ТРУДЫ

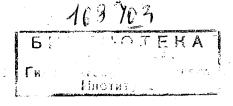
ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

имени А. И. Воейкова

выпуск 127

ФИЗИКА ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ ВОЗДУХА

Под редакцией д-ра физ.-мат. наук Д. Л. Лайхтмана





ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

АННОТАЦИЯ

В сборнике содержатся результаты новых работ по строению пограничного слоя над сушей и морем, а также некоторые итоги исследований по локальному прогнозу. Предназначен для специалистов по физике атмосферы и ряда смежных дисциплин, интересующихся приземным слоем атмосферы.

НЕСТАЦИОНАРНЫЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

Установлены закономерности вертикального распределения ветра и температуры при нестационарных условиях в области малых значений безразмерной высоты.

Исследован вопрос о квазистационарной трансформации поля температуры под влиянием изменений прихода коротковолновой солнечной радиации. Полученные зависимости могут быть использованы для прогностических целей.

Введение

Настоящая статья посвящена изучению закономерностей пространственно-временного распределения метеорологических элементов в земном слое атмосферы. В первой части ее рассматривается вопрос о вертикальном распределении ветра и температуры при нестационарных условиях. Получены зависимости, описывающие профили указанных метеорологических элементов в области, соответствующей малым зна-Путем анализа этих зависимостей чениям безразмерной высоты. обнаружено, что в случае нестационарных процессов, характерный масштаб времени которых имеет порядок часа, изменение рассматриваемых метеорологических элементов в приземном слое атмосферы происходит квазистационарно. Последний результат может оказаться полезным при изучении целого ряда явлений. Это видно из второй части работы, где рассматривается вопрос о трансформации поля температуры под влиянием радиационных факторов. Используя ряд упрощающих задачу предположений, удается получить весьма простые зависимости, описывающие в исследуемом случае температурный режим в приземном слое атмосферы. Указанные зависимости могут быть использованы для прогноза радиационного понижения температуры воздуха (а также подстилающей поверхности).

I. Вертикальное распределение ветра и температуры в приземном слое атмосферы при нестационарных условиях

Система уравнений движения и притока тепла в однородном по горизонтали воздушном потоке имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \omega_z v - \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z}
\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2 \omega_z u - \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v}{\partial z}$$
(1)

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = S - \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \Theta}{\partial z}. \tag{2}$$

Здесь z — вертикальная, x, y — горизонтальные координаты, t — время, u, v, ω — составляющие скорости ветра по осям OX, OY, OZ, k — коэффициент турбулентности, ρ — плотность воздуха, p — давление, $\omega_z = \omega \sin \varphi$ (где ω — угловая скорость вращения земли, φ — широта места), Θ — потенциальная температура, S — нетурбулентный приток тепла.

Проинтегрируем почленно (1) и (2) от z_1 до z_2 :

$$\begin{aligned} k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z_{1}}^{z_{2}} &= \int_{z_{1}}^{z_{2}} \left(-\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + 2 \omega_{z} v \right) dz, \\ k \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z_{1}}^{z_{2}} &= \int_{z_{1}}^{z_{2}} \left(-\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - 2 \omega_{z} u \right) dz, \\ k \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z_{1}}^{z_{2}} &= \int_{z_{1}}^{z_{2}} \left(-\frac{\partial \theta}{\partial t} + S \right) dz. \end{aligned}$$

Правые части написанных равенств можно сделать сколь угодно малыми, если высоты z_1 и z_2 выбрать так, чтобы их разность была достаточно малой. Отсюда следует, что и рассматривая достаточно тонкий слой атмосферы, величины $k\frac{\partial u}{\partial z}$, $k\frac{\partial v}{\partial z}$ и $k\frac{\partial \theta}{\partial z}$ можно считать независящими от высоты. Непосредственно прилегающий к подстилающей поверхности слой атмосферы, обладающий указанным свойством, называют приземным. 1

Как легко видеть, в приземном слое атмосферы направление ветра не меняется с высотой. Поскольку мы будем изучать именно этот слой, перейдем к новой системе координат, ориентируя ось Ox в направлении ветра.

Введем определения динамической скорости v_* и вертикального тур-

булентного потока тепла Р, обозначив:

$$k \frac{\partial u}{\partial z} = v_{*|}^{2}$$

$$k \frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\frac{P}{\rho c_{p}}$$

$$(3)$$

где c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении.

Очевидно, в приземном слое однородного по горизонтали воздушного потока величины v_* и P могут быть функциями только времени, но не высоты. На первом этапе работы эти функции будем считать заданными. Однако и при этом условии система уравнений (3) остается незамкнутой, так как содержит три неизвестные функции: k(z,t) u(z,t), $\Theta(z,t)$.

Дополним систему (3) уравнением баланса энергии турбулентности.

Запишем это уравнение для единицы массы воздуха

$$\frac{\partial E}{\partial t} = v_*^2 \frac{\partial u}{\partial z} + F - D + \frac{gP}{\rho c_p \Theta_0}. \tag{4}$$

Здесь E — кинетическая энергия пульсационного движения, D — скорость диссипации турбулентной энергии в тепловую, F — диффузионный

¹ Оценки, основанные на эмпирическом материале, позволяют указать характерную высоту приземного слоя. Согласно [1], эта высота имеет порядок нескольких десятков метров.

приток энергии турбулентности, g — ускорение силы тяжести, Θ_0 — потенциальная температура воздуха вблизи подстилающей поверхности. Для величины F справедливо выражение 1

$$F = \frac{\partial}{\partial z} k_E \frac{\partial E}{\partial z}, \qquad (5)$$

где k_E — коэффициент турбулентного переноса кинетической энергии пульсационного движения.

Предположим, что коэффициенты k_E и k отличаются друг от друга лишь числовым множителем, т. е.

$$k_E = \alpha k \ (\alpha = \text{const}).$$
 (6)

В таком случае

$$F = \alpha \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial E}{\partial z}. \tag{7}$$

Далее, предположим, что безразмерное отношение $\frac{E}{v_*^2}$ является универсальной функцией числа Ричардсона Ri,

$$Ri = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^{-2}.$$

Указанную универсальную функцию при малых значениях аргумента представим в виде степенного ряда. При этом получим

$$E = v_*^2 \sum_{k=0}^{\infty} c_k \operatorname{Ri}^k (c_k = \text{const}).$$
 (8)

Согласно А. С. Монину [2],
$$\frac{v_*}{\sqrt{E}|_{\mathrm{Ri}}=0}=0,5$$
. Следовательно, $c_0=4.$ (9)

Известно, что при стационарных условиях и равновесной стратификации атмосферы в приземном слое коэффициент турбулент лости k_a линейно растет с высотой и пропорционален динамической скорости, $k_a=\varkappa v_*$ г, где $\varkappa=0,38$ — постоянная Кармана. В этом слу ае уравнение баланса энергии турбулентности принимает вид $D_a=\frac{v_*}{\varkappa_a}$ (D_a — скорость диссипации турбулентной энергии в тепловую при гационарных условиях и равновесной стратификации атмосферы).

Предположим, что безразмерное отношение $\frac{D}{D_a}$ являет я универсальной функцией числа Ричардсона. Заменяя при малых значениях Ri эту функцию степенным рядом, получаем

$$D = \frac{v_*^3}{\pi z} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c^{(k)} \operatorname{Ri}^k \right) \quad (c^{(k)} = \operatorname{const}).$$
 (10)

Обоснование формулы (5), а также вывод уравнений (1), (2, (4) из общей системы уравнений гидротермодинамики сжимаемой вязкой среды иг еется в работе А. С. Монина [2].

Формулу, определяющую число Ричардсона в приземном слое атмосферы, запишем в следующем виде:

$$Ri = \frac{v_*}{\kappa L} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{-1},\tag{11}$$

где L — параметр, имеющий размерность длины,

$$L = -\frac{\rho c_p \, \Theta_0 v_*^3}{\kappa g P} \, .$$

Подставим (7), (8), (10) и (11) в уравнение баланса энергии турбулентности (4). Получим

$$-c_0 \frac{\partial v_*^2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} v_*^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{v_*}{\kappa L}\right)^k \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{-k} + v_*^2 \frac{\partial u}{\partial z} +$$

$$+\alpha v_*^4 \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{v_*}{\kappa L}\right)^k \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{-k} -$$

$$-\frac{v_*^3}{\kappa z} - \frac{v_*^3}{\kappa z} \sum_{k=1}^{\infty} c^{(k)} \left(\frac{v_*}{\kappa L}\right)^k \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^{-k} - \frac{v_*^3}{\kappa L} = 0.$$

$$(12)$$

Будем искать $\frac{\partial u}{\partial z}$ в виде ряда

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{i=0}^{\infty} r_i L^{-i} \,, \tag{13}$$

где r_i — коэффициенты, зависящие от z и параметров, отличных от L. Воспользовавшись уравнением (12), можно последовательно определить все коэффициенты r_i (i=0, 1, 2, . . .). Аппроксимируя при этом $\frac{\partial u}{\partial z}$ суммой первых двух членов ряда (13), 1 получаем

$$\frac{\partial u^{-}}{\partial z} = \frac{v_{*}}{\varkappa z} \left\{ 1 + \frac{z}{L_{1}} + \frac{z}{L} \left[1 + c^{(1)} \frac{1 + \frac{z}{L_{2}} - \frac{z}{L_{3}}}{1 + \frac{z}{L_{1}}} - \frac{c_{1}}{2c_{0}} \frac{\frac{z}{L_{1}} - \left(\frac{z}{L_{1}}\right)^{2} + \left(\frac{z}{L_{4}}\right)^{2}}{\left(1 + \frac{z}{L_{1}}\right)^{2}} - \varkappa^{2} \alpha c_{1} \frac{1 - 2\frac{z}{L_{1}}}{\left(1 + \frac{z}{L_{1}}\right)^{4}} \right] \right\}. \tag{14}$$

Здесь L_j (j=1, 2, 3, 4) — параметры, имеющие размерность длины,

$$L_{1} = \frac{v_{*}^{2}}{2 \varkappa c_{0} \frac{\partial v_{*}}{\partial t}}, \qquad L_{2} = \frac{c^{(1)} P v_{*}}{\varkappa c_{1} \frac{\partial P}{\partial t}}, \qquad L_{3} = \frac{c^{(1)} \Theta_{0} v_{*}}{\varkappa c_{1} \frac{\partial \Theta_{0}}{\partial t}},$$

$$L_{4} = \frac{v_{*}^{3/2}}{2 \varkappa c_{0} \left(\frac{\partial^{2} v_{*}}{\partial t^{2}}\right)^{1/2}}. \qquad (15)$$

 $^{^1}$ Такая аппроксимация допустима при малых значениях безразмерной высоты $rac{oldsymbol{z}}{L}$.

Из уравнений (3) следует
$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\frac{P}{\rho c_p v_*^2} \frac{\partial u}{\partial z} \,. \tag{16}$$

Граничные условия для функций и и Θ имеют вид:

$$u\big|_{z=z_0} = 0, \quad \Theta\big|_{z=z_0} = \Theta_0, \tag{17}$$

где z_0 — уровень шероховатости.

Для получения формул, описывающих профили ветра и потенциальной температуры в приземном слое атмосферы, достаточно проинтегри-

ровать (14) и (16) при условиях (17).

Полученные зависимости позволяют указать критерий квазистационарности для процессов в приземном слое атмосферы, связанных с изменением во времени ветра и температуры. Обозначим через h высоту исследуемого слоя. При условии, что

$$h \ll |L_j| \ (j = 1, 2, 3, 4),$$
 (18)

формула (14) принимает вид, характерный для квазистационарного режима,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v_*}{\kappa z} \left[1 + \left(1 + c^{(1)} - \kappa^2 \alpha c_1 \right) \frac{z}{L} \right].$$

Таким образом, условие (17) и является искомым критерием. Выполнение неравенств (17) можно гарантировать в случае процессов, для которых характерный масштаб времени имеет порядок часа. Отсюда следует, что, изучая вопросы о суточном ходе метеорологических элементов, о ночном понижении температуры и ряд других, можно считать изменения ветра и температуры в приземном слое атмосферы квазистационарными.

2. Задача о радиационном изменении температуры воздуха в приземном слое атмосферы

Рассмотрим вопрос о трансформации поля температуры под влиянием изменений прихода солнечной радиации. Для решения этой задачи необходимо знать зависимость коэффициента турбулентности от вертикальной координаты и времени при $z \in (0, \infty)$, $t \in (0, \infty)$. Примем схему 1, согласно которой:

$$k = \begin{cases} xv_*z & z \leqslant h \\ xv_*h & z > h \end{cases} \tag{19}$$

Через h здесь обозначена высота приземного слоя атмосферы.

Параметры v_* и h, вообще говоря, следовало бы считать функциями времени, подлежащими определению. Однако в целях упрощения задачи мы предположим, что они являются постоянными.

Как уже отмечалось, уравнение притока тепла в приземном слое атмосферы имеет вид

> $k \frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\frac{P}{\rho c_n}$. (20)

В силу (19) отсюда следует, что при z6 (z_0,h) $\Theta = \Theta_0 - \frac{P}{ ^2 P \, c_n v_*} \ln \frac{z}{z_0} \, .$

$$\Theta = \Theta_0 - \frac{P}{\kappa \rho \, c_p v_*} \ln \frac{z}{z_0} \,. \tag{21}$$

¹ Аппроксимация зависимости коэффициента турбулентности от высоты формулой типа (19) впервые была предложена М. И. Юдиным и М. Е. Швецом [3].

Таким образом, определение пространственно-временного распределения температуры в приземном слое атмосферы в рассматриваемом случае сводится к нахождению двух неизвестных функций времени: P(t)

и $\Theta_0(t)$.

Физический смысл сделанных предположений очевиден. Мы не будем на нем подробно останавливаться. Весьма существенным является то, что, изучая нестационарный процесс, мы выделяем квазистационарный приземный слой. Однако выше было показано, что такой прием оправдан в случае процессов, характерный масштаб времени которых достаточно велик.

Запишем уравнение теплового баланса подстилающей поверхности

$$\Pi + P = (1 - \Gamma) I + A - B.$$

Здесь Π — поток тепла в почву, Γ — альбедо подстилающей поверхности для коротковолновой радиации, I — приход коротковолновой радиации, A и B — потоки длинноволновой радиации, направленные соответственно вниз и вверх.

Для величины В справедливо выражение

$$B = \Delta A + (1 - \Delta) \sigma T_0^4, \tag{22}$$

где Δ — альбедо подстилающей поверхности для длинноволновой радиации, σ — постоянная Стефана — Больцмана, T_0 — абсолютная температура подстилающей поверхности.

Поскольку изучается процесс, протекающий в приземном слое атмосферы квазистационарно, можно принять ¹

$$T_0 = \Theta_0. \tag{23}$$

Воспользуемся этим равенством, а также формулой (22) и запишем уравнение теплового баланса подстилающей поверхности в следующем виде:

$$\Pi + P = (1 - \Gamma) I + (1 - \Delta) A - (1 - \Delta) \sigma \Theta_0^4.$$
 (24)

Уравнение (24) связывает четыре функции: P(t), $\Theta_0(t)$, $\Pi(t)$ и I(t). Последнюю из этих функций мы считаем заданной. Величины Γ , Δ и A в большинстве случаев, представляющих практический интерес, можно считать постоянными.

Для определения функции Π (t) необходимо рассмотреть вопрос о распространении температуры в почве. Этот процесс описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a_m^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \qquad (-\infty < z \le 0, \quad 0 \le t < \infty). \tag{25}$$

Здесь T — абсолютная температура почвы, a_m^2 — коэффициент температуропроводности почвы.

Уравнение (25) будем решать при следующих краевых условиях:

$$T \Big|_{\substack{z=0\\t\geqslant 0}} = \Theta_0(t), \quad T \Big|_{\substack{t=0\\z\leqslant 0}} = \text{const.}$$
 (26)

 $^{^1}$ Строго говоря, вместо (23) следовало бы писать $T_0 = \Theta_0\left(\left.p_0/_{1000}\right)\right)^{C_p}$, где p_0 — атмосферное давление вблизи подстилающей поверхности, выраженное в миллибарах. Однако множитель ($p_0/_{1000})$ — практически всегда настолько близок к единице, что его можно не учитывать.

Второе из этих условий означает, что в начальный момент времени в почве имеет место изотермия.

Обозначим через т отклонение температуры почвы от ее значения

в начальный момент времени

$$\tau = T - \Theta_0^{(0)}. \tag{27}$$

В силу (25) и (26) функция т удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = a_m^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} \tag{28}$$

и краевым условиям:

$$\tau \Big|_{\substack{z=0\\t\geqslant 0}} = \tau_0(t), \qquad \tau \Big|_{\substack{z\to -\infty}} \to 0, \qquad \tau \Big|_{\substack{t=0\\z\leqslant 0}} = 0, \tag{29}$$

где

$$\tau_0(t) = \Theta_0(t) - \Theta_0^{(0)}. \tag{30}$$

Применим преобразование Лапласа — Карсона 1 по переменной t к уравнению (28) и первым двум из соотношений (29). Получим:

$$p\overline{\tau} = a_m^2 \frac{\partial^2 \overline{\tau}}{\partial z^2}, \qquad \overline{\tau} \Big|_{z=0} = \overline{\tau}_0(p), \qquad \overline{\tau} \Big|_{z\to-\infty} \to 0.$$
 (31)

Здесь

$$\overline{\tau}(p, z) = L\tau(t, z), \overline{\tau}_0(p) = L\tau_0(t).$$

Решение задачи (31) имеет вид

$$\overline{\tau} = \overline{\tau_0}(p) e^{\sqrt{\frac{p}{a_m^2}}z}.$$
(32)

Поток тепла в почву, как известно, определяется формулой

$$\Pi = \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0},\tag{33}$$

где λ — коэффициент теплопроводности почвы.

Обозначим

$$\overline{\Pi}(p) = L\Pi(t).$$

$$L\varphi(t) = p \int_{0}^{\infty} e^{-pt} \varphi(t) dt.$$

Параметр p здесь считается комплексным. Таким образом, оператор L преобразует функции вещественного аргумента t в функции комплексного аргумента p. Соответствие между классом N функций, допускающих преобразование Лапласа — Карсона, и классом M = L(N) взаимно однозначно. Оператор, обратный по отношению к L, определен следующим образом. Пусть $f(p) \in M$, тогда

$$L^{-1} f(p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} \frac{f(p)}{p} dp.$$

Последнее равенство известно под названием формулы обращения Римана — Мелина.

Подробные сведения, касающиеся оператора L и его свойств, читатель найдет в книге [4].

 $^{^1}$ Значение оператора Лапласа — Карсона L от некоторой функции $\phi(t)$ определяется с помощью равенства

В силу (27), (32) и (33) справедливо равенство

$$\overline{\Pi}(p) = \frac{\lambda}{a_m} \sqrt{p} \, \overline{\tau_0}(p). \tag{34}$$

Перейдем к рассмотрению вопроса о распределении температуры в атмосфере выше приземного слоя. Вследствие (19) уравнение притока тепла при $z \geqslant h$ имеет вид

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2},\tag{35}$$

где

$$k_1 = \varkappa v_* h. \tag{36}$$

Примем следующие краевые условия для функции 0:

$$\Theta \Big|_{\substack{z=h \\ t \geqslant 0}} = \Theta_h(t), \qquad \Theta \Big|_{\substack{t=0 \\ z \geqslant h}} = \Theta_h^{(0)} = \text{const.}$$
(37)

Через Θ_h (t) здесь обозначена функция времени, равная

$$\Theta_h(t) = \Theta_0(t) - \frac{P(t)}{\kappa \rho c_p v_*} \ln \frac{h}{z_0}. \tag{38}$$

Обозначим

$$\vartheta = \Theta - \Theta_h^{(0)}. \tag{39}$$

Тогда уравнения (35) и (37) примут вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \,, \tag{40}$$

$$\vartheta\Big|_{\substack{z=h\\t\geqslant 0}} = \vartheta_h(t), \qquad \vartheta\Big|_{\substack{z\to\infty}} \to 0, \qquad \vartheta\Big|_{\substack{t=0\\z\geqslant h}} = 0.$$
(41)

Здесь

$$\vartheta_h(t) = \Theta_h(t) - \Theta_h^{(0)}. \tag{42}$$

Применим преобразование Лапласа — Карсона к уравнению (40) и первым двум из соотношений (41). В результате решения возникающей при этом задачи получаем

$$\overline{\vartheta} = \overline{\vartheta}_h(p) e^{-\sqrt{\frac{p}{k_1}}(z-h)}, \tag{43}$$

где

$$\overline{\vartheta}$$
 $(p, z) = L\vartheta(t, z), \overline{\vartheta}_h(p) = L\vartheta_h(t).$

Из уравнения (20) следует

$$P(t) = -\rho c_p k_1 \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=h}.$$

Функцию Θ (z, t) естественно считать непрерывно дифференцируемой по z всюду в области ее определения, в том числе и при z=h. Учитывая это обстоятельство, находим

$$\overline{P}(p) = LP(t) = \rho c_p \sqrt{k_1} \sqrt{p} \, \vartheta_h(p). \tag{44}$$

Обратимся снова к уравнению теплового баланса подстилающей по-

верхности. В силу (30) $\Theta_0 = \Theta_0^{(0)} + \tau_0$. Так как всегда $|\tau_0| \ll \Theta_0^{(0)}$, то справедливо приближенное равенство

$$\Theta_0^4 = \Theta_0^{(0)^4} + 4\Theta_0^{(0)^3} \tau_0. \tag{45}$$

В результате подстановки (45) в (24) находим 1

$$P(t) + \Pi(t) = (1 - \Gamma) I(t) + (1 - \Delta) A - (1 - \Delta) \sigma \left[\Theta_0^{(0)^4} + 4\Theta_0^{(0)^3} \tau_0(t)\right].$$
(46)

К уравнению (46) применим преобразование Лапласа— Карсона. Получим

$$\overline{P}(p) + \overline{\Pi}(p) = (1 - \Gamma)\overline{I}(p) + (1 - \Delta)A - (1 - \Delta)\sigma \left[\Theta_0^{(0)^4} + 4\Theta_0^{(0)^3}\overline{\tau}_0(p)\right], \tag{47}$$

где

$$\overline{I}(p) = LI(t)$$
.

Воспользуемся формулами (30), (42) и преобразуем равенство (38) следующим образом:

$$\vartheta_h(t) = -\left(\Theta_h^{(0)} - \Theta_0^{(0)}\right) + \tau_0(t) - \frac{\ln\frac{h}{z_0}}{\kappa \rho c_p v_*} P(t). \tag{48}$$

Применяя к (48) преобразование Лапласа — Карсона, получаем

$$\overline{\vartheta}_{h}(p) = -\left(\Theta_{h}^{(0)} - \Theta_{0}^{(0)}\right) + \overline{\tau}_{0}(p) - \frac{\ln\frac{h}{z_{0}}}{\kappa\rho c_{p}v_{*}}\overline{P}(p). \tag{49}$$

Система линейных алгебраических уравнений (34), (44), (47), (49) содержит четыре неизвестные функции аргумента p: $\overline{P}(p)$, $\overline{\tau_0}(p)$, $\overline{\Pi}(p)$ и $\overline{\vartheta_h}(p)$. В дальнейшем нас будут интересовать первые две из приведенных функций. В результате решения указанной выше системы находим:

$$\overline{\tau_{0}}(p) = \frac{\sqrt{k_{1}} \left\{ \left[(1-\Gamma) \overline{I} (p) + (1-\Delta) \left(A - \sigma \Theta_{0}^{(0)^{4}} \right) \right]}{\frac{\lambda}{a_{m}} \sqrt{k_{1}} \ln \frac{h}{z_{0}} p + \left[\pi v_{*} \left(\rho c_{p} \sqrt{k_{1}} + \frac{\lambda}{a_{m}} \right) + \right] \right. \times \\
\times \frac{\ln \frac{h}{z_{0}} + \pi \rho c_{p} v_{*} \left(\Theta_{h}^{(0)} - \Theta_{0}^{(0)} \right) \right\} \sqrt{p} + \pi v_{*} \left[(1-\Gamma) \overline{I} (p) + \right. \\
+ 4 (1-\Delta) \sigma \Theta_{0}^{(0)^{3}} \sqrt{k_{1}} \ln \frac{h}{z_{0}} \right] \sqrt{p} + \\
\times \frac{+ (1-\Delta) \left(A - \sigma \Theta_{0}^{(0)^{4}} \right) \right]}{+ 4 (1-\Delta) \sigma \Theta_{0}^{(0)^{3}} \pi v_{*}}, \tag{50}$$

$$\overline{P}(p) = \frac{x\rho c_p \sqrt{k_1} v_* \sqrt{p}}{xv_* + \sqrt{k_1} \ln \frac{h}{z_0} \sqrt{p}} \left[\overline{\tau_0}(p) - \left(\Theta_h^{(0)} - \Theta_0^{(0)}\right) \right]. \tag{51}$$

¹ В книге М. Е. Берлянда [5] имеется решение задачи, близкой к той, которая здесь исследуется. Однако в этой работе заданной функцией времени считается поток тепла к земной поверхности, [т. е. вся правая часть уравнения (46)].

Располагая зависимостями (50) и (51), с помощью формулы обращения Римана — Мелина можно найти функции $\tau_0(t)$ и P(t). Далее, воспользовавшись формулами (21) и (30), нетрудно определить распределение температуры в приземном слое атмосферы.

Рассмотрим более подробно случай, когда приход коротковолновой

радиации не меняется с течением времени,

$$I(t) = I_0 = \text{const.} \tag{52}$$

Вычисляя при этом условии оригиналы для функций $\overline{\tau}_0(p)$ и $\overline{P}(p)$, находим:

$$\tau_{0}(t) = \frac{\alpha \delta_{1} + \beta}{\gamma \delta_{1} (\delta_{2} - \delta_{1})} \left[1 - e^{-\delta_{1}^{2} t} \operatorname{erfc} \left(-\delta_{1} \sqrt{t} \right) \right] - \frac{\alpha \delta_{2} + \beta}{\gamma \delta_{2} (\delta_{2} - \delta_{1})} \left[1 - e^{-\delta_{2}^{2} t} \operatorname{erfc} \left(-\delta_{2} \sqrt{t} \right) \right],$$

$$(53)$$

$$P(t) = \varepsilon e^{t^{2}t} \operatorname{erfc} \zeta \sqrt{t} + \frac{\eta}{\gamma} \left\{ \frac{\alpha \zeta - \beta}{(\delta_{1} + \zeta)(\delta_{2} + \zeta)} \left(1 - e^{\zeta^{2}t} \operatorname{erfc} \zeta \sqrt{t} \right) + \frac{\alpha \delta_{1} + \beta}{(\delta_{2} - \delta_{1})(\delta_{1} + \zeta)} \left[1 - e^{\delta_{1}^{2}t} \operatorname{erfc} \left(-\delta_{1} \sqrt{t} \right) \right] - \frac{\alpha \delta_{2} + \beta}{(\delta_{2} - \delta_{1})(\delta_{2} + \zeta)} \left[1 - e^{\delta_{2}^{2}t} \operatorname{erfc} \left(-\delta_{2} \sqrt{t} \right) \right] \right\}.$$

$$(54)$$

Здесь обозначено:

$$\alpha = \sqrt{k_{1}} \left\{ \left[(1 - \Gamma) I_{0} + (1 - \Delta) \left(A - \sigma \Theta_{0}^{(0)^{4}} \right) \right] \ln \frac{h}{z_{0}} + \right. \\ + \kappa \rho c_{p} v_{*} \left(\Theta_{h}^{(0)} - \Theta_{0}^{(0)} \right) \right\}$$

$$\beta = \kappa v_{*} \left[(1 - \Gamma) I_{0} + (1 - \Delta) \left(A - \sigma \Theta_{0}^{(0)^{4}} \right) \right], \quad \gamma = \frac{\lambda}{a_{m}} \sqrt{k_{1}} \ln \frac{h}{z_{0}}$$

$$\delta_{1, 2} = \frac{-\kappa v_{*} \left(\rho c_{p} \sqrt{k_{1}} + \frac{\lambda}{a_{m}} \right) - 4 (1 - \Delta) \sigma \Theta_{0}^{(0)^{3}} \sqrt{k_{1}} \ln \frac{h}{z_{0}}}{2 \frac{\lambda}{a_{m}} \sqrt{k_{1}} \ln \frac{h}{z_{0}}} \pm$$

$$\pm \frac{\sqrt{\kappa^{2} \rho^{2} c_{p}^{2} k_{1} v_{*}^{2} + 2 \kappa \rho c_{p} \sqrt{k_{1}} v_{*} \left[\kappa \frac{\lambda}{a_{m}} v_{*} + 4 (1 - \Delta) \sigma \Theta_{0}^{(0)^{3}} \sqrt{k_{1}} \ln \frac{h}{z_{0}} \right] + }{2 \frac{\lambda}{a_{m}} \sqrt{k_{1}} \ln \frac{h}{z_{0}}}$$

$$\pm \frac{2 \frac{\lambda}{a_{m}} \sqrt{k_{1}} \ln \frac{h}{z_{0}}}{2 \frac{\lambda}{a_{m}} \sqrt{k_{1}} \ln \frac{h}{z_{0}}}, \quad \zeta = \frac{\kappa v_{*}}{\sqrt{k_{1}} \ln \frac{h}{z_{0}}}, \quad \eta = \frac{\kappa \rho c_{p} v_{*}}{\ln \frac{h}{z_{0}}}$$

$$\epsilon = -\frac{\kappa \rho c_{p} v_{*} \left(\Theta_{h}^{(0)} - \Theta_{0}^{(0)} \right)}{\ln \frac{h}{z_{0}}}, \quad \zeta = \frac{\kappa v_{*}}{\sqrt{k_{1}} \ln \frac{h}{z_{0}}}, \quad \eta = \frac{\kappa \rho c_{p} v_{*}}{\ln \frac{h}{z_{0}}}$$

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-y^{2}} dy.$$
 (56)

При малых значениях t найденные зависимости аппроксимируются следующим образом:

$$\tau_0(t) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{a_m}{\lambda} \left[(1 - \Gamma) I_0 + (1 - \Delta) \left(A - \sigma \Theta_0^{(0)^4} \right) \right] \sqrt{t}, \qquad (57)$$

$$P(t) \approx P_{0} + \frac{2 \kappa a_{m} v_{*}}{\sqrt{\pi \lambda} \ln \frac{h}{z_{0}}} \left\{ \rho c_{p} \left[(1 - \Gamma) I_{0} + (1 - \Delta) (A - \sigma \Theta_{0}^{(0)^{4}}) \right] - \frac{P_{0}}{\sqrt{k_{1}}} \left(\frac{\lambda}{a_{m}} + \rho c_{p} \sqrt{k_{1}} \right) \right\} \sqrt{t},$$
(58)

где P_0 — значение турбулентного потока тепла в атмосферу в начальный момент времени

$$P_{0} = -\frac{\kappa\rho c_{p}v_{*} \left(\theta_{h}^{(0)} - \theta_{0}^{(0)}\right)}{\ln\frac{h}{z_{0}}}.$$
(59)

Особенно простой вид принимают формулы (57) и (58), если положить $P_0 = 0$. В этом случае при малых значениях t пространственно-временное распределение температуры в приземном слое атмосферы описывается следующей зависимостью:

$$\Theta(z,t) \approx \Theta_0^{(0)} + \frac{2}{V^{\pi}} \frac{a_m}{\lambda} \left[(1-\Gamma)I_0 + (1-\Delta) \left(A - \sigma \Theta_0^{(0)^4} \right) \right] \times \left(1 - \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) V^{\overline{t}}.$$

$$(60)$$

Полученные зависимости [это касается как точных формул (53), (54), так и приближенных (56), (57), а также (60)] могут быть использованы для прогноза ночного (радиационного) понижения температуры. Для этой цели следует в качестве начального момента времени принять момент захода солнца и положить $I_0\!=\!0$. Заметим, что приближенное равенство (57), справедливое при малых t, в этом случае совпадает с известной формулой Брента.

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Основы динамической метеорологии. Под редакцией Д. Л. Лайхтмана и М. И. Юдина. Гидрометеоиздат, Л., 1955.
- Монин А. С. Турбулентный режим в приземном слое воздуха. Информ. сб. ГУГМС, № 1, 1951.
- 3. Юдин М. И. и Швец М. Е. Стационарная модель распределения ветра с высотой в турбулентной атмосфере. Труды ГГО, вып. 31, 1940.
- Диткин В. А. и Куз не цов П. И. Справочник по операционному исчислению. ГИТТЛ, М. Л., 1951.
 Берлянд М. Е. Предсказание и регулирование теплового режима приземного слож
- атмосферы. Гидрометеоиздат, Л., 1956.

О МЕТОДИКЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЛУЧИСТОГО ПРИТОКА ТЕПЛА

Рассматриваются расчетные и экспериментальные методы определения радиационных измерений температуры. Подробно описывается рекомендуемая методика вычисления $\frac{\partial T}{\partial t}$ по данным о распределении по высоте

температуры и влажности.

Вопрос об определении лучистого притока тепла является кардинальным при расчетах радиационных изменений температуры.

По определению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c_p} \frac{dF}{dz} \tag{1}$$

или

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\rho_w f(P)}{\rho c_p} \frac{dF}{dm},$$

где F — результирующий поток радиации на рассматриваемом уровне

$$m = \int_{0}^{\infty} \rho_{w} f(p) dz$$
 — эффективная поглощающая масса, ρ_{w} — плотность воляного пара $f(p)$ — функция учитывающая влияние давления на по-

водяного пара, f(p) — функция, учитывающая влияние давления на поглощение длинноволновой радиации, ρ — плотность воздуха, c_p — удельная теплоемкость воздуха.

Из формулы (1) ясно, что основной определяющей $\frac{dT}{dt}$ величиной является производная от потока радиации по поглошающей массе Если рассматривать только длинноволновое излучение, то

$$F = B - A$$
.

Для потоков радиаций, направленных вверх (B) и вниз (A), имеем [5] следующие выражения:

$$A(m) = E(m) - E(M)D(M - m) + \int_{m}^{M} D(\tau - m) dE,$$
 (2)

$$B(m) = E(m) - E(0)D(m) + E_3D(m) - \int_0^m D(m-\tau) dE.$$
 (3a)

Здесь $E = \sigma T^4$, D(x) — функция пропускания.

Формула (3a) получена в предположении, что земная поверхность — абсолютно черное тело с температурой T_3 и что температура воздуха,

прилегающего к земной поверхности, не равна температуре земной поверхности. Если $T_3 = T(0)$, то

$$B(m) = E(m) - \int_{0}^{m} D(m - \tau) dE.$$
 (3)

Продифференцировав формулы (2), (3), получим:

$$\frac{dA}{dm} = E(M) D'(M-m) - \int_{m}^{M} D'(\tau-m) dE,$$

$$\frac{dB}{dm} = -E(0) D'(m) + E_{3}D'(m) - \int_{0}^{m} D'(m-\tau) dE,$$
(4)

$$\frac{dF}{dm} = \left[\int_{m}^{M} D'(\tau - m) dE - \int_{0}^{m} D'(m - \tau) dE - E(M) D'(M - m) + E_{3}D'(m) - E(0) D'(m) \right].$$
(5a)

Из формул (1) и (5 а) видно, уго изменение температуры на данном уровне обусловлено теплообменом с выше- и нижележащей атмосферой, потерей тепла в мировое пространство и теплообменом с земной поверхностью.

Теплообмен с земной поверхностью влияет на $\frac{\partial T}{\partial t}$ в явном виде лишь при наличии скачка температуры почва — воздух. При этом на любом уровне происходит охлаждение за счет излучения, уходящего в почву, и нагрев от потока радиации, излучаемой почвой (независимо от температуры почвы). Результирующее влияние теплообмена земной поверхности с прилегающим к ней воздухом обусловлено знаком скачка температуры. Если $T > T_3$, то воздух на рассматриваемом уровне за счет теплообмена с земной поверхностью будет охлаждаться, если $T < T_3$ — нагреваться. При равенстве температур земной поверхности и прилегающего к ней воздуха члены $E_3D'(m)$ и E(0)D'(m) сокращаются.

При $T(0) = T_s$ формула (5 а) упрощается и

$$\frac{dF}{dm} = \left[\int_{m}^{M} D'(\tau - m) dE - \int_{0}^{m} D'(m - \tau) dE - E(M) D'(M - m) \right]. \tag{5}$$

Остановимся на существующих методах определения $\frac{\partial T}{\partial t}$ с точки зрения даваемой ими точности.

1. Графические методы, к которым относятся обычные радиационные

номограммы и специальные.

а) Обычные радиационные номограммы (Эльзассера, Шехтер и др.). По ним вычисляют разность потоков радиации на двух уровнях, т. е. приток тепла в слой толщиной Δz .

Интегрируя формулу (1) по высоте от z_1 до z_2 , получим

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c_p} \frac{\Delta F}{\Delta z}, \qquad (6)$$

где $\frac{\partial \overline{T}}{\partial t}$ — среднее изменение температуры в слое Δz за единицу времени.

Следовательно, расчеты по обычным радиационным номограммам позволяют вычислить только среднее изменение температуры всего слоя.

Это в некоторых случаях может привести к неправильной оценке роли радиации в формировании температурного режима. Например, расчеты дают $\Delta (B-A)=0$, следовательно, $\frac{\partial T}{\partial t}=0$. Однако вывод о том, что лучистый теплообмен не оказывает влияния на температуру воздуха, будет неправильным. В действительности $\frac{\partial T}{\partial t}(z)$ могут быть существенными по величине и разного знака. Как наблюдения [2, 6], так и наши расчеты [1] показывают, что перемена знака $\frac{\partial T}{\partial t}$ по высоте имеет место при определенных условиях.

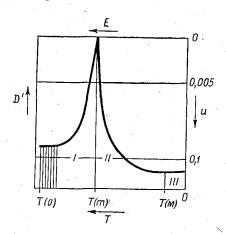


Рис. 1. Схема номограммы для расчета лучистого притока тепла. Цифры I, II, III соответствуют второму, первому, третьему членам формулы (5).

Простая замена производной конечной разностью хороша лишь для участков с линейным ходом результирующего потока F = B - A. Поэтому вычисление по формуле

$$\frac{\partial T}{\partial t}(z) \approx -\frac{1}{\rho c_p} \frac{\Delta F}{\Delta z}$$
 (7)

в приземном слое может дать большие ошибки. Уменьшение же интервала Δz всегда связано с увеличением ошибки при вычислении ΔF .

б) Специальные номограммы. Если взять прямоугольные оси координат и откладывать на одной оси величины E, а на другой D' (u), то вычисление $\frac{dF}{dm}$ по формуле (5) сведется к определению площади, ограниченной определенным контуром (рис. 1).

Кажущиеся простота и быстрота расчета оказались очень заманчивыми, и соответствующие номограммы были построены в СССР группой сотрудников Ленинградского государственного университета [7] и в Японии Ямамото [8]. Однако указанные номограммы пригодны лишь для ориентировочных расчетов. Малая точность, даваемая ими, обусловлена двумя причинами, на которых мы остановимся подробно.

Первый источник ошибок обусловлен тем, что производная от функции пропускания определяется весьма приближенно. Дело в том, что для самой функции пропускания мы не имеем точного аналитического выражения, а пользуемся кривой, полученной как среднее из различных экспериментальных данных (подробно о получении D(u) см. [5] и [7]). При этом если незначительный сдвиг кривой в какой-либо точке или изменение ее наклона дает ошибку в D(u) порядка всего нескольких процентов, то величина D'(u) может измениться весьма значительно.

Сказанное в особенности относится к малым поглощающим массам, играющим основную роль в процессах теплообмена. На рис. 2 видно, что даже значения D'(u), полученные на основании одного и того же исходного материала, но разными авторами, отличаются друг от друга (кривые I и 2).

Точность определения D'(u) уменьшается с уменьшением поглощающей массы, и наибольшей ошибкой отягощено, по-видимому, значение D'(0). Из общих физических соображений ясно, что D'(u) — монотонная непрерывная кривая, имеющая конечный максимум при u=0 и убываю-

щая до нуля при $u\to\infty$. Так как опытных данных о функции пропускания для $u<10^{-4}$ не имеется, то и определить D'(0) достаточно точно трудно. Мы считаем, что в настоящее время точность определения D'(0) не превышает 50%. Положение же изолинии D'(0) на номограмме весьма существенно, так как точка с координатами (T(m), u=0) является исходной при построении контура вычисляемой площади.

Второй источник ошибок связан с видом функции D'(u). Как видно на рис. 2 и 3, производная от функции пропускания очень резко убывает с увеличением массы (от 10^2 при $u \sim 10^{-4}$ до 10^{-1} при $u \sim 10^{-1}$). Поэтому линейный масштаб для D'(u) (необходимый при построении номограммы в декартовых координатах) оказывается неудобным. В связи с этим

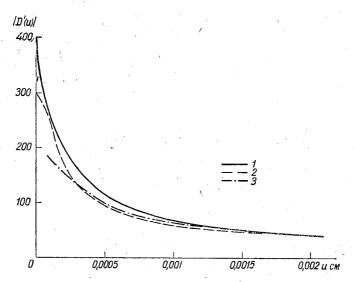


Рис. 2. Значения модуля производной от функции пропускания для малых поглощающих масс. функции пропускания, предложенной Ф. Н. Шехтер, 3- по Бруксу I- по Ф. Н. Шехтер, 2- по К. Е. Якушевской, вычисленный по (кривые 2 и 3 заимствованы из работы [7]).

Ямамото построил номограмму в полярных координатах. Однако эта попытка, как отметил и сам автор, не привела к существенному улучшению.

Другой путь — отбрасывание части номограммы, охватывающей большие или малые массы. Физически это означает, что не принимается во внимание теплообмен с воздухом в первом случае в верхней части атмосферы, во втором с воздухом, непосредственно прилегающим к уровню, для которого рассчитывается $\frac{dF}{dm}$. Номограмма Ямамото начинается с u=0.005 см. номограмма К. Я. Кондратьева кончается практи-

нается с $u=0{,}005$ см, номограмма К. Я. Кондратьева кончается практически на $u=0{,}1$ см.

Мы рассчитали возникающие в этих случаях ошибки. Рассмотренные температурные стратификации описаны в работе [1]. Из табл. 1 видно, что в отдельных случаях ошибка может быть больше 200%. При этом нельзя заранее сказать, для каких высот какой номограммой надо пользоваться. Если для профилей 1,4 и M ошибка при неучете малых масс меньше 10% уже для высот, больших 20 м, то для профиля A_1 она равна 35% еще на высотах 200 и 300 м. Это обстоятельство объясняется сухостью арктической атмосферы зимой. Не учитывать большие массы можно

\$ 1

лишь в том случае, когда градиент температуры вблизи уровня расчета значительно превышает градиенты на всех других высотах и при отсутствии каких-либо особенностей в ходе влажности по высоте. Во всех приведенных в табл. 1 случаях влажность равномерно убывает с высотой. Наличие больших градиентов или инверсии температуры на больших высотах изменит результаты расчета. В табл. 1 в скобках помещены величины относительной ошибки при инверсии температуры на высоте 300 м.

Таблица 1 Относительная ошибка δ % при неучете членов с m < 0.005 см или с m > 0.1 см

		Без п	n < 0,005	СМ			Бе	m > 0,	1 см	* * * * * * * * * * * * * * * * * * *
Высота (м)			профиль				профиль			
	N	1	4	М	A_1	N	1	4	М	A_1
0 1,0 5,0 10 20 50 70 150 200 300 500 700 1000 1500 2000	21 13 2 5 -10 -9 0,0 (109) - (-114) - 0,0 0,0 0,0	98 106 98 15 8 0 	100 98 96 19 4 1 (30) (12) (-620) (890) - - - - - - - - - - - - -	95 216 100 4 0 		49 53 59 63 74 88 85 94 91 120 100	0,1 -1 -8 -35 -190 -310 -320 -56 -56 -78 -80	-0,2 1 2 3 5 28 23 31 - 105 89 - 84 - 83	14 28 — 10 25 22 30 — 55 96 — 94 — 91	58 96 -26 48 38 42 48

Избежать больших ошибок можно, используя несколько бланков с разными масштабами и суммируя площади. Но такие расчеты очень

В результате проведенного анализа приходим к выводу, что построить точные и удобные специальные номограммы невозможно, причем эта трудность вытекает из самой физической сущности процесса лучистого теплообмена.

2. К аналитическим методам относятся формулы Бруиненберга и Брукса.

а) Бруиненберг [3] предлагает следующую приближенную формулу для вычисления изменения температуры, обусловленного водяным паром:

$$\left(\frac{dT}{\partial t}\right)_{w} = -\frac{q}{c_{p}}\left\{-\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{\partial^{2}S^{\downarrow}}{\partial T \partial w}\right)_{n}(\delta T)_{n} + \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\partial^{2}S^{\uparrow}}{\partial T \partial w}\right)_{k}(\delta T)_{k} - \frac{\partial S_{E}}{\partial w}\right\},\,$$

где $S\downarrow(S^{\uparrow})$ — поток радиации, направленной вниз (вверх), T — средняя температура слоя, w — количество водяного пара в слое, $\frac{\partial S_E}{\partial w}$ — значение $\frac{\partial S}{\partial w}$ на границе атмосферы.

Изменение температуры, вызванное углекислым газом $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_c$, вычисляется по аналогичной формуле.

Для определения величин $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial w}$ и $\frac{\partial^2 S}{\partial T \partial c}$ автор дает таблицы и графики. Атмосфера разбивается на отдельные слои, и суммирование проводится по слоям, расположенным выше и ниже рассматриваемого уровня.

Общее изменение температуры, вызванное лучистым теплообменом,

находится как сумма, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{w} + \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)_{c}.$$

Такое простое суммирование содержит в себе предположение, что полосы водяного пара и углекислого газа не перекрываются. В действительности же в полосе углекислого газа 13—17 μ происходит заметное поглощение и водяным паром. Неучет перекрывания полос приводит к завышению вклада углекислого газа в $\frac{\partial T}{\partial t}$. Количественно оценить возникающую ошибку трудно, так как она зависит от стратификации атмосферы.

Расчет по методу Бруиненберга очень громоздок и недостаточно точен. Малая точность объясняется в значительной мере весьма прибли-

женными значениями вторых производных. 6) Формула Брукса [4] имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{q}{c_p} \sqrt{\frac{P}{1000}} \left[\sum_{k=1}^{K} ^{\uparrow} (\Delta E)_k \left(\frac{\overline{dA}}{du} \right)_k - \right]$$

$$-\sum_{n=1}^{N} (\Delta E)_n \left(\frac{\overline{dA}}{du}\right)_n - \frac{\partial S_E}{\partial u}. \tag{8}$$

Если мы в точной формуле (5) представим первые два члена как сумму интегралов по отдельным слоям и затем вынесем за знак интеграла среднюю величину производной от функции пропускания для каждого слоя, то получим приближенную формулу (8). Для облегчения и ускорения расчетов в работе [4] приводится таблица значений $\frac{\overline{dA}}{du} = -\frac{\overline{dD}}{\overline{du}}$. Автор рекомендует при расчетах по формуле (8) в качестве границ отдельных слоев брать уровни зондирования.

Следует отметить, что расчет по методу Брукса дает удовлетворительные результаты лишь для свободной атмосферы, т. е. для области с мало меняющимся градиентом температуры. В приземном слое разбивка на слои без учета в каждом отдельном случае конкретного вида зависимо-

сти $E\left(m\right)$ и использование средней для слоя величины $\dfrac{\overline{dA}}{\overline{du}}$ может при-

вести к значительным ошибкам. При быстро меняющемся с высотой градиенте температуры весьма существен теплообмен с ближайшими слоями воздуха, т .е. при малых поглощающих массах. Для малых масс производная от функции пропускания меняется очень быстро (см. рис. 2, 3) и, следовательно, средняя величина не является характерной.

