ПРАКТИКУМ ПО ДИНАМИКЕ ОКЕАНА

Под редакцией
д-ра геогр. наук А. В. НЕКРАСОВА,
д-ра физ.-мат. наук Е. Н. ПЕЛИНОВСКОГО

Допущено
Государственным комитетом СССР
по народному образованию
в качестве учебного пособия
для студентов вузов,
обучающихся по специальности
«Океанология»

Санкт–Петербург Гидрометеоиздат 1992

УДК 551.465(075.8)

Авторы: В. О. Ивченко, А. В. Клепиков, В. Ф. Козлов, Л. Н. Кузнецова, М. И. Масловский, А. В. Некрасов, Е. Н. Пелиновский, Н. Л. Плинк, Г. М. Резник, Д. Е. Хейсин

Рецензенты: д-р геогр. наук *Э. И. Саруханян*, канд. геогр. наук *Б. Ф. Чередилов* (Одесский гидрометеорологический институт)

Материал Практикума охватывает содержание соответствующего раздела курса физики океана, разработанного для гидрометеорологических институтов. Приведены основные теоретические положения и изложены методы расчета важнейших динамических процессов в океане. Рассмотрены волновые, вихревые и циркуляционные виды океанских движений, а также процесс распространения примесей и дрейф льда.

Практикум предназначен для студентов, специализирующихся в области физической океанологии.

The material of the "Practical book on dynamics of Ocean" covers the corresponding part of the syllabus of the teaching course of physics of Ocean. The main up-to-date foundations are given and the methods of calculation of the most important dynamical processes in the Ocean are expounded. The different types of Ocean motions, such as waves, eddies and circulations as well as diffusion of impurities and ice drift, are considered.

The book is aimed for students specializing in the sphere of physical oceanology.

П $\frac{1805040600\text{-}035}{069(02)\text{-}92}$ КБ 48-4-1991

ISBN 5-286-00445-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение курса динамики океана студентами океанологической специальности строится на основе лекционного материала и сопровождается семинарскими занятиями, выполнением практических или лабораторных работ и другими формами занятий, где студенты должны осваивать учебный материал в значительной степени самостоятельно. Быстрое развитие динамики океана приводит к необходимости постоянно пересматривать содержание курса, а также изменять соотношение между формами занятий. В настоящее время существует тенденция к ограничению количества лекционных часов в учебных планах, в связи с чем значительная часть материала должна выноситься на семинары и различные виды практических работ. Предлагаемый Практикум представляет собой учебное пособие, предназначенное для занятий такого рода.

Цель Практикума состоит в том, чтобы дать студенту возможность самостоятельно подготовиться к семинарским занятиям по ключевым разделам курса, усвоить материал, необходимый для выполнения расчетных лабораторных работ и анализа полученных результатов, и выполнить указанные работы, произведя все необходимые вычисления.

В соответствии с типовым учебным планом весь материал Практикума делится на девять глав, имеющих сходную структуру. Каждая глава состоит из нескольких разделов, содержащих теоретический материал, вопросы для самопроверки, типовые упражнения и лабораторные работы. В конце каждой главы приводится список литературы, включающий наиболее фундаментальные источники преимущественно отечественных изданий, а также самые важные публикации последних лет. Содержание теоретических разделов в основном не дублирует учебник «Динамика океана» (изд. 1980 г.), за исключением первого раздела главы 3, где частичное использование материала учебника диктуется требованиями связности изложения. В значительной степени отличие содержания Практикума от учебника обусловлено стремлением ознакомить студентов с наиболее крупными и перспективными результатами современных исследований.

Практикум предназначен для студентов как очной, так и заочной формы обучения. Предполагается, что в течение двух семестров, отводимых на изучение курса динамики океана, студент должен выполнить 8—10 лабораторных работ из всех, представленных в учебном пособии.

В составлении Практикума приняли участие В. О. Ивченко (глава 6 без разделов 6.4, 6.5 и лабораторной работы), А. В. Клепиков (глава 7 и лабораторная работа к главе 6), В. Ф. Козлов (раздел 6.5), Л. Н. Кузнецова (глава 8), М. И. Масловский (лабораторная работа к главе 9), А. В. Некрасов (глава 3), Е. Н. Пелиновский (главы 1, 2, 5, разделы 4.1, 4.3), Н. Л. Плинк (глава 4 без разделов 4.1, 4.3), Г. М. Резник (раздел 6.4), $\boxed{\text{Д. Е. Хейсин}}$ (глава 9 без лабораторных работ).

Авторы посвящают этот Практикум светлой памяти своего товарища доктора физико-математических наук, профессора Д. Е. Хейсина, безвременно скончавшегося до окончания их общей работы над книгой.

ГЛАВА 1

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ОКЕАНЕ

1.1. Волны на поверхности океана. Основные уравнения

При первоначальном изучении волн в океане обычно упрощают постановку задачи: пренебрегают действием внешних и капиллярных сил, глубину океана и плотность воды считают постоянными, действие вязкости не учитывают, рассматривают невращающуюся Землю. При этих предположениях исходные уравнения гидродинамики имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u}+w\,\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\,\nabla p=0; \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+(\mathbf{u}\nabla)\,w+w\,\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z}=-g; \tag{1.2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}+\partial w/\partial z=0, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u}$ — горизонтальный и w — вертикальный компоненты скорости; ρ — плотность воды; p — давление и g — ускорение свободного падения. Система координат связана с невозмущенной океанической поверхностью, ось z направлена вертикально вверх. Дифференциальные операторы ∇ и div действуют только в горизонтальной плоскости $(x,\ y)$.

Уравнения (1.1)—(1.3) должны быть дополнены граничными условиями на дне и на свободной поверхности. На дне $(z=-h)$ это условие непротекания жидкости:

$$w=0 \qquad (z=-h), \tag{1.4}$$

на свободной поверхности $[z=\eta(x,\ y,\ t)]$ — кинематическое

$$\partial\eta/\partial t+(\mathbf{u}\nabla)\,\eta=w \qquad (z=\eta) \tag{1.5}$$

и динамическое условия

$$p=p_{\text{атм}} \qquad (z=\eta) \tag{1.6}$$

(атмосферное давление $p_{\text{атм}}$ считается постоянным).

Уравнения (1.1)—(1.3) совместно с граничными условиями (1.4)—(1.6) позволяют достаточно полно исследовать волны на воде. Основная сложность при решении этих уравнений связана с их нелинейностью. Сначала мы рассмотрим *линейные волны*, когда в уравнениях и граничных условиях пренебрегают нелинейными членами и условия на свободной поверхности ($z=\eta$) сносят на невозмущенную поверхность ($z=0$). При этом в давлении необходимо выделить гидростатический член в явном виде:

$$p=p_{\text{атм}}-\rho gz+p'(x,\ y,\ z,\ t). \tag{1.7}$$

Кроме того, будем считать, что в океане отсутствуют какие-либо течения. Тогда в линейном приближении исходная система уравнений имеет следующий вид:

$$\partial\mathbf{u}/\partial t+(1/\rho)\nabla p'=0; \tag{1.8}$$

$$\partial w/\partial t+(1/\rho)\,\partial p'/\partial z=0; \tag{1.9}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u}+\partial w/\partial z=0 \tag{1.10}$$

и соответственно граничные условия

$$w=0 \qquad (z=-h); \tag{1.11}$$

$$\partial\eta/\partial t=w; \quad p'=\rho g\eta \qquad (z=0). \tag{1.12}$$

Из уравнений (1.8) и (1.9) вытекает также, что ротор скорости равен нулю, т. е. волновое движение в отсутствие внешних течений всегда является потенциальным. Вводя тогда потенциал скорости $\varphi(x,\ y,\ z,\ t)$ по формулам

$$\mathbf{u}=\nabla\varphi; \quad w=\partial\varphi/\partial z, \tag{1.13}$$

из (1.10) получаем, что φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi+\partial^2\varphi/\partial z^2=\partial^2\varphi/\partial x^2+\partial^2\varphi/\partial y^2+\partial^2\varphi/\partial z^2=0. \tag{1.14}$$

Граничные условия (1.11)—(1.12) при этом принимают вид

$$\partial\varphi/\partial z=0 \qquad (z=-h); \tag{1.15}$$

$$\partial\eta/\partial t=\partial\varphi/\partial z; \quad \partial\varphi/\partial t+g\eta=0 \qquad (z=0). \tag{1.16}$$

Граничные условия (1.16) на свободной поверхности можно переписать в следующей форме:

$$\partial^2\varphi/\partial t^2+g\,\partial\varphi/\partial z=0 \qquad (z=0). \tag{1.17}$$

В результате уравнения (1.14), (1.15) и (1.17) образуют замкнутую систему для определения потенциала течений φ. Обычно в литературе свойства волн изучаются в рамках «потенциальной» системы [1—3, 5, 9, 10], мы, однако, используем систему (1.8)—(1.12), поскольку применяемые методы будут эффективны и для волн других типов, в частности внутренних, которые не являются потенциальными.

1.2. Монохроматические волны

Рассмотрим элементарные решения уравнений (1.8)—(1.12), соответствующие линейным свободным *бегущим* (*прогрессивным*) волнам, распространяющимся вдоль оси x [тогда из (1.8) вытекает, что $\mathbf{u}$ направлено вдоль оси x и характеризуется скалярной функцией u]:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \\ p \\ \eta \end{Bmatrix} = \mathrm{Re} \begin{Bmatrix} U(z) \\ W(z) \\ \rho P(z) \\ \eta_0 \exp(i\alpha) \end{Bmatrix} \exp[i(\omega t - kx)]. \qquad (1.18)$$

Здесь ω — частота; k — волновое число; η_0 — амплитуда волны; α — ее фаза; $U(z)$, $W(z)$, $P(z)$ — комплексные функции, описывающие вертикальное распределение волновых полей, их зависимость от глубины (структура моды), и Re — знак вещественной части получаемых выражений. Такая форма решения имеет место во всех случаях, когда исходные уравнения дополняются граничными условиями; такие задачи называются краевыми. Подставляя (1.18) в (1.8)—(1.12), легко найти связь между различными характеристиками:

$$U(z) = \frac{1}{ik} \frac{dW}{dz}; \quad P(z) = \frac{\omega}{ik^2} \frac{dW}{dz}, \qquad (1.19)$$

а для W получается следующая краевая задача:

$$d^2W/dz^2 - k^2W = 0; \qquad (1.20)$$

$$W - \frac{\omega^2}{gk^2} \frac{dW}{dz} = 0 \quad (z = 0); \quad W = 0 \quad (z = -h). \qquad (1.21)$$

Решение уравнения (1.20) легко находится в явном виде:

$$W(z) = A \exp(kz) + B \exp(-kz), \qquad (1.22)$$

где константы A и B должны находиться из граничных условий. Подстановка (1.22) в (1.21) приводит к линейной алгебраической однородной системе:

$$A \exp(-kh) + B \exp(kh) = 0;$$

$$[1 - \omega^2/(gk)]\, A + [1 + \omega^2/(gk)]\, B = 0. \qquad (1.23)$$

Ввиду однородности системы (1.23) ее решение существует только, если детерминант системы равен нулю, что приводит к

$$\omega^2 = gk \,\mathrm{th}\,(kh). \qquad (1.24)$$

Таким образом, частота волны и ее волновое число не могут быть произвольны, а связаны между собой *дисперсионным соотношением* (1.24).

С учетом (1.24) константы A и B также связаны между собой, и после использования (1.12) запишем окончательно

$$W(z) = i\omega\eta_0 \frac{\operatorname{sh}[k(z+h)]}{\operatorname{sh}(kh)} \exp(i\alpha); \tag{1.25}$$

$$U(z) = \omega\eta_0 \frac{\operatorname{ch}[k(z+h)]}{\operatorname{sh}(kh)} \exp(i\alpha); \tag{1.26}$$

$$P(z) = g\eta_0 \frac{\operatorname{ch}[k(z+h)]}{\operatorname{ch}(kh)} \exp(i\alpha). \tag{1.27}$$

Таким образом, мы получили полное описание свободных монохроматических волн. Удобно перейти к действительной форме записи решения:

$$\eta = \eta_0 \cos(\omega t - kx + \alpha); \tag{1.28}$$

$$w = -\omega\eta_0 \frac{\operatorname{sh}[k(z+h)]}{\operatorname{sh}(kh)} \sin(\omega t - kx + \alpha); \tag{1.29}$$

$$u = \omega\eta_0 \frac{\operatorname{ch}[k(z+h)]}{\operatorname{sh}(kh)} \cos(\omega t - kx + \alpha); \tag{1.30}$$

$$p = p_{\text{атм}} - \rho g z + \rho g \eta_0 \frac{\operatorname{ch}[k(z+h)]}{\operatorname{ch}(kh)} \cos(\omega t - kx + \alpha). \tag{1.31}$$

График хода уровня в фиксированной произвольной точке представляет собой синусоиду с *периодом* (расстоянием между вершинами) $T = 2\pi/\omega$. Максимальный размах колебаний называется *высотой* волны, и она равна $2\eta_0$. Аналогичный вид имеет профиль свободной поверхности в фиксированный момент времени t. Расстояние между вершинами в пространстве называется *длиной* волны: $\lambda = 2\pi/k$. Длина волны и период не могут изменяться произвольным образом, они связаны между собой дисперсионным соотношением (1.24). Из решения (1.28) вытекает, кроме того, что гребень (а также ложбина и любая другая точка профиля волны) перемещается в пространстве со скоростью

$$c_{\text{ф}} = \omega/k = \sqrt{(g/k)\operatorname{th}(kh)}, \tag{1.32}$$

называемой *фазовой скоростью* волны. Она получается из уравнения движения любой точки профиля, полная фаза для которой (например, сдвиг относительно вершины) остается постоянной: $\omega t - kx + \alpha = \text{const}$. Отметим, что, чем волна длиннее, тем больше скорость ее распространения — этот важный вывод, как мы увидим дальше, определяет динамику произвольных начальных возмущений морской поверхности.

Поле скоростей частиц жидкости в толще воды и на ее поверхности определяется формулами (1.29) и (1.30). На каждом фиксированном горизонте скорости частиц описываются выражениями типа монохроматической бегущей волны, причем горизонтальная скорость синфазна со смещением поверхности, следовательно максимальное значение модуля скорости на всех горизонтах достигается при прохождении гребня и ложбины. Вертикальная скорость сдвинута по фазе на $\pi/2$ от горизонтальной скорости, так что ее максимум приходится на участки с нулевым смещением поверхности. С глубиной скорости частиц (а следовательно, и смещения частиц) убывают, причем характер убывания определяется параметром kh или h/λ; с уменьшением длины волны волновые возмущения все менее проникают в глубь жидкости.

Наконец, волновые возмущения давления (поправка к гидростатическому давлению) повторяют возмущения горизонтальной скорости, поэтому их можно не изучать отдельно.

Ввиду сложной зависимости параметров волн от параметра kh целесообразно рассмотреть предельные значения этого параметра.

Глубокая вода. Этот случай реализуется при $kh \gg 1$ или $h \gg \lambda$. При этом формулы (1.24), (1.28)—(1.32) упрощаются, в (1.29)—(1.31) вертикальная структура моды описывается множителем $\exp(kz)$, а дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^2 = gk; \quad c_\text{ф} = \sqrt{g/k} = g/\omega. \tag{1.33}$$

Ввиду экспоненциального затухания возмущений с глубиной ($z < 0$) волновой слой имеет толщину, примерно равную половине длины волны, и не затрагивает основную толщу воды (в этом случае и говорят о глубокой воде). По модулю горизонтальная и вертикальная скорости одинаковы, следовательно одинаковы и смещения частиц по горизонтали и вертикали. Траектории частиц в этом случае являются окружностями с центром в точке x_0, y_0, z_0

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \eta_0^2 \exp(2kz_0), \tag{1.34}$$

радиус которых быстро уменьшается с глубиной.

Ввиду важности приближения глубокой воды при изучении ветровых волн в открытом море формулу (1.33) перепишем для периода и длины волны:

$$\lambda = gT^2/(2\pi), \quad c_\text{ф} = gT/(2\pi) = \sqrt{g\lambda/(2\pi)}. \tag{1.35}$$

Мелкая вода. Этот случай реализуется при $kh \ll 1$ или $h \ll \lambda$. При этом формулы (1.24), (1.29), (1.30) также упрощаются:

$$w = -\omega\eta_0 \frac{z+h}{h} \sin(\omega t - kx + \alpha); \tag{1.36}$$

$$u = \sqrt{g/h}\, \eta_0 \cos(\omega t - kx + \alpha); \tag{1.37}$$

$$\omega^2 = ghk^2, \quad c_\text{ф} = \sqrt{gh}. \tag{1.38}$$

Как видим, в волновом движении принимает участие вся толща океана, причем горизонтальные скорости частиц на всех глубинах остаются постоянными (в этом случае и говорят о мелкой воде). Вертикальная скорость существенно меньше горизонтальной, так что движение частиц жидкости в этом случае носит квазигоризонтальный характер. Подчеркнем, что в приближении мелкой воды фазовая скорость зависит отолько от глубины жидкости и не меняется с изменением длины волны.

Описанные здесь решения представляют бегущую (прогрессивную) волну, распространяющуюся в сторону положительных x. Аналогично можно получить решение для волны, бегущей в противоположном направлении; для этого в решении (1.18) необходимо заменить ω на $-\omega$ [другой корень дисперсионного соотношения (1.24)]. Характеристики этой волны не меняются, за исключением горизонтальной скорости и направления распространения волны, которые меняют знак. Эти выводы очевидны, так как в отсутствие течений морская поверхность изотропна, т. е. любые направления распространения волн равноправны. Поэтому наиболее общая форма решения может быть получена с введением волнового вектора $\mathbf{k}$, имеющего компоненты k_x и k_y и направленного вдоль распространения волны. Тогда с введением радиуса-вектора $\mathbf{r}$ с компонентами x, y прогрессивная волна записывается в виде

$$\eta = \eta_0 \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha); \tag{1.39}$$

$$w = -\omega\eta_0 \frac{\operatorname{sh}[k(z+h)]}{\operatorname{sh}(kh)} \sin(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha); \tag{1.40}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\omega\mathbf{k}}{k}\eta_0 \frac{\operatorname{ch}[k(z+h)]}{\operatorname{sh}(kh)} \cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha), \tag{1.41}$$

где $k = |\mathbf{k}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ и $\mathbf{kr} = k_x x + k_y y$. При этом вид дисперсионного соотношения (1.24) не меняется. Не меняется также определение фазовой скорости вдоль направления распространения волны. Проекции фазовой скорости на оси x и y определяются, однако, не по стандартным правилам, поскольку они должны соответствовать скорости перемещения гребня (или любой другой точки профиля) вдоль осей x, y. Из (1.39) легко найти для проекций $c_ф$

$$c_{фx} = \omega/k_x = c_ф k/k_x; \quad c_{фy}\omega/k_y = c_ф k/k_y, \tag{1.42}$$

так что $c_{фx,\,y} > c_ф$. Отсюда видно, что фазовая скорость не является вектором, и это обстоятельство необходимо учитывать при расчетах.

Наряду с бегущими волнами можно рассмотреть также *стоячие* волны, которые получаются суперпозицией двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\eta = \eta_0 \cos(\omega t + \alpha)\cos(kx); \tag{1.43}$$

$$w = -\omega\eta_0 \frac{\operatorname{sh}[k(z+h)]}{\operatorname{sh}(kh)} \sin(\omega t + \alpha)\cos(kx); \tag{1.44}$$

$$u = \omega\eta_0 \frac{\operatorname{ch}[k(z+h)]}{\operatorname{sh}(kh)} \sin(\omega t + \alpha)\sin(kx); \tag{1.45}$$

дисперсионное соотношение при этом не меняется. В стоячей волне волновое движение «заперто» в определенных зонах. Границы между зонами называют *узлами* поля, а точки пространства, где поле максимально, — *пучностями*. Заметим, что узлы и пучности для смещения водной поверхности и горизонтальной скорости не совпадают.

1.3. Неустановившиеся свободные волны

Выше были рассмотрены периодические бегущие и стоячие волны. Эти волны, строго говоря, не могут быть реализованы, так как они не имеют ни начала, ни конца. Поэтому необходимо исследовать более общий класс неустановившихся волн, возникающих в результате эволюции начального возмущения, сосредоточенного в некоторой области пространства. Для этого линейную систему (1.8)—(1.12) необходимо дополнить начальными условиями при $t=0$:

$$\begin{gathered}\mathbf{u}(x, y, z, 0)=\mathbf{u}_0(x, y, z);\\ \eta(x, y, 0)=\eta_0(x, y);\\ w(x, y, z, 0)=w_0(x, y, z);\\ p'(x, y, z, 0)=p_0(x, y, z),\end{gathered} \tag{1.46}$$

причем только два из них (например, $\mathbf{u}_0$ и η_0) являются независимыми, а остальные находятся с помощью исходных уравнений. Для получения решения системы (1.8)—(1.12) может быть использован метод Фурье [1, 4, 7], заключающийся в разложении всех функций в интеграл Фурье, представляющий собой суперпозицию элементарных решений (1.39)—(1.41) с различными амплитудами, определяемыми через Фурье-трансформанты начальных функций (1.46). В частности, двумерное движение (в плоскости x, z) при $\mathbf{u}_0=0$ (следовательно, и $w_0=0$) описывается следующим интегралом Фурье:

$$\eta(x, t)=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\eta_{10}(k)\cos(\omega t)\exp(ikx)\,dk, \tag{1.47}$$

где

$$\eta_{10}(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta_0(x)\exp(-ikx)\,dx. \tag{1.48}$$

Учитывая известную формулу $\cos(\omega t)=[\exp^{(i\omega t)}+\exp^{(-i\omega t)}]/2$, выражение (1.47) можно переписать в виде

$$\begin{gathered}\eta(x, t)=\eta_+(x, t)+\eta_-(x, t)=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}A(k)\times\\ \times\{\exp[i(kx-\omega t)]+\exp[-i(kx+\omega t)]\}\,dk,\\ A(k)=\eta_{10}/2,\end{gathered} \tag{1.49}$$

которое представляет собой сумму одинаковых волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Для более подробного анализа выберем только одну волну, бегущую в сторону положительных x:

$$\eta(x,\ t)=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp\left[ik\left(x-c_{\text{ф}}t\right)\right]dk, \tag{1.50}$$

где $A(k)$ — Фурье-трансформанта (спектр) «половинки» начального возмущения; $c_{\text{ф}}=\omega/k$ — фазовая скорость.

В общем виде интеграл (1.50) аналитически не вычисляется и требует применения ЭВМ. Рассмотрим сначала некоторые частные случаи.

Приближение мелкой воды. Пусть $\eta_0(x)$ представляет собой достаточно гладкое возмущение, горизонтальный размер которого значительно превышает глубину бассейна. В этом случае спектр этой функции $A(k)$ быстро спадает еще в области $kh\ll 1$, что позволяет интегрировать в (1.50) по конечным пределам. Мы, однако, этого делать не будем, так как мал вклад в интерграл областей с большим значением k. Учтем теперь, что в приближении длинных волн $c_{\text{ф}}=\sqrt{gh}$. Это позволяет сразу вычислить интеграл в (1.50):

$$\eta(x,\ t)=\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp\left[ik\left(x-\sqrt{gh}\,t\right)\right]dk=\eta\left(x-\sqrt{gh}\,t\right). \tag{1.51}$$

Отсюда видно, что волна не изменяет своей формы, двигаясь с постоянной скоростью $\sqrt{gh}$. Аналогично вычисляется и интеграл (1.49), так что общее решение этой задачи имеет простой вид:

$$\eta(x,\ t)=\left[\eta_0\left(x-\sqrt{gh}\,t\right)+\eta_0\left(x+\sqrt{gh}\,t\right)\right]/2. \tag{1.52}$$

В приближении длинных волн такие же выводы можно сделать относительно горизонтальных скоростей, причем в бегущей волне

$$u\left(x\mp\sqrt{gh}\,t\right)=\pm\sqrt{g/h}\,\eta\left(x\mp\sqrt{gh}\,t\right), \tag{1.53}$$

и давления, которое описывает гидростатическую поправку, связанную с отклонением свободной поверхности. Что же касается вертикальной скорости частиц, то она имеет следующий вид:

$$w\left(x-\sqrt{gh}\,t,\ z\right)=\frac{z+h}{h}\frac{\partial}{\partial t}\eta\left(x-\sqrt{gh}\,t\right). \tag{1.54}$$

Однако значение w мало и им можно пренебречь.

Приближение «неглубокой» воды. Будем по-прежнему считать волну длинной, однако поправки, связанные с kh, будем учитывать (в этом смысле и понимается «неглубокая» вода). Тогда в дисперсионном соотношении (1.24) разложим ω в ряд Тейлора, ограничиваясь первыми двумя членами:

$$\begin{aligned} \omega &\simeq \sqrt{gh}\, k\,(1 - k^2h^2/6); \\ c_\text{ф} &\simeq \sqrt{gh}\,(1 - k^2h^2/6). \end{aligned} \tag{1.55}$$

Как видим, в этом случае $c_\text{ф}$ начинает зависеть от волнового числа, но ввиду малости kh эта зависимость слабая. В данном

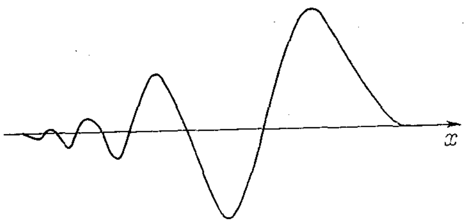


Рис. 1.1. График функции Эйри.

приближении интеграл (1.50) имеет вид

$$\eta(x,\ t) = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp\left\{i\left[k\left(x - \sqrt{gh}\,t\right) + (1/6)\,k^3h^2\sqrt{gh}\,t\right]\right\}dk \tag{1.56}$$

и при $A = \text{const}$ (это условие соответствует заданию относительно короткого импульса) вычисляется в явном виде через функцию Эйри $\operatorname{Ai}(\zeta)$:

$$\eta(x,\ t) = A\sqrt[3]{2/(h^2t\sqrt{gh})}\operatorname{Ai}\left[\sqrt[3]{2/(h^2t\sqrt{gh})}\left(x - \sqrt{gh}\,t\right)\right]. \tag{1.57}$$

График функции Эйри изображен на рис. 1.1. Отсюда видно, что за головной волной появляется цуг волн, амплитуда которых быстро затухает. Физическая причина появления цуга волн связана с дисперсией — разной скоростью распространения спектральных компонентов, так что мелкомасштабные компоненты отстают от головной волны, которая движется со скоростью длинных волн $\sqrt{gh}$. Мелкомасштабные волны уносят часть энергии, в результате чего амплитуда головной волны убывает (пропорционально $t^{-1/3}$), а ее длина растет со временем как $t^{1/3}$. С помощью данного решения можно оценить расстояние L, на котором форма волны не успевает заметно измениться, т. е. оценить пределы применимости теории мелкой воды. Для этого надо сравнить текущую длину $\lambda(t) \sim \sqrt[3]{h^2t\sqrt{gh}}$ с первоначальной λ_0:

$$L \simeq p\lambda_0^3/h^2, \tag{1.58}$$

где числовой коэффициент p зависит от формы начального возмущения ($p \sim 10^3 \ldots 10^{-1}$). Ввиду малости поправок, связанных с kh

в (1.55), о приближении «неглубокой» воды можно говорить как о приближении слабой дисперсии.

Приближение глубокой воды. Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда масштаб возмущения мал по сравнению с глубиной бассейна. В этом случае для ω и $c_ф$ можно использовать формулу (1.33). При этом дисперсия является сильной, так как $c_ф$ существенно зависит от k. Но и при этой аппроксимации интеграл (1.50) в общем виде аналитически не вычисляется. Рассмотрим поэтому сначала ситуацию квазигармонического возмущения с узким спектром. В этом случае $\eta_0(x)$ представляет собой синусоиду с медленно изменяющейся амплитудой a и волновым числом k. Учитывая узкость спектра вблизи k_0, можно разложить в ряд частоту колебаний и ограничиться двумя членами:

$$\omega = \omega(k_0) + (d\omega/dk)(k - k_0) = \omega_0 + c_{гр}(k - k_0) = c_ф k_0 + c_{гр}(k - k_0), \tag{1.59}$$

где

$$c_{гр} = d\omega/dk \tag{1.60}$$

— *групповая скорость* (смысл этого понятия будет пояснен ниже). Обозначая $k - k_0 = K$, интеграл (1.50) перепишем в виде

$$\eta(x, t) = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} A(K)\exp[iK(x - c_{гр}t)]\,dk\right]\exp[ik_0(x - c_ф t)] =$$
$$= \operatorname{Re} a(x - c_{гр}t)\exp[ik_0(x - c_ф t)]. \tag{1.61}$$

Здесь $a = \int_{-\infty}^{\infty} A(K)\exp(iKx)\,dP$ — *огибающая* цуга, а $\exp[ik_0 \times \times (x - c_ф t)]$ — *несущая*, или заполнение. Итак, мы получаем, что огибающая цуга распространяется с групповой скоростью, в то время как его заполнение (индивидуальные волны) — с фазовой скоростью. Для волн на глубокой воде

$$c_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{1}{2}c_ф, \tag{1.62}$$

поэтому огибающая цуга, или, как принято говорить, волнового пакета, движется медленнее, чем его заполнение. Это означает, что волны зарождаются в тылу цуга, затем усиливаются, смещаясь в центр цуга, а потом ослабляются и пропадают в начале цуга. Такое поведение пакета снова объясняется *дисперсией* волн на воде, спектральные компоненты которых, перемещаясь со своими скоростями, сложным образом интерферируют между собой. Отсюда вытекает также фундаментальное понятие групповой скорости, определяющей движение волнового пакета как целого, при этом максимальная амплитуда цуга и его длина остаются неизменными.

Для оценки точности этого приближения необходимо учесть следующий член в разложении $\omega(k)$:

$$\omega(k_0 + K) \simeq \omega_0 + c_{\text{гр}}K + \frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}K^2, \tag{1.63}$$

который приводит к расплыванию огибающей цуга волн. Не приводя подробных вычислений, укажем, что оценка точности вытекает из условия $(d^2\omega/dk^2)K^2t \sim 1$, что эквивалентно $(t = L/c_{\text{гр}})$:

$$L \sim c_{\text{гр}}\Lambda^2/|dc_{\text{гр}}/dk|, \tag{1.64}$$

где $\Lambda \sim K^{-1}$ — длина огибающей. Для волн на глубокой воде это условие сводится к

$$L \sim p_1 k_0 \Lambda^2. \tag{1.65}$$

Численный коэффициент p_1 здесь также зависит от формы огибающей пакета.

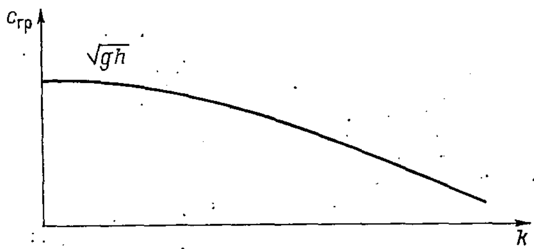


Рис. 1.2. Зависимость групповой скорости от волнового числа.

Общий случай. Рассмотрим теперь эволюцию произвольного возмущения, горизонтальный масштаб которого по отношению к глубине может быть любым. В этом случае групповая скорость не является постоянной и дисперсия приводит к расплыванию начального возмущения, превращая его в цуг волн. Анализ процесса расплывания возмущений требует применения ЭВМ, однако форма волны на достаточно большом расстоянии может быть найдена с помощью метода стационарной фазы [4]. Она описывается следующим выражением:

$$\eta(x, t) \simeq \sqrt{\frac{c_{\text{гр}}(k)}{2\pi\,|dc_{\text{гр}}/dk|\,x}}\,\mathrm{Re}\,\{A(k)\exp\{i\,[k(x - c_{\text{ф}}t) - \pi/4]\}. \tag{1.66}$$

где k является решением уравнения

$$c_{\text{гр}}(k) = x/t. \tag{1.67}$$

Обсудим более подробно это решение. Построение волнового поля удобно проводить графически. На рис. 1.2 приведена зависимость $c_{\text{гр}}$ от k, позволяющая при фиксированном x проследить за временно́й эволюцией волнового числа. При малых t значение x/t превышает максимально возможную скорость $\sqrt{gh}$, так что решение (1.67) отсутствует. Это означает, что сигнал еще не пришел в точку наблюдения. Затем в момент времени $x/\sqrt{gh}$ приходят длинные волны. В последующие моменты времени приходят

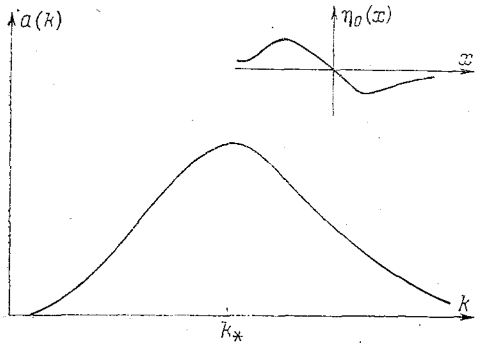


Рис. 1.3. Зависимость огибающей от волнового числа.

все более короткие волны, имеющие меньшую скорость, чем длинные. Далее строится график «огибающей»

$$a = \sqrt{\frac{c_{\text{гр}}(k)}{2\pi x \, |dc_{\text{гр}}/dk|}} \, A(k), \tag{1.68}$$

который приведен на рис. 1.3 для начального возмущения, имеющего знакопеременную форму (на врезке рис. 1.3). После этого необходимо в (1.68) заменить k на t с помощью рис. 1.2 и нарисовать внутри огибающей заполнение в виде квазигармонической функции $\cos [k(x - c_{\text{ф}}t)]$ (фаза физического смысла не имеет) (рис. 1.4). Итак, в данном примере цуг начинается с длинных волн малой амплитуды, затем идут более короткие волны, амплитуда которых возрастает, а затем к концу цуга — еще более короткие

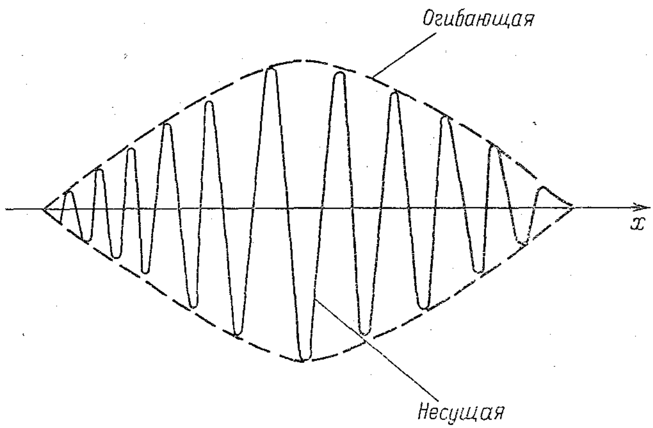


Рис. 1.4. Квазихроматический волновой пакет.

волны с малой амплитудой. Волны с максимальной амплитудой имеют волновое число k_* (или длину волны $2\pi/k_*$), зависящее от соотношения между глубиной бассейна и масштабом начального возмущения. Групповая скорость этих волн $c_{гр}(k_*)$ меньше $\sqrt{gh}$, поэтому с увеличением расстояния возрастает длина цуга и увеличивается число волн в цуге. Максимальная амплитуда в цуге, как следует из (1.66), убывает с расстоянием как $x^{-1/2}$.

Следует отметить, что метод стационарной фазы неприменим в области $k \to 0$, так как дисперсия в этой области становится исчезающе малой и волны разных длин на фиксированном расстоянии x не успевают разойтись. Особенно это существенно для возмущений, имеющих $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta_0(x)\, dx \neq 0$, когда $A(k=0) \neq 0$ и вклад длинных волн становится определяющим. При этом максимальной является головная волна, и ее описание может быть проведено по более точной формуле (1.57). Также меняется закон ослабления амплитуды: $x^{-1/3}$ вместо $x^{-1/2}$.

С помощью предлагаемого подхода могут быть исследованы волновые возмущения не только на поверхности океана, но и в его толще. Они тоже имеют вид цуга с переменными амплитудой и волновым числом (частотой). Однако затухание с глубиной, зависящее от длины волны, приводит к тому, что мелкомасштабные волны быстро затухают и возмущения в глубине становятся более длинноволновыми.

Выше были рассмотрены двумерные движения в жидкости. Обобщение на трехмерные движения с помощью метода Фурье делается аналогично. И в этом случае волна представляет собой цуг волн с переменными амплитудой и частотой. Волна с максимальной амплитудой затухает как r^{-1}, а длина цуга растет как r.

1.4. Теория длинных волн

Для изучения нелинейных эффектов необходимо вернуться к исходным уравнениям (1.1)—(1.6). Однако уже сложность решения линейных задач подсказывает, что будет трудно изучать влияние нелинейности непосредственно в рамках исходных уравнений и здесь необходимы какие-либо упрощающие модели. Одна из таких моделей опирается на приближение мелкой воды, когда отсутствует дисперсия и волны различных частот распространяются с одной скоростью $\sqrt{gh}$. Как следует из (1.31), в этом приближении (при $kh \ll 1$) давление изменяется по гидростатическому закону; вертикальным компонентом скорости можно пренебречь, горизонтальный компонент скорости не зависит от глубины. Перечисленных свойств достаточно, чтобы существенно упростить исходные уравнения. Эта теория получила название *теории длинных волн.*

Поскольку вертикальным компонентом скорости можно пренебречь, то из (1.2) вытекает гидростатический закон изменения давления:

$$p = p_{\text{атм}} + \rho g (\eta - z), \tag{1.69}$$

удовлетворяющий динамическому граничному условию (1.6).

Подставляя (1.69) в (1.1), приходим к уравнению

$$\partial \mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} + g\,\nabla\eta = 0. \tag{1.70}$$

Второе уравнение, связывающее $\mathbf{u}$ и η, получим после интегрирования (1.3) по глубине с учетом граничных условий (1.4), (1.5) и независимости $\mathbf{u}$ от z:

$$\partial\eta/\partial t + \operatorname{div}\,[(h + \eta)\,\mathbf{u}] = 0. \tag{1.71}$$

Уравнения (1.70) и (1.71) являются исходными уравнениями теории длинных волн. Отметим, что, хотя мы вывели их для случая постоянной глубины, вид их остается неизменным и при переменной глубине бассейна, лишь бы уклоны дна оставались малыми.

Естественно сначала рассмотреть линейный вариант теории длинных волн, чтобы сопоставить результаты с ранее приведенными:

$$\partial \mathbf{u}/\partial t + g\nabla\eta = 0;$$
$$\partial\eta/\partial t + h\,\operatorname{div}\mathbf{u} = 0. \tag{1.72}$$

Исключая $\mathbf{u}$ перекрестным дифференцированием, приходим к волновому уравнению:

$$\partial^2\eta/\partial t^2 - gh\,(\partial^2\eta/\partial x^2 + \partial^2\eta/\partial y^2) = 0. \tag{1.73}$$

Решение (1.73) находится стандартными методами. В частности, при одномерном движении вдоль оси x общее решение (1.73), а значит и системы (1.72), имеет вид

$$\eta(x,\ t) = F_1\big(x - \sqrt{gh}\,t\big) + F_2\big(x + \sqrt{gh}\,t\big);$$
$$u(x,\ t) = \sqrt{g/h}\,\big[F_1\big(x - \sqrt{gh}\,t\big) - F_2\big(x + \sqrt{gh}\,t\big)\big], \tag{1.74}$$

где F_1, F_2 — произвольные функции, определяемые из начальных условий: $\eta(x,\ 0) = \eta_0(x)$, $u(x,\ 0) = u_0(x)$. Если, как и ранее, $u_0 = 0$, то $F_1 = F_2 = (^1/_2)\,\eta_0$ и решение для η записывается в виде двух волн, распространяющихся в разные стороны с одинаковыми амплитудами

$$\eta(x,\ t) = \big[\eta_0\big(x - \sqrt{gh}\,t\big) + \eta_0\big(x + \sqrt{gh}\,t\big)\big]/2. \tag{1.75}$$

Эту формулу мы уже получали методом Фурье [см. (1.52)]. Рассмотрим отдельно волну, распространяющуюся в сторону положительных x:

$$\eta(x,\ t) = \eta_0\big(x - \sqrt{gh}\,t\big)/2. \tag{1.76}$$

Легко видеть, что функция $\eta(x, t)$ в этом случае удовлетворяет уравнению

$$\partial\eta/\partial t + \sqrt{gh}\,\partial\eta/\partial x = 0, \tag{1.77}$$

более простому, чем (1.73). Если сюда подставить η в виде монохроматической волны $\exp[i(\omega t - kx)]$, то (1.77) приводит к известному дисперсионному соотношению

$$\omega = \sqrt{gh}\,k, \tag{1.78}$$

так как $\partial\eta/\partial t = i\omega\eta$ и $\partial\eta/\partial x = -ik\eta$. Это обстоятельство часто используют для получения дифференциальных уравнений по заданному дисперсионному соотношению; для этого надо ω и k заменить на дифференциальные операторы:

$$\omega \to (1/i)\,\partial/\partial t; \quad k \to -(1/i)\,\partial/\partial x. \tag{1.79}$$

Этот прием позволяет существенно упрощать вывод уравнений для бегущих волн типа (1.77), поскольку дисперсионные соотношения в более сложных случаях могут находиться вообще без привлечения уравнений, например, экспериментальным путем: по измерениям скорости распространения волн разных частот.

Вернемся снова к нелинейной системе (1.70), (1.71) и рассмотрим одномерное движение волн. В линейной бегущей волне возмущения скорости и уровня связаны между собой. Попробуем отыскать такой же класс решений и в нелинейной задаче, т. е. положим $\eta = \eta(u)$. Тогда нелинейная система уравнений становится однородной относительно производных:

$$\begin{aligned} &\partial u/\partial t + (u + g\,d\eta/du)\,\partial u/\partial x = 0; \\ &(\partial\eta/\partial u)\,\partial u/\partial t + (h + \eta + u\,d\eta/du)\,\partial u/\partial x = 0. \end{aligned} \tag{1.80}$$

Решение этой системы существует только при обращении в нуль ее определителя, откуда вытекает дифференциальное уравнение для η

$$g\,(d\eta/du)^2 = h + \eta, \tag{1.81}$$

которое легко интегрируется

$$u = 2\left[\sqrt{g(h+\eta)} - \sqrt{gh}\right]. \tag{1.82}$$

В случае $\eta \ll h$ формула (1.82) превращается в $u = \sqrt{g/h}\,\eta$, вытекающую из (1.74).

Подставляя (1.82) в (1.80), получаем искомое уравнение для η:

$$\partial\eta/\partial t + c(\eta)\,\partial\eta/\partial x = 0; \tag{1.83}$$

$$c(\eta) = 3\sqrt{g(h+\eta)} - 2\sqrt{gh}. \tag{1.84}$$

В частности, при малых η/h уравнение (1.83) упрощается:

$$\partial\eta/\partial t + \sqrt{gh}\,[1 + 3\eta/(2h)]\,\partial\eta/\partial x = 0, \tag{1.85}$$

и в линейном случае переходит в (1.77). Уравнение (1.85), как и (1.83), называется уравнением *простой волны*, оно играет определяющую роль при изучении нелинейных эффектов.

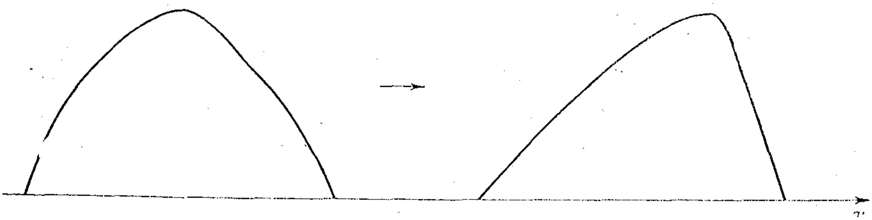


Рис. 1.5. Деформация простой (римановой) волны.

Решение уравнения (1.85) выражается через неявную функцию (простую волну или *волну Римана*)

$$\eta(x,\ t) = F\left(x - \sqrt{gh}\,(1 + 3\eta/(2h))\,t\right), \tag{1.86}$$

где F определяется из начальных условий для волны, бегущей в одну сторону. В линейной теории F соответствует функции F_1 в формуле (1.74). Поскольку распад начального импульса на две волны происходит на небольших расстояниях порядка длины волны, а нелинейные эффекты накапливаются, как будет ясно из дальнейшего, на значительных расстояниях, то на начальном этапе применимо линейное описание и, следовательно, $F(x) = \eta_0(x)/2$. Таким образом, решение (1.86) становится полностью определенным.

Изучим более подробно эволюцию простой волны. Ввиду неявности (1.86) ответ не удается выразить через элементарные функции, однако решение легко получить графически. Действительно, скорость распространения волны зависит от уровня воды и, следовательно, гребень волны догоняет ложбину. Поэтому, перемещая на графике каждую точку профиля со своей скоростью, мы легко можем представить картину эволюции волны (рис. 1.5). Передний склон волны делается круче: а задний становится более пологим. На больших временах гребень обгонит подножие и волна опрокинется — на языке математиков это называется градиентной катастрофой. Время, за которое волна опрокинется, можно найти из (1.86), если продифференцировать η по x:

$$\partial\eta/\partial x = F'\Big/\left(1 + \frac{3}{2}\,\frac{F'}{h}\sqrt{gh}\,t\right), \tag{1.87}$$

где F' означает производную F по своему аргументу. Отсюда видно, что на переднем склоне ($F' < 0$) модуль производной $\partial\eta/\partial x$ неограниченно возрастает и при $t = T_н$

$$T_н = 2h/\left[3\sqrt{gh}\,\mathrm{Max}\,(-F')\right] \tag{1.88}$$

обращается в бесконечность. Удобно вместо $T_{\text{н}}$ ввести длину нелинейности $L_{\text{н}}$, на которой происходит опрокидывание переднего склона волны:

$$L_{\text{н}} \sim \sqrt{gh}\, T_{\text{н}} = 2h/[3\ \mathrm{Max}\,(-F')]. \tag{1.89}$$

В частности, если при $t=0$ волна представляла собой синусоиду $\eta(x,\ 0) = \eta_0 \sin(kx)$, то $\mathrm{Max}\ (-F') = k\eta_0$ и окончательно получаем:

$$L_{\text{н}} = \lambda h/(3\pi\eta_0) \quad (\lambda = 2\pi/k). \tag{1.90}$$

Ввиду малости η_0/h процесс нелинейного искажения профиля волны прослеживается на протяжении многих длин волн.

Выше мы рассмотрели временнýю эволюцию волны произвольной формы. Для многих целей важно знать эволюцию спектра волн. Не излагая здесь точный подход к вычислению спектра простой волны, рассмотрим несложный пример вычисления спектра в случае, когда волна в начальный момент времени была синусоидальной. Ввиду малости η естественно искать решение уравнения (1.85) в виде ряда по степеням η/h (ряд теории возмущений) [6]. С точностью до второго члена имеем:

$$\eta = \eta_1 + \eta_2; \quad |\eta_2| \ll |\eta_1|, \tag{1.91}$$

где η_1 есть синусоидальная волна. Подставляя (1.91) в (1.85) и пренебрегая малыми членами η_2^2 и $\eta_1\eta_2$, получаем уравнение для η_2:

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t} + \sqrt{gh}\,\frac{\partial\eta_2}{\partial x} = -\frac{3\sqrt{gh}\,k\eta_0^2}{4h}\sin\left[2k\left(x - \sqrt{gh}\,t\right)\right]. \tag{1.92}$$

В этом уравнении правая часть представляет собой «внешнюю силу», генерирующую η_2 в силу нелинейности. Поскольку «внешняя сила» перемещается со скоростью $\sqrt{gh}$, совпадающей с собственной скоростью распространения η_2, то имеет место *резонанс* волн и η_2 нарастает:

$$\eta_2(x,\ t) = -\frac{3t\sqrt{gh}}{4h}\,\frac{\partial\eta_1^2}{\partial x} = -\frac{3k\eta_0^2 t\sqrt{gh}}{4h}\sin\left[2k\left(x - \sqrt{gh}\,t\right)\right]. \tag{1.93}$$

Как видим, η_2 представляет собой обертон основной волны — волну удвоенной частоты, амплитуда которой растет со временем. В момент опрокидывания $T_{\text{н}}$ волны амплитуда второй гармоники достигает половины амплитуды основной гармоники (почти такое же значение получается и из точной теории). В следующем приближении может быть найдена амплитуда третьей гармоники, она пропорциональна t^2 и т. д. Непрерывная генерация гармоник (расширение спектра) соответствует непрерывной деформации профиля волны вплоть до ее опрокидывания.

Если рассмотреть более общий случай, когда взаимодействуют две синусоидальные волны с произвольным соотношением между волновыми числами (частотами), то снова имеет место резонанс и из-за нелинейности будут генерироваться волны с суммарными и разностными волновыми числами (частотами), амплитуда которых будет нарастать. Процесс, при котором две волны генерируют нарастающую третью волну, называется трехволновым. Условия

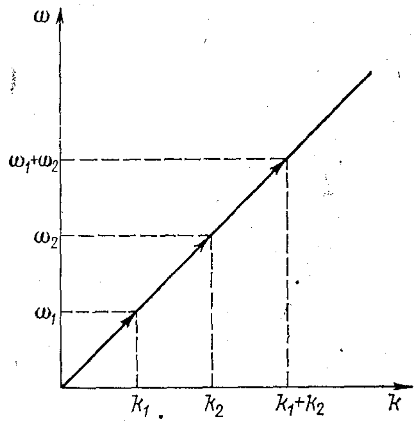


Рис. 1.6. Диаграмма трехволнового резонанса в приближении теории мелкой воды.

трехволнового резонанса могут быть записаны в более общем виде:

$$\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3; \qquad \omega(\mathbf{k}_1) \pm \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_3), \tag{1.94}$$

и они автоматически выполняются в случае одномерного распространения и мелкой воды, когда нет дисперсии, поскольку $\omega = k\sqrt{gh}$. Решение уравнений (1.94) удобно изображать графически (рис. 1.6). Сопоставим каждой синусоидальной волне вектор с проекциями k, ω. Резонанс возникает тогда, когда суммарный (или разностный) вектор с компонентами k_1+k_2, $\omega_1 \pm \omega_2$ сказывается на дисперсионной характеристике $\omega(k)$. Такая интерпретация нелинейных взаимодействий оказывается весьма полезной для предсказания резонансных эффектов и в более сложных случаях, чем рассмотренные выше.

1.5. Нелинейно-дисперсионная теория длинных волн

Учтем теперь влияние слабой дисперсии на эволюцию длинных волн. Мы уже рассматривали эту задачу в приближении неглубокой воды (раздел 1.3). Приведем здесь соответствующее дисперсионное соотношение [см. формулу (1.55)]

$$\omega = \sqrt{gh}\, k(1 - k^2h^2/6). \tag{1.95}$$

Для исследования совместного влияния нелинейности и дисперсии мы воспользуемся упрощенным приемом получения основного уравнения. Сначала мы найдем его линейную часть, заменив в (1.95) ω и k на дифференциальные операторы $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$ и $-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ [см. (1.79)]:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\sqrt{gh}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{h^2\sqrt{gh}}{6}\,\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0. \qquad (1.96)$$

Можно ожидать, что слабая дисперсия не влияет на вид нелинейного слагаемого и оно остается таким же, как в уравнении

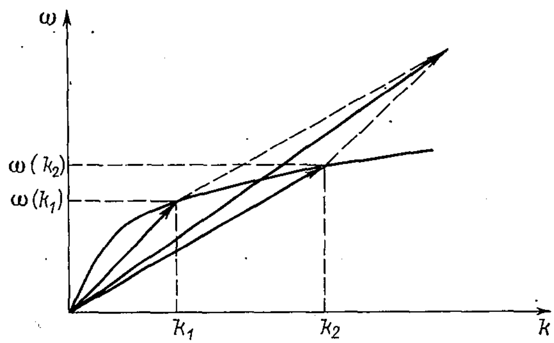


Рис. 1.7. Диаграмма трехволнового резонанса для волн на воде в общем случае.

простой волны (1.85). Объединяя (1.96) и (1.85), запишем окончательно искомое уравнение дисперсионной теории длинных волн:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\sqrt{gh}\left(1+\frac{3\eta}{2h}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{1}{6}\,h^2\sqrt{gh}\,\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0, \qquad (1.97)$$

известное как уравнение Кортевега—де Вриза.

Обсудим сначала, выполняются ли в приближении неглубокой воды условия трехволнового резонанса (1.94). Для этого изобразим на рис. 1.7 дисперсионную зависимость (1.95) и представим два вектора $(k_1, \omega(k_1))$ и $(k_2, \omega(k_2))$. Как видно из рисунка, конец суммарного вектора не попадает на дисперсионную характеристику при любом соотношении между k_1 и k_2, так что здесь резонансное возбуждение волн новых частот невозможно. И действительно, если рассматривать процесс генерации второй гармоники в рамках уравнения Кортевега—де Вриза с помощью теории возмущений, как и в разделе 1.4, то легко найти ограниченное решение η_2

$$\eta_2=-\left[9\eta_0^2/(8h^3k_1^2)\right]\cos(2k_1x-2\omega_1t). \qquad (1.98)$$

Таким образом, даже слабая дисперсия препятствует накоплению нелинейных искажений. Об этом случае говорят как о конкуренции дисперсии и нелинейности, или частотной и амплитудной дисперсии. В результате конкуренции волна не стремится опрокинуться, а наоборот, ее форма может стабилизироваться. Рассмотрим поэтому возможные формы установившихся волн на поверхности неглубокой воды. Для этого рассмотрим решения уравнения Кортевега—де Вриза, зависящее от одной переменной $\zeta = x - ct$, где c — скорость волны, подлежащая определению. При этом условии уравнение (1.97) становится обыкновенным дифференциальным уравнением, которое один раз интегрируется:

$$\frac{h^2\sqrt{gh}}{6}\frac{d^2\eta}{d\zeta^2} + (\sqrt{gh} - c)\,\eta + \frac{3\sqrt{gh}}{4h}\eta^2 = \mathrm{const}. \tag{1.99}$$

Будем искать локализованные решения уравнения (1.97), тогда $\mathrm{const} = 0$. Умножая (1.99) на $d\eta/d\zeta$ и интегрируя еще раз, получим уравнение первого порядка:

$$\frac{h^2\sqrt{gh}}{12}\left(\frac{d\eta}{d\zeta}\right)^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{gh} - c)\,\eta^2 + \frac{\sqrt{gh}}{4h}\eta^3 = 0. \tag{1.100}$$

Обозначая максимальное значение уровня воды (высоту волны) через η_0 и учитывая, что в точке максимума $d\eta/d\zeta = 0$, из (1.100) находим скорость волны:

$$c = \sqrt{gh}\,[1 + \eta_0/(2h)] \simeq \sqrt{g\,(h + \eta_0)}. \tag{1.101}$$

Уравнение (1.100) интегрируется в элементарных функциях:

$$\eta = \eta_0\,\mathrm{sch}^2\sqrt{\frac{3\eta_0}{4h}}\,\frac{x - ct}{h}. \tag{1.102}$$

Установившаяся волна представляет собой одиночную волну в виде горба — она получила название *уединенной волны*, или *солитона*. Размер солитона (его эффективная длина) зависит от уровня, на котором он измеряется. В частности, по уровню 0,5 длина солитона равна

$$\lambda_0 = 2h\sqrt{h/\eta_0}, \tag{1.103}$$

и она уменьшается с ростом амплитуды волны. Наряду с солитонами решениями уравнения (1.97) являются периодические волны, выражаемые через эллиптические функции Якоби, функцию $\mathrm{Cn}\,\zeta$, поэтому они называются *кноидальными волнами*. Их форма зависит от амплитуды: при малой амплитуде кноидальная волна представляет собой суперпозицию первой и малой второй грамоник, как в ряде теории возмущений; при больших амплитудах кноидальная волна превращается в последовательность солитонов. Важно подчеркнуть, что скорость распространения волн зависит от их амплитуды — волна обладает нелинейным дисперсионным соотношением.

На основе уравнения Кортевега—де Вриза могут быть изучены неустановившиеся нелинейные волны. Изложение соответствующей точной теории выходит за рамки данного курса [8]. Здесь мы изложим основные результаты этой теории на качественном уровне. Так, если обезразмерить уравнение Кортевега—де Вриза:

$$\tilde{x}=(x-\sqrt{gh}\,t)/\lambda;\quad \tilde{t}=3\sqrt{gh}\,\eta_0 t/(2\lambda h);\quad \tilde{\eta}=\eta/\eta_0, \tag{1.104}$$

где λ и η_0 — длина и высота начального возмущения, то оно принимает вид

$$\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}+\tilde{\eta}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x}+\frac{1}{9\mathrm{Ur}}\frac{\partial^3\tilde{\eta}}{\partial\tilde{x}^3}=0, \tag{1.105}$$

где параметр $\mathrm{Ur}=\eta_0\lambda^2/h^3$ называется параметром Урселла, и он характеризует отношение второго слагаемого к третьему. Как мы

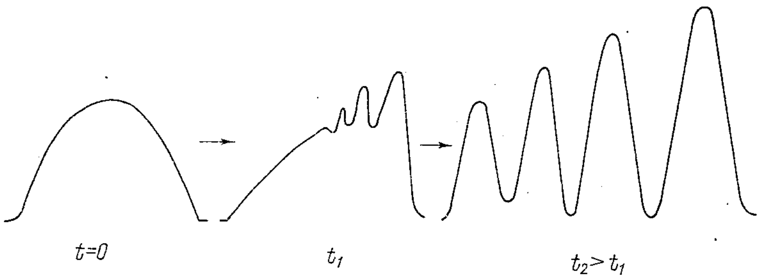


Рис. 1.8. Распад на солитоны произвольного начального возмущения.

увидим чуть ниже, он определяет отношение нелинейности к дисперсии и играет такую же роль, как число Рейнольдса, характеризующее отношение нелинейности к диссипации. Прежде всего отметим, что для солитона $\mathrm{Ur}=4$ это граничное значение разделяет два разных режима. Если $\mathrm{Ur}\gg 4$, то последним слагаемым в (1.105) можно пренебречь. Но тогда мы приходим к уравнению простой волны (1.85), движущейся со скоростью $\sqrt{gh}$, переписанному в системе координат. Следовательно, приближение $\mathrm{Ur}\gg 4$ соответствует случаю малой дисперсии по сравнению с нелинейностью. Физически это объясняется тем, что при больших Ur велика длина волны, т. е. волна действительно является длинной, а длинные волны не диспергируют. Решение уравнения (1.85) нам известно: по мере распространения передний склон делается круче, задний становится более пологим. Этот процесс продолжается до тех пор, пока крутизна переднего склона не станет достаточно велика, при этом возрастает роль третьей производной в (1.105), характеризующей дисперсию. Физически это обусловлено уменьшением длины переднего склона: его размер становится сравнимым с глубиной бассейна, т. е. волна перестает быть длинной. Совместное действие нелинейности и дисперсии приводит к распаду начального возмущения на солитоны (рис. 1.8), число которых приближенно определяется как число солитонов, «вписанных» в начальное возмущение. Солитон с максимальной амплитудой имеет и максимальную скорость распространения, поэтому он уходит вперед. Заметим также, что точная теория предсказывает, что амплитуда образующихся солитонов не может превышать $2\eta_0$.

Если $\mathrm{Ur} \ll 4$, то длина волны мала и, следовательно, дисперсия является превалирующей. В этом случае в уравнении (1.105) можно пренебречь нелинейным членом. Полученное линейное уравнение мы фактически решали в разделе 1.3, где было показано, что за основной волной появляется цуг волн, амплитуда головной волны убывает ($\eta_0 \sim t^{-1/3}$), а ее длина растет ($\lambda \sim t^{1/3}$) [см. формулу (1.57)]. Если определить локальное значение параметра Урселла через характеристики головной волны, то отсюда немедленно следует его возрастание $\mathrm{Ur} = \eta_0(t)\lambda^2(t)/h^3 \sim t^{1/3}$. Когда Ur сравняется с граничным значением $\mathrm{Ur} = 4$, это будет означать формирование солитона из относительно короткой волны. Более точное описание деталей процесса может быть получено численным интегрированием уравнения Кортевега—де Вриза.

1.6. Нелинейная эволюция цуга волн на глубокой воде

Волны на глубокой воде отличаются сильной дисперсией, т. е. большой разницей между скоростями распространения отдельных спектральных компонентов. Изучая нелинейные эффекты, естественно сначала рассмотреть возможность выполнения условий трехволнового резонанса. Этот анализ полностью повторяет выполненный в начале раздела 1.5 (см. рис. 1.7) и свидетельствует о невозможности резонансного взаимодействия, следовательно, генерация обертонов на глубокой воде затруднена и волна остается близкой к монохроматической.

Рассчитывать форму установившейся волны на глубокой воде можно с помощью теории возмущения ввиду малости обертонов волны. Однако непосредственный подсчет по теории возмущений из исходной системы (1.1)—(1.3) с граничными условиями (1.4)—(1.6) занимает слишком много места, поэтому мы приведем здесь основные формулы без вывода [2, 3, 9]:

$$\eta = \eta_0 \cos(kx - \omega t) + (1/2)\,\eta_0^2 k \cos[2(kx - \omega t)] + (3/8)\,\eta_0^3 k^2 \cos[3(kx - \omega t)] + \ldots,$$

$$u = \sqrt{gk}\,[1 - (1/8)\,\eta_0^2 k^2]\,\eta_0 \exp(kz)\cos(kx - \omega t) + \ldots; \tag{1.106}$$

$$w = \sqrt{gk}\,[1 + (1/8)\,\eta_0^2 k^2]\,\eta_0 \exp(kz)\sin(kx - \omega t) + \ldots;$$

$$\omega = \sqrt{gk}\,[1 + (1/2)\,k^2\eta_0^2 + \ldots], \tag{1.107}$$

где отброшены члены порядка четвертой степени крутизны волны η_0/λ. Этот ряд определяет *волну Стокса* и был известен еще в середине прошлого века. Как видим, амплитуды обертонов при малой крутизне действительно малы и формы волн остаются близкими к синусоиде. С увеличением амплитуды гребни становятся более заостренными, а впадины пологими. Более полный анализ с использованием методов конформного преобразования показывает, что установившиеся волны существуют только при $\eta_0/\lambda < 0{,}07$ или $k\eta_0 < 0{,}45$, причем волна с максимальной амплитудой (предельная волна) имеет излом на вершине с углом 120°. Даже в предельной волне амплитуды обертонов невелики: так, амплитуда второй гармоники не превышает 0,25 амплитуды первой. Отметим также, что поле скоростей с указанной выше точностью не содержит обертонов, т. е. оно является более монохроматическим, чем смещение уровня воды. Все это свидетельствует об определенной слабости нелинейных эффектов для волн на глубокой воде, в отличие от мелкой воды.

Обратим внимание на то, что нелинейность изменяет дисперсионное соотношение для волн на глубокой воде [см. формулу (1.107)] и, значит, скорость распространения волн, увеличивая ее (правда, не более чем на 10 %).

Таким образом, создавая монохроматическое возмущение на глубокой воде, можно ожидать, что оно остается почти монохроматическим. Именно поэтому ветровое волнение в открытом море имеет узкополосный спектр.

Можно рассмотреть и более общий случай взаимодействия нескольких квазимонохроматических волн. Мы уже говорили в начале раздела 1.6, что во втором порядке теории возмущений условия резонанса не выполняются, так что нет эффективного взаимодействия трех волн. В третьем порядке теории возмущений во взаимодействии участвуют уже четыре волны (три волны генерируют четвертую) и для их эффективного взаимодействия необходимо выполнение условия *четырехволнового резонанса*:

$$\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4;$$

$$\omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k}_2) = \omega(\mathbf{k}_3) + \omega(\mathbf{k}_4). \tag{1.108}$$

Очевидно, что (1.108) всегда имеет решение, например, $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_3$ и $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_4$, а также, когда все k близки между собой. Это указывает на то, что наиболее сильное взаимодействие происходит между волнами с близкими частотами, т. е. внутри цуга волн. Фактически это означает слабость дисперсии внутри цуга и вытекает уже из дисперсионного соотношения для волн на воде, разложенном в ряд вблизи k_0:

$$\omega(k) = \omega(k_0) + c_{\text{гр}}(k - k_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}(k - k_0)^2, \tag{1.109}$$

которое мы уже приводили в разделе 1.3 [формула (1.59)]. Обозначая $\Omega = \omega - \omega(k_0)$ и $K = k - k_0$, перепишем (1.109) в терминах частоты и волнового числа огибающей:

$$\Omega = c_{\text{гр}}K + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega}{\partial k^2}K^2, \tag{1.110}$$

где последний член является малым.

Как видим, дисперсионное соотношение для огибающей представляет собой почти прямую линию, так что дисперсия внутри цуга действительно слабая. Но при слабой дисперсии нелинейные эффекты существенны (см. разделы 1.4 и 1.5). Таким образом, исследование нелинейной динамики волн на глубокой воде важно именно для узкополосного волнения — цуга волн.

Для получения основного уравнения, описывающего эволюцию цуга волн, применим прием, описанный в разделе 1.3. С этой целью напишем нелинейное дисперсионное соотношение (1.107) в виде

$$\Omega = c_{\text{гр}} K + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} K^2 + \frac{\partial \omega}{\partial (\eta_0^2)} |a|^2. \qquad (1.111)$$

Это выражение получается разложением $\omega(k)$ относительно несущей частоты k_0, его линейный вариант приведен выше [формула (1.110)]. Здесь специально введен $|a|^2$ вместо a^2, потому что в (1.61) амплитуда волны a является комплексной. Заменим теперь Ω на $\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}$ и K на $-\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$, тогда (1.111) преобразуется в искомое дифференциальное уравнение:

$$i\left(\frac{\partial a}{\partial t} + c_{\text{гр}}\frac{\partial a}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{\partial \omega}{\partial (\eta_0^2)} |a|^2 a. \qquad (1.112)$$

Разумеется, оно может быть выведено и более строго непосредственно из исходных уравнений с помощью асимптотических методов; эти громоздкие выкладки мы намеренно опускаем, чтобы подчеркнуть физическую идею сделанных приближений.

Удобно в (1.112) перейти от переменной x к переменной ζ по формуле $x = c_{\text{гр}} t + \zeta$, что соответствует переходу в систему координат, движущуюся с линейной групповой скоростью; тогда уравнение (1.112) записывается в окончательном виде:

$$i\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\frac{\partial^2 a}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial \omega}{\partial (\eta_0^2)} |a|^2 a. \qquad (1.113)$$

Оно получило название нелинейного уравнения Шредингера и активно используется при изучении не только волн на воде, но и волн других типов. Для волн на воде, с учетом (1.107), нелинейное уравнение Шредингера выглядит следующим образом:

$$i\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{\omega_0}{8k_0^2}\frac{\partial^2 a}{\partial \zeta^2} - \frac{\omega_0 k_0^2}{2} |a|^2 a. \qquad (1.114)$$

Частным решением (1.114) является волна Стокса

$$a = a_0 \exp\left(i\omega_0 k_0^2 a_0^2 t/2\right). \qquad (1.115)$$

Исследуя ее устойчивость относительно малых возмущений амплитуды и фазы, можно показать, что характер решения зависит от знака выражения (критерий модуляционной неустойчивости Лайтхилла) [4, 7]

$$Q=\left(\partial^2\omega/\partial k^2\right)\partial\omega/\partial\eta_0^2. \qquad (1.116)$$

Если $Q>0$, то исходная монохроматическая волна устойчива, при $Q<0$ (а эта ситуация и имеет место для волн на глубокой воде) волна неустойчива. Наиболее неустойчивыми являются возмущения огибающих с характерным масштабом

$$\lambda\sim\lambda_0/(K_0a_0), \qquad (1.117)$$

характерное время неустойчивости (время нелинейности) составляет

$$T_{\text{н}}\sim 1/[\omega_0(K_0a_0)^2]. \qquad (1.118)$$

Уже из анализа линейной стадии развития неустойчивости вытекает, что волна Стокса должна разбиваться на отдельные участки с масштабом Λ. Конечная стадия развития неустойчивости должна быть рассмотрена на основе (1.114). Изучим локализованные решения, которые будем находить в виде

$$a=A(\zeta)\exp(\alpha t). \qquad (1.119)$$

Здесь α и $A(\zeta)$ подлежат определению. Тогда уравнение (1.114) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$d^2A/d\zeta^2-\left(8k_0^2/\omega_0\right)\alpha A+4k_0^4A^3=0, \qquad (1.120)$$

которое один раз интегрируется:

$$(1/2)(dA/d\zeta)^2-\left(4k_0^2/\omega_0\right)\alpha A^2+k_0^4A^4=0. \qquad (1.121)$$

Учитывая, что в максимуме цуга $A=a_0$ и $dA/d\zeta=0$, из (1.121) находим α:

$$\alpha=\left(\omega_0k_0^2/4\right)a_0^2. \qquad (1.122)$$

Решение (1.121) при условии (1.122) находится в явном виде:

$$A=a_0\,\mathrm{sch}\left(\sqrt{2}\,a_0k_0^2\zeta\right). \qquad (1.123)$$

Таким образом, мы получим локализованное возмущение с масштабом огибающей, соответствующей максимуму неустойчивости (1.118), переносящееся с групповой скоростью, внутри которого индивидуальные волны (несущая) переносятся с фазовой скоростью, «подправленной» из-за нелинейности. Решение (1.123) называют солитоном огибающей. Его ширина в соответствии с (1.123) зависит от амплитуды: чем она больше, тем солитон у́же. Отношение длин огибающей и несущей определяет число волн в группе:

$$N\sim\Lambda/\lambda_0\sim 1/(a_0k_0), \qquad (1.124)$$

которое обратно пропорционально крутизне волны. Существование стационарно перемещающегося цуга волн с разными амплитудами индивидуальных волн может служить одной из причин легендарного «девятого вала», хотя номер максимальной амплитуды, как это следует из (1.124), не является фиксированным во всех случаях.

Нелинейное уравнение Шредингера позволяет исследовать эволюцию произвольных возмущений на глубокой воде. В его рамках также происходит распад любого возмущения на солитоны — на чем мы здесь не имеем возможности останавливаться [8, 11].

1.7. Энергетика волн. Законы сохранения

Для многих приложений важно знать, какое количество энергии запасено в морских волнах. Энергия, как всегда в механике, складывается из *кинетической энергии* движения частиц воды в водном слое и *потенциальной*, обусловленной вертикальным смещением частиц воды:

$$E = E_k + E_p = \iint dx\,dy \left\{ \int_{-h}^{\eta} \frac{1}{2} \rho (\mathbf{u}^2 + w^2)\,dz + \int_0^{\eta} \rho g z\,dz \right\}. \tag{1.125}$$

Очевидно, что энергия зависит от площади водной поверхности, занятой волнами. Рассмотрим более подробно линейное приближение и ограничимся анализом бегущей монохроматической волны.

В этом случае естественно рассматривать *плотность энергии*, приходящуюся на единицу площади поверхности. Выражение для нее в линейном приближении имеет вид

$$e = e_k + e_p = \frac{1}{2} \rho \int_{-h}^{0} (\mathbf{u}^2 + w^2)\,dz + \frac{1}{2} \rho g \eta^2. \tag{1.126}$$

Если подставить сюда формулы (1.28)—(1.30), то мы убедимся, что плотности кинетической и потенциальной энергий не постоянны вдоль волны и зависят от ее фазы. Однако они имеют постоянные, средние по длине волны составляющие, которые обычно и отождествляют с плотностями соответствующих энергий:

$$\bar{e}_k = (1/4) \rho g \eta_0^2; \quad \bar{e}_p = (1/4) \rho g \eta_0^2; \quad \bar{e} = (1/2) \rho g \eta_0^2 \tag{1.127}$$

(в дальнейшем черта сверху опускается). Обратим внимание, что плотность энергии морских волн не зависит от глубины бассейна и определяется только квадратом амплитуды волны. Кроме того, отметим, что средние значения кинетической и потенциальной энергий равны между собой *.

* Это справедливо в случае отсутствия течений в океане.

Важной характеристикой является *поток энергии*, переносимый через вертикальную площадку в единицу времени; он определяется произведением скорости на полное давление:

$$\mathbf{S} = \int_{-h}^{\eta} \mathbf{u}\,[p + \rho(\mathbf{u}^2 + w^2)/2]\,dz. \tag{1.128}$$

В рамках линейного приближения с использованием формул (1.28), (1.29) выражение для среднего потока энергии после ряда преобразований приводится к виду

$$\mathbf{S} = c_{\text{гр}} e, \tag{1.129}$$

где, как и ранее, $c_{\text{гр}}$ — групповая скорость поверхностных волн. Мы уже говорили ранее о важности групповой скорости, как скорости распространения цуга волн. Из (1.129) вытекает фундаментальное значение групповой скорости как скорости переноса волновой энергии.

Учет нелинейности приводит к дополнительным слагаемым в энергии и потоке энергии, пропорциональным η_0^3 и более высоким степеням амплитуды. Проведение соответствующих вычислений требует применения ЭВМ. Здесь мы приведем лишь выражение для энергии солитона на неглубокой воде (1.102), которое получается из (1.125) с учетом малости амплитуды солитона:

$$E_{\text{сол}} = 1{,}54\rho g h^{3/2} \eta_0^{3/2}. \tag{1.130}$$

Как видим, даже в приближении малых амплитуд из-за зависимости длины солитона от амплитуды выражение (1.130) кардинально отличается от (1.127).

Использование энергетических соображений позволяет существенно упростить решение многих задач, таких, как трансформация волн на мелководье и течениях, взаимодействие с ветровым потоком над водой, диссипация энергии в придонном пограничном слое, и многих других. Дело в том, что во многих случаях изменение энергии волн происходит медленно, так что на масштабе длины волны энергию можно считать постоянной. В частности, если уклоны дна малы, то волне нужно пройти значительное расстояние (в масштабах длин волн), чтобы изменение ее параметров стало заметно. Во всех этих случаях эффективным методом решения является метод медленно меняющихся амплитуд. Приведем здесь вывод упрощенных уравнений для параметров линейных волн на физическом уровне строгости. Исходными являются выражения для монохроматических бегущих волн (1.39)—(1.41). В случае постоянной глубины и при отсутствии внешних сил решение в общем случае зависит от двух переменных — z и фазы $\theta = \omega t - \mathbf{kr}$, т. е. $q = q(z, \theta)$, где q — любая из волновых переменных. При медленном изменении амплитуды это выражение сохраняет свою функциональную зависимость $q = q(z, \theta, t, \mathbf{r})$, однако явная зависимость от t, $\mathbf{r}$ слабая. Поскольку параметры волны изменяются, то естественно считать, что от t, $\mathbf{r}$ слабо зависит не только амплитуда но и частота, и волновой вектор. При переменных ω, $\mathbf{k}$ формула $\theta=\omega t-\mathbf{kr}$ не позволяет однозначно их определить; естественное обобщение определения ω, $\mathbf{k}$ имеет вид

$$\omega(t,\ \mathbf{r})=\partial\theta/\partial t;\quad \mathbf{k}(t,\ \mathbf{r})=-\nabla\theta; \tag{1.131}$$

в случае постоянных ω, $\mathbf{k}$ отсюда немедленно следует старый результат: $\theta=\omega t-\mathbf{kr}$. Поскольку ω, $\mathbf{k}$ являются производными от одной функции (фазы), то они не могут быть произвольными. В результате перекрестного дифференцирования из (1.131) вытекают уравнения

$$\partial k/\partial t+\nabla\omega=0; \tag{1.132}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{k}=0, \tag{1.133}$$

которые получили название кинематических законов сохранения. Эти уравнения фактически вытекают только из определения фазы и справедливы для волн любой физической природы. Для их замыкания необходимо задать связь ω с $\mathbf{k}$ (дисперсионное соотношение), которая отражает специфику конкретного волнового явления. Для волн на воде в силу малости изменения ω и $\mathbf{k}$ на длине волны естественно считать, что дисперсионное соотношение имеет тот же функциональный вид, что и ранее:

$$\omega=\sqrt{gk\operatorname{th}kh}, \tag{1.134}$$

причем здесь глубина может быть переменной не только в пространстве, но и во времени, лишь бы ее изменения происходили достаточно плавно. В результате система (1.132)—(1.134) становится полностью определенной и позволяет однозначно определить ω и k как функции t, $\mathbf{r}$.

Уравнение для амплитуды волны удобно получать из энергетического уравнения, вывод которого непосредственно из исходных уравнений нетривиален, особенно для волн на переменных и нестационарных течениях. С использованием вариационного принципа Гамильтона, широко применяемого в механике, ему можно дать универсальную форму. Оно называется уравнением сохранения волнового действия [4, 7]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{e}{\omega}\right)+\operatorname{div}\left(\mathbf{c}_{\text{гр}}\frac{e}{\omega}\right)=0. \tag{1.135}$$

При $h=h(x)$ оно сводится к уравнению энергетического баланса:

$$\partial e/\partial t+\operatorname{div}(\mathbf{c}_{\text{гр}}e)=0. \tag{1.136}$$

Применим законы сохранения (1.132)—(1.136) для решения ряда конкретных задач эволюции волнового поля в линейном приближении.

Неустановившиеся волны. Применим энергетический подход для анализа неустановившихся двумерных волн в бассейне постоянной глубины. В этом случае ω есть функция только k и уравнение (1.132) легко преобразуется к одному нелинейному уравнению первого порядка:

$$\partial k/\partial t + c_{\text{гр}}(k)\,\partial k/\partial x = 0, \tag{1.137}$$

решение которого имеет вид простой волны

$$k = \Phi\,[x - c_{\text{гр}}(k)\,t], \tag{1.138}$$

где Φ — распределение волнового числа k в пространстве в начальный момент времени. Фактически решение (1.138) весьма тривиально — каждая квазимонохроматическая волна движется со своей групповой скоростью. Отметим наиболее простой случай, когда решение (1.138) может быть выражено в явном виде:

$$c_{\text{гр}}(k) = x/t. \tag{1.139}$$

В частности, для волн на глубокой воде $c_{\text{гр}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{g}{2\omega}$ и из (1.139) находим:

$$k = gt^2/(4x^2), \quad \omega = gt/(2x). \tag{1.140}$$

Эти формулы уже давно используются для описания волн зыби, вызванных штормом. На больших расстояниях от района шторма период волн зыби убывает со временем $T = 4\pi x/t$ и по коэффициенту пропорциональности можно определить расстояние до района шторма.

Более интересные результаты получаются для цуга волн с немонотонной зависимостью волнового числа от расстояния. Тогда в соответствии с (1.138) профиль волны $k(x, t)$ искажается: ее передний склон растягивается, поскольку длинные волны здесь убегают от следующих за ним коротких, а задний склон становится круче, поскольку здесь длинные волны, наоборот, догоняют короткие. При этом энергия волнового поля изменяется: она концентрируется в зонах компрессии, где длинные волны догоняют короткие («эффект дисперсионного усиления»). В дальнейшем длинные волны обгонят короткие и плотность энергии будет снова падать.

Переход волны с глубокой воды на мелкую. Пусть глубина бассейна зависит только от координаты x и на глубокой воде задана монохроматическая волна. В этом случае из-за стационарности задачи уравнение (1.132) становится тривиальным, сохраняется частота волны, а уравнение для волнового действия или энергетического баланса приводит к постоянству потока энергии

$$S = c_{\text{гр}}(k, h)\,e = \text{const}. \tag{1.141}$$

Учитывая выражение для энергии (1.127), получаем закон изменения амплитуды волны:

$$\eta_0/\eta_\infty = \sqrt{c_{\text{гр}}(k_\infty)/c_{\text{гр}}(k, h)}, \tag{1.142}$$

где η_∞ — амплитуда волны на глубокой воде; k_∞ — волновое число на глубокой воде: $k_\infty = \omega^2/g$. График функции $\eta_0(h)$ представлен на рис. 1.9. Как видим, с вступлением волны на мелководье ее амплитуда несколько убывает, а затем снова возрастает. На мелкой воде $c_{гр} = \sqrt{gh}$ и из (1.142) следует известный закон Грина $\eta_0 \sim h^{-1/4}$ [2, 3].

Вблизи уреза η_0 очень быстро возрастает и нарушается условие медленности изменения амплитуды волны. Поэтому формулой (1.42) можно пользоваться только вдали от уреза.

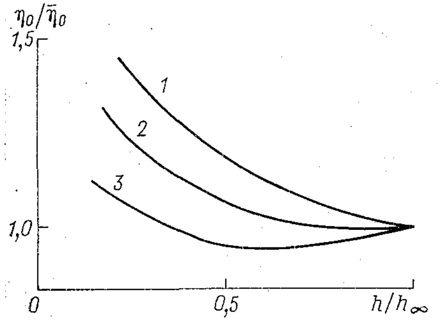


Рис. 1.9. Изменение высоты волны на мелководье при различных углах падения φ.

1) $\varphi = 0$; 2) $\varphi = 45°$; 3) $\varphi = 60°$.

Рефракция морских волн в прибрежной зоне. Пусть глубина бассейна снова зависит только от одной координаты x, но монохроматическая волна подходит к берегу под некоторым углом. В этом случае информативным является уравнение (1.133), которое мы перепишем в проекциях:

$$\partial k_x/\partial y - \partial k_y/\partial x = 0. \tag{1.143}$$

Ввиду независимости всех величин от y из (1.143) немедленно вытекает сохранение вдольбереговой проекции волнового вектора:

$$k_y = k(x) \sin \varphi(x) = \mathrm{const}. \tag{1.144}$$

Здесь φ — угол падения (угол между изобатами и линиями гребней). Вместе с (1.134) последнее уравнение определяет поворот волнового вектора в прибрежной зоне. Фактически здесь мы имеем дело с классической рефракцией, описываемой в оптике законом Снеллиуса. В частности, на мелкой воде формулы (1.144), (1.134) эквивалентны простому соотношению

$$\sin \varphi(x)/\sqrt{h(x)} = \mathrm{const}; \tag{1.145}$$

оно показывает, что с уменьшением глубины уменьшается и угол φ, так что волна разворачивается к берегу. Определим луч как линию, в каждой точке которой касательная совпадает с волновым вектором $\mathbf{k}$. Его траектория определяется $\operatorname{tg} \varphi(x)$ и интегрируется в квадратурах:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} \operatorname{tg} \varphi(x)\, dx, \tag{1.146}$$

где x_0, y_0 — начальные координаты луча, а $\varphi(x)$ определяется из (1.144) с учетом (1.134). Отсюда также следует, что луч поворачивается к берегу.

Изменение энергии волны при подходе к берегу описывается уравнением энергетического баланса (1.136), которое ввиду стационарности задачи сводится к

$$\partial (c_{\text{гр}x} e)/\partial x + \partial (c_{\text{гр}y} e) \partial y = 0. \tag{1.147}$$

Если энергия волны не зависит от расстояния вдоль изобат (оси y), то второй член в (1.147) пропадает и оно легко интегрируется:

$$c_{\text{гр}} e \cos\varphi = \text{const}. \tag{1.148}$$

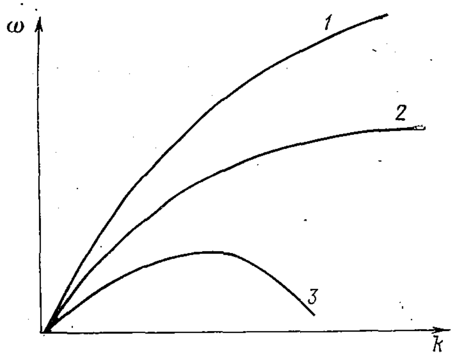


Рис. 1.10. Дисперсионное соотношение для волн на воде в присутствии течений.

1) $U > 0$; *2)* $U \approx 0$; *3)* $U < 0$.

В частности, на мелкой воде амплитуда волны вычисляется в явном виде:

$$\eta_0/\bar{\eta}_0 = (h_0/h)^{1/4} \sqrt{\cos\varphi_0} / \sqrt[4]{1 - (h/h_0)\sin^2\varphi_0}, \tag{1.149}$$

где $\bar{\eta}_0$ — амплитуда волны на изобате h_0; φ_0 — начальный угол падения. Отсюда следует, что при больших углах падения амплитуда волны может стать заметно больше, чем при нормальном падении.

Волны на неоднородном течении. Рассмотрим теперь трансформацию монохроматической волны на неоднородном течении $V(x)$, причем будем считать, что параметры волны от y не зависят. Дисперсионное соотношение для волн на течении имеет вид

$$\omega = \sqrt{gk \operatorname{th}(kh)} + kU(x) = \Omega(k) + kU(x); \tag{1.150}$$

оно вытекает из преобразования системы координат Галилея. Ввиду монохроматичности волны и стационарности потока из (1.132) вытекает постоянство частоты $\omega = \text{const}$. Для простоты ограничимся рассмотрением только волн на глубокой воде. На рис. 1.10 изображен график $\omega(k)$. Видно, что при $U > 0$ зависимость $\omega(k)$ остается монотонной и каждому значению частоты соответствует одно значение волнового числа. В случае же $U < 0$ возможны три случая: при заданной ω может быть два корня для k, один или ни одного. Переход между этими режимами соответствует экстремуму функции $\omega(k)$, откуда и определяется соответствующее волновое число:

$$d\Omega/dk + U = 0. \tag{1.151}$$

Величина $d\Omega/dk$ есть групповая скорость волны в системе отсчета, связанной с течением, поэтому условие (1.151) имеет простой физический смысл: волна, движущаяся с групповой скоростью, останавливается встречным течением в точке, где скорости $c_{\text{гр}}$ и U равны, т. е. волна в этой точке блокируется. Отсюда находится волновое число в точке блокировки $k = g/(4U^2)$.

Эти выводы могут быть получены и непосредственно из решения уравнения (1.150), если считать, что волна распространяется из области неподвижной воды, где ее частота ω_0, а волновое число $k_0 = \omega_0^2/g$:

$$c(k)/c_0 = (1/2)\left(1 + \sqrt{1 + 4U/c_0}\right), \tag{1.152}$$

где $c(k) = \Omega/k = \sqrt{g/k}$ — фазовая скорость волны в системе отсчета, связанной с течением; $c_0 = \omega_0/k_0 = \sqrt{g/k_0}$. В случае $U > 0$ (попутное движение) фазовая скорость волны увеличивается, а при $U < 0$ (на встречном течении) — уменьшается. Если скорость встречного течения велика $U < -c_0/4$, то решение (1.152) перестает существовать. Пограничное значение скорости $U = -c_0/4$ с учетом $c = c_0/2$ соответствует условию (1.151), которое мы обсуждали выше.

Итак, если волна переходит на попутное течение, то ее длина увеличивается, если на встречное — уменьшается. Рассмотрим теперь изменение амплитуды волны в рамках уравнения энергетического баланса. Здесь мы сталкиваемся с трудностями определения энергии даже на постоянном течении (частицы воды участвуют не только в волновом движении); соответствующие вычисления достаточно громоздки. Однако мы хорошо знаем энергию в системе отсчета, связанной с течением, где жидкость покоится [см. формулу (1.128)]. Поэтому удобно использовать свойства инвариантности волнового действия относительно преобразования Галилея $e/\omega = e_0/\Omega$, где e_0 определяется формулой (1.127), и с точностью до постоянной $e_0 \sim \eta_0^2$. С учетом этого уравнение (1.135) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\eta_0^2}{\Omega}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[(c_{\text{гр}} + U)\frac{\eta_0^2}{\Omega}\right] = 0; \tag{1.153}$$

$$c_{\text{гр}} = \sqrt{g/k}/2.$$

Поскольку величина η_0^2/Ω на стационарном течении от t не зависит, то (1.153) интегрируется:

$$\left(c_{\text{гр}} + U\right)\eta_0^2/\Omega = \text{const}. \tag{1.154}$$

Эта формула позволяет найти амплитуду волны в явном виде:

$$\eta_0/\overline{\eta_0} = c_0/\sqrt{c\,(c + 2U)}. \tag{1.155}$$

Это выражение должно использоваться вместе с (1.152). Зависимость η_0 от U представлена на рис. 1.11. Как видим, на попутном течении амплитуда волны уменьшается, а на встречном — возрастает. При приближении к точке блокировки $\eta_0 \to \infty$, однако здесь нарушаются условия применимости метода медленно меняющихся амплитуд, и формулой (1.155) необходимо пользоваться вдали от точки блокировки. В окрестности точки блокировки волна может обрушиться, если ее амплитуда станет очень большой, либо отразиться с переходом на правую (ниспадающую) ветку дисперсионного соотношения (см. рис. 10), где $d\omega/dk < 0$. Исследование этого случая мы здесь проводить не будем.

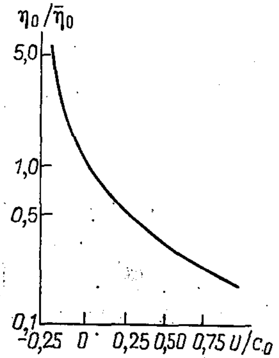


Рис. 1.11. Изменение высоты волны на переменном течении.

Трансформация солитона. Из нелинейных задач мы рассмотрим только одну, относящуюся к движению солитона в бассейне переменной глубины. Если глубина меняется достаточно медленно, то отражение отсутствует и энергия локализованного импульса не меняется. Тогда из (1.130) немедленно следует $\eta_0 \sim h^{-1}$. Эту формулу можно назвать «нелинейным» законом Грина; в отличие от линейного закона, амплитуда солитона с уменьшением глубины возрастает более резко.

Вопросы для самопроверки

1. В каких случаях волновой процесс можно считать линейным? Накладываются ли при этом условия на расстояния, проходимые волной?
2. В каких случаях волны описываются волновым уравнением, а в каких — краевыми задачами? Поясните это с помощью вертикальных распределений (структур моды) характеристик волнового движения.
3. Можно ли определить для произвольного волнового процесса такие характеристики, как амплитуда волны, высота, период, длина, фаза, или часть определений необходимо модифицировать?
4. Дайте определения фазовой и групповой скоростям. Являются ли они векторами? Какая из них характеризует скорость переноса энергии?
5. Назовите условия применимости приближений: глубокая вода, мелкая вода, неглубокая вода. Возможно ли одновременное выполнение этих приближений?

6. Для каких волновых задач справедливы метод Фурье, принцип суперпозиции, метод возмущений, метод стационарной фазы?

7. Напишите волновое уравнение, уравнение простой волны, уравнение Кортевега—де Вриза. При каких условиях эти уравнения переходят друг в друга?

8. Что такое простая волна? Может ли она быть линейной волной? Всегда ли она обрушивается? Перечислите условия существования простой волны.

9. Для каких уравнений можно ввести понятие длины нелинейности? Приведите выражение для нее в различных физических ситуациях.

10. Что такое солитон? Решением какого уравнения он является? Может ли волна быть солитоном в линейном приближении? Каков смысл параметра Урселла?

11. Что характеризуют условия трехволнового или четырехволнового резонанса? Поясните геометрический метод получения этих условий.

12. Выпишите нелинейное уравнение Шредингера. При каких условиях оно справедливо? Какие его решения Вы можете привести — каким ситуациям они соответствуют?

13. Что такое модуляционная неустойчивость? Выпишите критерий Лайтхила модуляционной неустойчивости.

14. Как «устроен» солитон огибающей? Меняется ли волнограмма волнового цуга при солитонном распространении от точки к точке?

15. Дайте определение плотности энергии волн на воде и потока энергии. Какова связь между этими характеристиками в случае бегущей и стоячей волн?

16. Выпишите кинематические законы сохранения для волн. При каких условиях они справедливы? Приведите ряд простейших решений этих уравнений — каким физическим ситуациям они соответствуют?

17. Напишите уравнения баланса волнового действия и энергии. При каких условиях они совпадают?

18. В чем заключается эффект дисперсионного усиления волн на воде? Возможен ли он на мелкой воде?

19. Почему при приближении к берегу амплитуда волны возрастает? Возрастает ли при этом скорость орбитального движения частиц воды?

20. В чем заключается эффект рефракции волн на мелководье? Получите формулу (1.144) из закона Снеллиуса, известного в оптике.

21. Что такое эффект блокировки волн встречным течением? Опишите физику этого эффекта.

22. Почему с уменьшением глубины амплитуда солитона возрастает быстрее, чем амплитуда линейного импульса?

Типовые упражнения

1. Получите выражения для свободных прогрессивных волн в рамках уравнений потенциальной теории (1.14)—(1.17).

2. Найдите сдвиг фаз в прогрессивной волне между ее различными компонентами: уровнем, горизонтальной и вертикальной скоростью, давлением.

3. Получите уравнение эллипса, описывающего траекторию частицы в прогрессивной волне на произвольном горизонте в случае конечной глубины жидкости.

4. Получите аналогичное уравнение в случае стоячей воды.

5. Докажите правильность формулы (1.49).

6. Рассчитайте волновой профиль в соответствии с (1.50) при начальном условии

$$\eta(x,\ 0)=\eta_0 \sin\left(\frac{k_1-k_2}{2}\,x\right)\sin\left(\frac{k_1+k_2}{2}\,x\right)$$

на мелкой воде, считая что $k_1 - k_2$ — малая величина.

7. Решите аналогичную задачу в приближении неглубокой воды. На каких временах профиль волны существенно исказится? Подтвердите это сравнением мареограмм для различных моментов времени.

8. Проделайте аналогичные вычисления в случае глубокой воды.

9. Выполните расчеты изменения формы волны на больших расстояниях с помощью формулы (1.66) для некоторых типов импульсных начальных условий в рамках приближения глубокой воды. Покажите, что длина волны с максимальной амплитудой пропорциональна размеру начального возмущения.

10. Рассчитайте волнограммы волнового движения на мелкой воде в рамках (1.74) для различных видов начальных условий (соотношений между F_1 и F_2).

11. Выполните расчеты деформации простой волны в рамках (1.86) при начальном условии в виде треугольного профиля. Найдите время обрушения волны данного профиля.

12. В рамках теории возмущений найдите амплитуду третьей гармоники на мелкой воде, генерируемой вследствие нелинейности.

13. Исследуйте условия резонанса для волн на мелкой воде, распространяющихся под углом друг к другу. Какое взаимодействие может быть эффективным?

14. Постройте фазовую плоскость для установившихся волн в рамках уравнения Кортевега—де Вриза. Какой траектории на фазовой плоскости соответствует солитон, а какой — периодическая волна?

15. Нарисуйте волнограмму волны Стокса в рамках приближения (1.106) при увеличении амплитуды вплоть до предельной.

16. Постройте фазовую плоскость уравнения для огибающей волнового пакета (1.120) и покажите, какие режимы соответствуют различным типам траекторий.

17. Получите уравнение энергетического баланса (1.136) в случае мелкой воды непосредственно из (1.72) (глубина бассейна при этом постоянна).

18. Постройте решение кинематического закона сохранения (1.138) в случае треугольного начального возмущения. Определите время максимального сжатия импульса. Найдите форму огибающей и рассчитайте мареограмму волнового процесса в различные моменты времени.

19. Рассчитайте лучи по формулам (1.145) и (1.146) в случае параболического профиля дна: $h \sim x^2$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ ПРОГРЕССИВНЫХ ВОЛН В БАССЕЙНЕ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Целью работы является расчет основных элементов волнового движения в одной или нескольких прогрессивных монохроматических волнах при различных соотношениях между длиной волны и глубиной бассейна. Основные расчетные формулы приведены в разделе 1.2.

Порядок выполнения работы

1. Построить дисперсионные кривые по точной (1.24) и приближенным (1.33), (1.38), (1.55) формулам для различных глубин бассейна. Считая максимально допустимой относительную ошибку 10 %, оценить пределы применимости (диапазон длин волн и частот) приближений глубокой воды, мелкой воды и неглубокой воды.

2. Рассчитать и построить для этих же условий графики фазовой и групповой скоростей. Определить максимальную ошибку, вносимую в определение этих скоростей при использовании приближенных формул в рамках определенных выше диапазонов.

3. Построить эпюры скоростей по точным и приближенным (глубокая и мелкая вода) формулам для длин волн, отвечающих границам применимости приближенных теорий, и найти значения максимальной ошибки по скоростям.

4. Получить формулу для расхода воды $\int\limits_{-h}^{0} u\,dz$ и ее предельное выражение в случае глубокой и мелкой воды. Рассчитать для глубокой воды толщину слоя, через которую проходит основной расход воды (примите ошибку 10 %).

5. Пользуясь (1.126) и (1.128), рассчитать вертикальную структуру плотности кинетической энергии и потока энергии. Определить толщину слоя, в котором содержится 90 % всей энергии (в приближении глубокой воды).

6. Рассмотреть суперпозицию встречных прогрессивных волн в случае произвольного соотношения их амплитуд и частот. Построить волнограммы для различных моментов времени.

7. В частном случае стоячей воды рассчитать вертикальную структуру давления, плотности кинематической и потенциальной энергий, а также потока энергии.

8. Исследовать суперпозицию двух одинаковых прогрессивных волн, распространяющихся под углом друг к другу. Нарисовать линии гребней и траектории частиц для различных моментов времени. Рассчитать плотность и поток энергии для суперпозиции волн. Проанализировать влияние сдвига фаз между волнами на пространственные характеристики волнового поля.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ЭВОЛЮЦИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО НАЧАЛЬНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ (ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА)

В рамках линейной теории эволюция произвольного начального возмущения на поверхности воды может быть найдена с помощью метода Фурье, заключающегося в суперпозиции монохроматических прогрессивных волн с разными амплитудами и фазами. Метод Фурье использован нами в разделе 1.3 для описания неустановившихся волновых процессов. В частности, если движение двумерное, а жидкость в начальный момент времени неподвижна, то из очага выходят две одинаковые волны, движущиеся в противоположные стороны. Общее выражение для уходящей волны имеет вид [см. формулу (1.50)]

$$\eta(x,\ t) = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} A(k)\exp[i(kx-\omega t)]\,dk, \tag{1.156}$$

где $A(k)$ — Фурье-трансформанта (спектр) «половинки» начального возмущения:

$$A(k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta_0(x)\exp(-ikx)\,dx. \tag{1.157}$$

Для проведения численных расчетов удобно перейти к действительным интегралам Фурье. Поскольку $\eta_0(x)$ — действительная функция (она описывает реальное смещение водной поверхности), то ее спектр в общем случае комплексный и может быть представлен через косинус- и синус-преобразования Фурье:

$$A(k) = A_c(k) - iA_s(k); \tag{1.158}$$

$$A_c(k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta_0(x)\cos(kx)\,dx; \tag{1.159}$$

$$A_s(k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\eta_0(x)\sin(kx)\,dx. \tag{1.160}$$

Подставляя (1.158) в (1.156) и выделяя реальную часть, получаем окончательно:

$$\eta(x,\ t) = \eta_c(x,\ t) + \eta_s(x,\ t); \tag{1.161}$$

$$\eta_c(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_c(k)\cos(kx-\omega t)\,dk; \tag{1.162}$$

$$\eta_s(x,\ t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_s(k)\sin(kx-\omega t)\,dk. \tag{1.163}$$

Как следует из (1.159) и (1.160), $A_c(k)$ является четной функцией, а $A_s(k)$ — нечетной. Аналогичные свойства легко устанавливаются и для η_c и η_s. Более важными для упрощения расчетов являются следующие свойства:

— если $\eta_0(x)$ — четная функция, то $A_s(k)\equiv 0$ и расчетные формулы принимают вид

$$A_ч(k)=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \eta_0(x)\cos(kx)\,dx; \tag{1.164}$$

$$\eta(x,\ t)=\int_0^\infty A_ч(k)\cos(kx-\omega t)\,dk, \tag{1.165}$$

где обозначено $A_ч=2A_c(k)$;

— если $\eta_0(x)$ — нечетная функция, то $A_c(k)\equiv 0$ и расчетные формулы принимают вид

$$A_н(k)=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty \eta_0(x)\sin(kx)\,dx; \tag{1.166}$$

$$\eta(x,\ t)=\int_0^\infty A_н(k)\sin(kx-\omega t)\,dk. \tag{1.167}$$

Здесь $A_н=2A_s(k)$.

При проведении модельных расчетов вычисление спектра волн обычно не вызывает затруднений; для этого достаточно воспользоваться таблицами преобразования Фурье. Расчет же волнового поля (функции η), как правило, затруднен из-за сложной зависимости ω от k. Поэтому здесь наиболее эффективным является применение численных методов. Прежде чем переходить к численным расчетам, рассмотрим ряд аналитических примеров, позволяющих пояснить физику процесса.

Приближение мелкой воды. В этом случае $\omega=\sqrt{gh}\,k$, но тогда из (1.156) и последующих формул сразу следует, что

$$\eta(x,\ t)=\eta\left(x-\sqrt{gh}\,t\right), \tag{1.168}$$

так что волна распространяется со скоростью $\sqrt{gh}$ без изменения формы. Физически этот эффект обусловлен отсутствием дисперсии — все гармоники бегут синфазно, составляя в совокупности неизменный волновой цуг.

Данный случай весьма удобен для проверки численных схем, поскольку при вычислениях частотный интервал приходится выбирать конечным. Рассмотрим, например, эволюцию симметричного начального возмущения прямоугольной формы:

$$\eta_0(x)=\begin{cases}\eta_0, & \text{если } |x|<\lambda_0/2;\\ 0, & \text{если } |x|>\lambda_0/2.\end{cases} \tag{1.169}$$

Спектр этой функции легко находится из (1.164):

$$A_ч(k)=[\eta_0/(\pi k)]\sin(k\lambda_0/2). \tag{1.170}$$

При приближенном вычислении на ЭВМ волнового поля вместо (1.165) мы будем иметь интеграл вида

$$\eta_k(\zeta)=\frac{\eta_0}{\pi}\int\limits_0^k\frac{\sin(k\lambda_0/2)}{k}\cos(k\zeta)\,dk \tag{1.171}$$

$$(\zeta=x-\sqrt{gh}\,t),$$

который при $k\to\infty$ стремится к исходной функции (1.169) с заменой x на ζ. Интеграл в (1.171) сходится достаточно медленно, поэтому форма волны при любом конечном k будет отличаться от исходной. Это явление получило название «парадокса Гиббса» и его необходимо учитывать при проведении численных расчетов.

Немодулированная волна. Другим примером, поддающимся аналитическому рассмотрению, является монохроматическое начальное возмущение вида $\eta(x,\ 0)=\eta_0\sin(kx)$. Элементарное вычисление в рамках (1.156) и (1.157) приводит к прогрессивной мономонохроматической волне $\eta(x,\ t)=\eta_0\sin(kx-\omega t)/2$, которая, очевидно, также не расплывается.

