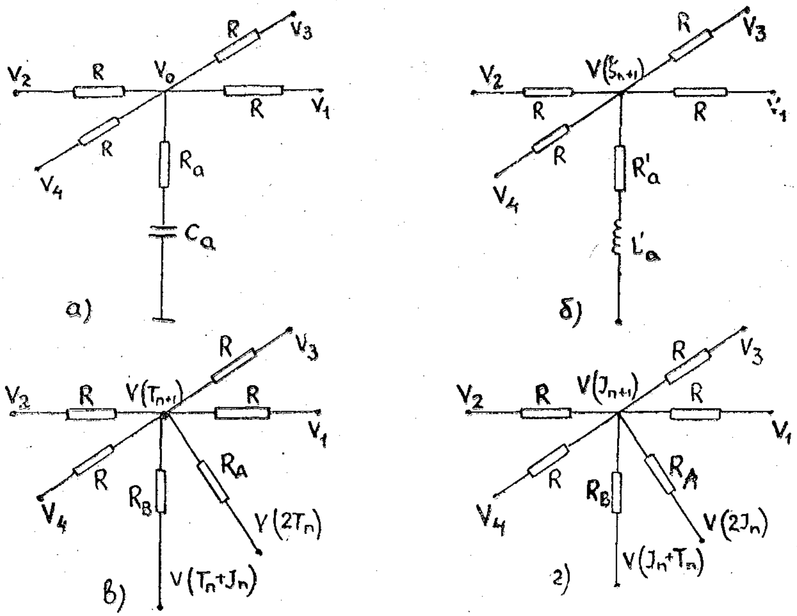

Рис. 3.4. Схема пассивных R, C (*а*) и R, L (*б*), а также разисторных (*в*, *г*) сеток для решения уравнений длинных волн с учетом силы Кориолиса

Вариант 1

Если составить ячейку электрической сетки так, как показано на рис. 3.4, *а*, то, согласно закону Кирхгофа, можем записать для узла О:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0 = V_0\ \frac{R}{R_a + \dfrac{1}{i\omega C_a}}. \tag{3.42}$$

Уравнение (3.41) можно записать в виде

$$\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3+\zeta_4-4\zeta_0=-\frac{l^2\zeta_0(M^2+N^2)}{M-iN}. \qquad (3.43)$$

В аналогичных уравнениях (3.42) и (3.43) V_n соответствует ζ_n,

$$-\frac{M}{M^2+N^2}\sim R_a,\quad \frac{|N|}{M^2+N^2}\sim\frac{1}{\omega C_a},\quad l^2\sim R.$$

Если M положительное, R_a должно быть отрицательным, что практически осуществить сложно.

Вариант 2

Чтобы избежать необходимости вводить в рассмотрение отрицательное сопротивление, запишем уравнение (3.40) в виде

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}-(M+iN)\zeta+2(M+iN)=0.$$

Оно решается методом последовательной аппроксимации, если запишем

$$\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)_{n+1}-(M+iN)\zeta_{n+1}+2(M+iN)\zeta_n=0.$$

Уравнение при M положительном и N отрицательном может быть решено на модели-аналоге, схема которой изображена на рис. 3.4, *б*.

Здесь

$$R_a'\sim\frac{M}{M^2+N^2},\quad \omega L_a'\sim\frac{|N|}{M^2+N^2}.$$

Вариант 3

Если $\zeta=T+iJ$, уравнение (3.40) запишется в виде

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+M(2T-T)-N[(T+J)-T]=0.$$

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+M(2J-J)-N[(J-T)-J]=0.$$

Отсюда получим разностные уравнения:

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right)_{n+1}+M(2T_n-T_{n+1})-N(T_n+J_n-T_{n+1})=0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 J}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 J}{\partial y^2}\right)_{n+1}+M(2J_n-J_{n+1})-N(J_n-T_n-J_{n+1})=0.$$

Уравнения решаются с помощью двух электрических сеток, схемы которых приведены на рис. 3.4, *в* и 3.4, *г*.

Обозначения $V(T_{n+1})$, $V(J_{n+1})$ и другие показывают напряжения, представляющие значения T_{n+1}, J_{n+1} и т. д.

Получим соответствие

$$R_A \sim \frac{1}{M}, \quad R_B \sim \frac{1}{|N|}.$$

Уравнение (3.40) может быть решено на модели-аналоге, составленной из R, L, C-сетки. Для этого преобразуем его:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = \frac{i\sigma + r}{gH} i\sigma \left[1 + \frac{f^2}{(i\sigma + r)^2}\right] \zeta,$$

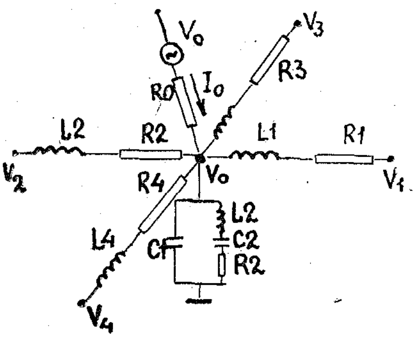

Рис. 3.5. Схема пассивной R, L, C-сетки для решения уравнений длинных волн с учетом силы Кориолиса. Вариант 1.

Переходя к конечным разностям с шагом $\Delta x = \Delta y = l$, получим

$$\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3 + \zeta_4 - 4\zeta_0 = \frac{i\sigma + r}{gH} \left(i\sigma l^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\dfrac{i\sigma}{l^2 f^2} + \dfrac{2r}{l^2 f^2} + \dfrac{r^2}{i\sigma l^2 f^2}} \right) \zeta_0. \qquad (3.44)$$

Для моделирования явления, описываемого этим уравнением, может быть составлена сетка, принципиальная схема которой изображена на рис. 3.5.

Для нулевого узла сетки справедливо следующее уравнение (для сокращения выкладок примем R и L во всех ветвях одинаковыми):

$$\frac{V_1+V_2+V_3+V_4-4V_0}{i\omega L_1+R_1}=\left(i\omega C_1+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{i\omega L_2+R_2+\dfrac{1}{i\omega C_2}}\right)V_0. \qquad (3.45)$$

Так как явления в натуре и на моделях должны быть подобными, отношения всех соответствующих величин в них будут выражаться с помощью констант подобия

$$C_V=\frac{\zeta}{V}, \quad C_t=\frac{\omega}{\sigma}, \quad C_{R_1}=\frac{r}{gHR_1}, \quad C_{C_1}=\frac{l^2}{C_1},$$

$$C_{L_1}=\frac{1}{gHL_1}, \quad C_{R_2}=\frac{2r}{l^2f^2R_2}, \quad C_{C_2}=\frac{l^2f^2}{C_2r^2},$$

$$C_{L_2}=\frac{1}{l^2f^2L_2}. \qquad (3.46)$$

Подставив в уравнение (3.44) значения величин для натуры, выраженные через параметры модели и константы подобия, получим

$$\frac{V_1+V_2+V_3+V_4-4V_0}{i\omega L_1+\dfrac{C_{R_1}\cdot C_t}{C_{L_1}}R_1}=\left(i\omega C_1\frac{C_{C_1}C_{L_1}}{C_t^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\dfrac{C_{L_2}}{C_{L_1}}i\omega L_2+\dfrac{C_{R_2}C_t}{C_{L_1}}R_2+\dfrac{C_t^2}{C_{C_2}C_{L_1}}\cdot\dfrac{1}{i\omega C_2}}\right)V_0. \qquad (3.47)$$

Для того, чтобы уравнения (3.44) и (3.45) были тождественными, необходимо выполнение условий, определяемых следующими индикаторами подобия:

$$\frac{C_{R_1}C_t}{C_{L_1}}=1, \quad \frac{C_{R_2}C_t}{C_{L_1}}=1, \quad \frac{C_{L_2}}{C_{L_1}}=1,$$

$$\frac{C_{C_1}C_{L_1}}{C_t^2}=1, \quad \frac{C_{C_2}C_{L_1}}{C_t^2}=1. \qquad (3.48)$$

Из индикаторов можно получить некоторые комплексы величин — критерии подобия, которые в подобных явлениях должны иметь одинаковые численные значения.

Для имитации на модели действия приливообразующей силы необходимо задавать в узловых точках дополнительные токи

$$I_0 = MB,$$

где M — коэффициент пропорциональности,

$$B = \frac{\bar{\zeta}_1 + \bar{\zeta}_2 + \bar{\zeta}_3 + \bar{\zeta}_4 - 4\bar{\zeta}_0}{\dfrac{i\sigma + r}{gH}}.$$

Здесь $\bar{\zeta}$ — статическая высота прилива. При сравнительно малых напряжениях в узлах сетки ток I_0 можно считать пропорциональным напряжению U_0, поданному в узел через большое сопротивление R_0.

Если ввести константу подобия $C_{\text{м}} = \dfrac{BR_0}{U_0}$, то для соблюдения подобия необходимо помимо соблюдения равенств (3.48) выполнение дополнительного условия

$$\frac{C_{\text{м}} C_{L_1}}{C_V C_t} = 1.$$

Уравнение (3.40) можно решить с помощью другой электрической сетки, отличающейся от ранее рассмотренной. Для этого воспользуемся выражением

$$\frac{\sum_{n=1}^{4} (\zeta_n - \zeta_0)}{\dfrac{i\sigma + r}{gH} + \dfrac{f}{i\sigma gH}} = i\sigma \zeta_0 l^2. \tag{3.49}$$

На рис. 3.6 изображена схема модели для решения уравнения (3.49).

Применив закон Кирхгофа для центральной точки O, запишем

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0 = \left(i\omega L_1 + R_1 + \frac{1}{i\omega C_1 + \dfrac{1}{R_2}} \right) i\omega C_0 V_0. \tag{3.50}$$

Введем константы подобия

$$C_L = \frac{1}{gHL}, \quad C_{C_1} = \frac{gH}{f^2 C_1}, \quad C_{C_0} = \frac{l^2}{C_0}, \quad C_t = \frac{\omega}{\sigma},$$

$$C_{R_1} = \frac{r}{gHR_1}, \quad C_{R_2} = \frac{f^2}{rgHR_2}.$$

Условия подобия запишутся в виде индикаторов подобия

$$\frac{C_L C_{C_0}}{C_l^2} = 1, \quad \frac{C_{R_1} \cdot C_{C_0}}{C_t} = 1, \quad C_{C_1} = C_{C_0}, \quad C_{R_1} = C_{R_2}.$$

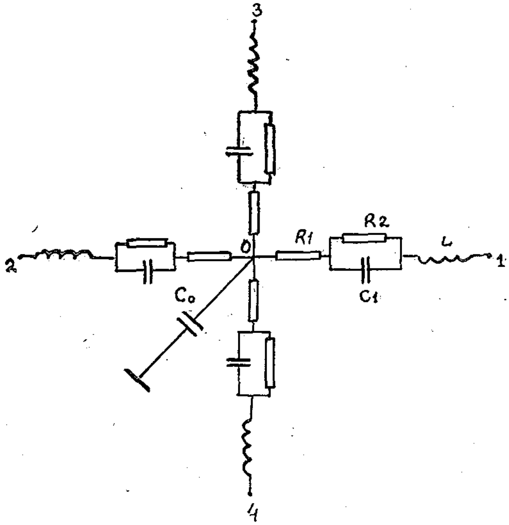

Рис. 3.6. Схема пассивной R, L, C-сетки для решения уравнений длинных волн с учетом силы Кориолиса. Вариант 2

Модель, содержащая внутри области источники (активная модель)

Исходные уравнения (3.1)—(3.3) можно записать в конечно-разностном виде:

$$\left.\begin{aligned}
&-\Delta x \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{gH}\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)\frac{\partial W_x}{\partial t} - \frac{f W_y}{gH} + \\
&+ \frac{\Delta x\, \tau_{в_x}}{\rho g H} - \frac{\Delta x\, \tau_{a_x}}{\rho g H} + \frac{\Delta x}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\Delta x\, X}{g}, \\
&-\Delta y \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{gH}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)\frac{\partial W_y}{\partial t} + \frac{f W_x}{gH} + \\
&+ \frac{\Delta y\, \tau_{в_y}}{\rho g H} - \frac{\Delta y\, \tau_{a_y}}{\rho g H} + \frac{\Delta y}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\Delta y\, Y}{g}, \\
&-\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{\Delta y}\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{1}{\Delta x}\frac{\partial W_y}{\partial y},
\end{aligned}\right\} \qquad (3.51)$$

где

$$W_x = \int\limits_{-H}^{0} \int\limits_{-\frac{\Delta y}{2}}^{\frac{\Delta y}{2}} u\,dz\,dy,$$

$$W_y = \int\limits_{-H}^{0} \int\limits_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} v\,dz\,dx.$$

τ_{a_x}, τ_{a_y} — составляющие касательного напряжения ветра; $\tau_{в_x}$, $\tau_{в_y}$ — составляющие донного трения; p — атмосферное давление на поверхности воды; X, Y — внешние силы. Остальные обозначения прежние.

На рис. 3.7 изображен контур электрического аналога, в горизонтальных ветвях которого кроме резисторов и катушек индуктивности имеются два генератора напряжения, воспроизводящие действие силы Кориолиса и внешних сил.

Согласно закону Кирхгофа, можно записать:

$$\Delta V_{21} = -\frac{1}{2}\left[L_x \frac{\partial (I_1 + I_2)}{\partial t_э} - (I_3 + I_4) f_э + R_x (I_1 + I_2)\right] - \\ - (-V_{w_x} + V_{p_x} + V_{F_x}), \tag{3.52}$$

$$\Delta V_{34} = -\frac{1}{2}\left[L_4 \frac{\partial (I_3 + I_4)}{\partial t_э} + (I_1 + I_2) f_э + R_y (I_3 + I_4)\right] + \\ + (-V_{w_y} + V_{p_y} + V_{F_y}), \tag{3.53}$$

$$\frac{\partial V_{05}}{\partial t_э} = -\frac{1}{C}(-I_1 + I_2 - I_3 + I_4). \tag{3.54}$$

Если принять

$$\frac{I_1 + I_2}{2} \simeq I_x, \quad \frac{I_3 + I_4}{2} \simeq I_y,$$

$$\Delta V_{21} \equiv \Delta V_x, \quad \Delta V_{43} \equiv \Delta V_y,$$

$$I_2 - I_1 \equiv \Delta I_x, \quad I_4 - I_3 \equiv \Delta I_y, \quad V_{05} \equiv V,$$

получим

$$\Delta V_x = -L_x \frac{\partial I_x}{\partial t_э} + f_э I_y - R_x I_x - (-V_{w_x} + V_{p_x} + V_{F_x}); \tag{3.55}$$

$$\Delta V_y = -L_y \frac{\partial I_y}{\partial t_э} - f_э I_x - R_y I_y - (-V_{w_y} + V_{p_y} + V_{F_y}). \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t_э} = -\frac{1}{C}(\Delta I_x + \Delta I_y). \quad (3.57)$$

