

Т Р У Д Ы
ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ
ОБСЕРВАТОРИИ
имени А. И. Воейкова

ВЫПУСК 165

ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ
В МЕТЕОРОЛОГИИ

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук
Л. С. ГАНДИНА

БИБЛИОТЕКА
Ленинградского
Гидрометеорологического
Института



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД • 1964

185853

АННОТАЦИЯ

Сборник содержит работы по исследованию и применению статистических характеристик метеорологических элементов. В ряде статей излагаются методы и результаты изучения структурных и корреляционных функций метеорологических полей и их применение при объективном анализе. Наряду с этим в сборнике представлены исследования по статистически ортогональным разложениям полей основных метеорологических элементов, а также работы по статистическим методам прогноза на средние сроки и по статистическим характеристикам оправдываемости прогнозов. Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся применением статистических методов в метеорологии.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник составлен по решению рабочей группы по применению статистических методов в метеорологии (председатель чл.-корр. АН СССР А. М. Обухов) при координационной комиссии ГУГМС по численным методам прогноза погоды. В дальнейшем рабочая группа имеет в виду продолжать публикацию тематических сборников по статистическим методам в метеорологии.

Значительное число работ, публикуемых в настоящем сборнике, посвящено методике и результатам изучения статистических характеристик макромасштабных метеорологических полей — корреляционных и структурных функций. В статье Л. С. Гандина и В. П. Болтенкова излагаются общие свойства корреляционных и структурных функций трехмерных полей и описывается методика определения их с помощью электронной машины большого быстродействия. Характеристики трехмерной статистической структуры поля температуры для слоя 500—100 мб, определенные по этой методике, проанализированы в статье В. П. Болтенкова. Аналогичная работа применительно к полю геопотенциала изобразительных поверхностей выполнена сотрудницей Института физики атмосферы М. И. Фортус. В ее работе рассмотрен также вопрос об аппроксимации полученных кривых функциями с положительным спектром. Статья В. П. Мелешко и И. П. Гусевой содержит данные по двумерной структуре полей температуры и точки росы, также полученные с помощью машин большого быстродействия. К этому же кругу вопросов примыкает работа Л. С. Гандина, посвященная одному из приложений данных по статистической структуре метеорологических полей — оптимальной интерполяции.

За последние годы значительное распространение получил новый метод исследования статистических свойств метеорологических полей — метод статистически ортогональных разложений. Отечественные исследования в этом направлении были начаты в известных работах А. М. Обухова и Н. А. Багрова. В настоящем сборнике это направление представлено двумя статьями. Л. В. Руховец исследовал на массовом материале собственные функции вертикальных профилей различных метеорологических элементов и получил важный вывод об их устойчивости в пространстве и во времени. В работе Н. И. Яковлевой, А. В. Мещерской и Г. Д. Кудашкина получены и проанализированы собственные функции

полей давления на уровне моря и геопотенциала поверхности 500 мб. Высказаны соображения о применении статистически ортогональных разложений к типизации синоптических процессов.

Статья Б. В. Афанасьевой и Н. П. Есаковой содержит результаты исследования корреляционных связей, могущих иметь применение в прогнозе температуры на средние сроки. В работе Л. С. Гандина изложен один из возможных способов оценки количественных прогнозов.

Помимо сообщения полученных результатов, публикация настоящего сборника преследует цель стимулировать развитие работ по статистическим методам в метеорологии. По этой причине в статье Л. С. Гандина и В. П. Болтенкова содержится подробное изложение методики вычислений на электронной цифровой машине, в статье Л. В. Руховца дан вывод системы уравнений для определения собственных функций и собственных чисел в дискретном случае и т. п.

Следует указать, что в настоящее время не существует общепринятой системы обозначений и терминологии по многим рассматриваемым в сборнике вопросам. В связи с этим зачастую в различных статьях одни и те же величины именуется или обозначаются по-разному. Поскольку, однако, каждый раз оговаривается, о чем идет речь, можно надеяться, что это не затруднит изучение статей, помещенных в настоящем сборнике.

К МЕТОДИКЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ МАКРОСТРУКТУРЫ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Излагается методика определения пространственных структурных и корреляционных функций макромасштабных метеорологических полей с помощью универсальных цифровых вычислительных машин большого быстродействия. Приведены некоторые результаты вычислений.

1. За последние годы выполнено значительное количество исследований макромасштабной статистической структуры метеорологических полей. Благодаря этим исследованиям удалось существенно пополнить сведения по статистическим свойствам атмосферных характеристик, а также решить ряд важных прикладных задач. Однако изучению подвергались почти исключительно структурные и автокорреляционные функции, описывающие внутренние свойства каждого метеорологического элемента, а не связи различных элементов друг с другом. Существенно также, что изучалась преимущественно «горизонтальная» или «вертикальная» статистическая структура, т. е. функции, описывающие статистические свойства метеорологического поля либо в некоторой горизонтальной плоскости (или изобарической поверхности), либо вдоль вертикали. Вместе с тем для решения многих прикладных задач, как, например, объективный анализ метеорологических полей, типизация синоптических положений и т. п., требуется знание характеристик пространственной, трехмерной структуры полей основных метеорологических элементов. Настоящая статья посвящена методике определения таких характеристик с помощью универсальных быстродействующих цифровых вычислительных машин.

Хорошо известно, что применительно к крупномасштабным атмосферным движениям вертикальные направления не изотропны горизонтальным и однородность в вертикальном направлении также не имеет места. В то же время такие статистические характеристики метеорологических полей, как структурные и автокорреляционные функции, можно с хорошим приближением считать однородными и изотропными в каждой горизонтальной плоскости или, что практически почти равносильно, на каждой изобарической поверхности. При этом, разумеется, речь идет о функциях, введенных для отклонений элементов от их средних климатических значений — норм.

Распространяя эти представления на пространственные структурные и автокорреляционные функции, будем считать, что каждая из них зависит от трех аргументов — вертикальных координат (давления) двух

точек и скалярного расстояния между горизонтальными проекциями этих точек:

$$b_f(p_1, p_2, \rho) = \overline{[f'(\vec{r}, p_2) - f'(\vec{r} + \vec{\rho}, p_2)]^2}, \quad (1)$$

$$m_f(p_1, p_2, \rho) = \overline{f'(\vec{r}, p_1) f'(\vec{r} + \vec{\rho}, p_2)}. \quad (2)$$

Здесь \vec{r} — радиус-вектор горизонтальной проекции точки, а p — аналог вертикальной координаты — давление. Через b_f обозначена пространственная структурная функция, а через m_f — автокорреляционная функция некоторого элемента f , через f' — его отклонение от нормы \bar{f} . Осреднение обозначено чертой сверху и понимается в статистическом смысле.

В частном случае, если $p_1 = p_2 = p$, мы возвращаемся к горизонтальным структурным и корреляционным функциям:

$$b_f(p, p, \rho) = \overline{[f'(\vec{r}, p) - f'(\vec{r} + \vec{\rho}, p)]^2}, \quad (3)$$

$$m_f(p, p, \rho) = \overline{f'(\vec{r}, p) f'(\vec{r} + \vec{\rho}, p)}, \quad (4)$$

а если $\vec{\rho} = 0$ — к вертикальным:

$$b_f(p_1, p_2, 0) = \overline{[f'(\vec{r}, p_1) - f'(\vec{r}, p_2)]^2}, \quad (5)$$

$$m_f(p_1, p_2, 0) = \overline{f'(\vec{r}, p_1) f'(\vec{r}, p_2)}. \quad (6)$$

Наконец, полагая в (4) $\rho = 0$ или в (6) $p_1 = p_2 = p$, получим как частный случай автокорреляционной функции дисперсию метеорологического элемента, т. е. средний квадрат его отклонения от нормы, на данной изобарической поверхности

$$m_f(p, p, 0) = \overline{f'^2(\vec{r}, p)}. \quad (7)$$

2. Рассмотрим некоторые элементарные свойства функций (1) и (2).

Раскрывая скобки в (1), получим соотношение между структурной и автокорреляционной функциями

$$b_f(p_1, p_2, \rho) = m_f(p_1, p_1, 0) + m_f(p_2, p_2, 0) - 2m_f(p_1, p_2, \rho). \quad (8)$$

Полагая в (8) $\rho = \infty$, обозначая «насыщающее» значение структурной функции через $A_f(p_1, p_2)$

$$b_f(p_1, p_2, \infty) = A_f(p_1, p_2) \quad (9)$$

и учитывая, что с безграничным ростом расстояния ρ корреляционная функция $m_f(p_1, p_2, \rho)$ должна стремиться к нулю, получим равенство

$$A_f(p_1, p_2) = m_f(p_1, p_1, 0) + m_f(p_2, p_2, 0), \quad (10)$$

согласно которому насыщающее значение пространственной структурной функции равно сумме дисперсий на двух уровнях.

На основании (9) и (10) можно написать

$$b_f(p_1, p_2, \rho) + 2m_f(p_1, p_2, \rho) = A_f(p_1, p_2), \quad (11)$$

так что сумма $b_f + 2m_f$ не зависит от расстояния ρ между горизонтальными проекциями точек и равна насыщающему значению структурной функции.

Положим в (8) $\rho = 0$

$$b_f(p_1, p_2, 0) = m_f(p_1, p_1, 0) + m_f(p_2, p_2, 0) - 2m_f(p_1, p_2, 0). \quad (12)$$

Поскольку очевидно, что величина слева существенно неотрицательна [см. (5)], то из (12) вытекает неравенство

$$m_f(p_1, p_2, 0) \leq \frac{1}{2} [m_f(p_1, p_1, 0) + m_f(p_2, p_2, 0)], \quad (13)$$

т. е. межуровневая корреляционная функция, вообще говоря, меньше полусуммы дисперсий на этих уровнях (тривиальное равенство имеет место лишь при $p_1 = p_2$).

Можно ввести далее нормированную автокорреляционную и нормированную структурную функции. В качестве первой из них естественнее всего взять величину коэффициента корреляции, т. е.

$$\mu_f(p_1, p_2, \rho) = \frac{m_f(p_1, p_2, \rho)}{\sqrt{m_f(p_1, p_1, 0) m_f(p_2, p_2, 0)}}. \quad (14)$$

Что касается нормированной структурной функции, то ее можно определить как отношение ненормированной структурной функции к ее насыщающему значению

$$\beta_f(p_1, p_2, \rho) = \frac{b_f(p_1, p_2, \rho)}{A_f(p_1, p_2)}. \quad (15)$$

Тогда из формул (9), (11), (14) и (15) можно получить следующее соотношение, связывающее функции μ и β :

$$\beta_f(p_1, p_2, \rho) + \kappa \mu_f(p_1, p_2, \rho) = 1, \quad (16)$$

где κ есть отношение среднего геометрического из дисперсий элемента f на уровнях p_1 и p_2 к среднему арифметическому из этих дисперсий

$$\kappa = \frac{2 \sqrt{m_f(p_1, p_1, 0) m_f(p_2, p_2, 0)}}{m_f(p_1, p_1, 0) + m_f(p_2, p_2, 0)}. \quad (17)$$

Величина κ , очевидно, положительна и, вообще говоря, меньше единицы. Поэтому если только $p_1 \neq p_2$, то сумма

$$\beta_f(p_1, p_2, \rho) + \mu_f(p_1, p_2, \rho) = 1 + (1 - \kappa) \mu_f(p_1, p_2, \rho)$$

меняется с расстоянием ρ : она превосходит единицу в области положительных автокорреляционных связей и меньше ее в области отрицательных корреляций.

Рассмотрим еще влияние ошибок наблюдений на значения структурных и корреляционных функций. Будем считать, что ошибки наблюдений случайны в том смысле, что они не коррелируют с истинными значениями, что средние арифметические значения ошибок равны нулю и что ошибки в различных точках не коррелируют друг с другом.¹ Кроме того, предположим, что величина среднего квадрата ошибки σ_f^2 зависит только от уровня наблюдения p и не зависит от горизонтальных координат. Тогда легко показать следующее.

1) Ошибки наблюдений не влияют на величину автокорреляционной функции, за исключением случая, когда одновременно $\rho = 0$ и $p_1 = p_2$, т. е. когда автокорреляционная функция обращается в дисперсию.

¹ Применительно к ошибкам вертикального зондирования атмосферы это предположение хорошо выполняется лишь при $\rho \neq 0$. Ошибки же в точках, лежащих на одной вертикали, возникающие при одном и том же зондировании, могут быть связаны друг с другом. Однако эта связь количественно не изучена, что и заставляет нас исключить ее из рассмотрения.

2) Ошибки наблюдений завышают дисперсию метеорологического элемента на величину среднего квадрата ошибки наблюдений на том же уровне

$$m_{\tilde{f}}(p, p, 0) = m_f(p, p, 0) + \sigma_f^2(p), \quad (18)$$

где \tilde{f} — измеренное значение элемента f . На основании сказанного можно оценить величину $\sigma_f^2(p)$, экстраполируя зависимость функции $m_f(p, p, \rho)$ на $\rho=0$ и вычитая результат экстраполяции из непосредственно определенной дисперсии, равной $m_{\tilde{f}}(p, p, 0)$.

3) Ошибки наблюдений завышают все значения структурной функции на сумму средних квадратов ошибок на уровнях p_1 и p_2

$$b_{\tilde{f}}(p_1, p_2, \rho) = b_f(p_1, p_2, \rho) + \sigma_f^2(p_1) + \sigma_f^2(p_2). \quad (19)$$

Полагая в (19) $p_1 = p_2$ и $\rho = 0$, получим

$$b_{\tilde{f}}(p, 0) = 2\sigma_f^2(p). \quad (20)$$

Равенство (20) является основой широко известного способа оценки средней квадратической ошибки наблюдений путем экстраполяции «одноуровневой» структурной функции на нуль. Заметим, что данные о функции $b_{\tilde{f}}(p_1, p_2, \rho)$ при $p_1 \neq p_2$ не могут быть привлечены для этой цели, поскольку величина $b_f(p_1, p_2, 0)$ не равна нулю и не известна нам до тех пор, пока не определены средние квадраты ошибок.

3. Излагаемая ниже методика вычисления пространственных автокорреляционных и структурных функций с помощью универсальных цифровых вычислительных машин представляет собой естественное обобщение способа определения автокорреляционных и структурных функций двумерных полей, описанного в работе [1]. Так же как и в этом способе, вычисления ведутся по данным в заранее фиксированном множестве станций; подсчеты производятся для каждого календарного срока (ситуации) с параллельным определением результатов по всем просчитанным ситуациям; выполняется группировка данных по заранее выбранным градациям горизонтальных расстояний.

Основное отличие излагаемой методики связано с существом задачи, т. е. с переходом к определению характеристик пространственной структуры. Вычисления производятся при фиксированных значениях p_1 и p_2 . Исходным материалом являются два горизонтальных поля: $f(p_1, \vec{r})$ и $f(p_2, \vec{r})$ (p_1 и p_2 фиксированы, \vec{r} переменны). Подсчеты выполняются для всех пар станций (\vec{r}_i, \vec{r}_k) . При этом поскольку произведения $f'(p_1, \vec{r}_i)f'(p_2, \vec{r}_k)$ и $f'(p_1, \vec{r}_k)f'(p_2, \vec{r}_i)$, вообще говоря, не совпадают друг с другом, то при фиксированном номере первой станции i производится подсчет для всех номеров вторых станций k , а не только для $k > i$, как в [1].

В результате этих вычислений определяются лишь значения структурной и корреляционной функций при данных значениях p_1 и p_2 . Чтобы полностью определить пространственные функции $m_f(p_1, p_2, \rho)$ и $b_f(p_1, p_2, \rho)$, нужно повторить указанные подсчеты столько раз, сколько имеется пар уровней.

Разумеется, при этом возможно, в частности, и вычисление одноуровневых функций $m_f(p, p, \rho)$ и $b_f(p, p, \rho)$. С этой целью нужно лишь ввести в качестве исходных данных два совпадающих поля.

Заметим, что легко использовать данную методику и для вычисления кросскорреляционных функций, т. е. функций, описывающих статистиче-

скую связь различных метеорологических элементов в разных точках. Для этого в качестве исходных данных нужно ввести не поля одного и того же элемента f на разных уровнях, а поля двух различных метеорологических элементов на одном уровне. В этом случае структурная функция лишена физического смысла, что ясно хотя бы из того, что разные метеорологические элементы имеют, вообще говоря, разную размерность. Однако, несмотря на это, в случае различных элементов имеют место и вполне могут быть использованы соотношения, аналогичные тем, которые приведены в п. 2.

4. Помимо рассмотренного основного отличия, в предлагаемой методике имеется еще ряд нововведений по сравнению со способом [1], обусловленных стремлением свести к минимуму объем вычислений вручную. К числу таких нововведений относятся, в частности, следующие:

1) *Вычисление норм.* В качестве норм $\bar{f}(p, \vec{r})$ применяются значения, осредненные по тому самому материалу, который используется для исследования структуры. Эти значения определяются с помощью специальной подпрограммы до начала вычисления структурной и автокорреляционной функций.

2) *Вычисление средних квадратических отклонений.* Помимо значений корреляционной и структурной функций, являющихся результатом осреднения соответственно произведений и квадратов разностей отклонений от норм в различных точках, вычисляются еще средние квадратические отклонения от этих значений. С этой целью каждый раз, кроме величин

$$f'(p_1, \vec{r}) f'(p_2, \vec{r} + \vec{\rho}), \\ [f'(p_1, \vec{r}) - f'(p_2, \vec{r} + \vec{\rho})]^2,$$

определяются также квадраты этих величин. Они затем тоже осредняются внутри данной градации горизонтальных расстояний ρ по всем ситуациям и парам станций. После этого вычисляются средние квадратические отклонения корреляционной и структурной функций σ_m и σ_b по формулам:

$$\sigma_m(p_1, p_2, \rho) = \sqrt{[f'(p_1, \vec{r}) f'(p_2, \vec{r} + \vec{\rho})]^2 - m_f^2(p_1, p_2, \rho)}, \quad (21)$$

$$\sigma_b(p_1, p_2, \rho) = \sqrt{[f'(p_1, \vec{r}) - f'(p_2, \vec{r} + \vec{\rho})]^4 - b_f^2(p_1, p_2, \rho)}. \quad (22)$$

Величины σ_m и σ_b зависят, очевидно, от четвертых моментов кривых распределения элемента f . Они могут быть использованы для оценки точности полученных сведений о функциях m и b , например для вычисления доверительных интервалов. Кроме того, они используются на следующем этапе.

3) *Согласование значений автокорреляционной и структурной функций.* Каждая из этих функций определяется независимо. В результате величина A_f несколько меняется от одной градации расстояний ρ к другой. Это является следствием нарушения однородности поля дисперсий. Действительно, так как предположение о независимости дисперсий от горизонтальных координат выполняется лишь приближенно, то слагаемые правой части формулы (10) варьируют от точки к точке, поэтому то же относится и к величине A_f . Суммарным эффектом этого является и некоторое различие значений $A_f(p_1, p_2)$ для разных градаций расстояний.

Нас, однако, интересуют структурные и корреляционные функции, полученные в предположении о полной горизонтальной однородности и изотропии рассматриваемых полей, в том числе и об однородности поля дисперсий. Поэтому естественно внести некоторые поправки к полученным значениям b_f и m_f так, чтобы равенство (11) выполнялось точно.

С этой целью прежде всего величина $A_f(p_1, p_2)$ определяется наиболее надежным образом, а именно путем осреднения сумм $b_f + 2m_f$ по всем градациям расстояний ρ с весом, равным числу случаев для данной градации. Далее вводятся поправки к значениям b_f и m_f для каждой градации таким образом, чтобы сумма, составленная из исправленных значений $\tilde{b}_f + 2\tilde{m}_f$, равнялась A_f . Эти поправки естественно принять пропорциональными средним квадратическим отклонениям σ_b и σ_m , что приводит к следующим формулам:

$$\tilde{b}_f(p_1, p_2, \rho) = b_f(p_1, p_2, \rho) + \frac{\sigma_b}{\sigma_b + 2\sigma_m} [A_f(p_1, p_2) - b_f(p_1, p_2, \rho) - 2m_f(p_1, p_2, \rho)], \quad (23)$$

$$\tilde{m}_f(p_1, p_2, \rho) = m_f(p_1, p_2, \rho) + \frac{\sigma_m}{\sigma_b + 2\sigma_m} [A_f(p_1, p_2) - b_f(p_1, p_2, \rho) - 2m_f(p_1, p_2, \rho)]. \quad (24)$$

Расчеты по формулам (23) и (24) выполняются машиной после окончания вычисления функций b_f и m_f . Затем из машины выдаются как исправленные величины \tilde{b}_f и \tilde{m}_f , так и неисправленные значения b_f и m_f .

5. Опыт расчета одноуровневых структурных и корреляционных функций, описанный в работе [1], показал, что при использовании в вычислениях на машине «Урал-1» данных 50 ситуаций с 50 станциями в каждой из них (без исправления по вышеописанной методике) требуется 50 часов машинного времени. Поэтому для дальнейших исследований решено было использовать машину с большим быстродействием (20 тыс. операций в секунду).

Для уменьшения времени ввода исходных данных в машину, сокращения количества набиваемых перфокарт, а также для того, чтобы сократить число обращений к внешней памяти машины, занимающее много времени, в каждую ячейку памяти, отведенную под исходный материал, вводится по три числа. В процессе расчета эти данные приводятся к нормальному виду, «распаковываются» специальной программой, работу которой можно проследить при рассмотрении программы расчета средних значений метеоэлемента (норм). Блок-схема этой программы приведена на рис. 1.

Как видим, «распаковка» данных производится до перевода чисел в двоичную систему счисления. Это позволяет вводить в машину числа различных порядков и различных знаков. Так как в один адрес ячейки (12 двоичных разрядов) записывается лишь три десятичных числа, то порядки записанных чисел могут отличаться на две единицы. Если при этом изменяется и знак, то первое из трех десятичных чисел будет символом знака, а в адрес могут быть записаны числа двух различных порядков. Порядки и знаки чисел записываются в виде констант в конце программы. На перфокартах пробиваются лишь мантиссы чисел с сохранением одного (максимального) порядка для всех чисел.

Методика расчета норм метеоэлемента на ЭВМ легко прослеживается при рассмотрении блок-схемы программы. Расчет норм, печать и перфорирование результата для массива в 3600 чисел (60 случаев, 60 станций) требует 40 секунд машинного времени. Для расчета норм вручную тре-

бывало бы до 16 часов работы вычислителя на электрическом арифмометре. Перфокарты результата вычислений могут быть немедленно использованы в дальнейших расчетах.

Следует отметить, что расчет норм по меньшему количеству ситуаций не требует никаких изменений в программе, так как отсутствие дан-

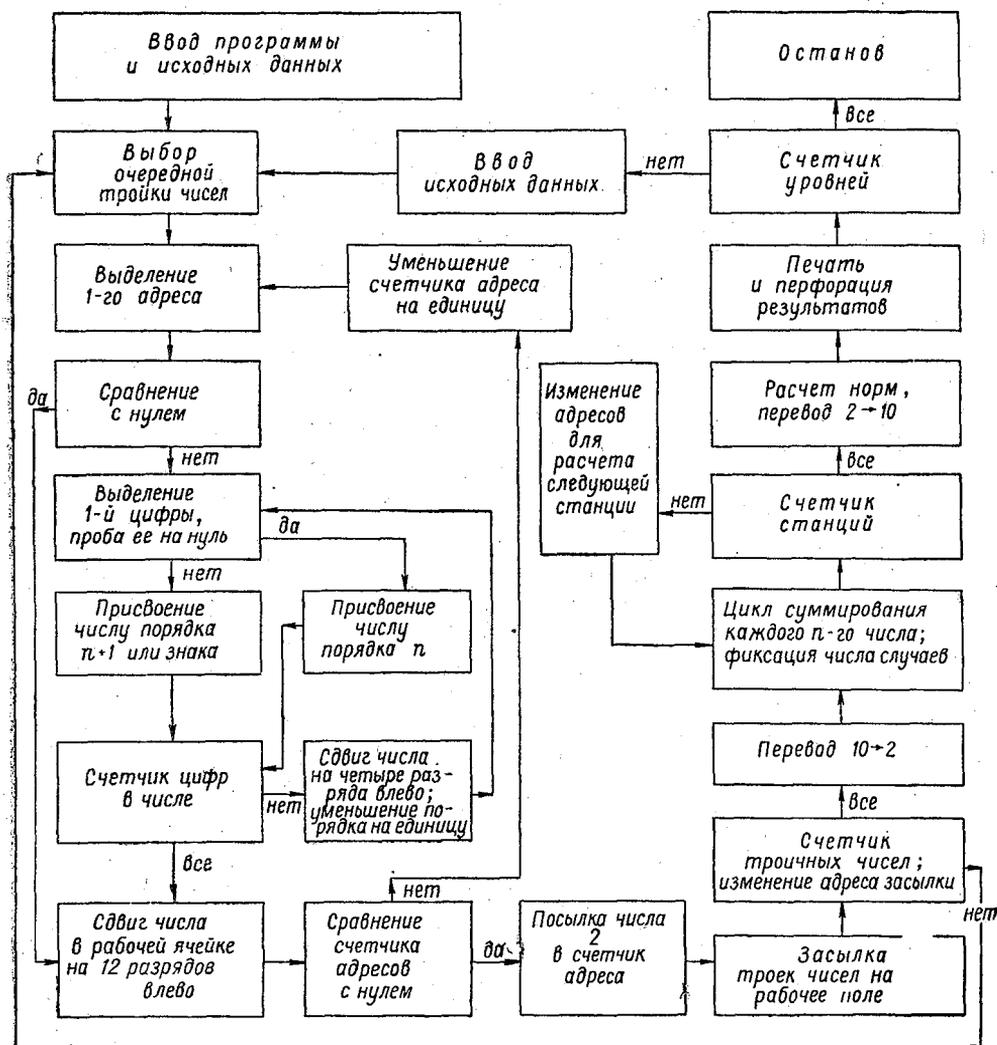


Рис. 1. Блок-схема подпрограммы вычисления норм.