Модулированные волны. Иная ситуация реализуется для группы волн:

$$\eta(x,\ 0)=\eta_0[1+m\sin(kx)]\sin(k_0x). \tag{1.172}$$

В этом случае мы имеем дело с модулированной волной, коэффициент модуляции которой равен m, а длина огибающей волны есть $2\pi/k$. Для вычисления волнового пакета в любой момент времени естественно преобразовать (1.172) в сумму трех монохроматических волн, каждая из которых распространяется со своей фазовой скоростью, а затем вновь их сложить:

$$\eta(x,\ t)=(1/2)\eta_0\{\sin(k_0x-\omega_0t)+m\sin(kx-\Omega t)\times$$
$$\times\sin[k_0x-[(\omega_++\omega_-)/2]\,t\}. \tag{1.173}$$

Здесь

$$\omega_0=\omega(k_0);\quad \omega_\pm=\omega(k_0\pm K);\quad \Omega=(\omega_+-\omega_-)/2.$$

Как видим, цуг волн уже не переносится с одной скоростью, что и приводит к его расплыванию. Если, однако, $K\ll k_0$, то в первом приближении $\Omega=c_{гр}K$, $\omega_++\omega_-\simeq2\omega_0$ и решение (1.173) упрощается:

$$\eta(x,\ t)=(1/2)\eta_0\{1+m\sin[K(x-c_{гр}t)]\}\sin[k_0(x-c_ф t)]. \tag{1.174}$$

В этом приближении огибающая распространяется с групповой скоростью, а основная волна — с фазовой скоростью. Это обстоятельство радикально влияет на картину волнового поля в пространстве и во времени. Так, для глубокой воды $c_{гр}=c_ф/2$, поэтому, если цуг волн в пространстве содержит 10 волн, то волнограф запишет уже 20 волн. Данное приближение справедливо только на ограниченных пространственно-временных интервалах. На больших временах из-за различий в скоростях распространения глубина модуляции возрастает и может достигать 100 %. Это происходит на временах, когда набег фазы $\Delta\theta = [(\omega_+ + \omega_-)/2) - \omega_0]t$ достигнет π и бóльших значений. С учетом разложения $\omega(k)$ в ряд Тейлора относительно k_0 это условие эквивалентно

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}K^2 t_р \sim \pi, \tag{1.175}$$

откуда можно оценить время расплывания волнового пакета. Обратим внимание на то, что этот эффект принципиально связан с дисперсией волн (непостоянством групповой скорости), и он отсутствует в случае мелкой воды.

Мы рассмотрели действие дисперсии на примере модулированной волны. В случае импульсного начального возмущения дисперсионные эффекты можно исследовать численным интегрированием соответствующих интегралов Фурье. На очень больших временах, когда дисперсия «растащит» все гармоники волнового пакета, его описание может быть приближенно получено с помощью метода стационарной фазы. Соответствующие расчетные формулы приведены в разделе 1.3 [см. (1.66) и (1.67)]; там же описан порядок расчета по асимптотическим формулам.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотреть процесс деформации модулированной волны (1.172) для глубокой воды. Привести волнограммы для $t \ll t_р$, $t \approx t_р$ и $t \gg t_р$ и выполнить сравнение с волнограммой (1.174), не учитывающей расплывание волнового пакета.

2. Составить программу расчета интегралов Фурье, используя стандартные подпрограммы, входящие в состав математического обеспечения ЭВМ. Изучить парадокс Гиббса для заданных видов начальных возмущений в приближении мелкой воды, выбрать на этой основе оптимальный диапазон интегрирования. Произвести тестирование программы на задаче эволюции начального возмущения в рамках теории мелкой воды.

3. Рассмотреть вопрос деформации начального импульсного возмущения в рамках точного дисперсионного соотношения, а также приближенных моделей (глубокой воды, неглубокой воды). Оценить время, на котором начальное возмущение заметно меняется, и сравнить с теоретическими оценками. Сопоставить численные решения с результатами расчетов по асимптотическим формулам (1.66) и (1.67).

4. Получить теоретические формулы для поля скоростей на различных глубинах. Выполнить численные расчеты эволюции поля скоростей от импульсного возмущения в приближении глубокой воды и выяснить зависимость амплитуды волны от глубины.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ИССЛЕДОВАНИЕ СОЛИТОНОВ НА НЕГЛУБОКОЙ ВОДЕ

В разделе 1.3 дан простейший эвристический вывод уравнения Кортевега—де Вриза для волн на поверхности неглубокой жидкости

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\sqrt{gh}\left(1+\frac{3\eta}{2h}\right)\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{h^2}{6}\sqrt{gh}\,\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0. \qquad (1.176)$$

Переходя к переменным $\tilde{x}=x-\sqrt{gh}\,t$ и $\tilde{t}=t$, а также обозначая $\alpha=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}$, $\beta=\frac{h^2}{6}\sqrt{gh}$, перепишем (1.176) в обобщенном виде (тильду опускаем):

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\alpha\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\beta\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0. \qquad (1.177)$$

Для волн на поверхности воды α и β — положительные константы, однако для волн других типов эти константы могут иметь произвольные знаки. Так, для внутренних волн, как будет показано в главе 5, в случае термоклина, прижатого к свободной поверхности, $\alpha<0$. Поэтому в данной работе уравнение (1.177) будет рассмотрено при произвольных знаках α и β. Его стационарные решения, как и в разделе 1.5, находятся двухкратным интегрированием (1.177). В частности, солитон описывается следующим выражением:

$$\eta=\eta_0\,\mathrm{sch}^2\sqrt{\frac{12\beta}{\alpha\eta_0}}\left(x-\frac{\alpha\eta_0}{3}t\right), \qquad (1.178)$$

причем знак η_0 определяется знаком величины $\alpha\beta$. Для волн на воде $\alpha\beta>0$, поэтому $\eta_0>0$, так что солитон представляет собой движущийся горб на поверхности воды. При $\alpha\beta<0$ солитон представляет собой впадину.

Рассчитаем теперь эволюцию нестационарных возмущений в рамках уравнения Кортевега—де Вриза. Будем рассматривать начальные возмущения импульсного типа, так что граничные условия сводятся к требованию равенства нулю возмущения при $x\to\pm\infty$. Начальное условие запишем в виде $\eta(0,\ x)=\eta_0 f(x/\lambda)$, где f — безразмерная функция, описывающая форму возмущения, η_0 — амплитуда и λ — характерный размер. Введем безразмерные переменные $\eta_{\text{н}}=\eta/\eta_0$, $x_{\text{н}}=x/\lambda$, $t_{\text{н}}=(\alpha\eta_0/\lambda)t$, после чего уравнение (1.177) запишется в виде (индекс «н» опускаем)

$$\frac{\partial\eta}{\partial t}+\eta\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{1}{\sigma^2}\frac{\partial^3\eta}{\partial x^3}=0;$$

$$\eta(x,\ 0)=f(x). \qquad (1.179)$$

Здесь $\sigma^2 = \alpha\eta_0\lambda^2/\beta$ — параметр подобия, эквивалентный параметру Урселла, введенному в разделе 1.5. Из (1.179) вытекает, что начальные возмущения одинаковой формы с различными η_0 и λ, но одним и тем же σ будут эволюционировать одинаковым образом.

Качественная картина эволюции начального возмущения в рамках (1.179) подробно описана в разделе 1.5. Количественные характеристики этого процесса могут быть найдены численными или аналитическими методами. Не излагая здесь соответствующий аналитический аппарат, отметим лишь прием вычисления параметров солитонов, на которые распадается начальное возмущение. Он основан на решении задачи на собственные значения следующего уравнения:

$$d^2\psi_n/dx^2 + (\sigma^2/6)\left[E_n + f(x)\right]\psi_n = 0, \qquad (1.180)$$

где $f(x)$ описывает начальную форму возмущения, а ψ_n — собственная, убывающая на бесконечности функция, отвечающая собственному значению E_n. Если такие ограниченные решения существуют, то собственное значение E_n определяет амплитуда солитона $\eta_n = -2E_n\eta_0$.

Уравнение (1.180) хорошо известно в квантовой механике, и эта аналогия оказывается полезной для расчетов амплитуд генерируемых солитонов. В частности, если в качестве начального возмущения в (1.180) подставить солитон (1.178), для которого $\sigma^2 = 12$, то из (1.180) можно установить существование только одного дискретного собственного значения с $E_n = -1/2$, так что амплитуда генерируемого солитона совпадает с первоначальной, что и следовало ожидать.

Если же σ^2 не равно 12, а форма начального возмущения остается такой же, как у солитона, то число солитонов определяется целой частью выражения

$$(1/2)\left[\sqrt{1 + (2/3)\sigma^2} - 1\right],$$

а их амплитуды равны

$$\eta_n = (3\eta_0/\sigma^2)\left[\sqrt{1 + \frac{2}{3}\sigma^2} - (1 - 2n)\right]^2, \qquad (1.181)$$

и при больших σ амплитуды максимальных солитонов могут достигать $2\eta_0$. Отметим, что из-за зависимости скорости солитона от амплитуды с течением времени солитоны выстроятся «по росту» и впереди будут солитоны с максимальной амплитудой.

Аналогичная картина имеет место и для других форм начального возмущения, лишь бы оно представляло собой гребень на поверхности воды. Если же начальное возмущение представляет собой ложбину, то легко показать в рамках (1.180) отсутствие дискретного уровня. Этому случаю соответствует эволюция начального возмущения в осциллирующий нелинейный цуг.

Упомянем здесь также точное двухсолитонное решение уравнения (1.179):

$$\eta(x,\ t)=\frac{12}{\sigma^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln F;$$

$$F=1+\exp\zeta_1+\exp\zeta_2+\exp(\zeta_1+\zeta_2+\Delta); \qquad (1.182)$$

$$\zeta_i=p_ix-\frac{1}{\sigma^2}p_i^3t+\zeta_i^{(0)},\quad \exp\Delta=\left(\frac{p_1-p_2}{p_1+p_2}\right)^2,$$

определяемое через четыре параметра: два амплитудных p_1, p_2 и два фазовых $\zeta_1^{(0)}$ и $\zeta_2^{(0)}$. Это выражение весьма громоздко однако оно имеет простой вид в случае, когда солитоны находятся далеко друг от друга. В окрестности первого солитона имеем при $t\to-\infty$

$$\eta=(3p_1^2/\sigma^2)\operatorname{sech}^2[(\zeta_1+\Delta)/2], \qquad (1.183)$$

а при $t\to+\infty$

$$\eta=(3p_1^2/\sigma^2)\operatorname{sech}^2(\zeta_1/2). \qquad (1.184)$$

Аналогичные решения получаются в окрестности второго солитона, достаточно удаленного от первого. Таким образом, если при $t\to-\infty$ солитоны разделены, то после взаимодействия ($t\to+\infty$) они сохраняют свою форму и амплитуду. В области взаимодействия решение описывается формулой (1.182). Детальный анализ показывает, что если амплитуда догоняющего солитона существенно больше амплитуды догоняемого, то фактически происходит обгон одного солитона другим. Если же их амплитуды близки, то солитоны бегут вместе достаточно долго. В этом случае меньший солитон, бегущий впереди, отбирает энергию у догоняющего его солитона, усиливается и уходит вперед, происходит обмен амплитудами у солитонов. Граничный диапазон значений отношения амплитуд, разделяющий эти процессы, равен 2,6—3. Устойчивость солитонов в результате таких взаимодействий и послужила основанием для того, чтобы уединенную волну стали называть солитоном (по аналогии с электроном, фотоном и т. д.).

Порядок выполнения работы

1. Построить фазовую плоскость для установившихся волн в рамках уравнения (1.177) для различных знаков α и β. Доказать существование периодических установившихся волн при любом значении α и β.

2. В рамках теории возмущений выполнить расчет второй гармоники установившихся волн малой амплитуды, являющихся решением уравнения (1.177). Нарисовать осциллограмму волны.

3. Рассчитать в рамках (1.180) число возникающих солитонов из начальных возмущений прямоугольной формы:

$$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<\lambda/2;\\ 0, & |x|>\lambda/2.\end{cases}$$

Убедиться в отсутствии солитонных решений в случае противоположной полярности импульса.

4. Исследовать обгонное и обменное взаимодействие солитонов при разном отношении амплитуд. Этот процесс исследовать в рамках (1.180).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 1

1. Виноградов М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн.— М.: Наука, 1980.
2. Динамика океана/Учебник под ред. Ю. П. Доронина.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.— 304 с.
3. Кононкова Г. Е., Показеев К. В. Динамика морских волн.— М.: Изд. МГУ, 1985.— 297 с.
4. Лайтхил Д. Волны в жидкостях/Пер. с англ.— М.: Мир, 1981.— 598 с.
5. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане/Пер. с англ.— М.: Мир, 1981.— Т. I — 478 с.; т. II — 363 с.
6. Найфе А. Методы возмущений/Пер. с англ.— М.: Мир, 1976.
7. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн.— М.: Наука, 1984.— 432 с.
8. Солитоны и нелинейные волновые уравнения/Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. Пер. с англ.— М.: Мир, 1988.— 694 с.
9. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана/Пер. с англ.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.— 319 с.
10. Фукс В. Р. Введение в теорию волновых движений в океане.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1982.— 200 с.
11. Юэн Г., Лэйк Б. Нелинейная динамика гравитационных волн на глубокой воде/Пер. с англ.— М.: Мир, 1987.— 179 с.

ГЛАВА 2

ВЕТРОВЫЕ ВОЛНЫ

2.1. Статистическое описание волнового поля

Ветровое волнение можно считать случайным процессом. Поэтому его описание должно даваться в терминах статистических характеристик. Из них главной является совместная *плотность распределения вероятностей* уровня поверхности $P(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, где η_i — отклонение поверхности моря в точке (x_i, y_i) в момент времени t_i. Обычно принимают, что ветровое волнение является почти стационарным и однородным, т. е. функция P инвариантна относительно сдвига времени и координат на масштабах порядка длины и периода энергонесущей волны. На практике интересуются тремя моментами распределения плотности вероятности.

Первый момент определяет *средний уровень* моря:

$$\bar{\eta} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta P(\eta)\, d\eta, \tag{2.1}$$

и он находится через одноточечную плотность распределения $P(\eta)$.

Второй момент определяет пространственно-временную *корреляционную функцию* смещений поверхности:

$$Z(\mathbf{r}, t) = \overline{\eta(\mathbf{r}_1, t_1)\, \eta(\mathbf{r}_2, t_2)} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \eta_1 \eta_2 P(\eta_1, \eta_2)\, d\eta_1\, d\eta_2, \tag{2.2}$$

и находится через двухточечную плотность распределения $P(\eta_1, \eta_2)$. Здесь $\mathbf{r}_i$ — вектор с проекциями x_i, y_i, характеризующий точку на морской поверхности, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $t = t_1 - t_2$, а черта сверху означает статистическое усреднение. Частными случаями уравнения (2.2) являются *пространственная корреляционная функция* мгновенного смещения поверхности

$$Z_{\text{п}}(\mathbf{r}) = \overline{\eta(\mathbf{r}_1, t)\, \eta(\mathbf{r}_2, t)} = Z(\mathbf{r}, 0) \tag{2.3}$$

(обычно она находится путем обработки фотоснимков морской поверхности) и *временная корреляционная функция* смещений поверхности в фиксированной точке

$$Z_{\text{в}}(t) = \overline{\eta(\mathbf{r}, t_1)\, \eta(\mathbf{r}, t_2)} = Z(0, t) \tag{2.4}$$

(она измеряется по данным одного волнографа). *Дисперсия волнения*, или средний квадрат смещения поверхности, определяется выражением

$$\overline{\eta^2} = Z(0,\ 0) = Z_{\text{п}}(0) = Z_{\text{в}}(0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta^2 P(\eta)\,d\eta \tag{2.5}$$

и находится также с помощью одноточечной плотности распределения $P(\eta)$.

Третий момент определяет *асимметрию смещений поверхности* относительно среднего уровня

$$\overline{\eta^3} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \eta^3 P(\eta)\,d\eta. \tag{2.6}$$

Наряду с корреляционной функцией на практике широко используется спектр волнения, получаемый с помощью преобразования Фурье от корреляционной функции. Так, *пространственно-временной спектр* есть

$$S(\mathbf{k},\ \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int Z(\mathbf{r},\ t) \exp\left[-i(\mathbf{kr} - \omega t)\right] d\mathbf{r}\,dt. \tag{2.7}$$

С помощью уравнения (2.7) можно определить *частотный спектр*

$$S(\omega) = \int S(\mathbf{k},\ \omega)\,d\mathbf{k} = \frac{1}{2\pi} \int Z_{\text{в}}(t) \exp(i\omega t)\,dt \tag{2.8}$$

и *пространственный спектр*

$$S(\mathbf{k}) = \int S(\mathbf{k},\ \omega)\,d\omega = \frac{1}{(2\pi)^2} \int Z_{\text{п}}(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{kr})\,d\mathbf{r}. \tag{2.9}$$

Пространственный спектр зависит как от модуля волнового вектора k, так и от его направления (угла), отсчитываемого, как правило, от генерального направления ветра. Обычно выделяют в явном виде *угловой спектр* $Q(\theta)$, удовлетворяющий нормировке:

$$\int\limits_{0}^{2\pi} Q(\theta)\,d\theta = 1, \tag{2.10}$$

и *одномерный пространственный спектр* (спектр по модулям волнового числа)

$$S_0(k) = k \int\limits_{0}^{2\pi} S(\mathbf{k})\,d\theta. \tag{2.11}$$

Эти виды спектров связаны между собой

$$kS(\mathbf{k}) = S_0(k)\,Q(\theta), \tag{2.12}$$

и только два из них являются независимыми.

Часто на практике (при измерениях антенной волнографов) используют *частотно-угловой спектр*; он определяется формулой

$$(\mathcal{S}\,\omega,\ \theta)=\int\limits_0^\infty S(\mathbf{k},\ \omega)\,k\,dk=S(\omega)\,Q(\theta). \tag{2.13}$$

Укажем также, что обратные преобразования Фурье, определедеделяющие корреляционные функции через спектр, не содержат множителя 2π:

$$Z(\mathbf{r},\ t)=\int \mathcal{S}(\mathbf{k},\ \omega)\exp\left[i\left(\mathbf{kr}-\omega t\right)\right]d\mathbf{k}\,d\omega;$$

$$Z_{\text{в}}(t)=\int S(\omega)\exp\left(-i\omega t\right)d\omega;$$

$$Z_{\text{п}}(\mathbf{r})=\int S(\mathbf{k})\exp\left(i\mathbf{kr}\right)d\mathbf{k}. \tag{2.14}$$

Отсюда вытекает важная формула для вычисления дисперсии волнения

$$\overline{\eta^2}=\int \mathcal{S}(\mathbf{k},\ \omega)\,d\mathbf{k}\,d\omega=\int S(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}=\int S_0(k)\,dk=\int S(\omega)\,d\omega. \tag{2.15}$$

Наряду со спектром колебаний уровня поверхности используют *энергетический спектр*

$$E(\omega,\ \mathbf{k})=\rho g\mathcal{S}(\omega,\ \mathbf{k}), \tag{2.16}$$

где ρ — плотность воды; g — ускорение свободного падения.

Приведенные выше формулы в сущности относятся к случайному процессу любой физической природы и в них еще не отражена специфика ветрового волнения. Одна из главных особенностей ветровых волн связана с наличием для них дисперсионного соотношения, по крайней мере для энергонесущих волн: $\omega=\sqrt{gk\,\mathrm{th}\,(kh)}$. В этом случае пространственно-временной спектр содержит дельта-функцию $\mathcal{S}(\omega,\ \mathbf{k})=S(\mathbf{k})\,\delta\left(\omega-\sqrt{gk\,\mathrm{th}\,(kh)}\right)$, и различные спектры оказываются связанными между собой. Наиболее важная из них — связь одномерного пространственного и частотного спектров — получается из (2.15):

$$S_0(k)=S(\omega)\,d\omega/dk\,\Big|_{\omega=\sqrt{gk\,\mathrm{th}\,(kh)}}. \tag{2.17}$$

Так, хорошо известно, что высокочастотная часть спектра ветрового волнения обусловлена обрушением волн. Предельная форма ветровых волн содержит изломы на вершинах с углом 120°, поэтому асимптотика одномерного пространственного спектра имеет вид (это можно показать интегрированием по частям формулы преобразования Фурье)

$$S_0(k)=\beta_0 k^{-3}, \tag{2.18}$$

где β_0 — безразмерная числовая константа. Тогда, используя уравнение (2.17), легко найти асимптотики частотного спектра волнения на глубокой ($\omega = \sqrt{gk}$) и мелкой ($\omega = \sqrt{gh}\,k$) воде:

$$S(\omega) = \begin{cases} 2\beta_0 g^2 \omega^{-5} \text{ — глубокая вода;} \\ \beta_0 g h \omega^{-3} \text{ — мелкая вода.} \end{cases} \tag{2.19}$$

В частности, $S(\omega)$, отвечающий спектру волнения на глубокой воде, является спектром Филлипса, полученным впервые из соображений размерности (к этому вопросу мы еще вернемся).

На практике наряду с комплексным преобразованием Фурье используются и действительные преобразования Фурье. Из-за стационарности ветрового волнения $Z_в(t)$ является четной функцией времени, поэтому функция $S(\omega)$ действительна и симметрична относительно $\omega = 0$. Тогда удобно рассматривать лишь положительные частоты и ввести частотный спектр по формуле

$$\Phi(\omega) = 2S(\omega). \tag{2.20}$$

При этом корреляционная функция $Z_в(t)$ связана с $\Phi(\omega)$ формулами действительного преобразования Фурье:

$$\begin{gathered} Z_в(t) = \int_0^\infty \Phi(\omega)\cos(\omega t)\,d\omega; \\ \Phi(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty Z_в(t)\cos(\omega t)\,dt. \end{gathered} \tag{2.21}$$

Аналогичные формулы могут быть написаны и для одномерного пространственного спектра $\Phi_0(k) = 2S_0(k)$. Именно спектры $\Phi(\omega)$ и $\Phi_0(k)$ и приводятся обычно в справочной литературе. Разумеется, между собой они связаны формулами типа (2.17).

2.2. Автомодельные спектры и распределения вероятности ветрового волнения

Изложенной выше информации достаточно для получения эмпирических спектров ветрового волнения. Важнейшей задачей при этом является обработка этих спектров с целью получения данных, необходимых для прогнозирования ветрового волнения при изменяющейся гидрометеорологической обстановке. Для решения этой задачи наиболее целесообразным путем здесь является выделение основных определяющих параметров, характеризующих ветровое волнение. В принципе волны могут зависеть от скорости ветра, его порывистости, продолжительности действия, длины разгона, разности температур между водой и воздухом и т. п. Считается, что при продолжительном действии ветра на больших разгонах (развитое волнение) спектр волнения на глубокой воде является установившимся и может зависеть только от скорости ветра W и ускорения свободного падения g. Из этих двух параметров однозначно находятся масштабы длины и времени: $L_0 = W^2/g$ и $T_0 = W/g$. Но тогда из соображений размерности единственным образом находятся автомодельные (зависящие только от одной переменной) формы частотного спектра

$$\Phi(\omega) = (W^5/g^3)\,\Psi(\tilde{\omega}); \quad \tilde{\omega} = \omega W/g, \tag{2.22}$$

и одномерного пространственного спектра

$$\Phi_0(k) = [W^6/(2g^3)]\,\Psi_0(\tilde{k}); \quad \tilde{k} = kW^2/g, \tag{2.23}$$

где Ψ и Ψ_0 — безразмерные функции безразмерного аргумента. Отсюда вытекает, что достаточно одного измерения спектра волнения при одном значении скорости ветра, чтобы предсказать спектр при любом значении скорости ветра (разумеется, скорость ветра можно менять только в определенном интервале, установленном опытным путем). Наиболее известной эмпирической формулой для Ψ в энергонесущем диапазоне является спектр Пирсона—Московица

$$\Psi(\tilde{\omega}) = 8{,}1 \cdot 10^{-3}\tilde{\omega}^{-5}\exp(-0{,}74/\tilde{\omega}^4). \tag{2.24}$$

Автомодельная форма записи спектра позволяет получить оценку ряда важных характеристик ветровых волн без использования конкретной функции Ψ. Так, дисперсия волнения, или средний квадрат смещения уровня, принимает вид

$$\overline{\eta^2} = \int_0^\infty \Phi(\omega)\,d\omega = \frac{W^4}{g^2}\int_0^\infty \Psi(\tilde{\omega})\,d\tilde{\omega} \sim \frac{W^4}{g^2}. \tag{2.25}$$

Среднюю высоту волны естественно определить с точностью до численного коэффициента через корень квадратный из дисперсии: $\overline{H} \sim \sqrt{\overline{\eta^2}} \sim W^2/g$, а среднюю длину волны — как $\overline{\lambda} \sim L_0 = W^2/g$. Тогда легко видеть, что крутизна волны $\overline{H}/\overline{\lambda}$ остается постоянной. В частности, если спектр описывается формулой Пирсона—Московица, то $\overline{\eta^2} \sim 2{,}7 \cdot 10^{-3} W^4/g^2$, $\overline{H} \sim 5{,}2 \cdot 10^{-2} W^2/g$ и крутизна $\overline{H}/\overline{\lambda} \sim 10^{-2}$. Именно крутизна и отвечает за нелинейность энергонесущих волн. Ввиду малости крутизны эти волны являются слаболинейными, это обстоятельство будет использовано ниже для построения теоретической модели.

И еще одно важное следствие. Как видно из выражения (2.24), спектр волны быстро спадает с ростом частоты, он узкополосен. Узкополосные сигналы, как известно, могут быть представлены в виде квазимонохроматического сигнала с медленно меняющейся амплитудой (высотой H) и частотой (периодом T). Это обстоятельство позволяет анализировать ветровое волнение в терминах H

и T, т. е. как почти регулярную волну (исторически такие исследования предшествовали спектральным). Смещение поверхности η в силу центральной предельной теоремы является гауссовым случайным процессом (точнее, близким к нему), что позволяет записать в общем виде плотность распределения вероятностей уровня поверхности

$$P(\eta)=\left(1/\sqrt{2\pi\overline{\eta^2}}\right)\exp\left[-\eta^2/(2\overline{\eta^2})\right], \tag{2.26}$$

и аналогичные формулы для многоточечной функции $P(\eta_1, \ldots, \eta_n)$. Ввиду гауссовости и узкополосности η плотность распределения высот волн подчиняется закону Релея

$$P(H)=\left[H/(4\overline{\eta^2})\right]\exp\left[-H^2/(2\overline{\eta^2})\right]. \tag{2.27}$$

Отсюда легко находится средняя высота волны

$$\overline{H}=\int_0^\infty HP(H)\,dH=\sqrt{2\pi\overline{\eta^2}}, \tag{2.28}$$

и с помощью (2.24) для аппроксимации Пирсона—Московица получаем $\overline{H}=0{,}13W^2/g$.

На практике часто интересуются не плотностью распределения высот, а интегральной характеристикой — *обеспеченностью*:

$$F(H)=\int_H^\infty P(H)\,dH=\exp\left(-\frac{H^2}{2\overline{\eta^2}}\right)=\exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{H}{\overline{H}}\right)^2\right], \tag{2.29}$$

показывающей вероятность появления ветровых волн с высотами, превышающими H. В прогнозе волн часто используется так называемая *высота существенной* (или *значительной*) *волны* $H_{1/3}$ — средняя высота волн, соответствующая одной трети наибольших волн; в этом случае $F={}^1/_3$, и из (2.29) получаем связь между $H_{1/3}$ и $\overline{H}$.

$$H_{1/3}=2\sqrt{2\overline{\eta^2}\ln 3}\simeq 1{,}2\overline{H}. \tag{2.30}$$

В практике портового и гидротехнического строительства обычно интересуются высотами волн 1 %-ной ($F=0{,}01$) или даже 0,1 %-ной ($F=0{,}001$) обеспеченности, выражения для которых находятся аналогично (2.30). В частности, высоту волны с обеспеченностью 0,1 % иногда принимают за максимально возможную высоту волны. Следует, правда, иметь в виду, что «хвосты» функции распределения, отвечающие высоким волнам, не обязаны подчиняться релеевскому закону ввиду редкой повторяемости очень высоких волн; кроме того, здесь необходимо учитывать их неизбежную нестационарность и вводить интервал времени прогнозов, поэтому в настоящее время расчет максимальных высот волн проводят по более обоснованным методикам, изучаемым в курсе «Морские прогнозы».

Пользуясь относительной узкополосностью ветрового волнения, можно написать также теоретические формулы для функций распределения периодов волн, однако они (как это обычно бывает с фазовыми характеристиками) «чувствительны» к более тонким деталям процесса и плохо подтверждаются натурным материалом. Поэтому приведем здесь эмпирические функции распределения периодов волн, аппроксимируемые законом Вейбулла:

$$P(T) = (na/T)(T/\overline{T})^n \exp\left[-a(T/\overline{T})^n\right]; \qquad (2.31)$$
$$F(T) = \exp\left[-a(T/\overline{T})^n\right],$$

где $a^{1/n} = \Gamma(1+1/n)$, $\Gamma(\zeta)$ — гамма-функция, а наиболее распространенное значение n равно 3. Средний период ветровых волн вычисляется через частотный спектр по формуле

$$\overline{T} = 2\pi\sqrt{\int\limits_0^\infty \Phi(\omega)\,d\omega \Big/ \int\limits_0^\infty \omega^2\Phi(\omega)\,d\omega}\,. \qquad (2.32)$$

Приведем также одну из эмпирических формул для углового спектра, показывающего зависимость ширины спектра от частоты: энергонесущие волны распространяются практически вдоль направления ветра, короткие волны более изотропны:

$$Q(\theta) = \frac{2^m\Gamma(2m+2)}{\Gamma^2(m+1)}\cos^m\theta, \quad m = 1{,}8\omega_{\text{макс}}/\omega, \qquad (2.33)$$

где $\omega_{\text{макс}}$ — частота пика в спектре волнения.

Выше мы приводили автомодельные спектры ветрового волнения, определяемые двумя параметрами; скоростью ветра W и ускорением свободного падения g. Еще более простыми должны быть автомодельные спектры для мелкомасштабной части ветрового волнения. Действительно, короткие волны, как показывают наблюдения, очень быстро разгоняются под действием ветра и затем обрушаются. Количество запасенной энергии в этом случае перестает зависеть от скорости ветра. Но тогда определяющим параметром остается только ускорение свободного падения, и единственная комбинация из g и ω, обеспечивающая нужную размерность спектра ветрового волнения, имеет вид (спектр Филлипса)

$$\Phi(\omega) = 7{,}8 \cdot 10^{-3}g^2\omega^{-5}, \qquad (2.34)$$

где численная константа определена по натурным данным. Этот спектр должен реализовываться вне энергонесущего пика в его высокочастотной части. Отметим, что выражение (2.34) совпадает с выражением (2.19), полученным только из кинематических соображений в виде волны предельной формы при ее обрушении.

На практике ситуация полностью развитого волнения реализуется относительно редко. В этом случае спектр должен зависеть еще от нескольких безразмерных параметров: разгона xg/W^2 (расстояние отсчитывается от подветренного берега) и продолжительности действия ветра tg/W. Наличие нескольких определяющих параметров не позволяет дать однозначных заключений о виде спектра, более того они сильно затрудняют нахождение эмпирических спектров (для построения функции нескольких переменных объем экспериментальных данных должен возрасти на несколько порядков). Сейчас принимают, что форма спектра волнения, переписанного в терминах частоты пика волнения и высоты волны, является универсальной. В частности, спектр Пирсона—Московица (2.24) записывается в обобщенном виде

$$\Phi(\omega) = 8{,}1 \cdot 10^{-3} g^2 \omega^{-5} \exp\left[-1{,}25\,(\omega_{\text{макс}}/\omega)^4\right] \qquad (2.35)$$

применительно к произвольному волнению, а $\omega_{\text{макс}}$ в случае установившегося волнения зависит от разгона:

$$\tilde{\omega}_{\text{макс}} = a\tilde{x}^{-b};\quad \tilde{\omega}_{\text{макс}} = \omega_{\text{макс}} W/g;\quad \tilde{x} = xg/W^2, \qquad (2.36)$$

где a и b — эмпирические константы, равные, по данным Давидана с соавторами, $a \simeq 16\ldots 22$, $b \simeq 0{,}28\ldots 0{,}33$.

Разумеется, мы привели здесь только простейшие реализации эмпирических спектров и законов распределения, чтобы продемонстрировать основные идеи, лежащие в основе теоретических рассуждений. При анализе ветрового волнения в различных районах Мирового океана необходимо пользоваться более надежными эмпирическими зависимостями, сводка и обоснованность которых обсуждается в работах [1—3].

2.3. Спектральные методы расчета ветровых волн

Эмпирические формулы для спектров позволяют оценить ветровое волнение в достаточно простых ситуациях (глубокая вода, прямая береговая линия, ветер дует перпендикулярно береговой линии). Для расчета ветровых волн в ограниченных акваториях при сложном рельефе дна эмпирическими методами уже не обойтись и необходимо применение теоретических методов. Эти методы опираются на спектральные формы хорошо известного уравнения энергетического баланса, которое мы уже использовали в главе 1 для анализа трансформации монохроматической волны на мелководье и течении. Специфика рассматриваемой здесь задачи заключается в немонохроматичности ветрового волнения, которое описывается теперь пространственным спектром $S(\mathbf{k})$ (частотный спектр, как мы уже указывали, однозначно выражается через пространственный). Кроме того, уравнение энергетического баланса должно быть модифицированным, так как необходимо учитывать зависимость S от $\mathbf{k}$. При этом мы считаем, что все изменения волновых характеристик происходят достаточно медленно, так что ветровое волнение локально (на масштабе длины волны) является стационарным и установившимся. Это накладывает определенные ограничения на крутизну уклона дна и степень изрезанности береговой линии, которые, как правило, выполняются вне приурезовой области. Наконец, на первом этапе мы будем считать, что течения в океане отсутствуют, это позволит нам использовать уравнение для энергетического спектра, а не для волнового действия (отношения спектральной плотности к частоте). В этом случае самый общий вид уравнения энергетического баланса представляется как

$$dS(\mathbf{k},\ \mathbf{r},\ t)/dt = G(\mathbf{k},\ \mathbf{r},\ t,\ S), \tag{2.37}$$

где G — функция, описывающая механизм генерации, диссипации и нелинейной трансформации ветровых волн и подлежащая определению. Поскольку ветровое волнение представляет собой случайный набор квазимонохроматических волн, которые в процессе движения меняют свое положение и, вообще говоря, волновое число, то фактически мы имеем $S = S[\mathbf{k}(t),\ \mathbf{r}(t),\ t]$ и, следовательно,

$$dS/dt = \partial S/\partial t + (\partial S/\partial \mathbf{r})\, d\mathbf{r}/dt + (\partial S/\partial \mathbf{k})\, d\mathbf{k}/dt,$$

где $(\partial S/\partial \mathbf{r})d\mathbf{r}/dt = (\partial S/\partial x)\partial x/\partial t + (\partial S/\partial y)\partial y/\partial t$, аналогично представляется $(\partial S/\partial \mathbf{k})\ d\mathbf{k}/dt$.

Изменение положения и волнового числа квазимонохроматической волны определяется так же, как и для случая регулярной волны [см. (1.132)] с помощью кинематического закона сохранения в несколько измененном виде

$$\partial \mathbf{k}/\partial t + (\partial \omega/\partial \mathbf{k})\, \partial \mathbf{k}/\partial \mathbf{r} + \partial \omega/\partial \mathbf{r} = 0. \tag{2.38}$$

Дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных, как известно, эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений (их называют *лучевыми уравнениями*):

$$d\mathbf{r}/dt = \partial \omega(\mathbf{k},\ \mathbf{r})/\partial \mathbf{k};\quad d\mathbf{k}/dt = -\partial \omega(\mathbf{k},\ \mathbf{r})/\partial \mathbf{r}. \tag{2.39}$$

Здесь $\omega = \sqrt{gk\,\mathrm{th}\,(kh(\mathbf{r}))}$ $(k = |\mathbf{k}|)$ есть известное дисперсионное соотношение для волн на поверхности воды.

Таким образом, мы полностью определили все члены в левой части уравнения (2.37). Наиболее трудной задачей, не решенной до сих пор, является определение правой части уравнения (2.37) — функции G. В общем случае G определяет поток энергии к волнам под действием турбулентных пульсаций давления и за счет взаимодействия с воздушным потоком над волнами, нелинейных взаимодействий спектральных компонентов волнения между собой и с пульсациями воздушного потока, диссипации волновой энергии за счет трения о дно и обрушения гребней. Описание многих из перечисленных процессов еще не может быть сделано достаточно надежно, и здесь активно используются данные наблюдений. Далее мы опишем некоторые из перечисленных процессов, теория которых может считаться удовлетворительной.

Генерация волн пульсациями атмосферного давления (механизм Филлипса). Для упрощения выкладок будем считать глубину бесконечно большой (глубокая вода) и воспользуемся исходными уравнениями в потенциальной форме (1.14)—(1.16). Учет изменчивости атмосферного давления меняет только второе уравнение в (1.16):

$$\partial\varphi/\partial t + g\eta = -(1/\rho)\, p_{\text{атм}}(\mathbf{r},\ t). \tag{2.40}$$

Решение этих уравнений получим с помощью метода Фурье. Для этого разложим $p_{\text{атм}}$ в интеграл Фурье по частотам и волновым числам:

$$p_{\text{атм}} = \int\limits_{\mathbf{k}}\int\limits_{\omega} Q(\mathbf{k},\ \omega) \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]\, d\mathbf{k}\, d\omega. \tag{2.41}$$

Вообще говоря, из-за случайности $p_{\text{атм}}$ интеграл Фурье необходимо заменить на интеграл Фурье—Стильтьеса, однако при малой величине флюктуаций спектральные амплитуды волн меняются достаточно медленно и их представление интегралом Фурье не приводит к заметным ошибкам. Считая флюктуации атмосферного давления стационарными и однородными, можно связать Q с пространственно-временным спектром флюктуаций давления Π:

$$\overline{Q(\mathbf{k},\ \omega)\, Q^*(\mathbf{k}',\ \omega')} = \Pi(\mathbf{k},\ \omega)\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\, \delta(\omega - \omega'). \tag{2.42}$$

Аналогично представим возвышение водной поверхности:

$$\eta = \int\limits_{\mathbf{k}}\int\limits_{\omega} A(\mathbf{k},\ \omega,\ t) \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)]\, d\mathbf{k}\, d\omega, \tag{2.43}$$

где, однако, учтем слабую зависимость спектральной амплитуды от времени, связанную с действием ветра. С помощью (1.14)—(1.16) и (2.40) находим соответствующее выражение для потенциала:

$$\Phi = \int\limits_{\mathbf{k}}\int\limits_{\omega} \frac{1}{k}\left(\frac{\partial A}{\partial t} - i\omega A\right) \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t) + kz]\, d\mathbf{k}\, d\omega. \tag{2.44}$$

Подстановка (2.41)—(2.44) в (2.40) позволяет получить уравнение для A:

$$2i\omega\, \partial A/\partial t + (\omega^2 - gk) A = Qk/\rho, \tag{2.45}$$

где ввиду медленности изменения амплитуды мы пренебрегли членом $\partial^2 A/\partial t^2$. Решение уравнения (2.45) с нулевыми начальными условиями находится элементарно:

$$A(\mathbf{k},\ \omega,\ t) = \frac{kQ(\mathbf{k},\ \omega)}{\rho(gk - \omega^2)}\left[\exp\left(i\,\frac{(\omega^2 - gk)\, t}{2\omega}\right) - 1\right]. \tag{2.46}$$

С помощью A можно найти пространственно-временной спектр возвышения уровня по формуле, аналогичной (2.42):

$$\overline{A(\mathbf{k},\ \omega,\ t)\, A^*(\mathbf{k}',\ \omega',\ t)} = S(\mathbf{k},\ \omega,\ t)\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}')\, \delta(\omega - \omega'). \tag{2.47}$$

Он оказывается равным

$$S(\mathbf{k}, \omega, t) = \frac{4k^2 \Pi(\mathbf{k}, \omega)}{\rho^2 (gk - \omega^2)^2} \sin^2\left(\frac{\omega^2 - gk}{4\omega} t\right). \tag{2.48}$$

Как видим, пространственно-временной спектр максимален в окрестности дисперсионного соотношения $\omega = \sqrt{gk}$, т. е. генерация волн пульсациями атмосферного давления приводит к генерации именно волновых движений, неволновые компоненты остаются малыми. Для вычисления пространственного спектра волнения в соответствии с (2.9) необходимо проинтегрировать (2.48) по частоте. Учитывая близость ω к $\sqrt{gk}$ в этой формуле, можно заменить $\omega^2 - gk \simeq 2\sqrt{gk}(\omega - \sqrt{gk})$, тогда возникающие интегралы становятся табличными и окончательно получаем

$$S(\mathbf{k}, t) = [\pi kt/(2\rho^2 g)]\, \Pi(\mathbf{k}, \omega = \sqrt{gk}). \tag{2.49}$$

Итак, при воздействии флюктуаций давления спектр волнения растет линейно со временем (результат Филлипса). Фактически, дифференцируя (2.49) по времени, мы находим первую составляющую функции G, отвечающую данному механизму генерации ветрового волнения:

$$G_\Phi = [\pi k/(2\rho^2 g)]\, \Pi(\mathbf{k}, \omega = \sqrt{gk}). \tag{2.50}$$

К сожалению, сюда входит пространственно-временной спектр пульсаций давления, прямые измерения которого отсутствуют.

В настоящее время принято считать, что механизм Филлипса имеет значение только на самом начальном этапе развития ветрового волнения, в дальнейшем его «забивают» более эффективные механизмы.

Взаимодействие волн с воздушным потоком. Развитие ветрового волнения изменяет структуру воздушного потока над волнами и как следствие меняет флюктуации атмосферного давления, что в свою очередь сказывается на энергии, передаваемой волне. Рассмотрим здесь простейшую теорию явления в случае ламинарного воздушного потока, движущегося с постоянной скоростью W без флюктуаций. В этом случае движение в обеих соприкасающихся средах, т. е. в воде и в воздухе, является потенциальным и описывается уравнением Лапласа (1.14) (для определенности $\varphi_а$ — потенциал течения в атмосфере и $\varphi_в$ — в воде) с кинематическими

$$\partial\eta/\partial t + W\, \partial\eta/\partial x = \partial\varphi_а/\partial z; \quad \partial\eta/\partial t = \partial\varphi_в/\partial z \quad (z = 0) \tag{2.51}$$

и динамическими граничными условиями

$$\rho_а (\partial\varphi_а/\partial t + W\, \partial\varphi_а/\partial x + g\eta) = \rho_в (\partial\varphi_в/\partial t + g\eta). \tag{2.52}$$

Ввиду отсутствия внешних сил, воздействующих на систему, естественно разложить искомые функции, соответствующие свободным волнам, в интегралы Фурье только по пространственным переменным:

$$\eta = \int A(\mathbf{k},\ t) \exp(i\mathbf{kr})\, d\mathbf{k};$$

$$\varphi_а = \int \Phi_а(\mathbf{k},\ t) \exp(i\mathbf{kr} - kz)\, d\mathbf{k}; \qquad (2.53)$$

$$\varphi_в = \int \Phi_в(\mathbf{k},\ t) \exp(i\mathbf{kr} + kz)\, d\mathbf{k}.$$

Подстановка (2.53) в кинематические условия (2.51) позволяет найти $\Phi_а$ и $\Phi_в$, а затем с помощью динамического условия (2.52) получить уравнение для A, где учтено, что $\rho_а \ll \rho_в$:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + 2iWk_x \frac{\rho_а}{\rho_в} \frac{\partial A}{\partial t} + gkA = 0. \qquad (2.54)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$A = A_0 \exp(-i\omega t), \qquad (2.55)$$

где

$$\omega = (\rho_а/\rho_в)\, Wk_x \pm \sqrt{gk - (\rho_а/\rho_в)\, W^2 k_x^2}. \qquad (2.56)$$

Как видим, наличие воздушного потока изменяет дисперсионное соотношение, особенно в области коротких волн, когда в ω появляется мнимая часть, связанная с отрицательным значением подкоренного выражения в (2.56). Наибольший интерес представляет случай, когда $\operatorname{Im} \omega < 0$; тогда, как следует из (2.55), амплитуда нарастает экспоненциально:

$$A(\mathbf{k},\ t) = A_0(\mathbf{k}) \exp(\beta t/2), \qquad (2.57)$$

с инкрементом

$$\beta = 2\sqrt{(\rho_а/\rho_в)\, W^2 k_x^2 - gk}. \qquad (2.58)$$

Этот механизм усиления волнения (механизм неустойчивости Кельвина—Гельмгольца) имеет простую физическую интерпретацию, данную А. Эйнштейном. Допустим, что возникло флюктуационное изменение уровня воды — появился горб. Воздушный поток вынужден обтекать его, при этом возрастает скорость потока (линии тока в потоке сгущаются над горбом) и, в силу теоремы Бернулли, уменьшается давление над горбом. Возникает подъемная сила и, когда она превысит силу тяжести, горб начнет возрастать. Наиболее сильные изменения происходят над мелкомасштабными горбами, поэтому механизм неустойчивости Кельвина—Гельмгольца проявляется именно для коротких волн. Этот механизм приводит к более быстрому росту амплитуды волн по сравнению с механизмом Филлипса, который в сущности служит «затравкой» и определяет величину A_0. С помощью (2.57) теперь нетрудно вычислить спектр волнения; в области неустойчивости он равен

$$S(\mathbf{k},\ t)=S(\mathbf{k},\ 0)\exp(\beta t). \tag{2.59}$$

Дифференцируя S по t, мы вычисляем фактически правую часть в (2.37):

$$G_{\mathrm{M}}=\beta S(\mathbf{k},\ t). \tag{2.60}$$

Обсудим более подробно величину β. В рамках данной теории $\beta\neq0$ при сколь угодно малых скоростях ветра, правда, область неустойчивости смещается в коротковолновый диапазон. Можно показать, что учет капиллярности приводит к появлению порога неустойчивости, зависящего от скорости ветра, а именно, неустойчивость возникает только при скоростях ветра, превышающих 6 м/с. Разумеется, модель постоянного по высоте ветра над волнами не является реалистической, необходимо учесть вертикальный сдвиг скорости потока. При этом нарушаются условия потенциальности поля скорости в атмосфере и нужно вернуться к исходным уравнениям Эйлера. Соответствующие выкладки проделаны Майлсом, получившим следующее выражение для величины β:

$$\beta=\frac{\pi\rho_a\omega}{2\rho_{\text{в}}g}\,\frac{(d^2W/\partial z^2)\,z_c}{(dW/\partial z)\,z_c}\left(\frac{\psi(z_c)}{\psi(0)}\right)^2, \tag{2.61}$$

где ψ — функция тока ($W=\partial\psi/\partial z$); z_c — высота слоя совпадения; $W(z)=c_\Phi=\omega/k$. Физически механизм генерации волн ветром в данном случае эквивалентен взаимодействию волн с частицами воздушного потока (поскольку частицы жидкие, то естественно рассматривать соответствующие им «элементы» завихренности, которые характеризуют каждую частицу и в силу теоремы Томсона сохраняют величину циркуляции), бегущими с почти той же скоростью. Для ускорения необходимо, чтобы число частиц, опережающих волну и отдающих ей энергию, превышало число частиц, отстающих от волны. Так как завихренность каждой частицы характеризуется величиной dW/dz, то разность между числом первых и вторых частиц пропорциональна d^2W/dz^2, именно от этой величины зависит инкремент Майлса (2.61). Этот механизм получил название механизма Майлса. Он позволяет получить более реалистические характеристики волнения, чем механизм Кельвина—Гельмгольца. В дальнейшем предпринимались попытки более полного описания механизма генерации и развития ветрового волнения. Это привело к появлению в (2.61) членов, описывающих плохо измеряемые факторы, поэтому на практике для определения β используют эмпирические формулы. Одна из простейших аппроксимаций принадлежит Барнетту:

$$\beta=\frac{5\rho_a\omega}{2\pi\rho_{\text{в}}}\left(\frac{\mathbf{k}W}{\omega}-1{,}9\right). \tag{2.62}$$

Из нее хорошо видно, что максимум инкремента приходится на коротковолновую область.

Диссипация ветровых волн. Диссипация энергии ветровых волн на глубокой воде обусловлена турбулентностью воды и обрушением гребней волн. Турбулентность параметризуют по аналогии с молекулярной вязкостью формулой

$$G_g = -4\nu_т k^2 S(\mathbf{k},\ t), \tag{2.63}$$

где $\nu_т$ — коэффициент турбулентной вязкости. Из соображений размерности вытекает следующая оценка: $\nu_т \sim W^3/g$, численный коэффициент в которой имеет порядок $2 \cdot 10^{-5}$, однако для турбулентной вязкости используются и другие аппроксимации.

Процесс обрушения волн еще не удается описать теоретически. Поэтому на практике используют то обстоятельство, что из-за обрушения энергия волн не может превышать определенного значения, и потери энергии на обрушение параметризуют нелинейным слагаемым

$$G_0 = -\alpha(\mathbf{k})\, S^2(\mathbf{k},\ t), \tag{2.64}$$

где α выбирается из условия, требующим, чтобы решение уравнения энергетического баланса (2.37) при $t \to \infty$ не приводило к превышению уровня спектральной плотности над некоторым заданным, определяемым, например, спектром Филлипса.

Нелинейные взаимодействия. Уже указывалось, что энергоснабжение волн происходит в основном в сравнительно коротковолновом диапазоне длин волн. По мере того как амплитуда волн растет, они в результате нелинейных взаимодействий могут передавать энергию более длинным волнам. Описание нелинейных взаимодействий в широком диапазоне частот представляют собой сложную задачу, так как короткие волны сильно нелинейны. Однако энергонесущие волны слабонелинейны, — как уже указывалось, их крутизна не превышает 10^{-1}, поэтому именно крутизна может быть использована в качестве малого параметра при разложении волнового поля.

Для получения энергетического спектра естественно воспользоваться уравнением для спектральных амплитуд, которое получается из исходных уравнений после применения преобразования Фурье. Пространственный спектр волнения в случае его однородности можно найти из соотношения

$$\overline{A(\mathbf{k},\ t)\, A^*(\mathbf{k}',\ t)} = S(\mathbf{k},\ t)\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \tag{2.65}$$

Уравнение для S получается дифференцированием (2.65) с использованием уравнений для спектральных амплитуд. Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательное выражение для искомого уравнения:

$$\frac{\partial S(\mathbf{k})}{\partial t} = 4\pi \iiint R \left\{ \left[\frac{S(\mathbf{k}_1)}{\omega_1} + \frac{S(\mathbf{k})}{\omega} \right] \frac{S(\mathbf{k}_2)}{\omega_2} \frac{S(\mathbf{k}_3)}{\omega_3} - \right.$$
$$\left. - \frac{S(\mathbf{k}_1)\, S(\mathbf{k})}{\omega_1\, \omega} \left[\frac{S(\mathbf{k}_3)}{\omega_3} + \frac{S(\mathbf{k}_2)}{\omega_2} \right] \right\} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \times$$
$$\times\, \delta(\omega + \omega_1 - \omega_2 - \omega_3)\, d\mathbf{k}_1\, d\mathbf{k}_2\, d\mathbf{k}_3 = G_N. \tag{2.66}$$

Его правая часть и определяет нелинейную часть функции G в уравнении (2.37). Функция G_N сложным образом зависит от всех волновых векторов взаимодействующих волн, и ее детальное выражение нам в дальнейшем не понадобится.

Здесь мы перечислили все основные механизмы генерации, диссипации и взаимодействия ветровых волн. В реальных условиях эти процессы протекают совместно, так что трудно разделить G на основные составляющие. Тем не менее пока это единственно возможный путь исследования ветрового волнения и, исходя из эмпирических данных, выражения для G часто модифицируют; различные представления функции G содержатся в [1, 3].

2.4. Насыщение спектров ветрового волнения

Обсудим применение спектральных методов для анализа ветрового волнения в бесконечно глубоком море, не имеющем течений. При этом ω является функцией только волнового числа и с учетом (2.39) $d\mathbf{k}/dt=0$. Тогда уравнение энергетического баланса приобретает следующую форму:

$$\partial S/\partial t + \mathbf{c}_{\text{гр}} \nabla S = G. \tag{2.67}$$

Здесь мы рассматриваем случай однородного в пространстве волнения, когда спектр является функцией только $\mathbf{k}$ и t. С учетом всех механизмов, определяющих функцию G, уравнение (2.67) записывается в виде

$$\partial S/\partial t = G_{\Phi}(\mathbf{k}) + [\beta(\mathbf{k}) - 4\nu_{\text{т}} k^2]\, S - \alpha(\mathbf{k})\, S^2 + G_N\{S\}. \tag{2.68}$$

Даже в такой простейшей форме уравнение (2.68) является нелинейным и интегродифференциальным, что затрудняет поиск его решений. Особенно много неприятностей доставляет член G_N, который представляет собой трехкратный интеграл и является функцией трех переменных k_x, k_y, t. Поэтому в большинстве случаев функцией G_N пренебрегают, а соответствующие методы решений (2.68) с учетом G_N еще только создаются. Здесь мы рассмотрим несколько простейших схем расчета ветрового волнения.

Слабое волнение. Если ветер достаточно слаб (около 1 м/с), то работает механизм Филлипса и высота волны остается малой, тогда (2.68) упрощается:

$$\partial S/\partial t = G_{\Phi} - 4\nu_{\text{т}} k^2 S. \tag{2.69}$$

Это уравнение легко решается:

$$S(\mathbf{k},\ t) = S_{\infty}(\mathbf{k})\,[1 - \exp(-4\nu_{\text{т}} k^2 t)], \tag{2.70}$$

где S_{∞} представляет собой спектр установившегося волнения

$$S_{\infty}(\mathbf{k}) = G_{\Phi}(\mathbf{k})/(4\nu_{\text{т}} k^2). \tag{2.71}$$

Из (2.70) вытекает, что характерное время развития волнения определяется вязкостью: $T_{\Phi} \sim 1/(4\nu_{\text{т}} k^2)$, и оно убывает с уменьшением длины волны. Поэтому сначала насыщается коротковолновая часть спектра, а затем более длинноволновая (рис. 2.1). Форму установившегося спектра S_∞ найти не удается, поскольку неизвестен явный вид пространственно-временного спектра флюктуаций атмосферного давления [см. (2.50)]. Можно предположить, что при слабом ветре существенна его порывистость, а также играет роль разница температур между водой и воздухом, влияющая на неконвективные движения в приповерхностном слое. Поэтому уни-

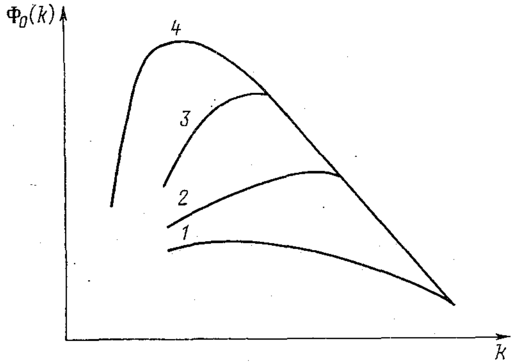


Рис. 2.1. Развитие спектра волнения при слабом ветре.

1) $t=0$; 2) $t=t_1$; 3) $t=t_2>t_1$; 4) $t\to\infty$.

версальные выражения для спектра волнения вряд ли могут существовать. Более важным для прикладных задач является вывод о быстром насыщении мелкомасштабной части волнения, сделанный выше.

Нелинейные «ограничительные» модели развития волнения. С увеличением скорости ветра механизм генерации волн Филлипса сменяется механизмом Майлса, приводящим к экспоненциальному росту спектральных компонентов. На этой стадии можно пренебречь G_Φ и опустить $\nu_т$ (фактически $\nu_т$ учитывается в эмпирических формулах для β). Если не рассматривать пока нелинейные взаимодействия, то уравнение (2.68) сводится к виду

$$\partial S/\partial t=\beta(1-S/S_\infty)S, \tag{2.72}$$

где S_∞ — спектр насыщения (ограничения) ветрового волнения.

Решение уравнения (2.72) находится в явном виде

$$S(\mathbf{k},\ t)=\frac{S_\infty(\mathbf{k})\,S_0(\mathbf{k})\exp(\beta t)}{S_\infty+S_0[\exp(\beta t)-1]}. \tag{2.73}$$

Здесь S_0 — начальный спектр волнения. Обратим внимание на то, что если $S_0\equiv 0$, то спектр в любой момент времени равен нулю, однако это состояние неустойчиво и флюктуации спектра, вызываемые, например, с помощью механизма Филлипса, быстро нарастают. При $t\to\infty$ $S\to S_\infty$ независимо от начального вида спектра. Характерное время развития волнения в рамках данной модели определяется инкрементом Майлса $T_М\sim\beta^{-1}$. Поскольку β

растет с ростом k, то и в этой модели также быстрее всех насыщаются мелкомасштабные волны, развитие спектра здесь идет по той же схеме, что и в линейной модели (рис. 2.1).

Недостатком данной модели является то, что в ней априори заложена информация о виде установившегося спектра S_∞. Фактически модель необходима только для расчета переходного процесса — развития спектра.

Нелинейные взаимодействия спектральных компонентов волнения. Уже из приведенных выше результатов следует, что мелкомасштабная часть спектра быстро выходит на установившийся режим. По мере того как волны становятся большими, они в результате нелинейных взаимодействий могут подпитывать другие энергонесущие спектральные компоненты, — такой механизм энергоснабжения может конкурировать с прямыми механизмами типа Майлса. Рассмотрим поэтому уравнение (2.68), учитывающее все процессы. Его полное решение возможно только с применением ЭВМ. Есть, однако, обстоятельство, позволяющее упростить уравнение (2.68). Как уже указывалось, генерация и диссипация ветровых волн происходят в коротковолновом диапазоне длин волн. Развитие энергонесущих волн происходит, по-видимому, главным образом в результате нелинейной перекачки энергии из коротковолнового диапазона. Но тогда для энергонесущей области в (2.68) можно оставить только G_N, а учет механизмов генерации и диссипации может быть проведен введением граничных условий при $k \gg g/W^2$ (формально при $k \to \infty$). Такая ситуация типична при решении задач турбулентности, когда отыскивается колмогоровский спектр развитой турбулентности в инерционном интервале, разделяющем области ее генерации и диссипации. В этом случае определяющим является поток энергии по спектру. Его интенсивность определяется с помощью граничных условий при $k \to 0$ (в области накачки). Ситуация с волнами на поверхности воды существенно сложнее. Во-первых, интервалы генерации и диссипации практически совпадают и они расположены правее интересующего нас энергонесущего диапазона. Во-вторых, здесь имеется несколько законов сохранения, а именно для энергии $\int S d\mathbf{k}$, импульса $\int \mathbf{k} S d\mathbf{k}$ и волнового действия $\int (S/\omega) d\mathbf{k}$, причем каждому из них соответствует свой сохраняющийся поток. Как показали исследования В. Е. Захарова и М. М. Заславского, в данном случае реализуется только один спектр, удовлетворяющий потоку волнового действия в пространстве модулей волновых векторов. Оставив в правой части уравнения (2.68) только G_N и из соображений размерности найдя поток волнового действия, они получили

$$\Phi(\omega) \simeq 10^{-5} W^{4/3} g^{2/3} \omega^{11/3}. \tag{2.74}$$

Данный спектр неплохо объясняет наблюдаемые спектры волнения вблизи энергонесущего пика, поэтому формулой (2.74) рекомендуется пользоваться при $\tilde{\omega}=\omega W/g>1$. В области $\tilde{\omega}<1$ полагают $\Phi=0$.

2.5. Трансформация ветровых волн на мелководье

В главе 1 мы уже рассматривали трансформацию монохроматической волны при медленном изменении глубин. Здесь мы учтем, что ветровое волнение представляет собой спектр волн и его эволюция описывается уравнением энергетического баланса (2.37). Для выделения эффектов трансформации волн на мелководье «в чистом виде» мы пренебрежем здесь функцией G, описывающей генерацию и нелинейные взаимодействия поверхностных волн. Тогда уравнение (2.37) приобретает форму $dS/dt=0$ и легко интегрируется в общем виде:

$$S(\mathbf{k},\ \mathbf{r},\ t)=S_{\text{н}}[\mathbf{k}_{\text{н}}(\mathbf{k},\ \mathbf{r},\ t),\ \mathbf{r}_{\text{н}}(\mathbf{k},\ \mathbf{r},\ t)], \tag{2.75}$$

где $S_{\text{н}}(\mathbf{k}_{\text{н}},\ \mathbf{r}_{\text{н}})$ — начальный спектр волнения, а связь между текущими значениями $\mathbf{k}$, $\mathbf{r}$ и начальными $\mathbf{k}_{\text{н}}$, $\mathbf{r}_{\text{н}}$ определяется уравнениями (2.39). Простым дифференцированием с использованием (2.39) легко доказать, что частота ω сохраняется при изменении глубины. Этот факт показывает, что в задачах трансформации волн естественно оперировать с частотно-угловыми спектрами волнения. Переход к ним осуществляется по формуле

$$S(\omega,\ \theta)=k\,(dk/d\omega)\,S(k,\ \theta) \tag{2.76}$$

с подстановкой в правую часть k из дисперсионного соотношения. Кроме того, естественно решать не начальную задачу, а граничную, т. е. считать, что на какой-то изобате h $(\mathbf{r}_{\text{н}})$ (обычно на бесконечной глубине) задан спектр волнения и требуется пересчитать его на другие глубины. В этом случае спектр не зависит от времени, и с учетом (2.75) получаем следующую формулу для преобразования частотно-углового спектра:

$$S(\omega,\ \theta,\ \mathbf{r})=(\partial k^2/\partial k_{\text{н}}^2)\,S_{\text{н}}\left[\omega,\ \theta_{\text{н}}(\theta,\ \mathbf{r}),\ \mathbf{r}_{\text{н}}(\theta,\ \mathbf{r})\right], \tag{2.77}$$

где связь между k и $k_{\text{н}}$ вытекает из дисперсионного соотношения

$$k\,\mathrm{th}\,[kh(\mathbf{r})]=k_{\text{н}}\,\mathrm{th}\,[k_{\text{н}}h(\mathbf{r}_{\text{н}})]. \tag{2.78}$$

Как видим, основные трудности при расчетах связаны с построением лучей, вдоль которых движутся волны: $\mathbf{r}=\mathbf{r}(\mathbf{r}_{\text{н}},\ \theta_{\text{н}})$. Рассмотрим несколько важных примеров.

Пусть все изобаты параллельны берегу и волна распространяется с глубокой воды $(k_{\text{н}}h_{\text{н}}\gg 1)$ на мелкую $(kh\ll 1)$. В этом случае (2.78) упрощается: $k(x)=\sqrt{k_{\text{н}}/h(x)}$. Кроме того, ввиду одномерности волнения (все волны бегут в одну сторону) $S(k, \theta) = k^{-1}S_0(k)\,\delta(\theta)$, так что формула (2.77) заменяется на

$$S(\omega, h) = (\partial k/\partial k_{н})\, S_{н}(\omega). \tag{2.79}$$

В результате получаем окончательную формулу для спектра на мелкой воде:

$$S(\omega, h) = [1/(2\omega)] \sqrt{g/h}\, S_{н}(\omega) \tag{2.80}$$

(очевидно, что такая же формула имеет место для спектра $\Phi(\omega)$). В частности, если на глубокой воде спектр описывается выражением Пирсона—Московица (2.35), то на мелководье имеем

$$\Phi(\omega, h) = 4{,}05 \cdot 10^{-3} \sqrt{g/h}\, g^2\omega^{-6} \exp\left[-0{,}74 g^4/(\omega^4 W^4)\right]. \tag{2.81}$$

Как видим, при уменьшении глубины спектральный уровень возрастает пропорционально $h^{-1/2}$ [на очень малой глубине (2.81) не применимо, так как вблизи уреза существенны эффекты обрушения и отражения], поэтому средняя высота волны $\bar{H} \sim h^{-1/4}$, как это и следовало ожидать из закона Грина. Подчеркнем, что на мелководье спектр становится у́же и, кроме того, несколько уменьшается частота пика спектра, что ведет к некоторому (правда, малому) увеличению среднего периода волн в прибрежной зоне по сравнению с глубоководной. Аналогично находится пространственный спектр. Легко показать, что на мелководье спектр смещается в область больших k и соответствует уменьшению средней длины волны; этот эффект хорошо известен для регулярной волны.

Другой пример — волнение неодномерное, однако ветер дует в сторону берега и угловое распределение волнения на глубокой воде описывается законом Артура:

$$Q(\theta_{н}) = (2/\pi)\cos^2\theta_{н}. \tag{2.82}$$

В этом случае формула (2.77) с учетом $k = \sqrt{k_{н}/h}$ принимает вид

$$\Phi(\omega, \theta, h) = [g/(2h\omega^2)]\, \Phi_{н}(\omega)\, Q[\theta_{н}(\theta, \omega, h)], \tag{2.83}$$

где функция $\theta_{н}(\theta, \omega, h)$ находится с помощью закона Снеллиуса $k\sin\theta = k_{н}\sin\theta_{н}$, выражающего сохранение вдольберегового компонента волнового числа. Если учесть, что $k = \omega/\sqrt{gh}$, а $k_{н} = \omega^2/g$, то закон Снеллиуса упрощается:

$$\sin\theta_{н} = (1/\omega)\sqrt{(g/h)}\sin\theta, \tag{2.84}$$

и окончательное выражение для спектра принимает вид

$$\Phi(\omega, \theta, h) = [g/(\pi h\omega^2)]\, \Phi_{н}(\omega)\, \{1 - [g/(\omega^2 h)]\sin^2\theta\}. \tag{2.85}$$

Уровень спектра на мелководье здесь также возрастает. Новым и принципиальным моментом является резкое сужение углового спектра. Его ширина определяется при равенстве нулю фигурной скобки в (2.85) и на малой глубине равна $(\Delta\theta)_{\text{макс}} \simeq \simeq 2\omega^2 h/g$. Обратим внимание на то, что ширина спектра зависит от частоты и особенно сильно сужение спектра происходит в области энергонесущих волн.

Приведенные здесь примеры наглядно иллюстрируют трансформацию спектра на мелководье. С помощью приведенных формул можно рассмотреть и более сложные случаи, когда ветровое волнение развивается в море конечной глубины и отдельные спектральные компоненты могут распространяться в сторону увеличивающейся глубины. Тогда волновое число в соответствии с (2.78) будет уменьшаться и, следовательно, угол θ, как следует из закона Снеллиуса, будет расти. Это означает, что ширина спектра при увеличении глубины возрастает, а часть лучей заворачивает назад и возвращается на мелководье. При расчетах волнового поля в точках поворота лучи часто пересекаются (такие точки называются каустиками), что приводит к возрастанию волновых амплитуд в этих местах. Все это указывает на необходимость тщательного построения лучей в реальной акватории.

2.6. Трансформация спектров ветрового волнения на течениях

Будем считать, что течения постоянны по глубине и неизменны во времени, но при этом медленно изменяются в направлении горизонтальных координат. В этом случае частота волны определяется формулой

$$\omega = \Omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}) + \mathbf{k}\mathbf{U}(\mathbf{r}), \quad \Omega = \sqrt{gk\,\text{th}\,[kh(\mathbf{r})]}. \tag{2.86}$$

Поскольку частота волны от времени не зависит, то спектр волн и его эволюция по-прежнему описываются уравнением энергетического баланса (2.37), где, однако, спектральная плотность волнения должна рассчитываться с учетом взаимодействия волн и течений. На практике обычно пользуются энергетическим спектром, определяющим спектр возвышения морской поверхности. При изучении регулярных волн мы показали, что переход от «полной энергии» к энергии возвышений осуществляется через отношение частот: $E_{\text{полн}}/\omega = E_\eta/\Omega$. Очевидно, что такие связи сохраняются и для спектральных компонентов. С учетом постоянства ω, уравнение (2.37) может быть переписано в терминах уравнения для волнового действия:

$$d\,(S/\Omega)/dt = G_{\text{д}}, \tag{2.87}$$

где $G_{\text{д}} = G/\omega$, а $S(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$, как и ранее, представляет собой спектр возвышений водной поверхности. Все производные вычисляются с использованием полной частоты ω:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{S}{\Omega}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S}{\Omega}\right) - \frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\nabla\left(\frac{S}{\Omega}\right) - \nabla\omega\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}\left(\frac{S}{\Omega}\right). \tag{2.88}$$

Форма лучевых уравнений (2.39) не меняется.

Для простоты мы ограничимся рассмотрением волн на глубокой воде и пренебрежем правой частью в (2.87). В этом случае оно легко интегрируется:

$$S(\mathbf{k},\ \mathbf{r},\ t)/\sqrt{gk} = S_{\text{н}}[\mathbf{k}_{\text{н}}(\mathbf{k},\ \mathbf{r},\ t),\ \mathbf{r}_{\text{н}}(\mathbf{k},\ \mathbf{r},\ t)]/\sqrt{gk_{\text{н}}}. \qquad (2.89)$$

По заданному пространственному спектру можно определить частотно-угловой спектр (2.76), если подставить в правую часть k из уравнения (2.86).

Приведенные выше формулы во многом такие же, как и при изучении трансформации волн на мелководье. Принципиальным

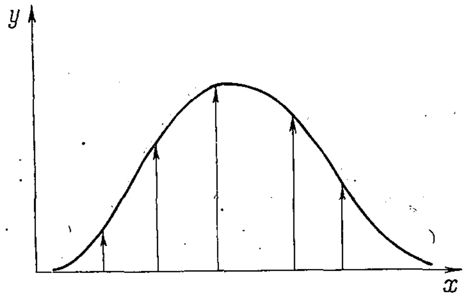


Рис. 2.2. Эпюра течения «струйного» типа.

здесь является то, что меняется не только пространственный спектр, но и частотный. Полный анализ изменчивости спектра на произвольном течении можно выполнить только с применением ЭВМ, поэтому рассмотрим несколько простых примеров, которые важны для понимания эффектов трансформации волн. Пусть течение представляет собой «струю» в океане, скорость течения направлена по оси y, а ее модуль меняется поперек струи (вдоль оси x); эпюра скоростей течения изображена на рис. 2.2. Ветровые волны распространяются из области $x < 0$, причем волнение одномерное и генеральное направление распространения волн (ветра) составляет угол $\theta_{\text{н}}$ с осью x. В этом случае лучи по-прежнему определяются законом Снеллиуса

$$k \sin\theta = k_{\text{н}} \sin\theta_{\text{н}}, \qquad (2.90)$$

выражающего сохранение продольного компонента волнового числа, угол θ отсчитывается от оси x. Дисперсионное соотношение (2.86) с учетом сохранения частоты принимает вид

$$\sqrt{gk} + kU\sin\theta = \sqrt{gk_{\text{н}}} \qquad (2.91)$$

и позволяет выразить $k_{\text{н}}$ через k. Мы, однако, сначала более подробно рассмотрим зависимость k и θ от $k_{\text{н}}$, позволяющую построить волновой луч. Из (2.90) и (2.91) следует

$$\sqrt{gk} = \sqrt{gk_{\text{н}}} - k_{\text{н}}U\sin\theta_{\text{н}}. \qquad (2.92)$$

Отсюда видно, что движение волны по течению ($\theta_{\text{н}} > 0$) и против течения ($\theta_{\text{н}} < 0$) (в смысле продольного компонента волнового вектора) принципиально различно. Если волна движется против течения, то волновое число k возрастает, а угол θ уменьшается, т. е. гребни волны разворачиваются вдоль течения. При переходе волны через ось течения волновое число k убывает, а θ возрастает и при выходе из течения оба параметра возвращаются к своим первоначальным значениям. Следовательно, и спектральные уровни компонентов, движущихся против течения, при выходе из течения принимают свои первоначальные значения и исходный спектр не деформируется.

Другая ситуация реализуется для волн, движущихся по течению. С увеличением скорости течения U волновое число убывает, а угол θ возрастает и в некоторой точке может принимать предельное значение $\pi/2$. Это означает, что волновой луч разворачивается вдоль течения, а затем должен повернуть назад (в сторону $x < 0$). Следовательно, не все волны могут преодолеть течение и частично отражаются им. По заданным $k_н$ и $\theta_н$ в точке отражения из (2.90) легко определить $k_* = k_н \sin\theta_н$. С его помощью из (2.92) для каждого $k_н$ можно найти минимальную осевую скорость течения, при которой течение отражает волны:

$$U_{мин} = \sqrt{\frac{g}{k_н}}\,\frac{1-\sqrt{\sin\theta_н}}{\sin\theta_н} = \frac{g}{\omega}\,\frac{1-\sqrt{\sin\theta_н}}{\sin\theta_н}, \tag{2.93}$$

или, наоборот, при заданном $U_{мин}$ нетрудно найти частоты волн, которые отражаются от течения:

$$\omega > \omega_{мин} = \frac{g}{U_{мин}}\,\frac{1-\sqrt{\sin\theta_н}}{\sin\theta_н}. \tag{2.94}$$

Полученные соотношения позволяют рассчитать спектр волнения вне зоны течения. С ее подветренной стороны в спектре исчезают все компоненты с частотами $\omega > \omega_{мин}$, а остальные остаются без изменения. С наветренной стороны к исходному спектру добавляются компоненты с $\omega > \omega_{мин}$, распространяющиеся в сторону $x < 0$. В случае $\theta_н > 0$ описанная фильтрация волн течением приводит к изменению средних характеристик волнения: на подветренной стороне период растет, а на наветренной стороне убывает.

Рассмотрим теперь картину трансформации двумерного волнения на струе в случае, если генеральное распространение волн совпадает с осью x, а начальный частотно-угловой спектр имеет вид

$$\Phi_н(\omega,\ \theta_н) = \Phi_н(\omega)\, Q(\theta_н), \tag{2.95}$$

где принято, что $\Phi_н(\omega)$ — спектр Пирсона—Московица, а $Q(\theta_н)$ — угловой спектр Артура. Картина волновых лучей в этом случае остается прежней: компоненты, распространяющиеся под тупым углом к течению, проходят течение без изменений, а при подходе под острым углом происходит частичная фильтрация спектра. Поэтому мы сразу можем написать ответ для спектра волнения, прошедшего течение:

$$\Phi(\omega,\ \theta) = \begin{cases} \Phi_н(\omega)\,Q(\theta) & \text{при } \theta \leqslant 0; \\ \left.\begin{array}{ll} \Phi_н(\omega)\,Q(\theta) & \text{при } \omega < \omega_{мин} \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_{мин} \end{array}\right\} & \theta > 0. \end{cases} \tag{2.96}$$

Здесь уже, как видим, частотно-угловой спектр не распадается на произведение частотного и углового спектров. В случае очень сильного течения отсюда следует почти полная фильтрация «половинки» спектра, компоненты которого распространяются под острым углом к течению. Меняется также генеральное направление волн, оно поворачивает в сторону, противоположную направлению течения, составляя в пределе (при очень сильных течениях) 45° с направлением ветра.

Отметим еще одно важное обстоятельство: в рамках данной модели трансформированный спектр волнения вне течения остается неизменным. На самом деле действие ветра приводит к восстановлению первоначального спектра на некотором удалении от струи. В результате область влияния струи на волны может оказаться существенно больше, чем область, занятая самой струей. Этот факт затрудняет выделение области течения по измерениям ветрового волнения, проводимых контактными или дистанционными способами.

Полученные выше решения относятся к спектрам волнения вне течения. Для изучения спектра в зоне течения необходимо снова вернуться к уравнению (2.89), которое мы перепишем в виде

$$\Phi(\omega,\ \theta) = \frac{g^{5/2}k^{3/2}}{2\omega^4\left(\sqrt{g/k}/2 + U\sin\theta\right)}\,\Phi_н(\omega,\ \theta_н). \tag{2.97}$$

Величину k вычислим из (2.91):

$$k = \frac{g}{4U^2\sin^2\theta}\left[-1 + \sqrt{1 + \frac{4\omega U\sin\theta}{g}}\right]^2, \tag{2.98}$$

наконец, связь между $\theta_н$ и θ найдем из (2.90):

$$\theta_н = \pm\arcsin\left(\frac{kg}{\omega^2}\sin\theta\right) = \pm\arcsin\frac{4\sin\theta}{\left[1 + \sqrt{1 + 4U\omega\sin\theta/g}\right]^2}, \tag{2.99}$$

где знак «плюс» соответствует волне, проходящей через течение, а «минус» — отраженной от течения.

После несложных преобразований запишем окончательное выражение для спектра:

$$\Phi^{(\pm)}(\omega,\ \theta) = \frac{16\Phi_н(\omega,\ \theta_н)}{\sqrt{1 + 4U\omega\sin\theta/g}\left[1 + \sqrt{1 + 4U\omega\sin\theta/g}\right]^4}. \tag{2.100}$$

Общий спектр складывается из спектров проходящих и отраженных волн:

$$\Phi = \Phi^{(+)} + \Phi^{(-)}. \tag{2.101}$$

Эти формулы позволяют рассчитать спектр ветрового волнения как внутри струи, так и вне ее, где естественно получаются прежние результаты типа (2.96).

Существенно более интересная ситуация реализуется в случае, когда скорость течения меняется вдоль струи. Для простоты рассмотрим случай, когда течение направлено вдоль оси x. При этом формула (2.91) принимает вид

$$\omega = \sqrt{gk} + kU\cos\theta = \sqrt{gk_{\text{н}}}. \tag{2.102}$$

Новый эффект, возникающий здесь, связан с возможностью блокировки волн течением, их остановкой в точке, где групповая скорость обращается в нуль $d\omega/dk = \sqrt{g/k}/2 + U(x)\cos\theta = 0$. Разумеется, это возможно только на встречном течении. Отраженная волна имеет совсем другие свойства, чем падающая (мы частично обсуждали их в главе 1): при выходе из области течения волновое число такой волны становится бесконечным и она обрушивается. В случае же попутного течения эти эффекты не возникают. Волновое число трансформирующихся на течении волн находится из (2.102):

$$k = \frac{g}{4U^2\cos^2\theta}\left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{4\omega U\cos\theta}{g}}\right)^2. \tag{2.103}$$

Здесь и далее минус соответствует волнам, отраженным от течения в случае его встречного направления. После небольших преобразований расчетные формулы для спектра принимают вид

$$\Phi^{(\pm)}(\omega, \theta) = \frac{16\Phi_{\text{н}}(\omega, \theta_{\text{н}})}{\sqrt{1 + 4U\omega\cos\theta/g}\,\left[1 \pm \sqrt{1 + 4U\omega\cos\theta/g}\right]^4}, \tag{2.104}$$

где

$$\theta_{\text{н}} = \arcsin\frac{4\sin\theta}{\left[1 \pm \sqrt{1 + 4U\omega\cos\theta/g}\right]^2}. \tag{2.105}$$

Обратим внимание, что в точке блокировки (в случае встречного течения) спектральная плотность обращается в бесконечность [особенно это видно из (2.97)]. В окрестности этой точки использовать соотношение (2.104) нельзя и здесь необходимо применять более точные решения. Однако данная бесконечность является интегрируемой и не влияет на средние характеристики волн, поэтому мы не будем приводить здесь точные результаты для области блокировки. Кроме того, в отраженной волне при удалении от точки блокировки спектр $\Phi^{(-)}$ неограниченно растет [выражение, стоящее в скобках (2.104), стремится к нулю] и отраженные волны стремятся обрушиться. Этот эффект необходимо рассматривать с учетом правой части уравнения для волнового действия (2.87). Примеры расчета трансформации спектра на встречном и попутном течениях приведены на рис. 2.3. Как и ожидалось, на попутном течении спектр падает, а на встречном — возрастает. Более подробно методика расчета трансформации волн на течениях изложена в [1, 3].

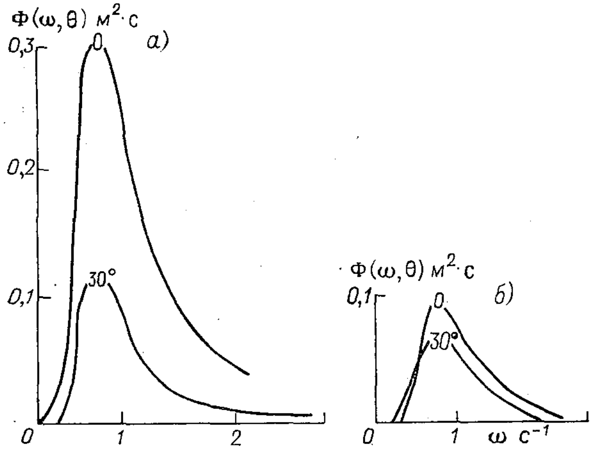


Рис. 2.3. Трансформация спектра на горизонтально неоднородном течении.

а — на встречном течении; *б* — на попутном течении.

Вопросы для самопроверки

1. Какая разница между детерминированными и случайными ветровыми волнами? Можно ли описать регулярные волны в терминах статистических характеристик?
2. Что такое пространственная и временная корреляционные функции, как их измерить на практике? Связаны ли они между собой?
3. Как связаны между собой частотный и одномерный пространственный спектры на глубокой воде? На мелкой воде?
4. Что такое автомодельные спектры ветрового волнения? Являются ли спектры Филлипса, Захарова—Заславского автомодельными?
5. Какая разница между плотностью распределения и распределением высот волн? Какими свойствами обладают эти функции?
6. Что такое обеспеченность высот волн? Почему при стремлении ее к нулю высота соответствующей волны неограниченно растет?
7. В чем заключается механизм Филлипса генерации волн пульсациями атмосферного давления? Предложите аналогичные механизмы генерации волн.
8. Опишите механизм Кельвина—Гельмгольца и физику явления. Проявляется ли он для регулярных волн или только для случайных?
9. В чем заключается механизм Майлса?
10. Принципиальна ли потенциальность течения для механизмов Филлипса, Кельвина—Гельмгольца, Майлса?
11. Может ли в результате только нелинейных взаимодействий измениться энергия волнового поля или его дисперсия?
12. В каких случаях эффекты трансформации волн на мелководье и течениях качественно похожи, а в каких — нет?
13. Пусть ветровые волны распространяются в области переменной глубины. В каких случаях угловой спектр волнения расширяется, а в каких сужается?
14. Зависит ли положение луча при трансформации на мелководье и течениях от частоты спектрального компонента волнения?

15. Возможен ли эффект блокировки волн встречным течением на мелкой воде?

Типовые упражнения

1. Подберите какую-либо отличную от (2.26) плотность распределения $P(\eta)$, удовлетворяющую только трем условиям: $\overline{\eta}=0$, $\overline{\eta^2}=\overline{H}/(2\pi)$, $\overline{\eta^3}=0$.

2. Получите для полностью развитого волнения автомодельную форму корреляционной функции.

3. Считая, что $\Phi(\omega)=\Phi_0\delta(\omega-\omega_0)$, вычислите остальные спектры и корреляционные функции.

4. Найдите связь между пространственным и одномерным пространственным спектрами в случае полностью изотропного волнения.

5. Получите аналогичную формулу для одномерного волнения.

6. Постройте графики средней высоты и периода волны в зависимости от обеспеченности.

7. Найдите автомодельную форму спектра в случае гипотетической ситуации, когда определяющими параметрами является вязкость воды и ускорение свободного падения.

8. Докажите связь между особенностями волнового поля (скачок величины, разрыв в ее производной и т. п.) и степенными асимптотиками в спектре.

9. Решите задачу о возбуждении волн на воде регулярной волной атмосферного давления вида $p_{\text{атм}}=p_0\sin(\Omega t-Kx)$.

10. Рассмотрите механизм Филлипса применительно к морю конечной глубины.

11. Получите аналогичные формулы с учетом капиллярности (глубину бассейна в этом случае считать бесконечно большой).

12. Найдите инкремент неустойчивости Кельвина—Гельмгольца при учете эффектов капиллярности.

13. Покажите в рамках уравнения (2.66), что если в начальный момент времени заданы три волны, то это обязательно приводит к генерации четвертой волны, причем ее спектр на начальном этапе пропорционален времени.

14. Проведите качественный анализ уравнения (2.69). Найдите состояние равновесия и определите его устойчивость. Дайте качественную интерпретацию Ваших выводов.

15. Рассмотрите аналогичную задачу для уравнения (2.72).

16. Считая изобаты параллельными береговой черте и $h=\alpha x^2$, постройте лучи в приближении мелкой воды; глубокой воды.

17. Найдите закон изменения средней высоты волны с глубиной при трансформации волн на мелководье в соответствии с (2.85).

18. Рассчитайте лучи в глубоком море при трансформации волны на течении струйного типа с постоянным горизонтальным сдвигом скорости.

19. Изучите трансформацию волны на течениях различной формы в приближении мелкой воды.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИЗУЧЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНЫХ И КОРРЕЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ ПОЛЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН

В разделах 2.1 и 2.2 приведены основные формулы для расчета различных статистических характеристик волнового поля. При этом большинство характеристик связано между собой. Последовательным интегрированием пространственного спектра $S(\mathbf{k})$ (как для полностью развитого волнения, так и для развивающегося) по углу или волновому числу можно рассчитать одномерный пространственный и угловой спектры. Путем использования дисперсионного соотношения для волн, с помощью (2.17) находятся частотные спектры Фурье; преобразование этих спектров определяет соответствующие корреляционные функции. Наконец, используя эмпирические функции распределения для периодов и высот волн, легко рассчитать эти характеристики с нужной обеспеченностью.

Для многих приложений важны не только характеристики возвышения водной поверхности. Так, для интерпретации данных измерителей скорости течения на различных горизонтах необходимо получить спектры горизонтальных скоростей течения. Связь между спектральными компонентами горизонтальной скорости течения и уровнем воды в приближении глубокой воды имеет вид

$$A_u(\mathbf{k}) = \omega \exp(kz)\, A(\mathbf{k}) \tag{2.106}$$

(z отсчитывается вертикально вверх), где A_u и A — спектральные амплитуды скорости течения и уровня воды. Учитывая представление (2.65) спектра через спектральную амплитуду, из (2.106) получаем:

$$S_u(\mathbf{k}) = \omega^2(k) \exp(2kz)\, S(\mathbf{k}) \tag{2.107}$$

и такие же формулы для одномерного пространственного и частотного спектров. Как видно из (2.107), с увеличением глубины высокочастотная часть спектра «срезается», а множитель ω^2 сдвигает максимум спектра в высокочастотную область (правда, не очень сильно). В результате средние характеристики флюктуаций скорости течения (амплитуда, период) существенно зависят от глубины, на которой установлены датчики.

Иногда для измерения волнения используют акселерометры, реагирующие на вертикальное ускорение водной поверхности — a. Аналогично (2.107) спектр этих ускорений имеет вид

$$S_a(\mathbf{k}) = \omega^4(k)\, S(\mathbf{k}). \tag{2.108}$$

Отсюда вытекает, что спектр ускорений сдвигается в мелкомасштабную область, поэтому этот способ измерения пригоден для коротких волн. Определение среднего значения ускорения с помощью (2.108) иногда приводит к расходящимся интегралам при $\omega \to \infty$. Так, спектр Филлипса (как и Пирсона—Московица) имеет асимптотику ω^{-5}, поэтому $S_a \sim \omega^{-1}$ и интеграл от этой функции расходится, что указывает на приближенность высокочастотных асимптотик в эмпирических спектрах ветровых волн. Фактически измерения волнения с помощью акселерометров и могут быть использованы для надежного определения высокочастотной части спектра ветрового волнения.

В дистанционных методах измерения ветрового волнения важное значение имеют уклоны водной поверхности, дисперсия которых определяется следующей формулой: $\sigma_2 = \overline{(\nabla \eta)^2}$, причем различают σ^2 в направлении ветра и перпендикулярно ему. Спектр уклонов находится аналогично (2.107):

$$S_\sigma(\mathbf{k}) = k^2 S(\mathbf{k}). \tag{2.109}$$

И здесь вклад высокочастотной части спектра в его общую форму становится решающим. Именно поэтому хорошо видна рябь, существующая на гребне крупных волн; несмотря на малую амплитуду, крутизна ее велика и дает основной вклад в дисперсию уклонов.

Порядок выполнения работы

1. По заданному частотно-угловому спектру полностью развитого волнения требуется получить выражения (желательно в безразмерной форме) для частотного, углового, пространственного и одномерного пространственного спектров возвышения водной поверхности, ускорения и уклонов водной поверхности, а также спектров скоростей течения. Построить графики соответствующих спектров. Определить положение пика для каждого вида спектра в зависимости от скорости ветра.

   Указание. В случае появления расходящихся интегралов «обрезать» исходный спектр на некоторой фиксированной частоте ω_*.

2. Для расчета средней длины волны использовать аналог формулы (2.32) с заменой ω на k и $\Phi(\omega)$ на $\Phi_0(k)$.

3. Принимая в формуле распределения периодов волн (2.31) $n=3$, рассчитать период существенной (или значительной) волны, а также волны однопроцентной обеспеченности. Исследовать влияние вида эмпирической формулы на получаемые результаты, проводя контрольные расчеты с $n=2$ и $n=4$.

4. Используя стандартные подпрограммы, входящие в состав математического обеспечения ЭВМ, составить программу расчета интегралов Фурье. Рассчитать различные корреляционные функции процесса.

5. Вычислить энергию волнения, занимающего площадь 100 км^2 на водной поверхности. Построить графики зависимости энергии от скорости ветра.

6. Считая исходный спектр, переписанный в терминах частоты максимума, пригодным для описания развивающегося волнения, рассчитать среднюю высоту, средний период и среднюю длину волны в зависимости от разгона [зависимость $\omega_{\text{макс}}$ от разгона описывается формулой (2.36)].

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

РАЗВИТИЕ И УСТАНОВЛЕНИЕ СПЕКТРА ВЕТРОВЫХ ВОЛН В ГЛУБОКОМ МОРЕ

При использовании спектральных методов расчета ветрового волнения в глубоком море исходным является уравнение энергетического баланса (2.67). Его правая часть, описывающая механизмы генерации, диссипации и нелинейных взаимодействий ветровых волн, из теоретических предпосылок определяется весьма приближенно, поэтому в литературе можно встретить много различных форм для G. Тем не менее расчеты средних характеристик волнения, как правило, устойчивы к выбору конкретного вида G и в среднем дают близкие результаты. Поэтому в данной работе мы основное внимание уделим именно расчету средних значений высоты, периода и длины волны, которые однозначно определяются через S с помощью формул типа (2.28) и (2.32).

Рассмотрим сначала однородное волнение и пренебрежем нелинейными взаимодействиями. Тогда (2.68) сводится к

$$\partial S/\partial t = G_{\Phi} + (\beta - 4\nu_{\text{т}} k^2) S - \alpha S^2. \qquad (2.110)$$

Основные свойства решения уравнения (2.110) можно получить качественным анализом с помощью фазовой прямой линии, на которой откладываются значения S. При малых S приближенно $\partial S/\partial t \simeq G_{\Phi} > 0$ и, значит, уровень спектра растет (физически тривиальный результат). При очень больших S последний член в (2.110) доминирует и $\partial S/\partial t < 0$. Уменьшение спектра в этом случае связано с обрушением гребней волн, уносящих излишек энергии. Следовательно, независимо от начальных условий спектр стремится к установившемуся. Аналитические решения (2.110), полученные в различных приближениях, анализируются в разделе 2.4. В частности, при слабом ветре решение (2.70) можно переписать в терминах частотного спектра:

$$\Phi(\omega, \theta, t) = \Phi_{\infty}(\omega, \theta)\{1 - \exp[-(4\nu_{\text{т}}\omega^4 t)/g^2]\}, \qquad (2.111)$$

где Φ_{∞} — спектр установившегося (полностью развитого) волнения. Задаваясь каким-либо видом Φ_{∞}, например спектром Пирсона—Московица, и аппроксимацией $\nu_{\text{т}}$, с помощью (2.111) нетрудно рассчитать на ЭВМ зависимость средней высоты и периода волны от времени.

Аналогично можно представить решение уравнения (2.110) при сильном ветре [см. (2.72)]:

$$\Phi(\omega,\ \theta,\ t)=\frac{\Phi_\infty(\omega,\ \theta)\,\Phi_0(\omega,\ \theta)\exp(\beta t)}{\Phi_\infty(\omega,\ \theta)+\Phi_0(\omega,\ \theta)[\exp(\beta t)-1]}, \qquad (2.112)$$

где Φ_0 — начальный спектр (его можно выбрать произвольно, лишь бы $\Phi_0 < \Phi_\infty$) и β зависит от ω и θ, например по формуле Барнетта (2.62).

Другой пример, когда уравнение (2.67) легко решается, связан со стационарным волнением, развивающимся в направлении x от подветренного берега. Тогда член $\partial S/\partial t + c_{гр}\nabla S$ в (2.67) становится равным $c_{грx}\,\partial S/\partial x$. При этом можно установить полную аналогию между однородным в пространстве и стационарным волнением. Заменяя в расчетных формулах (2.111) и (2.112) t на $x/c_{грx}=2\omega x/(g\cos\theta)$, мы получим искомые выражения для спектров, зависящие от разгона x.

Третий пример — затухание волн зыби на больших расстояниях от области, занятой штормом. В этом случае волна является круговой и уравнение (2.67) сводится к следующему:

$$c_{гр}\partial S/\partial r = -4\nu_т k^2 S, \qquad (2.113)$$

где из-за отсутствия ветра «выключены» механизмы Филлипса и Майлса, а также не учитывается обрушение волн. Решение (2.113) (переписанное для частотного спектра) находится элементарно:

$$\Phi(\omega,\ \theta,\ r)=\Phi_0(\omega,\ \theta)\exp(-8\nu_т\omega^5 r/g^3). \qquad (2.114)$$

И в этом случае вычисление средней высоты и периода волн с помощью компьютера не представляет трудностей. Следует, правда, иметь в виду, что зыбь, уходя из области шторма, быстро становится регулярной. Затухание регулярной зыби мы рассматривали ранее в разделе 1.7. Тем не менее статистический подход дает правильное представление об эволюции средних характеристик зыби, и его можно использовать для практических расчетов.

В остальных ситуациях неоднородного и нестационарного волнения необходимо интегрировать уравнение (2.67) на ЭВМ с учетом конкретных начальных условий. Отметим лишь, что эффект дисперсионного усиления, связанный с обгоном одних волн другими (он рассмотрен в разделе 1.7), возможен для случайного поля ветровых волн, однако здесь он проявляется существенно слабее, чем для регулярных волн.

Порядок выполнения работы

1. Выполнить качественный анализ уравнения (2.110) с помощью фазовой прямой. Найти все состояния равновесия и исследовать их устойчивость.

2. Построить график частотного, углового и одномерного пространственного спектров в зависимости от продолжительности действия ветра в рамках (2.111). Определить закон изменения частоты пика в спектре от продолжительности действия ветра.

3. Рассчитать с помощью компьютера в рамках данной модели временную эволюцию средних значений высоты, периода и длины волны.

4. Выполнить задания 2 и 3 применительно к модели сильного ветра в рамках (2.112). Обратить особое внимание на изменчивость углового спектра и рассчитать временную эволюцию ширины углового спектра.

5. Провести аналогичные расчеты для стационарного волнения, развивающегося по направлению x от подветренного берега, для разных направлений ветра.

Указание. При выполнении пунктов 4 и 5 задания считать Φ_0 и Φ изотропными в диапазоне $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, где θ — угол, отсчитываемый от направления ветра.

6. Изучить изменение с расстоянием средних значений высоты, периода и длины волны зыби.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

ТРАНСФОРМАЦИЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН НА МЕЛКОВОДЬЕ И ТЕЧЕНИЯХ

Поскольку в прибрежной зоне из-за ее относительно небольших размеров основные энергонесущие компоненты не успевают эффективно взаимодействовать с ветровым потоком, распространенным приближением является пренебрежение ветром в задачах трансформации ветровых волн на мелководье. В этом случае уравнение энергетического баланса (2.37) интегрируется и, если к тому же на глубокой воде спектр однороден в пространстве, формула (2.75) упрощается:

$$S(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = S_\infty [\mathbf{k}_\infty(\mathbf{k}, \mathbf{r})]. \qquad (2.115)$$

Связь между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_\infty$ находится из лучевых уравнений (2.39) и ввиду постоянства частоты модули этих величин связаны между собой:

$$\omega^2 = gk\,\mathrm{th}\,[kh(\mathbf{r})] = gk_\infty. \qquad (2.116)$$

Поскольку волнение стационарное, то удобно исключить время t, приняв за аргумент координату x, направленную перпендикулярно береговой черте. Тогда после небольших преобразований уравнения (2.39) преобразуются к виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\omega/\partial k_y}{\partial\omega/\partial k_x} = \frac{k_y}{k_x}; \qquad (2.117)$$

$$\frac{dk_x}{dx} = -\frac{\partial\omega/\partial x}{\partial\omega/\partial k_x} = \frac{k}{k_x}\frac{\partial k}{\partial h}\frac{\partial h}{\partial x}. \qquad (2.118)$$

Здесь k_x и k_y связаны очевидным соотношением

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2, \tag{2.119}$$

и производная $\partial k/\partial h$ легко находится с помощью (2.116).

Уравнения (2.117) и (2.118) с условиями (2.116) и (2.119) в принципе позволяют однозначно связать $\mathbf{k}$ с $\mathbf{k}_\infty$ и $\mathbf{r}$, а затем найти функцию $\mathbf{k}_\infty(\mathbf{k}, \mathbf{r})$. В случае произвольного закона изменения глубины $h(x, y)$ для интегрирования этих уравнений следует привлекать компьютер. Кроме того, компьютер необходим для вычисления k из (2.116) ввиду неявности этого соотношения.

С помощью пространственного спектра $S(\mathbf{k})$ легко найти частотный и одномерный пространственные спектры. В частности, частотный спектр находится с помощью формулы (2.76), так что связь частотных спектров определяется соотношением (2.77), которое удобно переписать в терминах

$$\Phi(\omega, \theta, \mathbf{r}) = (\partial k^2/\partial k_\infty^2)\, \Phi_\infty[\omega, \theta_\infty(\theta, \mathbf{r})]. \tag{2.120}$$

Формулы (2.120) совместно с (2.116) и (2.119) позволяют полностью проследить за трансформацией спектра ветрового волнения на мелководье.

Наиболее простой ситуацией для расчетов является параллельность всех изобат, т. е. $h = h(x)$. В этом случае лучевые уравнения эквивалентны закону Снеллиуса:

$$k \sin\theta = k_\infty \sin\theta_\infty, \tag{2.121}$$

где угол θ отсчитывается от оси x. В результате трансформация спектра описывается набором алгебраических формул (2.116), (2.120) и (2.121), что существенно упрощает процедуру расчетов. Примеры расчетов спектров на мелкой воде приведены в разделе 2.5; они могут быть использованы для тестирования численных методов.

Аналогичные способы используются для расчетов трансформации спектра волнения на неоднородных течениях. В этом случае сохраняющимися величинами являются волновое действие S/Ω и частота $\omega = \Omega + \mathbf{kU}$. Формулы (2.117) и (2.118) для лучей сохраняют свой вид. Только в правой части (2.118) нельзя теперь заменять $\partial\omega/\partial x$ на $(\partial\omega/\partial h)\partial h/\partial x$. Для общности выпишем здесь уравнение для частного спектра, обобщающее (2.120) на случай переменной глубины и переменного течения:

$$\Phi(\omega, \theta, \mathbf{r}) = (\partial k^{5/2}/\partial k_\infty^{5/2})\, \Phi_\infty(\omega, \theta_\infty(\theta, \mathbf{r})), \tag{2.122}$$

где теперь индекс «∞» относится к спектру волнения в глубоком море без течения. И здесь основная трудность состоит в решении лучевых уравнений (2.117) и (2.118). Если изменения глубины и скорости течения происходят только вдоль одной из координат, то лучевые уравнения сводятся к закону Снеллиуса (2.121) и расчет спектров производится с помощью алгебраических формул (2.121), (2.122). Примеры расчета трансформации спектров течениями разной формы в глубоком море содержатся в разделе 2.6. Новым и принципиальным моментом здесь являются эффекты блокировки и отражения волн, которые, конечно же, имеют место не только для случайного ансамбля ветровых волн, но и для регулярных волн; эти эффекты рассмотрены в разделе 2.7 и 2.6.

Порядок выполнения работы

1. Рассмотреть трансформацию одномерного волнения в бассейне с уменьшающейся глубиной. Рассчитать эволюцию средних значений высоты, периода и длины волны и сравнить с аналогичными зависимостями для регулярной волны (см. раздел 1.7).

Указание. Для одномерного волнения в формуле (2.120) необходимо заменить $\partial k^2/\partial k_\infty^2$ на $\partial k/\partial k_\infty$.

2. Считая изобаты параллельными береговой черте и $h(x) = \alpha x^2$, выполнить расчет лучей по формуле (2.117) с учетом (2.116) и (2.121). В качестве тестов использовать аналитические выражения для лучей в приближении глубокой и мелкой воды.

3. Рассчитать частотный спектр, а также средние характеристики волны при трансформации ветрового волнения на мелководье по формулам (2.116), (2.120) и (2.121). Считать изобаты параллельными береговой черте, а генеральное направление ветра — перпендикулярным к ней.

4. Решить ту же задачу, если угол между изобатами и генеральным направлением ветра произволен.

5. Рассчитать лучи в глубоком море при трансформации волн на течении «струйного» типа, имеющего профиль

$$U_y = \begin{cases} U_0(1 - |x|/L), & |x| < L; \\ 0, & |x| > L. \end{cases}$$

6. Выполнить расчеты трансформации спектра волнения и его средних характеристик на течении «струйного» типа при различной ориентации генерального направления волн.

7. Исследовать трансформацию одномерного волнения на встречном или попутном течении. Рассчитать средние значения высоты и периода волн.

Указания. 1. Для одномерного волнения в формуле (2.122) $k^{5/2}$ и $k_\infty^{5/2}$ заменить на $k^{3/2}$ и $k_\infty^{3/2}$.

2. Спектр $\Phi^{(-)}$ не рассматривать.

8. Для этих же условий изучить отражение волны от встречного течения. В уравнении (2.87) учесть правую часть с учетом (2.72).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 2

1. Давидан И. Н., Лопатухин Л. И., Рожков В. А. Ветровое волнение в Мировом океане.— Л.: Гидрометеоиздат, 1985.— 256 с.
2. Динамика океана/Учебник под ред. Ю. П. Доронина.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.— 304 с.
3. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана/Пер. с англ.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.— 319 с.

ГЛАВА 3

ПРИЛИВНЫЕ ВОЛНЫ

3.1. Основные положения статической и динамической теории приливов

Приливы в океанах и морях, являющиеся вынужденной реакцией водных масс указанных объектов на действие приливообразующей силы, представляют собой квазистационарный колебательный процесс. Приливообразующая сила, как известно, возникает при гравитационном взаимодействии Земли с Луной и Солнцем, причем влияние каждого из этих светил с высокой степенью точности можно рассматривать отдельно. В каждой точке океана приливообразующая сила определяется как разность между местным притяжением к соответствующему светилу и средним (по всей Земле) притяжением к нему. Анализ показывает, что вертикальная составляющая приливообразующей силы ничтожно мала по сравнению с силой тяжести; поэтому с динамической точки зрения интерес представляет лишь ее горизонтальная составляющая $\mathbf{F}$, сопоставимая по порядку величины с другими силами, действующими в океане в горизонтальном направлении. Частотная структура приливных движений определяется соответствующей структурой силы $\mathbf{F}$.