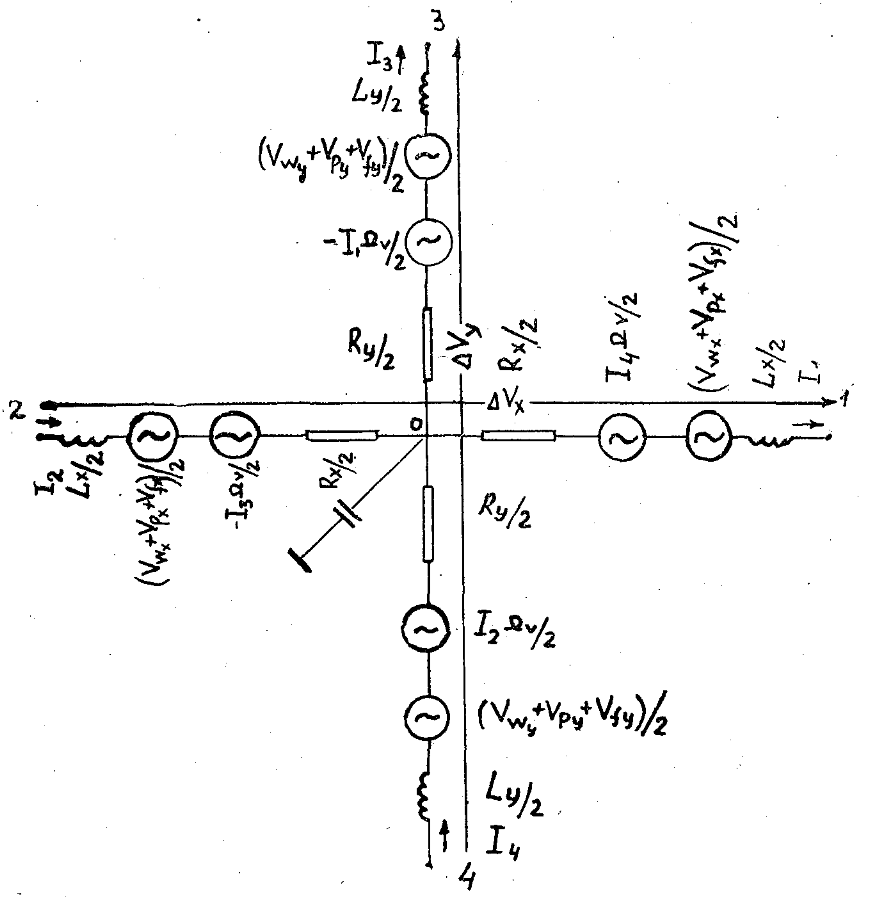

Рис. 3.7. Схема активной R, L, C-сетки для моделирования уравнений длинных волн с учетом силы Кориолиса (Ω_v — параметр Кориолиса — соответствует здесь и на рис. 3.8 $f_э$ в уравнениях

Введем следующие константы подобия:

$$C_L = \frac{\Delta x}{\Delta y}\frac{1}{gHL}, \quad C_{R_x} = \frac{\Delta x}{\Delta y}\frac{r}{gHR_x}, \quad C_{R_y} = \frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{r}{gHR_y},$$

$$C_f = \frac{f}{gH} f_э, \quad C_C = \frac{\Delta x\,\Delta y}{C}, \quad C_V = \frac{\zeta}{V}, \quad C_I = \frac{W}{I},$$

$$C_V = \frac{\Delta x \tau_{a_x}}{\rho g H V_{W_x}}, \quad C_V = \frac{\Delta y \tau_{a_y}}{\rho g H V_{W_y}}, \quad C_t = \frac{t}{t_э},$$

$$C_V = \frac{\Delta x}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{V_{p_x}}, \quad C_V = \frac{\Delta y}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{V_{p_y}}, \quad C_V = \frac{\Delta x}{g} \frac{X}{V_{F_x}},$$

$$C_V = \frac{\Delta y}{g} \frac{Y}{V_{F_y}}.$$

Здесь r — линейный коэффициент трения.

Подставив значения констант подобия в уравнение (3.51), получим

$$-\Delta V = \frac{C_I C_L L}{C_V C_t} \frac{\partial I}{\partial t_э} - \frac{C_I C_f}{C_V} f_э I + \frac{C_{R_x} C_I R_x \cdot I}{C_V} - \\ - V_{W_x} + V_{p_x} + V_{F_x}, \quad (3.58)$$

$$\frac{C_V}{C_t} \frac{\partial V}{\partial t_э} = \frac{C_I I}{C_C C}, \quad \frac{C_C}{C_I} = \frac{C_t}{C_C}.$$

Получим индикаторы подобия

$$\frac{C_L C_C}{C_t^2} = 1, \quad \frac{C_C C_f}{C_t} = 1, \quad \frac{C_{R_x} C_C}{C_t} = 1. \quad (3.59)$$

Для имитации силы Кориолиса на модели, составленной из сетки R, L, C, необходимо ввести в каждую ветвь источник напряжения по схеме, изображенный на рис. 3.8.

Падение напряжения между узлами *2*, *1* и *3*, *4* равны:

$$\Delta V'_{21} = -\frac{1}{2} \left[(I_1 + I_2) R - (I_3 + I_4) f_э \right], \quad (3.60)$$

$$\Delta V'_{43} = -\frac{1}{2} \left[(I_3 + I_4) R - (I_1 + I_2) f_э \right]. \quad (3.61)$$

Более сложная конструкция модели с усилителями, в отличие от ранее рассмотренных моделей, состоящих из пассивных четырехполюсников, имеет преимущество перед последними в том, что позволяет воспроизводить неустановившиеся длинноволновые колебания.

На рассмотренной модели С. Ишигуро анализировал приливы и штормовые волны в Северном море для различных условий возмущения и значений коэффициентов донного трения.

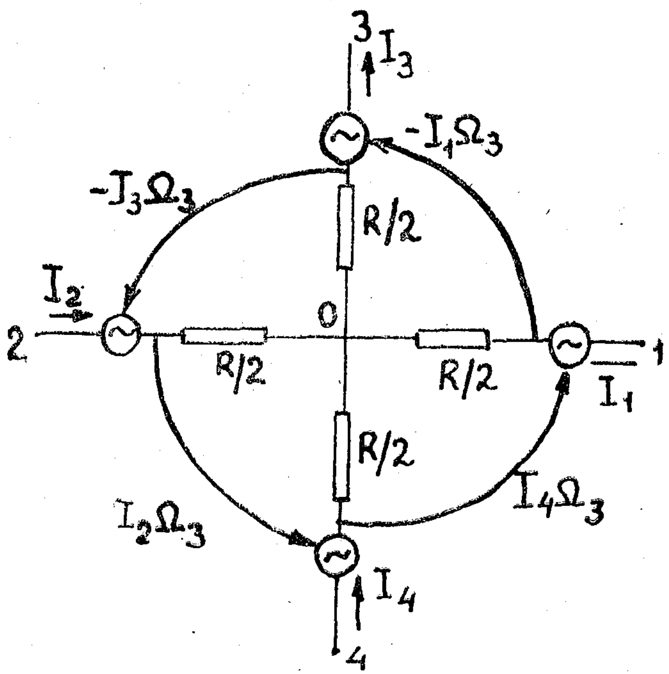

Рис. 3.8. Схема имитации действия силы Кориолиса на активной R, L, C-сетке

§ 3.4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН С ПОМОЩЬЮ ДУАЛЬНОЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СХЕМЫ

Все рассмотренные ранее модели решали линейные уравнения. Учет нелинейных эффектов на аналоговых моделирующих устройствах сопряжен с определенными техническими трудностями: параметры модели должны изменять свои характеристики в течение процесса в зависимости от изменений силы тока или напряжения в электрических цепях.

Из нелинейных членов уравнения движения на электрических моделях имитируется главным образом нелинейное трение о дно. Такие модели обычно используются при решении динамических задач в мелководных районах, в прибрежной зоне моря и в устьях рек.

Аппроксимация нелинейных членов приводит к существенному усложнению электрической сетки, поэтому учет нелинейности осуществляется обычно в одномерных аналогах с относительно малым числом ячеек.

При незначительном уклоне дна изменение глубины учитывают приближенно, деля бассейн на участки, в пределах которых дно может считаться горизонтальным. Поэтому в одномерной задаче уравнения движения и неразрывности могут быть записаны в виде

$$-\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{1}{g}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{g}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{k|u|u}{g(H+\zeta)}, \tag{3.62}$$

$$-\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}\left[ub(H+\zeta)\right], \tag{3.63}$$

где H — средняя глубина в поперечном сечении потока; b — ширина потока на уровне средней поверхности; u — средняя по глубине скорость; k — коэффициент трения, который может быть выражен через коэффициент Шези C в виде $k = gC^{-2}$.

Уравнения (3.62), (3.63) можно записать в виде

$$-\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{1}{g\overline{H}b}\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{Q}{g\overline{H}b}\frac{\partial Q}{\overline{H}b}+\frac{|Q|Q}{C^2\overline{H}^3b^2}, \tag{3.64}$$

$$-\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{1}{b}\frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{3.65}$$

где расход $Q=\overline{H}\cdot bu$, $\overline{H}=H+\zeta$.

Переходя к конечным разностям с шагом Δx, можно записать:

$$-\frac{\Delta\zeta}{\Delta x}=\frac{1}{g}\frac{\partial}{\partial t}\frac{Q_0}{\overline{H}_0 b_0}+\frac{Q_0}{g(\overline{H}_0 b_0)^3\Delta x}(\overline{H}_0 b_0\Delta Q-Q_0 b_0\Delta\overline{H}-$$

$$-Q_0\overline{H}_0\Delta b)+\frac{|Q_0|Q_0}{C^2H_0^3b_0^2}. \tag{3.66}$$

$$\frac{\partial\zeta_0}{\partial t}=-\frac{1}{b}\frac{\Delta Q}{\Delta x}, \tag{3.67}$$

где индексом «0» обозначены значения переменных в центре участка.

Для решения уравнений (3.66) и (3.67) используются активные сеточные модели, включающие в себя источник напряжения и тока.

Для имитации нелинейного трения о дно можно использовать пассивную модель, предварительно упростив исходные уравнения.

Для решения стационарной задачи уравнение (3.66) запишется в виде

$$|Q|Q=-\frac{\partial\zeta}{\partial x}C^2\overline{H}^3b^2. \tag{3.68}$$

Соответствующее ему уравнение в электрической системе

$$I^2 = -m\, V_\zeta V_H^3 b^2,$$

где m — масштабный коэффициент.

Для учета нелинейных эффектов на пассивной электрической модели используют различные методы.

С этой целью, в частности, вводят в электрическую схему диоды, триоды, используют термопары (в устройствах, в которых процессы изменяются медленно). Одним из недостатков таких нелинейных устройств является трудность подбора необходимых деталей с требуемыми характеристиками и необходимость дополнительной регулировки модели.

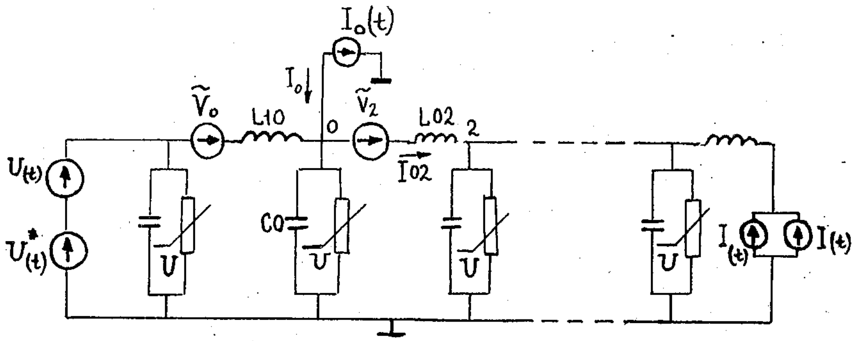

Рис. 3.9. Схема электрической сетки для моделирования нагонов в устьях рек

Для моделирования нелинейных эффектов в устьях рек можно использовать варисторы, сопротивление которых изменяется в зависимости от приложенного к ним напряжения по нелинейному закону.

Путем подбора варисторов и подсоединения к ним линейных резисторов приходим к зависимости между силой тока и напряжением в виде $I = BV^2$, где B — коэффициент варистора. При использовании варистора для имитации квадратичного сопротивления трения необходимо перейти к **дуальной** электрической схеме, используя вторую систему аналогии, при которой уровень и расход моделируются соответственно силой тока и напряжением.

Тогда с помощью электрической схемы, изображенной на рис. 3.9, можно решить уравнение

$$\frac{1}{gA}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{|Q|Q}{C^2 A^2 (H+\zeta)} + \frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial t} - \frac{1}{b}\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} + \frac{1}{b}\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\gamma^2 \rho_a W_a^2 \cos\psi}{\rho g (H+\zeta)} = 0, \quad (3.69)$$

где $A = (H + \zeta)\, b$ — площадь поперечного сечения потока; q — дополнительный сток, приходящийся на единицу длины русла; W_a — скорость ветра; ρ_a — плотность воздуха; ρ — плотность воды; ψ — угол между направлением ветра и осью русла; $\gamma^2 \approx 0{,}0026$ при скорости ветра от 6 до 20 м/с.

Уравнение (3.69) получено из уравнений движения и неразрывности, в первом из которых опущена конвективная составляющая ускорения и учтено влияние ветра, а во втором учтен дополнительный сток.

Уравнение (3.69) в конечно-разностной форме с неравными шагами l примет вид

$$\frac{Q_1 - Q_0}{b_{10} l_{10}} + \frac{Q_2 - Q_0}{b_{02} l_{02}} = \frac{l_{10} - l_{02}}{2g A_0} \frac{\partial^2 Q_0}{\partial t^2} + \\ + \frac{\partial}{\partial t} \frac{|Q_0|\, Q_0 (l_{10} + l_{02})}{2C^2 A_0^2 (H_0 + \zeta_0)} + \frac{\partial}{\partial t} (H_{02} - H_{10}) - q_0 \frac{l_{10} + l_{02}}{2b_{10} l_{10}} + \\ + \frac{q_2}{b_{02} l_{02}} \frac{l_{02} + l_{23}}{2} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\gamma^2 \rho_a W_0^2 \cos\psi}{\rho g (H_0 + \zeta_0)} \frac{l_{10} + l_{02}}{2}. \quad (3.70)$$

Здесь Q_0, Q_1, Q_2 — расходы в центральном и соседних узлах сетки; H_0, H_{01}, H_{02} — значения средних глубин, относящихся соответственно к участкам $\frac{l_{01} + l_{02}}{2}$, l_{01} и l_{02} (см. рис. 3.9).

Для узла О электрической схемы, согласно закону Кирхгофа, можно записать:

$$\frac{V_1 - V_0}{L_{01}} + \frac{V_2 - V_0}{L_{02}} = C \frac{\partial^2 V_0}{\partial t_э^2} + \frac{\partial}{\partial t_э} B V_0^2 + \frac{\partial}{\partial t_э} (I_{02}^* - I_{01}^*) - \\ - \frac{\widetilde{V}_0}{L_{01}} + \frac{\widetilde{V}_2}{L_{02}} - \frac{\partial I_0}{\partial t_э}, \quad (3.71)$$

где V_0, V_1, V_2 — напряжение в центральном и соседних узлах сетки; B — коэффициент варистора.

На схеме $I(t)$ и $V(t)$ — источники тока и напряжения, введенные для задания граничных значений соответственно уровня и расхода, связанных с нагонными явлениями; $I^*(t)$ и $V^*(t)$ — источники тока и напряжения, воспроизводящие граничные значения среднего уровня; источники напряжения $\widetilde{V}_0$, $\widetilde{V}_2$ моделируют дополнительный сток на соответствующих участках сетки.

Введем константы подобия:

$$C_t = \frac{t}{t_э}, \quad C_V = \frac{Q}{V}, \quad C_L = \frac{b_n l_n}{L_n}, \quad C_C = \frac{l_{01} + l_{02}}{2g A_0 C},$$

$$C_I = \frac{Cl_n}{I_n^*}, \quad C_B = \frac{l_{10} + l_{02}}{2C^2 A_0^2 (H_0 + \zeta_0) B},$$

$$C_q = \frac{q_0}{\widetilde{V}_0} \frac{l_{10} + l_{02}}{2} = \frac{q_2}{\widetilde{V}_2} \frac{l_{02} + l_{23}}{2},$$

$$C_v = \frac{\gamma^2 \rho a W_0^2 \cos\psi (l_{10} + l_{02})}{2\rho g (H_0 + \zeta_0) I_0}. \tag{3.72}$$

Тогда условия подобия натуры и модели запишутся в виде

$$\frac{C_L C_C}{C_t^2} = 1, \quad \frac{C_B C_L C_V}{C_t} = 1, \quad \frac{C_I C_L}{C_t C_V} = 1,$$

$$\frac{C_q}{C_V} = 1, \quad \frac{C_v C_L}{C_V C_t} = 1. \tag{3.73}$$

На электрических моделях рассмотренного вида могут исследоваться сгонно-нагонные колебания уровня в устьях рек.