ных на станции учитывается в ходе вычислений. Увеличение числа ситуаций требует изменения лишь двух констант циклов. Изменение числа случаев на станции учитывается изменением лишь одной константы. Расчеты ведутся без обращения к внешней памяти машины. Все это свидетельствует о гибкости программы расчета норм.

Подпрограмма распаковки, подобная приведенной на рис. 1, имеется и в основной программе расчета функций, блок-схема которой изображена на рис. 2. На этом рисунке она обозначена одним блоком. Работа

Распределение оперативной памяти ЭВМ

Назначение ячеек	Номер начальной ячейки	Номер конечной ячейки
Программа	0020	0727
Координаты станций	0730	1117
Нормы	1510	1677
Рабочие ячейки	1120	1477
	1710	1760
Исходные данные	2170	6727
Рабочие поля	1770	2157
Результаты расчетов	2140	2641
Стандартные подпрограммы	7000	7777

реляционных функций производится по формулам (1) — (6). Осредняются те значения, которые относятся к расстояниям, соответствующим той или иной градации. Для каждой градации отведены ячейки, в одной из которых накапливается сумма рассчитанных значений функций, в другой фиксируется сумма случаев расчета. Рассылка вычисленных значений производится следующим образом. После определения расстояния ρ между станциями из этого расстояния выделяется целая часть. Она является константой переадресации для засылки данных в нужную ячейку. Так ликвидируется необходимость сравнения вычисленного ρ со всеми возможными вариантами градаций. Это сокращает время рассылки значений функций примерно в 20 раз (для 40 градаций).

Следует отметить, что машина вычисляет не только средние значения функций в градации, но и среднее расстояние, к которому относятся эти значения. В работе [1] средние значения функций относились к середине градации. Выполнения этого допущения следует ожидать при большом количестве используемых точек, при ограниченном числе станций средние расстояния отходят от середины градации. Величина отклонения зависит также и от числа случаев, по которому производится осреднение.

Например, для числа случаев порядка нескольких тысяч отклонение достигало 0,1—0,15 величины градации. При небольших градациях расстояний учет этого фактора необходим. Расчет средних расстояний в градации производится выделением дробных частей расстояний, суммированием и осреднением их.

7. Работу ЭВМ при расчете структурных и корреляционных функций можно проследить, рассматривая рис. 2, на котором представлена блок-схема программы расчета. После ввода программы, координат, норм, перевода двух последних в двоичную систему счисления происходит ввод исходных данных. Затем управление передается на подпрограмму распаковки данных одной ситуации и перевода их. Следующий этап расчета — нахождение отклонений от норм. После этого по формулам (1) — (6) производится расчет значений функции, причем данные на каждой станции первого поля сопоставляются с данными на всех станциях второго поля. Полученные значения функций, а также их квадраты, необходимые для вычисления средних квадратических отклонений в градациях по формулам (21) — (22), суммируются в отведенных ячейках. Одновременно фиксируется число случаев. Отсутствие данных в той или иной точке учитывается системой контроля расчетов.

Значение дисперсии метеоэлемента или $m_f(p_1, p_2, 0)$, а также структурной функции при $\rho=0$ (отличной от нуля для разных уровней) рассчитывается независимо от вычисления функций для градаций. После обработки данных всех ситуаций рассчитываются значения функций и средние квадратические отклонения в градациях.

Затем по формулам (23)—(24) в значения функций вносятся поправки. При этом значения структурной и корреляционной функций согласуются между собой и происходит осреднение поля дисперсии метеоэлементов. Это достигается нахождением значения $A_f(p_1, p_2)$ [см. (19)] по формуле

$$A_f(p_1, p_2) = \frac{\sum_{j=1}^N \left[\sum_{i=1}^{n_j} b_{ij}(\rho) + 2 \sum_{i=1}^{n_j} m_{ij}(\rho) \right]}{\sum_{j=1}^N n_j}, \quad (25)$$

где n_j — число случаев в градации, N — число градаций расстояния, и требованием выполнения условия

$$\tilde{b}_f(p_1, p_2, \rho_i) + 2\tilde{m}_f(p_1, p_2, \rho_i) = A_f(p_1, p_2), \quad (26)$$

где i — номер градации расстояния ($i=0, 1, 2, \dots, N$), а волнистая черта сверху означает исправленное значение.

В итоге расчетов на печать выдаются восемь групп чисел, представляющих собой значения функций в градациях, и три числа, необходимые для дальнейшей обработки:

- 1) значения структурной функции,
- 2) значения корреляционной функции,
- 3) число случаев, по которым найдены значения функций,
- 4) расстояние, к которому относятся значения функций,
- 5) средние квадратические отклонения структурной функции,
- 6) средние квадратические отклонения корреляционной функции,
- 7) исправленные значения структурной функции,
- 8) исправленные значения корреляционной функции,
- 9) дисперсия метеоэлемента или $m_f(p_1, p_2, 0)$,
- 10) значение структурной функции при $\rho=0$,
- 11) значение $A_f(p_1, p_2)$ для данной пары уровней.

8. Программа работы ЭВМ по вышеописанной методике была составлена, отлажена и использована для расчета более 100 корреляционных функций температуры воздуха на ряде уровней в различных сочетаниях уровней и разных сезонов.

Для иллюстрации успешности расчетов на рис. 3 приводится график структурных и корреляционных функций температуры воздуха для лета на поверхности 500 мб.

На рисунке обозначены как неисправленные (b_T, m_T), так и исправленные (\tilde{b}_T, \tilde{m}_T) кривые, проведенные по соответствующим точкам. Кроме того, ступенчатой кривой показано число случаев в каждой градации, шкала числа случаев дана справа.

Данный пример является средним по качеству расчетов в том смысле, что некоторые точки отошли на 0,1—0,2 град.² от плавной исправленной кривой. Однако каждый такой отход объясняется положением неисправленных точек. На участке кривых до насыщения функций отошла лишь одна точка (шестая); это объясняется завышением в этой градации значения автокорреляционной функции. Еще большие откло-

нения наблюдаются после насыщения, особенно когда число случаев становится менее 3000. По-видимому, для получения достаточно устойчивых результатов при расстояниях между станциями 3000 км и более требуется еще большее число случаев, чем это имеет место.

Однако этот пример нагляден в том отношении, что он хорошо иллюстрирует характер внесения поправок в расчеты. Как видим, в нулевой и первой градациях значения автокорреляционной функции оказались сильно заниженными, что объясняется недостаточным числом случаев в них. Но исправлены эти значения достаточно точно.

Рассматривая рисунок, мы видим, что на малых расстояниях дисперсии оказываются меньшими, а на больших — большими, чем среднее значение. Этого следовало ожидать и это характерно для всех расчетов.

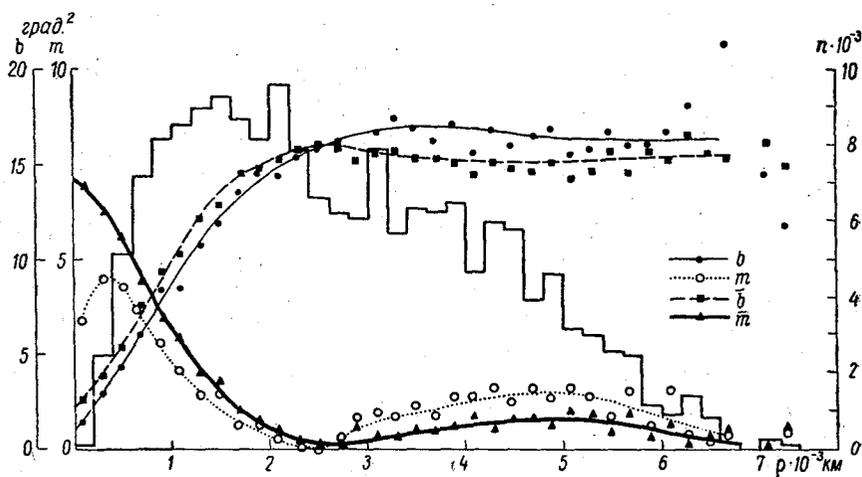


Рис. 3. Структурная b_T (500, 500, ρ) и автокорреляционная m_T (500, 500, ρ) функции температуры на поверхности 500 мб.

Ход исправленных кривых структурной и корреляционной функций хорошо согласуется, что говорит о выполнении условия (26).

Данный пример показывает, что методика внесения поправок приводит к разумным результатам.

В заключение следует сказать, что расчет структурных и корреляционных функций на ЭВМ по данной методике при использовании в качестве исходных данных 3600 измерений метеозлемента (60 ситуаций по 60 станций в каждой) требует 15 минут машинного времени, расчеты вручную — нескольких месяцев работы вычислителя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С., Мелешко В. П., Мещерская А. В. О применении универсальных цифровых машин для исследования статистической структуры метеорологических полей. Тр. ГГО, вып. 143, 1963.
2. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Гостехиздат, М., 1958.

ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МАКРОСТРУКТУРЫ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА

С помощью электронной машины большого быстродействия исследованы пространственные структурные и корреляционные функции температуры воздуха в слое 500—100 мб. Получен ряд выводов, в частности, о существенном влиянии тропопаузы на структуру поля температуры.

1. Вопросы статистического прогноза и анализа значений метеорологических элементов в настоящее время интенсивно разрабатываются. Громоздкие вычисления, связанные с этими исследованиями, осуществляются на электронных вычислительных машинах (ЭВМ). Весьма важным при этом является знание макроструктурных характеристик полей метеозлементов. До настоящего времени преимущественно изучались структурные $b_f(\rho)$ и корреляционные $m_f(\rho)$ функции на изобарических поверхностях или по вертикали.

Однако при разработке методов типизации синоптических процессов, объективного анализа метеорологических полей и т. д. необходимо знание трехмерной макроструктуры, т. е. структурных и корреляционных функций, значения которых зависят как от расстояния между проекциями точек наблюдений на горизонталь, так и от уровней наблюдений. Методика вычисления подобных характеристик при использовании ЭВМ описана в [1].

Существенно, что при этих расчетах появляется возможность выявить и исключить такие ошибки наблюдений, которые при расчете одноуровневных и вертикальных структурных характеристик исключить затруднительно. Речь идет об ошибках одного радиозондирования. Более подробно этот вопрос рассматривается ниже.

Применение трехмерных структурных характеристик в объективном анализе поля метеозлемента позволяет контролировать истинность исходных данных и проводить согласованный по вертикали анализ ряда уровней.

2. Целью настоящей работы является получение трехмерных структурных характеристик поля температуры воздуха.

Исходным материалом для расчета служили данные температурно-ветрового зондирования, проводившегося по плану МГГ в 1957—1959 гг. над территорией Северной Америки. Расчет велся по сезонам, в каждом из четырех сезонов избиралось 60 ситуаций. Для уменьшения статистической связи между ситуациями они выбирались отстоящими друг от друга на 3 суток. Большой интервал не мог быть принят из-за ограниченности во времени ряда наблюдений МГГ.

Каждая ситуация заключала в себе 60 точек зондирования, 15 из них располагались на территории Аляски и Канады и 45 — на территории США. Максимальное удаление станций друг от друга равнялось 7500 км. Из-за отсутствия в нашем распоряжении данных зондирования за март—май 1959 г. функции за весенний сезон рассчитывались по 30 ситуациям. Вычисления проводились на ЭВМ с быстрейшим 20 тыс. операций в секунду. Для каждой пары уровней расчет функции по методике, описанной в [1], требовал 15 минут машинного времени. Вычислялись структурные и корреляционные функции для поверхностей 500, 400, 300, 200 и 100 мб и всех парных сочетаний их друг с другом. В процессе счета проводилось осреднение полученных характеристик по градациям расстояния, величина градации равнялась 200 км. В полном объеме расчет проведен для летнего и зимнего сезонов.

В данной статье анализируются результаты 50 просчетов. Результаты вычислений, отпечатанные ЭВМ, заключали в себе значения исправленных и неисправленных структурных и корреляционных функций в градациях, значения средних квадратических отклонений функций в них, числа случаев и средних расстояний в градациях.

Печаталось также вычисленное отдельно значение дисперсии $m_T(p, p, 0)$ или $m_T(p_1, p_2, 0)$, рассчитываемое по формуле

$$m_T(p_1, p_2, 0) = \overline{T'(\vec{r}_1, p_1) T'(\vec{r}_1, p_2)}, \quad (1)$$

где p_i — давление на изобарической поверхности, T' — отклонение температуры от нормы, \vec{r}_1 — радиус-вектор точки зондирования. Обозначения здесь и далее аналогичны обозначениям в [1].

3. Для дальнейшей обработки полученные данные наносятся на график, по значениям функций в градациях проводятся плавные кривые.

При обработке графиков функций, рассчитанных для одного уровня, экстраполяцией структурной функции на нуль находится значение $2\sigma_T^2$ — удвоенное значение среднего квадрата случайной ошибки наблюдений.

Известно, что, во-первых, случайные ошибки наблюдений завышают дисперсию метеозлемента на величину среднего квадрата ошибки наблюдений на том же уровне

$$m_{\tilde{T}}(p, p, 0) = m_T(p, p, 0) + \sigma_T^2(p),$$

где \tilde{T} — измеренное значение температуры на уровне p .

Во-вторых, случайные ошибки наблюдений завышают все значения структурной функции на сумму средних квадратов ошибок на уровнях p_1 и p_2 , а при $p_1 = p_2 = p$ на $2\sigma_T^2(p)$

$$b_{\tilde{T}}(p_1, p_2, \rho) = b_T(p_1, p_2, \rho) + \sigma_T^2(p_1) + \sigma_T^2(p_2);$$

$$b_{\tilde{T}}(p, p, \rho) = b_T(p, p, \rho) + 2\sigma_T^2(p).$$

Соответствующие исправления вносятся в значения рассчитанных функций.

Очевидно, что экстраполяция на нуль одноуровневой автокорреляционной функции дает уже исправленное значение дисперсии метеозлемента. Вычитая его из значения дисперсии, рассчитанного машиной, получаем σ_T^2 , которое должно совпадать с величиной среднего квадрата случайной ошибки, полученной при экстраполяции на нуль структурной функции.

Следует отметить, что экстраполяция функций на нуль не представляет затруднений при достаточном числе случаев (порядка 2000—3000)

в каждой из нескольких начальных градаций расстояний. Так как материалы МГГ включали в себя лишь опорную сеть станций зондирования, в первых двух градациях число случаев расчета было недостаточным (в нулевой — порядка 100, в первой — менее 2000). Значения функций в них иногда были искажены. Поэтому исправление по методике, описанной в [1], имело большое значение.

В результате подобной экстраполяции были получены значения средних квадратов случайных ошибок наблюдения (табл. 1).

Таблица 1
Средние квадраты случайных ошибок измерения температуры воздуха по сезонам

Уровень, мб	Лето	Осень	Зима	Весна
500	1,0	1,0	1,0	1,0
400	1,0	1,0	1,0	1,0
300	1,5	1,2	0,7	1,2
200	1,5	2,2	1,9	1,2
100	1,6	0,5	1,0	1,3

Как видим из табл. 1, случайные ошибки в различные сезоны близки по величине; наблюдается закономерное возрастание их с увеличением

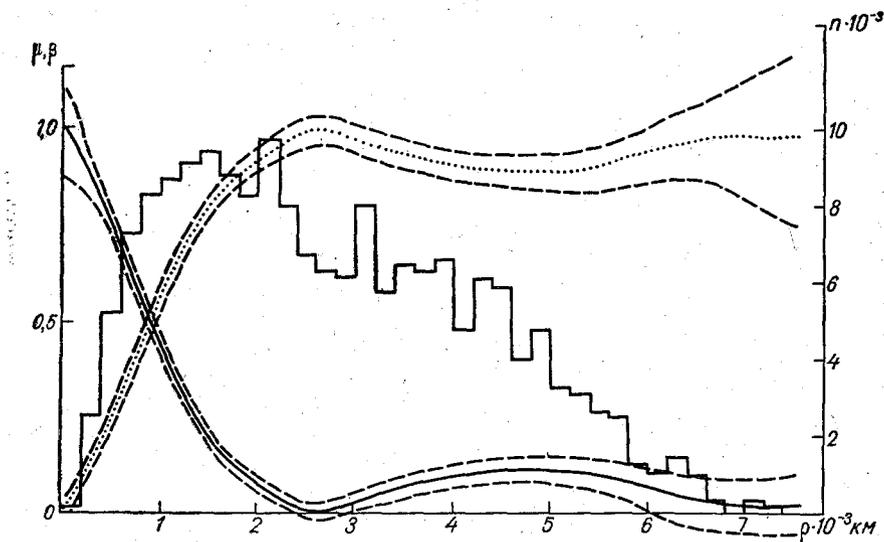


Рис. 1. Нормированные структурная и автокорреляционная функции температуры воздуха и их доверительные интервалы. Поверхность 500 мб. Лето.

высоты уровня. Однако имеются и некоторые отклонения от этой закономерности.

4. Дальнейший этап обработки заключается в вычислении доверительного интервала $J_{\beta} = (\bar{m}_T - \varepsilon_{\beta}; \bar{m}_T + \varepsilon_{\beta})$, где ε_{β} определяется формулой (см., например, [2])

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{\sigma_j}{\sqrt{n_j}} t_{\beta}, \quad (2)$$

где σ_j — среднее квадратическое отклонение значения функций в градации ($j=1, 2, \dots, n$), n_j — число случаев в градации, $t_\beta = \sqrt{2} \Phi^{-1}(\beta)$, $\Phi^{-1}(\beta)$ — функция, обратная интегралу вероятности, β — вероятность попадания случайной величины в интервал.

Все величины, входящие в формулу (2), или вычисляются на ЭВМ, или могут быть заданы. Последнее относится к β и t_β .

Рассчитанные значения функций и доверительных интервалов нормируются. На рис. 1 приведены графики нормированных структурной и автокорреляционной функций температуры воздуха для лета на поверхности 500 мб. Там же прерывистыми линиями обозначены доверительные интервалы для них при условии $\beta=0,90$. Здесь же дана ступенчатая кривая числа случаев, шкала для которой находится справа. Из рисунка следует, что доверительный интервал, пропорциональный величине среднего квадратического отклонения и числу случаев в градации, зависит от расстояния между станциями ρ . Он изменяется от $\pm 1,5$ до $\pm 3\%$, что говорит о достаточной надежности вычисленных значений на основном участке кривых. При малых и очень больших ρ доверительный интервал увеличивается до $\pm (11-20)\%$. Интересно, что при одном и том же числе случаев при малых ρ меньший интервал имеет структурная функция, а при больших ρ — корреляционная функция. В последующем при необходимости проводится аппроксимация полученных функций.

5. Большой интерес представляет возможность контроля правильности расчетов при совместном анализе одноуровневых и двухуровневых функций.

Как уже указывалось в [1], значение структурной функции на бесконечности $A_f(p_1, p_2)$ связано с дисперсиями метеоэлемента на уровнях p_1 и p_2 следующим соотношением:

$$A_f(p_1, p_2) = m_f(p_1, p_1, 0) + m_f(p_2, p_2, 0). \quad (3)$$

Снятая с графика величина $A_{\tilde{T}}(p_1, p_2)$

$$A_{\tilde{T}}(p_1, p_2) = b_{\tilde{T}}(p_1, p_2, \rho_i) + 2m_{\tilde{T}}(p_1, p_2, \rho_i), \quad (4)$$

где \tilde{T} — измеренное значение температуры, b и m — исправленные значения функций в j -той градации, искажена случайными ошибками.

$$A_{\tilde{T}}(p_1, p_2) = A_T(p_1, p_2) + \sigma_T^2(p_1) + \sigma_T^2(p_2). \quad (5)$$

Из (3) и (5) следует

$$A_{\tilde{T}}(p_1, p_2) - [\sigma_T^2(p_1) + \sigma_T^2(p_2)] = m_T(p_1, p_1, 0) + m_T(p_2, p_2, 0). \quad (6)$$

Так как $A_{\tilde{T}}(p_1, p_2)$ и значения дисперсий являются результатом трех различных расчетов, выполнение равенства (6) подтверждает их правильность. Подобная проверка была произведена и полученные невязки представлены в табл. 2.

Таблица 2

Невязки равенства (6) (град. 2). Лето

Уровни, мб	400	300	200	100
500	-0,1	+0,2	+0,3	-4,1
400		+0,1	+0,1	-4,1
300			+0,2	-4,0
200				-4,1

Мы видим, что для всех просчетов, за исключением случаев, в которых участвуют данные на поверхности 100 мб, равенство выполняется в пределах точности снятия данных с графика.

В просчетах с участием данных на уровне 100 мб имеет место систематическая ошибка, равная -4 град.^2 . Такая ошибка может появиться лишь в случае искажения величины дисперсии на поверхности 100 мб.

Из уравнения (6) можно получить истинное значение $m_T(100, 100, 0)$, так как в нашем распоряжении имеются все остальные параметры формулы. При этом необходимо использовать дисперсии, в которых исключено влияние случайных ошибок наблюдений.

Подсчет по формуле (6) показал, что величина дисперсии температуры на поверхности 100 мб должна быть не $11,2 \text{ град.}^2$, а $7,2 \text{ град.}^2$. То,

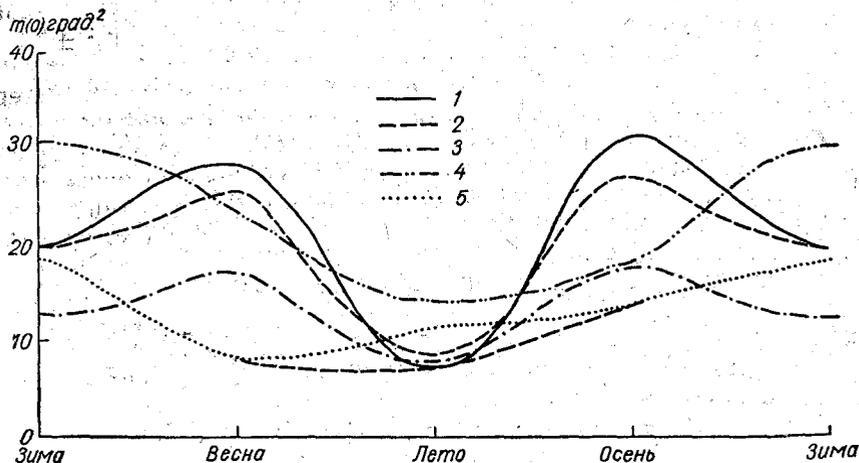


Рис. 2. Годовой ход дисперсии температуры на различных уровнях в атмосфере.
1 — 500 мб, 2 — 400 мб, 3 — 300 мб, 4 — 200 мб, 5 — 100 мб.

что такая величина является более приемлемой, подтверждает и график годового хода дисперсии температуры на различных уровнях, приведенный на рис. 2.

Как видно на рис. 2, годовой ход на всех уровнях в тропосфере обладает одинаковыми свойствами: наблюдаются два минимума (зимой и летом) и два максимума (в переходные сезоны). В стратосфере положение иное, здесь отмечается лишь один максимум (зимой) и один минимум (летом). Такой характер годового хода сохраняется и на более высоких уровнях. Значение дисперсии температуры на уровне 100 мб, равное $11,2 \text{ град.}^2$, явно не укладывается в эту закономерность. Гораздо ближе к ней кривая, проведенная через значение дисперсии $7,2 \text{ град.}^2$.

На основании рис. 2 можно утверждать, что механизм изменения температуры в тропосфере и стратосфере различен. Вопрос о количественных связях этих изменений рассматривается в п. 7.

6. Следует отметить еще одну закономерность, обнаруженную при обработке материала. В работе [1] показано, что $m(p_1, p_2, 0)$ не искажается случайными ошибками. Поэтому рассчитанное машиной значение $m(p_1, p_2, 0)$ должно совпадать со значением $m_s(p_1, p_2, 0)$, полученным путем экстраполяции на нуль корреляционной функции. Однако такого совпадения, как правило, не было, причем расчетное значение чаще всего оказывалось завышенным.

Подобное явление можно объяснить следующим образом. Температуры одного и того же радиозонда вследствие накопления ошибок (одной из причин которых может быть инерционность датчиков) при подъеме вверх оказываются положительно коррелированными. Ошибки же различных зондов независимы, в результате величины $t(p_1, p_2, 0)$ получаются завышенными.¹ В случае корреляции одного знака это завышение должно расти с высотой или по крайней мере не уменьшаться.

Таблица 3, в которой показаны величины невязки между расчетными и экстраполированными значениями $t(p_1, p_2, 0)$, не подтверждает этого.

Таблица 3

Величины $t(p_1, p_2, 0) - t_{\text{э}}(p_1, p_2, 0)$
(град.²)

Уровни, мб	Лето				Зима			
	400	300	200	100	400	300	200	100
500	+1,1	+0,7	-1,2	0,0	0,3	-1,3	0,0	+3,4
400		+0,5	-1,4	0,0		-2,1	+2,5	+5,4
300			-0,8	0,0			0,0	+4,1
200				+0,8				+1,0

Анализ табл. 3 показывает, что общее закономерное повышение положительной связи между точками одного радиозонда с увеличением их высоты резко нарушается только тогда, когда коррелируются между собой один из тропосферных уровней и уровень, совпадающий с тропопаузой. Объяснить это можно лишь наличием отрицательной корреляции между температурой, отсчитанной на уровне, совпадающем с тропопаузой, и температурой на более низких уровнях (с верхними она коррелируется положительно).