Гравитационная природа приливообразующей силы свидетельствует о потенциальном характере ее поля. На этом основании вышеназванную силу можно определить через ее потенциал Ω с помощью соотношения

$$\mathbf{F} = \nabla_{\text{г}}\Omega, \tag{3.1}$$

где $\nabla_{\text{г}} = \frac{1}{R\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}$ — оператор горизонтального градиента на сфере (здесь R — радиус Земли, φ — географическая широта, λ — географическая долгота). Если рассматривать влияние только одного приливообразующего светила, то можно показать [3, 5], что выражение для Ω может быть представлено в виде суммы трех квазипериодических членов:

$$\begin{aligned}\Omega = \Omega^{(0)} + \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)} = \\ = \mathscr{D}\{3(R/\overline{R})^2(\sin^2\varphi - 1/3)\}\left[(\overline{D}/D)^3(\sin^2\delta - 1/3)\right] + \\ + \mathscr{D}\{(R/\overline{R})^2\sin(2\varphi)\}\left[(\overline{D}/D)^3\sin(2\delta)\cos(t_{\text{г}} + \lambda)\right] + \\ + \mathscr{D}\{(R/\overline{R})^2\cos^2\varphi\}\left[(\overline{D}/D)^3\cos^2\delta\cos\left[2(t_{\text{г}} + \lambda)\right]\right].\end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь $\mathscr{D}=(^3/_4)g\bar{R}(M/E)(\bar{R}/\bar{D})^3$ — общий для каждого члена коэффициент, так называемая постоянная Дудсона; M — масса возмущающего светила (Луны или Солнца); E — масса Земли; D — расстояние между центрами Земли и светила; δ — склонение светила, а $t_{\text{г}}$ — его гринвичский часовой угол. Географическая широта φ считается положительной к северу от экватора, а географическая долгота λ считается положительной к востоку от гринвичского (нулевого) меридиана. Черта над R и D обозначает среднее значение указанных величин. Фигурными скобками во всех членах выделен так называемый геодезический множитель, а квадратными скобками — временной, или астрономический, множитель. Для лунного ($\Omega_{☾}$) и солнечного ($\Omega_{\odot}$) потенциалов значения постоянной Дудсона составляют: $\mathscr{D}_{☾}=26{,}277\cdot10^3$ см^2/с^2; $\mathscr{D}_{\odot}=12{,}085\cdot10^3$ см^2/с^2 [3, 5]. Геодезический множитель с учетом зависимости от λ характеризует пространственное распределение каждого члена по поверхности Земли, которое описывается соответственно тремя сферическими гармониками: зональной, тессеральной и сектроиальной [3]. В соответствии с характерным периодом временной изменчивости астрономических множителей член $\Omega^{(0)}$ называют долгопериодным, член $\Omega^{(1)}$ — суточным, а член $\Omega^{(2)}$ — полусуточным.

Более детальный анализ частотной структуры приливного потенциала показывает, что каждый из названных квазипериодических членов, а точнее — его астрономический множитель, может быть приближенно, но с высокой степенью точности представлен в виде суммы конечного количества гармонических составляющих, что дает в общем спектре три группы дискретных гармоник: долгопериодную, суточную, полусуточную. Каждая гармоника потенциала может быть выражена в виде

$$\Omega_i=\mathscr{D}G^{(n)}C_i\cos(\omega_i t+n\lambda-\Phi_i), \tag{3.3}$$

где $G^{(n)}$ — геодезический множитель группы; C_i — амплитуда соответствующей гармоники астрономического множителя; ω_i — частота данной гармоники; $n=0$, 1 либо 2 в зависимости от того, к какой группе относится гармоника; Φ_i — фаза гармоники на меридиане Гринвича, определяемая на конкретные сутки с помощью специальных пособий [7].

Параметры важнейших гармоник приливного потенциала приведены в табл. 3.1.

В рамках линейной теории, пригодной для открытых океанов и большинства морей, можно считать, что каждая гармоника приливного потенциала создает в Мировом океане соответствующий гармонический во времени частный прилив с тем же периодом, а полный прилив является суммой указанных частных гармоник.

Простейшей реакцией на действие приливообразующей силы является *статический прилив*, т. е. колебание водной оболочки с такими уклонами свободной поверхности, которые обеспечивают

Таблица 3.1

Гармоника	Символ	c_i	ω_i рад/с	τ_i ср. солн. часы
		Долгопериодные		
Лунная полумесячная	M_f	0,156	$5{,}3234\cdot10^{-6}$	327,86
Лунная месячная	M_m	0,082	2,6392	661,30
Солнечная полугодовая	S_{sa}	0,073	0,3982	2191,43
		Суточные		
Лунно-солнечная деклинационная	K_1	0,530	$0{,}7292\cdot10^{-4}$	23,93
Главная лунная	O_1	0,377	0,6760	25,82
Главная солнечная	P_1	0,175	0,7252	24,07
Лунная эллиптическая	Q_1	0,072	0,6496	26,87
		Полусуточные		
Главная лунная	M_2	0,908	$1{,}4052\cdot10^{-4}$	12,42
Главная солнечная	S_2	0,423	1,4544	12,00
Лунная эллиптическая	N_2	0,174	1,3788	12,66
Лунно-солнечная деклинационная	K_2	0,115	1,4584	11,97

горизонтальные градиенты давления, в любой момент и в любой точке уравновешивающие силу **F**. Таким образом,

$$\mathbf{F} = \rho g \nabla_\Gamma \hat{\eta}, \tag{3.4}$$

где $\hat{\eta}$ — статическое возвышение уровня, откуда, учитывая (3.1), получаем:

$$\hat{\eta} = \Omega/(\rho g) + C_\Omega. \tag{3.5}$$

Можно показать [3], что для сплошного глобального океана константа интегрирования C_Ω равна нулю и статический прилив $\hat{\eta}$ с точностью до множителя $(\rho g)^{-1}$ описывается распределением потенциала Ω. В этом случае выражение (3.3) может быть использовано для описания частных статических приливных гармоник. Если выражать $\hat{\eta}$ в сантиметрах, а t — в часах, то для главных гармоник можно записать:

$$\begin{aligned}
\hat{\eta}_{M_2} &= 24{,}3\cos^2\varphi\cos(28{,}984t + 2\lambda - \Phi_{M_2});\\
\hat{\eta}_{S_2} &= 11{,}3\cos^2\varphi\cos(30{,}000t + 2\lambda);\\
\hat{\eta}_{K_1} &= 14{,}2\sin(2\varphi)\cos(15{,}041t + \lambda - \Phi_{K_1});\\
\hat{\eta}_{O_1} &= 10{,}1\sin(2\varphi)\cos(13{,}943t + \lambda - \Phi_{O_1}).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Из этих выражений с помощью соотношения (3.1) для зональной ($\rightarrow$) и меридиональной ($\uparrow$) компонентов приливообразующих сил для главных частных гармоник получаем (в ньютонах):

$$F^{\rightarrow}_{M_2} = -7{,}483 \cdot 10^{-10} \cos\varphi \sin(28{,}984t + 2\lambda - \Phi_{M_2});$$
$$F^{\uparrow}_{M_2} = -3{,}742 \cdot 10^{-10} \sin(2\varphi) \cos(28{,}984t + 2\lambda - \Phi_{M_2});$$
$$F^{\rightarrow}_{S_2} = -3{,}480 \cdot 10^{-10} \cos\varphi \sin(30{,}000t + 2\lambda);$$
$$F^{\uparrow}_{S_2} = -1{,}740 \cdot 10^{-10} \sin(2\varphi) \cos(30{,}000t + 2\lambda); \qquad (3.7)$$
$$F^{\rightarrow}_{K_1} = -4{,}373 \cdot 10^{-10} \sin\varphi \sin(15{,}041t + \lambda - \Phi_{K_1});$$
$$F^{\uparrow}_{K_1} = 4{,}373 \cdot 10^{-10} \cos(2\varphi) \cos(15{,}041t + \lambda - \Phi_{K_1});$$
$$F^{\rightarrow}_{O_1} = -3{,}110 \cdot 10^{-10} \sin\varphi \sin(13{,}943t + \lambda - \Phi_{O_1});$$
$$F^{\uparrow}_{O_1} = 3{,}110 \cdot 10^{-10} \cos(2\varphi) \cos(13{,}943t + \lambda - \Phi_{O_1}).$$

Статическая теория, предполагающая отсутствие инерционных эффектов, оправдывается в том или ином приближении только для приливов долгого периода, для которых инерционные члены в уравнении движения малы, а само уравнение сводится к уравнению статического баланса:

$$0 = -g\nabla_{\text{г}}\eta + g\nabla_{\text{г}}\hat{\eta} = -g\nabla_{\text{г}}(\eta - \hat{\eta}). \qquad (3.8)$$

Реальные суточные и полусуточные приливы не соответствуют статической теории; они характеризуются наличием заметных динамических эффектов, т. е. нарушением статического равновесия, что приводит к появлению заметной горизонтальной скорости $\mathbf{u}$ и соответственно инерционного члена $d\mathbf{u}/dt$, характеризующего возникающее ускорение. Баланс сил становится динамическим и описывается уравнением

$$d\mathbf{u}/dt = -g\nabla_{\text{г}}(\eta - \hat{\eta}). \qquad (3.9)$$

В системе координат, связанной с вращающейся Землей, инерционный член $d\mathbf{u}/dt$ можно записать в виде

$$d\mathbf{u}/dt = \partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u} + 2\boldsymbol{\omega}_{\odot} \times \mathbf{u}, \qquad (3.10)$$

где $\boldsymbol{\omega}_{\odot}$ — вектор угловой скорости вращения Земли. Здесь справа приведены слагаемые, учитывающие локальную инерцию (за счет временной изменчивости поля скорости) и конвективную инерцию (за счет пространственной неоднородности этого поля), а также кориолисово слагаемое (за счет вращения системы координат вместе с Землей).

При переходе от статического состояния к динамическому проявляется также роль диссипативных сил, обусловленных в основном турбулентной вязкостью. В теории приливов в приближении длинных волн эти силы обычно параметризуют, рассматривая их как результат трения приливного потока о дно и выражая объемный эффект такого трения путем введения в правую часть уравнения движения члена вида $-k\mathbf{u}|\mathbf{u}|/h$, где k — эмпирический «коэффициент донного сопротивления», равный 0,002—0,004; h — глубина, $\mathbf{u}$ — вектор осредненной по вертикали скорости приливного течения, а $|\mathbf{u}|$ — модуль этого вектора. Для открытого океана этим эффектом, а также конвективной инерцией часто пренебрегают и в этом случае, переходя от векторной формы к выражениям для составляющих вдоль параллели и меридиана, уравнения движения и неразрывности записывают в виде так называемых *приливных уравнений Лапласа* *:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -\frac{g}{R\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\eta - \hat{\eta}); \\
\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{g}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\eta - \hat{\eta}); \qquad (3.11) \\
\frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{1}{R\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda}(uh) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(vh\cos\varphi)\right] = 0,
\end{gathered}
$$

где $f = 2\omega_{\odot}\sin\varphi$ — параметр Кориолиса, а u, v — компоненты осредненной по вертикали скорости течения вдоль парралели и меридиана.

Аналитические решения системы (3.11) существуют только для идеализированных случаев глобального океана, либо океана, ограниченного параллелями и меридианами. Некоторого приближения к действительности, оставаясь в рамках аналитических методов, удается достичь, лишь рассматривая приливы в узких каналах, опоясывающих всю Землю или ее часть; соответствующий раздел динамической теории приливов носит название каналовой теории. Однако для океанских бассейнов реальной формы решения, описывающие динамическую реакцию на действие приливообразующей силы, могут быть получены только путем численного моделирования.

Как известно, динамическая реакция сплошной ограниченной системы на периодическое внешнее воздействие определяется комбинацией собственных мод этой системы. В Мировом океане такие собственные моды при отсутствии диссипации и излучения энергии, а также вращения Земли должны иметь вид суперпозиции стоячих колебаний, горизонтальный масштаб (длина волны) которых определяется скоростью распространения свободных длинных волн $c = \sqrt{gh}$, т. е. глубиной океана. Отметим, что при реальных глубинах океана для бо́льшей его части (за исключением области высоких широт) этот масштаб $\lambda_i = 2\pi\sqrt{gh}/\omega_i$ на приливных частотах ω_i примерно на порядок меньше, чем масштаб соответствующих гармоник приливного потенциала Ω_i (этот факт имеет существен-

* Эти, а также все последующие уравнения динамики приливов приведены здесь в рамках так называемой классической теории, основанной на предположении об отсутствии приливных движений в твердом теле Земли, а также влияния океанских приливов на земное гравитационное поле. Как указано в [5], такое допущение лежит в основе большинства приливных моделей.

ное значение для энергетики океанских приливов). Учет энергетических потерь и вращения Земли усложняет пространственную структуру собственных мод, но несущественно меняет их горизонтальный масштаб. Численное моделирование собственных колебаний Мирового океана показывает [5], что их спектр характеризуется большим количеством практически дискретных пиков, а пространственная форма мод весьма сложна. В то же время на частотные диапазоны суточного и полусуточного приливов приходится по нескольку пиков спектра собственных колебаний, что позволяет предположить наличие резонансных условий для указанных собственных мод и ожидать их заметного проявления в динамической реакции. Действительно, пространственная структура этих мод обладает значительным сходством в пределах каждого из названных частотных диапазонов и одновременно описывает многие черты реальных суточных и полусуточных океанских приливов [5].

Если рассматриваемый бассейн не слишком велик, то для исследования приливов в нем можно использовать прямоугольную систему координат и учитывать донное трение. В этом случае уравнения динамики приливов для морских бассейнов будут иметь вид

$$\begin{aligned} \partial u/\partial t - fv &= -g\partial(\eta - \hat{\eta})/\partial x - ku\,|\mathbf{u}|/h; \\ \partial v/\partial t + fu &= -g\,\partial(\eta - \hat{\eta})/\partial y - kv\,|\mathbf{u}|/h; \\ \partial\eta/\partial t + \partial(uh)/\partial x &+ \partial(vh)/\partial y = 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

При небольшой глубине рассматриваемых бассейнов возникает заметное различие между средней глубиной h, отсчитываемой от невозмущенного уровня водной поверхности, и действительной глубиной $h+\eta$, учитывающей приливные смещения уровня. В этом случае величину h (в (3.12) необходимо заменить на $h+\eta$. Кроме того, в некоторых случаях в первые два уравнения системы (3.12) следует добавить дополнительные члены, учитывающие горизонтальный турбулентный обмен, конвективную инерцию и др. В некоторых районах шельфа и заливах, где в силу мелководья и локального резонанса колебания уровня η и его уклоны особенно велики, градиенты давления могут настолько превосходить приливообразующую силу, что ее прямым влиянием можно пренебречь, и тогда первые члены в правой части уравнений движения будут иметь вид $-g\,\partial\eta/\partial x$ и $-g\,\partial\eta/\partial y$. Аналитические решения системы (3.12) возможны для идеализированных бассейнов простой формы. В реальных случаях решения ищут численными способами.

3.2. Баланс приливной энергии и способы расчета его составляющих

Практически периодический, т. е. стационарный (в среднем), режим приливных колебаний означает существование баланса между приходом и расходом приливной энергии. Указанный баланс соблюдается как для Мирового океана в целом, так и для отдельных его частей, включая моря и заливы.

Энергия приливных движений Мирового океана создается в результате работы, совершаемой приливообразующими силами, действующими на его водную массу. Эта работа в среднем положительна, если сила и скорость движущейся в процессе колебаний воды хотя бы приближенно синфазны (разность их фаз составляет менее 90° по абсолютному значению), и отрицательна при их антифазности (разность фаз превышает 90°). В силу того, что в большей части океана характерные пространственные масштабы поля силы и поля реакции на нее (определяемой собственными модами океана) различаются не менее чем на порядок, океан оказывается разбитым на перемежающиеся зоны положительной и отрицательной работы приливообразующей силы. В первых из них сила и скорость приливных движений синфазны — это зоны «раскачки» или энергетических источников, а во вторых — антифазны — это зоны «торможения» или энергетических стоков. В идеальном случае отсутствия диссипации и энергообмена со смежными средами эти источники и стоки в целом по океану должны уравновешивать друг друга, а горизонтальный перенос энергии от первых ко вторым должен осуществляться в океане в форме прогрессивных приливных волн.

Каждой приливной гармонике должна соответствовать стационарная картина такого переноса (осредненная по своему периоду).

В реальных природных условиях, однако, на такую картину накладывается эффект дополнительных стоков приливной энергии, обусловленных *диссипацией*, которая связана прежде всего с донным трением и наиболее заметно проявляется в мелководных шельфовых зонах с узкими заливами и архипелагами. Поскольку такая диссипация сосредоточена в относительно узкой зоне на окраинах океанских бассейнов, при численном или аналитическом моделировании ее часто параметризуют заданием частичного либо полного излучения на границе бассейна с помощью так называемых «импедансных» граничных условий. Если исследуется сама шельфовая зона и в распоряжении имеются достаточно подробные данные о приливных течениях, то расчет диссипации приливной энергии может быть выполнен непосредственно прямыми методами.

Расположение и интенсивность диссипативных стоков существенно влияют на итоговую стационарную картину горизонтальной циркуляции приливной энергии.

Выражение для составляющих баланса приливной энергии можно получить из системы (3.11) либо (3.12) путем умножения уравнений движения соответственно на ghu и ρhv, а уравнения неразрывности — на $\rho g\eta$, что придает всем членам размерность мощности. Проделав это, например, для системы (3.12), просуммировав все три уравнения системы и введя обозначения для поверхностной плотности кинетической $[e_K = \rho h(u^2+v^2)/2]$, потенциальной ($e_P=\rho g\eta^2/2$) и полной ($e=e_K+e_P$) энергии, получаем уравнение локального баланса приливной энергии:

$$\partial e/\partial t=\rho g\hat{\eta}\,\partial\eta/\partial t+\operatorname{div}(\rho g h\mathbf{u}\hat{\eta})-k\rho\,|\,\mathbf{u}\,|^3-\operatorname{div}(\rho g h\mathbf{u}\eta). \quad (3.13)$$

Здесь первые два члена в правой части характеризуют работу приливообразующей силы:

$$a_\Omega=a_\Omega^S+a_\Omega^\Gamma=\rho g\hat{\eta}\,\partial\eta/\partial t+\operatorname{div}(\rho g h\mathbf{u}\hat{\eta}), \quad (3.14)$$

третий член — работу силы донного трения

$$a_R=-k\rho\,|\,\mathbf{u}\,|^3 \quad (3.15)$$

и четвертый член — эффект горизонтального переноса (адвекции) энергии

$$a_W=-\operatorname{div}(\rho g h\mathbf{u}\eta), \quad (3.16)$$

выраженный через дивергенцию волнового потока, плотность которого

$$\mathbf{w}=\rho g h\mathbf{u}\eta. \quad (3.17)$$

Все величины a, так же как и e, имеют локальный смысл, т. е. смысл поверхностной плотности.

Если от значений плотности перейти к балансу энергосодержания E путем интегрирования уравнения (3.13) по площади бассейна S, ограниченной контуром Γ, то после некоторых преобразований получаем уравнение интегрального баланса приливной энергии:

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\iint\limits_S\rho g\hat{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\,dS+\oint\limits_\Gamma\rho g h u_n\hat{\eta}\,d\Gamma-$$
$$-\iint\limits_S k\rho\,|\,\mathbf{u}\,|^3\,dS-\oint\limits_\Gamma\rho g h u_n\eta\,d\Gamma, \quad (3.18)$$

где u_n — нормальная к контуру составляющая вектора приливного течения. Для участков контура Γ, совпадающих с береговой чертой, где выполняется условие непротекания, значение u_n равно нулю, так что фактически контурное интегрирование производится только для «жидких» границ области S. В случае интегрирования по площади всего Мирового океана S_0 контурные интегралы будут целиком равны нулю и тогда

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\iint\limits_{S_0}\rho g\hat{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\,dS-\iint\limits_{S_0}k\rho\,|\,\mathbf{u}\,|^3\,dS. \quad (3.19)$$

Отметим, что с учетом соотношения (3.4) и уравнения неразрывности в (3.12) выражение для a_Ω можно записать в более компактной форме:

$$a_\Omega=h\mathbf{u}\mathbf{F}=h(uF_x+vF_y), \quad (3.20)$$

откуда для баланса энергосодержания бассейна получаем

$$\frac{\partial E}{\partial t}=\iint_S h\mathbf{u}\mathbf{F}\,dS-\iint_S k\rho\,|\,\mathbf{u}\,|^3\,dS-\oint_\Gamma \rho g h u_n \eta\,d\Gamma. \qquad (3.21)$$

Таким образом, работу, производимую действием приливообразующей силы, можно рассчитать двумя путями, используя для этого выражение (3.14) либо (3.20).

Ввиду колебательного характера величин a_Ω, a_R и a_W, а также соответствующих им интегральных величин

$$\begin{gathered}A_\Omega=\iint_S \rho g\hat{\eta}\frac{\partial\eta}{\partial t}\,dS+\oint_\Gamma \rho g h u_n\hat{\eta}\,d\Gamma=\iint_S h\mathbf{u}\mathbf{F}\,dS;\\ A_R=-\iint_S k\rho\,|\,\mathbf{u}\,|^3\,dS;\;\; A_W=-\oint_\Gamma \rho g h u_n\eta\,d\Gamma\end{gathered} \qquad (3.22)$$

производные $\partial e/\partial t$ и $\partial E/\partial t$ в каждый момент времени в общем отличны от нуля. Однако, поскольку гармоническое колебание является стационарным, изменение как локальной, так и полной энергии в среднем за период должно быть равно нулю. Таким образом, при вычислении баланса приливной энергии равенства

$$\langle a_\Omega\rangle+\langle a_R\rangle+\langle a_W\rangle=0 \qquad (3.23)$$

и

$$\langle A_\Omega\rangle+\langle A_R\rangle+\langle A_W\rangle=0 \qquad (3.24)$$

могут служить критерием достоверности полученных результатов (здесь угловые скобки означают осреднение по периоду).

Поскольку члены, стоящие в правой части уравнения баланса, описывают процессы, приводящие к поступлению и потерям энергии, они характеризуются энергетическими потоками или мощностью соответствующего источника либо стока. Как видно из (3.18), (3.21) или (3.22), эти источники и стоки можно разделить на «площадные» и «контурные» в соответствии с выражающими их интегралами. За исключением члена A_R, все они содержат парные произведения гармонически изменяющихся приливных характеристик $\hat{\eta}$, η, u, v, F_x, F_y. В таких случаях важное значение приобретают фазовые соотношения сомножителей указанных произведений. Рассмотрим роль фазовых соотношений и определим некоторые возникающие в связи с этим понятия на примере плотности потока приливной энергии

$$w=\rho g h u\eta, \qquad (3.25)$$

обусловленного горизонтальным волновым переносом вдоль оси x.

Если записать выражения для гармонически изменяющихся величин η и u в виде

$$\eta=H\cos(\omega t-g),\;\; u=U\cos(\omega t-g_u), \qquad (3.26)$$

где H, U — амплитуды, а g, g_u — фазы этих величин, то после подстановки (3.26) в (3.25) получим:

$$w = (1/2)\,\rho g h H U \cos\beta\,\{1 + \cos[2(\omega t - g)]\} + \\ + (1/2)\,\rho g h H U \sin\beta \sin[2(\omega t - g)], \qquad (3.27)$$

где $\beta = g_u - g$ — фазовый сдвиг течения u относительно колебаний уровня η.

Первое слагаемое в правой части (3.27) представляет собой так называемую *активную* составляющую потока энергии w_a. В процессе колебания член w_a осциллирует, но не меняет знака (определяемого знаком $\cos\beta$); иногда этот член называют *пульсирующей* составляющей удельной мощности волнового потока энергии. Среднее за период значение члена w_a отлично от нуля, оно составляет половину его максимального значения и равно

$$\langle w_a \rangle = (1/2)\,\rho g h H U \cos\beta. \qquad (3.28)$$

Величину $\langle w_a \rangle$ называют также плотностью *чистого потока* приливной энергии.

Второе слагаемое в правой части (3.27) характеризует так называемую *реактивную* составляющую энергетического потока, w_r. В процессе колебаний этот член меняет знак, и его среднее за период значение равно нулю. Член w_r называют *переменной* составляющей удельной мощности; его амплитуда равна

$$\tilde{w}_r = (1/2)\,\rho g h H U \sin\beta. \qquad (3.29)$$

Обе величины, w_a и w_r, колеблются с фазовым сдвигом, равным 90°.

Наибольшее практическое значение имеет средняя за период характеристика $\langle w \rangle = \langle w_a \rangle$, которая дает интенсивность результирующего постоянного потока приливной энергии, обусловленного горизонтальным волновым переносом в данной точке моря. Однако интерес может представлять, например, максимальная или какая-либо другая мгновенная интенсивность этого потока, в этих случаях для вычисления служит формула (3.27).

Аналогичным образом, с выявлением активных и реактивных составляющих, могут быть проанализированы выражения (3.14), (3.20) и (3.22), в которых фазовые сдвиги между сомножителями ($\widehat{\eta \text{ и } \partial\eta/\partial t}$, $\widehat{\eta \text{ и } u}$, $\widehat{\eta \text{ и } v}$, F_x и u, F_y и v) могут иметь в принципе любые значения. В зависимости от этого сдвига соответствующие составляющие энергетического баланса будут определять либо приход, либо потери приливной энергии [члены a в выражениях (3.14) и (3.20) — в локальном смысле, а члены A в выражениях (3.22) — в интегральном]. Исключение составляет фрикционный член a_R (или A_R), который является полностью активным и всегда отрицательным, т. е. во всех случаях однозначно описывает потери энергии.

Вопросы для самопроверки

1. Какие характерные особенности реального прилива отражаются статической теорией?
2. Что такое «геодезический» и «астрономический» множители в теории приливов?
3. Каковы качественные особенности зональной, тессеральной и секториальной гармоник?
4. Почему спектр приливных гармоник образует три раздельных «куста»?
5. Почему Мировой океан разделяется на зоны «астрономических источников» и «стоков» приливной энергии? Какие из них в сумме имеют бо́льшую мощность?
6. Охарактеризуйте качественно зависимость солнечного долгопериодного, суточного и полусуточного приливов от времени года.
7. Чему равен горизонтальный поток приливной энергии в пучности стоячего приливного колебания? Чему равен этот поток в узле стоячего приливного колебания?
8. Каков характер горизонтального потока приливной энергии между узлом и пучностью стоячего приливного колебания?
9. Что такое активная и реактивная составляющие потока приливной энергии? Как они связаны со структурой приливного колебания?
10. Что такое «чистый поток» приливной энергии?
11. Каково соотношение между активной и реактивной составляющими в потоке энергии для смешанной (прогрессивно-стоячей) приливной волны?
12. В каких случаях при изучении приливов в бассейне можно не учитывать приливообразующую силу?
13. В каких случаях необходимо учитывать приливные смещения свободной поверхности при задании глубины места в приливных моделях?
14. В каких случаях для описания приливов можно пользоваться статической теорией и когда необходимо использование динамической теории?

Типовые упражнения

1. Опишите характер статического прилива вблизи полюса с выделением роли каждой из трех сферических гармоник.
2. Изобразите мгновенный профиль статического прилива для гармоник M_2 и K_1: 1) вдоль меридиана, на котором кульминирует приливообразующее светило; 3) вдоль какой-либо северной и южной параллели.
3. Получите в общем виде выражение для константы C_Ω в выражении (3.5) для бассейна, занимающего произвольную область S.
4. Покажите, что $C_\Omega=0$ для глобального океана.
5. Оцените горизонтальный масштаб (длину волны) динамической реакции бассейна, расположенного вдоль экватора и имеющего следующие параметры: 1) $h=200$ м; $L=1000$ км; 2) $h=1000$ м, $L=10\,000$ км; 3) $h=5000$ м, $L=10\,000$ км, на действие полусуточной приливообразующей силы (гармоника M_2).
6. Из приливных уравнений Лапласа (3.11) получите уравнения каналовой теории для каналов, ориентированных вдоль экватора, вдоль параллели и вдоль меридиана. Используйте в явном виде выражения для приливообразующей силы, соответствующей гармоникам M_2 и K_1.
7. Получите отдельно выражения для плотности потенциальной и кинетической энергии в уравнении энергетического баланса на

основе системы (3.12), используя процедуру, описанную в разделе 3.2.

8. Получите выражения (3.7) из выражений (3.6).

9. Получите уравнение баланса приливной энергии в сферических координатах, используя в качестве исходных приливные уравнения Лапласа (3.11).

10. Получите выражения для активной и реактивной составляющих первого члена правой части уравнения (3.14), считая, что $\hat{\eta}=\hat{H}\cos(\omega t)$ и $\eta=H\cos(\omega t-g)$.

11. Проделайте то же самое для полного члена a_Ω, используя формулу (3.20) и считая, что $F_x=-F_0\sin(\omega t)$, $u=U\cos(\omega t-g_u)$ и $v=0$.

12. Получите выражение для плотности чистого потока энергии первого члена правой части уравнения (3.14). Проделайте то же самое для полного члена a_Ω в выражении (3.20).

13. Получите выражение для диссипативного члена в уравнении баланса приливной энергии в предположении линейной зависимости силы трения от скорости течения.

14. Проанализируйте характер мгновенных потоков энергии в стоячей волне на участке от узла до пучности и до следующего узла.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

РАСЧЕТ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА, ОБУСЛОВЛЕННОЙ ДЕЙСТВИЕМ ПРИЛИВООБРАЗУЮЩЕЙ СИЛЫ

Целью лабораторных работ этой главы является закрепление теоретического материала по разделу «Энергетические характеристики приливных движений» курса динамики океана. Эти работы связаны друг с другом, так как каждая из них посвящена одной из трех главных составляющих баланса приливной энергии, а их совместное выполнение позволяет оценить полный баланс. Задача каждой работы состоит в освоении методики расчета и в получении количественных результатов, характеризующих энергетический баланс для конкретного географического объекта. Поскольку наибольшее количество существующих фактических данных относится к районам с полусуточными приливами, здесь предполагается, что расчеты должны проводиться для гармоники M_2. На случай района с преобладанием суточных приливов в некоторых местах сделаны специальные пояснения.

В настоящей лабораторной работе требуется выполнить расчет работы, производимой действием приливообразующей силы одной приливной гармоники, т. е. вычислить член A_Ω в выражениях (3.22) для одного из конкретных географических объектов (моря, залива, района).

Краткое обоснование методики расчета. Вывод расчетных формул. Как указывалось в разделе 3.2 настоящей главы, вычисление члена A_Ω в выражениях (3.22) можно вести двумя путями. В первом случае приливообразующая сила выражается через статический прилив, определяемый формулами типа (3.6), и тогда для вычисления работы во всем бассейне требуется информация о приливных течениях u только на жидком контуре расчетной области, в то время как для всей площади бассейна достаточно знать приливные колебания уровня η. Во втором случае приливообразующая сила (через свои компоненты $F^{\rightarrow}$ и $F^{\uparrow}$ или F_x, F_y) определяется для всей области непосредственно по формулам типа (3.7); при этом информации о колебаниях уровня не требуется вообще, но зато по всей площади бассейна надо иметь данные о приливных течениях. Следовательно, выбор одного из указанных способов расчета зависит от характера и полноты имеющейся информации о приливных движениях в исследуемом районе. Следует отметить, что первый способ часто связан с определением малых разностей больших величин и в этом смысле уступает второму по точности.

Для непосредственного перехода к вычислениям необходимы некоторые дополнительные теоретические обоснования и преобразования с вводом понятий, используемых в океанографической практике. Приведем их для обоих вариантов расчета.

Вариант 1. Из выражений (3.22) следует, что при расчете по варианту 1 астрономический поток энергии состоит из двух частей: «поверхностной» A^S_Ω и «контурной» A^Γ_Ω, причем

$$A^S_\Omega = \rho g \iint\limits_S \hat{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}\, dS; \quad A^\Gamma_\Omega = \rho g \oint\limits_\Gamma h u_n \hat{\eta}\, d\Gamma. \tag{3.30}$$

Соответствующие плотности потока a^S_Ω и a^Γ_Ω приведены в выражении (3.14).

Если вести отсчет времени во всех точках расчетной области от единого момента максимального значения статического прилива M_2 на меридиане Гринвича (нулевом), то зависимость величин $\hat{\eta}$, η и u_n от времени можно изобразить в виде

$$\begin{gathered} \hat{\eta} = \widehat{H} \cos(\omega t + 2\lambda); \\ \eta = H \cos(\omega t + 2\lambda - K) = H \cos(\omega t - g); \\ u_n = U_n \cos(\omega t + 2\lambda - K_n) = U_n \cos(\omega t - g_n), \end{gathered} \tag{3.31}$$

где $\widehat{H}$ — местная амплитуда статического прилива; H — местная амплитуда реального прилива; K — местный угол положения; g — специальный угол положения, взятый по времени нулевого меридиана (иногда обозначается через γ [7]); U_n — местное амплитудное значение скорости u_n; K_n — местная фаза нормального к контуру приливного течения, отсчитываемая от момента максимального значения статического прилива, т. е. от момента кульманации Луны на меридиане места; g_n — специальный угол положения нормального к контуру приливного течения, взятый по времени нулевого меридиана. Пары значений H, K или H, g, а также U_n, K_n или U_n, g_n представляют собой *гармонические постоянные*.

Для гармоники M_2, частота которой $\omega_{M_2} = 1{,}4052 \cdot 10^{-4}$ рад/с $= 28{,}984\,°$/ч, имеем на основании выражений (3.6): $\widehat{H} = 24{,}3 \cos^2 \varphi$ см. Величины K и g связаны между собой соотношением $K = g + 2\lambda$.

Если отсчет времени ведется в каждой точке от момента местного максимального значения статического прилива M_2, то зависимость величин $\widehat{\eta}$, η и u_n от времени изобразится в виде

$$\widehat{\eta} = \widehat{H} \cos(\omega t); \quad \eta = H \cos(\omega t - K); \quad u_n = U_n \cos(\omega t - K_n). \tag{3.32}$$

Для получения расчетных формул подставим выражения (3.32) в выражения для a^S_Ω и a^Γ_Ω.

В результате получаем после ряда элементарных преобразований:

$$a^S_\Omega = (1/2)\,\rho g \omega \widehat{H} H \sin K\,[1 + \cos(2\omega t)] - (1/2)\,\rho g \omega \widehat{H} H \cos K \sin(2\omega t); \tag{3.33}$$

$$a^\Gamma_\Omega = (1/2)\,\rho g h \widehat{H} U_n \cos K_n\,[1 + \cos(2\omega t)] + \\ + (1/2)\,\rho g h \widehat{H} U_n \sin K_n \sin(2\omega t). \tag{3.34}$$

Первые слагаемые в правых частях выражений (3.33) и (3.34) представляют собой активные составляющие поверхностного и контурного астрономического потока энергии, а вторые слагаемые — реактивные составляющие. При осреднении за период реактивные составляющие исчезают, а из активных получаем плотность чистого потока энергии:

$$\langle a^S_\Omega \rangle = (1/2)\,\rho g \omega \widehat{H} H \sin K; \tag{3.35}$$

$$\langle a^\Gamma_\Omega \rangle = (1/2)\,\rho g h \widehat{H} U_n \cos K. \tag{3.36}$$

Вариант 2. При расчете по варианту 2 весь астрономический поток энергии выражается одним членом

$$A_\Omega = \iint\limits_S h \mathbf{u} \mathbf{F}\, dS, \tag{3.37}$$

а выражение для плотности этого потока $a_\Omega = h\mathbf{u}\mathbf{F}$ можно записать в виде

$$a_\Omega = h\,(uF_x + vF_y). \tag{3.38}$$

Если вести отсчет времени от момента кульминации Луна на меридиане Гринвича, то на основании выражений (3.7) для гармоники M_2 можно записать:

$$F_x = -F_{x,0}\sin(\omega t + 2\lambda); \quad F_y = -F_{y,0}\cos(\omega t + 2\lambda); \tag{3.39}$$
$$u = U\cos(\omega t + 2\lambda - K_u) = U\cos(\omega t - g_u);$$
$$v = V\cos(\omega t + 2\lambda - K_v) = V\cos(\omega t - g_v),$$

где $F_{x,0} = 7{,}483\cos\varphi \cdot 10^{-10}$ — местная амплитуда зонального компонента приливообразующей силы; $F_{y,0} = 3{,}742\sin(2\varphi)\cdot 10^{-10}$ — местная амплитуда меридионального компонента приливообразующей силы; U, V — амплитуда составляющих приливного течения на параллель и меридиан; K_u, K_v — местные углы положения указанных составляющих приливного течения; g_u, g_v — специальные углы положения тех же составляющих течения. Пары значений U, K_u или V, K_v, а также U, g_u и V, g_v представляют собой гармонические постоянные проекций приливного течения.

При отсчете времени в любом пункте от момента местной кульминации Луны получаем:

$$F_x = -F_{x,0}\sin(\omega t); \quad F_y = -F_{y,0}\cos(\omega t); \tag{3.40}$$
$$u = U\cos(\omega t - K_u); \quad v = V\cos(\omega t - K_v).$$

Подстановка выражений (3.40) в (3.38) дает: $a_\Omega = a_{\Omega,x} + a_{\Omega,y}$, где член $a_{\Omega,x}$ характеризует работу, совершаемую зональным компонентом приливообразующей силы, а $a_{\Omega,y}$ — работу, совершаемую меридиональным компонентом, причем

$$a_{\Omega,x} = -(1/2)hUF_{x,0}\sin K_u\,[1 - \cos(2\omega t)] -$$
$$-(1/2)hUF_{x,0}\cos K_u \sin(2\omega t); \tag{3.41}$$
$$a_{\Omega,y} = -(1/2)hVF_{y,0}\cos K_v\,[1 + \cos(2\omega t)] -$$
$$-(1/2)hVF_{y,0}\sin K_v \sin(2\omega t).$$

Здесь первые слагаемые в правых частях представляют собой активные составляющие астрономического потока энергии, а вторые слагаемые — реактивные составляющие. При осреднении по периоду получаем плотность чистого потока:

$$\langle a_{\Omega,x}\rangle = -(h/2)UF_{x,0}\sin K_u; \quad \langle a_{\Omega,y}\rangle = -(h/2)VF_{y,0}\cos K_v. \tag{3.42}$$

Исходные данные. Для выполнения расчетов требуется иметь данные о всех величинах, входящих в расчетные формулы (3.33) — (3.36), (3.41) и (3.42). Среди них величины ρ и g можно считать постоянными (например, $\rho = 1027$ кг/м^3 и $g = 9{,}81$ м/с^2), а величину h можно определить с помощью батиметрической карты района. Величины $\widehat{H}$, $F_{x,0}$ и $F_{y,0}$ могут быть вычислены с помощью формул (3.6) и (3.7) для точек с известными географическими координатами φ и λ.

Далее, из наблюдений, по результатам расчетов либо с помощью имеющихся справочников и пособий для тех же точек должны быть определены характеристики приливных движений в виде гармонических постоянных H, K; U_n, K_n; U, K_u; V, K_v. В частности, в качестве источника этих данных могут служить атласы приливов и приливных течений (см. например, [1]) и отдельные карты, опубликованные в различных научных изданиях. При использовании атласов и других прикладных пособий необходимо обращать внимание на соответствие между приведенными в них данными и теми величинами, которые входят в расчетные формулы. Следует иметь в виду, что содержание атласов и пособий относится обычно не к отдельным приливным гармоникам, а к характеристикам «суммарных» приливных течений. Таким образом, эти данные, как правило, требуют предварительной «переработки» с целью выделения гармонических составляющих. Проще всего это можно сделать в районах с полусуточными течениями (Северное море, Ла-Манш). Конкретная процедура подготовки данных для расчета в каждом случае зависит от характера их представления в пособии и от методики его составления. В необходимых случаях требуется произвести переход от элементов *эллипса приливного течения* к амплитудам и фазам проекций течения на параллель и меридиан. При необходимости производят также перевод специальных углов положения g в местные K; при этом, если угол g взят по времени нулевого меридиана ($g=g_0$), то перевод производится по формуле

$$K=g_0+n\lambda, \tag{3.43}$$

а если угол g взят по местному времени ($g=g_\lambda$), то используется формула

$$K=g_\lambda+n\lambda-(\omega/15)\,\lambda, \tag{3.44}$$

где $n=1$ для суточного прилива либо $n=2$ для полусуточного, а величина ω выражена в градусах в час.

Порядок выполнения работы

Вычисление астрономического потока приливной энергии ведется путем численного интегрирования, т. е. сначала определяются локальные значения плотности потока для центра элемента сеточной области (ячейки $\Delta S=\Delta x\,\Delta y$) или элемента контура (отрезка $\Delta\Gamma=\Delta x,\ \Delta y$), затем находится поток энергии, приходящийся на весь элемент ($a_\Omega^S\,\Delta S$ и $a_\Omega^\Gamma\,\Delta\Gamma$ при расчете по варианту 1; $a_\Omega\,\Delta S$ при расчете по варианту 2), а после этого производится суммирование по всей площади или жидкой части контура.

Выполнение работы начинается с выбора района, для которого имеется приливная карта (котидальные линии и изоамплитуды) и карта приливных течений (ежечасные векторы либо эллипсы течений). Производится построение расчетной сетки, определение площади ячеек ΔS, длины отрезков $\Delta\Gamma$ и глубин h, характерных для каждого из элементов. С помощью формул (3.6) для центров элементов ΔS и $\Delta \Gamma$ рассчитывается амплитуда статического прилива $\widehat{H}$ либо по формулам (3.7) для центров ячеек ΔS рассчитываются амплитуды проекций приливообразующей силы $F_{x,0}$ и $F_{y,0}$.

Далее, с помощью приливной карты и карты течений для узлов расчетной сетки и границы определяются параметры приливных колебаний уровня (H, K) и течений (U_n, K_n; U; K_u; V, K_v) с необходимым пересчетом углов положения и учетом долготы

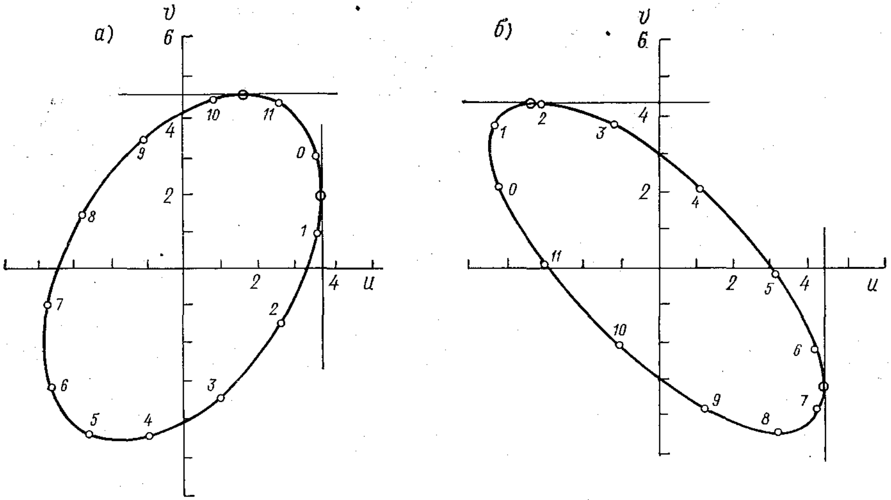


Рис. 3.1. Определение амплитуд и фаз составляющих u и v приливного течения, заданного в форме эллипса.

а — эллипс ориентирован в квадрантах I, III; *б* — эллипс ориентирован в квадрантах II, IV. Количественные данные и результаты см. в тексте.

узловых точек. Если в качестве исходных данных имеются параметры эллипсов приливных течений, то для определения амплитуд и фаз проекций течения u и v можно воспользоваться графическим способом (рис. 3.1). Из рис. 3.1 видно, что величины U и V определяются как соответствующие координаты (x и y) точек касания к эллипсу прямых, проведенных перпендикулярно к одноименным осям. Фазы K_u и K_v определяются путем интерполяции на те же точки касания значений оцифровки эллипсов (после того как эта оцифровка пересчитана на местное время, отсчитываемое от момента местной кульминации Луны). Так, для приведенных на рис. 3.1 графических примеров имеем: а) $U=37$ см/с; $K_u = 0{,}5 \cdot 30 = 15°$; $V = 45$ см/с; $K_v = 10{,}4 \cdot 30 = 312°$; б) $U = 43$ см/с; $K_u = 6{,}6 \cdot 30 = 198°$; $V = 44$ см/с; $K_v = 1{,}9 \cdot 30 = 57°$.

Для определения величин U_n, K_n на границе расчетной области векторы течений, определяемые эллипсом, должны быть спроектированы на нормаль к жидкому контуру.

После определения гармонических постоянных колебаний уровня и течений можно переходить к вычислению величин a^S_Ω, a^Γ_Ω, $a_{\Omega,x}$, $a_{\Omega,y}$ и их осредненных по периоду значений — чистых потоков. При этом целесообразно начинать с определения именно чистых потоков $\langle a^S_\Omega \rangle$, $\langle \alpha^\Gamma_\Omega \rangle$ $\langle a_{\Omega,x} \rangle$, $\langle a_{\Omega,y} \rangle$ по формулам (3.35), (3.36) и (3.42), а также амплитуд реактивных составляющих $\tilde{a}^S_\Omega$, $\tilde{a}^\Gamma_\Omega$, $\tilde{a}_{\Omega,x}$ и $\tilde{a}_{\Omega,x}$ и $\tilde{a}_{\Omega,y}$ по формулам

$$\tilde{a}^S_\Omega = -(1/2)\rho g\omega \widehat{H} H \cos K; \quad \tilde{a}^\Gamma_\Omega = (1/2)\rho g h \widehat{H} U_n \sin K; \tag{3.45}$$

$$\tilde{a}_{\Omega,x} = -(1/2) h U F_{x,0} \cos K_u; \quad \tilde{a}_{\Omega,y} = -(1/2) h V F_{y,0} \sin K_v.$$

Следует найти затем величины $\langle a^I_\Omega \rangle = \langle a^S_\Omega \rangle + \langle a^\Gamma_\Omega \rangle$, $\langle a^{II}_\Omega \rangle = \langle a_{\Omega,x} \rangle + \langle a_{\Omega,y} \rangle$ и сравнить $\langle a^I_\Omega \rangle$ и $\langle a^{II}_\Omega \rangle$ друг с другом (в идеальном случае они должны быть равны). Величины $\langle a^I{}_\Omega \rangle$ и $\langle a^{II}_\Omega \rangle$ надо картировать с помощью изолиний.

Мгновенные значения плотности астрономического потока энергии определяются по следующим формулам:

вариант 1:

$$a^I_\Omega = \langle a^I_\Omega \rangle [1 + \cos(2\omega t)] + (\tilde{a}^S_\Omega + \tilde{a}^\Gamma_\Omega) \sin(2\omega t); \tag{3.46}$$

вариант 2:

$$a^{II}_\Omega = \langle a^{II}_\Omega \rangle + (\langle a_{\Omega,y} \rangle - \langle a_{\Omega,x} \rangle) \cos(2\omega t) + (\tilde{a}_{\Omega,x} + \tilde{a}_{\Omega,y}) \sin(2\omega t). \tag{3.47}$$

Расчет потока a_Ω по обоим вариантам нужно произвести на каждый целый час приливного цикла для полусуточного прилива и на каждый четный час для суточного (через интервалы значений ωt, равные 30°, начиная с $\omega t = 0$ до $\omega t = 360°$.) На каждый из этих моментов следует определить суммарные для всей площади значения A_Ω путем численного интегрирования и построить график временного хода величины A_Ω за приливный цикл.

Аналогичным образом нужно рассчитать суммарные по всей площади значения чистого астрономического потока $\langle A^I_\Omega \rangle$ и $\langle A^{II}_\Omega \rangle$.

В заключение производится сравнение величин $\langle A_\Omega \rangle$ и A_Ω, вычисленных по различным вариантам.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

РАСЧЕТ ИНТЕНСИВНОСТИ ДИССИПАЦИИ ПРИЛИВНОЙ ЭНЕРГИИ ДОННЫМ ТРЕНИЕМ

В данной лабораторной работе требуется выполнить расчет скорости энергетических потерь приливной энергии за счет донного трения при условии квадратичного закона сопротивления, т. е.

вычислить член A_R в выражениях (3.22). Желательно это проделать для того же района, что и в лабораторной работе № 1.

Обоснование методики расчета. Выражение (3.15) для плотности потока, характеризующего скорость диссипации приливной энергии донным трением, может быть переписано в виде

$$a_R = -k\rho\left(u^2 + v^2\right)^{3/2}. \tag{3.48}$$

Представив компоненты скорости течения u и v в виде

$$u = U\cos(\omega t - g_u); \quad v = V\cos(\omega t - g_v)$$

и подставляя эти выражения в (3.48), получаем после тригонометрических преобразований:

$$a_R = -(1/2)^{3/2} k\rho\left\{U^2 + V^2 + U^2\cos\left[2(\omega t - g_u)\right] + \right.$$
$$\left. + V^2\sin\left[2(\omega t - g_v)\right]\right\}^{3/2}. \tag{3.49}$$

Если выбрать ориентацию координатных осей таким образом, чтобы ось x была направлена вдоль большой оси эллипса течения, а ось y — вдоль его малой оси, то для компонентов скорости течения будем иметь

$$U = A; \quad V = B; \quad g_u = g_A; \quad g_v = g_B = g_A \pm 90°, \tag{3.50}$$

где A, g_A — амплитуда и фаза максимального течения; B, g_B — амплитуда и фаза минимального течения. Знак «плюс» в выражении для g_v соответствует левому вращению вектора приливного течения, а знак «минус» — правому.

Подставляя выражения (3.50) в (3.49), принимая $\rho = 1027$ кг/м^3 и $k = 0{,}0026$, получаем:

$$a_R = -0{,}944 A^3 \mathcal{F}, \tag{3.51}$$

где величина a_R имеет размерность джоуль на квадратный метр в секунду, а величина A выражена в метрах в секунду. Безразмерная функция $\mathcal{F}$ выражается в виде

$$\mathcal{F} = \left\{\left(1 + \alpha^2\right) + \left(1 - \alpha^2\right)\cos\left[2(\omega t - g_A)\right]\right\}^{3/2} \tag{3.52}$$

и характеризует временну́ю изменчивость величины a_R при различных значениях *коэффициента полноты эллипса течения* $\alpha = B/A$. На рис. 3.2 приведены значения произведения $0{,}944\mathcal{F}$ (размерность джоуль-секунда в квадрате на метр в пятой степени) при нулевом значении фазы максимального течения (т. е. при $g_A = 0$); этот рисунок может служить номограммой для быстрого определения величины a_R по известным значениям скорости максимального и минимального течения A и B (размерность метры в секунду).

Плотность чистого потока энергии, теряемой за счет диссипации донным трением, получаем путем осреднения выражения (3.51) по периоду τ:

$$\langle a_R \rangle = \frac{0{,}944 A^3}{\tau}\int_0^\tau \mathcal{F}\, dt. \tag{3.53}$$

Величина $(0{,}944/\tau)\int\limits_0^t \mathcal{F}\,dt$ зависит только от коэффициента полноты эллипса течения α. Эта зависимость изображена на рис. 3.3, который также может служить номограммой для быстрого определения величины $\langle a_R\rangle$ по известным параметрам эллипса приливного течения (A и α).

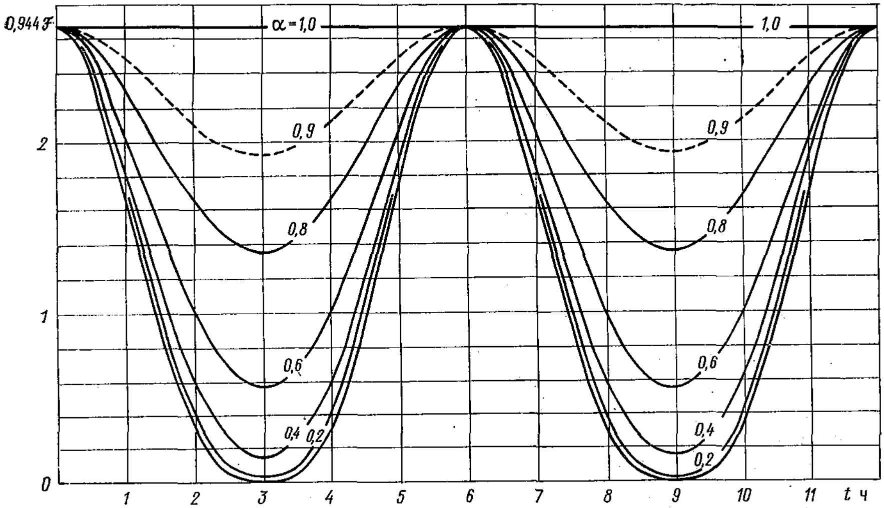


Рис. 3.2. Зависимость величины $0{,}944\mathcal{F}$ от времени при различных значениях коэффициента полноты эллипса течения α при условии $g_A = 0$. При отличном от нуля значении g_A отсчет времени по горизонтальной оси надо начинать с этого значения, переоцифровав временную шкалу. Снятая с графика величина $0{,}944\mathcal{F}$ после умножения на куб максимальной скорости приливного течения, выраженной в метрах в секунду, дает мгновенную локальную мощность диссипативных энергетических потерь в соответствующий момент времени (a_R), выраженную в джоулях на квадратный метр в секунду.

Исходные данные. Необходимыми для выполнения работы исходными материалами являются значения констант ρ и k, а также данные о скорости приливных течений. Общепринятые значения ρ и k ($\rho = 1027$ кг/м^3 и $k = 0{,}0026$) были приведены выше.

Как и в остальных лабораторных работах в разделе «Приливные волны», здесь при использовании атласов и прикладных пособий сохраняется необходимость перевода представленного в них материала в форму, пригодную для применения расчетных формул и номограмм, которые приведены в предыдущем разделе. Из них следует, что исходный материал в конечном счете должен быть задан в виде эллипсов течений для отдельных приливных гармоник. При этом для непосредственного расчета нужны лишь данные о большой и малой полуосях этих эллипсов, а сведений об их фазе, ориентации и направлении вращения, т. е. данных о ежечасных значениях вектора течения — не требуется.

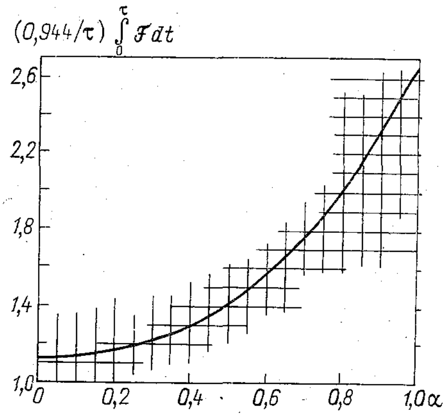


Рис. 3.3 Зависимость величины $(0{,}944/\tau)\int\limits_0^\tau \mathcal{F}\,dt$ от коэффициента полноты эллипса течения α. Снятая с графика величина, умноженная на куб максимальной скорости приливного течения, выраженной в метрах в секунду, дает плотность чистого потока энергии, теряемой за счет диссипации ($\langle a_R \rangle$), выраженную в джоулях на квадратный метр в секунду.

Порядок выполнения работы

Если данные о течениях представлены в виде изолиний элементов эллипсов, а расчетная область разбита сеткой на ячейки ΔS, то величины A и α определяются для центра каждой ячейки простой интерполяцией. Если же исходные данные имеются в виде полей ежечасных скоростей, то для центра ячейки строится характерный для нее эллипс приливного течения, после чего величины A и α определяются графически.

Далее по формуле (3.51) и с помощью номограммы на рис. 3.2, с учетом также фазы максимального приливного течения, производится расчет плотности фрикционного потока a_R на каждый час приливного цикла. Для каждого часа путем интегрирования определяется фрикционный поток для всей расчетной области и строится график временного хода величины A_R.

Затем по формуле (3.53), с помощью номограммы на рис. 3.3 рассчитывается плотность чистого фрикционного потока $\langle a_R \rangle$ для каждой ячейки. Результат целесообразно картировать с помощью изолиний. Наконец, нужно с помощью численного интегрирования определить суммарный для всей области чистый фрикционный поток $\langle A_R \rangle$.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

РАСЧЕТ ВОЛНОВОГО ПОТОКА ПРИЛИВНОЙ ЭНЕРГИИ

В этой лабораторной работе требуется выполнить расчет горизонтальных потоков приливной энергии, обусловленных волновым переносом. Определение интегрального потока энергии через жидкий контур расчетной области дает составляющую энергетического баланса A_W. Однако, если исходные данные позволяют, имеет смысл произвести расчет плотностей этого потока **w** по всей площади бассейна, что дает возможность построить векторное поле волновых потоков, представляющее самостоятельный интерес. Расчет желательно выполнить для того же района, что и в лабораторных работах № 1 и 2.

Обоснование методики расчета. В простейшем случае, когда приливные течения имеют реверсивный характер, расчет волнового потока приливной энергии может осуществляться по формулам (3.27) и (3.28). Однако в действительности приливные течения, как правило, являются вращающимися и их годограф имеет эллиптическую форму (для отдельной гармоники), образуя так называемый эллипс приливного течения. Поэтому в общем случае для любой точки бассейна можно записать:

$$\eta = H\cos(\omega t - g);\quad u = U\cos(\omega t - g_u);\quad v = V\cos(\omega t - g_v). \qquad (3.54)$$

В этом случае вектор плотности волнового потока **w**, определяемый выражением (3.17), тоже будет изменять свое направление. Из выражений (3.17) и (3.54) получаем выражения для компонентов вектора **w** вдоль осей x и y:

$$\begin{aligned} w_x &= (1/2)\rho g h H U \cos\beta_x \{1 + \cos[2(\omega t - g)]\} + \\ &+ (1/2)\rho g h H U \sin\beta_x \sin[2(\omega t - g)]; \\ w_y &= (1/2)\rho g h H V \cos\beta_y \{1 + \cos[2(\omega t - g)]\} + \\ &+ (1/2)\rho g h H V \sin\beta_y \sin[2(\omega t - g)], \end{aligned} \qquad (3.55)$$

где $\beta_x = g_u - g$ и $\beta_y = g_v - g$ — фазовые сдвиги компонентов течения u и v относительно η. Первые слагаемые в правых частях характеризуют активную, а вторые слагаемые — реактивную составляющую потока энергии ($w_{a,\,x}$, $w_{a,\,y}$ и $w_{r,\,x}$, $w_{r,\,y}$). Из выражений (3.55) следует, что отношения $w_{a,\,x}/w_{a,\,y}$ и $w_{r,\,x}/w_{r,\,y}$ не зависят от времени, а это означает, что направления векторов $\mathbf{w}_a$ и $\mathbf{w}_r$ остаются неизменными и определяются следующими азимутальными углами (отсчитываемыми по часовой стрелке от положительного направления оси y):

$$\begin{aligned} \gamma_a &= \operatorname{arctg}(w_{a,\,x}/w_{a,\,y}) = \operatorname{arctg}[U\cos\beta_x/(V\cos\beta_y)]; \\ \gamma_r &= \operatorname{arctg}(w_{r,\,x}/w_{r,\,y}) = \operatorname{arctg}[U\sin\beta_x/(V\sin\beta_y)]. \end{aligned} \qquad (3.56)$$

При сравнении (3.56) с (3.54) видно, что азимут γ_a совпадает с направлением приливного течения в момент $t_{\text{пв}} = g/\omega$ (полная вода), а азимут γ_r — с направлением течения в моменты $t_{\text{пв}} \pm \tau/4$ (переход уровня через нуль). Таким образом, направления течения в указанные характерные моменты определяют постоянную ориентацию векторов $\mathbf{w}_a$ и $\mathbf{w}_r$. При этом вектор $\mathbf{w}_a$ в течение всего приливного периода сохраняет свой знак, обращаясь в нуль при $t = t_{\text{пв}} \pm \tau/4$, т. е. имеет пульсирующий характер, в то время как переменный вектор $\mathbf{w}_r$ изменяет свой знак при $t = t_{\text{пв}}$ (полная вода) и при $t=t_{\text{пв}}\pm\tau/2$ (малая вода). Максимальные значения модулей этих векторов равны

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}_a|_{\text{макс}} &= \rho g h H \sqrt{U^2\cos^2\beta_x + V^2\cos^2\beta_y} = m u_{\text{пв}}; \\ |\mathbf{w}_r|_{\text{макс}} &= (1/2)\rho g h H \sqrt{U^2\sin^2\beta_x + V^2\sin^2\beta_y} = (1/2)\, m u_{\tau/4}, \end{aligned} \tag{3.57}$$

где $m=\rho g h H$, а $u_{\text{пв}}$ и $u_{\tau/4}$ — скорости течения в моменты $t_{\text{пв}}$ и $t_{\text{пв}}\pm\tau/4$. При осреднении по периоду реактивный член обращается в нуль, а активный дает плотность чистого потока энергии $\langle\mathbf{w}\rangle$ с компонентами

$$\langle w_x\rangle = (1/2)\, mU\cos\beta_x, \quad \langle w_y\rangle = (1/2)\, mV\cos\beta_y. \tag{3.58}$$

Отсюда видно, что направление вектора $\langle\mathbf{w}\rangle$ определяется углом γ_a, а его модуль равен половине максимального значения модуля вектора $\mathbf{w}_a$, т. е.

$$|\langle\mathbf{w}\rangle| = m u_{\text{пв}}/2. \tag{3.59}$$

Исходные данные. Исходным материалом для расчета служат значения констант ρ и g, сведения о распределении глубин h, а также данные о фактических приливных колебаниях уровня и приливных течениях. Значения констант, а также возможные источники сведений о глубинах и приливных движениях указаны в соответствующем разделе лабораторной работы № 1. Отметим еще раз, что используемые в расчете характеристики колебаний уровня и течений должны относиться к отдельным гармоническим составляющим прилива, т. е. может возникнуть необходимость в «переработке» данных атласов и других прикладных пособий.

Если данные о колебаниях уровня и течениях относятся к разным точкам (например, при использовании результатов численных расчетов, выполненных по «разнесенной» сетке), то надо путем интерполяции представить поле величин η, u и v с помощью «единой» сетки с заданием значений всех трех величин в каждом из ее узлов. При этом крайние узлы расчетной сетки должны совпадать с контуром исследуемой области. Затем для каждой узловой точки следует построить эллипс течения с ежечасными векторами.

При определении глубин h с помощью батиметрической карты каждому узлу сетки следует приписывать среднюю глубину площадки размером $\Delta x\,\Delta y$, окружающей данную узловую точку.

Порядок выполнения работы

Характеристики волнового потока приливной энергии для пунктов, в которых известны гармонические постоянные колебаний уровня и параметры эллипса приливного течения, а также глубина h, могут быть найдены простым полуграфическим способом. Из выражения (3.17) очевидно, что направление вектора $\mathbf{w}$ в каждый момент времени либо совпадает с направлением существующего в тот же момент течения (при $\eta > 0$), либо противоположно ему (при $\eta < 0$). Тогда, учитывая моменты перехода величины η через нуль ($t_{\tau/4} = g/\omega \pm \tau/4$), можно отметить их на эллипсе тече-

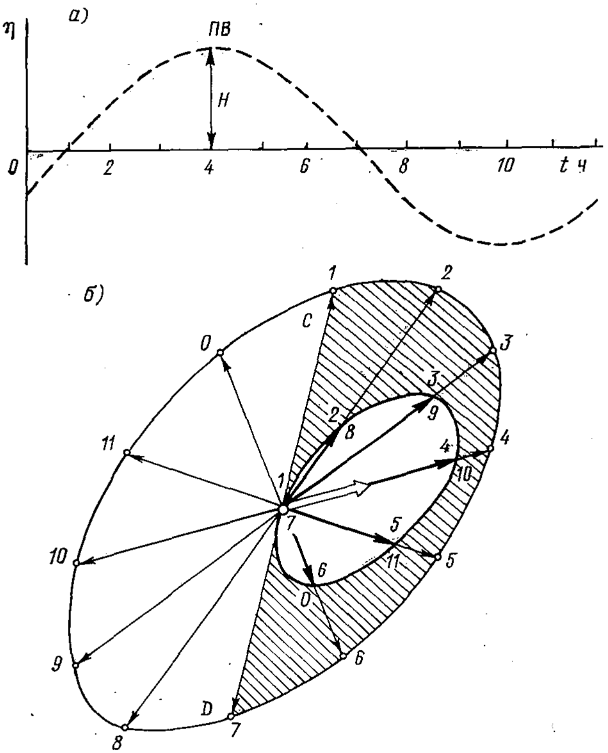


Рис. 3.4. Построение эллиптического годографа вектора волнового потока приливной энергии.

а — приливное колебание уровня (отмечен момент полной воды); *б* — эллипсы приливного течения (тонкая линия) и векторы волнового потока энергии (жирная линия). Широкой стрелкой показан вектор плотности чистого потока ($\mathbf{w}$).

ния и, проведя через соответствующие точки эллипса диаметр CD (рис. 3.4), сразу выделить ту половину горизонта (заштрихованную на рисунке), куда направлены мгновенные потоки энергии. Вектор течения на момент полной воды ($t_{\text{пв}} = g/\omega$) указывает направление активного и чистого потоков энергии, а векторы на моменты перехода уровня через нуль ($t_{\tau/4}$) — направление реактивного потока. Для определения значения модуля вектора $\mathbf{w}$ на произвольный момент t нужно умножить модуль соответствующего вектора течения $\mathbf{u}_t$ на коэффициент, равный $m \cos^2(\omega t - g)$, где $m = \rho g h H$ (здесь g — ускорение свободного падения — постоянная для данного пункта величина. В частности, для модулей плотности максимального активного потока $|\mathbf{w}_a|_{\text{макс}}$, максимального реактивного потока $|\mathbf{w}_r|_{\text{макс}}$ и чистого потока $|\langle\mathbf{w}\rangle|$ получаем:

$$|\mathbf{w}_a|_{\text{макс}} = mu_{\text{пв}};\quad |\mathbf{w}_r|_{\text{макс}} = (1/2)\, mu_{\tau/4};\quad |\langle\mathbf{w}\rangle| = (1/2)\, mu_{\text{пв}}. \tag{3.60}$$

Суммарный поток энергии $\mathbf{w}$ в данной точке представляет собой вектор, «веерообразно» изменяющийся во времени. Годограф этого вектора образует эллипс, подобный эллипсу приливного течения как по степени сжатия, так и по ориентации (см. рис. 3.4). Этот «энергетический эллипс» касается диаметра CD в центре эллипса течения и опирается на концы векторов $\mathbf{w}$, выходящих из этой точки касания; при этом за один приливный период энергетический эллипс дважды обегается вектором $\mathbf{w}$. Отрезок, соединяющий центры обоих эллипсов, направлен по радиусу, сопряженному с диаметром CD, и совпадает по направлению (а в принятом для $\mathbf{w}$ масштабе — и по модулю с вектором плотности чистого потока $\langle\mathbf{w}\rangle$. Таким образом, для построения «энергетического эллипса» требуется:

— построить эллипс течения;

— по известному значению g определить моменты $t_{\tau/4}$ и, отметив соответствующие точки на эллипсе течения, провести диаметр CD;

— определив по формулам (3.60) максимальные значения векторов $\mathbf{w}_a$ и $\mathbf{w}_r$, отложить их в удобном масштабе вдоль векторов $\mathbf{u}_{\text{пв}}$ и $\mathbf{u}_{\tau/4}$;

— рассчитать значения модулей векторов $\mathbf{w}$ на остальные моменты времени по формуле

$$w_t = m \cos^2(\omega t - g)\, u_t \tag{3.61}$$

и отложить их в том же масштабе вдоль векторов $\mathbf{u}_t$;

— по концам векторов $\mathbf{w}_r$ и с учетом значений $\mathbf{w}_a$ и $\mathbf{w}_r$ построить энергетический эллипс.

Вектор плотности чистого потока $\langle\mathbf{w}\rangle$ можно получить, не строя энергетического эллипса, а просто отложив вдоль вектора $\mathbf{u}_{\text{пв}}$ отрезок, равный $mu_{\text{пв}}/2 = |\mathbf{w}_a|_{\text{макс}}/2$.

В рамках данной лабораторной работы построение энергетических эллипсов достаточно проделать не для всех узловых точек сетки, а только для некоторых (пяти—шести) по выбору преподавателя. В то же время определение вектора $\langle\mathbf{w}\rangle$ следует выполнить для всех точек, в которых есть необходимые данные, особенно для точек жидкого контура. Для оценки составляющей энергетического баланса расчетной области (члена A_W) необходимо путем численного интегрирования рассчитать суммарный поток энергии через жидкие границы, т. е. определить нормальные к контуру проекции векторов $\langle\mathbf{w}\rangle$, умножить каждую из этих проекций на длину соответствующего элемента границы $\Delta\Gamma$ и просуммировать результаты.

Если наряду с определением члена A_W удается получить поле векторов $\langle \mathbf{w} \rangle$ для всей площади расчетной области, то мы дополнительно получаем картину средней горизонтальной циркуляции приливной энергии в пределах рассматриваемого бассейна, что также является важной характеристикой его приливного режима. При необходимости можно, построив векторы $\mathbf{w}$ для всех точек на различные моменты, получить наряду со средней циркуляцией также и ее мгновенные «снимки» на любую фазу приливного цикла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 3

1. Атлас приливов и течений Северного и Ирландского морей.— Л.: ГС ВМФ, 1956.
2. Богданов К. Т. Приливы Мирового океана.— М.: Наука, 1975.— 116 с.
3. Динамика океана/Учебник под ред. Ю. П. Доронина.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.— 304 с.
4. Каган Б. А. Приливы//Физика океана. Т. 2. Гидродинамика океана.— М.: Наука, 1977.— С. 255—299.
5. Марчук Г. И., Каган Б. А. Динамика океанских приливов/Изд. 2-е, перераб. и доп.— Л.: Гидрометеоиздат, 1991.— 468 с.
6. Некрасов А. В. Приливные волны в окраинных морях.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975.— 274 с.
7. Океанографические таблицы/Изд. 4-е, перераб. и доп.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975.— 477 с.
8. Руководство по обработке наблюдений над уровнем моря.— Л.: Изд. Упр. нач. ГС ВМФ, 1957.— 307 с.

ГЛАВА 4

ВОЛНЫ В ШЕЛЬФОВОЙ ЗОНЕ

4.1. Влияние отражения на трансформацию волны в зоне шельфа

При исследовании поведения длинных волн в зоне материкового склона и шельфа, в окраинных морях и заливах, а также непосредственно в прибрежной зоне можно выделить физические процессы, общие для волн различного происхождения — приливных, сейш, волн цунами и даже ветровых волн на мелководье. Эти процессы определяются топографическими особенностями рельефа дна шельфовой зоны, который характеризуется общим уменьшением глубины при подходе к берегу, а также наличием на границах шельфа зон с хорошо выраженными отражательными свойствами. Возрастание высоты волны и уменьшение ее длины вследствие уменьшения глубины (эффект Грина), процессы рефракции и отражения ведут к существенной трансформации волны в зоне шельфа. Топографические эффекты, связанные с захватом волновой энергии, могут привести к еще более значительной перестройке всей структуры волнового поля. Достаточно ярким примером влияния рельефа дна на длинные волны могут служить волны цунами. Практически незаметные в открытом океане, эти волны при выходе в шельфовую зону и особенно при накате на берег заметно усиливаются и нередко приводят к катастрофическим последствиям.

Волны цунами и сейши являются «свободными» волнами, трансформация которых происходит под действием локальных факторов и не зависит от действия внешних сил. Приливные колебания в мелководной шельфовой зоне создаются главным образом в результате прихода приливных волн из открытого океана, поэтому для исследования приливов в зоне шельфа действием приливообразующей силы можно пренебречь и рассматривать приливы также в форме «свободных» длинных волн, имеющих заданную частоту той или иной приливной гармоники и соответствующую длину волны. Таким образом, в прибрежной мелководной зоне появляется возможность рассматривать общие закономерности и факторы, влияющие на трансформацию волн различного происхождения, оставаясь в рамках единой теории свободных волн. Наиболее пригодной для исследования эффектов усиления и трансформации в шельфовой зоне является теория мелкой воды.

Особенности длинноволновых движений в зоне шельфа определяются совместным действием двух факторов: отражения и диссипации. Первый из этих факторов сильнее всего проявляется на границах шельфа: в районе материкового склона, отделяющего шельф от открытого океана, и на береговой черте. Действие диссипации распределяется в пределах всего шельфа, но наиболее сильно проявляется в узкостях, на мелководье и в узловых зонах стоячей доли колебаний, т. е. везде, где местные условия способствуют развитию особенно сильных течений. Вопрос о диссипации рассматривался в связи с приливами, поэтому в этой главе основное внимание уделяется первому из двух перечисленных факторов — отражению.

Степень влияния неоднородностей рельефа дна на отражение зависит от пространственных масштабов исследуемого волнового процесса. Один и тот же шельф будет характеризоваться различными отражательными свойствами по отношению к волнам различной длины. Поэтому приливные волны суточного и полусуточного периода, а тем более волны цунами будут в различной степени подвержены влиянию отражения, однако для всех из перечисленных волн в основе процесса отражения лежит зависимость фазовой скорости распространения волны от глубины. Рассмотрим несколько модельных случаев изменения глубины в зоне шельф — материковый склон, причем для простоты воспользуемся сначала одномерными уравнениями мелкой воды, которые в линейном приближении имеют вид

$$\partial\eta/\partial t + \partial\,[h(x)\,u]/\partial x = 0; \quad \partial u/\partial t + g\,\partial\eta/\partial x = 0, \tag{4.1}$$

где η — превышение уровня; u — скорость течения; $h(x)$ — глубина бассейна; g — ускорение свободного падения.

Трансформация волны в области с медленно изменяющейся глубиной. Рассмотрим сначала случай плавного изменения глубины (условие плавности приведено ниже) и изучим трансформацию монохроматической волны $\eta(x,\,t) = \mathrm{Re}\,\eta(x)\exp(i\omega t)$ (Re — знак действительной части комплексной функции). Тогда для $\eta(x)$ из (4.1) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[h(x)\frac{d\eta}{dx}\right] + \frac{\omega^2}{g}\eta = 0. \tag{4.2}$$

При постоянной глубине $h = h_0$ бассейна решение (4.2) имеет вид

$$\eta = \eta_0 \exp(-ik_0x), \quad k_0 = \omega/\sqrt{gh_0}, \tag{4.3}$$

отвечающий волне, бегущей со скоростью $\sqrt{gh_0}$, при этом ее амплитуда неизменна, а фаза $\theta = k_0x$ линейно растет с расстоянием. В случае медленно меняющейся глубины решение уравнения (4.2) отыскивается в виде, обобщающем (4.3):

$$\eta = A(x)\exp[-i\theta(x)], \tag{4.4}$$

где A — медленно меняющаяся амплитуда, а θ — «быстрая» фаза.

Подстановка (4.4) в (4.2) приводит к следующему уравнению:

$$\left[\frac{\omega^2}{g} A - h\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2 A + \frac{d}{dx}\left(h \frac{dA}{dx}\right)\right] -$$
$$- i\left[h \frac{d^2\theta}{dx^2} A + 2h \frac{d\theta}{dx} \frac{dA}{dx} + \frac{d\theta}{dx} \frac{dh}{dx} A\right] = 0. \qquad (4.5)$$

Поскольку уравнение (4.5) комплексно, то равны нулю его действительные и мнимые части, что приводит к системе уравнений

$$\left[\frac{\omega^2}{g} - h\left(\frac{d\theta}{dx}\right)^2\right] A + \frac{d}{dx}\left(h \frac{dA}{dx}\right) = 0; \qquad (4.6)$$

$$h \frac{d^2\theta}{dx^2} A + 2h \frac{d\theta}{dx} \frac{dA}{dx} + \frac{d\theta}{dx} \frac{dh}{dx} A = 0. \qquad (4.7)$$

Учтем также, что в (4.6) член $d(h\,dA/dx)/dx$ мал ввиду плавности изменения глубины бассейна и амплитуды волны. Пренебрегая им, находим из (4.6)

$$\theta = \int k(x)\,dx, \quad k = \omega/\sqrt{gh(x)}, \qquad (4.8)$$

а из (4.7) — амплитуду волны

$$A(x)\,h^{1/4}(x) = \mathrm{const}. \qquad (4.9)$$

Таким образом, при медленном изменении глубины амплитуда волны меняется в соответствии с хорошо известным законом Грина (см. главу 1), вывод которого обычно приводится из закона сохранения потока энергии и отсутствия отражения от откоса [4]. Период волны $T = 2\pi/\omega$ остается постоянным, а длина зависит от глубины $\lambda = 2\pi/k(x) = T\sqrt{gh}$.

Отметим также, что, поскольку в (4.9) не входит период волны, эти формулы справедливы не только для монохроматической волны, но и для волны любой формы, остающейся неизменной в процессе распространения. При этом характерная длительность волны (например, по уровню $^1/_2$) не меняется, а длина убывает как $\sqrt{h}$.

Условием применимости формул (4.9) и (4.8) является медленность изменения глубины (масштаб изменения которой $\Lambda \sim \sim h/dh/dx$) по сравнению с длиной волны ($\lambda = T\sqrt{gh}$), т. е.

$$\frac{dh}{ax} \ll \frac{1}{T}\sqrt{\frac{h}{g}}. \qquad (4.10)$$

Трансформация волны на уступе. Рассмотрим теперь другой предельный случай, когда глубина меняется скачком с h_1 на h_2.

Вне уступа глубина постоянна, поэтому решение уравнения (4.1) находится в явном виде:

на глубине h_1 —

$$\eta_1 = \eta_0 \exp\left[i\omega\left(t - x/\sqrt{gh_1}\right)\right] + \eta_- \exp\left[i\omega\left(t + x/\sqrt{gh_1}\right)\right]; \quad (4.11)$$

$$u_1 = \sqrt{g/h_1}\left\{\eta_0 \exp\left[i\omega\left(t - x/\sqrt{gh_1}\right)\right] - \eta_- \exp\left[i\omega\left(t + x/\sqrt{gh_1}\right)\right]\right\};$$

на глубине h_2 —

$$\eta_2 = \eta_+ \exp\left[i\omega\left(t - x/\sqrt{gh_2}\right)\right]; \quad u_2 = \sqrt{g/h_2}\,\eta_+ \exp\left[i\omega\left(t - x/\sqrt{gh_2}\right)\right]. \quad (4.12)$$

Здесь η_0, η_-, η_+ — амплитуды падающей, отраженной и прошедшей волн соответственно. На уступе должны выполняться условия непрерывности давления (уровня) и расхода воды

$$\eta_1 = \eta_2; \quad h_1 u_1 = h_2 u_2, \quad (4.13)$$

из которых находятся амплитуды отраженной и прошедшей волн — формулы Ламба [8]:

$$\frac{\eta_-}{\eta_0} = \frac{\sqrt{h_1/h_2} - 1}{\sqrt{h_1/h_2} + 1}; \quad \frac{\eta_+}{\eta_0} = \frac{2\sqrt{h_1/h_2}}{\sqrt{h_1/h_2} + 1}. \quad (4.14)$$

Из-за отражения от уступа амплитуда прошедшей волны существенно меньше, чем по закону Грина, так что формулы (4.9) и (4.14) дают предельные законы изменения высоты волны над произвольным рельефом. Формулы (4.14) также не содержат период волны, поэтому они справедливы не только для монохроматической волны, но и для волны произвольной формы, которая остается неизменной. Длительность отраженной и прошедшей волн также сохраняется, а длина меняется только у прошедшей волны пропорционально $\sqrt{h}$.

Трансформация волны над сложным рельефом дна. Итак, в предельных случаях медленного или скачкообразного изменения глубины форма волны не меняется, изменяются только амплитуда и характерная длина волны. Форма волны может измениться только тогда, когда масштаб изменения глубины сравним с длиной волны. Для демонстрации этого эффекта рассмотрим модельный рельеф дна, содержащий два скачка глубины h_3/h_1 и h_2/h_3 на расстоянии L друг от друга (рис. 4.1). Пусть волна падает из области с глубиной h_1. Тогда к решению (4.11) и (4.12) необходимо добавить решение для области с глубиной h_3:

$$\eta_3 = \eta_{3+} \exp\left[i\omega\left(t - x/\sqrt{gh_3}\right)\right] + \eta_{3-} \exp\left[i\omega\left(t + x/\sqrt{gh_3}\right)\right];$$

$$u_3 = \sqrt{g/h_3}\left\{\eta_{3+} \exp\left[i\omega\left(t - x/\sqrt{gh_3}\right)\right] - \eta_{3-} \exp\left[i\omega\left(t + x/\sqrt{gh_3}\right)\right]\right\}. \quad (4.15)$$

На каждом из уступов должны выполняться условия непрерывности уровня и расхода воды:

$$\begin{aligned} &\eta_1=\eta_3;\ h_1u_1=h_3u_3 \quad \text{при} \quad x=0; \\ &\eta_3=\eta_2;\ h_3u_3=h_2u_2 \quad \text{при} \quad x=L. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Четыре условия позволяют однозначно найти неизвестные функции η_-, η_+, η_{3+}, η_{3-}. Здесь мы приведем решение только для комплексной амплитуды прошедшей волны:

$$\frac{\eta_+}{\eta_0}=\frac{2\sqrt{h_1/h_3}\exp\left(i\omega L/\sqrt{gh_2}\right)}{\left(\sqrt{h_2/h_3}+\sqrt{h_1/h_3}\right)\cos\left(\omega L/\sqrt{gh_3}\right)+i\left(1+\sqrt{h_1h_2}/h_3\right)\sin\left(\omega L/\sqrt{gh_3}\right)}. \tag{4.17}$$

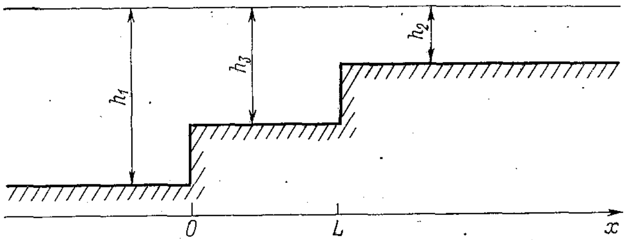


Рис. 4.1. Модельный рельеф дна, имеющий два скачка глубины.

Итак, амплитуда прошедшей волны становится зависящей от частоты. В предельном случае очень длинных волн $(\omega L/\sqrt{gh_3}\ll 1)$ формула (4.17) переходит в (4.14), так что детальная структура рельефа дна не влияет на трансформацию достаточно длинных волн. Для более коротких волн фактор $\omega L/\sqrt{gh_3}$ оказывается решающим, приводя к немонотонной зависимости высоты волны от расстояния между уступами («резонансные» эффекты). Наличие резонансных эффектов может существенно влиять на формирование колебаний уровня в шельфовой зоне. Некоторые методы количественной оценки влияния резонансного усиления рассмотрены в лабораторной работе № 2.

Отражение в условиях косого подхода волны. Рассмотрим теперь процесс отражения в случае, если волна подходит не по нормали, а под некоторым углом к внешней границе шельфа. Воспользуемся опять моделью рельефа дна в виде шельфа-ступени. Берег и границу шельфа будем считать прямолинейными и параллельными друг другу. Начало координат поместим на внешней границе шельфа, причем ось x направим в сторону океана, а ось y — вдоль бровки шельфа. Пусть глубина в глубоководной (океанической) части равна h_1, а в зоне шельфа h_2.

Если обозначить смещения уровня в идущей из океана (падающей), проникшей на шельф (преломленной) и отраженной от склона волнах через η_1, η_2 и η_3, то можно записать:

$$\eta_1 = \eta_{пд} \cos(\omega t - k_1' x - k_1'' y); \quad \eta_2 = \eta_{пр} \cos(\omega t - k_2' x - k_2'' y);$$
$$\eta_3 = \eta_{от} \cos(\omega t + k_1' x - k_1'' y), \qquad (4.18)$$

где $\eta_{пд}$, $\eta_{пр}$ и $\eta_{от}$ — амплитуды падающей, преломленной и отраженной волн. Легко рассчитать также компоненты течений u и v в каждой из волн:

$$\begin{aligned}
u_1 &= \sqrt{g/h_1}\, \eta_{пд} \cos\alpha \cos(\omega t - k_1' x - k_1'' y);\\
v_1 &= \sqrt{g/h_1}\, \eta_{пд} \sin\alpha \cos(\omega t - k_1' x - k_1'' y);\\
u_2 &= \sqrt{g/h_2}\, \eta_{пр} \cos\beta \cos(\omega t - k_2' x - k_2'' y);\\
v_2 &= \sqrt{g/h_2}\, \eta_{пр} \sin\beta \cos(\omega t - k_2' x - k_2'' y);\\
u_3 &= \sqrt{g/h_1}\, \eta_{от} \cos\alpha \cos(\omega t + k_1' x - k_1'' y);\\
v_3 &= \sqrt{g/h_1}\, \eta_{от} \sin\alpha \cos(\omega t + k_1' x - k_1'' y).
\end{aligned} \qquad (4.19)$$

Здесь $k_1' = \omega \cos\alpha/\sqrt{gh_1}$; $k_1'' = \omega \sin\alpha/\sqrt{gh_1}$; $k_2' = \omega \cos\beta/\sqrt{gh_2}$; $k_2'' = \omega \sin\beta/\sqrt{gh_2}$; α — угол падения, а β — угол преломления волны, подходящей к уступу.

Использование граничных условий, выражающих неразрывность уровня и нормального полного потока на линии отражающего склона (при $x=0$), в виде

$$\eta_1 + \eta_3 = \eta_2; \quad h_1(u_1 + u_3) = h_2 u_2 \qquad (4.20)$$

дает выражения для коэффициентов отражения $r_1 = \eta_{от}/\eta_{пд}$ и преломления $r_2 = \eta_{пр}/\eta_{пд}$:

$$r_1 = \frac{\sqrt{gh_1}\cos\alpha - \sqrt{gh_2}\cos\beta}{\sqrt{gh_1}\cos\alpha + \sqrt{gh_2}\cos\beta}; \quad r_2 = \frac{2\sqrt{gh_1}\cos\alpha}{\sqrt{gh_1}\cos\alpha + \sqrt{gh_2}\cos\beta}. \qquad (4.21)$$

При нормальном подходе волны $\eta_{пд}$ к уступу ($\alpha=\beta=0$) выражения (4.21) переходят в известные формулы Ламба (4.14).

Углы падения (α) и преломления (β) связаны известным законом Снеллиуса

$$\sin\alpha/\sqrt{gh_1} = \sin\beta/\sqrt{gh_2}, \qquad (4.22)$$

откуда следует, что при уменьшении глубины направление волнового луча приближается к нормали к границе. Таким образом, рефракция всегда «разворачивает» подходящие к берегу волны, приближая их направление к нормальному относительно берега.

Закон Снеллиуса совместно с выражением для r_1 в (4.21) позволяет рассчитать коэффициент отражения как функцию отношения h_1/h_2 для любых углов подхода α. Эта зависимость графически представлена на рис. 4.2 [6]. Из этого графика видно, что при повышении дна ($h_1 > h_2$) величина r_1 слабее зависит от угла α, чем при понижении ($h_1 < h_2$). Практически при повышении дна коэффициент отражения остается неизменным при изменениях α от 0 до 20. С другой стороны, при понижении дна каждому значению h_1/h_2 соответствует некоторое критическое значе-

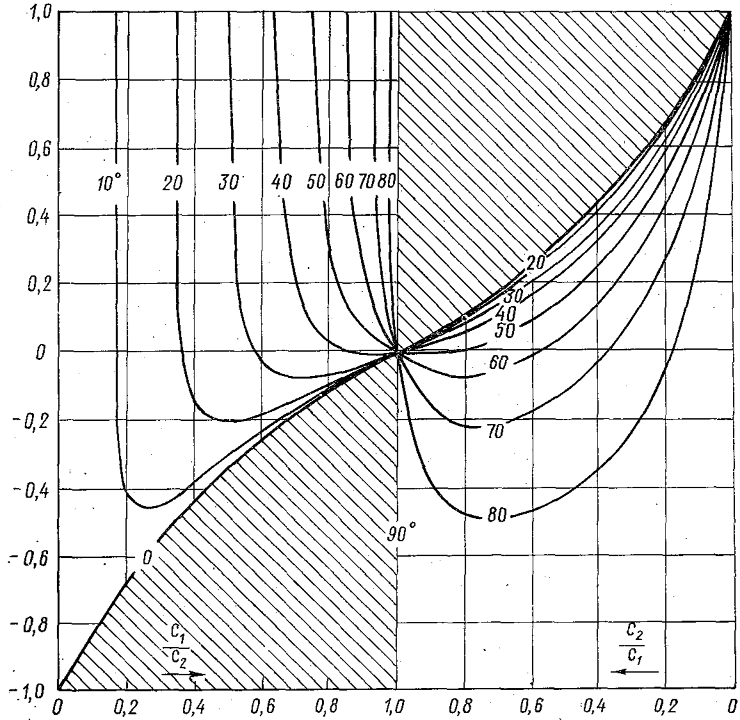


Рис. 4.2. Коэффициент отражения при различных углах подхода волны.

ние угла падения, равное $\alpha_1 = \arcsin\sqrt{h_1/h_2}$, при котором отражение становится полным ($|r_1| = 1$). На границе шельфа полное отражение возможно при подходе к нему волны, отраженной от берега, что приводит к прибрежному захвату волновой энергии в зоне шельфа.

Из выражений (4.21) и из рис. 4.2 видно также, что коэффициент отражения r_1 может менять знак в зависимости от α, что объясняется изменением ширины лучевых трубок при преломлении на краю шельфа [6]. При значениях $\alpha_0 = \mathrm{arctg}\sqrt{h_1/h_2}$, которым соответствует равенство $B_1\sqrt{gh_1} = B_2\sqrt{gh_2}$ (B_1 и B_2 — ширина лучевых трубок в океане и на шельфе), отражение от материкового склона будет нулевым ($|r_1| = 0$). В общем случае всегда выполняется неравенство $|r_1| < 1$, и только при $h_2 = 0$, когда волна встречает вертикальную стенку, на которой выполняется условие непротекания, отражение происходит без потерь энергии и является полным.

С физической точки зрения положительное и отрицательное отражения различаются фазовым соотношением между падающей и отраженной волнами на линии отражения, т. е. при $x=0$. При положительном отражении вертикальные смещения уровня в обеих волнах совпадают по фазе, а при отрицательном отражении их фазы противоположны (сдвинуты на 180°). В случае нормального подхода волны к линии отражения уменьшение глубины всегда приводит к положительному отражению, а увеличение глубины — к отрицательному, в результате чего волны, подходящие к одному и тому же материковому склону с противоположных сторон, испытывают отражение противоположного знака. Интенсивность каждого отражения растет с увеличением перепада глубин на склоне.

Для шельфовой зоны типичной является ситуация, когда приходящая из океана волна встречает на своем пути не одну, а две линии интенсивного отражения: линию материкового склона и линию берега. В таком случае наряду с локальными отражениями на этих линиях можно говорить и о суммарном отражении волны от всей шельфовой области в целом. Характер суммарной отраженной волны определяется совокупностью первичного локального отражения от склона и так называемого «излучения шельфа», обусловленного частичным просачиванием наружу волн, существующих на участке между линиями берега и склона и являющихся результатом многократного внутреннего отражения от этих линий той доли океанской волны, которая проникает на шельф. Понятно, что фаза излучения шельфа, а следовательно, и фаза суммарного отражения будет определяться временем пробега волны на участке от берега до склона, т. е. шириной шельфа L и его глубиной h. В общем случае эта фаза не будет совпадать с фазой падающей океанской волны, т. е. суммарное отражение будет сопровождаться фазовым сдвигом. Коэффициент такого отражения представляется комплексным числом $R=\bar{r}\exp(i\varphi)$, модуль которого ($\bar{r}$) характеризует интенсивность суммарного отражения, а аргумент φ — его фазовый сдвиг.

Если рассмотреть модель шельфа с шириной L и постоянной глубиной h_2, отделенного вертикальным уступом от океана, глубина которого h_1 тоже постоянна, то можно получить следующие выражения для модуля и аргумента коэффициента суммарного отражения от зоны шельфа [6]:

$$\bar{r}=\sqrt{a^2+b^2};\quad \varphi=\operatorname{arctg}(b/a), \tag{4.23}$$

где

$$\begin{gathered} a=r_1+D\cos(\delta+f_L);\quad b=D\sin(\delta+f_L);\\ D=r_2\left(1-r_1^2\right)/\sqrt{1+2r_1r_2\cos f_L+r_1r_2};\\ \delta=-\operatorname{arctg}\left[r_1r_2\sin f_L/(1+r_1r_2\cos f_L)\right];\\ f_L=2\omega L/\sqrt{gh_2}=\pi 4L/\lambda_2. \end{gathered} \tag{4.24}$$

Здесь λ_2 — длина волны на шельфе, а коэффициенты r_1 и r_2 характеризуют локальное отражение на материковом склоне и у берега. Как указывалось выше, на склоне всегда имеем $r_1 < 1$. В реальных условиях из-за диссипативных потерь у самого берега часто можно считать, что величина r_2 тоже не достигает единицы, несмотря на непротекание через линию берега. Если интересоваться прежде всего характером суммарного отражения от зоны шельфа в океан, то с помощью величины r_2 можно параметризовать интенсивность диссипативных потерь энергии в пределах указанной зоны.

Анализ выражений (4.23) и (4.24) показывает, что суммарное отражение минимально по модулю при $f_L = (2n+1)\pi$, где $n = 0$, 1, 2, ..., т. е. когда ширина шельфа составляет нечетное число четвертинок длины приливной волны, что одновременно является, как будет показано далее, условием резонанса, при котором амплитуда колебаний на шельфе достигает максимального значения. Наибольшей интенсивности суммарное отражение достигает при $f_L = 2n\pi$, т. е. при условии антирезонанса, которому соответствуют минимальные значения колебаний на шельфе.

Аргумент коэффициента суммарного отражения α зависит как от параметра f_L, так и от соотношения между r_1 и r_2. Если $r_1 < r_2$, то φ растет с увеличением f_L и при $f_L = \pi$ (резонанс) имеем $\varphi = \pi$, т. е. суммарное отражение становится чисто отрицательным. При $r_1 = r_2$ величина φ стремится к $\pi/2$ по мере приближения f_L к π, т. е. в суммарном отражении от шельфа при приближении к резонансу нарастает мнимая часть. Если $r_1 > r_2$, то первоначальный рост величины φ сменяется затем падением, и при $f_L = \pi$ (резонанс) отражение вновь становится полностью положительным. При антирезонансе отражение всегда положительно.

Аппроксимация материкового склона вертикальным подводным уступом, использованная в рассмотренных выше случаях, в принципе пригодна не всегда. Такой аппроксимации соответствует отражение, сосредоточенное на линии разрыва глубины. Однако в природных условиях изменение глубины в направлении распространения волны может происходить постепенно, и тогда отражение приливной волны является непрерывно распределенным вдоль склона (иногда такое отражение называют «размазанным»). В этом случае отражение конечной интенсивности может произойти только на конечном участке пути волны, и поэтому в общем случае оно будет комплексным из-за фазового сдвига за счет пробега по отражающему участку. При этом расчет как суммарного отражения от шельфовой зоны, так и колебаний, развивающихся на шельфе, усложняется. Наиболее целесообразным при такой ситуации оказывается применение численных методов для всей области переменной глубины, особенно если сама зона шельфа неоднородна по глубине и содержит участки с заметными уклонами дна [6].

4.2. Топографический захват волновой энергии

Как мы уже видели, перепады глубины способствуют захвату (концентрации) волновой энергии в ограниченных по протяженности областях и приводят к существенной трансформации длинных волн. При этом возможно появление специфических волновых образований, таких, как, например, волны Кельвина, краевые и шельфовые волны, что позволяет рассматривать эти районы как некоторые топографические пограничные области.

Рассмотрим задачу о захвате волновой энергии в шельфовой зоне в рамках линеаризованной теории мелкой воды с учетом вращения Земли:

$$\partial u/\partial t - fv = -g\,\partial\eta/\partial x;\quad \partial v/\partial t + fu = -g\,\partial\eta/\partial y; \qquad (4.25)$$
$$\partial\eta/\partial t + \partial(hu)/\partial x + \partial(hv)/\partial y = 0.$$

Здесь $f = 2\omega \sin\varphi$ — параметр Кориолиса, φ — широта.

Направим ось y вдоль прямолинейного берега, а ось x — в океан. При этом в качестве граничных условий на берегу должно выполняться условие непротекания, а в открытом океане — условие ограниченности волны по высоте:

$$hu = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \qquad (4.26)$$
$$\eta(x) \text{ ограниченно} \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Для получения достаточно простой теории топографических пограничных волн рассмотрим несколько идеализированную морфометрию шельфовой зоны. Следуя [1], будем считать, что глубина океана h является функцией только одной координаты x. В этом случае частным решением задачи о волнах, описываемых системой уравнений (4.25), являются гармонические по координате y волны, распространяющиеся вдоль изобат, что позволяет ввести разделение переменных:

$$\begin{pmatrix} \eta(x, y; t) \\ u(x, y; t) \\ v(x, y; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta(x) \\ u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \exp[i(\omega t - ky)]. \qquad (4.27)$$

Подстановка (4.27) в (4.25) приводит к краевой задаче для пограничных волн:

$$i\omega u - fv = -g\,\partial\eta/\partial x;\quad i\omega v + fu = ikg\eta;\quad d(hu)/dx - ikhv + i\omega\eta = 0. \qquad (4.28)$$

Из первых двух уравнений (4.28) получаем выражения для компонентов скорости:

$$u = \frac{ig}{\omega^2 - f^2}\left(\omega\frac{d\eta}{dx} - kf\eta\right);$$
$$v = -\frac{g}{\omega^2 - f^2}\left(f\frac{d\eta}{dx} - k\omega\eta\right). \qquad (4.29)$$

Воспользовавшись уравнением неразрывности в (4.28) и исключая u и v, получаем обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно амплитуды колебаний уровня в океане:

$$\eta''(x) + \frac{h'(x)}{h(x)}\eta'(x) + \left(\frac{\omega^2 - f^2}{gh(x)} - \frac{h'(x)\,fk}{h(x)\,\omega} - k^2\right)\eta(x) = 0, \quad (4.30)$$

где штрих означает дифференцирование по x. Тогда с учетом (4.29) условие непротекания (4.26) можно переписать в виде

$$\omega\eta'(x) - kf\eta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x = 0. \quad (4.31)$$

Пусть область переменной глубины имеет конечный размер L, вне которого глубина может приниматься постоянной. Такое допущение достаточно точно отвечает условиям реальных океанических шельфов, имеющих ограниченную протяженность. В этом случае имеем:

$$h = \begin{cases} h(x) & \text{при } 0 \leqslant x < L \\ h_0 & \text{при } x \geqslant L. \end{cases} \quad (4.32)$$

Тогда для области открытого океана $(x \geqslant L)$ уравнение для амплитуды колебаний уровня (4.30) значительно упростится:

$$\eta_2''(x) - \chi_2^2\eta_2(x) = 0, \quad (4.33)$$

где

$$\chi_2^2 = k^2 - (\omega^2 - f^2)/(gh_0). \quad (4.34)$$

Нижний индекс «2» означает, что величины относятся к области открытого океана, а при индексе «1» они относятся к области шельфа — материкового склона.

В зависимости от знака выражения (4.34) решение в области открытого океана носит экспоненциальный или тригонометрический характер. Если $\chi_2^2 > 0$, то с учетом ограниченности решения при $x \to \infty$ получаем

$$\eta_2(x) = A_2 \exp(-\chi_2 x). \quad (4.35)$$

Таким образом, если

$$\omega^2 < f^2 + k^2 gh_0, \quad (4.36)$$

то волновое решение уравнения (4.30) экспоненциально затухает в сторону открытого океана и волны этого типа оказываются *захваченными* (сконцентрированными) в шельфовой зоне.

На границе шельфа при $x = L$ должно выполняться условие непрерывности уровня и нормального к берегу потока:

$$\eta_1(x) = \eta_2(x), \quad h(x)\,u_1(x) = h_0 u_2(x) \quad \text{при} \quad x = L. \quad (4.37)$$

Подставляя в (4.37) решение уравнения в виде (4.35) и используя (4.29), получим при $x = L$:

$$\omega h(x)\,\eta'(x) + [\chi_2\omega h_0 + fk(h_0 - h(x))]\,\eta(x) = 0. \quad (4.38)$$

Итак, при $\chi_2^2 > 0$ имеются однородное линейное уравнение (4.30) и два однородных граничных условия: на берегу (4.31) и на границе шельфа (4.38). Тогда нетривиальное решение задачи будет существовать лишь при определенных соотношениях между ω и k, причем каждому значению волнового числа k будет соответствовать несколько значений ω. Поэтому захваченные волны представляют собой дискретный набор отдельных гармонических мод. На плоскости (ω, k) каждая из захваченных мод будет отображаться в виде отдельной дисперсионной кривой $\omega = \omega(k)$.

При $\chi_2^2 < 0$ решение в открытом океане имеет осциллирующий характер:

$$\eta_2(x) = A_2 \cos(p_2 x) + B_2 \sin(p_2 x), \tag{4.39}$$

где $p_2 = i\chi_2$, и условия (4.37) выполняются для любых ω и k, лишь бы

$$\omega^2 > f^2 + k^2 g h_0. \tag{4.40}$$

Таким образом, данный тип волн имеет непрерывный спектр, занимающий на плоскости (ω, k) всю область, где выполняется условие (4.40). В отличие от захваченных волн, которые распространяются по шельфу, как по волноводу, и не могут уходить в открытый океан, этот тип волновых движений можно представить как суперпозицию волн, падающих на шельф и излученных от него в открытый океан. Поэтому волны этого типа, в отличие от захваченных, называют *излученными волнами.*

Рассмотрим качественную теорию захваченных волн. Для них характерны три механизма топографического захвата волновой энергии.

Гравитационный захват в области мелководья, вызванный внутренним отражением на бровке шельфа, приводит к появлению так называемых *краевых волн.* Эти волны имеют вид стоячих поперек шельфа и прогрессивных вдоль шельфа. Краевые волны могут распространяться вдоль шельфа в обоих направлениях, их свойства слабо зависят от вращения Земли, так как их частоты всегда больше, чем инерционная. Различие влияния силы Кориолиса на волны, распространяющиеся в положительном направлении оси x, проявляется на дисперсионной диаграмме захваченных баротропных волн (рис. 4.3) в некоторой незначительной асимметрии дисперсионных кривых соответствующих мод в области положительных и отрицательных волновых чисел.