В заключение отметим, что из рассмотренных выше способов расчета изменения температуры чаще всего используют на практике метод

Брукса или обычные радиационные номограммы.

3. Остановимся кратко на получивших в последние годы большое распространение экспериментальных методах. К сожалению, в большинстве работ [2, 6, 9—12] измеряются не притоки тепла, а радиационные потоки. Величины же изменений температуры вычисляются по формуле (6) или (7), что может дать большие ошибки по причинам, указанным в п. 1 а.

Более точные результаты получаются в том случае, когда наличие большого числа измерений позволяет построить надежный профиль $F\left(z\right)$

и произвести графическое дифференцирование.

Очень интересны попытки измерения непосредственно искомой величины $\frac{dF}{dz}$. В этом направлении проводились работы в СССР в Главной геофизической обсерватории (ГГО) [13] и в Англии [14]. Однако окончательно этот вопрос еще не решен.

Герген [14] предложил прибор, названный им черным шаром. С помощью этого прибора определяется радиационная температура воздуха, т. е. та температура, которую имела бы атмосфера в состоянии лучистого равновесия. Разность между радиационной температурой и истинной пропорциональна, по мнению автора, изменению температуры под влиянием лучистого теплообмена. Это положение правильно только для серой среды. Атмосфера, как известно, не является такой средой.

Рассмотрим кратко теоретические основы упомянутых методов [13, 14]. Если написать уравнения переноса монохроматической радиации в форме Шварцшильда, то легко получить следующее соотношение:

$$\frac{dF}{dm} = \int_{0}^{\infty} k_{\lambda} \left(B_{\lambda} + A_{\lambda} - 2E_{\lambda} \right) d\lambda, \tag{9}$$

где $k_{\lambda} = \alpha_{\lambda}^{w} + \alpha_{\lambda}^{c} \frac{\rho_{c}}{\rho_{w}}$ — эффективный коэффициент поглощения (α_{λ}^{w} , α_{λ}^{c} — коэффициенты поглощения водяного пара и углекислого газа, ρ_{w} , ρ_{c} — соответствующие плотности).

Вынося формально среднюю величину ка из-под знака интеграла,

получим

$$\frac{dF}{dm} = \overline{k} \left(B + A - 2E \right). \tag{10}$$

Состояние лучистого равновесия характеризуется тем, что $\frac{dF}{dm}=0$, откуда $2E_{\rm равн}=A+B$, и окончательно

$$\frac{dF}{dm} = 2\overline{k} \left(E_{\text{равн}} - E \right). \tag{11}$$

Измеряя $E_{\text{равн}}-E$, можно, по Гергену, получить $\frac{dF}{dm}$ по формуле (11).

В ГГО построен прибор, который авторы назвали суммарным балансомером. Он измеряет величину, стоящую в скобке формулы (10).

На первый взгляд использование описанных приборов является решением проблемы измерения величины $\frac{dF}{dm}$, надо только определить \overline{k} . Но в этом и заключается основная принципиальная трудность, возникающая из физической природы процессов поглощения и излучения

радиации в атмосфере.

Основные поглощающие газы атмосферы — водяной пар и углекислый газ — имеют линейчатые спектры поглощения. Коэффициенты поглощения в таких спектрах чрезвычайно резко зависят от длины волны даже в пределах одной линии поглощения, изменяясь для некоторых участков спектра в 1000 раз. Известно, что k_{λ} зависит от количества поглощающего вещества даже для $\Delta \lambda = 0.1$ μ , поэтому мы не можем сказать ничего

определенного о величине среднего коэффициента поглощения (см. [5, 7]); его просто не существует. Следовательно, в (10) и (11) необходимо брать средневзвешенный коэффициент поглощения. Но такой коэффициент будет зависеть не только от распределения температуры и влажности в атмосфере, но и от уровня расчета и может быть даже отрицательным. Сказать что-либо априори о его величине и знаке весьма трудно.

Сделанные замечания остаются в силе и в том случае, если пренебречь присутствием в атмосфере углекислого газа и считать, что лучистый теплообмен обусловлен наличием одного водяного пара.

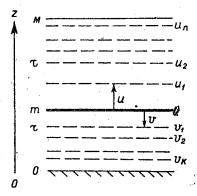


Рис. 4. Иллюстрация к формулам (12) и (15).

Перейдем теперь к описанию рекомендуемой нами методики расчета лучистого притока тепла.

Из изложенного выше ясно, что наибольшую точность будет давать аналитический способ расчета, причем такой, при котором мы сумеем обойтись лишь значениями самой функции пропускания.

Произведем в интегралах формулы (5) замену переменных, отсчитывая массы вниз и вверх от рассматриваемого уровня, который будем считать нулевым. Тогда (5) примет такой вид:

$$\frac{dF}{dm} = \left[\int_{0}^{M-m} D'(u) dE + \int_{0}^{m} D'(v) dE - E(M) D'(M-m) \right], \quad (12)$$

где $u = \tau - m$, $v = m - \tau$.

Разобьем атмосферу на слои таким образом, чтобы в каждом отдельном слое E было бы линейной функцией от поглощающей массы. Тогда оба интеграла в формуле (12) можно записать как сумму интегралов по отдельным слоям (рис. 4):

$$\int_{0}^{M-m} D'(u) dE = \int_{0}^{u_{1}} D'(u) dE + \int_{u_{1}}^{u_{2}} D'(u) dE + \dots + \int_{u_{n}}^{M-m} D'(u) dE,$$

$$\int_{0}^{m} D'(v) dE = \int_{0}^{v_{1}} D'(v) dE + \int_{v_{1}}^{v_{2}} D'(v) dE + \dots + \int_{v_{n}}^{m} D'(v) dE. \quad (13)$$

Так как в каждом слое u_i-u_{i-1} и v_i-v_{i-1} $\frac{d\,\overline{E}}{dm}$ — величина постоянная, то

$$\int_{u_{i-1}}^{u_i} D'(u) dE = \left(\frac{dE}{du_i}\right) \left[D(u_i) - D(u_{i-1})\right].$$

В силу линейной зависимости Е от поглощающей массы

$$\left(\frac{dE}{du}\right)_{i} = \frac{E_{i} - E_{i-1}}{u_{i} - u_{i-1}}$$

И

$$\int_{u_{i-1}}^{u_{i}} D'(u) dE = \frac{E_i - E_{i-1}}{u_i - u_{i-1}} \left[D(u_i) - D(u_{i-1}) \right]. \tag{14}$$

Подставляя (13) и (14) в (12) и учитывая, что D'(u) < 0, получим окончательную расчетную формулу

$$\frac{dF}{dm} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\Delta E \Delta D}{\Delta u} \right)_i + \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\Delta E \Delta D}{\Delta v} \right)_k + E(M) |D'(M-m)|. \tag{15}$$

В последний член формулы (15) входит производная от функции пропускания. Для нижней атмосферы M-m порядка единицы. При таких значениях поглощающей массы функция пропускания меняется очень медленно и, следовательно, производная определяется достаточно надежно. Проведенные для нижнего двухкилометрового слоя оценки показали, что вклад соответствующего члена в $\frac{dF}{dm}$, как правило, не превышает 30%, однако в отдельных случаях он может достигать и 80% (табл. 2).

Следовательно, отбрасывать его ни в коем случае нельзя.

Z M	N	I	4	М	$A_{\mathbf{I}}$	$A_{ m VII}$
0 1,0 50 150 200 300 500 700 1000 1500 2000	12 13 15 18 21 	0,3 0,2 2 38 75 80 72 30 27	0,06 0,2 0,8 6 7 	$ \begin{array}{c} 0,2 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ -8 \\ 14 \\ 21 \\ -23 \end{array} $		 42 41 43 35 50

Учитывая, что для расчета $\frac{dF}{dm}$ важно хорошо знать поглощение радиации при малых массах, мы несколько уточнили (за счет CO_2) функцию пропускания, использованную ранее при построении радиационной номограммы [5].

Рекомендуемые зависимости D(u) и D'(u) приведены на рис. 3.

Следует отметить, что увеличение числа слоев, на которые мы разбиваем атмосферу, улучшает аппроксимацию кривой $E\left(m\right)$ ломаной линией. Но, с другой стороны, чем больше число слагаемых, тем больше

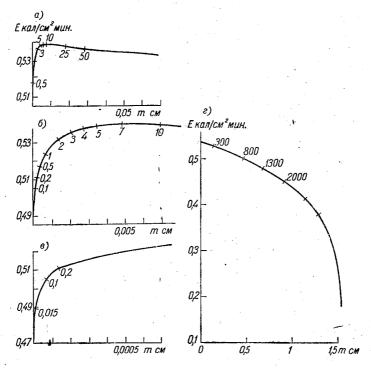


Рис. 5. Вид зависимости E(m). Штрихи на кривых означают границы участков, цифры — высоту над земной поверхностью.

ошибка при расчете, обусловленная неточностью входных данных, т. е. E и D. Поэтому число участков должно быть оптимальным и увеличивать его без необходимости не рекомендуется. Разбивка на слишком мелкие участки может привести к тому, что на каком-либо участке с малым содержанием водяного пара окажется $\Delta D = 0$ [из-за ограниченной точности функции D(u)]. Возможность такого случая будет показана ниже.

Проиллюстрируем порядок расчета на примере. Предположим, что надо определить $\frac{dF}{dm}$ на высоте 5 м для профиля 4 (см. [1]). Так как влажность меняется по экспоненциальному закону, то m=1,555 (1 — $e^{-4,5\cdot 10^{-4}z}$) см (z в м). Строим зависимость E(m), беря разные масштабы для малых и больших поглощающих масс (рис. 5).

Согласно рис. 5 θ , для вычисления первой суммы в формуле (15) нижний слой атмосферы от 0 до 5 м достаточно разбить на три участка.

Увеличив масштаб (рис. 5 б), видим, что более точный результат полуним, разбив этот слой на восемь частей. Если мы теперь разобьем самый нижний участок еще на два (рис. 5 а), то получим, что на участке z=0-0.015 м $\Delta D=0$, а $\Delta E=0.019$ кал/см 2 мин. ($\Delta T=2.1^\circ$). Здесь и

кроется указанная выше опасность. Считать $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta E \Delta D}{\Delta u}\right)$ по девяти уча-

сткам, приняв для последнего $\frac{\Delta E \Delta D}{\Delta u} = 0$, ни в коем случае нельзя. Дело в том, что в действительности $\Delta D \neq 0$, а равно малой величине $(\Delta D < 0.001)$, которая при умножении на большое ΔE и делении на весьма малое Δu даст заметный вклад в рассчитываемую сумму. Неучет этого члена равносилен отбрасыванию заштрихованной площади на рис. 1. Насколько это может исказить результат, видно из табл. 3, в которой приведены значения $\frac{dB}{dm}$ на высоте 5 м при разном числе участков.

Таблица 3 Зависимость величины $\frac{dB}{dm}$ от числа участков Число участков 8 9 $\frac{dB}{dm}$ кал/см³мин. 2,11

1,59

2,05

При вычислении второй суммы в формуле (15) следует разбивать часть кривой $E\left(m\right)$, расположенную справа от точки, соответствующей рассматриваемому уровню. В этом случае, наоборот, с удалением от уровня расчета приходится постепенно переходить от большего масштаба к меньшему. Для масс порядка 0,1-0,2 см можно пользоваться рис. $5 \, s$, затем следует перейти к рис. $5 \, s$. Образец расчета $\frac{dF}{dm}$ приведен

ниже и в табл. 4. В заключение остановимся еще на одном вопросе. На рис. 3 видно, что функция D'(u) очень быстро убывает и при u=0.01 см составляет приблизительно 3% значения D'(0). На этом основании некоторые авторы [7] говорят о наличии так называемого «влияющего слоя», определяя его как слой воздуха, поглощающая масса которого равна 0,01 см.

Из проведенного в настоящей работе анализа ясно, что ограничиться рассмотрением теплообмена в ограниченном слое воздуха можно лишь в отдельных случаях. Как правило, необходимо принимать во внимание теплообмен со всей атмосферой.

Пример.

$$\frac{dB}{dm} = \sum_{\Delta D} \frac{\Delta D \Delta E}{\Delta m} = 2,0525,$$

$$\sum_{\Delta D} \frac{\Delta D \Delta E}{\Delta m} = 0,0049,$$

$$|D'(M-m)| = 0,057, E(M)|D'(M-m)| = 0,0096,$$

$$-\frac{dA}{dm} = 0,0145,$$

$$\frac{dF}{dm} = 2,0670.$$

$0.11 0.000 0.00040 \mid 0.000 \mid 0.001 \mid 0.00007 \mid 0.006 \mid 0.00007$	<i>Z</i> м	E кал/см ² мин.	u v	D (u) D (v)	. ΔD	Δ m Δu Δυ	ΔE	$\frac{\Delta D}{\Delta m}$
$\begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$	0,1 0,2 0,5 1 2 3 4 5 7 10 25 50 200 800 1300 1600 2000 3000 4000 5000 6000 8000	0,505 0,511 0,517 0,524 0,532 0,536 0,5378 0,539 0,539 0,539 0,539 0,539 0,536 0,529 0,503 0,482 0,469 0,452 0,414 0,378 0,314 0,314	0,00343 0,00336 0,00315 0,0028 0,0021 0,0014 0,0007 0,0014 0,0035 0,0147 0,0311 0,130 0,467 0,685 0,794 0,919 1,148 1,294 1,387 1,447	0,780 0,781 0,787 0,796 0,818 0,846 0,888 1,000 0,847 0,778 0,635 0,550 0,389 0,293 0,263 0,251 0,211 0,211 0,205 0,198	0,001 0,006 0,009 0,022 0,028 0,042 0,112 0,153 0,069 0,143 0,085 0,161 0,096 0,030 0,012 0,011 0,010 0,006 0,004 0,003	0,00007 0,00021 0,00035 0,0007 0,0007 0,0007 0,0014 0,0021 0,0164 0,0989 0,3371 0,218 0,109 0,125 0,29 0,146 0,093 0,060 0,062	0,006 0,006 0,007 0,008 0,004 0,0018 0,0006 -0,0006 0,002 0,001 0,007 0,026 0,021 0,013 0,017 0,038 0,036 0,034 0,030	1,0000 0,0857 0,1714 0,1800 0,2514 0,1600 0,0960 -0,0656 0,0 0,0255 0,0052 0,0114 0,0074 0,0029 0,0014 0,0015 0,0032 0,0025 0,0025 0,0022 0,0027 0,0027

ЛИТЕРАТУРА

- 1. Қаждан Р. М., Шехтер Ф. Н. Некоторые результаты расчета радиационного изменения температуры в пограничном слое атмосферы (см. настоящий сб.).
- Funk J. P. Measured radiative flux divergence near the ground at night. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., v. 86, N 369, 1960.
 Bruinenberg A. A numerical method for the calculation of temperature changes by radiation in the free atmosphere. Mededeelingen in verhandenlingen, ser. B, deel I, N 1, 1946 koninklijk nederlandsch Meteorologisch institut de bilt (Neder-
- 4. Brooks D. L. A tabular method for the computation of temperature change by infra-red radiation in the free atmosphere. J. of Meteorology, v. 7, N 5, 1950.
- 5. Шехтер Ф. Н. К вычислению лучистых потоков тепла в атмосфере. Труды ГГО, вып. 22, 1950.
- 6. Suomi V. E., Kuhn P. M., Darkow G. L. Soundings of terrestrial radiation flux over Wisconsin Month. Weath. Rev., v. 87, N 4, 1959.
- 7. Кондратьев К. Я. Лучистый теплообмен в атмосфере. Гидрометеоиздат, Л.
- Yamamoto L., Onishi L. A chart for the calculation of radiative temperature changes. The science reports of Tohoky University. 5 ser. geophysics, v. 4, N 3,
- 9. Лопухин Е. А. Изменение радиационных величин с высотой над земной поверхностью. Труды Ин-та математ. и мех. АН УзбССР, вып. 14, 1955.

 10. Brewer A. W., Houghton J. T. Some measurements of the flux of infra-red
- radiation in the atmosphere. Proc. Poy. Soc., ser-A, v. 236, N 1205, 1956.
- 11. Шляхов В. И. Исследование баланса длинноволновой радиации в тропосфере. Гидрометеоиздат, Л., 1956.
- 12. Гаевский В. Л. Исследование длинноволнового излучения атмосферы. Труды ГГО, вып. 100, 1960.
- 13. Қаждан Р. М., Утина З. М., Лайхтман Д. Л. Экспериментальное определение лучистого притока тепла в нижнем слое атмосферы. Труды ГГО, вып. 107, 1961.
- 14. Lergen J. L. Black-ball observations and the radiation chart. J. of Meteor. v. 15, N 4, 1958.

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА РАДИАЦИОННОГО изменения температуры в пограничном слое **АТМОСФЕРЫ**

Анализируются результаты расчета радиационных изменений темпера-

туры при различных стратификациях атмосферы.

При сверхадиабатических и инверсионных градиентах температуры в приземном слое воздуха лучистый теплообмен приводит к сильной неустойчивости вблизи земной поверхности.

В последние годы стали опубликовываться работы, особенно иностранные, в которых указывается на значительную роль лучистого теплообмена в температурном режиме приземного слоя воздуха (например, [1], [2]). Исследования трансформации воздушных масс по материалам полетов свободных аэростатов показали, что в некоторых случаях изменение температуры за счет лучистого теплообмена играет заметную роль и его необходимо учитывать [3].

В работе [4] было показано, что лучистый теплообмен является существенным фактором в формировании средней температурной стратификации пограничного слоя атмосферы. Теперь мы попытаемся нить роль лучистого теплообмена при нестационарных процессах.

По определению, радиационное изменение температуры

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\rho c_p} \frac{dF}{dz}, \qquad (1)$$

где T, ρ , c_p — температура, плотность и удельная теплоемкость воздуха, t — время, z — вертикальная координата, характеризующая высоту над земной поверхностью, F — результирующий поток радиации на высоте z(F = B - A; A и B — потоки длинноволнового излучения, приходящие на высоту z соответственно сверху и снизу).

В настоящей работе мы ограничимся рассмотрением теплообмена

только за счет длинноволновой радиации.

Введем вместо высоты z новую координату — эффективную, поглощающую массу — по формуле

$$m = \int_{0}^{z} \rho_{w} f(p) dz.$$
 (2)

Тогда (1) запишется в таком виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{q}{c_p} f(p) \frac{dF}{dm}.$$
 (3)

Здесь q — удельная влажность, f(p) — функция, учитывающая влияние давления на поглощение длинноволновой радиации.

Производная от потока, т. е. $\frac{dE}{dm}$, рассчитывалась по формуле

$$\frac{dF}{dm} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\Delta E \Delta D}{\Delta u} \right)_i + \sum_{k=1}^{K} \left(\frac{\Delta E \Delta D}{\Delta v} \right)_k + E(M) |D'(M-m)|. \tag{4}$$

Значения функции пропускания и ее производной снимались с рис. 3

в работе [5].

Были рассмотрены следующие температурные стратификации: а) профиль N — линейное падение температуры с градиентом $0.6^\circ/100$ м от земной поверхности ($T_0=11.9^\circ$) до 12 км, выше изотермия; б) профиль 1 — логарифмическое падение температуры до 50 м [T (z) = 17° — -0.7 lg $\cdot 10^6$ z], выше он смыкается с профилем N; в) профиль 4 — инверсия от земной поверхности ($T_0=3^\circ$) до 10 м ($T=12.1^\circ$), где этот профиль смыкается с профилем 1; г) профиль M — инверсия от земной поверхности ($T_0=12.3^\circ$) до 400 м, выше 500 м линейное падение с градиентом $0.6^\circ/100$ м до 12 км, затем изотермия. Этот профиль до 500 м соответствует среднему летнему распределению температуры в 3 часа в Mахталах (пустыня Кызыл Кум в Средней Азии).

Влажность во всех описанных четырех стратификациях менялась по экспоненциальному закону $\rho_w = \rho_w(0) \ e^{-\alpha z}$, $\rho_w(0) = 7 \ r/m^3$, $\alpha = -4.5 \times 10^{-4} - 1/m$; д) профиль A_1 — среднее распределение температуры и влажности для января в Арктике (по данным дрейфующих станций СП-3, СП-4 и СП-5 за 1954—1956 гг.); е) профиль $A_{\rm VII}$ — среднее распределение температуры и влажности для июля в Арктике (по данным

дрейфующих станций СП-3, СП-4 и СП-5 за 1954—1956 гг.).

При расчете $\frac{\partial T}{\partial t}$ для стратификаций N, 1, 4 и M влияние давления на поглощение радиации в атмосфере не учитывалось, т. е. принималось f(p)=1. При расчете $\frac{\partial T}{\partial t}$ для Арктики считалось, что $f(p)=\sqrt[p]{\frac{p}{1000}}$. Результаты расчетов и исходные профили до высоты 2 км приведены на рис. 1, ход температуры и влажности в свободной атмосфере — на рис. 2.

Так как для профилей N, 1, 4 и M принималось одинаковое распределение водяного пара по высоте, то расчеты, представленные на рис. 1 α — ϵ , отображают влияние изменений в температурной стратификации на

величину $\frac{\partial T}{\partial t}$.

Отметим основные результаты.

1) При линейном падении температуры с высотой (профиль N) величины производных от потоков радиации в нижних 5-10 м почти постоянны. На всех высотах $\frac{dB}{dm} < 0$, $\frac{dA}{dm} < 0$ и $\left| \frac{dA}{dm} \right| > \left| \frac{dB}{dm} \right|$, следовательно, воздух на любом уровне нагревается за счет нижерасположенной части атмосферы и охлаждается за счет верхней части, причем охлаждение превалирует. В результате воздух во всем пограничном слое охлаждается. Величина охлаждения в нижних 20 м составляет примерно 0.1° /час, затем убывает до 0.05° /час на высоте 1 км и несколько возрастает выше.

Интересно, что в слое 0—200 м охлаждение из-за теплообмена с верхней атмосферой почти одинаково на всех высотах, выше оно

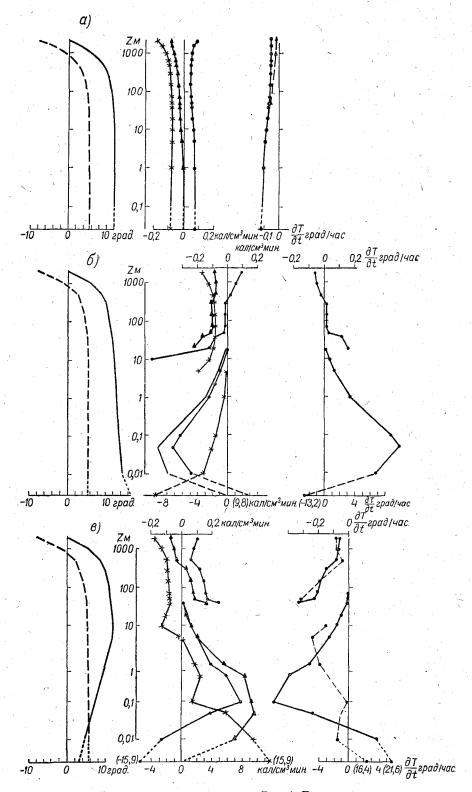
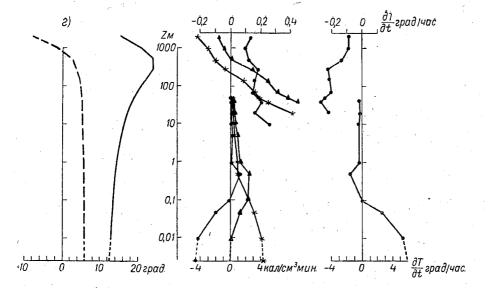
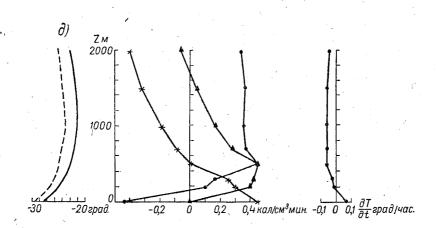
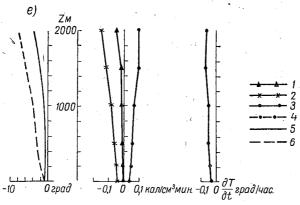


Рис. 1. Температура воздуха, точка a — для профиля N, δ — для профиля 1, s — для профиля M, δ — для Арктики, по измененной функции пропускания,







росы и результаты расчета. январь, e — для Арктики, июль; $I-\frac{dB}{dm}$, $2-\frac{dA}{dm}$, $3-\frac{dF}{dm}$, $4-\frac{\partial T}{\partial t}$ при $f(p)=\sqrt{\frac{p}{1000}}$ или 5 — температура, 6 — точка росы,

увеличивается с высотой. Величина $\frac{dB}{dm}$ непрерывно уменьшается, в результате $\frac{dF}{dm}$ также возрастает примерно с высоты 200 м.

2) Наличие большого градиента температуры у земной поверхности (T_0 =17°, $T_{1\,\mathrm{cm}}$ =14,2°) весьма значительно увеличивает значения производных от потоков в приземном слое. Например, $\frac{dA}{dm}$ возрастает при z=0 в 100 раз, при z=5 см, в 40 раз, $\frac{dB}{dm}$ —при z=1 м в 500 раз, при z=5 м в 100 раз, при z=20 м в 10 раз. Так как выше 50 м профили

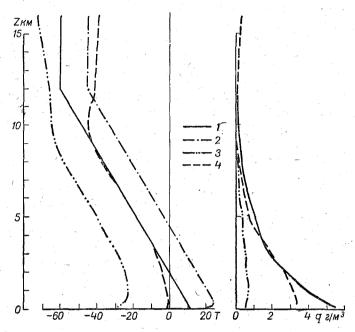


Рис. 2. Температура и влажность в свободной атмосфере. I — для профилей N, 1, 4, 2 — для профиля M, 3 — для Арктики, январь, 4 — для Арктики, июль.

1 и N смыкаются, то естественно, что значения $\frac{dA}{dm}$ различаются лишь в нижних 50 м.

Воздух, прилегающий к земной поверхности, весьма значительно охлаждается $\left(\frac{\partial T}{\partial t}\right) = -13^{\circ}/\text{час}$, однако уже на высоте 1 см и выше (до 400 м) имеет место нагревание с максимумом вблизи 1 см.

Логарифмическое падение температуры вблизи земли сказывается почти до 1 км и приводит к тому, что $\frac{\partial T}{\partial t}$ дважды меняет знак. Переход от охлаждения к нагреванию происходит на высоте нескольких миллиметров.

3) Наличие приземной инверсии приводит к значительному нагреванию воздуха у земной поверхности. Величина этого нагревания и высота перехода $\frac{\partial T}{\partial t}$ через нуль зависят, по-видимому, от величины $\frac{\Delta T}{z}$, где ΔT — мощность инверсии, а z — высота ее вершины.

Чем больше значение $\frac{\Delta T}{z}$, которое можно назвать средним градиентом температуры в слое инверсии, тем больше $\frac{dT}{dt}$ у земли, ниже переход через нуль, а также ниже расположен и резче выражен максимум охлаждения. Для профиля $4\frac{\Delta T}{z}=\frac{9,1}{10}=0,9^\circ$ /м, для профиля $M\frac{\Delta T}{z}=\frac{12,1}{400}=0,03^\circ$ /м. Соответственно, $\frac{\partial T}{\partial t}$ у земли равно 21,6 и 6,1°/час, переход через нуль происходит для профиля 4 между 1 и 5 см, а для профиля M несколько выше 10 см. Для профиля 4 имеется резко выраженный максимум охлаждения на высоте 10 см $\left(\frac{\partial T}{\partial t}=10,7^\circ$ /час) и величины $\frac{\partial T}{\partial t}$ в нижних 20 м примерно в пять раз больше, чем в профиле M. В профиле M имеется очень слабый максимум охлаждения $\left(\frac{\partial T}{\partial t}=-1,6^\circ$ /час) на высоте 50 см.

Производная от потока радиации сверху, т. е. $\frac{dA}{dm}$, переходит через нуль в обоих случаях ниже вершины инверсии, а $\frac{dB}{dm}$, наоборот, выше.

4) Наличие сверхадиабатических градиентов температуры приводит к охлаждению воздуха, прилегающего к земной поверхности, и нагреванию вышележащих слоев, причем это нагревание может распространиться даже на весь пограничный слой.

Наличие приземной инверсии, наоборот, приводит к нагреванию воздуха у земли и охлаждению выше. Толщина слоя, в котором повышается

температура, зависит от среднего градиента инверсии.

- 5) Хотя градиент температуры выше 500 м одинаков во всех рассмотренных профилях, значения $\frac{dA}{dm}$ на этих высотах в профиле M больше. Следовательно, производные от потоков зависят не только от градиента температуры, но и от ее абсолютного значения, причем с увеличением температуры увеличивается абсолютная величина производной.
- 6) При всех четырех температурных стратификациях величина $\frac{dF}{dm}$ на высоте 2 км больше, чем на высоте 1 км.

Для арктических профилей мы, к сожалению, не располагали подробными данными о температуре и влажности в нижнем 200-метровом слое. Пришлось также предположить, что T и q на высоте метеорологической будки относятся к земной поверхности.

Из проведенного анализа ясно, что если фактический профиль в приземном слое отличается от принятого, то и полученные величины $\frac{\partial T}{\partial t}$

будут отличаться от действительных в нижних 500—1000 м.

Несмотря на большие различия в значениях температуры, влажности и их градиентов зимой и летом, величины $\frac{\partial T}{\partial t}$ в слое 200—2000 м для января и июля почти одинаковы и равны приблизительно $0,05^{\circ}$ /час. Однако значения производных от потоков различаются весьма заметно.

 $\frac{\Delta T}{z} = \frac{9^{\circ}}{1000} = 0,009^{\circ}/\text{м}$. Воздух у земной поверхности нагревается на $0,07^{\circ}/\text{час}$; максимума охлаждения почти незаметно; $\frac{\partial T}{\partial t}$ переходит через

нуль где-то ниже 30 м (определить этот уровень точнее не удается из-за отсутствия подробных данных о температуре и влажности в приземном слое). Эти результаты находятся в полном соответствии с результатами, изложенными в пункте 3.

В июле величина $\frac{\partial T}{\partial t}$ отрицательна во всем рассмотренном слое и увеличивается с высотой по абсолютной величине.

Рассмотрим, как могут сказаться на величинах $\frac{\partial T}{\partial t}$ неточности в определении функции пропускания и учета влияния давления. Известно, что значения функции пропускания, полученные разными авто-

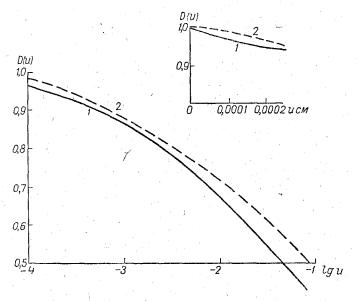


Рис. 3. Функция пропускания. 1 — принятая во всех расчетах, 2 — измененная.

рами, отличаются друг от друга. Мы провели расчет для двух профилей температуры (N и 4) в предположении, что функция пропускания имеет вид, изображенный на рис. 3 пунктиром. Обе кривые идут почти параллельно за исключением области очень малых поглощающих масс.

Величина $\frac{\partial T}{\partial t}$ для профиля N осталась без изменений, а для профиля 4 изменилась весьма заметно. На рис. 1 s видим, что стал совершенно иным вертикальный профиль $\frac{\partial T}{\partial t}$ в приземном слое; вместо одного большого максимума охлаждения появилось два меньших, уменьшилось нагревание у земной поверхности (вместо 21,6°/час стало 16,4°/час), слой положительных $\frac{\partial T}{\partial t}$ стал тоньше.

Совершенно ясно из этого примера, какое большое значение имеет знание точной зависимости $D\left(u\right)$ для изучения влияния лучистого теплообмена на температурный режим приземного слоя воздуха, так как обычно вблизи земли имеются большие градиенты температуры.

Весьма интересно следующее. Измеряя потоки радиации F в приземном слое воздуха на разных высотах и вычисляя затем $\frac{\partial T}{\partial t}$, Фанк [2]

обнаружил, что в некоторых случаях имеет место двойной максимум охлаждения. Там же он указывает, что расчетным путем (по диаграмме Эльзассера) по данным о распределении температуры и влажности получить двойной максимум не удается. Объясняет он это обстоятельство влиянием пыли, наличие которой ни одна радиационная диаграмма не учитывает. Мы видим, что можно предложить такой вид D(u), который в определенных условиях даст два максимума охлаждения и без учета поглощения радиации пылью. Из-за отсутствия данных оD(u) для $u < 10^{-4}$ см сейчас трудно решить, так ли существенно влияние пыли, как указывает Фанк. Надо иметь в виду, что во-первых, метод Фанка для определения $\frac{\partial T}{\partial t}$ (как по наблюдениям, так и по диаграмме) связан с весьма значительными ошибками (см. [5]); во-вторых, ход D(u), представленный на рис. 3 кривой 1, более реален, чем представленный кривой 2.

Для выяснения влияния давления было сосчитано $\frac{\partial T}{\partial t}$ при $f(p) = \sqrt{\frac{p}{1000}}$ для профиля N (пунктирная кривая на рис. 1 a). Влияние учета давления сказалось только выше 200 м, приведя к уменьшению $\frac{\partial T}{\partial t}$. Если без учета давления $\frac{\partial T}{\partial t}$ на высоте 2 км было больше, чем на высоте 1 км, то теперь соотношение изменилось.

Полученные нами результаты позволяют сделать некоторые качественные выводы о взаимосвязи влияния турбулентного и лучистого теплообмена на температурный режим приземного слоя воздуха. При наличии вблизи земли сверхадиабатических и инверсионных градиентов лучистый теплообмен дает изменения температуры воздуха у земной поверхности, значительно превышающие наблюдаемые. В табл. 1 приведены значения $\frac{\partial T}{\partial t}$ для нижнего метрового слоя.

Tаблица 1Значения $rac{dT}{dt}$ $^{\circ}$ /час

Prince (ii)	`.	Профили	
Высота (м)	1	4	М
0 0,01 0,05 0,1 0,5 1,0	-13,2 10,9 9,8 4,8 - 3,3	21,6 3,6 5,0 10,7 5,2	6,1 5,6 2,6 0,1 -1,6 -0,3

Данные таблицы показывают, что лучистый теплообмен приводит к большой неустойчивости и, следовательно, к возникновению турбулентного обмена. Сразу можно сказать, что при профиле 4 турбулентный обмен будет протекать более интенсивно, чем при профиле M. Профиль 4 соответствует распределению температуры в вечерние часы, а профиль M— в ночные. Известно, что турбулентность ночью меньше, чем вечером. Профиль 1 соответствует распределению температуры

в дневное время, поэтому для получения правильного представления о влиянии лучистого теплообмена надо учесть поглощение солнечной радиации в атмосфере.

Поскольку турбулентный обмен у земли весьма интенсивный, вероятно, коэффициент обмена при z = 0 больше молекулярного. K та-

кому же заключению приходит в одной из своих работ Меллер [6].

Из изложенного ясно, что при решении задач о трансформации или суточном ходе температуры можно получить правильные результаты, выбирая соответствующий коэффициент турбулентности. Однако, как только мы перейдем к рассмотрению замкнутой задачи, в которой коэффициент турбулентного обмена — одна из искомых величин, то сразу столкнемся с необходимостью учета лучистого теплообмена.

Выводы

1. Лучистый теплообмен влияет на возникновение и интенсивность турбулентного обмена.

2. Необходимо уточнить значения функции пропускания главным образом для малых поглощающих масс и влияние давления на погло-

щение радиации в атмосфере.

3. Для вычисления радиационных изменений температуры с достаточной точностью надо иметь подробные данные о температуре и влажности в пограничном слое атмосферы, особенно вблизи земной поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Robinson L. D., Rider N. E. A study of the transfer of heat and water vapour above a surface of short grass. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., v. 77, N 333, 1951.

Measured radiative flux divergence near the ground at night. Quart. J. 2. Funk J. P.

- Roy. Meteor. Soc., v. 86, N 669, 1960. 3. Гайгеров С. С., Кастров В. Г. Некоторые обобщения относительно термической трансформации воздуха на основании полетов свободных аэростатов. Труды ЦАО, вып. 13, 1954.
- 4. Ключникова Л. А., Шехтер Ф. Н. К вопросу о роли лучистого и турбулентного теплообмена в формировании температурной стратификации пограничного слоя атмосферы. Труды ГГО, вып. 94, 1960.

5. Шехтер Ф. Н. О методике определения лучистого притока тепла в атмосфере (см. настоящий сб.).

6. Möller F. Stahlungsvorgänge in Bodennähe. Z. für Meteorologie, Bd. 9, H. 2, 1955.

К ПРОГНОЗУ НОЧНОГО ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ ВОЗДУХА

Предлагается усовершенствование метода прогноза ночного изменения температуры приземного слоя воздуха за счет учета предшествующего кода температуры. Рассматривается сначала общий случай, когда предшествующий код температуры на уровне метеорологической будки задается произвольной функцией времени в соответствии с данными наблюдений. Затем показывается, что для практических целей можно ограничиться представлением предшествующего кода температуры периодической функцией и дается решение задачи для этого случая. На основании полученного решения составляется расчетная схема, достаточно удобная для оперативного использования на сети метеорологических станций и в Бюро погоды.

В работах [1, 2, 3] на основании полученного решения задачи о нестационарном изменении температуры в приземном слое воздуха был предложен метод локального прогноза ночного хода температуры по данным вечерних и дневных наблюдений на метеостанциях. Этот метод получает сейчас применение на практике для предсказания заморозков и туманов, что нашло отражение в Методических указаниях ЦИП и ГГО, методических письмах УГМС и ряде статей советских и зарубежных авторов.

В предложенном методе учитывается значительное число факторов, определяющих ночное охлаждение приземного слоя воздуха: эффективное излучение, скорость ветра, влажность почвы, продолжительность ночи и др. Изменение температуры при этом устанавливается на основании нахождения непериодического решения уравнений теплопроводности в турбулентной атмосфере и почве в предположении, что индивидуальные изменения температуры могут быть заменены их локальными составляющими.

В отношении локальных прогнозов следует заметить в общем, что их успешность зависит не только от того, насколько правильно принятые уравнения и условия описывают реальные процессы, но и от полноты исходных данных, задаваемых в начальный момент. При этом целесообразно отделить начальные исходные данные от внешних параметров задачи, точность которых определяется успешностью общего прогноза внешних условий.

В случаях когда прогноз температуры осуществляется на основе расчета периодического хода ее в течение суток, в качестве начальных данных, по существу, принимаются только значения температуры на данной высоте в начальный момент.

При использовании решения непериодической задачи исходными данными служат начальные значения на разных высотах. Понятно, что

такие исходные данные являются более полными и это решение обеспечивает большую точность прогноза. Однако здесь возникают определенные трудности, связанные с тем, что нужно знать детальное распределение температуры в слое воздуха высотой несколько сот метров, а данные метеорологического зондирования являются недостаточными. Эти трудности удается преодолеть только в частных случаях, когда начальный профиль температуры известен или его влияние невелико. Вместе с тем можно использовать то обстоятельство, что начальное распределение температуры в значительной степени определяется ее предшествующими изменениями. Поэтому целесообразно поставить задачу чтобы учесть эти изменения для локального прогноза. Такая постановка задачи отвечает наиболее полному использованию данных наблюдений в одном пункте. Для решения ее можно применить предложенный в работе [3] способ. С этой целью вводятся в рассмотрение два промежутка времени: первый от $-\infty$ до некоторого момента t', а второй от нуля до момента t. Начало второго промежутка совпадает с концом первого и соответствует исходному сроку прогноза. Для второго промежутка система уравнений и граничные условия совпадают с рассмотренными в работах [1] и [2].

Математически задача формулируется следующим образом.

Для периода времени t>0 температура воздуха T_i (i=1,2) и температура почвы T_3 удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial z} (x_0 + k_1 z) \frac{\partial T_1}{\partial z} = 0, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}, \qquad z \geqslant h,$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial t} = k_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2}, \qquad z \leqslant 0$$

(где $\kappa_0 + k_1 z$ и k_2 — коэффициенты турбулентного обмена соответственно в слоях $z \leqslant h$ и $z \geqslant h, k_3$ — температуропроводность почвы условиям); граничным:

при
$$z=0$$
 $T_1=T_3$, $-\lambda_1\frac{\partial T_1}{\partial z}+\lambda_3\frac{\partial T_3}{\partial z}=B$

(где λ_1 — молекулярная теплопроводность воздуха, λ_3 — теплопроводность почвы, B — радиационный баланс подстилающей поверхности),

при
$$z=h$$
 $T_1=T_2$, $\frac{\partial T_1}{\partial z}=\frac{\partial T_2}{\partial z}$,

а также начальному условию

при
$$t=0$$
 $T_i=T_{i'}$ $(i=1, 2, 3).$

 $T_{i'}$ (i=1,2) представляет собой температуру воздуха, а T_{3}' — температуру почвы в предшествующий период времени ($-\infty < t' < 0$), которые определяются из уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial z} (x_0 + k_1'z) \frac{\partial T_1'}{\partial z} = 0, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h,$$

$$\frac{\partial T_2'}{\partial t'} = k_2' \frac{\partial^2 T_2'}{\partial z^2}, \qquad z \geqslant h,$$

$$\frac{\partial T_3'}{\partial t'} = k_3' \frac{\partial^2 T_3'}{\partial z^2}, \qquad z \leqslant 0$$

при выполнении следующих граничных условий:

при
$$z=z_1$$
 $T_1'=\phi(t'),$ при $z=0$ $T_1'=T_3',$ при $z=h$ $T_1'=T_2',$ $\frac{\partial T_1'}{\partial z}=\frac{\partial T_2'}{\partial z}.$

Для обоих периодов используются одни и те же дифференциальные уравнения, но значение коэффициента турбулентного обмена в них принимается различным, поэтому для периода t' при коэффициентах k_i вве-

дены штрихи.

Для первого (предшествующего) периода нет необходимости ставить довольно сложную систему граничных условий с учетом теплового баланса, как для второго промежутка времени, и можно ограничиться условием, согласно которому считается известным изменение температуры со временем $\phi(t')$ на уровне метеобудки ($z=z_1$).

Система уравнений, относящихся к первому периоду, для момента t' определяет начальное распределение температуры, соответствующее

второму периоду.

Для решения сформулированной задачи выполним комбинированное двойное преобразование Лапласа по переменным t и t', причем по t преобразование обычное, а по t' — двухстороннее типа

$$\overline{\overline{T}}_i = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-pt-p't'} T_i dt dt'.$$

Тогда перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой можно получить, как это сделано в работах [1] и [2]. Для приземного слоя решение $\overline{\overline{T}}_1$ представляется в виде:

$$\overline{\overline{T}}_{1} = \overline{\overline{T}}_{1}|_{z=0} - \frac{\ln \frac{y}{v_{0}}}{\ln \frac{k_{2}}{v_{0}}} \frac{1}{a+Vp} \left\{ \frac{\overline{B}}{\Lambda_{3}p'} - \frac{A'_{1}\varphi(p')}{\left(A'_{1}+V\overline{p'}\right)'\left(V\overline{p}+V\frac{\overline{p'k_{2}}}{k'_{2}}\right)} + \frac{A'_{1}\varphi(p')\left(A'+V\overline{p'}\right)}{A'\left(A'_{1}+V\overline{p'}\right)\left(V\overline{p}+V\overline{p'}\right)} \right\}, \tag{1}$$

$$\overline{\overline{T}}|_{z=0} = \frac{1}{V\overline{p}} \frac{1}{(a+V\overline{p})} \left[\frac{A+V\overline{p}}{\Lambda_{3}p'} \overline{B} + \frac{\Lambda_{2}AA'_{1}\varphi(p')}{\Lambda_{3}\left(A'_{1}+V\overline{p'}\right)\left(V\overline{p}+V\frac{\overline{p'k_{2}}}{k'_{2}}\right)} + \frac{A'_{1}\left(A+V\overline{p}\right)\left(A'+V\overline{p'}\right)\varphi(p')}{A'\left(V\overline{p}+V\overline{p'}\right)\left(A'_{1}+V\overline{p'}\right)} \right], \tag{2}$$

гле

$$A = \frac{k_1}{\sqrt{k_2 \ln \frac{k_2}{x_0}}}, \quad \alpha = A\left(1 + \frac{\Lambda_2}{\Lambda_3}\right), \quad \Lambda_2 = \frac{\lambda_1}{x_0} \sqrt{k_2}, \quad \Lambda_3 = \frac{\lambda_3}{\sqrt{k_3}},$$
$$y = x_0 + k_1 z, \quad (3)$$

$$A' = \frac{k_1'}{\sqrt{k_2' \ln \frac{k_2'}{x_0}}}, \quad A_1' = \frac{k_1'}{\sqrt{k_2' \ln \frac{k_2'}{y_1'}}}, \quad y_1' = x_0 + k_1' z_1, \quad (4)$$

 \overline{B} — функция изображения B.

Выполнив обращение, получим: для z>0

$$T_{1} = T_{1}|_{z=0} - \frac{A\Lambda_{2} \ln \frac{y}{x_{0}}}{c_{p}\rho k_{1}} \int_{0}^{t} \chi_{1}(t-\zeta) d\zeta - \frac{\ln \frac{y}{x_{0}}}{c_{p}\rho k_{1}} \int_{0}^{t'} \varphi(\zeta) d\left[D_{2}(t, t'-\zeta) 1(t'-\zeta)\right]$$
(5)

и для z=0

$$T_{1}|_{z=0} = \frac{1}{\Lambda_{3}} \int_{0}^{t} B(\zeta) \psi_{1}(t-\zeta) d\zeta + \int_{-\infty}^{t'} \varphi(\zeta) d[D_{1}(t, t'-\zeta) 1(t'-\zeta)], \quad (6)$$

где

$$\psi_{1}(t-\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - (\alpha - A) r \left(\alpha \sqrt{t}\right),$$

$$\chi_{1}(t-\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - \alpha r \left(\alpha \sqrt{t}\right),$$

$$r\left(\alpha \sqrt{t}\right) = e^{\alpha^{2}t} \operatorname{erfc} \alpha \sqrt{t}.$$
(7)

$$D_{1}(t_{1}t') = \frac{2A}{\pi\alpha} \arctan \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{2A}{\alpha} \right) + \frac{2A}{\pi\alpha} \arctan \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{2A}{\alpha} \arctan \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \left(1 - \frac{A}{\alpha}\right) V_{1}(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_{\alpha}'}{\vartheta}} + \frac{A}{\alpha} \right) + \frac{A}{$$

$$+\frac{\ln\frac{y_{1}^{'}}{x_{0}}}{\ln\frac{z}{x_{0}}}M+\frac{\Lambda_{2}AA_{1}^{'}}{\Lambda_{3}\sqrt{k_{3}}}N,$$

$$D_2(t, t') = A\Lambda_2 \left[V_1(\vartheta_{\alpha}, \vartheta_{\alpha}') + \frac{\ln \frac{y_1'}{x_0}}{\ln \frac{h}{x}} S + A_1' Q \right],$$

1(ζ) — единичная функция.