При входе радиозонда в слой мощной инверсии или изотермии (тропопаузу) температура датчика по инерции оказывается в среднем ниже, чем температура воздуха. На других зондах происходит то же самое, но эти сдвиги не связаны с данными рассматриваемого зонда, и отрицательной корреляции не наблюдается. По данным табл. 3, подобные сдвиги достигают 1—1,5°. Таким образом, по полученным связям можно косвенно определить влияние задерживающих слоев на датчики температуры радиозонда. Очевидно, что обнаружить подобные ошибки можно лишь при расчете трехмерных структурных характеристик.

Учитывая вышеизложенное, мы приняли экстраполированные значения $t_T(p_1, p_2, 0)$ за истинные.

7. Полученные материалы позволяют оценить связь между значениями температуры на различных уровнях. Наиболее отчетливо эти связи выражены по вертикали, т. е. при $\rho = 0$.

В табл. 4 представлены коэффициенты корреляции и $t_T(p, p, 0)$ и $t_T(p_1, p_2, 0)$ для двух сезонов. Из табл. 4 следует, что значения температуры на тропосферных уровнях связаны между собой положительно и довольно тесно ($\mu = 0,99 \div 0,75$). Положительная связь наблюдается и между температурой воздуха на стратосферных уровнях. Однако при коррелировании тропосферных данных с данными в страто-

¹ Объяснение предложено М. И. Юдиным.

Таблица 4

Коэффициенты корреляции μ и значения автокорреляционных функций m (град.²) при $\rho=0$

Уровни, мб	500		400		300		200		100	
	μ	m	μ	m	μ	m	μ	m	μ	m
Л е т о										
500	1,0	+7,1	0,99	+7,8	0,75	+5,6	-0,23	-2,3	-0,65	-4,8
400			1,0	+8,3	0,86	+7,0	-0,22	-2,5	-0,66	-5,2
300					1,0	7,9	-0,08	-0,8	-0,64	-4,9
200							1,0	+14,1	+0,26	+2,4
100									1,0	+7,7
З и м а										
500	1,0	+22,2	0,94	+19,9	+0,53	+8,9	-0,56	-14,7	-0,61	-12,5
400			1,0	19,7	+0,67	+9,9	-0,55	-14,2	-0,70	-15,0
300					1,0	12,7	0,0	0,0	-0,46	-7,0
200							1,0	30,4	+0,51	+11,8
100									1,0	+18,4

сфере коэффициент корреляции становится отрицательным и растет по модулю с удалением изобарических поверхностей от тропопаузы. Наименьшая связь наблюдается между температурой на поверхностях 300 и 200 мб, т. е. на уровнях, между которыми чаще всего находится тропопауза.

Данные табл. 4 подтверждает и рис. 3, на котором показана величина связи между температурой на соседних поверхностях по вертикали во все сезоны. Роль тропопаузы на этом рисунке особенно наглядна. Занижение коэффициента корреляции между температурой на поверхностях 400 и 300 мб зимой, а также на поверхности 200 и 100 мб летом объясняется большой частотой пребывания тропопаузы на уровнях 200 и 300 мб в соответствующие сезоны. В связи с этим следует заметить, что информационная ценность данных о температуре воздуха, снятых на поверхности 300 мб и привлеченных к прогнозу изменения температуры в тропосфере, изменяется от лета к зиме почти на 30%. Это не может не сказаться на качестве прогноза.

8. Одноуровневые автокорреляционные и структурные функции температуры воздуха рассчитаны для всех четырех сезонов. Наибольший интерес представляет рассмотрение нормированных корреляционных функций. Эти функции для летнего сезона и всех рассматриваемых уровней изображены на рис. 4. Интересно, что функции для тропосферных уровней почти совпадают; это характерно не только для лета, но и для всех остальных сезонов, графики для которых здесь не приводятся. Максимальные расхождения между значениями функций при одинаковых ρ наблюдаются весной и осенью (на $\rho=1500 \div 2000$ км). Они достигают 5—7% и возникают за счет более медленного уменьшения коэффициента корреляции с расстоянием на поверхности 300 мб.

Летом и зимой тропосферные функции становятся равными нулю на расстоянии 2500—3000 км. Осенью и весной они остаются положительными до максимальных расстояний (порядка 7000 км).

Летом (рис. 4) $\mu(\rho)$ быстрее всего уменьшается на поверхности

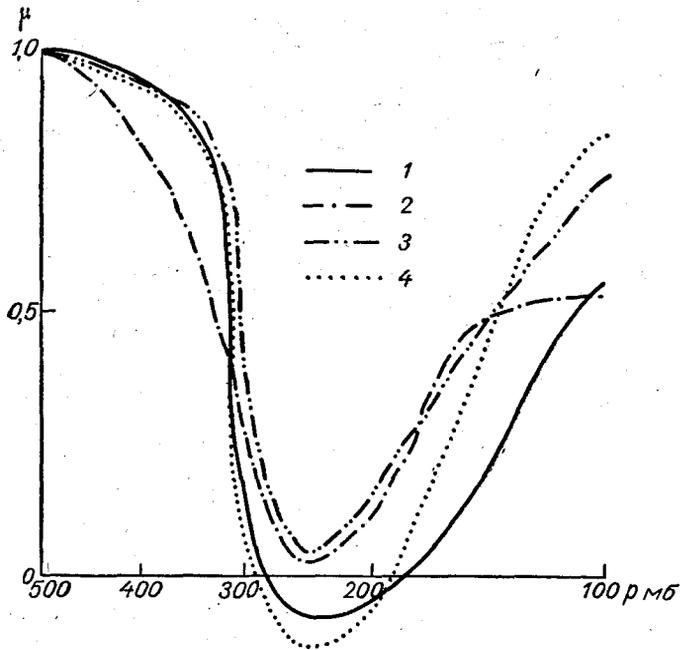


Рис. 3. Связь температуры на соседних уровнях в атмосфере по вертикали.

1 — лето, 2 — осень, 3 — зима, 4 — весна.

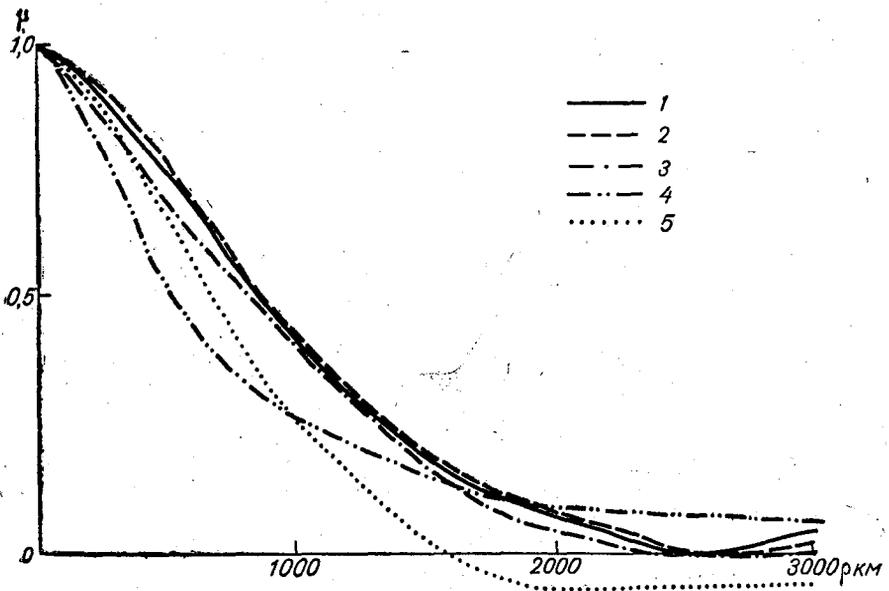


Рис. 4. Нормированные автокорреляционные функции температуры воздуха. Лето.

Усл. обозначения см. рис. 2.

200 мб. По-видимому, это обусловлено влиянием тропопаузы и уменьшением роли адвективных процессов.

Быстрее, чем на тропосферных уровнях, $\mu(\rho)$ уменьшается на поверхности 100 мб летом. Однако зимой наблюдается обратная картина, поэтому летняя и зимняя кривые $\mu_T(100, 100, \rho)$ довольно сильно расходятся (рис. 5). При $\rho = 1600$ км разность между зимним и летним значениями $\mu_T(100, 100, \rho)$ достигает 0,28, причём летнее значение на этом

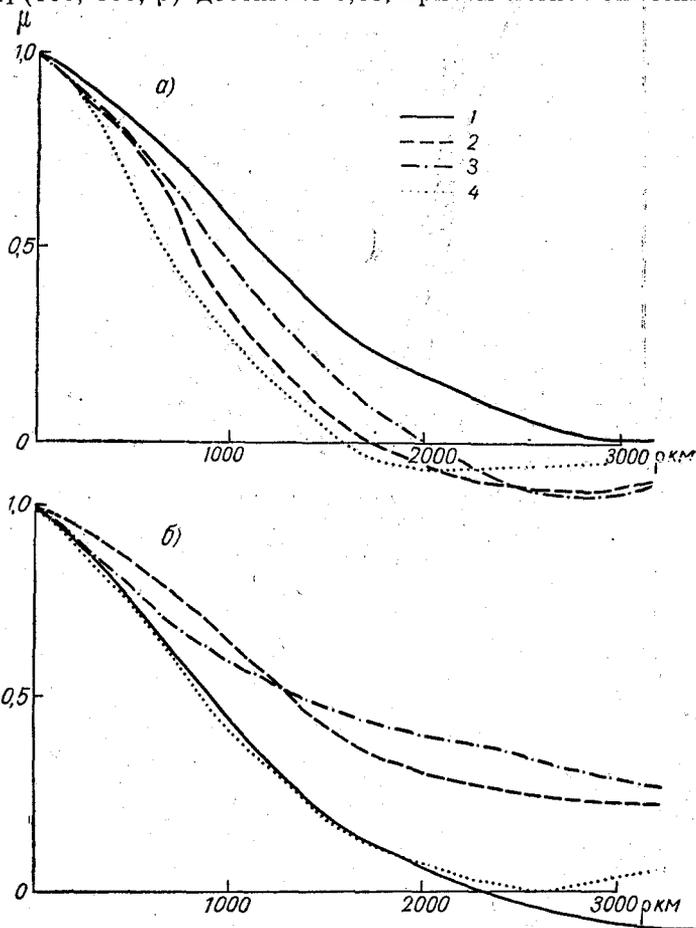


Рис. 5. Нормированные автокорреляционные функции температуры воздуха за различные сезоны на уровнях 100 мб (а) и 500 мб (б).

1 — зима, 2 — осень, 3 — весна, 4 — лето.

расстоянии становится равным нулю. Равенство нулю зимней функции наблюдается лишь при $\rho = 3000$ км. Корреляционные функции для весны и осени располагаются между зимней и летней кривыми.

Подобное же расположение сезонных кривых имеет место и на втором стратосферном уровне (200 мб), причём отклонения функций друг от друга для трех сезонов малы (максимум на 0,1), а летняя кривая обособлена и имеет максимальный наклон.

На рис. 5 изображены также функции $\mu_T(500, \rho)$ для четырех сезонов года. Изменение функций от сезона к сезону, подобное приведенному на рисунке, характерно и для уровней 400 и 300 мб. Зимняя и летняя функ-

ции близки друг к другу, их значения становятся равными нулю при $\rho = 2300 \div 2500$ км на 500 мб и $\rho = 2500 \div 3000$ на 300 мб. Осенняя и весенняя кривые на всех уровнях обособлены и с высотой сближаются друг с другом, наибольшие расхождения имеют место на 500 мб (рис. 5). Функции остаются положительными до расстояний более 7000 км. Отметим, что связь между температурой на всех исследованных уровнях ослабевает с расстоянием тем медленнее, чем больше величина дисперсии на нем. Годовой ход дисперсии был показан на рис. 2.

Возможно, что переходные сезоны 1957—1958 гг. были аномальными по интенсивности циркуляционных процессов. В связи с этим отклонения температуры от нормы одного знака занимали очень большие территории, что и привело к сохранению связи вплоть до очень больших расстояний. В этом случае для ликвидации подобного эффекта при последующих расчетах ряд наблюдений должен быть более длительным во времени. То, что число наблюдений внутри нашего двухгодичного периода достаточно для характеристики его структурных особенностей, подтверждается сходством автокорреляционных функций для осени и весны. Необходимо лишь вспомнить, что первая из них вычислялась по данным 60 ситуаций, а вторая — 30. Определение минимальной длительности ряда наблюдений во времени, обладающего достаточной устойчивостью по отношению к структурным характеристикам, требует постановки специального эксперимента.

Следует заметить, что корреляционные функции, не достигающие нуля вплоть до больших расстояний, отмечались лишь в тропосфере. Гораздо чаще имел место переход функций при больших ρ через нуль. Наиболее часто при больших ρ значения функций стремились к нулю.

9. Представление о максимальной величине связи температуры на различных уровнях дает табл. 5. С увеличением расстояния между станциями связь, естественно, ослабевает. Ослабление этой связи с увеличением ρ можно проследить на рис. 6. На нем изображены функции $\mu_T(\rho_1, \rho_2, \rho)$ для летнего сезона, полученные при коррелировании температуры воздуха на поверхности 500 мб с температурой на выше лежащих уровнях. Для сравнения здесь же нанесена функция $\mu_T(500, 500, \rho)$. С ней почти совпадает $\mu_T(500, 400, \rho)$. При $\rho = 1300$ км к ним приближается кривая $\mu_T(500, 300, \rho)$, максимальное значение которой равно 0,75. Все три функции становятся равными нулю при $\rho = 2500$ км.

Очень небольшую величину имеет $\mu_T(500, 200, \rho)$. При $\rho = 0$ ее значение достигает лишь $-0,23$. Вслед за зоной отрицательной корреляции отмечается зона положительной связи с максимумом при $\rho = 2000$ км. Равной нулю она становится при $\rho = 800$ и 3300 км.

Функция $\mu_T(500, 100, \rho)$ также отрицательна до расстояний 1400 км. Ее максимальное значение $-0,67$. Затем с ростом ρ следует зона положительной связи с малыми (до 0,10—0,15) значениями μ_T .

Зимой ход кривых $\mu_T(500, 500, \rho)$, $\mu_T(500, 400, \rho)$ и $\mu_T(500, 100, \rho)$ аналогичен летнему. Но так как зимой тропопауза в среднем более удалена от поверхности 200 мб, чем летом, и находится ближе к уровню 300 мб, значительно уменьшилась $\mu_T(500, 300, \rho)$ [$\mu_T(500, 300, 0) = 0,54$]. Кривая стала более плоской и приближается к $\mu_T(500, 400, \rho)$ при $\rho = 1200$ км. Более чем вдвое увеличились значения $\mu_T(500, 200, \rho)$, максимальное ее значение равно $-0,55$.

Графики, подобные рис. 6, построены для всех исследуемых уровней. Характерно, что во всех случаях образуется своего рода узел с двумя точками взаимного пересечения кривых. Например, на рис. 6 первая точка находится у $\rho = 1800$ км, а вторая — у $\rho = 3000$ км. На этих расстояниях межуровневые температурные связи становятся почти оди-

наковыми. При меньших ρ отмечается корреляция одного знака, при промежуточных ρ — противоположного. Максимальные значения μ_t во второй области не превышают 0,2. Значения ρ первой точки изменяются от 800 км (на 200 мб) до 2000 км (на 300 мб), ρ второй точки колеблется от 3000 до 3800 км.

Используя эти сведения, а также данные табл. 4, можно получить представление о взаимном расположении кривых на графиках остальных уровней, которые в статье не приводятся.

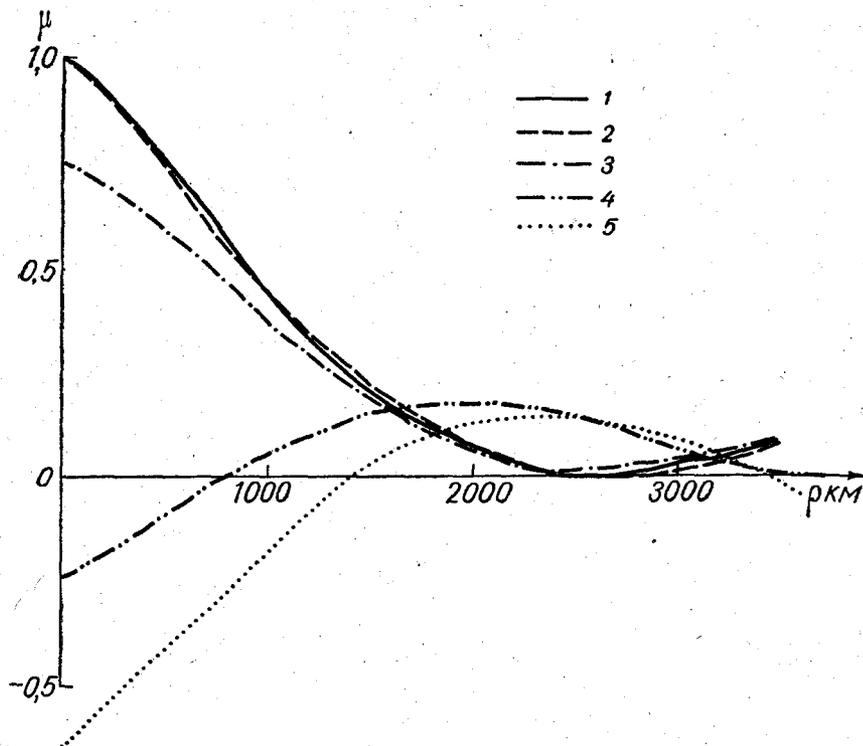


Рис. 6. Двухуровневые корреляционные функции температуры воздуха для летнего сезона.

1 — $\mu(500, 500, \rho)$, 2 — $\mu(500, 400, \rho)$, 3 — $\mu(500, 300, \rho)$, 4 — $\mu(500, 200, \rho)$, 5 — $\mu(500, 100, \rho)$.

Знание пространственных структурных характеристик полей метеорологических элементов открывает новые возможности перед исследователем. Анализ полученных функций поля температуры воздуха позволяет оценить средние ошибки вертикального зондирования атмосферы, косвенно характеризовать влияние слоев инверсии на датчики температуры зондов и проверить точность расчетов на ЭВМ.

Вычисленные структурные характеристики описывают связь полей температуры на различных уровнях, свидетельствуют о различиях атмосферных процессов в тропосфере и стратосфере и связях их друг с другом. Весьма полно освещается роль тропопаузы как динамического барьера между различными по свойствам слоями атмосферы.

Расчет пространственных структурных характеристик иных метеорологических элементов, а также связей различных метеорологических элементов друг с другом может дать новые сведения о природе атмосферных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С., Болтенков В. П. К методике исследования трехмерной макроструктуры метеорологических полей. См. наст. сб.
2. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, 1962.

ТРЕХМЕРНАЯ ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА ПОЛЯ ГЕОПОТЕНЦИАЛА

Найдены пространственные корреляционные функции геопотенциала изобарических поверхностей. Предложены аппроксимации полученных функций с помощью формул простого вида.

1. Использование статистических методов в современной метеорологии очень расширилось за последние годы; до сих пор, однако, во многих случаях оно опирается в отсутствие надежных данных о статистических характеристиках метеорологических полей, без которых невозможны никакие статистические выводы. Настоящая статья содержит некоторые новые данные о статистических характеристиках важнейшего метеорологического поля — поля геопотенциала $H(x, y, p, t)$, определяющего значения атмосферного давления в различных точках и в различные моменты времени.

В настоящее время в метеорологии используются главным образом лишь простейшие статистические характеристики — средние значения, дисперсии и коэффициенты корреляции метеорологических величин. Среднее значение поля геопотенциала $\overline{H(x, y, p, t)}$ (черта сверху является символом осреднения) представляет собой его климатологическую норму — самую простую (и самую важную) статистическую характеристику, на которой мы не будем задерживаться, считая ее известной. Что же касается дисперсий значений геопотенциала и коэффициентов корреляции между этими значениями в двух разных точках, то все они могут быть определены по значениям соответствующей корреляционной функции

$$B(M_1, M_2) = \overline{H'(M_1, t)H'(M_2, t)}, \quad (1)$$

где M_1 и M_2 — точки трехмерного пространства, а $H'(M, t) = H(M, t) - \overline{H(M, t)}$ — отклонение значения поля в точке M от соответствующего среднего значения.¹ В самом деле, дисперсия поля H в точке M в момент t равна просто значению $B(M, M, t)$, а коэффициент корреляции между $H(M_1, t)$ и $H(M_2, t)$ равен $B(M_1, M_2, t) [B(M_1, M_1, t) B(M_2, M_2, t)]^{-1/2}$; поэтому значение функции $B(M_1, M_2, t)$ равносильно значению всех

¹ Мы здесь ограничиваемся лишь рассмотрением пространственной структуры поля геопотенциала и поэтому считаем, что значения $H(M_1, t)$ и $H(M_2, t)$ взяты в один и тот же момент времени t ; вообще же говоря, имеет смысл и исследование более общих корреляционных функций $B(M_1, M_2, t_1, t_2) = \overline{H'(M_1, t_1)H'(M_2, t_2)}$, характеризующих пространственно-временную структуру поля H .

дисперсий и коэффициентов корреляции значений H . Вместо корреляционной функции иногда удобно использовать так называемую структурную функцию

$$D(M_1, M_2, t) = \overline{[H'(M_1, t) - H'(M_2, t)]^2}, \quad (2)$$

которая обычно может быть определена по эмпирическим данным несколько точнее, чем функция $B(M_1, M_2, t)$. Ясно, что, зная корреляционную функцию, легко определить и соответствующую структурную функцию по формуле

$$D(M_1, M_2, t) = B(M_1, M_1, t) + B(M_2, M_2, t) - 2B(M_1, M_2, t). \quad (3)$$

С другой стороны, при наличии однородности поля $H(M, t)$ (о которой мы еще будем говорить ниже) по структурной функции в принципе можно определить и корреляционную функцию. В этом случае значения $B(M, M, t)$ можно определить по асимптотическому поведению функции $D(M_1, M_2, t)$ при неограниченном удалении точек M_1 и M_2 друг от друга. Так как, однако, эмпирическое определение асимптотического поведения $D(M_1, M_2, t)$ представляется довольно затруднительным (при этом требуется иметь материалы обширных однородных наблюдений на достаточно удаленных друг от друга станциях и уметь определить, какие станции можно уже считать достаточно удаленными, что далеко не всегда удается сделать), то удобнее все же во всех случаях наряду с определением значений структурных функций одновременно оценивать и значения дисперсий $B(M, M, t)$. Задание же всех значений $D(M_1, M_2, t)$ и $B(M, M, t)$, очевидно, равносильно заданию всех значений функции $B(M_1, M_2, t)$ или, иначе, заданию всех дисперсий и коэффициентов корреляции поля H .

Перейдем теперь к вопросу об эмпирическом нахождении значений корреляционных и структурных функций. Вообще говоря, черта сверху в формулах (1) и (2), задающих эти функции, имеет смысл теоретико-вероятностного осреднения по некоторой «генеральной совокупности» всевозможных полей, характеризующей определенным распределением вероятностей, — так, во всяком случае, определяются корреляционные и структурные функции в работах по теории вероятностей и математической статистике (см., например, [6]). Практически, однако, осреднение по бесконечной генеральной совокупности всегда приходится заменять осреднением по некоторому конечному множеству «выборочных значений», или «реализаций» соответствующих полей, выбранных наудачу из этой совокупности. Поэтому сейчас надо прежде всего условиться, что будет принято за генеральную совокупность и как будет производиться отбор реализаций, по которым производится осреднение.

Вообще говоря, вопрос о выборе генеральной совокупности (т. е. о выборе исходного «статистического ансамбля») в метеорологических задачах является совсем не простым. В распоряжении метеоролога нет «статистического ансамбля планет, полностью аналогичных Земле», подобного «статистическому ансамблю аналогичных динамических систем», со времен Гиббса рассматриваемому в статистической физике, — он может использовать лишь наблюдения, производившиеся в разных пунктах Земли в разные моменты времени. Поэтому речь может идти только о «статистическом ансамбле» наблюдений в аналогичных точках Земли и в аналогичные моменты времени. При этом, естественно, возникает вопрос, какие же точки Земли и какие моменты времени можно (и нужно) считать аналогичными. На этот последний вопрос не всегда легко ответить, и он заслуживает специального изучения с привлечением критериев однородности, широко распространенных в современной математической

статистике. Здесь мы, однако, ограничимся лишь некоторыми общими соображениями по этому поводу, вытекающими из повседневного метеорологического опыта и из результатов предыдущих работ [1, 2, 4] по определению корреляционных и структурных функций.

Известно, что все метеорологические элементы имеют суточный ход, связанный с вращением Земли; поэтому, строго говоря, аналогичными следовало бы считать лишь моменты времени, относящиеся к одному определенному времени суток. Правда, в случае поля давления (или геопотенциала) суточный ход несравненно менее значителен, чем, например, в случае поля температуры или скорости ветра, так что с известным оправданием здесь можно было бы им вовсе пренебречь. Однако нужно учесть еще одно обстоятельство — то, что в течение суток давление обычно вообще меняется весьма мало; поэтому данные наблюдений за давлением, относящиеся к одним и тем же суткам, будут статистически очень сильно зависимыми, т. е. будут все содержать очень мало новой информации по сравнению с первым из них. Более того, упомянутая зависимость остается заметной и на протяжении следующих двух суток. Поэтому мы в своих вычислениях сочли разумным увеличить интервал между сроками до трех суток, рассчитывая, что небольшая потеря информации, связанная с исключением сильно зависимых между собой величин, позволит значительно сократить объем вычислительных работ.