§ 3.5. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЛИННЫХ ВОЛН В ЦЕЛЯХ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Достоинства электрических моделей, одним из которых является простота изменения режимных условий процесса, проявляются в большей степени при решении различных вариантов однотипных задач в целях определения влияния тех или иных параметров на характер процесса.

Подобные проблемы возникают при проектировании гидротехнических сооружений, для решения этих проблем привлекаются различные методы исследования, в том числе и электромоделирование.

В частности, с помощью электрических моделей исследовалось влияние на режим прилива сооружения плотины приливной электростанции и волновой режим на акватории порта при различных вариантах расположения оградительного мола.

Строительство гидротехнических сооружений приводит к изменению гидродинамического режима прилегающей акватории, поэтому при проектировании ПЭС неизбежно возникает задача об исследовании влияния постройки ее сооружений на режим прилива.

В реальном случае, когда акватория залива представляет собой двумерную область, задача существенно усложняется и сводится к задаче Пуанкаре для эллиптических уравнений второго порядка. За последние годы появился ряд работ по применению численных методов для решения этой задачи, основная идея которых заключается в замене дифференциальных операторов, описывающих приливные колебания внутри залива и на границе исследуемой акватории, их конечно-разностными аналогами.

Подобные задачи в линейном приближении могут решаться и средствами электрического моделирования. Например, на электрической модели были рассмотрены приливные колебания уровня в Мезенском заливе как в естественных морфометрических условиях, так и с учетом плотины Мезенской приливной электростанции. Если учесть, что результаты наблюдений за приливными колебаниями в Мезенском заливе свидетельствуют об отсутствии сколько-нибудь существенной разницы в распределении амплитуд уровня у противоположных берегов залива, можно с достаточной степенью точности не учитывать отклоняющую силу вращения Земли.

К такому же результату можно прийти, если свести уравнение движения к безразмерному виду, приняв в качестве характерного размера вдоль оси залива либо четверть длины волны, либо величину, обратную волновому числу, а в качестве характерного размера поперек оси — ширину его глубоководной центральной части. Тогда окажется, что скорости приливных движений вдоль оси залива по крайней мере на порядок больше поперечных скоростей. Фактически мы имеем дело с одномерной задачей, и учет скоростей, поперечных оси залива, необходим лишь для получения характеристик прилива на всей акватории. Таким образом, в гидродинамической системе процесс будет описываться уравнением (3.12), преобразованным для одной из гармонических составляющих волн прилива угловой частоты σ:

$$\Delta\zeta + \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y} = \frac{i\sigma + r}{gH}\, i\sigma\zeta. \qquad (3.74)$$

Перейдем к дискретному представлению поля масс и напишем уравнение (3.74) для одной ячейки гидродинамической системы, в пределах которой глубину будем считать постоянной, тогда получим из уравнения (3.44) при $f=0$

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{4}(\zeta_n - \zeta_0)}{\dfrac{i\sigma + r}{gH}} = i\sigma\, l^2\zeta_0. \qquad (3.75)$$

Чтобы смоделировать этот процесс, необходима электрическая сетка, изображенная на рис. 3.1, *б*.

В качестве граничных условий на берегу и плотине ПЭС принималось условие непротекания, которое достигалось на модели разрывом цепи. На части каждого жидкого контура (участки AB и BC, рис. 3.10) по данным наблюдений задавалась функция ζ причем эта часть выбиралась таким образом, чтобы аппроксимировать одну из изофаз колебаний уровня.

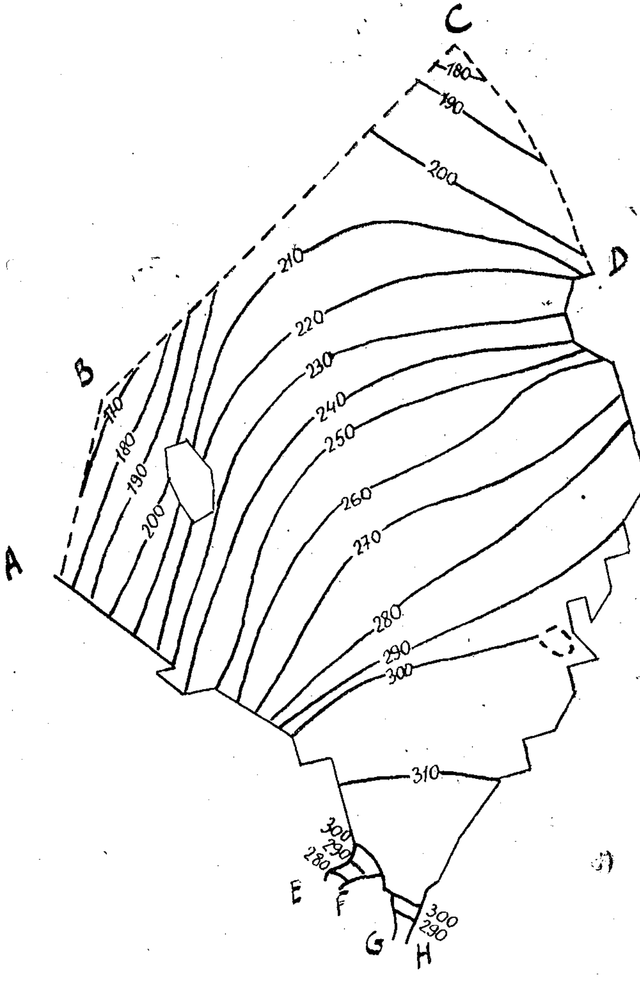

Рис. 3.10. Изоамплитуды волны M_2 до сооружения плотины ПЭС

На остальной жидкой границе (участки CD, EF, GH) задавалось условие беспрепятственного прохождения волны за границей моделируемой акватории. Это достигалось замыканием ячейки на волновое сопротивление $Z = \sqrt{\dfrac{R_0 + i\omega L_0}{i\omega C_0}}$.

На электрической аналоговой модели приливных колебаний уровня части акватории Мезенского залива было выполнено три серии экспериментов.

1-я серия опытов — моделирование приливных колебаний уровня для двух гармонических составляющих (M_2 и S_2) до постройки плотины ПЭС.

2-я серия опытов — моделирование приливных колебаний уровня для волн M_2 и S_2 после возведения плотины ПЭС (2-й вариант плотины: м. Травяной — Мгла).

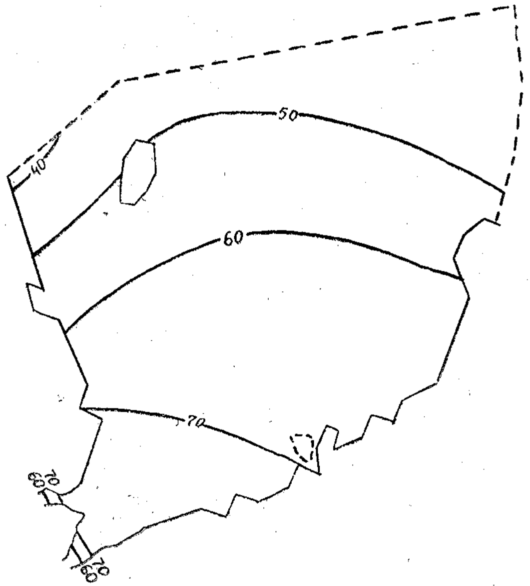

Рис. 3.11. Изоамплитуды волны S_2 до сооружения плотины ПЭС

Результаты первой серии экспериментов сопоставлялись как с данными наблюдений, так и с данными расчетов на ЦВМ. Результаты второй серии экспериментов сравнивались, естественно, с расчетами на ЦВМ.

Сопоставление результатов первой серии опытов (рис. 3.10 и 3.11) с натурными данными и результатами расчета можно считать вполне удовлетворительным.

Электрическое моделирование приливных колебаний уровня после сооружения плотины ПЭС (1-й вариант) (рис. 3.12 и 3.13) показывает влияние плотины ПЭС на изменение режима прилива в Мезенском заливе.

Почти на всей моделируемой акватории произошло возрастание амплитуд прилива как для волн M_2, так и для волн S_2. Этот рост амплитуд в основном увеличивается по мере приближения к плотине ПЭС.

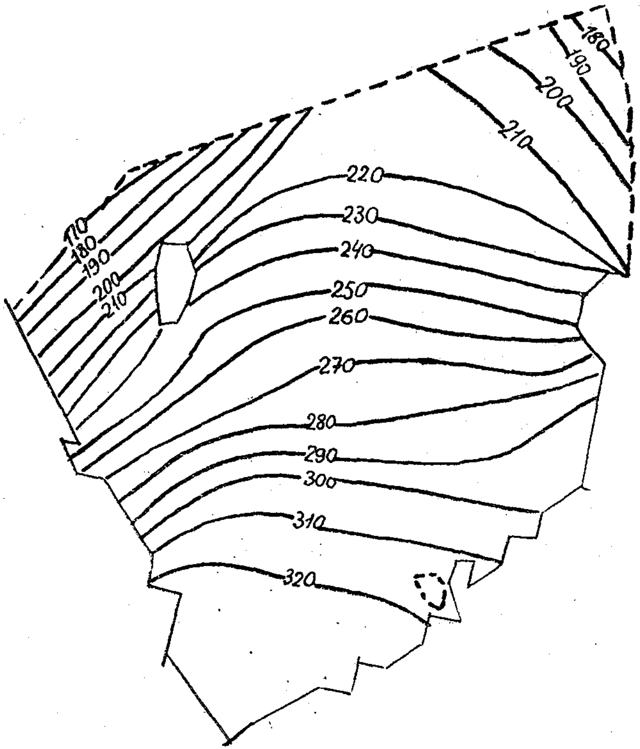

Рис. 3.12. Изоамплитуды волны M_2 после сооружения плотины ПЭС м. Перечный — м. Еловый

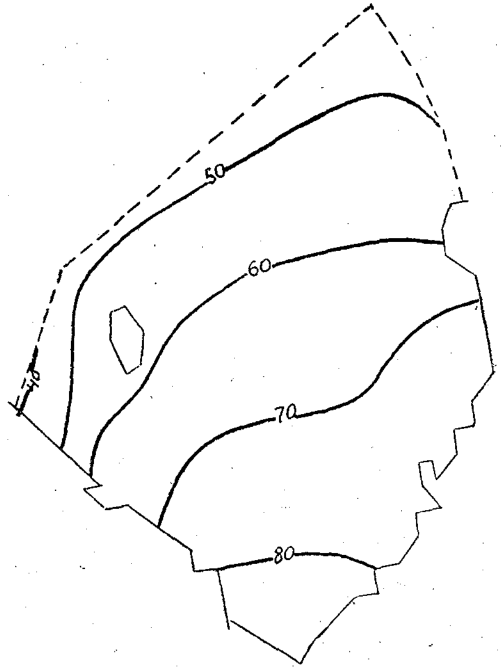

Рис. 3.13. Изоамплитуды волны S_2 после сооружения плотины ПЭС. м. Перечный — м. Еловый

Результаты моделирования колебаний уровня после сооружения плотины ПЭС по второму варианту (м. Травяной — Мгла) показали на еще большее возрастание амплитуд колебаний уровня вследствие полного отражения волн от плотины ПЭС.

Как было отмечено раньше, неустановившиеся колебания в море в поле действия силы Кориолиса необходимо исследовать на электрической модели, представляющей собой систему активных цепей, т. е. содержащей активные элементы — усилители. Особенностью такой модели, как и вообще всех электрических моделей-аналогов, является то обстоятельство, что время на модели остается непрерывным при дискретизации пространственных координат (за исключением тех случаев, когда дискретизация времени вводится специально).

Это исключает проблему вычислительной неустойчивости при определенных условиях, с которой приходится встречаться при решении подобных задач разностными методами на ЦВМ.

При незначительном влиянии силы Кориолиса модель неустановившихся длинноволновых движений в линейной постановке существенно упрощается, принимает вид электрической сетки, состоящей из пассивных элементов электрической цепи (R, L, C) и легко реализуется для сравнительно большого числа ячеек.

В случае замкнутого бассейна и принятия на границе условия вертикальной стенки краевые значения на модели воссоздаются посредством разрыва цепи.

Подобная модель была применена для исследования распространения и трансформации волн цунами в Японском море при различных вариантах исходного возмущения уровня в очаге.

При этом пренебрегали влиянием на волны цунами силы Кориолиса из-за высокочастотного спектра колебаний и принимали для линеаризации задачи в уравнениях движения

$$\frac{\tau_x}{\rho H} = ru, \quad \frac{\tau_y}{\rho H} = rv. \tag{3.76}$$

Моделирование свелось к решению уравнения (3.12) на сетке типа R, L, C. Параметры модели определялись из условия равенства единице индикаторов подобия:

$$\frac{C_L C_C}{C_t^2} = 1, \quad \frac{C_R C_C}{C_t} = 1.$$

Обозначения констант подобия сохраняются прежними.

Была спроектирована и изготовлена электрическая модель района, охватывающего очаг и основную зону распространения Ниигатского цунами, наблюдающегося 16.6.64 г. (рис. 3.14).

На границе модели, соответствующей береговой линии, воспроизводились условия полного отражения волны, на морской границе — беспрепятственный уход волны из моделируемого района.

Исходные возмущения в очаге задавались начальными напряжениями, имитирующими начальную денивеляцию уровня моря.

Моделировались четыре варианта исходного возмущения уровня:

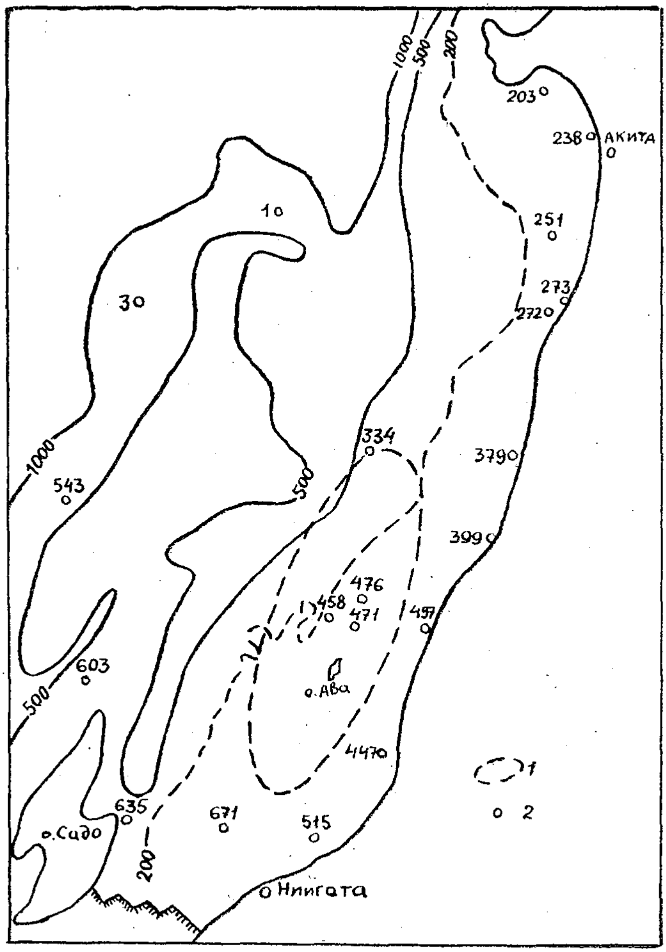

Рис. 3.14. Моделируемый район Японского моря:

1 — граница очага цунами; *2* — пункты регистрации колебания уровня на модели

1) точечный источник — положительное возмущение уровня на площади 9 кв. миль;

2) прямоугольный источник — одинаковая положительная денивеляция уровня по всей площади (950 кв. миль) очага возмущения;

3) «купол» — положительная денивеляция уровня, уменьшающаяся от центральной части очага возмущения к его границе;

4) источник сложной формы — купол, опоясанный ложбиной.