При этом

$$\begin{split} M = & \frac{A}{\alpha} \sqrt{\frac{k_2}{k_2' \pi \vartheta_A}} \left[1 - r \left(\sqrt{\vartheta_A'} \right) \right] + \frac{(\alpha - A) \sqrt{k_3}}{\alpha + A_1'} \sqrt{\frac{k_2}{k_2'}} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{\pi \vartheta_\alpha}} - r \left(\sqrt{\vartheta_\alpha} \right) \right] \left[1 - r \left(\sqrt{\vartheta_A'} \right) \right] + V_1 \left(\vartheta_\alpha, \vartheta_\alpha' \right) \right\} - \\ & - \frac{A + A_1' \sqrt{\frac{k_2}{k_2'}}}{\alpha + A_1' \sqrt{\frac{k_2}{k_2'}}} \sqrt{k_3} \ V_2 \left(\vartheta_A, \vartheta_A' \right), \end{split}$$

$$N = \frac{\sqrt{k^2}}{\alpha A_1'} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi \vartheta_A}} \left[2 \sqrt{\frac{\vartheta_A'}{\pi}} + r(\sqrt{\vartheta_A'}) - 1 \right] - \frac{2}{\pi} \left(\sqrt{\frac{\vartheta_a'}{\vartheta_a}} - \arctan \left(\sqrt{\frac{\vartheta_a'}{\vartheta_a}} \right) \right\} + \frac{\sqrt{\frac{k_2}{k_2}}}{\alpha + A_1'} \sqrt{\frac{k_2}{k_2'}} V_2(\vartheta_A, \vartheta_A') + \frac{V_{k_2}}{A_1'} \left(\alpha + A_1' \sqrt{\frac{k_2}{k_2'}} \right) \left[\frac{1}{\sqrt{\pi \vartheta_a}} - r(\sqrt{\vartheta_a}) \right] \left[1 - r(\sqrt{\vartheta_A}) \right] - \frac{1}{\alpha} \frac{k_2}{\sqrt{\frac{k_2}{k_2'}}} \frac{1}{\alpha + A_1'} \sqrt{\frac{k_2}{k_2'}} V_1(\vartheta_a, \vartheta_a'),$$

$$S = \frac{\alpha}{\alpha + A_1' \sqrt{\frac{k_2}{k_2'}}} V_1(\vartheta_a, \vartheta_a') - \frac{A_1' \sqrt{\frac{k_2}{k_2'}}}{\alpha + A_1' \sqrt{\frac{k_2}{k_2'}}} V_2(\vartheta_A, \vartheta_A') + \frac{\alpha}{\alpha + A_1'} \sqrt{\frac{k_2}{k_2'}} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi \vartheta_a}} - r(\sqrt{\vartheta_a}) \right] \left[1 - r(\sqrt{\vartheta_A'}) \right],$$

$$Q = \frac{1}{\alpha + A_1' \sqrt{\frac{k_2}{k_2'}}} \left\{ \frac{V_{k_2}}{k_2'} V_1(\vartheta_a, \vartheta_a') + \sqrt{\frac{k_2'}{k_2}} V_2(\vartheta_A, \vartheta_A') - \frac{\alpha}{A_1'} \left[\frac{1}{\sqrt{\pi \vartheta_a}} - r(\sqrt{\vartheta_a}) \right] \left[1 - r(\sqrt{\vartheta_A'}) \right] \right\},$$

$$V_1(\vartheta_a, \vartheta_a') = r(\sqrt{\vartheta_a}) - \frac{2}{\pi} \arctan \left(\sqrt{\frac{\vartheta_a'}{\vartheta_a}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \omega_1(\vartheta_a, \vartheta_a'),$$

$$V_2(\vartheta_A, \vartheta_A') = \frac{1}{\sqrt{\pi \vartheta_A}} \left[1 - r(\sqrt{\frac{\vartheta_A'}{\vartheta_A}}) \right] - \frac{2}{\pi} \arctan \left(\sqrt{\frac{\vartheta_A'}{\vartheta_A}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \omega_1(\vartheta_A, \vartheta_A'),$$

$$\vartheta_a = \alpha^2 t, \quad \vartheta_a' = \alpha^2 \frac{k_2}{k_2} t, \quad \vartheta_A = A_1'^2 \frac{k_2}{k_2'} t, \quad \vartheta_A = A_1'^2 t,$$

$$\omega_1(x_1 x') = \frac{x}{k} \frac{r(\eta) d\eta}{\sqrt{x + x' - \eta}}.$$

Для вычисления изменений температуры по полученным формулам необходимо использовать, кроме известных таблиц специальных функций, еще результаты табулирования интеграла ω_1 (x, x'). Графики значений ω_1 (x, x') представлены на рис. 1.

Предшествующий ход температуры обычно задается дискретным рядом значений τ_i в моменты времени $t'-t_i'$, когда производятся наблюдения. В связи с этим целесообразно $\varphi(t')$ линейно интерполировать в зависимости от t', положив

$$\varphi(t') = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\tau_i + \alpha_i \left(t' - t'_i \right) \right] \left[1 \left(t' - t'_{i+1} \right) - 1 \left(t' - t'_i \right) \right], \tag{8}$$

где

$$\alpha_i = \frac{\tau_{i+1} - \tau_i}{t_{i+1}' - t_i'} \;.$$

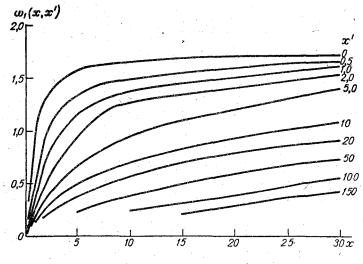


Рис. 1. Значения $\omega_1(x, x')$.

После подстановки (8) в (6) в силу свойств единичных функций найдем, что

$$T_{1}|_{z=0} = \frac{1}{\Lambda_{3}} \int_{0}^{t} B(\zeta) \psi_{1}(t-\zeta) d\zeta + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_{i} \left[D_{1}(t_{i}, -t'_{i+1}) - D_{1}(t_{i}, -t'_{i}) \right].$$

При этом принято t'=0.

Аналогичная формула следует для T_1 при $z \neq 0$.

Первое слагаемое в выражении для \dot{T}_1 , зависящее от B, совпадает с соответствующим членом в полученном ранее решении задачи [1].

В работе [1] даны и результаты вычисления этого слагаемого.

Расчеты других слагаемых в выражении для T_1 по полученным формулам показывают, что при прогнозе ночного минимума температуры достаточно ограничиться данными изменения температуры за предшествующий период, примерно равный суткам. Это позволяет произвести некоторые упрощения задачи, имея в виду оперативное использование ее решения. Можно приближенно полагать, что в предшествующий период выполнялась суточная периодичность температуры, и представить $\varphi(t')$ в виде ряда Фурье

$$\varphi(t') = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n e^{inw[t']}.$$

Если решение задачи для T_1 также представить в виде ряда Фурье, то полученное выше решение для функции изображения (1), (2) примет аналогичный вид. При этом следует заменить p' на in ω и φ (p') на ϕ_n , а также произвести суммирование по всем гармоникам.

Tогда при $z{>}0$

$$T_{1} = T_{1} \Big|_{z=0} - \frac{\ln \frac{y}{x_{0}}}{\ln \frac{k_{2}}{x_{0}}} \frac{1}{\alpha + \sqrt{p}} \left\{ \frac{1}{\Lambda_{3}} \overline{B} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t'} \times \left[\frac{A_{1}' \varphi_{n}}{\left(\sqrt{p} + \sqrt{\frac{in\omega k_{2}}{k_{2}'}}\right) \left(A_{1}' + \sqrt{in\omega}\right)} + \frac{A_{1}' \left(A' + \sqrt{in\omega}\right) \varphi_{n}}{A' \left(\sqrt{p} + \sqrt{in\omega}\right) \left(A_{1}' + \sqrt{in\omega}\right)} \right] \right\}$$

и при z=0

$$T_{1}|_{z=0} = \frac{1}{\sqrt{p} (\alpha + \sqrt{p})} \left\{ \frac{A + \sqrt{p}}{\Lambda_{3} p} \overline{B} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in \omega t'} \times \left[\frac{AA'_{1} \Lambda_{2} \varphi_{n}}{\Lambda_{3} \left(\sqrt{p} + \sqrt{\frac{in \omega k_{2}}{k'_{2}}}\right) \left(A'_{1} + \sqrt{in \omega}\right)} + \frac{A'_{1} (A + \sqrt{p}) (A' + \sqrt{in \omega}) \varphi_{n}}{A' (\sqrt{p} + \sqrt{in \omega}) \left(A'_{1} + \sqrt{in \omega}\right)} \right] \right\},$$

где A, A', A_1' и α определяются согласно (3), (4).

Для нахождения начальных функций теперь достаточно произвести обращение только по переменной р. Выполнив последнее, получим:

$$T_1 = \int_0^t B_1(\zeta) \left[\psi_1(t-\zeta) - \ln \frac{y}{x_0} \chi_1(t-\zeta) d\zeta \right] + \tilde{T}, \tag{9}$$

$$\widetilde{T} = \widetilde{T} \Big|_{z=0} - \frac{\ln \frac{y}{x_0}}{\ln \frac{k_2}{x_0}} \sum_{n=-\infty}^{\infty'} e^{in\omega t'} \frac{A_1' \varphi_n}{A_1' + \gamma_3} \times \left\{ \frac{\gamma_2 r \left(\gamma_2 \sqrt{t} \right) - \alpha r \left(\alpha \sqrt{t} \right)}{\gamma_2 - \alpha} + \frac{(A' + \gamma_3) \left[\gamma_3 r \left(\gamma_3 \sqrt{t} \right) - \alpha r \left(\alpha \sqrt{t} \right) \right]}{A' \left(\gamma_3 - \alpha \right)} \right\} \quad (10)$$

и при z=0

$$\widetilde{T} \Big|_{z=0} = \varphi_0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega t'} \frac{A_1' \varphi_n}{A_1' + \gamma_3} \Big\{ \frac{A\Lambda_2 \left[r \left(\alpha \sqrt{t} \right) - r \left(\gamma_2 \sqrt{t} \right) \right]}{\Lambda_3 \left(\gamma_2 - \alpha \right)} + \frac{A' + \gamma_3}{A' \left(\gamma_3 - \alpha \right)} \left[(\gamma_3 - A) r \left(\gamma_3 \sqrt{t} \right) - (\alpha - A) r \left(\alpha \sqrt{t} \right) \right] \Big\}.$$
(11)

Причем

$$\gamma_2 = \sqrt{\frac{\ln \omega k_2}{k_2}}, \quad \gamma_3 = \sqrt{\ln \omega}.$$

Штрих $y\Sigma$ означает отсутствие в суммах члена с n=0. В выражении (9) для T_1 члены, содержащие B, как и в приведенных выше формулах, определяют изменения температуры приземного слоя воздуха, обусловленные влиянием радиационного баланса B, а \tilde{T} —влиянием предшествующего хода температуры.

Из рассмотрения (10) и (11) для $T_{z=0}$ и T следует, что первые слагаемые в фигурных скобках, содержащие γ_2 , соответствуют влиянию предшествующего изменения температуры воздуха на различных высотах, а вторые слагаемые — предшествующим изменениям температуры почвы. Последние эквивалентны членам в приведенных выше формулах, соответствующим учету начального распределения температуры в почве.

Для, выполнения расчетов по полученным формулам следует еще в членах, входящих под знак суммы, выделить мнимую и действительную части. Учитывая, что при этом члены для +n и -n взаимносопряжены, суммирование будем производить только для n > 0. Для определения мнимой и действительной частей

$$r(x_n \sqrt{i}) = e^{ix^2} \operatorname{erfc}(x_n \sqrt{i}) = r'(x_n) + ir''(x_n)$$

можно воспользоваться соответствующими таблицами для функций вероятности при комплексном аргументе.

Тогда получим

$$\tilde{T} = \varphi_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} g'_n \varphi'_n - g''_n \varphi''_n, \tag{12}$$

где

$$g_{n}^{(i)} = \frac{AA_{1}^{i}\Lambda_{2}}{\Lambda_{3}} \frac{\varepsilon^{(i)}(M_{n},S_{n})}{\Delta(M_{n})} + \frac{A_{1}^{i}\ln\frac{y}{x_{0}}}{\ln\frac{k_{2}}{x_{0}}} \frac{\varepsilon^{(i)}(C_{n},F_{n})}{\Delta(C_{n})} + \frac{A_{1}^{i}}{A^{i}} \varepsilon^{(i)}(N_{n},J_{n}) - \frac{A_{1}^{i}\ln\frac{y}{x_{0}}}{A^{i}\ln\frac{k_{2}}{x_{0}}} \varepsilon^{(i)}(N_{n},\psi_{n}),$$

при этом i принимает два значения, обозначаемые здесь и ниже одним и двумя штрихами.

 $\epsilon^{(i)}$ (ξ_n, η_n) представляет собой оператор, определяемый соотношениями:

$$\varepsilon'(\xi_n, \eta_n) = \xi_n' \eta_n' + \xi_n'' \eta_n'',$$

$$\varepsilon''(\xi_n, \eta_n) = \xi_n' \eta_n'' - \xi_n'' \eta_n',$$

а Δ (ζ_n) — оператор, определяемый соотношением

$$\Delta(\zeta_{n}) = \zeta_{n}^{'2} + \zeta_{n}^{"2},$$

$$M_{n}^{(i)} = \varepsilon^{(i)} \left(C_{n}, D_{n} \right), C_{n}^{"} = -\sqrt{\frac{n\omega}{2}}, C_{n}^{'} = A_{1}^{'} - C_{n}^{"},$$

$$D_{n}^{"} = \sqrt{\frac{n\omega k_{2}}{2k_{2}^{'}}}, D_{n}^{'} = D_{n}^{"} - \alpha,$$

$$S_{n}^{'} = r \left(\alpha \sqrt{t} \right) - r'(x_{n}), S_{n}^{"} = -r''(x_{n}), x_{n} = \sqrt{\frac{n\omega k_{2}t}{k_{2}^{'}}},$$

$$F_{n}^{(i)} = \frac{\varepsilon_{n}^{(i)} (D_{n}, P_{n})}{\Delta(D_{n})}, P_{n}^{'} = \sqrt{\frac{n\omega k_{2}}{2k_{2}^{'}}} \left[r'(x_{n}) - r''(x_{n}) \right] - \alpha r \left(\alpha \sqrt{t} \right),$$

$$P_{n}^{"} = \sqrt{\frac{n \omega k_{2}}{2k_{2}'}} \left[r'(x_{n}) + r''(x_{n}) \right],$$

$$N_{n}^{(i)} = \frac{\varepsilon^{(i)}(L_{n}, C_{n})}{\Delta(C_{n})}, \quad L_{n}^{"} = \sqrt{\frac{n\omega}{2}}, \quad L_{n}^{'} = A' + L_{n}^{"},$$

$$I_{n}^{(i)} = r^{(i)}(x_{n}') + \frac{A\Lambda_{2}}{\Lambda_{3}} \frac{\varepsilon^{(i)}(E_{n}, S_{1n})}{\Delta(E_{n})}, \quad x_{n}^{'} = \sqrt{n\omega t},$$

$$E_{n}^{"} = \sqrt{\frac{n\omega}{2}}, \quad E_{n}^{'} = E_{n}^{"} - \alpha,$$

$$S_{1n}' = r'(x_{n}') - r(\alpha \forall t), S_{1n}^{"} = r''(x_{n}'),$$

$$\psi_{n}^{(i)} = \frac{\varepsilon^{(i)}(E_{n}, P_{1n})}{\Delta(E_{n})}, \quad P_{1n}^{'} = \sqrt{\frac{n\omega}{2}} \left[r'(x_{n}') - r''(x_{n}') \right] - \alpha r(\alpha \forall t),$$

$$P_{1n}^{"} = \sqrt{\frac{n\omega}{2}} \left[r'(x_{n}') + r''(x_{n}') \right].$$

 ϕ_n' и ϕ_n'' являются действительной и мнимой составляющими ϕ_n (т. е. $\phi_n = \phi_n' + i\phi_n''$).

В (12) положено t' = 0.

По полученным формулам были выполнены расчеты функции g_n для различных значений входных параметров возможных величин коэффициентов обмена k_1 и k_1 , высоты z и срока прогноза t.

В табл. 1 представлены вычисленные значения гармоник $g_n^{(i)}$ для n=1 и n=2 на высотах z=2 м и z=0.

Найденное решение задачи и результаты расчетов позволяют сделать ряд выводов. Прежде всего заметим, что при достаточно большом t члены в (10) и (11), содержащие функции $r(\alpha V t)$ и $r(\gamma V \overline{t})$, быстро убывают. Нетрудно убедиться, что при $t\to\infty$ они стремятся к нулю и вместе с ними обращаются в нуль все слагаемые в суммах (10) и (11).

Следовательно, T, согласно (12), стремится к ϕ_0 , т. е. к среднему значению температуры за предшествующие сутки. Это означает, что если к начальному моменту установился определенный профиль температуры, то при отсутствии дальнейших изменений радиационного баланса в результате перераспределения температуры в атмосфере, обусловленного турбулентным обменом, и в почве вследствие теплопроводности температура воздуха постепенно приближалась бы к среднесуточной температуре за предшествующий начальному моменту период времени. Обычно при анализе влияния начальных условий указывается, что это влияние затухает с увеличением времени. Отсюда нередко делается вывод о том, что при отсутствии источников тепла отклонения температуры от начального значения должны приближаться к нулю. Как видим из полученных результатов, такое утверждение неправильно.

Заметим, что этот вывод может иметь более общее значение. Он указывает на то, что и в других аналогичных задачах, в которых рассматривается влияние начальных условий, следует иметь в виду перераспределение исследуемого поля к средним за предшествующий период характеристикам.

Перейдем теперь к анализу данных табл. 1.

Обычно суточный ход температуры достаточно точно представляется первыми двумя-тремя гармониками, причем значение первой гармоники значительно больше последующих. Это является результатом того, что,

как правило, через 2—3 часа после полудня наблюдается отчетливый максимум температуры, а около времени восхода солнца— минимум. Поэтому для оценочных расчетов нередко достаточно ограничиться только первой гармоникой.

Таблица 1

						X							
t wac.			10			15	7.						
		k_{1}^{\prime} см/сек.											
<i>k</i> ₁ см/се	к. п	10	15	20	10	15	20						
				z=2 M	. v								
				g_{n}'									
$5 ext{ } 2$	}	0,38 0,23	0,40 0,29	0,38 0,31	$\begin{bmatrix} 0,31\\0,22 \end{bmatrix}$	$0,33 \\ 0,23$	$0,36 \\ 0,26$						
10 2	<u> </u>	0,29 0,21	0,32 0,24	0,35 0,25	0,23 0,16	0,25 0,18	0,27 0,20						
				$g_n{''}$									
$5 ext{ } 2$		-0,23 $-0,18$	$\begin{bmatrix} -0,24 \\ -0,19 \end{bmatrix}$	$-0,24 \\ -0,20$	$\begin{bmatrix} -0,21 \\ -0,17 \end{bmatrix}$	$-0,22 \\ -0,18$	$ \begin{array}{c c} -0,22 \\ -0,20 \end{array} $						
10 2		-0,19 -0,18	$-0,22 \\ -0,20$	$-0,22 \\ -0,21$	-0,17 $-0,14$	-0,19 $-0,15$	-0,20 -0,16						
	1			z = 0									
**				g_n'									
5 2		$0,43 \\ 0,27$	$\begin{bmatrix} 0,43 \\ 0,32 \end{bmatrix}$	$\substack{0,40\\0,34}$	$\begin{bmatrix} 0,34 \\ 0,25 \end{bmatrix}$	0,35 0,26	0,37 0,28						
10 2		0,32 0,23	0,34 0,25	0,36 0,26	0,25 0,18	0,27 0,19	$0,28 \\ 0,21$						
				or "									
1 5 2		$\begin{array}{c c} -0,24 \\ -0,20 \end{array}$	$\begin{bmatrix} -0,24\\ -0,20 \end{bmatrix}$	g_n'' -0.24 -0.20	-0,23 $-0,19$	-0,23 $-0,20$	$\begin{bmatrix} -0,23\\ -0,23 \end{bmatrix}$						
10 2		$-0,21 \\ -0,18$	-0,23 $-0,20$	-0,23 $-0,20$	-0,18 $-0,15$	-0,20 -0,16	$ \begin{array}{c c} -0,20 \\ -0,17 \end{array} $						
			l [

Приближенно положим, что в предшествующие сутки изменения температуры описываются функцией

$$\varphi(t) = T_{\rm cp} + \frac{D}{2} \cos \omega \left(t' - t'_m \right).$$

Здесь $\omega=\frac{2\pi}{T^*}$ ($T^*=24$ часа), t_m' — время наступления максимума, $T_{\rm cp}$ — среднесуточное значение температуры, оно совпадает с ϕ_0 , D определяет амплитуду колебаний температуры, что сразу видно, если определить $\phi_{\rm max}=T_{\rm cp}+\frac{D}{2}$ и $\phi_{\rm min}=T_{\rm cp}-\frac{D}{2}$.

Нетрудно показать, что

$$2\varphi_1' = \frac{D}{2}\cos \omega t_m',$$

$$2\varphi_1'' = -\frac{D}{2}\sin\omega t_m'.$$

Принимая для оценки, например, что t'=19 час., а $t_m'=3$ час., получим на основании формулы (12)

$$\tilde{T} = \varphi_0 + 0.35D (g_1' + g_1'')$$

 $\widetilde{T}=\phi_0+0,\!35D\,(g_{1}{'}+g_{1}{''})$ или, по данным табл. 1 для $t\!=\!10\!-\!15$ час.,

$$\tilde{T}=\varphi_0+nD$$
,

где $n \approx 0,1-0,15$.

Если амплитуда колебаний температуры составляет примерно 10°, то

с ошибкой около 1° можно полагать, что $T \approx \varphi_0 = T_{\rm cp}$.

Следовательно, в этом случае для практических расчетов формулу (12) можно упростить. Если рассматривается отклонение температуры от начального значения, то учет предшествующего хода сводится к добавке к членам, связанным с радиационным балансом, еще члена $ilde{T} =$ $=T_0-T_{\rm cp}-nD$ или приближенно $\tilde{T}{\simeq}T_0-T_{\rm cp}$. Чем больше t, тем с большей точностью вычисляется данный результат. С уменьшением tкоэффициенты д растут.

Из анализа опытного материала по суточному ходу температуры следует, что для определения $T_{\rm cp}$ практически достаточно данных четырехсрочных наблюдений в 19, 13, 7 и 1 час: $T_{\rm 19}$, $T_{\rm 13}$, $T_{\rm 7}$, $T_{\rm 1}$. Таким образом, если для примера за начальный момент взять 19-часовой срок, то

$$T_{\rm cp} = \frac{T_0 + T_{13} + T_7 + T_1 + T_{19}}{5} \,.$$

Естественно, что в отдельные дни, главным образом при наличии адвекции, температура в начальный момент и за 24 часа до него (в приведенном примере T_0 и T_{19} в предыдущие сутки) может существенно различаться. Ее, однако, целесообразно принять равной, положив

$$T_{\rm cp} = \frac{2T_0 + T_{13} + T_7 + T_1}{5} \cdot$$

Это позволяет приближенно оценить влияние адвекции. Действительно, при адвекции тепла температура в данные сутки несколько выше, чем в предыдущие, и, удваивая первую, мы несколько завышаем $T_{
m cp},$ следовательно, и T_{\min} . При адвекции холода будет иметь место некоторое занижение минимума, что также должно приблизить прогнози-

руемую температуру к фактической.

Для расчета первых слагаемых в (9), связанных с радиационным балансом поверхности, можно воспользоваться результатами расчета, приведенными в работах [1] и [2]. В соответствии с работами [1] и [3] при прогнозе ночного минимума температуры воздуха по вечерним и дневным данным под B можно принимать величину эффективного излучения E, определяемую по начальным значениям температуры и влажности воздуха и ожидаемой облачности. При этом для упрощения прогноза предлагается график на рис. 2, построенный по результатам вычислений в работах [1], [2].

График состоит из двух частей. Сначала нужно воспользоваться его левой частью. На горизонтальной оси отмечается точка по вычисленному значению Е. В этой точке устанавливается вертикаль до пересече-

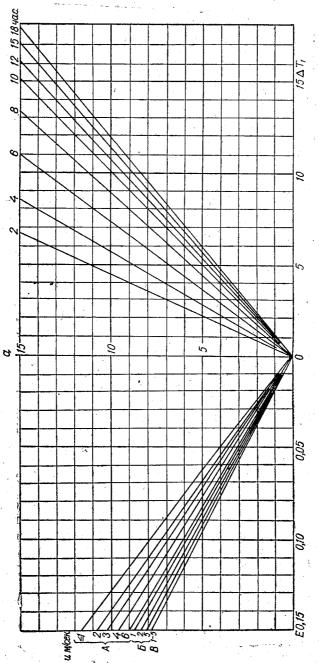


Рис. 2. График для прогноза ночного понижения температуры воздуха. A — сухая почва, B — влажная почва, B — мокрая почва.

ния с прямой, соответствующей исходным данным по скорости ветра и градации увлажнения почвы. От точки пересечения проводится горизонталь до той из наклонных прямых правой части графика, которая соответствует времени t, т. е. промежутку времени от начального момента до времени восхода солнца. Затем проводим вертикаль и находим на ее пересечении с горизонтальной осью значение ΔT_1 . Величина ΔT_1 определяет значение возможного понижения температуры без учета ее предшествующего хода.

Для проверки полученных соотношений были проведены сопоставления рассчитанных и фактически наблюдавшихся минимумов температуры по данным метеостанций, расположенных в различных частях СССР. Кроме того, в оперативном порядке была проведена проверка формул для прогноза минимума температуры с учетом предшествующего суточного хода в расчетной группе Северо-Западного Полученные результаты оказались положительными. При прогнозе по дневным данным средняя ошибка составляет 1,5—2°, а по вечерним $1-1.5^{\circ}$.

Расчетная схема вполне удобна для оперативных расчетов.

ЛИТЕРАТУРА

Берлянд М. Е. Изменение температуры в приземном слое атмосферы и предсказание заморозков. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1953.
 Берлянд М. Е. Предсказание и регулирование теплового режима приземного слоя атмосферы. Гидрометеоиздат, Л., 1956.

3. Берлянд М. Е. Локальные прогнозы изменений температуры и влажности в приземном слое воздуха. Современные проблемы метеорологии приземного слоя воздуха. Гидрометеоиздат, Л., 1958.

ВЛИЯНИЕ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЙ НА ХАРАКТЕР СУТОЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЛАЖНОСТИ

Теоретически получены критерии, позволяющие определить метеорологические условия, при которых в суточном ходе влажности наблюдается два или четыре экстремума. На этом основании устанавливается характер суточных колебаний влажности в зависимости от широты места и времени года. Показано, что опытные данные согласуются с выводами, полученными по теоретической схеме.

При исследовании метеорологического режима приземного слоя воздуха, а также в целях выяснения условий образования и прогноза тумана, росы, нижней облачности и др. необходимо определить характер суточного хода абсолютной влажности.

Известно, что суточные колебания абсолютной влажности в одних случаях аналогичны колебаниям температуры, т. е. имеют один максимум днем и один минимум ночью, в других случаях в суточном ходе

влажности отмечается два максимума и два минимума.

Задачей работы является выяснение условий, при которых наблюдается один из двух указанных выше типов суточного хода абсолютной влажности. До настоящего времени этот вопрос практически не исследовался. Его решение эмпирическим/путем затрудняется вследствие сложного влияния многих факторов, определяющих суточный ход влажности. Поэтому существенное значение приобретает теоретическое рассмотрение вопроса.

В основу исследования положено решение задачи, полученное в работах [2] и [6]. В них рассматривается теория суточных колебаний влажности во взаимосвязи с суточными колебаниями температуры и турбулентного обмена. Математически задача сводится к решению следую-

щей системы уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial z} (x_0 + K(t)z) \frac{\partial q_1}{\partial z} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h,$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = K(t)h \frac{\partial^2 q_2}{\partial z^2}, \quad z > h,$$

$$\frac{\partial^2 q_3}{\partial z^2} = 0, \quad -l \leqslant z \leqslant 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} (x_0 + K(t)z) \frac{\partial T_1}{\partial z} = 0, \quad 0 \leqslant z \leqslant h,$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} = K(t)h \frac{\partial^2 T_2}{\partial z^2}, \quad z > h,$$

$$\begin{split} &\frac{\partial T_3}{\partial t} = k_3 \frac{\partial^2 T_3}{\partial z^2} \,, \quad 0 \geqslant z \geqslant -\, l \,, \\ &\frac{\partial T_4}{\partial t} = k_4 \frac{\partial^2 T_4}{\partial z^2} \,, \quad z \leqslant -\, l \,. \end{split}$$

В качестве граничных условий принимаются: при z=0

$$-\lambda_{1} \frac{\partial T_{1}}{\partial z} + \lambda_{3} \frac{\partial T_{3}}{\partial z} = B(t),$$

$$T_{1} = T_{3},$$

$$q_{1} = q_{3},$$

$$\frac{\partial q_{1}}{\partial z} = \frac{\partial q_{3}}{\partial z},$$

при z = -l

$$\lambda_3 \frac{\partial T_3}{\partial z} - \lambda_4 \frac{\partial T_4}{\partial z} = L \rho x_0 \frac{\partial q_3}{\partial z} ,$$

$$T_3 = T_4,$$

$$q_3 = q_{\text{max}} (T_3).$$

Кроме того, используются условия сопряжения решения для температуры и влажности воздуха при z=h и условия ограниченности решений на бесконечном удалении от подстилающей поверхности.

В приведенной системе уравнений и граничных условий приняты следующие обозначения: q — влажность воздуха, T — температура, h — высота приземного слоя воздуха, в котором коэффициент обмена линейно возрастает, κ_0 — коэффициент молекулярной температуропроводности воздуха, B(t) — радиационный баланс подстилающей поверхности при среднесуточном значении эффективного излучения, k_3 , λ_3 и k_4 , λ_4 — коэффициенты температуро- и теплопроводности почвы соответственно в слоях

$$0 \geqslant z \geqslant -l$$
 и $z \leqslant -l$, $\lambda_1 = (1+v) c_p \rho \kappa_0$

 $(c_p$ и ρ — теплоемкость и плотность воздуха, v определяет изменения радиационного баланса вследствие изменения градиента температуры в приземном слое).

В задаче принимается, что уровень испарения (z=-l) для почв с недостаточным увлажнением расположен ниже уровня подстилающей поверхности (z=0). При решении используется связь между изменениями коэффициента турбулентного обмена и градиентом температуры в соответствии с работами М. И. Будыко [3] и М. И. Юдина [7].

Сформулированная задача нелинейная, поэтому ее решение выполняется методом последовательных приближений. В первом приближении коэффициент турбулентного обмена заменяется его среднесуточным значением. Этого приближения обычно достаточно для описания суточных колебаний температуры. При исследовании суточного хода влажности необходимо использовать второе приближение. В этом случае формула для определения отклонений влажности q от ее среднесуточных значений в слое воздуха $z \leqslant h$ имеет вид

$$q = a \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{W_n}{\sqrt{n}} e^{i \left(n \omega \tau - \frac{\pi}{4}\right)} + C W_n e^{i n \omega \tau} \right], \tag{1}$$

$$a=\frac{1}{\rho V \omega \kappa_2},$$

$$C=rac{\sqrt{\omega k_2}}{k_1}\lnrac{k_2}{y}$$
 ($y=lpha_0+k_1z$, k_1 и k_2- среднесуточные значе-

ния коэффициента обмена на высотах z=1 м и z=h м), ω угловая скорость вращения земли, W_n гармоника ряда Фурье для функции $W(\tau)=\frac{V(\tau)}{k(\tau)},$ $(V(\tau)$ и $k(\tau)$ измене-

ния испарения и коэффициента обмена со временем), $\tau = \int\limits_0^t k(t) \, dt$ (t-время, k(t)-суточный ход коэффициента обмена <math>K(t), деленный

на его среднесуточное значение).
Суточный ход коэффициента обмена и испарения с почвы определяется на основании решения первого приближения по формулам:

$$K(t) = k_1 - \frac{1}{\beta} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{B_n (1 - S_n)}{m_n \lambda_3 (S_n + 1) \sqrt{\frac{i n \omega}{k_3} + c_p \rho k_1 (S_n - 1)}} e^{i n \omega t}, \quad (2)$$

$$V(t) = V_0 + \frac{2}{L} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{B_n m_n \lambda_3 \sqrt{\frac{i n \omega}{k_3}}}{m_n \lambda_3 (S_n + 1) \sqrt{\frac{i n \omega}{k_3}} + c_p \rho k_1 (S_n - 1)} e^{t \sqrt{\frac{i n \omega}{k_3}} + i n \omega t}, \quad (3)$$

где

$$S_n = e^{2i\sqrt{\frac{in\omega}{k_3}}} \left[1 + \frac{2\lambda_3 \left(m_n + \frac{lk_1}{\lambda_0} \right) \sqrt{\frac{in\omega}{k_3}}}{L\rho k_1 \mu} \right],$$

$$m_n = \ln \frac{k_2}{\lambda_0} + \frac{k_1}{\sqrt{in\omega k_2}},$$

β — некоторый параметр, зависящий от среднесуточных значений температуры, скорости ветра, испарения и коэффициента турбулентности, а также от ускорения силы тяжести и от шероховатости подстилающей поверхности.

Согласно формуле (1), изменения влажности со временем непосредственно связаны с функцией $W(\tau)$. Последняя, как уже указывалось, определяется отношением испарения к коэффициенту обмена и в соответствии с приведенными формулами зависит от радиационного баланса, влажности почвы, скорости ветра, а также от среднесуточных значений коэффициента обмена и испарения.

Для выяснения количества экстремумов в суточных колебаниях влажности следует полученное выражение для q продифференцировать по времени и приравнять нулю. Тогда из (1), переходя от комплексных переменных к действительным и положив $W_n = W_n' + i W_n''$, получим следующее уравнение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[W'_n \sin\left(n\omega\tau - \frac{\pi}{4}\right) + W''_n \cos\left(n\omega\tau - \frac{\pi}{4}\right) + CW'_n \sin n\omega\tau + CW''_n \cos n\omega\tau \right] = 0.$$
(4)

При разложении функции W (τ) в ряд Фурье достаточно использовать две-три гармоники. На основании (4), ограничиваясь некоторым числом слагаемых, можно установить соотношения между входными параметрами, при которых будет наблюдаться определенное количество экстремумов.

Для выяснения характера суточного хода влажности в зависимости от метеорологических условий рассмотрим наиболее характерные при-

меры.

В простейшем случае, когда функция W (τ) может быть представлена нулевой и первой гармониками W (τ) = W_0+W_1 ′ соѕ $\omega \tau$, W и q будут иметь в течение суток один максимум и один минимум, так как $\omega=\frac{2\pi}{T^*}$, где $T^*=24$ час. и t изменяется в пределах от -12 до +12 час. При этом если W_1 ′>0, то максимум будет наблюдаться днем, а минимум — ночью.

Аналогичный ход W и q встречается, когда первая гармоника по своей величине значительно больше гармоник высшего порядка. Такие условия наблюдаются над влажными почвами, когда рост испарения современем в дневные часы происходит быстрее увеличения коэффициента

обмена.

Если функция W (τ) достаточно точно описывается тремя слагаемыми ряда W (τ) = $W_0+W_1{}'\cos\omega\tau+W_2{}'\cos2\omega\tau$, то в течение суток она может иметь два или четыре экстремума. Количество экстремумов устанавливается из равенства

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = -\omega W_1' \sin \omega \tau - 2\omega W_2' \sin 2\omega \tau = 0.$$

Из решения этого уравнения следует, что при $\left|\frac{W'_1}{W'_2}\right| < 4$ в суточных колебаниях W будет наблюдаться четыре экстремума, а при $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right| > 4$ два экстремума.

Однако, согласно формуле (1), суточный ход абсолютной влажности не всегда будет иметь такой же характер, как суточный ход функции $W(\tau)$. Для анализа характера колебаний влажности следует обратиться к уравнению (4), которое в данном случае можно записать

$$\begin{aligned} W_1' \sin\left(\omega\tau - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \ W_2' \sin\left(2\,\omega\tau - \frac{\pi}{4}\right) + CW_1' \sin\omega\tau + \\ + 2 \ CW_2' \sin 2\,\omega\tau = 0. \end{aligned}$$

Число корней последнего равенства при $-12 \leqslant t \leqslant 12$ час. определит количество экстремумов для влажности в течение суток. Будем искать решение этого уравнения графически. Для этой цели ему удобно придать следующий вид:

$$\frac{W_1'}{W_2'} = f_1(\tau),$$

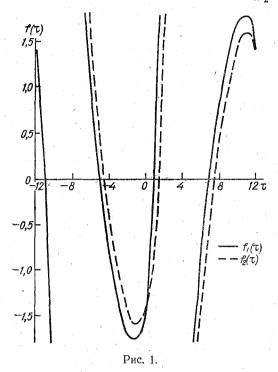
где

$$f_1(\tau) := \frac{\cos 2 \omega \tau - \sin 2 \omega \tau - 2C \sin 2 \omega \tau}{\frac{1}{V^2} (\sin \omega \tau - \cos \omega \tau) + C \sin \omega \tau}.$$
 (5)

Результаты расчета функции W (τ) для различных τ в пределах суток представлены на рис. 1 (сплошная линия). Вычисления проводились для высоты z=2 м, в этом случае C=0,28.

Точки пересечения кривых на рисунке с горизонтальными прямыми, соответствующими различным значениям отношения $\frac{W'_1}{W_2'}$, определяют искомые корни уравнения, а следовательно, положение и число экстремумов в суточном ходе влажности. Как видно на рис. 1, четыре корня уравнения возможны только при $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right| < 1,76$.

Из проведенных нами расчетов суточного хода влажности следует, что для реально наблюдаемых условий отношение $\frac{W_1'}{W_2'} < 0$. Следова-



тельно, при $0>\frac{W_1'}{W_2'}>-1,76$ в суточных колебаниях влажности должно наблюдаться два максимума и два минимума. В данном случае рост испарения в дневное время будет отставать от увеличения коэффициента турбулентного обмена, что характерно для районов со значительным радиационным балансом и сухими почвами. Поэтому в середине дня и ночью будут наблюдаться минимумы W и q, а в утренние и вечерние часы — максимумы. В случае когда $\frac{W_1'}{W_2'}<-1,76$, будет один максимум днем и один минимум ночью. Подобный характер суточного хода влажности, как уже отмечалось, если W (τ) представлено одной гармоникой, встречается над достаточно увлажненными почвами.

Мы привели результаты анализа суточного хода влажности для высоты z=2 м. Примерно такой же характер колебаний влажности наблюдается и на высоте z=h м. В последнем случае исходное уравнение (4) упростится, так как $y=k_2$ и C=0. Если функция W (τ) задается двумя гармониками, то равенство (4) примет вид

$$W_1' \sin\left(\omega\tau - \frac{\pi}{4}\right) + W_2' \sin\left(2\,\omega\tau - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \tag{6}$$

или

$$\frac{W_1'}{W_2'} = f_2(\tau),$$

где

$$f_{2}\left(\mathbf{t}\right)=\frac{\sqrt{2}\,\left(\cos2\,\omega\mathbf{t}-\sin2\,\omega\mathbf{t}\right)}{\sin\,\omega\mathbf{t}-\cos\,\omega\mathbf{t}}\,.$$

Проведя графическое исследование корней последнего уравнения (см. пунктирную кривую на рис. 1), получим, что при выполнении соотношения $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right| < 1.6$ кривая суточного хода влажности имеет двугорбый характер, при $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right| > 1.6$ наблюдается один максимум и один минимум.

Из сравнения кривых функций f (τ), построенных для уровней z=2 м и z=h м, следует, что пределы отношений $\frac{W_1'}{W_2'}$, при которых в суточных колебаниях влажности имеет место четыре экстремума, меняются мало. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением равенства (4) на уровне z=h, что значительно упростит задачу.

Аналогично исследуются случаи, когда $W(\tau)$ представляется большим числом членов, а именно:

$$W(\tau) = W_0 + W_1' \cos \omega \tau + W_2' \cos 2\omega \tau + W_1'' \sin \omega \tau, \tag{7}$$

$$W(\tau) = W_0 + W_1' \cos \omega \tau + W_2' \cos 2\omega \tau + W_2'' \sin 2\omega \tau, \tag{8}$$

$$W(\tau) = W_0 + W_1' \cos \omega \tau + W_2' \cos 2\omega \tau + W_3' \cos 3\omega \tau. \tag{9}$$

Тогда при исследовании суточного хода влажности в уравнение (4), полагая для упрощения задачи z=h, введем еще один дополнительный параметр: для (7) $\alpha=\frac{W_1''}{W_1'}$, для (8) $\beta=\frac{W'''_2}{W_1'}$, для (9) $\gamma=\frac{W_3'}{W_1'}$. При численных расчетах задаются некоторые конкретные значения указанных параметров. Так, например, суточные колебания влажности с четырьмя экстремумами наблюдаются в случае, когда $W(\tau)$ представлено формулой (7) для $|\alpha|=1$ при $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right|<1$,1, для $|\alpha|=0$,5 при $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right|<1$,4, для $|\beta|=1$ при любых значениях отношения $\frac{W_1'}{W_2'}$, а для $|\beta|=0$,5, если $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right|<2$.

Из выполненного анализа следует, что при учете большего числа гармоник функции $W(\tau)$ характер суточных колебаний определяется в основном отношением первых двух гармоник. Как правило, при $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right| < 1$ —2 в суточном ходе влажности будет отмечаться четыре экст-

ремума.

у Получив таким образом критерии для определения количества экстремумов в суточных колебаниях влажности, установим зависимость последних от метеорологических условий. Для этого прежде всего надо определить отношение $\frac{W_1'}{W_2'}$ функции $W(\tau) = \frac{V(\tau)}{k(\tau)}$. Суточный ход испарения и коэффициента обмена можно достаточно полно интерполировать двумя гармониками:

$$V(\tau) = V_0 + V_1 \cos \omega \tau + V_2 \cos 2\omega \tau,$$

$$\frac{1}{k(\tau)} = 1 - p_1 \cos \omega \tau - p_2 \cos 2 \omega \tau.$$

Отметим, что, используя эти соотношения, нетрудно получить выражения для k(t) и V(t), выполнив предварительный переход от τ к t по

формуле
$$t = \int_{0}^{\tau} \frac{d\tau}{k(\tau)}$$

Анализ опытных данных показывает, что в выражениях для функций $V(\tau)$ и $V(\tau)$ часто можно положить $V_2 = p_2 = 0$. Тогда

$$W_{1}' = \frac{V_{1}}{2} - \frac{V_{0}p_{1}}{2},$$

$$W_{2}' = -\frac{V_{1}p_{1}}{4}$$
(10)

И

$$\frac{W_1'}{W_2'} = 2\left(\frac{V_0}{V_1} - \frac{1}{p_1}\right).$$

 W_3 (10) видно, что характер колебаний влажности в течение суток зависит от соотношения величин $\frac{\mathbf{v}_0}{V_1}$ и $\frac{1}{p_1}$, которые в свою очередь определяются суммарной радиацией, влажностью почвы и скоростью ветра.

Как указывалось ниже, для реально наблюдаемых условий $\frac{W_1'}{W_2'} < 0$, следовательно, отношение $\frac{V_0}{V_1}$ меньше величины $\frac{1}{p_1}$. При этом с уменьшением $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right|$ величина дневного минимума q возрастает.

Из расчетов следует, что с увеличением суммарной радиации при переходе от зимы к лету или уменьшении широты места происходит возрастание суточных колебаний коэффициента обмена и испарения. При этом отношение $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right|$ уменьшается, следовательно, увеличивается вероятность появления дневного минимума влажности. Отношение $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right|$ возрастает с увеличением облачности, причем в большей степени для облаков нижнего яруса, поскольку последние сильнее уменьшают суммарную радиацию. С уменьшением альбедо подстилающей поверхности $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right|$ уменьшается. Величина $\left|\frac{W_1'}{W_2'}\right|$ зависит также от влажности почвы и скорости ветра, с ростом которых она увеличивается.

Приведем результаты численного анализа суточных колебаний влажности для широты $\phi = 60^\circ$ в случае ясного неба. При этом суточный ход солнечной радиации задавали в соответствии с работой М. Е. Берлянда [1]. Полагали, что почва сухая. Данные по среднесуточному испарению брали из работы Т. А. Огневой [5]. Расчеты проводили для трех месяцев: мая, июля и октября.

Суточный ход коэффициента обмена и испарения определяли на основании (2) и (3). По найденным значениям амплитуд отклонений испарения V_1 и параметра p_1 , характеризующего суточные колебания коэффициента обмена, были рассчитаны величины отношения $\frac{W_1}{W_1}$.

На основании полученных значений $\frac{W_1'}{W_2'}$ устанавливали тип суточного хода абсолютной влажности. Оказалось, что наличие двух максимумов и двух минимумов влажности в течение суток наблюдается в мае и июле, а в октябре отмечается один максимум днем и один минимум ночью.

Аналогичные расчеты были проведены и для широты 50°. Для определения среднесуточного испарения использовали данные работы [4].

Результаты вычислений показали, что при безоблачном небе в октябре имел место обычный суточный ход влажности с максимумом днем и минимумом ночью, а в июле и мае — дополнительный минимум в дневные часы. Так, нами было получено, что в мае V_0 =

$$=2.5\cdot 10^{-6}$$
 г/см² сек., $V_1=2.3\cdot 10^{-6}$ г/см² сек., $p_1=0.61, \frac{{W_1}'}{{W_2}'}=-1.1;$ в июле

$$V_0\!=\!4,0\cdot 10^{-6}$$
 г/см² сек., $V_1\!=\!3,2\cdot 10^{-6}$ г/см² сек., $p_1\!=\!0,\!59,\,rac{W_1'}{W_2'}\!=\!-0,\!9;$ в ок-

тябре
$$V_0 = 0.8 \cdot 10^{-6}$$
 г/см² сек., $V_1 = 1.1 \cdot 10^{-6}$ г/см² сек., $p_1 = 0.52, \frac{W_1'}{W_2'} = -2.4$.

Вышеприведенные расчеты проводились при безоблачном небе. Наличие облачности, как уже указывалось, приводит к уменьшению суммарной радиации и к сглаживанию суточного хода влажности.

В качестве примера мы рассчитали суточный ход влажности для $\phi=60^\circ$, когда количество облачности в течение суток равнялось 5 баллам. Оказалось, что в мае и октябре в суточных колебаниях влажности наблюдалось два экстремума, а в июле — четыре экстремума.

Заметим, что при расчетах мы брали среднюю облачность. В действительности же надо учесть суточный ход облачности, который может

исказить полученную картину.

Для проверки полученных выводов для $\phi = 50^{\circ}$ были проанализированы материалы наблюдений ряда гидрометеорологических станций. Эти материалы не являются достаточно полными, так как в течение суток имеется всего четыре срока наблюдений. Но, несмотря на это, они все же позволяют определить тип суточного хода влажности.

Использовались таблицы ТМ-1 по станциям Барановичи (ϕ =53°06′), Винницы (ϕ =49°12′), Луцк (ϕ =50°43′), Балашов (ϕ =51°33′) за 1946-58 гг. При этом выбирали случаи с ясными днями, когда облачность в каждом из сроков не превышала 3 баллов и не было адвекции. В составленные таблицы выписывали среднесуточные значения температуры, ветра и значения абсолютной влажности в 1, 7, 13 и 19 час. Всего было выбрано 424 случая. Анализ проводился отдельно для каждого месяца.

К маю всего относилось 143 случая. Из них в 119 случаях в суточных колебаниях абсолютной влажности наблюдалось два максимума и два минимума, в 24 — один максимум и один минимум. В июле из 136 случаев в 119 было четыре экстремума, в 17 — два экстремума. В октябре выписано 150 случаев. В 139 случаях имел место суточный ход с одним максимумом днем и одним минимумом ночью и только в 11 случаях кривая суточного хода влажности была двугорбой.

Полученные результаты для $\phi = 60^{\circ}$ также согласуются с опытными

материалами по станции Колтуши ($\phi = 60^{\circ}$).