Более существенным оказывается наличие годового хода метеорологических элементов, приводящего к тому, что моменты времени, относящиеся к различным сезонам, никак нельзя считать аналогичными. Вообще, если пытаться полностью исключить влияние годового хода, то надо рассматривать лишь «статистические ансамбли» значений геопотенциала в один определенный день года, т. е. брать данные наблюдений с интервалами в целый год. Ясно, однако, что практически это очень невыгодно, так как при этом мы сможем оперировать лишь очень небольшими наборами реализаций, осреднение по которым вряд ли может быть достаточным для надежного установления каких-либо статистических характеристик (не говоря уже о том, что при этом приходится использовать данные, относящиеся к крайне длительным промежуткам времени и поэтому могущие уже оказаться неоднородными из-за вековых колебаний климата, существование которых подозревается многими исследователями). Поэтому на практике обычно приходится выбирать определенный промежуток времени, составляющий сравнительно небольшую часть года (например, месяц, два месяца или один сезон) и моменты наблюдений в пределах этого промежутка считать аналогичными.¹ В частности, мы при вычислении корреляционных функций использовали материалы наблюдений, относящиеся к трем зимним месяцам. Целесообразность вычисления статистических характеристик отдельно для каждого сезона подтверждается результатами работы [1], в которой было обнаружено заметное различие между структурными функциями, соответствующими разным сезонам.

Помимо выделения определенного времени суток и определенного сезона или месяца, можно еще ограничить «статистический ансамбль аналогичных моментов наблюдения», проведя дополнительную классификацию эмпирического материала по каким-либо специальным признакам. Так, например, в работе [2] использовалось разбиение имеющихся наблюдений на три группы, соответствующие трем классам

¹ При этом, разумеется, получаемые статистические характеристики не будут уже явно зависеть от момента времени t , а будут относиться сразу к целому промежутку времени, который необходимо заранее точно указать и иметь в виду при всех применениях соответствующих характеристик.

макрометеорологических условий, описываемым типами общей циркуляции, предложенными Вангенгеймом. При этом оказалось, что основной смысл такой классификации состоит в том, что она позволила правильно учесть при вычислении структурных функций значения климатологических норм, различных для разных типов циркуляции, сами же структурные функции оказались примерно одинаковыми.

Результаты работы [2] создают впечатление, что предварительная классификация наблюдений по типам циркуляции может в некоторых случаях быть вполне целесообразной; пока, однако, вряд ли можно считать этот вопрос окончательно выясненным. Дело в том, что любая дополнительная классификация данных играет двойственную роль: с одной стороны, она выделяет более узкий ансамбль, статистические характеристики которого, вообще говоря, должны более полно описывать данную конкретную метеорологическую ситуацию, а, с другой стороны, она уменьшает объем доступного для использования статистического материала и тем самым уменьшает точность оценки соответствующих характеристик по эмпирическим данным. Поэтому целесообразность той или иной дополнительной классификации чаще всего трудно выяснить априори, и обоснованные выводы в этом отношении можно получить лишь в результате тщательной обработки большого статистического материала с использованием точных методов современной математической статистики.

Перейдем теперь к вопросу об отборе «ансамбля аналогичных пунктов наблюдения», позволяющего еще во много раз увеличить количество данных. Такими аналогичными пунктами естественно считать точки земного шара, имеющие одинаковую широту. Из этого предположения сразу следует, что статистические характеристики, зависящие от координат одной точки (например, климатологическая норма и дисперсия), должны быть постоянными для точек, расположенных на одной параллели (т. е. различающихся только по долготе), а такие характеристики, как корреляционная и структурная функции, зависящие от координат пары точек, не должны меняться при одновременном изменении долгот этих точек на одну и ту же величину; следовательно, для точек, расположенных на одной параллели, упомянутые функции должны зависеть лишь от разности долгот (другими словами, от расстояния между точками).

Поле, среднее значение которого не меняется при изменении одной из координат, а корреляционная функция $V(M_1, M_2)$ зависит только от разности значений этой координаты в точках M_1 и M_2 (так что, в частности, дисперсия $V(M, M)$ вообще не зависит от этой координаты), называется однородным в направлении этой координаты. Если же это условие не выполнено для среднего значения поля и его корреляционной функции, но выполнено для среднего значения разности величин поля в двух точках и структурной функции поля, то поле называется имеющим однородные приращения.

Как показали результаты, приведенные в статье [1], последнее условие довольно хорошо выполняется для поля геопотенциала H_{500} в средних широтах; более того, можно даже считать, что при не очень больших расстояниях r между точками структурная функция поля H_{500} зависит только от длины вектора $r(M_1, M_2)$, но не от его направления, т. е. что приращения поля не только однородны, но и изотропны (см. также [5]).¹ Однако дисперсии самого поля оказались заметно меняющимися с долготой. Неоднородность поля геопотенциала по долготе подтверждается

¹ Подробнее об этом мы еще будем говорить ниже.

также расчетами, проведенными нами. Несмотря на это, мы здесь ограничимся лишь приближенным анализом, при котором упомянутая зависимость статистических характеристик от долготы не принимается во внимание, т. е. поле считается однородным по долготе; при этом полученные нами статистические характеристики фактически будут представлять собой осредненные по долготе значения. Так как зависимость от долготы не является очень резкой, то пренебрежение ею в ряде задач будет вполне допустимым; с другой стороны, предположение об однородности по долготе очень облегчает нашу задачу, так как дает возможность считать аналогичными все пункты наблюдения, расположенные на одной параллели, и при вычислении корреляционных функций производить осреднение по данным, относящимся к значительному числу таких пунктов.

На основании всего сказанного выше, мы для нахождения корреляционных функций поля геопотенциала использовали материалы наблюдений 20 метеорологических станций, расположенных на территории Евразии приблизительно вдоль параллели 55° с. ш., за четыре зимних сезона 1955—1959 гг. Минимальное расстояние между станциями равно 210 км, максимальное — около 5500 км. Данные снимались с проанализированных карт за срок 03 часа через каждые три дня.

2. Выше мы уже ссылались на предшествующие работы [1—4], содержащие некоторые данные об эмпирических корреляционных и структурных функциях поля геопотенциала, а также примеры использования этих данных для целей объективного анализа метеорологических карт и решения некоторых задач, возникающих при численном прогнозе с помощью решения дифференциальных уравнений гидротермодинамики. Сейчас мы немного подробнее остановимся на полученных в этих работах результатах и только после этого перейдем к изложению проведенной нами работы.

В работе А. С. Чаплыгиной [4] была исследована пространственная структура поля геопотенциала на высотах 1000, 850, 700, 500 и 300 мб. Вычисленные ею широтные и меридиональные структурные функции (как функции от расстояния r между пунктами наблюдения) оказались довольно близкими к степенной функции $cr^{5/3}$. Структура поля высот поверхности 500 мб более детально была изучена в работах Л. С. Гандина и Е. И. Багровой [1] и Л. С. Гандина и Т. И. Кузнецовой [2]. В первой из этих работ были вычислены меридиональные и широтные структурные функции для каждого из четырех сезонов, что позволило рассмотреть вопрос об однородности и изотропности поля H_{500} , а также о зависимости статистической структуры от сезона. В работе [2] были найдены структурные функции того же поля для каждого из трех основных типов циркуляции по Вангенгейму. Здесь же была предпринята попытка аналитического описания упомянутых структурных функций. Все перечисленные результаты были получены на основе материалов наблюдений на станциях, расположенных в средних широтах на территории Европы и частично Западной Сибири. Наконец, в работе Г. В. Груза и В. Д. Казначеевой [3] вычислены структурные функции высот изобарических поверхностей 700 и 500 мб на 75 , 55 и 35° с. ш. для января и июля 1958 г. Сравнительный анализ меридиональной и зональной структурных функций показал, что область изотропности структурной функции находится вблизи 55° ; в высоких широтах меридиональная структурная функция больше зональной, а в низких — наоборот. Полученные сведения о структуре поля геопотенциала позволили сделать ряд важных выводов, о которых мы еще будем говорить в ходе обсуждения наших результатов.

Мы видим, что во всех предшествующих работах поле геопотенциала

рассматривалось как двумерное поле $H(x, y, t)$; иначе говоря, во всех расчетах функций (1) и (2) всегда предполагалось, что точки M_1 и M_2 относятся к одной и той же изобарической поверхности. Между тем на самом деле это поле, разумеется, является трехмерным; поэтому оно имеет определенную трехмерную статистическую структуру, описываемую трехмерными корреляционными или структурными функциями — функциями (1) и (2), в которых точки M_1 и M_2 уже могут принадлежать как к одной и той же, так и к разным изобарическим поверхностям. Естественно, что трехмерное поле $H(x, y, p, t)$ может (хотя бы приближенно) считаться изотропным лишь в горизонтальном направлении: по вертикали атмосфера явно неоднородна, и поэтому трехмерные статистические характеристики $B(M_1, M_2) = B(r, p_1, p_2)$ и $D(M_1, M_2) = D(r, p_1, p_2)$ будут уже зависеть по крайней мере от трех переменных — горизонтального расстояния r между точками наблюдения и двух высот (точнее говоря, давлений) p_1 и p_2 . Ясно, что функцию от трех переменных определить гораздо труднее, чем функцию от одного переменного; на практике, однако, дело очень упрощается тем, что переменную p вполне можно считать дискретной, т. е. принимающей значения p_1, p_2, \dots, p_n (так как в метеорологии всегда используется лишь небольшое число фиксированных изобарических поверхностей). При этом вместо функций $B(r, p_1, p_2)$ и $D(r, p_1, p_2)$ от трех переменных мы будем иметь лишь конечное (и даже сравнительно небольшое) число функций $B_{ij}(r) = B(r, p_i, p_j)$ и $D_{ij}(r) = D(r, p_i, p_j)$ от одного переменного, которые уже можно надеяться определить по имеющимся эмпирическим данным.

Нами было взято за основу пять изобарических поверхностей (1000, 850, 700, 500 и 300 мб) и вычислено 15 корреляционных функций $b_{ij}(r)$ ¹, где i и j изменяются от 1 (для поверхности 1000 мб) до 5 (для поверхности 300 мб). При $i=j$ функция $b_{ii}(r)$ — это автокорреляционная функция поля геопотенциала $H(p_i) = H$, а при $i \neq j$ функция $b_{ij}(r)$ — это взаимная корреляционная функция двух полей (H_i и H_j). Массив использованных исходных данных был нами описан выше. Хотя станции, в которых брались данные, расположены приблизительно на одной широте, полученные нами корреляционные функции можно рассматривать как характеристики всего трехмерного поля, поскольку, как уже говорилось выше, поле геопотенциала можно в первом приближении считать изотропным. Для каждой пары пунктов соответствующие значения корреляционной функции находились как средние арифметические 120 произведений, относящихся к разным моментам времени отклонений H' величин H от их средних значений. Эти расчеты производились на машине «Урал-1»; для вычисления значения корреляционной функции, соответствующей одной паре пунктов и одной паре уровней, требовалось около 1 минуты машинного времени. Затем все пары пунктов в зависимости от расстояний между пунктами были объединены в группы так, что каждым 100 км соответствовала своя группа. Окончательные значения корреляционных функций были получены осреднением величин корреляций внутри каждой группы.

Как и следовало ожидать исходя из работы [1], значения корреляционных функций сильно зависят от долготы; особенно наглядно это видно из табл. 1, содержащей дисперсии геопотенциала $b_{ii}(0)$ для разных станций и разных изобарических поверхностей.

¹ В дальнейшем эмпирические корреляционные и структурные функции мы будем обозначать соответственно буквами b и d , в отличие от теоретических функций B и D .

Таблица 1

Пункт	Долгота	Уровень, мб		
		850	500	300
Новосибирск	82°54'	42	144	309
Свердловск	60 38	61	218	358
Горький	43 49	107	205	340
Каунас	23 53	114	260	511
Копенгаген	12 32	131	295	542

Разумеется, нельзя утверждать с полной уверенностью, что причиной указанной резкой зависимости величин $b_{ii}(0)$ от долготы является истинная неоднородность поля геопотенциала; вероятно, отчасти здесь сказывается и различие в методике и качестве наблюдений на различных станциях. Тем не менее представляется вполне правдоподобным, что, хотя бы отчасти, зависимость дисперсий от долготы связана также и с истинной неоднородностью поля H , объясняющейся изменением с долготой климатических условий (ср. [3]). При нахождении корреляционных функций мы, однако, в соответствии со сказанным на стр. 31, пренебрегли неоднородностью по долготе и использовали осреднение по большому числу пар пунктов с различными долготами.

3. Подчеркнем еще, что вычисленные нами значения эмпирических корреляционных функций перед их использованием должны быть подвергнуты дополнительному сглаживанию. И дело здесь не только в том, что эти значения не ложатся на плавную кривую, а и в том, что они не обладают еще и некоторыми важными общими свойствами, которые должны иметь корреляционные функции.

Важнейшим общим свойством корреляционных функций является свойство положительной определенности: из того, что $[\sum H'(M_i) a_i]^2 \geq 0$ немедленно вытекает, что при любом выборе точек M_i, \dots, M_N и чисел a_1, \dots, a_N должно выполняться неравенство

$$\sum_{i, j=1}^N B(M_i, M_j) a_i a_j \geq 0. \quad (4)$$

Если рассматривается одно однородное поле (что в нашем случае имеет место, когда точки M_i и M_j принадлежат одной и той же изобразительной поверхности), то корреляционная функция зависит от вектора \vec{r} , соединяющего эти точки, следовательно, условие (4) приобретает вид

$$\sum_{i, j=1}^N B(\vec{r}_{ij}) a_i a_j \geq 0. \quad (4')$$

Для изотропного поля в этом соотношении, очевидно, можно заменить \vec{r}_{ij} на r_{ij} (где r — модуль вектора \vec{r}). Тогда, в частности, из (4) будет следовать, что для изотропного поля $B(0) \geq |B(r)|$.

Условие положительной определенности однородного поля (4) можно записать в более удобном виде с помощью спектральной плотности поля $f(\lambda)$, являющейся преобразованием Фурье корреляционной функции

$$f(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint e^{-i\lambda_1 x_1 - i\lambda_2 x_2} B(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \quad (5')$$

в случае поля на плоскости и

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\lambda x} B(x) dx \quad (5'')$$

для поля на прямой. (Мы предполагаем, что оба интеграла сходятся.) Необходимым и достаточным условием положительной определенности корреляционной функции является условие неотрицательности соответствующей спектральной плотности

$$f(\lambda) \geq 0 \quad (6)$$

(см. [6]). В случае когда имеется совокупность полей H_1, \dots, H_n , однородных и однородно связанных между собой, т. е. таких, для которых все взаимные корреляционные и автокорреляционные функции обладают свойством $B_{k,l}(M_i, M_j) = B_{k,l}(\vec{r}_{i,j})$, условие положительной определенности имеет вид

$$\sum_{k,l} \sum_{i_k, j_l} B_{k,l}(\vec{r}_{i_k, j_l}) a_{i_k} a_{j_l} \geq 0, \quad (4'')$$

где $B_{k,l}(\vec{r}_{i_k, j_l}) = \overline{H'_k(M_{i_k})H'_l(M_{j_l})}$. Это условие эквивалентно требованию, чтобы матрица спектральных плотностей

$$\|f_{k,l}(\vec{\lambda})\| \quad (7)$$

была неотрицательно определенной при всех $\vec{\lambda}$ (см. [6]). В изотропном случае можно, очевидно, в равенстве (7) $\vec{\lambda}$ заменить на λ .

Вычисленные нами эмпирические корреляционные функции не удовлетворяют требованию положительной определенности хотя бы потому, что во всех случаях величины $b_{ij}(r)$ при $r=200$ км оказались больше, чем $b_{ij}(0)$. В качестве примера мы привели автокорреляционную функцию $b_{55}(r)$ высоты поверхности 300 мб¹ на рис. 1 *e*, где значения этой функции обозначены точками; r измеряется в 1000 км, а $b(r)$ — в дкм². Причину этого нетрудно понять — она опять-таки кроется в неоднородности полей геопотенциала. Дело в том, что при распределении пар станций по группам оказалось, что группа, соответствующая расстоянию 200 км (т. е. для $r=0,2$), состоит исключительно из пар станций, расположенных на востоке, где корреляционные функции имеют завышенные значения, в то же время значение $b_{ij}(0)$ получается в результате осреднения по всем станциям, как восточным, так и западным.

Естественно, что, для того чтобы использование полученных корреляционных функций не привело бы нас к абсурдным результатам, необходимо сгладить эмпирические корреляционные функции так, чтобы сглаженные функции удовлетворяли уже условию положительной определенности. При этом удобно сглаженные значения наших функций выбирать так, чтобы они задавались несложными аналитическими формулами: с одной стороны, для аналитических функций нетрудно установить положительную определенность с помощью перехода к преобразованию Фурье, а, с другой стороны, получаемые при этом формулы сильно облегчают использование соответствующих функций при решении конкретных теоретических задач.

Начнем с рассмотрения автокорреляционных функций $b_{ii}(r)$, относящихся к одной изобарической поверхности. В работе [2] в качестве

¹ В дальнейшем рассматриваемые изобарические поверхности будут обозначаться номерами в следующем порядке: 1 — 1000 мб; 2 — 850 мб; 3 — 700 мб; 4 — 500 мб; 5 — 300 мб.

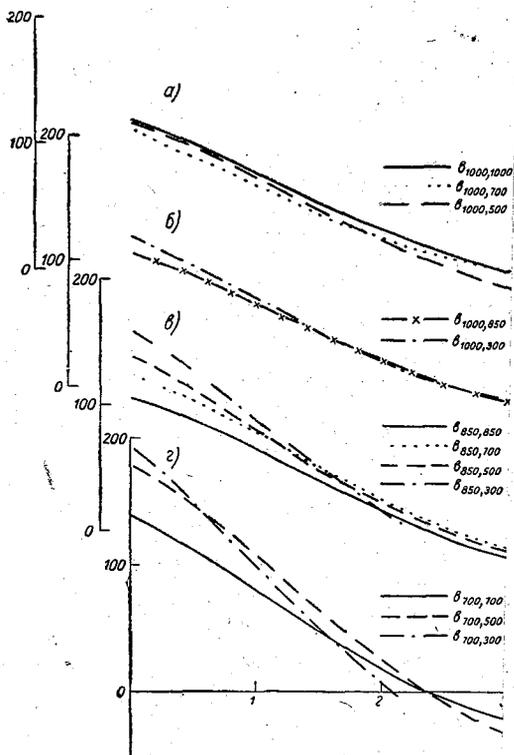


Рис. 1. Взаимные корреляционные и автокорреляционные функции

а) $b_{1000, 1000} (r) = 118e^{-0,32r} \cos 0,53r$, b_{1000}

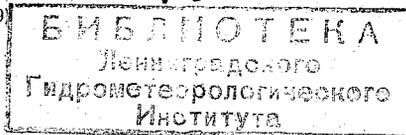
б) $b_{1000, 850} (r) = 105e^{-0,27r} \cos 0,60r$, b_{1000}

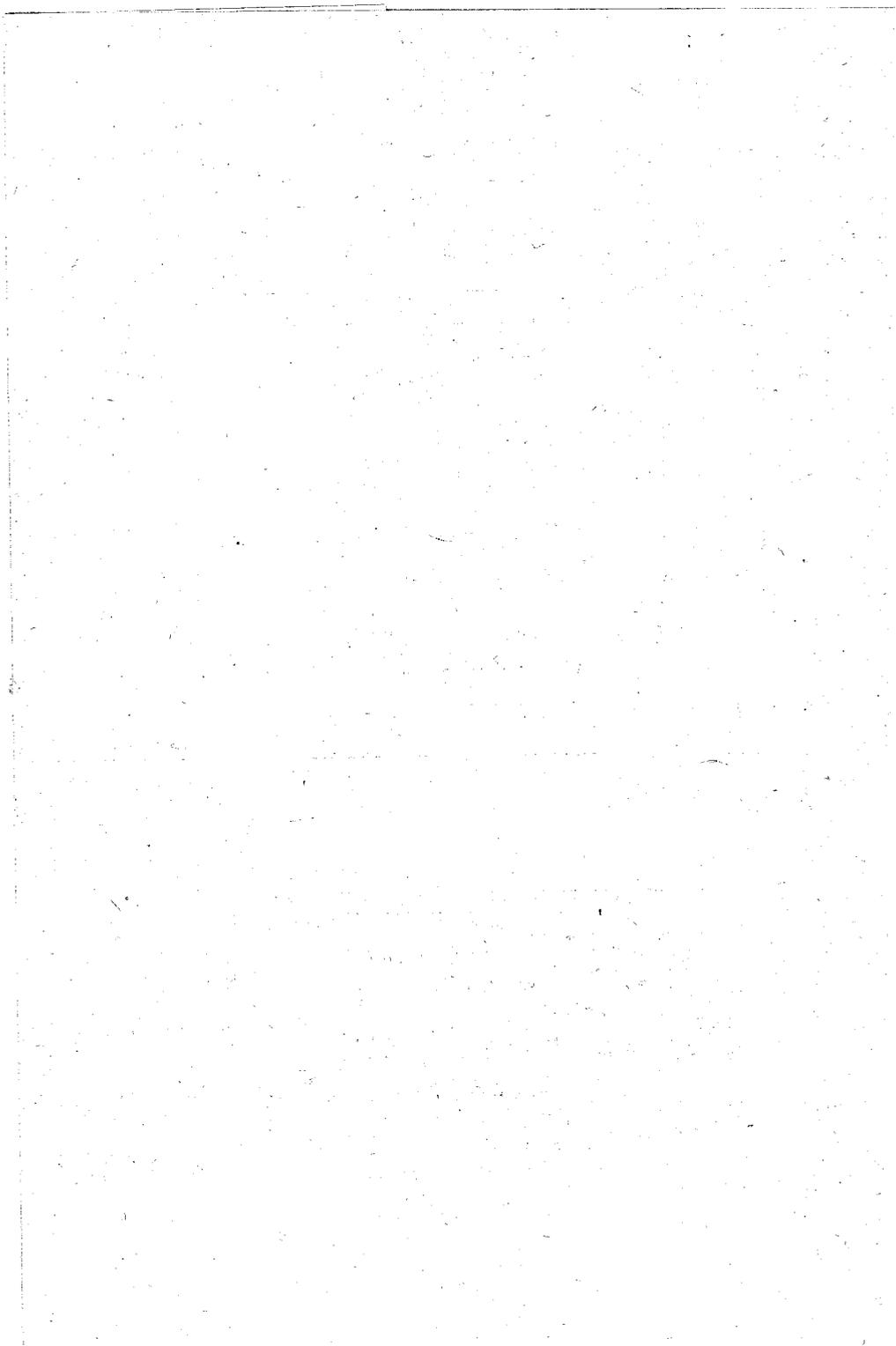
$b_{850, 700} (r) = 125e^{-0,28r} \cos 0,62r$, b_{850}

в) $b_{700, 700} (r) = 140e^{-0,32r} \cos 0,67r$, b_{700}

г) $b_{500, 500} (r) = 235e^{-0,29r} \cos 0,70r$, b_{500}

На рис. 2 также нанесены: значения автокорреляционных ($b_{300, 300}^I$) и по формуле (9)





аппроксимирующих выражений для таких функций использовались функции вида:

$$B \cos \beta r e^{-\alpha r^\sigma}$$

и

$$C J_0(\gamma r) e^{-\delta r^\sigma},$$

где J_0 — бесселева функция, а $C, B, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma$ — параметры. Первая из этих функций имеет, вообще говоря, только одномерный положительный спектр, а вторая — также и положительный двумерный спектр. Мы в своих расчетах ограничились более простыми выражениями:

$$m_1(r) = B e^{-\alpha r} \cos \beta r, \quad (8)$$

$$m_2(r) = C e^{-\delta r} J_0(\gamma r), \quad (9)$$

являющимися частным случаем написанных выше при $\sigma = 1$. Одномерный спектр функции $m_1(r)$ имеет вид

$$\frac{B_\alpha}{\pi} \cdot \frac{\lambda^2 + \alpha^2 + \beta^2}{\lambda^4 + 2\lambda^2(\alpha^2 - \beta^2) + (\alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Двумерный спектр этой функции представляет собой очень сложное выражение; при условии, что $\beta < \alpha$, можно доказать, что он положителен. В выражениях вида (8), аппроксимирующих наши эмпирические корреляционные функции, β приблизительно вдвое больше, чем α . При таком соотношении между β и α функция $m_1(r)$ как функция от двух переменных не является положительно определенной. Поэтому возникла необходимость построить приближения также и с помощью функции (9), которые уже положительно определены как функции от двух переменных.¹ Однако всегда можно так подобрать параметры функции $m_2(r)$, что при $r < 2,5$ она почти совпадает с приближением, построенным с помощью функции $m_1(r)$ (см. рис. 1 e, где значения $m_2(r)$ обозначены крестиками). Вместе с тем с функциями $m_1(r)$ проще иметь дело, чем с $m_2(r)$. Поэтому мы в основном ограничились рассмотрением только приближений вида $m_1(r)$.

Перейдем теперь к рассмотрению взаимных корреляционных функций $b_{ij}(r)$. Эти функции не обязаны удовлетворять условию положительной определенности (4); тем не менее мы их аппроксимировали теми же функциями вида (8) и (9), руководствуясь при этом не только соображениями удобства, но и тем, что взаимные корреляционные функции по виду очень похожи на автокорреляционные функции. На рис. 2 приведены 15 взаимных корреляционных и автокорреляционных функций полей геопотенциала на пяти рассматриваемых уровнях; приближенные функциям вида (8) [приближения вида (9) не нанесены на график по причине, указанной выше].