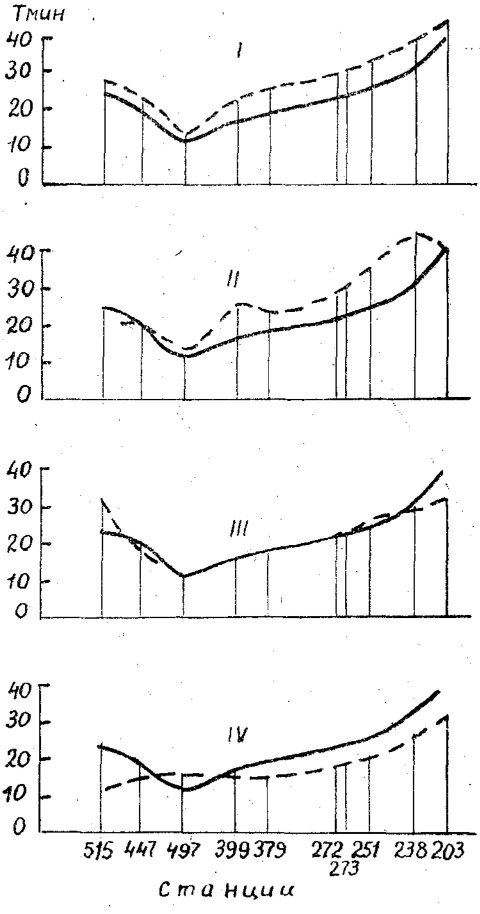

Рис. 3.15. Время прихода в пункты прибрежной зоны гребня первой волны. Форма возмущения в очаге:

I — точечный источник; *II* — источник прямоугольной формы; *III* — „купол“; *IV* — „купол“, опоясанный ложбиной

Для всех вариантов исходного возмущения определялись характеристики волн: амплитуды, период, время прихода фронта волны, продолжительность колебаний и т. д.

На рис. 3.15 представлены для всех четырех вариантов возмущения в очаге моменты прихода гребня первой волны в пункты, расположенные вдоль Японского побережья.

Наиболее полное совпадение экспериментальных и наблюденных значений получилось при третьем варианте возмущения.

§ 3.6. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МОРСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Рассматривается однородное море с реальным рельефом дна и произвольными очертаниями берегов, учитывается турбулентный обмен количеством движения только в вертикальном направлении. Нелинейные эффекты не учитываются, а давление считается равным гидростатическому. В этом случае из уравнений движения и неразрывности в интегральной форме для акватории таких размеров, при которых не учитывается сферичность Земли, получается следующее уравнение, описывающее стационарную интегральную ветровую циркуляцию в баротропном море:

$$\Delta\psi + \frac{H}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{H}\right)\right]\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{H}{r}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{r}{H}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{H}\right)\right]\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{H}{r}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{0x}}{H}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_{0y}}{H}\right)\right], \tag{3.79}$$

где Δ — лапласиан; ψ — интегральная функция тока; H — глубина; f — параметр Кориолиса; r — коэффициент трения о дно или нижележащий слой воды (c^{-1}); τ_{0x}, τ_{0y} — составляющие тангенциального напряжения ветра на поверхности.

Начало координат расположено на невозмущенной поверхности моря, система координат правая с осью z, направленной вертикально вверх.

Интегральная функция тока ψ выбиралась следующим образом:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \int_{-H}^{\zeta} u\rho\, dz, \quad -\frac{\partial\psi}{\partial x} = \int_{-H}^{\zeta} v\rho\, dz. \tag{3.80}$$

Учтем теперь бароклинность. При этом будем представлять плотность воды как сумму некоторой постоянной величины ρ_0 и отклонения от этой постоянной ρ', т. е. $\rho = \rho_0 + \rho'$. Этим компонентам плотности будут соответствовать две составляющие давления $p = p_0 + p'$. Тогда из уравнений движения и неразрывности при сделанных ранее предположениях получается уравнение, описывающее стационарную интегральную ветровую циркуляцию в бароклинном море:

$$\Delta\psi + \frac{H}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{H}\right)\right]\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{H}{r}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{r}{H}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{H}\right)\right]\frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{H}{r}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{0x}}{H}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_{0y}}{H}\right)\right] +$$

$$+\frac{H}{r}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\right)\frac{\partial q}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\right)\frac{\partial q}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p'_{-H}}{H}\right)\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p'_{-H}}{H}\right)\frac{\partial H}{\partial y}\right], \tag{3.81}$$

где $q=\int\limits_{-H}^{\zeta} p'dz$; p'_{-H} — отклонение давления на глубине H.

Следовательно, мы должны отыскать в электрической системе такой аналог, процессы в котором протекали бы аналогично процессам гидродинамической системы, описываемой либо уравнением (3.79), либо уравнением (3.81). Обозначим выражения, стоящие множителями перед первыми производными функции ψ по горизонтальным осям координат, как $\alpha_x(x, y)$ и $\alpha_y(x, y)$, а правую часть уравнения (3.79), как $T_0(x, y)$, тогда правую часть уравнения (3.81) можно представить в виде $T_0(x, y)+T'(x, y)$, причем выражение $T_0(x, y)$ является функцией тангенциального напряжения ветра на поверхности и глубины, а $T'(x, y)$ зависит от плотностной стратификации и глубины бассейна. Уравнения (3.79) и (3.81) переходят соответственно в соотношения:

$$\Delta\psi+\alpha_x(x, y)\frac{\partial\psi}{\partial x}+\alpha_y(x, y)\frac{\partial\psi}{\partial y}=T_0(x, y), \tag{3.82}$$

$$\Delta\psi+\alpha_x(x, y)\frac{\partial\psi}{\partial x}+\alpha_y(x, y)\frac{\partial\psi}{\partial y}=T_0(x, y)+T'(x, y). \tag{3.83}$$

Если рассматривать бассейн с постоянной глубиной и не учитывать изменения отклоняющей силы вращения Земли с широтой, то уравнения (3.82) и (3.83) превращаются в уравнение Пуассона:

$$\Delta\psi=-\frac{1}{r}\operatorname{rot}_z\tau_0. \tag{3.84}$$

Хорошим физическим аналогом лапласиана является сплошная электропроводная среда. Ее и можно использовать для моделирования левой части уравнения (3.84).

Однако удобнее перейти к дискретному представлению поля масс с помощью конечно-разностной аппроксимации.

Конечно-разностная форма уравнения (3.84) для точки 0 имеет вид (рис. 3.16, *а*):

$$\frac{0{,}5(l_2+l_4)}{l_1}(\psi_1-\psi_0)+\frac{0{,}5(l_2+l_4)}{l_3}(\psi_3-\psi_0)+\frac{0{,}5(l_1+l_3)}{l_2}(\psi_2-\psi_0)+$$

$$+\frac{0{,}5(l_1+l_3)}{l_4}(\psi_4-\psi_0)=-\frac{1}{r}\frac{(l_1+l_3)(l_2+l_4)}{4}\times$$

$$\times \left\{ \frac{l_3}{l_1(l_1+l_3)} [\tau_{0y}^{(1)} - \tau_{0y}^{(0)}] + \frac{l_1}{l_3(l_1+l_3)} [\tau_{0y}^{(0)} - \tau_{0y}^{(3)}] - \right.$$

$$\left. - \frac{l_4}{l_2(l_2+l_4)} [\tau_{0x}^{(2)} - \tau_{0x}^{(0)}] - \frac{l_2}{l_4(l_2+l_4)} [\tau_{0x}^{(0)} - \tau_{0x}^{(4)}] \right\}, \qquad (3.85)$$

где l_i — шаг сетки, в общем случае — переменный.

Дискретным аналогом лапласиана в электрической системе, как было показано в § 3.2, является сетка, составленная из сопротивлений одного знака.

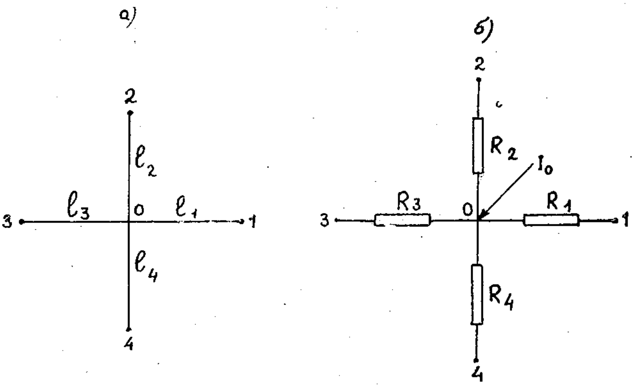

Рис. 3.16. Схема расчетного узла гидродинамической системы при дискретном представлении поля масс (*а*) и соответствующая ей схема узла сетки в электрической системе (*б*)

Правая часть уравнения (3.85) аппроксимируется током, подаваемым в узловые точки сетки, который является дискретным эквивалентом распределенного возбуждения.

Напишем закон Кирхгофа для той же точки 0 (применим принцип непрерывности) (рис. 3.16, *б*):

$$\frac{V_1 - V_0}{R_1} + \frac{V_3 - V_0}{R_3} + \frac{V_2 - V_0}{R_2} + \frac{V_4 - V_0}{R_4} + I_0 = 0, \qquad (3.86)$$

где V — потенциал, пропорциональный искомой функции тока; R — сопротивление между соседними узлами сетки; I_0 — ток, поданный в узловую точку.

Введем константы подобия:

$$C_V = \frac{\psi_i}{V_i}, \qquad (3.87)$$

$$C_I = \frac{T_0}{I_0}, \qquad (3.88)$$

$$C_R = \frac{f(l_i)}{R_i}, \qquad (3.89)$$

где T_0 — правая часть уравнения (3.85); $f(l_i)$ — отношение расстояния между соседними узлами к полусумме шагов по ортогональной оси.

Подставляя выражения (3.87)—(3.89) в соотношение (3.86) и сравнивая полученное уравнение с уравнением (3.85), получим выражение для индикатора подобия:

$$\frac{C_V}{C_R \cdot C_I} = 1. \tag{3.90}$$

Мы получили равенство, которое является обусловливающим при выборе параметров электрической модели и при переходе от данных эксперимента к натуре.

В случае равных шагов сетки все сопротивления становятся одинаковыми, а квадрат шага ячейки в гидродинамической системе может входить либо в константу C_I, либо в константу C_R.

Необходимость учета глубины и изменения параметра Кориолиса с широтой связана с необходимостью моделирования эффекта, вызываемого наличием в моделируемом уравнении первых производных от искомой функции ψ по осям координат.

Чтобы не усложнять выкладок, рассмотрим сначала аналоговую модель процесса, описываемого уравнением эллиптического типа, имеющим первую производную лишь по одной из осей, пусть x, т. е. $\alpha_x = \text{const}$, $\alpha_y = 0$. Такой вид уравнения будет, например, в случае учета β-эффекта в море постоянной глубины. Для простоты, не ограничивая общности, рассмотрим систему с постоянным шагом. Не вводя дополнительных обозначений, под α_x и α_y будем подразумевать теперь их конечно-разностные изображения. Тогда конечно-разностное представление уравнения (3.82) для точки 0 при принятых ограничениях имеет вид (рис. 3.17)

$$\left(\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_x}{2l}\right)(\psi_1 - \psi_0) + \left(\frac{1}{l^2} - \frac{\alpha_x}{2l}\right)(\psi_3 - \psi_0) + \\ + \frac{\psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0}{l^2} = -T_0, \tag{3.91}$$

а для точки *1* —

$$\left(\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_x}{2l}\right)(\psi_5 - \psi_1) + \left(\frac{1}{l^2} - \frac{\alpha_x}{2l}\right)(\psi_0 - \psi_1) + \\ + \frac{\psi_0 + \psi_7 - 2\psi_1}{l^2} = -T_1. \tag{3.92}$$

Закон Кирхгофа для точки 0 выражается как

$$\frac{V_1 - V_0}{R_{xk}} + \frac{V_3 - V_0}{R_{x(k-1)}} + \frac{V_2 + V_4 - 2V_0}{R_{yk}} + I_0 = 0, \tag{3.93}$$

а для точки 1 как

$$\frac{V_5 - V_1}{R_{x(k+1)}} + \frac{V_0 - V_1}{R_{xk}} + \frac{V_6 + V_7 - 2V_1}{R_{y(k+1)}} + I_1 = 0. \qquad (3.94)$$

Сравнивая выражения (3.91) и (3.93), а также (3.92) и (3.94), обнаруживаем, что сопротивление R_{xk} в положительном направлении оси x отличается от сопротивления R_{xk} в отрицательном

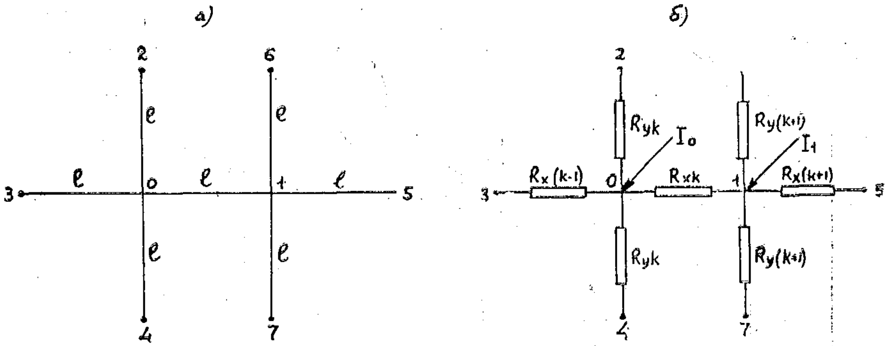

Рис. 3.17. Схема расположения точек в гидродинамической системе (*а*) и соответствующий ей участок электрической сетки (*б*) при наличии в моделируемом уравнении первой производной по оси x ($\alpha_x = \text{const}$, $\alpha_y = 0$).

направлении оси x. Аналогичные сравнения для других узловых точек показывают, что величина сопротивления зависит от того, является ли оно «правым» или «левым» по отношению к рассматриваемой узловой точке.

Таким образом, при наличии в уравнении первой производной в процессе моделирования появляются особые трудности. Их можно преодолеть, применяя ламповые схемы с двумя катодными повторителями, соединяющими соседние узловые точки (рис. 3.18). Катодный повторитель имеет очень высокое входное и низкое выходное сопротивление; потенциал на катоде каждой лампы по своему значению очень близок к потенциалу, приложенному к сетке. Следовательно, точка A присоединяется к узловой точке с потенциалом V_B через сопротивление R_A, а точка B соединяется с узловой точкой, имеющей потенциал V_A, через сопротивление R_B. Если отношение сопротивлений R_A/R_B между каждой парой узловых точек вдоль оси x становится эквивалентным отношению $\dfrac{\left(\dfrac{1}{l^2} - \dfrac{\alpha_x}{2l}\right)}{\left(\dfrac{1}{l^2} + \dfrac{\alpha_x}{2l}\right)}$, то проблему можно считать решенной.