Таким образом, экспериментальные данные соответствуют выводам, полученным по теоретической схеме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берлянд М. Е. Предсказание и регулирование теплового режима приземного слоя

атмосферы. Гидрометеоиздат, Л., 1956. 2. Берлянд М. Е. и Соломатина И. М. К теории суточных колебаний влажности

- и температуры в пограничном слое атмосферы. Труды ГГО, вып. 123, 1961.

 3. Будыко М. И. Испарение в естественных условиях. Гидрометеоиздат, Л., 1948.

 4. Зубенок Л. И., Ефимова Н. А., Мухенберг В. В. Материалы к климатическому районированию СССР. Труды ГГО, вып. 76, 1958.
- 5. Огнева Т. А. Некоторые особенности теплового баланса деятельной поверхности.
- Б. От нева Т. А. Пекоторые особенности теплового баланса деятельной поверхности. Гидрометеоиздат, Л., 1955.
 6. Соломатина И. И. О суточном ходе абсолютной влажности в приземном слос атмосферы. Труды ГГО, вып. 94, 1960.
 7. Юдин М. И. Суточный ход температуры воздуха и конвективный теплообмен. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4, 1948.

ЛОКАЛЬНЫЙ ПРОГНОЗ ОБРАЗОВАНИЯ ТУМАНОВ

Предлагается усовершенствованный метод предвычисления туманов по данным наблюдений в одном пункте. При этом разрабатывается метод предсказания ночного хода абсолютной влажности и уточняется способ прогноза ночного минимума температуры приземного слоя воздуха. Приводятся результаты проверки метода на материале наблюдений ряда гидрометстанций.

В приземном слое атмосферы всегда имеется большое количество ядер конденсации. Поэтому образование тумана обусловлено главным образом установлением определенного соотношения между температурой и влажностью воздуха. В выполненных в последнее время исследованиях [1], [2] показано, что большей частью туманы наступают при условиях, когда на уровне метеорологической будки относительная влажность повышается до 100%, т. е. когда температура воздуха достигает

значения точки росы.

Некоторые дополнительные результаты, подтверждающие данный вывод, были нами получены по материалам наблюдений на ст. Кирполье. На этой станции под руководством сотрудников оптической лаборатории ГГО проводились регулярные наблюдения за видимостью с помощью регистратора прозрачности и параллельно регистрировались изменения температуры и влажности воздуха. Эти данные позволяют в настоящее время наиболее точно фиксировать появление тумана. Из анализа полученных данных также следует, что туманы, как правило, образуются, когда температура воздуха достигает значения точки росы. Иногда это условие определяет лишь начало конденсации. Для появления тумана, в частности, когда к началу образования тумана наблюдается изотермия или падение температуры с высотой в приземном слое воздуха, требуется еще дополнительное охлаждение воздуха. Дополнительное понижение температуры в этих случаях определяется с помощью известных формул [3] или графиков А. С. Зверева [4], Б. В. Кирюхина [5] и др. Следовательно, прогноз тумана сводится к предсказанию изменений температуры T и влажности воздуха q.

Туман представляет собой непериодическое сравнительно кратковременное явление. Для многих пунктов туманы наблюдаются в течение лишь нескольких десятков дней в году, а в некоторых местах и реже; продолжительность их большей частью составляет несколько часов. Поэтому основное внимание уделяется разработке способов кратко-

срочного прогноза его.

При предсказании тумана в пределах суток нужно выделить два этапа. Первый заключается в прогнозе метеорологического фона, на

котором возможно наличие или отсутствие тумана. Второй же относится к случаям, когда создаются благоприятные условия для образования тумана, и состоит в конкретном решении вопроса, появится ли

туман и в какое время.

На первом этапе используются обычные синоптические методы, связанные с прогнозом метеорологической обстановки, предсказанием температуры и влажности на срок порядка суток. Здесь могут быть использованы разрабатываемые в настоящее время методы предвычисления барического поля, изменений температуры и влажности в движущихся воздушных массах.

Предсказание на втором этапе во многих случаях может быть отнесено к задаче локального прогноза погоды. Под локальными прогнозами понимаются предсказания изменений метеорологических элементов по данным наблюдений в одном пункте. Успешность таких прогнозов обусловлена тем, что изменения температуры и влажности в приземном слое воздуха определяются в значительной степени радиационным балансом подстилающей поверхности. Адвективные же изменения их вблизи земли невелики, что позволяет во многих случаях рассматривать адвекцию как внешний фактор, действующий вне пограничного слоя атмосферы, или как некий метеорологический фон, определяемый на основании общего синоптического либо вычислительного прогноза.

Уже данные статистической обработки внутрисуточного распределения времени появления туманов ([2] и др) позволяют судить о степени влияния отдельных факторов на образование и рассеяние туманов. Они отчетливо показывают, что туманы наблюдаются чаще всего в ночные часы, особенно в теплое полугодие. От 12 до 20 час. в теплое полугодие туманы практически не возникают. Отсюда следует, что основную роль в образовании тумана играет радиационное выхолаживание приземного слоя воздуха, имеющее место в ночные часы. Максимум туманов наблюдается около времени восхода солнца, когда достигается минимальная Ночью, как правило, убывает и точка росы за сутки температура. (подробнее об этом ниже), что, естественно, не способствует образованию тумана. Однако температура убывает быстрее, чем точка росы, и тем самым создаются благоприятные условия для насыщения воздуха. Это в еще большей степени подчеркивает значение радиационного фактора и необходимость расчета понижения температуры и влажности

В работе [3] были изложены основные способы прогноза туманов. Задача об усовершенствовании этих методов связана с уточнением методики предсказания температуры и влажности в приземном слое атмосферы.

Вопросы предвычисления ночного понижения температуры воздуха с учетом предшествующих суточных колебаний температуры рассмотрены в работе [6]. Поэтому здесь мы на них не будем останавливаться.

Изменение влажности в течение ночи во многих работах по локальному прогнозу туманов вообще не учитывалось и полагалось, что влажность или точка росы остается постоянной. Вместе с тем, как показывают опытные данные, влажность за ночь изменяется в довольно больших пределах и в целях усовершенствования прогноза туманов необходимо прежде всего предложить методику предсказания изменения влажности в течение ночи.

В общем случае изменения влажности воздуха в ночные часы обусловлены турбулентным перераспределением влаги по вертикали и выпадением росы. Оценка уменьшения влажности воздуха δq за счет

выпадения росы была приведена в работах М. Е. Берлянда [3] и [7]. В этих работах было показано, что значения δq сравнительно невелики. Эти значения для уровня метеобудки представлены в табл. 1.

Таблица 1

Состояние почвы	<i>и</i> м/сек.	t	t'	q_0	δq
Сухая почва		8 12 8 12	2	6 12	1,0 1,4 1,4 1,8
	1—2	8 10 8 10	4	6 12	0,8 0,9 1,1 1,3
	2-4	8 8 8	4	12 6 12	1,1 0,5 0,7
Влажная почва	1—2	8 12 8 12	2	6 12	0,9 1,3
		8 10 8 10	4	6 12	0,7
	2-4	8 8 8	4	12 6 12	1,0 0,4 0,7

В табл. 1 t — время после образования росы, t' — продолжительность времени от начального момента до появления росы при отсутствии влагообмена атмосферы с подстилающей поверхностью, q_0 — значение влажности в начальный момент, u — скорость ветра.

Поскольку значения δq невелики, то приближенно можно выделить изменения влажности за счет выпадения росы. Это позволяет свести задачу о ночном ходе влажности к определению изменений ее в результате перераспределения начального профиля влажности, в свою очередь обусловленного предшествующими колебаниями ее, В качестве граничного условия на подстилающей поверхности в данном случае можно принять равенство нулю турбулентного потока влаги или градиента влажности. Математически рассматриваемый процесс описывается тогда следующей системой дифференциальных уравнений и граничных условий.

Для первого периода, когда — $\infty < t' < 0$:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(x_0 + k_1' z \right) \frac{\partial q_1'}{\partial z} = 0, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h,$$

$$\frac{\partial q_2'}{\partial t} = k_2' \frac{\partial^2 q_2'}{\partial z^2}, \qquad z \geqslant h$$

с граничными условиями:

при
$$z=z_1$$
 ${q_1}'=\psi(t'),$ при $z=h$ ${q_1'=q_2', \quad \frac{\partial q_1'}{\partial z}=\frac{\partial q_2'}{\partial z}}.$

Для второго периода, когда $0 < t < \infty$:

$$\frac{\partial}{\partial z} (x_0 + k_1 z) \frac{\partial q_1}{\partial z} = 0, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h,$$

$$\frac{\partial q_2}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 q_2}{\partial z^2}, \qquad z \geqslant h$$

с граничными условиями:

при
$$z=0$$
 $\frac{\partial q_1}{\partial z}=0,$ при $z=h$ $q_1=q_2,$ $\frac{\partial q_1}{\partial z}=\frac{\partial q_2}{\partial z}$

и начальными условиями

при
$$t=0$$
 $q_i=q_i'$.

Здесь q_1 и q_2 — влажность воздуха, а $\kappa_0 + k_1 z$ и k_2 — коэффициенты обмена соответственно в слоях воздуха $z \leqslant h$ и $z \geqslant h$ в период t > 0, а q_1' , q_2' , $\kappa_0 + k_1' z$, k_2' — соответствующие величины влажности воздуха и коэффициента обмена в период $t' \leqslant 0$.

Функция $\psi(t')$ представляет изменение влажности на определенном уровне $z = z_1$ (обычно на высоте метеорологической будки) в период

времени t' < 0.

Решение этой задачи с учетом нестационарного изменения влаги в приземном слое было получено в работе [8]. Из анализа полученного решения следует, что при $t\!=\!10\!-\!15$ час. для определения изменения влажности в течение ночи достаточно исходных данных в предшествующий период продолжительностью около суток. Это позволяет в целях упрощения практического использования полученных результатов приближенно задать предшествующий ход в виде периодической функции, положив

$$\psi(t') = \sum_{-\infty}^{\infty} \psi_n e^{in \omega t'}.$$

Для решения сформулированной задачи представим все встречающиеся в ней функции рядом Фурье по переменной t' и подвергнем их преобразованию Лапласа по переменной t. Тогда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, из решения которой следует, что

$$\overline{q}_{1} = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\omega t'} \left(q'_{2n}\right)_{z=h}}{\sqrt{p} + \sqrt{\frac{in\omega k_{2}}{k'_{2}}}},$$

$$\overline{q}_{1} = \int_{0}^{\infty} q_{1}e^{-pt}dt,$$

где $(q_{2n}')_{z=h}$ — гармоника Фурье для функции q_2' при z=h; она определяется через гармонику Фурье ψ_n по формуле

$$(q'_{2n})_{z=h} = \psi_n \frac{A'_1}{A'_1 + \sqrt{in\omega}},$$

где

$$A'_{1} = \frac{k'_{1}}{\sqrt{k'_{2}} \ln \frac{k'_{2}}{y'_{1}}}, \quad y'_{1} = x_{0} + k'_{1}z_{1}.$$

Таким образом,

$$\overline{q}_1 = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in\omega t'} \frac{A_1' \psi_n}{\left(A_1' + V \overline{in\omega}\right) V \overline{p} \left(V \overline{p} + \sqrt{\frac{in\omega k_2}{k_2'}}\right)}.$$

Выполнив обращение по переменной р, найдем

$$q_1 = \psi_0 + \sum_{-\infty}^{\infty} e^{in\omega t'} \frac{A_1' \psi_n}{A_1' + V in\omega} r \left(\sqrt{\frac{in\omega k_2 t}{k_2'}} \right), \tag{1}$$

где

$$r(x) = e^{x^2} \operatorname{erfc} x$$
.

Для получения расчетных формул в членах, входящих под знак суммы, следует выделить действительную и мнимую части их. В силу того что члены с +n и -n взаимосопряжены, суммирование в (1) сведется к суммам по n для n > 0.

Полученные после подобных преобразований формулы приобретают следующий вид:

$$q_1 = \psi_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n' g_n' - \psi_n'' g_n'', \tag{2}$$

где

$$g'_{n} = \frac{A'_{1}}{\Delta_{n}} \left(C'_{n} r'_{n} + C''_{n} r''_{n} \right),$$

$$g''_{n} = \frac{A'_{1}}{\Delta_{n}} \left(C'_{n} r''_{n} - C''_{n} r'_{n} \right),$$

$$\Delta_{n} = C'^{2}_{n} + C''^{2}_{n}, \quad C'_{n} = A'_{1} + \sqrt{\frac{n\omega}{2}}, \quad C''_{n} = \sqrt{\frac{n\omega}{2}},$$

$$r'_{n} = \operatorname{Re} r \left(\sqrt{\frac{n\omega k_{2}t}{k'_{2}}} \right), \quad r''_{n} = \operatorname{Imr} \left(\sqrt{\frac{n\omega k_{2}t}{k'_{2}}} \right),$$

$$\psi_{n}' = \operatorname{Re} \psi_{n}, \psi_{n}'' = \operatorname{Im}\psi_{n}.$$

Для удобства расчетов здесь принято, что t'=0.

Из полученного решения следует, что в приземном слое воздуха q_1 не зависит от высоты. Этот результат является следствием квазистационарности приземного слоя и того, что при отсутствии выпадения

росы поток влаги с почвы равен нулю. Действительно, проинтегрировав дифференциальное уравнение $\frac{\partial}{\partial z}(\varkappa_0+k_1z)\frac{\partial q_1}{\partial z}=0$ и положив $\frac{\partial q_1}{\partial z}|_{z=0}=0$, сразу же получим, что изменение влажности воздуха в приземном слое не зависит от высоты.

Легко также убедиться, что при $t\to\infty$ все слагаемые в (1) стремятся к нулю, поскольку $\lim_{t\to\infty} z(\alpha \sqrt{t})=0$. Тогда при $t\to\infty$ q_1 стремится к ψ_0 . Таким образом, как и в рассмотренной в работе [6] задаче о прогнозе температуры воздуха при отсутствии источников или стоков влаги, с увеличением промежутка времени от начального момента влажность воздуха постепенно приближается к среднему значению за предшествующие сутки.

Результаты расчетов для коэффициентов g_n' и g_n'' при различных

значениях входных параметров k_1 , k_1' , t и n даны в табл. 2.

Чем больше значения этих коэффициентов, тем больше влияние предшествующего хода влажности, характеризующееся гармониками ψ_n . Из табл. 2 видно, что g_n' и g_n'' убывают с увеличением n и времени t. Усиление турбулентного обмена в ночные часы (рост k_1) при фиксированном значении k_1' ведет к уменьшению g_n' , что вполне естественно, так как при этом происходит более быстрое приближение влажности воздуха к ее среднесуточному значению. Наоборот, усиление турбулентного перемешивания в предшествующий период ведет к увеличению g_n' . Это связано с тем, что к начальному моменту времени предшествующие возмущения температуры распространяются до больших высот.

Для практического расчета изменения влажности в течение ночи следует воспользоваться полученными формулами и значениями коэффициентов g_n' и g_n'' из табл. 2. Затруднения при практическом использовании их в основном связаны с необходимостью определения гармоник Фурье ψ_n для изменения влажности за предшествующие сутки.

Некоторые упрощения здесь можно произвести, воспользовавшись типовыми характеристиками суточного хода влажности, рассмотрен-

ными в работе [9].

Целесообразно рассмотреть два случая: наличие одного и двух максимумов в суточных колебаниях влажности.

В первом случае приемлемые оценки получим, ограничиваясь одной гармоникой. Положим

$$q'_1 = q_{\rm cp} + \frac{D}{2} \cos \omega (t' - t'_m),$$
 (3)

где t_m' — время наступления максимума влажности воздуха (q_{\max}). Величина $D=q_{\max}-q_{\min}$, таким образом, представляет собой амплитуду колебаний влажности.

Сравнив (3) с соответствующим рядом Фурье, получим, что

$$2\psi_1' = \frac{D}{2}\cos\omega t_m', \qquad 2\psi_1'' = -\frac{D}{2}\sin\omega t_m'.$$

Если, например, t'=0, $t_m'=3$ час. то, согласно формуле (2), прогнозируемое значение влажности q_1 определим из соотношения

$$q_1 = q_{cp} + 0.35 (g_1' + g_1'') D.$$

Подобным образом можно получить q_1 и для других значений t_m' и придать расчетной формуле для предвычисления влажности в ночное время вид

$$q_1 = q_{\rm cp} + m_1 D.$$

Значения g_n' и g_n''

á. ,							څه						.	
	٠	25		,		0,255	0,153	0,114				-0,224	-0,178	-0,150
	15	20				0,224	0,135	0,100				-0,210 $-0,224$	-0,163 $-0,178$	-0,139 $-0,150$
15		15	0,257	0,155	0,111			-	-0,230	-0,185	-0,156	<u></u>		
		10	0,194	0,110	0,076	0,133	-0,074	0,050	$-0,205 \left -0,230 \right $	-0,154 $-0,185$	-0,124 $-0,156$	-0,163	-0,116	-0,091
		25				0,309	0,196	0,144	:			-0,232 $-0,242$ $-0,163$	-0,190 $-0,204$ $-0,116$	-0,160 -0,174 -0,091
		20				0,273	0,170	0,122				-0,232	-0,190	-0,160
10		Ĩ5	0,310	0, 193	0,142			•	-0,247	-0,209	-0,181		.!	,
	/сек.	10	0,239	0,140	960,0	0,167	0,089	0,065	-0,227 -0,247	-0,180 $-0,209$	-0,147 $-0,181$	-0,183	-0, 137	-0,110
	k_1^\prime cM/cek.	25				0,406	0,277	0,210		'	<u> </u>	-0,2550,2570,183	-0,228 $ -0,239$ $ -0,137$	-0,202 $-0,216$ $-0,110$
		20				0,369	0,242	0,180				-0,255	-0,228	-0,202
5		15.	0,401	0,272	0,205		÷		-0,260	-0,242	-0,238	· .		•
		10	0,326	0,205	0, 145	0,238	0,140	0,096	-0,254 -0,260	-0,218 $-0,242$	-0,188 -0,238	-0,227	-0,180	-0,147
		25				0,528	0,394	0,318			!	0,258—0,253—0,227	0,257 - 0,260 - 0,180	0,246 -0,252 -0,147
		702				0,491	0,357	0,280				-0,258	-0,257	-0,246
2		15	0,515	0,380	0,307				-0,255	-0,252 -0,262	-0,254	I.	!	
		10	0,438	0,304	0,229	0,352	0,227	0,163	-0,262	-0,252	-0,230	-0,258	-0,229	-0,200
	u u		-	7	က		2	က	, —	21	က	,	0	က
t yac.		R ₁ cM/cek.	gn' 5		-	10			$g_{n}^{"}$ 5			10		

Для t=5-10 час. $g_1'+g_1''\approx 0,1$. Тогда при $t_m'=3$ час. $m_1\approx 0,04$, при $t_m'=0$ $m_1\approx 0,2$.

В случае когда суточный ход влажности характеризуется наличием двух максимумов и двух минимумов, необходимо учесть не менее двух гармоник: приближенно можно положить, что

$$q_1 = q_{cp} + a_1 \cos \omega (t' - t_m') + a_2 \cos 2\omega (t' - t_m'). \tag{4}$$

Нетрудно убедиться, что кривая, выраженная соотношением (4), имеет четыре экстремума только при условии $\left|\frac{a_1}{4a_2}\right| < 1$. Действительно, в силу того что в точках экстремума $\frac{\partial q_1}{\partial t} = 0$, получим

$$\sin\omega\left(t'-t_{m'}\right)=0\tag{5}$$

И

$$a_1 + 4a_2 \cos \omega (t' - t_m') = 0.$$
 (6)

Следовательно, два экстремума соответствуют моментам времени t, удовлетворяющим (5): $t'=t_{m'}$ и $t'=t_{m'}-12$ час. Моменты времени, соответствующие двум другим экстремумам, должны удовлетворять уравнению (6) или

$$\cos \omega \left(t'-t'_m\right)=-\frac{a_1}{4a_2},$$

которое может выполняться, когда $\left| \frac{a_1}{4a_2} \right| < 1$.

Если $|a_1| > 4 |a_2|$, то кривая будет иметь только два экстремума. В точках $t' = t_m'$, где выполняется (5),

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} = -\omega^2 \left(a_1 + 4a_2\right)$$

и так как $|a_1|<4$ $|a_2|$, то $\frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2}<0$. Таким образом, в точке $t'=t_{m'}$ при $a_1>0$ и в точке $t'=t_{m'}-12$ час. имеет место максимум; при $a_1<0$ выполняется обратное соотношение. Очевидно, что в этих точках находятся экстремумы. Так, при $a_1>0$ точка $t'=t_{m'}$ будет соответствовать максимуму, который наблюдается обычно в дневные часы. Обозначим его q_{\max} . В точке $t'=t_{m'}-12$ час. около восхода солнца наблюдается главный минимум q_{\min} .

Главный максимум определим по формуле

$$q_{\max} = q_{\rm cp} + a_1 + a_2. \tag{7}$$

Вторичный экстремум при $t' = t_2{}'$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{a_1}{a_2} = -4\cos\omega (t_2' - t_m'). \tag{8}$$

В этой точке

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial t^2} = 4a_2 \omega^2 \sin^2 \omega \left(t_2^1 - t_m'\right),$$

и, следовательно, она при $a_2 > 0$ соответствует вторичному минимуму в дневное время.

Из (7) и (8)

$$a_{1} = -\frac{4 \left(q_{\max} - q_{\text{cp}}\right) \cos \omega \left(t_{2}^{'} - t_{m}^{'}\right)}{1 - 4 \cos \omega \left(t_{2}^{'} - t_{m}^{'}\right)}, \quad a_{2} = \frac{q_{\max} - q_{\text{cp}}}{1 - 4 \cos \omega \left(t_{2}^{'} - t_{m}^{'}\right)}.$$

Это позволяет определить a_1 и a_2 по разности $q_{\max} - q_{\text{ср}}$ и времени наступления дневного минимума влажности. С a_1 и a_2 непосредственно связаны гармоники Фурье ψ_n :

$$2\psi_{1}' = a_{1} \cos \omega t_{m}', \ 2\psi_{1}'' = -a_{1} \sin \omega t_{m}',
2\psi_{2}' = a_{2} \cos 2\omega t_{m}', \ 2\psi_{2}'' = -a_{2} \sin 2\omega t_{m}'.$$

Далее, из формулы (2) ожидаемое значение влажности в ночное время можно выразить в виде

$$q_{1} = q_{cp} + a_{1}(g_{1}'\cos\omega t_{m}' - g_{1}''\sin\omega t_{m}') + a_{2}(g_{2}'\cos2\omega t_{m}' - g_{2}''\sin2\omega t_{m}').$$

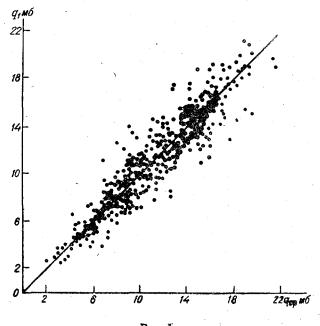


Рис. Т.

Если, например, t'=0 соответствует 19 час., время наступления дневного максимума $t_m'=3$ час., а дневного минимума $t_2'=6$ час., то

$$q_1 = q_{cp} + [1,09 (g_1' + g_1'') - 0,60g_2''] (q_{max} - q_{cp}).$$

Используем данные табл. 2 для t=10 час., $k_1=10$ см/сек., $k_1'=20$ см/сек., тогда

$$q_1 = q_{cp} + 0.16 (q_{max} - q_{cp}).$$

Если заменить t_m' и t_2' на $t_m'\!=\!0$ и $t_2'\!=\!0$, то

$$q_1 = q_{\rm cp} + 0.31 (q_{\rm max} - q_{\rm cp}).$$

Таким образом, и в случае наличия двух максимумов и двух минимумов в ходе влажности за предшествующие сутки ожидаемый минимум влажности будет близок к $q_{\rm cp}$ при сравнительно небольших положительных поправках (около 1 мб).

Так как при выпадении росы изменение влажности должно дать отрицательную поправку (табл. 1), то часто для практических расчетов можно полагать, что ожидаемый минимум влажности примерно совпа-

дает с $q_{\rm cp}$, а ожидаемое изменение влажности в течение ночи будет равно $q_0-q_{\rm cp}$, где q_0 — начальное значение влажности в вечерние часы.

В случае необходимости уточнения прогноза можно воспользоваться

приведенными выше формулами и таблицами.

Для проверки полученных соотношений был обработан обширный материал наблюдений ряда метеорологических станций, расположенных в различных климатических условиях.

На рис. 1 представлены корреляционные соотношения между $q_{\rm cp}$ за предшествующие сутки и значением влажности в 1 час ночи, которое близко к минимальному. На графике видно, что действительно q_1 близко к $q_{\rm cp}$ и $q_0-q_1\cong q_0-q_{\rm cp}$. Средние ошибки расчета минимумавлажности

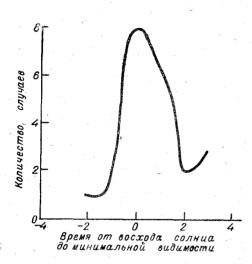


Рис. 2.

по предшествующему ходу составляют примерно ± 1 мб.

Для предсказания тумана можно воспользоваться указанными выше условиями образования его и полученными результатами по предсказанию ночного хода температуры и влажности воздуха. Как было показано в работе [3], уменьшение парообразной влаги за счет образования жидких капель и выделения теплоты конденсации тумана не оказывает существенного влияния на влажность и температуру воздуха.

Обработка данных наблюдений о времени наступления минимальной видимости в тумане показывает, что она близка к моменту восхода солнца. Для примера приводится рис. 2, построенный

по указанным выше материалам регистрации дальности видимости в ту-

мане на ст. Кирполье.

Следовательно, для предсказания возможности образования тумана ночью необходимо определить минимум температуры воздуха, т. е. значение ΔT к моменту восхода солнца, и ожидаемое изменение точки росы к этому времени. Тогда в качестве срока прогноза t следует принять промежуток времени от начального момента, например, от вечернего срока наблюдений в 19 час. ко времени восхода солнца.

По значению t на основании формулы (2) определим ожидаемое к этому сроку значение абсолютной влажности. В качестве исходных данных, как уже указывалось, используются значения абсолютной влажности в начальный момент q_0 и в предшествующие сроки q_i (обычно q_{13}, q_7, q_1, q_{19} соответственно в 13, 7, 1 и 19 час. предшествующих суток). Практически достаточно определить минимальное значение влажности q_{\min} , принимая его равным

$$q_{\rm cp} = \frac{2q_0 + q_{13} + q_7 + q_1}{5} .$$

Обычным способом производится пересчет от абсолютной влажности q_{\min} к соответствующему значению точки росы T_{dm} . Тогда необходимое для образования тумана понижение температуры можно представить формулой:

$$\Delta T_H = T_0 - T_{dm},$$

где T_0 — начальное значение температуры, T_{dm} — предсказанное значе-

ние точки росы к моменту t.

После того как найдено ΔT_n , нужно установить возможное понижение температуры за ночь ΔT и сравнить ΔT с ΔT_n . Возможное понижение температуры за ночь можно определить с помощью приведенного в работе [6] графика, вычислив предварительно некоторые указанные в работе [6] вспомогательные величины, в частности значение эффективного излучения E и среднесуточное значение температуры за предшествующие начальному моменту сутки.

Если эти найденные ΔT больше или равны ΔT_{H} , то следует предсказать образование тумана, в противном случае — отсутствие тумана. Если $\Delta T \approx \Delta T_{H}$, туман нужно ожидать около времени восхода солнца; при $\Delta T > \Delta T_{H}$ образование тумана должно произойти до восхода солнца. С помощью графика из работы [6] нетрудно определить время наступления тумана. Этот расчет выполняется по правой части графика. Откладываем на оси абсцисс значение ΔT_{H} равное ΔT_{H} — n_{H} , и устанавливаем вертикаль до пересечения с горизонталью, соответствующей ординате α . Положение точки пересечения затем определяется по отношению к наклонным прямым, на каждой из которых указано время t в часах. Если точка пересечения попадает на одну из этих прямых, то отмеченное на прямой время соответствует началу образования тумана. Если точка пересечения окажется расположенной между двумя наклонными прямыми, то время начала образования тумана t_0 определяется с точностью до часа путем интерполяции.

Используя полученные значения ΔT и $\Delta T_{_H}$ и время начала тумана, на основании прогноза по вечерним данным можно также судить об интенсивности и продолжительности тумана. Чем больше разность $\Delta T - \Delta T_{_H}$, тем раньше образуется туман и больше сконденсируется водяных капель, а следовательно, тем сильнее понизится видимость. При положительных температурах, если $\Delta T - \Delta T_{_H} > 0$ и равно примерно 1°, образуется туман умеренной интенсивности с дальностью видимости 200—500 м. Когда $\Delta T > \Delta T_{_H}$, в пределах до 1° возникает слабый туман (\equiv °) с дальностью видимости 500—1000 м. Если разность $\Delta T - \Delta T$ больше 2°, имеет место сильный туман (\equiv 2) с видимостью 50—200 м. При $\Delta T - \Delta T_{_H} < 0$ в пределах 1° возможно образование дымки.

Предложенная методика прогноза туманов была проверена по материалам наблюдений за теплый период года на метеостанциях Шоссейная, Смольное, Валдай, Волосово, Великие Луки, Псков, Новгород, Винница, Выборг и Кирполье. Было отобрано примерно 160 случаев, когда в ночное время отмечались туманы и когда условия погоды были благоприятны для образования туманов. В результате оказалось, что прогноз оправдался в 88% случаев. Время появления тумана вычислялось с точностью около 2 час. без учета знака отклонений фактических данных от рассчитанных и примерно 45 мин. с учетом знака отклонения. Рассмотренная схема расчетов является достаточно простой и пригодной для оперативных работ.

ЛИТЕРАТУРА

Берлянд М. Е. Об условии образования тумана. Труды ГГО, вып. 94, 1960.
 Грачева В. П. Исследование характеристик образования тумана. Труды ГГО, вып. 94, 1960.

Берлянд М. Е. Предсказание и регулирование теплового режима приземного слоя атмосферы. Гидрометеоиздат, Л., 1956.
 Зверев А. С. Туманы и их предсказание. Гидрометеоиздат, Л., 1954.

5. Кирюхин Б. В. Об интенсивности и продолжительности радиационных туманов. Труды НИУ ГУГМС, сер. І, вып. 28, 1946.
6. Берлянд М. Е., Грачева В. П. К прогнозу ночного изменения температуры при-

земного слоя воздуха (см. настоящий сб.).

Берлянд М. Е. Образование росы и испарение с почвы и их влияние на температуру и влажность приземного слоя воздуха. Труды ГГО, вып. 48, 1954.
 Берлянд М. Е. Локальные прогнозы изменения температуры и влажности в при-

земном слое воздуха. Сб. «Современные проблемы метеорологии приземного слоя воздуха». Гидрометеоиздат, Л., 1958. 9. Соломатина И. И. Влияние метеорологических условий на характер суточных

колебаний влажности (см. настоящий сб.).

К ВОПРОСУ ОБ ОБРАЗОВАНИИ ИРКУТСКИХ ТУМАНОВ

В статье получено решение задачи о возникновении туманов в Иркутске. Выявлены основные факторы, обусловливающие их появление. Проверка полученного решения на материале наблюдений дала удовлетворительные результаты. Показано, что туманы, связанные с переносом с Ангары, представляют значительную опасность в течение всех суток, а в дневное время преобладают над туманами других типов.

В осенне-зимний период в Иркутске резко возрастает повторяемость туманов, которые часто достигают большой интенсивности и продолжительности. Эти туманы представляют опасность для народного хозяйства, особенно для авиации и транспорта. Они появляются тогда, когда температура воздуха становится значительно ниже температуры водной поверхности Ангары; с увеличением контрастов температуры воздуха и воды интенсивность и продолжительность туманов возрастает. После замерзания Ангары туманы практически исчезают, лишь изредка в утренние часы наблюдаются слабые кратковременные радиационные туманы.

Из-за больших скоростей течения и тесной термической взаимосвязи с оз. Байкал Ангара не замерзает длительное время даже при очень низких температурах воздуха. Наличие незамерзшей водной поверхности при низких температурах воздуха приводит к интенсивному теплои влагообмену этой поверхности с воздухом, благодаря чему долина Ангары до замерзания реки отличается от окружающих районов более теплым и влажным климатом. При достаточно больших контрастах температуры воды и воздуха над рекой образуются туманы испарения. Естественно предположить, что туманы в Иркутске являются речными,

т. е. возникают за счет выноса туманов на город с реки.

Теория туманов испарения построена М. П. Тимофеевым [3], однако, несмотря на то что и туманы испарения и речные туманы связаны с наличием незамерзшей реки на фоне низких температур и что в некоторых случаях эти туманы составляют непрерывную систему, речные туманы нуждаются в специальном теоретическом изучении. Это связано с тем, что при смещении воздуха над сушей наблюдаются другие условия тепло- и влагообмена на подстилающей поверхности. Кроме того, существенно различается интенсивность турбулентного обмена, так как над рекой наблюдаются сверхадиабатические градиенты температуры, а над берегом — инверсионные условия.

Наблюдения показывают, что возможны случаи, когда туман наблюдается только над рекой и только над берегом. Вероятно, одной из причин этого является сочетание адвективных факторов с суточным ходом температуры и влажности. Роль реки в этом случае заключается

в повышении среднесуточных значений температуры и влажности.

Иркутским туманам посвящено большое количество исследований. Это работы А. И. Воейкова, В. Б. Шостаковича, Е. Д. Карамышева,

Н. П. Ладейщикова, П. А. Воронцова, П. Н. Красикова и др.

Если природа туманов над Ангарой достаточно понятна, то относительно механизма возникновения иркутских туманов существуют различные гипотезы. Большинство авторов считает, что они образуются при смещении туманов испарения с реки на берег. Действительно, часто можно проследить визуально распространение туманов с Ангары на Иркутск. При смещении воздуха над берегом происходит существенное изменение температуры и влажности воздуха за счет турбулентного перемешивания и взаимодействия с подстилающей поверхностью.

В ночное время в Иркутске часто отмечаются интенсивные туманы при ветрах с города на реку. По мнению П. А. Воронцова [4], в этом случае туманы также связаны с переносом с Ангары, который осуществляется потоками на высотах. Наличие на высоте потоков с реки при приземных потоках обратного направления подтверждается наблюдениями за уравновешенными шарами-пилотами во время экспедиции ГГО в 1955 г.

Н. П. Ладейщиков считает, что роль реки в данном случае состоит в том, что она создает повышенную температуру и влажность в долине, а туман образуется при конденсации, происходящей при смешении воздуха долины с холодным воздухом, стекающим под влиянием гравитационных сил с водораздела в долину.

Приведенные выше качественные соображения нуждаются в количе-

ственной проверке.

По-видимому, большое значение для образования туманов при ветрах на реку имеет ночное выхолаживание, так как подобные туманы наблюдаются почти исключительно в темное время суток.

Естественно начать теоретическое рассмотрение возникновения реч-

ных туманов со следующей задачи.

Предположим, что ветер дует перпендикулярно незамерзшей реке. Будем считать, что направление и скорость ветра — это известные величины, т. е. исключаем из рассмотрения динамическую часть задачи. Предположим, далее, что до смещения на реку перенос воздуха длительное время осуществлялся над однородной снежной поверхностью, в результате чего профили температуры и влажности в нем близки к равновесным. При решении задачи учтем различие интенсивности турбулентного перемешивания над водной поверхностью и над берегом.

Задача о речных туманах является нестационарной, но из теории трансформации [1] известно, что если нас интересуют особенности трансформации при $t\gg \frac{x}{u}$, где t— время, x— путь воздушной частицы над данной подстилающей поверхностью, то основные закономерности процесса можно найти из стационарной задачи.

Приведем математическую постановку задачи о речных туманах.

Река-

$$u_1 z^n rac{\partial au'}{\partial x'} = rac{\partial}{\partial z} \, k_1' \, z^m \, rac{\partial au'}{\partial z} \,,$$
 $u_1 z^n \, rac{\partial q'}{\partial x'} = rac{\partial}{\partial z} \, k_1' \, z^m \, rac{\partial q'}{\partial z} \,,$ при $z = 0 \, \, \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0' = \mathrm{const}, \, \, q' = q_m(\mathbf{r}_0') \,,$ при $z = \infty \, \, \mathbf{r}'
eq \infty \,, \, q'
eq \infty \,,$ при $x' = 0 \, \, \mathbf{r}' = \mathbf{r}_0 \,, \, q' = q^0 \,.$

Подветренный берег:

$$u_1 z^n \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k_1 z^m \frac{\partial \tau}{\partial z} \,,$$

$$u_1 z^n \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k_1 z^m \frac{\partial q}{\partial z} \,,$$
 при $z = 0 - \rho c_p k_1 z^m \frac{\partial \tau}{\partial z} = R, \quad q = q_{m\pi}(\tau),$ при $z = \infty \ \tau \neq \infty, \quad q \neq \infty,$ при $x = 0 \ \tau = \tau', \quad q = q'.$

Здесь ось ox' расположена вдоль направления ветра; начало ее на кромке наветренного берега; ось ox является продолжением оси ox'; начало ее на кромке подветренного берега; ось z — направлена вертикально вверх; τ — температура в градусах Цельсия, q — абсолютная влажность в миллибарах; индексы нуль и штрих относятся соответственно к наветренному берегу и к реке; τ_0' — температура поверхности воды (около 0°), $q_m(\tau_0')$, $q_{mn}(\tau_0^0)$, $q_{mn}(\tau_0)$ — насыщающие значения абсолютной влажности на подстилающих поверхностях наветренного берега, реки и подветренного берега (над рекой принимается насыщение по отношению к воде, на снегу — по отношению ко льду), u_1 и k_1 — величины, численно равные коэффициенту турбулентности и скорости ветра на высоте 1 м;

$$R = B - V = \text{const}$$

где B — радиационный поток тепла на подстилающей поверхности, V — поток тепла, обусловленный конденсацией водяного пара на подстилающей поверхности.

Аппроксимация профилей коэффициента турбулентности и скорости ветра степенными функциями обычно применяется при исследовании трансформации воздушных масс и, как показано в работе [1], дает хорошие результаты в приземном слое. Там же показано, что при изучении стационарной трансформации можно пренебрегать потоком тепла в почву.

При формулировке граничных условий принято, что потоки тепла к подстилающей поверхности B и V на обоих берегах одинаковы; это вполне оправдано из-за малых масштабов явления. Также предполагается, что интенсивность турбулентного обмена на обоих берегах одинакова.

Представим решение задачи в следующем виде:

$$\tau = \tau^0 + T$$
, $\tau' = \tau^0 + T'$, $q = q^0 + Q$, $q' = q_0 + Q'$,

где T, Q, T',Q' — соответственно отклонения температуры и влажности воздуха над подветренным берегом и рекой от их значений на кромке наветренного берега на той же высоте.

Тогда T, T' и Q, Q' будут удовлетворять следующей системе уравнений и граничных условий:

$$u_{1}z^{n} \frac{\partial T'}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial z} k_{1}' z^{m} \frac{\partial T'}{\partial z},$$

$$u_{1}z^{n} \frac{\partial Q'}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial z} k_{1}' z^{m} \frac{\partial Q'}{\partial z},$$
(1)

при
$$z=0$$
 $T'=T_0'$ $Q'=Q_0'$,
при $z=\infty$ $T'=Q'=0$,
при $x'=0$ $T'=Q'=0$, (2)

$$u_{1}z^{n}\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k_{1}z^{m}\frac{\partial Q}{\partial z}, \qquad (3)$$
 при $z = 0$ $-\rho c_{p}k_{1}z^{m}\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad Q = \mu T,$ при $z = \infty$ $T = Q = 0,$ при $x = 0$ $T = T', \quad Q = Q',$ $\mu' \approx q_{m\pi} \left(\tau^{0}/_{z=0}\right) \left(\frac{17}{235 + \tau^{0}/_{z=0}} + \frac{2.7}{273 + \tau^{0}/_{z=0}}\right), \qquad (4)$

где T_0' и Q_0' — контрасты температуры и влажности при $z\!=\!0$ на кромке

 $u_1 z^n \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k_1 z^m \frac{\partial T}{\partial z}$

наветренного берега.

При решении сформулированной задачи можно было бы сначала найти решение над рекой, а затем использовать его в качестве начального условия при нахождении решения над берегом. Применение такого метода связано со значительными трудностями, так как получаются очень громоздкие выражения. Поэтому используем метод, разработанный М. Е. Берляндом для решения задачи о тепло- и влагообмене при процессах с неоднородным режимом [1].

Подвергнем все функции, содержащиеся в уравнениях, начальных и граничных условиях системы (1) — (4), двойному преобразованию Лапласа по переменным x и x' с помощью формул следующего типа:

$$\overline{T} = \int_0^\infty e^{-px - p'x'} T(x, x, z) dx dx'.$$

Тогда получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dz} k_1 z^m \frac{d\overline{T}}{dz} - u_1 z^n p \overline{T} = -u_1 z^n \overline{T}',$$

$$\frac{d}{dz} k_1 z^m \frac{\overline{dQ}}{dz} - u_1 z^n p \overline{Q} = -u_1 z^n \overline{Q}' \tag{5}$$

при следующих граничных условиях:

при
$$z = 0$$
 a) $k_1 z^m \frac{d\overline{T}}{dz} = 0$, b) $\overline{Q} = \mu' \overline{T}$,

при $z = \infty \overline{T} = \overline{Q} = 0$. (6)

Теперь уже для нахождения решения на подветренном берегу нужно знать не решения над рекой, а их первые преобразования Лапласа по независимой переменной x'. Применяя к (1) — (2) преобразование Лапласа по формулам типа

$$\overline{T}' = \int_0^\infty e^{-p'x'} T'(x', z) dx',$$

получим следующую систему для \overline{T}' :

$$rac{d}{dz}\;k_1'\,z^mrac{d\overline{T}'}{dz}-u_1z^n\,p'\overline{T}'=0,$$
 при $z=0$ $\overline{T}'=rac{T_0'}{p'}$, при $z=\infty$ $\overline{T}'=0.$

Решением этого уравнения является

$$\overline{T}' = \frac{2^{1-\mu}T_0'}{\Gamma(\mu)} \frac{\eta'^{\mu} K_{\mu}(\eta')}{p'}, \tag{7}$$

где

$$\eta' = \frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{u_1 p'}{k'_1}} z^{\frac{2+n-m}{2}},$$

$$\mu = \frac{1-m}{2+n-m}.$$

Аналогично находим

$$\overline{Q}' = \frac{2^{1-\mu} Q_0'}{\Gamma(\mu)} \frac{\eta'^{\mu} K_{\mu}(\eta')}{p'}.$$
 (8)

Будем искать решение (5) в следующем виде:

$$\overline{T} = T^{\circ} + g_T, \ \overline{Q} = Q^{\circ} + g_Q,$$

где T^0 и Q^0 — решения однородных частей уравнений, а g_T и g_Q — частные решения соответствующих неоднородных уравнений.

Принимая во внимание условие затухания на бесконечности, получим:

$$T^{0} = B_{1} \eta^{\mu} K_{\mu} (\eta),$$

 $Q^{0} = B_{2} \eta^{\mu} K_{\mu} (\eta),$

где

$$\eta = \frac{2}{2+n-m} \sqrt{\frac{u_1 p}{k_1}} z^{\frac{2+n-m}{2}}.$$

Для решения неоднородного уравнения (5) введем функцию Грина $G_1(z,\zeta)$. Функция Грина должна удовлетворять соответствующим однородным уравнениям, а при z=0 и $z=\infty$ обращаться в нуль. Положим, что G непрерывна во всем интервале $0\leqslant \zeta\leqslant \infty$, в том числе и при $\zeta=z$, а производная от G_1 по ζ в точке $\zeta=z$ имеет скачок, равный $\frac{1}{k_1z^m}$. Тогда [1]

$$g_{T} = \int_{0}^{\infty} u_{1} \zeta^{n} \overline{T}, 'G(z_{1} \zeta) d\zeta,$$

$$G(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{(\eta s)^{\mu} K_{\mu}(\eta) I_{\mu}(s)}{w} & \zeta < z \\ \frac{(s\eta)^{\mu} K_{\mu}(s) I_{\mu}(\eta)}{w} & \zeta > z, \end{cases}$$

где

$$w = \left(\frac{2+n-m}{2}\right)^{\frac{m+n}{2+n-m}} k_1 \left(\frac{u_1 p}{k_1}\right)^{\frac{1-m}{2+n-m}},$$

$$s = \eta$$

Таким образом,

$$\overline{T} = B_1 \eta^{\mu} K_{\mu}(\eta) + \int_0^{\infty} \frac{u_1 \xi^n \overline{T}'(s\eta)^{\mu} I_{\mu}(\eta) K_{\mu}(s)}{w} d\zeta + \int_0^{z} \frac{u_1 \xi^n \overline{T}_1(s\eta)^{\mu}}{w} \left[K_{\mu}(\eta) I_{\mu}(s) - I_{\mu}(\eta) K_{\mu}(s) \right] d\zeta$$

$$(9)$$

[причем \overline{T}' определяется согласно (7)].

Используя граничное условие (6а), найдем постоянную интегрирования B_1 . Подставляя B_1 в (9), получим

$$\overline{T} = \left[\frac{2^{2-\mu} u_{1}^{1-\mu} T_{0}' \eta^{\mu} K_{\mu} (\eta)}{\Gamma^{2} (\mu) \Gamma (1-\mu) k_{1}^{1-\mu} p' p^{\mu} \left(\frac{2+n-m}{2} \right)^{\frac{m+n}{2+n-m}}} + \frac{2^{1-\mu} u_{1}^{1-\mu} T_{0}' \eta^{\mu} I_{\mu} (\eta)}{\Gamma (\mu) k_{1}^{1-\mu} p' p^{\mu} \left(\frac{2+n-m}{2} \right)^{\frac{m+n}{2+n-m}}} \right] \int_{0}^{\infty} \zeta^{n} s^{\mu} s'^{\mu} K_{\mu} (s') K_{\mu} (s) d\zeta + \frac{2^{1-\mu} T_{0}' u_{1}^{1-\mu}}{\Gamma (\mu) k_{1}^{1-\mu} p' p^{\mu} \left(\frac{2+n-m}{2} \right)^{\frac{m+n}{2+n-m}}} \left[\eta^{\mu} K_{\mu} (\eta) \int_{0}^{z} \zeta^{n} s'^{\mu} K_{\mu} (s') s^{\mu} \times X_{\mu} (s') d\zeta - \eta^{\mu} I_{\mu} (\eta) \int_{0}^{z} \zeta^{n} s'^{\mu} K_{\mu} (s') s^{\mu} K_{\mu} (s') d\zeta \right], \qquad (10)$$

$$s' = \eta' /_{z=\zeta}.$$

Полученное выражение для \overline{T} очень громоздко. Его можно упростить, использовав для преобразования входящих в него интегралов метод Штурма—Лиувилля [1].

Выполняя некоторые несложные, но громоздкие преобразования, получим

$$\int_{0}^{z} \zeta^{n} (\eta \eta')^{\mu} K_{\mu} (\eta) K_{\mu} (\eta') d\zeta = \frac{\left(\frac{2+n-m}{2}\right)^{\frac{m+n}{2+n-m}}}{u_{1} \left(\frac{p'}{k'_{1}} - \frac{p}{k_{1}}\right)} \times \left[\left(\frac{u_{1}p}{k_{1}}\right)^{\frac{1-m}{2+n-m}} \eta'^{\mu} K_{\mu} (\eta') \eta^{\frac{1+n}{2+n-m}} K_{\mu-1} (\eta) - \left(\frac{u_{1}p'}{k'_{1}}\right)^{\frac{1-m}{2+n-m}} \eta^{\mu} K_{\mu} (\eta) \eta'^{\frac{1+n}{2+n-m}} K_{\mu-1} (\eta') - \left(\frac{u_{1}p}{k_{1}}\right)^{\frac{1-m}{2+n-m}} \frac{\pi}{2\sin\pi\mu} + \left(\frac{u_{1}p'}{k_{1}}\right)^{\frac{1-m}{2+n-m}} \frac{\pi}{2\sin\pi\mu} \right].$$

Совершенно аналогично находятся и другие интегралы.