Совместное влияние вращения и наличия твердой береговой границы приводит к образованию *волны Кельвина.* Решение типа волны Кельвина получается из решения системы уравнений (4.25) в случае $u \equiv 0$ и имеет вид

$$\eta = \exp(-\chi/a)\, G(y + ct); \quad v = (g/h)^{1/2} \exp(-\chi/a)\, G(y + ct). \tag{4.41}$$

Влияние вращения для волн данного типа приводит, как следует из (4.41), к появлению множителя $\exp(-x/a)$, где x — расстояние от берега, а $a = f/\sqrt{gh}$ — так называемый баротропный радиус деформации Россби. Таким образом, волна Кельвина, так же, как и краевые волны, проявляется в достаточно узкой (порядка величины a) полосе. Однако, в отличие от краевых волн, волна Кельвина может распространяться вдоль берега только

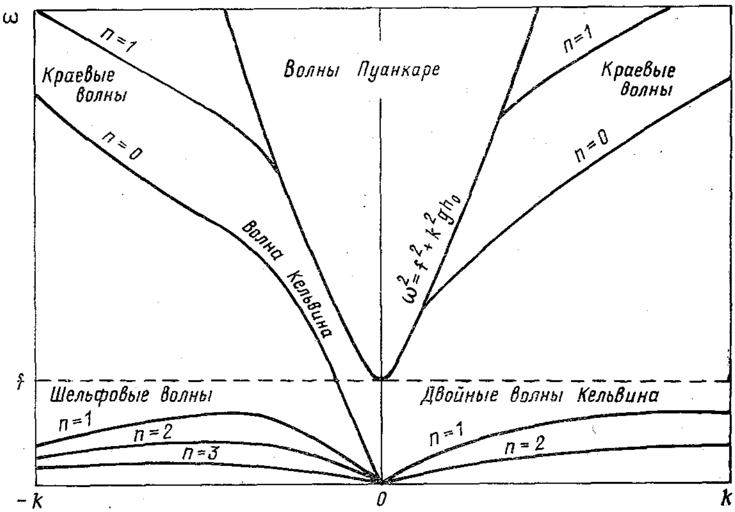


Рис. 4.3. Качественная дисперсионная диаграмма захваченных волн.

в одном направлении, а именно оставляя берег справа (в Северном полушарии). Кроме того, как видно из рис. 4.3, волна Кельвина является единственной захваченной модой, которая может пересекать линию, равную инерционной частоте. Как следует из (4.41), волна Кельвина монотонно затухает в сторону открытого океана и не имеет узловых линий, поэтому при $\omega \gg f$, т. е. когда влияние вращения Земли ослабевает, ее дисперсионная кривая переходит в дисперсионную кривую нулевой моды ($n=0$) краевых волн.

Совместное влияние вращения Земли и неоднородности рельефа дна приводит к появлению *шельфовых волн*. Под этим термином объединяются различные виды субинерциальных (низкочастотных) квазигеострофических колебаний. Шельфовые волны существуют только в области отрицательных волновых чисел, поскольку под влиянием силы Кориолиса шельфовые волны распространяются в циклоническом направлении относительно открытого океана, т. е. в отрицательном направлении оси y. Однако последнее справедливо только для случая монотонно меняющегося профиля $h'(x) > 0$. Если профиль не монотонный, то волны типа шельфовых могут распространяться и в антициклоническом направлении. Примерами профилей с немонотонным изменением глубины в океане могут служить подводные хребты и океанические желоба. Волны, захваченные в результате двойного отрицательного (или положительного) отражения на боковых границах хребтов (или желобов), получили название *двойных волн Кельвина*. Если ограничена функция $h'(x)/h(x)$, что практически всегда выполняется для реального рельефа дна, то каждая из дисперсионных кривых $\omega_n(k)$ шельфовых волн имеет максимум $\omega_n^{\text{макс}}$, соответствующий волновому числу k_n^0. Значение k_n^0, при котором групповая скорость $c_{\text{гр}}=d\omega/dk$ равна нулю, разбивает дисперсионную кривую на области, в которых $c_{\text{гр}}$ имеет различные знаки. Таким образом, при любой фиксированной $\omega<\omega_n^{\text{макс}}$ дисперсионная кривая пересекается дважды, причем первое пересечение соответствует случаю, когда групповая и фазовая скорости совпадают по знаку, второе — случаю, когда они имеют различные знаки (фазовая скорость остается отрицательной, а групповая становится положительной). Частоты $\omega_n^{\text{макс}}$ играют особую роль в динамике шельфовых волн, так как на этих частотах происходит резонансное накопление волновой энергии. В случае неограниченной функции $h'(x)/h(x)$, что, например, имеет место для модели шельфа — ступеньки, имеющей разрыв производной $h'(x)$ при $x=L$, дисперсионная кривая шельфовой моды является монотонной функцией волнового числа и не имеет максимума.

4.3. Накат длинных волн на берег

При изучении динамики морских волн в прибрежной зоне особое место занимает приурезовая область, определяющая в конечном счете разрушительную силу волн. Эта область традиционно трудна для исследования ввиду многообразия определяющих факторов и сложности геометрии задачи. Наиболее распространенной аналитической и численной моделью для описания наката волн является модель длинных волн. Для получения простейших решений и выяснения физики процесса схематизируем задачу: откос постоянного уклона, дно неразмываемое, волна подходит к берегу по нормали (перпендикулярно изобатам). Рассмотрим более подробно линейную задачу в рамках (4.1) (об условиях ее применимости будет сказано ниже) и положим $h(x)=-mx$. Здесь m — уклон дна, ось x направлена в сторону берега. Для монохроматической волны аналогично (4.2) систему (4.1) можно привести к стандартной форме уравнения Бесселя:

$$d^2\eta/dz^2+(1/z)\,d\eta/dz+\eta=0, \qquad (4.42)$$

где

$$z=\sqrt{-4\omega^2x/(gm)},$$

что позволяет выписать его ограниченное решение в общем виде:

$$\eta(x,\ t)=AJ_0\left(\sqrt{-4\omega^2x/(gm)}\right)\cos(\omega t). \qquad (4.43)$$

Наиболее просто выяснить физический смысл константы A. Так как $J_0(0)=1$, то A есть максимальная высота заплеска волны на берег: $W=\eta_R=\eta(0)$. Заметим, что максимальная глубина осушения дна в случае плоского откоса и наката монохроматической волны совпадает с максимальной высотой подъема уровня воды на побережье. Для определения связи η_R с высотой волны, подходящей к берегу, используем асимптотическую формулу для функции Бесселя

$$J_0(z)=\sqrt{2/(\pi z)}\cos(z-\pi/4), \quad z\gg 1. \tag{4.44}$$

Подставляя (4.44) в (4.43), после несложных преобразований имеем:

$$\eta(x,\ t)=\eta_0(x)\left\{\cos\left[\omega\left(t-2\sqrt{-x/(gm)}\right)-\pi/4\right]+\right.$$
$$\left.+\cos\left[\omega\left(t+2\sqrt{-x/(gm)}\right)+\pi/4\right]\right\}, \tag{4.45}$$

где

$$\eta_0(x)=\frac{A}{g}\sqrt{\frac{\omega}{4\pi gm\sqrt{-gmx}}}. \tag{4.46}$$

Решение (4.45) соответствует двум волнам, распространяющимся в противоположные стороны, множитель $2\sqrt{\dfrac{-x}{gm}}=$ $=\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}$ соответствует набегу фазы над наклонным дном, $\eta_0(x)$ — переменной амплитуде волны. Обратим внимание, что из (4.46) вытекает закон Грина

$$\eta_0(x)\sim 1/\sqrt[4]{-mx}\sim 1/h^{1/4}. \tag{4.47}$$

На малых глубинах асимптотическое представление (4.44) несправедливо, поэтому закон Грина перестает выполняться вблизи берега, здесь надо учитывать непрерывный переход энергии падающей волны в отраженную, что и описывается полным решением (4.43).

Приняв в качестве начальной η_0 амплитуду волны на расстоянии L от уреза ($h_0=mL$), из (4.46) получаем искомую связь между высотой наката и амплитудой волны:

$$\frac{\eta_R}{\eta_0}=\left(\frac{\pi\omega}{m}\sqrt{\frac{h_0}{g}}\right)^{1/2}=2\pi\sqrt{\frac{2L}{\lambda}}, \tag{4.48}$$

где $\lambda=2\pi\sqrt{gh_0}/\omega$ — длина волны на изобате h_0. Таким образом, высота наката растет с увеличением пройденного расстояния или уменьшения ее длины.

Формула (4.48) справедлива при условии задания начальной амплитуды волны достаточно далеко от уреза ввиду использования асимптотической формулы (4.44). На практике зависимостью (4.48) можно пользоваться при $\eta_R/\eta_0 > 2$.

Сделанные здесь выводы опираются на решения линейной задачи. Как показывает анализ нелинейной задачи [2, 7], учет нелинейности искажает форму волны, она становится асимметричной с более крутым передним склоном, однако нелинейность не влияет на максимальные характеристики наката, что и позволяет их использовать в практических расчетах.

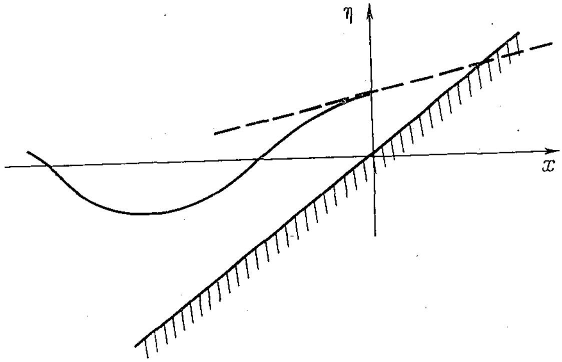


Рис. 4.4. Геометрическая интерпретация возникновения критерия обрушения Br.

Однако если высота волны велика, то передний склон волны обрушится, на это теряется часть энергии, так что высота наката начнет уменьшаться. Определить условия применимости полученных формул можно с помощью простого приема, заключающегося в следующем. Вычислим максимальную крутизну волны на урезе из (4.43):

$$\operatorname{Max} \frac{d\eta}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{\omega^2 \eta_R}{gm}, \tag{4.49}$$

и сравним ее с уклоном дна m. Если крутизна волны меньше уклона дна, то уровень воды при накате «упрется» в дно (рис. 4.4), в противоположном случае уровень воды не пересекается с берегом, т. е. урез перемещается в бесконечность, что невозможно. Поэтому условие применимости полученного решения имеет вид

$$\mathrm{Br} = \frac{\partial\eta/\partial x}{m} = \frac{\omega^2 \eta_R}{gm^2} < 1, \tag{4.50}$$

и оно соответствует в рамках нелинейной теории отсутствию обрушения волны, поэтому данный параметр назван критерием обрушения (breaking — обрушение).

Выше мы рассмотрели накат монохроматических волн. В случае цунами, тягуна или наводнения на берег накатываются одиночные волны или цуг таких волн. Их накат может быть исследован с помощью Фурье-суперпозиции элементарных решений типа (4.43)

$$\eta(x,\ t) = \int_0^\infty A(\omega) J_0\left(\sqrt{\frac{-4\omega^2 x}{gm}}\right) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]\, d\omega, \qquad (4.51)$$

где константы A и φ, различные для разных частот, определяются через параметры падающей волны. В частности, если падающая волна симметрична и представима в виде $\eta(t) = \eta_0 f(t/T)$, где η_0 — амплитуда и T — длительность волны на расстоянии L от уреза, то колебания уреза описываются формулой

$$\eta(0,\ \xi) = \eta_0 \sqrt{L/\lambda}\, p(\xi); \quad \xi = t/T; \quad \lambda = \sqrt{gh}\, T;$$

$$p(\xi) = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \sqrt{\Omega} \sin\left(\Omega\xi - \frac{\pi}{4}\right) d\Omega \int_0^\infty f(\tau) \cos(\Omega\tau)\, d\tau. \qquad (4.52)$$

Максимум $p(\xi)$ определяет максимальную высоту наката η_R^+, а ее минимум — максимальную глубину осушения η_R^-. В зависимости от формы падающей волны возможно различное соотношение между η_R^+ и η_R^- (напомним, что при накате монохроматической волны $\eta_R^+ = |\eta_R^-|$. Интеграл (4.52) в общем виде не вычисляется, и здесь необходимо применять ЭВМ. Поскольку данный интеграл двойной, то для упрощения расчетов удобно внутренний интеграл вычислить аналитически, а затем уже применять ЭВМ для вычисления однократного интеграла.

Приведем здесь одно решение, когда (4.52) может быть записано в явном виде:

$$\eta_+(t) = \eta_0/[1 + (2t/T)^2]. \qquad (4.53)$$

Экстремумы $p(\xi)$ есть: $\max p = \pi/\sqrt{2}[\cos(\pi/10)]^{5/2} = 4{,}4$, $\min p = -\pi\sqrt{2}[\cos(3\pi/10)]^{5/2} \approx -0{,}23$. Таким образом, хотя к берегу подходит только гребень, уровень воды на берегу сначала поднимается до отметки η_R^+, потом опускается до отметки η_R^- и затем поднимается до спокойного уровня.

Заметим, что формула (4.52) также получена с использованием асимптотического выражения для функции Бесселя, поэтому она пригодна только при условии $\eta_R^+/\eta_0 > 2$.

Вопросы для самопроверки

1. Почему приливные волны в мелководной шельфовой зоне можно рассматривать как свободные?
2. Получить выражения для изменения амплитуды волны при медленном изменении глубины (закон Грина) из условия сохранения потока энергии и отсутствия отражения.
3. Меняется ли энергия одиночной волны при прохождении зоны медленного изменения глубины; скачка глубин?

4. Из каких соображений находится закон Снеллиуса (4.22)?

5. При каких условиях возможно полное внутреннее отражение от бровки шельфа?

6. Почему коэффициент суммарного отражения от материкового шельфа является комплексным числом?

7. В чем разница между захваченными и излученными волнами?

8. Что такое краевые и шельфовые волны, в чем их отличия?

9. Почему нельзя пользоваться законом Грина вблизи уреза?

Типовые упражнения

1. Получить аналитическое решение для отражения монохроматической волны от двух уступов в комплексной форме и исследовать резонансные эффекты.

2. Исследовать формирование на мелководье цуга волн, образующегося при прохождении одиночной волны двух уступов h_1/h_3 и h_3/h_2, находящихся на расстоянии L друг от друга, если длина волны λ меньше L.

3. Для случая шельфа-ступени исследовать прибрежные колебания уровня, формирующиеся при подходе синусоидальной гармонической волны с резонансной для данного шельфа длиной λ.

4. Для случая шельфа-ступени исследовать прибрежные колебания уровня, формирующиеся при подходе синусоидальной гармонической волны с антирезонансной для данного шельфа длиной λ.

5. Доказать, что волна Кельвина распространяется вдоль берега, оставляя его справа по ходу своего распространения (в Северном полушарии).

6. На основании анализа уравнений, описывающих волну Кельвина, оценить ширину топографической пограничной области.

7. Получить аналитическое решение для наката монохроматической волны на откос, сопряженный с ровным дном. Сделать оценку параметров волн, при которых волна не обрушится.

8. Рассчитать скорость потока воды при накате длинной волны на берег.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДЛИННОЙ ВОЛНЫ В КАНАЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Общая постановка задачи и методика численного решения. Распространение и трансформация свободной длинной волны в канале переменного сечения описывается уравнениями мелкой воды, которые в линейном случае могут быть записаны в следующем виде:

$$\partial Q/\partial t + gF\,\partial\eta/\partial x = 0;\quad b\,\partial\eta/\partial t + \partial Q/\partial x = 0, \tag{4.54}$$

где $Q(x,\ t)$ — расход через поперечное сечение $Q = \iint\limits_F u\,dF$, u —

скорость вдоль оси x; $\eta(x, t)$ — отклонение уровня от невозмущенной поверхности; $F(x)$ — площадь поперечного сечения, $F=bh$; $b(x)$, $h(x)$ — ширина и глубина канала.

Пусть в начальный момент времени задается некоторое статическое возмущение уровня $\eta_0(x)$ относительно невозмущенной поверхности, тогда

$$\eta(x, 0)=\eta_0(x);\quad Q(x, 0)=0. \tag{4.55}$$

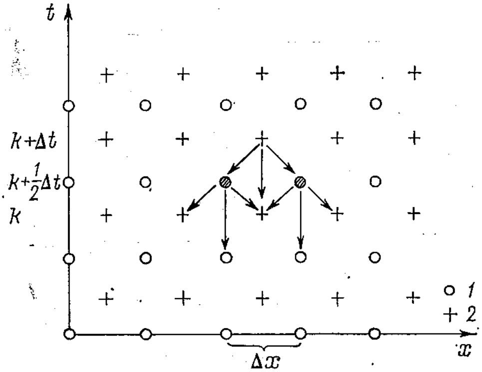


Рис. 4.5. Схема вычислений на «шахматной» конечно-разностной сетке.

1 — узлы, соответствующие скоростным точкам; *2* — узлы, соответствующие уровенным точкам.

Не касаясь пока вопроса о граничных условиях, рассмотрим схему расчета неизвестных значений расходов и уровня во внутренних точках расчетной области в момент времени $t=t+dt$, если величины $Q(x, t)$ и $\eta(x, t)$ на предыдущем шаге известны во всей области. Воспользуемся для аппроксимации исходной системы уравнения (4.54) «шахматной» конечно-разностной сеткой, вид которой показан на рис. 4.5. Согласно этой схеме при принятой целочисленной нумерации узлов сетки переменным Q и F соответствуют нечетные, а переменным b, η — четные узлы по оси x. Переменная Q относится к моментам времени $(k-\Delta t/2)$ (где k — целое число, а Δt — шаг по времени), а η — к моменту $k\Delta t$. Общий алгоритм вычисления неизвестных значений Q и η во внутренних точках расчетной области может быть представлен в виде следующей схемы:

$$\begin{gathered}
Q\{(n+1)\Delta x,\ (k+1/2)\Delta t\} \ \text{по}\ Q\{(n+1)\Delta x,\ (k-1/2)\Delta t\},\\
\eta\{n\Delta x,\ k\Delta t\},\ \eta\{(n+2)\Delta x,\ k\Delta t\};\\
\eta\{n\Delta x,\ (k+1)\Delta t\} \ \text{по}\ Q\{(n-1)\Delta x,\ (k+1/2)\Delta t\},\\
Q\{(n+1)\Delta x,\ (k+1/2)\Delta t\},\ \eta\{n\Delta x,\ k\Delta t\}.
\end{gathered} \tag{4.56}$$

Значения $Q(x)$ и $\eta(x)$ в начальный момент времени $(k=0)$ задаются в соответствии с начальными условиями. Если по условию задачи волновые движения в пределах расчетной области в начальный момент времени отсутствуют, начальные условия принимаются нулевыми, т. е. $\eta(x, 0)=Q(x, 0)=0$.

Рассмотрим теперь возможные варианты постановки граничных условий. Физические границы в канале могут быть либо жидкие (т. е. допускающие прохождение волн без отражения или с частичным отражением), либо твердые (совпадающие с береговой границей), от которых волны отражаются. Отражательные свойства границы могут быть описаны с помощью граничных условий специального вида, которые называются «импедансными граничными условиями». Граница расчетной области при использовании конечно-разностной сетки «шахматного» типа определяется относительно реальной физической границы бассейна с точностью до половины пространственного шага Δx. При этом дроблением сетки можно добиться совпадения границ бассейна либо с узлами, в которых рассчитывается уровень (уровенные точки), либо с узлами расхода (скоростные точки). Свободный уход волны за пределы расчетной области реализуется заданием условия полного излучения в виде

$$Q(t)|_{\text{г}} = \pm b_{\text{г}} \eta(t) \sqrt{g h_{\text{г}}}, \tag{4.57}$$

где $b_{\text{г}}$, $h_{\text{г}}$ — ширина и глубина канала в граничной точке. В качестве необходимых для вычисления расходов и уровня в граничных точках значений $\eta(t)$ и $Q(t)$ принимаются значения уровня или расходов в точках, прилегающих к границе и относящихся к предыдущему временному слою (отличающемуся на $\Delta t/2$), либо эти значения экстрополируются на половину пространственного и временного шагов. Знак перед правой частью определяется направлением распространения волны относительно оси x.

В качестве граничного условия на твердой границе используется условие непротекания

$$Q(t)|_{\text{г}} = 0. \tag{4.58}$$

Это условие в силу первого уравнения системы (4.54) эквивалентно $\partial\eta/\partial x|_{\text{г}} = 0$.

В случае задания однородных (нулевых) начальных условий волновые движения в расчетной области возникают за счет входа волны через жидкую границу. Наиболее просто условие входа волны через границу расчетной области реализуется для случая, когда отсутствуют встречные отраженные волны, т. е. при $h(x) = \text{const}$. В этом случае в граничной точке просто задаются колебания уровня (расхода), соответствующие форме входящей волны. При образовании в канале за счет переменной глубины отраженных волн возникает необходимость учета на границе не только входящей волны, но и доли отраженной волны, излучаемой через границу за пределы области. Если входящее волновое возмущение пересекает границу раньше, чем к ней подходит изнутри первая отраженная волна, то на границе может задаваться условие смешанного типа, соответствующее сначала условию входящей волны, а затем (после некоторого момента времени t_k, вычисляемого заранее) — условию полного излучения. Для корректного задания такого граничного условия смешанного типа целесообразно увеличить расчетную область, добавив к ней дополнительный участок с постоянной глубиной, равной глубине на границе $h_г$. Тогда момент t_k определяется с учетом затрат времени на пробег волны по этой фиктивной области. Однако при этом необходимо учитывать, что включение дополнительного участка с постоянной глубиной даже при отсутствии трения может привести к появлению дополнительных ошибок, например за счет рассматриваемого ниже эффекта вычислительной дисперсии. Поэтому протяженность такого участка не должна намного превосходить длину входящей волны.

В заключение необходимо отметить, что рассмотренная разностная схема будет вычислительно устойчива, если на шаги сетки наложить ограничение, известное под названием условия Куранта:

$$\Delta x/\Delta t \geqslant c, \tag{4.59}$$

где $c=\sqrt{gh_{макс}}$ — максимальная в условиях заданной морфометрии фазовая скорость распространения волны. Условие Куранта отражает тот факт, что в случае сходящейся разностной аппроксимации физическая скорость распространения длинной волны не должна превосходить вычислительной скорости распространения возмущения на сетке, т. е. за временной шаг Δt волна не должна распространяться на расстояние, большее чем Δx. Условие Куранта является также и достаточным для выполнения устойчивости схемы.

Ход выполнения работы и анализ результатов. Рассмотренная в работе разностная схема может быть использована при решении уравнений более сложного вида, чем (4.54). Эти уравнения могут включать трение, нелинейность и другие эффекты, что позволяет решать ряд геофизических задач, связанных с изучением приливов, волн цунами, штормовых нагонов. Для оценки разностных свойств самой численной схемы могут быть использованы результаты расчетов для простых условий морфометрии, отвечающих некоторым модельным случаям и имеющих известные аналитические решения. Данная лабораторная работа основана на использовании численных расчетов для решения конкретной задачи.

При выполнении лабораторной работы предполагается, что студент должен:

1) уточнить математическую постановку, сформулировать начальные и граничные условия применительно к условиям поставленной задачи;

2) получить конечно-разностную аппроксимацию исходных уравнений, составить алгоритм и программу расчета на ЭВМ;

3) спланировать проведение численных экспериментов, определить состав и объем информации, которую необходимо получить в результате численных экспериментов, порядок ее выдачи на печать при счете (количество и расположение расчетных мареографных точек, интервалы выдачи на печать полей уровня или расходов и т. п.);

4) провести численные расчеты и выполнить анализ их результатов. Для более полного подтверждения сделанных при анализе выводов результаты численных расчетов могут сопровождаться получением ряда дополнительных оценок.

Примерные варианты задач. 1. Доказать, что при $H = \text{const}$ начальное статическое возмущение распадается на две равные волны (рис. 4.6 *а*).

2. Оценить интенсивность отражения от шельфа в виде ступени при различных перепадах глубины. Результаты численных расчетов сопоставить с аналитическими решениями (4.14). Глубина $h_2 = \text{const}$, h_1 — меняется (рис. 4.6 *б*).

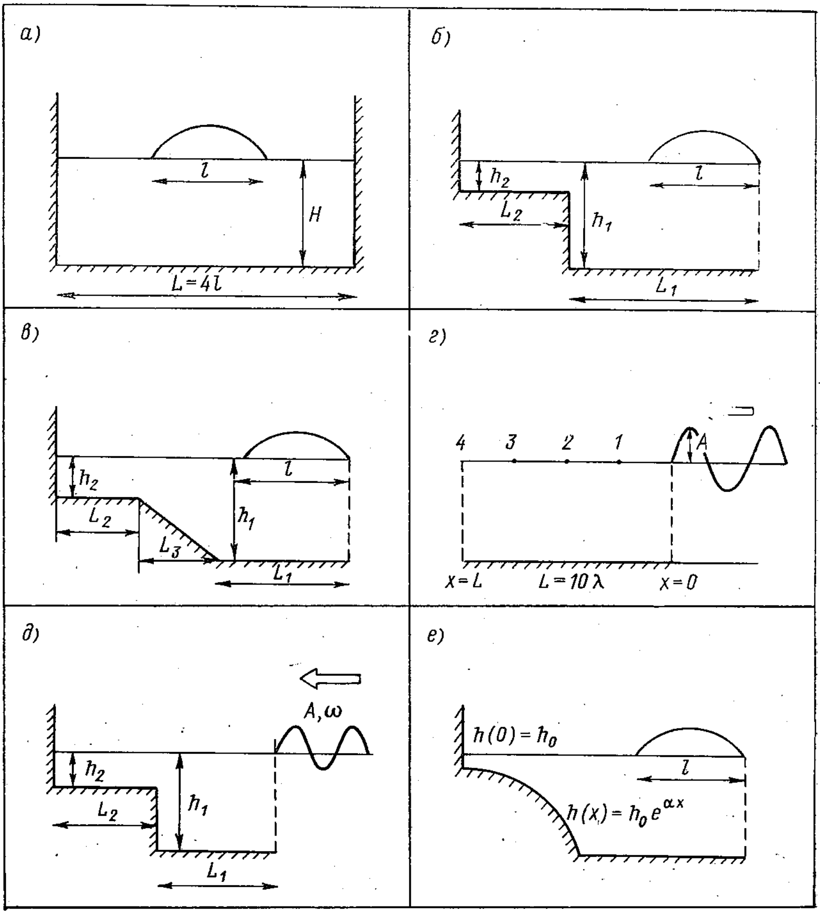


Рис. 4.6. Различные варианты постановки задачи численного моделирования длинной волны в канале.

L_1, h_1 — длина и глубина морской части профиля; L_2, h_2 — длина и глубина шельфа; L_3 — горизонтальная протяженность бровки шельфа; l — горизонтальный размер начального статического возмущения. Стрелкой показана входящая через жидкую границу волна с амплитудой A и частотой ω.

2а. Оценить интенсивность отражения от шельфа в виде ступени при различной глубине на бровке шельфа. Результаты численных расчетов сопоставить с аналитическими [$(h_1 - h_2) = \text{const}$, h_1 — меняется, рис. 4.6 *б*].

3. Оценить интенсивность отражения на бровке шельфа в случае постепенного линейного изменения глубин. Получить зависимость подъемов уровня на берегу от размеров очага цунами (h_1, h_2, L_1, L_2, L_3 — постоянны, $l^1 = 20L_3$, $l^2 = 10L_3$; $l^3 = 6{,}7L_3$, $l^4 = 5L_3$, $l^5 = 4L_3$, см. рис. 4.6 *в*).

3а. Оценить интенсивность отражения на бровке шельфа в случае линейного перепада глубин. Получить зависимость подъемов уровня на берегу от уклона дна в зоне перепада глубин (h_1, h_2, L_1, L_2, l — постоянны, L_3 меняется от $0{,}05l$ до $0{,}25l$).

4. Оценить влияние вычислительной дисперсии. Получить зависимость $(A - A_n)/A = f(n\lambda, \lambda/\Delta x)$, где A — амплитуда входящей волны, A_n — амплитуда волны в точках $n\lambda$, n — целое число, λ — длина волны, Δx — пространственный шаг (см. рис. 4.6 *г*).

4а. То же самое, что в п. 4, но начальную волну задать в виде статического возвышения уровня.

5. Исследовать резонансные свойства шельфа. Получить зависимость коэффициента усиления от частоты подходящей волны (рис. 4.6 *д*).

5а. Исследовать резонансные свойства шельфа. Получить зависимость коэффициента усиления от длины шельфа (меняется L_2).

6. Оценить потери волновой энергии при распространении волны в случае различной модельной аппроксимации рельефа дна в зоне шельф — материковый склон.

В одном случае рельеф дна аппроксимируется экспоненциальным законом $h(x) = h_0 \exp(\alpha x)$, в другом — в виде обратной экспоненты $h(x) = h_2[1 - \exp(\beta x)] + h_0$, величины h_0, h_2, α, β — задаются (рис. 4.6).

Некоторые сведения из теории разностных схем. Для исследования длинных волн достаточно эффективным средством является численное решение уравнений теории мелкой воды. В основе численного решения уравнений лежит замена производных, входящих в уравнения, их приближенными выражениями. Приближенные выражения формируются с помощью разностей зависимых переменных на конечных пространственных и временных шагах. По этой причине такой способ представления дифференциальных уравнений называется *конечно-разностным*. Принятые приближенные выражения производных используются для построения системы алгебраических уравнений, каждое из которых относится к одному из внутренних узлов сетки, расчетной области. Использование начальных и граничных условий, вытекающих из физической постановки задачи, а также различного набора внешних независимых параметров позволяет исследовать особенности поведения длинной волны при различных условиях, т. е. позволяет производить численное моделирование длинноволновых процессов.

Напомним некоторые основные термины и определения теории разностных схем, которые будут использованы в дальнейшем. Пусть функция u является решением интересующего нас дифференциального уравнения. Для простоты пока будем считать, что u является функцией одной независимой переменной $u(x)$.

Разобьем расчетную область на некоторое число интервалов одинаковой длины Δx (величину Δx называют шагом сетки). Обозначим приближенные значения $u(x)$ в дискретных точках $x=j\,\Delta x$ (где j принимает целые значения 1, 2, ..., n) как $u_j=u(j\,\Delta x)$. Заметим при этом, что с помощью значений u_j, заданных в дискретных точках, невозможно представить волну длиной меньше чем $2\Delta x$. В зависимости от положения точек, в которых взяты значения u_j, по отношению к точке, где требуется определить производную, конечные разности могут быть односторонними (вперед или назад) или центральными. Конечные разности используются для замены производных в дифференциальных уравнениях их конечно-разностными аналогами. Например, для первой производной одна из возможных аппроксимаций имеет вид

$$(du/dx)_j \to (u_{j+1} - u_j)/\Delta x. \tag{4.60}$$

Если в приближенное выражение для производной подставить вместо сеточных значений u_j точные значения $u(j\,\Delta x)$ и разложить их в ряд Тейлора, то получим:

$$\frac{u_{j+1} - u_j}{\Delta x} \to \left(\frac{du}{dx}\right)_j + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_j \Delta x + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_j (\Delta x)^2 + \ldots \tag{4.61}$$

Разность между точным и приближенным выражениями для производной называется *ошибкой аппроксимации* производной, мерой которой является *порядок точности* ε. Порядок точности определяется самой низкой степенью Δx, входящей в ошибку аппроксимации. В рассмотренном случае видно, что аппроксимация в соответствии с выражением (4.61) имеет первый порядок точности относительно Δx, т. е. $\varepsilon = O(\Delta x)$. Аналогично можно показать, что аппроксимация производной центральной разностью [5] имеет порядок $\varepsilon = O(\Delta x^2)$.

Алгебраическое уравнение, полученное путем замены производных в дифференциальных уравнениях соответствующими им конечно-разностными приближениями, называется *конечно-разностной аппроксимацией* этого дифференциального уравнения. Разность между численным и точным решением является *ошибкой численного решения.*

Ошибка численного решения определяется *ошибкой аппроксимации и точностью конечно-разностной схемы.* Понятно, что ошибка аппроксимации дифференциального уравнения будет определяться ошибками аппроксимаций производных, входящих в исходное уравнение. Тогда, по аналогии со случаем аппроксимации производных, порядком точности конечно-разностной схемы является наименьшая степень Δx и Δt, которая входит в выражения для ошибки аппроксимации. Естественно, что в зависимости от типа схемы точность аппроксимации по разным переменным может быть различна. Так, например, точность схемы с аппроксимацией временной производной передней разностью (4.60), а пространственной — центральной разностью $(u_{j+1}-u_{j-1})/(2\Delta x)$, которая в дальнейшем будет использована для численного решения уравнений мелкой воды, имеет точность разностной схемы $\varepsilon=O(\Delta t, \Delta x^2)$.

Если ошибка аппроксимации уменьшается при уменьшении приращений Δx, Δt, такая схема называется *согласованной*. Однако условие согласованности еще совсем не гарантирует при этом и уменьшение ошибки численного решения. Поэтому, кроме свойства согласованности, схема должна обладать свойствами *сходимости* и *устойчивости*.

Не останавливаясь подробно на этих вопросах, обсуждение которых можно найти в литературе по численным методам, например [3, 8], отметим только, что сходящейся называется схема, численное решение которой стремится к точному при уменьшении шагов сетки. Иными словами, схема будет сходящейся, если для любого фиксированного момента времени t ошибка численного решения $u_j^n-u(j\,\Delta x;\ n\,\Delta t)\to 0$ при Δx, $\Delta t\to 0$. Схема будет являться устойчивой, если для фиксированных значений Δx и Δt ошибка численного решения остается ограниченной при увеличении числа временных шагов n.

Рассмотрим некоторые особенности аппроксимации системы уравнений, описывающих поведение длинных гравитационных волн (4.1). При $h=\text{const}$ ее точное решение в виде монохроматической волны приводит к известному дисперсионному соотношению $\omega=\sqrt{gh}\,k$ с постоянной фазовой и групповой скоростями $c_{\text{ф}}=c_{\text{гр}}=\sqrt{gh}$.

Представим теперь систему (4.1) в виде дифференциально-разностных уравнений

$$\begin{aligned}\partial u_j/\partial t &= -g\,(\eta_{j+1}-\eta_{j-1})/(2\,\Delta x);\\ \partial\eta_j/\partial t &= -h\,(u_{j+1}-u_{j-1})/(2\,\Delta x),\end{aligned}\tag{4.62}$$

которые получены путем аппроксимации пространственных производных центральными разностями, временные производные при этом остаются в дифференциальном виде. Следовательно, все ошибки в уравнениях (4.62) обусловлены пространственными разностями, что позволяет использовать эти уравнения для изучения влияния на свойства численного решения собственно пространственных разностных аппроксимаций. Решения типа (4.4), отвечающие монохроматической волне, принимают вид

$$\begin{aligned}u_j(t) &= \mathrm{Re}\,\{u_0\exp\,[i\,(kj\,\Delta x-\omega t)]\};\\ \eta_j(t) &= \mathrm{Re}\,\{\eta_0\exp\,[i\,(kj\,\Delta x-\omega t)]\},\end{aligned}\tag{4.63}$$

и из (4.62) находится дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = gh\,[\sin(k\,\Delta x)/(\Delta x)]^2. \qquad (4.64)$$

Таким образом, гравитационные волны теперь распространяются не с постоянной фазовой скоростью, а со скоростью

$$c^* = \pm\sqrt{gh}\,\sin(k\,\Delta x)/(k\,\Delta x) = c\,\sin(k\,\Delta x)/(k\,\Delta x). \qquad (4.65)$$

Таким образом, выполненный анализ условий распространения волн, представленных конечно-разностными уравнениями, показывает, что с целью уменьшения влияния на численное решение вычислительной дисперсии необходимо ввести некоторые ограничения на выбор размера пространственного шага. Величина Δx при проведении конкретных численных расчетов должна определяться с учетом характерных пространственных масштабов исследуемых волновых движений. Понятно, что искажение формы волны вследствие вычислительной дисперсии будет тем больше, чем большее расстояние пройдено волной. В случае распространения одиночной волны влияние вычислительной дисперсии будет проявляться в затухании амплитуды волны и образовании вслед за волной коротковолнового шлейфа. Количественные оценки влияния вычислительной дисперсии, искажающие точное решение дифференциальных уравнений при различных соотношениях $\Delta x/\lambda$, включены в задание в качестве одного из вариантов. В целом можно отметить, что при выполнении расчетов шаг должен выбираться таким образом, чтобы исследуемая волна описывалась на сетке не менее чем 20 пространственными шагами. Уменьшение Δx связано прежде всего с увеличением объема памяти ЭВМ, используемой для счета. Кроме того, необходимость соблюдения в процессе счета условия устойчивости схемы приводит к тому, что при уменьшении пространственного шага Δx необходимо уменьшить временной шаг Δt. Таким образом, слишком сильное дробление сетки может привести к неоправданно большим затратам ресурсов ЭВМ.

Добиться уменьшения затрат машинного времени можно путем специального построения расчетной сетки. Как следует из (4.62), каждая из временных производных, входящих в дифференциально-разностные уравнения, зависит от значений соответствующих зависимых переменных, определенных в соседних узлах сетки. Поэтому система точек как бы распадается на две элементарные подсистемы, в каждой из которых может задаваться только одна переменная, причем расстояние между одноименными точками, в которых задается либо значение u, либо значение η, оказывается уже $2\,\Delta x$. Такие сетки, в которых переменные заданы в различных пространственных точках, называются *«разнесенными»*, или *«шахматными»* сетками. Время счета, необходимое для получения решения с использованием такой сетки, сокращается в два раза, причем ошибка аппроксимации остается той же. Более того, волны с $k\,\Delta x > \pi/2$, связанные как раз с наибольшими ошибками в фазовой скорости и отрицательной групповой скоростью, оказываются отфильтрованными, что приводит к значительному улучшению схемы с точки зрения влияния вычислительной дисперсии.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТОТНЫХ СВОЙСТВ ШЕЛЬФА

Теоретические основы метода расчета амплитудно-частотных характеристик. Волны, набегающие из открытого океана, в результате многократного отражения от берега и бровки шельфа не сразу излучаются в открытый океан, поэтому для некоторых зон в плоскости (ω, k), соответствующих излученным волнам, может наблюдаться «неполный захват» волновой энергии. Наложение падающих и образовавшихся «частично захваченных» волн при соответствующих значениях ω и k может привести к значительному росту колебаний уровня у берега. Это явление получило название *шельфового резонанса.* Для оценки общего возрастания высот волн можно ввести коэффициент амплитудного усиления $P(\omega, k)$, соответствующий отношению амплитуды волны вблизи берега к амплитуде волны в открытом океане. В случае нормального подхода волны к берегу коэффициент амплитудного усиления отражает частотные свойства самого шельфа. Его величину $P(\omega, 0)$ в этом случае принято называть амплитудно-частотной характеристикой и обозначать $|K(\omega)|$.

Амплитудно-частотная характеристика отражает избирательные свойства шельфа при трансформации волн с различной частотой. Максимальное возрастание высоты волны для шельфа с конкретной морфометрией будет наблюдаться, если частота падающей волны совпадает с частотой собственных колебаний шельфа, что будет соответствовать резонансным условиям. Для таких частот на графике $|K(\omega)|$ будет наблюдаться появление пиков. Таким образом, получение частотных характеристик шельфа позволяет не только оценить возрастание высот волн с различной частотой, но и определить сами значения резонансных частот, что в ряде случаев имеет самостоятельное практическое значение. В данной лабораторной работе мы рассмотрим способы определения амплитудно-частотных характеристик.

Для некоторых случаев модельной аппроксимации дна в зоне шельфа — материкового склона, воспользовавшись полученными решениями, удается получить аналитические выражения зависимости коэффициента амплитудного усиления от частоты. На рис. 4.7, заимствованном из [1], показаны формы рельефа дна для некоторых моделей и соответствующие этим моделям амплитудно-частотные характеристики. В частности, при аппроксимации шельфа в виде ступени (рис. 4.7 *а*) уравнение (4.30) легко решается в случае излученных волн (оно является тригонометрическим в областях шельфа и открытого океана), и мы получаем следующее выражение для коэффициента усиления:

$$|K(\omega)| = [\cos^2(p_1L) + d\sin^2(p_1L)]^{-1/2}, \tag{4.66}$$

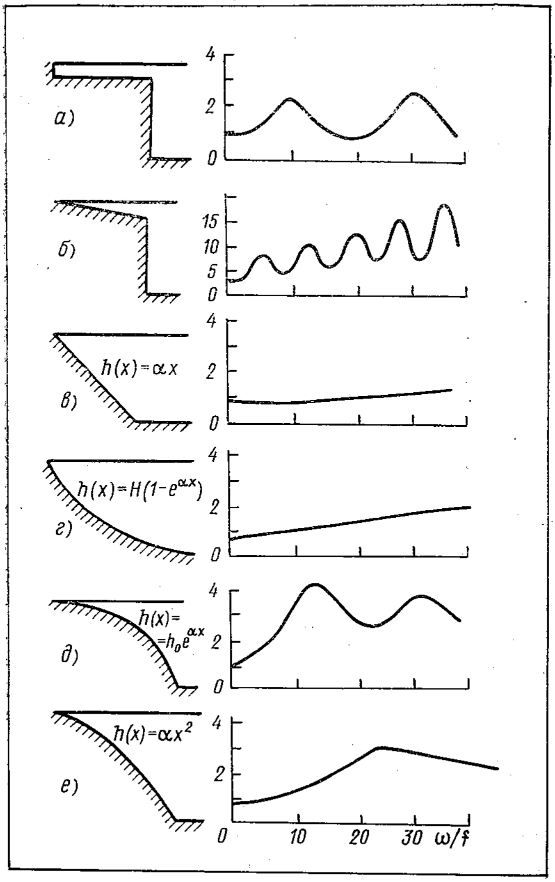


Рис. 4.7. Различные модели шельфа и соответствующие им коэффициенты усиления волны (случай нормального подхода) [1].

где $d = h_0/h$ и $p_1 = \sqrt{(\omega^2 - f^2)/(gh_0)}$. Так как $d < 1$, то из (4.66) следует, что минимальное значение $|K(\omega)| = 1$ достигается при $p_1L = m\pi$, а максимальное $|K(\omega)| = d^2$ — при $p_1L = [(2m-1)/2]\pi$, m — целое число. В терминах длин волн это означает, что минимальное значение коэффициента усиления соответствует случаю, когда ширина шельфа равна кратному числу полуволн, а максимальное — когда она равна $^1/_4$, $^3/_4$, $^5/_4$ длины волны и т. д., что согласуется с известной формулой Мериана для определения периодов собственных колебаний для полузамкнутых одномерных бассейнов. Полученное выражение для $|K(\omega)|$ не учитывает удвоение амплитуды волны у берега, представленного в данном случае в виде вертикальной стенки с глубиной h_0, которое происходит за счет полного отражения волны от береговой границы.

Зависимость $|K(\omega)|$ для шельфа-ступени, показанная на рис. 4.7 *а*, соответствует $h_0=500$ м, $h=5000$ м $(d={}^1/_{10})$, $L=100$ км.

Рассмотрим еще один метод определения частотных характеристик шельфа для случая нормального подхода волны, основанный на спектральном преобразовании колебаний уровня. Поведение шельфовой зоны как линейной динамической системы, как было показано, описывается с помощью линейного дифференциального уравнения (4.30). Его решение может быть получено в виде интеграла свертки [7], записываемого для физически реализуемой системы в виде

$$\eta_y(t)=\int\limits_0^\infty \tilde{h}(\tau)\,\eta_x(t-\tau)\,d\tau, \tag{4.67}$$

где $\tilde{h}(\tau)$ — переходная функция.

Выходной сигнал в данном случае является сверткой входного сигнала с переходной функцией $\tilde{h}(\tau)$. Физически это означает, что выходной сигнал $\eta_y(t)$ можно представить в виде взвешенной суммы прошлых значений входного сигнала $\eta_x(t)$. Под входным сигналом $\eta_x(t)$ в данном случае понимается волна, зафиксированная как функция времени в некоторой точке, относящейся к зоне открытого океана, под выходным сигналом $\eta_y(t)$ — колебания уровня у берега, сформировавшиеся в результате подхода исходной волны и наложения на нее отраженных (вторичных) волн.

Свертке во временной области соответствует произведение в частотной области, т. е. (4.67) можно переписать в виде

$$S_y(\omega)=K(\omega)\,S_x(\omega), \tag{4.68}$$

где $S_y(\omega)$, $K(\omega)$, $S_x(\omega)$ — преобразование Фурье функций $\eta_y(t)$, $h(t)$ и $\eta_x(t)$ соответственно, причем $K(\omega)$ — частотная характеристика, которую иногда называют также передаточной функцией, — выражает отношение комплексных амплитуд на входе и выходе системы при установившемся синусоидальном режиме. Как уже отмечалось, модуль функции $|K(\omega)|$ является амплитудно-частотной характеристикой (коэффициентом усиления амплитуды). Аргумент комплексной характеристики имеет смысл частотно-фазовой характеристики и выражает относительный сдвиг фаз синусоиды на входе и выходе системы. В лабораторной работе требуется провести расчет частотной характеристики непосредственно на основе формулы (4.68), т. е. путем определения отношения спектральных разложений колебаний уровня в открытой части океана и на берегу.

Величина $K(\omega)$ не зависит от характера входного сигнала, поэтому форма начального возмущения при расчете уровня в принципе может быть выбрана произвольной. На практике удобно выбирать короткие импульсы, имеющие равномерные широкополосные спектры, так как отсутствие в спектре начального возмущения гармоники какой-либо частоты не позволяет определить реакцию шельфа на подход волны с данной частотой. Преобразование Фурье одиночной волны в виде положительной части косинусоиды с периодом T и амплитудой A_0 имеет вид

$$S(\omega) = q \cos(\omega T/2) \Big/ \left[1 - \left(\frac{2}{\pi}\omega \frac{T}{2}\right)^2\right], \tag{4.69}$$

где $q = (2/\pi) A_0 T$. Для практических расчетов величину T удобно выбирать достаточно небольшой, так, чтобы для исследуемого интервала частот выполнялось условие $\omega T/2 < (^3/_2)\pi$. При расчетах это позволяет, с одной стороны, избежать особых точек, в которых $S_x(\omega)$ обращается в нуль, а с другой стороны — использовать часть спектра с наибольшими значениями $S_x(\omega)$. Вместе с тем выбор слишком малого τ (малого линейного размера начального возмущения) приводит к необходимости уменьшения пространственного шага (хотя бы для уменьшения вычислительной дисперсии) и соответственно к чрезмерным затратам машинного времени на расчет.

Порядок выполнения работы

Работа посвящена исследованию частотных свойств шельфа в диапазоне волн цунами.

Исходным материалом для выполнения лабораторной работы являются данные о распределении глубин вдоль линии вероятного подхода цунами. Общая длина морфометрического профиля может быть выбрана в пределах 100—150 км.

Первая часть работы заключается в подготовке и реализации численной модели распространения длинной волны, описанной в предыдущей лабораторной работе, применительно к условиям реальной морфометрии исследуемого профиля, дополненного участком с постоянной глубиной (рис. 4.8). В качестве начального условия для проведения расчета в зоне постоянной глубины задается статическое возмущение уровня в виде отрезка синусоиды на интервале $0 - \pi$, с амплитудой 2 м. Результатом использования этого блока программы является получение расчетной марео-

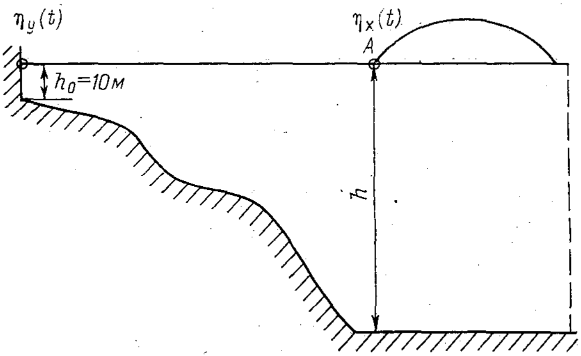


Рис. 4.8. Постановка задачи (схема) для расчета амплитудно-частотной характеристики.

граммы, характеризующей колебания уровня у берега, вызванные подходом начального возмущения уровня.

Для расчета амплитудно-частотной характеристики программа должна быть дополнена процедурой расчета модуля спектрального разложения исходного возмущения $|S_x(\omega)|$. Учитывая, что модули спектров функций sin и cos равны, для нахождения $|S_x(\omega)|$ можно воспользоваться формулой (4.69). С другой стороны, можно представить изменение уровня в точке A (рис. 4.8), связанное с прохождением исходного возмущения, в виде функции времени $\eta_x(t)$ и уже затем находить $|S_x(\omega)|$ численно (так же, как для колебаний уровня у берега).

Оценку спектра колебаний уровня у берега можно представить в виде

$$\tilde{S}_y(\omega) = \tilde{a}_y(\omega) - i\tilde{b}_y(\omega), \tag{4.70}$$

где $\tilde{a}_y$, $\tilde{b}_y$ — оценки действительной и мнимой частей спектра, точные значения которых находятся по формулам

$$\begin{aligned} a_y(\omega) &= \int_0^T \eta_y(t)\cos(\omega t)\,dt; \\ b_y(\omega) &= \int_0^T \eta_y(t)\sin(\omega t)\,dt, \end{aligned} \tag{4.71}$$

где T — продолжительность колебаний уровня у берега (длина расчетной мареограммы). Тогда модуль $|\tilde{S}_y(\omega)|$ находится как

$$\left|\tilde{S}_y(\omega)\right| = \sqrt{a_y^2(\omega) + b_y^2(\omega)}. \tag{4.72}$$

После чего окончательно имеем

$$|K(\omega)| = \left|\tilde{S}_y(\omega)\right| / |S_x(\omega)|. \tag{4.73}$$

Оценка коэффициентов разложения Фурье $\tilde{a}_y(\omega)$ и $\tilde{b}_y(\omega)$ проводится численно, причем $\eta_y(t)$ заменяется дискретным рядом значений уровня с интервалом Δt и общей длиной $N = T/\Delta t$.

Расчет амплитудно-частотных характеристик проводится для частот от нуля до $15 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$ с интервалом $\Delta\omega = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$. Предварительно программу расчета рекомендуется протестировать на примере шельфа-ступени и сравнить полученные результаты с аналитическим решением (4.66). После тестирования программы необходимо выполнить расчет для реального морфометрического профиля и произвести анализ результатов расчета. При анализе следует оценить влияние частотных свойств профиля на усиление длинных волн, оценить линейные размеры наиболее опасных (соответствующих максимальному усилению) очагов цунами, сопоставить результаты расчета амплитудно-частотной характеристики с характером колебаний уровня у берега.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 4

1. Волны в пограничных областях океана/Под ред. В. В. Ефимова.— Л.: Гидрометеоиздат, 1985.— 280 с.

2. Вольцингер Н. Е., Клеванный К. А., Пелиновский Е. Н. Длинноволновая динамика прибрежной зоны.— Л.: Гидрометеоиздат, 1989.— 271 с.

3. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы.— М.: Наука, 1973.— 392 с.

4. Динамика океана/Учебник под ред. Ю. П. Доронина.— Л.: Гидрометеоиздат, 1980.— С. 123—210.

5. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях/Пер. с англ.— Л.: Гидрометеоиздат, 1979.— 135 с.

6. Некрасов А. В. Приливные волны в окраинных морях.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975.— 247 с.

7. Пелиновский Е. Н. Нелинейная динамика волн цунами.— Горький: ИПФ АН СССР, 1982.— 226 с.

8. Рихтмайер Р. Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач/Пер. с англ.— М.: Мир, 1972.— 418 с.

ГЛАВА 5

ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ

В результате действия силы тяжести, солнечной радиации и диффузионных процессов океан не является однородным; с глуби-

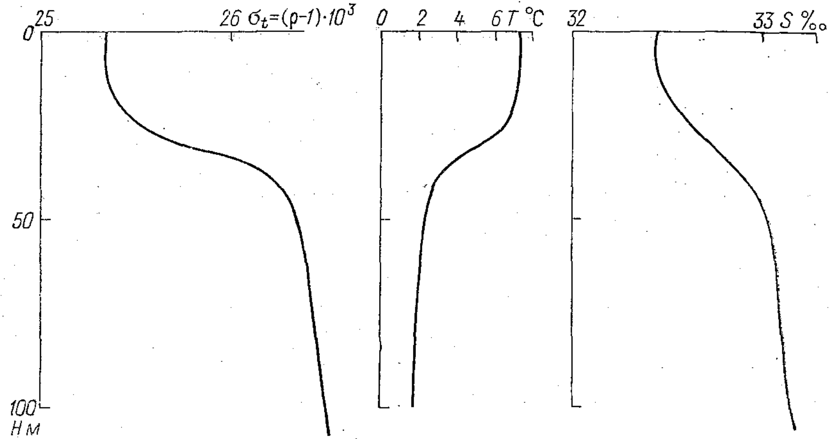


Рис. 5.1. Типичная стратификация вод океана (схема).

ной меняется температура и соленость воды, изменяющие ее плотность. Об этом явлении говорят как о *стратификации* вод океана. Типичный вертикальный профиль плотности океана представлен на рис. 5.1. Наряду с плавным ходом плотности океана можно выделить участки с резкими изменениями плотности (*пикноклин*), которые обусловлены скачком либо температуры (*термоклин*), либо солености (*халоклин*). И хотя общий перепад плотности невелик (не более нескольких процентов), его достаточно для существования нового класса волновых движений — *внутренних гравитационных волн* [3], изучению которых посвящена настоящая глава.

5.1. Внутренние волны на границе раздела двух сред

Для лучшего уяснения природы внутренних волн схематизируем задачу, пренебрегая плавным изменением плотности вне пикноклина; для этого предположим, что толщина последнего стремится к нулю. В этом случае мы имеем дело с двумя слоями разной плотности (ρ_1 для верхнего слоя и ρ_2 для нижнего, причем $\rho_2 > \rho_1$). Но тогда на границе раздела двух сред, так же как на границе вода—воздух, могут распространяться гравитационные волны, обусловленные действием силы тяжести, — это и будут внутренние волны. Рассмотрим их свойства для данной модели стратификации. Выясним сначала возможность применения потенциального описания внутренних волн. Вне скачка жидкость однородна и здесь, разумеется, можно ввести потенциал скорости течения по формулам (1.13). Тогда для каждого слоя справедливо уравнение Лапласа (1.14), которое мы здесь воспроизведем для двумерного движения в плоскости (z, x):

$$\partial^2\varphi_i/\partial z^2 + \partial^2\varphi_i/\partial x^2 = 0, \tag{5.1}$$

где φ_1 — потенциал верхнего слоя, а φ_2 — нижнего. Пусть толщина каждого из слоев неограничена, а скачок плотности совместим с осью x. В этом случае граничными условиями далеко от скачка являются $\varphi_1 \to 0$ $(z \to +\infty)$ и $\varphi_2 \to 0$ $(z \to -\infty)$. На границе раздела выполняется кинематическое граничное условие. В линейном приближении оно имеет вид

$$\partial\eta/\partial t = \partial\varphi_1/\partial z = \partial\varphi_2/\partial z \quad (z = 0), \tag{5.2}$$

а динамическое условие запишется в виде

$$\rho_1(\partial\varphi_1/\partial t + g\eta) = \rho_2(\partial\varphi_2/\partial t + g\eta), \quad (z = 0). \tag{5.3}$$

Решение уравнения (5.1), удовлетворяющее этим условиям и соответствующее бегущей монохроматической волне, легко находится:

$$\varphi_1(z, x, t) = -(i\omega/k)\eta_0 \exp[-kz + i(\omega t - kx)]; \tag{5.4}$$

$$\varphi_2(z, x, t) = (i\omega/k)\eta_0 \exp[kz + i(\omega t - kx)], \tag{5.5}$$

при этом смещение границы раздела есть

$$\eta = \eta_0 \exp[i(\omega t - kx)]. \tag{5.6}$$

Здесь мы использовали комплексную форму решения. Для перехода к действительным переменным надо взять реальную часть получаемых выражений. Подставляя (5.4)—(5.6) в (5.3), находим дисперсионное соотношение внутренних волн:

$$\omega^2 = [(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)]\, gk. \tag{5.7}$$

Обратим внимание, что (5.7) похоже на дисперсионное соотношение поверхностных волн на глубокой воде с заменой g на редуцированное ускорение свободного падения $\bar{g} = [(\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)]g$ и переходит в последнее при $\rho_1 \ll \rho_2$ (для границы вода—воздух это условие автоматически выполняется). Отсюда вытекает физическая природа внутренних волн как гравитационных волн, возникающих под действием силы тяжести, причем модуль этой силы определяется редуцированным ускорением свободного падения.

В океане, как мы уже указывали, перепад плотности невелик и, следовательно, редуцированное ускорение $\bar{g}$ мало. Это означает, что при одинаковой длине волн частота, а также скорость распространения существенно (на два—три порядка) меньше аналогичных значений для поверхностных волн. Внутренние волны движутся очень медленно (волна длиной 10 м имеет фазовую скорость не более 40 см/с). В то же время из-за малости силы тяжести, действующей на частицу воды около границы раздела, можно ожидать существенно больших смещений пикноклина, чем водной поверхности. И действительно, наблюдаемые смещения пикноклина достигали почти 100 м, что может представлять серьезную угрозу для движения подводных аппаратов.

Используя (5.4)—(5.5), находим вертикальное распределение горизонтальной и вертикальной скоростей:

$$u(z,\ x,\ t)=\omega\eta\begin{cases}-\exp(-kz), & z>0,\\ +\exp(kz), & z<0;\end{cases}$$

$$w(z,\ x,\ t)=i\omega\eta\begin{cases}\exp(-kz), & z>0,\\ \exp(kz), & z<0.\end{cases} \tag{5.8}$$

Отсюда вытекает, что вертикальная скорость непрерывно переходит через границу раздела, а горизонтальная терпит на ней скачок. Это приводит к неожиданному выводу о невозможности, строго говоря, использования потенциального описания для внутренних волн. Так, проводя контур, пересекающий границу, легко подсчитать, что циркуляция вдоль контура отлична от нуля. Но тогда отлична от нуля завихренность жидкости (ротор скорости в этом приближении на границе обращается в бесконечность) и, следовательно, движение воды в случае даже небольшой «размытости» пикноклина будет в нем вихревым.

Обсудим теперь влияние свободной поверхности и дна на характеристики внутренних волн. На свободной поверхности, очевидно, выполняются условия (1.16)

$$\partial\eta_1/\partial t=\partial\varphi_1/\partial z;\ \ \partial\varphi_1/\partial t+g\eta_1=0\quad (z=h_1), \tag{5.9}$$

где η_1 — смещение водной поверхности и пикноклин заглублен на глубину h_1 под поверхность. Удобно исключить η_1 в (5.9):

$$\partial^2\varphi_1/\partial t^2+g\,\partial\varphi_1/\partial z=0\quad (z=h_1). \tag{5.10}$$

Это выражение, являющееся основным в теории поверхностных волн, может быть существенно упрощено для внутренних волн. С учетом того, что φ_1 определяется через $\bar{g}$, а в (5.10) входит g, условие (5.10) с точностью $\bar{g}/g \simeq (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1)$ эквивалентно условию

$$\partial\varphi_1/\partial z = 0 \quad (z = h_1), \tag{5.11}$$

которое означает обращение в нуль вертикальной скорости, а следовательно, и смещения свободной поверхности. Это же можно подтвердить прямым расчетом η_1 из второго соотношения (5.9) с использованием (5.4) и (5.7), откуда вытекает

$$\eta_1/\eta_0 \sim (\rho_2 - \rho_1)/(\rho_2 + \rho_1) \ll 1. \tag{5.12}$$

Итак, во внутренней волне свободная поверхность практически не смещается и приближение, соответствующее полному отсутствию ее смещения, получило название *приближения твердой крышки*. Оно позволяет отфильтровать поверхностные волны, практически не меняя характеристик внутренних волн. Разумеется, эти же выводы можно получить более строгим путем с помощью (5.10), но предлагаемый здесь путь помогает сразу «почувствовать» данное приближение.

На дне необходимо поставить условие непротекания

$$\partial\varphi_2/\partial z = 0 \quad (z = -h_2), \tag{5.13}$$

Теперь задача о нахождении внутренней волны стала полностью определенной. Опуская выкладки, приведем решение для потенциала, соответствующее бегущей монохроматической волне (5.6):

$$\varphi_1 = -\frac{i\omega}{k}\eta_0 \exp[i(\omega t - kx)] \frac{\operatorname{ch}[k(z-h_1)]}{\operatorname{sh}(kh_1)};$$

$$\varphi_2 = \frac{i\omega}{k}\eta_0 \exp[i(\omega t - kx)] \frac{\operatorname{ch}[k(z+h_2)]}{\operatorname{sh}(kh_2)}, \tag{5.14}$$

и дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 \operatorname{cth}(kh_1) + \rho_2 \operatorname{cth}(kh_2)} gk. \tag{5.15}$$

При $h_1 \to \infty$ и $h_2 \to \infty$ отсюда получается старый результат (5.4) — (5.7). Тот же результат получается и при $k \to \infty$, т. е. в приближении коротких волн или глубокой воды. Поэтому более подробно обсудим длинные волны, когда

$$\omega^2 = \frac{(\rho_2 - \rho_1) h_1 h_2}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1} gk^2. \tag{5.16}$$

Как видим, длинные внутренние волны имеют конечную скорость распространения, не зависящую от k, т. е. длинные волны не диспергируют:

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1) h_1 h_2 g}{\rho_1 h_2 + \rho_2 h_1}}. \tag{5.17}$$

Скорость распространения длинных внутренних волн согласно (5.17) также существенно меньше максимальной скорости распространения поверхностных волн и не превышает 1—3 м/с.

Если волну считать длинной, но поправки, связанные с kh_1 и kh_2, учитывать (приближение неглубокой воды), то из (5.15) следует

$$\omega = ck\left[1 - \frac{k^2h_1h_2}{6}\,\frac{(\rho_1h_1+\rho_2h_2)}{\rho_1h_2+\rho_2h_1}\right]. \tag{5.18}$$

Отметим, что функциональная зависимость $\omega(k)$ в приближении неглубокой воды одинакова как для внутренних, так и для поверхностных волн, поэтому соответствующие результаты главы 1 могут быть непосредственно перенесены на внутренние волны.

Несколько другая ситуация возникает в тех случаях, когда длина волны велика только по отношению к толщине одного из слоев. Так, в глубоководных океанических районах $h_2 \gg h_1$ и возможна ситуация $h_2 \gg h \gg h_1$, т. е. $kh_1 \ll 1$ и $kh_2 \gg 1$. Заменяя тогда в (5.15) $\operatorname{cth}(kh_2) \simeq 1$ и $\operatorname{cth}(kh_1) \simeq 1/(kh_1)$, получим:

$$\omega^2 = [(\rho_2-\rho_1)/\rho_1]\, gh_1k^2, \tag{5.19}$$

и это выражение совпадает с дисперсионным соотношением для длинных волн (5.16) при $k_2 \to \infty$. Таким образом, приближение длинных волн справедливо и в том случае, когда волна является «длинной» в одном слое и «короткой» в другом. Однако приближение неглубокой воды уже приводит к отличным от (5.18) выводам. Удерживая в (5.15) следующие члены разложения по kh_1, имеем:

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}\, gh_1}\, k\left(1 - \frac{\rho_2}{2\rho_1}|k|h_1\right), \tag{5.20}$$

и здесь дисперсия связана с квадратичной по k поправкой [а не с кубической, как в (5.18)]. Это обстоятельство кардинально влияет на эволюцию начального возмущения в области головной волны. В частности, можно показать, что амплитуда головной волны затухает, как $x^{-1/2}$, а ее длина растет, как $x^{1/2}$. В случае асимметричной волны при любом виде начального возмущения головная волна не является волной с максимальной амплитудой. Имеются отличия также на нелинейной стадии, обсуждаемые ниже.

Поскольку скорость распространения внутренних волн, как уже указывалось, мала, она оказывается сравнимой со скоростями фоновых течений, неизбежно присутствующих в океане. Скорости течений обычно также стратифицированы по глубине. Для анализа влияния течений на характеристики внутренних волн рассмотрим снова двухслойную стратификацию, считая, что верхний слой движется относительно нижнего со скоростью U. Поскольку в каждом слое плотность и скорость постоянны, можно ввести потенциалы течений в каждом из слоев. Влияние течений скажется на виде граничных условий для пикноклина ($z=0$):

$$\partial\eta/\partial t + U\,\partial\eta/\partial x = \partial\varphi_1/\partial z;\quad \partial\eta/\partial t = \partial\varphi_2/\partial z; \tag{5.21}$$

$$\rho_1\,(\partial\varphi_1/\partial t + U\,\partial\varphi_1/\partial x + g\eta) = \rho_2\,(\partial\varphi_2/\partial t + g\eta), \tag{5.22}$$

заменяющих уравнения (5.2) и (5.3); остальные условия не изменятся. Для простоты будем считать слои безграничными, тогда потенциал течения в верхнем слое представим как

$$\varphi_1 = -\,[i\,(\omega - Uk)/k]\,\eta_0 \exp\,[-kz + i\,(\omega t - kx)], \tag{5.23}$$

а в нижнем слое по-прежнему описывается формулой (5.5). Подставляя (5.5) и (5.23) в динамическое граничное условие (5.22), находим дисперсионное соотношение

$$\omega = \frac{\rho_1}{\rho_1+\rho_2}\,Uk \pm \sqrt{-\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2}\,U^2k^2 + \frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2+\rho_1}\,gk}\,, \tag{5.24}$$

которое переходит в (5.7) при $U=0$. Однако при конечном U, как следует из (5.24), подкоренное выражение становится отрицательным для больших k (малых длин волн). Но тогда частота становится мнимой, и волна будет усиливаться, отбирая энергию у течения. С неустойчивостью такого рода мы уже сталкивались — это неустойчивость Кельвина—Гельмгольца, о которой шла речь выше при рассмотрении механизма генерации волн ветром. Отличие нашей задачи связано с малой скоростью внутренних волн, поэтому неустойчивость Кельвина—Гельмгольца возможна лишь при небольших скоростях течения. Все это указывает на принципиальную важность учета сдвиговых течений в задачах внутренних волн, и многие механизмы взаимодействия волн с течениями сейчас активно изучаются в теоретическом плане, однако их практическая реализуемость еще не ясна, и мы пока их рассматривать не будем.

5.2. Внутренние волны в океане с непрерывной стратификацией

Рассмотрим теперь свойства внутренних волн в океане с непрерывной стратификацией. Как уже указывалось, движение в этом случае является непотенциальным и исходными являются уравнения гидродинамики (1.1)—(1.3), которые должны быть дополнены уравнением неразрывности несжимаемой жидкости

$$d\rho/dt = \partial\rho/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\,\rho + w\,\partial\rho/\partial z = 0. \tag{5.25}$$

Линеаризуя эти уравнения, представим ρ и p в виде

$$\rho = \rho_0(z) + \rho'(x,\ y,\ z,\ t), \quad \rho' \ll \rho_0;$$
$$p = p_0(z) + p'(x,\ y,\ z,\ t), \quad p' \ll p_0, \tag{5.26}$$

где p_0 и ρ_0 связаны уравнением $dp_0/dz = -g\rho_0(z)$. Поскольку $\rho_0(z)$ меняется не более чем на несколько процентов, отсюда фактически вытекает закон гидростатики

$$p_0 = -g \int \rho_0(z)\, dz = p_{\text{атм}} - g\bar{\rho}z, \tag{5.27}$$

где $\bar{\rho}$ — среднее значение плотности воды.

Подставляя (5.26) в (1.1)—(1.3), (5.25) и считая, что фоновые течения в океане отсутствуют, получим следующие линейные уравнения:

$$\rho_0\, \partial\mathbf{u}/\partial t + \nabla p' = 0; \tag{5.28}$$

$$\rho_0\, \partial w/\partial t + \partial p'/\partial z + g\rho' = 0; \tag{5.29}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} - \partial w/\partial z = 0; \tag{5.30}$$

$$\partial\rho'/\partial t + w\, d\rho_0/dz = 0. \tag{5.31}$$

Удобно свести эту систему к одному уравнению для вертикальной скорости. Перекрестным дифференцированием (5.28) и (5.29) можно исключить p', а затем с помощью (5.31) — и ρ'; далее необходимо использовать (5.30). Окончательно имеем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) w + N^2\, \Delta w - \frac{N^2}{g}\, \frac{\partial^3 w}{\partial t^2\, \partial z} = 0, \tag{5.32}$$

где $N(z) = \sqrt{-(g/\rho_0)\, d\rho_0/dz}$ — частота Вяйсяля—Брента. В результате мы получили одно уравнение для одной переменной. Величина g/N^2 определяет масштаб изменения плотности, для океана она превышает 100 км (так как плотность меняется медленно), что значительно больше глубины океана. Последний член в (5.32) поэтому мал, например, по сравнению с $\partial^4 w/\partial t^2\, \partial z^2$, и им обычно пренебрегают (приближение Буссинеска). Тогда

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) w + N^2(z)\, \Delta w = 0, \tag{5.33}$$

и это уравнение является исходным при изучении свойств внутренних волн.

Рассмотрим сначала случай, когда $N = \text{const}$ (экспоненциальный закон стратификации). Пусть также длина внутренней волны мала по сравнению с глубиной океана. Тогда влиянием границ океана можно пренебречь и рассматривать решения (5.33) без учета граничных условий. Поскольку N от z не зависит, переменные в (5.33) разделяются, и элементарное решение, соответствующее бегущей монохроматической волне, имеет вид

$$w = w_0 \exp\left[i\left(\omega t - \mathbf{kr} - k_z z\right)\right]. \tag{5.34}$$

Подставляя (5.34) в (5.33), находим дисперсионное соотношение

$$\omega = N^2 \sin^2\theta = N^2 k^2/(k^2 + k_z^2), \tag{5.35}$$

где θ отсчитывается от вертикальной оси. Как видим, эти волны отличаются от ранее рассмотренных очень важным свойством, а именно они могут распространяться не только по горизонтали, а и по любому направлению под разными углами к горизонту, поэтому их часто называют *трехмерными*. Необычно и дисперсионное соотношение этих волн; частота не определяется длиной волны, а зависит только от направления распространения. Максимальная частота внутренних волн есть частота Вяйсяля—Брента. Физический смысл ее становится очевиден, если записать закон Ньютона для жидкой частицы, сдвинутой со своего горизонта и испытывающей влияние архимедовой силы $\rho\, d^2\eta/dt^2 = g\,\Delta\rho \simeq -\rho N^2\eta$, откуда и видно, что частица жидкости испытывает колебание около невозмущенного уровня с частотой Вяйсяля—Брента.

Фазовая скорость распространения трехмерной внутренней волны может быть любой, в том числе неограниченной при $k^2 + k_z^2 \to 0$. Однако в этом случае длина волны становится сравнимой с глубиной океана и для них необходимо отказаться от приближения бесконечно глубокого океана.

Простой расчет групповой скорости дает

$$c_{\text{гр}} = \frac{N k_z}{\left(k^2 + k_z^2\right)^{3/2}} \left\{ \frac{k_z \mathbf{k}}{k},\ \ -k \right\}, \tag{5.36}$$

и нетрудно видеть, что $c_{\text{гр}}$ ортогональна полному волновому вектору $\sqrt{k^2 + k_z^2}$. Это вносит свои особенности в распространение энергии.

Используя уравнения (5.35)—(5.36), можно рассчитать остальные компоненты волнового движения. В частности, скорость течения также ортогональна полному волновому вектору; о таких волнах говорят как о *поперечных* (по аналогии с теорией электромагнитных волн и теорией упругости).

Обсудим теперь свойства внутренних волн, если N является произвольной функцией глубины. Наиболее простой случай — это случай плавного изменения $N(z)$, когда решение локально описывается (5.34). Поскольку среда стационарна, то частота волны измениться не может, поэтому при изменении $N(z)$ в силу (5.35) меняется направление распространения волны. Так, если профиль $N(z)$ имеет вид, изображенный на рис. 5.2, и волна распространяется с горизонта $z = z_0$ под углом θ вверх, то по мере распространения θ возрастает и на горизонте $z_1 (N(z_1) = \omega)$ достигает $\pi/2$.

Волна поворачивает и распространяется вниз до горизонта z_2 [где снова $N(z_2=\omega)$], где опять поворачивает. В результате волна «запирается» в слое (z_1, z_2), который для нее является волноводом. Другими границами волновода могут являться дно и свободная поверхность океана. Для рассмотрения общего случая произвольной функции $N(z)$ в океане конечной глубины уравнение (5.33) должно быть дополнено граничными условиями. На дне — это условия непротекания жидкости через дно бассейна

$$w=0 \quad (z=-h). \tag{5.37}$$

На свободной поверхности должно выполняться условие непрерывности давления $p=p_{\text{атм}}$, которое после ряда преобразований сводится к [2, 3]

$$\partial^3 w/\partial t^2\, \partial z - g\,\Delta w = 0 \ (z=0). \tag{5.38}$$

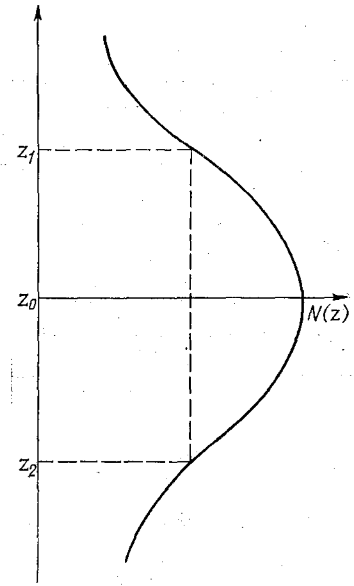


Рис. 5.2. Вертикальное распределение частоты Вяйсяля—Брента (схема).

И здесь можно показать, что для внутренних волн условие (5.38) с достаточной точностью аппроксимируется выражением

$$w=0 \quad (z=0), \tag{5.39}$$

соответствующим приближению твердой крышки, обсуждавшемуся в разделе 5.1.

Итак, уравнение (5.33) с граничными условиями (5.37) и (5.39) полностью определяет свойства внутренних волн. Поскольку N зависит только от z, то естественно элементарное решение, соответствующее бегущей волне, искать в виде

$$w=W(z)\exp\left[i(\omega t-\mathbf{kr})\right], \tag{5.40}$$

где для $W(z)$ получаем краевую задачу

$$\frac{d^2W}{dz^2}+\frac{N^2(z)-\omega^2}{\omega^2}k^2W=0 \tag{5.41}$$

с теми же граничными условиями (5.37) и (5.39). В качестве простейшего случая вернемся снова к случаю $N=\text{const}$. Тогда решением (5.41) с соответствующими граничными условиями является дискретный набор функций

$$W_n = a_n \sin(\pi n z/h), \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{5.42}$$

где a_n — постоянные, и каждой функции (моде) соответствует дисперсионное соотношение (рис. 5.3)

$$\omega_n^2 = \frac{N^2 k^2}{k^2 + (\pi n/h)^2}. \tag{5.43}$$

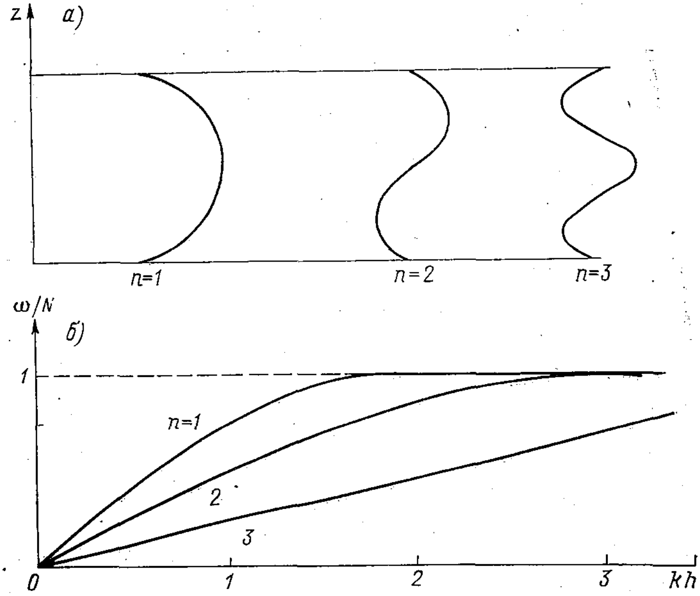


Рис. 5.3. Графическое изображение различных мод внутренних волн и соответствующих им дисперсионных кривых.

а — схематическое изображение трех первых мод; б — дисперсионные кривые.

Общее решение в этом случае для прогрессивной волны представляет собой суперпозицию мод

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{\pi n z}{h} \exp\left[i\left(\omega_n t - \mathbf{kr}\right)\right]. \tag{5.44}$$

Итак, в отличие от модели с резким скачком плотности здесь мы имеем бесконечное число внутренних волн, отличающихся друг от друга вертикальной структурой. Зная w, можно найти остальные компоненты волнового движения, в частности, амплитуду колебаний изопикны (линии постоянной плотности): $\eta_n = a_n/(i\omega)$. Обычно при контактных измерениях определяют смещения изотермы, они легко пересчитываются в смещения изопикн.

С помощью (5.43) находятся фазовая и групповая скорости:

$$c_\text{ф} = N \Big/ \sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi n}{h}\right)^2}; \quad c_\text{гр} = N (\pi n/h)^2 / [k^2 + (\pi n/h)^2]^{3/2}. \tag{5.45}$$

Скорость падает с ростом k (приближением ω к N) и номера моды. Наиболее быстро распространяется наинизшая (первая) мода; поскольку в пределе $k \to 0$ (длинные волны), то $c_\text{макс} = Nh/\pi$ и для типичных океанических значений фазовая и групповая скорости длинных внутренних волн не превышают 3 м/с.

Обратим внимание, что длинные внутренние волны не диспергируют; с учетом малых поправок hk (приближение неглубокой воды) соотношение (5.43) принимает вид

$$\omega_n = \frac{Nh}{\pi n} k \left(1 - \frac{k^2 h^2}{2\pi^2 n^2}\right), \tag{5.46}$$

соответствующий аналогичному приближению для поверхностных волн.

Описанные свойства элементарных внутренних волн существенно влияют на эволюцию произвольных начальных возмущений. Так, ввиду большой разницы в скоростях распространения разных мод начальное возмущение быстро «расползается» на отдельные волновые сгустки, соответствующие каждой моде. Кроме того, из-за дисперсии каждая мода превратится в квазигармонический цуг, впереди будут бежать более длинные волны. Профиль волны зависит также от горизонта измерений, поскольку W_n зависит от z. Это приводит к трудностям определения модового состава внутренних волн при измерениях в натурных условиях, выбора числа и местоположения датчиков.

В случае произвольной зависимости частоты Вяйсяля—Брента от глубины структура моды и дисперсионное соотношение находятся численными методами. Этому вопросу посвящена лабораторная работа № 1. Отметим лишь, что и здесь частота внутренних волн не может превышать максимума частоты Вяйсяля—Брента. Наиболее просто это увидеть, если умножить (5.41) на $W(z)$ и проинтегрировать его по глубине с учетом граничных условий (5.37) и (5.39):

$$\frac{\omega^2}{k^2} \int_{-h}^{0} \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz + \omega^2 \int_{-h}^{0} W^2\, dz =$$

$$= \int_{-h}^{0} N^2(z)\, W^2(z)\, dz \leqslant N^2_\text{макс} \int_{-h}^{0} W^2(z)\, dz,$$

откуда

$$\omega^2 \leqslant N^2_\text{макс} \int_{-h}^{0} W^2\, dz \Bigg/ \left[\int_{-h}^{0} W^2\, dz + \frac{1}{k^2} \int_{-h}^{0} \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz\right] \leqslant N^2_\text{макс},$$

т. е. $\omega \leqslant N_\text{макс}$.

Наличие сдвиговых течений в океане с произвольной стратификацией также может приводить к неустойчивости внутренних волн типа неустойчивости Кельвина—Гельмгольца. Расчеты Майлса показывают, что внутренние волны устойчивы при условии больших чисел Ричардсона, т. е. при $\mathrm{Ri} = N^2(z)/(dU/dz)^2 > 1/4$; в противном случае возможна неустойчивость; такие неустойчивые внутренние волны часто измеряются на горизонтах с сильным сдвигом скорости.

5.3. Нелинейная теория внутренних волн

При рассмотрении нелинейной динамики волн естественно в первую очередь проверить выполнимость условий трехволнового резонанса

$$\begin{gathered}\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}_3,\\ \omega_n(\mathbf{k}_1) \pm \omega_m(\mathbf{k}_2) = \omega_l(\mathbf{k}_3).\end{gathered} \tag{5.47}$$

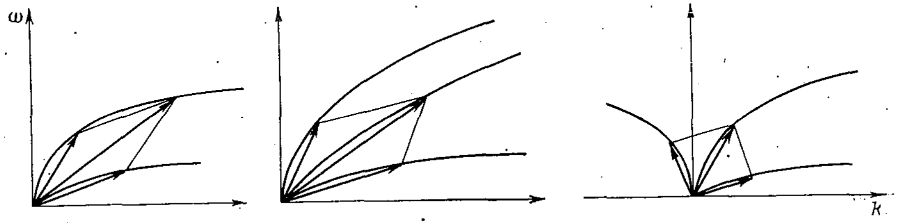


Рис. 5.4. Условия трехволнового взаимодействия внутренних волн.

Поскольку дисперсионное соотношение каждой моды внутренней волны качественно аналогично дисперсионному соотношению поверхностной волны, то анализ взаимодействий спектральных компонентов одной моды делается без труда: такое взаимодействие эффективно только для длинных волн, в остальных случаях генерация высших гармоник затруднена. Иная ситуация реализуется в случае взаимодействия спектральных компонентов различных мод. На рис. 5.4 представлены некоторые из вариантов трехволнового резонанса. Как видим, условия (5.47) легко выполняются для внутренних волн из-за их многомодовости. В результате трехволнового взаимодействия энергия рассеивается по спектру волновых чисел и мод, определяя фоновое состояние внутренней «погоды» в океане. Наряду с квазигармоническими возмущениями обычно малой амплитуды в океане часто регистрируются короткие цуги интенсивных внутренних волн определенной (как правило, наинизшей) моды. Поскольку скорости различных мод сильно различаются между собой, взаимодействие коротких цугов не успевает произойти, и межмодовым взаимодействием можно пренебречь. Но тогда в сущности мы имеем задачу, подобную задаче для поверхностных волн; в этом случае необходимо исследовать динамику длинных волн (см. разделы 1.4, 1.5) либо квазигармонического цуга (см. п. 1.5.6). Рассмотрим здесь динамику длинных нелинейных внутренних волн. Линейные дисперсионные соотношения в приближении длинных волн ведут себя одинаково для поверхностных и внутренних волн; покажем, что эквивалентность соответствующих задач имеет место и в нелинейном случае [5].

Выпишем здесь нелинейные уравнения гидродинамики несжимаемой неоднородной жидкости (1.1)—(1.3), (5.25):

$$\operatorname{div} \mathbf{u} - \partial w/\partial z = 0; \tag{5.48}$$

$$\partial \rho'/\partial t + w\, d\rho_0/dz = -[w\, \partial \rho'/\partial z + (\mathbf{u}\nabla)\rho'] = s_1; \tag{5.49}$$

$$\partial p'/\partial z + g\rho' = -\rho_0 [w\, \partial w/\partial z + (\mathbf{u}\nabla) w] = s_2; \tag{5.50}$$

$$\rho_0\, \partial \mathbf{u}/\partial t + \nabla p' = -[\rho'\, \partial \mathbf{u}/\partial t + \rho_0 w\, \partial \mathbf{u}/\partial z + \rho_0 (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}] = \mathbf{s}_3. \tag{5.51}$$

Здесь в правой части сгруппированы все нелинейные члены. В пренебрежении правой частью решение этой системы имеет вид

$$w = W(z)\, \tilde{w}(x, y, t); \tag{5.52}$$

$$\mathbf{u} = \alpha_1 (dW/dz)\, \tilde{\mathbf{u}}(x, y, t); \tag{5.53}$$

$$\rho' = \alpha_2 W N^2 \tilde{\rho}(x, y, t); \tag{5.54}$$

$$p' = \alpha_3 \rho_0 (dW/dz)\, \tilde{p}(x, y, t), \tag{5.55}$$

где $W(z)$ — одна из мод внутренних волн, удовлетворяющая краевой задаче (5.41) с граничными условиями (5.37), (5.39), которая в приближении длинных волн ($\omega \ll N$) имеет вид

$$\begin{gathered} d^2W/dz^2 + [N^2(z)/c^2]\, W = 0; \\ W(z=0) = W(z=-h) = 0, \end{gathered} \tag{5.56}$$

где c — скорость распространения длинных волн; $\alpha_{1,2,3}$ — константы разделения, выбором которых можно сохранить старую размерность у функций с тильдой, например: $\alpha_1 = h$, $\alpha_2 = N^{-2}_{\text{макс}}$, $\alpha_3 = h/\rho_0$. Исключение вертикальной координаты z производится с помощью процедуры Галеркина, заключающейся в умножении исходной системы на собственные функции линейной системы, и интегрированием по глубине; эта процедура часто применяется в механике жидкости и газа, хотя и не имеет еще строгого математического обоснования. В соответствии с этой процедурой умножим (5.48) и (5.51) на dW/dz, а (5.49) и (5.50) на W и проинтегрируем по z в пределах от $-h$ до 0 с использованием (5.56). В результате получаем систему:

$$\operatorname{div}\tilde{\mathbf{u}} + \alpha_1\tilde{w} = 0;$$
$$\alpha_2\,\partial\tilde{\rho}/\partial t - (\rho_0/g)\,\tilde{w} = \tilde{s}_1; \tag{5.57}$$
$$g\alpha_2\tilde{\rho} - \rho_0(\alpha_3/c^2)\,\tilde{p} = \tilde{s}_2;\quad \alpha_1\,\partial\tilde{\mathbf{u}}/\partial t + \alpha_3\nabla\tilde{p} = \tilde{\mathbf{s}}_3,$$

где

$$\tilde{s}_1 = \int\limits_{-h}^{0} W s_1\,dz \Big/ \int\limits_{-h}^{0} N^2W^2\,dz;\quad \tilde{s}_2 = \int\limits_{-h}^{0} W s_2\,dz \Big/ \int\limits_{-h}^{0} N^2W^2\,dz;$$
$$\tilde{\mathbf{s}}_3 = \int\limits_{-h}^{0} \frac{dW}{dz}\,\mathbf{s}_3\,dz \Big/ \int\limits_{-h}^{0} \left(\frac{dW}{dz}\right)^2 dz.$$

Получившаяся система уже не содержит координату z и определяет эволюцию возмущений в горизонтальной плоскости. Удобно вместо w ввести смещение изопикны

$$w = d\eta/dt = \partial\eta/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\,\eta \quad (z = \eta). \tag{5.58}$$

Тогда после ряда преобразований система (5.57) принимает вид

$$\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\left(h + \frac{s}{2}\,\tilde{\eta}\right)\tilde{\mathbf{u}}\right] = 0; \tag{5.59}$$

$$\frac{\partial\tilde{\mathbf{u}}}{\partial t} + \frac{c^2}{h}\nabla\tilde{\eta} + s\left[\left(\tilde{\mathbf{u}}\nabla\right)\tilde{\mathbf{u}} - \frac{1}{2h}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\eta}\tilde{\mathbf{u}}\right)\right] = 0. \tag{5.60}$$

В эту систему входит только один параметр нелинейности s:

$$s = h\int\limits_{-h}^{0} (dW/dz)^3\,dz \Big/ \int\limits_{-h}^{0} (dW/dz)^2\,dz. \tag{5.61}$$

Отметим, что, поскольку в (5.61) входит $(dW/dz)^3$, то знак параметра нелинейности s может быть любым. Так, если $N = \mathrm{const}$ и W описывается выражением (5.42), то $s = 0$, и нелинейность в этом приближении отсутствует. В случае двухслойной жидкости, когда толщина верхнего слоя конечна, а нижнего бесконечна, из (5.14) нетрудно получить $s = -1$; если же толщина нижнего слоя конечна, а верхнего бесконечна, то $s = +1$. В произвольности знака s и заключается своеобразие нелинейности внутренних волн по сравнению с поверхностными.

Из возможных решений нелинейной системы (5.60) рассмотрим простые волны или волны Римана. Будем считать, что $\tilde{\eta}$ и $\tilde{u}$ зависят от x и t и связаны между собой. Проводя выкладки, полностью аналогичные приведенным в разделе 1.4, получим окончательный результат в виде уравнения простой волны

$$\partial\tilde{\eta}/\partial t + c\,[1 + 3c\tilde{\eta}/(2h)]\,\partial\tilde{\eta}/\partial x = 0, \tag{5.62}$$

в котором мы считали $\tilde{\eta} \ll h$ (приближение слабой нелинейности). В случае $s = 1$ это уравнение совпадает с (1.85) для поверхностных волн. Отметим, что при $s < 0$ крутым становится не передний склон волны, а задний (если, конечно, $\tilde{\eta} > 0$). Правда, необходимо заметить, что повышение или понижение изопикны определяется величиной $\tilde{\eta}W(z)$, и оно может быть различным на разных горизонтах для волны второй или более высокой по номеру моды.

Учтем теперь слабую дисперсию длинных волн. Для этого надо в линейном дисперсионном соотношении типа (5.18) или (5.46) заменить ω на $(1/i)\,\partial/\partial t$ и k на $-(1/i)\,\partial/\partial x$ и объединить его с (5.62). В результате мы придем к уравнению Кортевега—де Вриза [3]

$$\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t} + c\left(1 + \frac{3s\tilde{\eta}}{2h}\right)\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x} + \frac{dh^2c}{2}\,\frac{\partial^3\tilde{\eta}}{\partial x^3} = 0, \tag{5.63}$$

где коэффициент d равен

$$d = \int\limits_{-h}^{0} W^2\,dz \Bigg/ \left[h^2 \int\limits_{-h}^{0} (dW/dz)^2\,dz\right], \tag{5.64}$$

и он всегда положителен. Уравнение Кортевега—де Вриза было рассмотрено в главе 1. Оно имеет установившееся решение в виде солитонов и кноидальных волн. В частности, солитон представляет собой горб, если $s < 0$, и впадину, если $s > 0$. Таким образом, в мелководном бассейне с резко выраженным пикноклином солитон на пикноклине, прижатом к поверхности, представляет собой впадину, а на пикноклине, прижатом ко дну, горб; эти выводы хорошо согласуются с имеющимися данными наблюдений за внутренними солитонами.

Аналогия с длинными поверхностными волнами не выполняется в случае бассейна бесконечной глубины. При этом дисперсионное соотношение для длинноволновых возмущений имеет вид (5.20), которое мы здесь перепишем в обобщенной форме:

$$\omega = ck\,(1 - \gamma h\,|k|), \tag{5.65}$$

где h — глубина залегания пикноклина (либо высота пикноклина над дном, если пикноклин прижат ко дну) и γ — численный коэффициент, зависящий от профиля частоты Вяйсяля—Брента. Наличие модуля волнового числа кардинально меняет ситуацию, ему не может быть поставлен в соответствие дифференциальный оператор. Более точный анализ показывает, что слагаемому $k|k|$ в (5.65) соответствует интегральный оператор и вместо уравнения

Кортевега—де Вриза в этом случае получается уравнение Бенджамина—Оно [3]

$$\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial t}+c\left(1+\frac{3s\tilde{\eta}}{2h}\right)\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial x}+\frac{1}{\pi}\gamma\,\mathrm{ch}\int\frac{\partial^2\tilde{\eta}}{\partial x'^2}\frac{dx'}{x-x'}=0. \quad (5.66)$$

Решение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вызывает серьезные трудности, поэтому приведем без вывода только одно из решений, соответствующее солитону:

$$\eta=\eta_0\Big/\left\{1-\frac{9s^2\eta_0^2}{64\gamma^2h^4}\left[x-c\left(1-\frac{3s\eta_0}{8h}\right)t\right]^2\right\}, \quad (5.67)$$

и получившее название *алгебраического солитона*, поскольку при больших x такой солитон имеет асимптотику (в отличие от солитона Кортевега—де Вриза, где асимптотика экспоненциальна). Характерная длина алгебраического солитона, например по уровню 0,5, есть

$$\lambda=16\gamma h^2/(3s\eta_0); \quad (5.68)$$

откуда видно, что солитон большей амплитуды становится у́же. Скорость солитона также больше скорости распространения в линейном приближении. Отметим, что алгебраический солитон представляет собой горб, если $s>0$, и впадину, если $s<0$. Если же $s=0$, то из-за отсутствия нелинейности солитон невозможен, дисперсия «растащит» любое возмущение.

Уравнение Бенджамина—Оно относится к числу точно интегрируемых. Его динамика аналогична динамике уравнения Кортевега—де Вриза: произвольное ограниченное возмущение трансформируется в последовательность солитонов и осциллирующие цуги.

5.4. Спектральные характеристики внутренних волн

Описание спектров внутренних волн, так же как и ветровых волн, производится в рамках уравнений энергетического баланса или волнового действия. Для их применимости необходима медленность изменения параметров океана (течений, глубины, стратификации) вдоль трассы распространения. Однако, в отличие от поверхностных волн, поле внутренних волн многомодово, поэтому спектр внутренних волн зависит не только от волнового числа, но и от номера моды $S_{\text{в}}=S(\mathbf{k}, n, \mathbf{r}, t)$.

Различные моды между собой могут взаимодействовать, например, из-за нелинейности или шероховатости рельефа, поэтому уравнения для волновых действий разных мод оказываются связанными. Формально вид уравнения не меняется [4]:

$$\frac{d}{dt}\frac{S_{\text{в}}(\mathbf{k}, n, \mathbf{r}, t)}{\omega_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S_{\text{в}}}{\omega_n}\right)+\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\nabla\left(\frac{S_{\text{в}}}{\omega_n}\right)-\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial\mathbf{k}}\left(\frac{S_{\text{в}}}{\omega_n}\right)=G. \quad (5.69)$$

Специфика внутренних волн заключается в конкретном виде дисперсионного соотношения и правой части, описывающей механизмы генерации, диссипации и взаимодействия внутренних волн. Для мелкомасштабных внутренних волн в слоях с плавным изменением частоты Вяйсяля—Брента внутренние волны естественно считать трехмерными с дисперсионным соотношением (5.35). В этом случае естественно иметь дело с трехмерным спектром $S_в(\mathbf{k}, k_z, \mathbf{r}, z, t)$ уравнение для которого имеет вид, аналогичный (5.69) [4]:

$$\frac{d}{dt}\,\frac{S_в(\mathbf{k},\ k_z,\ \mathbf{r},\ z,\ t)}{\omega(\mathbf{k},\ k_z,\ \mathbf{r},\ z,\ t)}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S_в}{\omega}\right)-\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}}\nabla\left(\frac{S_в}{\omega}\right)+$$
$$+\frac{\partial\omega}{\partial k_z}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{S_в}{\omega}\right)-\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{r}}\,\frac{\partial}{\partial k}\left(\frac{S_в}{\omega}\right)-\frac{\partial\omega}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial k_z}\left(\frac{S_в}{\omega}\right)=G. \quad (5.70)$$

Наибольшие сложности при исследовании уравнений (5.69) и (5.70) связаны с неопределенностью их правых частей. Механизмы генерации и диссипации внутренних волн изучены слабее, чем соответствующие механизмы поверхностных волн, поэтому общепринятых выражений для G в настоящее время не существует. Если, однако, в G учесть только нелинейные взаимодействия в первом порядке теории возмущений, то удается с помощью соображений размерности получить изотропные колмогоровские спектры (их нахождение производится аналогично ветровым волнам, только внутренние волны, в отличие от ветровых, участвуют в трехволновых взаимодействиях), которые имеют вид (мы приведем только выражение для одномерных спектров) [6]

$$S_в\sim\sqrt{PN}\,(k^2+k_z^2)^{-1} \quad (5.71)$$

для длинных волн на тонком пикноклине толщиной

$$S_в\sim\sqrt{PN_{макс}h_0}\,k^{-3/2}, \quad (5.72)$$

где P — поток энергии по спектру.

Экспериментальные данные о спектрах внутренних волн пока еще весьма разрозненны. Гаррет и Манк, обработав многочисленные данные, сформулировали так называемый климатический спектр, считая, что для средних условий можно принять стратификацию типа $N(z)=N_0\exp(z/L_0)$ с $N=3$ цикл/ч и $L_0=1{,}3$ км [3, 4]:

$$S_в=\rho_0L^5N_0E_0f/[n\pi^3\omega(\omega^2-f^2)\,k], \quad (5.73)$$

где f — частота Кориолиса, $f<\omega<N$, $k<n\pi\sqrt{\omega^2-f^2}$, $n<20$, $E_0=2\pi\cdot10^{-5}$, частоты измеряются в единицах N_0, а волновое число — в единицах $k_0=2\pi/L_0=1{,}22\cdot10^{-6}$ цикл/см. В данной модели полная энергия внутренних волн на единицу площади поверхности океана равна 0,382 Дж/см². Спектр Гаррета—Манка соответствует очень усредненным условиям, поэтому он неоднократно модифицировался для конкретных акваторий. Отметим лишь, что спектр (5.73) не зависит от волнообразующих факторов;

последние определяют отклонение от спектра Гаррета—Манка, и их изучение важно для прогнозирования параметров внутренних волн.

На практике измеряют обычно не энергетический спектр внутренних волн, а спектр смещений изопикн $\eta(z, \mathbf{r}, t)$. Связь между ними определяется формулой

$$S_{\text{в}}(\mathbf{k}, n, \mathbf{r}, t) = \rho_0 \int_{-h}^{0} N^2(z) S_\eta(\mathbf{k}, n, z, \mathbf{r}, t)\, dz, \qquad (5.74)$$

которая легко следует из определения энергии. Спектры смещений, полученные на разных горизонтах, трудно сопоставлять между собой, поскольку они существенно зависят от частоты Вяйсяля на этих горизонтах. Некоторое представление о нормировке спектров возвышений, позволяющее «стянуть» экспериментальные кривые в одну, можно получить из уравнения (5.70) в случае плавного изменения $N(z)$. Будем считать спектр горизонтально однородным, а также пренебрежем G в правой части. Тогда уравнение (5.70) упрощается

$$\frac{\partial\omega}{\partial k_z}\frac{\partial}{\partial z}\frac{S_{\text{в}}}{\omega} - \frac{\partial\omega}{\partial z}\frac{\partial}{\partial k_z}\frac{S_{\text{в}}}{\omega} = 0$$

и интегрируется с учетом (5.35) и (5.74)

$$S_{\text{в}}/N(z) \sim N(z) S_\eta = \Psi(\mathbf{k}). \qquad (5.75)$$

Отсюда видно, что если спектры смещений изопикн помножить на N, то они перестают зависеть от глубины и определяют только зависимость от волнового вектора. Этот результат мы получили для трехмерных волн, но он сохраняется и в более общем случае в слоях с плавным изменением частоты Вяйсяля—Брента, что видно из климатического спектра Гаррета—Манка (5.73). Нормировка (5.75) хорошо соответствует натурным данным и используется экспериментаторами.

5.5. Поверхностные проявления внутренних волн

В настоящее время уже накоплен обширный материал наблюдений за поверхностными проявлениями внутренних волн, в том числе и из космоса. Это и появление гладких полос на поверхности — так называемых сликов — и наоборот, областей с повышенной шероховатостью (усилением ряби). Поверхностные проявления внутренних волн сопровождаются часто пенными полосами, биологической и химической активностью приповерхностного слоя и т. п. Благодаря указанным поверхностным проявлениям возможно создание дистанционной, в том числе космической, системы слежения за внутренними волнами на больших акваториях, что имеет важное практическое значение. Рассмотрим поэтому физику механизмов проявления внутренних волн на поверхности.

Мы уже говорили, что во внутренней волне смещения свободной поверхности малы (примерно на три порядка меньше смещения пикноклина) и не превышают нескольких сантиметров. Такие смещения в принципе могут быть зарегистрированы, особенно эффективно в арктических районах, где такие наблюдения и были сделаны путем измерения вертикальных колебаний льдин.

В условиях развитого волнения малые низкочастотные смещения уровня моря измерить очень трудно, так что этот механизм поверхностных проявлений не может быть основным. По современным представлениям главным источником поверхностных проялений является поле приповерхностных скоростей частиц воды во внутренних волнах. Горизонтальную скорость в монохроматической бегущей волне можно рассчитать на основе уравнения неразрывности (5.30):

$$U(z) = (1/k)\, dW/dz, \tag{5.76}$$

причем поле горизонтальных скоростей сдвинуто на $-\pi/2$ относительно вертикальных скоростей. С другой стороны, w сдвинута на $\pi/2$ относительно $\eta (w = d\eta/dt)$, поэтому поле горизонтальных скоростей синфазно со смещением изопикн. Полный расчет $U(z)$ по заданной структуре моды не вызывает никаких сложностей. Подчеркнем, что расчет $U(0)$ (на свободной поверхности) может быть выполнен в рамках приближения «твердой крышки». В частности, для стратификации $N = \text{const}$ имеем

$$U(0)/c_{\text{ф}} = \pi n \eta_n / h. \tag{5.77}$$

Поскольку фазовая скорость волны спадает с ростом волнового числа и номера моды, максимальные скорости на поверхности достигаются в длинных волнах наинизшей моды, причем $\text{Max}\, U(0) = N\eta_1$. При $\eta_1 \sim 10$ м и $N \sim 5 \cdot 10^{-3}$ имеем $U(0) \sim 5$ см/с. Такие течения во внутренних волнах способны значительно влиять на ветровое волнение, особенно в мелкомасштабной части спектра. В настоящее время рассматриваются три механизма воздействия внутренних волн на ветровое волнение: кинематический (трансформация поверхностных волн на неоднородном и стационарном течении), пленочный (модуляция коэффициента затухания ветровой ряби вследствие перераспределения под действием внутренних волн пленок поверхностно-активных веществ) и турбулентный (изменение турбулентной вязкости воды под действием внутренних волн) [1]. Все они описываются в рамках уравнения для спектра ветровых волн, приведенного в главе 2:

$$\frac{d}{dt}\frac{S}{\Omega} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{S}{\Omega} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \nabla \frac{S}{\Omega} - \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}}\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}}\frac{S}{\Omega} = G_{\text{д}}, \tag{5.78}$$

где ω — частота поверхностной волны, равная

$$\omega = \Omega + \mathbf{k}\mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \Omega = \sqrt{gk}. \tag{5.79}$$

Здесь S — спектр возвышений морской поверхности, и для коротких ветровых волн мы используем приближение глубокой воды.

Функция $G_д$ описывается выражением (2.68). Величина $\mathbf{U}$ определяется полем горизонтальных скоростей на свободной поверхности и может быть заданной.

Трансформация ветровых волн на неоднородном течении нами уже изучалась ранее (раздел 2.6). В данном случае мы имеем дело с перемещающимся со скоростью $c_ф$ течением $U(x-c_ф t)$. Поэтому естественно перейти в систему отсчета, движущуюся со скоростью распространения внутренних волн, тогда течение станет стационарным и задача сведется к уже изученной. В стационарном случае частота ветровой волны сохраняется. С учетом перехода в другую систему координат имеем

$$\omega - \mathbf{k}\mathbf{c}_ф = \Omega + \mathbf{k}(\mathbf{U} - \mathbf{c}_ф) = \mathrm{const}. \tag{5.80}$$

Отсюда определяется изменение волнового числа ветровой волны при трансформации на внутренней. В частности, обозначая фазовую скорость поверхностной волны $c=\Omega/k=\sqrt{g/k}$ и принимая, что ветровая и внутренняя волны распространяются в одну сторону, из (5.80) находим:

$$c/c_0 = \{c_0(c_0-c_ф)\left[1-4U(c_0-c_ф)/(c_0-2c_ф)^2\right]^{1/2}\}/[2(c_0-c_ф)], \tag{5.81}$$

где c_0 — фазовая скорость ветровой волны вне зоны действия внутренней волны. Таким образом, можно рассчитать изменение кинематических характеристик ветровых волн. Из (5.81) следует, что это изменение определяется параметром $Q=4U(c_0-c_ф)/(c_0-2c_ф)^2$, который наиболее существен при $c_0/2 \to c_ф$, т. е. когда групповая скорость поверхностных волн близка к скорости распространения внутренних волн. В этом случае поверхностная и внутренняя волны распространяются долго вместе (синхронизм) и эффект взаимодействия носит накапливающийся характер.