В случае большого количества узловых точек модель существенно осложняется. Выход был найден В. Сорокой (1954). Для моделирования одномерной задачи с постоянным коэффициентом перед первой производной было предложено использовать пересчетный множитель. Применим этот способ и для нашего простого случая двумерной задачи, затем постепенно распространим его

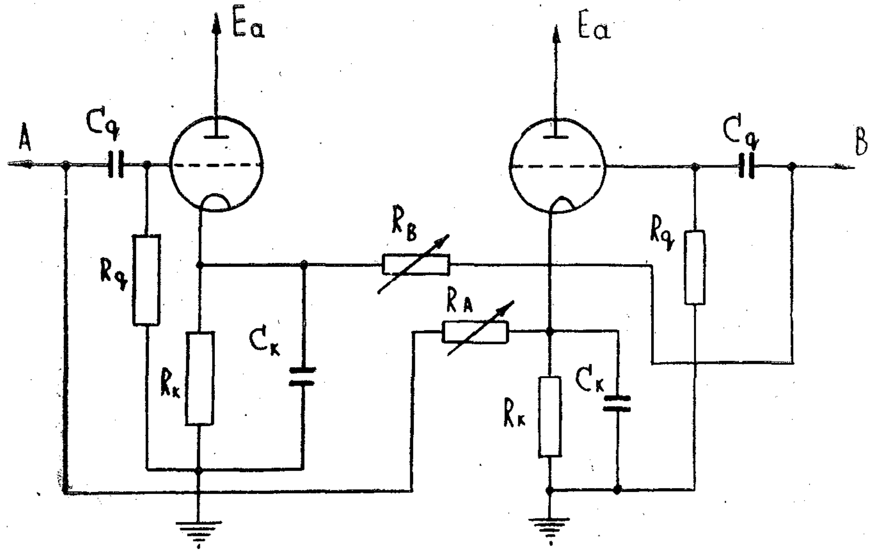

Рис. 3.18. Использование в схемах катодных повторителей для моделирования первой производной от искомой функции

и на самый общий случай переменных коэффициентов перед первыми производными. При этом будем все время помнить о необходимости соблюдения условий подобия между нашей сеточной моделью и натурой.

Для того, чтобы оба значения R_{xk} стали идентичными, надо умножить на множитель

$$N_x = \frac{\dfrac{1}{l^2} - \dfrac{\alpha_x}{2l}}{\dfrac{1}{l^2} + \dfrac{\alpha_x}{2l}} \qquad (3.95)$$

обе части выражения (3.91), составленного для узловой точки 0. Эту операцию умножения следует проделать со всеми уравнениями, составленными для каждой узловой точки по оси x в целях «согласования» каждого «правого» и «левого» сопротивлений. Сравнивая полученные уравнения гидродинамической системы с уравнениями электрической сетки, составленными для сходственных точёк, нетрудно заметить, что сопротивления должны возрастать в положительном направлении оси x, так как $N_x < 1$; токи должны уменьшаться в этом же направлении:

$$R_{xk} = \frac{1}{C_R} \frac{1}{\left(\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_x}{2l}\right) N_x^k}, \tag{3.96}$$

$$R_{yk} = \frac{1}{C_R} \frac{l^2}{N_x^k}, \tag{3.97}$$

$$I_k = \frac{1}{C_I} T_k, \tag{3.98}$$

где k — порядковый номер узловой точки в положительном направлении оси x (обобщенная координата).

Однако такая электрическая система будет аналогична не рассматриваемой моделируемой системе, а системе, преобразованной умножениями на множители N_x. Необходимо трансформировать электрическую систему. Этого можно достигнуть, если отказаться от констант подобия C_R и C_I, связывающих сопротивление с параметрами гидродинамической системы, а токи — с завихренностью ветрового поля, и ввести коэффициенты подобия, меняющиеся с изменением обобщенной координаты:

$$C_{I_k} = \frac{T_k}{I_k}, \tag{3.99}$$

$$C_{R_k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_x}{2l}\right) R_{xk}} = \frac{l^2}{R_{yk}}. \tag{3.100}$$

Аналогом гидродинамической системы будет сетка с сопротивлениями, уменьшающимися вдоль оси x (каждое «правое» сопротивление сетки меньше «левого» в N_x раз) и с токами, увеличивающимися по оси x:

$$R_{xk} = R_{x0} N_x^k, \tag{3.101}$$

$$R_{yk} = R_{y0} N_x^k, \tag{3.102}$$

$$I_k = I_k^{(0)} N_x^{-k}, \tag{3.103}$$

где R_{y0}, R_{x0} — так называемые опорные сопротивления; $I_k^{(0)}$ — величина нетрансформированного тока.

Хотя при таком выборе сопротивлений и источников константы подобия C_R и C_I превращаются в коэффициенты, меняющиеся с изменением обобщенной координаты, коэффициент подобия для искомой функции ψ не меняется по оси x, он по-прежнему остается константой подобия согласно уравнению (3.87):

$$C_V = \frac{\psi_k}{V_k}. \tag{3.104}$$

Подставляя соотношения (3.99)—(3.100), (3.104) с учетом (3.101)—(3.103) в выражение для закона Кирхгофа, составленного для любой узловой точки модели, и сравнивая полученное уравнение с конечно-разностным представлением уравнения (3.83) для рассматриваемого нами частного случая, получаем индикатор подобия

$$\frac{C_V}{C_{R_k} \cdot C_{I_k}} = 1, \tag{3.105}$$

вид которого идентичен выражению (3.90), хотя коэффициенты подобия C_{R_k} и C_{I_k} меняются с изменением обобщенной координаты по оси x. Выполняя условие (3.105), мы выполняем необходимое условие подобия электрической модели и натуры.

Связь между опорными сопротивлениями R_{x0} и R_{y0} легко получить из выражения (3.100) с учетом (3.101)—(3.102), т. е. из того условия, что в каждой данной точке коэффициенты подобия для сопротивлений по осям x и y должны быть одинаковыми (сравниваются «правые» сопротивления для данной точки как по оси x, так и по оси y):

$$\frac{R_{x0}}{R_{y0}} = \frac{\frac{1}{l^2}}{\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_x}{2l}}. \tag{3.106}$$

Пусть теперь $\alpha_x = f(x, y)$, $\alpha_y = 0$.

В этом случае выражение (3.91) приобретает вид

$$\left(\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_{x0}}{2l}\right)(\psi_1 - \psi_0) + \left(\frac{1}{l^2} - \frac{\alpha_{x0}}{2l}\right)(\psi_3 - \psi_0) + \\ + \frac{\psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0}{l^2} = -T_0, \tag{3.107}$$

а выражение (3.92) —

$$\left(\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_{x1}}{2l}\right)(\psi_5 - \psi_1) + \left(\frac{1}{l^2} - \frac{\alpha_{x1}}{2l}\right)(\psi_0 - \psi_1) + \\ + \frac{\psi_0 + \psi_7 - 2\psi_1}{l^2} = -T_1. \tag{3.108}$$

Для достижения идентичности сопротивлений R_{xk} необходимо умножить их на множитель

$$N^{(x)}_{k,\,q} = \frac{\dfrac{1}{l^2} - \dfrac{\alpha^{(x)}_{k+1,\,q}}{2l}}{\dfrac{1}{l^2} + \dfrac{\alpha^{(x)}_{k,\,q}}{2l}}, \qquad (3.109)$$

где q — номер узловой точки (обобщенная координата) по оси y.

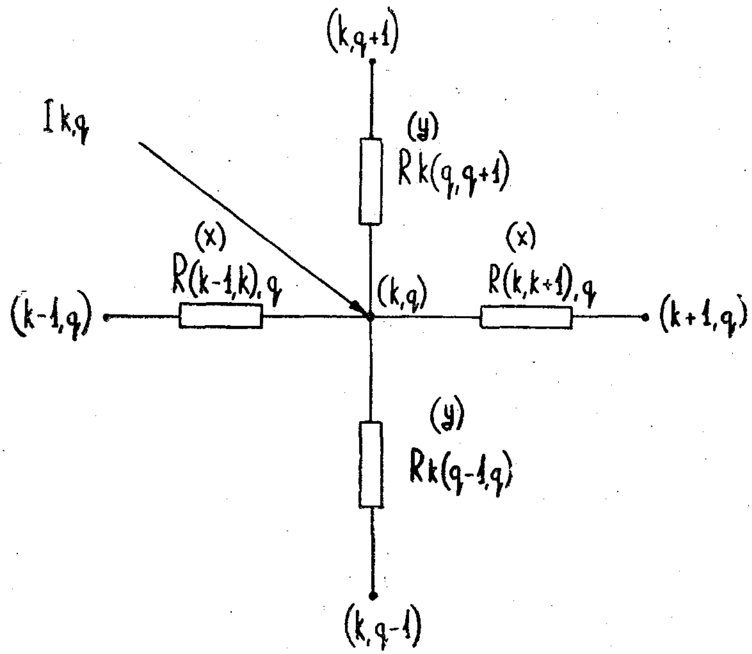

Рис. 3.19. Схема узла электрической модели для случая произвольного изменения коэффициентов при первых производных

Сопротивления и токи меняются с изменением обобщенных координат k, q следующим образом (рис. 3.19):

$$R^{(x)}_{(k,\,k+1),\,q} = [R^{(x)}_{k,\,q}]_0 \prod_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,\,q}, \qquad (3.110)$$

$$R^{(y)}_{k,\,(q,\,q+1)} = [R^{(y)}_{k,\,q}]_0 \prod_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,\,q}, \qquad (3.111)$$

$$I_{k,\,q} = I^{(0)}_{k,\,q} \prod_{i=1}^{k} [N^{(x)}_{i,\,q}]^{-1}, \qquad (3.112)$$

причем

$$\frac{[R^{(x)}_{k,\,q}]_0}{[R^{(y)}_{k,\,q}]_0} = \frac{\frac{1}{l^2}}{\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha^{(x)}_{k,\,q}}{2l}}. \tag{3.113}$$

Рассчитывая таким образом сопротивления, расположенные вдоль оси y, между линиями с обобщенными координатами q и $(q+1)$, умножаем их на произведение $\prod\limits_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,\,q}$. В случае большого различия в величинах произведений $\prod\limits_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,\,q}$ и $\prod\limits_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,\,q+1}$ целесообразнее значения сопротивлений, расположенных вдоль оси y, определять по формуле

$$R^{(y)}_{k,\,(q,\,q+1)} = [R^{(y)}_{k,\,q}]_0\, 0{,}5 \left[\prod_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,\,q} + \prod_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,\,q+1}\right]. \tag{3.114}$$

Два рассмотренных варианта дают возможность распространить метод пересчетных множителей и на случай произвольного изменения коэффициентов при первых производных, когда $\alpha_x = f(x,\ y)$, $\alpha_y = f(x,\ y)$. Причем, теперь нужно ввести множители для получения идентичных сопротивлений не только по оси x, но и по оси y.

По аналогии с предыдущим, величины сопротивлений и токов выражаются как

$$R^{(x)}_{(k,\,k+1),\,q} = [R^{(x)}_{k,\,q}]_0 \prod_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,\,q} \prod_{j=1}^{q} N^{(y)}_{k,\,j}, \tag{3.115}$$

$$R^{(y)}_{k,\,(q,\,q+1)} = [R^{(y)}_{k,\,q}]_0 \prod_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,\,q} \prod_{j=1}^{q} N^{(y)}_{k,\,j}, \tag{3.116}$$

$$I_{k,\,q} = I^{(0)}_{k,\,q} \prod_{i=1}^{k} [N^{(x)}_{i,\,q}]^{-1} \prod_{j=1}^{q} [N^{(y)}_{k,\,j}]^{-1}. \tag{3.117}$$

Соотношения между опорными сопротивлениями имеют вид:

$$\frac{[R^{(x)}_{k,\,q}]_0}{[P^{(y)}_{k,\,q}]_0} = \frac{\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha^{(y)}_{k,\,q}}{2l}}{\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha^{(x)}_{k,\,q}}{2l}}. \tag{3.118}$$

Если величины произведений $\prod_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,q}$ и $\prod_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,q+1}$, а также $\prod_{j=1}^{q} N^{(y)}_{k,j}$ и $\prod_{j=1}^{q} N^{(y)}_{k+1,j}$ сильно отличаются друг от друга, расчет величин сопротивлений лучше вести по следующим формулам:

$$R^{(x)}_{(k,\,k+1),\,q} = [R^{(x)}_{k,q}]_0 \prod_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,q}\, 0{,}5 \left[\prod_{j=1}^{q} N^{(y)}_{k,j} + \prod_{j=1}^{q} N^{(y)}_{k+1,j}\right], \qquad (3.119)$$

$$R^{(y)}_{k,\,(q,\,q+1)} = [R^{(y)}_{k,q}]_0 \prod_{j=1}^{q} N^{(y)}_{k,j}\, 0{,}5 \left[\prod_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,q} + \prod_{i=1}^{k} N^{(x)}_{i,q+1}\right]. \qquad (3.120)$$

Изменение знака у первых производных с плюса на минус приводит к тому, что пересчетные множители становятся бо́льшими, чем единица; в этом случае значения сопротивлений растут в положительном направлении осей x и y, а сила тока — уменьшается.

Рассмотрим теперь вопросы устойчивости электрической аналоговой модели циркуляции в океане.

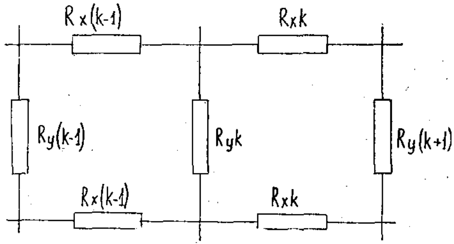

Рис. 3.20. Типичные контуры электрической системы, по которым определяется устойчивость при наличии в схеме отрицательных сопротивлений ($\alpha_x = \text{const}$, $\alpha_y = 0$, $N_x < 0$).

Математическое описание конечно-разностной схемы и электрической сетки одинаково, следовательно, любая вычислительная неустойчивость в конечно-разностной схеме должна отражаться как электрическая неустойчивость в аналоговой электрической системе и наоборот. Следовательно, критерий устойчивости электрических цепей можно использовать не только для определения устойчивости данной электрической системы, моделирующей исследуемый бассейн, но и для определения условий устойчивости конечно-разностного представления дифференциальных уравнений (3.79, 3.81).

Неустойчивость электрической системы связана с наличием в ней не только положительных, но и отрицательных сопротивлений. Полный анализ такой системы весьма трудоемок, поэтому обычно находят условия, при которых типичный конструктивный блок модели (типичный контур или типичный узел) устойчив. В этом случае будет устойчива и вся система, так как любая энергия, не рассеянная блоком, будет передаваться соседним элементам, также диссипирующим энергию, следовательно, в электрической сетке не будет роста малых возмущений напряжения и силы тока.

Следуя У. Карплюсу, сформулируем критерий устойчивости типичного контура (рис. 3.20):

— если все сопротивления контура положительны, то контур устойчив;

— если некоторые из сопротивлений отрицательны, то контур будет устойчив тогда, когда сумма всех имеющихся отрицательных сопротивлений больше суммы всех положительных сопротивлений.

Отрицательные сопротивления в модели могут появиться, если величина $\frac{1}{l^2}-\frac{\alpha}{2l}<0$, в этом случае $l>\frac{2}{\alpha}$, т. е. шаг сетки недостаточно мал, чтобы компенсировать возрастающую роль коэффициента при первой производной. Рассмотрим, будет ли электрическая система устойчивой при наличии отрицательных сопротивлений в схеме. Для простоты примем $\alpha_x = \text{const}$, $\alpha_y = 0$. Так как $l>\frac{2}{\alpha_x}$, то $N_x<0$, поэтому, уменьшаясь по абсолютной величине в положительном направлении оси x, сопротивления при переходе от точки к точке будут менять знак. В сетке будет два типичных контура: $(k-1,\ k)$ и $(k,\ k+1)$ (см. рис. 3.20). И если сопротивления R_{kx}, R_{yk} — положительные, то $R_{x\,(k-1)}$, $R_{y\,(k-1)}$, $R_{y\,(k+1)}$ — отрицательные.