Но хотя мы и считаем разумными описанные выше приближения, все же у нас нет уверенности в том, что полученные функции $b_{ij}(r)$ удовлетворяют требованию (4''). Для проверки условия (4'') нам пришлось бы исследовать положительную определенность матрицы 5-го порядка (7) при всех λ , что связано с очень большими трудностями. Однако этот вопрос легко решается, если все функции, как взаимные корреляционные, так и автокорреляционные, отличаются друг от друга лишь постоянными

¹ Это нетрудно вывести из того, что функции (9) являются произведениями положительно определенных функций от двух переменных.

множителями. В связи с этим в качестве примера для шести корреляционных функций, соответствующих трем поверхностям — 850, 500 и 300 мб, мы построили приближения, более грубые, чем описанные выше (которые мы будем теперь называть «точными» значениями), но зато обладающие таким свойством. С этой целью для каждого из параметров α и β (или γ и δ) было взято по шесть значений, отвечающих шести точным взаимным корреляционным и автокорреляционным функциям $b_{i,j}(r)$ ($i, j=2, 4, 5$) вида (8) [или (9)], и вычислены средние величины α и β (соответственно γ и δ). Затем во всех полученных ранее приближениях параметры α и β (соответственно γ и δ) были заменены на эти средние величины; значения же $b_{ij}(i, j=2, 4, 5)$ наших функций при $r=0$ были оставлены теми же, что и у точных функций. Для новых

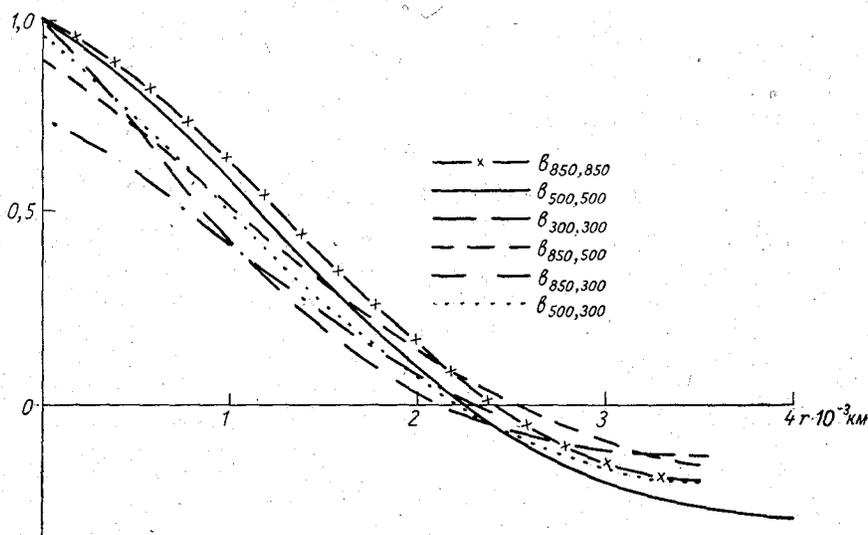


Рис. 2. Нормированные взаимные корреляционные и автокорреляционные функции высот изобарических поверхностей 850, 500 и 300 мб, аппроксимированные функциями вида (8) (точные приближения).

грубых приближений к значениям $b_{ij}(r)$ матрица спектральных плотностей $\|f_{ij}(\lambda)\|$ при всех значениях λ пропорциональна матрице, составленной из коэффициентов $b_{ij}(0)$, т. е. пропорциональна числовой матрице

$$\begin{vmatrix} 105 & 140 & 160 \\ 140 & 235 & 310 \\ 160 & 310 & 445 \end{vmatrix}$$

положительную определенность которой уже нетрудно доказать. Однако найденные здесь приближения являются недостаточно точными (ср. кривые на рис. 1 e), поэтому, обсуждая полученные данные о трехмерной структуре полей высот изобарических поверхностей, будем иметь в виду в основном ранее описанные точные приближения, представленные на рис. 1.

4. Перейдем теперь к анализу наших корреляционных функций. Прежде всего мы имеем возможность сравнить корреляционные функции, соответствующие пяти различным уровням. Основное различие между ними состоит в том, что начиная с поверхности 850 мб значения

корреляционных функций сильно возрастают с высотой; так, например, дисперсии (т. е. значения автокорреляционных функций в нуле) увеличиваются от 105 на поверхности 850 мб до 445 на поверхности 300 мб.

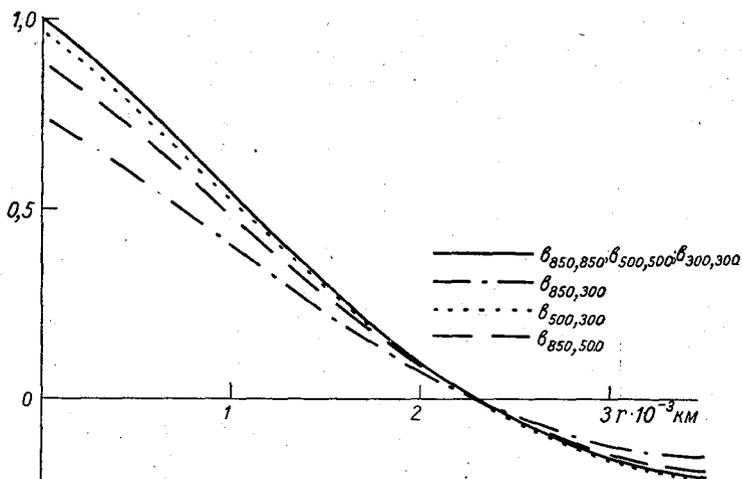


Рис. 3. Нормированные взаимные и автокорреляционные функции высот изобарических поверхностей 850, 500 и 300 мб, аппроксимированные функциями вида (8) (грубые приближения).

Нормировав естественным образом каждую из корреляционных функций на корень квадратный из произведения дисперсий, соответствующих той

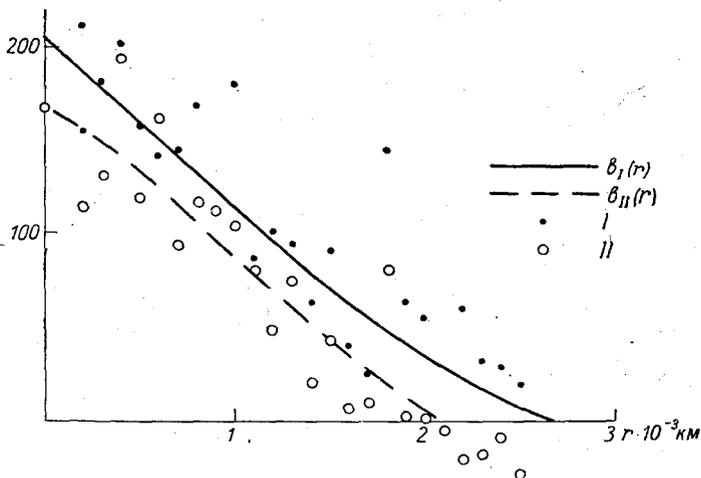


Рис. 4. Эмпирические значения автокорреляционной функции высот изобарической поверхности 500 мб.

I — для зимы 1955-56 г., II — для зимы 1956-57 г. и их приближения:

$$b_I(r) = 205e^{-0,41r} \cos 0,59r, \quad b_{II}(r) = 168e^{-0,34r} \cos 0,75r.$$

паре уровней, к которой функция относится, т. е., найдя величины $b_{ij}(r)[b_{ii}(0) b_{jj}(0)]^{-1/2}$, мы получим кривые значений коэффициентов корреляции. Такие кривые, отвечающие всевозможным парам уровней 850, 500 и 300 мб, представлены на рис. 2 (точные приближения) и 3 (грубые приближения). Из этих рисунков видно, что все кривые довольно

похожи друг на друга. Отметим также хорошо заметное на рисунках убывание значений коэффициентов корреляции при увеличении расстояний между поверхностями.

В работах [1] и [2] не было окончательно выяснено, при каких расстояниях r происходит насыщение структурных функций, т. е. где корреляционные функции становятся близкими к нулю. Из рис. 1 видно, что переход через нуль происходит на расстояниях от 2300 до 2600 км;

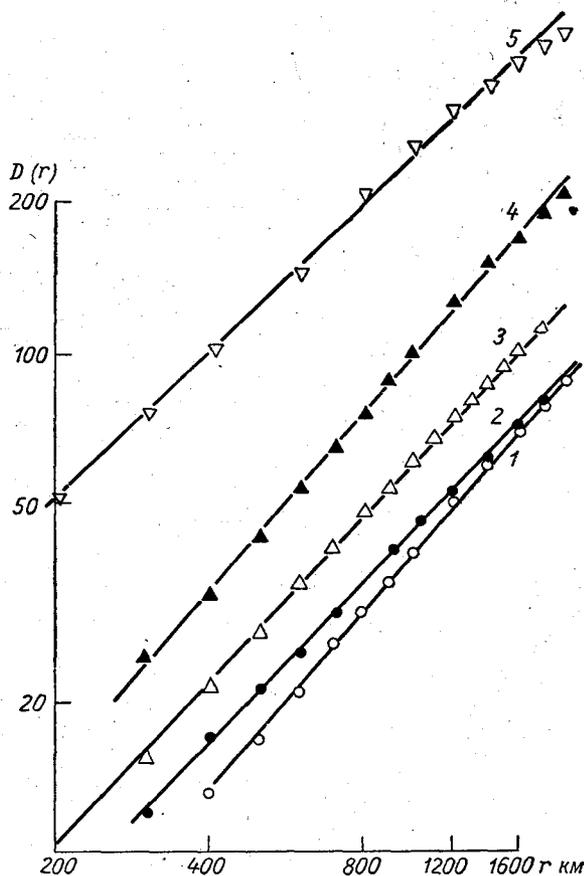


Рис. 5. Аппроксимация структурных функций степенным законом cr^m (масштаб логарифмический).

1 — 1000 мб, $m=1,2$; 2 — 850 мб, $m=1,1$; 3 — 700 мб, $m=1,1$; 4 — 500 мб, $m=1,2$; 5 — 300 мб, $m=0,91$.

достоверным, вероятно, является и то, что на более далеких расстояниях корреляционные функции принимают небольшие отрицательные значения (см. также [3]). Наконец, в работах [1] и [2] не было определено предельное значение структурной функции поля H_{500} при $r = \infty$, равное удвоенной дисперсии поля. Наши результаты дают представление о средних по долготе величинах дисперсий для всех пяти уровней (табл. 2).

Таблица 2

Дисперсии значений геопотенциала на различных уровнях

Уровень, мб	1000	850	700	500	300
$b_{ii}(0)$	118	105	140	235	445

Нами была сделана попытка исследовать, насколько полученные корреляционные функции устойчивы во времени. С этой целью значения автокорреляционной функции поверхности 500 мб были сосчитаны отдельно для зимы 1955-56 и 1956-57 гг. Для наглядности мы аппроксимировали полученные эмпирические значения, имеющие большой разброс, с помощью гладких кривых вида (8) (рис. 4), отчетливо показывающих степень расхождения двух корреляционных функций. Следует, однако, иметь в виду, что данных для одной зимы, по-видимому, вообще недостаточно для надежного определения корреляционных функций; поэтому обнаруженное на рис. 4 расхождение пока нельзя еще считать статистически значимым.

В заключение скажем еще несколько слов об аппроксимации структурных функций при не очень больших расстояниях r степенными законами вида cr^m . Анализируя результаты вычислений средних квадратов разностей значений геопотенциала в различных точках, М. И. Юдин [5] пришел к выводу, что при небольших расстояниях структурная функция должна себя вести примерно, как r^2 . При практических расчетах для расстояний вплоть до 600—800 км Юдин аппроксимировал структурные функции выражениями вида $Ar^2 - Br^3$. Еще раньше А. С. Чаплыгина [2] предложила аппроксимировать структурные функции поля геопотенциала с r , меняющимся от 300 до 1800 км, функцией $cr^{5/3}$.

Мы также попытались приблизить несколько наших структурных функций, найденных по автокорреляционным функциям, выражениями вида cr^m . С этой целью структурные функции были представлены на графике в логарифмическом масштабе. Оказалось, что для расстояний от 100 до 2000 км полученные кривые довольно близки к прямым (рис. 5), однако значения тангенсов углов наклона этих прямых (равные соответствующим показателям m) существенно отличаются от $5/3$ — все они колеблются от 0,91 до 1,20.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С., Багрова Е. И. О структуре поля высот поверхности 500 мб. Тр. ГГО, вып. 99, 1959.
2. Гандин Л. С., Кузнецова Т. И. О структуре полей давления и ветра в средней тропосфере при различных формах циркуляции. Тр. ГГО, вып. 121, 1961.
3. Груза Г. В., Казначеева В. Д. К вопросу о структуре поля высот изобарических поверхностей. Изв. АН УзССР, сер. физ.-мат. наук, № 3, 1962.
4. Чаплыгина А. С. Статистическая структура полей метеорологических элементов в атмосфере и экстраполяция поля геопотенциала в пространстве. Тр. ЦИП, т. 106, 1960.
5. Юдин М. И. Некоторые закономерности структуры поля геопотенциала. Тр. ГГО, вып. 121, 1961.
6. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. Усп. матем. наук, т. 7, вып. 5 (51), 1952.

РАСЧЕТ НЕКОТОРЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДЛЯ ПОЛЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЛАЖНОСТИ

Приводятся результаты расчета структурных и автокорреляционных функций для точки росы и температуры с помощью вычислительных машин. Дается анализ результатов.

В связи с разработкой численных методов прогноза облачности и осадков возникает необходимость в применении объективных методов анализа исходных полей влажности и температуры. В настоящее время существует несколько способов интерполяции метеозлементов в узлы регулярной сетки.

Применительно к полям точки росы и температуры нами рассматривался метод оптимальной интерполяции, предложенный Л. С. Гандиным [1]. Чтобы использовать этот метод, необходимо иметь сведения о статистической структуре полей анализируемых элементов.

В работе [3] приводились результаты расчета структурной и автокорреляционной функций температуры точки росы на изобарической поверхности 850 мб для трех сезонов (осень, зима, весна). Данная статья является продолжением начатых в [3] исследований статистических характеристик точки росы и температуры.

В качестве основных количественных характеристик статистической структуры полей точки росы t и температуры T бралась структурная функция

$$b_f(\delta r) = \overline{[f'(\vec{r}) - f'(\vec{r} + \delta \vec{r})]^2} \quad (1)$$

и автокорреляционная функция

$$m_f(\delta r) = \overline{f'(\vec{r}) f'(\vec{r} + \delta \vec{r})}, \quad (2)$$

где $f' = f - \bar{f}$, \bar{f} — норма элемента f .

Здесь предполагается, что $b_f(r)$ и $m_f(r)$ являются однородными и изотропными, т. е. определяются лишь одним аргументом (расстоянием).

В работе [2] показано, что структурная функция геопотенциала существенно зависит от сезона, поэтому естественно предположить, что структурные функции точки росы $b_t(r)$ и температуры $b_T(r)$ также могут быть различными для разных сезонов¹.

¹ Высказанные соображения в равной мере относятся к автокорреляционным функциям.

Поскольку численная схема прогноза влажности разрабатывалась применительно к холодному времени года, расчет $b_{\tau}(r)$, $m_{\tau}(r)$ и $b_T(r)$, $m_T(r)$ выполнялся для второй половины осени (16 октября—30 ноября), зимы и первой половины весны (1 марта—15 апреля).

В работе [3] описана методика вычисления структурной и автокорреляционной функций температуры точки росы на изобарической поверхности 850 мб, а также приведены результаты расчета этих функций.

Следуя прежней методике, в настоящей работе рассчитывались структурные и автокорреляционные функции для температуры у земли и на изобарических поверхностях 850 и 700 мб, для температуры точки росы у земли и на изобарической поверхности 700 мб, причем расчеты выполнялись для трех сезонов¹. Вследствие того что вычисление $b(r)$ и $m(r)$ на одной поверхности и для одного сезона требовало примерно 25 часов машинного времени на вычислительной машине «Урал-1», часть расчетов выполнялась на машине большого быстродействия с помощью программы, составленной В. П. Болтенковым [4].

Первоначально в работе [3] для расчета $b_{\tau}(r)$ и $m_{\tau}(r)$ на поверхности 850 мб бралось примерно 50 синоптических ситуаций (50 станций в каждой ситуации). В настоящей работе число ситуаций было увеличено. В табл. 1 представлено количество ситуаций, по которым рассчитывались $b(r)$ и $m(r)$ для точки росы и температуры на трех уровнях (исходный материал брался за 1959—1961 гг.).

Таблица 1
Количество синоптических ситуаций, по которым строились b_f и m_f

	Осень		Зима		Весна	
	τ	T	τ	T	τ	T
Поверхность земли	60	60	57	66	60	60
850 мб	—	60	—	60	—	60
700 мб	60	60	57	54	60	60

Если бы на всех станциях всегда имелись сведения о точке росы и температуре, то при наличии, например, 60 ситуаций количество пар станций, по которым строились $b(r)$ и $m(r)$, равнялось бы $n^2/2 \cdot 60$ (n — число станций), т. е. $\frac{50^2}{2} \cdot 60 = 75$ тыс. пар.

Однако из-за отсутствия значений τ и T на станциях число пар оказалось несколько меньшим (табл. 2).

Таблица 2
Количество пар станций, с помощью которых вычислялись b_f и m_f

	Осень		Зима		Весна	
	τ	T	τ	T	τ	T
Поверхность земли	52 500	48 650	53 240	69 100	49 600	50 900
850 мб	—	68 320	—	69 760	—	—
700 мб	62 960	65 200	63 430	62 630	67 420	68 540

¹ Для весны $b_T(r)$ и $m_T(r)$ на 850 мб не вычислялись.

Первоначально вычисленные значения структурных и автокорреляционных функций подправлялись по методике, описанной в работе [3].

Отметим также, что $b(r)$ и $m(r)$ на машине большого быстродействия рассчитывались до расстояний порядка 5000 км (на машине «Урал-1» — до 4000 км).

Известно, что точка росы и температура измеряются с некоторыми ошибками.

Неучет этих ошибок приводит к тому, что структурная и автокорреляционная функции вычисляются с определенными погрешностями. Здесь, как и в работе [1], предполагается, что ошибки являются случайными и удовлетворяют следующим условиям:

1) ошибки наблюдений не коррелируются с истинными значениями метеоэлемента,

2) ошибки наблюдений не коррелируются между собой.

В силу этих предположений формулы (1) и (2) принимают вид:

$$b_{ij} = \frac{[(f'_i + \delta_{fi}) - (f'_j + \delta_{fj})]^2}{2} = \frac{(f'_i - f'_j)^2}{2} + \delta_{fi}^2,$$

$$m_{ij} = f'_i f'_j \quad (i \neq j),$$

$$m_{ii} = f_i'^2 + \delta_{fi}^2.$$

Здесь δ_{fi} — ошибка измерения элемента f в точке i , f'_i — истинное отклонение элемента от среднего в точке i .

Как известно, температура точки росы не измеряется, а вычисляется по данным зондирования относительной влажности, температуры и давления, поэтому δ_r складывается из случайных ошибок каждого из этих элементов порознь. В свою очередь случайные ошибки этих элементов складываются из инструментальных ошибок и так называемых микроклиматических ошибок, т. е. ошибок, связанных с мелкомасштабными особенностями местоположения пункта наблюдения.

Ошибку первого рода можно определить, например, путем одновременного измерения двумя приборами.

Так, средний квадрат случайной ошибки точки росы был найден на основании известных оценок, полученных для относительной влажности [5] и температуры.

Микроклиматическую ошибку необходимо учитывать у поверхности земли. Поскольку мы не располагали сведениями относительно величины этой ошибки для точки росы и температуры, они оценивались путем экстраполяции b_r (b_T) и m_r (m_T) на нуль. Случайные ошибки для точки росы и температуры приведены в табл. 3.

Таблица 3

Средний квадрат случайной ошибки (град.²) для точки росы δ_r^2 и температуры δ_T^2

	δ_r^2	δ_T^2
Поверхность земли	2,2	2,2
850 мб	—	1,0
700 мб	2,2	1,0

В некоторых случаях, в частности при оптимальной интерполяции, важно знать нормированную автокорреляционную функцию (или нормированную структурную функцию), т. е.

$$\mu_f(r) = \frac{m_f(r)}{m_f(0)}, \quad \beta_f(r) = \frac{b_f(r)}{b_f(\infty)}. \quad (3)$$

Здесь $m_f(0)$ — дисперсия элемента f . Связь между $\beta_f(r)$ и $\mu_f(r)$ выражается с помощью соотношения

$$\beta_f(r) = 1 - \mu_f(r). \quad (4)$$

На рис. 1—5 представлены нормированные автокорреляционные функции точки росы и температуры у земли и на изобарических поверхностях 850 и 700 мб для трех сезонов.

Общий вид зависимости автокорреляционных функций для точки росы и температуры от расстояния показывает, что вполне отчетливо

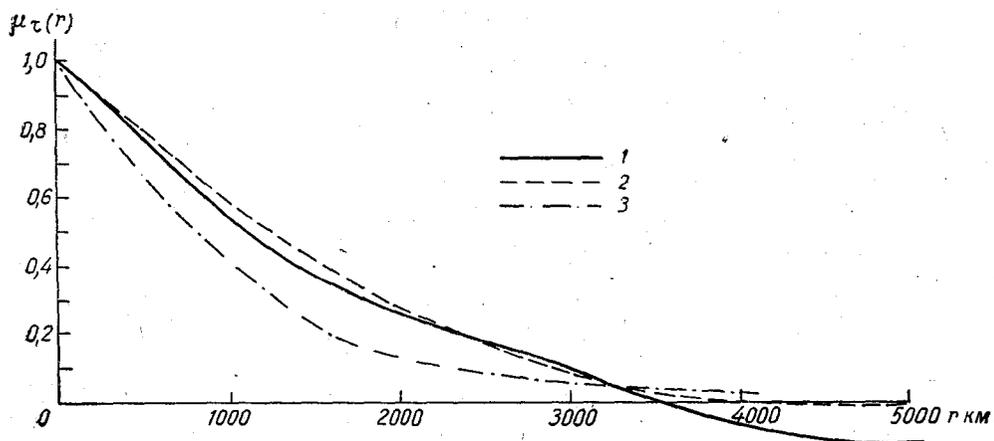


Рис. 1. Нормированные автокорреляционные функции температуры точки росы у земли для трех сезонов.

1 — весна, 2 — осень, 3 — зима.

обнаруживаются расстояния, при которых автокорреляционные функции оказываются весьма малыми по сравнению с дисперсией.

В работе [3] отмечалось, что вычисленные структурные и автокорреляционные функции для температуры точки росы на поверхности 850 мб имеют несколько больший разброс точек, чем аналогичные функции для давления. В связи с этим высказывалось предположение, что причиной этому является несколько меньшее число ситуаций по сравнению с их числом для геопотенциала. В настоящей работе количество ситуаций было увеличено, однако это не привело к желаемым результатам.

Кроме того, было замечено, что для многих структурных и автокорреляционных функций «выскакивающие» значения присущи в основном одним и тем же интервалам расстояний. Отсюда был сделан вывод, что в данном случае степень разброса точек, вероятно, определяется величиной интервала, по которому производилось осреднение b_T (b_T) и m_T (m_T).

Все же разброс точек весьма мал, поэтому осреднение по интервалу в 200 км можно считать вполне приемлемым.

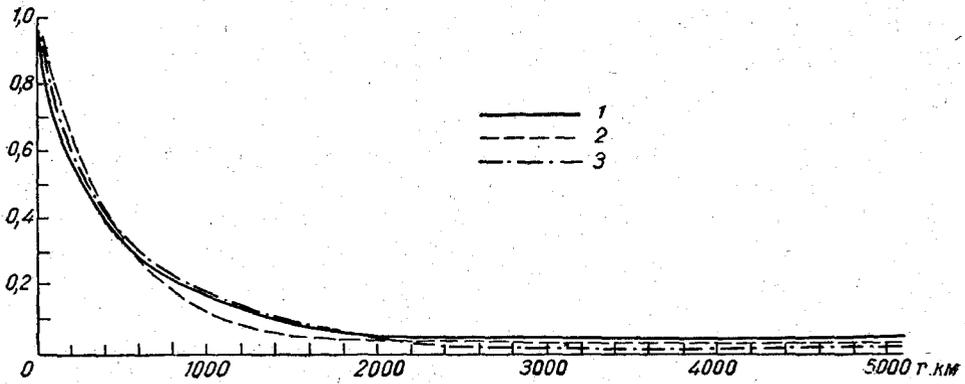


Рис. 2. Нормированные автокорреляционные функции температуры точки росы на изобарической поверхности 700 мб для трех сезонов.
Усл. обозначения см. рис. 1.