Условие синхронизма $d\omega/dk=c_ф$ позволяет определить длины ветровых волн, наиболее сильно подверженных действию внутренних волн. Поскольку для внутренних волн $c_ф < 3$ м/с, в синхронизм попадают дециметровые и метровые волны, принадлежащие мелкомасштабному ветровому волнению; энергонесущие волны при этом не изменяются.

Расчет деформации спектра ветровых волн требует детального знания правой части в (5.78). В рамках кинематического механизма для правой части используют выражение типа (2.72). Не приводя детали численных расчетов, укажем на основные результаты:

— спектр ветрового волнения наиболее сильно деформируется в окрестности мелких масштабов с ростом амплитуды внутренней волны;

— изменения в спектре уменьшаются с ростом скорости ветра и увеличиваются с ростом амплитуды внутренней волны;

— в пространственной картине поверхностного волнения существуют области как уменьшения, так и увеличения спектра, воспринимаемые как участки выглаживания (слики) и шероховатости (сулои) морской поверхности;

— при попутном движении внутренней и поверхностной волн слик располагается на переднем склоне внутренней волны наинизшей моды.

Результаты расчетов хорошо согласуются с данными натурных измерений в дециметровой и метровой областях спектра ветрового волнения. В сантиметровой части спектра (наиболее активно используемой в радиолокации морской поверхности) различие результатов теории и экcперимента существенно, и здесь необходимо привлекать другие механизмы. В частности, на этот диапазон сильно воздействуют пленки поверхностно-активных веществ, повсеместно присутствующие в океане. Простейшим уравнением для описания концентрации пленок на морской поверхности является уравнение сохранения массы

$$\partial\Gamma/\partial t + \operatorname{div}(\Gamma\mathbf{U}) = 0, \tag{5.82}$$

где Γ — поверхностная концентрация; $\mathbf{U}$ — горизонтальная скорость частиц на морской поверхности во внутренней волне. Считая, что внутренняя волна слабо изменяет невозмущенную концентрацию Γ_0, для монохроматической волны из (5.82) получаем:

$$\Gamma = \Gamma_0 (1 + U/c_{\text{ф}}). \tag{5.83}$$

Поскольку U на поверхности положительно над подошвой внутренней волны (в случае наинизшей моды), то здесь же возрастает концентрация пленок. Увеличение концентрации даже на несколько процентов может существенно погасить ветровую рябь длиной 1—4 см и привести к выглаживанию морской поверхности, образованию слика. Описание теории гашения волн пленками поверхностно-активных веществ выходит за рамки данного курса, поэтому этими качественными соображениями мы и ограничимся.

Более подробно о проблеме поверхностных проявлений внутренних волн можно узнать из книги [1].

Вопросы для самопроверки

1. Назовите физические причины, приводящие к стратификации вод океана.
2. В чем различие между пикноклином, термоклином и халоклином?
3. Почему о внутренних волнах говорят как о частном виде гравитационных волн?
4. В чем заключается приближение твердой крышки, какие движения они отфильтровывают?
5. Диспергируют ли внутренние волны?
6. Приведите формулу для частоты Вяйсяля—Брента.
7. Напишите дисперсионное соотношение для трехмерных внутренних волн.
8. Чем ограничена частота внутренних волн сверху?
9. От чего зависит число мод внутренних волн?
10. В каких случаях для внутренних волн выполняются условия трехволнового резонанса, а в каких — четырехволнового?
11. Напишите уравнение Кортевега—де Вриза для внутренних волн и приведите его солитонное решение.

12. Напишите уравнение Бенджамина—Оно и приведите его решение в виде алгебраического солитона.

13. В какую сторону смещаются изопикны в солитоне?

14. Как связаны спектры смещений, горизонтальных и вертикальных скоростей, давления, энергии между собой?

15. Перечислите механизмы воздействия внутренних волн на ветровое волнение.

Типовые упражнения

1. Рассчитайте характеристики внутренних волн в среде с двухслойной стратификацией с учетом смещений свободной поверхности без использования приближения твердой крышки и оцените роль этого приближения (толщину нижнего слоя можно считать бесконечной).

2. Рассчитайте характеристики внутренних волн в слое с постоянной частотой Вяйсяля—Брента без использования приближения Буссинеска. Дайте оценку погрешности, связанной с этим приближением.

3. Получите дисперсионное соотношение для внутренних волн в слое с постоянной частотой Вяйсяля—Брента при учете вращения Земли.

4. Постройте вертикальные распределения всех гидрофизических полей во внутренней волне для слоя конечной глубины с постоянной частотой Вяйсяля—Брента.

5. Вычислите нелинейный коэффициент s по формуле (5.61) для двухслойной стратификации с произвольным соотношением глубин. Покажите, как меняется форма солитона при изменении соотношения между глубинами слоев.

6. Нарисуйте смещения изопикн в солитонах для первой и второй мод.

7. Рассчитайте частоты и волновые числа длинных внутренних волн, удовлетворяющие условию трехволнового резонанса (5.47).

8. Считая частоту Вяйсяля—Брента постоянной по глубине и медленно изменяющейся вдоль координаты x, рассмотрите изменение частотного спектра внутренних волн. Глубину бассейна считать постоянной.

9. Постройте графики изменения волнового числа поверхностной волны при ее взаимодействии с внутренней волной по формуле (5.81).

10. Рассчитайте частоты и длины поверхностных волн, попадающих в резонанс с внутренней волной.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

РАСЧЕТ ДИСПЕРСИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ВНУТРЕННИХ ВОЛН

Целью работы является исследование структуры внутренних волн в океане с произвольной стратификацией. Вертикальная структура моды внутренней волны описывается формулами раздела 5.2, которые мы здесь воспроизводим:

$$\frac{d^2W}{dz^2}+\frac{N^2(z)-\omega^2}{\omega^2}k^2W=0; \tag{5.84}$$

$$W(0)=W(-h)=0. \tag{5.85}$$

Решение данной краевой задачи определяет как вертикальную структуру моды, так и ее дисперсионное соотношение, причем таких мод счетное множество.

Аналитические решения (5.84) находятся в элементарных или специальных функциях для ряда конкретных профилей $N(z)$. Ввиду необходимости рассмотрения произвольного закона $N(z)$ необходимо обратиться к численным методам решения краевой задачи. Наиболее простейшим способом вычисления может быть кусочно-постоянная аппроксимация $N(z)$, т. е. разбивка на несколько слоев, в каждом из которых $N(z)$ может считаться постоянным. Внутри каждого слоя уравнение (5.84) имеет постоянные коэффициенты и легко интегрируется:

$$W_i(z)=A_i\exp(\lambda_i z)+B_i\exp(-\lambda_i z), \tag{5.86}$$

где

$$\lambda_i^2=\left[(\omega^2-N_i^2)/\omega^2\right]k^2; \tag{5.87}$$

N_i — значение частоты Вяйсяля—Брента в i-м слое; A_i и B_i — произвольные постоянные. На границах слоев выполняются следующие условия, вытекающие из (5.84):

$$W_{i+}=W_{i-};\quad dW_i/dz\,|_+=dW_i/dz\,|_-, \tag{5.88}$$

где «±» соответствует значениям функции по разные стороны от границы. Подставляя (5.86) в (5.88), а также (5.85), приходим к однородной алгебраической системе относительно A_i и B_i, решение которой может существовать только при обращении в нуль определителя, составленного из коэффициентов при A_i и B_i. Получаемое уравнение содержит только ω и k и определяет дисперсионное соотношение. Затем находятся связи между A_i и B_i, что дает нам искомую структуру моды.

Продемонстрируем эту технику на тривиальном примере одного слоя с $N=\text{const}$. Подставим (5.86) в (5.85):

$$A+B=0;\quad A\exp(-\lambda h)+B\exp(\lambda h)=0. \tag{5.89}$$

Решение этой системы существует при условии

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \exp(-\lambda h) & \exp(\lambda h) \end{vmatrix}=0,$$

откуда $\exp(2\lambda h)=1$ или

$$2\lambda h=2i\pi n,\quad n=0,\ 1,\ \ldots \tag{5.90}$$

Учитывая определение λ с помощью выражений (5.87) и (5.90), находим дисперсионное соотношение

$$\omega^2 = N^2 \Big/ \left(1 + \frac{\pi^2 n^2}{h^2 k^2}\right), \tag{5.91}$$

которое, естественно, совпадает с (5.43). Подстановка (5.90) в (5.86) с учетом $A = -B$ приводит к структуре моды

$$W = a \sin(\pi n z / h). \tag{5.92}$$

С увеличением числа слоев, на которые разбивается реальная стратификация, возрастает порядок соответствующей алгебраической системы и его определителя; для нахождения корней необходимо использовать численные методы.

В принципе возможны и другие аппроксимации частоты Вяйсяля—Брента внутри слоев, в частности при линейном ходе $N(z)$ вместо экспонент в (5.86) необходимо использовать функции Эйри. Соответствующий подход сейчас также численно реализован.

Порядок выполнения работы

1. Рассчитать структуру моды и дисперсионное соотношение для внутренних волн в бассейне при двухслойной аппроксимации частоты Вяйсяля—Брента.

2. Выполнить аналогичный расчет на компьютере для океана с реальным профилем частоты Вяйсяля—Брента.

3. Для рассмотренных примеров рассчитать нелинейный и дисперсионный коэффициенты в уравнении Кортевега-де Вриза и нарисовать профиль солитона на различных горизонтах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 5

1. Красицкий В. П., Монин А. С. Явления на поверхности океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1985.— 375 с.
2. Краусс В. Внутренние волны/Пер. с англ.— Л.: Гидрометеоиздат, 1968.— 272 с.
3. Миропольский Ю. З. Динамика внутренних гравитационных волн в океане.— Л.: Гидрометеоиздат, 1981.— 301 с.
4. Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики.— Л.: Гидрометеоиздат, 1988.— 424 с.
5. Островский Л. А. Нелинейные внутренние волны во вращающемся океане//Океанология.— 1978.— Т. 18, № 2.— С. 181—191.
6. Пелиновский Е. Н., Раевский М. А. Слабая турбулентность внутренних волн в океане//Изв. АН СССР, ФАО.— 1977.— Т. 13, № 2.— С. 187—193.

ГЛАВА 6

СИНОПТИЧЕСКИЕ ВИХРИ В ОКЕАНЕ

Под *синоптическими вихрями* (СВ) в океане понимают нестационарные вихревые образования в океане, имеющие характерный горизонтальный масштаб порядка 100 км и характерный временно́й масштаб порядка десятка суток [1, 13]. При этом скорость передвижения вихря составляет несколько сантиметров в секунду, а орбитальная скорость — десятки сантиметров в секунду и более.

Синоптические вихри можно разделить на фронтальные синоптические вихри (ФВ) и вихри открытого океана (ВОО) [1, 4]. Фронтальные синоптические вихри возникают на фронтальных течениях, таких, как Гольфстрим, Куросио, Антарктическое циркумполярное течение. Вихри открытого океана не связаны с системами фронтальных течений и наблюдаются во всех районах Мирового океана.

Основная струя фронтального течения испытывает некоторые волнообразные колебания, амплитуда которых вниз по течению может увеличиваться. Это приводит к образованию меандров, в результате отсечения которых и образуются ФВ. По разные стороны от основной струи образуются вихри разных знаков: с одной стороны, как правило, с полярной, наблюдаются только антициклоны, а с другой — циклоны. Антициклоны теплее окружающей воды, а циклоны — холоднее. Перепады температур во ФВ относительно окружающей воды весьма велики (до 10 °С). Перепад температур соответствует наклону изотерм, а следовательно, и изопикн и говорит о больших запасах доступной потенциальной энергии. Из самой природы образования ФВ ясно, что это одиночные концентрированные образования. В основном они встречаются вблизи фронтальных течений, и при удалении от них средняя концентрация вихрей резко падает.

Переносят ли синоптические вихри воду при движении? Специальные наблюдения показали, что ФВ при движении переносят массу воды, по крайней мере в верхних слоях. Плотность энергии ФВ превосходит соответствующую плотность ВОО. Орбитальная скорость вращения в ФВ достигает 2—3 м/с. В системе Гольфстрима ФВ переносятся в направлении на запад или юго-запад. Результирующая скорость связана как со скоростью движения вихря, так и со скоростью среднего потока, имеющую по сторонам основного фронтального течения (Гольфстрима) западную или юго-западную составляющую. Фронтальные синоптические вихри системы Антарктического циркумполярного течения (АЦТ) движутся в восточном направлении. Это связано с тем, что система АЦТ достаточно растянута по широте (1000—1500 км) и ФВ, имеющий собственную скорость меньшую, чем скорость окружающего потока, будет увлекаться им. Время жизни ФВ достигает нескольких лет.

В отличие от ФВ, вихри открытого океана — значительно менее энергичные образования. Вихри открытого океана зафиксированы практически во всех районах Мирового океана. Довольно часто наблюдается так называемая «плотная упаковка» вихрей. Кинетическая энергия вихрей, как правило, превосходит кинетическую энергию среднего потока. Максимальные орбитальные скорости движения наблюдаются в верхнем полукилометровом слое и уменьшаются с глубиной. В антициклонах имеет место опускание изотерм, а в циклонах — куполообразный подъем. Характерное смещение изотерм — 100 м. Доступная потенциальная энергия в ВОО примерно в 10—40 раз меньше ее значения во ФВ.

Поле синоптических возмущений в океане имеет сложную вихре-волновую структуру. По некоторым оценкам [9] вихревой компонент занимает 30—40 % площади океана, но в нем содержится 80 % общей энергии синоптических масштабов. Волновыми движениями занято 60—70 % площади.

Открытие синоптических вихрей в Мировом океане положило начало новому этапу исследований динамики крупномасштабной циркуляции. Синоптические возмущения в значительной степени влияют на крупномасштабные течения и в целом на климат океана. Синоптические вихри могут подпитывать кинетическую энергию среднего течения или уменьшать ее. Во внутренних слоях крупномасштабных круговоротов благодаря СВ имеет место тенденция к гомогенизации (однородности) среднего потенциального вихря. Синоптические вихри могут значительно активизировать обмен теплом и другими субстанциями между поверхностными и глубинными слоями океана. В районах крупномасштабных течений, близких к зональным, СВ вносят важный вклад в меридиональный перенос тепла, солей и других субстанций.

Основные сведения о синоптических вихрях в океане получены благодаря натурным экспериментальным исследованиям, в первую очередь полигонным наблюдениям на заякоренных буйковых станциях «Полигон», МОДЕ, ПОЛИМОДЕ, осуществленных советскими и американскими исследователями. Прямые измерения скорости течения на полигонах совместно с гидрологическими съемками с научно-исследовательских судов позволили получить необходимые сведения о структуре и динамике вихревых образований.

Альтернативным подходом является прямое численное моделирование синоптических вихрей с помощью так называемых вихреразрешающих моделей. К настоящему моменту создан ряд моделей для различных бассейнов, использующих те или иные упрощающие предположения [16, 18]. По этим моделям проведено большое количество численных экспериментов, подробный анализ которых существенно продвинул наши знания в области вихревой динамики океана.

В настоящей главе будут рассмотрены вопросы о механизмах образования вихрей, вопросы бюджетов вихревой энергии. Особое внимание уделено обоснованию квазигеострофического приближения. Подробно описаны квазигеострофическая вихреразрешающая модель и основные результаты численных экспериментов. Обсуждается динамика волн Россби. Описаны основные идеи и принципы так называемого метода контурной динамики.

6.1. Квазигеострофическое приближение

Движения синоптического масштаба в океане можно описать, используя полную систему уравнений гидродинамики: уравнения движения, неразрывности, переноса тепла и солей. Однако эта система описывает не только синоптические процессы, но и широкий спектр других движений в океане — от миллиметра до глобальных масштабов по пространству и от долей секунды до тысячелетий по времени. Описываются самые разные физические процессы, развивающиеся в океане — поверхностные, внутренние, акустические, приливные волны, течения, процессы конвекции и т. д.

Резонно задать вопрос: обязательно ли для исследования какого-либо конкретного физического процесса решение полной (и, заметим, очень сложной!) системы уравнений? Нельзя ли отбросить какие-то малые члены или упростить, преобразовать систему так, чтобы полученная система с необходимой точностью описывала бы исследуемый физический процесс, и вместе с тем была бы по возможности проще? Как известно, ответ здесь положительный. Так, например, если уравнение неразрывности записано для несжимаемой жидкости, то фильтруются акустические волны; если на поверхности океана используется условие «жесткой крышки», то из рассмотрения удаляются поверхностные гравитационные волны. Таким образом, если для исследуемого процесса (например, для глобальной циркуляции океана) акустические и поверхностные гравитационные волны несущественны, то достаточно использовать названные приближения и они будут отфильтрованы.

Итак, каким образом следует упростить исходную систему уравнений, чтобы «не потерять» (и не сильно исказить) синоптические движения? Таким приближением является так называемое квазигеострофическое приближение, которое строится следующим образом *. Вводятся характерные для синоптических возмущений масштабы времени, скорости, длины и т. д. Тогда исходная полная система уравнений приводится к безразмерному

* Подробный вывод уравнений квазигеострофического приближения излагается в книгах [4, 5, 14].

виду. Для рассматриваемых движений наблюдается баланс сил, близкий к геострофическому, т. е. сила Кориолиса в основном балансируется силой градиента давления. Это означает, что безразмерные уравнения движения по горизонтали можно привести к такому виду, что сила Кориолиса и градиент давления будут пропорциональны безразмерным параметрам порядка единицы, в то время как остальные члены будут пропорциональны малым параметрам (т. е. много меньше единицы). Важным моментом является установление связи между этими малыми параметрами. После того как эти связи постулированы, система уравнений подвергается разложению по малому параметру. Нулевым приближением, естественно, оказывается геострофический баланс. Однако оказывается, что нулевое приближение незамкнуто и для определения его параметров необходимо привлечь уравнения для первого приближения. Принципиально важно, что в результате преобразований (вывода «плоского» уравнения вихря) удается получить замкнутую систему уравнений нулевого порядка. Возвращаясь опять к размерному виду, эту систему можно записать [5]:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{1}{f_0 \rho_0} \frac{\partial p'}{\partial y}; \tag{6.1}$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{f_0 \rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x}; \tag{6.2}$$

$$\rho' = -\frac{1}{g} \frac{\partial p'}{\partial z}; \tag{6.3}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{f_0 \rho_0} \nabla^2 p' + f\right) - f_0 \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{6.4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\rho' - \frac{\rho_S N^2}{g} w = 0. \tag{6.5}$$

Здесь два первых уравнения являются уравнениями движения по горизонтальным координатам x, y (геострофический баланс); третье уравнение — уравнение гидростатики; четвертое — уравнение для вертикального компонента вихря; пятое — уравнение переноса плотности. Ось x направлена на восток, y — на север, z — вверх, причем ее начало расположено на поверхности океана; компоненты скорости в нулевом приближении — u, v, w — направлены вдоль координат x, y, z, f — параметр Кориолиса, а f_0 — его среднее значение; ρ', p' — возмущения плотности и давления и т. д.;

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_S(z) + \rho'(x, y, z, t); \quad \rho' \ll \rho_S; \tag{6.6}$$

$$p(x, y, z, t) = p_a + \int\limits_z^0 \rho_S(z)\, g\, dz + p'(x, y, z, t), \tag{6.7}$$

ρ_S — среднее (равновесное) для района распределение плотности ρ; ρ_0 — средняя плотность; p — давление; p_a — атмосферное давление; ψ — функция тока; $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; $N^2 = -(g/\rho_0)\, d\rho_S/dz - g^2/s^2_S$ — квадрат частоты Вяйсяля—Брента; c_S — скорость звука; g — ускорение свободного падения.

Предполагается, что в рассматриваемом районе имеет место некоторое характерное распределение плотности по вертикали $\rho_S(z)$, которое в пределах региона меняется несущественно. На фоне такого распределения происходят синоптические движения с соответствующими возмущениями поля плотности ρ'. Эти возмущения много меньше характерного значения $\rho_S(z)$.

В соответствии с (6.6) поле давления также делим на большую величину — гидростатическое давление, связанное с характерным профилем $\rho_S(z)$, атмосферное давление (не представляющее интереса в данной главе) и возмущение давления p'.

Если исключить из (6.4) и (6.5) вертикальную скорость, то получим важное уравнение для квазигеострофического потенциального вихря (КПВ) q:

$$\partial q/\partial t + u\,\partial q/\partial x + v\,\partial q/\partial y = 0, \tag{6.8}$$

где

$$q = \frac{1}{f_0\rho_0}\nabla^2 p' + \beta y + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{f_0}{\rho_0 N^2}\frac{\partial p'}{\partial z}\right), \tag{6.9}$$

β — широтное изменение параметра Кориолиса, $\beta = \partial f/\partial y$.

Данная система дифференциальных уравнений требует краевых условий. Краевые условия по вертикали зададим следующим образом. Вблизи поверхности океана и около дна благодаря трению и вращению Земли образуются тонкие экмановские пограничные слои. В пределах этих слоев вертикальное турбулентное трение играет важную роль, поэтому к геострофической скорости следует приплюсовывать некоторую поправку, существенную только в пределах этих слоев.

Определим такую поправку для придонного экмановского слоя. В уравнении движения для поправки сила Кориолиса балансируется вертикальным турбулентным трением:

$$-f_0 v_b = A\,\partial^2 u_b/\partial z^2; \tag{6.10}$$

$$f_0 u_b = A\,\partial^2 v_b/\partial z^2, \tag{6.11}$$

где u_b, v_b — горизонтальные компоненты искомой поправки скорости; A — коэффициент вертикальной вязкости (предполагаем постоянным). На дне выполняется условие «прилипания» для полной скорости (суммы квазигеострофической и поправки), т. е.

$$u_b + u = 0;\quad v_b + v = 0;\quad w_b + w = 0 \quad \text{при } z = -H + B, \tag{6.12}$$

где w_b — вертикальный компонент поправки.

Условие затухания добавочной скорости запишем так:

$$u_b,\ v_b,\ w_b \to 0 \quad \text{при } z \to \infty. \tag{6.13}$$

Для решения системы (6.10), (6.11) применим стандартный прием: домножим (6.11) на мнимую единицу i и сложим с (6.10):

$$d^2(u_b+iv_b)/dz^2-i(f_0/A)(u_b+iv_b)=0. \tag{6.14}$$

В этом уравнении частная производная по z заменена на полную, поскольку отсутствует явная зависимость искомой скорости от горизонтальных координат.

Решение (6.14) с условиями (6.12), (6.13) имеет вид

$$u_b+iv_b=-(u+iv)\exp\left[-\sqrt{f_0/(2A)}(1+i)(z+H-B)\right]. \tag{6.15}$$

Отделяя действительную часть от мнимой части, получаем выражения для компонентов скорости:

$$u_b=-\exp\left[-\sqrt{f_0/(2A)}(z+H-B)\right]\left\{u\cos\sqrt{f_0/(2A)}(z+H-B)+\right.$$
$$\left.+v\sin\sqrt{f_0/(2A)}(z+H-B)\right\}; \tag{6.16}$$

$$v_b=\exp\left[-\sqrt{f_0/(2A)}(z+H-B)\right]\left\{u\sin\sqrt{f_0/(2A)}(z+H-B)-\right.$$
$$\left.-v\cos\sqrt{f_0/(2A)}(z+H-B)\right\}. \tag{6.17}$$

Уравнение неразрывности запишется так:

$$\partial u_b/\partial x+\partial v_b/\partial y+\partial w_b/\partial z=0. \tag{6.18}$$

Проинтегрируем это уравнение по z:

$$w_b\big|_{-H+B}=\int\limits_{-H+B}^{\infty}\left(\frac{\partial u_b}{\partial x}+\frac{\partial v_b}{\partial y}\right)dz. \tag{6.19}$$

Подставляя геострофические соотношения в (6.16), (6.17), а полученные выражения в (6.19), после преобразований получаем:

$$\int\limits_{-H+B}^{\infty}\left(\frac{\partial u_b}{\partial x}+\frac{\partial v_b}{\partial y}\right)dz=-\sqrt{\frac{A}{2f_0}}\frac{1}{f_0\rho_0}\nabla^2p'-u\frac{\partial B}{\partial x}-v\frac{\partial B}{\partial y}. \tag{6.20}$$

Если $B\ll H$, то можно приближенно записать:

$$w\big|_{-H}=\sqrt{\frac{A}{2f_0}}\frac{1}{f_0\rho_0}\nabla^2p'+u\frac{\partial B}{\partial x}+v\frac{\partial B}{\partial y}. \tag{6.21}$$

Первый член в правой части описывает влияние вертикального трения в придонном слое на вертикальную скорость, второе и третье слагаемые — невязкое обтекание неровностей рельефа дна. Для невязкой жидкости в случае плоского дна (6.21) сводится к обычному условию непротекания:

$$w\big|_{-H}=0. \tag{6.22}$$

Аналогично выводится условие для вертикальной скорости на поверхности океана:

$$w=(1/f_0)\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau} \quad \text{при } z=0, \tag{6.23}$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — тангенциальное напряжение трения ветра.

Выведем уравнения для двухслойной квазигеострофической модели. Предположим, что в пределах каждого из двух слоев, толщиной H_1 и H_2+B горизонтальные скорости не меняются с глубиной. Считаем, что эти скорости относятся к центрам слоев;

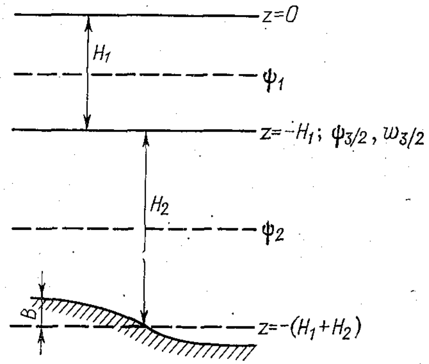


Рис. 6.1. Схема двухслойной **квазигеострофической** модели.

обозначим середины слоев индексами 1, 2 соответственно (рис. 6.1).

Тогда уравнения (6.1) и (6.2) запишутся так:

$$u_i=-\frac{\partial\psi_i}{\partial y}=-\frac{1}{f_0\rho_0}\frac{\partial p_i'}{\partial y}; \tag{6.24}$$

$$v_i=\frac{\partial\psi_i}{\partial x}=\frac{1}{f_0\rho_0}\frac{\partial p_i'}{\partial x}, \quad i=1,\ 2. \tag{6.25}$$

Уравнение гидростатики запишем для уровня $z=-H_1$, используя аппроксимацию $\partial p'/\partial z\approx(p_1'-p_2')/(H/2)$:

$$\rho_{3/2}'=-\frac{1}{g\,(H/2)}(p_1'-p_2'). \tag{6.26}$$

Индексом «$^3/_2$» помечаем величины, относящиеся к поверхности раздела слоев.

Уравнение вихря (6.4) интегрируем по толщине каждого слоя, используя при этом граничные условия для вертикальной скорости из (6.21) и (6.23):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_1\frac{\partial}{\partial x}+v_1\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{f_0\rho_0}\nabla^2p_1'+f\right)-H_1^{-1}\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}+\frac{f_0}{H_1}w_{3/2}=0; \tag{6.27}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_2\frac{\partial}{\partial x}+v_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{f_0\rho_0}\nabla^2p_2'+f\right)-\frac{f_0}{H_2}w_{3/2}+$$
$$+\sqrt{\frac{A}{2f_0}}\frac{1}{\rho_0H_2}\nabla^2p_2'+\frac{f_0}{H_2}\left(u_2\frac{\partial B}{\partial x}+v_2\frac{\partial B}{\partial y}\right)=0. \tag{6.28}$$

Уравнение (6.28) можно переписать так:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_2\frac{\partial}{\partial x}+v_2\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{f_0\rho_0}\nabla^2 p_2'+f+\frac{f_0 B}{H_2}\right)-$$

$$-\frac{f_0}{H_2}w_{3/2}+\sqrt{\frac{A}{2f_0}}\frac{1}{\rho_0 H_2}\nabla^2 p_2'=0. \tag{6.29}$$

Наконец, запишем уравнение переноса плотности (6.5) при $z=-H_1$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_{3/2}\frac{\partial}{\partial x}+v_{3/2}\frac{\partial}{\partial y}\right)\rho'_{3/2}-\frac{\rho_S N^2}{g}w_{3/2}=0. \tag{6.30}$$

Для определения горизонтальных скоростей $u_{3/2}$, $v_{3/2}$ используем линейную интерполяцию между уровнями «1» и «2». Так, например:

$$u_{3/2}=(H_1u_2+H_2u_1)/H. \tag{6.31}$$

Подставляем в (6.30) формулу (6.26) и, переходя далее к функции тока, после преобразований получаем:

$$\partial(\psi_1-\psi_2)/\partial t-J(\psi_1,\ \psi_2)=-[N^2H/(2f_0)]\,w_{3/2}, \tag{6.32}$$

где $J(a,\ b)=\dfrac{\partial a}{\partial x}\dfrac{\partial b}{\partial y}-\dfrac{\partial a}{\partial y}\dfrac{\partial b}{\partial x}$.

Переходя от скорости и давления p' к функции тока, уравнения (6.27) и (6.29) можно переписать так:

$$\partial\nabla^2\psi_1/\partial t+J(\psi_1,\ \nabla^2\psi_1+f)+(f_0/H_1)w_{3/2}=H_1^{-1}\operatorname{rot}_z\tau; \tag{6.33}$$

$$\partial\nabla^2\psi_2/\partial t+J(\psi_2,\ \nabla^2\psi_2+f+f_0B/H_2)-(f_0/H_2)\,w_{3/2}=\varepsilon\nabla^2\psi_2, \tag{6.34}$$

где $\varepsilon=\sqrt{Af_0/2}\cdot 1/H_2$ — коэффициент придонного трения.

Итак, для двухслойной квазигеострофической модели мы сформулировали три уравнения (6.32)—(6.34) с тремя неизвестными: ψ_1, ψ_2, $w_{3/2}$. Если исключить вертикальную скорость из этой системы, то получим систему уравнений для квазигеострофического потенциального вихря (двухслойной модели):

$$\partial q_1/\partial t+J(\psi_1,\ q_1)=H_1^{-1}\operatorname{rot}_z\tau, \tag{6.35}$$

$$\partial q_2/\partial t+J(\psi_2,\ q_2)=\varepsilon\nabla^2\psi_2. \tag{6.36}$$

Здесь

$$q_1=\nabla^2\psi_1+f-[f_0^2/(g'H_1)](\psi_1-\psi_2); \tag{6.37}$$

$$q_2=\nabla^2\psi_2+f+[f_0^2/(g'H_2)](\psi_1-\psi_2)+(f_0/H_2)B. \tag{6.38}$$

Эта система замкнута относительно переменных q_1, q_2, ψ_1, ψ_2.

6.2. Бароклинная и баротропная неустойчивость

Какова же причина возникновения вихрей? Откуда они черпают энергию?

Остановимся на двух, пожалуй, основных эффектах вихреобразования.

Для синоптических возмущений характерна определенная хаотичность их возникновения, движения, времени жизни, т. е. не наблюдается такой строгой периодичности как при смене времен года или как в приливных колебаниях. Поэтому приемлем такой взгляд на закономерности синоптической динамики: в результате воздействия атмосферы и притока солнечного тепла в океане формируется некоторая средняя, равновесная циркуляция. Естественно, что всегда имеют место некоторые возмущения. Эти возмущения в результате взаимодействия со средней циркуляцией могут или затухнуть или, напротив, усилиться. Усиление амплитуды возмущений возможно лишь в потоке, неустойчивом по отношению к малым возмущениям. Итак, в данном случае под процессом неустойчивости будем понимать процесс направленной передачи энергии от основного течения к флюктуационному.

Запишем уравнение для кинетической энергии возмущений. Воспользуемся уравнениями (6.35), (6.36), в которых учтем также процессы горизонтальной вязкости (пусть эти процессы описываются оператором F_i) в правых частях уравнений. Конкретный вид этого оператора мы пока не обсуждаем; некоторые соображения о его виде будут сформулированы в разделе 6.3.

Осредним уравнение (6.35), записанное с учетом горизонтальной вязкости, по времени:

$$\partial \langle q_1 \rangle / \partial t + \langle J(\psi_1, q_1) \rangle = H_1^{-1} \langle \mathrm{rot}_z \tau \rangle + \langle F_1 \rangle. \qquad (6.39)$$

Вычитая (6.39) из исходного уравнения, получаем уравнение для возмущения КПВ:

$$\partial q_1' / \partial t + J(\psi_1, q_1) - \langle J(\psi_1, q_1) \rangle = F_1'. \qquad (6.40)$$

Здесь предполагалось, что внешняя сила (тангенциальное напряжение ветра) не изменяется по времени.

Домножим (6.40) на флюктуацию функции тока ψ_1' и осредним по времени:

$$\langle \psi_1' \partial q_1' / \partial t \rangle + \nabla \cdot [\langle \mathbf{v}_1 \rangle \langle \psi_1' q_1' \rangle + \langle \mathbf{v}_1' \psi_1' \rangle \langle q_1 \rangle + \langle \mathbf{v}_1' \psi_1' q_1' \rangle] -$$

$$- \langle u_1 \rangle \langle v_1' q_1' \rangle + \langle v_1 \rangle \langle u_1' q_1' \rangle = \langle F_1' \psi_1' \rangle. \qquad (6.41)$$

Аналогичное выражение можно записать и для нижнего слоя. Если полученные соотношения домножить на средние толщины соответствующих слоев и сложить, то получим:

$$
\begin{gathered}
H_1\langle\psi_1'\partial q_1'/\partial t\rangle + H_2\langle\psi_2'\partial q_2'/\partial t\rangle + H_1\nabla\cdot[\langle\mathbf{v}_1\rangle\langle\psi_1'q_1'\rangle + \langle\mathbf{v}_1'\psi_1'\rangle\langle q_1\rangle + \\
+ \langle\mathbf{v}_1'\psi_1'q_1'\rangle] + H_2\nabla\cdot[\langle\mathbf{v}_2\rangle\langle\psi_2'q_2'\rangle + \langle\mathbf{v}_2'\psi_2'\rangle\langle q_2\rangle + \langle\mathbf{v}_2'\psi_2'q_2'\rangle] - \\
- H_1\langle u_1\rangle\langle v_1'q_1'\rangle + H_1\langle v_1\rangle\langle u_1'q_1'\rangle - H_2\langle u_2\rangle\langle v_2'q_2'\rangle + \\
+ H_2\langle v_2\rangle\langle u_2'q_2'\rangle = H_1\langle F_1'\psi_1'\rangle + H_2\langle F_2'\psi_2'\rangle - \\
- \varepsilon H_2\,\mathrm{rot}_z\langle\mathbf{v}_2'\psi_2'\rangle + \varepsilon H_2[\langle u_2'^2\rangle + \langle v_2'^2\rangle]. \qquad (6.42)
\end{gathered}
$$

Преобразуем два первых слагаемых в левой части (6.42). Используя определение КПВ, получим:

$$
\begin{gathered}
H_1\left\langle\psi_1'\frac{\partial q_1'}{\partial t}\right\rangle + H_2\left\langle\psi_2'\frac{\partial q_2'}{\partial t}\right\rangle = H_1\left\langle\psi_1'\nabla\left(\nabla\frac{\partial\psi_1'}{\partial t}\right)\right\rangle + \\
+ H_2\left\langle\psi_2'\nabla\left(\nabla\frac{\partial\psi_2'}{\partial t}\right)\right\rangle - \frac{f_0^2}{2g'}\frac{\partial}{\partial t}\langle(\psi_1'-\psi_2')^2\rangle. \qquad (6.43)
\end{gathered}
$$

Нетрудно показать, что

$$
H_i\left\langle\psi_i'\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi_i'\right\rangle = H_i\nabla\left\langle\psi_i'\frac{\partial}{\partial t}\nabla\psi_i'\right\rangle - \frac{H_i}{2}\frac{\partial}{\partial t}\langle(\nabla\psi_i')^2\rangle, \quad i=1,\ 2. \qquad (6.44)
$$

Воспользовавшись выражениями (6.43) и (6.44), проинтегрируем выражение (6.42) по всей площади замкнутого бассейна S, в результате чего получаем:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\int_S(K_1' + K_2' + P')\,dS = -\int_S[(H_1\langle u_1\rangle\langle v_1'q_1'\rangle - H_1\langle v_1\rangle\langle u_1'q_1'\rangle + \\
+ H_2\langle u_2\rangle\langle v_2'q_2'\rangle - H_2\langle v_2\rangle\langle u_2'q_2'\rangle)]\,dS - \\
- \int_S\{H_1\langle F_1'\psi_1'\rangle + H_2\langle F_2'\psi_2'\rangle + \varepsilon H_2[\langle(u_2')^2\rangle + \langle(v_2')^2\rangle]\}\,dS, \qquad (6.45)
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
K_1' = (H_1/2)\langle(\nabla\psi_1')^2\rangle;\quad K_2' = (H_2/2)\langle(\nabla\psi_2')^2\rangle; \\
P' = [f_0^2/(2g')]\langle(\psi_1'-\psi_2')^2\rangle;
\end{gathered}
$$

K_i' представляет собой вихревую кинетическую энергию слоя i (или кинетическую энергию возмущений); P' имеет смысл доступной потенциальной энергии.

Уравнение (6.45) описывает изменение во времени полной механической энергии возмущений в бассейне. Это изменение складывается из притока энергии от среднего течения (первый интеграл в правой части) и стока энергии (диссипации) за счет боковой вязкости и придонного трения.

Важное значение для осмысления динамических процессов в океане играет понятие квазигеострофической потенциальной энстрофии, которая представляет собой половину квадрата КПВ. Соответствующие уравнения для средней и вихревой квазигеострофической потенциальной энстрофии верхнего слоя получаются умножением уравнений (6.39) или (6.40) на $\langle q_1 \rangle$ или q_1' соответственно.

Принципиально важным является вопрос относительно притока энергии от среднего течения: каков его физический смысл и основные механизмы? Исследуем эти вопросы для случая зонального канала с плоским дном (т. е. периодического по оси x канала, ограниченного на севере и юге вертикальными стенками).

Выведем уравнение, аналогичное (6.45), но осреднять будем по зональной координате x, т. е. применим зональное осреднение, которое обозначим чертой сверху. Заметим, что, вообще говоря, следует применить зонально-временно́е осреднение, т. е. осреднить как по x, так и по времени. Для упрощения мы используем лишь зональное осреднение.

Поскольку $\bar{v} \equiv 0$, уравнение для полной механической энергии возмущений в зональном канале перепишется так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_S (K_1' + K_2' + P')\, dS = - \int\limits_S \left(H_1 \bar{u}_1 \overline{v_1' q_1'} + H_2 \bar{u}_2 \overline{v_2' q_2'}\right) dS + \mathscr{D}, \quad (6.46)$$

где $\mathscr{D}$ — диссипативный член, описывающий сток механической энергии возмущений благодаря боковой вязкости и придонному трению. Преобразуем «источниковый» член в (6.46). Для этого используем определение КПВ и уравнение неразрывности. Вихревой поток КПВ в верхнем слое можно преобразовать следующим образом:

$$\overline{v_1' q_1'} = \overline{v_1' \nabla^2 \psi_1'} - \frac{f_0^2}{g' H_1} \overline{v_1' (\psi_1' - \psi_2')} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \overline{v_1'^2} - \frac{\partial \overline{v_1' u_1'}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u_1'^2}}{\partial x} - \frac{f_0^2}{g' H_1} \overline{v_1' (\psi_1' - \psi_2')}. \quad (6.47)$$

Очевидно, что производные по зональной координате от любой зонально осредненной величины равны нулю, поэтому

$$\overline{v_1' q_1'} = -\partial \overline{v_1' u_1'} / \partial y - [f_0^2/(g' H_1)]\, \overline{v_1' (\psi_1' - \psi_2')}. \quad (6.48)$$

Для нижнего слоя получается аналогичное выражение:

$$\overline{v_2' q_2'} = -\partial \overline{v_2' u_2'} / \partial y + [f_0^2/(g' H_2)]\, \overline{v_2' (\psi_1' - \psi_2')}. \quad (6.49)$$

Из уравнения гидростатики и определения функции тока следует, что

$$\rho^* = -[2 f_0 \rho_0 / (g H)]\, (\psi_1' - \psi_2'), \quad (6.50)$$

где ρ^* — флюктуация плотности.

Итак,

$$(\psi_1' - \psi_2') = -[gH/(2f_0\rho_0)]\,\rho^*. \tag{6.51}$$

Выражения (6.48) и (6.49) перепишутся так:

$$\overline{v_1'q_1'} = -\partial\overline{v_1'u_1'}/\partial y + (A/H_1)\,\overline{v_1'\rho^*}; \tag{6.52}$$

$$\overline{v_2'q_2'} = -\partial\overline{v_2'u_2'}/\partial y - (A/H_2)\,\overline{v_2'\rho^*}, \tag{6.53}$$

где

$$A = f_0 gH/(2g'\rho_0);$$

$$\overline{v_1'\rho^*} - \overline{v_2'\rho^*} = -\frac{2f_0\rho_0}{gH}\overline{(\psi_1' - \psi_2')\frac{\partial(\psi_1' - \psi_2')}{\partial x}} =$$

$$= -\frac{f_0\rho_0}{gH}\frac{\partial}{\partial x}\overline{(\psi_1' - \psi_2')^2} = 0. \tag{6.54}$$

Итак:

$$\overline{v_1'\rho^*} = \overline{v_2'\rho^*} = \overline{v'\rho^*}. \tag{6.55}$$

Подставляя (6.52), (6.53), (6.55) в первый член правой части (6.46), получаем:

$$-\int_S \left(H_1\bar{u}_1\overline{v_1'q_1'} + H_2\bar{u}_2\overline{v_2'q_2'}\right)dS = -\int_S \left[H_1\bar{u}_1\left(-\frac{\partial\overline{v_1'u_1'}}{\partial y} + \frac{A}{H_1}\overline{v'\rho^*}\right) +\right.$$

$$\left. + H_2\bar{u}_2\left(-\frac{\partial\overline{v_2'u_2'}}{\partial y} - \frac{A}{H_2}\overline{v'\rho^*}\right)\right]dS =$$

$$= \int_S \left(H_1\bar{u}_1\frac{\partial\,\overline{v_1'u_1'}}{\partial y} + H_2\bar{u}_2\frac{\partial\overline{v_2'u_2'}}{\partial y}\right)dS -$$

$$-\int_S A\overline{v'\rho^*}(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\,dS = -\int_S \left(H_1\overline{v_1'u_1'}\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial y} + H_2\overline{v_2'u_2'}\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial y}\right)dS -$$

$$-\int_S A(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\overline{v'\rho^*}\,dS. \tag{6.56}$$

Подставляем (6.56) в (6.46):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_S (K_1' + K_2' + P')\,dS = -\int_S \left(H_1\overline{v_1'u_1'}\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial y} + H_2\overline{v_2'u_2'}\frac{\partial\bar{u}_2}{\partial y}\right)dS -$$

$$-\int_S A(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)\overline{v'\rho^*}\,dS + \mathcal{D}. \tag{6.57}$$

Зонально осреднив уравнение (6.1) и продифференцировав его по z, используя уравнение гидростатики (6.3), получаем так называемое соотношение термического ветра:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \frac{g}{f_0 \rho_0} \frac{\partial \overline{\rho'}}{\partial y} \tag{6.58}$$

или

$$\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \frac{gH}{2 f_0 \rho_0} \frac{\partial \overline{\rho'}}{\partial y}. \tag{6.59}$$

Подставляя последнее соотношение в (6.57), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_S (K_1' + K_2' + P')\, dS = - \int\limits_S \left(H_1 \overline{v_1' u_1'} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial y} + H_2 \overline{v_2' u_2'} \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial y} \right) dS -$$

$$- \int\limits_S \frac{g^2 H^2}{4 g' \rho_0^2} \overline{v' \rho^*} \frac{\partial \overline{\rho'}}{\partial y} dS. \tag{6.60}$$

Первый интеграл справа описывает приток кинетической энергии от среднего течения к возмущениям благодаря горизонтальной изменчивости поля скорости, т. е. часть кинетической энергии среднего движения передается возмущениям. Этот источник называется *баротропной неустойчивостью* (бароклинность не играет существенной роли).

Второй интеграл в правой части существенно зависит от горизонтального градиента поля плотности. Этот источник называется *бароклинной неустойчивостью* и связан с доступной потенциальной энергией среднего движения. Можно показать, что для синоптических возмущений ведущим механизмом является бароклинная неустойчивость крупномасштабных течений.

Итак, возможен рост возмущений в результате притока доступной потенциальной энергии от среднего течения. Естественен вопрос: в каких случаях такой рост возмущений будет иметь место (или, как говорят, каковы условия возникновения неустойчивости)? Выведем необходимые условия неустойчивости для двухслойной квазигеострофической модели в зональном канале с плоским дном. Заметим, что эти условия весьма полезны, поскольку, если они не выполняются, то можно говорить об устойчивости рассматриваемого потока.

Пусть задан средний поток в зональном канале:

$$U_i(y) = \partial \bar{\psi}_i(y) / \partial y, \quad i = 1,\ 2. \tag{6.61}$$

Функция тока может быть представлена таким образом:

$$\psi_i = \bar{\psi}_i(y) + \varphi_i(x,\ y,\ t), \tag{6.62}$$

где φ_i — функция тока возмущения. Предполагаем, что скорость основного течения значительно превосходит скорость возмущения.

Квазигеострофический потенциальный вихрь запишется так:

$$q_1 = -\partial U_1/\partial y + f - [f_0^2/(g'H_1)](\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) + \\ + \nabla^2\varphi_1 - [f_0^2/(g'H_1)](\varphi_1 - \varphi_2); \quad (6.63)$$

$$q_2 = -\partial U_2/\partial y + f + [f_0^2/(g'H_2)](\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2) + \\ + \nabla^2\varphi_2 + [f_0^2/(g'H_2)](\varphi_1 - \varphi_2). \quad (6.64)$$

Подставим (6.63), (6.64) в уравнение для КПВ (6.35), записанное в предположении, что отсутствуют внешние силы и трение, т. е. в нашем случае ветер и придонное трение. Если пренебречь слагаемыми, пропорциональными произведениям возмущений функции тока (которые предполагаются малыми), то после преобразований получим:

$$\partial q_i^*/\partial t + U_i\,\partial q_i^*/\partial x + (\partial\varphi_i/\partial x)\,\partial Q_i/\partial y = 0, \quad (6.65)$$

где

$$q_1^* = \nabla^2\varphi_1 - [f_0^2/(g'H_1)](\varphi_1 - \varphi_2); \quad (6.66)$$

$$q_2^* = \nabla^2\varphi_2 + [f_0^2/(g'H_2](\varphi_1 - \varphi_2) \quad (6.67)$$

— КПВ возмущений;

$$dQ_1/dy = -d^2U_1/dy^2 + \beta + [f_0^2/(g'H_1)](U_1 - U_2); \quad (6.68)$$

$$dQ_2/dy = -d^2U_2/dy^2 + \beta - [f_0^2/(g'H_2)](U_1 - U_2) \quad (6.69)$$

— меридиональные градиенты КПВ основного потока.

На твердых стенках должно выполняться условие «непротекания»:

$$\partial\varphi_i/\partial x\,|_{y=0,\,L} = 0. \quad (6.70)$$

Для исследования нашей задачи применим так называемый метод нормальных мод, т. е. представим:

$$\varphi_i(x,\ y,\ t) = \mathrm{Re}\,\{\varphi_i^*(y)\exp[ik(x - ct)]\}, \quad (6.71)$$

где $\varphi_i^*(y)$ — комплексная амплитуда возмущений; k, c — волновое число и фазовая скорость возмущений.

Без ограничения общности можно волновое число считать положительным, при этом фазовая скорость может быть комплексной:

$$c = c_R + ic_i, \quad (6.72)$$

где $c_R = \mathrm{Re}\,c$; $c_i = \mathrm{Im}\,c$.

Подставим (6.71) в (6.65), используя (6.63) и (6.64).

При этом

$$\nabla^2\varphi_1 = \partial^2\varphi_1/\partial x^2 + \partial^2\varphi_1/\partial y^2 = \\ = [-k^2\varphi_1^*(y) + d^2\varphi_1^*(y)/dy^2]\exp[ik(x - ct)]. \quad (6.73)$$

Итак, после преобразований уравнение (6.65) для верхнего слоя запишется так:

$$\left\{-ikc\left[-k^2\varphi_1^*(y)+\frac{d^2\varphi_1^*(y)}{dy^2}\right]+ikc\frac{f_0^2}{g'H_1}\left[\varphi_1^*(y)-\varphi_2^*(y)\right]+\right.$$
$$+U_1\left[-ik^3\varphi_1^*(y)+ik\frac{d^2\varphi_1^*(y)}{dy^2}-ik\frac{f_0^2}{g'H_1}\left(\varphi_1^*(y)-\varphi_2^*(y)\right)\right]+$$
$$\left.+ik\varphi_1^*(y)\frac{dQ_1}{dy}\right\}\exp\left[ik(x-ct)\right]=0. \qquad (6.74)$$

Разделим это выражение на $(ik)\exp[ik(x-ct)]$, после некоторых преобразований получим для верхнего слоя:

$$(U_1-c)\left[\frac{d^2\varphi_1^*}{dy^2}-k^2\varphi_1^*-\frac{f_0^2}{g'H_1}\left(\varphi_1^*-\varphi_2^*\right)\right]+\frac{dQ_1}{dy}\varphi_1^*=0. \qquad (6.75)$$

Для нижнего слоя аналогично:

$$(U_2-c)\left[\frac{d^2\varphi_2^*}{dy^2}-k^2\varphi_2^*+\frac{f_0^2}{g'H_2}\left(\varphi_1^*-\varphi_2^*\right)\right]+\frac{dQ_2}{dy}\varphi_2^*=0. \qquad (6.76)$$

Заметим, что краевые условия (6.70) перепишутся так:

$$\varphi_i^*\big|_{y=0}=0. \qquad (6.77)$$

Метод нормальных мод для нашей задачи сводится к определению при заданном k всех значений c, при которых имеет место нетривиальное решение. Если при этом все c будут отрицательными, то основное течение будет устойчивым. Последнее следует из того, что

$$\varphi_i(x,\ y,\ t)=\mathrm{Re}\left\{\varphi_i^*(y)\exp\left(kc_i t\right)\exp\left[ik(x-ct)\right]\right\}. \qquad (6.78)$$

Заметим, однако, что для нашей задачи можно сформулировать более сильный результат; поскольку коэффициенты в (6.75), (6.76) действительны, то если существует решение φ_i^* с собственным числом c, то существует и комплексно-сопряженное решение φ_i^{**} с комплексно-сопряженным числом $\tilde{c}=c_R-ic_i$. Это означает, что неустойчивость будет иметь место всегда, если только возможны моды с мнимой частью, отличной от нуля, $c\neq 0$.

Умножим (6.75) на $[H_1/(U_1-c)]\varphi_1^{**}$; после преобразований получим:

$$H_1\frac{d}{dy}\left(\varphi_1^{**}\frac{d\varphi_1^*}{dy}\right)-H_1\frac{d\varphi_1^*}{dy}\frac{d\varphi_1^{**}}{dy}-H_1k^2\left|\varphi_1^*\right|^2-\frac{f_0^2}{g'}\varphi_1^{**}\left(\varphi_1^*-\varphi_2^*\right)+$$
$$+\frac{H_1}{U_1-c}\frac{dQ_1}{dy}\left|\varphi_1^*\right|^2=0, \qquad (6.79)$$

где $|A|$ — модуль A.

Если записать аналогичное выражение и для нижнего слоя, сложить его с (6.79) и проинтегрировать по оси y от 0 до L, то получим:

$$\int_0^L \left[H_1 \frac{d}{dy}\left(\varphi_1^{**} \frac{d\varphi_1^*}{dy}\right) - H_1 \left| \frac{d\varphi_1^*}{dy} \right|^2 + \right.$$

$$\left. + H_2 \frac{d}{dy}\left(\varphi_2^{**} \frac{d\varphi_2^*}{dy}\right) - H_2 \left| \frac{d\varphi_2^*}{dy} \right|^2 \right] dy -$$

$$- \int_0^L [H_1 k^2 |\varphi_1^*|^2 + H_2 k^2 |\varphi_2^*|^2]\, dy - \int_0^L \frac{f_0^2}{g'} |\varphi_1^* - \varphi_2^*|^2\, dy =$$

$$= - \int_0^L \left[\frac{H_1}{(U_1 - c)} \frac{dQ_1}{dy} |\varphi_1^*|^2 + \frac{H_2}{(U_2 - c)} \frac{dQ_2}{dy} |\varphi_2^*|^2 \right] dy. \quad (6.80)$$

Первое и третье слагаемые в левой части с учетом краевых условий (6.77) обращаются в нуль.

Заметим, что

$$1/(U_n - c) = [(U_n - c_R) + ic_i]/|U_n - c|^2, \quad n = 1,\ 2. \quad (6.81)$$

Подставляем (6.81) в (6.80):

$$\int_0^L \left\{ H_1 \left| \frac{d\varphi_1^*}{dy} \right|^2 + H_2 \left| \frac{d\varphi_2^*}{dy} \right|^2 + H_1 k^2 |\varphi_1^*|^2 + H_2 k^2 |\varphi_2^*|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{f_0^2}{g'} |\varphi_1^* - \varphi_2^*|^2 \right\} dy =$$

$$= \left\{ \int_0^L \left[H_1 U_1 \frac{|\varphi_1^*|^2}{|U_1 - c|^2} \frac{dQ_1}{dy} + H_2 U_2 \frac{|\varphi_1^*|^2}{|U_2 - c|^2} \frac{dQ_2}{dy} \right] dy - \right.$$

$$- c_R \int_0^L \left[H_1 \frac{|\varphi_1^*|^2}{|U_1 - c|^2} \frac{dQ_1}{dy} + H_2 \frac{|\varphi_2^*|^2}{|U_2 - c|^2} \frac{dQ_2}{dy} \right] dy +$$

$$+ i \left\{ c_i \int_0^L \left[H_1 \frac{|\varphi_1^*|^2}{|U_1 - c|^2} \frac{dQ_1}{dy} + H_2 \frac{|\varphi_2^*|^2}{|U_2 - c|^2} \frac{dQ_2}{dy} \right] dy \right\}. \quad (6.82)$$

Выражение в левой части — действительное и положительное, поскольку все слагаемые в подынтегральном выражении — положительны. Выражение справа является комплексным, следовательно, его мнимая часть должна равняться нулю:

$$c_i \int_0^L \left[H_1 \frac{|\varphi_1^*|^2}{|U_1 - c|^2} \frac{dQ_1}{dy} + H_2 \frac{|\varphi_2^*|^2}{|U_2 - c|^2} \frac{dQ_2}{dy} \right] dy = 0. \quad (6.83)$$

Эта формула — первое необходимое условие неустойчивости [14]. Из нее следует, что если $c_i \neq 0$ (т. е. если мода неустойчива), то либо dQ_1/dy и dQ_2/dy имеют разные знаки, либо градиент КПВ основного состояния меняет знак в пределах хотя бы одного из слоев. Итак, если $c_i=0$, то из (6.83) следует, что слагаемое в правой части (6.82), пропорциональное c_R, также обращается в нуль. Приравнивая действительные части в (6.82), получаем:

$$\int_0^L \left[H_1 \frac{|\varphi_1^*|^2}{|U_1-c|^2} U_1 \frac{dQ_1}{dy} + H_2 \frac{|\varphi_2^*|^2}{|U_2-c|^2} U_2 \frac{dQ_2}{dy} \right] dy =$$

$$= \int_0^L \left\{ H_1 \left| \frac{d\varphi_1^*}{dy} \right|^2 + H_2 \left| \frac{d\varphi_2^*}{dy} \right|^2 + H_1 k^2 |\varphi_1^*|^2 + \right.$$

$$\left. + H_2 k^2 |\varphi_2^*|^2 + \frac{f_0}{g'} |\varphi_1^* - \varphi_2^*|^2 \right\} dy > 0. \tag{6.84}$$

Эта формула — второе необходимое условие неустойчивости [14]. Из нее следует, что либо $U_1 dQ_1/dy$, либо $U_2 dQ_2/dy$ должно быть положительным в какой-либо части канала.

Проиллюстрируем первое условие неустойчивости на примере такого основного течения, у которого U_i не зависит от «широты» y. В этом случае для того, чтобы поток был неустойчив, необходимо, чтобы градиенты КПВ в верхнем и нижнем слоях имели бы разный знак. Так, если $U_1 - U_2 > 0$ (восточный поток *),

$$dQ_1/dy = \beta + [f_0^2/(g' H_1)] (U_1 - U_2) > 0; \tag{6.85}$$

$$dQ_2/dy = \beta - [f_0^2/(g' H_2)] (U_1 - U_2) < 0, \tag{6.86}$$

т. е. первое неравенство тривиально выполняется, а из второго следует

$$U_1 - U_2 > \beta g' H_2/f_0^2. \tag{6.87}$$

Для западного потока $U_1 - U_2 < 0$, и в этом случае неустойчивость будет иметь место, если

$$|U_1 - U_2| < \beta g' H_1/f_0^2. \tag{6.88}$$

Поскольку $H_1 < H_2$ в океане (термоклин, с которым обычно отождествляют верхний слой, значительно тоньше общей глубины океана), то (6.87), (6.88) показывают, что в западном потоке неустойчивость развивается значительно легче, чем в восточном [4, 12]. Последний факт подтвердился в целом ряде численных экспериментов, в которых синоптические вихри явно описывались.

6.3. Вихреразрешающие численные модели

Важное место при исследовании синоптических вихрей и их роли в циркуляции океана принадлежит так называемым вихреразрешающим численным моделям. Что же стоит за этим терми-

* Здесь и далее восточными называются потоки, течения, движения, направленные на восток, а западными — на запад.

ном? Имеются в виду такие численные модели циркуляции океана, которые явным образом описывают индвидуальные синоптические вихри. Необходимо высокое пространственное разрешение. Таким образом, горизонтальный шаг сетки должен составлять 10—30 км. Интегрирование во времени должно вестись до состояния «статистически стационарного режима», при котором вихри и средний поток находятся в состоянии взаимного баланса. С помощью вихреразрешающих моделей мы хотим получить ответ на следующие вопросы:

1) какова роль вихрей в установлении характеристик глобальной циркуляции океана;

2) в чем причина образования вихрей (основные механизмы неустойчивости среднего течения и др.);

3) возможна ли параметризация вихревых потоков тепла, импульса, потенциального вихря и других субстанций (разработать схемы параметризации).

Численные вихреразрешающие модели являются эффективным инструментом для исследования этих и других вопросов. В самом деле, после проведения численных экспериментов с подобной моделью мы имеем набор всех интересующих нас характеристик в узлах регулярной сетки для интересующих моментов времени. После этого можно провести статистическую обработку результатов. Варьируя те или иные параметры и коэффициенты, мы можем выяснить степень важности какого-либо физического механизма. С помощью энергетических уравнений можно исследовать переходы энергии от ветра к среднему течению и к вихрям, обмен между доступной потенциальной энергией и кинетической и т. д.

К настоящему моменту создан ряд вихреразрешающих моделей, базирующихся как на полной системе уравнений, так и на квазигеострофическом приближении. Модели были реализованы для замкнутых бассейнов и зональных каналов.

Рассмотрим двухслойную квазигеострофическую модель Холланда для замкнутого бассейна [18]. Основные уравнения модели — уравнения для КПВ верхнего и нижнего слоев:

$$\partial q_1/\partial t + J(\psi_1,\ q_1) = H_1^{-1}\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau} + F_1; \tag{6.89}$$

$$\partial q_2/\partial t + J(\psi_2,\ q_2) = -\varepsilon\nabla^2\psi_2 + F_2. \tag{6.90}$$

Боковую вязкость F_i обычно записывают в следующем виде:

$$F_i = A_H\nabla^4\psi_i, \tag{6.91}$$

или

$$F_i = -A_4\nabla^6\psi_i, \tag{6.92}$$

или

$$F_i = A_6\nabla^8\psi_i, \tag{6.93}$$

где A_H, A_4, A_6 — коэффициенты боковой вязкости.

Такая запись параметризует диссипативные процессы, происходящие на горизонтальных масштабах, много меньших характерного масштаба синоптических возмущений. Вообще говоря, не существует какой-либо достаточно простой схемы параметризации этого процесса. Поэтому при параметризации боковой вязкости исходят из следующих требований:

— F_i должно описывать сток энергии;

— F_i не должно искажать (или искажать минимально) движения синоптического масштаба. Выражения (6.91)—(6.93) отвечают этим требованиям. Так, для выполнения первого условия необходимо, чтобы $A_H > 0$, $A_4 > 0$, $A_6 > 0$. Можно показать, что, чем выше порядок эллиптического оператора в выражении для F_i, тем лучше удовлетворяется второе требование (т. е. меньше искажаются движения синоптического масштаба) [18].

Перепишем систему (6.32)—(6.34) с учетом горизонтальной вязкости для плоского дна:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi_1 = J(f+\nabla^2\psi_1,\ \psi_1) - \frac{f_0}{H_1}w_{3/2} + F_1 + H_1^{-1}\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}; \quad (6.94)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi_2 = J(f+\nabla^2\psi_2,\ \psi_2) + \frac{f_0}{H_2}w_{3/2} + F_2 - \varepsilon\nabla^2\psi_2; \quad (6.95)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\psi_1-\psi_2) = J(\psi_1-\psi_2,\ \psi_{3/2}) - \frac{g'}{f_0}w_{3/2}. \quad (6.96)$$

Прежде чем сформулировать краевые условия, сделаем некоторые преобразования, а именно: запишем уравнения для баротропной и бароклинной мод. Умножая (6.94) на H_1/H, (6.95) на H_2/H и складывая, после преобразований получим уравнение Пуассона для баротропной моды:

$$\nabla^2\chi = \mu_{\text{бт}}, \quad (6.97)$$

где

$$\chi = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{H_1\psi_1 + H_2\psi_2}{H}\right);$$

$$\mu_{\text{бт}} = \frac{H_1}{H}J(f+\nabla^2\psi_1,\ \psi_1) + \frac{H_2}{H}J(f+\nabla^2\psi_2,\ \psi_2) +$$
$$+ H^{-1}\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau} + \frac{H_1}{H}F_1 + \frac{H_2}{H}F_2 - \varepsilon\frac{H_2}{H}\nabla^2\psi_2.$$

Для уравнения Пуассона на твердом замкнутом контуре Г ставим краевое условие:

$$\chi\,|_{\Gamma} = 0. \quad (6.98)$$

Дело в том, что функция тока на твердом замкнутом контуре может быть или константой или функцией только времени: в противном случае не было бы удовлетворено условие непротекания жидкости через твердый контур. Более того, одну из двух функций, ψ_1 или ψ_2, можно задать совершенно произвольно. Другую произвольно задавать нельзя, так как $(\psi_1-\psi_2)|_\Gamma$ — вообще говоря, некоторая функция времени, которую надо найти из решения. Мы записываем краевые условия не для ψ_1 и ψ_2, а для баротропной и бароклинной мод (т. е. для линейной комбинации ψ_1 и ψ_2), при этом для одной из них (баротропной) можно выбрать произвольную константу или произвольную функцию времени. Разумеется, следует выбирать наиболее простую запись, т. е. $(H_1\psi_1+H_2\psi_2)|_\Gamma=0$, откуда и следует уравнение (6.98).

Вычтем (6.95) из (6.94):

$$(\nabla^2-\lambda^2)\varphi=\mu_{\text{бркл}}, \tag{6.99}$$

где

$$\varphi=\partial(\psi_1-\psi_2)/\partial t; \tag{6.100}$$

$$\lambda^2=f_0^2H/(H_1H_2g'); \tag{6.101}$$

$$\mu_{\text{бркл}}=J(f+\nabla^2\psi_1,\ \psi_1)-J(f+\nabla^2\psi_2,\ \psi_2)-$$
$$-\lambda^2J(\psi_1-\psi_2,\ \psi_{3/2})+H_1^{-1}\operatorname{rot}_z\tau+F_1-F_2+\varepsilon\nabla^2\psi_2. \tag{6.102}$$

Таким образом, если известна правая часть (6.99) (например, с предыдущего временного шага), то это уравнение позволяет определить ψ. Что касается краевых условий, то заметим, что функция $\psi_1-\psi_2$ постоянная вдоль твердого контура, но может быть функцией времени. Она может быть найдена из решения уравнения (6.99), если использовать уравнение неразрывности. В нашем случае мы требуем, чтобы сохранялась масса каждого слоя, имеющего площадь S, т. е.

$$\int_S w_{3/2}\,dS=0. \tag{6.103}$$

Интегрируя (6.96) по S и используя (6.103), получаем:

$$\int_S \varphi\,dS=0. \tag{6.104}$$

Далее, положим

$$\varphi=\varphi_1+C(t)\varphi_2, \tag{6.105}$$

где

$$(\nabla^2-\lambda^2)\varphi_1=\mu_{\text{бркл}},\quad \varphi_1|_\Gamma=0; \tag{6.106}$$

$$(\nabla^2-\lambda^2)\varphi_2=0;\quad \varphi_2|_\Gamma=1. \tag{6.107}$$

Из (6.105) легко определяется $C(t)$:

$$C(t)=-\int_S\varphi_1\,dS\Big/\int_S\varphi_2\,dS. \tag{6.108}$$

Таким образом, определяются баротропная и бароклинная моды, а следовательно, и ψ_1, ψ_2. Заметим, что в правые части уравнений (6.97) и (6.99) входят эллиптические операторы четвертого или шестого, или восьмого порядка [см. (6.91)—(6.93)]. Они требуют некоторых дополнительных краевых условий. Так, если F_i определяется соотношением (6.91), то ставится дополнительное условие свободного скольжения

$$\partial^2\psi_i/\partial x_n^2|_\Gamma = 0 \quad (x_n \text{ — нормаль к контуру}). \tag{6.109}$$

В рассматриваемую систему поступает кинетическая энергия от ветра, формируются крупномасштабные течения, накапливается доступная потенциальная энергия. В результате неустойчивости происходит вихреобразование, т. е. часть энергии переходит в кинетическую и доступную потенциальную энергию вихрей. Необходимо уметь рассчитывать как конкретные виды энергии, так и энергетические переходы, т. е. уметь рассчитывать количество энергии, переходящее от одного вида к другому.

Для того чтобы рассчитать кинетическую энергию верхнего слоя, необходимо уравнение (6.94) умножить на $(-H_1\psi_1^*)$ и проинтегрировать по площади бассейна S (здесь $\psi^* = \psi_i - \psi_i|_\Gamma$).

После преобразований мы получаем:

$$\frac{\partial K_1}{\partial t} = \frac{f_0}{H}\int\limits_S w_{3/2}(H_2\psi_1^* + H_1\psi_2^*)\,dS + \frac{f_0 H_1}{H}\int\limits_S w_{3/2}(\psi_1^* - \psi_2^*)\,dS -$$

$$-\int\limits_S \psi_1^* \operatorname{rot}_z \tau\, dS - \int\limits_S \psi_1^* H_1 F_1\, dS, \tag{6.110}$$

где $K_i = \frac{H_i}{2}\int\limits_S (\nabla\psi_i)^2 dS$ — интегральная кинетическая энергия в слое i.

Аналогично получаем уравнение и для интегральной кинетической энергии нижнего слоя:

$$\frac{\partial K_2}{\partial t} = -\frac{f_0}{H}\int\limits_S w_{3/2}(H_2\psi_1^* + H_1\psi_2^*)\,dS + \frac{f_0 H_2}{H}\int\limits_S w_{3/2}(\psi_1^* - \psi_2^*)\,dS -$$

$$-\int\limits_S \psi_2^* H_2 F_2\, dS - \int\limits_S \psi_2^* H_2 T_2\, dS, \tag{6.111}$$

где $T_2 = -\varepsilon\nabla^2\psi_2$.

Чтобы получить уравнение для интегральной доступной потенциальной энергии, следует (6.96) умножить на $(f_0^2/g')(\psi_1^* - \psi_2^*)$ и проинтегрировать по поперечному сечению бассейна:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -f_0\int\limits_S w_{3/2}(\psi_1^* - \psi_2^*)\,dS, \tag{6.112}$$

где $P = \frac{f_0^2}{2g'}\int\limits_S (\psi_1 - \psi_2)^2\, dS$ — доступная потенциальная энергия.

Заметим, что в уравнениях (6.110) и (6.111) первые слагаемые в правых частях равны и противоположны по знаку. Они описывают поток энергии вследствие работы сил давления на поверхности раздела слоев, приводящий к обмену кинетической энергией между слоями. Если мы просуммируем эти уравнения и будем интересоваться полной кинетической энергией, то эти члены уничтожаются.

Вторые слагаемые в правых частях (6.110) и (6.111) равны по величине и противоположны по знаку с правой частью (6.112). Таким образом, второй член в правой части (6.110) представляет поток энергии в результате работы архимедовых сил в верхнем слое и описывает обмен между кинетической энергией верхнего слоя и доступной потенциальной энергией. Аналогичный смысл, но для нижнего слоя имеет и второй член в правой части (6.111).

Третий член в (6.110) описывает приток энергии благодаря работе касательного напряжения ветра. Последнее слагаемое в (6.110) описывает вязкую диссипацию (сток энергии), происходящую в верхнем слое из-за боковой вязкости. Аналогично — предпоследнее слагаемое в (6.111). Последнее слагаемое в (6.111) описывает диссипацию вследствие придонного трения.

Обозначим для наглядности $\{A,\ B\}$ — обмен энергией между A и B. Тогда можно записать:

$$\{K_1,\ K_2\} = \frac{f_0}{H} \int\limits_S w_{3/2} (H_2 \psi_1^* + H_1 \psi_2^*)\, dS; \tag{6.113}$$

$$\{K_1,\ P\} = \frac{f_0 H_1}{H} \int\limits_S w^{3/2} (\psi_1^* - \psi_2^*)\, dS; \tag{6.114}$$

$$\{K_1,\ \tau\} = -\int\limits_S \psi_1^* \operatorname{rot}_z \tau\, dS; \tag{6.115}$$

$$\{K_1,\ F_1\} = -\int\limits_S \psi_1^* H_1 F_1\, dS; \tag{6.116}$$

$$\{K_2,\ P\} = \frac{f_0 H_2}{H} \int\limits_S w^{3/2} (\psi_1^* - \psi_2^*)\, dS; \tag{6.117}$$

$$\{K_2,\ F_2\} = -\int\limits_S \psi_2^* H_2 F_2\, dS; \tag{6.118}$$

$$\{K_2,\ T_2\} = -\int\limits_S \psi_2^* H_2 T_2\, dS. \tag{6.119}$$

Здесь $\{K_i,\ F_i\}$ обозначает диссипацию кинетической энергии слоя i под действием боковой вязкости, $\{K_2,\ T_2\}$ — диссипация из-за придонного трения и $\{K_1,\ \tau\}$ — приток энергии от ветра к кинетической энергии верхнего слоя.

С учетом (6.113)—(6.119) уравнения (6.110)—(6.112) можно переписать так:

$$\partial K_1/\partial t = \{K_1,\ K_2\} + \{K_1,\ P\} + \{K_1,\ \tau\} + \{K_1,\ F_1\}; \qquad (6.120)$$

$$\partial K_2/\partial t = -\{K_1,\ K_2\} + \{K_2,\ P\} + \{K_2,\ F_2\} + \{K_2,\ T_2\}; \qquad (6.121)$$

$$\partial P/\partial t = -\{K_1,\ P\} - \{K_2,\ P\}. \qquad (6.122)$$

Если просуммировать (6.120)—(6.122), то получим:

$$\partial (K_1 + K_2 + P)/\partial t = \{K_1,\ \tau\} + \{K_1,\ F_1\} + \{K_2,\ F_2\} + \{K_2,\ T_2\}. \qquad (6.123)$$

Итак, изменение во времени полной механической (т. е. кинетической и доступной потенциальной) энергии системы складывается из притока энергии от ветра и диссипации в результате действия боковой вязкости и придонного трения.

Обычно система уравнений интегрируется из состояния покоя до статистически стационарного состояния. Под последним понимают такое состояние системы, в котором основные параметры, осредненные за достаточно большой период, не изменяются во времени.

Обозначим:

$$\langle K_i \rangle = \frac{H_i}{2} \int\limits_S (\overline{\nabla \psi_i})^2\, dS; \qquad (6.124)$$

$$\langle P \rangle = \frac{f_0^2}{2g'} \int\limits_S (\overline{\psi_1} - \overline{\psi_2})^2\, dS; \qquad (6.125)$$

$$K_i' = \frac{H_i}{2} \int\limits_S \overline{(\nabla \psi_i')^2}\, dS; \qquad (6.126)$$

$$P' = \frac{f_0^2}{2g'} \int\limits_S \overline{(\psi_1' - \psi_2')^2}\, dS. \qquad (6.127)$$

Здесь $\langle K_i \rangle, \langle P \rangle$, K_i', P' — кинетическая и доступная потенциальная энергия среднего потока и вихрей соответственно.

Осредняя по времени (6.94)—(6.96), домножая на соответствующие параметры и осредняя по площади S, получаем уравнения энергетического баланса среднего движения. Если вычесть осредненные уравнения (6.94)—(6.96) из исходных, домножить на соответствующие параметры и проинтегрировать по S, то получим уравнение энергетического баланса синоптических возмущений. Процессы энергетических преобразований можно наглядно представить в виде энергетической диаграммы (см. рис. 6.2).

Рассмотрим численные эксперименты, выполненные для прямоугольного бассейна. Пусть ось x направлена на восток, y — на север. Обычно тангенциальное напряжение ветра $\boldsymbol{\tau}$ задают таким образом, чтобы среднее поле течений в бассейне имело вид нескольких (один-два) крупномасштабных круговоротов. Так, если положить $\tau_y = 0$, а $\tau_x = -\tau_0 \cos(\pi y/L)$, то для прямоугольного бассейна, простирающегося по y от 0 до L, будет иметь место один крупномасштабный антициклонический круговорот. Если же

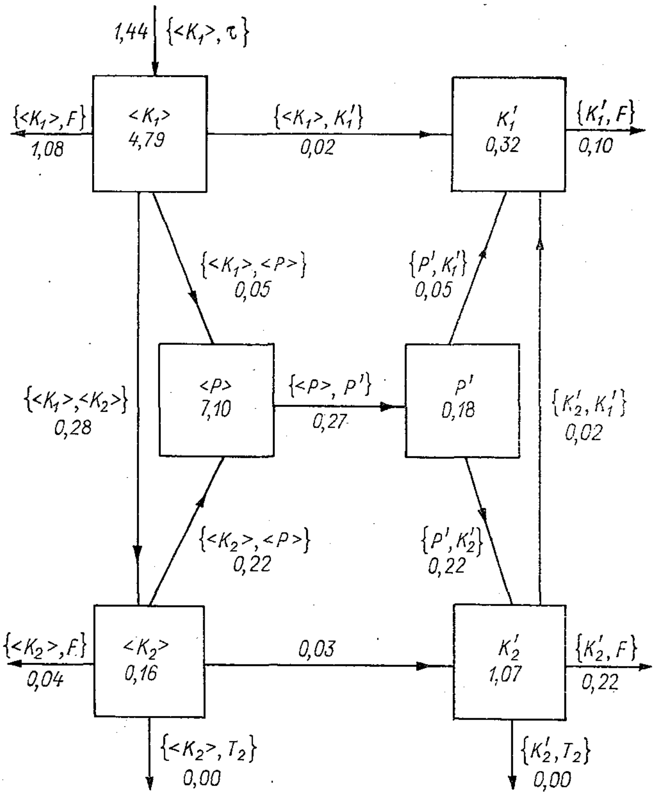


Рис. 6.2. Энергетическая диаграмма для квазистационарного режима [18].

В квадратах указаны уровни соответствующей энергии в 10^3 Дж/м^2. Горизонтальные и вертикальные стрелки указывают на обмен между соответствующими видами энергии (если они соединяют два каких-либо квадрата), либо приток энергии благодаря ветру $\{<k_1>, \tau\}$, либо диссипативные процессы (заметим, что при этом горизонтальные стрелки соответствуют боковой вязкости, а вертикальные — придонному трению). Потоки энергии — в 10^{-3} Дж/(м$^2\cdot$с). Численные значения в данной диаграмме относятся к эксперименту В. Холланда [18] с одним круговоротом.

$-L \leqslant y \leqslant L$, то будет два круговорота: антициклонический на севере и циклонический на юге (для Северного полушария).

При интегрировании системы из состояния покоя имеет место накопление доступной потенциальной энергии до некоторого $t = T_1$ (T_1 имеет порядок 500 сут). После этого поток становится бароклинно неустойчивым — происходит резкое уменьшение ДПЭ (рис. 6.3), при этом происходит рост амплитуды синоптических вихрей.

Далее, до $t \approx T_2$ (T_2 имеет порядок 1500 сут) наблюдается переходный период, после которого система выходит на квазистационарный режим. Кинетические энергии обоих слоев, как и доступная потенциальная энергия, колеблются относительно некоторых средних значений. Любую интересующую нас характеристику (скорость, энергию, энстрофию и т. д.) можно осреднить по

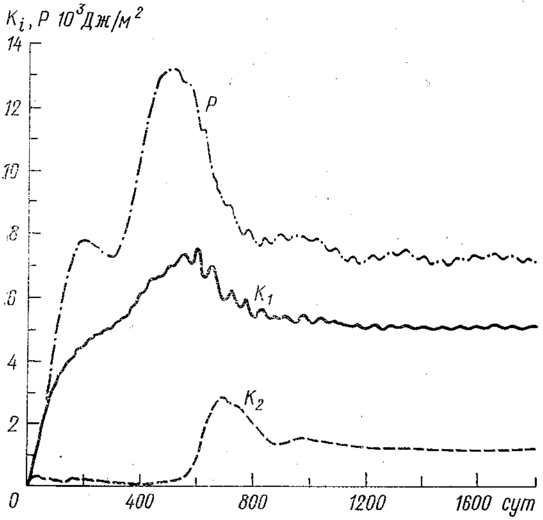


Рис. 6.3. Кинетическая энергия K_1 и K_2 верхнего и нижнего слоя, а также доступная потенциальная энергия P, отнесенные к единице площади [18].

достаточно большому промежутку времени и соответствующее значение считать характеристикой среднего крупномасштабного течения. Отклонения от этих значений считаем характеристиками синоптических вихрей.

В эксперименте с одним крупномасштабным круговоротом при некоторых значениях коэффициентов трения через 500 сут поток становится бароклинно неустойчивым (см. рис. 6.3). Быстрое развитие вихревого движения происходит за счет реализации доступной потенциальной энергии. Вихри переносят энергию в нижний слой и генерируют глубоководный средний поток. После 1500 сут система переходит в состояние статистического равновесия. У западной и северной стенок наблюдаются ярко выраженные пограничные слои (т. е. быстрые изменения характеристик на малых расстояниях). Функции тока для среднего движения и для некоторого момента времени изображены на рис. 6.4.

В экспериментах с двумя крупномасштабными круговоротами вместо северного пограничного течения появилась свободная струя в средних широтах, являющаяся аналогом Гольфстрима.

Направленная на восток струя существенно неустойчива, причем неустойчивость в основном баротропная.

Важным является энергетический переход от средней кинетической энергии верхнего слоя к вихревой кинетической энергии нижнего слоя. Баротропная неустойчивость свободного потока продуцирует вихри в верхнем слое. Далее, благодаря работе вихревых сил давления на поверхности раздела происходит перенос энергии в нижний слой и имеет место подпитка абиссальной вихревой кинетической энергии. Важно, что средняя кинетическая энергия нижнего слоя подпитывается благодаря действию средних сил давления на поверхности раздела только в том случае, если имеются вихри. Напряжения Рейнольдса усиливают глубинный поток восточного направления и ослабляют направленный на запад возвратный поток.

В эксперименте, отличавшемся от предыдущего тем, что основная роль в диссипации энергии отводится донному трению, вихревая кинетическая энергия в значительно большей степени сконцентрирована около свободной струи. Отношение кинетической энергии вихрей к кинетической энергии среднего движения превышает единицу как в верхнем, так и в нижнем слоях.

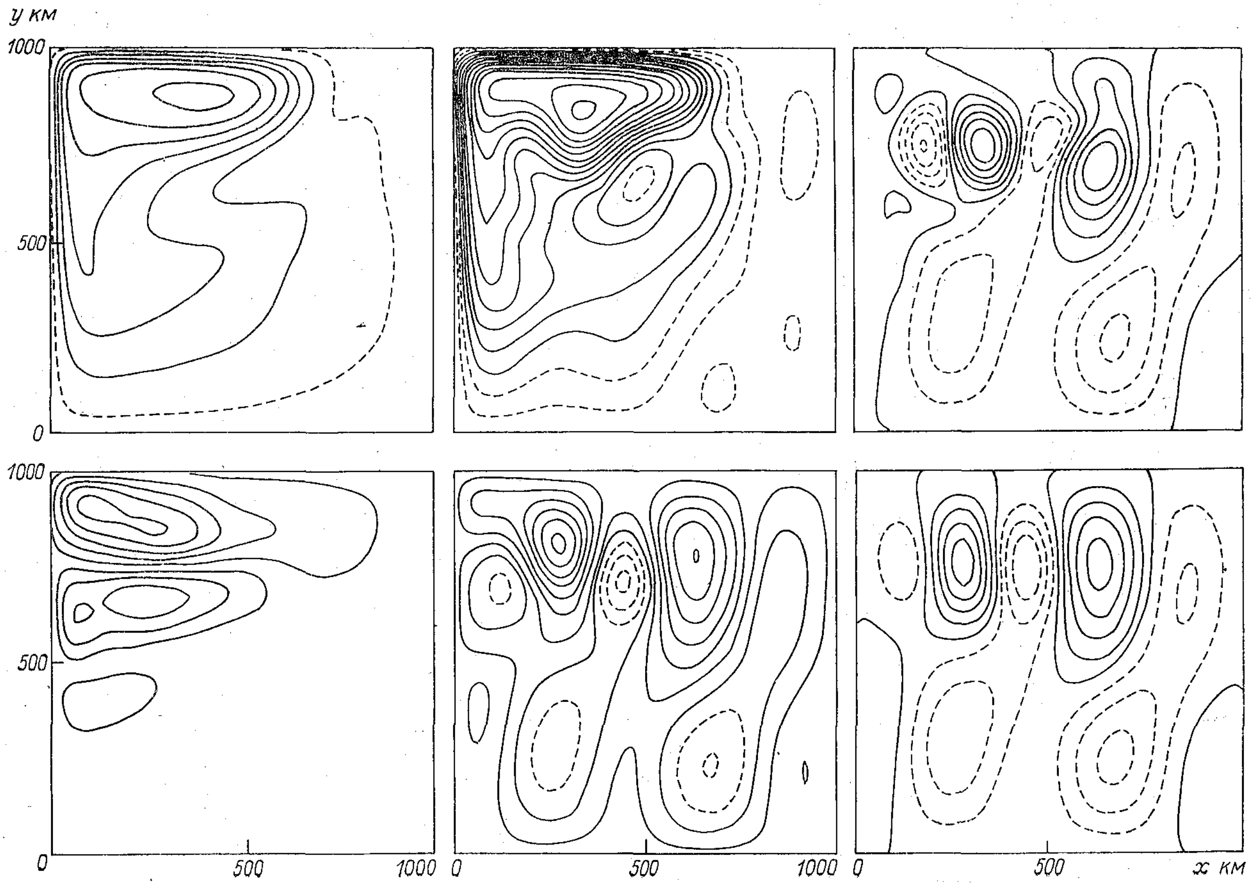
В восточных районах бассейна, характеризующихся медленными движениями, основной вклад в средний квазигеострофический потенциальный вихрь вносит планетарная завихренность [второй член в формулах (6.37), (6.38)], в то время как в районе струи и в западных районах велика роль «плотностного» члена [смещение изопикнической поверхности, третий член в (6.37), (6.38)] и относительного вихря (первый член в этих формулах).

В описанных экспериментах синоптические вихри движутся преимущественно в западном направлении со скоростями 10—25 см/с. Характерное время жизни вихрей 40—60 сут, а радиус вихрей 100—170 км в верхнем слое и 125—250 км в нижнем.

Таким образом, в рассмотренных экспериментах вихри формируются благодаря баротропной и бароклинной неустойчивости. В придонном экмановском слое имеет место значительный сток энергии. Вихри ответственны не только за ограничение циркуляции в верхнем слое, но и за развитие некоторой средней циркуляции в глубинах океана, вносящей большой вклад в перенос массы, несмотря на меньшие скорости среднего течения в нижнем слое (поскольку толщина последнего в 4 раза превышает толщину верхнего слоя, перенос массы в нижнем слое оказывается даже бóльшим).

6.4. Основы теории волн Россби

1. Волны Россби в однородном сферическом слое. В динамике океана и атмосферы Земли (и любой вращающейся планеты) огромную роль играют медленные крупномасштабные волновые движения, называемые волнами Россби в честь их первооткрыва-



y км
1000
500
0
1000
500
0
500
1000
0
500
1000
0
500
x км

теля К. Россби. Эти волны обязаны своим существованием совместному влиянию вращения и кривизны поверхности Земли, поэтому в качестве первого шага мы рассмотрим волновые движения в тонком вращающемся сферическом слое однородной жидкости постоянной глубины.

Линеаризованные уравнения движения в таком слое имеют вид [3]

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + f_h w = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{r\cos\varphi\,\partial\lambda}; \qquad (6.128а)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{r\,\partial\varphi}; \qquad (6.128б)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} - f_h u = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r}; \qquad (6.128в)$$

$$\frac{\partial u}{r\cos\varphi\,\partial\lambda} + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\partial}{r\,\partial\varphi}(v\cos\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 w) = 0. \qquad (6.129)$$

Здесь λ, φ, r — сферическая система координат; λ — долгота ($-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$); φ — широта ($-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$); r — расстояние от центра Земли; t — время; u, v, w — компоненты скорости по осям λ, φ, z; ρ_0 — средняя плотность; p — отклонение давления от гидростатического; $f = 2\Omega\sin\varphi$, $f_h = 2\Omega\cos\varphi$ — нормальная и касательная к поверхности Земли компоненты удвоенной угловой скорости вращения Земли, равной по модулю Ω.

Предположим, что слой накрыт твердой крышкой при $r = a$. Тогда в силу условия непротекания на поверхности ($r = a$) и на дне слоя ($r = a - H$, H — глубина слоя) вертикальная скорость $w = 0$. Положим $w = 0$ везде в слое и попытаемся найти волновое решение системы (6.128). Рассмотрим сначала уравнения (6.128а, б), (6.129). Уравнение (6.129) при $w = 0$ позволяет ввести функцию тока:

$$u = -\partial\psi/(r\,\partial\varphi); \quad v = \partial\psi/(r\cos\varphi\,\partial\lambda). \qquad (6.130)$$

Исключим при помощи перекрестного дифференцирования давление из (6.128 а, б), в результате получим уравнение

$$\partial\omega/\partial t + \beta v = 0, \qquad (6.131)$$

где

$$\omega = \frac{\partial v}{r\cos\varphi\,\partial\lambda} - \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(u\cos\varphi);$$

$$\beta = \partial f/(r\,\partial\varphi) = (2\Omega/r)\cos\varphi. \qquad (6.132)$$

Рис. 6.4. Изолинии функции тока верхнего слоя (сверху) и нижнего слоя (снизу) [18].

Левая колонка — средние поля $\langle\psi_1\rangle$ (интервал между изолиниями 4000 м³/с) и $\langle\psi_2\rangle$ (интервал между изолиниями 500 м³/с). Средняя колонка — поля функций тока для некоторого момента времени (в верхнем слое интервал между изолиниями 2000 м³/с, в нижнем 1000 м³/с). Правая колонка — вихревой компонент функции тока (в верхнем и нижнем слое интервал между изолиниями 1000 м³/с).

Здесь ω — вертикальный компонент $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ (вихря скорости или завихренности), записанного в сферической системе координат. Согласно (6.130)

$$\omega = \Delta_h \psi, \tag{6.133}$$

где $\Delta_h = \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$ — горизонтальный лапласиан в сферической системе координат. Уравнение (6.131) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta_h \psi) + \frac{2\Omega}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = 0. \tag{6.134}$$

Коэффициенты уравнения (6.134) не зависят от долготы λ, поэтому простейшее волновое решение (6.134) записывается как

$$\psi = \tilde{\psi}(\mu) \sin(k\lambda - \sigma t), \quad \mu = \sin \varphi. \tag{6.135}$$

Здесь $k = 0, 1, 2, \ldots$; σ — частота волны. Подстановка (6.135) в (6.134) приводит к уравнению Лежандра для амплитуды $\widetilde{\psi}(\mu)$:

$$\frac{d}{d\mu} \left[(1 - \mu^2) \frac{d\tilde{\psi}}{d\mu} \right] - \frac{k^2}{1 - \mu^2} \tilde{\psi} - \frac{2\Omega k}{\sigma} \tilde{\psi} = 0. \tag{6.136}$$

Из теории функций Лежандра известно, что ограниченные на отрезке $(-1, 1)$ решения существуют лишь для σ и k, связанных соотношением

$$\sigma = -2\Omega k / [(l + k)(l + k + 1)], \quad l = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6.137}$$

и называются присоединенными функциями Лежандра первого рода

$$\tilde{\psi} = p_{l+k}^{k}(\mu). \tag{6.138}$$

Формулы (6.135), (6.137), (6.138) полностью определяют простейшую сферическую волну Россби. Функция $p_{l+k}^{k}(\mu)$ имеет l нулей в промежутке $(-1 < \mu < 1)$. Из (6.135) нетрудно видеть также, что k равно числу нулей по долготе. Таким образом, k и l естественно интерпретировать как волновые числа по долготе и широте. Частота волны $\sigma = \sigma(k, l)$ связана с волновыми числами k, l дисперсионным соотношением (6.137).

Зная $\psi(\lambda, \varphi, t)$, можно по формулам (6.130) определить скорости u, v, а затем, используя (6.128а, б), найти и давление p. Очевидно, однако, что уравнение (6.128в) не выполняется, поскольку для построенного решения

$$\partial p / \partial r = 0. \tag{6.139}$$

Для оценки погрешности, допущенной при замене уравнения (6.128в) на уравнение (6.139), рассмотрим отношение $\rho_0 f_h u / (\partial p / \partial r)$. Нетрудно понять, что

$$\frac{\rho_0 f_h u}{\partial p / \partial r} \sim \frac{2\Omega U}{P/H}, \tag{6.140}$$

где U — характерная скорость; P — характерное изменение давления. Согласно (6.137) частота $\sigma \leqslant 2\Omega$, поэтому нестационарные члены $\partial u/\partial t$ и $\partial v/\partial t$ в уравнениях (6.128а, б) не превосходят по порядку силу Кориолиса. Отсюда находим $P = \rho_0 2\Omega LU$ (L — характерный горизонтальный масштаб волны) и с учетом (6.140)

$$\frac{\rho_0 f_h u}{\partial p/\partial r} \sim \frac{H}{L}. \tag{6.141}$$

Таким образом, построенное решение удовлетворяет системе уравнений (6.128а, б, в), (6.129) с точностью до величин $O(H/L)$. Для реальных волн Россби $L \geqslant 100$ км, т. е. значительно превосходит H, поэтому мы в дальнейшем будем рассматривать только такие волны, для которых $H/L \ll 1$.

Найденная волна называется баротропной волной Россби. Из (6.137) видно, что ее фазовая скорость, равная здесь σ/k, всегда направлена на запад. Частота волны не превосходит удвоенную угловую скорость вращения Земли (2Ω), причем если горизонтальный масштаб волны равен по порядку радиусу Земли, т. е. k, $l \sim 1$, то частота $\sigma \sim 2\Omega$. В случае волн, коротких по сравнению с радиусом Земли, волновые числа k, $l \gg 1$, поэтому для таких волн $\sigma \ll 2\Omega$. Таким образом, волны Россби (6.135) оказываются низкочастотными, причем частота их убывает вместе с горизонтальным масштабом.

Рассмотрим физический механизм, поддерживающий существование баротропных волн Россби. Прежде всего очевидно, что на невращающейся Земле при $\Omega = 0$ такие волны существовать не могут. С другой стороны линеаризованные уравнения движения в плоском слое, вращающемся с постоянной угловой скоростью f вокруг вертикальной оси z, получаются из системы (6.128), (6.129), если положить $f_h = 0$ и заменить $\partial p/(r \cos\varphi\, \partial\lambda)$, $\partial p/(r\, \partial\varphi)$, $\partial p/\partial r$ на $\partial p/\partial x$, $\partial p/\partial y$, $\partial p/\partial z$, а уравнение (6.129) на $\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0$; здесь оси x, y направлены на восток и север, скорости u, v, w — вдоль осей x, y, z. Повторяя приведенные выше рассуждения (проделайте это сами), нетрудно показать, что уравнение (6.131) перейдет в уравнение

$$\partial\omega/\partial t = 0, \quad \omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y. \tag{6.142}$$

Очевидно, что (6.142) не имеет волновых решений. Таким образом, во вращающемся сферическом слое существует своеобразный волнообразующий механизм, не имеющий аналога в случае вращающегося плоского слоя или невращающегося сферического слоя.

Чтобы лучше понять природу этого механизма, введем смещение жидких частиц по меридиану $\eta : v = d\eta/dt$. Уравнение (6.134) можно, проинтегрировав по t, переписать в виде

$$\omega + \beta\eta = \mathrm{const}. \tag{6.143}$$

Выясним физический смысл отдельных членов в (6.143). Величина ω есть вертикальный компонент вихря относительного движения. При небольших смещениях η вертикальный компонент $f(\varphi)$ вихря переносного движения будет равен $f(\varphi)=f(\varphi_0)+ +\beta(\varphi_0)\cdot\eta+\ldots$, где φ_0 — широта первоначального положения жидкой частицы. Для краткости в дальнейшем будем называть ω и f просто относительной и планетарной завихренностями. В силу (6.143) вертикальный компонент вихря абсолютного движения $\omega+f$ (в дальнейшем абсолютная завихренность) каждой жидкой частицы сохраняется. Иными словами, изменение относительной завихренности частицы целиком обусловлено изменением плане-

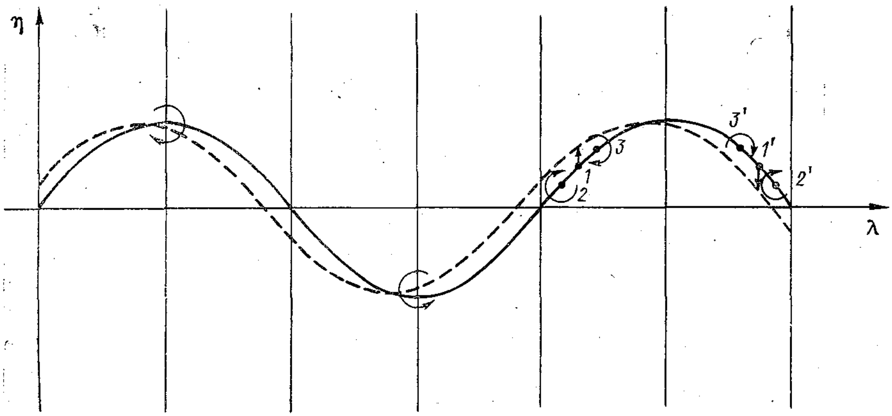


Рис. 6.5. Схема вихревого волнообразующего механизма на сфере.

тарной завихренности частицы при ее меридиональном смещении. Этот эффект принято называть β-эффектом.

Пусть теперь в начальный момент движение в слое отсутствует, т. е. $\omega=\eta=0$. Отклоним воду от состояния равновесия так, чтобы частицы, лежащие на некотором круге широты, испытали смещение, показанное на рис. 6.5. В силу (6.193) в частицах, смещающихся к северу ($\eta>0$), возникает антициклоническая относительная завихренность ($\omega<0$), а в частицах, смещающихся к югу ($\eta<0$), — циклоническая завихренность ($\omega>0$). Абсолютное значение ω увеличивается с ростом смещения η. Исследуем подробнее смещение частиц под действием генерируемого относительного движения. Для этого рассмотрим участок, на котором все частицы смещаются к северу (рис. 6.5). Частица *1* испытывает воздействие со стороны частиц *2* и *3*. Поскольку относительная завихренность в частице *3* больше, чем в частице *2*, то меридиональное смещение частицы *1* увеличивается. Аналогично можно показать, что меридиональное смещение частицы *1'* под действием поля относительного движения уменьшается. Очевидно, что такие изменения приводят к перемещению первоначального профиля меридиональных смещений к западу.

2. Уравнение квазигеострофического потенциального вихря в однородном океане. Описание коротких по сравнению с радиусом Земли волн Россби может быть существенно упрощено по сравнению с предыдущим разделом. Пусть горизонтальный масштаб L движения не превышает нескольких сот километров, т. е. $L \ll a$, где a — радиус Земли, но в то же время L достаточно велик, чтобы $H/L \ll 1$. Рассмотрим движение в средних широтах в окрестности широты φ_0. Введем локальные декартовы координаты

$$x = a \cos \varphi_0 (\lambda - \lambda_0); \quad y = a (\varphi - \varphi_0), \tag{6.144}$$

запишем уравнения (6.128а, б, в), (6.129) в координатах x, y и разложим $\cos \varphi$, $\sin \varphi$ в ряды Тейлора в окрестности φ_0. Считая рассматриваемую окрестность широты φ_0 достаточно узкой по сравнению с радиусом Земли a и пренебрегая малыми слагаемыми, получаем:

$$\partial u/\partial t - (f_0 + \beta y) v = -(1/\rho_0) \partial p/\partial x; \tag{6.145а}$$

$$\partial v/\partial t + (f_0 + \beta y) u = -(1/\rho_0) \partial p/\partial y; \tag{6.145б}$$

$$\partial p/\partial z = 0; \tag{6.145в}$$

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0. \tag{6.146}$$

Здесь $f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0$; $\beta = (2\Omega/a) \cos \varphi_0$; $z = r - a$. При записи (6.145а, б) мы заменили r на a, поскольку $H/a \ll 1$, а в (6.146) пренебрегли слагаемым $(2/r)w$ по сравнению с $\partial w/\partial r$ (отношение этих слагаемых не превосходит H/a). Далее, в силу (6.146) характерное значение вертикальной скорости w не превышает $(H/L)U$, где U — характерная горизонтальная скорость. Отсюда следует, что $f_h w \ll f v$ в (6.128а), откуда получаем (6.145а). Мы будем изучать низкочастотные движения с временным масштабом $T \gg f^{-1}$, поэтому $(\partial w/\partial t)/(f_h u) \sim (H/L)(Tf)^{-1} \ll 1$ и, следовательно, $\partial w/\partial t \ll f_h u$ и в (6.128в) (см. оценки в предыдущем разделе), и в итоге мы приходим к уравнению гидростатики (6.145в) (напомним, что в силу однородности океана отклонение плотности от значения, соответствующего гидростатическому равновесию, равно нулю).

Система (6.145а—в), (6.146) формально совпадает с уравнениями, описывающими движение во вращающемся вокруг вертикальной оси плоском слое. Отличие состоит в том, что угловая скорость вращения в (6.145а, б) равна $f_0 + \beta y$, т. е. не постоянна, а зависит от широты y. Можно сказать, что при выводе (6.145), (6.146) мы пренебрегли сферичностью Земли везде, кроме выражения для угловой скорости. Введенное приближение называется приближением β-плоскости [1].

---

[1] В отличие от приближения f-плоскости, при котором сферический слой в окрестности $\varphi = \varphi_0$ заменяется плоским слоем, вращающимся с постоянной угловой скоростью $f_0 = 2\Omega \sin \varphi_0$. Соответствующие уравнения получаются из (6.145), (6.146) при $\beta = 0$.

Удобно заменить уравнение неразрывности (6.146) уравнением вихря, получаемым исключением p из (6.145а, б) с использованием (6.146). После несложных преобразований получаем

$$\partial\omega/\partial t+\beta v-(f_0+\beta y)\,\partial w/\partial z=0,\quad \omega=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y. \qquad (6.147)$$

Обсудим граничные условия по вертикали. Пусть океан ограничен свободной поверхностью $[z=\zeta(x,\ y,\ t)]$ и твердым дном $[z=-H+h(x,\ y),\ h\ll H,\ H$ — постоянная средняя глубина океана]. Линеаризованное кинематическое условие на свободной поверхности $w=d\zeta/dt$ и условие непротекания на дне записывается в виде

$$w=\partial\zeta/\partial t \quad \text{при } z=0; \qquad (6.148\text{а})$$

$$w=u\,\partial h/\partial x+v\,\partial h/\partial y \quad \text{при } z=-H. \qquad (6.148\text{б})$$

К условиям (6.148а, б) добавляется линеаризованное условие непрерывности давления на поверхности океана:

$$p=g\rho_0\zeta \quad \text{при } z=0. \qquad (6.148\text{в})$$

В дальнейшем мы будем анализировать систему (6.145а, б, в), (6.147) с граничными условиями (6.148а, б, в). Упростим сначала уравнения (6.145а, б). Нетрудно понять, что $(\partial u/\partial t)/(f_0 v)\sim\sim(Tf_0)^{-1}\ll 1$ и $\beta y/f_0\sim L/a\ll 1$, поэтому уравнения (6.145а, б) с точностью до малых величин переписываются в виде

$$f_0 v=(1/\rho_0)\,\partial p/\partial x;\quad f_0 u=-(1/\rho_0)\,\partial p/\partial y. \qquad (6.149\text{а, б})$$

Уравнения (6.149а, б) означают, что сила Кориолиса уравновешивается градиентом давления, и называются геострофическими соотношениями. В силу (6.145в) давление p не зависит от вертикальной координаты, поэтому u, v также не зависят от z. Из (6.147) тогда следует, что $\partial w/\partial z$ также не зависит от z, т. е. $w==A(x,\ y)z+B(x,\ y)$. Функции $A(x,\ y)$, $B(x,\ y)$ находятся из граничных условий (6.148а, б); в результате получаем

$$w=\frac{1}{H}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}-u\frac{\partial h}{\partial x}-v\frac{\partial h}{\partial y}\right)z+\frac{\partial\zeta}{\partial t}. \qquad (6.150)$$

Введем квазигеострофическую функцию тока $\psi=[1/(f_0\rho_0)]p$ и выразим через ψ скорости u, v, w и уровень ρ, используя уравнения (6.149а, б), (6.148), (6.150). Подставляя полученные выражения в уравнение вихря (6.147) и пренебрегая βy по сравнению с f_0, получаем уравнение квазигеострофического потенциального вихря в однородном океане:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\psi-\frac{f_0^2}{gH}\psi\right)+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{f_0}{H}J(\psi,\ h)=0. \qquad (6.151)$$

Если заменить свободную поверхность твердой крышкой, то условие (6.148а) заменится на $w|_{z=0}=0$, (6.148в) исчезнет, и уравнение (6.151) примет вид (вывести самим)

$$\partial\,\Delta\psi/\partial t+\beta\,\partial\psi/\partial x+(f_0/H)\,J(\psi,\ h)=0. \qquad (6.152)$$

В уравнение (6.151) входит важный масштаб длины $\sqrt{gH}/f_0$, который называется внешним масштабом Россби и обозначается через R_l:

$$R_l=\sqrt{gH}/f_0. \tag{6.153}$$

Для океана в средних широтах $H=4$ км, $f_0=10^{-4}$ с$^{-1}$ и масштаб $R_l=2000$ км. Ясно, что отношение $\Delta q/(f_0^2/(gH)]\psi\sim R_l^2/L^2$, поэтому, если масштаб движения $L\ll R_l$, то слагаемым $[f_0^2/(gH)]\psi$ в (6.151) можно пренебречь и (6.151) переходит в (6.152). Таким образом, приближение твердой крышки справедливо для квазигеострофических движений с пространственным масштабом $L\ll R_l$.