Тогда условие устойчивости для контура $(k-1,\ k)$ выглядит как

$$\left|2R_{x\,(k-1)}+R_{y\,(k-1)}\right|>\left|R_{yk}\right| \tag{3.121}$$

или как

$$2R_{x0}+R_{y0}>R_{y0}\left|N_x\right|. \tag{3.122}$$

Так как неравенство (3.122) **всегда** выполняется, то первый типичный контур устойчив.

Но определим условие устойчивости для второго типичного контура $(k,\ k+1)$, оно имеет вид

$$\left|R_{y\,(k+1)}\right|>\left|R_{yk}+2R_{xk}\right| \tag{3.123}$$

или

$$R_{yo}\left|N_x\right|>R_{yo}+2R_{xo}. \tag{3.124}$$

Во-первых, (3.124) **не может быть выполнено,** во-вторых, условия (3.122) и (3.124) **исключают друг друга.**

Следовательно, условие

$$\frac{1}{l^2}-\frac{\alpha}{2l}>0 \tag{3.125}$$

или

$$l<\frac{2}{\alpha} \tag{3.126}$$

обязательно для моделирования гидродинамической системы с первыми производными от искомой функции по осям координат. Невыполнение данного условия приводит к тому, что в схеме, кроме положительных, появляются также и отрицательные сопротивления, что приводит к неустойчивости системы.

§ 3.7. УСЛОВИЯ ОДНОЗНАЧНОСТИ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МОРСКИХ ТЕЧЕНИЙ. ПЕРЕХОД ОТ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ТОКА К ТЕЧЕНИЯМ НА ОТДЕЛЬНЫХ ГОРИЗОНТАХ

Моделирование морских течений фактически сводится к интегрированию либо уравнения (3.79), либо уравнения (3.81). Каждый конкретный случай будет иметь не только много общего со всем множеством подобных случаев, но и определяться своими условиями однозначности.

В условия однозначности войдут следующие данные:

— морфометрические характеристики изучаемого бассейна, т. е. вид береговой черты, ограничивающей бассейн и характер подводного рельефа. В простейших модельных задачах может быть известно уравнение границы области $y = y(x)$;

— физические величины, определяющие данную гидродинамическую систему, к которым относятся параметр Кориолиса, коэффициенты трения, завихренность ветрового поля на поверхности океана, стратификация. Большое значение имеет учет или неучет изменения параметра Кориолиса с широтой;

— граничные условия. Если обозначим через S исследуемую область, через F — ее границу, а через $P(x, y)$ — любую точку области, в том числе принадлежащую границе, то для каждого случая необходимо знать

$$\psi = \psi(x, y), \text{ когда } P(x, y) \in FS. \qquad (3.127)$$

Если бассейн замкнут, то из условия непротекания твердой стенки на береговой черте всегда можно получить, что

$$\psi = \mathrm{const}, \quad \text{когда} \quad P(x, y) \in FS, \qquad (3.128)$$

чаще всего принимают

$$\psi = 0, \text{ когда } \quad P(x, y) \in FS. \qquad (3.129)$$

На водной границе необходимо задание функции ψ, что сопряжено с известными трудностями, так как часто мы можем задать расходы жидкости на входе в бассейн весьма и весьма ориентировочно. Лучше выбрать жидкий контур таким образом, чтобы он располагался либо нормально к предполагаемому интегральному переносу, либо вдоль него. Следовательно, водная граница должна быть расположена либо так, чтобы

$$\frac{\partial\psi}{\partial\nu} = 0, \text{ когда } P(x, y) \in F_w S, \qquad (3.130)$$

либо так, чтобы

$$\psi = \text{const}, \text{ когда } \quad P(x, y) \in F_w S, \tag{3.131}$$

где F_w — водная граница бассейна; ν — внутренняя нормаль к границе.

Условие (3.130) получается автоматически, так как на модели оно аналогично отсутствию протекания электрического тока через границу F_w, что достигается простым разрывом цепи.

Условие (3.131) как будто бы предполагает необходимость знания величин расходов воды на жидком контуре. Однако это не так. В отличие от расчетов на ЦВМ, используя аналоговую модель, можно обойтись без этой дополнительной и почти всегда неизвестной информации. На модели необходимо лишь закоротить те сопротивления, которые аппроксимируют граничную линию тока, создав условие постоянства электрического потенциала на ней. **Величина** потенциала, а следовательно, и самой функции определяется **в процессе моделирования**. Так как фактически на электрической сетке измеряются не сами потенциалы, а разность потенциалов относительно заданного потенциала на части границы, задача является вполне определенной. В качестве заданного потенциала на части контура может быть либо потенциал береговой черты, либо потенциал части жидкой границы. Не ограничивая общности, можно положить потенциал равным нулю.

Если после получения в бассейне общей картины циркуляции, нас заинтересует ее детализация в какой-либо центральной части, задача может превратиться в задачу Неймана, если располагать водную границу так, чтобы выполнялось лишь условие (3.130). При этом необходимо лишь задание функции ψ в одной из точек области S.

Вообще электрическая аналоговая модель позволяет последовательно сколь угодно увеличивать отдельные части исследуемой области, используя решение задачи в одном масштабе для задания краевых условий на выделенной части области в бо́льшем масштабе.

Необходимое условие подобия требует, чтобы индикатор подобия, составленный из коэффициентов подобия, был равен единице (3.105). Это условие удовлетворяется соответствующим выбором параметров модели. Соблюдая подобие между условиями однозначности гидродинамической системы и модели, мы выполним также достаточное условие подобия. Таким образом, моделируемый бассейн и электрическая модель будут подобны.

Измерив потенциалы в узловых точках электрической сетки и перейдя от данных модели к натуре с помощью константы подобия C_V, получим распределение функции ψ в исследуемом бассейне. От интегральной функции тока нетрудно перейти к скоростям течений на отдельных горизонтах, используя существующие методы.

Зная ψ, можно определить динамические наклоны поверхности из уравнений движения в интегральной форме, а затем по ним и по характеру плотностной стратификации вычислить составляющие скорости географического течения.

Составляющие скорости течения в пограничных слоях, вызванные только влекущим действием ветра (дрейфовые составляющие скорости течения в верхнем пограничном слое) и только влиянием трения о дно (составляющие в придонном слое), нетрудно определить из широко известной системы уравнений, основанной на полуэлектрической теории турбулентности, позволяющей в замкнутом виде сформулировать задачу.

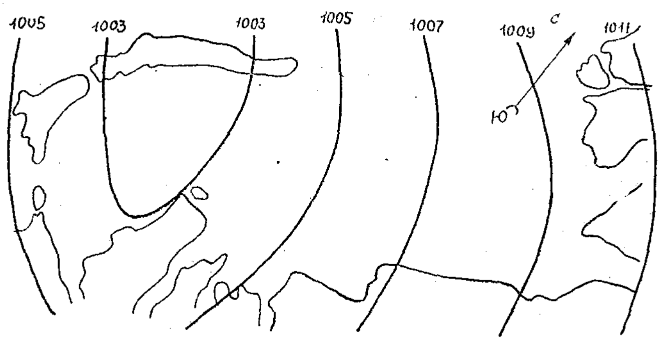

Рис. 3.21. Среднемесячное барическое поле за август 1966 г. (Карское море).

Вертикальная скорость определяется из уравнения неразрывности. При этом в качестве граничного условия на поверхности используется кинематическое соотношение.

Следовательно, совмещая метод электрического аналогового моделирования и метод численного моделирования на ЦВМ, можно получить трехмерное поле течений в океане.

В качестве примера электрического аналогового моделирования ветровой циркуляции приводятся некоторые результаты экспериментов на модели Карского моря.

Тангенциальное напряжение ветра на поверхности рассчитывалось по среднемесячному полю приземного давления за август 1966 г. (рис. 3.21), как наиболее типичному по результатам наблюдений за период 1955—1970 гг. Коэффициент донного трения считался функцией коэффициента вертикального турбулентного обмена, который определялся на основе баланса энергии турбулентности.

На участках границы моря от A до C и от B до D задавалось условие непротекания (рис. 3.22).

На жидком контуре (участки AB и CD) задавалось условие равенства нулю нормальной к границе производной от интегральной функции тока, кроме того, учитывалась средняя величина стока рек Оби и Енисея, равная $1,4 \cdot 10^5$ м³/с.

На рис. 3.22 изображена интегральная циркуляция в Карском море, полученная на аналоговой модели. Анализируя полученные результаты, в общей схеме циркуляции Карского моря можно выделить два типичных района: юго-западную часть и все остальное море — центральную, северную и северо-восточную части, взятые вместе.

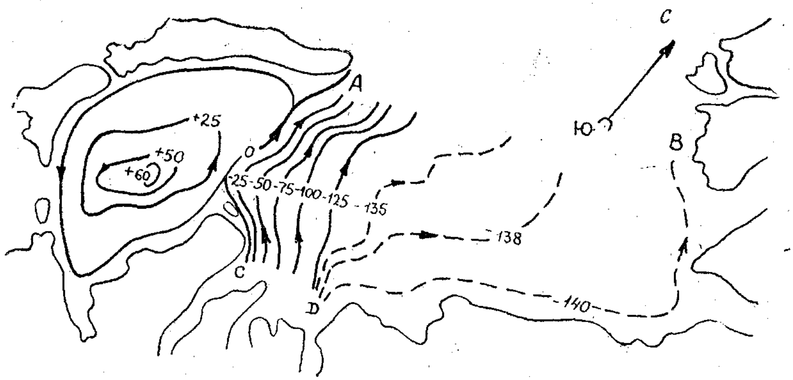

Рис. 3.22. Интегральная ветровая циркуляция в Карском море с учетом среднего речного стока Оби и Енисея ($\psi \cdot 10^{-3}$ м³/с)

В юго-западном районе моря возникает замкнутая циклоническая циркуляция. У берегов Новой Земли потоки воды движутся на юг, что соответствует Новоземельскому течению; потоки, идущие вдоль побережья полуострова Ямал на север, образуют Ямальское течение. Основной причиной течений в данном районе следует считать влекущее действие ветра на поверхности.

В центральной, северной и северо-восточной частях Карского моря господствует выносной тип циркуляции, формирующийся в основном под влиянием стока рек Оби и Енисея, о чем свидетельствуют опыты на моделях при отсутствии речного стока и задании его минимальной величины, равной $0,7 \cdot 10^5$ м³/с. В целом результаты моделирования вполне удовлетворительно согласуются со структурой течений Карского моря.

§ 3.8. АНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ В НЕОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЯХ

Наличие островов в бассейне превращает исследуемую область в многосвязную, что может привести в некоторых частных случаях к возникновению особенностей циркуляции вод около островов. Кроме того, само решение задачи о стационарной ветровой циркуляции в бассейне с островами обладает рядом особенностей.

В. Б. Штокман указывал на факты аномальных циркуляций вокруг океанических островов. Были высказаны предположения о причинах этого явления, которые сводились в основном к тому, что главной причиной возможных аномальных циркуляций у океанических островов является, во-первых, поперечная неравномерность ветра, во-вторых, асимметричное расположение островов по сравнению с контуром области сгона—нагона. Не последнюю роль в нарушении господствующей циркуляции в акватории, окружающей остров, должны играть относительные размеры острова. Очевидно, что при малых относительных размерах острова никаких особенностей циркуляции около него не должно возникать.

Рассмотрим некоторую многосвязную область S. Пусть F_0 — внешний контур этой области, $F_\varkappa$ — контуры островов ($\varkappa = 1, \ldots, n$), σ — направление касательной к контуру, ν — направление внутренней нормали к контуру, $P(x, y)$ — точка, принадлежащая области S, в том числе и границе.

Как было показано ранее, решение задачи о стационарной ветровой циркуляции сводится к решению уравнения эллиптического типа относительно функции полных потоков ψ.

В качестве граничного условия как на внешнем, так и на каждом внутреннем твердом контуре используется условие отсутствия расхода жидкости в направлении нормали к контуру, откуда со всей очевидностью вытекает, что функция полных потоков должна быть постоянна на каждом из контуров $F_\varkappa$.

Полагая, что

$$\psi = 0, \text{ когда } P(x, y) \in F_0S, \tag{3.132}$$

получим

$$\psi = Q_\varkappa, \text{ когда } P(x, y) \in F_\varkappa S \quad (\varkappa = 1, \ldots, n). \tag{3.133}$$

Контурные постоянные $Q_\varkappa$ имеют четкий физический смысл: их разности определяют расходы воды в проливах между соответствующими островами.

Как известно, условие однозначности функции ζ в области S записывается следующим образом:

$$\oint_{F_\varkappa} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy \right) = 0 \quad (\varkappa = 1 \ldots, n). \tag{3.134}$$

Если выполнить условие (3.134), то и на внешнем замкнутом контуре F_0 будет справедливо соотношение вида

$$\oint_{F_0} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} dx + \frac{\partial \zeta}{\partial y} dy \right) = 0. \tag{3.135}$$

Решение уравнения (3.83) в многосвязной области было найдено В. М. Каменковичем в виде

$$\psi = \psi_0 + \sum_{\varkappa=1}^{n} Q_\varkappa \psi_\varkappa \quad (\varkappa = 1, \ldots, n), \tag{3.136}$$

где ψ_0 — решение неоднородного уравнения (3.83) при нулевых граничных условиях на всех контурах; $\psi_\varkappa$ — решение однородного уравнения (3.83) при нулевых граничных условиях на всех контурах, за исключением $\varkappa$-го, на котором $\psi = 1$, когда $P(x, y) \in F_\varkappa S$. Если подставить значения для градиентов уровня из уравнений движения в интегральной форме в условие (3.134), то получим следующее выражение

$$\oint_{F_\varkappa} \frac{r}{H} \frac{\partial \psi}{\partial \nu} ds - \oint_{F_\varkappa} \frac{\tau_{0\sigma}}{H} ds = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, n). \tag{3.137}$$

При подстановке выражения (3.136) и (3.137) получается система из n линейных алгебраических уравнений для определения контурных постоянных $Q_\varkappa$:

$$\oint_{F_\varkappa} \frac{r}{H} \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} ds + \sum_{i=1}^{n} Q_i \oint_{F_\varkappa} \frac{r}{H} \frac{\partial \psi_i}{\partial \nu} ds - \oint_{F_\varkappa} \frac{\tau_{0\sigma}}{H} ds = 0. \tag{3.138}$$

Моделируя ветровые течения в многосвязной области, мы можем пойти тем же путем, т. е. сначала определим на модели функции ψ_0 и $\psi_\varkappa$, потом вычислим интегралы, входящие в соотношение (3.138), найдем контурные постоянные $Q_\varkappa$ из решения системы n алгебраических уравнений и, наконец, будем искать функцию полных потоков ψ в виде выражения (3.136).

Однако при большом числе островов процесс вычисления довольно трудоемок. Кроме того, в ряде частных случаев криволинейные интегралы по замкнутому контуру, стоящие множителями перед $Q_\varkappa$, могут оказаться равными нулю, что создает определенные вычислительные трудности. При моделировании надо идти другим путем, используя преимущества аналоговых моделей. Отсутствие приложенного потенциала на контуре острова означает, что ток не может проходить через границу модели, поэтому градиент электрического потенциала в направлении нормали к контуру принимает нулевое значение, так как ток прямо пропорционален напряжению. Аналогом функции полных потоков на электрической модели является потенциал в соответствующих узловых точках сетки. Следовательно, закорачивая контуры островов и не подводя к ним потенциал, мы удовлетворяем условиям:

$$\oint\limits_{F_\varkappa} \frac{r}{H} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} ds = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, n), \tag{3.139}$$

но не условиям (3.137), так как (3.137) и (3.139) совпадают лишь тогда, когда циркуляция касательной составляющей вектора тангенциального напряжения ветра по контуру острова равна нулю.