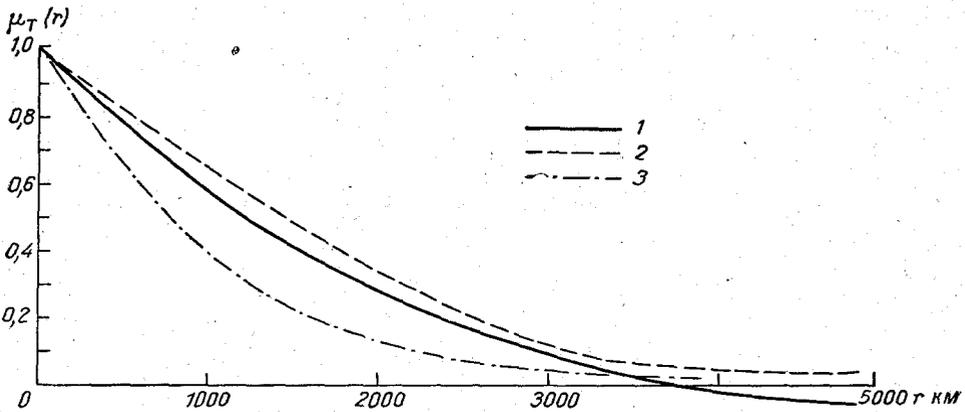


Рис. 3. Нормированные автокорреляционные функции температуры у земли для трех сезонов.
Усл. обозначения см. рис. 1.

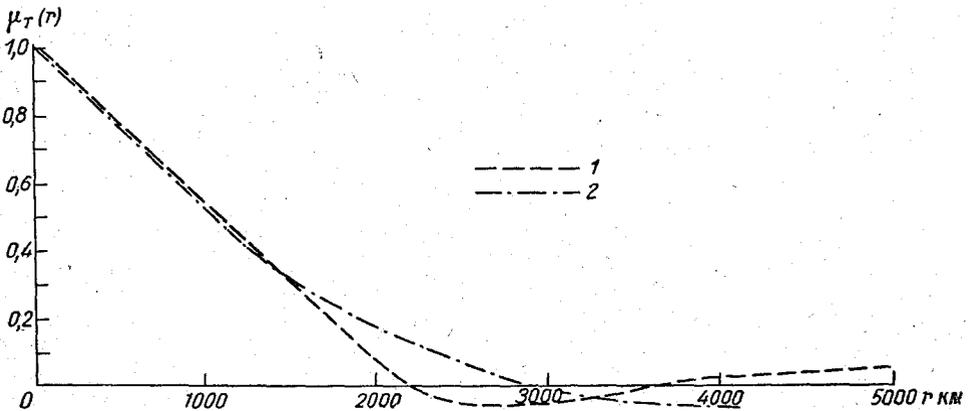


Рис. 4. Нормированные автокорреляционные функции температуры на изобарической поверхности 850 мб для двух сезонов.
1 — осень, 2 — зима.

Принципиальных различий в поведении нормированных автокорреляционных функций для температуры у земли и на поверхностях 850 и 700 мб зимой в общем не наблюдается. Однако расстояния, при которых автокорреляционные функции достигают своего предельного значения, возрастают с высотой. Причем на поверхностях 850 и 700 мб $\mu_T(r)$ меняет свой знак, т. е. становится отрицательной на больших расстояниях.

Характер изменения структурных и автокорреляционных функций для температуры убедительно подтвердил высказанные ранее предположения о линейном изменении этих функций до определенных расстояний. Так, у земли линейное изменение $b_T(r)$ и $m_T(r)$ прослеживается примерно до 700 км, на 850 мб — до 1200 км, на 700 мб — до 1100 км.

Сравнение нормированных автокорреляционных функций температуры на поверхностях 850 и 700 мб для разных сезонов показывает, что различия между ними несущественны до расстояний порядка 1500 км и

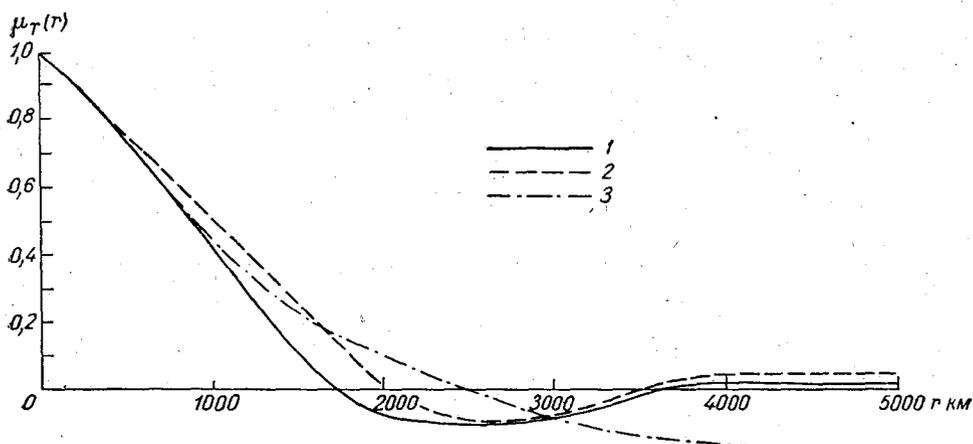


Рис. 5. Нормированные автокорреляционные функции температуры на изобарической поверхности 700 мб для трех сезонов. Усл. обозначения см. рис. 1.

лежат в пределах точности их определения. При больших расстояниях различия эти возрастают, причем наблюдается некоторая сезонная симметрия, т. е. $\mu_T(r)$ для осени и весны весьма сходны между собой.

У земли осенью и весной нормированные автокорреляционные функции очень близки между собой вплоть до расстояний 4500 км и несколько отличаются от аналогичных функций для зимы. При этом у земли различия между $\mu_T(r)$ для зимы и осени (весны) оказываются более значительными, чем на других уровнях. До некоторой степени это можно объяснить изменением характера подстилающей поверхности при переходе от одного сезона к другому.

Дисперсия как количественная характеристика изменчивости хотя и медленно, но убывает с высотой для всех сезонов (табл. 4). Нормированные автокорреляционные функции для точки росы убывают быстрее, чем аналогичные функции для температуры. Расстояния, при которых $\mu_T(r)$ достигает своего предельного значения (зимой), равны: у земли примерно 3600 км, на 850 мб — 2700 км и на 700 мб — 1500 км, причем на поверхности 700 мб наблюдается довольно быстрое убывание $\mu_T(r)$ с расстоянием.

Дисперсии (град.²) точки росы и температуры на трех уровнях

	Осень		Зима		Весна	
	$m_{\tau}(0)$	$m_T(0)$	$m_{\tau}(0)$	$m_T(0)$	$m_{\tau}(0)$	$m_T(0)$
Поверхность земли	32,3	29,5	32,1	29,2	34,4	31,2
850 мб	—	21,8	—	25,5	—	—
700 мб	46,0	20,8	39,8	24,4	40,8	19,3

Структурные (автокорреляционные) функции для точки росы не являются линейными функциями при сравнительно небольших расстояниях, как это, например, имело место в случае с температурой.

Сравнение нормированных автокорреляционных функций температуры точки росы для зимы, осени и весны показывает, что на поверхности 700 мб $m_{\tau}(r)$ можно считать одинаковыми, у земли наблюдаются небольшие различия, однако какие-либо закономерности при переходе от сезона к сезону не обнаруживаются.

Дисперсия точки росы изменяется с высотой несколько иначе, чем дисперсия температуры. Так, дисперсия точки росы сначала убывает [у земли зимой $m_{\tau}(0) = 32,1$, на 850 мб [3] $m_{\tau}(0) = 31,3$], а затем начинает расти [на 700 мб $m_{\tau}(0) = 39,8$]. Это, вероятно, объясняется тем, что влажность (удельная, абсолютная) связана с температурой точки росы экспоненциальной зависимостью, и поэтому на высотах порядка 3 км, где значения влажности малы, малым ее изменениям соответствуют большие изменения температуры точки росы.

Автокорреляционные функции точки росы и температуры для зимы аппроксимировались аналитическими функциями.

Так, у земли

$$m_T(r) = m_T(0) e^{-0,825 r^{0,920}}, \quad m_{\tau}(r) = m_{\tau}(0) e^{-0,720 r^{0,946}} \cos(0,682r), \quad (5)$$

на изобарической поверхности 850 мб

$$m_T(r) = m_T(0) e^{-0,553 r^{0,975}} J_0(0,830r), \quad (6)$$

на изобарической поверхности 700 мб

$$m_T(r) = m_T(0) e^{-0,747 r^{0,960}} J_0(0,962r); \quad m_{\tau}(r) = m_{\tau}(0) e^{-8,229 r^{0,782}} \quad (7)$$

Здесь $J_0(\gamma r)$ — бесселева функция нулевого порядка, r — в 10^3 км.

С помощью формул (3) — (7) можно также получить выражение для структурных функций.

ЛИТЕРАТУРА

- Г ан д и н Л. С. Об оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей. Тр. ГГО, вып. 114, 1960.
- Г ан д и н Л. С., Кузнецова Т. И. О структуре полей давления и ветра в средней тропосфере при различных формах циркуляции. Тр. ГГО, вып. 121, 1961.
- Г ан д и н Л. С., Мелешко В. П., Мещерская А. А. О применении универсальных цифровых машин для исследования статистической структуры метеорологических полей. Тр. ГГО, вып. 143, 1963.
- Г ан д и н Л. С., Болтенков В. П. К методике исследования трехмерной макроструктуры метеорологических полей. См. наст. сб.
- П о л о в и н а И. П. Точность вычисления удельной влажности по данным измерений относительной влажности в свободной атмосфере. Тр. ЦАО, вып. 22, 1957.

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Теория оптимальной интерполяции обобщена на случай векторных полей с учетом того обстоятельства, что корреляция между составляющей вектора в двух точках зависит от угла между направлением этой составляющей и отрезком, соединяющим точки. Приведен численный пример, относящийся к интерполяции геострофического ветра.

1. Если выполнять объективный анализ поля ветра, руководствуясь требованием минимальности средней квадратической ошибки анализа, то нужно производить оптимальную интерполяцию ветра в узлы регулярной сетки по данным на станциях аэрологического зондирования атмосферы. Если считать каждую составляющую ветра скалярным метеорологическим элементом, однородным и изотропным относительно корреляционной функции, то интерполяцию ветра можно проводить по обычным формулам оптимальной интерполяции скалярных полей [1]. Однако хорошо известно, что из статистической однородности и изотропии некоторой векторной величины отнюдь не вытекает статистическая однородность и изотропия каждой его составляющей.

Именно, корреляция некоторой составляющей статистически однородного и изотропного векторного поля в двух точках зависит не только от расстояния между точками, но и от угла между направлением рассматриваемой составляющей и направлением отрезка, соединяющего две точки. Рассмотрим эту зависимость применительно к двумерным векторным полям.

2. Пусть имеются две точки M_1 и M_2 и пусть вектор $\vec{\rho}$, соединяющий эти точки, образует угол α с осью x . Обозначим составляющие рассматриваемого вектора \vec{c} в направлении ρ и в перпендикулярном направлении влево соответственно через U и V , а составляющие по осям x и y через u и v , так что в любой точке

$$\begin{aligned} u &= U \cos \alpha - V \sin \alpha, \\ v &= U \sin \alpha + V \cos \alpha. \end{aligned} \quad (1)$$

Будем считать, что поле вектора \vec{c} статистически однородно и изотропно, а также, что математическое ожидание \vec{c} тождественно равно нулю. Последнее практически означает, что рассматривается отклонение вектора от поля его средних значений — норм.

В силу однородности и изотропии поля вектора \vec{c} имеют место равенства:

$$\overline{U_1^2} = \overline{U_2^2} = \overline{V_1^2} = \overline{V_2^2} = \overline{U^2}, \quad (2)$$

$$\overline{U_1 V_1} = \overline{U_2 V_2} = 0, \quad (3)$$

$$\overline{U_1 V_2} = \overline{U_2 V_1} = 0, \quad (4)$$

$$\overline{U_1 U_2} = m(\rho), \quad (5)$$

$$\overline{V_1 V_2} = n(\rho). \quad (6)$$

Здесь индекс «1» или «2» соответствует значению в точке M_1 или M_2 , $m(\rho)$ — корреляционная функция продольных составляющих вектора, а $n(\rho)$ — корреляционная функция поперечных составляющих.

Равенствами (2) и (3) описывается тот факт, что вектор \vec{c} имеет круговое распределение с дисперсией, не зависящей от координат. Равенство (4) выражает собой отсутствие корреляции между продольной составляющей вектора в одной точке и поперечной в другой. Функции $m(\rho)$ и $n(\rho)$, вообще говоря, отличны друг от друга. Если бы эти функции совпадали, то это означало бы, что составляющую вектора в любом направлении можно рассматривать как независимую скалярную однородную и изотропную случайную функцию.

С помощью равенств (1)–(6) легко получить следующие формулы, описывающие корреляцию составляющих вектора по осям x и y :

$$\overline{u_1 v_1} = \overline{u_2 v_2} = 0, \quad (7)$$

$$\overline{u_1 u_2} = m(\rho) \cos^2 \alpha + n(\rho) \sin^2 \alpha, \quad (8)$$

$$\overline{v_1 v_2} = m(\rho) \sin^2 \alpha + n(\rho) \cos^2 \alpha, \quad (9)$$

$$\overline{u_1 v_2} = \overline{u_2 v_1} = [m(\rho) - n(\rho)] \sin \alpha \cos \alpha. \quad (10)$$

Формулами (8)–(10) описывается искомая зависимость корреляции между составляющими вектора в разных точках от угла α . Заметим, что корреляция взаимно перпендикулярных составляющих оказывается не нулевой, если только угол α отличен от $k \frac{\pi}{2}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) и $m(\rho) \neq n(\rho)$.

3. Учтем теперь то обстоятельство, что вектор \vec{c} определяется с некоторой ошибкой δ . Ошибку будем считать случайной, а именно предположим, что среднее значение ошибки равно нулю, что ошибки в различных точках не коррелируют ни друг с другом, ни с истинными значениями вектора \vec{c} и, наконец, что все значения угла β , образуемого вектором ошибки δ с осью x , равновероятны. Тогда нетрудно убедиться, что наличие ошибок никак не отразится на корреляции составляющих ветра в различных точках, а скажется лишь на величинах дисперсии каждой составляющей скорости, а именно приведет к завышению дисперсии $\overline{u^2} = \overline{v^2}$ на половину среднего квадрата ошибки

$$\overline{u^2} = \overline{v^2} = \overline{u^2} + \frac{1}{2} \overline{\delta^2} = \overline{v^2} + \frac{1}{2} \overline{\delta^2}. \quad (11)$$

Здесь волнистой чертой обозначены измеренные значения.

Удобно перейти к нормированным корреляционным функциям μ и ν по формулам:

$$\mu(\rho) = \frac{1}{U^2} m(\rho); \quad \nu(\rho) = \frac{1}{U^2} n(\rho) \quad (12)$$

и к мере ошибок наблюдений η :

$$\eta = \frac{\overline{\delta^2}}{2U^2}. \quad (13)$$

Тогда формулы (8) — (10) примут вид:

$$\varphi(\rho, \alpha) = \frac{1}{U^2} \overline{u_1 u_2} = \mu(\rho) \cos^2 \alpha + \nu(\rho) \sin^2 \alpha, \quad (14)$$

$$\psi(\rho, \alpha) = \frac{1}{U^2} \overline{v_1 v_2} = \mu(\rho) \sin^2 \alpha + \nu(\rho) \cos^2 \alpha, \quad (15)$$

$$\chi(\rho, \alpha) = \frac{1}{U^2} \overline{u_1 v_2} = \frac{1}{U^2} \overline{v_1 u_2} = [\mu(\rho) - \nu(\rho)] \sin \alpha \cos \alpha \quad (16)$$

или иначе

$$\varphi(\rho, \alpha) = a(\rho) + b(\rho) \cos 2\alpha, \quad (17)$$

$$\psi(\rho, \alpha) = a(\rho) - b(\rho) \cos 2\alpha, \quad (18)$$

$$\chi(\rho, \alpha) = b(\rho) \sin 2\alpha, \quad (19)$$

где

$$a(\rho) = \frac{\mu(\rho) + \nu(\rho)}{2}, \quad (20)$$

$$b(\rho) = \frac{\mu(\rho) - \nu(\rho)}{2}. \quad (21)$$

4. Перейдем теперь к оптимальной интерполяции вектора \vec{c} . Пусть значения этого вектора наблюдаются в k точках M_1, M_2, \dots, M_k , окружающих интересующую нас точку M_0 . Будем искать составляющие u_0 и v_0 вектора \vec{c}_0 в этой точке в виде линейных комбинаций наблюдаемых величин \tilde{u}_i и \tilde{v}_i :

$$u_0 = \sum_{i=1}^k (p_i \tilde{u}_i + q_i \tilde{v}_i), \quad (22)$$

$$v_0 = \sum_{i=1}^k (r_i \tilde{u}_i + s_i \tilde{v}_i). \quad (23)$$

В силу симметричности следующих выкладок произведем их только применительно к u_0 .

Средний квадрат ошибки интерполяции по формуле (22) равен

$$\begin{aligned} E_u = & \left[u_0 - \sum_{i=1}^k (p_i \tilde{u}_i + q_i \tilde{v}_i) \right]^2 = u_0^2 - 2 \sum_{i=1}^k p_i u_0 \tilde{u}_i - \\ & - 2 \sum_{j=1}^k q_j u_0 \tilde{v}_j + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i p_j \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \\ & + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q_i q_j \tilde{v}_i \tilde{v}_j + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i q_j \tilde{u}_i \tilde{v}_j \end{aligned}$$

или, если учесть, что влияние ошибок наблюдений сводится только к завышению дисперсий (11),

$$E_u = \overline{u_0^2} - 2 \sum_{i=1}^k p_i \overline{u_0 u_i} - 2 \sum_{j=1}^k q_j \overline{u_0 v_j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i p_j \overline{u_i u_j} + \\ + \sum_{i=1}^k p_i^2 \frac{\overline{\delta_i^2}}{2} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k q_i q_j \overline{v_i v_j} + \sum_{j=1}^k q_j^2 \frac{\overline{\delta_j^2}}{2} + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k p_i q_j \overline{u_i v_j}. \quad (24)$$

Разделим равенство (24) на дисперсию $\overline{U^2}$, введем обозначение для меры ошибки интерполяции

$$\varepsilon_u = \frac{E_u}{\overline{U^2}} \quad (25)$$

и воспользуемся определением нормированных корреляционных функций (14)–(16) и меры ошибок наблюдения (13). Тогда получим

$$\varepsilon_u = 1 - 2 \sum_{i=1}^k \varphi_{0i} p_i - 2 \sum_{j=1}^k \chi_{0j} q_j + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \varphi_{ij} p_i p_j + \sum_{i=1}^k \eta_i p_i^2 + \\ + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \psi_{ij} q_i q_j + \sum_{j=1}^k \eta_j q_j^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \chi_{ij} p_i q_j, \quad (26)$$

Здесь через φ_{ij} , ψ_{ij} , χ_{ij} обозначены значения функций $\varphi(\rho, \alpha)$, $\psi(\rho, \alpha)$ и $\chi(\rho, \alpha)$, соответствующие величине ρ_{ij} и направлению α_{ij} отрезка, соединяющего точки M_i и M_j ; η_i означает меру ошибки наблюдения в точке M_i .

Аналогичным образом для величины ε_v получим формулу

$$\varepsilon_v = 1 - 2 \sum_{i=1}^k \chi_{0i} r_i - 2 \sum_{j=1}^k \psi_{0j} s_j + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \varphi_{ij} r_i r_j + \sum_{i=1}^k \eta_i r_i^2 + \\ + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \psi_{ij} s_i s_j + \sum_{j=1}^k \eta_j s_j^2 + 2 \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \chi_{ij} r_i s_j. \quad (27)$$

Формулы (26) и (27) пригодны для оценки меры ошибок интерполяции, выполненной по линейным формулам (22) и (23) независимо от того, какими выбраны веса p_i , q_i , r_i и s_i . Потребуем теперь, чтобы интерполяция была оптимальной, т. е. подчиним веса условиям, чтобы величины ε_u и ε_v были минимальны. Для этого достаточно приравнять нулю частные производные от ε_u по p_i и q_i и от ε_v по r_i и s_i . Тогда получим следующие системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^k (\varphi_{ij} p_j + \chi_{ij} q_j) + \eta_i p_i &= \varphi_{0i} \\ \sum_{j=1}^k (\chi_{ij} p_j + \psi_{ij} q_j) + \eta_i q_i &= \chi_{0i} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^k (\varphi_{ij} r_j + \chi_{ij} s_j) + \eta_i r_i &= \chi_{0i} \\ \sum_{j=1}^k (\chi_{ij} r_j + \psi_{ij} s_j) + \eta_i s_i &= \psi_{0i} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

в которых i принимает значения от 1 до k . Заметим, что системы (28) и (29) отличаются друг от друга лишь правыми частями, так что при применении надлежащего метода (например, метода Гаусса) эти системы могут быть решены одновременно. Вместе с тем существенно, что порядок каждой из систем (28) и (29) равен $2k$, т. е. вдвое больше порядка системы уравнений для определения оптимальных интерполяционных весов в случае скалярного поля.

С помощью уравнений (28) и (29) можно существенно упростить выражения ε_u и ε_v для мер ошибок оптимальной интерполяции. Наиболее удобно исключить с помощью (28) и (29) из формул (26) и (27) члены, квадратичные относительно весов. Тогда эти формулы примут вид:

$$\varepsilon_u = 1 - \sum_{i=1}^k (\varphi_{0i} p_i + \chi_{0i} q_i), \quad (30)$$

$$\varepsilon_v = 1 - \sum_{i=1}^k (\chi_{0i} r_i + \psi_{0i} s_i). \quad (31)$$

Разумеется, формулы (30) и (31) применимы лишь в случае оптимальной интерполяции.

5. Для того чтобы количественно оценить влияние различия между функциями $\mu(\rho)$ и $\nu(\rho)$ на оптимальную интерполяцию вектора ветра, нужно иметь сведения об этих функциях для расстояний ρ порядка сотен и тысяч километров. В настоящее время, однако, таких сведений нет. Поэтому в последующих оценках взамен корреляционных функций реального ветра используются корреляционные функции геострофического ветра, полученные по данным о структуре поля геопотенциала.

Возможность использования полученных таким путем корреляционных функций геострофического ветра основывается на следующей теореме.

Если поле геопотенциала статистически однородно и изотропно относительно корреляционной функции, то тем же свойством обладает и поле геострофического ветра.¹

Чтобы доказать эту теорему, необходимо показать, во-первых, что геострофический ветер при указанном условии будет иметь круговое распределение и, во-вторых, что отсутствует корреляция между продольными и поперечными составляющими геострофического ветра в разных точках.

Запишем геострофические соотношения в форме:

$$U_g = -\frac{A}{l} \frac{\partial H}{\partial y}; \quad V_g = \frac{A}{l} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad (32)$$

где безразмерная константа A зависит от выбора единиц измерения геопотенциала H и ветра (например, если H выражать в гп. дкм, а U_g и V_g — в м/сек., то $A=98$). Определенности ради направим ось x вдоль отрезка, соединяющего две точки, а именно обозначим координаты одной из точек через (x, y) , а другой через $(x+\rho, y)$. Тогда имеем:

$$m_g(\rho) = \overline{U_g(x, y) U_g(x+\rho, y)} = \frac{A^2}{l^2} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \frac{\partial H}{\partial y}(x+\rho, y),$$

$$n_g(\rho) = \overline{V_g(x, y) V_g(x+\rho, y)} = \frac{A^2}{l^2} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x+\rho, y),$$

¹ Строго говоря, эта теорема верна лишь при условии постоянства кориолисова параметра l . Если же учесть переменность l , то изотропия геострофического ветра сохранится, а однородность нарушится: функции $m_g(\rho)$ и $n_g(\rho)$ пропорциональны l^{-2} .

$$\overline{U_g(x, y) V_g(x + \rho, y)} = - \frac{A^2}{l^2} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x + \rho, y).$$

Представим в правых частях этих равенств производные в виде пределов соответствующих отношений конечных разностей и поменяем порядок предельного перехода и осреднения:

$$m_g(\rho) = \frac{A^2}{l^2} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta \varepsilon} \overline{[H(x, y + \delta) - H(x, y)] [H(x + \rho, y + \varepsilon) - H(x + \rho, y)]},$$

$$n_g(\rho) = \frac{A^2}{l^2} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta \varepsilon} \overline{[H(x + \delta, y) - H(x, y)] [H(x + \rho + \varepsilon, y) - H(x + \rho, y)]},$$

$$\begin{aligned} & \overline{U_g(x, y) V_g(x + \rho, y)} = \\ & = - \frac{A^2}{l^2} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta \varepsilon} \overline{[H(x, y + \delta) - H(x, y)] [H(x + \rho + \varepsilon, y) - H(x + \rho, y)]}. \end{aligned}$$

Воспользуемся далее определением корреляционной функции геопотенциала $m_H(\rho)$ и ее однородностью и изотропией, согласно которым

$$\begin{aligned} & \overline{H(x + a_1, y + a_2) H(x + a_3, y + a_4)} = \\ & = m_H \{ \sqrt{(a_1 - a_3)^2 + (a_2 - a_4)^2} \}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} m_g(\rho) &= \frac{A^2}{l^2} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta \varepsilon} [m_H \{ \sqrt{\rho^2 + (\delta - \varepsilon)^2} \} + m_H(\rho) - \\ & - m_H(\sqrt{\rho^2 + \varepsilon^2}) - m_H(\sqrt{\rho^2 + \delta^2})], \\ n_g(\rho) &= \frac{A^2}{l^2} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta \varepsilon} [m_H(\rho + \varepsilon - \delta) + m_H(\rho) - m_H(\rho + \varepsilon) - m_H(\rho - \delta)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \overline{U_g(x, y) V_g(x + \rho, y)} = \\ & = - \frac{A^2}{l^2} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta \varepsilon} [m_H \{ \sqrt{(\rho + \varepsilon)^2 + \delta^2} \} + m_H(\rho) - \\ & - m_H(\rho + \varepsilon) - m_H(\sqrt{\rho^2 + \delta^2})]. \end{aligned}$$

Разложим теперь выражения в квадратных скобках в ряды по степеням δ и ε и удержим в них лишь члены до второго порядка малости включительно, поскольку остальные члены после предельного перехода дадут нуль. При этом учтем, что если α и β малые первого порядка, то

$$m_H(\rho + \alpha) = m_H(\rho) + \alpha m_H'(\rho) + \frac{\alpha^2}{2} m_H''(\rho) + \dots,$$

$$m_H \{ \sqrt{(\rho + \alpha)^2 + \beta^2} \} = m_H(\rho) + \left(\alpha + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\rho} \right) m_H'(\rho) + \frac{1}{2} \alpha^2 m_H''(\rho) + \dots,$$

где штрих означает дифференцирование по ρ и невыписанные члены имеют порядок малости не ниже третьего. Тогда получим:

$$m_g(\rho) = \frac{A^2}{l^2} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta \varepsilon} \left[\frac{1}{2} \frac{(\delta - \varepsilon)^2}{\rho} m'_H(\rho) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\rho} m'_H(\rho) - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\rho} m'_H(\rho) \right],$$

$$n_g(\rho) = \frac{A^2}{l^2} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta \varepsilon} \left[(\varepsilon - \delta) m'_H(\rho) + \frac{(\varepsilon - \delta)^2}{2} m''_H(\rho) - \varepsilon m'_H(\rho) - \right. \\ \left. - \frac{\varepsilon^2}{2} m''_H(\rho) + \delta m'_H(\rho) - \frac{\delta^2}{2} m''_H(\rho) \right],$$

$$\overline{U_g(x, y) V_g(x + \rho, y)} = - \frac{A^2}{l^2} \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta \varepsilon} \left[\left(\varepsilon + \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\rho} \right) m'_H(\rho) + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon^2}{2} m''_H(\rho) - \varepsilon m'_H(\rho) - \frac{\varepsilon^2}{2} m''_H(\rho) - \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\rho} m'_H(\rho) \right]$$

или после дальнейших сокращений:

$$m_g(\rho) = - \frac{A^2}{l^2 \rho} m'_H(\rho), \quad (33)$$

$$n_g(\rho) = - \frac{A^2}{l^2} m''_H(\rho), \quad (34)$$

$$\overline{U_g(x, y) V_g(x + \rho, y)} = 0. \quad (35)$$

Равенство (35) доказывает вторую часть сформулированной теоремы. Чтобы доказать первую часть теоремы, учтем, что при очень малых значениях аргумента структурная функция любого элемента пропорциональна квадрату аргумента, так что при очень малых ρ

$$m_H(\rho) = m_H(0)(1 - b\rho^2). \quad (36)$$

Согласно (36), при очень малых ρ

$$m'_H(\rho) = 2b\rho m_H(0),$$

$$m''_H(\rho) = -2bm_H(0).$$

Подставляя это в (33) и (34) и устремляя ρ к нулю, найдем:

$$m_g(0) = \frac{2A^2b}{l^2} m_H(0),$$

$$n_g(0) = \frac{2A^2b}{l^2} m_H(0).$$

Равенство этих величин показывает, что распределение геострофического ветра круговое. Тем самым теорема полностью доказана.