3. Волны Россби в однородном океане постоянной глубины. Изучим сначала волны в океане постоянной глубины, когда $h=0$. Волновые решения (6.151) ищем в виде

$$\psi=A\sin(k_x x+k_y y-\sigma t), \tag{6.154}$$

где $\mathbf{k}=(k_x,\ k_y)$ — волновой вектор; σ — частота волны; A — постоянная амплитуда волны. Подставляя (6.154) в (6.151), находим зависимость частоты σ от волновых чисел k_x, k_y — дисперсионное соотношение для волн Россби в однородном океане постоянной глубины со свободной поверхностью:

$$\sigma=-\beta k_x/(k^2+R_l^{-2}). \tag{6.155}$$

При $|k_x|$, $|k_y|\gg R_l^{-1}$ (что равносильно условию $L\ll R_l$) соотношение (6.155) переходит в уравнение

$$\sigma=\sigma(k_x,\ k_y)=-\beta k_x/k^2, \tag{6.155$'$}$$

совпадающее, как нетрудно видеть, с дисперсионным соотношением для волн Россби в приближении твердой крышки (вывести самим).

Полезная иллюстрация зависимости σ от $\mathbf{k}$ приведена на рис. 6.6, где изображены графики $\sigma(k_x,\ k_y)$ при k_y фиксированном (рис. 6.6 *а*) и $\sigma(k_x,\ k_y)$ при k_x фиксированном (рис. 6.6 *б*). Характерной особенностью является существование максимума частоты при заданном k_y, равного $\sigma_{\text{макс}}=\beta/[2(k_y^2+R_l^{-2})^{1/2}]$ (вывести самим). Абсолютный максимум частоты достигается при $k_y=0$ и равен $\sigma_{\text{макс}}=\beta R_e/2$. Частота очень коротких ($|\mathbf{k}|\to\infty$) и очень длинных ($|\mathbf{k}|\to 0$) волн Россби стремится к нулю. Последнее несправедливо для волн в приближении твердой крышки: частота этих волн не имеет длинноволнового предела и может неограниченно увеличиваться при $|\mathbf{k}|\to 0$.

Скорости частиц в волне Россби в силу (6.149а, б), (6.154) равны

$$v=\partial\psi/\partial x=k_x\cos\theta;\ \ u=-\partial\psi/\partial y=-k_y\cos\theta,\ \ \theta=k_x x+k_y y-\sigma t. \tag{6.156}$$

Нетрудно видеть, что вектор скорости (u, v) перпендикулярен волновому вектору $\mathbf{k}=(k_x, k_y)$, т. е. частицы в волне движутся перпендикулярно направлению распространения волны. Иными словами, волны Россби являются поперечными волнами. Далее, фазовая скорость $\mathbf{c}_ф$ волны Россби (скорость перемещения линии равных фаз $k_x x+k_y y=\mathrm{const}$) равна по модулю $|\mathbf{c}_ф|=\sigma/|\mathbf{k}|$ и направлена вдоль волнового вектора (здесь и в дальнейшем считаем $\sigma>0$). Компоненты фазовой скорости $\mathbf{c}_ф$ равны (вывести самим)

$$c_{фx}=(\sigma/|\mathbf{k}|^2)\,k_x;\quad c_{фy}=(\sigma/|\mathbf{k}|^2)\,k_y. \tag{6.157}$$

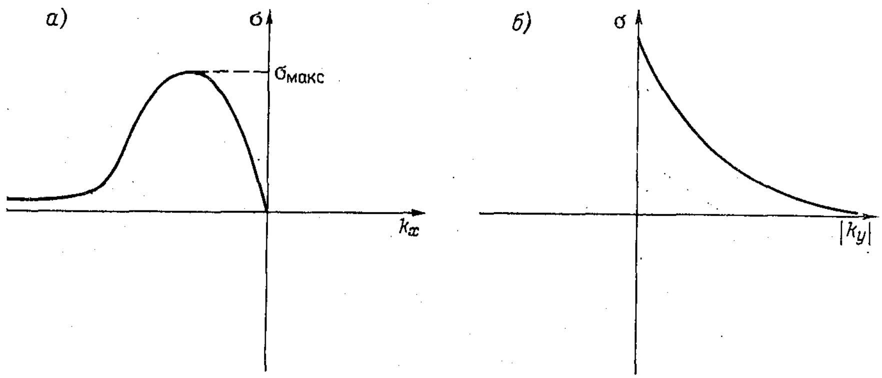


Рис. 6.6. Зависимость частоты волны Россби от волновых чисел k_x, k_y.
$а$ — при заданном k_y; $б$ — при заданном k_x.

В силу (6.155) волновое число k_x всегда отрицательно и $c_{фx}<0$, т. е. фазовая скорость $\mathbf{c}_ф$ всегда направлена на запад (см. выше раздел 1). Меридиональный же компонент фазовой скорости $c_{фy}$ может принимать любой знак.

Зависимость модуля фазовой скорости $|\mathbf{c}_ф|$ от волнового вектора $\mathbf{k}$ означает, что волны Россби являются диспергирующими. Известно, что для таких волн фундаментальное значение имеет понятие групповой скорости (см. главу 1)

$$\mathbf{c}=(\partial\sigma/\partial k_x,\ \partial\sigma/\partial k_y)_{\mathbf{k}=\left(k_x^0,\ k_y^0\right)}. \tag{6.158}$$

Подставляя (6.155) в (6.158), находим компоненты групповой скорости волн Россби:

$$c^x_{гр}=\frac{\partial\sigma}{\partial k_x}=\beta\frac{k_x^2-k_y^2-R_l^{-2}}{\left(k^2+R_l^{-2}\right)^2};\quad c^y_{гр}=\frac{\partial\sigma}{\partial k_y}=2\,\frac{\beta k_x k_y}{\left(k^2+R_l^{-2}\right)^2}. \tag{6.159}$$

Направление групповой скорости для различных волновых векторов удобно определять графически. Допустим, что волна Россби имеет частоту σ. Геометрическое место концов волновых векторов $\mathbf{k}$ на плоскости k_x, k_y, отвечающих этой частоте, — это окружность с центром в точке $(-\beta/(2\sigma),\ 0)$, имеющая радиус, равный $[\beta^2/(4\sigma^2)-R_l^{-2}]^{1/2}$ и изображенная на рис. 6.7. Направление групповой скорости, соответствующее волновому вектору **k**, совпадает с направлением вектора **WO**, изображенного на рис. 6.7. Заметим, что групповая скорость волн Россби, в отличие от фазовой, может иметь произвольное направление. Иными словами, энергия волн Россби может распространяться в любом направлении, хотя их фаза всегда распространяется к западу.

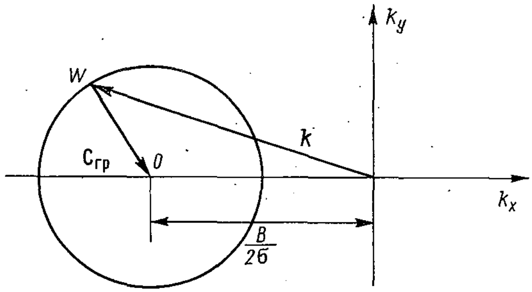


Рис. 6.7. Окружность, на которой располагаются концы волновых векторов $\mathbf{k}=(k_x,\ k_y)$, соответствующих заданной частоте σ согласно дисперсионному соотношению (6.155).

$c_{гр}$ — вектор групповой скорости.

4. Волны Россби в однородном океане переменной глубины. Рассмотрим теперь океан переменной глубины, когда $h\neq 0$ в (6.151). Перепишем (6.151) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\psi-R_l^{-2}\psi)+J(\psi,\ B)=0;\quad B(x,\ y)=f_0+\beta y+\frac{f_0 h}{H}. \qquad (6.159')$$

Якобиан $J(\psi,\ B)=u\,\partial B/\partial x+v\,\partial B/\partial y$ нетрудно преобразовать к виду $J(\psi,\ B)=|\nabla B|v_n$, где v_n — скорость, направленная перпендикулярно изолиниям функции $B(x,\ y)$ в сторону увеличения B. Введем смещение η_n вдоль ∇B, связанное с v_n соотношением $d\eta_n/dt=v_n$. Тогда уравнение (6.159′) можно записать в виде

$$\omega+|\nabla B|\eta_n=\text{const},\quad \omega=\Delta\psi-R_l^{-2}\psi. \qquad (6.160)$$

Уравнение (6.160) аналогично уравнению (6.143), с той разницей, что относительная завихренность ω равна здесь $\Delta\varphi-R_l^{-2}\psi$, а β заменено на ∇B. Согласно (6.160), в каждой жидкой частице сохраняется потенциальная завихренность $\omega+|\nabla B|\eta_n$. Если жидкость движется вдоль изолиний B (которые при $h=0$ совпадают с изолиниями планетарного вихря $y=\text{const}$, а при $\beta=0$ — с линиями равной глубины — изобатами), то $\eta_n=0$, относительная завихренность ω в частицах не меняется и движение стационарно. В случае же, когда частицы пересекают изолинии B, т. е. $\eta_n\neq 0$, их относительная завихренность изменяется во времени, движение становится нестационарным и возможны волновые движения.

Поскольку при малых смещениях η_n справедливо разложение (см. аналогичные рассуждения в п. 1) $B(x, y) = B(x_0, y_0) + |\nabla B| \eta_n + O(\eta_n^2)$, то соотношение (6.160) можно также переписать в виде

$$\omega + B(x, y) = \omega + f + f_0 h/H = \text{const}. \tag{6.160a}$$

Величина (6.160а) называется квазигеострофическим потенциальным вихрем в однородном океане переменной глубины. В силу (6.160а) квазигеострофический потенциальный вихрь сохраняется в каждой жидкой частице.

Для изучения таких волновых движений в максимально простой постановке будем считать ∇h в (6.151) постоянным вектором, что эквивалентно предположению о примерном постоянстве наклона дна на характерном масштабе движения L. Поскольку коэффициенты в (6.151) постоянны, то снова ищем решения вида (6.154) (плоские волны). Подставляя (6.154) в (6.151), находим дисперсионное соотношение

$$\sigma = -\left(k_x \partial B/\partial y - k_y \partial B/\partial x\right)/\left(k^2 + R_l^{-2}\right). \tag{6.161}$$

Если вектор $\mathbf{k}$ перпендикулярен ∇B, то числитель в (6.161) обращается в нуль и частота σ таких волн равна нулю. Это получается в силу поперечности рассматриваемых волн (см. выше): смещения частиц при таком направлении волнового вектора направлены вдоль изолиний B. Максимального значения $\sigma_{\text{макс}}(|\mathbf{k}|)$ для заданного $|\mathbf{k}|$ частота σ достигает при $\mathbf{k}$, параллельном ∇B, когда волны распространяются вдоль изолиний B; в этом случае получаем

$$\sigma_{\text{макс}}(|\mathbf{k}|) = |\nabla B|\,|\mathbf{k}|/\left(k^2 + R_l^{-2}\right). \tag{6.162}$$

Без ограничения общности мы можем направить ось y в направлении ∇B. Дисперсионное соотношение (6.161) тогда перепишется в виде

$$\sigma = -\left(k_x \partial B/\partial y\right)/\left(k^2 + R_l^{-2}\right). \tag{6.163}$$

Нетрудно видеть, что соотношение (6.163) в точности совпадает с дисперсионным соотношением (6.155), если заменить в (6.155) β на $\partial B/\partial y$. Отсюда прямо следует, что все свойства волн Россби в океане постоянной глубины (см. предыдущий раздел) справедливы (с соответствующими изменениями) и для рассматриваемых волн. В частности, из (6.163) сразу следует, что фазовая скорость волны направлена так, что бóльшие значения B находятся справа.

При $h=0$ формула (6.161) переходит в обычное дисперсионное соотношение для волн Россби в океане постоянной глубины. При $\beta=0$ функция B в (6.161) заменяется на величину $f_0 h/H$. Отсюда следует важный вывод, что рассматриваемые волны Россби существуют и в отсутствие β-эффекта. Такие волны называются топографическими волнами Россби. Соотношение (6.163) показывает, что постоянный наклон дна динамически эквивалентен β-эффекту. Эта эквивалентность, однако, имеет место лишь в случае баротропного океана, в бароклинном океане β-эффект и рельеф дна не эквивалентны друг другу (см. [5]).

6.5. Метод контурной динамики

Из теории плоских вихревых движений идеальной несжимаемой жидкости известно, что поле скоростей, индуцируемое любой областью с заданной постоянной завихренностью, фактически определяется только положением границ этой области. Указанное обстоятельство позволяет сводить задачи о динамике однородных вихревых пятен к изучению взаимодействия их контуров. Соответствующий теоретический метод получил название метода контурной динамики (МКД).

Метод возник в начале 70-х годов как обобщение модели «водяного мешка» в теории плазмы. Развернутое изложение вычислительного МКД применительно к плоским задачам гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости было опубликовано в 1979 г. Н. Забуски и др. [19]. Первое приложение к океанологическим модельным задачам (например, о топографическом циклогенезе) с использованием оригинального варианта численного алгоритма МКД принадлежит В. Ф. Козлову [6].

В основу вывода необходимых соотношений метода положим допущения теории мелкой воды без учета вязкости. Для простоты все построения выполним в декартовых координатах. Будем рассматривать движения таких временных и пространственных масштабов в океане, для которых хорошо оправдывается гидростатическое приближение, т. е.

$$\partial p/\partial z = -\rho g, \tag{6.164}$$

заменяющее уравнение движения по вертикали. На поверхности океана $z=\eta_1(x, y, t)$ (вертикальная ось Oz направлена вверх) динамическое граничное условие имеет вид

$$p = p_a(x, y, t), \quad z = \eta_1, \tag{6.165}$$

где p_a — заданное атмосферное давление. Принимая плотность морской воды постоянной, $\rho=\rho_0=\mathrm{const}$, и интегрируя (6.164) при условии (6.165), получим:

$$p = \rho_0 g(\eta - z), \tag{6.166}$$

где $\eta=\eta_1+p_a/(\rho_0 g)$ есть возвышение так называемого приведенного уровня. Из (6.166) следует, что горизонтальный градиент давления $\nabla p=\rho_0 g \nabla \eta$ и, следовательно, горизонтальные ускорения не зависят от вертикальной координаты. Естественно допустить, что таким же свойством должны обладать горизонтальные скорости, что позволяет упростить уравнения горизонтального движения к виду

$$du/dt - fv = -g\,\partial\eta/\partial x; \tag{6.167}$$

$$dv/dt + fu = -g\,\partial\eta/\partial y, \tag{6.168}$$

где $f(y)$ — параметр Кориолиса и принято обозначение для горизонтальной полной производной $d/dt = \partial/\partial t + u\,\partial/\partial x + v\,\partial/\partial y$.

Исключая из (6.167) и (6.168) наклоны уровня и принимая во внимание уравнение неразрывности

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0,$$

получим уравнение вихря

$$d(\omega + f)/dt - (\omega + f)\,\partial w/\partial z = 0, \tag{6.169}$$

где $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ представляет вертикальную проекцию вектора вихря, которая также не зависит от вертикальной координаты.

Используем теперь кинематические граничные условия на поверхности и на дне $z = -h(x, y)$:

$$w = d\eta_1/dt,\quad z = \eta_1; \tag{6.170}$$

$$w = -dh/dt,\quad z = -h. \tag{6.171}$$

Интегрируя (6.169) по всей толщине океана и учитывая условия (6.170) и (6.171), получим фундаментальное соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\omega + f}{h + \eta_1}\right) = 0, \tag{6.172}$$

известное как закон сохранения потенциального вихря.

Вводя рельеф дна $\tilde{h}(x, y)$, примем $h = h_0 - \tilde{h}$ и воспользуемся приближением бета-плоскости $f = f_0 + \beta y$. Учитывая естественные условия $|\eta_1| \ll h_0$, $|\tilde{h}| \ll h_0$, приближенно имеем

$$(\omega + f)/(h + \eta_1) \approx f_0/h_0 + \tilde{\zeta}/h_0,$$

где

$$\tilde{\zeta} = \omega + \beta y + (f_0/h_0)\,[\tilde{h} + p_a/(\rho_0 g) - \eta] \tag{6.173}$$

представляет переменную часть потенциального вихря. Таким образом, (6.172) можно переписать в виде

$$d\tilde{\zeta}/dt = 0. \tag{6.174}$$

Как известно, для малых чисел Россби $\mathrm{Ro} = V/(Lf_0)$ (V, L — характерные масштабы скорости и длины) справедливо вытекающее из (6.167) и (6.168) геострофическое приближение

$$u = -(g/f_0)\,\partial\eta/\partial y;\quad v = (g/f_0)\,\partial\eta/\partial x,$$

откуда следуют соотношения

$$u = -\partial\psi/\partial y;\quad v = \partial\psi/\partial x, \tag{6.175}$$

где введена функция тока $\psi = g\eta/f_0$.

Выражение (6.173) в геострофическом приближении принимает вид

$$\tilde{\zeta} = \Delta\psi - [f_0^2/(gh_0)]\,\psi + \beta y + (f_0/h_0)\,[\tilde{h} + p_a/(\rho_0 g)]. \qquad (6.176)$$

Переходя к безразмерным переменным с помощью соотношений

$x,\ y = L(x^*,\ y^*),\quad t = (L/V)\,t^*,\quad \psi = VL\psi^*,\quad \tilde{h} = \tilde{h}_0\tilde{h}^*,\quad p_a = p_a p_a^*,$ $\tilde{\zeta} = (V/L)\,\zeta^*$ и опуская в дальнейшем «*», вместо (6.176) получим выражение

$$\tilde{\zeta} = \Delta\psi - k^2\psi + \varphi(x,\ y,\ t), \qquad (6.177)$$

где $\varphi = by + \sigma\tilde{h} + \sigma_a p_a$ — заданная функция. Введем безразмерные параметры

$$k = f_0 L/\sqrt{gh_0};\ b = \beta L^2/V;\ \sigma = \tilde{h}_0/(h_0\mathrm{Ro});\ \sigma_a = p_a/(\rho_0 g h_0 \mathrm{Ro}),$$

имеющие следующий смысл: k — отношение характерного горизонтального размера к внешнему радиусу деформации $Rd = \sqrt{gh_0}/f_0$, b — планетарный параметр, σ — топографический параметр, σ_a — барический параметр. Соотношения (6.174) и (6.175) сохраняют свой вид в безразмерных переменных.

Если $k^2 \ll 1$ и внешние воздействия отсутствуют ($\varphi \equiv 0$), соотношение (6.177) упрощается к виду $\tilde{\zeta} = \Delta\psi = \omega$, т. е. потенциальный вихрь практически совпадает с относительным вихрем, а уравнение (6.174) переходит в известное соотношение теории плоских течений невращающейся идеальной несжимаемой жидкости, представляющей хорошо разработанную главу классической гидродинамики. Это обстоятельство позволяет давать обоснованную океанологическую интерпретацию многим гидродинамическим результатам, в том числе и в части применения МКД.

Для применения МКД задачу определения функции тока ψ удобно переформулировать как интегродифференциальную. Полагая для простоты $k = 0$, предположим, что в плоскости $(x,\ y)$ потенциальный вихрь имеет вид

$$\tilde{\zeta} = \tilde{\zeta}_0 + \omega(x,\ y,\ t), \qquad (6.178)$$

где $\tilde{\zeta}_0$ — некоторая постоянная, а функция ω — конечна, т. е. отлична от нуля лишь в некоторой ограниченной области S. Переписывая (6.177) в виде

$$\Delta\psi = \zeta_0 - \varphi + \omega, \qquad (6.179)$$

будем рассматривать это соотношение как уравнение относительно функции тока. Для его общего решения справедливо представление

$$\psi = \psi_0 + \iint_S G(R)\,\omega(\xi,\ \chi,\ t)\,d\xi\,d\chi, \qquad (6.180)$$

где «внешнее» поле $\psi_0(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению $\Delta\psi_0 = \tilde{\zeta}_0 - \varphi$, $R = [(x-\xi)^2 + (y-\chi)^2]^{1/2}$ и функция Грина имеет вид

$$G(R) = [1/(2\pi)] \ln R. \tag{6.181}$$

Очевидно, в силу (6.174) имеет место закон сохранения

$$d\omega/dt = 0, \tag{6.182}$$

который с учетом (6.175) и (6.180) можно рассматривать как интегродифференциальное уравнение относительно завихренности ω.

Теперь сделаем основное предположение, позволяющее свести задачу к изучению эволюции некоторых контуров. Пусть в начальный момент времени ω имеет постоянное значение ω_0 в односвязной области $S(t)$ с границей $c(t)$ и тождественно равно нулю вне S. Благодаря (6.182) это свойство сохраняется в последующем. Выражение (6.180) принимает вид

$$\psi = \psi_0 + \omega_0 \iint\limits_S G\, d\xi\, d\chi. \tag{6.183}$$

Движение определяющих контур жидких частиц с лагранжевыми координатами (x, y) описывается уравнениями

$$dx/dt = u; \quad dy/dt = v, \tag{6.184}$$

где правые части выглядят особенно просто в рассматриваемом случае, когда функция Грина зависит только от разностей $x-\xi$, $y-\chi$ (инвариантность свойств системы относительно сдвигов в пространстве). Так как при этом $G_x = -G_\xi$ и $G_y = -G_\chi$, из соотношений (6.175) и (6.183) с помощью теоремы Стокса получаем

$$u = u_0 - \omega_0 \oint\limits_c G(R)\, d\xi; \quad v = v_0 - \omega_0 \oint\limits_c G(R)\, d\chi, \tag{6.185}$$

где $u_0 = -\partial\psi_0/\partial y$, $v_0 = \partial\psi_0/\partial x$ представляют «внешнее» поле скорости. Формулы (6.185) дают т е о р е т и ч е с к у ю о с н о в у МКД, показывая, что поле скорости однозначно определяется положением жидкого контура $c(t)$, разделяющего области с однородным распределением завихренности и на котором скачком изменяется $\tilde{\zeta}$. Соотношения (6.184) и (6.185) по существу представляют систему интегродифференциальных уравнений, для решения которых используются как аналитические (например, метод возмущений), так и численные методы. Различные численные реализации МКД отличаются друг от друга лишь способами аппроксимации контура $c(t)$, выбором квадратурных формул и численными схемами, с помощью которых осуществляется переход к следующему временному слою.

При $k > 0$ функция Грина в (6.183) и (6.185) имеет вид

$$G(R) = -[1/(2\pi)]\, \mathrm{K}_0(kR), \tag{6.186}$$

где Ko — функция Макдональда, имеющая, как и (6.181), логарифмическую особенность при $R \to 0$ [именно, $RG'(R) \to 1/(2\pi)$] и экспоненциально затухающая при $R \to \infty$.

Если точка наблюдения (x, y) расположена на контуре, подынтегральные функции в (6.185) имеют логарифмические особенности, которые можно устранить интегрированием по частям. Опуская для простоты внешнее поле, из (6.185) находим:

$$u = \omega_0 \oint_c RG'(R)(\xi - x)\Phi\, d\nu; \quad v = \omega_0 \oint_c RG'(R)(\eta - \chi)\Phi\, d\nu, \tag{6.187}$$

где

$$\Phi = d(\ln R)/d\nu = (1/R^2)[(\xi - x)\dot{\xi} + (\chi - y)\dot{\chi}].$$

Воспользуемся параметрическим представлением контура $c: \xi = \xi(\nu)$, $\chi = \chi(\nu)$. Так как при $(\xi, \chi) \to (x, y) \in c$ в пределе $\lim (\xi - x)\Phi = \dot{\xi}$ и $\lim (\chi - y)\Phi = \dot{\chi}$, подынтегральные функции в (6.187) не имеют особенностей.

Другой прием основан на применении тождества $RG' = \frac{1}{2\pi} + \left(RG' - \frac{1}{2\pi}\right)$ и легко проверяемых соотношений

$$(\xi - x)\Phi = \dot{\xi} + (\chi - y)\varkappa, \quad (\eta - \chi)\Phi = \dot{\chi} - (\xi - x)\varkappa,$$

где

$$\varkappa = \frac{d}{d\nu} \operatorname{arctg} \frac{\chi - y}{\xi - x} = \frac{1}{R^2}[(\xi - x)\dot{\chi} - (\chi - y)\dot{\xi}].$$

В результате из (6.187) получаются выражения

$$u = [\omega_0/(2\pi)] \oint_c (\chi - y)\varkappa\, d\nu + \omega_0 \oint_c \left(RG' - \frac{1}{2\pi}\right)(\xi - x)\Phi\, d\nu;$$

$$v = -[\omega_0/(2\pi)] \oint_c (\xi - x)\varkappa\, d\nu + \omega_0 \oint_c \left(RG' - \frac{1}{2\pi}\right)(\chi - y)\Phi\, d\nu.$$

Поскольку $\lim\limits_{(\xi, \chi) \to (x, y) \in c} \varkappa \quad (\dot{\xi}\ddot{\chi} - \dot{\chi}\ddot{\xi})/2(\dot{\xi}^2 + \dot{\chi}^2)$, все подынтегральные функции в этих формулах в точке наблюдения обращаются в нуль. Особенно просто они выглядят для логарифмической функции Грина (6.181):

$$u = [\omega_0/(2\pi)] \oint_c (\chi - y)\varkappa\, d\nu; \quad v = -[\omega_0/(2\pi)] \oint_c (\xi - x)\varkappa\, d\nu. \tag{6.188}$$

Все приведенные выше интегральные формулы для скоростей остаются справедливыми для многосвязных областей и совокупности отдельных областей, т. е. фактически описывают взаимодействие произвольной системы распределенных вихрей с одинаковыми потенциальными завихренностями. Изложенная схема без труда обобщается на случай произвольного кусочно-постоянного распределения завихренности. Например, при наличии M контуров c_j, $j=\overline{1, M}$ со скачками завихренности $[\omega]_j$ при переходе через соответствующий контур справа налево (напомним, что на каждом контуре положительное направление обхода выбирается против часовой стрелки), формулы для скоростей типа (6.185) в векторной форме записи принимают вид

$$\mathbf{V}(x, y, t)=\mathbf{V}_0(x, y, t)-\sum_{j=1}^{M}[\omega]_j \int_{c_j} G(R)\, d\mathbf{S}. \tag{6.189}$$

В заключение этого раздела рассмотрим теоретические основы МКД для задач с граничными условиями периодичности. Пусть в некоторой области S с границей c из полосы $0 \leqslant x \leqslant L$ потенциальная завихренность отлична от нуля и постоянна $(\widetilde{\zeta}=\omega_0)$. Продолжая эту область вдоль оси x вправо и влево с периодом L, получим периодическую структуру, естественным образом приводящую при $k=0$ к функции Грина:

$$\widetilde{G}(x, y)=\frac{1}{4\pi} \ln\left(\operatorname{ch}\frac{2\pi y}{L}-\cos\frac{2\pi x}{L}\right). \tag{6.190}$$

При отсутствии внешнего поля функция тока имеет вид

$$\psi=\omega_0 \iint_{S(t)} \widetilde{G}(\xi-x, \chi-y)\, d\xi\, d\lambda.$$

Для скоростей аналогично (6.185) получаем

$$u=-\omega_0 \oint_c \widetilde{G}(\xi-x, \chi-y)\, d\xi; \quad v=-\omega_0 \oint_c G(\xi-x, \varkappa-y)\, d\chi. \tag{6.191}$$

Если завихренные области S непрерывно переходят одна в другую (бесконечная криволинейная полоска), в формулах (6.191) интегралы по вертикальным участкам $c(t)$ в сечениях $\xi=0$ и $\xi=L$ в силу периодичности взаимно уничтожаются. Обозначим через c_1 и c_2 криволинейные участки границы c с выбранным положительным направлением слева направо, тогда вместо (6.191) находим

$$u=-\omega_0\left[\int_{c_1} G(\xi-x, \chi-y)\, d\xi-\int_{c_2} G(\xi-x, \chi-y)\right] d\xi; \tag{6.192}$$

$$v=-\omega_0\left[\int_{c_1} G(\xi-x, \chi-y)\, d\chi-\int_{c_2} G(\xi-x, \chi-y)\right] d\chi. \tag{6.193}$$

Эти формулы описывают поле скоростей, индуцируемое периодическим сдвиговым слоем.

С помощью МКД удается решить многие модельные задачи, представляющие большой теоретический и практический интерес, а именно: определение нелинейной неустойчивости различных стационарных состояний, включая возможный механизм развития грибовидных течений; изучение влияния топографии дна на динамику распределенных вихрей; исследование эволюции фронтов потенциальной завихренности, а также определение структурных переходов сдвиговых слоев и формирования вихрей закручивания на фронтальных разделах; обобщение на случай квазигеострофических двухслойных моделей с приложениями к топографическому циклогенезу и т. д. [7, 8].

Вопросы для самопроверки

1. Почему определяющее влияние на динамику синоптических движений оказывает возмущение плотности ρ', а не среднее, равновесное значение плотности ρ_S, которое значительно больше, т. е. $\rho_S \gg \rho'$?

2. Можно ли использовать квазигеострофическое приближение вблизи экватора?

3. Может ли баротропная модель быть вихреразрешающей? Если может, то при каком условии?

4. Почему эксперименты с вихреразрешающими моделями не доводятся до стационарного режима, а лишь до статистически стационарного? В чем их отличие?

5. Укажите в уравнениях квазигеострофической модели нелинейные члены. Каков их физический смысл?

6. Что такое доступная потенциальная энергия?

7. Почему в двухслойной квазигеострофической модели доступная потенциальная энергия определяется для всей толщи, в то время как кинетическая энергия — для каждого слоя в отдельности?

8. Может ли зонально осредненная квазигеострофическая модель быть вихреразрешающей?

9. Можно ли в квазигеострофической однослойной (баротропной) модели задать произвольным образом значение функции тока на твердом контуре:

а) для замкнутого бассейна;

б) для зонального канала?

10. Тот же вопрос для двухслойной модели.

11. Откуда вихри черпают свою энергию?

12. Справедливо ли утверждение «западные течения в океане более неустойчивы, чем восточные»? Если да, то откуда это следует?

13. Объясните смысл термина «устойчивое (неустойчивое) течение».

14. Что такое бароклинная и баротропная неустойчивость?

15. Что такое квазигеострофический потенциальный вихрь?

16. Почему понятие потенциального вихря так важно в динамической океанологии?

17. Зачем применяется запись боковой вязкости в вихреразрешающих экспериментах в виде эллиптического оператора высокого порядка?

18. Если на нижний слой двухслойной квазигеострофической модели ветер непосредственно не действует, то в результате действия каких сил возникает движение в нижнем слое?

19. Почему доступная потенциальная энергия в океане много меньше потенциальной?

20. Может ли кинетическая энергия вихрей превосходить кинематическую энергию крупномасштабного течения?

21. Почему среднезональная меридиональная скорость в квазигеострофической модели $\overline{v_i} = 0$?

22. Почему в формуле (6.92) перед коэффициентом A_4 стоит знак «—», а перед коэффициентами A_H и A_6 в формулах (6.91) и (6.93) — знак «+»?

23. Покажите, что $J(\psi_1 - \psi_2, \psi_{3/2}) = J(\psi_1, \psi_2)$.

24. Из какого физического закона следует, что $\int\limits_S w_{3/2} dS = 0$ для рассматриваемой двухслойной квазигеострофической модели?

25. Согласно энергетической диаграмме вихреразрешающей модели (рис. 6.2) единственным внешним источником является ветер. При этом приток энергии происходит только в среднюю кинетическую энергию верхнего слоя. Что необходимо сделать, чтобы внешний приток энергии происходил также:

а) в вихревую кинетическую энергию верхнего слоя;

б) в доступную потенциальную энергию?

26. Какие физические факторы обусловливают существование волн Россби?

27. С какой точностью решение для сферической волны Россби (6.135) удовлетворяет системе уравнений (6.128), (6.129)?

28. Как по известной функции полных потоков ψ определить горизонтальные скорости u, v и давление p в сферической волне Россби?

29. Как относятся частоты волн Россби σ и угловая скорость вращения Земли 2Ω?

30. Могут ли волны Россби существовать: а) на невращающейся Земле; б) во вращающемся с постоянной угловой скоростью плоском слое жидкости?

31. Как связаны изменения относительной и планетарной завихренности в жидких частицах при их смещениях, вызванных волнами Россби?

32. Объясните природу физического механизма существования волн Россби с помощью схемы, изображенной на рис. 6.5.

33. Может ли фазовая скорость волн Россби быть направлена на восток?

34. Для каких пространственных масштабов движения справедливо приближение β-плоскости? Чем оно отличается от приближения f-плоскости?

35. Какой физический смысл имеют граничные условия (6.148) на поверхности и на дне океана?

36. Почему можно пренебречь нестационарными членами du/dt, dv/dt в уравнениях движения (6.145 а, б)?

37. Чем отличаются уравнения потенциального вихря для океана со свободной поверхностью от уравнений для океана с твердой крышкой на поверхности? При каком условии применимо приближение твердой крышки?

38. Почему волны Россби являются поперечными? Покажите это.

39. Почему волны Россби являются диспергирующими?

40. Каков физический смысл групповой скорости?

41. Совпадает ли направление групповой скорости волн Россби с направлением фазовой? Может ли групповая скорость волн Россби быть направлена на восток?

42. Как должны двигаться жидкие частицы в волнах Россби, распространяющихся в океане переменной глубины, относительно изолиний функции $B(x, y) = f_0 + \beta y + f_0 h/H$?

43. Могут ли в океане переменной глубины существовать волны Россби в отсутствие β-эффекта?

44. Как направлена фазовая скорость волн Россби в океане переменной глубины?

45. Почему можно утверждать, что наблюдаемые океанские синоптические движения являются волнами Россби?

Типовые упражнения

1. Выведите уравнения трехслойной квазигеострофической модели:

а) для бассейна с плоским дном;

б) для бассейна с произвольной топографией.

2. Выведите уравнения энергетического баланса для трехслойной квазигеострофической модели. Составьте энергетическую диаграмму.

3. Выведите уравнение для квазигеострофической потенциальной энстрофии для двух- и трехслойной квазигеострофической модели. Составьте соответствующую диаграмму (аналогично энергетической).

4. Выведите соотношения для интегрального (по площади замкнутого бассейна) баланса квазигеострофического потенциального вихря трехслойной квазигеострофической модели.

5. Решите упражнения 2—4, используя выражения для боковой вязкости в виде $F_i = A_6 \nabla^8 \psi_i$ [см. (6.93)].

6. Выведите выражение для вертикальной скорости на нижней границе экмановского поверхностного слоя.

7. Введите характерные масштабы некоторого крупномасштабного течения. Покажите, что в основной части такого течения относительный вихрь много меньше планетарного.

8. Выведите уравнение для квазигеострофического потенциального вихря для стационарного течения невязкой жидкости без внешнего возбуждения. Что можно сказать о зависимости квазигеострофического потенциального вихря от функции тока?

9. Выведите уравнение для вихревой квазигеострофической потенциальной энстрофии для нестационарного тангенциального напряжения ветра. Появляются ли дополнительные члены (по сравнению со стационарным возбуждением)? Если да, то объясните их физический смысл.

10. Предполагая, что боковая вязкость соизмерима с остальными членами уравнения баланса КПВ, определите характерные значения A_H, A_4, A_6 в формулах (6.91)—(6.93) для бассейна с характерным горизонтальным масштабом $L = 5 \cdot 10^7$ см.

11. Выведите уравнение вихря (6.142) на f-плоскости.

12. Выведите дисперсионное соотношение (6.155′) для волн Россби в однородном океане в приближении твердой крышки.

13. Получите выражение для максимальной частоты баротропных волн Россби при заданном волновом числе k_y.

14. Выведите выражения (6.157) для компонентов фазовой скорости плоской волны.

15. Получите уравнение для волн Россби в стратифицированном океане.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ БАРОКЛИННОГО ВОЗМУЩЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДВУХСЛОЙНОЙ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКОЙ ВИХРЕРАЗРЕШАЮЩЕЙ МОДЕЛИ

Используем двухслойную квазигеострофическую вихреразрешающую модель Холланда [18], обсужденную в разделе 6.3, для численного моделирования эволюции бароклинного возмущения. Цель работы состоит в том, чтобы, интегрируя по времени уравнения модели, проследить, как будет эволюционировать, перемещаться, терять доступную потенциальную энергию (ДПЭ) возмущение, заданное в поле функции тока (например, циклонический синоптический вихрь).

Уравнения модели, ее параметры и метод решения. Запишем исходную систему уравнений двухслойной квазигеострофической модели (все обозначения см. в разделе 6.3):

$$\partial(\nabla^2\psi_1)/\partial t = J(f+\nabla^2\psi_1,\ \psi_1) - (f_0/H_1)\,w_{3/2} + A_H\nabla^4\psi_1. \qquad (6.194)$$

$$\partial(\nabla^2\psi_2)/\partial t = J(f+\nabla^2\psi_2,\ \psi_2) + (f_0/H_2)\,w_{3/2} + A_H\nabla^4\psi_2; \qquad (6.195)$$

$$\partial(\psi_1-\psi_2)/\partial t = J(\psi_1-\psi_2,\ \psi_{3/2}) - (g'/f_0)\,w_{3/2}. \qquad (6.196)$$

Запишем уравнение Пуассона для баротропной моды $\Phi = (H_1\psi_1 + H_2\psi_2)H^{-1}$:

$$\nabla^2\chi = \mu_{\text{бт}}, \qquad (6.197)$$

где

$$\chi = \partial\Phi/\partial t; \qquad (6.198)$$

$$\mu_{\text{бт}} = (H_1/H)\,J(f+\nabla^2\psi_1,\ \psi_1) + (H_2/H)\,J(f+\nabla^2\psi_2,\ \psi_2) + \\ + (H_1A_H/H)\,\nabla^4\psi_1 + (H_2A_H/H)\,\nabla^4\psi_2. \qquad (6.199)$$

Для уравнения (6.197) на твердом замкнутом контуре Г зададим краевое условие:

$$\chi\,|_{\Gamma} = 0. \qquad (6.200)$$

Таким образом, из (6.197)—(6.200) по известным значениям ψ_n ($n=1$, 2 — номер слоя) с предыдущего шага по времени можно найти значения Φ в следующий момент времени.

Запишем уравнение для бароклинной моды $\theta = \psi_1 - \psi_2$:

$$(\nabla^2 - \lambda^2)\,\varphi = \mu_{\text{бркл}}, \qquad (6.201)$$

где

$$\varphi = \partial\theta/\partial t; \qquad (6.202)$$

$$\lambda^2 = f_0^2H/(H_1H_2g'); \qquad (6.203)$$

$$\mu_{\text{бркл}} = J(f+\nabla^2\psi_1,\ \psi_1) - J(f+\nabla^2\psi_2,\ \psi_2) - \\ - \lambda^2J(\psi_1-\psi_2,\ \psi_{3/2}) + A_H\nabla^4\psi_1 - A_H\nabla^4\psi_2. \qquad (6.204)$$

Уравнение (6.201) является уравнением Гельмгольца.

Краевые условия для φ должны задаваться так, чтобы выполнялось условие неразрывности, т. е.

$$\int_S w_{3/2}\,dS = 0, \qquad (6.205)$$

где S — область решения.

Чтобы удовлетворить этому условию, будем искать φ в виде

$$\varphi = \varphi_1 + c(t)\,\varphi_2, \qquad (6.206)$$

где

$$(\nabla^2-\lambda^2)\varphi_1=\mu_{\text{бркл}},\quad \varphi_1|_\Gamma=0; \tag{6.207}$$

$$(\nabla^2-\lambda^2)\varphi_2=0,\quad \varphi_2|_\Gamma=1. \tag{6.208}$$

Здесь $c(t)$ определяется следующим образом:

$$c(t)=-\int_S\varphi_1\,dS\Big/\int_S\varphi_2\,dS. \tag{6.209}$$

Таким образом определяется бароклинная мода θ в следующий момент времени. Затем легко находятся новые значения ψ_1 и ψ_2:

$$\psi_1=\Phi+(H_2/H)\theta; \tag{6.210}$$

$$\psi_2=\Phi-(H_1/H)\theta. \tag{6.211}$$

Далее процесс интегрирования по времени продолжается аналогичным образом. Вертикальная скорость рассчитывается из уравнения (6.196).

Отметим, что в правые части (6.194), (6.195) входит бигармонический оператор $\nabla^4\psi_n$. Он требует постановки дополнительных краевых условий, в данном случае — условия свободного скольжения:

$$\partial^2\psi_i/\partial x_n^2|_\Gamma=0, \tag{6.212}$$

где x_n — нормаль к границе.

При конечно-разностном представлении уравнений модели бигармонический оператор $\nabla^4\psi_n$ запишем в виде $\nabla^2(\nabla^2\psi_n)$, где оператор Лапласа ∇^2 расписывается по обычной пятиточечной схеме (центральными разностями). Операторы Якоби запишем по схеме Аракавы [17], сохраняющей завихренность, энстрофию и кинетическую энергию, что важно для решаемой задачи. Эта схема дается в приложении. Там же представлена схема решения уравнений Пуассона (6.197) и Гельмгольца (6.199) методом последовательной верхней релаксации [15, 17].

Временная экстраполяция, в соответствии с [11], осуществляется по схеме центральных разностей для адвективных и кориолисовых членов (эти члены объединены в операторах Якоби). Для таких членов схема центральных разностей является условно устойчивой, т. е. устойчивой для сравнительно небольших шагов по времени. Для членов диффузионного типа, описывающих боковую вязкость, схема центральных разностей является абсолютно неустойчивой, поэтому для них используется схема Эйлера (схема «шагов вперед»). Эта комбинация схем является обычной для такого рода задач. Для уравнения

$$du/dt=f_1(u,\ t)+f_2(u,\ t), \tag{6.213}$$

где f_1 — адвективные и кориолисовы члены; f_2 — диффузионные члены, комбинированная схема имеет вид

$$u^{(m+1)} = u^{(m-1)} + 2\,\Delta t\left(f_1^{(m)} + f_2^{(m-1)}\right), \tag{6.214}$$

где $m-1$, m, $m+1$ — последовательные временные уровни; Δt — шаг по времени.

Хорошо известно, что при применении схемы центральных разностей для интегрирования по времени можно получить «расщепление» решений по времени. Во избежание этого периодически (каждые 20 шагов по времени) используется схема Мацуно. Для уравнения $du/dt = f(u, t)$ эта схема имеет вид

$$u^{(m+1)*} = u^{(m)} + \Delta t f^{(m)}; \tag{6.215}$$

$$u^{(m+1)} = u^{(m)} + \Delta t f^{(m+1)*}, \tag{6.216}$$

где

$$f^{(m+1)*} \equiv f\left(u^{(m+1)*},\ (m+1)\,\Delta t\right).$$

В этой схеме первый шаг делается по обычной схеме Эйлера. Величина u, полученная для $(m+1)$-го шага, затем используется для определения значения $f^{(m+1)*}$, которое необходимо для пересчета $u^{(m+1)}$ по неявной схеме.

Отметим, что алгоритм решения задачи представлен в работах [2] и [18].

Задача решается для прямоугольного бассейна с плоским дном размером 1000×1000 км. Основные параметры задачи следующие: $f_0 = 8{,}3\cdot10^{-5}$ с$^{-1}$; $b = 2\cdot10^{-11}$ м$^{-1}\cdot$с$^{-1}$; $g' = 0{,}02$ м/с^2; $H_1 = 10^3$ м; $H_2 = 4\cdot10^3$ м; $A_H = 330$ м^2/с. Шаг по пространству $\Delta x = \Delta y = 20$ км. Шаг по времени $\Delta t = 2$ ч.

Удобно для решения задачи использовать массив точек (i, j) размером 53×53. Тогда, например, точки с индексами $(2, j)$ и $(52, j)$ будут лежать на западной и восточной границах области, точки с $(3, j)$ по $(51, j)$ — внутри области, а точки $(1, j)$ и $(53, j)$ — за границами области. Заграничные точки нужны для реализации дополнительного краевого условия $\partial^2\psi_n/jx_n^2$ на границе. Для того чтобы это условие выполнялось, например, на западной границе $(2, j)$, необходимо определить значения в слое заграничных точек следующим образом:

$$\psi_n(1,\ j) = 2\psi_n(2,\ j) - \psi_n(3,\ j),\quad n = 1,\ 2. \tag{6.217}$$

Значения $\psi_n(1, j)$ будут использованы при вычислении оператора $\nabla^4\psi_n$ в слое точек $(3, j)$. Операцию присвоения (6.217) необходимо выполнять на каждом шаге по времени.

Начальное поле ψ_n задается в виде

$$\psi_1 = 3000\left\{\exp\left[-\left(\frac{x-X_1}{50}\right)^2-\left(\frac{y-Y}{50}\right)^2\right]- -\exp\left[-\left(\frac{x-X_2}{50}\right)^2-\left(\frac{y-Y}{50}\right)^2\right]\right\}; \quad (6.218)$$

$$\psi_2 = 8000\left\{\exp\left[-\left(\frac{x-X_1}{50}\right)^2-\left(\frac{y-Y}{50}\right)^2\right]- -\exp\left[-\left(\frac{x-X_2}{50}\right)^2-\left(\frac{y-Y}{50}\right)^2\right]\right\}, \quad (6.219)$$

где $X_1=300$ км, $X_2=700$ км, $Y=500$ км.

Таким образом задается пара вихрей циклон — антициклон с центрами в точках (300, 500 км) и (700, 500 км). Здесь расстояния $i\,\Delta x$ и $j\,\Delta y$ отсчитываются от западной и южной границ соответственно.

Интегрирование проводится на период 1—2 мес в зависимости от возможностей компьютера. При решении уравнений Пуассона и Гельмгольца параметр установления $\varepsilon=(\varphi^{(k+1)}-\varphi^{(k)})/\varphi^{(k)}=10^{-3}$ (здесь k — номер итерации).

Порядок выполнения работы

1. Задаются значения параметров и начальные поля ψ_1 и ψ_2. По этим полям определяются начальные поля Φ и θ.

2. Рассчитываются параметры заданной пары вихрей (поле скорости, кинетическая и доступная потенциальная энергия, поле потенциального вихря).

Скорость определяется из соотношений

$$u_n=-\partial\psi_n/\partial y;\quad v_n=\partial\psi_n/\partial x;\quad n=1,\ 2; \quad (6.220)$$

кинетическая энергия —

$$K_n=\frac{H_n}{2}\int\limits_S(\nabla\psi_n)^2\,dS;\quad n=1,\ 2; \quad (6.221)$$

доступная потенциальная энергия —

$$P=\frac{f_0^2}{2g'}\int\limits_S(\psi_1-\psi_2)^2\,dS. \quad (6.222)$$

Потенциальный вихрь q_1 и q_2 определяется формулами (6.37) и (6.38).

3. *Вычисляется φ_2 и находится* $\int\limits_S \varphi_2\,dS$.

4. Делается шаг по времени по схеме Мацуно:

а) для баротропной моды с последующим решением уравнения (6.197) и нахождением $\Phi^{(m+1)}$;

б) для бароклинной моды с последующим решением уравнения (6.201) и нахождением $\theta^{(m+1)}$;

в) находятся $\psi_1^{(m+1)}$ и $\psi_2^{(m+1)}$ по известным Φ и θ.

5. Рассчитываются поля скорости, кинетической и доступной потенциальной энергии, поле потенциального вихря.

6. Выполняются 19 шагов по схеме центральных разностей и далее снова делается шаг по схеме Мацуно.

Форма отчетности. Отчетными материалами являются: описание алгоритма программы, распечатка программы, поля функции тока, скорости, потенциального вихря в начальный момент и через один или два месяца от начала интегрирования, графики временного хода интегральной кинетической и доступной потенциальной энергии, анализ полученных результатов.

Приложение

1. Схема Аракавы для $J(q, \psi)$ имеет вид

$$J(q, \psi) = [1/(12d^2)](J_1 + J_2 + J_3), \tag{6.223}$$

где d — шаг сетки;

$$\begin{aligned} J_1 = {} & (q_{i+1,j} - q_{i-1,j})(\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) - \\ & - (q_{i,j+1} - q_{i,j-1})(\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}); \end{aligned} \tag{6.224}$$

$$\begin{aligned} J_2 = {} & q_{i+1,j}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1}) - q_{i-1,j}(\psi_{i-1,j+1} - \psi_{i-1,j-1}) - \\ & - q_{i,j+1}(\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i-1,j+1}) - q_{i,j-1}(\psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j-1}); \end{aligned} \tag{6.225}$$

$$\begin{aligned} J_3 = {} & q_{i+1,j+1}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i+1,j}) - q_{i-1,j-1}(\psi_{i-1,j} - \psi_{i,j-1}) - \\ & - q_{i-1,j+1}(\psi_{i,j+1} - \psi_{i-1,j}) + q_{i+1,j-1}(\psi_{i+1,j} - \psi_{i,j-1}). \end{aligned} \tag{6.226}$$

Для уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2\psi - b\psi + \sigma(x, y) = 0 \tag{6.227}$$

алгоритм решения методом последовательной верхней релаксации имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{i,j}^{k+1} = \psi_{i,j}^{k} + \frac{1+v}{1+b}\, [& \psi_{i+1,j}^{k} + \psi_{i-1,j}^{k+1} + \psi_{i,j+1}^{k+1} + \\ & + \psi_{i,j-1}^{k} - (4+b)\,\psi_{i,j}^{k} + \sigma_{i,j}]. \end{aligned} \tag{6.228}$$

Здесь k — номер итерации; v — параметр перерелаксации. Естественно, что уравнение Пуассона решается также с помощью (6.228) при $b=0$.

В формуле (6.228) ψ^{k+1} входит в правую часть, и, следовательно, схема похожа на неявную. Однако при каждом обходе сетки ψ^{k+1} в точке (i, j) вычисляется после того, как уже получены значения $\psi_{i,j-1}^{k+1}$ и $\psi_{i-1,j}^{k+1}$, так что весь процесс итерирования оказывается достаточно простым и легко программируется.

Оптимальный коэффициент перерелаксации v определяется в том случае, когда число узлов сетки $(p \times q)$ достаточно велико:

$$\begin{aligned} v = {} & [\sqrt{2} + b/(2\sqrt{2})]^2 - 1 - [\sqrt{2} + b/(2\sqrt{2})] \times \\ & \times \sqrt{b(1+b/8) + [\pi/(p-1)]^2 + [\pi/(q-1)]^2}. \end{aligned} \tag{6.229}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 6

1. Бурков В. А., Кошляков М. Н., Степанов В. Н. Общие сведения о Мировом океане//Океанология. Т. I. Гидрофизика океана.— М.: Наука, 1978.— С. 11—84.

2. Ивченко В. О., Клепиков А. В. Квазигеострофическая модель циркуляции океана с параметрическим учетом мезомасштабных движений//Труды ААНИИ.— 1982.— Т. 387.— С. 36—43.

3. Каменкович В. М. Основы динамики океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1973.— 238 с.

4. Каменкович В. М., Кошляков М. Н., Монин А. С. Синоптические вихри в океане.— Л.: Гидрометеоиздат, 1987.— 512 с.

5. Каменкович В. М., Резник Г. М. Волны Россби//Океанология. Т. 2. Гидродинамика океана.— 1978.— 300 с.

6. Козлов В. Ф. Метод контурной динамики в модельных задачах о топографическом циклогенезе в океане//Изв. АН СССР, ФАО.— 1983.— Т. 19, № 8.— С. 845—854.

7. Козлов В. Ф. Метод контурной динамики в океанологических исследованиях: результаты и перспективы//Морской гидрофиз. журн.— 1985.— № 4.— С. 10—15.

8. Козлов В. Ф., Ярощук Е. В. Численная модель рэлеевской неустойчивости и вихрей закручивания на фронтальных разделах//Океанология.— 1987.— Т. 27, № 1.— С. 12—17.

9. Коротаев Г. К. Структура, динамика и энергетика синоптической изменчивости океана.— Препринт Морского гидрофиз. ин-та АН УССР. Севастополь, 1980.— № 7.— 64 с.

10. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. I/Пер. с англ.— М.: Мир, 1981.— 478 с.

11. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях/Пер. с англ.— Л.: Гидрометеоиздат, 1979.— 138 с.

12. Моделирование циркуляции Южного океана/В. В. Гурецкий, А. И. Данилов, В. О. Ивченко, А. В. Клепиков.— Л.: Гидрометеоиздат, 1987.— 200 с.

13. Монин А. С., Каменкович В. М., Корт В. Г. Изменчивость Мирового океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1974.— 262 с.

14. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика/Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.— 811 с.

15. Роуч П. Вычислительная гидродинамика/Пер. с англ.— М.: Мир, 1980.— 616 с.

16. Сеидов Д. Г. Синергетика океанских процессов.— Л.: Гидрометеоиздат, 1989.— 287 с.

17. Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1968.— 367 с.

18. Holland W. R. The role of mesoscale eddies in the general circulation of the ocean — numerical experiments using a wind-driven quasi-geostrophic model//J. Phys. Oceanogr. 1978.— Vol. 8, N 3.— P. 363—392.

19. Zabusky N. J., Hughes M. H., Roberts K. V. Contour Dynamics for the Euler equations in two dimensions//J. Comput. Phys.— 1979.— Vol. 30, N 1.— P. 96—106.

ГЛАВА 7

ДИНАМИКА КРУПНОМАСШТАБНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ОКЕАНА

7.1. Основные черты крупномасштабной циркуляции океана

В первом приближении движение вод в Мировом океане схематично может быть представлено следующим образом: имеется система субтропических и субполярных круговоротов, в узкой области вдоль экватора расположены экваториальные течения, а Антарктиду опоясывает мощное квазизональное Антарктическое циркумполярное течение (АЦТ). Отличительной чертой круговоротов является так называемая западная интенсификация, т. е. наличие у западных берегов океанов мощных пограничных течений (таких, как Гольфстрим, Куросио, Восточно-Австралийское, Бразильское и др.) при их отсутствии у восточных берегов. Границами раздела субтропических и субполярных круговоротов разного знака вращения (антициклонических и циклонических) в Северном полушарии служат оторвавшиеся от берегов Гольфстрим и Куросио, которые в принципе соответствуют линиям нулевых значений ротора касательных напряжений ветра ($\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}$), или, что то же самое, линиям максимальных значений касательных напряжений зонального ветра. В Южном полушарии субтропические круговороты с южной стороны опоясываются АЦТ, а субполярные круговороты располагаются у берегов Антарктиды к югу от АЦТ, ось которого также соответствует линии максимальных касательных напряжений западного ветра.

Основной вынуждающей силой океанической циркуляции является касательное напряжение ветра. Циркулирующие круговороты, вызванные ветром, охватывают верхний приблизительно километровый слой океана, а АЦТ проникает значительно глубже. На больших глубинах наблюдается медленная термохалинная циркуляция, вызванная разностью в температуре и солености между водами различного происхождения. Вихри синоптического масштаба также играют существенную роль в генерации средних течений в абиссали. Важной чертой ветровых круговоротов является уменьшение их размеров с глубиной, при этом центры круговоротов сдвигаются к линии нулевого $\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}$. Например, субтропический антициклонический круговорот Северного полушария с глубиной смещается к северу, как бы прижимаясь к южной границе субполярного круговорота. Тем самым ветровой круговорот напоминает асимметричную чашу, у которой сторона, соответствующая нулевой линии $\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}$ является крутой, а противоположная — пологой.

В этой главе мы попытаемся с помощью простых качественных моделей объяснить основные особенности и природу глобальной циркуляции Мирового океана. При таком подходе важно установить те принципиальные физические параметры, которые определяют циркуляцию. Одним из таких параметров является плотность. Устойчивая стратификация плотности в океане заставляет частицы жидкости двигаться вдоль поверхностей одинаковой потенциальной плотности (изопикнических поверхностей), поскольку перемещаясь вдоль таких поверхностей частица не совершает работы против силы тяжести. Запишем в общем виде уравнение диффузии потенциальной плотности ρ в стационарном состоянии:

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\rho=\mathcal{F}-\mathcal{D}, \qquad (7.1)$$

где $\mathbf{u}$ — вектор скорости; $\mathcal{F}$ — внешнее воздействие (охлаждение, распреснение и т. п.); $\mathcal{D}$ — эффект мелкомасштабного вихревого перемешивания. Если правая часть (7.1) пренебрежимо мала, что справедливо для основной толщи океанских вод, то можно в первом приближении записать

$$\mathbf{u}\cdot\nabla\rho=0. \qquad (7.2)$$

Отсюда следует, что вектор скорости должен быть перпендикулярен вектору градиента потенциальной плотности. Две близлежащие изопикнические поверхности, естественно, почти эквидистантны. Поэтому вектор $\nabla\rho$ должен быть направлен по нормали к поверхности, т. е. из (7.2) следует, что вектор скорости параллелен изопикнической поверхности.

Другой важный динамический параметр, накладывающий ограничения на движение в океане, связан с вращением и сферичностью Земли — это потенциальный вихрь (завихренность). Выражение для потенциального вихря в квазигеострофическом приближении выведено в предыдущей главе. Здесь мы запишем определение потенциального вихря столбика жидкости, заключенного между изопикническими поверхностями:

$$q=(f+\zeta)/h, \qquad (7.3)$$

где f — параметр Кориолиса, или планетарный вихрь; $\zeta=\partial v/\partial x-\partial u/\partial y$ — вертикальный компонент относительного вихря (здесь u, v — зональный и меридиональный компоненты скорости); h — высота единичного столбика жидкости. Потенциальный вихрь является динамически активной величиной, т. е. он не только определяет циркуляцию, но и зависит от нее.

Важным свойством потенциального вихря является его консервативность, т. е. потенциальный вихрь, присущий столбику жидкости, сохраняется во время любых его перемещений, если генерация и диссипация потенциального вихря пренебрежимо малы, что справедливо для большей части океана вне пограничных слоев у поверхности, дна и берегов. Наглядную интерпретацию этого фундаментального свойства может дать известный из механики закон сохранения момента импульса (M):

$$M = \omega \cdot I, \tag{7.4}$$

где ω — угловая скорость; I — момент инерции. Для цилиндра с бесконечно малыми горизонтальными размерами момент инерции пропорционален площади основания цилиндра или прямо пропорционален объему и обратно пропорционален высоте цилиндра. Но поскольку объем цилиндра сохраняется, то момент импульса прямо пропорционален угловой скорости $(f+\zeta)$ и обратно пропорционален высоте цилиндра (h). Тогда по аналогии с законом сохранения момента импульса следует сохранение потенциального вихря для жидкой частицы:

$$q = (f + \zeta)/h = \text{const}, \tag{7.5}$$

если движущаяся частица не подвержена воздействию внешних сил или мелкомасштабной диссипации. Закон сохранения потенциального вихря можно записать в следующем виде:

$$Dq/Dt = 0, \tag{7.6}$$

где $D/Dt = \partial/\partial t + u\,\partial/\partial x + v\,\partial/\partial y$, а также учтена малость вертикальной адвекции потенциального вихря.

Отметим также другую форму выражения для потенциального вихря. Поскольку h — расстояние между изопикническими поверхностями, которые в океане практически горизонтальны, то можно связать потенциальный вихрь с вертикальным градиентом плотности (формально это можно сделать, введя бесконечно малое приращение плотности $\delta\rho$ и высоты δz и в формуле (7.3) переходя к пределу при $\delta z \to 0$):

$$q = \rho^{-1}(f + \zeta)\,\partial\rho/\partial z. \tag{7.7}$$

Простые и наглядные выражения (7.5) и (7.6) принципиально важны для понимания многих качественных особенностей крупномасштабной циркуляции. Например, можно пренебречь в (7.5) относительным вихрем по сравнению с планетарным, что уместно для океана вне районов струйных течений и прибрежных пограничных слоев. Тогда в Северном полушарии при перемещении частицы жидкости на север f возрастает и из (7.5) сразу следует, что h должна возрастать, т. е. толщина изопикнических слоев должна увеличиваться при продвижении на север, что соответствует наблюдениям. Другой пример. Если жидкость в океане однородна, баротропна, то роль h в (7.5) играет глубина океана с учетом рельефа дна $H(x, y)$. Тогда, опять же пренебрегая относительным вихрем, получим из (7.5), что циркуляция должна следовать изолиниям f/H. Это убедительно подтверждается наблюдениями в районах со слабой стратификацией.

Перепишем (7.6) для стационарного случая:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla q = 0. \tag{7.8}$$

Тогда, как и для поля плотности, частица жидкости должна двигаться вдоль поверхности постоянных значений q по нормали к ∇q, но из (7.2) вектор скорости также должен быть перпендикулярен к $\nabla \rho$. Следовательно, линиями тока в океане должны служить линии пересечения поверхностей равной плотности и равных значений потенциального вихря. Эти линии называются геострофическими изолиниями, или изострофами. Действительно, наблюдения подтверждают, что крупномасштабная циркуляция следует геострофическим изолиниям. Таким образом, теория общей циркуляции океана может базироваться на теории скалярных полей двух величин — q и ρ.

Рассмотрим основные особенности поля потенциального вихря в океане. В ветровых круговоротах изолинии q замкнуты и в целом следуют изолиниям функции тока. Вне «чаши», охваченной ветровой циркуляцией, геострофические изолинии определяются полем планетарного вихря, т. е. они следуют вдоль параллелей и «втыкаются» в берега. Это означает, что среднее течение вдоль таких блокированных изолиний не может быть сильным. В областях замкнутых изолиний q возможны значительные течения. В Южном океане, например, меридиональные барьеры не препятствуют замыканию геострофических изолиний и вдоль них развивается мощное АЦТ с расходом около 130 Св. Важной особенностью поля q в круговоротах является то, что потенциальный вихрь внутри замкнутых геострофических изолиний стремится быть однородным: градиенты q уменьшаются до нуля, поле q «гомогенизируется». При этом области больших градиентов q «вытесняются» к границам круговоротов. Если рассмотреть пару соседних круговоротов (субтропический и субполярный), то в верхней части термоклина значение q в гомогенизированных внутренних областях различно для различных круговоротов. На границе круговоротов в области сильной восточной струи (Гольфстрим, Куросио) имеется область резких градиентов q. Ниже верхнего термоклина q также однороден, но его значение одинаково для обоих круговоротов. В районе восточной струи отсутствуют фронты в поле q, хотя имеются существенные фронты в поле температуры. Все это подтверждают как наблюдения, так и вихреразрешающие расчеты. Гомогенизация поля потенциального вихря внутри круговоротов происходит вследствие воздействия вихревых процессов синоптического масштаба. Как показывают наблюдения и теоретические исследования, синоптические вихри повсеместно переносят потенциальный вихрь по градиенту, тем самым уничтожая разницу в значениях q, гомогенизируя его. Хотя члены, учитывающие вихревые процессы перемешивания q, малы по сравнению с $\mathbf{u} \cdot \nabla q$ и мы пренебрегли ими в правой части уравнения (7.6), но эти процессы действуют систематически, постоянно «разрушая» градиенты q, и они очень важны для понимания природы крупномасштабной циркуляции.

В этой главе мы будем рассматривать динамику общей циркуляции океана с точки зрения поля потенциального вихря. Как правило, мы будем использовать квазигеострофическое приближение, тем самым q будет квазигеострофическим потенциальным вихрем, определение которого дано в предыдущей главе. Будем применять одно- и двухслойные модели для прямоугольных океанических бассейнов с плоским дном, циркуляция в которых возбуждается полем ветра, задаваемым в упрощенном виде. Такие модели наглядны и, как правило, позволяют получить аналитические решения без привлечения сложного математического аппарата. Может возникнуть вопрос — нужны ли в настоящее время такие идеализированные модели? Действительно, сейчас с бурным развитием компьютерной техники можно численно интегрировать полные системы нестационарных уравнений геофизической гидродинамики на длительные сроки с хорошим пространственным разрешением для Мирового океана с реальными очертаниями берегов, донной топографией и реальными внешними силами. Однако в сложных моделях трудно осознать физику процессов в океане, поскольку накладываются и взаимодействуют много различных факторов. Не следует забывать, что такие модели интегрируются численно, а даже самые хорошие современные численные схемы могут вносить искажения в физические процессы. Кроме того, модели глобальной циркуляции сильно зависят от значений коэффициентов вихревой вязкости и диффузии, которые плохо известны, а используемые схемы диффузионной параметризации вихревых потоков не всегда хорошо обоснованы.

Итак, мы будем пытаться выяснить основные закономерности и воспроизвести главные черты ветровой циркуляции с единых позиций, опираясь на особенности динамики потенциального вихря. Поэтому здесь мы не будем рассматривать такие важные, но лежащие за пределами теории геострофических изолиний вопросы, как теория экваториальных течений, диагностические модели и некоторые другие.

7.2. Экмановские пограничные слои

В этом разделе мы кратко рассмотрим основные положения теории пограничных слоев Экмана. Решение задачи Экмана для придонного пограничного слоя изложено в предыдущей главе. Здесь нас прежде всего будут интересовать некоторые общие выводы относительно пограничных слоев у поверхности и дна океана, необходимые для дальнейшего исследования закономерностей крупномасштабной циркуляции океана.

Рассмотрим систему уравнений движения и неразрывности в приближениях Буссинеска, β-плоскости и гидростатики:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv =$$

$$= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} + A_V\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + A_H\nabla^2 u; \qquad (7.9)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + fu =$$

$$= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y} + A_V\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + A_H\nabla^2 v; \qquad (7.10)$$

$$\partial p/\partial z = -g\rho; \qquad (7.11)$$

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \partial w/\partial z = 0. \qquad (7.12)$$

Здесь A_H — коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости; остальные обозначения такие же, как в предыдущей главе.

Граничное условие на поверхности ($z=0$) — условие твердой крышки, т. е. отсутствие вертикальной скорости ($w=0$) и касательные напряжения ветра в виде

$$\rho_0 A_V\, \partial u/\partial z = \tau_x; \quad \rho_0 A_V\, \partial v/\partial z = \tau_y.$$

На плоском дне ($z=-H_0$) задаются условия прилипания ($\mathbf{u}=0$) отсутствия касательных напряжений:

$$\rho_0 A_V\, \partial u/\partial z = 0; \quad \rho_0 A_V\, \partial v/\partial z = 0.$$

Естественно, для замыкания системы (7.9)—(7.12) необходимо уравнение диффузии плотности с соответствующими граничными условиями, однако, поскольку в дальнейшем оно не понадобится, мы его опустим.

Для упрощения системы уравнений введем характерные масштабы U, W для горизонтальной и вертикальной скорости крупномасштабных движений в океане, а также соответствующие горизонтальный и вертикальный масштабы крупномасштабной циркуляции L и H.

Принципиальным моментом при анализе масштабов членов уравнений движения является получение оценки для вертикальной скорости.

Следуя [5], оценим отношение вертикальной скорости к горизонтальной из уравнения неразрывности (7.12):

$$W/U = O\,(H/L). \qquad (7.13)$$

Однако крупномасштабные движения в первом приближении являются геострофическими, а из геострофических соотношений следует, что сумма первых двух членов в (7.12) должна быть существенно меньше любого из этих членов так, что W/U должно быть много меньше H/L. Следовательно, для крупномасштабных движений, определяемых в основном геострофическим балансом, нецелесообразно оценивать вертикальную скорость из уравнения неразрывности.

Оценим отношение W/U из широко используемого при анализе крупномасштабной динамики уравнения для вертикального компонента относительного вихря:

$$\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y,$$

которое нетрудно получить из (7.9) и (7.10), пренебрегая вязкими членами в правых частях этих уравнений:

$$\partial\zeta/\partial t + \mathbf{u}\cdot\nabla\zeta - (\omega_x\,\partial/\partial x + \omega_y\,\partial/\partial y)\,w - (f+\zeta)\,\partial w/\partial z + \beta v = 0. \quad (7.14)$$

Здесь $\omega_x = \partial w/\partial y - \partial v/\partial z$, $\omega_y = \partial u/\partial z - \partial w/\partial x$ — зональный и меридиональный компоненты относительного вихря. Если даже считать справедливой завышенную оценку для вертикальной скорости из уравнения неразрывности, то все равно мы смело можем пренебречь третьим членом в (7.14) по сравнению, например, с адвекцией относительного вихря. Кроме того, мы, как обычно, полагаем, что относительный вихрь существенно меньше планетарного ($\zeta \ll f$). Тогда, сравнивая $f\,\partial w/\partial z$ с адвекцией ζ или с βv, получим две оценки отношения вертикальной скорости к горизонтальной [5]:

$$W/U = O\,[(U/f_0L,\ \beta L/f_0)\,H/L]. \quad (7.15)$$

Безразмерный параметр $U/(f_0L)$ есть число Россби (Ro). Как известно, для крупномасштабных течений в океане $\mathrm{Ro} \ll 1$. Другой безразмерный параметр $\beta_0 = \beta L/f_0$ также является малой величиной. Поскольку $f_0 \approx \beta a$ (a — радиус Земли), то $\beta_0 = \beta L/f_0 \approx L/a \ll 1$. Обозначая отношение вертикального масштаба к горизонтальному $\delta = H/L \ll 1$, запишем:

$$\gamma = W/U = O\,[(\mathrm{Ro},\ \beta_0)\,\delta] \ll H/L. \quad (7.16)$$

Будем рассматривать этот случай как квазигеострофический (см. предыдущую главу).

Переходя к безразмерным переменным [5]:

$$x,\ y = L\,(x^*,\ y^*);\quad z = Hz^*;\quad t = (L/U)\,t^*;$$
$$u,\ v = U\,(u^*,\ v^*);\quad w = \gamma U w^*;\quad p = [\rho_0 f_0 UL]\,p^*;$$
$$\rho = [\rho_0 f_0 UL/(gH)]\,\rho^*,$$

можно переписать уравнения (7.9)—(7.12) в безразмерном виде, для удобства опуская звездочки:

$$\mathrm{Ro}\,(\partial u/\partial t + u\,\partial u/\partial x + v\,\partial u/\partial y) + \mathrm{Ro}\,\delta^{-1}\gamma w\,\partial u/\partial z - v - \beta_0 y v =$$
$$= -\partial p/\partial x + E_V\,\partial^2 u/\partial z^2 + E_H\nabla^2 u; \quad (7.17)$$
$$\mathrm{Ro}\,(\partial v/\partial t + u\,\partial v/\partial x + v\,\partial v/\partial y) + \mathrm{Ro}\,\delta^{-1}\gamma w\,\partial v/\partial z + u + \beta_0 y u =$$
$$= -\partial p/\partial y + E_V\,\partial^2 v/\partial z^2 + E_H\nabla^2 v; \quad (7.18)$$
$$\partial p/\partial z = -\rho; \quad (7.19)$$
$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + \gamma\delta^{-1}\,\partial w/\partial z = 0. \quad (7.20)$$

Здесь

$$E_H = A_H/(f_0L^2);\quad E_V = A_V/(f_0H^2)$$

— горизонтальное и вертикальное числа Экмана, характеризующие масштаб диффузионных членов. Для масштабов океанских течений они малы, хотя, конечно, оценки для A_H и A_V в океане мы знаем лишь очень приблизительно. Таким образом, Ro, β_0, γ, δ, E_H и E_V — малы, и движение, определяемое уравнениями (7.17)—(7.20), будет не только геострофическим, но и горизонтально бездивергентным, т. е. в уравнении неразрывности можно пренебречь членом $\partial w/\partial z$. Однако важный момент заключается в том, что в нашем масштабом анализе H — вся глубина океана. Если же мы будем рассматривать тонкие пограничные слои у поверхности океана, то в них вертикальная диффузия горизонтальной скорости может быть сравнима с ускорением Кориолиса. Это будет происходить при таком вертикальном масштабе D_E, когда вертикальное число Экмана E_V будет порядка единицы. Определим

$$D_E = (2A_V/f_0)^{1/2} \tag{7.21}$$

и назовем эту величину глубиной экмановского пограничного слоя.

Внутри экмановских слоев, как поверхностных, так и придонных, следуя [5], можно выразить горизонтальные составляющие скорости в виде $u+u_E$, $v+v_E$, где u, v — решения системы уравнений (7.17)—(7.20) при малых Ro, β_0, γ, δ, E_H, E_V вдали от поверхности и дна, а u_E, v_E являются решением уравнений

$$-f_0 v_E = A_V\, \partial^2 u_E/\partial z^2; \tag{7.22}$$

$$f_0 u_E = A_V\, \partial^2 v_E/\partial z^2, \tag{7.23}$$

при следующих граничных условиях на поверхности:

$$w = 0;\ \ \rho_0 A_V\, \partial u_E/\partial z = \tau_x;\ \ \rho_0 A_V\, \partial v_E/\partial z = \tau_y \quad \text{при } z = 0, \tag{7.24}$$

и на дне:

$$w = 0,\ \ u_E = -u;\ \ v_E = -v \quad \text{при } z = -H_0. \tag{7.25}$$

Можно решить (7.22) и (7.23) при условии (7.24), используя тот же метод, что и в предыдущей главе, при решении задачи Экмана для придонного слоя, и получить обычные хорошо известные решения для так называемых чисто дрейфовых течений у поверхности океана. Эти решения впервые получил В. Экман в 1902 г. Запишем здесь выражение для вертикально проинтегрированных (по толщине экмановского слоя) решений, т. е. выражение для экмановского полного потока:

$$V_E = -\tau_x/(\rho_0 f_0);\ \ U_E = \tau_y/(\rho_0 f_0). \tag{7.26}$$

Видно, что полный поток чисто дрейфового течения у поверхности направлен под прямым углом к направлению ветра (в Северном полушарии — вправо от направления ветра). Полный перенос пропорционален напряжению ветра и не зависит от величины A_V.

Дивергенция экмановского полного потока у поверхности океана представляет собой вертикальную скорость w_E на нижней границе экмановского слоя. Для w_E тогда можно записать:

$$w_E = \frac{1}{\rho_0 f_0}\left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}\right). \qquad (7.27)$$

Аналогичные выражения можно получить и для экмановского придонного слоя как в случае плоского дна, так и в случае наличия топографии. Эти экмановские вертикальные скорости на внутренних границах поверхностного и придонного слоев очень важны, так как посредством их накладываемые на океан внешние напряжения воздействуют на жидкость вне пограничных слоев, определяя движение во всей толще вод. Далее в этой главе мы будем использовать w_E на нижней границе приповерхностного слоя, называя ее «экмановской накачкой» и задавая в качестве внешнего параметра.

7.3. Баланс Свердрупа

Рассмотрим теперь систему уравнений движения в стационарном состоянии, в котором основной геострофический баланс дополняется членами, учитывающими вертикальную турбулентную вязкость:

$$-fv = -(1/\rho_0)\,\partial p/\partial x + A_V\,\partial^2 u/\partial z^2; \qquad (7.28)$$

$$fu = -(1/\rho_0)\,\partial p/\partial y + A_V\,\partial^2 v/\partial z^2. \qquad (7.29)$$

На поверхности океана ($z=0$) поставим условие твердой крышки ($w=0$) и зададим тангенциальное напряжение ветра:

$$\tau_x = \rho_0 A_V\,\partial u/\partial z; \quad \tau_y = \rho_0 A_V\,\partial v/\partial z.$$

На нижней границе, некоторой неопределенной глубине $z=-D_0$, зададим условия отсутствия вертикальной скорости $w=0$ и горизонтальных градиентов давления $\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$.

Проинтегрируем по вертикали исходную систему уравнений и для исключения градиентов давления продифференцируем (7.28) по y, (7.29) по x, а затем вычтем из второго первое. Тогда с использованием проинтегрированного по вертикали уравнения неразрывности, учитывая, что движение горизонтально бездивергентно, получим:

$$\beta V = \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{\rho_0}\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}. \qquad (7.30)$$

Здесь

$$V = \int_{-D_0}^{0} v\,dz.$$

Выражение (7.30) было получено Х. Свердрупом в 1947 г. и называется соотношением или балансом Свердрупа. Следуя [5], можно показать, что в соотношении Свердрупа полный горизонтальный перенос является суммой геострофического переноса (V_G) и экмановского переноса (V_E).

Экмановский перенос в поверхностном слое имеет вид

$$V_E = -\tau_x/(\rho_0 f); \quad U_E = \tau_y/(\rho_0 f). \tag{7.31}$$

Конвергенция экмановской скорости приводит к направленной вниз вертикальной скорости на нижней границе экмановского слоя. Соответственно дивергенция экмановской скорости приводит к направленной вверх w_E на нижней границе экмановского слоя. Эта «экмановская накачка», как показано в предыдущем разделе, имеет вид

$$w_E = \frac{\partial U_E}{\partial x} + \frac{\partial V_E}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0}\left[\frac{\partial(\tau_y/f)}{\partial x} - \frac{\partial(\tau_x/f)}{\partial y}\right]. \tag{7.32}$$

Хорошо известные выражения для геострофических расходов, полученные интегрированием геострофических соотношений, справедливых в диапазоне глубин от $z=-D_0$ до нижней границы экмановского слоя, можно записать в виде

$$V_G = \frac{1}{f\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad U_G = -\frac{1}{f\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}. \tag{7.33}$$

Перекрестно продифференцируем эти выражения, сложим и получим:

$$f(\partial U_G/\partial x + \partial V_G/\partial y) + \beta V_G = 0. \tag{7.34}$$

Тогда, учитывая, что проинтегрированная по вертикали дивергенция геострофических полных потоков равна вертикальной скорости на нижней границе экмановского слоя, имеем:

$$\beta V_G = f w_E = \frac{f}{\rho_0}\left[\frac{\partial(\tau_y/f)}{\partial x} - \frac{\partial(\tau_x/f)}{\partial y}\right]. \tag{7.35}$$

Теперь, сравнивая соотношения Свердрупа (7.30) с выражением для экмановского полного потока (7.31) и для геострофического переноса (7.35), получим, что действительно

$$V = V_E + V_G.$$

В принципе соотношение Свердрупа можно получить, оценивая масштабы членов в уравнении для потенциального вихря, но при этом было бы трудно показать, что общий свердруповский перенос является суммой геострофического и экмановского переносов.

Таким образом, из баланса Свердрупа видно, что в океане, динамика которого определяется соотношением (7.28) и (7.29), полный поток в меридиональном направлении зависит от ротора касательного напряжения ветра.

Рассмотрим циркуляцию в прямоугольном бассейне с твердыми стенками при $x=0$, a; $y=0$, b, предполагая, что динамика определяется соотношением Свердрупа. Зададим касательные напряжения ветра в идеализированном виде: $\tau_y=0$, $\tau_x=-\tau_0 \cos(\pi y/b)$. Отметим, что такое поле ветра в принципе соответствует наблюдающемуся над океанами в средних широтах Северного полушария, и мы в дальнейшем часто будем использовать этот профиль напряжений ветра. Перепишем (7.30) в безразмерном виде с учетом заданного поля ветра и в терминах функции тока:

$$\beta\, \partial\psi/\partial x = -[\tau_0\pi/(\rho_0 D_0 b)] \sin(\pi y/b). \tag{7.36}$$

Будем искать решение уравнения (7.36), которое удовлетворяло бы условиям отсутствия нормального компонента скорости потока на твердых стенках, т. е. $\psi=0$ при $x=0$, a; $y=0$, b.

Видно, что при таком поле ветра невозможно найти решение (7.36), которое удовлетворяло бы граничным условиям как на восточной, так и на западной границе.

Запишем два возможных варианта решения:

$$\psi = -[\tau_0\pi/(\rho_0 D_0 b\beta)](x-a) \sin(\pi y/b); \tag{7.37}$$

$$\psi = -[\tau_0\pi/(\rho_0 D_0 b\beta)](x) \sin(\pi y/b). \tag{7.38}$$

Первое решение удовлетворяет условию отсутствия нормального компонента скорости на восточной границе, второе — на западной. Решения, представленные на рис. 7.1, антисимметричны: в случае (7.37) поток вращается по часовой стрелке, а в случае (7.38) — против. Ясно, что ни то, ни другое решение не обеспечивает сохранение массы в замкнутом бассейне, так как повсеместно свердруповский перенос направлен на юг (меридиональная скорость $v=\partial\psi/\partial x<0$). Таким образом, решение, базирующееся на соотношении Свердрупа, является неопределенным: мы не можем удовлетворить граничным условиям и обеспечить сохранение массы. Несмотря на то что соотношение Свердрупа является справедливым, его необходимо дополнить. Уместно предположить, что где-то в бассейне, скорее всего вблизи границ, должны существовать компенсационные течения, динамика которых отличается от свердруповской. Какой бы ни была природа этих узких пограничных течений, решения, их описывающие, должны удовлетворять условию отсутствия нормального к твердой границе компонента скорости и расход их должен быть равен по модулю полному свердруповскому расходу (7.37) или (7.38), но иметь обратный знак (т. е. в нашем случае такое гипотетическое течение должно быть направлено на север). К сожалению, оставаясь в рамках соотношения Свердрупа, мы даже не можем определить, у какой из границ будет наблюдаться такое течение. Казалось бы естественным выбрать решение (7.37), в котором антициклоническая циркуляция направлена по ветру и пограничное течение должно быть у западной границы, а не (7.38), при котором жидкость циркулирует против ветра. Однако, с формальной точки зрения, (7.38) также справедливо, и, оставаясь в рамках соотношения Свердрупа, нельзя предпочесть одно другому. В этой неопределенности заключается недостаток теории, базирующейся на соотношении Свердрупа. Другим важным недостатком является то, что из баланса Свердрупа нельзя получить вертикальную структуру циркуляции океана.

Тем не менее баланс Свердрупа является важным, полезным и несомненно достаточно точным для внутренних частей океанов, вдали от берегов и сильных зональных струй. Это подтверждают расчеты, проделанные по соотношению Свердрупа для оценки расходов в Атлантическом океане на основании поля ветра. Результаты этих расчетов очень хорошо согласуются с данными натурных наблюдений.

Дальнейшее продвижение в понимании общей циркуляции океана может быть достигнуто только при рассмотрении опущенных нами вязких и нелинейных эффектов, что и будет сделано в следующих разделах.

7.4. Круговороты в однородном океане с учетом трения (задачи Стоммела и Манка)

Перепишем систему уравнений (7.28), (7.29) с учетом членов, описывающих придонное трение по линейному закону:

$$-fv = -(1/\rho_0)\,\partial p/\partial x + A_V\,\partial^2 u/\partial z^2 - ru; \tag{7.39}$$

$$fu = -(1/\rho_0)\,\partial p/\partial y + A_V\,\partial^2 v/\partial z^2 - rv. \tag{7.40}$$

Здесь r — коэффициент придонного трения. Сила трения прямо пропорциональна скорости течения, что позволяет в простейшем виде параметризовать эффект придонного слоя.

Как и в предыдущем разделе, будем рассматривать баротропную циркуляцию в прямоугольном бассейне зональной протяженностью a и меридиональной протяженностью b с твердыми стенками и плоским дном. Циркуляция в бассейне возбуждается тангенциальными касательными напряжения ветра $\tau_x = \rho_0 A_V\,\partial u/\partial z$, $\tau_y = \rho_0 A_V\,\partial v/\partial z$.

Проинтегрируем систему уравнений (7.39), (7.40) по вертикали от поверхности до дна на глубине $z = -H_0$. Для исключения градиентов давления продифференцируем (7.39) по y, (7.40) по x, вычтем из второго первое и, с использованием проинтегрированного по вертикали уравнения неразрывности, получим:

$$\beta V = (1/\rho_0)\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau} - r\,(\partial V/\partial x - \partial U/\partial y), \tag{7.41}$$

где $V = \int\limits_{-H_0}^{0} v\,dz$; $U = \int\limits_{-H_0}^{0} u\,dz$, т. е. зональный и меридиональный расходы. Введем функцию полных потоков ψ и перепишем (7.41) в следующем виде:

$$r\nabla^2\psi + \beta\,\partial\psi/\partial x = (1/\rho_0)\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}. \tag{7.42}$$

Это линеаризованное баротропное уравнение завихренности без учета горизонтальной вязкости в стационарном случае было решено Г. Стоммелом в 1948 г.

Зададим касательное напряжение ветра так же, как в предыдущем разделе (рис. 7.1):

$$\tau_y = 0; \quad \tau_x = -\tau_0 \cos(\pi y/b).$$

Тогда (7.42) преобразуем к виду

$$r\nabla^2\psi + \beta\,\partial\psi/\partial x = -[\tau_0\pi/(\rho_0 H_0 b)]\sin(\pi y/b). \tag{7.43}$$

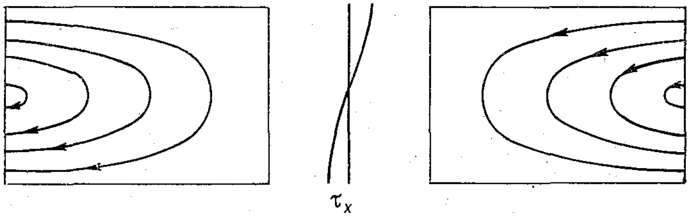


Рис. 7.1. Профиль касательного напряжения ветра и поля функции тока, соответствующие двум решениям задачи Свердрупа [5].

Будем решать (7.43) с учетом граничных условий непротекания через твердые стенки:

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ a; \quad y = 0,\ b. \tag{7.44}$$

Для более быстрого и удобного нахождения решения (7.43) введем безразмерные параметры и характерные масштабы [5]:

$$x = ax^*; \quad y = by^*; \quad \psi = [\tau_0/(\rho_0 H\beta)]\,\psi^*,$$

где звездочкой помечены безразмерные параметры.

Перепишем (7.43), (7.44) в безразмерном виде, везде для удобства опуская звездочки и предполагая, что масштабы длины a и b имеют одинаковый порядок L. В результате получим:

$$\varepsilon_S\nabla^2\psi + \partial\psi/\partial x = -\pi\sin(\pi y); \tag{7.45}$$

$$\psi = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,\ 1; \quad y = 0,\ 1; \tag{7.46}$$

$$\varepsilon_S = r/(\beta L). \tag{7.47}$$

Здесь ε_S — безразмерный параметр, характеризующий отношение силы трения к силе Кориолиса. Предполагаем, что r — мало, так что $\varepsilon_S \ll 1$.

При малых ε_S это уравнение решается относительно легко с помощью методов теории пограничного слоя. Для этого океан разделяется на три области: обширную внутреннюю область и два узких пограничных слоя вдоль западного и восточного берега, т. е. при $x = 0, 1$. Решение для внутренней области соответствует полученному в предыдущем разделе решению уравнения (7.36).

В пограничных слоях член, учитывающий придонное трение, становится важным, сравнимым по величине с членом, обусловленным изменением параметра Кориолиса (β-член), и решение для пограничных слоев будет другим. Сопряжение решения для пограничных слоев с решением для внутренней области даст полное решение задачи.

Итак, для внутренней области полагаем $\varepsilon_s=0$ и решая (7.45), получим значение функции тока во внутренней области:

$$\psi_I=(c-x)\,\pi\sin(\pi y). \tag{7.48}$$

К счастью, при нашем выборе касательного напряжения ветра ψ_I удовлетворяет условию $\psi=0$ при $y=0$, 1, т. е. на северной и южной стенках. В дальнейшем c будет выбрано так, чтобы удовлетворить условию $\psi=0$ или при $x=0$, или при $x=1$, т. е. на одной из меридиональных стенок (но не на обеих!).

Для получения решений в пограничных областях, следуя [4], введем растянутую «погранслойную» координату (λ), позволяющую лучше разрешить структуру меридиональных пограничных слоев вдоль оси x в окрестностях точек $x=0$ и $x=1$.

Запишем тогда для западного пограничного слоя

$$\lambda=x/l, \tag{7.49}$$

а для восточного пограничного слоя

$$\lambda=(1-x)/l. \tag{7.50}$$

Здесь l — безразмерная величина, характеризующая отношение ширины пограничного слоя (δ_S) в задаче Стоммела к размерам области, т. е.

$$l=\delta_S/L\ll 1. \tag{7.51}$$

Полагаем, что течение в пограничных слоях вдоль меридиональных стенок практически не зависит от y, т. е. функция тока в пограничном слое будет равна

$$\psi=\psi_B(\lambda,\ y). \tag{7.52}$$

Рассмотрим сначала восточный пограничный слой. Подставим (7.50) и (7.52) в (7.45) и получим

$$\frac{\varepsilon_S}{l^2}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\lambda^2}+\varepsilon_S\frac{\partial^2\psi_B}{\partial y^2}-\frac{1}{l}\frac{\partial\psi_B}{\partial\lambda}=-\pi\sin(\pi y) \tag{7.53}$$

или

$$\frac{\varepsilon_S}{l}\frac{\partial^2\psi_B}{\partial\lambda^2}+\varepsilon_S l\frac{\partial^2\psi_B}{\partial y^2}-\frac{\partial\psi_B}{\partial\lambda}=-l\pi\sin(\pi y). \tag{7.54}$$

Поскольку $l\ll 1$ (ширина пограничного слоя много меньше размеров бассейна), вклад ротора касательных напряжений ветра в пограничный слой невелик. Ясно также, что мы смело можем пренебречь вторым членом в левой части (7.54).

Для того чтобы пограничное течение могло замыкать линии тока свердруповского течения внутренней области и удовлетворять условию отсутствия нормального компонента скорости на границе, необходимо, чтобы донное трение уравновешивало β-член. Тогда первый и третий члены в (7.54) должны быть одного порядка или, что то же самое, безразмерная величина l должна быть равна ε_S.

Запишем уравнение для пограничного слоя у восточной границы в первом приближении [пренебрегая в (7.54) членами порядка ε_S и ε_S^2]:

$$\partial^2\psi_B/\partial\lambda^2 - \partial\psi_B/\partial\lambda = 0. \tag{7.55}$$

Удобно представить ψ_B в виде суммы внутренней функции тока ψ_I и погранслойной поправочной функции $\Phi_B(\lambda, y)$, необходимой для устранения невязки в выполнении граничных условий функцией ψ_I:

$$\psi_B(\lambda, y) = \psi_I(x, y) + \Phi_B(\lambda, y). \tag{7.56}$$

Для того чтобы ψ_B гладко переходила в ψ_I при больших λ, функция Φ_B должна стремиться к нулю при $\lambda \to \infty$. Если подставить (7.56) в (7.54) и использовать соотношение

$$\partial\psi_I/\partial\lambda = -\varepsilon_S\,\partial\psi_I/\partial x = -\varepsilon_S\pi\sin(\pi y), \tag{7.57}$$

то в результате члены низшего порядка в (7.54) дадут:

$$\partial^2\Phi_B/\partial\lambda^2 - \partial\Phi_B/\partial\lambda = 0. \tag{7.58}$$

Общее решение (7.58) имеет вид

$$\Phi_B = c_1(y) + c_2(y)\exp\lambda. \tag{7.59}$$

Поскольку Φ_B стремится к нулю при $\lambda \to \infty$, то c_1 и c_2 должны равняться нулю. Таким образом, из условия отсутствия нормальной скорости при $x=1$ следует

$$\partial\psi_I(1, y)/\partial y = 0. \tag{7.60}$$

Следовательно, свердруповское течение во внутренней области должно удовлетворять граничному условию равенства нулю нормального компонента скорости на восточной границе. Таким образом, решение (7.48) справедливо на восточной границе. Отсюда следует, что пограничный слой не может находиться у восточной границы, а должен быть у западной. Итак, мы выбираем $c=1$ в (7.48), так что $\psi_I=0$ при $x=1$.

Рассмотрим теперь западный пограничный слой. Аналогичным образом, подставляя (7.49) и (7.52) в (7.45) и учитывая, что $l=\varepsilon_S$, получим уравнение для функции тока западного пограничного слоя в первом приближении:

$$\partial^2\psi_B/\partial\lambda^2 + \partial\psi_B/\partial\lambda = 0. \tag{7.61}$$

Снова записывая

$$\psi_B = \psi_I(x, y) + \Phi_B(\lambda, y), \tag{7.62}$$

получим:

$$\Phi_B(\lambda, y) = C(y)\exp(-\lambda). \tag{7.63}$$

Решение, удовлетворяющее условию равенства нулю нормальной скорости при $x=0$, имеет вид

$$\psi_B = \psi_I(x, y)[1-\exp(-\lambda)] = (1-x)\pi\sin(\pi y)\times$$
$$\times[1-\exp(-x/\varepsilon_S)] = \pi\sin(\pi y)[1-\exp(-x/\varepsilon_S)]. \tag{7.64}$$

Скорость в западном пограничном слое будет равна

$$V_B = (1/\varepsilon_S)\psi_I\exp(-x/\varepsilon_S) = (L/\delta_S)\psi_I\exp(-x/\varepsilon_S). \tag{7.65}$$

Итак, полный расход жидкости в свердруповской внутренней области компенсируется западным пограничным течением. Поскольку расход пограничного течения в точности равен расходу во всей внутренней области, то скорость в северном направлении в пограничном течении должна быть значительно больше скорости во внутренней области, чтобы тот же объем жидкости мог переноситься узким течением вдоль границы. Действительно, как следует из (7.65), отношение этой скорости к скорости во внутренней области имеет порядок $O(L/\delta_S)$. Таким образом, в этой модели градиент планетарного вихря β является определяющим и для слабого свердруповского течения внутри бассейна, и для интенсивного западного пограничного течения, компенсирующего полный свердруповский расход, причем в первом приближении соотношение Свердрупа оказывается справедливым внутри области вплоть до восточной границы.

Запишем общее решение задачи Стоммела, объединяя (7.48) и (7.64):

$$\psi = [1-\exp(-x/\varepsilon_S)-x]\,\pi\sin(\pi y). \tag{7.66}$$

Это решение представлено на рис. 7.2.

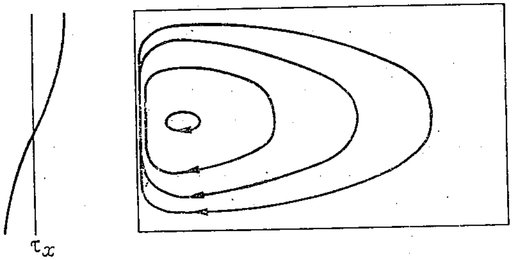


Рис. 7.2. Решение задачи Стоммела (7.66) [5].

Рассмотрим динамику круговорота Стоммела с точки зрения сохранения потенциального вихря. Во внутренней области мы фактически решали уравнение $\beta\,\partial\psi/\partial x = \mathrm{rot}_z\,\tau/(\rho_0 H)$. Оно может быть записано в форме [5]

$$Df/Dt = [1/(H\rho_0)]\,\mathrm{rot}_z\,\tau, \tag{7.67}$$

где

$$D/Dt = \partial/\partial t + u\,\partial/\partial x + v\,\partial/\partial y. \tag{7.68}$$

Это означает, что завихренность, поступающая в океан от ветра, балансируется изменением планетарного вихря столбика жидкости. В этой модели потенциальный вихрь равен планетарному, поскольку движение жидкости столь медленно, что мы можем пренебречь относительным вихрем по сравнению с планетарным (даже и в западном пограничном слое). Для антициклонического поля ветра, типичного для субтропических областей северного полушария, в результате баланса сил из уравнения (7.67) поток во внутренней области направлен на юг, как и в модели Стоммела. Этот медленный поток в модели Стоммела, индуцируемый непосредственно напряжениями ветра, меняется с широтой, имея максимум вдоль центральной широты бассейна ($y={}^1/_2$) и исчезая у северной и южной границ. Естественно, что для сохранения массы необходимы движения жидкости вдоль параллелей, что и демонстрирует модель Стоммела.

В западном пограничном слое мы решали уравнение

$$r\,\Delta\psi+\beta\,\partial\psi/\partial x=0, \tag{7.69}$$

которое можно переписать в виде [5]

$$Df/Dt=-r\,\partial v/\partial x, \tag{7.70}$$

т. е. в западном пограничном слое благодаря трению происходит изменение планетарного вихря. Ширина западного пограничного слоя имеет порядок r/β. Для характерного времени затухания (r^{-1}) порядка нескольких дней ширина течения будет иметь порядок 100 км. Очевидно, что вся завихренность, поступающая в океан от ветра, будет теряться вследствие трения в этом узком течении. Благодаря этому и возможно стационарное решение задачи Стоммела.

Отметим, что здесь мы подробно не рассматривали вопрос о выполнении граничных условий на северной и южной стенках. При выбранном касательном напряжении ветра условие $\psi=0$ при $y=0$, 1 выполняется автоматически. Однако можно рассмотреть пограничные слои у северной и южной стенок при других профилях напряжений ветра и получить решения для северного и южного пограничных слоев. Эти решения будут важны только в этих узких пограничных слоях и не будут влиять на общее решение задачи Стоммела.

Рассмотрим теперь кратко задачу Манка. В. Манк в 1950 г. решил линеаризованное баротропное уравнение завихренности, в котором вместо придонного трения учитывалась горизонтальная турбулентная вязкость, задавая профиль касательного напряжения ветра, характерного для северной части Тихого океана.

Здесь мы рассмотрим задачу Манка для такого же бассейна и тех же напряжений ветра, что и в задаче Стоммела. Следовательно, можно сформулировать задачу Манка в виде

$$-A_H\nabla^4\psi+\beta\,\partial\psi/\partial x=-[\tau_0\pi/(\rho_0 Hb)]\sin(\pi y/b); \tag{7.71}$$

$$\psi=\partial\psi/\partial x=0 \quad \text{при} \quad x=0,\ a; \tag{7.72}$$

$$\psi=\partial^2\psi/\partial y^2=0 \quad \text{при} \quad y=0,\ b. \tag{7.73}$$

Необходимость введения дополнительных краевых условий, кроме $\psi=0$, связана с тем, что учет горизонтальной вязкости повышает порядок уравнения. Поэтому на меридиональных стенках ставится естественное для вязкой задачи условие прилипания (помимо нормального равен нулю и касательный компонент скорости). На зональных стенках условие свободного скольжения ($\partial^2\psi/\partial y^2=\partial u/\partial y=0$) ставится только для удобства аналитического решения задачи.

Вводя те же самые безразмерные переменные и масштабы, что и в задаче Стоммела:

$$x=ax^*;\quad y=by^*;\quad \psi=[\tau_0/(\rho_0 H\beta)]\,\psi^*,$$

сведем систему (7.71)—(7.73) к виду

$$-\varepsilon_M\nabla^4\psi+\partial\psi/\partial x=-\pi\sin(\pi y); \tag{7.74}$$
$$\psi=\partial\psi/\partial x=0 \quad \text{при} \quad x=0,\ 1;$$
$$\psi=\partial^2\psi/\partial y^2=0 \quad \text{при} \quad y=0,\ 1,$$

где

$$\varepsilon_M=A_H/(\beta L^3)\ll 1. \tag{7.75}$$

Здесь ε_M — основной безразмерный малый параметр, определяющий отношение вязких сил к силе Кориолиса.

Используя тот же самый подход, что и в задаче Стоммела, можно получить общее решение задачи Манка в виде

$$\Bigg\{\Bigg[-\frac{2}{3}\left(1-\varepsilon_M^{1/3}\right)\exp\left[-x/\left(2\varepsilon_M^{1/3}\right)\right]\cos\left(\frac{x\sqrt{3}}{2\varepsilon_M^{1/3}}-\frac{\pi}{6}\right)+$$
$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\exp\left[-x/\left(2\varepsilon_M^{1/3}\right)\right]\sin\left(\frac{x\sqrt{3}}{2\varepsilon_M^{1/3}}\right)\Bigg]+\left[1-\varepsilon_M^{1/3}-x\right]+$$
$$+\left[\varepsilon_M^{1/3}\exp\left[(x-1)/\varepsilon_M^{1/3}\right]\right]\Bigg\}\pi\sin(\pi y). \tag{7.76}$$

Решение является композицией достаточно простого решения для внутренней области

$$\psi_I=\left(1-\varepsilon_M^{1/3}-x\right)\pi\sin(\pi y)$$

и сложного вида решений для западного и восточного пограничных слоев безразмерной толщиной $\varepsilon_M^{1/3}$.

Мы здесь не приводим карту функций тока в задаче Манка, так как структура циркуляции там такая же, как и в задаче Стоммела. В принципе r и A являются свободными параметрами, которые всегда можно выбрать такими, чтобы достигалось хорошее количественное совпадение.

Отметим основные динамические особенности задачи Манка. В западном пограничном слое изменение относительного вихря жидкой частицы при ее быстром продвижении на север в западном пограничном течении балансируется горизонтальным диффузионным потоком этого дополнительного относительного вихря в сторону западной стенки. Жидкая частица, входящая в западный пограничный слой, имеет пренебрежимо малый относительный вихрь, и ее потенциальный вихрь определяется планетарным вихрем. При продвижении частицы в западном пограничном слое на север на расстояние Δy ее планетарный вихрь увеличивается на $\beta\,\Delta y$, и в отсутствие трения ее относительный вихрь должен также уменьшиться на величину порядка $O(\beta\,\Delta y)$. Однако, поскольку потенциальный вихрь частицы должен сохраняться, вязкие силы обязаны отобрать эту дополнителную завихренность у частицы и посредством диффузии отводить ее через боковую стенку, так чтобы частица жидкости могла возвратиться в свердруповскую внутреннюю область с таким же пренебрежимо малым относительным вихрем, с каким она вошла в западный пограничный слой [4].

Таким образом, жидкая частица должна оставаться вблизи западной стенки по крайней мере в течение характерного времени вязкой диффузии относительного вихря, а именно

$$t_D = \delta_M^2/A_H, \tag{7.77}$$

где δ_M — ширина слоя в задаче Стоммела. С другой стороны, это время должно также равняться

$$t_D = \Delta y/v_B, \tag{7.78}$$

где v_B — скорость течения в северном направлении. Поскольку относительный вихрь ζ имеет порядок $O(v_B/\delta_M)$, то для того чтобы вязкие силы могли удалить этот избыточный относительный вихрь порядка $O(\beta\,\Delta y)$, должны выполняться следующие соотношения:

$$\delta_M^2/A_H = O\left(\Delta y/v_B\right) = O\left(\Delta y/(\delta_M\zeta)\right) = O\left(1/(\beta\delta_M)\right); \tag{7.79}$$

или

$$\delta_M = \left(A_H/\beta\right)^{1/3}, \tag{7.80}$$

что совпадает с оценкой ширины (7.75).