К такому же выводу мы можем прийти, применив теорему Гаусса. Так как внутри острова нет источников, то суммарный поток вектора напряженности через контур острова должен быть равен нулю, т. е.

$$\oint\limits_{F_\varkappa} E_\nu\, ds = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, n), \tag{3.140}$$

где E_ν — составляющая вектора напряженности, нормальная к контуру, аппроксимирующему контур острова.

Выражение (3.140) можно записать иначе:

$$\oint\limits_{F_\varkappa} \frac{\partial V}{\partial\nu} ds = 0 \quad (\varkappa = 1, \ldots, n). \tag{3.141}$$

Следовательно, удовлетворяется лишь условие (3.139).

Для выполнения условия (3.137) к закороченным границам островов следует подвести ток, пропорциональный величине $\oint\limits_{F_\varkappa} \frac{\tau_{0\sigma}}{H} ds$, т. е.

$$I_\varkappa = C_i' \oint\limits_{F_\varkappa} \frac{\tau_{0\sigma}}{H} ds \quad (\varkappa = 1, \ldots, n). \tag{3.142}$$

Только в этом случае гидродинамическая система и ее электрический аналог будут подобны. Причем из соотношения (3.135) непосредственно вытекает тот факт, что и на внешнем контуре должно выполняться условие (3.142).

$$\oint\limits_{F_0} \frac{r}{H} \frac{\partial\psi}{\partial\nu} ds - \oint\limits_{F_0} \frac{\tau_{0\sigma}}{H} ds = 0. \tag{3.143}$$

В отличие от внутренних контуров, внешний контур бассейна не подсоединяется к какому-либо источнику тока, однако на него подается постоянный потенциал (чаще всего нулевой), тем самым обеспечивается условие протекания через границу F_0 тока I_0, пропорционального величине $\oint\limits_{F_0} \frac{\tau_{0\sigma}}{H}\, ds$.

Необходимо заметить, что если для задания правой части уравнений (3.82) или (3.83), равной нулю, совершенно безразлично, будет ли подсоединен узел сетки через большое сопротивление к нулю делителя напряжений или узел будет вообще лишен электрического питания, то внешняя граница подключается обязательно к нулевому (или другому постоянному) потенциалу. Иначе будет выполняться не условие (3.143), а условие $\oint\limits_{F_0} \frac{r}{H} \frac{\partial\psi}{\partial\nu}\, ds = 0$, которое справедливо лишь для того частного случая, когда циркуляция касательной составляющей вектора тангенциального напряжения по внешнему контуру бассейна равна нулю. Неподсоединение внешней границы акватории к постоянному потенциалу приводит к появлению некоторого количества антициклонических круговоротов в бассейне, несмотря на общую циклоническую завихренность ветрового поля, и наоборот, возникают циклонические течения, несмотря на общую антициклоническую завихренность поля ветра.

В качестве примера рассмотрим ветровую циркуляцию в бассейне в форме квадрата со сторонами, параллельными осям x и y (ось y направлена на север, x — на восток). Внутренние контуры островов будем представлять прямоугольниками или квадратами произвольных размеров со сторонами, параллельными сторонам внешнего контура.

Глубину бассейна примем постоянной, не будем учитывать эффект изменения отклоняющей силы вращения Земли с широтой. Пусть поперечная неравномерность ветра задается следующим образом:

$$\tau_{0x} = 0, \qquad \tau_{0y} = a + bx. \tag{3.144}$$

При всех этих условиях уравнение (3.83) приобретает вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{b}{r}. \tag{3.145}$$

Сведем его к безразмерной форме следующими преобразованиями:

$$x = L\bar{x}, \qquad y = L\bar{y}, \qquad \psi = \frac{bL^2}{r}\bar{\psi}, \tag{3.146}$$

где L — характерный горизонтальный масштаб.

Тогда безразмерная форма (3.145) изображается как

$$\Delta\bar{\psi} = -1. \tag{3.147}$$

Ветровая циркуляция в бассейне, имеющем пять островов, расположенных по диагонали области, изображена на рис. 3.23. Аномальные переносы у берегов островов вызываются на этой модели двумя небольшими локальными круговоротами у северо-западной и юго-восточной оконечностей центрального острова, а также тем, что остальные острова, как и в ряде других экспериментов, обтекаются циклоническим потоком как с запада, так и с востока.

Серия опытов, выполненных на электрических аналоговых моделях ветровой циркуляции в многосвязной области, подтвердила, во-первых, основные выводы, полученные путем численного эксперимента на ЦВМ Д. Г. Ржеплинским и В. Б. Штокманом: в области, включающей острова, возникает одна или несколько интегральных циклонических циркуляций под действием имеющего циклоническую завихренность прямолинейного ветра; не возникает замкнутых циркуляций в узких проливах между островами и внешним контуром; в некоторых случаях наблюдается аномальный (антициклонический (перенос водных масс только вдоль отдельных частей островов, обусловленный либо возникновением местных циклонических циркуляций, либо тем, что при асимметричном расположении островов относительно внешнего контура остров или группа островов обтекаются циклоническим потоком как справа, так и слева.

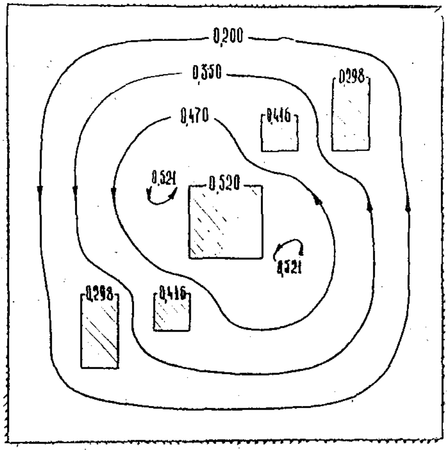

Рис. 3.23. Функция полных потоков в шестисвязной области. Значения ψ даны в относительных единицах

Во-вторых, опыты показали существенное преимущество электрических аналоговых моделей для изучения циркуляции в бассейне с островами.

При проведении численных экспериментов на ЦВМ в общем случае может быть рассмотрена произвольная многосвязная область. Это не создает принципиальных трудностей ни для выбора итерационного метода, ни для составления программы счета. Однако возникают трудности другого типа. Прежде всего, каждой точке сетки должен быть присвоен признак: принадлежит ли эта точка области, границе области или вовсе не входит в рассматриваемую область. Этот признак должен проверяться в каждой точке сетки, так как ищутся значения только для внутренних точек. Кроме того, при увеличении связности области должна значительно увеличиться и используемая машинная память.

Для решения задач на аналоговой электрической модели увеличение количества островов не представляет никаких трудностей. Практически задача остается одинаково простой как для двусвязной, так и для области любой связности.

Учет дополнительных факторов (переменная глубина, изменение параметра Кориолиса с широтой) и переход к реальным объектам произвольных очертаний с произвольным распределением ветра по пространству также не создает дополнительных трудностей.

§ 3.9. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА АНАЛОГОВЫХ МОДЕЛЯХ

Рассмотрим неустановившуюся ветровую циркуляцию в однородном море переменной глубины. Линеаризированные уравнения движения в интегральной форме при выполнении условия гидростатики в вертикальном направлении имеют вид:

$$\frac{\partial W_x}{\partial t} - f W_y = -gH\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\tau_{0x} - rW_x, \qquad (3.148)$$

$$\frac{\partial W_y}{\partial t} + f W_x = -gH\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\tau_{0y} - rW_y. \qquad (3.149)$$

Коэффициент донного трения r будем считать квазистационарным.

Уравнение неразрывности в интегральной форме записывается как равенство

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0. \qquad (3.150)$$

Если разделить изучаемый бассейн на объемы, представляющие собой прямоугольные параллелепипеды с квадратными основаниями, рассмотреть расходы жидкости через стенки объемов, представить далее эти расходы, а также колебания уровня и тангенциальное напряжение ветра на поверхности моря в виде разложения в ряд Фурье, то можно показать, что из любых членов этих разложений одного и того же порядка можно получить неоднородное уравнение эллиптического типа для члена ряда соответствующего порядка из разложения функции ζ.

Так как рассматриваемая гидродинамическая система является линейной, процесс можно моделировать с помощью электрической сетки, составленной из резисторов, конденсаторов и индуктивностей. При этом должен использоваться не переменный, а постоянный ток. Однако сразу же возникает трудность в задании переменных во времени граничных условий. Постараемся избежать этого.

Во-первых, на поверхности бассейна используется условие твердой стенки, позволяющее выфильтровывать внешние инерционно-гравитационные волны. Во-вторых, рассматривается бассейн таких размеров, в котором можно пренебречь широтным изменением параметра Кориолиса. Кроме того, считается, что коэффициент донного трения незначительно меняется от ячейки к ячейке. В-третьих, так как параметры электрической модели подбираются отдельно для каждой ячейки гидродинамической системы и соблюдается принцип непрерывности при соединении отдельных элементов электрической сетки в общую схему, можно положить, что дивергенция средней скорости для каждой ячейки, в пределах которой глубина осредняется и считается постоянной, равна нулю.

Тогда из исходных уравнений легко получить следующие уравнения эллиптического типа для функции полных потоков ψ:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=\exp(-rt)\left\{-\frac{1}{\rho}\int \operatorname{rot}_z\left[\frac{\tau_0(t)}{H}\right]\times\right.$$
$$\times\exp(rt)\,dt+\frac{1}{\rho}\left|\int \operatorname{rot}_z\left[\frac{\tau_0(t)}{H}\right]\exp(rt)\,dt\right|_{t=0}+$$
$$\left.+\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right|_{t=0}\right\}. \qquad (3.151)$$

Как правило, на большой акватории мы можем получить лишь дискретные данные по приземному давлению или ветру. Если принять, что в промежутке между сроками ветер продолжает оставаться постоянным, а затем скачком принимает новое значение, то уравнение (3.151) можно свести к следующему виду:

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right|_{t_0+\varkappa\delta t}=$$
$$=\frac{1}{\rho r}\left[\exp(-r\delta t)-1\right]\sum_{j=1}^{m}\left\{\left|\operatorname{rot}_z\left(\frac{\tau_0}{H}\right)\right|_{t_0+(j-1)\delta t}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[-r(j-1)\,\delta t\right]\right\}, \quad (\varkappa=1,\ \ldots,\ m); \qquad (3.152)$$

где t_0 — начальный момент времени, δt — промежуток времени, в течение которого ветер считается постоянным (обычно $\delta t \geqslant 3$ ч).

Такой вид моделируемого уравнения значительно упрощает задачу, так как время входит в него в виде параметра.

Следовательно, для моделирования нестационарных потоков, возникших под действием тангенциального напряжения ветра, можно использовать аналоговые сеточные модели, применяемые для решения так называемого уравнения Пуассона для неоднородной среды. Сопротивления сетки определяются в зависимости от размеров ячеек и глубин гидродинамической системы. Правая часть уравнения вычисляется для любого момента времени, а затем аппроксимируется пропорциональным ей значением силы тока, который подается в узловые точки модели.

Граничным условием на берегу является условие непротекания, на жидких границах необходимо задание либо функции ψ, либо ее нормальной производной.

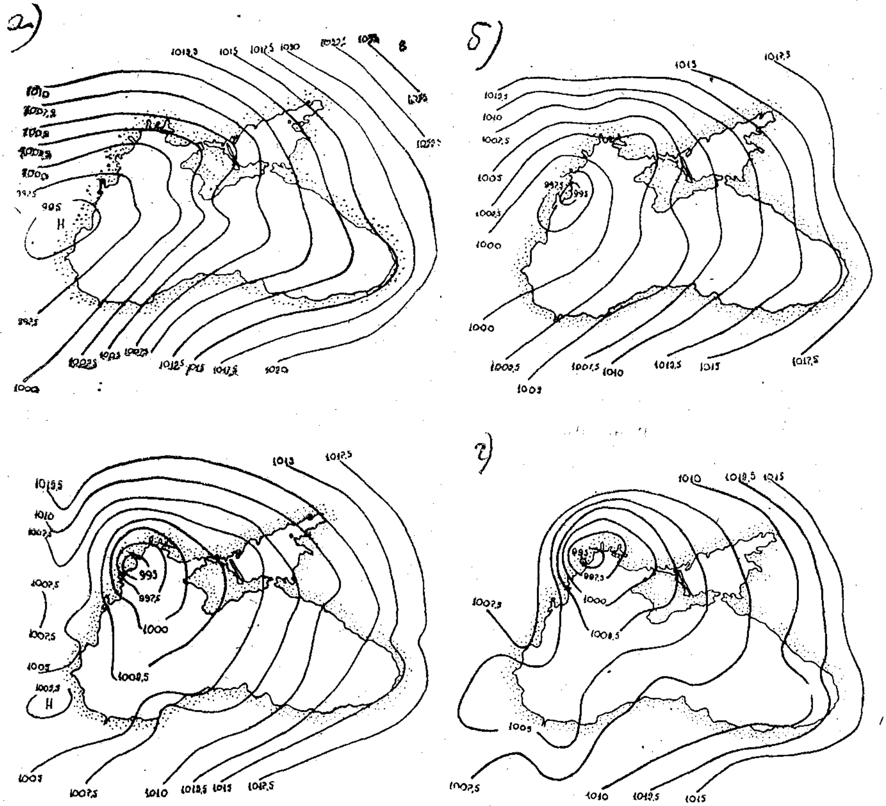

Рис. 3.24. Карты приземного давления над Черным морем 13 декабря 1963 г. в 15 ч. (*а*), 18 ч. (*б*), 21 ч. (*в*), 24 ч. (*г*)

Приводятся некоторые результаты аналогового моделирования нестационарной ветровой циркуляции в Черном море с 18 ч. 13/XII до 3 ч. 14/XII 1963 г. Карты приземного давления с 15 ч. 13/XII изображены на рис. 3.24. В этот период над Черным морем располагалась восточная периферия циклона, который постепенно смещался к северо-востоку.

Моделировалась ветровая циркуляция в верхнем трехсотметровом слое. Она показана на рис. 3.25. Считалось, что в 15 часов море находилось в невозмущенном состоянии. На схемах показаны полные потоки, возникшие под действием меняющегося во времени ветра.