Подставляя полученные выражения в (10) и производя сокращения, найдем

$$\overline{T} = \frac{2^{1-\mu}T_0'}{\Gamma(\mu) k_1^{1-\mu} p' p^{\mu} \left(\frac{p'}{k_1'} - \frac{p}{k_1}\right)} \left[\left(\frac{p'}{k_1'}\right)^{\mu} \eta^{\mu} K_{\mu}(\eta) - \left(\frac{p}{k_1}\right)^{\mu} \eta'^{\mu} K^{\mu}(\eta') \right].$$
(11)

Отсюда получим выражение для $\overline{\overline{T}}/_{z=0}$

$$\overline{\overline{T}}/_{z=0} = \frac{T_0'}{p' p^{\mu}} \left[\frac{p^{\mu} - (ap')^{\mu}}{(p-ap')} \right],$$

где

$$a = \frac{k_1}{k_1'}.$$

Теперь мы можем записать уравнение и граничное условие для $\overline{\overline{Q}}$:

$$\begin{split} \frac{d}{dz} \, k_1 \bar{z}^m \, \frac{d\overline{Q}}{dz} - u_1 \, z^n \, p \overline{\overline{Q}} &= - \, \frac{u_1 \, z^n \, 2^{1-\mu} \, Q_0' \, \eta'^{\mu} \, K^{\mu} \, (\eta')}{\Gamma \, (\mu) \, p'} \, , \\ z &= 0, \qquad \overline{\overline{Q}} = \frac{\mu' \, T_0' \, \left[\, p^{\mu} - (ap')^{\mu} \, \right]}{p - ap'} \, , \\ z &= \infty \, , \, \overline{\overline{Q}} = 0. \end{split}$$

Выполняя преобразования, аналогичные проведенным для температуры, получим

$$\overline{\overline{Q}} = \overline{\overline{Q}}/_{z=0} \frac{\eta^{\mu} K_{\mu} (\eta)}{2^{\mu-1} \Gamma (\mu)} - Q'_{0} \frac{\left[\eta^{\mu} K_{\mu} (\eta) - \eta'^{\mu} K_{\mu} (\eta')\right]}{2^{\mu-1} \Gamma (\mu) p' (p-ap')}. \tag{12}$$

Найдем решение для температуры подстилающей поверхности. $\overline{T}l_{z=0}$ можно представить в виде произведения двух изображений, оригиналы которых можно найти. При этом используются следующие известные соотношения:

$$\frac{1}{p^{\mu} p'} \stackrel{\dots}{\rightleftharpoons} \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)},$$

$$\frac{pF(p) - (ap') F(ap')}{p - ap'} \stackrel{\dots}{\rightleftharpoons} -\frac{1}{a} f'\left(x + \frac{x'}{a}\right),$$

где.

$$F(p) \div f(x)$$
.

Используя теорему свертки и производя интегрирование по x', получим

$$T/_{z=0} = -T_0' \frac{\sin \pi \mu}{\pi} J$$

где

$$J = \int_{0}^{x'} (x - \xi)^{\mu - 1} \left[\left(\xi + \frac{x'}{a} \right)^{-\mu} - \xi^{-\mu} \right] d\xi.$$

Заменой переменных этот несобственный интеграл представим в виде, удобном для его вычисления

$$J=-\int\limits_0^{rac{lpha}{1+lpha}}rac{(1-arphi)^{\mu-1}}{arphi^{\mu}}\,darphi,$$
 где $lpha=rac{x'}{ax}\,.$

Пользуясь биномиальным разложением

$$(1-\varphi)^{\mu-1} = 1 + \frac{(1-\mu)^{\varphi}}{1!} + \frac{(1-\mu)(2-\mu)\varphi^{2}}{2!} + \frac{(1-\mu)(2-\mu)(3-\mu)\varphi^{3}}{3!} + \dots$$

и производя почленное интегрирование, получим

$$J = -\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{1-\mu} \left[\frac{1}{1-\mu} + \frac{1-\mu}{(2-\mu)!!} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) + \frac{(1-\mu)(2-\mu)}{(3-\mu)2!} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^2 + \dots\right].$$
(13)

Выражение (13) позволяет затабулировать интеграл при разных значениях (α) (табл. 1)

$$Q/_{z=0} = \mu'T/_{z=0}. (14)$$

Разлагая входящие в (11) цилиндрические функции в ряд и ограничиваясь первыми двумя слагаемыми, найдем решение, справедливое для малых z и достаточно больших расстояний от берега. После подстановки получается, что вблизи подстилающей поверхности наблюдается изотермия T

$$T \approx T/_{z=0}. (15)$$

Найдем решение для влажности вблизи подстилающей поверхности:

$$\overline{\overline{Q}} = \mu' \overline{\overline{T}} \big|_{z=0} + \frac{\Gamma(1-\mu) u_1^{\mu} z^{(2+n-m) \mu}}{\Gamma(1+\mu) (2+n-m)^{2\mu} k_1^{\mu}} \times (Q_0' - \mu' T_0') \frac{p^{\mu} - (ap')^{\mu}}{p' (p-ap')},$$

$$\frac{1}{p'} \frac{p^{\mu} - (ap')^{\mu}}{p-ap'} \stackrel{\dots}{\dots} \int_0^{x'} f(x, \xi) d\xi,$$

где

$$f(x, x') \stackrel{\dots}{\longrightarrow} \frac{p^{\mu} - (ap')^{\mu}}{p - ap'},$$

$$Q = \mu'T/_{z=0} + \frac{\left(\mu' T_0' - Q_0'\right) z^{(2+n-m)^{\mu}} \left[\left(x + \frac{x'}{a}\right)^{\mu} - x^{-\mu}\right]}{\Gamma(1+\mu) (2+n-m)^{2\mu}}.$$
(16)

Нам нужно найти решение для трансформации воздуха над рекой, чтобы производить расчеты для кромки подветренного берега, где нельзя использовать формулы (15) — (16). Оно запишется в форме

$$\overline{T'} = \frac{T'_0}{P'} - \frac{T'_0 \Gamma (1-\mu) u_1^{\mu} z^{(2+n-m)\mu}}{\Gamma (\mu) \mu (2+n-m)^{2\mu} k_1^{\mu}} p'^{\mu-1},$$

$$T' = T'_0 \left[1 - \frac{\left(\frac{u_1}{k'_1 x'}\right)^{\mu} z^{(2+n-m)\mu}}{\Gamma(1+\mu) (2+n-m)^{2\mu}} \right]. \tag{17}$$

Аналогично находится

$$Q' = Q'_0 \left[1 - \frac{\left(\frac{u_1}{k'_1 x'}\right)^{\mu} z^{(2+n-m)\mu}}{\Gamma(1+\mu) (2+n-m)^{2\mu}} \right]. \tag{18}$$

Для удобства введем некоторые обозначения и выпишем все расчетные формулы в следующем виде:

$$T = T_0' N_2 J,$$

$$Q = \mu' T + N_1 (\mu' T_0' - Q_0') [(\beta + \beta')^{-\mu} - \beta^{-\mu}],$$

$$T' = T_0' [1 - N_1 (\beta')^{-\mu}],$$

$$Q' = Q_0' [1 - N_1 (\beta')^{-\mu}].$$
(19)

Введем обозначения:

$$\begin{split} N_1 &= \frac{z^{1-m}}{\Gamma\left(1+\mu\right)\left(2+n-m\right)^{2\mu}} \,, \quad N_2 &= -\frac{\sin\pi\mu}{\pi} \,, \\ \mu' &= q_0^0 \left(\frac{17}{235+\tau_0^0} + \frac{2,7}{273+\tau_0^0}\right), \end{split}$$

 au_0^0 — температура набегающего потока при $z{=}0,\ q_0^0$ — насыщающая абсолютная влажность при этой температуре J — табулированный интеграл

Таблица 1

α	0,01	0,05	0,10	0,20	0,50	0,80	1,00	2,00	4,00	20,00
J (a)	_0,02	-0,09	-0,16	0,27	-0,53	-0,73	-0,83	-1,21	-1,64	-2,72

На основании полученного решения можно сделать следующие выводы об особенностях изучаемого процесса.

- а) Изменения температуры и влажности зависят от комбинаций $\frac{k_1'x'}{u'}$ и $\frac{k_1x}{u'}$, характеризующих степень трансформации воздуха при его смещении над рекой и снежной поверхностью.
- б) Отклонения температуры на подветренном берегу зависят не от абсолютных величин скорости ветра, а от кривизны его профиля (от n). Физический смысл отсутствия зависимости от u_1 очевиден. При большой скорости ветра воздух над рекой не успевает существенно прогреться, зато он слабее охлаждается при смещении над снежной поверхностью. При слабом ветре воздух сильно прогревается над рекой и сильно охлаждается над снежной поверхностью.

Проведенные нами расчеты показали, что Q также практически не зависит от скорости ветра. Поэтому при расчете речных туманов не требуется знать с большой точностью скорость ветра.

в) Отклонения температуры воздуха над подветренным берегом от

ее значений на кромке наветренного берега изотермичны.

г) В расчетные формулы не входят нетурбулентные потоки тепла к подстилающей поверхности. Это связано с тем, что из-за сравнительно малых масштабов явления принято равенство этих потоков на обоих берегах реки.

В работе [2] на основании анализа опытных данных показано, что при температурах воздуха ниже -10, -15° туман образуется и существует тогда, когда абсолютная влажность воздуха на высоте 2 м становится насыщающей по отношению к гладкой поверхности льда. Использование этой закономерности позволяет нам перейти к расчету речных туманов.

На рис. 1 приведены результаты расчета температуры и точки росы над рекой и снежной поверхностью на высоте 2 м при следующих исход-

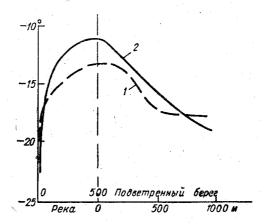


Рис. 1. Изменение температуры и точки росы над рекой и подветренным берегом z=2м.

1 — температура, 2 — точка росы.

ных данных: $k_1 = 0.125$ м^{2-m}/сек., $k_1' = 0.25$ м^{2-m}/сек., $u_1 = 0.5$ м¹⁻ⁿ/сек., $T_0' = 20^\circ$, $\tau^0 = -20^\circ$, $\kappa' = 500$ м, f (относительная влажность набегающего на реку воздуха) = 80 % m = 0.8, n = 0.2.

Из этого рисунка видно, что при данных условиях туман образуется над рекой примерно на расстоянии 100 м от берега и рассеивается на

расстоянии 700 м от подветренного берега реки.

В выполненном выше решении осуществлялась линеаризация граничного условия для влажности на подстилающей поверхности. Можно найти решение для влажности, выбрав на подстилающей поверхности несколько точек и рассчитав в них влажность на основании решения для температур и условия насыщения при z=0 по отношению ко льду.

Аппроксимируя $Q/_{z=0}$ степенной функцией по Ньютону, $Q/_{z=0}$ = $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, подставляя ее в (12) и находя обращение,

получим следующую формулу:

$$Q = Q/_{z=0} - N_1 Q_0' \left[(\beta + \beta')^{-\mu} - \beta^{-\mu} \right] - N_1 \beta^{-\mu} \left[a_0 \frac{n! \Gamma (1-\mu) x^n}{\Gamma (n+1-\mu)} + \frac{a_1 (n-1)! \Gamma (1-\mu) x^{n-1}}{\Gamma (n-\mu)} + \dots + a_n \right].$$

При линеаризации мы заменяем экспоненциальную функцию первыми двумя слагаемыми разложения этой функции, т. е. в большей или

меньшей степени занижаем влажность на подстилающей поверхности подветренного берега, а следовательно, и в воздухе.

Таким образом, линеаризация несколько занижает интенсивность

тумана

Проведенные оценки показывают, что погрешности линеаризации невелики и на расстоянии 1—2 км от берега имеют порядок 10%.

Согласно проведенным расчетам, основными факторами, определяющими появление речных туманов в Иркутске, являются контраст температур набегающего на реку потока и водной поверхности T_0' и относительная влажность воздуха на наветренном берегу f^0 . Первый фактор является главным, так как контрасты температуры могут меняться в весьма широких пределах. Действительно, температура воды зимой равна $0-1^\circ$, а температура воздуха в реальных условиях в осенне-зимнее время в Иркутске может колебаться от положительных значений до -40° и ниже. Этот фактор следует по возможности учитывать вместе со вторым, так как расчеты показывают, что разной влажности набегающего на реку воздуха соответствуют разные критические контрасты температур, ниже которых наблюдается возникновение речных туманов.

В реальных условиях изменчивость относительной влажности гораздо меньше изменчивости контрастов температуры и она не всегда может быть прослежена из-за плохого качества наблюдений над влажностью при низких температурах.

В табл. 2 приводятся минимальные относительные влажности набегающего на реку воздуха, которые приводят к наличию речных туманов на расстоянии 2 км от реки шириной 500 м. При контрастах 15° даже при $f^0 = 100\,\%$ речной туман не наблюдается, а при контрастах 30° для образования тумана достаточно $f^0 = 80\,\%$.

		Таблі	блица 2	
T_0'	15	20	30	
f^{o}	>100	100	80	

Для сравнения приведем аналогичную таблицу для туманов испарения над рекой той же ширины (табл. 3).

			Табл	ица З
T_0'	5	10	45	20
f^{σ} .	100	90	80	40

При постановке задачи предполагалось, что ветер направлен перпендикулярно реке. Полученные выводы можно использовать и тогда, когда направление ветра несколько отклоняется от нормального. В последнем случае следует только учесть, что путь переноса воздушной частицы над водной поверхностью будет больше. Однако с приближением направления ветра к направлению реки возрастают ошибки за счет того, что не учитывается горизонтальное перемешивание.

Проведена предварительная проверка полученных формул на имеющемся фактическом материале. При анализе опытного материала следует иметь в виду, что после постройки Иркутской ГЭС и заполнения водохранилища климатические условия Иркутска и режим речных туманов резко изменились. В последние годы Ангара не замерзала в течение всей зимы и в течение всей зимы наблюдались речные туманы.

- Большую роль в образовании туманов играет в настоящее время

водохранилище, замерзающее в ноябре. До замерзания оно из-за своей большой ширины, по-видимому, играет главную роль в образовании речных туманов. Наблюдения показывают, что на водохранилище парение начинается раньше, чем на Ангаре.

Изменение режима речных туманов в Иркутске в последние годы практически исключает возможность построения в настоящее время чисто эмпирических методов прогноза речных туманов. Поэтому приобретают важное значение теоретические обобщения.

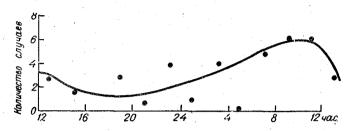


Рис. 2. Распределение в течение суток числа случаев с речными туманами. Иркутск, 1958-59 г.

На рис. 2 приведено изменение в течение суток суммы числа случаев с туманами за ноябрь — февраль 1958—1959 гг. в Иркутске при ветрах, направленных с реки на город. Приведенный на этом рисунке график

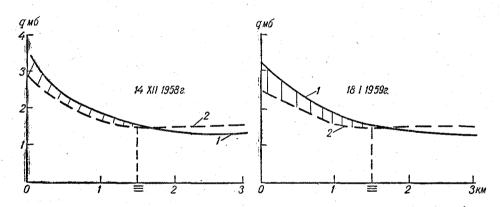


Рис. 3. Примеры расчета туманов. 1—рассчитанная влажность, 2—рассчитанная насыщающая влажность.

указывает на то, что речные туманы представляют опасность в течение всех суток. На основании анализа фактических данных видно, что в светлое время суток все случаи туманов наблюдаются при ветрах с реки. Наличие утреннего максимума речных туманов подтверждает приведенные ранее соображения о роли нестационарности в процессе образования речных туманов.

Проведенные нами расчеты показали, что полученное решение удовлетворительно описывает распространение речных туманов при наличии достаточно устойчивых потоков, направленных с левого берега Ангары на Иркутск. На рис. 3 приведено два примера расчета туманов для Иркутска по фактическим данным. Согласно расчетам, на расстоянии 1,5 км от берега туман должен наблюдаться, что в действительности и было.

Процессы, приводящие к туманам в Иркутске, чрезвычайно сложны и многообразны и не исчерпываются развитой здесь теорией. Большую роль играют орографические факторы, местная циркуляция, городской фактор и т. д. Необходимо продолжать их теоретическое и экспериментальное исследования.

ЛИТЕРАТУРА

- Берлянд М. Е. Предсказание и регулирование теплового режима приземного слоя атмосферы. Гидрометеоиздат, Л.,1956.
 Берлянд М. Е. Об условии образования туманов. Труды ГГО, вып. 94, 1960.
 Тимофеев М. П. Теория адвективных туманов. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6,
- 1955.
- 4. В оронцов П. А. Аэрологические исследования пограничного слоя атмосферы. Гидрометеоиздат, Л., 1960.

РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕПЛОБАЛАНСОВЫХ ИЗМЕРЕНИЙ НАД ПОВЕРХНОСТЬЮ МОРЯ

Статья содержит результаты теплобалансовых наблюдений в Индийском и Тихом океанах, производимых во время перегонных рейсов экспедиционных судов «Воейков» и «Шокальский» в 1959—1960 гг. Приведены среднесуточные значения составляющих теплового баланса и высказаны предположительные объяснения особенностей аномальных величин испарения над морской поверхностью.

Теплобалансовые наблюдения производились над поверхностью морей и океанов во время рейсов экспедиционных судов «Воейков» и «Шокальский» в 1959—1960 гг. из Одессы во Владивосток. В 1959 г. наблюдения велись в сентябре — октябре, а в 1960 г. в июле — августе. Этот опыт теплобалансовых наблюдений следует рассматривать как пробный, а количественные результаты как предварительные. Дело в том, что такие измерения производятся с большими погрешностями, а также неизвестна точная величина шероховатости z₀ морской поверхности в зависимости от степени волнения поверхности моря и скорости ветра.

Градиенты температуры и влажности измерялись электрическими дистанционными психрометрами системы ГГО, установленными на высоте 8 м над поверхностью воды на выносной носовой стреле длиной 8 м, с левого борта верхнего ходового мостика (высота 10 м) и на фокмачте (высота 18 м). На этих же высотах 8, 10 и 18 м были также установлены контактные анемометры системы Чижевского.

Актинометрические измерения производились актинометром и пиранометром, установленными на специальной вышке над палубой верхнего ходового мостика, и пиранометром, альбедометром и балансомером, установленными на конце носовой стрелы на высоте 8 м над поверхностью воды. Актинометрические приборы укреплялись на карданных подвесах.

Все дистанционные приборы, т. е. психрометры, анемометры, актинометр, пиранометры, альбедометр, балансомер и датчик судовой дистанционной станции, были связаны кабельными линиями с регистраторами, установленными в метеорологической лаборатории, где и производились отсчеты и регистрация наблюдений.

Градиентные наблюдения над температурой и влажностью воздуха и скоростью ветра производились по солнечному времени через каждые 1—2 часа круглосуточно с момента выхода из Одессы до прихода во Владивосток, кроме дней с сильными штормами, прохода судна через проливы и времени стоянки в Сингапуре.

Актинометрические наблюдения производились также по солнечному

времени в 6—8 сроков в дневное и в 2—4 срока в ночное время.

Все работы выполнялись штатом сотрудников из четырех человек. Из них трое вели метеорологические и градиентные наблюдения и один — актинометрические наблюдения в дневное время.

Обработка данных и расчет составляющих теплового баланса произ-

водились тем же составом в свободное от наблюдений время.

Результаты измерений

В Черном, Эгейском и Средиземном морях отмечалась значительная прозрачность воды, ее низкая температура, малая величина (порядка 5—7%), и вследствие перечисленных большая величина радиационного баланса. Вначале шая величина радиационного баланса (порядка 1,8—2,0 кал/см² мин.) казалась ошибкой наблюдений, но после дополнительной поверки выяснилось, что показания прибора правильны. Сравнительно низкая температура воды и малая скорость ветра обусловили в Черном море и малую величину (порядка 0,5 мм/сутки) испарения. С приближением к югу величина испарения увеличилась до 3,0-3,5 мм/сутки.

Следует полагать, что основная часть притока радиации расходовалась на нагревание воды, поскольку величины P и LE сравнительно

невелики (табл. 1).

Следует отметить, что в течение рейса «Воейкова» в 1959 г. испарение, наблюдаемое на Красном море, было приблизительно в 2—2,5 раза больше, чем в 1960 г., несмотря на то, что «Воейков» проходил на два месяца позже (в сентябре). Объяснить это возможно большими скоростями ветра и более высокой температурой воды в прошлом году.

В 1959 г. на Красном море вследствие большого испарения наблюдалась значительная температурная инверсия в приводном слое воздуха, а также значительная соленость воды, в то время как в 1960 г. температурной инверсии и пониженной солености воды не отмечалось

вследствие малого испарения.

При прохождении Аденского залива никаких существенных изменений в метеорологических условиях не произошло, но вследствие падения температуры поверхности воды величина испарения несколько снизилась и дошла до 4 мм/сутки, в то время как в 1959 г. падение температуры воды было более резкое, что вызвало конденсацию избытка паров.

12, 13 и 14/VII наблюдения не производились вследствие сильного шторма, во время которого из предосторожности было снято оборудование со всех стрел. В экваториальной зоне Индийского океана (±5° широты) наблюдалась значительная облачность, сильные ветры и отдельные дни осадки. Средняя за сутки величина наблюденного рациационного баланса во время прохождения Индийского океана была равна 277 кал. при максимуме 420 кал. и минимуме 143 кал. Турбулентный поток тепла в основном был направлен к водной поверхности, отмечалась почти постоянная температурная инверсия приводного слоя. Несмотря на эти неблагоприятные условия, наблюдалось достаточно гильное испарение, которое составило в среднем 7,4 мм (максимум 13,4 мм, минимум 4,4 мм в сутки).

На первый взгляд кажутся странными и невозможными такие вепичины испарения, если их сравнить с испарением с орошаемых полей, де абсолютная влажность воздуха значительно выше и существенно больше испаряющая поверхность, так как в этих условиях испарение происходит не только с поверхности земли, но также и с большой поверхности растений. Это объясняется тем, что испарение происходил не только с поверхности моря. При сильном ветре (его величина была равна у поверхности воды 6—9 м/сек.) возникает значительная волна Резкий ветер срывает верхушки волн и разбивает их в мелкие брызги и водяную пыль, которые поднимаются на высоту не менее 20 м. Образование мелких водяных брызг в слое 0—20 м и более над водной по верхностью создает благоприятные условия для испарения не только с поверхности моря, но и во всем объеме воздуха, насыщенного водяными брызгами. Этим же объясняются и постоянные температурные инверсии в приводном слое во время сильных волнений.

Таблица 1 Суточные суммы составляющих теплового баланса (кал/см²)

Дата	U_1	T_w	LE	P	Б	В	<i>М</i> мм/сутки	Место нахождения судна
30/VI 2/VII 3/VII 6/VII 7/VII 8/VII 9/VII 10/VII 15/VII 16/VII 17/VII 18/VII 22/VII 23/VII 24/VII 25/VII 27/VII 1/VIII 3/VIII 6/VIII 5/VIII 6/VIII 1/VIII 11/VIII 11/VIII 11/VIII 11/VIII 11/VIII 11/VIII 11/VIII	2,4,6,3,5,7,8,6,6,1,1,7,5,6,6,0,8,1,3,0,7,2,9,7,7,6,6,3,6,5,5,5,1,0,4,2,2,2,2	19,5 21,6 23,7 26,5 29,0 30,6 30,6 32,2 29,6 28,4 28,0 27,8 28,2 27,9 27,9 27,9 27,9 27,9 27,9 29,3 28,1 27,7 27,2 38,8 28,8 28,8 28,8 28,8 28,8 28,8 28	-32 -186 -218 -218 -265 -204 -285 -342 -263 -223 -438 -307 -460 -446 -806 -640 -398 -420 -266 -272 -480 -308 -575 -420 -354 -495 -610 -340 -377 -400 -510 446 -476 -43,5 -586 -452 -467	42 -62 25 147 32 171 62 167 59 25 -58 -64 -71 -7 10 -8 29 -19 -141 9 -10 -32 -14 -7 -8 -11 22 14 -7 -8 -14 -7 -8 -14 -7 -7 -7 -14 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7 -7	890 1050 725 360 460 247 306 338 384 410 420 160 325 265 274 245 227 282 143 375 197 465 390 660 444 430 490 410 102 0 62 530 465	-900 -802 -532 -242 -288 -133 -26 -242 -211 -5 -128 -95 -334 -545 -446 -131 -165 -47 -39 -396 -48 -519 -64 -19 -285 -252 -306 -260 -22 -21 -14 -360 -513 -76 -103 -2	0,43 3,16 3,16 4,34 4,7 5,7 7,5 13,9 6,0 4,4 5,7 10,6 7,4 4,5 8,7 10,6 10,2 10,2 10,2 10,2 10,2 10,2 10,2 10,2	Черное море Эгейское Средиземное Красное То же Аденский залив То же Индийский океан То же "" "" "" "" "" "" "" "" "" "" "" "" "

Примечание. М — испарение в мм/сутки.

В Яванском и Целебесском морях, а также в Макассарском про ливе наблюдалась ясная погода, значительная величина радиационного баланса (более 400 кал/сутки) и сравнительно высокая темпера

тура водной поверхности, малая величина турбулентного притока тепла (порядка 10—20 кал/сутки) и величина испарения, равная в среднем

6,8 мм/сутки.

С выходом в Тихий океан (на 6° с. ш.) судно начало приближаться к термическому экватору (который в то время находился на 17° с. ш.), к области прохождения тайфунов. В связи с этим постепенно возрастала температура воды и воздуха и усиливался ветер. Несмотря на повышение облачности и понижение величины радиационного баланса, наблюдалось значительное испарение, доходящее почти до 10 мм в сутки при средней величине с 8 по 14/VIII 8,0 мм в сутки. Большая величина испарения объясняется теми же причинами — объемным испарением в большом приводном слое.

Из табл. 1 следует, что суточные величины испарения не зависят от суточных значений радиационного баланса и тем более от турбулент-

ного теплообмена, поскольку величина Р близка к нулю.

Поверхность океанов и морей является хорошим аккумулятором гепла и, в отличие от суши, приток радиации распространяется на значительную толщину водяного слоя. Поверхность воды почти всегда находится в волнении, благодаря чему верхний 15—20-м слой постоянно перемешивается, выравнивая распространение тепла по всей толще этого слоя. По этим причинам кратковременные (2—3 суток) величины испарений становятся независимыми от величины солнечной радиации за такие же периоды.

Величина испарения не зависит также и от температуры поверхности воды; в особенности это видно за период с 15/VII по 14/VIII, т. е. за время перехода судна по Индийскому и Тихому океанам и прилежащим

к ним морям, омывающим Индонезию.

Испарение в этой зоне регулируется только скоростью ветра. Суточное испарение хорошо согласуется со среднесуточной скоростью ветра. С повышением ее увеличивается и вынос влаги в более верхние слои атмосферы. Величина турбулентного переноса тепла не меняется существенно вследствие малых величин градиентов температуры, еще более уменьшающихся с повышением скорости ветра. В связи с изложенным естественно было ожидать что эти особенности морской поверхности отразятся также и на суточном ходе составляющих теплового баланса.

С целью выяснения особенностей суточных ходов составляющих теплового баланса для моря все данные обрабатывались по срокам наблюдений и была составлена таблица средних величин составляющих теплового баланса (в кал/см² сутки) по срокам наблюдений за весь пе-

риод следования корабля от Одессы до Владивостока (табл. 2).

По материалам суточных измерений видно, что суточный ход элементов P и LE невозможно обнаружить при четко выраженном суточном ходе B, а вследствие этого и B, что полностью подтверждает сказанное выше. Отсутствие суточного хода турбулентного переноса тепла и испарения в открытом море вдали от берегов ($800-1000~{\rm km}$) объясняется тем, что температура воздуха, подстилающей поверхности и влажность воздуха в приводном слое очень мало изменяются в течение суток. Турбулентный перенос тепла близок к нулю, а испарение близко к постоянной величине. В течение всех часов «средних суток» расход тепла на испарение колеблется в пределах от 330 до 430 кал/см² сутки и в среднем равен $390\pm25~{\rm kan/cm^2}$ сутки.

Кроме теплобалансовых наблюдений, в течение рейса проводилась значительная работа по сравнению показаний приборов и оценке влияния судна на результаты измерения. Н. А. Тимофеевым предложена новая методика проведения таких работ. Судно совершает движение под

различными углами относительно направления ветра (по 20—30 мин. на каждый галс), а положения дрейфа под определенным углом к ветру в начале и конце цикла этих работ, продолжающихся 2—2,5 часа, являлись контрольными точками.

Таблица 2

Время суток (час.)	LE	. P.	Б	В
0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24	-370 -360 -400 -430 -430 -390 -380 -420 -360 -330 -420 -400 -370	-6 -7 -10 -14 -9 -14 14 28 14 28 10 -7 6	-40 -40 -30 0 15 720 1070 1050 640 190 15 0 -40	+420 +410 +440 +440 +420 -320 -700 -660 -290 +110 400 410

Наблюдения в дрейфе позволяли оценивать ход метеоэлементов в течение срока наблюдений. Это давало возможность получить отклонение от нормального хода метеоэлементов во времени для всех направлений ветра относительно судна. Если бы эти измерения сопровождались одновременными надежными измерениями с плавающей мачты, то такая методика дала бы возможность снять подробные полярные диаграммы ошибок за счет влияния судна для любого времени суток и направления ветра. Такие наблюдения проводились для дня и ночи.

Вкратце итоги этих работ следующие.

Показания анемометров изменяются в значительной мере в зависимости от направления ветра. Наиболее устойчивые показания дают анемометры, расположенные значительно выше надстроек судна. Ночью показания всех психрометров и термометров близки друг к другу, из чего следует, что тепловое влияние судна незначительно.

В дневных условиях при солнечном освещении показания термометров очень расходятся. За день солнце сильно нагревает поверхность судна, которая начинает излучать тепло, поэтому прибор, попавший в поток тепла судна, дает завышенные показания. В особенности это было заметно по ртутным термометрам, снабженным двойной конусной защитой, на показания которых оказывала влияние не только тепловая радиация судна, но также и прямая солнечная радиация. По этим термометрам можно было производить измерения ночью, а днем только в случае, если термометр находился с подветренной стороны и в тени.

Дистанционный психрометр, расположенный на верхней части фокмачты, давал надежные показания, за исключением тех моментов, когда он находился в потоке тепла трубы судна. Такой же психрометр, вынесенный на семиметровую носовую стрелу, также надежно работал днем при всех ветрах, направленных с носа судна в пределах $\pm 90^\circ$, а ночью при всех направлениях.

В заключение следует отметить, что градиентные измерения на судне чрезвычайно затруднены. Дело в том, что наблюдаемые градиенты температуры и зачастую влажности имеют небольшие величины, а влияние

судна в летние дни может быть очень большим в силу его собственной тепловой радиации. Поэтому следует ожидать больших ошибок в таких

измерениях.

Для устранения ошибок необходимо придерживаться следующего основного правила — производить измерения лучше всего тогда, когда ветер направлен на прибор, находящийся вдали от судна и его надстроек. Располагать приборы так, чтобы они находились в относительно ненарушенных слоях воздуха. Такие места на судне следующие: верх фок-или грот-мачта, носовая стрела при направлении потока воздуха в пределах $0\pm90^{\circ}$ относительно носа; если есть возможность, то следует установить стрелу на корме с выносом 7—8 м, тогда для кормовой стрелы будет выгодным направление ветра $180\pm90^{\circ}$. Если ветер с носа, то рекомендуется производить наблюдения с помощью психрометров, расположенных на носовой стреле и фок-мачте. Если ветер с кормы, то следует пользоваться психрометрами кормовой стрелы и грот-мачты.

Совершенно необходимо организовать измерения распределения температуры, влажности и скорости ветра приборами, установленными вне судна— на буйке, плавающей мачте или небольшом рифе, чтобы иметь возможность оценить ошибки в измерениях за счет влияния судна.

При длительных дрейфах следует использовать плавучую мачту с установкой на ней указанных приборов, а также балансомера, пиранометра и альбедометра.

измерение скорости ветра на кораблях

Статья содержит результаты анемометрической съемки судна анемометрами, установленными в шести различных точках корабля, и одним анемометром на буйке в 100 м от корабля. Дается методика обработки данных и выводы о репрезентативности измерения скорости ветра.

Как известно, измерение скорости и направления ветра на кораблях производится главным образом ручными анемометрами и реже анеморумбометрами судовой дистанционной станции (СДС), которая в последнее время вводится в практику судовых измерений.

Очень важно знать, с какой точностью измеряется скорость ветра в зависимости от выбора места установки анемометра и направления

ветра относительно судна.

Очевидно, что корпус судна и его надстройки в какой-то мере оказывают влияние на показания анемометров. Поэтому выбор места установки анемометра имеет существенное значение. Если не учитывать этого обстоятельства, то можно получить совершенно несопоставимые данные по скорости и направлению ветра, измеренным на нескольких судах, находящихся поблизости друг от друга. Такие материалы наблюдений вызовут затруднение при составлении и анализе синоптической карты. Кроме того, размещение анемометров на кораблях различных типов производится на разных высотах и обычно чем выше корабль, тем выше и расположены анемометры или СДС. Различие высот измерения скорости ветра также может внести расхождения в результаты наблюдений.

С целью выяснения указанных обстоятельств и была поставлена

настоящая работа.

Наблюдения проводились на экспедиционных судах «Воейков» в 1959 г. и «Шокальский» в 1960 г. во время их перегона из Одессы во

Владивосток через Индийский и Тихий океаны.

Скорость ветра измерялась контактными анемометрами системы Чижевского, установленными в различных точках корабля в следующем порядке: анемометр № 1 на носовой стреле на расстоянии 5 м впереди носа на высоте 8 м от воды, анемометр № 2 на конце градиентной стрелы на высоте 8 м с левого борта носовой части судна в 4 м от борта, анемометр № 3 на высоте 18 м от воды на рее фок-мачты, анемометр № 4 на высоте 10 м с левого борта верхнего ходового мостика в 1,5 м от борта и на 1,8 м выше верхней палубы, анемометр № 5 с правого борта так же, как и № 4, но в 2,5 м от борта, анемометр № 6 на рее грот-мачты на высоте 22 м над водой и приблизительно в 9—10 м

над палубными надстройками. Эпизодически производились измерения также и анемометром № 7, установленным на высоте 1 м над поверхностью воды на буйке, плававшем в 100 м от судна с наветренной стороны, когда судно находилось в дрейфе.

Показания всех анемометров регистрировались счетчиками электри-

ческих импульсов десятиминутными сериями.

В 1960 г. сравнивались только показания анемометров № 1 и 3, поскольку общая картина была уже ясна на основании анемометрической съемки в 1959 г. Результаты наблюдений «кажущейся» скорости и направления ветра в зависимости от направления ветра относительно диаметральной линии судна обрабатывались, по следующим градациям: 331—30, 31—90, 91—150, 151—210, 211—270 и 271—330. В результате были получены средние направления кажущейся скорости ветра: 0, 60, 120, 180, 240 и 300° (нос судна 0°, правый борт 90°, корма 180° и левый борт 270°).

В табл. 1 приводятся величины средних скоростей ветра всех направ-

лений.

Таблица 1

Направление ветра	Номера анемометров						
относительно курса судна (град.)	1	2	3	4	5	6	
0 60 120 180 240 300	5,9 4,6 4,6 2,2 — 4,8	6,4 4,2 1,6 1,1 2,6 4,1	6,5 5,0 3,7 3,1 5,7	6,9 5,1 2,3 1,7 2,5 5,9	6,7 1,6 4,9 3,4 3,1 3,9	6,8 5,0 5,0 3,7 3,2 5,3	

Примечание. По анемометру № 3 наблюдения велись с перерывами.

Кажущимися направлением и скоростью ветра называются те направления и скорости, которые явились результатом сложения скорости истинного потока воздуха со скоростью перемещения судна относительно него.

Чтобы иметь возможность сравнивать показания всех анемометров, необходимо их показания привести к одной высоте.

Для этого использовалась формула логарифмического закона изменения скорости ветра с высотой

$$\overline{u}_{22} = \overline{u}_i \frac{\ln \frac{z_{22}}{z_0}}{\ln \frac{z_i}{z_0}},$$

где u_{22} — средняя скорость ветра, измеренная на любой высоте и приведенная к высоте 22 м, $\overline{u_i}$ — средняя скорость на любой высоте, z_i — высоты, на которых установлены анемометры, z_0 — параметр шероховатости равный 0,5 см.

Вычисленные коэффициенты приведения для высот 8, 10 и 18 м оказались соответственно равными 1,125, 1,09 и 1,02.

Полученные данные представлены в табл. 2.

Направление ветра	Номера анемометров						
относительно курса судна (град.)	1	2	3	4	5	6	
0 60 120 180 240 300	6,0 5,2 5,2 3,1 - 5,4	6,6 4,6 1,8 1,4 2,9 4,6	6,6 5,6 - 3,9 3,1 5,8	7,1 5,7 2,6 2,3 2,7 6,5	6,8 1,8 5,4 5,9 3,4 4,3	6,8 5,0 6,0 3,7 3,2 5,3	

Для сравнения результаты измерения всех анемометров целесообразно выразить в относительных единицах, для чего показания анемометров № 1, 2, 3, 4 и 5 делились на показания анемометра № 6. Результаты подсчета приведены в табл. 3.

Таблица З

Направление ветра	Номера анемометров						
относительно курса судна (град.)	1	11	2	3	4	5	
0 60 120 180 240 300	0,88 1,04 1,04 0,84 - 1,02	0,91 1,05 1,06 0,69 0,98 1,00	0,97 0,92 0,36 0,38 0,91 0,87	0,97 1,12 1,05 0,97 1,09	1,04 1,14 0,52 0,62 0,85 1,23	1,00 0,36 1,08 1,60 1,06 0,81	

По данным табл. 3 легко найти величины отклонений в процентах кажущихся скоростей ветра по показаниям всех анемометров по сравнению с показаниями анемометра № 6 (табл. 4).

анемометра № 6 (табл. 4). Таблица 4

Отклонения скорости ветра (%)								
Направление ветра	Номера анемометров							
относительно курса судна (град.)	. 1	11	2	3	4	5		
0 60 120 180 240 300	12 —4 —4 16 —	$ \begin{array}{c} 9 \\ -5 \\ -6 \\ 31 \\ 2 \\ 0 \end{array} $	3 8 64 62 9 13	3 -12 - -5 -3 -9	-4 -14 48 38 15 -23	0 64 8 60 6 21		

¹ Анемометр был установлен на носовой стреле, во время перегона э/с "Шокальский" в 1960 г. из Одессы во Владивосток.

Кроме описанных выше опытов, было также проведено 18 десятиминутных серий одновременных измерений скорости ветра на гротмачте (№ 6) и буйке, удаленном от судна на 100 м с наветренной стороны судна. Анемометр устанавливался на буйке высотой 1 м над ур. м.

Все измерения по этому прибору производились во время дрейфа судна.

Расчеты скорости ветра, произведенные способом, аналогичным описанному выше, показали, что скорости ветра, измеренные на грот-мачте и буйке, совпадают между собой с точностью до 2—3%. Из этого следует, что пересчет показаний анемометров для приведения их к скоростям какой-либо одной высоты по логарифмическому закону не вызывает сомнений. Из анализа табл. 4 можно сделать несколько выводов.

1. Показания анемометра, установленного на фок-мачте, близки к истинным значениям, и отклонения в его показаниях находятся в пре-

делах $\pm 10\%$ при средней величине, равной -4% .

2. Анемометр № 1, установленный на носовой стреле, позволяет достаточно точно измерять скорость ветра при всех направлениях, кроме направлений от 140 до 220°, где наблюдается занижение скорости от 10

до 30% вследствие экранировки анемометра корпусом судна.

3. Анемометр № 2, расположенный на стреле с левого борта носовой части судна, может обеспечить измерение скорости ветра с достаточной точностью только в пределах направлений 0—60° и 250—360°. При направлениях от 70 до 240° скорость ветра занижается от 20 до 70%. Асимметричность кривой определяется асимметричностью расположения стрелы относительно корпуса судна. Местоположение анемометра № 2, где предполагалось проводить градиентные измерения было настолько неудачным, что при строительстве э/с «Шокальский» и он перенесен на конец носовой стрелы.

4. Показания анемометров № 4 и 5, расположенных вблизи от бортов верхнего ходового мостика (справа и слева), настолько сильно отличаются от показаний верхних анемометров, что пользоваться ими не представляется возможным. Колебания в показаниях анемометра № 4 составляют от -20 до +50%, а анемометра № 5- от -60 до +60%. Отсюда следует, что измерения ручным анемометром с верхнего ходо-

вого мостика производить нельзя.

Кривые 4 и 5 взаимно симметричны, что легко объясняется симметричностью расположения анемометров, которые при ветрах, скользящих вдоль борта, завышают показания, а при экранировке их надстройками сильно занижают.

Анемометр № 5 при ветрах от 120 до 240° дает завышенное значение, что можно объяснить несколько большим выносом его за пределы борта по сравнению с анемометром № 4.

Основные выводы

1. Данные измерений скорости ветра ручными анемометрами вблизи борта судна и его надстроек имеют большие погрешности, доходящие до 50—60% истинных скоростей. Измерение этими анемометрами с площадок мачт, вероятно, будет более точным, но этот вопрос требует дополнительной проверки.

2. Анемометры, установленные на носовой или кормовой стрелах, могут обеспечить достаточную точность измерения скорости ветра, но

не могут использоваться при сильном волнении.

3. Дистанционные (контактные) анемометры, установленные на верхних реях фок- или грот-мачтах, обеспечивают достаточную точность измерения скорости ветра.

4. Необходимо изучить влияние качки на показания анемометров в зависимости от направления ветра, волнения, а также амплитуды и

периода колебаний судна.

Работа выполнялась при участии сотрудника Государственного океанологического института Н. П. Гоптарева во время перегона э/с «Воейков» в 1959 г. и сотрудника ДВ НИГМИ Н. А. Тимофеева во время перегона э/с «Шокальский» в 1960 г.

О РАСЧЕТЕ ГЛУБИНЫ ТРЕНИЯ В МОРЕ

В настоящей статье на основании решения совместной системы уравнений для пограничного слоя атмосферы и верхних слоев моря определяется глубина трения. Приводится номограмма для практических расчетов глубины трения по заданным внешним параметрам — скорости геострофического ветра, температуре на высоте пограничного слоя атмосферы и распределению плотности в море.

Изучение распространения в глубину ветровых течений представляет большой интерес. В настоящее время выяснена общая закономерность изменения скоростей течений с глубиной: на поверхности основная роль принадлежит дрейфовым течениям, тогда как ниже так называемой глубины трения преобладают градиентно-конвекционные составляющие скорости.

Понятие «глубины трения» вошло в океанографическую литературу после известной работы Экмана [3]. Согласно Экману, глубина трения D определяется глубиной, на которой величина вектора скорости течения составляет $e^{-\pi} \approx 0.043$ от скорости поверхностных течений.

Расчет глубины трения, по Экману,

$$D = \pi \sqrt{\frac{\mu}{\tilde{\rho} \omega_z}}$$

(где $\tilde{\rho}$ — плотность морской воды, $\omega_z = \omega \sin \phi$ — проекция угловой скорости вращения земли) требует задания величины коэффициента турбулентной вязкости μ , что значительно затрудняет применение этой формулы. Последнее обстоятельство связано прежде всего с тем, что при подобных расчетах приходится пользоваться (часто без достаточных на то оснований) эмпирическими зависимостями между коэффициентом μ и скоростью ветра.

В выражение для глубины трения [2]

$$D = \frac{\pi \tau}{\sqrt{2} \tilde{\rho} \omega_z u_s}$$

входят две трудноопределяемые величины — скорость поверхностного дрейфового течения и тангенциальное напряжение ветра т. Известно много попыток рассчитать тангенциальное напряжение ветра, однако выводы о зависимости коэффициента трения от скорости ветра являются весьма неопределенными и зачастую противоречивыми. Сложность применения т в расчетах глубины трения усугубляется тем, что в настоящее время остаются не выясненными окончательно вопросы о природе трения воздушного потока о взволнованную морскую поверхность и за-

висимости коэффициента трения от стратификации атмосферы. Измерения же поверхностных дрейфовых течений практически трудно осуществимы.

Представляется интересным найти такое выражение для глубины трения, в которое входили бы только величины, легко определяемые на основании стандартных гидрометеорологических наблюдений в море. Для этого решим замкнутую систему уравнений при стационарном состоянии пограничного слоя атмосферы и слоя трения в море:

$$k \frac{\partial^{2} u}{\partial z^{2}} + 2 \omega_{z} v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$k \frac{\partial^{2} v}{\partial z^{2}} - 2 \omega_{z} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$
(1)

$$\int_{H}^{H} \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^{2} + \left(\frac{dv}{dz} \right)^{2} \right] dz - \int_{0}^{H} \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_{a} \right) dz = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2T}{dz^2} = 0, (3)$$

$$\frac{d}{dz}(u^2 + v^2)|_{z=H} = 0, (4)$$

$$\tilde{k} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial z^2} + 2 \omega_z \tilde{v} = 0$$

$$\tilde{k} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial z^2} - 2 \omega_z \tilde{u} = 0$$
(5)

$$\int_{0}^{D} \left[\left(\frac{d\tilde{u}}{dz} \right)^{2} + \left(\frac{d\tilde{v}}{dz} \right)^{2} \right] dz - \int_{0}^{D} \frac{g}{\tilde{\rho}} \frac{d\tilde{\rho}}{dz} dz = 0, \tag{6}$$

где k и \tilde{k} — постоянные по высоте коэффициенты турбулентности в пограничном слое атмосферы и слое трения в море, u, v, \tilde{u} , \tilde{v} — соответственно составляющие векторов скорости ветра и скорости дрейфового течения, p — давление атмосферы, T — температура воздуха в абсолютной шкале, ρ — плотность морской воды, H — высота пограничного слоя атмосферы, D — глубина трения в море.

Поместим начало координат на поверхности моря, положительную полуось z направим вертикально вверх, отрицательную — вниз, тогда

граничные условия запишутся следующим образом:

$$z = 0, \ u = \tilde{u} = u_0, \ v = \tilde{v} = v_0,$$
 (7)

$$k\rho \frac{du}{dz}\Big|_{z=+0} = \tilde{k} \tilde{\rho}_0 \frac{d\tilde{u}}{dz}\Big|_{z=-0}$$

$$k\rho \frac{dv}{dz}\Big|_{z=+0} = \tilde{k} \tilde{\rho}_0 \frac{d\tilde{v}}{dz}\Big|_{z=-0}$$
(8)

$$z = \infty, \ u \to V_x, \ v \to V_y^*, \tag{9}$$

$$z = -\infty, \ \tilde{u} = \tilde{v} = 0, \tag{10}$$

$$z = D, \tilde{\alpha}D = \pi, \tag{11}$$

$$T/_{z=0} = T_0, \qquad T/_{z=H} = T_H,$$
 (12)

$$\tilde{\rho}/_{z=0} = \tilde{\rho}_0, \qquad \tilde{\rho}/_{z=D} = \tilde{\rho}_D.$$
 (13)

Здесь u_0 , v_0 — составляющие вектора скорости поверхностного дрейфового течения $c_0 = \sqrt{u_0^2 + v_0^2}$, V_x , V_y — составляющие вектора скорости геострофического ветра $V_g = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$, c — вектор скорости дрейфового течения.