6. Формулы, предложенные различными авторами для описания макромасштабной корреляционной функции геопотенциала, как правило, не удовлетворяют при малых ρ соотношению (36). Это обстоятельство не препятствует непосредственному применению таких формул при не очень малых ρ . Однако для получения корреляционных функций геострофического ветра необходимо исходить из описания корреляционной функции геопотенциала формулой, дающей в пределе, при малых ρ , зависимость (36). Единственная известная нам формула, удовлетворяющая этому требованию, была предложена М. И. Юдиным [2] и имеет вид

$$m_H(\rho) = m_H(0) e^{-\lambda\rho} (1 + \lambda\rho), \quad (37)$$

где λ — параметр, равный для поверхностей 500 и 300 мб $9,8 \cdot 10^{-7} \text{ м}^{-1}$. Заметим, что формулу (37) можно написать также в виде

$$m_H(\rho) = m_H(0) (\lambda\rho)^{3/2} K_{3/2}(\lambda\rho),$$

где K — функция Макдональда.

Подставляя (37) в (33) и (34), получим:

$$m_g(\rho) = \frac{A^2 \lambda^2 m_H(0)}{l^2} e^{-\lambda\rho}, \quad (38)$$

$$n_g(\rho) = \frac{A^2 \lambda^2 m_H(0)}{l^2} e^{-\lambda\rho} (1 - \lambda\rho). \quad (39)$$

Формулы (38) и (39) были также получены М. И. Юдиным [2]. Согласно этим формулам, дисперсия каждой составляющей геострофического ветра равна

$$\overline{U_g^2} = \frac{A^2 \lambda^2 m_H(0)}{l^2},$$

а нормированные корреляционные функции $\mu_g(\rho)$ и $\nu_g(\rho)$ описываются формулами:

$$\mu_g(\rho) = e^{-\lambda\rho}, \quad (40)$$

$$\nu_g(\rho) = e^{-\lambda\rho} (1 - \lambda\rho). \quad (41)$$

Согласно (20), (21), (40) и (41),

$$a(\rho) = e^{-\lambda\rho} \left(1 - \frac{\lambda\rho}{2}\right), \quad (42)$$

$$b(\rho) = \frac{1}{2} e^{-\lambda\rho} \lambda\rho. \quad (43)$$

Подставляя это в формулы (17) — (19), получим:

$$\varphi(\rho, \alpha) = \frac{1}{2} e^{-\lambda\rho} [(2 - \lambda\rho) + \lambda\rho \cos 2\alpha], \quad (44)$$

$$\psi(\rho, \alpha) = \frac{1}{2} e^{-\lambda\rho} [(2 - \lambda\rho) - \lambda\rho \cos 2\alpha], \quad (45)$$

$$\chi(\rho, \alpha) = \frac{1}{2} e^{-\lambda\rho} \lambda\rho \sin 2\alpha. \quad (46)$$

На рис. 1 представлен вид функций $\varphi(\rho, \alpha)$, $\psi(\rho, \alpha)$ и $\chi(\rho, \alpha)$ в форме изолиний этих функций в системе декартовых координат $x = \rho \cos \alpha$, $y = \rho \sin \alpha$. Рисунок 1 а воспроизводит изолинии функции $\varphi(\rho, \alpha)$. Распределение изолиний функции $\psi(\rho, \alpha)$ можно получить, повернув рис. 1 а на 90° . На рис. 1 б изображены изолинии функции $\chi(\rho, \alpha)$. Значения функций приведены на рис. 1 в тысячных долях единицы.

Если бы каждую составляющую геострофического ветра можно было считать независимой скалярной случайной функцией, то изолинии функций $\varphi(\rho, \alpha)$ и $\psi(\rho, \alpha)$ совпадали бы друг с другом и представляли собой семейство окружностей с центром в начале координат, а функция $\chi(\rho, \alpha)$ была бы тождественным нулем. Как видно из рис. 1, реальная картина существенно отличается от этой стилизации.

7. Для количественных оценок влияния векторности поля ветра на оптимальную интерполяцию были выполнены расчеты интерполяционных весов и мер ошибок интерполяции применительно к двум группам станций, изображенным на рис. 2. Эти же группы станций были ранее

использованы в работе [1]. Первая из групп (рис. 2 а) моделирует условия интерполяции в районах с густой сетью станций, вторая (рис. 2 б) — с редкой сетью.

Веса вычислялись как для оптимальной интерполяции по формулам (22) и (23), так и для интерполяции по простым формулам:

$$u_0 = \sum_{i=1}^k p_i' \tilde{u}_i,$$

$$v_0 = \sum_{i=1}^k p_i' \tilde{v}_i. \quad (47)$$

Веса p_i' искали в предположении, что каждую составляющую ветра можно считать независимой случайной функцией, имеющей корреляционную функцию, равную полусумме величин $\nu(\rho)$ и $\mu(\rho)$, т. е.

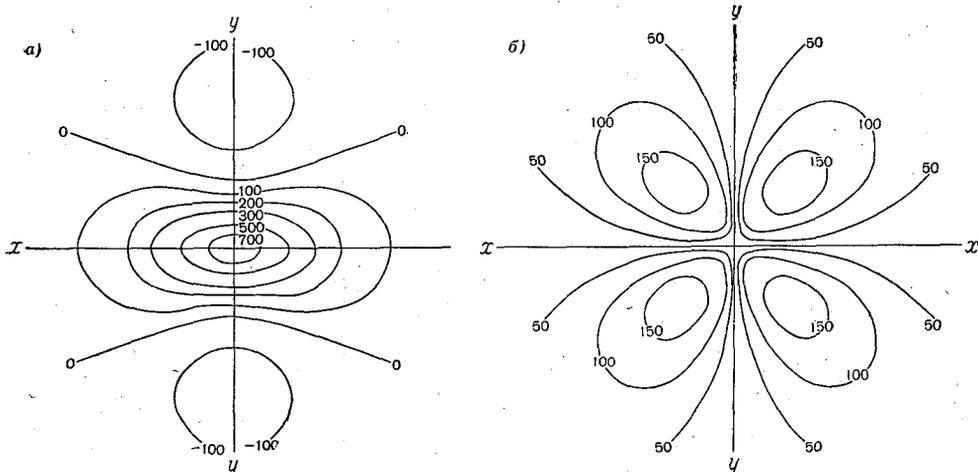


Рис. 1. Изолинии корреляционных функций геострофического ветра.
а — $\varphi(\rho, \alpha) = \text{const}$, б — $\chi(\rho, \alpha) = \text{const}$.

равную $a(\rho)$. Таким образом, для определения весов p_i' использовалась система уравнений вида

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} p_j' + \eta_i p_i' = a_{i0}. \quad (48)$$

Все расчеты выполнены при $\eta_i = 0,05$.

В табл. 1 приведены веса p_i, q_i, r_i, s_i и p_i' для первой группы станций, а в табл. 2 — для второй группы станций. Кроме того, приведены еще некоторые комбинации этих весов, введенные из следующих соображений.

Веса p_i, q_i, r_i и s_i зависят от выбора направления координатных осей, в то время как величины p_i' инвариантны по отношению к этому направлению. Поэтому для лучшего сопоставления весов мы исходили из оценки вкладов, вносимых модулем ветра в каждой из k точек в величину модуля ветра. В случае интерполяции по формулам (47) вес такого вклада попросту равен p_i' , как это сразу видно из формулы

$$\sqrt{u_0^2 + v_0^2} = \sum_{i=1}^k p_i' \sqrt{\tilde{u}_i^2 + \tilde{v}_i^2},$$

Интерполяционные веса для первой группы станций

i	p_i	s_i	q_i	r_i	p_i'	$\frac{p_i^2 + s_i^2}{2}$	$\frac{q_i^2 + r_i^2}{2}$	$\frac{p_i^2 + s_i^2 + q_i^2 + r_i^2}{2}$
1	0,008	0,171	0,094	0,087	0,098	0,0096	0,0146	0,0228
2	0,038	-0,022	0,009	-0,095	0,019	0,0004	0,0010	0,0056
3	0,014	0,084	-0,027	-0,309	-0,001	0,0000	0,0036	0,0518
4	0,262	0,054	0,019	0,012	0,253	0,0640	0,0356	0,0358
5	0,116	-0,049	0,055	0,151	-0,003	0,0000	0,0079	0,0208
6	0,386	0,061	-0,105	-0,087	0,265	0,0700	0,0093	0,0857
7	0,187	0,527	-0,040	-0,037	0,375	0,1405	0,0015	0,1507
8	-0,040	0,104	-0,013	0,149	-0,009	0,0001	0,0062	0,0074
Σ	0,971	0,950	-0,008	-0,129	0,997	0,2846	0,2945	0,3806

Интерполяционные веса для второй группы станций

i	p_i	s_i	q_i	r_i	p_i'	$\frac{p_i^2 + s_i^2}{2}$	$\frac{q_i^2 + r_i^2}{2}$	$\frac{p_i^2 + s_i^2 + q_i^2 + r_i^2}{2}$
1	0,483	0,193	-0,072	-0,219	0,357	0,1273	0,1351	0,1617
2	0,167	0,083	0,109	0,239	0,126	0,0158	0,0174	0,0518
3	-0,080	0,416	-0,049	-0,058	0,144	0,0208	0,0897	0,0926
4	-0,034	0,033	-0,028	0,048	-0,025	0,0006	0,0012	0,0028
5	-0,011	0,011	-0,041	-0,052	-0,025	0,0006	0,0001	0,0023
Σ	0,525	0,736	-0,081	-0,042	0,577	0,1651	0,2435	0,3112

вытекающей из (47). В случае же интерполяции по формулам (22) и (23) указанные вклады могут быть оценены лишь в среднем, а именно, согласно (22), (23), (2) и (3),

$$\sqrt{u_0^2 + v_0^2} = \sum_{i=1}^k \sqrt{\frac{p_i^2 + s_i^2 + q_i^2 + r_i^2}{2}} \sqrt{\tilde{u}_i^2 + \tilde{v}_i^2}$$

С этой точки зрения величину $p_i'^2$ следует сопоставлять с комбинацией $\frac{p_i^2 + s_i^2 + q_i^2 + r_i^2}{2}$. Кроме того, интересно отдельно оценить величины $\frac{p_i^2 + s_i^2}{2}$ и $\frac{q_i^2 + r_i^2}{2}$. Первая из них оценивает связь одноименных составляющих ветра, так что, чем меньше влияние векторности поля ветра на оптимальную интерполяцию, тем ближе должна быть комбинация $\frac{p_i^2 + s_i^2}{2}$ к величине p_i^2 . Что касается величины $\frac{q_i^2 + r_i^2}{2}$, то она описывает связь разноименных составляющих ветра, и, чем меньше влияние векторности, тем ближе она должна быть к нулю.

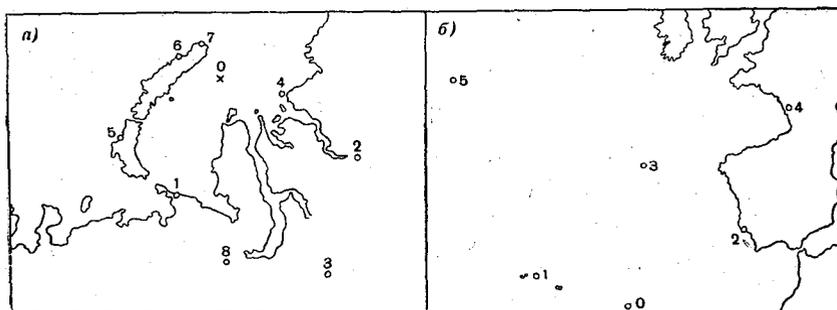


Рис. 2. Группы станций, для которых проводились вычисления.
а — первая группа, б — вторая группа.

Рассмотрение табл. 1 и 2 показывает, что векторность поля ветра существенно сказывается на интерполяционных весах. Хотя суммы весов q_i и r_i значительно меньше сумм весов p_i и s_i , тем не менее средний вклад, даваемый разноименными составляющими ветра, достаточно заметен. Кроме того, вклады одноименных составляющих определенным образом отличаются от тех, которые получались бы при интерполяции составляющих ветра как скалярных случайных функций.

Таблица 3

Меры ошибок интерполяции и связанные с ними величины

Группа станций	$R \sum_{i=1}^k p_i^2$	$R \sum_{i=1}^k s_i^2$	$R \sum_{i=1}^k q_i^2$	$R \sum_{i=1}^k r_i^2$	ϵ_u	ϵ_v	ϵ'_u	ϵ'_v	$R \sum_{i=1}^k p_i^2$	ϵ'
Первая (густая сеть)	0,673	0,614	0,029	0,099	0,297	0,286	0,334	0,346	0,660	0,340
Вторая (редкая сеть)	0,288	0,254	0,027	0,076	0,684	0,669	0,770	0,816	0,207	0,793

Рассмотрим теперь табл. 3, в которой приведены данные, характеризующие теоретические ошибки различных способов интерполяции. Величины ε_u и ε_v , фигурирующие в этой таблице, были подсчитаны по формулам (30) и (31). Кроме того, в таблице выписаны суммы $\sum_{i=1}^k p_i \varphi_{0i}$,

$\sum_{i=1}^k s_i \psi_{0i}$, $\sum_{i=1}^k q_i \chi_{0i}$ и $\sum_{i=1}^k r_i \lambda_{0i}$, которыми определяются меры ошибок ε_u и ε_v .

Первые две из этих сумм характеризуют уменьшение меры ошибок по сравнению со случайной интерполяцией (т. е. интерполяцией некоррелированных величин) благодаря связи одноименных составляющих ветра, вторые две суммы — уменьшение меры ошибок благодаря связи разноименных составляющих.

Величины ε'_u и ε'_v представляют собой меры ошибок интерполяции, выполненной по формулам (47). Они рассчитаны по полным формулам (26) и (27) с заменой в них p_i и s_i на p'_i , а q_i и r_i на нули. Наконец, величина ε' есть мера ошибки интерполяции по формулам (47), вычисленная в предположении, что эта интерполяция является оптимальной. Величина ε' вычислялась по формуле

$$\varepsilon' = 1 - \sum_{i=1}^k p'_i a_{0i}. \quad (49)$$

Отметим, что ε' представляет собой среднее арифметическое из величин ε'_u и ε'_v . В самом деле, подставляя в (26) $p_i = p'_i$, $q_i = 0$, получим формулу для ε'_u

$$\varepsilon'_u = 1 - 2 \sum_{i=1}^k \varphi_{0i} p'_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \varphi_{ij} p'_i p'_j + \sum_{i=1}^k \eta_i p_i'^2, \quad (50)$$

а подставляя в (27) $r_i = 0$, $s_i = p'_i$, получим формулу

$$\varepsilon'_v = 1 - 2 \sum_{i=1}^k \psi_{0i} p'_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \psi_{ij} p'_i p'_j + \sum_{i=1}^k \eta_i p_i'^2. \quad (51)$$

Выражая здесь значения корреляционных функций $\varphi(\rho, \alpha)$ и $\psi(\rho, \alpha)$ через функции $a(\rho)$ и $b(\rho)$ по формулам (17) и (18) и пользуясь выражением для ε'

$$\varepsilon' = 1 - 2 \sum_{i=1}^k a_{0i} p'_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k a_{ij} p'_i p'_j + \sum_{i=1}^k \eta_i p_i'^2, \quad (52)$$

следующим хотя бы из формул (49) и (48), найдем

$$\varepsilon'_u = \varepsilon' - 2 \sum_{i=1}^k c_{0i} p'_i + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij} p'_i p'_j, \quad (53)$$

$$\varepsilon'_v = \varepsilon' + 2 \sum_{i=1}^k c_{0i} p'_i - \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k c_{ij} p'_i p'_j, \quad (54)$$

где $c(\rho, \alpha) = b(\rho) \cos 2\alpha$.

Складывая выражения (53) и (54), получим

$$\varepsilon' = \frac{1}{2} (\varepsilon'_u + \varepsilon'_v), \quad (55)$$

что и нужно было показать.

Из табл. 3 видно, что точность оптимальной интерполяции геострофического ветра по формулам (22) и (23) заметно выше точности интерполяции его по формулам (47), не учитывающим векторной природы ветра. Это повышение точности примерно в одинаковой мере обусловлено появлением связи между разноименными составляющими ветра и изменением связи между одноименными составляющими.

Вместе с тем можно видеть, что указанное увеличение точности сравнительно невелико. Поэтому практическое использование методики едва ли целесообразно до тех пор, пока не имеется достаточно точных данных о корреляционных функциях реального ветра. Определение этих функций по массовому фактическому материалу весьма желательно выполнить в самое ближайшее время.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г ан д и н Л. С. Об оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей. Тр. ГГО, вып. 114, 1960.
2. Ю д и н М. И. Некоторые закономерности структуры поля геопотенциала. Тр. ГГО, вып. 121, 1961.

О СТАТИСТИЧЕСКИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ВЕРТИКАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МЕТЕОЭЛЕМЕНТОВ В ТРОПОСФЕРЕ И НИЖНЕЙ СТРАТОСФЕРЕ¹

Исследуются свойства оптимальных функций, получаемых при разложении вертикальных профилей суточных изменений геопотенциала, составляющих (зональной и меридиональной) скорости ветра, адвективных изменений относительной топографии и вихря скорости.

1. При исследовании функций, получаемых эмпирическим путем, широко используется метод их разложения в ряды по системам фиксированных функций.

Наряду с рядом достоинств этот метод обладает тем недостатком, что сходимость разложений оказывается плохой, так что для представления раскладываемой функции с достаточной точностью приходится учитывать большое число членов разложения. Так, например, при разложении полей метеоэлементов в ряды по тригонометрическим или сферическим функциям, по полиномам Чебышева и т. д. приходится учитывать 1—2 десятка членов разложения.

Причина плохой сходимости таких разложений заключается в том, что функции, по которым ведется разложение, выбираются формально, так что каждая из них мало соответствует характеру изменения раскладываемой функции. Это вносит трудности и в физический анализ отдельных членов таких разложений.

В последние годы появился ряд работ [1, 3, 7, 8 и др.], где ставилась задача отыскания для данной функции оптимальной системы функций, которая давала бы в среднем (статистически) максимальную скорость сходимости по сравнению со всяким другим разложением.

Фукуока [7] получил решение указанной задачи и применил его к анализу полей приземного давления и температуры. В связи с тем что решение оказалось довольно громоздким, Фукуока удалось построить лишь несколько первых членов таких разложений. Но уже из этих результатов следовало, что бо́льшая доля изменчивости полей описывается первым членом разложения.

Н. А. Багров [1] для решения задачи применил более компактный способ, основанный на использовании теории матриц. Полученные результаты Н. А. Багров применил к разложению поля высот изобариче-

¹ Часть материалов этой статьи содержится в работе автора «О статистически оптимальных представлениях вертикальных распределений некоторых метеоэлементов» (Изв. АН СССР, № 4, 1963), опубликованной уже после сдачи настоящего сборника в печать.

ской поверхности 850 мб. Кроме того, в работе сделана попытка дать физическую интерпретацию используемых при разложении функций.

Решение указанной выше задачи было получено также в работе Э. Лоренца [8]. В [9] это решение было использовано в целях создания статистической схемы прогноза приземного давления.

А. М. Обухов для отыскания оптимальной системы использовал аппарат общей теории случайных функций. В работе [2] А. М. Обуховым была решена задача о разложении случайной функции на некоррелированные компоненты. Было показано, что коэффициенты разложения по собственным функциям интегрального оператора дисперсии некоррелированы друг с другом, а собственные числа представляют собой дисперсии этих коэффициентов. В [3] А. М. Обухов показал, что система собственных функций оператора дисперсии может быть выбрана в качестве оптимальной системы функций. В работе [3] был рассмотрен также случай функции дискретного аргумента. Поскольку этот случай представляет большой практический интерес, остановимся на нем подробнее.

Приведем те уравнения, которым должна удовлетворять оптимальная система функций. Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную в конечном числе точек: x_1, x_2, \dots, x_n . Для простоты будем считать, что $\overline{f(x)} = 0$. Черта сверху здесь и ниже означает статистическое осреднение.

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_m(x)$ — произвольная система функций, которую будем рассматривать в точках x_1, \dots, x_n , удовлетворяющая условию ортонормированности. Последнее означает, что

$$\sum_{k=1}^n \varphi_i(x_k) \varphi_j(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{при } i=j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases} \quad (1)$$

Будем раскладывать функцию $f(x)$ в конечный ряд по φ_i

$$f(x_k) \approx \sum_{i=1}^m a_i \varphi_i(x_k), \quad (2)$$

где

$$a_i = \sum_{j=1}^n f(x_j) \varphi_i(x_j) \quad (m \leq n). \quad (3)$$

Определим оптимальную систему функций $\varphi_i(x_k)$ из условия, чтобы квадрат ошибки аппроксимации функции $f(x)$ по формуле (2) в среднем (статистически) был минимален

$$\overline{\delta^2} = \sum_{k=1}^n \left(f_k - \sum_{i=1}^m a_i \varphi_{ik} \right)^2 = \min. \quad (4)$$

Здесь для краткости введены обозначения $f(x_k) = f_k$, $\varphi_i(x_k) = \varphi_{ik}$.

Подставим значения коэффициентов a_i из (3) в (4) и приравняем нулю производные от получившегося выражения по всем φ_{ik} . Тогда получим

$$\left(f_k - \sum_{i=1}^m a_i \varphi_{ik} \right) a_l = 0 \quad (l=1, 2, \dots, m; k=1, 2, \dots, n). \quad (5)$$

Будем определять φ_{ik} так, чтобы коэффициенты разложений были некоррелированы между собой, т. е.

$$\overline{a_i a_l} = 0 \quad \text{при } i \neq l. \quad (6)$$

Учитывая (6) и (3), вместо (5) получим

$$\sum_{j=1}^n \overline{f_k f_j} \varphi_{lj} = \overline{a_l^2} \varphi_{lk}. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение корреляционную функцию $B_{kl} = \overline{f_k f_l}$ и обозначим

$$\overline{a_l^2} = \lambda_l. \quad (8)$$

Тогда (7) запишется в виде

$$\sum_{j=1}^n B_{kj} \varphi_{lj} = \lambda_l \varphi_{lk} \quad (k=1, 2, \dots, n; l=1, 2, \dots, m). \quad (9)$$

Характеристическое уравнение однородной системы (9) позволяет определить n значений λ_l (собственных чисел). Каждое из найденных λ_l определяет совокупность чисел $\varphi_{l1}, \varphi_{l2}, \dots, \varphi_{ln}$ (собственный вектор).