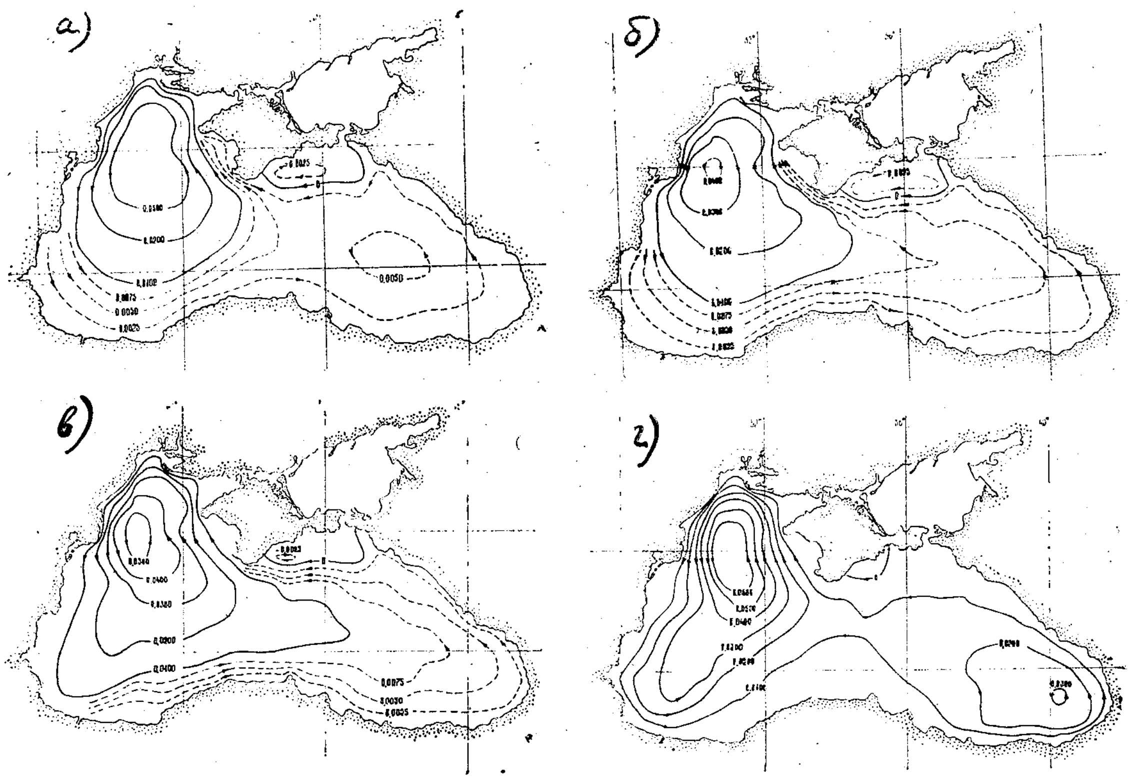

Рис. 3.25. Нестационарная ветровая циркуляция в Черном море 13—14/XII 1963 г. в 18 ч. (*а*), 21 ч. (*б*), 24 ч. (*в*), 3 ч. (*г*) ($\psi \cdot 10^{-7}$ м^3/с)

В Черном море возникла общая циклоническая система течений. Лишь между Крымским полуостровом и побережьем Кавказа располагался антициклонический круговорот, постепенно уменьшающийся с течением времени. Начиная с 3 ч. 14/XII можно выделить довольно интенсивный циклонический круговорот и в восточной половине моря, который прослеживался первоначально в 18 ч. 13/XII. Результаты электрического моделирования не противоречат общим представлениям о характере циркуляции в Черном море.

§ 3.10. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕПЛО- И МАССОПЕРЕНОСА

Аналитическое решение задач тепло- и массопереноса при нестационарных условиях весьма сложно и в большинстве случаев просто невозможно. Единственным путем реализации проблемы пока можно считать либо численные, либо аналоговые методы.

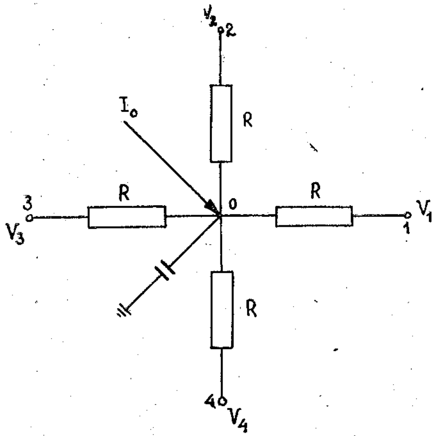

Рис. 3.26. Принципиальная схема узловой точки R, C-сетки для решения уравнения теплопроводности

Процессы тепло- и массопереноса описываются уравнениями параболического типа, к которым прежде всего относится уравнение Фурье

$$A(x,\ y)\ \Delta\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\ (A(x,\ y) > 0). \qquad (3.153)$$

Лапласиан может быть аппроксимирован сеткой из сопротивлений одного знака. Правая часть уравнения (3.153) представляется током, поданным в узловую точку сетки, так как этот же ток должен быть пропорциональным производной по времени, то его необходимо подавать через конденсатор емкости C_0 (рис. 3.26).

Запишем закон Кирхгофа для узловой точки:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{V_i - V_0}{R_i} + C_0\ \frac{\partial}{\partial t}\ (0 - V_0) = 0. \qquad (3.154)$$

Из равенства (3.154) видно, что при использовании емкостей производная по времени берется непрерывная, а по координатам составляются разностные уравнения.

При наличии источников уравнение Фурье превращается в уравнение теплопроводности, являющееся комбинацией уравнения Фурье и уравнения Пуассона.

В 1956 г. Либман предложил оригинальный метод решения нестационарных задач тепло- и массопереноса на электрических аналоговых моделях. Этот метод реализует решение по неявной конечно-разностной схеме.

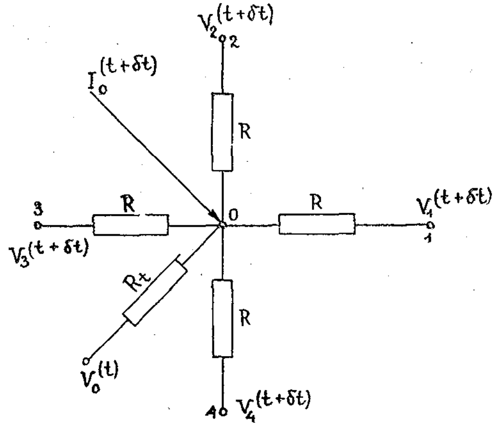

Рис. 3.27. Принципиальная схема узловой точки резисторной сетки для решения уравнения теплопроводности методом Либмана

В отличие от модели, составленной из резисторов и конденсаторов, этот метод позволяет использовать электрические сетки, содержащие лишь омическое сопротивление.

Пусть необходимо исследовать процесс, описываемый следующим уравнением параболического типа:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + A_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}. \qquad (3.155)$$

Его конечно-разностное представление по неявной схеме имеет вид

$$\frac{\varphi^{(t+\delta t)} - \varphi^{(t)}}{\delta t} = A(x, y) \frac{\sum_{i=1}^{4} \varphi_i^{(t+\delta t)} - \varphi_0^{(t+\delta t)}}{l^2} + F_0^{(t+\delta t)}(x, y). \qquad (3.156)$$

Соберем электрическую сетку, один из узлов которой представлен на рис. 3.27. Запишем закон Кирхгофа для узловой точки:

$$\frac{V_0^{(t)} - V_0^{(t+\delta t)}}{R_t} + \frac{\sum_{i=1}^{4} V_i^{(t+\delta t)} - V_0^{(t+\delta t)}}{R} + F_0^{(t+\delta t)} = 0. \qquad (3.157)$$

Введем константы подобия:

$$C_V = \frac{\varphi_i}{V_i}, \tag{3.158}$$

$$C_R = \frac{l^2}{A(x, y) R}, \tag{3.159}$$

$$C_{R_t} = \frac{\delta t}{R_t}, \tag{3.160}$$

$$C_I = \frac{F_i}{I_i}. \tag{3.161}$$

Сравнивая уравнения (3.156) и (3.157) с учетом введенных констант подобия, нетрудно получить следующие выражения для индикаторов подобия, которые являются необходимыми для расчета параметров модели:

$$\frac{C_R}{C_{R_t}} = 1, \tag{3.162}$$

$$\frac{C_V}{C_I C_R} = 1, \tag{3.163}$$

$$\frac{C_V}{C_I C_{R_t}} = 1. \tag{3.164}$$

Эксперимент на аналоговой модели протекает в следующей последовательности: на свободные концы сопротивлений R_t подаются значения потенциалов, пропорциональные искомой функции φ в момент времени t. Если моделируемая система имеет источники, в узлы сетки следует подать токи, пропорциональные величине источников в момент времени $t+\delta t$, граничные условия также задаются для момента времени $t+\delta t$. Затем в узловых точках модели измеряются электрические потенциалы, которые соответствуют моменту времени $t+\delta t$. Эти найденные значения опять подаются на свободные концы сопротивлений, задаются новые токи и новые граничные условия, в узловых точках определяются потенциалы для следующего момента времени $t+2\delta t$ и т. д.

Особенностью предложенного Либманом метода является его устойчивость, так как моделируется уравнение по неявной разностной схеме.

Процессы тепло- и массопереноса в самом общем виде описываются следующим уравнением параболического типа:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + u\frac{\partial\varphi}{\partial x} + v\frac{\partial\varphi}{\partial y} + w\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A_y\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + F(x, y, z, t), \quad (3.165)$$

которое можно записать в несколько иной форме:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = A_x\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + A_y\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + A_z\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} - u\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} - v\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z} - w\right)\frac{\partial\varphi}{\partial z} + F(x, y, z, t). \quad (3.166)$$

Для учета первых производных можно использовать способ пересчетных множителей, позволяющий определенным образом трансформировать электрическую схему, в том числе и сопротивления R_t. Этот способ подробно изложен в § 3.6.

Сам эксперимент на модели протекает в той же последовательности, шагами по времени.

Существуют аналоговые модели, в основу которых положены методы моделирования по явной схеме. Иногда используются не только сеточные модели, с дискретизацией по пространству и времени, но и комбинированные модели с сохранением непрерывности по координатам и дискретизацией во времени.

Для решения ряда практических задач часто применяются специальные подстановки, позволяющие исключить из моделируемых уравнений первые производные.

Метод Либмана, распространенный на трехмерное уравнение теплопроводности, был использован при исследовании процессов теплопередачи в Балтийском море. Задача решалась при граничных условиях второго рода. На боковой поверхности и на дне моря потоки тепла принимались равными нулю, а на свободной поверхности рассчитывались по составляющим теплового баланса. Коэффициенты турбулентной температуропроводности считались переменными как в пространстве, так и во времени. В процессе моделирования их величины корректировались. Использование аналогов позволяло вносить корректировку непосредственно в ходе эксперимента.

Анализ результатов показал, что аналоговая модель тепловых процессов позволяет выявить основные особенности термической структуры Балтийского моря.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобылева И. М. Расчет характеристик турбулентности в планетарном пограничном слое атмосферы. — «Тр. ЛГМИ», 1970, вып. 40, с. 3—63.

2. Богданова А. К., Степанов В. Н. Влияние спутных и встречных течений на поведение плотностного потока в пространстве (качественная оценка). — «Тр. ЛГМИ», 1972, вып. 46, с. 69—75.

3. Волынский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., 1960. 456 с.

4. Гринспен Х. Теория вращающихся жидкостей. Л., 1975. 304 с.

5. Гутенмахер Л. И. Электрические модели. М., 1949. 404 с.

6. Гутенмахер Л. И. Электрические модели. Киев, 1975. 176 с.

7. Гухман А. А. Введение в теорию подобия. Изд. 2-е. М., 1973. 296 с.

8. Доронин Ю. П. Тепловое взаимодействие атмосферы и гидросферы в Арктике. Л., 1969. 300 с.

9. Знаменский В. А. Пространственное моделирование режима водоемов для изучения их санитарного состояния. В сб.: Научные доклады по вопросам самоочищения водоемов и смешения сточных вод (I Всесоюзный симпозиум. 7—10 июня 1965 г.). 1965, с. 188—199.

10. Каменкович В. М. Об интегрировании уравнений теории морских течений в неоднородных областях. — «ДАН СССР», 1961, т. 138, № 5, с. 1076—1079.

11. Карплюс У. Моделирующие устройства для решения задач теории поля. М., 1962. 488 с.

12. Кейлеган Д. Г. Законы моделирования для побережий и эстуариев. В кн.: Гидродинамика береговой зоны и эстуариев. Л., 1970, с. 374—393.

13. Кирпичев М. В. Теория подобия. М., 1953. 96 с.

14. Кирпичев М. В., Конаков П. К. Математические основы теории подобия. М.—Л., 1949. 104 с.

15. Коздоба Л. А. Электрическое моделирование явлений тепло- и массопереноса. М., 1972. 296 с.

16. Кривошей М. И. Лабораторное определение границ и уровня затопления берега в районе г. Усть-Камчатка при накатывании волн цунами. В кн.: Проблема цунами. М., 1967, с. 184—197.

17. Кривошей М. И. Исследование трансформации длинной волны цунами на пространственной модели Камчатского залива.— «Тр. ГГИ», вып. 161, 1968, с. 92—97.

18. Кузьмин М. П. Электрическое моделирование нестационарных процессов теплообмена. М., 1974. 416 с.

19. Макаров В. А., Мензин А. Б. Электрическое аналоговое моделирование в океанологии. Некоторые вопросы теории и эксперимента. Л., 1976. 110 с.

20. Моделирование явлений в атмосфере и гидросфере. — «Тр. Первой междуведомственной конференции. 22—26 ноября 1960 г.». М., 1963.

21. Патрашев А. И. Гидромеханика. М., 1953. 719 с.

22. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Пер. с англ. М., 1957. 536 с.

23. Ржеплинский Д. Г., Штокман В. Б. Исследование особенностей циркуляции вокруг океанических островов путем численного эксперимента. — «Изв. АН СССР. Сер. физ. атмосферы и океана», 1968, т. 4, № 12, с. 1264—1274.

24. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 8-е. М., 1977. 438 с.

25. Степанов В. Н. Исследование взаимодействия стратифицированных потоков в проливах типа Босфор. Автореф. дисс. на соиск. учен. степени канд. техн. наук. Л., 1972. 24 с.

26. Теория подобия и размерностей. Моделирование. М., 1968, 208 с. Авт.: П. М. Алабужев, В. Б. Геронимус, Л. М. Минкевич, Б. А. Шеховцев.

27. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., 1959. 319 с.

28. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Вып. I. Пер. с англ. М., 1965. 268 с.

29. Фофонов Н. П. Динамика океанических течений. В кн.: Море. Л., 1965, с. 255—345.

30. Штокман В. Б. О причине круговых течений около островов и противоположных течений у берегов проливов. — «Изв. АН СССР. Сер. геогр.», 1954, № 4, с. 29—37.

31. Штокман В. Б. Качественный анализ причин аномальной циркуляции вокруг океанических островов. — «Изв. АН СССР. Сер. физ. атмосферы и океана», 1966, т. 2, № 11, с. 1175—1185.

32. Штофф В. А. Моделирование и философия. М.—Л., 1968. 302 с.

33. Chabert D'Hieres G., Le Provost C. Etude des phenomenes non lineaires derives de l'onde lunaire moyenne M_2 dans La Manche. — «Cahiers oceanogr», 1970, XXII, 6, p. 543—569.

34. Liebmann G. A new electrical analog method for the solution of transient heatconduction problems. — «Trans ASME», 1956, № 78, № 3, p.p. 655—665.

35. Liebmann G. Solution of transient heattransfer problems by the resistance — network analog method. — «Trans. ASME», 1956, v. 78, № 6, p.p. 1267—1272.

36. Soroka W. W. Analog methods in computation and Simolation, Mc. Craw — Hill Book Company, Inc., N. Y. (a. o), 1954.

СОДЕРЖАНИЕ

Валерий Александрович Макаров,

Александр Борисович Мензин

Моделирование процессов в океане (гидравлическое и аналоговое)

Учебное пособие

Редактор *И. Н. Базилевская*

Корректоры *Е. А. Машникова, Т. Л. Кувшинская*

М-26385. Сдано в набор 21/XI 1978 г. Подп. к печати 27/VII 1979 г. Зак. 5. Формат бумаги 60×90[1]/16. Бумага тип. № 1. Объем 7,25 п. л. Уч.-изд. л. 7. Тираж 500. Цена 40 коп.
Темплан 1979 г., поз. 1285.

Издание ЛПИ им. М. И. Калинина. 195251, Ленинград, Политехническая ул., 29.
Типография 6 ВОК ВМФ