Решив уравнения (1) и (5) при граничных условиях (7)—(10), получим:

$$u = V_{x} + e^{-\alpha z} \left[(u_{0} - V_{x}) \cos \alpha z + (v_{0} - V_{y}) \sin \alpha z \right]$$

$$v = V_{y} + e^{-\alpha z} \left[(v_{0} - V_{y}) \cos \alpha z - (u_{0} - V_{x}) \sin \alpha z \right]$$
(14)

$$\widetilde{u} = e^{\widetilde{\alpha}z} \left(u_0 \cos \widetilde{\alpha}z - v_0 \sin \widetilde{\alpha}z \right)
\widetilde{v} = e^{\widetilde{\alpha}z} \left(v_0 \cos \widetilde{\alpha}z + u_0 \sin \widetilde{\alpha}z \right)$$
(15)

где
$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega_z}{k}}$$
, $\tilde{\alpha} = \sqrt{\frac{\omega_z}{\tilde{\iota}}}$.

Воспользовавшись условием склейки (8), находим:

$$u_0 = \frac{\rho \sqrt{k} V_x}{\widetilde{\rho}_0 \sqrt{\widetilde{k}} + \rho \sqrt{k}}, \quad v_0 = \frac{\rho \sqrt{k} V_y}{\widetilde{\rho}_0 \sqrt{\widetilde{k}} + \rho \sqrt{k}}, \quad (16)$$

откуда

$$c_0 = \frac{\rho \sqrt{k} V_y}{\widetilde{\rho}_0 \sqrt{\widetilde{k}} + \rho \sqrt{k}}.$$

Оценим величину множителя

$$\frac{\rho \sqrt{k}}{\tilde{\rho}_0 \sqrt{\tilde{k}} + \rho \sqrt{k}}.$$

Принимая:

$$\rho = 1,25 \cdot 10^{-3} \ e/cm^3$$
, $k = 10^5 \ cm^2/ce\kappa$., $\rho_0 = 1,027 \ e/cm^3$, $k = 2 \cdot 10^2 \ cm^2/ce\kappa$.,

получий

$$\frac{\rho \sqrt{k}}{\tilde{\epsilon}_0 \sqrt{\tilde{k}} + \rho \sqrt{k}} = 0,008.$$

Следовательно,

$$u_0 \sim 0.01 V_x$$
, $v_0 \sim 0.01 V_y$.

Пренебрегая членами второго порядка малости в выражениях для составляющих вектора скорости ветра, уравнения (14) можно переписать:

$$u = V_x - e^{-\alpha z} (V_x \cos \alpha z + V_y \sin \alpha z)$$

$$v = V_y - e^{-\alpha z} (V_y \cos \alpha z - V_x \sin \alpha z)$$
(17)

Совместное решение системы уравнений (2), (3), (4) с учетом условий (12) и (17) приводит к следующим выражениям высоты пограничного слоя H и коэффициента турбулентности k:

$$H = -\frac{(T_H - T_0)}{2\gamma_a} + \left[\frac{(T_H - T_0)^2}{4\gamma_a^2} + \frac{2,28(V_x^2 + V_y^2)}{\frac{g}{T}\gamma_a}\right]^{\frac{1}{2}},$$
 (18)

$$k = \frac{\omega_z}{5.2} H^2. \tag{19}$$

Коэффициент турбулентности, осредненный в слое трения, можно определить по (6) и (15) при условии (13) и (16). Отбросив члены второго порядка малости, получим

$$\tilde{k} = \rho \sqrt{\frac{\omega_z k \left(V_x^2 + V_y^2\right)}{\pi g \tilde{\rho}_0 \frac{d \tilde{\rho}}{dz}}}.$$
 (20)

В практических расчетах удобно пользоваться не плотностью морской воды $\tilde{\rho}$, а условной плотностью σ_t , тогда

$$\tilde{k} = \rho \sqrt{\frac{\omega_z \cdot k \left(V_x^2 + V_y^2\right)}{0,001 \, \pi g \left(1 + \sigma_t \cdot 10^{-3}\right) \frac{d\sigma_t}{dz}}}.$$
(21)

В этом выражении $\sigma_t \cdot 10^{-3} \ll 1$, следовательно, (21) можно переписать

$$\widetilde{k} = \rho \sqrt{\frac{\omega_z k \left(V_x^2 + V_y^2\right)}{0,001 \pi g \left(\frac{d\sigma_t}{dz}\right)}}.$$
(22)

- Но, так как

$$D = \frac{\pi}{\tilde{\alpha}},$$

то глубина трения определяется величиной

$$D = \frac{\pi \sqrt{\rho}}{(5.2 \cdot 10^{-3} \pi g)^{1/4}} \sqrt{\frac{HV_g}{\left(\frac{d\sigma_t}{dz}\right)^{1/2}}}.$$
 (23)

Подставляя в (23) значения постоянных, получаем

$$D = 0,055 \sqrt{\frac{HV_g}{\left(\frac{d\sigma_t}{dz}\right)^{1/2}}}.$$
 (24)

Из (24) видно, что глубина трения D зависит от высоты пограничного слоя атмосферы и скорости геострофического ветра; с увеличением градиента плотности D уменьшается. Очевидно, что большие градиенты плотности затрудняют проникновение ветровых течений в глубь моря, и это обстоятельство приводит к тому, что мощность слоя, охваченного

дрейфовыми течениями, а следовательно, и глубина трения становятся меньше.

Интересно также отметить, что глубина трения D непосредственно не зависит от широты, а связана с ней косвенным образом — через скорость геострофического ветра. Из анализа фактических данных известно, что $V_{\it g}$ возрастает с широтой; соответственно увеличивается с широтой и глубина трения. Этот вывод, как кажется на первый взгляд, противоречит формуле

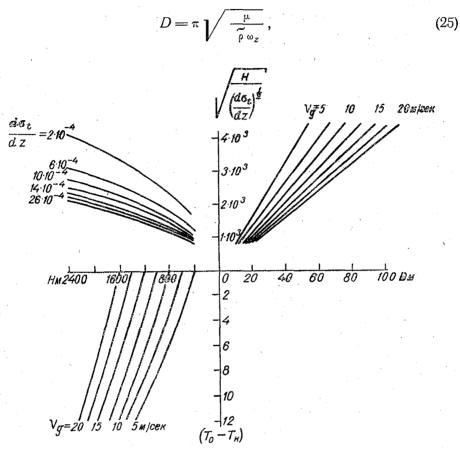


Рис. 1. Номограмма для расчетов глубины трения.

из которой видно, что глубина трения уменьшается от экватора к полюсу. Однако никакого противоречия здесь нет. Дело в том, что, применяя в формуле (25) эмпирические данные по величинам коэффициента турбулентной вязкости, мы не учитываем зависимости последнего от широты. Это и может привести к неправильным выводам.

Оценим относительную ошибку в расчете глубины трения по формуле (24). Пусть в результате ошибок в определении разности температур ($T_0-T_{\rm H}$) и скорости геострофического ветра V_g расхождение между рассчитанными и наблюденными величинами высот пограничного слоя атмосферы равно 300 м при абсолютной величине самой высоты $H\!=\!1500$ м. Тогда относительная ошибка в расчете глубины трения составит примерно 10%.

На рис. 1 представлена номограмма для расчетов глубины трения, входными параметрами в которую служат значения T_0, T_H, V_g и $\frac{d \sigma_t}{dz}$, определяемые из стандартных наблюдений в море.

ЛИТЕРАТУРА

Лайхтман Д. Л., Доронин Ю. П. Коэффициент турбулентного обмена в море и оценка потока тепла из океанических вод. Труды ААНИИ и ГГО, т. 226, 1959.
 Праудмэн Дж. Динамическая океанография. ИЛ, М., 1957.
 Ектап V. On the influence of the earth's rotation on ocean currents. Ark. f. Mat. Astr. och. Phys., B. 2, N 11, 1905.

К ТЕОРИИ УСТАНОВИВШИХСЯ ВЕТРОВЫХ ТЕЧЕНИЙ МЕЛКОГО МОРЯ

В статье на основании решения совместной системы уравнений для моря и приводного слоя атмосферы получены формулы для расчета скоростей течений и нагонов в мелком море.

При решении задач динамики моря применительно к расчетам ветровых течений и сгонно-нагоннах явлений в качестве граничного условия на поверхности используется тангенциальное напряжение ветра τ_0 .

В настоящее время существуют большие расхождения известных из литературных источников величин тангенциального напряжения. Тангенциальное напряжение ветра обычно выражается через коэффициент грения (сопротивления) C_z , скорость ветра v и плотность воздуха ρ

$$\tau_0 = \rho C_z v^2$$
.

В недавней работе Уилсона [8], обобщившего результаты наблюдений и анализов сорока семи исследователей, указывается, что для слабых ветров (v < 10 м/сек.) величина коэффициента трения колеблется от $0.4 \cdot 10^{-3}$ до $4.2 \cdot 10^{-3}$ (для высоты измерения скорости ветра, равной 10 м). Для умеренных и сильных ветров (v > 10 м/сек.) величина C_z изменяется от $1.5 \cdot 10^{-3}$ до $4.0 \cdot 10^{-3}$. Количество выполненных до сих пор наблюдений явно недостаточно для того, чтобы установить определенную зависимость коэффициента трения от скорости ветра.

Остаются невыясненными окончательно вопросы о природе трения ветра о взволнованную морскую поверхность, зависимости тангенциального напряжения от скорости ветра, стратификации атмосферы и гидродинамического характера подстилающей поверхности. Эти обстоятельства не позволяют производить расчет тангенциального напряжения с точностью, достаточной для практического использования. Поэтому весьма целесообразно получить такие расчетные схемы ветровых течений и нагонов, для использования которых не требовалось бы знаний тангенциального напряжения.

Вторым важным обстоятельством, ограничивающим применение существующих методов расчета ветровых течений, является тот факт, что в выражения для составляющих скорости ветровых течений входит коэффициент турбулентности в вертикальном направлении k. Величину последнего можно считать известной с точностью до порядка, а о характере его изменения можно судить лишь на основании косвенных соображений.

Между тем, как неоднократно указывал Д. Л. Лайхтман [1, 2], распределение характеристик турбулентности обусловливается как полем

течений, так и полем плотности, которые в свою очередь формируются под влиянием существующей турбулентности. В подобных задачах коэффициент турбулентности является такой же неопределенной величиной, как и компоненты скорости течений. Принятие в расчетах течений какой-либо наперед заданной величины $m{k}$ или определенной схемы изменения этой характеристики неизбежно должно приводить к существенной стилизации действительных условий. Это обстоятельство не может не привести к известным расхождениям между рассчитанными результатами и полученными в реальных условиях.

В настоящей работе для определения ветровых течений в мелком море используется замкнутая система уравнений для моря и пограничного слоя атмосферы. Величины коэффициентов турбулентности в море и приводном слое атмосферы находятся из уравнений баланса энергии турбулентности в форме, предложенной Д. Л. Лайхтманом:

$$k \frac{\partial^{2} u}{\partial z^{2}} + 2 \omega_{z} v = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$k \frac{\partial^{2} v}{\partial z^{2}} - 2 \omega_{z} u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}$$
(1)

$$\int_{0}^{H} \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^{2} + \left(\frac{dv}{dz} \right)^{2} \right] dz - \int_{0}^{H} \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_{a} \right) dz = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2T}{dz^2} = 0, (3)$$

$$\frac{d}{dz}(u^2+v^2)\big|_{z=-H}=0, (4)$$

$$\widetilde{k} \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial z^2} = \frac{1}{\widetilde{\rho}} \frac{\widetilde{\delta p}}{\partial x}
\widetilde{k} \frac{\partial^2 \widetilde{v}}{\partial z^2} = \frac{1}{\widetilde{\rho}} \frac{\widetilde{\delta p}}{\partial y}$$
(5)

$$g\,\tilde{\rho} = \frac{\delta p}{\delta z}\,,\tag{6}$$

$$\int_{0}^{h} \left[\left(\frac{d\tilde{u}}{dz} \right)^{2} + \left(\frac{d\tilde{v}}{dz} \right)^{2} \right] dz - \int_{0}^{h} \frac{g}{\tilde{\rho}} \frac{d\tilde{\rho}}{dz} dz = 0, \tag{7}$$

где k и k — постоянные по высоте коэффициенты турбулентности в пограничном слое атмосферы и в море, и, v, и, v — соответственно составляющие векторов скорости ветра и скорости течения, р — атмосферное давление, T — температура воздуха в абсолютной шкале, γ_a — адиабатический градиент температуры, ρ и ρ — соответственно плотность воздуха и морской воды, H — высота пограничного слоя атмосферы, h глубина моря.

Поместим начало координат на поверхности, положительную полуось г направим вертикально вниз, отрицательную — вверх, тогда гра-

ничные условия запишутся следующим образом:

$$z = 0, \ u = \tilde{u} = u_0, \ v = \tilde{v} = v_0,$$
 (8)

$$k\rho \frac{du}{dz}\Big|_{z=-0} = \tilde{k} \tilde{\rho_0} \frac{d\tilde{u}}{dz}\Big|_{z=+0}$$

$$k\rho \frac{dv}{dz}\Big|_{z=-0} = \tilde{k} \tilde{\rho_0} \frac{d\tilde{v}}{dz}\Big|_{z=+0}$$
(9)

$$z = \xi, \ p = p_a, \tag{10}$$

$$z = -\infty, \ u \to V_x, \ v \to V_y, \tag{11}$$

$$z = h, \ \tilde{u} = 0, \ \tilde{v} = 0, \tag{12}$$

$$T|_{z=0} = T_0, \quad T|_{z=-H} = T_H,$$
 (13)

$$\tilde{\rho} \mid_{z=0} = \tilde{\rho_0}, \quad \tilde{\rho} \mid_{z=h} = \tilde{\rho}_h.$$
 (14)

Здесь u_0 и v_0 — составляющие вектора скорости поверхностного течения, V_x и V_y — составляющие вектора скорости геострофического ветра $V_g = V \overline{V_x^2 + V_y^2}$, ξ — отклонение поверхности моря от ее невозмущенного положения (z=0).

Отметим, что условия (8), (9), (13) и (14) приближенно отнесены

к невозмущенной поверхности моря.

Решив уравнения (1) и (5) при граничных условиях (8), (11) и (12), получим:

$$u = V_x + e^{\alpha z} [(u_0 - V_x) \cos \alpha z - (v_0 - V_y) \sin \alpha z]$$

$$v = V_y + e^{\alpha z} [(v_0 - V_y) \cos \alpha z + (u_0 + V_x) \sin \alpha z]$$
(15)

$$\widetilde{u} = \frac{g\gamma_x}{2\widetilde{k}} z(h-z) + \frac{u_0}{h}(h-z)$$

$$\widetilde{v} = \frac{g\gamma_y}{2\widetilde{k}} z(h-z) + \frac{v_0}{h}(h-z)$$
(16)

где $\alpha = \sqrt{\frac{\omega_z}{k}}$, g — ускорение силы тяжести, γ_x и γ_y — соответственно углы наклона поверхности моря по осям x и y.

Воспользовавшись условием склейки (9), найдем выражения для составляющих вектора скорости поверхностного течения:

$$u_{0} = \frac{g\gamma_{x}h^{2}}{2\tilde{k}} + \frac{\rho}{\tilde{\rho}_{0}} \frac{V_{\omega_{z}k}}{\tilde{k}} h \left(V_{x} - V_{y}\right)$$

$$v_{0} = \frac{g\gamma_{y}h^{2}}{2\tilde{k}} + \frac{\rho}{\tilde{\rho}_{0}} \frac{V_{\omega_{z}k}}{\tilde{k}} h \left(V_{x} + V_{y}\right)$$

$$(17)$$

Оценивая величины u_0 и v_0 , получим, что последние на два порядка меньше составляющих скорости геострофического ветра. Поэтому для определения коэффициента турбулентности в атмосфере можно воспользоваться приближенными выражениями составляющих вектора скорости ветра:

$$u = V_x - e^{\alpha z} (V_x \cos \alpha z - V_y \sin \alpha z)$$

$$v = V_y - e^{\alpha z} (V_y \cos \alpha z + V_x \sin \alpha z)$$
(18)

Совместное решение системы уравнений (2), (3) и (4) с учетом ус ловий (13) и (18) приводит к следующим выражениям для высоты по граничного слоя атмосферы H и коэффициента турбулентности k:

$$H = -\frac{(T_H - T_0)}{2\gamma_a} + \left[\frac{(T_H - T_0)^2}{4\gamma_a^2} + \frac{2,28(V_x^2 + V_y^2)}{\frac{g}{T}\gamma_a} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (19)$$

$$k = \frac{\omega_z}{5.2} H^2, \tag{20}$$

где \overline{T} — средняя абсолютная температура пограничного слоя атмо сферы.

Коэффициент турбулентности в море можно определить из (7) и (16)

при условиях (14) и (17)

$$\tilde{k} = \left(\frac{g}{\tilde{\rho}_0} \frac{d\tilde{\rho}}{dz}\right)^{-\frac{1}{2}} \left\{ \frac{g^2 h^2}{3} \left(\gamma_x^2 + \gamma_y^2\right) + 2 \frac{\rho^2}{\tilde{\rho}_0^2} \omega_z k \left(V_x^2 + V_y^2\right) + \frac{\rho g h V \overline{\omega_z k}}{\tilde{\rho}_0} \left[\left(V_x - V_y\right) \gamma_x + \left(V_x + V_y\right) \gamma_y \right] \right\}^{\frac{1}{2}}.$$
(21)

Из формулы (21) вытекает, что коэффициент турбулентности в море находится в прямой зависимости от скорости геострофического ветра коэффициента турбулентности в атмосфере и угла наклона морской по верхности. С увеличением градиента плотности затрудняется обмен ко личеством движения между слоями воды, что приводит к уменьшеник коэффициента турбулентности в море.

Определив выражения для составляющих поверхностного течения и коэффициентов турбулентности в море и атмосфере, можно рассчитать компоненты ветровых течений на любой глубине в море по следующим формулам:

 $\widetilde{u} = \frac{g\gamma_x}{2\widetilde{k}} (h^2 - z^2) + \frac{\rho}{\widetilde{\rho}_0} \frac{\sqrt{\omega_z k}}{\widetilde{k}} (V_x - V_y) (h - z)$ $\widetilde{v} = \frac{g\gamma_y}{2\widetilde{k}} (h^2 - z^2) + \frac{\rho}{\widetilde{\rho}_0} \frac{\sqrt{\omega_z k}}{\widetilde{k}} (V_x + V_y) (h - z)$ (22)

В замкнутом водоеме полный расход воды через любую вертикаль должен равняться нулю, следовательно, выражения для угла наклона морской поверхности могут быть получены в виде:

$$\gamma_{x} = -\frac{3}{2} \frac{\rho \sqrt{\omega_{z}k}}{\widetilde{\rho_{0}} gh} (V_{x} - V_{y})$$

$$\gamma_{y} = -\frac{3}{2} \frac{\rho \sqrt{\omega_{z}k}}{\widetilde{\rho_{0}} gh} (V_{x} + V_{y})$$
(23)

или

$$\gamma = \frac{3}{2} \frac{\rho \sqrt{\omega_z k}}{\tilde{\rho}_0 gh} V_g. \tag{24}$$

Таким образом, угол наклона морской поверхности может быть рассчитан по известным скоростям геострофического ветра и стандартным гидрологическим наблюдениям в море. Отметим также, что равенство

(24) позволяет оценить влияние стратификации атмосферы на отклонение морской поверхности от ее невозмущенного состояния: чем больше неустойчивость, тем больше нагон, с увеличением устойчивости угол на-

клона морской поверхности уменьшается.

Для проверки полученного выражения для угла наклона морской поверхности были использованы наблюдения Маевского [7] за нагоном на польском побережье Балтийского моря. Рассчитанные величины угла наклона морской поверхности и нагона при сопоставлении с результатами наблюдений дали хорошее совпадение. В табл. 1 проводится сопоставление рассчитанных и наблюденных величин у и ζ для двух пунктов польского побережья.

Таблица 1

	1	γ	ç		
Пункт	рассчитанная	наблюденная	рассчитан- ная	наблюден- ная	
Тшебеш (Щецинский залив) Талькмицко (Вислинский залив)	$2,7 \cdot 10^{-5}$ $3,2 \cdot 10^{-5}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$ $3,0 \cdot 10^{-5}$	50 21	42 19	

Очевидно, что полученные выше выражения для угла наклона морской поверхности и составляющих скорости ветровых течений дают несколько завышенные результаты вследствие принятия постоянными по высоте величин коэффициентов турбулентности. Тем не менее решение поставленной системы уравнений позволяет без дополнительных допущений относительно тангенциального напряжения ветра на поверхности и коэффициента турбулентности в море рассчитывать течения и нагон в мелком море.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лайтхман Д. Л. Закономерности физических процессов пограничного слоя атмосферы в Арктике. Сб. «Современные проблемы метеорологии приземного слоя воздуха». Гидрометеоиздат, Л., 1958.

2. Лайтхман Д. Л., Доронин Ю. П. Коэффициент турбулентного обмена в море и оценка потока тепла из океанических вод. Труды ААНИИ, т. 226, 1959.

3. Фельзенбаум А. И. Связь ветра с уровнем ѝ установившимися течениями мелкого моря. ДАН СССР, т. 109, № 1, 1956.

4. Штокман В. Б. Ветровой нагон и горизонтальная циркуляция в замкнутом море небольщой глубины. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., № 1, 1941.

5. Ek man V. W. On the influence of the earth's rotation on ocean currents. Ark. f. Mat., Astr., och Fys. 2, N 11, 1905.
6. Ek man V. W. Uber Horizontalzirkulation bei Winderzeugten Meersstromungen. Ark. f. Mat., Astr. och Fys., 17, N 26, 1923.
7. Majewski A. Spietrzenie wód u polskiego wibrzezá, spowodowane przejšciem

cyklone pzzez poludniowy Baetyk w duie 17 stecznia 1955 roku. Przglad geofiz, 1, N 2, 1956. 8. Wilson B. W. Note on surface wind stress over water at low and high wind

speeds. Journ. of. Geophys. Res., vol. 65, N 10, 1960,

ОБ ОСРЕДНЕНИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ И МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ В МОРЕ

Рассмотрена точность пространственно-временного осреднения результатов гидрометеорологических наблюдений в море; предложен способ объективного выбора оптимальных масштабов пространственного осреднения; оценивается ошибка линейной интерполяции в поле температуры воды.

Использование средних значений гидрометеорологических элементов в большинстве современных исследований по океанологии и морской метеорологии и необходимость систематизации накопленных материалов наблюдений вынуждают поставить вопрос о точности средних величин и об отыскании наивыгоднейших масштабов осреднения.

Средние величины имеют смысл вообще лишь тогда, когда указываются определенные масштабы осреднения во времени и в пространстве [10]. Эти масштабы должны выбираться так, чтобы обеспечивалась максимальная близость полей осредненных и неосредненных величин [6]. Масштаб осреднения по времени в климатологии, в частности в морской, обусловлен самим характером задачи и равен, как правило, месяцу или году. Масштабы пространственного осреднения определяются свойствами осредняемого поля и характером полученной о поле информации. Однако по установившейся в океанологии практике выбор этих масштабов носит произвольный характер: акватория разбивается либо на участки равной площади [8], либо чаще на так называемые квадраты — сферические трапеции, ограниченные меридианами и параллелями, отстоящими друг от друга на равное число градусов. Вычисляя затем арифметическое среднее результатов всех наблюдений, проведенных в этой области за данный интервал времени, относят его к геометрическому центру квадрата. Погрешность такого осреднения обусловлена несимметричным расположением данных гидрологических и метеорологических станций относительно центра квадрата и неравномерным распределением моментов наблюдений в интервале времени.

Рекомендуемое в работе [4] приведение к центру квадрата и к середине интервала не дает результатов в тех наиболее типичных случаях, когда осредняются результаты наблюдений, проведенных в разные годы, в разные даты (данного месяца), в разных координатах. В самом деле при отсутствии случайных отклонений от климатологической нормы для данного момента и координат и при абсолютной корректности линейной интерполяции приведение каждого из измеренных значений должно дать одну и ту же искомую среднюю величину. Если допустить, что в более общем и реальном случае существуют случайные отклонения и ошибки линейной интерполяции, то критерием действенности

приведения должно служить уменьшение дисперсии ряда измеренных значений после приведения. Однако проведенные нами по рекомендованной в работе [4] методике расчеты по приведению к центру 10-градусного квадрата и к середине месяца измеренных в разные годы температур воды показали, что дисперсия ряда после приведения не уменьшилась существенно, а в некоторых случаях даже увеличилась.

`На практике, разбив акваторию на произвольно выбранные области, проводят арифметическое осреднение всех наблюдавшихся значений без учета координат и даты, а при выводе средних многолетних и

года наблюдений.

Шелл [9] замечает, что, помимо ошибок, связанных с неучетом координат и даты наблюдений, вносится ошибка вследствие неучета их веса: веса средних месячных значений, выведенных за отдельные годы, при выводе среднего многолетнего должны быть пропорциональны числу наблюдений, проведенных в данный год. Вместе с тем следует уменьшать вес наблюдений, проведенных в одни сутки.

Поскольку современные представления о режиме Мирового океана основаны на данных, полученных простым арифметическим осреднением, важно оценить точность именно этого простейшего и наиболее распространенного способа. Поместив начало координат в центре области осреднения и пренебрегая нелинейностью поля, можно записать

$$f(x_i, y_i, t_i) = \overline{f} + ax_i + by_i + c_i, \tag{1}$$

где $f(x_i, y_i, t_i)$ — значение элемента f, измеряемое (абсолютно точно) в принадлежащей области точке (x_i, y_i) в момент времени t_i ; \overline{f} — среднее значение элемента f в центре (0,0), соответствующее бесконечной

совокупности измерений (климатологическая норма); $a=\frac{\overline{\partial f}}{\partial x}$ и $b=\frac{\overline{\partial f}}{\partial y}$ — осредненные на длине сторон квадрата градиенты, предполагаемые независящими от времени; c_i — случайная функция времени, представляющая отклонение значения $f(0,0,\ t_i)$ в центре квадрата в данный момент от нормы \overline{f} .

Результат арифметического осреднения п измерений

$$\overline{f}_i = \overline{f} + a\overline{x}_i + b\overline{y}_i + \overline{c}_i \tag{2}$$

позволяет записать ошибку обычного отождествления f_i с нормой \overline{f} в виде

$$\Delta \overline{f} = a\overline{x_i} + b\overline{y_i} + \overline{c_i},\tag{3}$$

где $\overline{x_i}$, $\overline{y_i}$ — координаты центра тяжести всех n использованных наблюдений, а $\overline{c_i}$ — отклонение среднего из n измерений в центре от \overline{f} .

Отклонение центра тяжести координат наблюдений $(x_i, \overline{y_i})$ от геометрического центра прямоугольной области осреднения может достигать предельного значения

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{X^2 + Y^2},\tag{4}$$

где Х и У — размеры области вдоль осей координат.

 c_i при равновесных наблюдениях определяется размахом вариации f во времени и числом наблюдений по формуле

$$\overline{c}_i = \frac{R}{2N} \,, \tag{5}$$

где $R = \int_{\max} - \int_{\min} -$ размах вариации в бесконечной совокупности, N = - число измерений в данной точке.

Определяя $\overline{c_i}$ из наблюдений при допущении, что $\frac{R}{2n} \approx \frac{R'}{2n'}$, где R' — размах ограниченной выборки, в которую входят все n' наблюдений в области XY, мы вносим некоторую ошибку $\Delta \overline{c_i}$. Однако, определяя размах вариации по ограниченной выборке, мы приуменьшаем его величину, а используя для его определения наблюдения в разных точках, преувеличиваем. Следовательно, $\Delta \overline{c_i}$ есть сумма двух противоположных по знаку систематических ошибок и маловероятно, чтобы она была существенной.

Введем среднюю пространственную плотность наблюдений $\gamma = \frac{n'}{XY}$. Тогда выражение для предельной ошибки определения среднего значения в центре квадрата с учетом (3), (4) и (5) получит вид

$$\varepsilon_f = a \, \frac{X}{2} + b \, \frac{Y}{2} + \frac{R'}{2\gamma XY} \,. \tag{6}$$

Уравнение (6) отражает тот факт, что с увеличением размеров квадрата увеличивается погрешность пространственного осреднения, но уменьшение квадрата ведет к уменьшению числа наблюдений внутри него и опять-таки увеличивает ошибку. Очевидно, что должны существовать оптимальные размеры квадратов, соответствующие минимуму ошибки осреднения. Выбор этих размеров при довольно ясном понимании исследователями экстремального характера задачи, как уже упоминалось, совершенно произволен. Например, Шелл [9] пишет: «Очевидно, что чем больше число наблюдений в единицу времени и на единицу площади и чем меньше рассматриваемый район, тем более репрезентативной будет полученная средняя величина. Однако, так как число наблюдений мало..., выбранный район не может быть слишком малым, а интервал времени слишком коротким. Поэтому выбран месяц как единица времени и пятиградусный квадрат как единица площади».

Вполне возможен другой, строго объективный подход к выбору размеров области осреднения, а именно, нахождение значений X и Y, соответствующих минимуму ошибки ε . Исследование уравнения (6) на экстремум функции $\varepsilon(X,Y)$ приводит к формулам, определяющим оптимальные (в смысле минимума предельной ошибки осреднения) значения X_0, Y_0 :

$$X_0 = \sqrt[3]{\frac{\overline{bR'}}{a^2 \gamma}},\tag{7}$$

$$Y_0 = \sqrt[3]{\frac{\overline{aR'}}{b^2\gamma}}. (8)$$

При выводе этих формул рассмотрен случай, имеющий малую вероятность: центр тяжести группы точек расположен в углу квадрата и ошибка, связанная с ограниченностью выборки, предельная. Однако можно полагать, что введение каких-либо вероятностных критериев не изменит существенно численных результатов, так как все коэффициенты, взятые в степени $\frac{1}{3}$, довольно близки к единице.

Ввиду нелинейности полей гидрологических и метеорологических элементов имеется зависимость величин $a=\frac{\overline{\partial f}^X}{\partial x}$ и $b=\frac{\overline{\partial f}^Y}{\partial y}$ от масштабов осреднения и потому следует переписать (7) и (8) в виде:

штабов осреднения и потому следует переписать (7) и (8) в виде:
$$X_0 = \sqrt[3]{\frac{\overline{b}(Y)R'}{a^2(X)\gamma}}, \qquad (7') \qquad Y_0 = \sqrt[3]{\frac{a(X)R'}{b^2(Y)\gamma}}. \qquad (8')$$

Определение оптимальных масштабов осреднения при незаданных аналитически функциях a(X) и b(Y) сводится, таким образом, к решению системы уравнений (7') и (8') методом итераций, причем произвольно выбранные для расчета a_1, b_1, R' и γ масштабы X_1 и Y_1 представляют собой первое приближение (нулевую итерацию).

Для сходимости итеративных решений системы (7') и (8') требуется,

чтобы суммы модулей элементов матрицы

$$\begin{pmatrix}
\frac{2}{3} \left(\frac{R'}{2\gamma}\right)^{1/3} b^{1/3} a^{-\frac{5}{3}} \frac{\partial a}{\partial x} & -\frac{1}{3} \left(\frac{R'}{\gamma}\right)^{1/3} b^{-\frac{2}{3}} a^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial a}{\partial y} \\
-\frac{1}{3} \left(\frac{R'}{2\gamma}\right)^{1/3} a^{-\frac{2}{3}} b^{-\frac{2}{3}} \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{2}{3} \left(\frac{R'}{\gamma}\right)^{1/3} a^{1/3} b^{-\frac{5}{3}} \frac{\partial b}{\partial y}
\end{pmatrix}, (9)$$

расположенных в каждом столбце и в каждой строке, не превышали

единицы [1].

Определяющая вид функций a(X) и b(Y) структура поля может быть охарактеризована структурной функцией элемента f [3]. Есть все основания ожидать, что не только структура полей метеорологических элементов над морем, но и структура гидрологических элементов (температуры и солености воды) подчиняется известному «закону 2/3» для малых масштабов осреднения и «закону первой степени» для макромасштабов [6], [7].

Закон 2/3 уже подтвержден для температуры воды экспериментальными измерениями в море [5]. Эмпирическое подтверждение закона первой степени для морских условий оказывается значительно более трудной задачей, поскольку морские наблюдения по своей подробности и регулярности несравнимы с данными материковых станций. Все же, выбрав район в Атлантическом океане (координаты центра 45° с. ш., 15° з. д.) со сравнительно однородным и изотропным распределением гидрологических элементов, мы попытались определить структурные функции температуры и солености воды на поверхности для расстояний от 20 до 500 км.

Большой разброс точек и ограниченность материала наблюдений не позволяют делать окончательных выводов; все же зависимость структурных функций оказалась близкой к линейной. Для температуры воды, где зависимость получилась более четкой, было найдено выражение

$$B_{\theta}(l) \approx 1.3 \cdot 10^{-2} l,$$
 (10)

где $B_{\,\theta}\left(l
ight)$ — структурная функция температуры поверхности моря, l—

масштаб (в морских милях).

В случае изотропности или слабой анизотропности поля (которая и наблюдается в океане большей частью) рассмотрение условий сходимости упрощается. Система уравнений (7') и (8') в этом случае сводится к одному итерируемому уравнению вида $X=\varphi(X)$, где

$$\varphi(X) = \left(\frac{R'}{\gamma}\right)^{1/3} \left[a(x)\right]^{-1/3}.$$

Используя формулу, вытекающую из определения структурной функции [3],

$$\overline{\left[\left(\frac{\partial f}{\partial n}\right)^l\right]^2} \stackrel{\tau}{=} \frac{B_f(l)}{l^2} .$$
(11)

Здесь l — масштаб осреднения производной в направлении n, τ — интервал осреднения во времени, $B_f(l)$ — структурная функция, можно определить зависимость среднего градиента от масштаба осреднения

$$\frac{\overline{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)} = \sqrt[r]{\frac{B_f(X)}{X^2} - \sigma^2}, \qquad (12)$$

где σ^2 — дисперсия градиента $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^X$ во времени.

Область сходимости итераций рассматриваемого уравнения определяется условием

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{R'}{a(X)\gamma}\right]^{1/3}\right|<1.$$

Выражая a(X) по формуле (12) и представляя структурную функцию в соответствии с законом первой степени $B_f(X) = KX$, находим, что условие сходимости сводится к неравенству $K^{4/3} > 0$, которое выполняется при любом K и не зависит от X. Следовательно, при выполнении закона первой степени итеративные решения сходятся иеограниченно независимо от выбора первого приближения X_1 .

К этому же выводу можно прийти иначе, рассматривая порядки величин, входящих в общем случае в элементы матрицы (9) или при квазиизотропности поля в выражение $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{R'}{2a(X) \gamma} \right]^{1/3}$.

Для поля температуры воды на поверхности имеем следующие порядки:

$$\left[rac{\overline{\partial \theta}}{\partial x}
ight] pprox 10^{-6} \
m{град/миля}, \ \left[rac{\overline{\partial}}{\partial x} \left(rac{\overline{\partial \theta}}{\partial x}
ight)
ight] pprox 10^{-15} \
m{град/миля}^2, \ \left[R'
ight] pprox 10^{\circ}, \ \left[\gamma
ight] pprox 10^{-3}
m{миль}^{-2}.$$

В этом случае находим, что
$$\left[\frac{\partial \varphi \left(X \right)}{\partial X} \right] \! pprox \! 10^{-5}$$
 (безразмерная величина).

Поскольку порядки первых и вторых производных элемента f при изменении направления меняются не более чем на один, в редких случаях на два порядка, то с точностью до одного-двух порядков суммы модулей элементов матрицы (9) по строкам и столбцам равны величине $\frac{\partial \varphi\left(X\right)}{\partial X}$, полученной для изотропного поля.

При заданных коэффициентах структурной функции и известной дисперсии σ^2 оптимальные масштабы X_0 и Y_0 могут быть найдены как точные решения системы алгебраических уравнений.

Решая в качестве примера систему уравнений (7') и (8') при про- извольно заданных, но реальных значениях $R'=5^\circ$, $\gamma=5\cdot 10^{-4}$ миль $^{-2}$ и при зависимости градиента от масштаба, заданной в соответствии с (10) выражением $a(X)=\frac{0.114}{\sqrt{X}}$, мы нашли, что процесс итерации схо-

дится быстро при любых обычных в практике произвольно выбранных начальных значениях X_1 . Как правило, при $0,1 \leqslant X_1 \leqslant 10$ (в градусах меридиана или параллели) можно ограничиться одной-двумя итерациями (табл. 1).

Вычисление оптимального масштаба осреднения для случая изотропного поля, определяемого структурной функцией (10)

		Морские	мили	
Начальный масштаб X_1	600	300	75	10
Первая итерация X_0^1	279	247	197	140
Вторая итерация X_0^2	242	239	230	219

Для оценки влияния выбора масштаба осреднения на точность определения средней величины в центре области осреднения использовалось линейное уравнение (3). Проведенный расчет ε_f для дискретных значений X и Y через 1° (меридиана и параллели соответственно) показал, что ε_f проходит через выраженный минимум при оптимальных масштабах X_0 , Y_0 . Ошибка примерно вдвое меньше при X_0 , Y_0 , чем при $X_0 \pm 1$ °, $Y_0 \pm 1$ °.

При расчете по (3) выяснено также, что предельные ошибки определения средних многолетних значений температуры и солености воды в море значительно больше, чем это принято считать (табл. 2).

Таблица 2 Предельные ошибки вычисления средних многолетних значений температуры и солености в центре пятиградусного квадрата

Горизонт	0	50	100	250	500	1000	1500	2000
ε _θ	1,3	1,4	1,2	1,5	1,6	0,7	0,2	0,1
ε _S 0/ ₀₀	0,36	0,28	0,18	0,22	0,18	0,07	0,04	

На поверхности ошибка определяется средней температуры $\epsilon_{\theta} \approx 1^{\circ}$, солености $\epsilon_{s} \approx 0.5\%$. С глубиной точность постепенно повышается, так как уменьшаются градиенты и временные колебания величин.

Результаты расчета оптимальных масштабов, выполненного по формулам (7') и (8') применительно к вычислению средней июльской многолетней температуры в зоне Гольфстрима, приведены в табл. 3.

Таблица З Оптимальные размеры квадратов для осреднения средних июльских температур воды на поверхности моря за отдельные годы

Координат	гы центра	X_0	. Y ₀	
широта, С	долгота, З	градусы параллели	градусы меридиана	
37°30′ 32 30 37 30 32 30	67°30′ 67°30 72°30 72°30	4,8 9,3 3,2 10,1	4,6 5,5 1,7 6,0	

В качестве первого приближения было принято $X_1 = 5^{\circ}$ (параллели), $Y_1 = 5^{\circ}$ (меридиана). Понятно, что оптимальные масштабы осред-

нения меняются во времени, в пространстве и по направлению, а также будут отличными для различных гидрометеорологических элементов.

Рассматривая точность вычисления средних величин на основе уравнения (3), мы использовали обычное в практике линейное представление полей гидрометеорологических элементов. Пренебрежение действительной нелинейностью ведет к появлению дополнительных ошибок. При известной структурной функции элемента по формулам, выведенным Л. С. Гандиным [2], можно определить среднюю квадратичную ощибку линейной интерполяции в зависимости от числа точек с измеренными значениями и расстояния между ними. Это позволяет не только оценить погрешность исходного уравнения (1), но и установить расстояния между центрами квадратов, гидрологическими станциями и разрезами, соответствующие заданной точности интерполяции. Используя выражение (10) для структурной функции поверхности воды, мы вычислили средние квадратичные ошибки линейной интерполяции по формулам Л. С. Гандина для 3, 4, 6 и 12 точек наблюдений, расположенных симметрично на окружности, в центре которой отыскивается интерполируемое значение. Кроме того, рассмотрен случай, когда число точек на окружности бесконечно.

Вычисленные ошибки интерполяции (табл. 4) значительны и при увеличении расстояния становятся сравнимыми с ошибками осреднения,

определенными по формуле (3).

Таблица 4 Ошибки линейной интерполяции температуры поверхности моря

Число точек	Расстояние до точки интерполяции (мили)								
наблюдения	50	75	100	125	150				
3 4 6 12 ∞	0,52 0,51 0,49 0,48 0,47	0,65 0,63 0,62 0,61 0,60	0,74 0,72 0,70 0,69 0,68	0,83 0,80 0,79 0,78 0,77	0,91 0,88 0,86 0,85 0,84				

Объективные оценки точности определения климатологических данных в море позволяют рационализировать использование материалов наблюдений и могут быть учтены при планировании морских экспедиций. Весьма важным представляется изучение структурных функций гидрологических элементов. С их помощью, в частности, может быть решен вопрос о репрезентативности геострофических течений, вычисленных динамическим методом, в зависимости от расстояния между станциями гидрологического разреза.

Автор выражает благодарность Л. С. Гандину, сделавшему ценные замечания при подготовке статьи к печати.

ЛИТЕРАТУРА

Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 2, М. Физматгиз, М., 1960.
 Гандин Л. С. О линейной интерполяции метеорологических элементов в двух измерениях. Труды ГГО, вып. 71, 1957.

3. Гандин Л. С., Лайхтман Д. Л., Матвеев Л. Т., Юдин М. И. Основы динамической метеорологии, Л., 1955.

4. Методы климатологической обработки метеорологических наблюдений. Гидрометео-

издат, Л., 1957. 5. Пискунов А. К. Некоторые данные исследования температурных

в море. Труды Таганрогского радиотехнического института, т. 3, № 2, 1957. 6. Юдин М. И. Некоторые вопросы теории метеорологических полей. Труды ГГО,

вып. 19(81), 1950. 7. Юдин М. И. и Леднева К. В. Структурная функция поля абсолютной влажности. Труды ГГО, вып. 71, 1957.

8. Rihley G. A. Oxygen, Phosphate and Nitrate in the Atlantic Ocean. Bull. of the

Bingham Oceanograph. Collection, vol. 13, 1951.

9. Shell J. On a Criterion of Representativeness of Sea-Surface Temperature Data.
Bull. of the Americ. Meteor. Society, vol. 40, N 11, 1959.

10. Stommel H. Horizontal Diffusion Due to Oceanic Turbulence. Journ. Marine Re-

search., vol. 8, N 3, 1949.

РАСЧЕТ НАМЕРЗАНИЯ И ТАЯНИЯ МНОГОЛЕТНЕГО ЛЬДА

В статье рассматривается намерзание и таяние многолетнего льда на основании анализа баланса тепла на его нижней и верхней границах. Для нахождения составляющих баланса решалась задача распределения температуры внутри ледяного покрова. Полученное решение позволяет рассчитать изменение толщины льда либо по известной температуре поверхности льда (снега), либо по радиационному балансу и метеорологическим характеристикам в свободной атмосфере. Приводятся результаты расчетов для района Центральной Арктики.

Расчет намерзания и таяния льда имеет большое практическое значение. В данной работе определялось увеличение толщины уже существующего ледяного покрова за зимний период и количество стаявшего льда летом для условий Центральной Арктики.

Нарастание льда может быть найдено из уравнения баланса тепла

на границе лед-вода

$$\left[\lambda \frac{dT}{dz} - \lambda_1 \frac{dT_1}{dz} \right]_{z=h} = L \rho \frac{dh}{dt}, \tag{1}$$

где t — время, z — вертикальная координата (за положительное направление оси z принимается направление от поверхности льда вниз), h — толщина ледяного покрова, T и T_1 — температура льда и воды соответственно, ρ — плотность льда, L — скрытая теплота плавления льда.

Наблюдения показывают, что температура воды у нижней границы льда почти не меняется с глубиной, поэтому притоком тепла из воды можно пренебречь, а поток тепла через лед снизу будет обусловлен выделением скрытой теплоты замерзания. Иначе говоря, по значению величины $B|_{z=h}$ можно определить количество льда Δh , образовавшегося за время Δt ,

$$\Delta h = \frac{B_{z=h}}{L\rho} \, \Delta t. \tag{2}$$

Таким образом, задача определения толщины намерзания льда сводится к определению потока тепла на нижней границе льда.

Если принять во внимание, что температура на нижней границе льда постоянна и равна температуре замерзания ϑ_0 , а на верхней границе ход температуры задан, то из решения уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \tag{3}$$

при краевых условиях:

$$T \mid_{t=0} = \vartheta_0, \quad T \mid_{z=d} = \vartheta_0, \quad T \mid_{z=0} = T_0(t)$$
 (4)

может быть получено распределение по глубине температуры, а следовательно, и потока

$$B = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Решение уравнения (3) при краевых условиях (4) для температуры, средней за период t_2 — t_1 , имеет вид:

$$\begin{split} \overline{\tau} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \left(1 - \frac{z}{h} \right) \int_{t_1}^{t_2} \left[T_0(v) - \vartheta_0 \right] dv - \\ &- \frac{2}{\pi (t_2 - t_1)} \left\{ \int_{0}^{t_2} \left[T_0(v) - \vartheta_0 \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{h_n} z e^{-\frac{n^2 \pi^2 k}{h^2} (t_2 - v)} dv + \right. \\ &+ \int_{0}^{t_1} \left[T_0(v) - \vartheta_0 \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{h} z e^{-\frac{n^2 \pi^2}{h^2} k (t_1 - v)} dv \right\}, \end{split}$$

где

$$\overline{\tau} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \tau(t, z) dt,$$

$$\tau(z, t) = T(z, t) - \vartheta_0.$$

Поток тепла на верхней и на нижней границах льда, полученный на основе этого решения, имеет вид:

$$B|_{z=0} = \frac{\lambda}{h(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [T_0(v) - \vartheta_0] dv + \frac{2\lambda}{h(t_2 - t_1)} \left\{ \int_{0}^{t_2} [T_0(v) - \vartheta_0] e^{-\frac{\pi^2 k}{h^2} (t_2 - v)} dv - \int_{0}^{t_1} [T_0(v) - \vartheta_0] e^{-\frac{\pi^2 k}{h^2} (t_1 - v)} dv \right\},$$

$$(5)$$

$$B|_{z=h} = \frac{\lambda}{h(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} [T_0(v) - \vartheta_0] dv - \frac{2\lambda}{h(t_2 - t_1)} \left\{ \int_{0}^{t_2} [T_0(v) - \vartheta_0] e^{-\frac{\pi^2 k}{h^2} (t_2 - v)} dv - \int_{0}^{t_1} [T_0(v) - \vartheta_0] e^{-\frac{\pi^2 k}{h^2} (t_1 - v)} dv \right\}.$$

$$(6)$$

Формулы (5)—(6) можно применять, если известна температура на поверхности льда. Если задана температура поверхности снега, то для определения потока на нижней границе льда следует решать двух-

слойную задачу. Можно, однако, не решая двухслойной задачи, учесть влияние снега введением некоторого средневзвешенного значения коэффициента теплопроводности, зависящего от толщины и теплопроводности льда и снега (2)

$$\overline{\lambda} = \frac{h_{\scriptscriptstyle \rm I} + h_{\scriptscriptstyle
m CH}}{h_{\scriptscriptstyle \rm I}} \cdot \frac{h_{\scriptscriptstyle
m CH}}{\lambda_{\scriptscriptstyle
m CH}} \cdot$$

В этом случае следует ввести также понятие средневзвешенного значения коэффициента температуропроводности:

$$\overline{k} = \frac{\overline{\lambda}}{\overline{\rho c}},$$

$$\overline{\rho c} = \frac{1}{h_1 + h_2} \int_0^{h_1 + h_2} \rho \, c dz = \frac{\rho_1 c_1 h_1 + \rho_2 c_2 h_2}{h_1 + h_2},$$

тогда

$$\overline{k} = rac{(h_1 + h_2)^2}{(
ho_1 c_1 h_1 +
ho_2 c_2 h_2) \left(rac{h_1}{\lambda_1} + rac{h_2}{\lambda_2}
ight)}.$$

При расчете годового хода толщины льда в Центральной Арктике по формуле (2) и (6) годовой ход $T_0(t)$ вычислялся по методу, изложенному в работе [1]. Этот метод позволяет определить температуру поверхности снега на основании внешних факторов. Расчет проводился последовательными приближениями. В первом приближении температура подстилающей поверхности определялась в предположении, что поток тепла снизу к подстилающей поверхности

$$B|_{z=0} = \frac{\overline{\lambda}}{h} (T_0 - \vartheta_0), \tag{7}$$

что соответствует стационарному распределению температуры во льду. Затем полученная таким образом температура использовалась для расчета потока тепла по формуле (5), и определялась температура поверхности во втором приближении, уже с учетом поправки на нестационарность.