Основным недостатком рассмотренных выше теорий Стоммела и Манка является то, что они базируются на коэффициентах придонного трения и горизонтальной вязкости. Трение по линейному закону или описание турбулентных процессов с помощью постоянных коэффициентов турбулентной вязкости является лишь грубым приближением, которое вводится в модель для описания диссипативных процессов в океане. Эти коэффициенты могут быть определены лишь косвенным путем, очень приблизительно и имеют большой разброс значений. Например, если задать коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости, необходимый для получения реальной ширины Гольфстрима [по формуле (7.80)], то он будет существенно превосходить коэффициент рассчитанный для района Гольфстрима другими путями. Тем не менее круговороты Стоммела и Манка, рассчитанные по реальному полю ветра, качественно согласуются с имеющимися в природе антициклоническими круговоротами Северного полушария. Эти модели описывают западную интенсификацию в круговоротах и дают неплохие оценки для скоростей во внутренних областях круговоротов. Однако расходы западных пограничных течений, рассчитанные по этим моделям с учетом реальных полей ветра над океанами и при использовании более-менее реалистичных значений r и A_H, получаются в два раза ниже, чем расходы Гольфстрима и Куросио. Конечно, мощные западные пограничные течения являются сильно нелинейными, и удовлетворительно описать их можно только при учете нелинейных процессов адвекции завихренности, что будет сделано в следующем разделе.

7.5. Стационарная свободная циркуляция в стратифицированном океане

Работы Стоммела и Манка внесли фундаментальный вклад в теорию круговоротов, впервые продемонстрировав феномен западной интенсификации в циркуляции океана. Однако эти модели не могли дать ответ на вопрос о вертикальном строении океанических круговоротов. Возникла необходимость в достаточно простой качественной теории океанической циркуляции, которая была бы способна воспроизводить основные черты вертикальной структуры ветровых круговоротов и при этом не зависела бы столь сильно от таких неопределенных параметров, как коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости. Такая теория была создана П. Райнсом и В. Янгом в начале 1980-х годов. Она базируется на уравнениях сохранения потенциального вихря и на известном из наблюдений и вихреразрешающих расчетов явлении гомогенизации потенциального вихря во внутренних частях океанических круговоротов. Напомним, что под гомогенизацией потенциального вихря в некоторой области понимается исчезновение градиентов потенциального вихря, перемешивание потенциального вихря вплоть до достижения каждой жидкой частицей внутри этой области одинакового значения потенциального вихря. Райнс и Янг [8], используя некоторые допущения, доказали теорему о том, что, если имеют место замкнутые линии равных значений потенциального вихря (геострофические изолинии), которые близки к изолиниям функции тока, то во внутренних частях океана, удаленных от непосредственного воздействия атмосферы или придонного трения, потенциальный вихрь гомогенизируется. Здесь мы не приводим доказательство этой теоремы, поскольку оно является достаточно сложным. Опираясь на этот результат, они исследовали крупномасштабную ветровую циркуляцию на β-плоскости в рамках квазигеострофической модели. Модель ветрового круговорота Райнса—Янга мы рассматривать не будем, а изложим более простой случай стационарной свободной циркуляции.

Свободной называется циркуляция при отсутствии источников и стоков завихренности.

Модели океанической циркуляции Стоммела и Манка основаны на гипотезе о диффузии завихренности, без учета адвекции. Здесь мы будем рассматривать модель циркуляции в стратифицированном океане, в которой главную роль играют инерционные члены. Будем исследовать циркуляцию с точки зрения теории переноса сохраняющейся величины — потенциального вихря. В отличие от рассмотренных выше вязких моделей, инерционные пограничные слои будут здесь неотъемлемой частью решения, т. е. не надо будет ограничиваться, как прежде, внутренними частями круговоротов или состыковывать решения во внутренней области и в вязком пограничном слое.

Запишем основное уравнение модели свободной циркуляции Маршалла—Нурсера в квазигеострофическом приближении [6, 7]:

$$\partial q/\partial t + J(\psi, q) = \mathcal{F} - \mathcal{D}, \tag{7.81}$$

где q — квазигеострофический потенциальный вихрь; ψ — квазигеострофическая функция тока; $J(\psi, q) = (\partial\psi/\partial x)\,\partial q/\partial y - (\partial q/\partial x) \times \times \partial\psi/\partial y$ — оператор Якоби; $\mathcal{F}$ — источник потенциального вихря, а $\mathcal{D}$ — сток. Из (7.81) следует, что если правая часть пренебрежимо мала, то потенциальный вихрь сохраняется.

Прежде чем рассматривать бароклинную модель, остановимся на двух интересных предельных случаях свободной стационарной циркуляции в баротропной модели. Для такой модели $q = \nabla^2\psi + f$, где $\nabla^2\psi = \zeta$ — относительный вихрь, $f = f_0 + \beta y$ — планетарный вихрь.

Рассмотрим сначала линейный случай, являющийся, конечно, предельным, но полезным для понимания более сложных моделей. Будем считать, что во внутренних областях океана число Россби мало:

$$\mathrm{Ro} = V/(fL) \sim \zeta/f \ll 1,$$

и, кроме того, будем полагать, что градиент относительного вихря существенно меньше градиента планетарного вихря:

$$\nabla\zeta/\beta \ll 1.$$

Следовательно, мы можем пренебречь относительным вихрем по сравнению с планетарным вихрем. Тогда потенциальный вихрь $q = f_0 + \beta y$ и изолинии q, вдоль которых движется свободный поток, блокируются меридиональными стенками бассейна. Следовательно, возникает вопрос, каким же образом циркулируют круговороты баротропного океана в линейном случае, если изолинии q соответствуют кругам широты, начинающимся и кончающимся в берегах? В линейных моделях круговороты могут существовать, т. е. поток может направляться поперек изолиний q, вследствие источника завихренности — ротора напряжений ветра в соответствии с соотношением

$$J(\psi,\ f) = \mathcal{F}, \tag{7.82}$$

где, к примеру, $\mathcal{F} = -[1/(\rho_0 H_0)]\partial\tau_x/\partial y$. Это уравнение выражает баланс между скоростью изменения планетарного вихря и скоростью поступления в океан избыточного вихря от ветра. Этот баланс является рассмотренным выше соотношением Свердрупа, которое определяет движение жидкости во внутренних частях круговоротов. Жидкость, циркулирующая в круговороте, возвращается назад в западном пограничном слое, где диссипативные процессы «удаляют» избыточный вихрь, поступающий во внутреннюю область от ветра. Такой ход рассуждений о поступлении завихренности во внутренние области круговоротов (что обусловливает стационарное течение поперек изолиний q) и диссипации завихренности в вязком западном пограничном слое является традиционным и уже использовался при обсуждении задач Стоммела и Манка.

Интенсивность циркуляции в линейном случае определяется из баланса (7.82). Если для типичного распределения ветра $\mathcal{F} = -[1/(\rho_0 H)]\partial\tau_x/\partial y = -[\pi\tau_0/(\rho_0 H_0 L)]\sin(\pi y/L)$, то интенсивность будет

$$U_S = \pi\tau_0/(\rho_0\beta H_0 L), \tag{7.83}$$

т. е. это обычная оценка свердруповской скорости.

Рассмотрим теперь другой предельный случай — сильно нелинейную свободную, стационарную циркуляцию. Уравнение такой модели имеет вид

$$J(\psi,\ q) = 0. \tag{7.84}$$

Как известно из курса высшей математики, зависимость (7.84) означает, что $q = q(\psi)$, и, таким образом, q — постоянна вдоль линий постоянных значений ψ. Прямое соответствие между ψ и q, естественно, является крайним случаем, противоположным по смыслу линейному случаю. В этой ситуации вследствие нелинейности, т. е. сильной адвекции завихренности полем течений, происходит совпадение изолиний ψ и q. Этот случай представляет особый интерес, поскольку полученные в последние годы карты распределения потенциальной завихренности в Мировом океане демонстрируют сильную зависимость поля q от поля течений. Изолинии q не совпадают с кругами широты, как этого сделовало бы ожидать в случае слабых течений, а следуют скорее линиям тока, особенно в верхнем приблизительно километровом слое океана.

Таким образом, из определения потенциального вихря для баротропной модели и наличия функциональной связи между ψ и q имеем

$$\nabla^2\psi + f_0 + \beta y = q(\psi). \tag{7.85}$$

Из (7.85) видно, что до тех пор, пока относительная завихренность не станет сравнима с планетарной завихренностью, ψ будет функцией только меридиональной координаты y и поток будет следовать кругам широты. У меридиональных границ, там где течение направлено поперек параллелей, относительная завихренность должна быть достаточно велика, чтобы «замкнуть» изолинии q.

Как следует из (7.84), q может быть любой, произвольной функцией ψ. Выберем для простоты линейную зависимость $q(\psi)$,

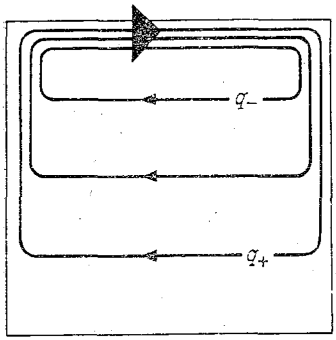


Рис. 7.3. Поле потенциального вихря, являющееся решением для случая сильно нелинейной свободной стационарной циркуляции [6].

что также подтверждается результатами вихреразрешающих моделей:

$$q = c_1\psi + c_0, \tag{7.86}$$

где

$$c_1 = dq/d\psi = -\beta/U_I > 0. \tag{7.87}$$

Такой выбор c_1 следует из (7.85) в случае, когда $\nabla^2\psi = 0$. Здесь $U_I < 0$ — западный поток во внутренней области. Тогда (7.85) записывается в виде (принимая $c_0 = f_0$)

$$\nabla^2\psi + \beta y = c_1\psi. \tag{7.88}$$

Уравнение (7.88) легко решается относительно ψ. Решение в прямоугольном бассейне при условии $\psi = 0$ на границе показано на рис. 7.3. Видно, что функция тока ψ симметрична относительно центрального меридиана бассейна, имеется медленный дрейф U_I во внутренней области и восточное течение (аналог Гольфстрима после отрыва от берега), быстрое и узкое, с масштабом ширины $(|U_I|/\beta)^{1/2}$. Хотя такая модель сильно идеализирована, она в целом неплохо описывает реальные ветровые круговороты. Основной ее недостаток связан с тем, что из условия произвольности зависимости между q и ψ интенсивность циркуляции остается неопределенной.

Для того чтобы устранить этот недостаток модели свободной стационарной чисто инерционной циркуляции, определяемой уравнением (7.84), будем использовать члены в правой части уравнения (7.81) — генерацию и диссипацию, считая, что их совместное воздействие является эффектом более высокого порядка малости по сравнению с основным балансом (7.84). Предлагается следующая концепция модели океанической циркуляции: циркуляция круговорота может совершать все необходимые переносы для балансирования источников и стоков завихренности только посредством малых поправок к конфигурациям изолиний, при которых q постоянна вдоль линий тока.

Следуя [7], записываем:

$$\mathcal{F} - \mathcal{D} = \varepsilon G. \tag{7.89}$$

Разложим тогда решение (7.81) в стационарном случае в ряд по ε:

$$\psi = \psi_0 + \varepsilon\psi_1 + \ldots; \quad q = q_0 + \varepsilon q_1 + \ldots; \quad G = G_0 + \varepsilon G_1 + \ldots \tag{7.90}$$

Прямая подстановка разложения в (7.81) для стационарного случая дает баланс нулевого порядка

$$J(\psi_0, q_0) = 0, \tag{7.91}$$

т. е. $q_0 = q_0(\psi_0)$.

Итак, задача нулевого порядка дает бесконечное множество различных вариантов зависимости $q_0 = q_0(\psi_0)$, но не все они дают правильное решение для более высокого порядка, т. е. не все зависимости $q_0(\psi_0)$ соответствуют интегральному балансу между диссипацией и генерацией при более высоких порядках.

В замкнутых океанических бассейнах изолинии ψ замкнуты. Проинтегрируем в стационарном случае (7.81) по области A, ограниченной изолинией ψ_0, имеющей единичный вектор нормали $\mathbf{n}$ и касательной $\mathbf{l}$:

$$\iint_A J(\psi, q)\, dA = \iint_A \varepsilon G\, dA. \tag{7.92}$$

Можно показать, что левая часть (7.92) обращается в нуль и баланс порядка ε внутри замкнутой изолинии имеет вид

$$\iint_A G_0\, dA = 0. \tag{7.93}$$

Таким образом, условие (7.93) накладывается на решение нулевого порядка (7.91). Физический смысл (7.93) очевиден: для того чтобы стационарное невязкое течение лишь очень слабо зависело от источников и стоков, необходимо наличие интегрального баланса между генерацией и диссипацией внутри замкнутой линии тока. Причем этот баланс является интегральным, он не обязательно должен выполняться локально.

Можно, например, считать, что

$$\mathcal{F} = \mathrm{rot}_z\, \boldsymbol{\tau}/(\rho_0 H_0); \quad \mathcal{D} = \varepsilon\nabla^2\psi_0,$$

т. е. источником потенциальной завихренности являются ветер, а стоком — донное трение. Тогда интегральный баланс (7.93) примет вид

$$\frac{1}{\rho_0 H_0} \oint_{\psi_0} \boldsymbol{\tau}\, d\mathbf{l} = \varepsilon \oint \mathbf{v}_0\, d\mathbf{l}, \tag{7.94}$$

т. е. внутри всякой замкнутой линии тока ветер балансируется донным трением. Это есть ограничение на возможную функциональную связь между q_0 и ψ_0.

Решение для баротропного стационарного инерционного круговорота, в котором завихренность, поступающая в океан от ветра, балансируется донным трением, было получено различными авторами. Здесь мы не будем его рассматривать, а используем баланс (7.94) для оценки интенсивности циркуляции во внутренней области U_I.

Поскольку донное трение доминирует в пограничном течении, из (7.94) оценим скорость этого течения:

$$U_B = \tau/(\rho_0 H_0 \varepsilon).$$

Тогда из уравнения неразрывности можно записать, что

$$LU_I = \delta_B U_B,$$

где δ_B — ширина пограничного течения; L — ширина внутренней области, равная ширине бассейна. Заменяя теперь U_B и δ_B на их оценки, получим:

$$U_I = \frac{1}{L}\left(\frac{|U_I|}{\beta}\right)^{1/2}\left(\frac{\tau_0}{\rho_0 H_0 \varepsilon}\right)$$

или

$$U_I = \frac{1}{\beta}\left(\frac{\tau_0}{\rho_0 \varepsilon L H_0}\right)^2. \tag{7.95}$$

Эта оценка отличается от даваемой линейной теорией оценкой свердруповской внутренней скорости (7.83).

Будем теперь предполагать, что источники потенциального вихря балансируются вихревым потоком потенциального вихря поперек средних линий тока, т. е. $\mathscr{D} = \nabla \cdot \overline{(\mathbf{v}' q')}$. Рассмотрим для примера район антициклонической циркуляции, в которой $\mathrm{rot}_z \boldsymbol{\tau} < 0$. Тогда для баланса $\oint \overline{\mathbf{v}' q'} \cdot \mathbf{n}\, dl$ должен быть также отрицательным, т. е. вихревой поток q должен быть направлен внутрь круговорота. С другой стороны, как показывают наблюдения и теория, вихревой поток потенциального вихря должен быть направлен по среднему градиенту потенциального вихря. Это возможно только, если q_0 уменьшается к центру круговорота, т. е. $dq_0/d\psi_0 < 0$. С формальной точки зрения вышесказанное можно выразить следующим образом. Параметризуем вихревой поток потенциального вихря следующим образом:

$$\overline{\mathbf{v}' q'} = -k \nabla q_0, \tag{7.96}$$

и, используя, что $\nabla q_0 = (dq_0/d\psi_0)\, \nabla \psi_0$, запишем баланс (7.93) в виде

$$\frac{1}{\rho H} \oint \boldsymbol{\tau}\, d\mathbf{l} = -\frac{dq_0}{d\psi_0} \oint k \mathbf{v}_0\, d\mathbf{l}. \tag{7.97}$$

Отсюда необходимо, чтобы $dq_0/d\psi_0$ было отрицательным, поскольку циркуляция должна иметь тот же знак, что и завихренность ветра.

Для исследования процессов балансирования завихренности в круговоротах вследствие вихревого горизонтального перераспределения q в рамках теории свободной инерционной циркуляции рассмотрим двухкруговоротную систему циркуляции в прямоугольном бассейне, вытянутом в меридиональном направлении, $0 \leqslant x \leqslant L$, $-L \leqslant y \leqslant L$. Круговороты (субтропический и субполярный) приводятся в движение антисимметричным ротором касательных напряжений ветра. Из-за симметрии линия $y=0$, соответствующая нулевому ротору напряжений ветра, является границей круговоротов. Будем полагать, что имеющаяся вдоль линии $y=0$ восточная струя неустойчива. Эта неустойчивость порождает вихри, которые обеспечивают перенос завихренности между круговоротами, балансирующий ее приток от ветра (циклонический на севере и антициклонический на юге).

Сначала рассмотрим простейшее возможное развитие инерционной теории и используем так называемую «$1^1/_2$-слойную» модель. В такой модели активный верхний слой толщиной H и средней плотностью ρ_1 подстилается неподвижным, бесконечно глубоким слоем жидкости плотностью ρ_2.

Запишем уравнение для потенциального вихря в такой модели:

$$q = \nabla^2\psi + \beta y - F\psi, \tag{7.98}$$

где $F = L_R^{-2}$, $L_R = (g'H/f_0^2)^{1/2}$ — радиус деформации Россби, $g' = [(\rho_2 - \rho_1)/\rho_2] g$ — приведенное ускорение свободного падения. Трудно интерпретировать такую модель, называемую еще «эквивалентно баротропной», в терминах бароклинного океана. Тем не менее можно полагать, что большие значения ψ соответствуют подъему свободной поверхности и прогибу изопикн вниз, а малые значения ψ — опусканию свободной поверхности и подъему изопикн вверх. Член $F\psi$ может интерпретироваться как грубая, линеаризированная аппроксимация динамических эффектов, связанных с растяжением вихревых нитей, обусловленных изменением толщины активного слоя.

Стационарное состояние такой модели есть решение уравнения

$$J(\psi,\ q) = \mathcal{F} - \nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}'q'}), \tag{7.99}$$

где дивергенция вихревого потока q в соответствии с параметризацией (7.96) записывается так:

$$\nabla \cdot (\overline{\mathbf{v}'q'}) = -\nabla (k\nabla q). \tag{7.100}$$

Здесь и далее мы опускаем индекс «0», обозначающий нулевой порядок. Коэффициент k — положителен и в общем является функцией координат.

Предполагая, что поток является почти свободным, будем искать решение в виде

$$\nabla^2\psi + \beta y - F\psi = q(\psi) \tag{7.101}$$

и считаем, что

$$q(\psi) = c_1\psi + q_{10}, \tag{7.102}$$

где константы c_1 и q_{10} необходимо определить. Поскольку внутри любой замкнутой изолинии тока завихренность, поступающая в океан от ветра, балансируется вихревым потоком q, то из (7.97)

$$dq/d\psi = c_1 < 0. \tag{7.103}$$

Поскольку из соображений симметрии линия $y=0$ является границей между круговоротами, граничное условие для (7.101) имеет вид

$$\psi = 0 \tag{7.104}$$

вдоль границы каждого круговорота, т. е. при $x=0$, L и $y=-L$, 0, L.

Константа q_{10} определяется из условия непрерывности q у северной и южной границ бассейна. Это требует

$$q_{10} = \begin{cases} \beta L & \text{при} \quad 0 < y < L; \\ -\beta L & \text{при} \quad -L < y < 0. \end{cases} \tag{7.105}$$

Такой выбор q_{10} приводит к разрыву в поле q вдоль линии $y=0$, разграничивающей круговороты. Можно считать это приемлемым, поскольку вращающиеся в разные стороны круговороты переносят завихренность разного знака к разделяющей их линии и создают область очень больших градиентов q вдоль нее. Наблюдения показывают, что такой разрыв в поле q в верхней части термоклина характерен для северных частей Атлантического и Тихого океанов.

Таким образом, задача сводится к решению (7.101)—(7.102) при условиях (7.103)—(7.105). Решение для внутренней области легко записать, поскольку во внутренней области мы можем пренебречь относительной завихренностью:

$$\psi_I = (\beta y - q_{10})/(c_1 + F) \tag{7.106}$$

или

$$U_I = -\beta/(c_1 + F). \tag{7.107}$$

Таким образом, течение во внутренней области направлено на запад и поддерживает инерционные пограничные слои шириной $(|U_I|/\beta)^{1/2}$ при условии, что

$$c_1 + F > 0.$$

На рис. 7.4 показана циркуляция для случая $c_1 = -F/2$. Поле q обладает интересной особенностью. Учет вихревого растяжения (пусть и в грубом виде) обеспечивает возможность изменения знака градиента потенциального вихря, так что

$$\partial q/\partial y = (dq/d\psi)\,\partial\psi/\partial y = |U_I|\,dq/d\psi < 0,$$

т. е. q уменьшается к северу в субтропическом круговороте, как и должно быть, если источник q балансируется горизонтальными вихревыми переносами q.

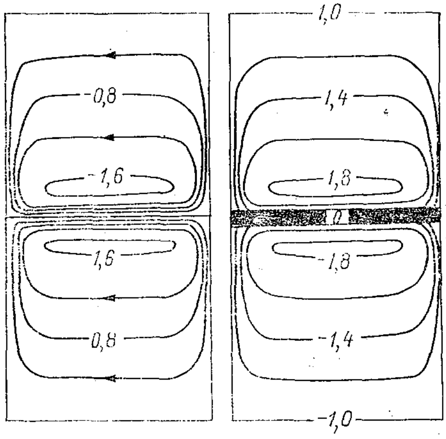


Рис. 7.4. Решение задачи Маршалла—Нурсера для $1^1/_2$-слойной модели при $c_1 = -F/2$ [7].

Слева — поле функции тока (интервал между изолиниями равен 0,4 в единицах $\beta L_R^2 L$); справа — поле потенциального вихря (интервал между изолиниями равен 0,2 в единицах βL).

В бароклинных моделях обратный градиент q к югу от восточной свободной струи приводит к тому, что в области рециркуляции становится возможной бароклинная неустойчивость. Однако можно считать, что в рассматриваемой модели в интегральном балансе (7.97) фактически вклад ветра доминируется во внутренней области, а горизонтальные вихревые переносы — в свободной струе. Следовательно, в такой модели связь $q(\psi)$ в круговороте устанавливается вихревыми процессами в пограничных течениях и свободной струе, а не неустойчивостью во внутренней области, как в модели Райнса—Янга.

Рассмотрим случай, когда вихревые процессы весьма значительны (т. е. k — велико), а источник q весьма слаб (τ — мало); тогда из (7.97)

$$c_1 = dq/d\psi \approx 0,$$

т. е. q не меняется поперек изолиний и является однородным полем. Это, несомненно, является типичным состоянием в случае слабого источника q и мощных вихревых процессов, т. е. когда градиенты постоянно «разрушаются» синоптическими вихрями. В таком случае интенсивность круговорота не зависит от источников и стоков [c_1 в (7.106) равно нулю] и имеет вид

$$|U_I| \approx \beta L_R^2.$$

Для характерного значения радиуса деформации Россби $L_R = 30$ км и $\beta = 2 \cdot 10^{-11}$ м$^{-1} \cdot$ с$^{-1}$ получим неплохую оценку для скорости во внутренней области ~ 2 см/с.

Хотя $1^1/_2$-слойная модель очень упрощена, ее решения имеют смысл и немало точек соприкосновения с реальным океаном. Тем не менее рассмотрим более сложную, но гораздо более реалистичную $2^1/_2$-слойную модель, используя изложенные выше идеи поиска решения в случае стационарной инерционной циркуляции.

$2^1/_2$-слойная модель имеет два активных слоя с различными плотностями, которые лежат на покоящемся абиссальном слое. Для удобства будем считать, что оба активных слоя имеют одинаковую среднюю глубину H и что скачки плотности $\Delta\rho$ между слоями одинаковы. Тогда запишем выражения для квазигеострофического потенциального вихря q в активных слоях:

$$q_1 = \nabla^2\psi_1 + \beta y + F(\psi_2 - \psi_1); \tag{7.108}$$

$$q_2 = \nabla^2\psi_2 + \beta y + F(\psi_1 - 2\psi_2), \tag{7.109}$$

где ψ_n $(n=1,\ 2)$ — квазигеострофическая функция тока; $F = f_0^2/(g'H)$; $g' = g\,\Delta\rho/\rho_0$.

Уравнения активных слоев запишем в виде

$$J(\psi_1,\ q_1) = \mathscr{F} + \nabla(k_1\nabla q_1); \tag{7.110}$$

$$J(\psi_2,\ q_2) = \nabla(k_2\nabla q_2). \tag{7.111}$$

Как и ранее, полагаем:

$$q_1 = c_1\psi_1 + q_{10}; \tag{7.112}$$

$$q_2 = c_2\psi_2 + q_{20}, \tag{7.113}$$

где c_1 и c_2 необходимо определить из интегральных ограничений типа (7.97), только теперь интегрирование необходимо проводить по области замкнутых изолиний в каждом слое.

Из (7.109) видно, что в отсутствие источников циркуляции в нижнем слое поток в верхнем слое посредством растяжения вихревых нитей изменяет геометрию изолиний q в нижнем слое, тем самым вызывая там движение. Рассмотрим случай, когда движение в нижнем слое очень слабо (или отсутствует). При $\psi_2 = 0$ уравнение для ψ_1 сводится к рассмотренному выше уравнению (7.101) для $1^1/_2$-слойной модели, решение которого дается уравнениями (7.106). Тогда, зная ψ_1, из (7.109) можно определить q_2:

$$q_2 = \beta y + F\psi_1. \tag{7.114}$$

Решение (7.114) показано на рис. 7.5 *г*. Рассмотрим субтропический круговорот. Пусть $q_2 = 0$ при $y_2 = -l_2$. Тогда для $y > -l_2$ изолинии q_2 замкнуты. Для $y < -l_2$ изолинии q_2 не замкнуты и пересекают боковые границы. Изолиния $q_2 = 0$, во внутренней области параллельная кругу широты, проходит через инерционные пограничные слои у западной и восточной стенок и достигает этих стенок при $y = 0$, где эта изолиния замыкается. Вне области, ограниченной изолинией $q_2 = 0$, имеются лишь очень слабые движения, так как все изолинии q_2 пересекают боковые границы. Внутри этой области слабая вынуждающая сила способна генерировать сильное течение.

Итак, в нижнем слое циркуляция может быть в пределах $|y| < l_2$, т. е. там, где изолинии q_2 замкнуты. Для этой области (7.97) имеет вид

$$0 = -\frac{dq_2}{d\psi_2} \oint k_2 \mathbf{v}_2 \, d\mathbf{l},$$

т. е. $dq_2/dq_2 = 0$ и, следовательно, q_2 — однороден или гомогенизирован.

В отличие от верхнего слоя, в нижнем нет внутренних источников потенциального вихря, которые поддерживали бы градиенты q_2 при $y=0$, поэтому $q_2=0$ в обоих круговоротах. Движение в нижнем слое сосредоточено только в этой области, при этом изолинии q_2 как бы «изгоняются» к северной и южной границам этой области. Эта особенность, отмеченная в разделе 7.1, наблюдается и в полях потенциальной завихренности океанов на средних глубинах в главном термоклине, где разница в поле q между круговоротами исчезает.

В области $|y| < l_2$ $\psi_2=0$ и из (7.109) и (7.106) получим

$$q_2 = \frac{c_1 + 2F}{c_1 + F} \beta y - \frac{F q_{10}}{c_1 + F}, \tag{7.115}$$

т. е. «выталкивание» изолиний q_2 из области с однородным q_2 приводит к тому, что во внешней области $|y| > l_2$ градиент q_2 превосходит обычный градиент β.

Таким образом, задача сводится к решению уравнений для ψ_1 и ψ_2 в районе $|y| < l_2$

$$\nabla^2\psi_1 + \beta y + F(\psi_2 - \psi_1) = c_1\psi_1 + q_{10}; \tag{7.116}$$

$$\nabla^2\psi_1 + \beta y + F(\psi_1 - 2\psi_2) = 0 \tag{7.117}$$

и в районе $|y| > l_2$

$$\nabla^2\psi_1 + \beta y - F\psi_1 = c_1\psi_1 + q_{10} \tag{7.118}$$

при

$$q_{10} = \beta L \quad \text{при} \quad y > 0;$$

$$q_{10} = -\beta L \quad \text{при} \quad y < 0.$$

Широта l_2 определяется как место, где выполняется требование, что ψ_1 непрерывна при $y = \pm l_2$.

Пренебрегая членом $\nabla^2\psi_n$ во внутренней области, легко решаем (7.116)—(7.118) с граничными условиями (7.104). Для $|y| < l_2$:

$$\psi_1 = \frac{1}{F + 2c_1}(3\beta y - 2q_{10}); \tag{7.119}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{F(F + 2c_1)}[\beta y(2F + c_1) - F q_{10}]. \tag{7.120}$$

Зональные скорости тогда:

$$u_1 = -\partial\psi_1/\partial y = -3\beta/(F+2c_1); \quad (7.121)$$

$$u_2 = -\partial\psi_2/\partial y = -\beta(2F+c_1)/[F(F+2c_1)]. \quad (7.122)$$

Ясно, что течение направлено на запад (условие, необходимое для того, чтобы течение замыкалось инерционными пограничными слоями), если $F > -2c_1$. Поскольку $c_1 < 0$, то поток сильнее в верхнем слое. Если рассмотреть крайний случай, в котором вихри настолько сильны, чтобы гомогенизировать потенциальную завихренность в верхнем слое (т. е. $c_1=0$), то получим $u_1=-3\beta/F$, $u_2=-2\beta/F$. Поскольку $F=-L_R^2$, то скорость потока в верхнем слое в этом случае равна $3\beta L_R^2$. Из решений (7.121), (7.122) ясно, что при $c_1 < 0$ амплитуда будет возрастать.

Таким образом, получено решение для области $|y| < l_2$. Для области $|y| < l_2$ $\psi_2=0$, а ψ_1 определяется из уравнения

$$\beta y - F\psi_1 = c_1\psi_1 + q_{10}, \quad (7.123)$$

решение которого есть (7.106).

Для определения границы l_2 потребуем, чтобы при $-l_2 < y < l_2$ ψ_1 из (7.123) было равно ψ_1 из (7.116). Тогда получим

$$l_2 = FL/(c_1+2F), \quad (7.124)$$

откуда видно, что при $c_1=0$ меридиональный масштаб циркуляции в нижнем слое составляет половину от меридионального масштаба в верхнем.

Решения для случая $c_1=0$ показаны на рис. 7.5. Отметим основные особенности полученных решений. Круговороты в нижнем слое имеют меньшие радиусы, чем в верхнем, в соответствии с (7.124). В верхнем слое q_1 гомогенизирован в пределах каждого круговорота, но значения его различны для субтропических и субполярных круговоротов, а в районе свободной струи имеется область резких градиентов q_1. В нижнем слое q_2 также гомогенизирован, но при этом его значение одинаково для обоих круговоротов.

Если рассмотреть последовательно $3^1/_2$, $4^1/_2$-, ..., $N^1/_2$-слойную модели, то можно получить совокупность таких круговоротов, как бы стоящих друг на друге. Поле ψ в любом нижележащем круговороте определяется циркуляцией вышележащего круговорота. Поэтому интенсивность и размеры круговоротов с глубиной уменьшаются, они как бы прижимаются к широте нулевого ротора напряжений ветра. Во всех слоях модели, кроме самого верхнего, потенциальный вихрь полностью «перемешан» и имеет одинаковое значение и для субполярных, и для субтропических круговоротов. Все это соответствует наблюдениям в северных частях Тихого и Атлантического океанов и вихреразрешающим расчетам. Таким образом, в рамках простой модели стационарной инерционной циркуляции при простых и физичных предположениях [направленность вихревых потоков $\overline{v'q'}$ по среднему градиенту, линейная зависимость $\psi(q)$] получены реалистичные результаты, объясняющие вертикальную структуру ветровых круговоротов в океане.

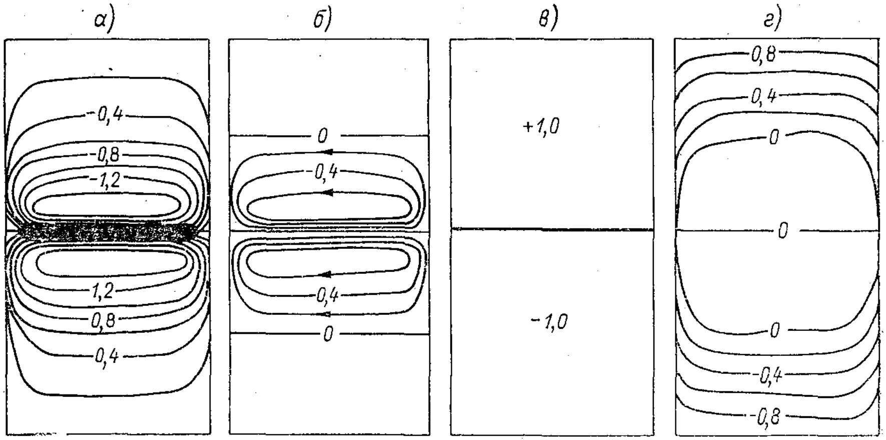


Рис. 7.5. Решение задачи Маршалла—Нурсера для $2^1/_2$-слойной модели при $c_1 = 0$ [7].

а — ψ_1, интервал между изолиниями $0{,}2\,\beta L_R^2 L$; *б* — ψ_2, интервал между изолиниями $0{,}2\,\beta L_R^2 L$; *в* — q_1; *г* — q_2, интервал между изолиниями $0{,}2\,\beta L$.

7.6. Динамика Антарктического циркумполярного течения

В предыдущих разделах были рассмотрены циркуляция и динамические балансы, характерные для ветровых круговоротов. Циркуляция ветровых круговоротов определяется балансом Свердрупа в обширной внутренней области, к которой добавляются пограничные слои, где важную роль играют вязкие и инерционные члены. В отличие от других океанов, в Южном океане отсутствуют меридиональные барьеры, что обусловливает существование квазизонального Антарктического циркумполярного течения (АЦТ). Отсутствие меридиональных преград приводит в целом к исчезновению средних зональных градиентов давления и, следовательно, средней меридиональной скорости, т. е. баланс Свердрупа невозможен. В связи с этим важнейшую роль в динамике зональных течений типа АЦТ играют вихревые процессы и донная топография. Здесь мы не будем рассматривать роль донной топографии, а уделим основное внимание исследованию влияния вихревых переносов, используя для этого модель с плоским дном.

Действительно, наблюдения последних лет показали, что вихри играют существенную роль в динамике АЦТ. Это течение возбуждается полем касательного напряжения западного ветра, имеющего меридиональный профиль, близкий к синусоидальному. При этом характерный меридиональный масштаб поля напряжения ветра около 3000 км, в то время как меридиональный профиль АЦТ имеет существенно меньший характерный меридиональный масштаб (менее 1000 км). Таким образом, наблюдаемое в природе АЦТ имеет узкоструйный характер. Это же продемонстрировали и вихреразрешающие расчеты в зонально ориентированных каналах. Вихреразрешающие расчеты показали, что соотношение Свердрупа не выполняется: вертикальный компонент ротора тангенциального напряжения ветра балансируется дивергенцией вихревого потока потенциальной завихренности. Синоптические вихри переносят восточный компонент скорости течения (u) к центру струи (против градиента скорости), реализуя так называемый эффект «отрицательной вязкости» и увеличивая скорость в центре струи.

Попытка воспроизвести этот механизм в моделях крупномасштабной циркуляции Южного океана, использующих грубое пространственное разрешение (шаг сетки более 100 км) и обычную диффузионную параметризацию для вихревых потоков импульса, не удалось. Под диффузионной параметризацией вихревого потока некоторой субстанции понимается пропорциональность этого вихревого потока среднему градиенту этой субстанции. Следует отметить, что такая схема параметризации достаточно строго обоснована только для вихревых потоков сохраняющихся субстанций. Поэтому использование диффузионной параметризации для вихревых потоков импульса не обосновано, так как импульс не является сохраняющейся субстанцией (даже при отсутствии внешних сил изменение импульса единичного движущегося объема жидкости будет определяться градиентом давления). Принципиальным недостатком диффузионной параметризации вихревого потока импульса является необходимость использования только положительных коэффициентов вязкости, поскольку при отрицательных значениях задача становится математически некорректной. Однако синоптические вихри способны переносить энергию по спектру от малых масштабов к большим, что и продемонстрировали вихреразрешающие модели АЦТ. Описать подпитку крупномасштабных течений за счет вихрей с помощью диффузионной параметризации вихревых потоков импульса невозможно. С другой стороны, потенциальный вихрь является сохраняющейся субстанцией, и для него диффузионная параметризация была достаточно строго обоснована. Поэтому при создании модели АЦТ будем применять именно эту параметризацию [3].

Будем использовать двухслойную квазигеострофическую модель, рассмотренную в предыдущей главе. При исследовании динамики Южного океана эффективным приемом, позволяющим существенно упростить сложную систему уравнений, является зональное осреднение, т. е. осреднение по зональной координате x:

$$\overline{S} = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} S\, dx. \tag{7.125}$$

Здесь S — некоторый параметр; L_x — зональная протяженность бассейна; черта сверху означает зонально осредненную величину. При таком осреднении пропадает зависимость параметров от зональной координаты, а их зональные градиенты обращаются в нуль. Осредним систему уравнений сохранения потенциального вихря в квазигеострофическом приближении (6.35)—(6.38), используя (7.125):

$$\partial \bar{q}_1/\partial t = -\partial \left(\overline{v_1' q_1'}\right)/\partial y - (1/H_1)\left(\partial \overline{\tau_x}/\partial y\right); \qquad (7.126)$$

$$\partial \bar{q}_2/\partial t = -\partial \left(\overline{v_2' q_2'}\right)/\partial y + \varepsilon\, \partial \overline{u_2}/\partial y; \qquad (7.127)$$

$$\bar{q}_1 = -\partial \bar{u}_1/\partial y + f - [f_0^2/(g' H_1)]\,(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2); \qquad (7.128)$$

$$\bar{q}_2 = -\partial \bar{u}_2/\partial y + f + [f_0^2/(g' H_2)]\,(\bar{\psi}_1 - \bar{\psi}_2); \qquad (7.129)$$

$$\bar{u}_i = -\partial \bar{\psi}_i/\partial y; \quad \bar{v}_i = \partial \bar{\psi}_i/\partial x. \qquad (7.130)$$

Здесь дно предполагается плоским, а в (7.126) и (7.127) штрихами помечены флюктуации соответствующих величин, т. е. $u' = u - \bar{u}$. Из-за нелинейности исходной системы уравнений в осредненной системе появляются вихревые потоки q, в результате чего система становится незамкнутой. Для замыкания системы будем использовать диффузионную параметризацию вихревых потоков потенциального вихря:

$$\overline{v'q'} = -k_i\, \partial \bar{q}_i/\partial y \quad (\text{не суммировать по } i). \qquad (7.131)$$

При использовании такой параметризации принципиальным моментом является определение коэффициента вихревого переноса k_i. Ясно, что невозможно требовать «точного» определения выражения для k_i. С помощью физически разумных гипотез, опираясь на результаты вихреразрешающих экспериментов, необходимо найти такое выражение для k_i, которое позволило бы воспроизвести основные черты взаимодействия среднего потока с синоптическими вихрями.

В работах ряда авторов было обосновано, что $k_i \geqslant 0$. Для определения ограничений, накладываемых на k_i в зональных каналах, используем теорему, доказанную Ф. Брезертоном в 1965 г.: интеграл по поперечному сечению зонального канала от проинтегрированного по вертикали зонально осредненного вихревого потока q равен нулю. Тогда для двухслойной модели запишем:

$$\int_0^L \left(H_1 \overline{v_1' q_1'} + H_2 \overline{v_2' q_2'}\right) dy = 0, \qquad (7.132)$$

где L — ширина канала. Для доказательства теоремы запишем выражение для флюктуации потенциального вихря в верхнем слое $(q' = q_1 - \bar{q}_1)$, домножим на v_1' и осредним зонально. Используем уравнение неразрывности и после преобразований получим

$$\overline{v_1' q_1'} = -\partial \overline{u_1' v_1'}/\partial y + [f_0^2/(g' H_1)]\, \overline{\psi_1' \partial (\psi_1' - \psi_2')/\partial x}. \qquad (7.133)$$

Аналогично для нижнего слоя

$$\overline{v_2'q_2'} = -\partial\overline{u_2'v_2'}/\partial y - [f_0^2/(g'H_2)]\,\overline{\psi_2'\partial(\psi_1' - \psi_2')/\partial x}. \qquad (7.134)$$

Домножив (7.133) на H_1, а (7.134) на H_2 и сложив, получим:

$$H_1\overline{v_1'q_1'} + H_2\overline{v_2'q_2'} = -H_1\partial\overline{v_1'u_1'}/\partial y - H_2\overline{v_2'u_2'}/\partial y, \qquad (7.135)$$

поскольку $\overline{(\psi_1' - \psi_2')\,\partial(\psi_1' - \psi_2')/\partial x} = 0$.

Если (7.135) проинтегрировать по ширине канала и принять во внимание условие непротекания жидкости через твердый контур, то получим (7.132). Поясним физический смысл теоремы Брезертона. Можно показать, что при отсутствии внешних воздействий и трения изменение во времени проинтегрированного по глубине зонально осредненного импульса обусловливается проинтегрированным по глубине вихревым потоком q:

$$\partial(H_1\bar{u}_1 + H_2\bar{u}_2)/\partial t = H_1\overline{v_1'q_1'} + H_2\overline{v_2'q_2'}. \qquad (7.136)$$

Если (7.136) проинтегрировать по поперечному сечению канала, то станет очевидно, что теорема Брезертона представляет собой условие сохранения полного среднезонального импульса в модели с плоским дном. Таким образом, вихревые движения в зональном канале перераспределяют импульс, увеличивая или уменьшая его где-либо в пределах канала, но не являются его источником или стоком.

Используя (7.132), можно получить выражение для отношения коэффициентов вихревого переноса потенциального вихря в верхнем и нижнем слоях. Если полагать, что коэффициенты в верхнем и нижнем слоях постоянны, и подставить в (7.132) параметризационное соотношение (7.131), то получим:

$$\theta = \frac{k_2}{k_1} = -\frac{H_1}{H_2}\,\frac{\int_0^L (\partial\bar{q}_1/\partial y)\,dy}{\int_0^L (\partial\bar{q}_2/\partial y)\,dy}. \qquad (7.137)$$

Следовательно, если мы при проведении расчетов циркуляции в канале задаем коэффициент вихревого потока q в верхнем слое равным k_1, то коэффициент в нижнем слое обязан быть равным θk_1, где θ определяется из (7.137). Можно показать, что если априори задать, например, $k_2 = k_1$, то это приведет к нарушению закона сохранения импульса и, следовательно, к ошибочным результатам.

Итак, теорема Брезертона позволяет определить изменение коэффициента k_i по вертикали. Определим теперь его изменение по горизонтали. Наша задача — воспроизвести в зонально осредненной модели с грубым пространственным разрешением наблюдаемую в природе и в вихреразрешающих численных экспериментах узкую, концентрированную струю АЦТ. Если задать напряжение ветра в виде $\tau_x = \tau_0 \sin(\pi y/L)$ (что хорошо соответствует полю ветра над Южным океаном) и решать систему (7.126)—(7.131) с учетом (7.137), полагая при этом k_i постоянными в каждом слое, то получим зональное течение, имеющее достаточно гладкий, «размазанный» меридиональный профиль скорости, подобный профилю напряжения ветра. Такое же широкое, плавное течение получено при использовании коэффициентов переноса, пропорциональных вертикальному сдвигу среднезональной скорости $(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)$ — важнейшему параметру в теории бароклинной неустойчивости. При такой гипотезе в центре канала коэффициенты k_i имеют максимум, в то время как для концентрации восточного компонента скорости в центре струи необходимо, чтобы эти коэффициенты имели бы локальный минимум. Дело в том, что из (7.126) и (7.131) в стационарном режиме в верхнем слое основной баланс имеет вид

$$k_1\, \partial\bar{q}_1/\partial y \approx \bar{\tau}_x. \qquad (7.138)$$

В районе основной бароклинной струи $\partial\bar{q}_1/\partial y$ определяется в первую очередь вертикальным сдвигом зональной скорости, так как эффект растяжения вихревых нитей превышает градиент планетарной завихренности, а градиент относительного вихря пренебрежимо мал. Следовательно, для того чтобы характерный меридиональный масштаб $(\bar{u}_1 - \bar{u}_2)$ был меньше, чем характерный масштаб τ_x, необходимо наличие локального минимума k_1 в центре струи. Основываясь на вихреразрешающих экспериментах в зональном канале, можно показать, что этим свойством обладает коэффициент, определяемый в виде [1, 2]

$$k_1 = c\,|\bar{u}_1 - \bar{u}_2|/(\partial q_1/\partial y)^2, \qquad (7.139)$$

где c — коэффициент пропорциональности.

Введем в рассмотрение характерные масштабы для квазигеострофического потенциального вихря, скорости и других параметров, определяющих задачу:

$$\bar{q}_i = \beta_0 L q_i^*;\quad y = Ly^*;\quad \bar{u}_i = u_c u_i^*;\quad u_c = g'\beta_0 H f_0^{-2};\quad u_S = \pi\tau_0 (H_1\beta_0 L)^{-1};$$

$$\delta_i = H_i H^{-1};\quad H = H_1 + H_1;\quad \gamma = L_R L^{-1};\quad L_R = \left(\frac{g' H_1 H_2}{f_0^2 H}\right)^{1/2}.$$

Здесь звездочкой помечены безразмерные параметры, β_0 — среднее значение широтного изменения параметра Кориолиса, L_R — радиус деформации Россби. Заметим, что u_S — характерный масштаб скорости, вытекающий из свердруповского баланса, а u_c — масштаб зональной скорости, получающийся из выражения для меридионального градиента q, при условии, что градиент относительной завихренности мал, а β-эффект балансирует эффект растяжения вихревых нитей, т. е.

$$\beta = [f_0^2/(g'H)]\, u_c. \qquad (7.140)$$

Если проинтегрировать (7.126) по y с учетом (7.131) и (7.139), то в стационарном случае получим

$$(u_1^* - u_2^*)\left(\frac{\partial q_1^*}{\partial y^*}\right)^{-1} = \frac{u_S}{u_c}\frac{\beta_0^2 L_R}{\gamma \pi c}\sin(\pi y^*) + c_0. \quad (7.141)$$

При $y^* = 0$ вихревой поток q, как и внешняя сила, равен нулю, поэтому $c_0 \equiv 0$.

Градиент относительной завихренности мал (вне тонких пристеночных слоев), поэтому

$$\partial q_1^*/\partial y^* = 1 + (1/\delta_1)(u_1^* - u_2^*). \quad (7.142)$$

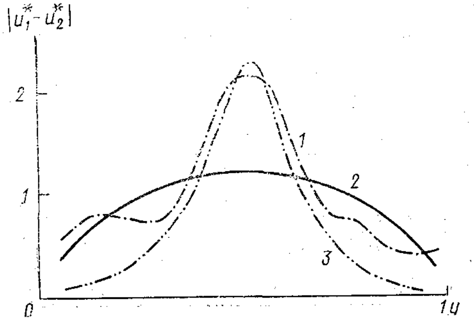


Рис. 7.6. Меридиональные профили вертикального сдвига среднезональной скорости $(u_1^* - u_2^*)$ в безразмерных единицах [1].

1 — из вихреразрешающих расчетов в зональном канале; *2* — рассчитанный для случая, когда $k \sim |\overline{u}_1 - \overline{u}_2|$; *3* — рассчитанный по формуле (7.143).

Тогда получим искомое решение для вертикального сдвига зональной скорости:

$$u_1^* - u_2^* = R\sin(\pi y^*)\,[1 - R\sin(\pi y^*)]^{-1}, \quad (7.143)$$

где

$$R = u_S\beta_0^2 L_R/(u_c\gamma c\pi\delta_1) < 1.$$

Меридиональный профиль $(u_1^* - u_2^*)$, определяемый (7.143), представлен на рис. 7.6. Видно, что в основной части струи вдали от стенок этот профиль хорошо согласуется с аналогичным профилем, полученным в вихреразрешающих расчетах. Следовательно, использование диффузионной параметризации для вихревого потока q и гипотезы (7.139) позволяет удовлетворительно описать зональное течение в канале. Полная система уравнений (7.126)—(7.131) с учетом (7.137) и (7.139) решалась численно. В этой модели в верхнем слое вертикальный компонент ротора тангенциального напряжения ветра балансируется дивергенцией вихревого потока q, а в нижнем слое аналогичный вихревой поток балансируется донным трением. Получившееся в расчетах зональное течение — аналог АЦТ — является узким, концентрированным, особенно в верхнем слое. Таким образом, в модели с грубым пространственным разрешением благодаря адекватной параметризации вихревых процессов синоптического масштаба удалось описать эффект «отрицательной вязкости» и получить достаточно реалистичные результаты [3].

Вопросы для самопроверки

1. Каковы основные черты крупномасштабной циркуляции океана?
2. Что такое геострофическая изолиния, или изострофа?
3. Каковы наиболее характерные особенности поля потенциальной завихренности в океане?
4. Вдоль каких изолиний движется жидкость в океане и почему?
5. В каком направлении — северном или южном — увеличивается толщина изопикнических слоев в Южном полушарии?
6. Почему оценка вертикальной скорости из уравнения неразрывности является нерепрезентативной?
7. Почему при переходе к безразмерным переменным в разделе 7.2 были введены следующие масштабы для давления: $\rho_0 f_0 UL$ и для плотности $\rho_0 f_0 UL/(gH)$?
8. В уравнении неразрывности (7.120) перед членом $\partial w/\partial z$ стоит множитель γ/δ — отношение двух малых параметров. Почему же мы пренебрегаем этим членом?
9. Как зависит глубина поверхностного экмановского слоя от скорости ветра?
10. Почему при решении задачи Экмана (7.22) и (7.23) на дне задаются условия $u_E = -u$, $v_E = -v$?
11. Суммой каких переносов является полный перенос в соотношении Свердрупа?
12. В чем состоит неопределенность решения Свердрупа?
13. Почему пограничное течение в задаче Свердрупа может быть у восточной границы?
14. Куда будет направлен свердруповский перенос в субтропическом круговороте Южного полушария?
15. Перечислите основные достоинства и недостатки теории, базирующейся на соотношении Свердрупа.
16. Где происходит диссипация в ветровом круговороте Стоммела?
17. На каком основании вводится функция полных потоков при решении задачи Стоммела?
18. Какой метод был использован при нахождении решения задачи Стоммела и в чем его суть?
19. Что такое растянутая координата пограничного слоя, как она определяется и с какой целью вводится?
20. Почему скорость течения в пограничном слое существенно превышает скорость во внутренней области круговорота и как ее можно оценить, зная ширину пограничного слоя (δ_S), горизонтальный масштаб круговорота (L), скорость во внутренней области (U_I)?
21. Почему необходимы дополнительные краевые условия в задаче Манка?
22. С каким параметром в задачах Стоммела и Манка связана западная интенсификация течений?
23. Как определяется время затухания, вызванного донным трением, в задаче Стоммела и каково характерное время вязкой диффузии относительного вихря в пограничном слое Манка?
24. Объясните динамику круговоротов Стоммела и Манка с точки зрения теории переноса потенциальной завихренности.
25. Сформулируйте недостатки теории ветровых круговоротов Стоммела и Манка.
26. В чем суть теории гомогенизации потенциального вихря?
27. Какая циркуляция называется свободной?
28. Вследствие чего поток в линейной модели стационарной свободной циркуляции может направляться поперек изолиний потенциального вихря?
29. Как циркулируют круговороты в нелинейной модели стационарной свободной циркуляции?
30. Каков должен быть баланс внутри замкнутой изолинии тока, чтобы существовало невязкое течение, слабо зависящее от источников и стоков?
31. Какие основные положения были использованы при формулировании модели стационарной свободной циркуляции Маршалла—Нурсера?

32. Что такое $1^1/_2$-слойная модель и для чего она нужна?

33. В какой части ветрового круговорота Маршалла—Нурсера доминирует вклад ветра, а в какой — диссипация из-за вихрей?

34. В чем суть подхода Маршалла—Нурсера при установлении вертикальной структуры ветровой циркуляции?

35. Какие основные особенности крупномасштабной циркуляции океана воспроизводит модель Маршалла—Нурсера?

36. В чем принципиальное отличие динамики круговоротов от динамики зональных течений?

37. Почему не возможен баланс Свердрупа в зональном канале?

38. Что такое диффузионная параметризация вихревых потоков?

39. Почему не вполне корректно применять диффузионную параметризацию для вихревых потоков импульса и вполне корректно — для вихревых потоков потенциального вихря?

40. Почему нельзя описать подпитку вихрями средних крупномасштабных течений с помощью диффузионной параметризации вихревых потоков импульса?

41. Благодаря какому механизму осуществляется концентрация восточного компонента скорости в стрежне АЦТ?

42. Каков физический смысл теоремы Брезертона?

43. Почему нельзя задавать коэффициенты переноса потенциального вихря в двухслойной модели в виде $k_1 = k_2 = \text{const}$?

44. Почему коэффициент вихревого переноса в верхнем слое должен иметь локальный минимум для того, чтобы воспроизвести узкоструйный характер зонального течения?

45. Как были определены масштабы скорости u_c и u_S?

Типовые упражнения

1. Оцените порядок членов в определении потенциального вихря (7.7) и покажите, что можно пренебречь относительной завихренностью.

2. В главе 6 дается определение потенциального вихря для двухслойной квазигеострофической модели. Можно записать его в следующем виде:

$$q = \zeta + \beta y + f_0 h / H_0,$$

где h — высота смещения поверхности раздела; H_0 — средняя толщина слоя. Получите это определение из (7.3), учитывая, что толщина слоя $H = H_0 - h$, $h \ll H_0$, а также используя приближение β-плоскости: $f = f_0 + \beta y$.

3. Из системы уравнений (7.9)—(7.12) вывести полное уравнение для вертикального компонента относительно вихря (ζ) с учетом всех вязких членов.

4. Оцените член $\omega_x \partial w / \partial x$ и покажите, что он пренебрежимо мал по сравнению, например, с $u \nabla \zeta$.

5. Оцените вертикальную скорость для крупномасштабных круговоротов и движений синоптического масштаба, используя обе оценки (7.15) и полагая, что $f_0 = 10^{-4}$ с$^{-1}$, $\beta = 2 \cdot 10^{-11}$ м$^{-1} \cdot$с$^{-1}$, $H = 10^3$ м, $u = 5$ см/с для круговоротов и 20 см/с для синоптических движений, $L = 10^8$ м для круговоротов и 10^7 м для синоптических движений.

6. Какова будет глубина поверхностного экмановского пограничного слоя, если $A_V = 10^{-2}$ м^2/с?

7. Найдите выражение для экмановской накачки при тангенциальных напряжениях ветра $\tau_x = \tau_0 \sin(2\pi y)$, $\tau_y = \tau_0 \cos(\pi x)$.

8. Выведите выражение для вертикальной скорости экмановского придонного слоя в случае плоского дна и при наличии топографии.

9. Выведите соотношение Свердрупа из уравнений движения (7.28) и (7.29).

10. Получите соотношение Свердрупа, оценивая члены в полном уравнении для относительной завихренности.

11. Оцените коэффициент трения r в задаче Стоммела по характерной ширине Гольфстрима, равной 100 км.

12. Используя масштабы длины, скорости и т. д., характерные для ветровых круговоротов, оцените балансы завихренности во внутренней области и в западном пограничном течении для задач Стоммела и Манка.

13. По аналогии с восточной границей рассмотрите западный пограничный слой в задаче Стоммела, покажите, что $l = \varepsilon_S$, и выведите уравнение (7.61).

14. Во многих учебниках и монографиях приводится общее решение задачи Стоммела, полученное традиционным способом. Сравните его с полученным здесь решением с помощью методов пограничного слоя и покажите, что они идентичны.

15. Оцените коэффициент горизонтальной вязкости (A_H), если ширина Гольфстрима в задаче Манка равна 100 км.

16. В вихреразрешающих моделях часто используют так называемую «бигармоническую» вязкость, вследствие чего в уравнении завихренности появляются члены типа $A_4 \nabla^6 \psi$ (см. главу 6). Выведите выражение для ширины западного пограничного слоя в модели с бигармонической вязкостью и оцените ширину западного пограничного течения, если $A_4 = 10^{10}$ м^4/с.

17. Предположим, что в задаче Стоммела $\tau_x \neq 0$ на северной и южной стенках бассейна. Используя методы пограничного слоя, получите решения для северного и южного пограничных слоев и состыкуйте с решением Свердрупа во внутренней области так, чтобы удовлетворить условию непротекания жидкости через северную и южную стенки.

18. Оцените скорость во внутренней области баротропного стационарного инерционного круговорота шириной $L = 1000$ км и глубиной $H = 1000$ м, возбуждаемого ветровым напряжением $\tau_0 = 0{,}1$ Н/м^2 и балансируемого донным трением с коэффициентом $\varepsilon = 10^{-7}$ с$^{-1}$.

19. Оцените ширину восточной струи в этой модели, используя оценки скорости во внутренней области, полученные в предыдущем упражнении.

20. Определите направление вихревого потока потенциального вихря в циклоническом круговороте Северного полушария.

21. Покажите, что баланс $O(\varepsilon)$ внутри замкнутой изолинии ψ_0 имеет вид 7.93. Для доказательства используйте (7.90)—(7.92),

уравнение неразрывности, представьте $J(\psi, q)$ в виде $\nabla \cdot (\mathbf{v}q)$ и полагайте, что $q_0 = c_1\psi_0 + c_2$.

22. По аналогии с $2^1/_2$-слойной моделью Маршалла—Нурсера сформулируйте уравнения $3^1/_2$-слойной модели и получите ее решение, полагая толщины активных слоев и скачки плотности между ними одинаковыми.

23. Выведите теорему Брезертона для случая с донной топографией, задаваемой в виде $B = B(x)$. Используйте определение для q в нижнем слое (6.38).

24. Получите решение для вертикального сдвига зональной скорости $(u_1^* - u_2^*)$ в случае: если:

а) $k_1 = c$;

б) $k_1 = c|u_1 - u_2|$.

25. Выведите выражение для коэффициента k_1, используя (7.139), (7.141), (7.142).

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНЕРЦИОННОГО БАРОТРОПНОГО ВЕТРОВОГО КРУГОВОРОТА

Цель работы — нахождение стационарного решения уравнения эволюции потенциального вихря в баротропном океане прямоугольной формы, циркуляция в котором возбуждается ветром и балансируется донным трением. Этот случай сильно нелинейной циркуляции аналитически рассматривается в разделе 7.4. Численное решение нестационарного уравнения для потенциального вихря в баротропном океане явится полезным дополнением к теории стационарной свободной циркуляции.

1. Уравнение модели, ее параметры и методы решения. Основное уравнение модели — уравнение квазигеострофического потенциального вихря в баротропном случае (все обозначения даны в разделе 7.4):

$$\partial q/\partial t + J(\psi, q) = (1/H)\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau} - \varepsilon\nabla^2\psi, \tag{7.144}$$

где

$$q = \nabla^2\psi + \beta(y - y_0). \tag{7.145}$$

Здесь y_0 — широта середины бассейна.

Граничное условие на твердых стенках бассейна для функции тока ψ:

$$\psi = 0, \tag{7.146}$$

и для потенциального вихря q:

$$q = \beta(y - y_0). \tag{7.147}$$

То есть относительный вихрь на границе бассейна полагается равным нулю, что соответствует условию свободного скольжения.

Эти уравнения интегрируются численно по времени, причем сначала находится значение потенциального вихря в следующий момент времени из конечно-разностного аналога уравнения (7.144), а затем итерационным методом находится функция тока из уравнения Пуассона (7.145) по известному значению q.

При конечно-разностном представлении уравнений модели оператор Лапласа $\nabla^2\psi$ расписывается по традиционному пятиточечному шаблону (центральными разностями), а якобиан — по схеме Аракавы (см. лабораторную работу к главе 6).

Интегрирование по времени осуществляется точно так же, как в лабораторной работе к главе 6, т. е. с помощью схемы центральных разностей с периодическим применением схемы Мацуно.

Задача решается для прямоугольного бассейна с плоским дном размером 1000×1000 км. Основные параметры задачи следующие:

$$\tau_y=0;\ \ \tau_x=-\tau_0\cos(\pi y/L);\ \ \tau_0=0{,}1\ \text{Н/м}^2;$$

$$\beta=1{,}5\cdot10^{-11}\ \text{м}^{-1}\cdot\text{с}^{-1};\ \ H=10^3\ \text{м};\ \ \varepsilon=2\cdot10^{-8}\ \text{с}^{-1}.$$

Шаг по пространству $\Delta x=\Delta y=50$ км. Шаг по времени $\Delta t=2$ ч.

Интегрирование проводится до достижения стационарного состояния. Это состояние определяется по интегральной кинетической энергии $K=\frac{H}{2}\int\limits_S(\nabla\psi)^2dS$ (S — площадь бассейна). В процессе интегрирования она должна достигнуть максимального уровня и затем начать колебания около максимального уровня — это и будет свидетельством достижения стационарного состояния.

Уравнение Пуассона (7.145) решается методом последовательной верхней релаксации, алгоритм которого дается в приложении к лабораторной работе из главы 6. Относительная погрешность при решении (7.145) для функции тока должна составлять 0,001.

Порядок выполнения работы

1. Задаются значения параметров и начальные поля ψ и q.
2. Выполняется шаг по схеме Мацуно.
3. Рассчитываются поля ψ, q и интегральная кинетическая энергия.
4. Делаются 19 шагов по схеме центральных разностей, затем опять один шаг по схеме Мацуно и опять 19 шагов центральными разностями и т. д.

При выполнении работы пользуйтесь рекомендациями и списком литературы к лабораторной работе из главы 6.

Формы отчетности. Отчетными материалами являются описание алгоритма программы, распечатка программы, поля функции тока, скорости, потенциального вихря в стационарном состоянии, график временного хода кинетической энергии, анализ полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 7

1. Ивченко В. О. О параметризации вихревых потоков квазигеострофического потенциального вихря в зональных течениях//Докл. АН СССР.— 1984.— Т. 277, № 4.— С. 972—976.

2. Ивченко В. О. О параметризации вихревых потоков квазигеострофического потенциального вихря в зональных течениях океана//Изв. АН СССР, ФАО.— 1985.— Т. 21, № 8.— С. 856—863.

3. Моделирование циркуляции Южного океана/В. В. Гурецкий, А. И. Данилов, В. О. Ивченко, А. В. Клепиков.— Л.: Гидрометеоиздат, 1987.— 200 с.

4. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика/Пер. с англ.— М.: Мир, 1984.— 811 с.

5. Hendershott M. C. Single layer models of the general circulation//General circulation of the ocean/Ed. H. D. I. Abarbanel and W. R. Young.— N. Y.: Springer-Verlag, 1987.— P. 202—267.

6. Marshall J. C. Wind driven ocean circulation theory — steady free flow//Large-scale transport processes in oceans and atmosphere/Ed. J. Willebrand and D. L. T. Anderson.— Dordrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986.— P. 225—245.

7. Marshall J. C., Nurser G. Steady free circulation in a stratified guasi-geostrophic ocean//J. Phys. Oceanogr.— 1986.— Vol. 16, N 11.— P. 1799—1813.

8. Rhines P. B., Young W. R. Homogenization of potential vorticity in planetary gyres//J. Fluid Mech.— 1982.— Vol. 122.— P. 347—367.

ГЛАВА 8

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПРИМЕСИ В ОКЕАНЕ

Настоящая глава посвящена одному из важных прикладных вопросов динамической океанологии, а именно моделированию процессов распространения примеси в океане. Известно, что наряду с физико-химическими, биологическими факторами, определяющими изменения концентрации любой примеси, попавшей в океан естестественным или искусственным путем, большую роль играют гидродинамические факторы, связанные с переносом примеси течениями и рассеянием ее турбулентными вихрями. В качестве наглядного примера на рис. 8.1 приведены схемы динамической топографии и распределение нефтяных углеводородов на поверхности в районе Гольфстрима. Простое их сопоставление указывает на то, что наличие основного струйного потока и системы циклонических и антициклонических вихревых образований на его периферии полностью предопределяет черты пространственного нефтяного загрязнения этого района океана.

Более того, в настоящее время обнаружено, что техногенная примесь (прежде всего нефть и нефтепродукты, хлорорганические пестициды и тяжелые металлы) переносится в Мировом океане на большие расстояния от ее источников, накапливается в центрах крупномасштабных круговоротов, а также во фронтальных и эстуарных зонах, создает в них поля устойчивого загрязнения и, наконец, вертикальными токами переносится в более глубокие слои океана. Эти тревожные черты современного загрязнения вод океана усиливают актуальность задачи расчета и прогноза на основе различных методов формирования полей концентрации любой техногенной примеси.

8.1. Основное уравнение гидродинамики для примеси

Введем понятие *концентрации примеси* C, определяемой как отношение массы примеси к полной массе жидкости, находящихся в элементарном объеме, т. е. $C=m_C/m$. Если в некоторый объем жидкости внесем примесь в концентрации, превосходящей концентрацию примеси в прилегающем объеме (рис. 8.2), то вследствие второго начала термодинамики возникнет тенденция к выравнива-

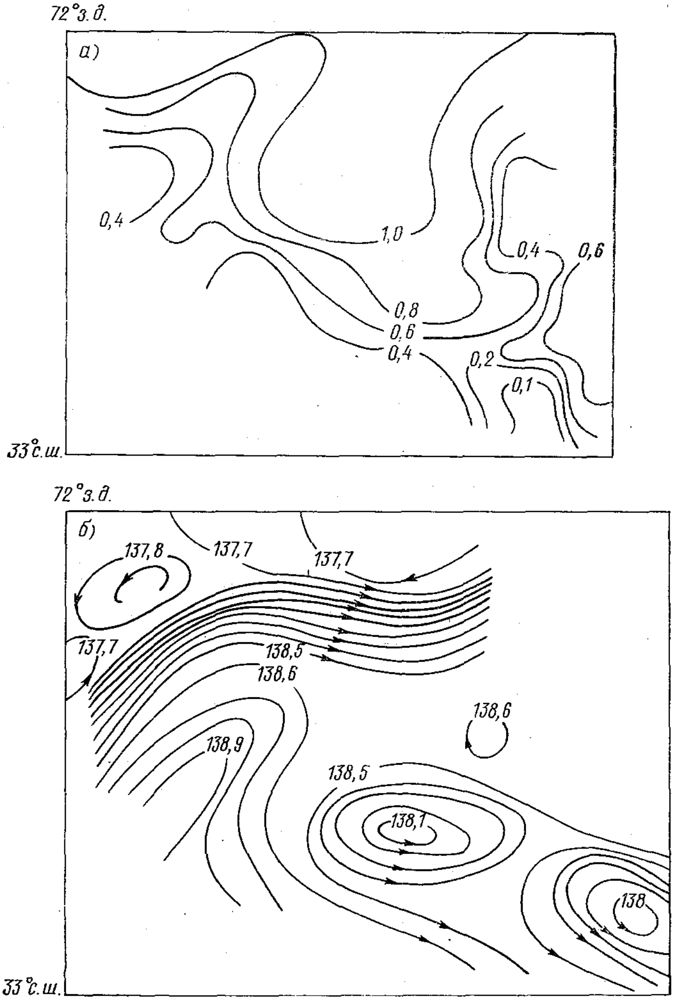


Рис. 8.1. Распределение нефтяных углеводородов в поверхностном микрослое (в мг/л) (*а*) и схема динамической топографии на поверхности (*б*) в Гольфстриме (по А. И. Симонову, 1985).

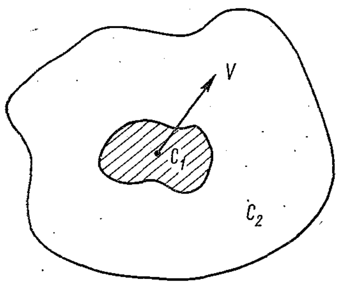


Рис. 8.2. К выводу основного уравнения диффузии примеси.

нию концентрации, путем переноса примеси из одного объема в другой. Перенос примеси будет происходить двумя путями: во-первых, возникнет диффузионный поток примеси $\Phi_д$ за счет тепловых движений молекул, и, во-вторых, будет наблюдаться адвективный перенос примеси $\Phi_а$ течениями:

$$\Phi_C = \Phi_д + \Phi_а, \quad \text{или} \quad \Phi_C = -\rho \varkappa_C \Delta C + \rho C \mathbf{v}, \tag{8.1}$$

где $\varkappa_C$ — коэффициент молекулярной диффузии; ρ — плотность морской воды; $\mathbf{v}$ — вектор течения; ΔC — градиент концентрации.

Из термодинамики известно, что локальное изменение массы примеси ρC в фиксированном объеме обусловливается дивергенцией суммарного потока примеси:

$$\partial (\rho C)/\partial t + \operatorname{div} \Phi_C = 0. \tag{8.2}$$

Выразим в уравнении (8.2) поток примеси Φ_C при помощи (8.1) после предварительного выполнения операции div, тогда

$$\partial (\rho C)/\partial t - \varkappa_C \operatorname{div} \Delta \rho C + \operatorname{div} \rho C \mathbf{v} = 0 \tag{8.3}$$

или

$$\rho\, \partial C/\partial t + C\, \partial \rho/\partial t - \rho \varkappa_C \operatorname{div} \Delta C + C \operatorname{div} \rho \mathbf{v} + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} C = 0. \tag{8.4}$$

Запишем уравнение неразрывности несжимаемой жидкости:

$$\partial \rho/\partial t + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \tag{8.5}$$

и сложим его с уравнением (8.4). После приведения подобных членов получим

$$\rho\, dC/dt = \rho \varkappa_C \operatorname{div} \Delta C \equiv \rho \varkappa_C \nabla^2 C. \tag{8.6}$$

Разделим (8.6) на плотность морской воды ρ, запишем его левую часть в покомпонентной форме, получим *уравнение гидродинамики примеси*:

$$\partial C/\partial t + u\, \partial C/\partial x + v\, \partial C/\partial y + w\, \partial C/\partial z = \varkappa_C \nabla^2 C, \tag{8.7}$$

в котором знак ∇^2 обозначает трехмерный оператор Лапласа.

Поскольку в океане поведение всех полей носит ярко выраженный турбулентный характер, то, проведя осреднение уравнения (8.7) на основе статистико-вероятностных представлений о случайном характере движения диффундирующих частиц, получим, наконец, *основное уравнение турбулентной диффузии примеси*

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{u} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x} + \overline{v} \frac{\partial \overline{C}}{\partial y} + \overline{w} \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} = \varkappa_C \nabla^2 C + \frac{1}{\overline{\rho}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(-\overline{\overline{\rho} \mathbf{v}'_j C'} \right) =$$

$$= \varkappa_C \nabla^2 \overline{C} + \frac{\partial}{\partial z} K_C \frac{\partial \overline{C}}{\partial z} + K_{CL} \nabla^2 C. \tag{8.8}$$

Уравнение (8.8) описывает не мгновенные поля примеси и течений, а осредненные за некоторый промежуток времени t. Кроме того, в (8.8) турбулентные потоки примеси $-\overline{\overline{\rho} \mathbf{v}'_j C'} = \Phi_{jC}$ традиционно параметризированы, по аналогии с молекулярной диффузией, через вертикальный K_C и горизонтальный K_{CL} компоненты тензора коэффициентов турбулентной диффузии и средние градиенты концентрации примеси, т. е. $\Phi_{jC} = \rho K_{Cij} \partial \overline{C} / \partial x_j$.

8.2. Постановка задачи

Изменение концентрации примеси в реальных морских условиях значительно сложнее, чем описывается уравнением турбулентной диффузии (8.8.), полученным в предыдущем разделе. Концентрация примеси зависит также от многих других факторов: химических (распад, соединение с другими веществами, выпадение в осадок); физических (переход в другое агрегатное состояние, адсорбция, коагуляция); биологических (аккумуляция и перенос морскими организмами). Физико-химическое взаимодействие примеси со средой и наличие источников примеси учитывается в уравнении (7.88) следующим образом:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} + (w + w_C)\frac{\partial C}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} K_C \frac{\partial C}{\partial z} + K_{CL} \nabla^2 C + \\ + Q\delta(x - x^*)\,\delta(y - y^*)\,\delta(z - z^*) - \gamma C. \tag{8.9}$$

Здесь u, v, w — составляющие скорости течений по декартовым осям X, Y, Z соответственно; w_C — собственная гравитационная вертикальная скорость примеси; γ — коэффициент неконсервативности примеси; K_C и K_{CL} — вертикальный и горизонтальный коэффициенты турбулентной диффузии соответственно; Q — мощность точечного источника примеси; δ — дельта-функция Дирака; x^*, y^*, z^* — координаты положения источника в трехмерном пространстве.

Сделаем несколько замечаний относительно уравнения (8.9).

1. Уравнение (8.9) записано в наиболее полном виде; оно учитывает не только перенос примеси течениями и рассеяние за счет турбулентной диффузии, но неконсервативные и динамические свойства самой примеси, а также наличие ее источника.

2. В зависимости от физико-химических свойств примеси на основе уравнения (8.9) можно изучать распространение динамически активной примеси (оседающей $w_G > w$ или всплывающей $w_G < w$), либо динамически пассивной примеси (не имеющей собственной гравитационной скорости $w_G = 0$ и переносящейся со скоростью течений).

3. Вследствие биохимических процессов концентрация примеси постоянно меняется. Для характеристики неконсервативных свойств примеси в уравнении (8.9) можно использовать τ_0 — время биохимического разложения, либо γ — коэффициент неконсервативности. При этом коэффициент неконсервативности вводится следующим образом: $\gamma = (1/Q)\, dQ/dt$ и имеет размерность

$[T^{-1}]$. При $\gamma < 0$ происходит распад примеси, при $\gamma > 0$ идет ее накопление, а при $\gamma = 0$ примесь консервативна. Время τ_0 связано с коэффициентом неконсервативности соотношением $\gamma = \ln 2/\tau_0$.

4. Предпоследний член в правой части уравнения (8.9) определяет наличие источника загрязняющей примеси мощностью Q в точке с координатами (x^*, y^*, z^*). Вследствие относительной малости размеров источников примеси по сравнению с расстояниями, на которые она переносится, можно рассматривать либо точечные, либо объемные источники. Для описания точечного источника в уравнении (8.9) вводится δ-функция (функция Дирака).

Сформулируем граничные условия. Они состоят в том, что на всех поверхностях, ограничивающих область океана или моря, необходимо знать либо поток примеси (адвективный и диффузионный), либо концентрацию примеси. В самом общем виде граничные условия выглядят следующим образом:

на поверхности океана, при $z=0$,

$$a\,[\rho K_C\, \partial C/\partial z - \rho C\,(\beta_1 + w_C) + \rho Q_1] + b\,(C - C_1) = 0; \tag{8.10}$$

на дне океана, при $z=H$,

$$a\,[\rho K_C\, \partial C/\partial n - \rho C\,(\beta_2 + w_C) + \rho Q_2] + b\,(C - C_2) = 0; \tag{8.11}$$

на боковых границах, при $x,\ y \in L$,

$$a\left[\rho K_C\,\frac{\partial C}{\partial n} - \rho C\,(\beta_3 + w_{Cn}) + \rho Q_3\right] + b\,(C - C_3) +$$

$$+ \chi\left[\left(1 + \frac{u_n}{|u_n|} K_C \frac{\partial C}{\partial n}\right) C + \left(1 - \frac{u_n}{|u_n|}\right) C\right] = 0. \tag{8.12}$$

В этих выражениях a, b, χ — задаваемые коэффициенты, принимающие значения либо единицу, либо нуль; β_i — параметры взаимодействия примеси с соответствующей поверхностью; Q_1, Q_2, Q_3 — мощность источников на соответствующих границах. Например, Q_1 — мощность выброса примеси на поверхности океана (из атмосферы, при аварии судов); Q_2 — мощность источников примеси на дне (аварии трубопроводов, выброс из зондов); Q_3 — мощность выброса примеси из источников, расположенных на берегу; C_1, C_2, C_3 — возмущения в поле концентрации примеси, вызванные внешними факторами; u_n — нормальная составляющая горизонтальной скорости течения, а $K_C\, \partial C/m$ — нормальная составляющая турбулентного потока примеси через соответствующую границу.

Для источника загрязнений, находящегося в открытой части бассейна, принимается естественное условие уменьшения концентрации примеси до нуля на достаточно большом удалении от источника Q_3

$$\text{при}\quad x \to \infty,\ \ y \to \infty,\ \ z \to \infty\quad C = 0. \tag{8.13}$$

Сформулируем начальные условия. Предположим, что в начальный момент времени:

а) море свободно от примеси —

$$\text{при} \quad t=0 \quad C(x,\ y,\ z,\ 0)=0; \tag{8.14а}$$

б) известен фон загрязнений —

$$\text{при} \quad t=0 \quad C(x,\ y,\ z,\ 0)=C^0. \tag{8.14б}$$

Решение краевой задачи (8.9)—(8.14) очень сложно. Большие затруднения возникают с необходимостью знания трехмерной структуры течений и коэффициентов турбулентной диффузии. Скорости течений в морском бассейне могут быть получены либо из наблюдений, либо из гидродинамического расчета. В настоящее

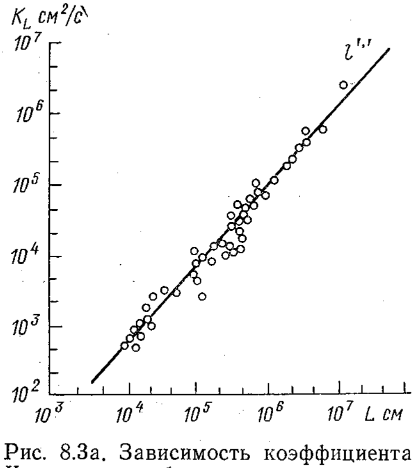


Рис. 8.3а. Зависимость коэффициента K_L от масштаба явления в широком диапазоне изменения L (по Окубо, 1971) [6].

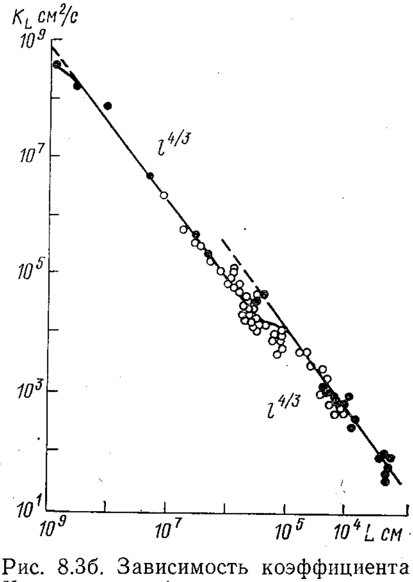


Рис. 8.3б. Зависимость коэффициента K_L от масштаба явления по данным опытов с диффузией пятен красителя (по Окубо и Озмидову, 1970) [6].

время имеющиеся инструментальные данные о структуре течений в морях и океанах еще малочисленны и разрозненны в пространстве и во времени. Поэтому сведения о них целесообразно получать на основании решения гидродинамической задачи при условии известных полей ветра и распределения плотности морской воды и с учетом реального рельефа дна и морфометрии бассейна, т. е. диагностического анализа, подробно рассмотренного в главе 7.

Определение коэффициентов турбулентной диффузии до сих пор является сложной задачей. Вместе с тем исследования Озмидова и Окубо сделали возможным определение коэффициентов горизонтальной турбулентной диффузии K_{CL}. На основании опытов с диффузией пятен красителя они показали, что для широкого диапазона пространственных размеров вихрей (от 100 м до 100 км) выполняется степенная зависимость $K_{CL} \sim l^{1,1}$ (рис. 8.3а). Для некоторых более узких интервалов выполняется «закон четырех третей», $K_{CL} \sim l^{4/3}$ (рис. 8.3б), который, как известно, выведен для инерционно-конвективного интервала мелкомасштабной локально-изотропной турбулентности.

При условии, что известны все составляющие скорости течений и коэффициенты турбулентной диффузии, решение краевой задачи (8.9)—(8.14) позволяет получить картину распределения концентрации примеси вследствие гидродинамического взаимодействия ее с морской средой.

Распространение загрязняющих примесей в море под действием течений и турбулентной диффузии зависит также от типа и размера источника загрязнений.

По характеру действия источника и масштабам распространения загрязнений выделяют два типа процессов:

1) локальный процесс — при источнике небольшого размера, с небольшим временем действия и небольшим расходом (мгновенный точечный источник). Примесь пассивна и консервативна. Составляющие скорости течений в этом случае можно считать постоянными;

2) мезомасштабные и макромасштабные процессы — при постоянно действующем мощном источнике загрязняющих веществ. Течения в этом случае определяются полем ветра и неоднородной термохалинной структурой с учетом рельефа и морфометрии морского бассейна.

Задачи, связанные с процессами первого типа, имеют, как правило, аналитические решения. Процессы второго типа более сложны, и задачи, связанные с этими процессами, не поддаются аналитическому решению, а требуют применения численных методов.

8.3. Простейшие аналитические решения

Кратко рассмотрим известные фундаментальные решения уравнения (8.9), полученные для весьма идеализированных условий: примесь по своим свойствам пассивна и консервативна; вносится в океан из точечного источника мгновенного действия, расположенного внутри бассейна; течения отсутствуют, а примесь распространяется лишь за счет процессов турбулентной диффузии.

Одномерная (вертикальная) диффузия. Горизонтальные градиенты примеси малы, а следовательно, малы и горизонтальные турбулентные потоки (например, равномерное выпадение примеси над большой акваторией океана). Основная задача состоит в расчете концентрации примеси, проникающей в глубину океана. В этом случае основное уравнение турбулентной диффузии весьма упрощается и сводится к виду

$$\partial C/\partial t = K_C\, \partial^2 C/\partial z^2. \tag{8.15}$$

Фундаментальное решение уравнения (8.15) с граничными условиями типа (8.13), т. е. равенства нулю концентрации примеси при $z \to \infty$, выглядит следующим образом:

$$C(z,\ t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi K_C t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4K_C t}\right). \tag{8.16}$$

Из решения (8.16) следует, что в начальный момент времени, при $t=0$, концентрация примеси отсутствует на всех глубинах, кроме поверхности океана в точке, где расположен источник, на ней она бесконечно большая, т. е. при $|z|>0$ $C\to 0$ и при $z=0$ $C\to\infty$. Последнее свойство равносильно утверждению, что при $t=0$ концентрация C стремится к дельта-функции $\delta(z)$. С увеличением времени t концентрация примеси в источнике уменьшается обратно пропорционально корню квадратному из t, т. е. $C(0)\sim t^{-1/2}$, а примесь распространяется на глубину с уменьшающейся по экспоненте концентрацией.

Для двумерного уравнения диффузии, справедливого при рассмотрении крупномасштабной горизонтальной турбулентной диффузии, развитой в условиях устойчивой, вертикальной стратификации морских вод, когда вертикальные турбулентные потоки малы по сравнению с горизонтальными, фундаментальное решение имеет вид

$$C(x,\ y,\ t) = \frac{Q}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi K_{CL} t}}\right)^2 \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4K_{CL} t}\right). \tag{8.17}$$

В этом случае из решения (8.17) видно, что концентрация примеси в источнике, т. е. в точке $x=0$ и $y=0$, уменьшается со временем уже быстрее, $C(0,\ 0)\sim t^{-1}$.

В случае трехмерной диффузии в неограниченном пространстве фундаментальное решение записывается в следующем виде:

$$C(x,\ y,\ z,\ t) = \frac{Q}{8}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi K_C t}}\right)^3 \exp\left(-\frac{x^2+y^2+z^2}{4K_C t}\right). \tag{8.18}$$

Здесь концентрация примеси в источнике, расположенном в точке $x=0$, $y=0$, $z=0$, падает уже обратно пропорционально времени t в степени «$^3/_2$», $C(0,\ 0,\ 0,\ t)\sim t^{-3/2}$.

Фундаментальные решения (8.16)—(8.18) позволяют строить аналитические решения для более сложных типов источников примеси, с более сложными граничными и начальными условиями и, наконец, с учетом некоторых адвективных членов. С некоторыми из таких решений мы познакомимся при выполнении лабораторных работ № 1 и 2.

Рассмотренные решения получены при условии постоянства коэффициентов турбулентной диффузии. Однако известно, что коэффициенты существенно зависят от свойств самих течений, масштабов вихрей, стратификации вод, масштабов осреднения и т. д. Естественно ожидать, что и распределение концентрации примеси наряду с такими факторами, как мощность и тип источника, свойства примеси, расстояние от источника, будет зависеть от вида функциональной зависимости коэффициентов турбулентной диффузии от расстояний до источника (или от времени). Например, для случая двумерной турбулентной диффузии пассивной консервативной примеси от непрерывного точечного источника при принятии закона «четырех третей», справедливого для локально-изотропной турбулентности, основное уравнение диффузии (8.9) можно записать как

$$u \frac{\partial C}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(n_1 \varepsilon^{1/3} x^{4/3} \frac{\partial C}{\partial y}\right) = Q\delta(x - x^*)\,\delta(y - y^*), \qquad (8.19)$$

в котором ε — скорость диссипации турбулентной энергии; n_1 — безразмерный коэффициент, равный 0,1. Решение этого уравнения с граничными условиями (8.13) имеет вид

$$C(x,\ y) = \left[2Q \Big/ \left(3u\sqrt{\pi}\,\frac{4n_1\varepsilon^{1/3}x^{4/3}}{9}\,\frac{x}{u}\right)\right] \times$$

$$\times \exp\left[-y^{2/3} \Big/ \left(\frac{4n_1\varepsilon^{1/3}x^{4/3}}{9}\,\frac{x}{u}\right)\right]. \qquad (8.20)$$

Существенным отличием выражения (8.20) от решений уравнения турбулентной диффузии с постоянным коэффициентом, например (8.17), является более медленное падение концентрации примеси по мере удаления от источника. Показатель степени экспоненты пропорционален $y^{-2/3}$, а согласно (8.17) он пропорционален y^{-2}.

В табл. 8.1 приводятся решения уравнения типа (8.9) с учетом одновременного влияния процессов вертикальной и горизонтальной турбулентной диффузии на изменение концентрации пассивной примеси от мгновенного точечного источника, помещенного в начале координат в морском течении, перемещающегося со скоростью v.

Как показывают решения, приведенные в табл. 8.1, скорость падения концентрации примеси в центре пятна оказывается пропорциональна t^{-3}, $t^{-3,5}$, t^{-4}, $t^{-4,5}$ соответственно и является значительно более быстрой, чем в случае решения при $K_C = \mathrm{const}$ (пропорциональна t^{-1}). На рис. 8.4 показано изменение со временем концентрации пассивной примеси в центре пятна, рассчитанное

Таблица 8.1

Аналитические решения адвективно-диффузионного уравнения (8.9) при переменных коэффициентах диффузии [6]

Случай	Общая характеристика процессов	Вид решения
1	Сильная вертикальная плотностная стратификация вод. Вертикальный турбулентный обмен подавлен: $K_C = 0$; $K_{CL} \sim \varepsilon^{1/3} t^{4/3}$	$C(x, y, t) = \frac{Q\delta(z - z^*)}{\varepsilon t^3} f_0\left(\frac{(x - vt)^2 + y^2}{\varepsilon t^3}\right)$
2	В условиях сильной плотностной стратификации вертикальный обмен слаб, развивается в квазиоднородных слоях: $K_C = \text{const}$; $K_{CL} \sim \varepsilon^{1/3} t^{4/3}$	$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{\varepsilon t^3} f_0\left(\frac{(x - vt)^2 + y^2}{\varepsilon t^3}\right) \frac{1}{\sqrt{\pi K_C t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4K_C t}\right)$
3	Нейтральная стратификация вод, «пристеночная турбулентность»: $K_C = \varkappa u_* z$; $K_{CL} \sim \varepsilon^{1/3} t^{4/3}$	$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{\varepsilon t^3} f_0\left(\frac{(x - vt)^2 + y^2}{\varepsilon t^3}\right) \frac{1}{\varkappa u_* t} \exp\left(-\frac{z}{\varkappa u_* t}\right)$
4	Развитая вертикальная турбулентность: $K_C \sim \varepsilon^{1/3} t^{4/3}$; $K_{CL} = 0$	$C(x, y, z, t) = \frac{Q}{(\varepsilon t^3)^{3/2}} f_1\left(\frac{(x - vt)^2 + y^2}{\varepsilon t^3}\right)$

Примечание. u_* — динамическая скорость; $\varkappa$ — постоянная Кармана; f_0 и f_1 — некоторые универсальные функции.

для $K_C = \text{const}$ и $K_{CL} \sim \varepsilon^{1/3} t^{4/3}$. Там же точками нанесены экспериментальные данные наблюдений Окубо. Видно, что наблюдения подтверждают зависимость изменения концентрации примеси, учитывающую переменный коэффициент турбулентной диффузии.

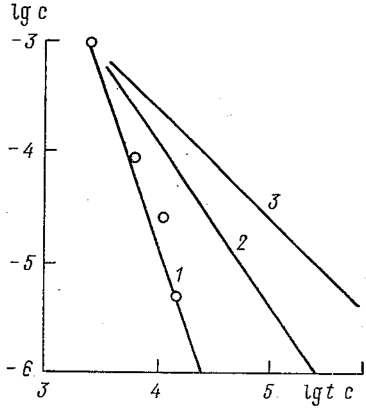


Рис. 8.4. Изменения концентрации в центре пятна примеси [6].

1 — зависимость, учитывающая изменения коэффициента турбулентной диффузии; 2 — трехмерная диффузия с постоянными коэффициентами; 3 — двумерная диффузия с постоянными коэффициентами. Кружочки означают концентрацию флюоресцина в экспериментах Окубо.

8.4. Численные методы решения

При изучении процессов формирования поля примеси от мощных источников длительного действия с учетом сложных полей течений не удается получить аналитические решения основного уравнения (8.9), а необходимо его решать на основе применения различных численных методов (конечно-разностных, интегральных и спектральных), на основе построения эффективных численных алгоритмов, обладающих устойчивостью и быстрой сходимостью.

Рассмотрим решение задачи на основе метода сеток. Следует сразу отметить, что в настоящее время разработано достаточно много конечно-разностных схем. Однако в большинстве своем они относятся к решению чисто диффузионных задач (без учета течений). Подробное описание численных схем можно найти в книгах Андерсона и др. [1] и Пейре и Тейлора [7]. Нас же будут интересовать методы решения основного уравнения (8.9), учитывающего наиболее полный комплекс влияющих на примесь факторов. Вместе с тем начнем с двумерной формы уравнения (8.9) как более простого случая:

$$\partial C/\partial t + u\,\partial C/\partial x + v\,\partial C/\partial y = K_{Cx}\,\partial^2 C/\partial x^2 + K_{Cy}\,\partial^2 C/\partial y^2 - \gamma C. \quad (8.21)$$

Двумерное уравнение (8.21) может быть применено для моделирования переноса любой примеси в мелком море, в котором вследствие перемешивания по вертикали можно полагать $\partial C/\partial z = 0$. Кроме того, на основе решения уравнения (8.21) можно рассмотреть процесс переноса нефтяной пленки на поверхности любого бассейна.

Для разработки конечно-разностного аналога уравнения (8.21) необходимо построить сеточную область с пространственными шагами Δx, Δy и наиболее точно аппроксимирующую реальный контур моря (рис. 8.5). Если локальную производную заменить конечно-разностным соотношением с шагом по времени Δt, вторые производные выразить через центральные разности, а первые производные — при помощи направленных против потока односторонних разностей, тогда конечно-разностная аппроксимация уравне-

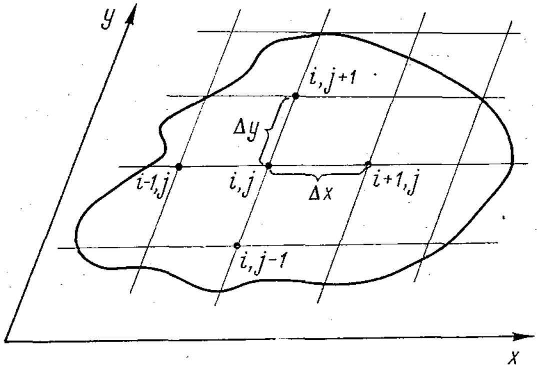


Рис. 8.5. Сеточная область в задаче (8.21).

ния (8.21) в явном виде запишется следующим образом:

$$C_{i,j}^{t+\Delta t} = C_{i,j}^{t} + \nu_{CL}\,\Delta t\,(\Delta_{xx} + \Delta_{yy})\,C_{i,j}^{t} - \frac{u_{i,j}^{t}\,\Delta t}{2}\left[(1-\varepsilon_u)\,\Delta_x^{+}C_{i,j}^{t} + \right.$$

$$\left. + (1+\varepsilon_u)\,\Delta_x^{-}C_{i,j}^{t}\right] - \frac{v_{i,j}^{t}\,\Delta t}{2}\left[(1-\varepsilon_v)\,\Delta_y^{+} + C_{i,j}^{t} + (1+\varepsilon_v)\,\Delta_y^{-}C_{i,j}^{t}\right] -$$

$$- \gamma C_{i,j}^{t}\,\Delta t, \qquad (8.22)$$

где $u_{i,j}$, $v_{i,j}$, $C_{i,j}$ — значения составляющих скорости течения и концентрации примеси в узле сетки с индексами i, j; ε_u, ε_v обозначают знаки составляющих u и v соответственно; Δ_{xx}, Δ_{yy} — аппроксимация вторых производных; Δ_x^{-}, Δ_y^{-} — разность назад по x и y соответственно; Δ_x^{+}, Δ_y^{+} — разность вперед по x и y соответственно; ν_{CL} — коэффициент вычислительной вязкости;

$$\Delta_{xx}C_{i,j} = (1/\Delta x^2)\,(C_{i+1,j} - 2C_{i,j} + C_{i-1,j});$$

$$\Delta_{yy}C_{i,j} = (1/\Delta y^2)\,(C_{i,j+1} - 2C_{i,j} + C_{i,j-1});$$

$$\Delta_x^{+}C_{i,j} = (1/\Delta x)\,(C_{i+1,j} - C_{i,j}); \quad \Delta_x^{-}C_{i,j} = (1/\Delta x)\,(C_{i,j} - C_{i-1,j});$$

$$\Delta_y^{+}C_{i,j} = (1/\Delta y)\,(C_{i,j+1} - C_{i,j}); \quad \Delta_y^{-}C_{i,j} = (1/\Delta y)\,(C_{i,j} - C_{i,j-1}).$$

Принятая численная схема (8.22) обеспечивает первый порядок точности по времени и второй по пространству.

Вместе с тем явная схема (8.22) не является абсолютно устойчивой. Для нее должен удовлетворяться известный критерий устойчивости Куранта—Леви (в предположении $\Delta x = \Delta y$):

$$\Delta t \leqslant \Delta x^2/[4\nu_{CL} + (|u| + |v|)\,\Delta x]. \tag{8.23}$$

Выбор пространственных шагов Δx и Δy обусловливается размерами, геометрией моря и масштабами протекающих в нем гидродинамических процессов. Выбор же временного шага Δt предопределяется условием (8.23).

В последнее время явная схема аппроксимации уравнения типа (8.22) численно решается эффективным методом расщепления. На каждом временном шаге рассматриваются две самостоятельные задачи:

а) на $t+\Delta t/2$ — изменение концентрации примеси за счет турбулентной диффузии;

б) на $t+\Delta t$ — изменение концентрации примеси за счет адвекции и взаимной адаптации.

А в качестве конечно-разностного аналога расщепленного уравнения (8.22) принимается сумма двух конечно-разностных уравнений:

$$C_{i,j}^{t+\Delta t/2} = C_{i,j}^{t} + \nu_{CL}\,\Delta t\,(\Delta_{xx} + \Delta_{yy})\,C_{i,j}^{t}; \tag{8.24}$$

$$C_{i,j}^{t+\Delta t} = C_{i,j}^{t+\Delta t/2} - \frac{u_{i,j}\,\Delta t}{2}\left[(1-\varepsilon_u)\,\Delta_x^{+} C_{i,j}^{t+1/2} + (1+\varepsilon_u)\,\Delta_x^{-} C_{i,j}^{t+1/2}\right] -$$
$$- \frac{v_{i,j}\,\Delta t}{2}\left[(1-\varepsilon_v)\,\Delta_y^{+} C_{i,j}^{t+1/2} + (1+\varepsilon_v)\,\Delta_y^{-} C_{i,j}^{t+1/2}\right]. \tag{8.25}$$

Реализация численных алгоритмов (8.24) и (8.25) выполнена для изучения распространения пассивной консервативной примеси в Антарктическом циркумполярном течении от точечного источника мгновенного действия, расположенного вблизи о. Кергелен.

Шаг по широте принят равным 2°, по долготе — 10°, а шаг по времени составляет 1 сут. На рис. 8.6 показано распространение примеси в различные моменты времени. Видно, что через 120 сут (4 мес) пятно примеси почти оторвалось от о. Кергелен (рис. 8.6 *а*); через год примесь распространилась на весь Тихоокеанский сектор Южного океана; через 5 лет примесь перенеслась с зональным потоком на всю область Южного океана (рис. 8.6 *г*) и достигла установившегося состояния (когда изолинии концентрации примеси совпали с линиями тока).

Ограничения типа (8.23), накладываемые в явных схемах на шаг по времени, часто при реализации их бывают обременительными. Поэтому все более употребительными становятся **неявные** конечно-разностные схемы, обладающие безусловной устойчивостью и свободные от этих ограничений. Далее приведем неявную схему решения двумерного адвективно-диффузионного уравнения типа (8.21), использующую эффективный метод переменных

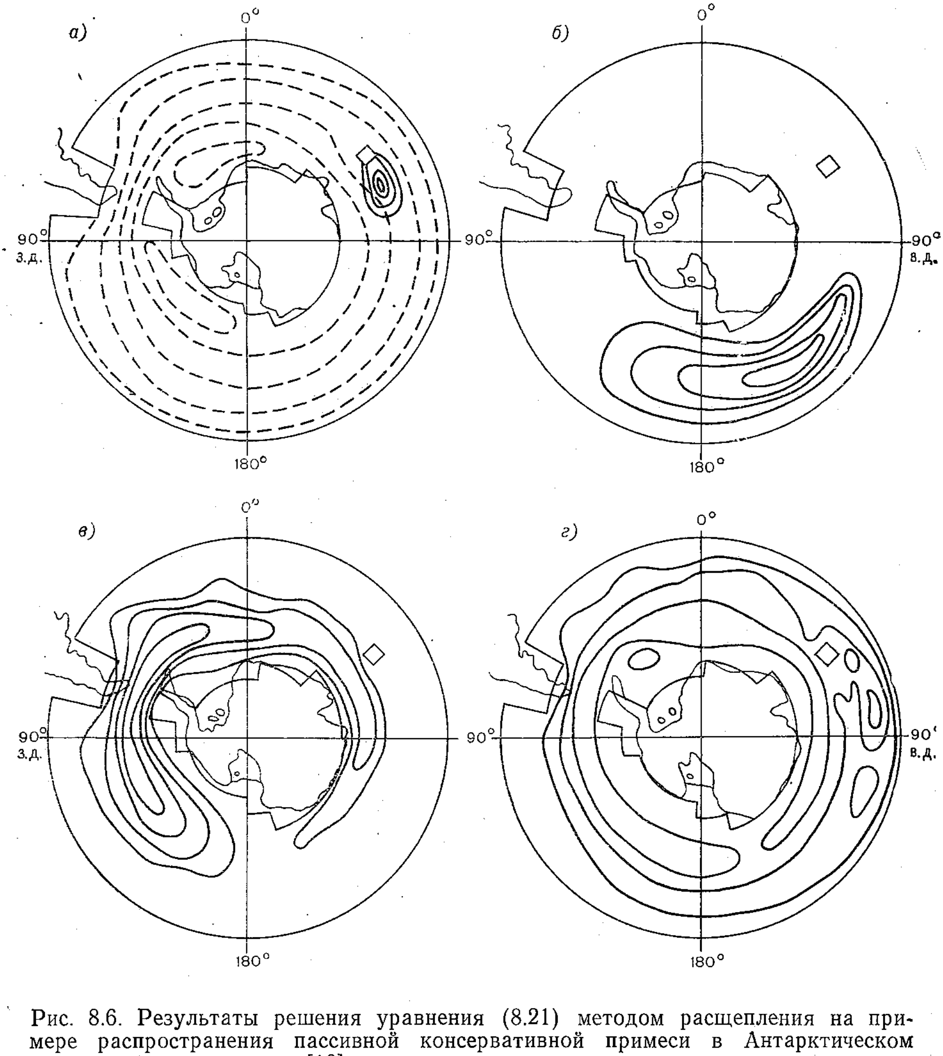


Рис. 8.6. Результаты решения уравнения (8.21) методом расщепления на примере распространения пассивной консервативной примеси в Антарктическом циркумполярном течении [10].

а — через 4 мес после поступления примеси в океан; *б* — через 1 год; *в* — через 2 года; *г* — через 5 лет. Штрих-пунктир — изолинии функции тока, сплошная кривая — изолинии концентрации примеси.

направлений. Отметим, что этот метод является двухшаговым и записывается в виде

$$\frac{2}{\Delta t}\left(\widetilde{C}_{i,j}-C_{i,j}^{t}\right)+\left(A_1\Delta_x^0-\nu_{CL}\,\Delta_{xx}\right)\widetilde{C}_{i,j}+\left(B_1\,\Delta_y^0-\nu_{CL}\,\Delta_{yy}\right)C_{i,j}^{t}=0; \tag{8.26}$$

$$\frac{2}{\Delta t}\left(C_{i,j}^{t+1}-\widetilde{C}_{i,j}\right)+\left(A_2\,\Delta_x^0-\nu_{CL}\,\Delta_{xx}\right)\widetilde{C}_{i,j}+ \\ +\left(B_2\,\Delta_y^0-\nu_{CL}\,\Delta_{yy}\right)C_{i,j}^{t+1}=-\nu C_{i,j}^{t+1}, \tag{8.27}$$

где Δ_x^0, Δ_y^0 — центральные разности по x и y соответственно; A_1, A_2, B_1, B_2 — аппроксимация составляющих течений u и v; $C_{i,j}$ — корректор-предиктор. Значение предиктора можно рассматривать как аппроксимацию точного решения в момент времени $t+{}^1/_2\Delta t$, если A_1, A_2, B_1 и B_2 являются аппроксимациями u и v в соответствующие моменты времени;

$$\Delta_x^0 C_{i,j}=\frac{1}{2\,\Delta x}\left(C_{i+1,j}-C_{i-1,j}\right);$$

$$\Delta_y^0 C_{i,j}=\frac{1}{2\,\Delta y}\left(C_{i,j+1}-C_{i,j-1}\right).$$

Неявная конечно-разностная схема (8.26)—(8.27) имеет второй порядок точности по времени и пространству.