Приближения проводились до тех пор, пока T_0 и $B|_{z=0}$ не переставали меняться. После этого определялся поток на нижней границе льда по формуле (6) и количество льда, образовавшегося за период t_2 — t_1 [формула (2)]. За начальный момент времени (t=0) принимался конец августа. Тогда при расчетах среднемесячных величин для сентября следует принимать t_1 =0, t_2 =1, для октября t_1 =1, t_2 =2 и т. д. Эти значения t_1 и t_2 использовались при определении потока по формуле (6). Интегралы в этой формуле рассчитывались графическим методом.

В табл. 1 приведены значения потоков на верхней границе льда, вычисленные по формуле (5) (первая строка таблицы) и по формуле (7) (вторая строка). В третьей строке для сравнения приведены значения радиационного баланса.

В переходные месяцы, когда наблюдаются наибольшие расхождения в значении потоков, величина радиацинного баланса невелика, поэтому уточнение за счет учета нестационарности процессов в почве для этих месяцев является существенным.

	I	II	Ш	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	ΧI	XII
$B_{z=0}$ кал/м ² сек.	-2,5	-2,5	-2,4	_0,4	0,9	0,7	0,3	0,1	1,3	-2,6	-3 ,2	-2,8
$B=\frac{\lambda}{\hbar}\left(T_0-\vartheta_0\right),$	-2,5	-2,5	-2,5	-1,5	-0,4	0,2	0,3	0,3	0,9	<u>-1,5</u>	-2,2	-2,4
R	l l	i	l	-1,9		l .	1 1	1				
Δh cm	9,0	9,0	9,2	9,6	6,9	- 6,8 ¹	-48,6	 5,6	0,2	2,1	4,2	7,3

Расчет таяния проводился следующим образом.

Предполагалось, что температура поверхности тающего льда равна 0°. Это условие применялось вместо условия теплового баланса при эпределении характеристик пограничного слоя по методу, изложенному в работе [1]. В этом случае уравнение теплового баланса может быть использовано для нахождения тепла, затраченного на таяние

$$Q_{\text{таяния}} = R - P - LE - B.$$

Результаты расчетов нарастания и таяния льда приведены в четвертой строке табл. 1.

Проведенные расчеты показали, что при толщине льда 3 м за лето в Центральной Арктике стаивает снег и 61 см льда и нарастает за зиму 57 см льда. Таким образом, можно считать, что лед обновляется в среднем за 5 лет.

Предложенный метод позволяет рассчитывать таяние и намерзание льда в Центральной Арктике по данным радиационного баланса и гемпературы, влажности и скорости ветра на высоте пограничного слоя, которые могут быть получены по материалам зондирования береговых станций.

ЛИТЕРАТУРА

Лайхтман Д. Л., Утина З. М. Влияние метеорологических условий на строение пограничного слоя в атмосфере. Труды ГГО, вып. 107, 1960.
 Лайхтман Д. Л. Некоторые закономерности теплового режима Центральной Арктики. Труды ААНИИ, т. 226, 1959.

¹ Кроме того, в июне стаивает 40 см снега.

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЗДУХА ПОД ВЛИЯНИЕМ ДЕЯТЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

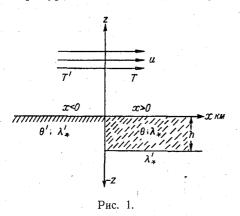
В работе исследуется вопрос трансформации воздушной массы под влиянием одновременного изменения условий увлажнения и теплопроводности почвы. Решается двухслойная задача теплопроводности с привлечением уравнения, описывающего изменение влажности. Получены числовые оценки величин трансформации для случаев, учитывающих каждый из рассматриваемых факторов отдельно и их суммарный эффект.

Задача о трансформации воздушной массы, имеющая большое практическое значение, неоднократно решалась рядом исследователей. Подробное освещение вопросы нестационарной и стационарной трансформации получили в работах советских ученых.

Однако и в настоящее время многие проблемы трансформации воз-

душных масс требуют разрешения.

В данной работе рассматривается вопрос об изменении полей температуры и влажности воздушной массы под влиянием увлажнения



подстилающей поверхности и одновременного изменения теплопроводности почвы. Учет изменения теплопроводности почвы в такого рода задачах ранее не проводился.

Задача ставится следующим образом. Воздушная масса переходит с одной подстилающей поверхности на другую (рис. 1), при этом скачком меняются коэффициенты теплопроводности в почве.

Изменение коэффициента теплопроводности вызывает соответствующее изменение потоков тепла в почву и температурного поля как на уровне z=0, так и на других уров-

нях. Этот эффект ясен физически и может быть описан решением двух-слойной задачи теплопроводности при соответствующих граничных

условиях.

Поскольку изменение коэффициента теплопроводности часто связано с орошением, при котором трансформация поля температуры сопровождается перестройкой поля влажности, в систему уравнений данной задачи должно быть включено уравнение, характеризующее изменение влажности.

Таким образом, в настоящей работе решалась следующая система уравнений:

$$u(z)\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[k(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right], \qquad z > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \lambda_* \frac{\partial \Theta}{\partial z} = 0, \qquad z < 0$$

$$u(z)\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t} \left[k(z) \frac{\partial q}{\partial z} \right]$$
(I)

при граничных условиях:

1)
$$-T(x, z)|_{x=0} = T'(z),$$

 $q(x, z)|_{x=0} = q'(z),$
2) $T(x, z)|_{z\to\infty} = T'(\infty),$
 $q(x, z)|_{z\to\infty} = q'(\infty),$
3) $\Theta(x, z)|_{z=0} = T(x, z)|_{z=0},$
4) $q(x, z)|_{z=0} = rq_m(T),$
5) $\Theta(x, z)|_{z=n} = \Theta'(0, h),$

6)
$$\left[-k\rho c_{p}\frac{\partial T}{\partial z}-lk\rho\frac{\partial q}{\partial z}+\sigma T^{4}\right]_{z=0}=S_{k}(1-A)+S_{\pi}-\lambda_{*}\frac{\partial \Theta}{\partial z}\Big|_{z=0},$$

где T — температура воздуха, Θ — температура почвы, q — удельная влажность, λ_* — коэффициент теплопроводности почвы, h — глубина слоя, в котором известен коэффициент теплопроводности, r — коэффициент, характеризующий степень увлажнения подстилающей поверхности, S_h — коротковолновая радиация, $S_{\rm m}$ — длинноволновая радиация в кал/см² сек., A — альбедо.

При решении принималось:

$$u(z) = u_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\varepsilon},$$

$$k(z) = k_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^{1-\varepsilon}.$$

Задача решалась для отклонений температуры (в воздухе и почве) и влажности от значений элементов над неорошенной поверхностью (величины со штрихом):

$$\tau(x, z) = T(x, z) - T'(z),$$

 $\kappa(x, z) = g(x, z) - g'(z).$

Система уравнений, записанная для отклонений, имеет вид:

$$u(z)\frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[k(z) \frac{\partial \tau}{\partial z} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \lambda_* \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$u(z)\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left[k(z) \frac{\partial u}{\partial z} \right]$$
(II)

Соответствующим образом преобразуются и граничные условия.

Уравнения для отклонений записываются с учетом пропорциональности или равенства коэффициентов турбулентности для полупространств x < 0 и x > 0. Вообще говоря, коэффициенты турбулентности в воздухе над поверхностями различны за счет изменения температурной стратификации. В данной работе для простоты они принимались одинаковыми; хотя учет их различия не встречает принципиальных трудностей.

Считалось нецелесообразным также при получении предварительных оценок усложнять уравнение теплопроводности для почвы введением дополнительных членов (например, учитывающих горизонтальную диф-

фузию).

Решение задачи проводилось следующим образом: задавая значения отклонений температуры и влажности на уровне z=0 $\tau_0(x)$ и $\varkappa_0(x)$, соответственно записываем известные из работы [1] решения системы уравнений (II):

$$\tau\left(\zeta,\,\eta\right) = \frac{\left(\frac{\eta}{2}\right)^{2n}}{\Gamma\left(n\right)} \int_{0}^{\zeta} \frac{e^{-\frac{\eta^{2}}{4\left(\zeta-\nu\right)}} \tau_{0}\left(\nu\right)}{\left(\zeta-\nu\right)^{n+1}} d\nu,$$

$$\varkappa\left(\zeta,\,\eta\right) = \frac{\left(\frac{\eta}{2}\right)^{2n}}{\Gamma\left(n\right)} \int_{0}^{\zeta} \frac{e^{-\frac{\eta^{2}}{4\left(\zeta-\nu\right)}} \varkappa_{0}\left(\nu\right)}{\left(\zeta-0\right)^{n+1}} d\nu,$$

$$\vartheta\left(x,\,z\right) = \tau_{0}\left(x\right) \left[1 - \frac{z}{h}\right],$$

где

$$n = \frac{\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}, \quad \zeta = \frac{k_1 x}{u_1 z_1^2},$$
$$\eta = \frac{2}{1 + 2\varepsilon} \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{1 + 2\varepsilon}{2}}.$$

Функции $\tau_0(x)$ и $\kappa_0(x)$ находятся из граничного условия (6):

$$\begin{split} * \, \tau_0 &= -\frac{\varphi_0 L}{c_p + L\alpha} \left[1 - A \left(\zeta \right) \right] + \frac{F_0}{\mu} \, A \left(\zeta \right), \\ * \, \varkappa_0 &= \frac{\varphi_0 L}{c_p + L\alpha} \left[\alpha A \left(\zeta \right) + \frac{c_p}{L} \right] + \alpha \, \frac{F_0}{\mu} \, A \left(\zeta \right), \end{split}$$

где

$$A(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(\frac{\zeta^n}{\delta^2}\right)^k}{\Gamma(1+kn)},$$

$$F_0 = -\left(\lambda'_* - \lambda_*\right) \frac{\partial T'}{\partial z},$$

$$\mu = 4 \sigma T'^3 \left(1 - \frac{\lambda'_*}{4 \sigma T'^3 h}\right),$$

$$\varphi_0 = r q'_m(T) - q'(z)|_{z=0},$$

$$\alpha = r \frac{dq_m}{dT}|_{T=T'},$$

$$\delta^2 = \frac{k_1 \rho (c_p + L\alpha)}{z_1 (1-2n)^{1-2n} \Gamma(n)}$$

 $\left(\frac{\partial T'}{\partial z} \right)$ — средний градиент температуры в почве неорошенного участка).

И́з решения видно, что изменения температуры и влажности обусловливаются двумя причинами, первая из которых — орошение — описывается первым членом выражений (*); вторая — изменение теплопроводности — вторым членом.

В зависимости от знака $(\lambda_*' - \lambda_*)$ $\frac{\partial T'}{\partial z}$ эти члены имеют одинако-

вые или различные знаки и влияние теплопроводности либо снижает,

либо усиливает эффект, вызванный орошением.

Функция $A(\zeta)$, учитывающая зависимость найденных отклонений температуры и влажности от расслоения по горизонтам, изменяется от 0 (при x=0) до 1 (при $x=\infty$). Следовательно, разность температур, вызванная орошением, убывала при увеличении расстояния от границы раздела поверхностей. Разность же температур, вызванная различием теплопроводностей, увеличивается с ростом x, что может быть объяснено необходимостью затраты некоторого времени для полной перестройки температурного поля.

Максимальное различие в температуре и влажности разнородных поверхностей наблюдается, естественно, у поверхности земли. С высо-

той и глубиной эти различия затухают.

Решение, описывающее отклонения в зависимости от z и x, имеет вид:

$$\tau = -\frac{\varphi_0 L}{c_p + L\alpha} P_n(x, z) + \left[\frac{F_0}{\mu} + \frac{\varphi_0 L}{c_p + L\alpha} \right] \varepsilon_n(x, z),$$

$$x = \frac{\varphi_0 c_p}{c_p + L\alpha} P_n(x, z) + \alpha \left(\frac{F_0}{\mu} + \frac{\varphi_0 L}{c_p + L\alpha} \right) \varepsilon_n(x, z),$$

$$\vartheta = \tau_0(x) \left[1 - \frac{z}{h} \right],$$

где P_n и ε_n — комбинации известных функций. Они могут быть зата-

булированы.

Для оценки порядка величин т и и и выяснения закономерностей их изменения были проведены некоторые расчеты. Чтобы выделить роль отдельных факторов в процессе трансформации, расчеты выполнены как для случаев, учитывающих каждое из рассматриваемых воздействий на воздушную массу отдельно, так и с учетом суммарного эффекта. При расчете принято

$$T' = 20^{\circ}, \quad r = 0.7, \quad \frac{\lambda_*}{\lambda'_*} = 3.$$

Рисунки 2, 3 и 4 иллюстрируют приведенное выше решение, показывая зависимость $\tau = f(x)$ для разных z. На них видно, что наибольшее влияние на трансформацию оказывает эффект орошения, понижая температуру у поверхности земли на 1,0—1,3°. Изменение теплопроводности в данном примере приводит к небольшому росту температуры как у поверхности, так и на высотах, не превышающему величины градуса даже на больших расстояниях (порядка 10 км).

Соответственно при наличии обеих причин трансформации разность температур, обусловленная орошением, уменьшается по абсолютной

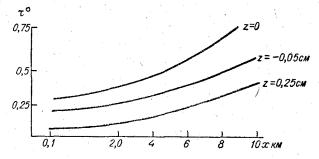


Рис. 2. Температурные отклонения, обусловленные изменением λ_{*} .

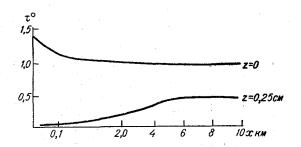


Рис. 3. Температурные отклонения, обусловленные орошением.

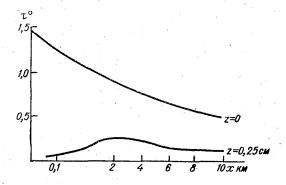


Рис. 4. Отклонения температуры, обусловленные суммарным эффектом.

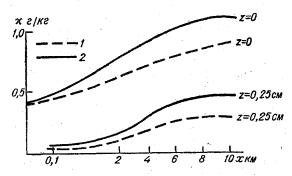


Рис. 5. Изменения влажности. 1 — орошение, 2 — суммарный эффект,

величине и убывает быстрее с ростом x. Аналогичные графики получены для изменения влажности (рис. 5).

Естественно, что большее различие коэффициентов теплопроводности повысит его роль в процессе трансформации.

В табл. 1 приведены величины τ , полученные для $\frac{\lambda_*}{\lambda_*'} = 7.5$ и $\frac{\lambda_*}{\lambda_*'} = 3$.

В заключение следует заметить, что эффект различия теплопроводности почвы может оказать заметное влияние на трансформацию воздушной массы, так как в природе нередки случаи значительного изменения теплопроводности, например при переходе на снежную поверхность.

Таблица 1

	Изменение величины т в зависимости от влияния									
х км	теплопро- водности	орошения	суммарного	теплопро- водности	орошения	суммарного				
0,1 2,0 5,0 7,0 10,0	0,74 0,75 1,4 1,5 1,86	$\frac{\lambda^*}{\lambda'_*} = 7,5$ $-1,23$ $-1,22$ $-1,08$ $-1,05$ $-1,00$	-0,8 -0,7 -0,5 -0,2 -0,08	0,06 0,25 0,49 — 0,74	$\frac{\lambda_*}{\lambda_*'} = 3$ -0,07 -0,35 -0,42 -0,43	$ \begin{array}{c c} -0.04 \\ -0.26 \\ -0.17 \\ \hline 0.02 \end{array} $				

Предложенный метод при соответствующей доработке может быть использован для вычисления потоков тепла в почву.

ЛИТЕРАТУРА

2. Чудновский А. Ф. Физика теплообмена в почве. Гостехиздат, 1948.

^{1.} Лайхтман Д. Л. О физических принципах нормирования орошения. Изв. АН СССР, сер. геоф. № 6, 1955.

К ВОПРОСУ О ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СВОБОДНОЙ АТМОСФЕРЕ

Получено общее выражение для профиля ветра в струйном течении при произвольном законе изменения горизонтального градиента давления с высотой f(z).

В качестве иллюстрации вычислены вертикальные профили ветра и порывистости для $f(z) = b\delta(z)$. По полученным формулам оценены величины коэффициента турбулентности k и порывистости ветра c^1 , типичные для струйных течений. Получены значения для $k \approx 500$ м²/сек., $c^1 \approx 1$ м/сек.

Турбулентность в свободной атмосфере возникает в слоях, где из-за значительного термического ветра числа Ричардсона становятся меньше некоторого критического значения. Обычно значительный термический ветер наблюдается в отдельных не очень больших слоях и соответственно турбулентность в свободной атмосфере носит слоистый характер. При известном вертикальном температурном градиенте и заданном геострофическом ветре можно найти коэффициент турбулентности и порывистость ветра, которые необходимы для оценки условий полета самолетов, расчета процессов диффузии, облакообразования и др. Пути решения такой задачи для частного профиля термического ветра приведены в работе [1]. Нетрудно, однако, получить решение для общего случая. Предположим, что профиль геострофического ветра есть функция высоты z

$$(u_g - u_{1g}) + i (v_g - v_{1g}) = f(z).$$
 (1)

Здесь u_{1g} и v_{1g} — компоненты геострофического ветра на далеком расстоянии от некоторого начального уровня в свободной атмосфере.

Вводя средний коэффициент турбулентной вязкости k, запишем уравнения движения

$$k\frac{d^2\Phi}{dz^2} - 2i\omega_z \left[\Phi(z) - f(z)\right] = 0.$$
 (2)

Здесь

$$\Phi(z) = u + iv - u_{1g} - iv_{1g}.$$

Решение этого уравнения можно записать в следующем виде:

$$\begin{split} \Phi\left(z\right) &= e^{a\sqrt{2i}\,z} \Bigg[C_1 - \sqrt{\frac{i}{2}} \, a \int_0^\infty e^{-a\sqrt{2i}\,\xi} \, f\left(\xi\right) d\xi \Bigg] + \\ &+ e^{a\sqrt{2i}\,z} \, \sqrt{\frac{i}{2}} \, a \int_{\mathbf{z}_-}^\infty e^{-a\sqrt{2i}\,\xi} \, f\left(\xi\right) d\xi + \end{split}$$

$$+e^{-a\sqrt{2i}z}\left[C_{2}+\sqrt{\frac{i}{2}}a\int_{0}^{\infty}e^{a\sqrt{2i}\xi}f(\xi)d\xi\right]+$$

$$+e^{-a\sqrt{2i}z}\sqrt{\frac{i}{2}}a\int_{z}^{\infty}e^{a\sqrt{2i}\xi}f(\xi)d\xi,$$

$$a=\sqrt{\frac{\omega_{z}}{k}}.$$

Постоянные C_1 и C_2 определяются из условия

$$\Phi(z)|_{z\to\pm\infty}\to 0.$$

Очевидно, что для выполнения этого условия необходимо положить:

$$\begin{split} C_1 &= \sqrt{\frac{i}{2}} \; a \int\limits_0^\infty \; e^{-\,a\,\sqrt{2i}\,\xi} \; f\left(\xi\right) d\xi, \\ C_2 &= -\,\sqrt{\frac{i}{2}} \; a \int\limits_0^\infty \; e^{a\,\sqrt{2i}\,\xi} \; f\left(\xi\right) d\xi. \end{split}$$

При этом на функцию f(z) накладываются следующие ограничения:

$$\lim_{z \to \pm \infty} \int_{z}^{\infty} e^{a\sqrt{2i}(z-\xi)} f(\xi) d\xi = 0,$$

$$\lim_{z \to \pm \infty} \int_{z}^{-\infty} e^{-a\sqrt{2i}(z-\xi)} f(\xi) d\xi = 0.$$

Легко показать, что если $f(\xi)$ — симметричная функция, то второе условие эквивалентно первому ($z \to -\infty$ во втором условии соответствует $z \to +\infty$ в первом и т. д.).

Итак, общее решение (2), удовлетворяющее условию

$$\Phi|_{z\to\pm\infty} \to 0,$$

имеет следующий вид:

$$\Phi = a \sqrt{\frac{i}{2}} \left[e^{a\sqrt{2i}z} \int_{z}^{\infty} e^{-a\sqrt{2i}\xi} f(\xi) d\xi - e^{-a\sqrt{2i}z} \int_{z}^{\infty} e^{a\sqrt{2i}\xi} f(\xi) d\xi \right] = u(z) + iv(z) - u_{1g} - iv_{1g}.$$
(2a)

При этом функция f(z) должна быть такой, что

$$\lim_{z \to +\infty} \int_{z}^{\infty} e^{a\sqrt{2i}(z-\xi)} f(\xi) d\xi = 0.$$

$$f(\xi) = \begin{cases} u_0 e^{-\alpha z} & \text{для } z \geqslant 0 \\ u_0 e^{\alpha z} & \text{для } z \leqslant 0 \end{cases}$$
 (3)

из формулы (2a) вытекают результаты, полученные в упомянутой работе. Если к полученному решению добавить уравнение баланса энергии турбулентности, то при заданном вертикальном градиенте температуры в принципе можно для любого профиля геострофического ветра

получить интересующие нас характеристики турбулентности.

В качестве примера, представляющего вместе с тем определенный практический интерес, рассмотрим частный случай — наличие сильного скачка горизонтального градиента давления в узком интервале высот. В таком случае естественно аппроксимировать зависимость горизонтального градиента давления от высоты δ функцией:

$$\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial y} = b\delta(z) \} = \mathcal{N}_{Q}(2)$$

$$\frac{1}{\rho l} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. = \mathcal{N}_{Q}(2)$$
Здесь b — постоянная размерности T^{-1} . λ^{2} — λ^{2}

Из общего решения задачи путем подстановки в нее $f(\xi) = b\delta(\xi)$ сразу получаем:

$$\Phi(z) = \frac{ab}{\sqrt{2i}} e^{-az} [i \sin az - \cos az] \quad (z \geqslant 0).$$

Откуда, разделив вещественную и мнимую части, получим компонент скорости ветра:

$$u - u_1 = \frac{ab}{2} e^{-az} [\cos az + \sin az],$$

$$v = \frac{ab}{2} e^{-az} [\cos az - \sin az] \qquad (z \geqslant 0).$$

Модуль скорости будет иметь следующий вид:

$$c(z) - u_1 \approx \sqrt{(u - u_1)^2 + v^2} = \frac{ab}{\sqrt{2}} e^{-az}.$$

При z < 0 получим

$$c(z) - u_1 \approx \frac{ab}{\sqrt{2}} e^{az}$$
.

Таким образом, при $u_g(z) = b\delta(z)$ производная от модуля скорости ветра имеет разрыв на оси струи. По-видимому, профиль горизонтального градиента давления можно считать д-функцией, если наблюдаемая струя узкая и имеет резкий максимум.

При условии (4) турбулентность в струе можно определить двумя

независимыми способами.

1) По измеренным значениям скорости ветра на оси струи C_0 и ее полуширины z_1 . Из соотношений

$$c_0 = [c(z) - u_1]_{z=0} = \frac{ab}{\sqrt{2}}$$
 (5)

И

$$\frac{1}{2}(c_0') - u_1) = \frac{ab}{\sqrt{2}} e^{-az_1}$$

следует, что

$$z_1 = \frac{0.695}{a}$$

откуда

$$\frac{k}{\omega_z} = \frac{z_1^2}{0.49} \,. \tag{6}$$

2) По измеренному среднему градиенту температуры в струе — $\frac{\partial T}{\partial z}$. В результате интегрирования уравнения баланса энергии турбулентности получаем:

$$g\overline{\beta}H = aC_0^2 [1 - e^{-2aH}].$$
 (7)

Здесь

$$\overline{\beta} = \frac{1}{\overline{\mathit{T}}} \left(\gamma_{\alpha} + \frac{\partial \mathit{T}}{\partial \mathit{z}} \right).$$

Если выбрать толщину слоя H так, чтобы в слое содержалось 75% энергии турбулентности, то получится

$$H = \frac{0,695}{a}$$
.

Тогда из (7) следует, что

$$\frac{k}{\omega_z} = \frac{1,08}{g\frac{\overline{\beta}}{c_0^2}}.$$
 (8)

Порывистость ветра можно определить из соотношения

$$c'^2 = k \left| \frac{dc}{dz} \right| = kac_0 e^{-az}, \ z \geqslant 0.$$

Максимальное значение порывистости находится на оси струи; оно равно

$$c'_{\text{max}} = \sqrt{\sqrt{k\omega_z} c_0} \,. \tag{9}$$

Легко видеть, что расстояние z_0 , на котором порывистость убывает в два раза по сравнению с максимальной, равно удвоенной полуширине струи.

Действительно,

$$c' = c'_{\text{max}} e^{-\frac{az}{2}}$$
 $(z \ge 0),$

откуда

$$z_0 = \frac{2 \cdot 0.695}{a} = 2 z_1.$$

По вертикальному профилю порывистости нетрудно найти толщину слоя h_0 с интенсивной болтанкой. Для этого надо воспользоваться тем, что самолеты начинают реагировать на порывистость, превосходящую некоторое определенное значение c_0 (которое зависит от типа самолета).

Из предыдущей формулы следует, что

$$h_0 = \frac{4}{a} \ln \frac{c'_{\text{max}}}{c'_0} = \frac{4 c_0}{\sqrt{g\beta}} \ln \frac{c'_{\text{max}}}{c'_0}$$
 (10)

Порядок величины коэффициента турбулентности и значения c'_{\max} в струйных течениях можно оценить по полученным формулам (8) и (9), подставив в них наиболее типичные для струйных течений значения $\overline{\beta}$ и c_0 .

Средний градиент температуры на высоте 8—9 км составляет — 6,5 град/км, средняя температура — около 250° К. Следовательно,

 $\beta \approx 0.14 \cdot 10^{-4} \text{ m}^{-1}$.

Средняя скорость на оси струйного течения приблизительно равна 40 м/сек. Если скорость ветра вне течения составляет около 10 м/сек., то величина $c_0 \approx 30$ м/сек. При таких значениях $\overline{\beta}$ и c_0 из (8) имеем $k \approx 500$ м²/сек. при $\omega_z = 6,3 \cdot 10^{-5}$ сек $^{-1}$. Примерно такая же величина k получается из (6) при $z_1 = 2$ км.

Из (9) следует порядок величины максимальной порывистости ветра

в струйном течении $c'_{\max} \approx 1$ м/сек.

О СХОДИМОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

При исследовании теплообмена в пограничном слое атмосферы возникает необходимость численного решения уравнения теплопроводности для полуограниченной среды при однородных начальных условиях.

В статье показано, что если $\delta t \leqslant \frac{(\delta z)^2}{2\,k}$, то при $t \to \infty$ численное решение сходится к аналитическому вне зависимости от величины шагов δt и δz .

В настоящее время получили широкое применение численные методы исследования метеорологических задач. Для изучения многих задач, связанных с теплообменом в пограничном слое, возникает необходимость численного решения уравнения теплопроводности. При этом важное значение приобретает исследование сходимости и устойчивости численного решения. Из литературных источников известно, что соблюдение следующего соотношения между шагом по времени δt и шагом по высоте δz

$$\delta t \leqslant \frac{(\delta z)^2}{2 k} \tag{1}$$

обеспечивает устойчивость численного решения по отношению к случайным ошибкам в процессе счета и сходимость численного решения к аналитическому при измельчении сетки (k — коэффициент турбулентности). Это строго доказано для постоянного k, но некоторые соображения и практика численного решения показывают, что указанное соотношение справедливо и для переменного k [1]. В последующем случае вместо k следует использовать его максимальное значение в области нахождения решения.

Как указывает Рихтмайер [2], можно ставить вопрос об устойчивости и сходимости численного решения к аналитическому не только при измельчении сетки, но и при $t \rightarrow \infty$. Исследованию сходимости в этом смысле до сих пор уделялось меньше внимания.

Рассмотрим следующую задачу.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

$$t = 0: T = 0,$$

$$z = 0: T = 1,$$

$$z = \infty: T = 0.$$
(2)

Несмотря на простоту, задаче свойственны две особенности, характерные для многих метеорологических задач: условие затухания теплового влияния подстилающей поверхности с удалением от нее и однородные начальные условия.

Построим в области решения прямоугольную сетку. Заменяя уравнение (1) конечными разностями и не накладывая пока на δt и δz никаких ограничений, мы можем записать следующие расчетные формулы, позволяющие найти численное решение задачи (2) по «треугольной»

$$T^{i+1, j} = (T^{i, j-1} + T^{i, j+1}) \alpha + T^{ij} \beta,$$

$$\alpha = \frac{\delta tk}{(\delta z)^2}, \qquad \beta = 1 - 2\alpha,$$
(3)

где i — номер шага по времени, j — номер шага по высоте.

Численное решение можно записать в виде табл. 1. Из этой таблицы видно, что при треугольной схеме расчета условие затухания теплового влияния подстилающей поверхности на бесконечности автоматически.

Решение на каждом уровне может быть представлено в виде двойного ряда:

$$T^{i, j} = C_{ij} \left[\frac{0!}{0! \, 0!} \beta^0 + \frac{1!}{0! \, 1!} \beta^1 + \dots + \frac{(i-1)!}{0! \, (i-1)!} \beta^{i-1} \right] \alpha + C_{2j} \left[\frac{1!}{1! \, 0!} \beta^0 + \frac{2!}{1! \, 1!} \beta^1 + \dots + \frac{(i-1)!}{1! \, (i-2)!} \beta^{i-2} \right] \alpha^2 + \dots$$
(4)

Для вычисления коэффициентов C_{ij} можно использовать табл. 2. Эта таблица строится аналогично известной таблице Паскаля для вычисления биномиальных коэффициентов. Каждое нижнее число является суммой двух верхних. Первая диагональная строка — единицы, вторая — натуральный ряд чисел, слева приписывается вертикальный столбец нулей. Недостатком этой таблицы является то, что если нужны коэффициенты для фиксированного ј, то все равно приходится строить

Коэффициенты C_{ij} можно находить по следующим формулам:

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & i < j \\ 1 & i = j \\ j & i = j+2 \end{cases}$$

$$C_{ij} = 2 \left[\frac{(i-5)!}{\left(\frac{i+j}{2} - 3\right)! \left(\frac{i-j}{2} - 2\right)!} - \frac{(i-5)!}{\left(\frac{i+j}{2} - 2\right)! \left(\frac{i-j}{2} - 3\right)!} \right] + 3 \left[\frac{(i-6)!}{\left(\frac{i+j}{2} - 4\right)! \left(\frac{i-j}{2} - 2\right)!} - \frac{(i-6)!}{\left(\frac{i+j}{2} - 2\right)! \left(\frac{i-j}{2} - 4\right)!} \right] + \dots i \geqslant j+4.$$
 (5)

Если i и j разной четности, то $C_{ij} = 0$. По формуле (5) находятся коэффициенты, впервые появляющиеся на і-том шаге для данного уровня (табл. 1). Ввиду того что по этой формуле рассчитываются коэффициенты, когда i и j одинаковой четнособой $\frac{1}{B(x,y)}$, сти, входящие сюда величины представляют B(x, y) — бэта-функция, а x и y — целые числа.

				j		
1	i	1	2	3	4	5
. 1	0	0	0	0	0	0
1	1	α	0	0	.0	0
1	2	$\alpha (1 + \beta)$	α2	0	0	0
1.	3	$\left \alpha\left(1+\beta+\beta^2\right)+\alpha^3\right $	$\alpha^2 (1+2\beta)$	α3	0	0
1	4	$ \begin{array}{c} \alpha (1 + \beta + \beta^2 + \\ + \beta^3) + \alpha^3 (1 + 3\beta) \end{array} $	$\begin{vmatrix} \alpha^2 (1 + 2\beta + 3\beta^2) + \\ + 2\alpha^4 \end{vmatrix}$	$\alpha^3 (1+3\beta)$	α4	0
1	5	$ \begin{array}{l} \alpha (1 + \beta + \beta^2 + \\ + \beta^3 + \beta^4) + \\ + \alpha^3 (1 + 3\beta + \\ + 6\beta^2) + 2\alpha^5 \end{array} $	$\begin{vmatrix} \alpha^{2} (1 + 2\beta + 3\beta^{2} + + 6\beta^{3}) + 2\alpha^{4} (1 + + 4\beta) \end{vmatrix}$	$a^{3}(1+3\beta+6\beta^{2})+3\alpha^{5}$	$\alpha^4 (1+4\beta)$	_α 5

Таблица 2

							j					
	i	1	. 2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
												_
	1	1			Ì				İ		ĺ	
0	2		1									
	3	1		. 1			, .					
. 0	4		2		1							
	5 }	2		3	:	1						
0 /	6	·	5		4		1		el el			
	7	5		9		5		1				
0	8	,	14		14		6		1			-
	9	14		28		20		7		1		·
0	10		42		48		27		8		1	
	11	42		90		75		35		9		1

При расчетах C_{ij} следует иметь в виду, что бэта-функция обращается в бесконечность, когда хотя бы один из ее аргументов является отрицательным целым числом. Соответствующие слагаемые в формуле равны нулю.

Аналитическое решение (2) известно: для всех высот при $t\to\infty$ оно равно единице. Для того чтобы ряд сходился, нужно чтобы сходились

ряды, входящие в каждое слагаемое. Эти ряды можно записать в следующей форме:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{k! \ n!} \left(1 - \frac{1}{a}\right)^k.$$

Можно показать, что этот ряд сходится при a>1 и его сумма равна a^{n+1} . Условие a>1 в нашем случае соответствует условию (1). Покажем, что это условие является не только необходимым, но и достаточным, обеспечивающим сходимость численного решения к аналитическому при $t\to\infty$. Подставляя в (4) суммы входящих в коэффициенты рядов при $i\to\infty$, получим выражение для численного решения при $t\to\infty$

$$T^{\infty j} = \frac{C_{1j}}{2} + \frac{C_{3j}}{2^3} + \frac{C_{5j}}{2^5} + \dots$$
 (6)

Можно показать, что этот ряд сходится, хотя и медленно, так как $\frac{C_{i+2,j}}{C_{ii}}$ при $i \Rightarrow \infty$ стремится к 4 снизу.

Действительно $T^{\infty J}$ представлено формулой (6) в виде бесконечного ряда, слагаемые которого состоят из произведения чисел натурального ряда на комбинации следующего вида:

$$\frac{(i-5-a)!}{\left(\frac{i+j}{2}-3-a\right)!\left(\frac{i-j}{2}-2\right)!} - \frac{(i-5-a)!}{\left(\frac{i+j}{2}-2\right)!\left(\frac{i-j}{2}-3-a\right)!}$$

Если мы покажем, что в соотношении $\frac{b-c}{d-e}$

$$\lim_{i \to \infty} \frac{b}{d} = 4 \quad \text{if } \lim_{i \to \infty} \frac{c}{e} = 4,$$

TO

$$\lim_{i \to \infty} \frac{b-c}{d-e} = 4.$$

Действительно,

$$\lim_{i \to \infty} \frac{b}{i} = \lim_{i \to \infty} \left[\frac{(i-3-a)!}{\left(\frac{i+j}{2} - 2 - a\right)! \left(\frac{i-j}{2} - 1\right)!} : \frac{(i-5-a)!}{\left(\frac{i+j}{2} - 3 - a\right)! \left(\frac{i-j}{2} - 2\right)!} \right] = \lim_{i \to \infty} \frac{(i-3-a)(i-4-a)}{\left(\frac{i+j}{2} - 2 - a\right) \left(\frac{i-j}{2} - 1\right)} = 4.$$

Аналогичные выклады проводятся и для $\frac{c}{e}$. Учитывая члены, содержащие i в первой степени, легко установить, что при больших i $\frac{Ci+2,j}{Cij}=4-\epsilon$, причем при $i\to\infty$ $\epsilon\to0$. Следовательно, на основании признака Даламбера ряд (6) сходится абсолютно. Отсюда можно сделать вывод, что в рассмотренном случае численное решение при $t\to\infty$ стремится к постоянному пределу вне зависимости от того, какие мы выбрали шаги δt и δz , при условии выполнения критерия (1).

Можно показать, что численное решение при $t \to \infty$ стремится к 1, т. е.

к аналитическому решению. В качестве примера покажем это для уровня j=1.

Подставляя в (6) рассчитанные по (5) коэффициенты C_{ij} и произ-

водя группировку, можно записать:

$$T^{\infty 1} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3} + \frac{2}{2^{5}} \left(\frac{0!}{2^{0} \, 0! \, 0!} + \frac{2!}{2^{2} \, 1! \, 1!} + \frac{4!}{2^{4} \, 2! \, 2!} + \dots\right) + \frac{3}{2^{7}} \left(\frac{1!}{2^{0} \, 0! \, 1!} + \frac{3!}{2^{2} \, 1! \, 2!} + \frac{5!}{2^{4} \, 2! \, 3!} + \dots\right) + \frac{4}{2^{9}} \left(\frac{2!}{2^{0} \, 0! \, 2!} + \frac{4!}{2^{2} \, 1! \, 3!} + \frac{6!}{2^{4} \, 2! \, 4!} + \dots\right) + \dots - \frac{2}{2^{7}} \left(\frac{2!}{2^{9} \, 0! \, 2!} + \frac{4!}{2^{2} \, 1! \, 3!} + \frac{4!}{2^{2} \, 1! \, 3!} + \frac{6!}{2^{4} \, 2! \, 4!} + \dots\right) - \frac{3}{2^{9}} \left(\frac{3!}{2^{9} \, 3! \, 0!} + \frac{5!}{2^{2} \, 4! \, 1!} + \frac{7!}{2^{4} \, 5! \, 2!} + \dots\right) - \frac{4!}{2^{1}} \left(\frac{4!}{2^{9} \, 4! \, 0!} + \frac{6!}{2^{2} \, 5! \, 1!} + \frac{8!}{2^{4} \, 6! \, 2!} + \dots\right) - \dots$$

$$(7)$$

Сюда входят ряды следующего типа:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \frac{(a+2k)!}{k! (a+k)!}.$$

Преобразуем этот ряд, используя соотношение

$$\Gamma(2z) = \Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}},$$

отсюда

$$(a+2k)! = \Gamma(a+2k+1) = \Gamma(k+\frac{a}{2}+\frac{1}{2})\Gamma(k+\frac{a}{2}+1)\frac{2^{2k+a}}{\sqrt{\pi}},$$

$$= \frac{2^{a}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{a}{2} + 1\right)}{k! \Gamma\left(a + k + 1\right)} =$$

$$= \frac{2^{a}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k + \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(k + \frac{a}{2} + 1\right)}{k! \Gamma\left(a + k + 1\right)} =$$

$$= \frac{2^{a}}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(k + \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right)! \left(k + \frac{a}{2}\right)!}{k! \left(a + k\right)!} =$$

$$= \frac{2^{a} \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right)! \left(\frac{a}{2}\right)!}{\sqrt{\pi} a!} \left[1 + \frac{\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{a}{2} + 1\right)}{1! \left(a + 1\right)} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{a}{2} + \frac{3}{2}\right) \left(\frac{a}{2} + 1\right) \left(\frac{a}{2} + 2\right)}{2! \left(a + 1\right) \left(a + 2\right)} + \dots \right].$$

Мы выразили интересующий нас ряд через гипергеометрическую функцию F (α , β ; γ ; 1), сумма которой известна. После некоторых преобразований получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \frac{(a+2k)!}{k! (a+k)!} = \frac{2^a}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}+1\right) \Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)} = -a2^a.$$
 (8)

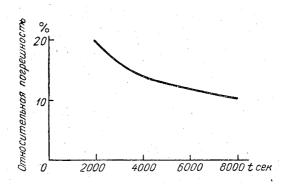


Рис. 1. Зависимость относительной погрешности от времени при решении методом сеток двухслойной задачи воздух — почва.

Теперь подставим вычисленные по формуле (8) суммы рядов в (7)

$$T^{\infty 1} = 0.5 + 0.125 + \frac{1}{2^{5}} \left(\frac{2^{2}}{2^{0}} + \frac{3^{2}}{2^{1}} + \frac{4^{2}}{2^{2}} + \dots \right) -$$

$$- \frac{1}{2^{6}} \left(\frac{1 \cdot 3}{2^{0}} + \frac{2 \cdot 4}{2^{1}} + \frac{3 \cdot 5}{2^{2}} + \dots \right) = 0.5 + 0.125 + 0.125 +$$

$$+ \frac{1}{2^{6}} (3^{2} - 1 \cdot 3) + \frac{1}{2^{7}} (4^{2} - 2 \cdot 4) + \dots =$$

$$= 0.750 + \frac{1}{2^{5}} \left(\frac{3}{2^{0}} + \frac{4}{2^{1}} + \frac{5}{2^{2}} + \dots \right).$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a+kr) q^k = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2} ,$$

ΤO

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+3}{2^k} = 8 \quad \text{if} \quad T^{\infty 1} = 1,$$

что и требовалось доказать.

Мы показали, что при выполнении критерия (1) при $t \to \infty$ численное решение сходится к аналитическому, какая бы сетка не использовалась. Поэтому при расчетах для больших t следует использовать как можно более крупную сетку, что приводит к существенной экономии

времени решения задачи. К измельчению сетки следует прибегать

только при расчетах для малых t.

На рис. 1 приводится изменение относительной погрешности численного решения для двухслойной задачи воздух — почва для ночного понижения температуры. Решение задачи осуществлялось на электронной машине «Урал».

ЛИТЕРАТУРА

1. Рябенький В. С., Филиппов А. Ф. Об устойчивости разностных уравнений. Гостехиздат, М., 1956. 2. Рихтмайер Р. Д. Разностные методы решения краевых задач. ИЛ, М., 1960.

О ВЛИЯНИИ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СТРОЕНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ

В работе получено распределение основных метеорологических элементов и характеристик турбулентности с учетом изменения с высотой горизонтального градиента давления. Решалась система уравнений движения, притока тепла, диффузии водяного пара, теплопроводности почвы и баланса энергии турбулентности. В эти уравнения были введены соответствующие члены, учитывающие горизонтальную неоднородность температуры. На основании полученных формул сделана численная оценка влияния горизонтального градиента температуры на некоторые характеристики пограничного слоя.

При решении системы уравнений, описывающих стационарное распределение метеорологических элементов внутри пограничного слоя, обычно предполагается [1, 2, 3], что горизонтальный градиент давления в пограничном слое постоянен с высотой. Между тем при наличии горизонтальных термических градиентов это условие не выполняется.

Распределение давления по высоте описывается экспоненциальным

$$p(z) = p_0 e^{-\frac{g}{R} \int \frac{dz}{T(z)}}.$$

Дифференцируя это выражение при использовании формулы Клапейрона, получают зависимость горизонтального градиента давления от высоты

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial n} + \frac{g}{T} \int_0^z \frac{\partial T}{\partial n} dz =$$

$$= V_{0g} l + \frac{g}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{z < h} h + \frac{g}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{z > h} (z - h).$$

Здесь p и p_0 — давление воздуха на высоте z и у земли соответственно, $T \approx T_0$ — абсолютная температура,

$$V_{0g} = \frac{1}{\rho_0 l} \frac{\partial p_0}{\partial n}$$
,

h — высота приземного подслоя, $\frac{\partial T}{\partial n}$ — горизонтальный градиент температуры, различный в приземном и пограничном слоях, но постоянный по высоте в пределах данного слоя.

С использованием полученного выражения уравнения движения при наличии горизонтального градиента температуры может быть записано в виде:

$$\frac{d}{dz} k \frac{du}{dz} + 2 \omega_z (v - \alpha_y z) = 0$$

$$\frac{d}{dz} k \frac{dv}{dz} - 2 \omega_z (u - \alpha_x z - V_{0g}) = 0$$

$$z_0 < z < h$$
(1)

$$\frac{d}{dz} k \frac{du}{dz} + 2 \omega_{z} \left[v - \alpha_{y} z - \Delta \alpha_{y} (z - h) \right] = 0$$

$$\frac{d}{dz} k \frac{dv}{dz} - 2 \omega_{z} \left[u - \alpha_{x} z - \Delta \alpha_{x} (z - h) - V_{0g} \right] = 0$$

$$\uparrow DH$$

$$z > h, \qquad (2)$$

Здесь ось х направлена по наземной изобаре,

$$a_{y} = \frac{g}{2 \omega_{z} T} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{z < h}, \quad a_{x} = -\frac{g}{2 \omega_{z} T} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{z < h},$$

$$(\alpha_{y} + \Delta \alpha_{y}) = a_{y} = \frac{g}{2 \omega_{z} T} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{z > h},$$

$$(\alpha_{x} + \Delta \alpha_{x}) = a_{x} = -\frac{g}{2 \omega_{z} T} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{z > h}.$$

К этим уравнениям, описывающим распределение ветра в пограничном слое, добавляются уравнения притока тепла, диффузии водяного пара, распределения температуры в почве и уравнение баланса энергии турбулентности:

$$\frac{d}{dz} k(z) \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_a \right) + \frac{1}{\rho c_p} \frac{dQ(z)}{dz} = u(z) \frac{\partial T}{\partial x} + v(z) \frac{\partial T}{\partial y}, \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dz} k \frac{dq}{dz} = 0, (4)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\zeta^2} = 0, (5)$$

$$(1-\delta)\int_{z_0}^{H} k \left(z\right) \left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2 \right] dz - \int_{z_0}^{H} \frac{g}{T} k(z) \left[\frac{dT}{dz} + \gamma_a \right) dz = 0. \quad (6)$$

Здесь Q(z) — лучистый поток тепла, δ — параметр, характеризующий диссипацию энергии турбулентности в тепло [1].

В данной работе, как и в предыдущих работах, посвященных строению пограничного слоя, для исключения диффузии энергии турбулентности уравнение баланса энергии турбулентности используется в интегральной форме, что вызывает необходимость задавать закон изменения коэффициента турбулентности с высотой и вводить дополнительное условие, определяющее высоту пограничного слоя. Мы принимали, согласно [3],

$$k(z) = \begin{cases} \frac{x^{2}c_{1}}{\ln \frac{z_{1}}{z_{0}}} z & \text{при } z_{0} < z < h \\ \frac{x^{2}c_{1}}{\ln \frac{z_{1}}{z_{0}}} h = k_{H} & \text{при } z > h \end{cases}$$
 (7)

 $c_1 = \sqrt{|u_1|^2 + |v_1|^2}$ — скорость ветра на высоте 1 м.