В заключение приведем неявную схему переменных направлений на случай трехмерного адвективно-диффузионного уравнения (8.9). Эта разностная схема является трехшаговой, использующей значения величин на шагах по времени $t:t+{}^1/_3\Delta t$; $t+{}^2/_3\Delta t$; $t+\Delta t$:

шаг 1 —

$$C^{*}-C^{t}=\Delta t\left\{\nu_{CL}\,\Delta_{xx}\left(C^{*}+C^{t}\right)+\nu_{CL}\,\Delta_{yy}C^{t}+\nu_C\,\Delta_{zz}C^{t}-\right. \\ \left.-A_1\,\Delta_x^0\left(C^{*}+C^{t}\right)-B_1\,\Delta_y^0C^{t}-D_1\,\Delta_z^0C^{t}\right\}; \tag{8.28}$$

шаг 2 —

$$C^{**}-C^{t}=\Delta t\left\{\nu_{CL}\,\Delta_{xx}\left(C^{*}+C^{t}\right)+\nu_{CL}\,\Delta_{yy}\left(C^{**}+C^{t}\right)+\nu_C\,\Delta_{zz}C^{t}-\right. \\ \left.-A_2\,\Delta_x^0\left(C^{*}+C^{t}\right)-B_2\,\Delta_y^0\left(C^{**}+C^{t}\right)-D_2\,\Delta_z^0C^{t}\right\}; \tag{8.29}$$

шаг 3 —

$$C^{t+\Delta t}-C^{t}=\Delta t\left\{\nu_{CL}\,\Delta_{xx}\left(C^{*}+C^{t}\right)+\nu_{CL}\,\Delta_{yy}\left(C^{**}+C^{t}\right)+\right. \\ +\nu_C\,\Delta_{zz}\left(C^{t+\Delta t}+C^{t}\right)-A_3\,\Delta_x^0\left(C^{*}+C^{t}\right)-B_3\,\Delta_y^0\left(C^{**}+C^{t}\right)- \\ \left.-D_3\,\Delta_z^0\left(C^{t+\Delta t}+C^{t}\right)-\gamma C^{t+\Delta t}\right\}. \tag{8.30}$$

Здесь верхние индексы «*» и «**» обозначают промежуточные значения, а индексы «i», «j», «k» опущены во всех членах уравнений. Этот метод безусловно устойчив, имеет второй порядок точности.

8.5. Применение метода Монте-Карло

Часто для описания распространения примеси в сложных гидродинамических условиях (вихревых образованиях, нелинейных волнах и т. д.) применяется другой подход — статистическое моделирование или методы Монте-Карло.

Методы Монте-Карло основываются на использовании «случайных чисел» для имитации на ЭВМ вероятностных распределений свойств систем со многими степенями свободы. Отсюда и название метода. Применительно к диффузионным задачам в основе метода статистического моделирования перемещений элементарных объемов примеси лежит анализ закономерностей из случайных блужданий и вычисления вероятностей их распределения. Этот метод имеет ряд преимуществ по сравнению с методами, основанными на использовании уравнения турбулентной диффузии примеси (8.8). Во-первых, для расчета траекторий нет необходимости знать коэффициенты турбулентной диффузии. Это значительно облегчает задачу, так как структура тензора коэффициентов турбулентной диффузии $K_{Ci,j}$ пока еще плохо изучена. Во-вторых, из эксперимента хорошо известно, что в окрестности источника область, занимаемая примесью, имеет четко очерченную границу, а согласно аналитическим и численным (по неявным схемам) решениям уравнения (8.9) для малых моментов времени t (даже очень близких к нулю) концентрация примеси отлична от нуля на любых расстояниях от источника. Явные аппроксимации позволяют получать четкую границу «пятна» примеси, однако положение этой границы и ее перемещения в очень сильной степени зависят от выбора пространственно-временны́х шагов счетной схемы. В-третьих, во всех вычислительных алгоритмах, приведенных в разделе 8.4, содержится схемная вязкость ν_{CL}, которая, как правило, превышает разумные значения коэффициентов физической диффузии. Например, для монотонной схемы направленных разностей при таком малом пространственном шаге $\Delta x = 20$ миль и слабом течении $u = 0,1$ м/с коэффициент ν_{CL} задается равным 10^3 м^2/с. Это на один—два порядка больше физического коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии K_{CL}, даваемого законом «четырех третей». От указанных недостатков свободны методы Монте-Карло.

Рассмотрим один из методов статистического моделирования — метод блуждающих частиц. Он основан на лагранжевом подходе к изучению распространения диффундирующих частиц примеси. В нем, как известно, наблюдают за выделенной (помеченной) жидкой частицей, за всеми ее хаотическими и сложными перемещениями в жидкой среде. Основной характеристикой в этом случае будут случайные координаты X_i положения частицы (маркера) в трехмерном пространстве и во времени относительно неподвижной системы координат с началом отсчета X_0 в начальный момент времени t_0 (рис. 8.7). Динамику отдельной блуждающей жидкой частицы выразим в следующей стохастической форме:

$$dX_i/dt = \eta_i(\mathbf{x},\ t) + g_{i,\,j}(\mathbf{x},\ t)\,f_j(t);\quad X_i\big|_{t=t_0} = X_i^0,\quad i,\ j = 1,\ 2,\ 3, \tag{8.31}$$

где X_i — координаты случайной траектории жидкой частицы примеси; η_i и $g_{i,\,j}$ — некоторые детерминированные функции; $f_j(t)$ —

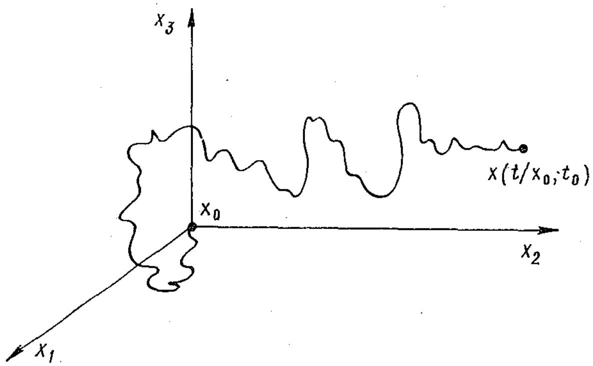


Рис. 8.7. Лагранжево описание турбулентной диффузии.

δ-коррелированный процесс с нулевым средним; X_i^0 — начальные координаты объема;

$$\overline{f_j(t)} = 0;\quad \overline{f_i(t)\,f_j(\Delta t)} = \delta_{i,j}\,\delta(t - \Delta t).$$

Здесь символы $i,\ j = 1,\ 2,\ 3$ обозначают координатные оси, а $\delta_{i,\,i}$ — единичный тензор Кронекера

$$\delta_{i,\,j} = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

Очевидно, что для моделирования динамики ансамбля, состоящего из N частиц примеси, необходимо решать систему стохастических уравнений типа (8.31), а поле концентрации примеси необходимо в дальнейшем строить с учетом статистических характеристик этого ансамбля. Предположим, что детерминированные функции η_i и g_{ij} связаны со средними характеристиками: полем осредненных скоростей $\bar{u}_i$ и коэффициентов турбулентной диффузии, соотношениями

$$\eta_i(\mathbf{x},\ t) = \overline{u_i(\mathbf{x},\ t)} + \frac{1}{2}\,g_{i,\,l}(\mathbf{x},\ t)\,\frac{\partial g_{kl}(\mathbf{x},\ t)}{\partial x_k}; \tag{8.32}$$

$$\frac{1}{2}\,g_{i,\,l}(\mathbf{x},\ t)\,g_{l,\,j}(\mathbf{x},\ t) = K_{i,\,j}(\mathbf{x},\ t). \tag{8.33}$$

Заметим, что при этих условиях стохастические уравнения (8.31) будут соответствовать полуэмпирическому уравнению турбулентной диффузии типа (8.8), записанному в тензорной форме:

$$\frac{\partial \overline{C}}{\partial t} + \overline{u_i(\mathbf{x},\ t)} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} K_{i,\,j} \frac{\partial \overline{C}}{\partial x_j}. \tag{8.34}$$

Для решения уравнений (8.31), (8.32) и (8.33) необходимо знать поле осредненных скоростей и элементы матрицы $g_{i,\,j}$. Последние могут быть определены из матрицы коэффициентов диффузии $K_{i,\,j}$:

$$g = \sum_{k=1}^{3} \frac{\sqrt{\lambda_k} \prod (K - \lambda_k E)}{\prod\limits_{i=k} (\lambda_i - \lambda_k)}, \tag{8.35}$$

где λ — характеристические числа матрицы K; E — единичная матрица.

Таким образом, задача об изучении эволюции для концентрации примеси $C(\mathbf{x},\ t)$ свелась к моделированию динамики ансамбля элементарных объемов с последующим осреднением по нему при построении поля средней концентрации примеси. Для этого необходимо знать только координаты элементарных объемов ансамбля. Подчеркнем, что при $N \to \infty$ построенное поле $\overline{C}(\mathbf{x},\ t)$ есть точное решение уравнения (8.31). Следовательно, удалось свести эйлерову задачу по изучению распространения примеси к лагранжевой, причем $\overline{u}_i$ и $K_{Ci,\,j}$ здесь являются входными параметрами модели.

В качестве примера на рис. 8.8 приводится эволюция пятен пассивной примеси, рассчитанная методом «блуждающих частиц», в сложных гидродинамических условиях полигона ПОЛИМОДЕ, расположенного в западной части Северной Атлантики (27°01′—30°59′ с. ш.; 68—72° з. д.). На полигоне с 1 августа по 2 октября 1977 г. наблюдалась плотно упакованная «система вихревых образований»: северо-восточный циклон, северо-западный антициклон и юго-восточный антициклон. Вся система медленно перемещалась через полигон на запад и юго-запад. Средние скорости горизонтальных течений в поле синоптических вихрей имеют значения $\overline{u} = 10 \ldots 15$ см/с, скорости вертикальных движений 10^{-3}—10^{-4} см/с. Время исследования переноса пассивной примеси от точечного источника 30 сут, шаг по времени $\Delta t = 1$ сут, начальное время соответствует 1 августа 1977 г., число блуждающих частиц примеси, участвующих в численных экспериментах, $N = 3000$.

Как видно из рисунков, пятно пассивной примеси перемещается совместно с вихревым образованием по весьма сложной, волнообразной траектории. Особенно это относится к переносу примеси в северо-восточном циклоне (рис. 8.8 *б*). Учет влияния дополнительной случайной составляющей скорости на динамику переноса примеси приводит к тому, что жидкие частицы примеси, занимающие в начальный момент времени одинаковое положение, в дальнейшем двигаются по-разному. Например, пятно примеси *2* «захватывается» вихревым образованием, а пятна *1* и *3* удаляются от центра вихря. Пятно *4*, помещенное в центральную часть цик-

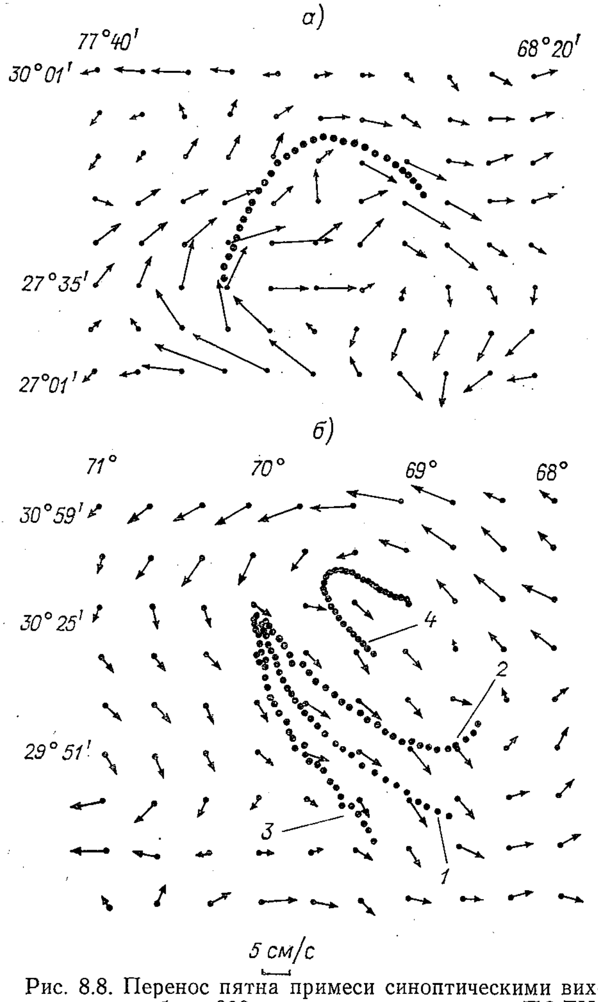


Рис. 8.8. Перенос пятна примеси синоптическими вихрями на глубине 600 м в условиях полигона ПОЛИМОДЕ, рассчитанный методом «блуждающих частиц» [3].

а — антициклонический вихрь; *б* — циклонический вихрь. Точками показаны траектории элементарных объемов примеси.

лона, совершает поступательное движение с ним со скоростью 2—3 см/с. Оказалось, что пятно захватывается вихрем при определенном соотношении между его расстоянием от центра вихря и значениями гидродинамических параметров вихря. Захват пятна примеси происходил при его удалении от центра вихря не более чем 65—70 миль. При больших расстояниях от центра пятно примеси не захватывалось вихрем, а начинало удаляться от него.

Вопросы для самопроверки

1. Какую роль играют гидродинамические процессы в изменении концентрации примеси в океане?

2. Как влияют свойства динамической активности и неконсервативности примеси на процесс загрязнения окружающих вод в океане?

3. В каких случаях оказываются предпочтительнее лагранжев подход и методы Монте-Карло для описания эволюции поля примеси в океане?

4. Каковы основные результаты аналитических решений уравнения переноса примеси? Как выполняются они в реальном океане?

5. Почему при моделировании примеси в океане предпочтение все же отдается численным методам решения задачи, а из вычислительных схем — неявным?

6. Каковы основные особенности диффузии пятен нефти и нефтепродуктов в океане?

7. Каково влияние вихрей на распространение примеси в океане?

Типовые упражнения

1. На основе аналитических решений, приведенных в табл. 8.1, оценить относительное изменение концентрации примеси, насту-

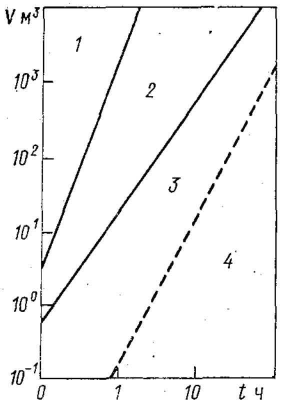


Рис. 8.9. Диаграмма продолжительности различных фаз растекания пятна нефти в зависимости от его объема (по В. М. Журбасу, 1978) [6].

1 — инерционная фаза; 2 — гравитационно-вязкая фаза; 3 — фаза поверхностного натяжения; 4 — диффузионный режим увеличения размера пятна.

пившие после прекращения действия точечного источника через 12 и 24 ч. Коэффициенты турбулентной диффузии выбрать равные $K_C = 10^{-3}$ м²/с и $K_{CL} = 10^4$ м²/с.

2. Определить скорость и направление дрейфа сформировавшегося нефтяного пятна в течение одних суток, если действует северо-восточный ветер со скоростью 20 м/с.

3. С помощью графиков, помещенных на рис. 8.9, рассчитать длительность различных фаз растекания пятна нефти объемом $V = 5 \cdot 10^2$ м³ до момента формирования нефтяной пленки.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1

РАСЧЕТ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ВСПЛЫВАЮЩЕЙ ПРИМЕСИ ОТ ЗАГЛУБЛЕННОГО ИСТОЧНИКА В МЕЛКОМ МОРЕ

Работа ставит своей целью изучить на основе аналитического решения закономерности вертикального изменения концентрации динамической активной примеси от точечного источника, находящегося на некоторой глубине.

Исходные данные. На глубине 5 м в прибрежной части моря постоянно действует точечный источник загрязненных вод промышленного стока. Мощность источника $Q=10^3$ условных единиц. Загрязняющая примесь легко окружающих вод и всплывает со скоростью $w_C=2\cdot10^{-2}$ м/с. Течение в районе источника постоянное со скоростью $u=0{,}2$ м/с. Коэффициент вертикальной турбулентной диффузии равен $K_C=5\cdot10^{-4}$ м²/с.

Остальные параметры общепринятые.

Задачи работы. 1. Ознакомиться с постановкой и получением аналитического решения задачи о распределении концентрации загрязняющей примеси от точечного источника.

2. На основе аналитического решения рассчитать: концентрацию сточных вод на разных глубинах (0; 2,5; 5; 10 м) при фиксированном расстоянии по оси абсцисс OX (например, OX, равном 10, 20, 30, 50, 70, 80, 90 м).

3. Построить вертикальный профиль концентрации примеси. Провести анализ полученных результатов.

Теоретические основы проведения расчета. Рассмотрим задачу о распределении концентрации всплывающей примеси от точечного источника, находящегося на определенной глубине. Примером такого источника может служить заглубленный выброс промышленных или бытовых вод. Небольшие масштабы позволяют считать течение всюду постоянным (локальный процесс). Задача заключается в определении концентрации примеси на разных расстояниях по вертикали от источника.

Поместим источник загрязнений мощностью Q в точку моря с координатами $(0, 0, z^*)$; ось OX направим вдоль течения $\bar{u}$ (рис. 8.10). Полагая турбулентную диффузию в направлении течения малой по сравнению с адвективным переносом, из основного уравнения (8.9) получим

$$u\,\partial C/\partial x - w_C\,\partial C/\partial z - K_C\,\partial^2 C/\partial z^2 - K_{Cy}\,\partial^2 C/\partial y^2 = Q\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z-z^*). \tag{8.36}$$

Уравнение (8.36) отличается от известного уравнения (8.21) учетом гравитационнной скорости w_C примеси. Для всплывающей жидкости $(w_C<0)$ на поверхности $z=0$ должно удовлетворяться условие

$$\rho K_C\,\partial C/\partial z + \rho w_C C = 0 \quad \text{при } z=0; \tag{8.37а}$$

$$C\to 0 \quad \text{при } z\to\infty. \tag{8.37б}$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что (8.36) для принятых условий на бесконечности допускает решение вида

$$C(x,\ y) = \frac{u^{1/2}}{2\sqrt{\pi K_{Cy} x}} \exp\left(-\frac{uy^2}{4K_{Cy}x} - w_C \frac{x}{uy}\right) S(x,\ z), \quad (8.38)$$

где $S(x, z)$ — новая неизвестная.

Подставим (8.38) в (8.36) и проинтегрируем его и условие (8.37а) по y от $-\infty$ до $+\infty$. В результате получим уравнение для неизвестной $S(x, z)$

$$u\, \partial S/\partial x - w_C\, \partial S/\partial z - K_C\, \partial^2 S/\partial z^2 = Q\delta(x)\,\delta(z - z^*) \qquad (8.39)$$

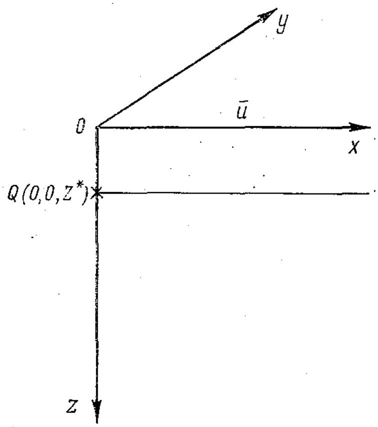


Рис. 8.10. К задаче о распространении всплывающей примеси от заглубленного точечного источника.

с граничными условиями (8.37а) и (8.37б), т. е.

$$\rho K_C\, \partial S/\partial z + \rho w_C S = 0 \quad \text{при} \ z = 0;$$

$$S \to 0 \qquad \text{при} \ z \to \infty.$$

Для малых расстояний по оси OX от источника можно считать, что вертикальный градиент концентрации на поверхности моря равен нулю. Тогда в новой системе координат, всплывающей со скоростью примеси $\bar{z} = z + w_C\, x/u$, получим из (8.39) упрощенное уравнение

$$u\, \partial S/\partial z - K_C\, \partial^2 S/\partial z^2 = Q\delta(x)\,\delta(\bar{z} - \bar{z}^*), \qquad (8.40)$$

где $\bar{z}^* = z^* + \bar{w}_C\, x/u$, с граничными условиями:

$$\rho K_C\, \partial S/\partial z = 0 \quad \text{при} \ \bar{z} = w_C x/u;$$

$$S \to 0 \qquad \text{при} \ \bar{z} \Rightarrow \infty. \qquad (8.41)$$

Решение задачи (8.40)—(8.41) при переходе к старым координатам имеет вид

$$C(x,\ z)=\frac{Q}{2}\sqrt{\frac{u}{\pi K_C x}}\left\{\exp\left[-\left(z+w_C\frac{x}{u}-z^*\right)^2\frac{u}{4K_C x}\right]+\right.$$
$$\left.+\exp\left[-\left(z-w_C\frac{x}{u}+z^*\right)^2\frac{u}{4K_C x}\right]\right\}. \qquad (8.42)$$

Из анализа зависимости (8.42) следует, что при малых значениях w_C решение обладает достаточной точностью всюду, кроме поверхности ($z=0$). Кроме того, наличие у примеси собственной гравитационной скорости приводит к тому, что максимум концентрации поднимается к поверхности моря по мере удаления от источника.

Практические рекомендации

1. На основе решения (8.42) для фиксированных значений x рассчитать концентрацию сточных вод на разных глубинах.

2. Построить кривую распределения концентрации примеси по глубине. По оси абсцисс откладывать значения концентрации C, уменьшенные в 100 раз, т. е. $C\cdot 10^2$, а по оси ординат — глубины в метрах. Вертикальный масштаб принять 1 см—1 м, горизонтальный масштаб 1 см — 0,05 единиц $C\cdot 10^2$.

3. Результаты работы представить в виде отчета с приложением расчетных таблиц, рисунков и анализа результатов.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2

ВЫЧИСЛЕНИЕ СРЕДНЕЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ПРИМЕСИ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ ВДОЛЬ ПОБЕРЕЖЬЯ

Исходные данные. Коллектор выброса промышленных вод вынесен в море на расстояние 200 м от берега. Мощность источника $Q=10^3$ условных единиц. Скорость вдольбереговой составляющей течения $v=0{,}2$ м/с, а составляющая течения на ось OX $u=0{,}10$ м/с. Горизонтальный коэффициент турбулентной диффузии $K_x=10$ м²/с.

Задачи работы. 1. Ознакомиться с постановкой и получением аналитического решения задачи об изменении концентрации примеси в двухслойном море по мере удаления от источника.

2. На основе аналитического решения рассчитать среднюю концентрацию промышленных вод на разных расстояниях от источника OY (5, 10, 15, 20, 25 м) при фиксированных X (0, 20, 40, 60, 90, 110, 140, 190 м).

3. Построить соответствующие кривые изменения концентрации промышленных вод на разных расстояниях от берега. Провести анализ полученных результатов.

Теоретические основы проведения расчета. Рассмотрим задачу о распространении взвешенной примеси вблизи берега. Рассчитаем среднюю по вертикали концентрацию пассивной примеси, распространяющейся вдоль побережья. Течения в море примем постоянными по горизонтали и двухслойными по вертикали, соответствующими нагонной ситуации (в верхнем слое течения направлены перпендикулярно берегу, в нижнем слое — в открытое море). Адвективный перенос, соответствующий вдольбереговому течению, бу-

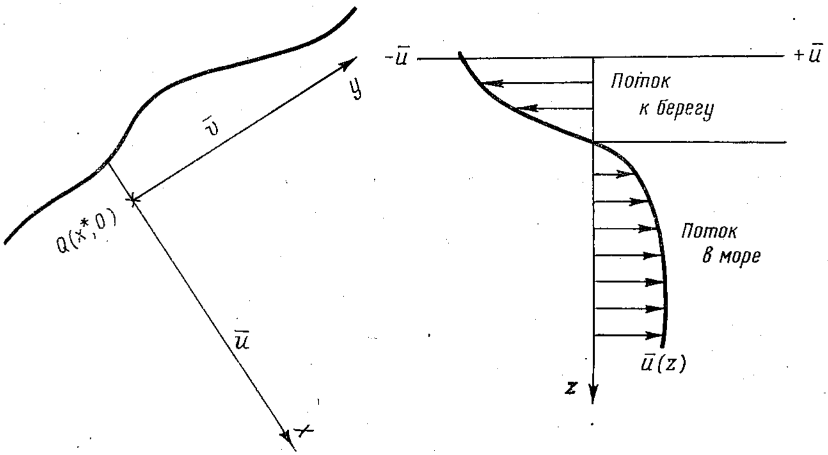


Рис. 8.11. К задаче о расчете средней концентрации сточных вод, распространяющихся вдоль побережья.

дем считать преобладающим над турбулентной диффузией в том же направлении. Коэффициенты турбулентной диффузии примем постоянными.

Подобная задача возникает, например, при вынесении коллектора сброса городских бытовых вод в прибрежную часть моря. Наихудшей ситуацией в этом случае является существование при нагонном ветре течения, направленного к городу, если к тому же источник расположен в верхнем слое.

Направим ось OY вдоль берега, ось OX — перпендикулярно берегу, в сторону открытого моря (рис. 8.11); источник примеси поместим в точку с координатами $(x^*, 0)$. Осредняя отдельно основное уравнение турбулентной диффузии (8.9) в пределах верхнего и нижнего слоев при принятых допущениях, получим для верхнего слоя уравнение

$$u\,\partial C_1/\partial x + v\,\partial C_1/\partial y - K_{Cx}\,\partial^2 C_1/\partial x^2 + C_1/\tau_0 = Q\delta(x - x^*)\,\delta(y). \quad (8.43)$$

Здесь C_1 — средняя концентрация примеси в пределах верхнего слоя; τ_0 — время биохимического разложения примеси.

Поскольку у берега не происходит накопления примеси и воды, то решение при $x < 0$ для верхнего слоя можно определить как зеркальное отражение решения для нижнего слоя. Введем новую систему координат $\bar{x} = x + (u/v)y$; $\bar{y} = y$. Тогда из (8.43) получаем преобразованное уравнение

$$v\,\partial C_1/\partial \bar{y} - K_{Cx}\,\partial^2 C_1/\partial \bar{x}^2 + C_1/\tau_0 = Q\delta(\bar{x} - \bar{x}^*)\,\delta(\bar{y}) \qquad (8.44)$$

и граничные условия убывания концентрации примеси на бесконечности $\bar{x}$, $\bar{y} \to \infty$. Тогда решение (8.44) имеет вид

$$C_1 = \frac{Q}{2}\sqrt{\frac{v}{\pi K_{Cy} y}}\exp\left(-\frac{v\,(x + (y/v)\,y - x^{*2}\,)}{4K_{Cx} y}\right). \qquad (8.45)$$

Решение для нижнего слоя определяется аналогично. Средняя по вертикали концентрация примеси в любой точке моря равна полусумме обоих решений:

$$C(x,\ y) = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) =$$

$$= \frac{Q}{4}\sqrt{\frac{v}{\pi K_{Cx} y}}\left[\exp\left(-\frac{v\,[x + (u/v)\,y - x^*]^2}{4K_{Cx} y}\right) + \right.$$

$$\left. + \exp\left(-\frac{v\,[x - (u/v)\,y + x^*]^2}{4K_{Cx} y}\right)\right]. \qquad (8.46)$$

Из анализа решения (8.46) следует, что по мере удаления от источника концентрация примеси уменьшается, а также образуются два максимума концентрации, обусловленных прямым и обратными потоками.

Практические рекомендации

1. На основе решения (8.46) при фиксированных x рассчитать среднюю концентрацию промышленных вод на разных расстояниях от коллектора (5, 10, 15, 20, 25 м).

2. Построить кривую распределения концентрации примеси в зависимости от удаления источника.

3. Результаты работы представить в виде отчета с приложением расчетных данных, рисунков, анализа результатов.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЯТНА НЕФТИ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В ОКЕАНЕ

Работа предпринимается с целью овладения численным методом, его реализацией на ЕС-ЭВМ, а также изучения закономерностей сложного процесса распространения нефтяного пятна в океане под воздействием ветра, течений, турбулентной диффузии с учетом биохимического распада.

Исходные данные. При аварии танкера в северо-восточной части Атлантического океана, условно в точке $\varphi = 20°$ с. ш. и $\lambda = 20°$ в. д., было выброшено за 12 ч 10^3 т нефти. В момент аварии и последующие дни наблюдался северо-восточный ветер (пассат) со скоростью 25 м/с. Начальный фон нефтяного загрязнения в этом районе равен $C^0 = 0{,}3$ мг/л. Через 24 ч после аварии сформировалось нефтяное пятно, которое начало перемещаться под действием ветра и гидродинамических процессов.

Теоретические основы проведения расчета. 1. Попадающая в океан нефть, прежде чем сформируется ее пятно, при растекании (например, из танкера) проходит три фазы: инерционную, гравитационно-вязкую и фазу поверхностного натяжения. Вначале нефть, растекаясь на поверхности океана, образует пленку, легколетучая фракция которой испаряется. Когда слой нефти под действием сил тяжести и вязкости уменьшится до толщины пленки, важным в дальнейшем процессе становится поверхностное натяжение. Затем наступает такой момент, когда оно меняет знак и растекание нефтяного пятна под действием силы поверхностного натяжения прекратится. Сформировавшаяся нефтяная пленка начинает дрейфовать под действием ветра и волнения, перемещаться и изменять свои размеры и форму под воздействием течений и процессов турбулентной диффузии. На рис. 8.9 представлена общая диаграмма различных фаз растекания нефти с границами между ними.

2. При ветровом дрейфе нефтяной пленки наблюдается ее вытягивание вдоль направления дрейфа или под углом к этому направлению (до 20° по часовой стрелке в Северном и против часовой стрелки — в Южном полушарии). Скорость ветрового дрейфа пленки в среднем составляет 2—4 % скорости ветра. Она определяется при помощи простого соотношения

$$V_{\text{др}} = nW, \tag{8.47}$$

где W — скорость ветра, м/с; коэффициент $n = 0{,}033\ldots\ 0{,}043$.

3. Для определения гидродинамического распространения и рассеяния нефтяного пятна при аварийном выбросе в океан необходимо численно решить уравнение турбулентной диффузии (8.21) с граничными условиями (8.12). Как было показано в разделе 8.4, это уравнение достаточно эффективно решается при помощи явной конечно-разностной аппроксимации с направленными против потока разностями (8.22), имеющей первый порядок точности по времени и второй — по пространству. Выбор временно́го шага определяется условием сходимости (8.23). Вычисления по вычислительному алгоритму (8.22) ведутся методом итераций Гаусса—Зейделя до тех пор, пока $C_{ij}^{t+\Delta t} - C_{ij}^{t} \leqslant \mu$, где μ — малое число, например принимающее значение предельно допустимой концентрации ($\text{ПДК}_{\text{нефти}} = 5 \cdot 10^{-2}$ мг/л).

Двумерное адвективно-диффузионное уравнение (8.21) можно решать также другим эффективным способом, а именно, методом переменных направлений, разностная схема (8.26)—(8.27), которого приведена в разделе 8.4.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с постановкой и численным решением задачи о распространении нефтяного пятна от точечного источника, расположенного в открытой части океана. Разобраться с численным алгоритмом расчета концентрации нефти с учетом неконсервативности свойств нефти; иметь в виду, что период полураспада долгоживущей фракции солярного масла составляет $\tau_0 = 83{,}5$ с.

2. Составить программу расчета на основе одного из выбранных численных алгоритмов (8.22) либо (8.26)—(8.27). Произвести отладку программы.

3. Построить сеточную область. При выборе явной численной схемы (8.22) рассчитать временной шаг Δt, исходя из условий сходимости Куранта—Леви (8.23), приняв пространственный шаг $\Delta x = 10$ миль. При выборе неявной схемы (8.26)—(8.27) пространственно-временные шаги выбираются произвольно.

4. Оценить также горизонтальный коэффициент турбулентной диффузии на основании закона «четырех третей» (рис. 8.3).

5. Используя сведения из Атласа поверхностных течений или методику их расчета, изложенную в главе 7, оценить для каждого узла сеточной области составляющие скорости течений для данных гидрометеорологических условий.

6. На основе составленной программы рассчитать адвективный перенос пятна нефти, его трансформацию и рассеяние за счет турбулентной диффузии с учетом биохимической деградации.

7. Оценить ветровой дрейф нефтяного пятна под действием ветра по формуле (8.47).

8. Полученные данные использовать для анализа роли различных факторов (ветра, течений, турбулентности) в эволюции концентрации нефти в океане.

Форма отчетности. В отчете приводятся распечатка программы, результаты расчета, их анализ с иллюстрациями временной изменчивости концентрации нефти, эволюции пятна нефти под действием различных факторов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 8

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. Т. 1/Пер. с англ.— М.: Мир, 1990.— 384 с.

2. Галкин Л. М. Решение диффузионных задач методом Монте-Карло.— М.: Наука, 1975.— 96 с.

3. Еремеев В. И., Иванов Л. М. Исследования турбулентной диффузии примеси в океане методом Монте-Карло//Теория океанологических процессов.— Севастополь: Морск. гидрофиз. ин-т АН УССР, 1981.— С. 115—122.

4. Каган Б. А., Рябченко В. А. Трассеры в Мировом океане.— Л.: Гидрометеоиздат, 1978.— 58 с.

5. Монин А. С., Озмидов Р. В. Океанская турбулентность.— Л.: Гидрометеоиздат, 1981.— 320 с.

6. Озмидов Р. В. Диффузия примесей в океане.— Л.: Гидрометеоиздат, 1986.— 280 с.

7. Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости/Пер. с англ.— Л.: Гидрометеоиздат, 1986.— 352 с.

8. Проблемы химического загрязнения вод Мирового океана. Т. 1. Динамика и прогноз загрязнения океанических вод/Под ред. А. И. Симонова.— Л.: Гидрометеоиздат, 1985.— 144 с.

9. Проблемы химического загрязнения вод Мирового океана. Т. 2. Процессы турбулентной диффузии в море/Под ред. В. И. Заца.— Л.: Гидрометеоиздат, 1986.— 202 с.

10. Сеидов Д. Г., Личнов Е. Г. Моделирование распространения примеси в циркумполярном потоке с локальным источником//Океанологические исследования.— 1985.— № 39.— С. 98—101.

11. Филиппов Ю. П. Некоторые вопросы распространения примеси в море//Труды ГОИН.— 1974.— Вып. 121.— С. 107—113.

ГЛАВА 9

ДРЕЙФ ЛЬДА

9.1. Основные сведения о морском ледяном покрове

Образование и распространение ледяного покрова в Мировом океане в основном обусловлены термическими факторами. Морской лед образуется там, где теплоотдача океана в атмосферу в холодный период больше притока тепла к водной поверхности от нижележащих слоев воды. В зависимости от теплового баланса существуют зоны Мирового океана, покрытые льдом круглый год, зоны с меняющимся ежегодно ледяным покровом и зоны с сезонным ледяным покровом. Центральная часть Арктического бассейна всегда покрыта льдом. Большая часть ледяного покрова окраинных арктических морей (Карское, Лаптевых и др.) тает, но одновременно сюда вносится значительное количество льдов в результате дрейфа. Наконец, на Балтийском, Белом, Охотском и других морях ледяной покров возникает ежегодно, хотя летом он полностью исчезает.

Внешние воздействия со стороны ветра и течений, а также наклон уровня моря вызывают перемещение (дрейф) образовавшегося морского льда, его разломы и торошение. Интенсивность этих динамических процессов зависит как от структуры, прочности и геометрических характеристик самого ледяного покрова, так и от широты места, глубины моря и конфигурации берегов, системы течений в данном районе и режиме ветров. Таким образом, дрейф льда надо рассматривать как составную часть динамических процессов в полярных и замерзающих морях [3].

Специфика постановки задачи о дрейфе льда заключается в том, что вместо свободной границы раздела двух вращающихся жидкостей (атмосферы и океана) имеется твердая непроницаемая для жидкости прослойка. В случае припайных льдов она неподвижна и полностью препятствует вертикальному обмену количеством движения. В дрейфующих льдах этот твердый слой подвижен и участвует в вертикальном переносе количества движения от атмосферы к океану.

В обоих случаях ледяной покров оказывает большое влияние на вертикальный тепломассообмен и существенно воздействует на формирование и структуру приповерхностных пограничных слоев сверху и снизу.

Таким образом, в морском ледяном покрове естественно выделяются две структурно различные части: *припай* и *дрейфующий лед*. Неподвижные припайные льды представляют собой упругую твердую крышку и оказывают влияние на подледные течения, распространение длинных гравитационных волн и приливов. Короткие поверхностные волны ледяной покров экранирует. Подвижные дрейфующие льды, перемещаясь под воздействием различных внешних факторов и взаимодействуя друг с другом, формируют состояние ледяного покрова в целом. При этом реакция ледяного покрова на внешние воздействия зависит главным образом от его прочностных и морфологических параметров, определяемых толщиной льда и его раздробленностью, т. е. размерами льдин. Все термины, характеризующие плавающий лед и связанные с ним явления, объединены в единую систему ледовых символов и терминологии в соответствии с номенклатурой Всемирной метеорологической организации [4].

Раздробленность ледяного покрова характеризуется баллом раздробленности и функцией распределения льдин по размерам, определяемым по натурным наблюдениям. Обычно используют функцию парциального распределения площадей льдин $F(A_i)$, равную отношению площади, покрытой льдинами размером A_i, к общей площади, занятой льдом. Эта функция равна вероятности попадания в льдину данных размеров при случайной выборке

$$F(A_i) = p_i A_i \Big/ \sum p_i A_i, \tag{9.1}$$

где p_i — частота повторяемости льдин размером A_i для данного района акватории. Размеры репрезентативной области, для которой определяется p_i, составляют от 10×10 км летом до $100 \times \times 100$ км зимой.

Кроме функции $F(A_i)$, важно знать, какая именно часть акватории покрыта льдом той или иной толщины, т. е. распределение льда по толщинам. *Плотность распределения льдов по толщине* $g(h)$ определяется следующим образом:

$$\int_{h_1}^{h_2} g(h)\, dh = D(h_1,\ h_2)/A, \tag{9.2}$$

где $D(h_1, h_2)$ — площадь в пределах района A, покрытая льдом толщиной $h_1 \leqslant h \leqslant h_2$. Отношение D_i/A, где $D_i = D(h_i, h_{i+1})$, называется *парциальной сплоченностью льдов* N_i. Задание совокупности значений парциальной сплоченности для данного региона полностью определяет функцию распределения льда по толщинам $G(h_i)$:

$$G(h_i) = \sum_{k=1}^{i} N_k; \quad i = 1, \ldots, M,$$

где M — число градаций толщины льда. Для непрерывного распределения толщин имеем

$$G(h) = \int_0^h g(h)\, dh.$$

Изменение структуры и состава ледяного покрова вследствие термических и динамических воздействий вызывает изменение функций распределения $F(A)$ и $G(h)$ со временем. Эта изменчивость устанавливается по данным наблюдений. При математическом моделировании можно использовать общие уравнения эволюции характеристик ледяного покрова, основанные на законе сохранения массы [5]. Намерзание и таяние льда учитываются путем включения должным образом подобранных источников и стоков. При расчете перераспределения льдов за сравнительно короткий промежуток времени основной вклад в изменение функций $F(A)$ и $G(h)$ вносят перемещение (дрейф) льда и вызванные им деформации ледяного покрова.

Дрейф и деформирование ледяного покрова определяются степенью подвижности его элементов — отдельных льдин или их блоков. В сплоченных льдах подвижность мала и характеризуется взаимными смещениями соседних льдин, т. е. подвижками. В разреженных льдах мерой подвижности служат не подвижки, а скорости смещений.

Движение льда по поверхности воды считается плоскопараллельным и происходящим в горизонтальной плоскости x, y (ось y направлена на север, ось x — на восток).

Под *скоростью дрейфа льда* понимается непрерывное поле скоростей $\mathbf{v}(x, y)$, определенных как среднее по достаточно обширной области, где отдельные льдины не индивидуализируются. На сплошное поле макроскопических скоростей накладывается поле микромасштабных скоростей отдельных льдин, имеющее ячеистую структуру вследствие их вращения. В соответствии с масштабами движения различаются макро- и микродеформации ледяного покрова.

Натурные наблюдения показывают значительную изменчивость направления θ и модуля скорости дрейфа $\mathbf{v}$. В комплексной форме для вектора скорости дрейфа имеем $\mathbf{v} = v_x + iv_y = |\mathbf{v}| \exp(i\theta)$. Построив индикатрису направлений дрейфа $p(\theta)$ (см. [5]), можно определить как среднее направление движения льдин, так и пульсации относительно среднего вектора скорости дрейфа. Для продольных v_l и поперечных v_t пульсаций скорости справедлив нормальный закон распределения, хорошо подтверждающийся в натуре. Отклонение дрейфа льдин от среднего направления, т. е. *извилистость* их *траектории*, рассматривается как проявление неустойчивости дрейфа. В качестве меры *устойчивости* принимается параметр q, обратный коэффициенту извилистости: $\omega = l_{\text{тр}}/l$. Здесь $l_{\text{тр}}$ — фактическая длина траектории льдины между начальной и конечной точками наблюдения, а l — длина прямой, соединяющей эти точки. Малые значения q соответствуют неустойчивому дрейфу.

Относительные смещения льдин складываются в полную деформацию ледяного покрова. Для крупномасштабных процессов с характерным линейным размером $L \sim 10^5$ м деформации ледяного покрова описываются с помощью модели сплошного двумерного деформируемого слоя. При этом деформации и скорости деформации являются тензорными величинами. За исходную характеристику принимается градиент вектора смещения u_i ($i=1, 2$), связанный с компонентами тензора деформаций u_{ij} следующей формулой:

$$u_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_j}\right); \quad i, j, l = 1, 2. \qquad (9.3)$$

Этим выражением определяется изменение элемента длины при деформировании ледяного покрова. В случае малых деформаций нелинейным членом из (9.3) пренебрегают. Для тензора градиента скоростей дрейфа имеем $v_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$. Напомним, что введение тензорных характеристик дрейфа возможно только для достаточно крупномасштабных движений, где можно игнорировать дискретность строения ледяного покрова.

Специфическим видом деформирования ледяного покрова является торошение льдов, всегда имеющее локальный характер. Оно происходит, если усилия, сжимающие лед, или напряжения сдвига, достигнув некоторых критических значений, приведут к ломке льда и образованию ледяных нагромождений. Торосистые льды занимают значительные площади замерзших водоемов. Размеры и распределение гряд торосов характеризуют деформационные свойства ледяного покрова в целом. Описание торосообразования обычно производится энергетическим способом путем составления баланса работ или мощностей внешних усилий, силы тяжести, сил плавучести и различного рода диссипативных факторов [1]. В крупномасштабных моделях динамики ледяного покрова торошение, как правило, не выделяется из общей деформации. Производится лишь расчет областей сжатия льдов, позволяющий очертить области возможного торошения.

9.2. Внешние и внутренние усилия в ледяном покрове

Рассматривая горизонтальные движения ледяного покрова, можно выделить две группы сил. В первую группу включаются все массовые силы, а также поверхностные, которые можно заменить массовыми. Например, напряжения трения ветра τ_a и воды τ_w заменяются массовой силой $[\tau_a, \tau_w/(\rho_i h)]$, отнесенной к толщине льда (ρ_i — плотность льда). Ко второй группе относятся контактные усилия, действующие по контуру льдины L со стороны окружающих льдин или берега. Уравнение движения достаточно большого конечного элемента ледяного покрова площадью A с контуром L записывается в интегральной форме:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_A m\mathbf{v}\,dA = \int\limits_A \mathbf{F}^l\,dA + \oint\limits_L \mathbf{p}\,dL, \tag{9.4}$$

где $m=\rho_1 h$ — поверхностная плотность ледяного покрова; $\mathbf{F}^l$ — главный вектор массовых сил; $\mathbf{p}$ — сила, действующая на единицу длины контура L. Применив к интегральному соотношению (9.4) теорему о среднем и заменив контурный интеграл на интеграл по поверхности с помощью теоремы о дивергенции, получим осредненное дифференциальное уравнение движения ледяного покрова:

$$d(m\mathbf{v})/dt = \mathbf{F}^l + \mathbf{F}^i, \tag{9.5}$$

где $\mathbf{F}^i = \operatorname{div}\sigma$ — вектор внутренних сил, отнесенных к единице площади; $\operatorname{div}\sigma = \partial\sigma_{ij}/\partial x_j$ — дивергенция тензора внутренних напряжений σ_{ij}, действующих в ледяном покрове. Для вектора внешних сил $\mathbf{F}^l$, отнесенного к единице площади, имеем:

$$\mathbf{F}^l = \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_w + \mathbf{F}_K + \mathbf{F}_\eta, \tag{9.6}$$

где $\mathbf{F}_K$ — сила Кориолиса; $\mathbf{F}_\eta$ — градиентное усилие.

В системе координат, вращающейся вместе с Землей, сила инерции Кориолиса, приложенная ко льду, определяется по формуле $\mathbf{F}_K = 2m\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v}$, где $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости вращения Земли. В комплексной форме усилие Кориолиса запишется так:

$$\mathbf{F}_K = \rho_1 h\lambda v_0 \exp(-i\cdot\pi/2), \tag{9.7}$$

где λ — параметр Кориолиса; v_0 — комплексная скорость дрейфа.

Уклон поверхности моря характеризуется горизонтальным градиентом $\nabla_h\eta$, где η — отклонение уровня от поверхности равного потенциала. Тогда для горизонтальной силы имеем

$$F_\eta = -\rho_1 g h\nabla_h\eta. \tag{9.8}$$

Эта составляющая внешних сил существенна при расчете приливного дрейфа льда или движения льда в узкостях. В обычных условиях эта сила на порядок меньше воздействия на лед со стороны ветра и течений. Невелико также воздействие горизонтального градиента атмосферного давления p_a, вызывающего дополнительное горизонтальное усилие $\mathbf{F}_p = -\mathrm{h}\cdot\nabla_h p_a$.

Вдали от берегов для крупномасштабных процессов справедливо квазистационарное уравнение равновесия без учета сил инерции и внутренних усилий

$$\boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_w + \mathbf{F}_K + \mathbf{F}_\eta = 0. \tag{9.9}$$

Если ветра нет, то $\boldsymbol{\tau}_a = 0$ и вместо (9.9) получим уравнение $\boldsymbol{\tau}_w + \mathbf{F}_K + \mathbf{F}_\eta = 0$. В этом случае дрейф льда обусловлен только подледным течением и $v_0 = v_R$, где v_R — комплексная скорость течения. В случае сильного ветра касательные усилия сверху и снизу практически уравновешиваются, т. е. $\boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_w = 0$. Скорость дрейфа здесь линейно зависит от скорости геострофического ветра G_1. Такой дрейф называется изобарическим, поскольку геострофический ветер вычисляется по заданному полю атмосферного давления p_a:

$$G_1 = [1/(\rho_a \lambda)] \nabla p_a \exp(i\pi/2),$$

где ρ_a — плотность воздуха.

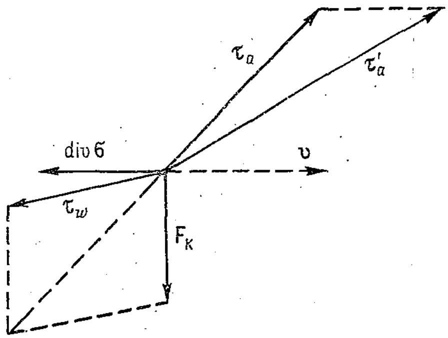


Рис. 9.1. Векторная диаграмма усилий, действующих на лед, при отсутствии градиентных сил F_η.

С учетом внутренних сил уравнение стационарного дрейфа будет

$$\boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_w + \mathbf{F}_K + \mathbf{F}_\eta + \operatorname{div} \sigma = 0. \quad (9.10)$$

Векторная диаграмма усилий, действующих на лед согласно (9.10), показана на рис. 9.1. Основной эффект действия внутренних усилий во льдах заключается в диссипации энергии. Поэтому их можно считать направленными против вектора скорости дрейфа $\mathbf{v}$. Без учета внутренних сил напряжение трения ветра $\boldsymbol{\tau}_a$ уравновешивается геометрической суммой $\boldsymbol{\tau}_w + \mathbf{F}_K + \mathbf{F}_\eta$. Как видно из рис. 9.1, при наличии внутренних сил для равновесия требуется большее усилие $\boldsymbol{\tau}'_a$, повернутое вправо от $\boldsymbol{\tau}_a$.

Как следует из уравнений (9.5) и (9.10), дрейф ледяного покрова определяется пятью силами. Две из них — градиентная сила $\mathbf{F}_\eta$ и сила Кориолиса $\mathbf{F}_K$ вычисляются, если задано отклонение уровня η и известен вектор скорости дрейфа. Определение поверхностных напряжений трения $\boldsymbol{\tau}_a$ и $\boldsymbol{\tau}_w$, а также внутренних усилий представляет собой самостоятельную задачу.

Взаимодействие ветра и воды с ледяным покровом происходит, как с твердой поверхностью, что позволяет использовать основные зависимости теории пристенной турбулентности. По отношению к ветру лед представляет собой неподвижную твердую стенку, причем касательное усилие τ_a считается зависящим от квадрата скорости ветра v_z на некотором уровне z от поверхности льда. Имеем

$$\boldsymbol{\tau}_a = \rho_a C_z |\mathbf{v}_z| \mathbf{v}_z, \quad (9.11)$$

где C_z — коэффициент аэродинамического сопротивления, зависящий от уровня измерений z и степени шероховатости поверхности льда. Этот коэффициент зависит также от стратификации приледного пограничного слоя воздуха, характеризующейся градиентным числом Ричардсона Ri. Толщина этого слоя в среднем равна 30 м, а толщина всего внешнего планетарного пограничного слоя (ППС) в атмосфере, примыкающего к ледяному покрову, составляет примерно 1000 м.

Исходя из анализа вертикальных профилей скорости ветра надо льдом, значение C_z определяли для стандартной высоты $z = 10$ м при стратификации, близкой к нейтральной, когда $|\mathrm{Ri}| < 0{,}04$. Для неровных торошенных льдов $C_{10} = (2{,}4 - 2{,}7) \cdot 10^{-3}$, а для ровных льдов $C_{10} = (1{,}4 - 1{,}7) \cdot 10^{-3}$. Эти значения у различных авторов хорошо согласуются между собой. В диагностических моделях для определения напряжения трения ветра вместо (9.11) берется квадратичная зависимость от скорости геострофического ветра G_1. В этом случае

$$\tau_a = \rho_a C_g |\mathbf{G}_1| (\mathbf{G}_1 \cos\alpha + \mathbf{k} \times \mathbf{G}_1 \sin\alpha), \tag{9.12}$$

где C_g — геострофический коэффициент трения в атмосферном ППС; α — угол поворота вектора скорости ветра у поверхности льда; $\mathbf{k}$ — единичный вектор нормали в направлении оси z.

Коэффициенты C_g и C_z связаны следующим соотношением:

$$C_g / C_z = (v_z / G_1)^2.$$

При математическом моделировании дрейфа для расчета напряжений τ_a применяется несколько различных способов. Для крупномасштабных задач с большим периодом осреднения принимаются зависимости типа (9.12), а в качестве расчетного параметра берется геострофический коэффициент трения C_g. Часто используют модели с заданным коэффициентом вертикального турбулентного обмена k_1 в приледном слое воздуха. В этом случае для скорости трения v_* полагают $v_*^2 = k_1 \partial v / \partial z$. Тогда

$$\tau_a = \rho_a k_1 \partial v / \partial z \big|_{z = z_0}, \tag{9.13}$$

где z_0 — параметр шероховатости поверхности льда. В простейших моделях коэффициент k_1 принимается постоянным по всей высоте пограничного слоя. При более тонком подходе задается зависимость k_1 от расстояния z до поверхности льда. Иными словами, путем подбора зависимостей $k_1(z)$ производится описание вертикального переноса количества движения в пограничном слое. Альтернативой являются прямые схемы расчета динамической структуры пограничного слоя с учетом уравнения баланса энергии турбулентных пульсаций. В зависимости от масштаба задачи используют интегральную либо дифференциальную модель пограничного слоя.

Сравнивая надледный и подледный пограничные слои, можно отметить их существенное сходство. Как видно из табл. 9.1, разница лишь в масштабе, равном $(\rho_2/\rho_a)^{1/2}$, где ρ_2 — плотность воды, ρ_a — плотность воздуха. Такое подобие позволяет использовать в математических моделях дрейфа единые схемы для описания верхнего и нижнего пограничных слоев. При этом надо учитывать, что скорости дрейфа льда и дрейфовых течений воды одного порядка, так что здесь ледяной покров является подвижной твердой стенкой. Измерения течения обычно производят со льда. Поэтому в общем случае справедливо следующее векторное равенство для

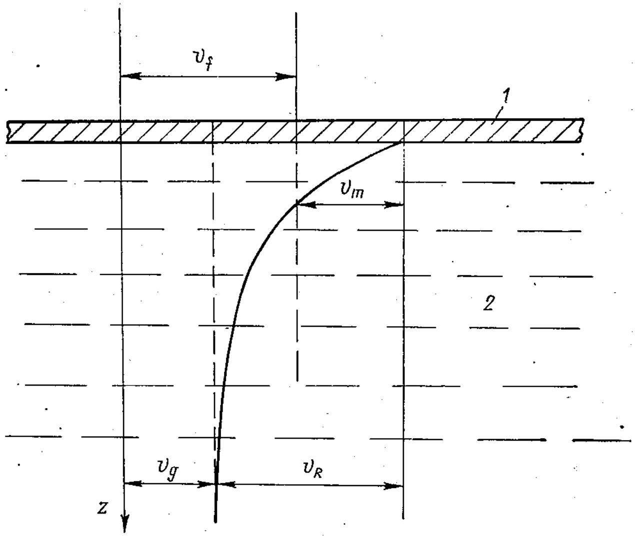


Рис. 9.2. К определению скорости течения подо льдом.
1 — лед; 2 — вода; v_f — абсолютная скорость дрейфа.

измеряемых $\mathbf{v}_m$ и абсолютных $\mathbf{v}_f$ скоростей дрейфа (рис. 9.2):

$$\mathbf{v}_m - \mathbf{v}_R = \mathbf{v}_f - \mathbf{v}_g,$$

где $\mathbf{v}_R$ — скорость поверхностного геострофического течения в океане; $\mathbf{v}_g$ — скорость градиентного течения.

Для поверхности раздела лед—вода касательные напряжения трения определяются по квадратичной зависимости $\tau_w = \rho_2 C_w v_z^2$, где C_w — коэффициент гидродинамического сопротивления, v_z — значение скорости движения воды относительно льда на некото-

Таблица 9.1

Толщины приледных слоев атмосферы и океана

	Атмосфера	Море подо льдом
Скорость трения v_*, м/с	0,30	0,01
Поверхностный слой, м	30	1
Внешний слой (ППС), м	1000	35

ром стандартном уровне z от его нижней поверхности. Если известно поверхностное течение в океане G_2, то для определения τ_w можно принять зависимость, аналогичную (9.12):

$$\tau_w = \rho_2 C_w |G_2 - \mathbf{v}_0| [(\mathbf{G}_2 - \mathbf{v}_0) \cos\beta + \mathbf{k} \times (\mathbf{G}_2 - \mathbf{v}_0) \sin\beta], \quad (9.14)$$

где $\mathbf{v}_0$ — скорость дрейфа льда; β — угол поворота вектора скорости в подледном пограничном слое. Для горизонта $z = 1$ м коэффициент трения C_w колеблется в пределах $(6—27) \cdot 10^{-3}$. Измеренные в натуре значения угла поворота β изменяются в пределах 16—27°.

Используя понятие коэффициента турбулентного обмена, касательное усилие τ_w можно выразить в общей форме динамических граничных условий для океана:

$$\tau_w = \rho_2 k_2 \, \partial v / \partial z \,|_{z=0}, \quad (9.15)$$

где k_2 — коэффициент вертикального турбулентного обмена импульсом в подледном пограничном слое. Этот коэффициент либо задается, либо вычисляется по схемам, аналогичным принятым для верхнего пограничного слоя.

Внутренние напряжения в ледяном покрове определяются усилиями взаимодействия между льдинами и зависят от вида напряженного состояния ледяного покрова, его структуры и деформаций. Эти напряжения описываются симметричным тензором напряжений второго ранга σ_{ij} с тремя различными компонентами: σ_{xx}, σ_{yy} и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Здесь σ_{xx}, σ_{yy} — нормальные напряжения, действующие вдоль осей координат, τ_{xy} — касательные напряжения. Внутренние напряжения в ледяном покрове, как и деформации, имеют смысл как некоторые средние величины для конечных репрезентативных участков площади ледяного покрова. Для определения напряжений σ_{ij} используются специальные соотношения, описывающие механические свойства или реологию ледяного покрова. В зависимости от типа соотношений различают вязкие, упруговязкие, упругопластические и иные модели ледяного покрова.

Механические свойства дрейфующих льдов хорошо описываются вязкой моделью, в которой внутренние напряжения связаны только с боковым обменом импульсом между льдинами. Фактически здесь учитывается только сопротивление сдвигу:

$$\sigma_{ij} = \eta^* (\partial v_i / \partial x_j + \partial v_j / \partial x_i), \quad (9.16)$$

где коэффициент сдвиговой вязкости η^* имеет смысл коэффициента бокового обмена. В различных моделях он принимается от 10^9 до 10^{12} кг/с. Полагая, что сплочение или разрежение льдов определяется знаком дивергенции скорости дрейфа, значение η^* принимается малым при $\operatorname{div} \mathbf{v} > 0$ и большим при $\operatorname{div} \mathbf{v} < 0$. В сплоченных льдах надо использовать не вязкую, а вязкоупругую модель, в которой учитывается сопротивление ледяного покрова не только сдвигу, но и сжатию.

В вязкоупругой модели ледяной покров рассматривается как упругая сжимаемая вязкая среда с линейной зависимостью сопротивления сдвига скорости. Сопротивление сжатию, т. е. давление ледового сжатия p_S считается пропорциональным малым отклонениям сплоченности δN от равновесного значения: $p_S = k_p \, \delta N$ при $\delta N > 0$ и $p_S = 0$ при $\delta N < 0$. Здесь коэффициент сжатия k_p зависит от толщины h и сплоченности льдов, а изменение сплоченности δN удовлетворяет линеаризованному уравнению неразрывности для ледяного покрова:

$$(1/N)\, \partial (\delta N)/\partial t = -\mathrm{div}\, \mathbf{v}. \tag{9.17}$$

Шаровая часть тензора напряжений пропорциональна первому инварианту тензора деформаций $I = \delta N$, а «вязкий» компонент совпадает с (9.16):

$$\sigma_{ij} = -p_S I + \eta^* (\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i). \tag{9.18}$$

В формулах (9.16) и (9.18) v_i — компонент скорости дрейфа льда.

Кроме вязких и вязкоупругих моделей, в практике расчетов используются и более сложные соотношения. Вводят, например, вторую (объемную) вязкость согласно общей форме закона вязкого течения. Разрабатывают комбинированные модели, включающие описание «упрочнения» и «пластичности» ледяного покрова. Применяются различные формы условия текучести. Учитывая разнообразие форм морского льда и природных условий в регионах, вряд ли можно рекомендовать универсальную реологическую модель ледяного покрова. Моделирование дрейфа льда успешно производится с помощью различных реологических соотношений применительно к конкретным ситуациям.

9.3. Расчеты поля скоростей дрейфа

В общем случае для комплексной скорости дрейфа можно полагать

$$v_0 = AG_1 + v_R + v_\varepsilon, \tag{9.19}$$

где v_R — комплексная скорость среднего течения в океане; v_ε — часть скорости дрейфа, вызванная внутренними силами и прочими неучтенными физическими факторами. Комплексный коэффициент A включает масштабный множитель и угол поворота $A = |A| \times \times \exp(-i\theta)$. Далеко от берегов влияние внутренних сил мало и слагаемым v_ε в (9.19) можно пренебречь. Если пренебречь еще и течениями, то получим изобарический дрейф. При этом масштабный множитель есть геострофический коэффициент дрейфа:

$$|A| = A_g = |v_0|/|G_1|.$$

При сильном ветре, когда геострофическая скорость G_1 велика, касательные напряжения ветра и воды практически уравновешивают друг друга. Здесь для скорости дрейфа получаем

$$v_0 = A_a G_1 \exp[-i(\beta - \alpha)] + v_R, \tag{9.20}$$

где углы поворота α и β заданы в формулах (9.12) и (9.14); $A=\sqrt{\rho_a C_a/(\rho_2 C_w)}$ — ветровой коэффициент дрейфа; $A_a=A_g G_1/v_a$. По численным оценкам $0{,}0114 \leqslant A_a \leqslant 0{,}036$. Для угла φ между вектором τ_a и направлением движения льдины имеем хорошее приближение $\varphi=\operatorname{arctg}(\lambda t_0)$, где λ — параметр Кориолиса; $t_0^{-1}=[\rho_2 C_w/(\rho_1 h)]v_0$; v_0 — установившаяся скорость льдины.

С помощью формулы (9.20) можно построить поле скоростей дрейфа, если известны геострофический ветер и течение подо льдом. Фактически дрейф льда и подледные течения связаны друг с другом. Поэтому даже в простейшем случае чисто ветрового дрейфа нужно совместно решать уравнения движения льда и воды. При заданном касательном напряжении трения ветра τ_a имеем для ледяного покрова

$$\begin{gathered}\rho_1 h\,\partial u_0/\partial t-\lambda\rho_1 h v_0-\rho_2 k_2\,\partial u/\partial z\,|_{z=0}=\tau_{ax};\\ \rho_1 h\,\partial v_0/\partial t+\lambda\rho_1 h u_0-\rho_2 k_2\,\partial v/\partial z\,|_{z=0}=\tau_{ay}\end{gathered}\tag{9.21}$$

и для воды подо льдом

$$\begin{gathered}\partial u/\partial t-\lambda v=k_2\,\partial^2 u/\partial z^2;\\ \partial v/\partial t+\lambda u=k_2\,\partial^2 v/\partial z^2,\end{gathered}\tag{9.22}$$

где u_0, v_0 — компоненты вектора скорости дрейфа льда; u, v — компоненты вектора скорости воды. Горизонтальные оси координат направлены на восток — ось x и на север — ось y. Ось z направлена вертикально вниз. На границе лед—вода при $z=0$ выполняется условие прилипания

$$u\,|_{z=0}=u_0;\quad v\,|_{z=0}=v_0.\tag{9.23}$$

На дне океана при $z=H$ имеем $u=v=0$, а при $z\to\infty$ движение затухает с глубиной до нуля.

Эта задача аналогична задаче Экмана для чистой воды. Система уравнений (9.21) и (9.22) описывает в линейном приближении чисто ветровой дрейф льда и дрейфовое течение под ним. Решение этой задачи производят в комплексной области, вводя комплексные скорости воды $v(z)=u+iv$, льда $v_0=v(0)=u_0+iv_0$ и комплексное напряжение ветра $F_a=\tau_{ax}+i\tau_{ay}$. Тогда вместо (9.21) и (9.22) имеем два уравнения в комплексной области:

$$\rho_1 h\partial v_0/\partial t+i\rho_1 h\lambda v_0-\rho_2 k_2\,\partial v/\partial z\,|_{z=0}=F_a;\tag{9.24}$$

$$\partial v/\partial t+i\lambda v-k_2\,\partial^2 v/\partial z^2=0.\tag{9.25}$$

При изменяющемся по вертикали коэффициенте турбулентности вместо уравнения (9.25) запишем

$$\frac{\partial v}{\partial t}+i\lambda v-\frac{\partial}{\partial z}\left(k_2\frac{\partial v}{\partial z}\right)=0.\tag{9.26}$$

Введем комплексный полный поток количества движения, переносимого одновременно льдом и водой. Для глубокого океана

$$S = \rho_1 h v_0 + \rho_2 \int_0^\infty v\, dz. \tag{9.27}$$

Интегрируя уравнение (9.26) по вертикальной координате z и учитывая условие (9.24) наверху и условие затухания с глуби-

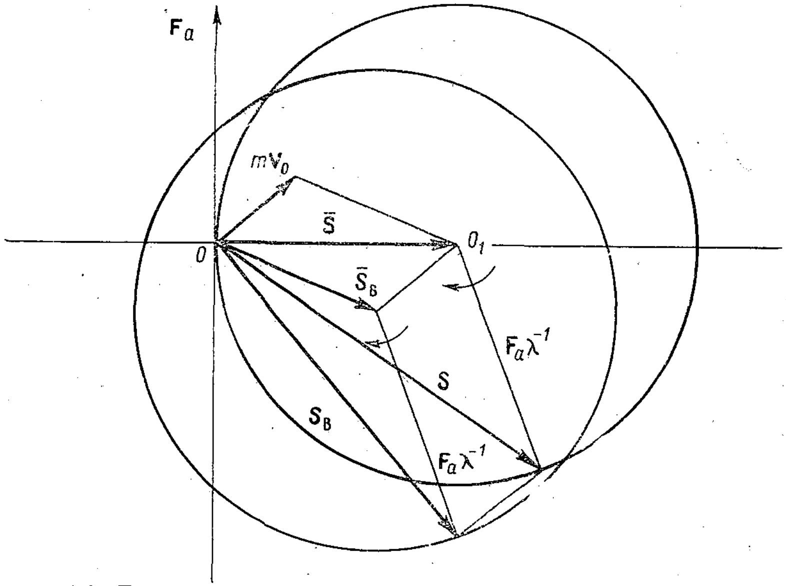


Рис. 9.3. Диаграммы полных потоков массы льда и воды.

ной, получим для полного потока следующее дифференциальное уравнение:

$$dS/dt + i\lambda S = F_a \exp(i\psi_0), \tag{9.28}$$

где ψ_0 — угол между вектором $\mathbf{F}_a$ и осью x. Уравнение (9.28) справедливо при любом переменном коэффициенте турбулентного трения k_2 и произвольной зависимости внешней силы от времени. В случае постоянной силы ветра $\mathbf{F}_a$, прикладываемой в момент времени $t=0$ к невозмущенному ледяному покрову, получим

$$S = F_a\lambda^{-1} \exp[i(\psi - \pi/2)]\,[1 - \exp(-i\lambda t)]. \tag{9.29}$$

В начале движения возникают свободные колебания системы лед—вода, происходящие с частотой λ. Со временем они затухают, и устанавливается вынужденное движение (дрейф). Из формулы (9.29) следует, что среднее значение вектора $\mathbf{S}$ за период инерции $\tau = 2\pi/\lambda$ равно $\bar{S} = F_a\lambda^{-1}$ и направлено под углом $\pi/2$ вправо от вектора $\mathbf{F}_a$ (рис. 9.3). Текущее значение S колеблется относительно среднего значения. Графически оно представляется как сумма вектора $\bar{\mathbf{S}}$ и вектора с тем же модулем $F_a\lambda^{-1}$, вращающегося по часовой стрелке вокруг точки O_1 с угловой скоростью λ. Вектор полного потока в воде $\mathbf{S}_в$ равен векторной сумме вектора среднего потока $\bar{\mathbf{S}}_в$ и вектора с модулем $F_a\lambda^{-1}$, вращающегося по часовой стрелке вокруг конца вектора $\bar{\mathbf{S}}_в$ с той же скоростью λ. При этом направление вектора полного потока $\mathbf{S}$ колеблется в пределах 0—180°, а вектор полного потока в воде совершает полный оборот.

Компоненты касательных усилий между льдом и водой для больших значений времени после начала действия ветра определяется по формулам

$$\begin{aligned} \tau_{wx} &= 2\rho_2 \sqrt{\lambda k_2/2}\,[v_0 C(\sqrt{\lambda t}) - u_0 S(\sqrt{\lambda t})]; \\ \tau_{wy} &= -2\rho_2 \sqrt{\lambda k_2/2}\,[v_0 S(\sqrt{\lambda t}) + u_0 C(\sqrt{\lambda t})], \end{aligned} \tag{9.30}$$

где $S(\sqrt{\lambda t})$ и $C(\sqrt{\lambda t})$ — интегральные синус- и косинус-интегралы Френеля. При $\lambda t \to \infty$ из этих выражений получаются известные соотношения для компонентов касательного напряжения:

$$\begin{aligned} \tau_{wx} &= \rho_2 \sqrt{\lambda k_2/2}\,(v_0 - u_0); \\ \tau_{wy} &= -\rho_2 \sqrt{\lambda k_2/2}\,(u_0 + v_0). \end{aligned} \tag{9.31}$$

Эти простые выражения часто используются при решении нестационарных задач ветрового дрейфа как квазистационарные приближения. Выражения (9.31) не следует применять при расчете существенно нестационарных процессов, характерный масштаб времени которых порядка периода инерции. Более полная картина по сравнению с рассмотренной выше получается, если исследовать движение трехслойной системы атмосфера — лед — вода. Характеристики дрейфа льда здесь находятся из системы уравнений:

$$\begin{aligned} m\,\partial u_0/\partial t - m\lambda v_0 - k_1\rho_1 \partial u_1/\partial z_1 \big|_{z_1=0} - \rho_2 k_2\,\partial u_2/\partial z_2 \big|_{z_2=0} &= 0; \\ m\,\partial v_0/\partial t + m\lambda u_0 - k_1\rho_1\,\partial v_1/\partial z_1 \big|_{z_1=0} - \rho_2 k_2\,\partial v_2/\partial z_2 \big|_{z_2=0} &= 0. \end{aligned} \tag{9.32}$$

Уравнения движения льда (9.32) отнесены к единице площади ледяного покрова массой $m = \rho_0 h$. Помимо массовых сил, здесь учтены напряжения трения со стороны ветра и воды. Поверхностная плотность льда m не зависит от времени. Ось z_1 направлена вертикально вверх, а ось z_2 — вниз, как показано на рис. 9.4. Принимая обычное допущение о том, что атмосферные и океанские слои удовлетворяют условиям квазистационарности и горизонтальной однородности, запишем для верхнего ($i=1$) и нижнего ($i=2$) приледных слоев

$$\frac{d}{dz_i} k_i\left(\frac{du_i}{dz_i}\right) + \lambda (v_i - G_{iy}) = 0;$$

$$\frac{d}{dz_i}\left(k_i \frac{dv_i}{dz_i}\right) - \lambda (u_i + G_{ix}) = 0, \tag{9.33}$$

где G_1 — скорости геострофического ветра; G_2 — скорость течения воды.

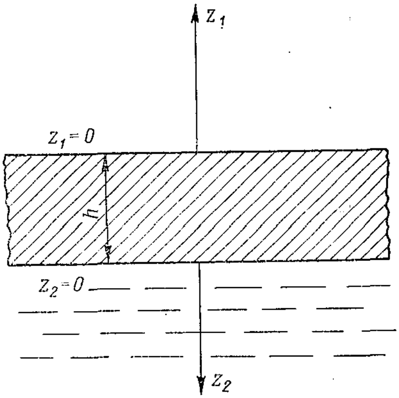


Рис. 9.4. Расположение вертикальных координатных осей в системе воздух (z_1) — лед — вода (z_2).

Система уравнений (9.32), (9.33) замкнута относительно неизвестных скоростей движения льда, воздуха и воды: u_0, v_0, u_1, v_1, u_2, v_2.

Решение системы должно удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\text{при } z_1 \to \infty \quad u_1 = G_{1x} = G_1 \cos\alpha_1; \quad v_1 = G_{1y} = G_1 \sin\alpha_1; \tag{9.34}$$

$$\text{при } z_2 \to \infty \quad G_2 = 0, \text{ т. е. } u_2 = v_2 = 0; \tag{9.35}$$

$$\text{или } G_2 \neq 0, \text{ т. е. } \begin{cases} u_2 = G_{2x} = G_2 \cos\alpha_2; \\ v_2 = G_{2y} = G_2 \sin\alpha_2, \end{cases} \tag{9.36}$$

где α_1, α_2 — углы между векторами скоростей $\mathbf{G}_i$ и осью x.

На нижней и верхней поверхностях льда при $z_i=0$ наблюдается условие склейки скоростей

$$u_1(0) = u_2(0) = u_0; \quad v_1(0) = v_2(0) = v_0; \tag{9.37}$$

В рассмотренной задаче внешними факторами, вызывающими движение всей системы, являются геострофический ветер G_1 и течение воды G_2. Из внутренних параметров задачи фактически переменными являются поверхностная плотность ледяного покрова m и характеристики турбулентности воды и воздуха. В линейной динамической постановке задачи эти величины считаются заданными. В общую нелинейную задачу входит определение параметров турбулентности в приледных слоях воды и воздуха, являющихся функциями скорости геострофического движения и зависящих от стратификации этих слоев. При этом используются обычные гипотезы полуэмпирической теории турбулентности, динамические уравнения (9.32) и (9.33) с граничными условиями остаются прежними, а коэффициенты турбулентности k_i считаются неизвестными заранее.

В простейшем случае используется интегральная модель пограничных слоев атмосферы и океана, примыкающих к ледяному покрову. Здесь для обоих случаев используется интегральное уравнение баланса энергии турбулентности

$$\int_0^{h_i} k_i \left[\left(\frac{du_i}{dz_i}\right)^2 + \left(\frac{dv_i}{dz_i}\right)^2 - \frac{g}{\theta_{0i}} \frac{d\theta_i}{dz_i}\right] dz_i - c_1 \frac{b_i^2}{k_i} h_i = 0. \quad (9.38)$$

Уравнение (9.38) проинтегрировано по всей толщине пограничного слоя h_i; b_i — кинетическая энергия турбулентных пульсаций; θ_i — потенциальная температура воздуха ($i=1$) или плотности воды ($i=2$); $\theta_{0i} = \theta_i|_{z=0}$. В уравнении (9.38) коэффициент турбулентности k_i и величина b_i считаются постоянными по вертикали в пределах слоя h_i и связаны друг с другом известным соотношением

$$k_i = c_2 h_i \sqrt{b_i}, \quad (9.39)$$

где h_i принимается по Экману:

$$h_i = \pi \sqrt{2k_i/\lambda}.$$

Входящие в формулы (9.38) и (9.39) универсальные константы c_1 и c_2 обычно полагают равными $c_1 = 5$ и $c_2 = 0{,}036 \ldots 0{,}046$.

Более точные результаты, учитывающие изменение стратификации атмосферы и моря, дает дифференциальная модель пограничных слоев. Уравнение баланса энергии турбулентности как для верхнего ($i=1$), так и для нижнего ($i=2$) пограничных слоев принимается в виде

$$k_i \left[\left(\frac{du_i}{dz_i}\right)^2 + \left(\frac{dv_i}{dz_i}\right)^2 - \frac{g}{\theta_i} \frac{d\theta_i}{dz_i}\right] - c_0 \frac{b_i^2}{k_i} + \alpha_b \frac{d}{dz_i}\left(k_i \frac{db_i}{dz_i}\right) = 0. \quad (9.40)$$

Здесь $\alpha_b = 1$; $c_0 = 0{,}046$ — универсальные константы. Величины k_i и b_i являются функциями вертикальных координат z_i и должны удовлетворять следующим граничным условиям:

при $z_i = 0$, т. е. на верхней и нижней поверхностях ледяного покрова,

$$b_i = c_0^{-1/2} k_i \sqrt{\left(\frac{du_i}{dz_i}\right)^2 + \left(\frac{dv_i}{dz_i}\right)^2}; \quad (9.41)$$

при $z_i \to \infty$ $b_i \to 0$.

Уравнения (9.40) и (9.41) совместно с уравнениями (9.32) и (9.33) образуют замкнутую систему относительно неизвестных u_0, v_0, u_i, v_i, b_i, k_i. Если стратификация пограничных слоев установлена, а толщина льда известна, то полученная система уравнений с соответствующими граничными условиями будет определена. Такая нелинейная дифференциальная модель дрейфа имеет чисто динамический характер. Все термодинамические характеристики тут не зависят от внутренних параметров модели и должны задаваться извне.

Для расчета длительных процессов динамической модели недостаточно, она должна быть дополнена уравнениями, описывающими тепломассоперенос с учетом фазовых переходов. При этом определение термодинамических характеристик является составной частью модели. Эволюция структуры льдов в такой модели выражается в изменении их толщины и сплоченности. Эти изменения происходят в результате адвекции льдов, торошения и термических процессов. Для толщины льда h записывается следующее уравнение сохранения:

$$\partial h/\partial t = -\nabla_h(\mathbf{v}h) + S_h(h,\ N), \tag{9.42}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости дрейфа льда; ∇_h — горизонтальный градиент; S_h — член, учитывающий намораживание и таяние льда. Для S_h справедлива следующая экстраполяционная формула:

$$S_h = f(h)N + f(0)(1 - N),$$

где функция $f(h)$ равна скорости роста льда толщиной h.

Для сплоченности льдов N записывается аналогичное уравнение:

$$\partial N/\partial t = -\nabla_h(\mathbf{v}N) + S_N, \tag{9.43}$$

где S_N также определяется путем экстраполяции. Сплоченность льдов N рассматривается как функция сплошности ледяного покрова, изменяющаяся в интервале (0, 1). Этой функции можно придать вероятностное толкование, полагая ее равной вероятности попадания в лед при случайной выборке.

9.4. Численные модели дрейфа льдов

Циркуляция морских льдов в среднем определяется как результат совместного действия среднего ветра и среднего течения. В ряде случаев с помощью ветровых коэффициентов можно определить поле скоростей дрейфа, рассчитав геострофический ветер. Однако далеко не всегда это возможно. Практически для реальных водоемов численные расчеты дрейфа необходимо проводить с учетом фактических условий, пространственных и временных масштабов задачи. В зависимости от целей расчета следует принимать те или иные математические модели.

Наиболее общей и достаточно разработанной является трехмерная диагностическая модель океана, покрытого льдом, Хиблера и Брайена [8]. В ней двухуровенная модель морского льда Хиблера [7] объединена с многоуровенной бароклинной моделью океана Брайена [6]. Океаническая модель позволяет определить скорость подледного течения и теплообмен со льдом. В свою очередь лед, покрывающий поверхность океана, обусловливает соответствующие граничные условия для потоков тепла, соли и количества движения и влияет на формирование верхнего пограничного слоя в океане. В качестве внешних факторов в модели Хиблера—Брайена принимаются геострофический ветер, температура воздуха у поверхности льда и влажность.

Уравнения движения льда записываются следующим образом:

$$m\,\partial\mathbf{v}/\partial t = \lambda m\mathbf{k}\times\mathbf{v} + \boldsymbol{\tau}_a + \boldsymbol{\tau}_w - \nabla_h p\,(0) + \mathbf{F}^i, \tag{9.44}$$

где касательные усилия ветра и воды определяются по формулам (9.12) и (9.14). В двумерное уравнение (9.44) включены горизонтальные градиентные силы давления воды $p(\mathbf{x}, z)$ и внутренние силы $\mathbf{F}^i$, зависящие от горизонтальных координат. Поверхностная плотность льда $m=\rho_i hN$ считается переменной. Поэтому уравнение (9.44) дополняется уравнениями сохранения для льда (9.42) и сплоченности (9.43).

Уравнения движения для океана принимаются в виде

$$\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla_h)\,\mathbf{u} + w\,\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial z} = \lambda\,(\mathbf{k}\times\mathbf{u}) - \frac{1}{\rho_2}\,\nabla_h p + {}$$

$$+ A_H\,\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial z^2} + A_L\nabla_h^2\mathbf{u} + \delta(z)\left(\boldsymbol{\tau}_a + \mathbf{F}^i\right). \tag{9.45}$$

В этом уравнении $\mathbf{u}$ — горизонтальная скорость воды; $w(\mathbf{x}, z)$ — вертикальный компонент скорости; $p(\mathbf{x}, z)$ — давление воды, зависящее от глубины, температуры и солености; $\delta(z)$ — дельта-функция. В уравнение (9.45) входят адвективные составляющие скорости, вертикальный компонент, градиентные силы, член, учитывающий горизонтальный турбулентный обмен. Последнее слагаемое в (9.45) учитывает касательное усилие, передаваемое океану. Здесь оно считается равным касательному напряжению ветра τ_a с учетом внутренних усилий в ледяном покрове $\mathbf{F}^i$. Коэффициент внутреннего турбулентного обмена A_H считается постоянным и принимается равным $A_H = 1{,}0$ см^2/с, что физически реально. Значение коэффициента горизонтального обмена $A_L = 10^9$ см^2/с определялось методом математического моделирования. Уравнения движения (9.45) дополняются двумя уравнениями переноса тепла T и солености S, записанными с учетом фазовых переходов и выделения (поглощения) солей при замерзании воды и таяния льда.

Для потока тепла имеем уравнение

$$\partial T/\partial t + \nabla_h(T\mathbf{u}) + \partial(wT)/\partial z = K_H\,\partial^2 T/\partial z^2 + K_L\nabla_h^2 T + \Phi(h,\ N,\ T). \tag{9.46}$$

Здесь в левой части учитывается адвективный перенос тепла течениями, первые два члена правой части описывают соответственно турбулентный обмен по вертикали и по горизонтали, а последнее слагаемое включает поверхностный теплообмен и тепло фазовых переходов лед—вода—лед. Коэффициенты вертикальной и горизонтальной температуропроводности в [8] приняты постоянными и равными $K_H = 10$ см²/с и $K_L = 10^7$ см²/с. Для потока соли записывается аналогичное (9.46) уравнение.

Численная реализация такой модели позволяет исследовать крупномасштабную долгопериодную циркуляцию в Северном Ледовитом океане, окраинных и замерзающих морях с учетом климатологических факторов. Для короткопериодных процессов берутся упрощенные модели. Например, для расчета и прогноза перераспределения и сжатия льдов в оперативном режиме используется уравнение движения льда с учетом сил инерции и внутренних сил. В открытых районах океана внутренние усилия определяют отдельно по вычисленным без учета их влияния полям скоростей и перемещений.

Рассмотрим для примера линейную модель приливного дрейфа льда, в которой рассматривается полусуточная составляющая M_2.

К особенностям приливного дрейфа льда относится то, что ледяной покров движется не только под действием приливного течения, но и из-за наличия горизонтального градиента уровня $\mathrm{grad}_h\,\eta$. При достаточной глубине водоема в приливном потоке развиваются два пограничных слоя — подледный и придонный, смыкающиеся на мелководье. Уравнения движения ледяного покрова без учета взаимодействия между льдинами при $m = \mathrm{const}$ записываются так:

$$\begin{aligned} m\,\partial u_0/\partial t - \lambda m v_0 &= -gm\,\partial\eta/\partial x + \rho_2 k_3\,\partial u_3/\partial z\,|_{z=H}; \\ m\,\partial v_0/\partial t + \lambda m u_0 &= -gm\,\partial\eta/\partial y + \rho_2 k_3\,\partial v_3/\partial z\,|_{z=H}, \end{aligned} \tag{9.47}$$

где u_3, v_3 — компоненты скорости приливного течения; k_3 — коэффициент турбулентности в подледном пограничном слое. Начало координат располагается на дне водоема глубиной H, ось z направлена вверх. Для решения задачи по внешним параметрам система (9.47) дополняется уравнениями для воды. Уравнение движения в пограничных слоях и промежуточном слое записывается в линейной форме:

$$\begin{aligned} \partial u_i/\partial t - \lambda v_i &= -g\,\partial\eta/\partial x + k_i\,\partial^2 u_i/\partial z_i^2; \\ \partial v_i/\partial t + \lambda u_i &= -g\,\partial\eta/\partial y + k_i\,\partial^2 v_i/\partial z_i^2, \end{aligned} \tag{9.48}$$

где $k_i \neq 0$ для подледного ($i=3$) и придонного ($i=1$) пограничных слоев; $k_i = 0$ для промежуточного ($i=2$) слоя. Для всех трех слоев должно выполняться уравнение неразрывности

$$\partial u_i/\partial x + \partial v_i/\partial y + \partial w_i/\partial z = 0. \tag{9.49}$$

Замыкающее уравнение баланса энергии турбулентности получается путем интегрирования по толщине погранслоя и осреднения за период приливной волны T. В интегральной форме имеем

$$\frac{k_i}{T}\int_0^T\int_0^{h_i}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial z_i}\right)^2+\left(\frac{\partial v_i}{\partial z_i}\right)^2\right]dz_i\,dt-c_1b_i^{3/2}=0,\quad i=1,\ 3,\qquad(9.50)$$

где использованы модифицированные соотношения (9.39)

$$k_i=c_2h_i\sqrt{b_i};\quad h_i=\pi\sqrt{\frac{2k_i}{\omega+\lambda}},\qquad i=1,\ 3.\qquad(9.51)$$

Здесь ω — угловая скорость (частота) приливной волны.

Для замыкания полученной системы уравнений (9.48)—(9.51) относительно девяти неизвестных компонентов скоростей воды u_i, v_i, w_i, уровня моря η и двух априори неизвестных коэффициентов турбулентности k_1 и k_3 используется кинематическое соотношение на поверхности моря $w_3|_{z=h}=\partial\eta/\partial t$.

Решение полученной полной системы уравнений должно удовлетворять следующим граничным условиям:

на твердом контуре моря L скорость дрейфа льда равна нулю —

$$u_0|_L=v_0|_L=0;$$

на дне водоема выполняются условия прилипания

$$u_1=v_1=w_1=0\quad\text{при}\quad z_1=0.$$

Скорости в пограничных слоях при достаточном удалении от дна и нижней поверхности льда стремятся к скорости в среднем слое:

$$u_1=u_2;\quad v_1=v_2\quad\text{при}\quad z_1\to\infty;$$

$$u_3=u_2;\quad v_3=v_2\quad\text{при}\quad z_1\to\infty.$$

На границе раздела лед—вода скорости воды и льда равны

$$u_0=u_3;\quad v_0=v_3\quad\text{при}\quad z_3=h_3.$$

Вертикальные скорости воды на верхней границе придонного слоя и нижней границе подледного слоя не должны иметь разрывов. Колебания уровня считаются заданными на контуре моря, что и определяет общую картину дрейфа. В приведенной схеме не учитываются усилия взаимодействия между льдинами при дрейфе. Можно ожидать, что в отдельных прибрежных районах и узкостях влияние этого взаимодействия будет велико. Кроме того, практический интерес представляет определение зон приливного сжатия льдов.

Взаимодействие между льдинами при приливном дрейфе удачно описывается вязкоупругой моделью [5]. В этой модели усилие бокового обмена $\mathbf{R}$ в процессе выравнивания скоростей аналогично силам вязкого трения

$$\mathbf{R}=k_\text{г}m\nabla^2\mathbf{v}_0,$$

где $\mathbf{v}_0$ — вектор скорости дрейфа; $k_\text{г}$ — коэффициент бокового обмена импульсом, зависящий от толщины и сплоченности льдов. Обычно его берут либо постоянным, либо линейно зависящим от сплоченности, подбирая численное значение в процессе вычислений. По порядку величины $k_\text{г} \approx 2 \cdot 10^6$ м²/с.

Прямой передаче импульса от льдины к льдине соответствует давление ледового сжатия $p_S = k_p\, \delta N$, где δN — изменение сплоченности льдов, k_p — коэффициент сжатия. Для сплоченных льдов $(N \sim 1)$ $k_p \sim 10^7 \dots 10^8$ Н/м. Толщина льда h полагается постоянной по всей поверхности моря. Лед считается сплоченным, так что отклонения от средней равновесной сплоченности N_0 невелики. Тогда условие сохранения массы дает следующую зависимость между изменением сплоченности и дивергенцией скорости дрейфа:

$$(1/N_0)\, d\,(\delta N)/dt = -\operatorname{div} \mathbf{v}_0. \qquad (9.52)$$

Учитывая в уравнениях приливного дрейфа усилия бокового обмена между льдинами и давление ледового сжатия, получим вместо (9.47) следующие уравнения:

$$m\, \partial u_0/\partial t - \lambda m v_0 = -gm\, \partial\eta/\partial x + \rho_2 k_3\, \partial u_3/\partial z\,|_{z=H} - \partial p_S/\partial x + k_\text{г} m \nabla^2 u_0;$$

$$(9.53)$$

$$m\, \partial v_0/\partial t + \lambda m u_0 = -gm\, \partial\eta/\partial y + \rho_2 k_3\, \partial v_3/\partial z\,|_{z=H} - \partial p_S/\partial y + k_\text{г} m \nabla^2 v_0.$$

Учет бокового обмена здесь не вносит дополнительных неизвестных, хотя создает известные трудности при численном решении из-за появления членов вида $k_\text{г} m \nabla^2 u_0$. Для их преодоления в качестве одного из возможных вариантов можно производить расчеты по нерегулярной сетке с минимальным шагом в прибрежной области, где влияние бокового обмена наиболее существенно.

Вычисления при этом производятся в два этапа. На первом этапе решается система уравнений (9.47)—(9.51) с соответствующими граничными условиями. Изменения сплоченности и внутренние усилия во льдах не учитываются. По рассчитанному полю скоростей дрейфа выделяются зоны конвергенции льдов, т. е. зоны возможных ледовых сжатий. На втором этапе расчет производится только для этих зон, причем граничные условия для компонентов скорости дрейфа u_0 и v_0 на контурах этих зон принимаются по данным первого этапа. На втором этапе расчета вместо уравнения (9.47) принимаются уравнения (9.53) и (9.52) с учетом зависимости $p_S = k_p\, \delta N$.

Для предварительных расчетов ледовых сжатий не обязательно решать систему уравнений (9.53) для всей области. Оценку усилий ледового сжатия можно произвести, вычислив изменения сплоченности льдов δN. В результате расчетов может оказаться $N > 1$, что невозможно по определению сплоченности. Тогда прибегают к искусственным приемам, изменяя должным образом либо скорости дрейфа u_0, v_0, либо толщину льда. Это соответствует торошению льда и подсовам. Для более строгого учета изменения сплоченности и внутренних усилий во льдах разработаны лагранжево-эйлеровы схемы расчета дрейфа.

Вопросы для самопроверки

1. Каковы основные особенности структуры морского ледяного покрова?
2. Приведите характеристики раздробленности и сплоченности морских льдов.
3. Назовите основные характеристики деформаций ледяного покрова.
4. Как определяется средняя скорость дрейфа льдов? Что такое пульсации скорости?
5. Какие основные внешние силы действуют на лед?
6. Внутренние силы в ледяном покрове и способы их описания.
7. Что такое реологическая модель ледяного покрова?
8. Как определяется изобарический дрейф льда?
9. Что такое ветровой коэффициент дрейфа? Геострофический коэффициент?
10. Сформулируйте граничные условия на поверхности раздела лед—вода.
11. Сформулируйте граничные условия на твердой кромке — на берегу и на свободной кромке.
12. Дайте определение полного потока количества движения в глубоком море, покрытом льдом.
13. Каковы характерные вертикальные масштабы подледного и надледного пограничных слоев?
14. Какие модели турбулентных пограничных слоев используются при расчетах дрейфа льдов?
15. Каковы особенности вертикального строения приливного потока подо льдом?
16. Что такое ледовое сжатие?

Типовые упражнения

1. Составьте уравнения для определения компонентов тензора деформаций ледяного покрова по данным натурных измерений. Как поступать, если число измерений больше трех?

2. Составьте уравнения изостатического равновесия тороса треугольной формы, если заданы коэффициенты заполнения ψ_1 и ψ_2 и углы откоса θ_1 и θ_2. Индекс «1» относится к надводной части тороса, а индекс «2» — к подводной.

3. Составьте дифференциальные уравнения движения одиночной льдины под действием ветра при квадратичной зависимости сопротивления воды от скорости. Оцените время выхода движения на стационарный режим.

4. В предыдущей задаче найдите ветровой коэффициент дрейфа для стационарного режима и определите влияние силы Кориолиса.

5. Составьте линейные квазистационарные уравнения изобарического дрейфа льда и уравнения движения в пограничном слое воздуха, полагая, что коэффициент турбулентности k_1 не меняется по высоте.

6. Получите аналитические решения задачи об изобарическом дрейфе, полагая градиент атмосферного давления p_a заданным и неизменным по высоте. Выведите формулы для касательного напряжения ветра $\boldsymbol{\tau}_a$.

7. Выполните аналогичный расчет для определения касательных напряжений со стороны воды $\boldsymbol{\tau}_w$ при заданном градиентном течении G_2.

8. Получите общее решение уравнения (9.28) для полного потока количества движения.

9. Определите аналитически распределение количества движения между льдом и водой при чисто ветровом дрейфе.

10. Установите в линейном приближении связь между завихренностью векторов касательного усилия ветра τ_a и воды τ_w на верхней и нижней поверхностях ледяного покрова.

11. Оцените влияние изменения сплоченности льдов на завихренность при дивергенции и конвергенции льдов.

12. Перейдите от уравнения сохранения массы льда к уравнению для сплоченности. Проанализируйте возможные зависимости усилий ледового сжатия от изменения сплоченности.

13. Получите дифференциальное уравнение для определения ледового сжатия p_S, учитывая сжимаемость ледяного покрова.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

ИЗУЧЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ НЕСТАЦИОНАРНОГО ВЕТРОВОГО ДРЕЙФА ЛЬДА

Целью данной лабораторной работы является изучение с помощью математического моделирования характеристик ветрового дрейфа льда при его неустановившемся характере, а также проведение диагностических расчетов элементов ветрового дрейфа льда для произвольных акваторий.

Краткое теоретическое обоснование модели ветрового дрейфа льда и вывод расчетных уравнений. Система нестационарных уравнений движения льда, отнесенных к единице площади льда массой m, приведена в выражении (9.32).

Помимо массовых сил, в (9.32) учтены напряжения трения со стороны ветра и воды. Внутренние силы взаимодействия между льдинами не учитываются. Поверхностная плотность льда — $m = \rho_0 h_0$ — считается не зависящей от времени.

Схема расположения вертикальных осей координат в системе воздух (z_1) — лед—вода (z_2) приведена на рис. 9.4.

В уравнениях (9.32) и далее индексом «1» обозначены переменные, относящиеся к воздуху, индексом «2» — к воде, индексом «0» — ко льду, а $\lambda = 2\Omega \sin \varphi$ — параметр Кориолиса, Ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта места.

Для определения тангенциальных напряжений трения на верхней и нижней поверхностях льда привлечем соответствующие интегральные модели движения в приледных пограничных слоях при условии постоянства по вертикали коэффициентов турбулентного обмена, горизонтальной однородности слоев, а также их квазистационарности:

$$\begin{aligned} &k_i\, d^2u_i/dz_i^2 + \lambda v_i = 0; \\ &k_i\, d^2v_i/dz_i^2 - \lambda u_i = 0, \end{aligned} \qquad (9.54)$$

где $i=1$ для атмосферы и $i=2$ для океана. Подчеркнем здесь, что условие квазистационарности существенно упрощает поставленную задачу, означая неучет инертности подледного слоя воды. Это ведет к фильтрации процессов, описанных выше [см. выражения (9.27)—(9.30)], однако позволяет остановиться на изучении инерционных эффектов в движении льда, возникающих только в силу его собственной инертности. Используем обычные для модели (9.54) асимптотические граничные условия, при которых при $z_1 \to \infty$ $\mathbf{v}_1(u_1, v_1) \to \mathbf{G}_1(u_g, v_g)$, а при $z_2 \to \infty$ $\mathbf{v}_2(u_2, v_2) \to 0$, т. е. скорость ветра в атмосфере стремится к геострофической, а движение в воде затухает по мере удаления от льда. На нижней и верхней поверхностях льда при $z_i=0$ принимаем условие склейки скоростей (9.37). Применяя процедуру Экмана, а также учтя, что $|\mathbf{G}_1| \gg |\mathbf{v}_0|$, получим выражения для соответствующих напряжений в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tau_{ax} &= k_1\rho_1\,\partial u_1/\partial z_1\,|_{z_1=0} = \rho_1\sqrt{\lambda k_1/2}\,(u_g - v_g); \\ \tau_{ay} &= k_1\rho_1\,\partial v_1/\partial z_1\,|_{z_1=0} = \rho_1\sqrt{\lambda k_1/2}\,(u_g + v_g); \end{aligned} \tag{9.55}$$

$$\begin{aligned} \tau_{wx} &= k_2\rho_2\,\partial u_2/\partial z_2\,|_{z_2=0} = \rho_2\sqrt{\lambda k_2/2}\,(v_0 - u_0); \\ \tau_{wy} &= k_2\rho_2\,\partial v_2/\partial z_2\,|_{z_2=0} = \rho_2\sqrt{\lambda k_2/2}\,(u_0 - v_0). \end{aligned} \tag{9.56}$$

Теперь перепишем исходные уравнения ветрового дрейфа льда в следующем виде:

$$\begin{aligned} m\,\partial u_0/\partial t - m\lambda v_0 &= \tau_{ax} + \tau_{wx}; \\ m\,\partial v_0/\partial t + m\lambda u_0 &= \tau_{ay} + \tau_{wy}. \end{aligned} \tag{9.57}$$

Из их анализа с учетом выражений (9.55) и (9.56) видно, что тангенциальное напряжение ветра является внешним для данной задачи параметром. Его можно определять или по выражению (9.55) через значения геострофического ветра при заданном коэффициенте турбулентности, или по каким-либо другим зависимостям [например, (9.11) или (9.12)]. В то же время тангенциальное напряжение воды на нижней поверхности выражается через собственную скорость льда и, таким образом, система (9.57) может быть теперь просто решена численно. Легко видеть, что решение системы (9.57) описывает приспособление развивающегося из состояния покоя ($u_0=v_0=0$ в момент времени $t=0$) дрейфа льда к действию приложенной силы $\vec{\tau}_a$, которая в свою очередь может быть постоянна или переменна.

Порядок выполнения работы

Для выполнения расчетов требуется иметь данные о всех величинах, входящих в систему уравнений (9.57), при этом компоненты геострофической скорости ветра $\mathbf{G}_1$ могут задаваться, а могут быть и определены по картам барической топографии или приземного давления. Кроме этого, исходными данными для определения скорости дрейфа являются ρ_0, ρ_1, ρ_2, h_0, Ω, φ, k_1 и k_2. В работе предлагается выполнить два задания:

задание 1: провести исследование влияния различных параметров на процесс установления дрейфа льда;

задание 2: провести диагностические расчеты крупномасштабного дрейфа льда для конкретной акватории.

Выполнение работы начинается с выбора схемы численного решения нестационарной системы уравнений (9.57). В этой связи необходимо обосновать проведенный выбор, представить блок-схему программы расчета на ЭВМ и составить блок расчета изменения скорости дрейфа льда с выбранным шагом Δt для заданных параметров расчета в виде подпрограммы. Последнее целесообразно для эффективного использования подпрограммы в обоих заданиях.

При выполнении задания 1 предлагается для заданных постоянных значений вектора геострофического ветра провести расчет выхода на стационарный режим ветрового дрейфа льда и изучить влияние на него и на режим установления различных параметров модели. Для этого требуется выполнить следующие численные эксперименты:

— при заданных h_0, φ, k_1 и k_2 провести пять расчетов с заданием различных значений составляющих геострофического ветра u_g, v_g;

— при заданном значении вектора геострофической скорости $\mathbf{G}_1(u_g, v_g)$, φ, k_1 и k_2 провести три расчета с различными значениями толщины льда h_0;

— изучить влияние турбулентных режимов в приледных пограничных слоях, проведя пять экспериментов с заданием различных комбинаций коэффициентов k_1 и k_2;

— исследовать влияние широты места φ на характер установления дрейфа льда путем проведения расчетов для трех различных значений φ при постоянных других параметрах.

Описать результаты численных экспериментов, построив графики изменения во времени скорости дрейфа льда в зависимости от различных параметров и дав соответствующее физическое толкование результатов. Обратить особое внимание на время установления дрейфа льда и на характер установления.

Для выполнения задания 2 необходимо выбрать конкретный физико-географический район, аппроксимировать его акваторию расчетной сеткой, в которой должно быть не менее 40 узлов. Подобрать исходные поля распределения толщины льда и атмосферного давления, снять соответствующие значения в узлах расчетной сетки. Составить программу диагностического расчета элементов ветрового дрейфа льда по заданному барическому полю, включив в нее разработанную подпрограмму расчета изменения скорости дрейфа льда. Провести диагностические расчеты для трех различных барических ситуаций, задав постоянные коэффициенты турбулентного обмена и доведя расчет до установления скоростей дрейфа.

В заключение проводится анализ крупномасштабных полей скорости дрейфа ледяного покрова, его особенностей, соответствие заданной барической ситуации, дается оценка времени установления, анализируются возможности и ограничения методики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 9

1. Доронин Ю. П., Хейсин Д. Е. Морской лед.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975.— 318 с.
2. Зубакин Г. К. Крупномасштабная изменчивость состояния ледяного покрова морей Северо-Европейского бассейна.— Л.: Гидрометеоиздат, 1987.— 160 с.
3. Зубов Н. Н. Льды Арктики.— М.: Изд. Главсевморпути, 1945.— 360 с.
4. Номенклатура морских льдов. Условные обозначения для ледовых карт.— Л.: Гидрометеоиздат, 1974.— 76 с.
5. Тимохов Л. А., Хейсин Д. Е. Динамика морских льдов.— Л.: Гидрометеоиздат, 1987.— 272 с.
6. Bryan K. A numerical method for the study of the circulation of the world oceans//J. Comput. Physics.— 1969.— Vol. 4.— P. 347—376.
7. Hibler W. D., III. A dynamic thermodynamic sea ice model of the ocean//J. Phys. Oceanogr.— 1979.— Vol. 9, N 4.— P. 815—846.
8. Hibler W. D., III, Bryan K. A diagnostic ice-ocean model//J. Phys. Oceanogr.— 1987.— Vol. 17, N 7.— P. 987—1015.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Б

В

Л

М

Н

О

П

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное пособие

Ивченко Владимир Олегович, **Клепиков** Александр Вячеславович,
Козлов Вадим Федорович, **Кузнецова** Лилия Николаевна,
Масловский Михаил Иванович, **Некрасов** Алексей Всеволодович,
Пелиновский Евгений Наумович, **Плинк** Николай Леонидович,
Резник Григорий Михайлович, **Хейсин** Дмитрий Евгеньевич

ПРАКТИКУМ ПО ДИНАМИКЕ ОКЕАНА

Редактор З. И. Мироненко. Художник Е. Р. Кривоносова. Художественный редактор Б. А. Бураков. Технический редактор Н. Ф. Грачева. Корректор И. Б. Михайлова

ИБ № 1998

Сдано в набор 14.11.91. Подписано в печать 11.02.92. Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2. Литературная гарнитура. Печать высокая. Печ. л. 20. Кр.-отт. 20. Уч.-изд. л. 21,28. Тираж 900 экз. Индекс ОЛ-59. Заказ № 259.
Гидрометеоиздат. 199397 Санкт-Петербург, ул. Беринга, д. 38.

Типография № 8 ордена Трудового Красного Знамени объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой. 190000, Санкт-Петербург, Прачечный переулок, 6.

ДЛЯ ЗАМЕТОК