Высота пограничного слоя определялась как высота, на которой изменение ветра обусловлено только термическим градиентом:

$$\frac{d}{dz} \sqrt{u^{2} + v^{2}} \Big|_{z=H} = \frac{u}{\sqrt{u^{2} + v^{2}}} \left(\frac{du}{dz} + \frac{v}{u} \frac{dv}{dz} \right) \Big|_{z=H} = \frac{u_{H}}{\sqrt{u_{H}^{2} + v_{H}^{2}}} \left(a_{x} + \frac{v_{H}}{u_{H}} a_{y} \right).$$
(8)

Полученная система (1) — (6) и (8), содержащая неизвестные функции u, v, T, q, ϑ и параметры H, h, решалась при следующих краевых условиях:

$$\lim_{z \to z_0} u(z) = \lim_{z \to z_0} v(z) = 0, \tag{9}$$

$$u(z)|_{z=h-0} = u(z)|_{z=h+0}, \quad v(z)|_{z=h-0} = v(z)|_{z=h+0},$$
 (10)

$$\frac{du\left(z\right)}{dz}\Big|_{h=0} = \frac{du\left(z\right)}{dz}\Big|_{h=0}, \quad \frac{dv\left(z\right)}{dz}\Big|_{h=0} = \frac{dv\left(z\right)}{dz}\Big|_{h=0}, \tag{11}$$

$$\lim_{z \to \infty} \frac{u}{z} = a_x, \quad \lim_{z \to \infty} \frac{v}{z} = a_y, \tag{12}$$

$$T(z)|_{z=H} = T_H, \quad q(z)|_{z=H} = f_H q_m(T_H),$$
 (13)

$$q(z)|_{z=z_0} = f_0 q_m(T_0),$$

$$R = \left| -k\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) - k\rho L \frac{\partial q}{\partial z} - \beta \left(T_0 - \vartheta_0 \right) \right) \right|_{z=z_0}, \tag{14}$$

$$\vartheta \left(\zeta \right) \big|_{\zeta = z_0} = T \left(z \right) \big|_{z = z_0}, \tag{15}$$

$$\vartheta\left(z\right)\big|_{\zeta=z}=\vartheta_{0}.\tag{16}$$

Решение системы производилось следующим образом. Сначала интегрировались уравнения движения (1) и (2) при условиях (7), (9) — (12). Полученное решение позволило на основании условия (8) получить распределение скорости ветра, считая известной только высоту пограничного слоя H. Это решение использовалось при интегрировании уравнения притока тепла (3) при условии (13) [вместо условия (14) временно принималась известная температура поверхности T_0]. Затем для нахождения H применялось уравнение баланса энергии турбулентности (6), в котором T_0 также считалось известной величиной, и, наконец, из условия теплового баланса (14) определялась температура подстилающей поверхности T_0 , которая и подставлялась в уравнение (6).

Полученное трансцендентное уравнение для определения H реша-

лось последовательными приближениями.

В работе Г. Х. Цейтина и <u>Л. Р. Орленко</u> [2] дано решение уравнения движения с использованием соотношения (7) без учета термического ветра.

Уравнения (1) и (2) путем введения комплексной функции

$$W(z) = u + iv - V_{0g} - (\alpha_x + i\alpha_y)z - \frac{\alpha_x + i\alpha_y}{2i\omega_z} \frac{dk}{dz} - f(z),$$

$$f\left(z\right) = \begin{cases} 0 & \text{при } z < h \\ \left(\Delta\alpha_x + i\Delta\alpha_y\right)\left(z - h\right) & \text{при } z > h, \end{cases}$$

сводятся к виду, аналогичному тому, какой имеют уравнения в упомянутой работе. В таком случае уравнение

$$\frac{d}{dz}k(z)\frac{dW}{dz} - 2\omega_z iW(z) = 0$$
 (17)

будет справедливым для всего пограничного слоя $z_0 < z < H$, а граничные условия примут вид:

$$\lim_{z \to z_0} W(z) = -V_{0g} - \frac{\alpha_x + i\alpha_y}{2i\omega_z} \frac{dk}{dz}, \tag{9a}$$

$$W(z)|_{z=h-0} + \frac{\alpha_x + i\alpha_y}{2i\omega_z} \frac{dk}{dz} = W(z)|_{z=h+0},$$
 (10a)

$$\frac{dW(z)}{dz}\Big|_{z=h-0} = \frac{dW(z)}{dz}\Big|_{z=h+0} + (\Delta\alpha_x + i\Delta\alpha_y). \tag{11a}$$

Решение уравнения (17) при данных краевых условиях можно представить следующим образом:

$$W = -\frac{V_{0g} + A}{G(h, z_0) - G_1(z_0, h)} \{G(h, z) - G_1(z, h)\} + \Delta W, \tag{18}$$

где

$$\Delta W = \frac{G\left(z_{0}z\right)}{\left[G\left(h,z_{0}\right)-G_{1}\left(z_{0},h\right)\right]}\left[A-A_{1}h\sqrt{\frac{2\,i\omega_{z}}{k_{H}}}\right],$$

$$G\left(y,z\right) = K_{0}\left(x_{h}\sqrt{\frac{iy}{h}}\right)I_{0}\left(x_{h}\sqrt{\frac{iz}{h}}\right)-I_{0}\left(x_{h}\sqrt{\frac{iy}{h}}\right)k_{0}\left(x_{h}\sqrt{\frac{iz}{h}}\right),$$

$$G_{1}\left(z_{0},h\right) = K_{0}\left(x_{h}\sqrt{\frac{iz_{0}}{h}}\right)I_{1}\left(x_{h}\sqrt{i}\right)+I_{0}\left(x_{h}\sqrt{\frac{iz_{0}}{h}}\right)K_{1}\left(x_{h}\sqrt{i}\right),$$

$$A = \frac{a_{x}+ia_{y}}{il}\frac{dk}{dz}, \quad A_{1}h\sqrt{\frac{2\,i\omega_{z}}{k_{H}}} = \frac{\Delta a_{x}+i\Delta a_{y}}{\sqrt{\frac{il}{k_{H}}}},$$

$$x_{h} = 2h\sqrt{\frac{2\,\omega_{z}}{k_{H}}}, \quad l = 2\,\omega\sin\varphi,$$

I и *K* — функции Бесселя.

Разделив в этих формулах вещественные и мнимые части, решение (18) можно привести к следующему виду, более удобному для расчетов:

1. Для слоя
$$z_0 < z < h$$

$$u = \frac{\ln \frac{z}{z_0} \left[(V_{0g} + b_1) \left(r_1 (x_h) + \ln \frac{h}{z_0} \right) - b_2 r_2 (x_h) \right]}{\left[r_1 (x_h) + \ln \frac{h}{z_0} \right]^2 + r_2^2 (x_h)} [1 + \Delta_1 (z)],$$

$$v = \frac{\ln \frac{z}{z_0} \left[(V_{0g} + b_1) r_2 (x_h) + b_2 \left(r_1 (x_h) + \ln \frac{h'}{z_0} \right) \right]}{\left[r_1 (x_h) + \ln \frac{h}{z_0} \right]^2 + r_2^2 (x_h)} [1 + \Delta_2 (z)],$$

$$\sqrt{u^{2} + v^{2}} = \sqrt{\frac{(V_{0g} + b_{1})^{2} + b_{2}^{2}}{\left[r_{1}(x_{h}) + \ln\frac{h}{z_{0}}\right]^{2} + r_{2}^{2}(x_{h})}} \ln\frac{z}{z_{0}} \left[1 + \Delta(z)\right],$$

$$tg \alpha = \frac{\frac{r_{2}(x_{h})}{r_{1}(x_{h}) + \ln\frac{h}{z_{0}}} + \frac{b_{2}}{V_{0g} + b_{1}}}{1 - \frac{b_{2}}{V_{0g} + b_{1}}} \cdot \frac{r_{2}(x_{h})}{r_{1}(x_{h}) + \ln\frac{h}{z_{0}}}.$$

Здесь

$$b_{1} = \sqrt{\frac{\frac{k_{H}}{2i}}{2i}} \left[\frac{(\alpha_{x} + \Delta \alpha_{x}) + \left(1 + \frac{x_{h}}{2}\sqrt{2}\right)(\alpha_{y} + \Delta \alpha_{y})}{1 + \frac{x_{h}}{2}\sqrt{2} + \frac{x_{h}^{2}}{4}} \right],$$

$$b_{2} = \sqrt{\frac{k_{H}}{2i}} \left[\frac{(\alpha_{y} + \Delta \alpha_{y}) - \left(1 + \frac{x_{h}}{2}\sqrt{2}\right)(\alpha_{x} + \Delta \alpha_{x})}{1 + \frac{x_{h}}{2}\sqrt{2} + \frac{x_{h}^{2}}{4}} \right],$$

$$r(x_{h}) = 2\left\{ \frac{K_{1}(x_{h}\sqrt{i}) - K_{0}(x_{h}\sqrt{i})}{I_{1}(x_{h}\sqrt{i}) + I_{0}(x_{h}\sqrt{i})} - \ln\frac{x_{h}}{2}\sqrt{i} - C \right\},$$

$$r = r_{h} - ir_{2}$$

2. Для слоя h < z < H

$$u = V_{0g} + (\alpha_x + \Delta \alpha_x)z - \Delta \alpha_x h + \\ + \left\{ [u_h - V_{0g} - \alpha_x h] \cos \sqrt{\frac{l}{2k_H}} (z - h) + \\ + (v_h - \alpha_y h) \sin \sqrt{\frac{l}{2k_H}} (z - h) \right\} e^{-\sqrt{\frac{l}{2k_H}} (z - h)}, \\ v = (\alpha_y + \Delta \alpha_y)z - \Delta \alpha_y h + \\ + \left\{ (v_h - \alpha_y h) \cos \sqrt{\frac{l}{2k_H}} (z - h) - \\ - [u_h - V_{0g} - \alpha_x h] \sin \sqrt{\frac{l}{2k_H}} (z - h) \right\} e^{-\sqrt{\frac{l}{2k_H}} (z - h)}.$$

Полученные формулы позволяют определить вертикальный профиль скорости ветра при заданных значениях z_0 и δ при известном h. Для облегчения расчетов $\frac{c_1}{V}$ могут быть использованы графики, аналогичные тем, которые приводятся в работе [2], только под величиной V в нашем случае следует понимать

$$V = \sqrt{(V_{0g} + b_1)^2 + b_2^2}.$$

Для определения неизвестного параметра h, необходимого для расчетов скорости ветра, используют условие высоты пограничного слоя

(8). Это условие дает связь между высотой излома коэффициента тур-булентности h и высотой пограничного слоя

$$(H-h)\sqrt{\frac{\omega_z}{k_H}} = x. \tag{19}$$

х определяется уравнением

$$\cos x + \sin x - e^{-x} + p(\sin x + \cos x) = q(\sin x - \cos x),$$
 (19a)

Здесь

$$p = \frac{(\alpha_x + \Delta \alpha_x) H - \Delta \alpha_x h}{V_{0g}}, \quad q = \frac{(\alpha_y + \Delta \alpha_y) H - \Delta \alpha_y h}{V_{0g}}.$$

Рис. 1. Графическое решение условия высоты пограничного слоя в зависимости от горизонтального градиента температуры.

2.0

На рис. 1 приводится графическое решение уравнения 19 а. Интегрирование уравнений притока тепла, диффузии водяного пара и теплопроводности в почве с учетом термического ветра дает следующие значения потоков тепла и водяного пара:

$$\frac{P}{\rho c_p} = -k \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_a\right)_{z=z_0} = \frac{T_0 - T_H - (\gamma_a - \Gamma)H + \frac{T}{g}F}{\frac{H}{k_H}\left(1 + \frac{h}{H}\ln\frac{h}{ez_0}\right)},$$

$$\frac{E}{\rho} = -k \frac{dq}{dz}\Big|_{z=z_0} = \frac{f_0 q_m (T_0) - f_H q_m (T_H)}{\frac{H}{k_H}\left(1 + \frac{h}{H}\ln\frac{h}{ez_0}\right)},$$

$$B = \beta \left(T_0 - \vartheta_0\right).$$

Здесь

$$\Gamma = \frac{1}{\varphi c_{p}H} \int_{z_{0}}^{H} \frac{Q(0) - Q(z)}{k(z)} dz, \quad \beta = \frac{a^{2}\rho_{1}c_{1}}{z},$$

$$F = \frac{g}{T} \int_{z_{0}}^{H} \left\{ \int_{z_{0}}^{z} \left(u \frac{dT}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) dz \right\} \frac{dz}{k(z)} = -\frac{H\mu}{h \ln \frac{z_{1}}{z_{0}}} (\alpha_{x}u_{1} + \alpha_{y}V_{1}) + \frac{lV_{0g}\alpha_{y} \frac{H^{2} + h^{2}}{2k_{H}} + a_{x} (V_{0g} - \Delta\alpha_{x}h) + H (a_{x}^{2} + a_{y}^{2}) - \frac{lV_{0g}\alpha_{y} - \Delta\alpha_{x}u_{h} - \Delta\alpha_{y}v_{h} - \left[\Delta\alpha_{x} \left(k \frac{du}{dz} \right)_{h} + \Delta\alpha_{y} \left(k \frac{dv}{dz} \right)_{h} \right] \frac{H - h}{k_{h}} + \frac{lV_{0g}\alpha_{y} - \Delta\alpha_{x}u_{h} - \Delta\alpha_{y}v_{h} - \left[\Delta\alpha_{x} \left(k \frac{du}{dz} \right)_{h} + \Delta\alpha_{y} \left(k \frac{dv}{dz} \right)_{h} \right] \frac{H - h}{k_{h}} + \frac{lV_{0g}\alpha_{y} - \alpha_{y}\Delta\alpha_{x}}{2k_{h}} + \left(\alpha_{x}\Delta\alpha_{y} - \alpha_{y}\Delta\alpha_{x} \right) hl \frac{(H - h)^{2}}{2k_{H}},$$

$$\mu = 1 - \frac{h}{H} + \frac{h}{H} \ln \frac{h}{z_{0}}.$$

Помимо непосредственного влияния адвекции на значение турбулентного потока тепла, выраженного слагаемым, содержащим F, она сказывается также косвенно, изменяя значения H, h, k, T_0 и т. д.

Распределение по высоте температуры и влажности описывается формулами:

$$T(z) = T_{0} - \gamma_{a}z + \left(\Gamma H \frac{2h}{H^{2} + h^{2}} + \frac{T}{g} l V_{0g} \frac{\alpha_{y}h}{k_{H}}\right) z - \frac{h}{k_{H}} \ln \frac{z}{z_{0}} \left[\frac{P}{\rho c_{p}} + \frac{T}{g} \left(\alpha_{x}k \frac{du}{dz} + \alpha_{y}k \frac{dv}{dz}\right)\right]_{z=z_{0}} + \frac{T}{g} \left[\alpha_{x}u(z) + \alpha_{y}v(z)\right],$$

$$q(z) = r_{0}q_{m}(T_{0}) + \frac{r_{H}q_{m}(T_{H}) - r_{0}q_{m}(T_{0})}{H^{\mu}} h \ln \frac{z}{z_{0}}.$$

$$z > h$$

$$T(z) = T_{0} - \gamma_{a}z + \left(\frac{\Gamma H}{H^{2} + h^{2}} + \frac{T}{g} l V_{0g} \frac{a_{y}}{2k_{H}}\right) (z^{2} + h^{2}) - \frac{1}{k_{1}} \left[\frac{z}{h} + \ln \frac{h}{ez_{0}}\right] \left[\frac{P}{\rho c_{p}} + \frac{T}{g} \left(\alpha_{x}k \frac{du}{dz} + \alpha_{y}k \frac{dv}{dz}\right)\right]_{z=z_{0}} + \frac{T}{g} \left[\alpha_{x}u(z) + \alpha_{y}v(z) - \Delta\alpha_{x}u_{h} - \Delta\alpha_{y}v_{h}\right] - \frac{T}{g} \Delta\alpha_{y}zh \frac{l V_{0g}}{k_{H}} + \frac{l}{h} \frac{(\alpha_{x}\Delta\alpha_{y} - \alpha_{y}\Delta\alpha_{x})}{2k_{H}} (z - h)^{2} - \left(\Delta\alpha_{x}\frac{du}{dz} + \Delta\alpha_{y}\frac{dv}{dz}\right)_{z=h} (z - h),$$

$$q(z) = r_{0}q_{m}(T_{0}) + \frac{r_{H}q_{m}(T_{H}) - r_{0}q_{m}(T_{0})}{H^{\mu}} h \left[\ln \frac{z}{z_{0}} + \frac{z}{h} - 1\right].$$

На основании полученных решений для распределения ветра и температуры интегральное соотношение, описывающее баланс энергии турбулентности, принимает вид:

$$\begin{split} \frac{z^{2} \left(1-\delta\right) u_{1} c_{1} v_{g} T}{\ln^{2} \frac{z_{1}}{z_{0}} g} - H\left(\frac{\Gamma k_{H}}{1+\frac{h^{2}}{H^{2}}}\right) + \frac{\left[T_{0}-T_{H}-\left(\gamma_{a}-\Gamma\right) H\right] k_{H}}{\mu} + \\ + \frac{T}{g} \left[\left(1-\delta\right) \Delta S_{1} - \Delta S_{2}\right], \end{split}$$

где

$$\begin{split} \Delta S_1 &= k_H \left\{ \frac{a_x}{hl} \left[\left(k \, \frac{dv}{dz} \right)_{z_0} - \left(k \, \frac{dv}{dz} \right)_h \right] - \frac{a_y}{hl} \left[\left(k \, \frac{du}{dz} \right)_{z_0} - \left(k \, \frac{du}{dz} \right)_h \right] + \\ &+ \left(a_x^2 + a_y^2 \right) \left(H - \frac{h}{2} \right) - \left(\Delta a_x^2 + \Delta a_y^2 \right) \, \frac{h}{2} + \Delta a_x (V_{0g} - u_h) - \Delta a_y v_h \right\}, \\ \Delta S_2 &= \Delta S_1 + H^2 \omega_z \left\{ V_{0g} \left[a_y + \Delta a_y \left(1 - \frac{h}{H} \right)^2 \right] + h \left(a_x \Delta a_y - \frac{h}{2} \right) \right\}, \\ &- a_y \Delta a_x \left(1 - \frac{h}{H} \right)^2 \right\} - k_H H \left\{ \frac{\left(a_x u_1 + a_y v_1 \right)}{h \ln \frac{z_1}{z_0}} + \right. \\ & + \left(1 - \frac{h}{H} \right) \left[\Delta a_x \left(\frac{du}{dz} \right)_h + \Delta a_y \left(\frac{dv}{dz} \right)_h \right]. \end{split}$$

После подстановки в это уравнение значения T_0 из уравнения теплового баланса получим окончательное выражение для нахождения H

$$H^2 - 2AH - B = 0.$$

Здесь

$$A = \frac{R - \beta (T_H - \vartheta_0) - D_5 w + \frac{T}{g} F (D_4 w + \beta)}{2 [(D_4 w + \beta)] \gamma_p + \frac{\mu \Gamma}{1 + \frac{h^2}{H^2}} (D_1 w + D_4 w + \beta)},$$

$$B = \frac{\frac{(1 - \vartheta) \kappa^2 c_1 u_1 v_g T}{\ln^2 \frac{z_1}{z_0} g w} + \frac{T}{g w} [(1 - \vartheta) \Delta S_1 - \Delta S_2]}{\frac{(D_4 w + \beta) \gamma_p}{D_1 w + D_4 w + \beta} + \frac{\mu \Gamma}{1 + \frac{h^2}{H^2}}},$$

$$D_1 = \rho c_p,$$

$$D_4 = L \rho f_0 \frac{d q_m}{d T} \Big|_{T = T_H},$$

$$D_5 = L \rho (f_0 - f_H) q_m (T_H),$$

$$w = \frac{k_H}{H \mu}.$$

По полученным формулам было рассчитано несколько примеров, анализ которых позволил сделать численные оценки влияния горизон-

тального градиента температуры на характеристики пограничного слоя. В качестве исходных данных принимался радиационный баланс и характеристики слоя выше пограничного, соответствующие условиям

Ленинградской области в июле.

Наибольшее влияние на скорость ветра в пограничном слое горизонтальный градиент температуры оказывает в том случае, когда изотермы параллельны изобарам. Если градиенты температуры и давления у земли направлены в одну сторону, то на высоте барический градиент увеличивается. Это приводит к усилению ветра особенно на высотах, где термический ветер достаточно велик, и к возрастанию

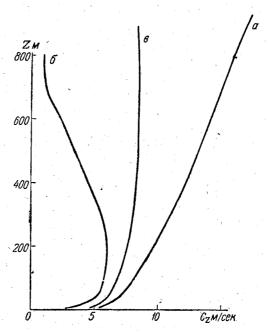


Рис. 2. Изменение скорости ветра с высотой.

турбулентного перемешивания. Примером, иллюстрирующим распределение ветра в таких условиях, служат кривые a на рис. 2 и 3.

Градиент температуры $\frac{\partial T}{\partial y}$ в рассматриваемом случае принимался равным — 4°/100 км. Такое распределение температуры привело к увеличению скорости ветра на высотах более чем в два раза. Усиление ветра увеличило турбулентный обмен, что привело к возрастанию высоты пограничного слоя, испарения и связанных с ним затрат тепла, вызвавших понижение температуры поверхности.

Результаты расчета составляющих теплового баланса и температуры

поверхности приводятся в табл. 1.

В разобранном примере, где градиент температуры совпадает с градиентом давления, составляющая скорости ветра, направленная под углом к геострофическому ветру, вызывает слабую адвекцию тепла, что приводит к смене знака турбулентного потока тепла у земли (первая строка табл. 1).

Во второй строке табл. 1 и на рис. 2 и 3 (кривые б) приводятся результаты расчетов, соответствующие условию $\frac{\partial T}{\partial y} = 4^{\circ}/100$ км. В этом

случае градиент температуры параллелен градиенту давления, но направлен в противоположную сторону и суммарный эффект действия барического градиента у земли и термического ветра приводит к тому, что увеличение с высотой скорости ветра в нижних слоях, вызванное ослаблением силы трения, сменяется постепенно на более высоких уровнях уменьшением. Это сопровождается поворотом ветра до тех пор, пока градиент давления, вызванный горизонтальной неоднородностью температуры, не достигнет величины барического градиента у земли; начиная с этого уровня ветер вновь усиливается с высотой. Ослабление ветра и уменьшение градиента приводят к уменьшению турбулентного обмена, испарения и высоты пограничного слоя, однако турбулентный поток тепла возрастает за счет увеличения градиента температуры, связанного с адвекцией холода наверху. Температура поверхности при этом не меняется.

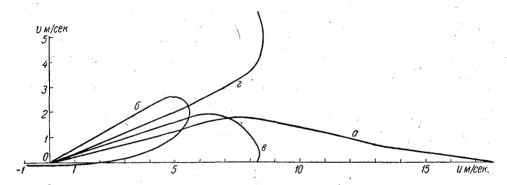


Рис. 3. Влияние адвекции на распределение скорости и направления ветра.

						T a	блица 1
$\frac{dI}{dn}$ $^{\circ}/100$ km	Нм	$V \frac{u_1^2 + V_1^2}{\text{M/cer.}}$	T_0°	Р кал/м² сек.	LE кал $/$ м 2 сек.	В кал/м² сек.	<i>k</i> ₁ м ² /сек.
$\frac{dT}{dy} = -4$	970	3,7	17,1	0,2	30,3	0,7	0,13
$\frac{dT}{dy} = 4$	530	2,8	18,9	5,9	24,5	0,8	0,10
$\frac{dT}{dx} = 4$	430	3,3	16,7	11,2	19,3	0,7	0,12
$\frac{dT}{dn} = 0$	770	3,2	18,6	2,3	27,8	0,8	0,11
$\frac{dT}{dx} = -0.4$	840 -	3,1	19,4	0,8	29,5	0,8	0,11
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·			1			†	

Примечание. $R=31,0\,$ кал/м² сек.; $V_{og}=8\,$ м/сек.; $z_0=0.018\,$ м; $f_0=1.0$; $f_R=0.7.$

В случае когда изобары и изотермы направлены под углом дру к другу, горизонтальная неоднородность температуры в большей сте пени влияет на распределение температуры и потоков тепла и влаги Для выявления этого влияния были разобраны случаи холодной адвек ции $\left(\frac{\partial T}{\partial x} = 4^{\circ}/100 \text{ км}\right)$ в условиях лета Ленинградской области и ад векции тепла $\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right.=-0.4^{\circ}/100$ км) в зимних условиях. Результать расчетов приводятся в таблице. В той же таблице для сравнения дан: характеристики пограничного слоя для июля без адвекции (рис. 2 и 3 кривая в). Анализ приводимых результатов показывает, что в первом случае (третья строка табл. 1) за счет горизонтального термического градиента появляется левый поворот ветра с высотой (рис. 3, кривая г) так как термический ветер, направленный вдоль составляющей v гео строфического ветра у земли, усиливается с высотой. Некоторое уси ление скорости ветра не приводит к усилению высоты пограничного слоя, поскольку в его формировании, помимо динамических факторов большую роль играют термические, а в данном случае значительна: часть теплового баланса тратится на компенсацию адвекции холода Поэтому высота пограничного слоя снижается. Этим же объясняется понижение температуры во всем слое. Кроме того, холодная адвекция обусловливает значительное повышение турбулентного потока тепла (с 2 до 11 кал/м² сек.).

Противоположное действие оказывает на строение пограничного слоя адвекция тепла. Как показывают данные таблицы, скорость ветра при этом несколько понижается за счет уменьшения составляющей v Снижение высоты пограничного слоя в связи с уменьшением скорости ветра перекрывается увеличением из-за повышения температуры всего слоя, обусловленного адвекцией. Это повышение температуры приводи к снижению турбулентного потока тепла и увеличению испарения.

Разобранные примеры показывают, что наличие горизонтального температурного градиента может оказывать существенное влияние на строение пограничного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

Лайхтман Д. Л. Постановка задачи о стационарном строении пограничного сло

атмосферы. Труды ГГО, вып. 94, 19. Цейтин Г. Х., Орленко Л. Р. Стационарное распределение ветра, температуры турбулентного обмена в пограничном слое атмосферы при различных состояния: устойчивости. Труды ГГО, вып. 94, 19.6 \circ

Лайхтман Д. Л., Утина З. М. Влияние макрометеорологических характеристи на строение пограничного слоя. Труды ГГО и СА НИГМИ, вып. 107, 1961.

ЗАВИСИМОСТЬ ПЕРЕВОДНОГО МНОЖИТЕЛЯ ТЕПЛОМЕРА ОТ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СРЕДЫ

В статье рассматривается возможность непосредственного измерения потока тепла в почве с помощью тепломера. Приведен расчет зависимости переводного множителя тепломера от изменения теплопроводности почвы. Полученная зависимость хорошо согласуется с экспериментальными результатами. Конструкция тепломера, рассмотренная в статье, позволяет измерять поток тепла в почве с точностью 2—3%.

Изучение интенсивности теплообмена между поверхностью и глубинными слоями почвы представляет собой важную практическую задачу. Закономерности теплооборота в почве существенно учитывать при оценке эффектов мелиорации, кроме того, теплообмен между поверхностью и глубинными слоями почвы, являясь одним из членов уравнения теплового баланса деятельной поверхности, играет важную роль в определении тех составляющих теплового баланса, непосредственное измерение или вычисление которых представляет известные технические трудности (турбулентный поток тепла, затраты тепла на испарение).

До последнего времени методика расчета теплообмена в почве, основанная на уравнении молекулярной теплопроводности, разрабатывалась в направлении повышения точности и надежности определения градиентов температуры в почве и ее теплофизических характеристик (в цервую очередь теплопроводности почвы). При этом поток тепла определялся как произведение теплопроводности λ на вертикальный градительности.

диент температуры в почве $\frac{\partial T}{\partial z}$.

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \,. \tag{1}$$

Хотя вычисление потока тепла в почве по формуле (1) и не представляет большой сложности, однако техника определения теплопроводности λ и градиента температуры в почве $\frac{\partial T}{\partial z}$ достаточно трудоемка и не всегда обеспечивает необходимую точность величины q [1]. Для упрощения производства необходимых измерений и повышения точности вычисления потока тепла для интервалов времени в несколько часов была разработана методика расчета q только на основании распределения температуры в почве [2, 3]. Одним из наиболее существенных недостатков этой методики является сложность расчетов по точной формуле и недостаточная точность вычисления величины λ , которая в конечном счете определяется через температуропроводность и объемную теплоемкость.

Погрешность же в определении λ дает такую же относительную погрешность в величине q.

В последнее время преимущественно в технических изменениях для непосредственного измерения потока тепла стали применяться так называемые тепломеры, представляющие собой пластины, диски или ленты (в зависимости от конкретного назначения), изготовленные из материала с известной постоянной теплопроводностью λ' . Толщина пластины h обычно не превышает 1 см. Поток тепла через единицу площади пластины тепломера, направленный по нормали к ее поверхности, можно вычислить на основании простой зависимости

$$q' = -\lambda' \frac{\Delta T'}{h} = p\Delta T', \tag{2}$$

где $p = -\frac{\lambda'}{\hbar}$ — постоянный для данной пластины множитель, который может быть определен с очень высокой степенью точности в лабораторных условиях.

Для измерения разности температур на поверхностях пластины обычно используются батареи термопар, четные спаи которых расположены на одной поверхности пластины, а нечетные — на другой. В зависимости от числа спаев и чувствительности гальванометра, применяемого для измерения термо-э. д. с. батареи, точность измерения $\Delta T'$ без труда может быть доведена до $0,01^\circ$ и выше. При этом поток тепла через пластину тепломера будет определяться умножением отклонения стрелки гальванометра Δn на постоянный множитель p'. Как показал опыт применения тепломеров для измерения теплообмена в почве, поток тепла через тепломер пропорционален потоку тепла в почве. При этом коэффициент пропорциональности зависит от размеров тепломера и от отно-

шения теплопроводностей $\frac{\lambda}{\lambda'}$. При определенных размерах тепломера и теплопроводности λ' оказывается, что коэффициент пропорциональности между q и q' слабо зависит от изменения λ : при изменении теплопроводности почвы в два раза коэффициент пропорциональности изменяется всего на 5-10%. Это позволяет поток тепла в почве определять как простое произведение потока тепла через тепломер на переводный множитель m

$$q = mq' = M\Delta n, \tag{3}$$

причем m (или M) можно корректировать эпизодически при больших изменениях теплопроводности почвы.

Распространение тепломеров для измерения потоков тепла в почве затруднено тем, что неизвестна зависимость переводного множителя *т* от основных параметров тепломера. Без этого невозможно выбрать рациональные размеры и материалы для изготовления тепломеров; затрудняется также и определение необходимых условий для корректирования переводного множителя. Ряд попыток получения связи *т* с параметрами тепломера вследствие недостаточной строгости исходных положений позволил получить сравнительно грубые формы зависимости [4, 8], мало пригодные для практического использования.

Для выяснения зависимости переводного множителя тепломера от его размеров и теплопроводности рассмотрим, какие изменения в распределение температуры почвы вносит установленный в ней тепломер. Для простоты предположим, что тепломер в виде диска установлен достаточно далеко от поверхности почвы, а поток тепла в почве направлен вертикально вниз и не меняется ни во времени, ни по глубине. Тогда

поток тепла в почве на глубине установки тепломера в соответствии с (1) можно записать в виде

$$q = -\lambda \frac{\Delta T}{h} \,, \tag{4}$$

где ΔT — разность температур в почве на расстоянии h по глубине. Если разность температур на поверхностях тепломера $\Delta T' = T_1' - T_2'$, то поток тепла через тепломер толщиной h будет

$$q' = -\lambda' \frac{\Delta T'}{h}. (5)$$

Предположим, что в начальный момент температура на верхней и нижней поверхностях тепломера равна температуре почвы на соответствующих глубинах (рис. 1), а $\lambda' > \lambda$. Тогда поток тепла через тепломер будет больше, чем поток тепла в почве. Этот дополнительный расход

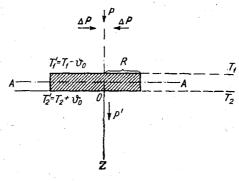


Рис. 1.

тепла через тепломер приведет к уменьшению теплосодержания почвы вблизи верхней поверхности тепломера. Вследствие понижения температуры почвы над тепломером в почве появятся горизонтальные градиенты температуры и соответствующие горизонтальные потоки тепла. Таким образом, после достижения стационарного состояния температура верхней поверхности тепломера будет ниже, чем температура почвы на этой глубине, на некоторую величину ϑ_0 .

Аналогичные рассуждения показывают, что температура нижней поверхности тепломера будет выше, чем температура почвы. Вследствие того что при стационарных условиях в тепломере не происходит накапливания тепла (приток тепла к верхней поверхности равен расходу тепла через нижнюю поверхность), температура нижней поверхности тепломера будет отличаться от температуры почвы на этой глубине на ту же величину ϑ_0 :

$$T_1' = T_1 - \vartheta_0, \ T_2' = T_2 + \vartheta_0.$$
 (6)

Распространение тепла в почве через диск, температура поверхности которого отличается от температуры почвы на величину ϑ_0 , может быть получено из решения уравнения теплопроводности, которое в цилиндрических координатах имеет вид (начало координат в центре поверхности диска O)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 0. \tag{7}$$

147

Граничные условия для уравнения (7) можно записать следующим образом:

$$\vartheta \mid_{z=0} = \vartheta_0$$
 для всех $r \leqslant R$, (8)

где *R* — радиус диска,

$$\left. \begin{array}{l} \vartheta \big|_{z=\infty} = 0 \end{array} \right.$$
 для любого $r \left. \begin{array}{l} \vartheta \big|_{r=\infty} = 0 \end{array} \right.$ для любого $z \left. \begin{array}{l} \end{array} \right.$

(достаточно далеко от диска температурное поле не искажается).

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \qquad \text{при } r > R$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} \neq 0 \qquad \text{при } r \leqslant R$$

$$(10)$$

т. е. распространение дополнительного тепла происходит только через поверхность диска.

Решение уравнения (7) при граничных условиях (8)—(10) получено в работе [5]. Это решение дает изменение температуры среды, вызываемое наличием в ней диска, температура поверхности которого ϑ_0 , в виде

$$\vartheta(r,z) = \frac{2\vartheta_0}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin(\mu R)}{\mu} J_0(\mu r) e^{-\mu z} d\mu. \tag{11}$$

Дополнительный расход тепла через поверхность диска определится интегрированием по r от 0 до R расхода тепла через кольцо радиуса r и шириной dr:

$$Q' = -\lambda \int_{0}^{R} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} ds = -2\pi\lambda \int_{0}^{R} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} r dr.$$
 (12)

Подставляя в (12) $\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\Big|_{z=0}$ из (11) и выполняя интегрирование, получим

$$Q' = 4\vartheta_0 R\lambda. \tag{13}$$

На основании (13) и (6), переходя от расхода тепла через площадь диска к потоку через единицу площади, имеем

$$\delta q = q' - q = \frac{\lambda \left(\Delta T' - \Delta T\right)}{\pi R} \, . \tag{14}$$

Подставляя в (14) вместо q' и q их значения из (4) и (5) и учитывая (3), получим

$$q = \frac{\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\pi R}{h}}{1 + \frac{\pi R}{h}} q'. \tag{15}$$

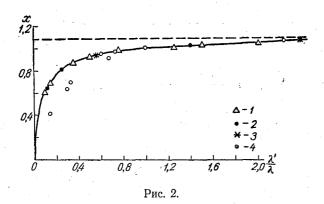
Как следует из (15), коэффициент пропорциональности между потоком тепла через диск тепломера и потоком тепла в почве

$$m = \frac{\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\pi R}{h}}{1 + \frac{\pi R}{h}} \tag{16}$$

определяется размерами диска и отношением теплопроводностей почвы и материала диска. С изменением теплопроводности почвы переводный множитель *m* изменяется линейно, причем

$$\frac{\partial m}{\partial \lambda} = \frac{1}{\lambda' \left(1 + \frac{\pi R}{h}\right)} \tag{17}$$

убывает с увеличением λ' и отношения $\frac{R}{h}$. При $R \to \infty$ или при $h \to 0$ значение переводного множителя стремится к единице, а $\frac{\partial m}{\partial \lambda} \to 0$, что соот-



ветствует стационарному потоку тепла через пластину бесконечно больших размеров.

На рис. 2 приведена зависимость $\frac{1}{m}=x$ от отношения теплопроводностей тепломера и почвы $\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)$, рассчитанная по формуле (16) для отношения $\frac{R}{h}=10$ (1). На кривую нанесены средние значения x для гепломеров из плексигласа и текстолита $\left(\frac{R}{h}=10\right)$, полученные в резульгате сравнения потоков тепла, измеренных этими тепломерами, с расчетными значениями. При этом использовались результаты опытного применения тепломеров в Колтушах (Ленинградская область) и в экследиции ГГО в Южном Казахстане (2), а также результаты, приведенные в работе М. Франсила [7] (3). Точки (4), нанесенные на рис. 2, соответствуют зависимости x от $\frac{\lambda'}{\lambda}$, полученной Портмэном [8] на основании качественных соображений об изменении множителя x и результатов по электрическому моделированию потока тепла через диск тепломера в ванне с жидким электролитом.

Следует отметить, что результаты экспериментального определения иножителя x в общем хорошо согласуются с расчетными значениями, вычисленными по формуле (16). Расхождения с полученными Портмэном значениями x при $\frac{\lambda'}{\lambda}=0.2\div0.4$ в известной мере объясняются тем, что данные Портмэна относятся к $\frac{h}{R}=0.125$, а также возможными погрешностями моделирования.

На основании формулы (11) можно оценить величину искажений температурного поля в почве, которые обусловлены наличием в ней диска тепломера с теплопроводностью λ' . Наибольшие искажения температурного поля, очевидно, наблюдаются на вертикальной оси диска (r=0). В этом случае

$$\vartheta (0, z) = \frac{2\vartheta_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R}{z}. \tag{18}$$

Величина ϑ_0 может быть без труда получена подстановкой в уравнение (3) q и q' в виде (4) и (5). Тогда, учитывая (6), получим

$$\vartheta_0 = \frac{1}{2} \left(m \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 \right) \Delta T'. \tag{19}$$

Подставляя значение ϑ_0 в (18), получим выражение для отклонения температуры

$$\vartheta (0, z) = \frac{\Delta T'}{\pi} \left(m \frac{\lambda'}{\lambda} - 1 \right) \operatorname{arctg} \frac{R}{z}. \tag{20}$$

Для тепломера, изготовленного из плексигласа ($\lambda' = 0,0004$ кал/см сек. град.), R = 10 см и h = 1 см в почве, для которой $\lambda = 0,0020$ кал/см сек. град. при величине потока тепла $\sim 1 \cdot 10^{-3}$ кал/см² сек. (что соответствует в среднем максимальному значению потока тепла в почве), величина ϑ_0 равна примерно 1°, а на расстоянии z = R от поверхности тепломера искажение температурного поля над его центром составляет около 0,5°. При использовании тепломера, изготовленного из материала с большей теплопроводностью (близкой к теплопроводности почвы), это искажение температурного поля будет практически несущественным.

В последнее время нами применяются тепломеры, изготовленные из стекла ($\lambda = 1.78 \cdot 10^{-3}$ кал/см сек. град.) и винипласта ($\lambda = 4 \cdot 10^{-4}$ кал/см сек. град.) в виде плоского кольца шириной H. Как видно из приведенных выше расчетов, в значение переводного множителя для такого прибора вместо радиуса диска R войдет ширина кольца $H = R - \rho$.

Действительно, дополнительные граничные условия для уравнения (7) будут заключаться в том, что к условию (8) добавится условие $\theta = \theta_0$ для всех $\rho \ll r \ll R$ (где ρ — внутренний радиус кольца, а к условию (10) — условие

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{при} \quad r > R \quad \text{и при} \quad r < \rho.$$
 (21)

Решение уравнения (7) получим в виде разности решения для диска радиусом R и диска радиусом ρ (несколько изменится только вид нормирующего множителя, однако этим изменением можно пренебречь). Тогда

$$\vartheta = \frac{2\vartheta_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin(\mu R) - \sin(\mu \rho)}{\mu} J_0(\mu r) e^{-\mu z} d\mu$$
 (22)

и вместо (13) для Q получим

$$Q = 4\vartheta_0 \lambda (R - \rho), \qquad (23)$$

$$m = \frac{\frac{\lambda}{\lambda'} + \frac{\pi (R - \rho)}{h}}{1 + \frac{\pi (R - \rho)}{h}}.$$
 (24)

Расчет переводного множителя для тепломера, изготовленного из плексигласа, при R=11 см, $\rho=5$ см и h=1 см дает величину m для почвы с $\lambda=0,0028$ кал/см сек. град. (Колтуши, лето 1958 г.), равной 1,30. Для измерения разностей температуры на поверхностях тепломера применялась термобатарея из 20 пар термоспаев манганин — константан; э. д. с. термобатареи составляла $8,8\cdot 10^{-5}$ в/град. при сопротивлении 50,0 Ω . При использовании гальванометра M-95 ($c_i=1\cdot 10^{-8}$ а/дел., $R_{ln}=558$ Ω) одно деление гальванометра соответствовало изменению потока тепла в почве на $3,6\cdot 10^{-6}$ кал/см²сек.

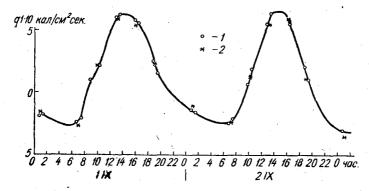


Рис. 3.

В работе [6] рассматривается зависимость теплопроводности почвы от ее влажности и плотности. Полученные данные относятся к песчаным и суглинистым почвам и характеризуют фактическое изменение теплопроводности почв в естественных условиях в Ленинградской области.

Как показывают результаты измерений, теплопроводность песчаной почвы при изменении влажности от 18 до 28% изменяется от $2 \cdot 10^{-3}$ до $2.5 \cdot 10^{-3}$ кал/см сек. град. При этом переводный множитель тепломера m из плексигласа приведенных выше размеров будет изменяться в пределах от 1.20 до 1.26, т. е. при изменении теплопроводности почвы на 25% переводный множитель изменяется всего на 5%.

Если при измерениях потока тепла в почве с помощью тепломера принять значение m=1,23, то погрешность в полученных значениях потока тепла будет не более 2,5%.

Как видно из (20), переводный множитель m для тепломера из стекла $(R=5\ {\rm cm},\ \rho=1,5\ {\rm cm},\ h=0,4\ {\rm cm})$ при изменении теплопроводности почвы в указанных пределах изменяется менее чем на 1% и составляет 0,99.

Изменение теплопроводности почвы вследствие изменения ее плотности при обработке, по данным, приведенным в работе [6], характеризуется пределами $0.9 \cdot 10^{-3} - 2.5 \cdot 10^{-3}$ кал/см сек. град., т. е. теплопроводность изменяется почти в три раза. Переводный же множитель тепломера изменяется при этом всего на 2% (от 0.99 до 1.01). Как видно из приведенных данных, для определения переводного множителя этого тепломера достаточно сравнительно грубо определить теплопроводность

почвы и можно не учитывать изменений ее вследствие изменения влажности.

На рис. З приведены для сравнения данные суточного хода потока тепла в почве, полученные по измерениям с помощью тепломера (1), и значения потока тепла (2), вычисленные по формуле (1). Если учесть, что погрешность в определении λ составляет около 5%, а наиболее вероятная погрешность в измерений $\frac{\partial T}{\partial z}$ равна 0,028 град /см (что соответствует средней погрешности при измерении температуры почвы на расстоянии 5 см по глубине с точностью до 0,1° на каждом уровне без учета

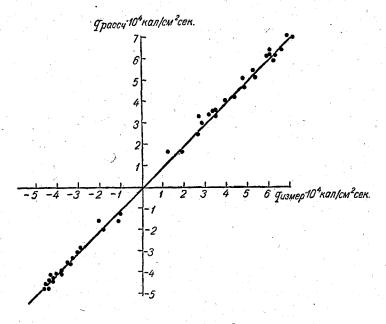


Рис. 4.

погрешности в глубине установки термометров), то погрешность в определении потока тепла в почве по формуле (1) получается равной

$$\Delta q = \Delta \lambda \, \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda \Delta \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left(8 + 14 \, \frac{\partial T}{\partial z} \right) \cdot 10^{-5} \, \, \mathrm{кал/cm^2 \, cek}.$$

Учитывая такую величину погрешности определения потока тепла в почве по формуле (1), можно с уверенностью считать что результаты, полученные по тепломеру, хорошо согласуются с расчетными данными.

На рис. 4 приведен корреляционный график между потоком тепла в почве, рассчитанным по формуле (1), и потоком тепла, измеренным с помощью тепломера. Данные, нанесенные на график, относятся к августу—октябрю 1958 г. Измерения проводились на станции Отдела физики приземного слоя ГГО в Колтушах (Ленинградская обл.). Теплопроводность почвы изменялась от 2,3·10-3 до 2,8·10-3 кал/см сек. град. Как видно из приведенного графика, все расхождения лежат в пределах точности расчетного метода.

ЛИТЕРАТУРА

Беспалов Д. П. Методика и аппаратура для экспериментального определения теплообмена в почве. Труды ГГО, вып. 103, 1960.
 Цейтин Г. Х. О вычислении коэффициента температуропроводности и потока тепла в почву по осредненным температурам. Труды ГГО, вып. 60 (122), 1956.
 Методические указания гидрометстанциям, № 5, Гидрометиздат, Л., 1954.
 Колесников А. Г., Сперанская А. А. Прибор для определения тепловых потоков. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1958.
 Гребер Г., Эрк С., Григуль У. Основы учения о теплообмене. ИЛ, М., 1958.
 Горбунова И. Г., Дьячкова Т. В., Серова Н. В. Некоторые результаты измерения теплофизических характеристик почвы в естественных условиях. Трулы мерения теплофизических характеристик почвы в естественных условиях. Трулы

мерения теплофизических характеристик почвы в естественных условиях. Труды ГГО, вып. 77, 1958.

Frausilla M., Hauvila S. Ou the measurement of the neat flux into the soil. Geophisics, vol. 5, N 3, Helsinki, 1958.
 Portman D. V. Heat-flow transducer performance. Trans. Amer. Geoph. Union. vol. 39, N 6, 1958.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
· C. С. Зилитинкевич. Нестационарный турбулентный режим	
в приземном слое атмосферы	3
Ф. Н. Шехтер. О методике определения лучистого притока тепла	14
Р. М. Каждан, Ф. Н. Шехтер. Некоторые результаты расчета	
радиационного изменения температуры в пограничном слое	oe.
атмосферы	26
ратиры призонного отоп роздика	35
ратуры приземного слоя воздуха	,00
рактер суточных колебаний влажности	48
рактер суточных колебаний влажности	10
прогноз образования туманов	57
Р. И. Оникул. К вопросу об образовании иркутских туманов	69
Н. В. Кучеров. Результаты теплобалансовых измерений над	
поверхностью моря	82
Н. В. Кучеров. Измерение скорости ветра на кораблях	88
Б. А. Қаган. О расчете глубины трения в море	93
Б. А. Каган. К теории установившихся ветровых течений мелкого	00
моря	99
P. C. Бортковский. Об осреднении результатов гидрологических и метеорологических наблюдений в море.	104
Л. Р. Орленко и З. М. Утина. Расчет намерзания и таяния	104
льда	112
Е. Д. Надежина. Об одном случае трансформации воздуха под	
влиянием деятельной поверхности	116
Д. Л. Лайхтман и Э. К. Бютнер. К вопросу о турбулентности	
в свободной атмосфере	(122)
Р. И. Оникул. О сходимости численного решения уравнения	107
теплопроводности	127
3. М. Утина. О влиянии горизонтальной неоднородности температуры на строение пограничного слоя атмосферы.	134
Д. П. Беспалов. Зависимость переводного множителя тепломера	104
от теплопроводности среды	145
The state of the s	1.0