Из (8) следует, что собственные числа λ_l имеют смысл дисперсий коэффициентов разложения по оптимальной системе.

Система (9) является аналогом интегрального оператора дисперсии для функции, заданной в конечном числе точек. Система (9) была использована А. М. Обуховым [3] для определения собственных векторов суточных изменений высот изобарических поверхностей 1000, 850, 700, 500 и 300 мб как функций высоты над уровнем моря. Результаты вычислений для двух независимых выборок, отвечающих маю 1951 г. и маю 1952 г., показали, что собственные векторы для этих выборок в известной степени сходны между собой и что более 90% суммарной дисперсии приходится на первые два члена разложения по этим векторам (если собственные векторы расположены в порядке убывания соответствующих им собственных чисел):

2. Для практического использования оптимальных функций важно исследовать вопрос об устойчивости этих функций во времени и в пространстве, т. е. при переходе от одной выборки к другой.

Действительно, если полученные для одной выборки оптимальные функции теряют свою оптимальность при переходе к другим выборкам, то использование такой системы функций в ряде практических задач становится малоэффективным и, вероятно, не будет обладать преимуществами перед использованием обычных ортогональных функций. В настоящей работе исследовались оптимальные разложения вертикальных профилей некоторых метеозаэлементов.

Для исследования оптимальных функций суточных изменений геопотенциала значения последнего снимались на шести изобарических поверхностях (1000, 850, 700, 500, 300 и 200 мб) за 03 часа для следующих периодов, охватывающих все четыре сезона: с 23 января по 1 февраля 1958 г. (10 дней) — первая выборка; с 15 по 24 апреля 1959 г. (10 дней) — вторая выборка; с 6 по 16 июля 1959 г. (11 дней) — третья выборка; с 20 по 29 октября 1959 г. (10 дней) — четвертая выборка.

На каждой поверхности данные снимались в 110 узлах треугольной сетки, изображенной на рис. 1. Как видно из этого рисунка, выбранные узлы соответствуют тем участкам карты, где снятые данные обладают максимальной достоверностью.

Таким образом, для каждого сезона имеется формально не менее 990 значений суточных изменений геопотенциала, хотя, конечно, нельзя считать эти значения статистически независимыми.¹

Обычно для статистических исследований в метеорологии используются данные непосредственно в пунктах зондирования. Не вдаваясь в обсуждение вопроса о том, какие данные обладают лучшей репрезентативностью для исследований крупномасштабных процессов (в узлах сетки или в пунктах зондирования), отметим лишь преимущества технического порядка, которые получаются при снятии данных в узлах сетки. При такой процедуре полностью или частично могут быть использованы данные, снятые для прогноза или полученные в результате объективного анализа. Кроме того, в этом случае мы не сталкиваемся

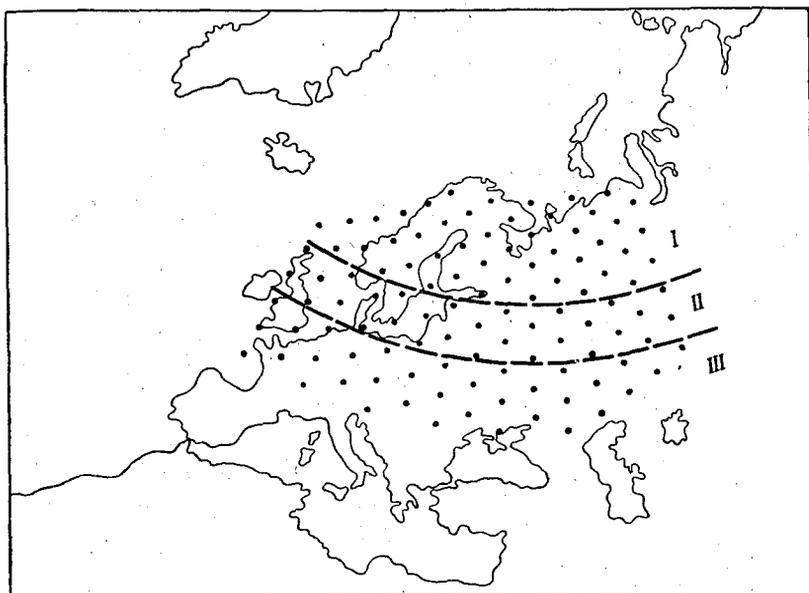


Рис. 1.

с проблемой частичного отсутствия данных в отдельных пунктах, что значительно упрощает их обработку с помощью вычислительных машин.

3. Для исследования зависимости оптимальных функций от широты вся территория была разбита на три района (рис. 1). По данным третьей выборки (содержащей максимальное число данных) для каждого из трех районов были вычислены корреляционные матрицы $\|B_{kl}\|$, описывающие межуровневую связь суточных изменений геопотенциала на всех шести изобарических поверхностях. Вычисление суточных изменений, корреляционных матриц, собственных векторов и собственных чисел производилось на ЭВМ «Урал-1». Для определения собственных векторов и собственных чисел использовался метод Якоби с преградами (см., например, [5]).

¹ Методы математической статистики позволяют определить число «эквивалентных» независимых значений, если только известна соответствующая корреляционная функция наблюдаемого ряда (см. например, [2]).

Значения собственных векторов графически представлены на рис. 2. Хотя корреляционные матрицы для разных районов существенно различны (в связи с ростом изменчивости геопотенциала с широтой), как видно из рис. 2, собственные векторы этих матриц довольно близки друг к другу.

4. Далее исследовался вопрос об устойчивости собственных векторов во времени.

Таблица 1

Корреляционные матрицы суточных изменений геопотенциала (дкм²)

Уровни, мб	1000	850	700	500	300	200	Номер выборки
1000	59,97	50,89	51,90	52,17	47,76	40,64	1
	31,67	22,10	13,87	6,73	-0,86	-1,54	2
	20,00	14,61	11,62	10,72	7,09	2,03	3
	66,63	57,99	54,01	48,43	42,90	40,45	4
850		49,52	51,75	56,75	59,03	50,84	1
		21,51	17,29	13,88	10,07	7,51	2
		17,46	15,41	17,60	16,96	11,21	3
		59,35	57,87	61,05	63,87	57,46	4
700			63,34	73,85	84,65	73,69	1
			25,32	22,04	24,25	16,86	2
			20,04	21,50	25,30	19,79	3
			66,71	73,82	85,59	77,66	4
500				107,24	134,17	117,87	1
				51,05	53,36	40,16	2
				37,55	45,77	39,03	3
				115,64	153,39	134,02	4
300					223,04	183,93	1
					92,75	67,79	2
					88,75	63,46	3
					254,98	216,11	4
200						191,00	1
						72,53	2
						69,62	3
						216,61	4

Примечание. 1 — зима, 2 — весна, 3 — лето, 4 — осень.

Прежде всего представляло интерес выяснить, меняются ли значения собственных векторов при смене сезонов. Корреляционные матрицы для каждой из четырех выборок приведены в табл. 1. Собственные векторы этих матриц графически представлены на рис. 3.

В табл. 2 приведены значения собственных чисел и доли суммарной дисперсии (%), описываемые суммой одного, двух и т. д. членов разложения, т. е. величины

$$d_i = \frac{\sum_{k=1}^i \lambda_k}{\sum_{k=1}^6 \lambda_k}$$

Как видно из приводимых результатов, формы соответствующих собственных векторов для различных сезонов близки друг к другу. Особенно

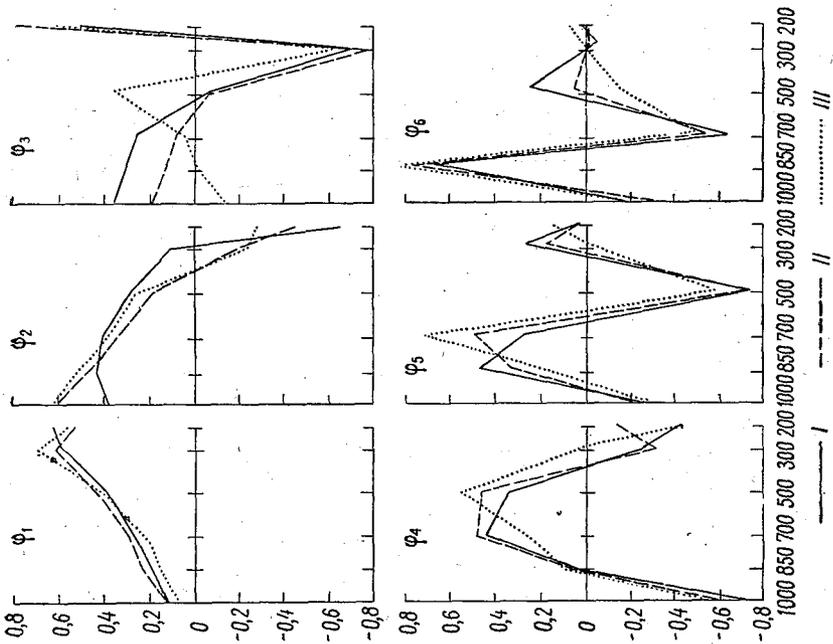


Рис. 2. Собственные векторы суточных изменений геопотенциала для районов I, II, III. Июль 1959 г.

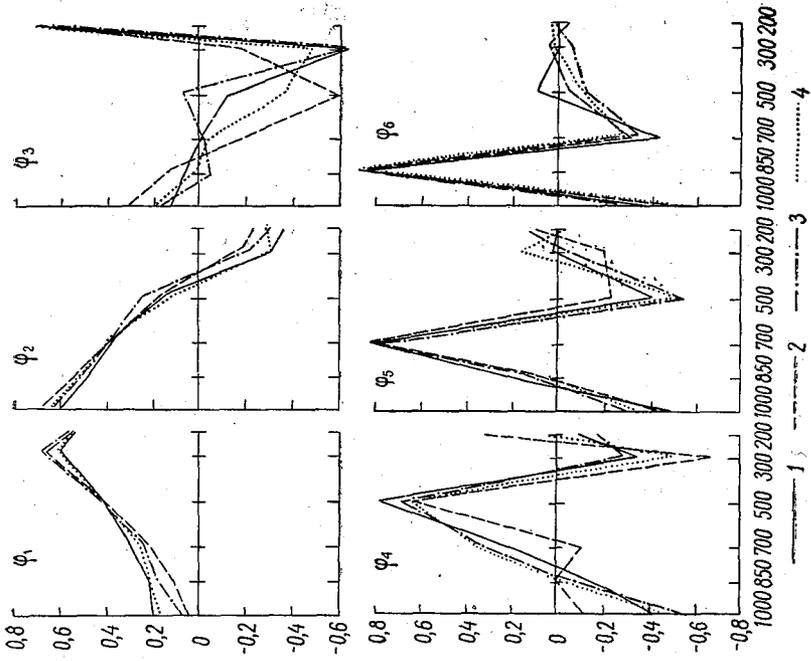


Рис. 3. Собственные векторы суточных изменений геопотенциала для четырех сезонов (тропосфера и нижняя стратосфера).

1 — январь 1959 г., 2 — апрель 1959 г., 3 — июль 1959 г., 4 — октябрь 1959 г.

следует отметить устойчивость первых двух векторов, на которые приходится, как это следует из табл. 2, примерно 90% суммарной дисперсии.

Таблица 2
Собственные числа суточных изменений геопотенциала (дкм²)

i	Январь 1958 г.		Апрель 1959 г.		Июль 1959 г.		Октябрь 1959 г.	
	λ_i	d_i %	λ_i	d_i %	λ_i	d_i %	λ_i	d_i %
1	559,79	80,88	195,16	66,20	184,73	73,47	625,22	80,16
2	93,43	94,38	59,40	86,34	40,78	89,69	115,52	94,98
3	22,49	97,63	18,48	92,61	14,21	95,34	20,96	97,66
4	10,64	99,17	11,02	96,35	5,52	97,54	10,73	99,04
5	3,61	99,69	8,71	99,30	4,24	99,22	5,08	99,69
6	2,15	100,00	2,05	100,00	1,95	100,00	2,41	100,00

На рис. 4 изображены для сравнения собственные векторы суточных изменений геопотенциала для тех же четырех выборок, но построенных

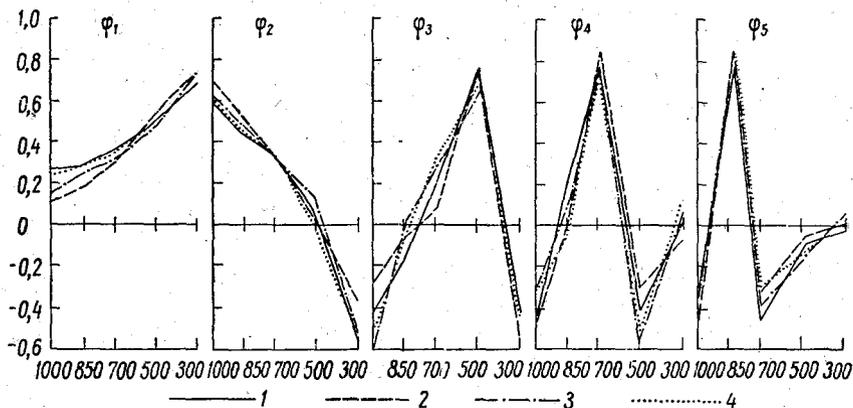


Рис. 4. Собственные векторы суточных изменений геопотенциала для четырех сезонов (тропосфера).

1 — январь 1958 г., 2 — апрель 1959 г., 3 — июль 1959 г., 4 — октябрь 1959 г.

по данным пяти изобарических поверхностей (1000, 850, 700, 500 и 300 мб).

Из сравнения рис. 2 и 3 видно, что добавление одного уровня не изменяет практически формы «главных колебаний», полученных для тропосферы. Действительно, «главным колебаниям» в тропосфере $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ и φ_5 (рис. 4) соответствуют «главные колебания» $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$, приводимые на рис. 3. Добавление уровня 200 мб приводит к появлению нового «главного колебания» φ_3 (рис. 3).

5. С практической точки зрения важно исследовать вопрос об изменчивости собственных векторов от дня ко дню. Действительно, использование оптимальных разложений для решения, например, задачи прогноза будет лишь в том случае целесообразным, если оптимальные функции изменений прогнозируемой величины мало меняются от дня ко дню (изменчивость же прогнозируемого элемента описывается коэффициентами разложений). Так как при решении задачи прогноза нельзя в на-

чальный момент определить оптимальные функции изменений прогнозируемой величины, то мы вынуждены пользоваться некоторыми средними значениями этих функций, полученными по старому материалу. Совершенно очевидно, что использование средних значений эффективно лишь в том случае, если изменчивость оптимальных функций ото дня ко дню (а тем самым и их отклонения от средних) мала. В противном случае разложения по средним значениям оптимальных функций будут обладать плохой сходимостью и их использование не будет иметь преимущества перед использованием обычных ортогональных функций.

Для исследования этого вопроса были составлены корреляционные матрицы изменений геопотенциала для каждых суток в отдельности по всем четырем выборкам.

Значения первых двух собственных векторов этих матриц для первых пяти суток каждого месяца приводятся в табл. 3. Рассмотрение

Таблица 3

		Январь 1958 г.					Апрель 1959 г.					
		23—24	24—25	25—26	26—27	27—28	15—16	16—17	17—18	18—19	19—20	
φ_1		0,411	0,284	0,069	0,164	0,093	0,069	0,263	0,169	-0,119	-0,005	
		0,375	0,270	0,081	0,206	0,144	0,124	0,302	0,209	0,029	0,084	
		0,390	0,359	0,178	0,259	0,231	0,174	0,348	0,267	0,145	0,196	
		0,444	0,440	0,347	0,396	0,386	0,372	0,438	0,494	0,474	0,461	
		0,467	0,510	0,630	0,636	0,597	0,652	0,589	0,568	0,639	0,672	
		0,353	0,515	0,633	0,550	0,642	0,621	0,424	0,538	0,575	0,539	
d_1 %		81,2	87,4	82,7	83,7	92,2	76,6	79,0	77,6	61,7	67,8	
φ_2		0,524	0,602	0,603	0,636	0,676	0,544	0,651	0,652	0,653	0,693	
		0,325	0,433	0,526	0,553	0,457	0,477	0,469	0,549	0,461	0,542	
		0,259	0,323	0,502	0,376	0,407	0,452	0,262	0,233	0,527	0,390	
		-0,034	0,048	0,189	0,019	0,204	0,385	-0,048	-0,201	0,238	0,156	
		-0,473	-0,426	-0,137	-0,289	-0,164	-0,256	-0,381	-0,414	-0,062	-0,161	
		-0,573	-0,402	-0,231	-0,253	-0,317	-0,244	-0,375	0,087	-0,149	-0,153	
d_2 %		95,5	97,5	97,2	96,6	97,8	90,7	91,8	88,4	82,5	58,2	
		Июль 1959 г.					Октябрь 1959 г.					Уровень, мг
		6—7	7—8	8—9	9—10	10—11	20—21	21—22	22—23	23—24	24—25	
φ_1		-0,047	0,023	0,076	0,154	0,153	0,108	0,104	0,072	0,070	0,142	1000
		0,133	0,160	0,135	0,245	0,227	0,149	0,186	0,152	0,134	0,192	850
		0,217	0,216	0,219	0,342	0,245	0,218	0,264	0,185	0,117	0,234	700
		0,391	0,433	0,283	0,440	0,424	0,342	0,443	0,446	0,428	0,412	500
		0,643	0,587	0,750	0,573	0,597	0,621	0,696	0,638	0,662	0,613	300
		0,606	0,629	0,533	0,526	0,574	0,645	0,452	0,576	0,585	0,585	200
d_1 %		75,8	77,1	71,9	68,8	73,8	85,5	82,6	69,0	73,8	87,8	
φ_2		0,671	0,850	0,571	0,587	0,581	0,573	0,555	0,542	0,703	0,728	1000
		0,406	0,031	0,531	0,452	0,482	0,509	0,470	0,473	0,547	0,494	850
		0,486	-0,031	0,414	0,387	0,376	0,273	0,398	0,534	0,380	0,321	700
		0,222	-0,038	0,113	0,165	0,141	-0,009	0,244	0,225	0,092	0,049	500
		-0,041	0,381	0,007	-0,379	-0,099	-0,313	-0,237	-0,180	-0,183	-0,239	300
		-0,312	-0,358	-0,456	-0,359	-0,508	-0,029	-0,432	-0,339	-0,146	-0,252	200
d_2 %		88,0	85,2	89,4	87,6	89,4	95,2	95,6	94,4	92,0	96,5	

этих таблиц показывает, что, хотя разброс значений собственных векторов от суток к суткам больше, чем от сезона к сезону, все же имеет место сходство форм по крайней мере первых двух собственных векторов, на которые приходится большая доля суммарной дисперсии (значения d_2 в табл. 3).

При рассмотрении табл. 3 следует иметь в виду, что разброс собственных векторов в какой-то мере связан с малостью объема статистической выборки для каждого суток (110 значений). Как это следует из табл. 3, разложения для отдельных суток обладают хорошей скоростью сходимости (первые два члена разложений описывают примерно 90% дисперсии).

Будет ли иметь место хорошая сходимость, если разложения приводить для каждого суток не по собственным векторам, приводимым в табл. 3, а по оптимальным для каждой выборки функциям (рис. 3)?

Как уже отмечалось выше, ответ на этот вопрос позволит судить об эффективности использования оптимальных функций в задаче прогноза.

Пусть функция $f(x, y, \zeta, t)$ разложена по некоторой ортонормированной системе функций $\psi_i(\zeta)$ ($i=1, \dots, n$).

Обозначим $\psi_i(\zeta_k) = \psi_{ik}$.

Тогда

$$f_k = \sum_{i=1}^n a_i \psi_{ik}, \quad (10)$$

где

$$a_i(x, y, t) = \sum_{l=1}^n f_l \psi_{il}. \quad (11)$$

Оценим средний квадрат суммарной ошибки представления функции f , если в (10) мы ограничиваемся первыми m членами ($m \leq n$)

$$\begin{aligned} \overline{\delta_m^2} = \sum_{k=1}^n \overline{\left(f_k - \sum_{i=1}^m a_i \psi_{ik} \right)^2} &= \sum_{k=1}^n B_{kk} - 2 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \overline{f_k a_i \psi_{ik}} + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \overline{a_i \psi_{ik} \sum_{j=1}^m a_j \psi_{jk}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим последнюю тройную сумму

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i \psi_{ik} a_j \psi_{jk} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_i a_j \sum_{k=1}^n \psi_{ik} \psi_{jk} = \sum_{i=1}^m a_i^2.$$

Здесь использована ортонормированность функций ψ_i . Используя (11), получаем

$$\overline{\delta_m^2} = \sum_{k=1}^n B_{kk} - \sum_{i=1}^m \overline{a_i^2} = \sum_{k=1}^n B_{kk} - \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n B_{kl} \psi_{ik} \psi_{il}. \quad (13)$$

Отсюда относительная дисперсия, описываемая суммой m членов разложения, равна

$$d_m = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n B_{kl} \psi_{ik} \psi_{il}}{\sum_{k=1}^n B_{kk}}. \quad (14)$$

Пусть теперь $\psi_i = \varphi_i$, т. е. в качестве ортонормированной системы берется система собственных векторов корреляционной матрицы рассматриваемой функции. Это означает, что

$$\lambda_i \varphi_{ik} = \sum_{j=1}^n B_{kj} \varphi_{ij}, \quad (15)$$

где λ_i — собственные числа.

Как уже отмечалось выше, собственные числа λ_i представляют собой дисперсии соответствующих коэффициентов разложения по собственным функциям, т. е.

$$\lambda_i = \overline{a_i^2} = \left(\sum_{k=1}^n f_k \varphi_{ik} \right)^2. \quad (16)$$

В этом случае из (13) получаем очевидную формулу

$$\overline{\delta_m^2} = \sum_{k=1}^n B_{kk} - \sum_{i=1}^m \lambda_i. \quad (17)$$

Для первых пяти дней каждой выборки производились разложения суточных изменений геопотенциала по собственным векторам, полученным для соответствующей выборки. Значения относительной дисперсии d_i (в процентах) приводятся в табл. 4 (графы а). В графах б для сравнения приведены значения относительных дисперсий, полученных при разложении по векторам, оптимальным для каждых суток.

Данные табл. 4 показывают, что использование средних значений собственных функций (полученных по данным всей выборки) дает хорошую скорость сходимости разложений. Это говорит об устойчивости оптимальных разложений при переходе ото дня ко дню и о возможности использования средних значений собственных функций в задаче прогноза.

Не являются ли полученные результаты следствием того, что каждая из четырех выборок охватывает малый промежуток времени (9—10 суток), в связи с чем возможная инерционность процессов оказывает влияние на полученную хорошую скорость сходимости разложений?

Для ответа на этот вопрос были проведены разложения для пяти дней июля (лето) по собственным векторам первой выборки (зима) и для пяти дней января по собственным векторам третьей выборки (лето). Результаты вычислений относительных дисперсий (в процентах) приведены в табл. 5 (графы а). Кроме того, в табл. 5 для сравнения приведены значения относительных дисперсий для тех же дней, взятых из табл. 4 (графы б и в).

Данные табл. 5 показывают, что даже в тех случаях, когда для разложения летних изменений используются собственные векторы для зимы (и наоборот), имеет место хорошая скорость сходимости.

Это еще раз подтверждает сделанный выше вывод о возможности использования средних значений собственных векторов для разложений суточных изменений геопотенциала.

6. Возникает вопрос, обладают ли аналогичной устойчивостью оптимальные функции вертикальных профилей других метеорологических элементов. В первую очередь представляет интерес исследовать этот вопрос для разложений вертикального профиля скорости ветра.

Для получения корреляционных матриц вертикальных профилей составляющих (зональной и меридиональной) скорости ветра мы воспользовались результатами работы Чарльза [6].

Таблица 4

Январь 1958 г.										
	23—24		24—25		25—26		26—27		27—28	
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
d_1	72,4	81,2	85,4	87,4	78,0	82,7	88,3	88,7	89,5	92,2
d_2	95,1	95,5	97,1	97,5	93,3	97,2	96,2	96,6	97,3	97,8
d_3	98,1	98,3	98,6	98,8	97,9	98,5	98,2	98,6	98,8	99,0

Апрель 1959 г.										
	15—16		16—17		17—18		18—19		19—20	
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
d_1	75,6	76,6	71,6	79,0	75,2	77,6	59,8	61,7	67,8	67,8
d_2	89,0	90,7	91,7	91,8	86,5	88,4	81,9	82,5	88,0	88,2
d_3	94,1	94,8	95,3	96,0	93,9	96,5	90,4	93,5	93,5	94,0

Июль 1959 г.										
	6—7		7—8		8—9		9—10		10—11	
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
d_1	74,3	75,8	76,0	77,1	70,0	71,9	67,3	68,8	73,1	73,8
d_2	87,3	88,0	82,8	85,2	78,5	89,4	87,2	87,6	88,5	89,4
d_3	91,3	93,5	88,4	91,4	94,1	96,8	95,1	95,5	95,9	96,3

Октябрь 1959 г.										
	20—21		21—22		22—23		23—24		24—25	
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
d_1	83,7	85,5	80,8	82,6	68,0	69,0	71,5	73,8	87,7	87,8
d_2	93,9	95,2	93,4	95,6	93,2	94,4	91,2	92,0	96,2	96,5
d_3	97,9	98,5	97,4	97,7	96,6	97,0	95,0	95,2	98,1	98,4

Чарльз использовал данные 51 станции, расположенной на территории Северной и Центральной Америки, за период с 1 марта 1951 г. по 29 февраля 1956 г.

В работе [6] приводятся значения межуровневых коэффициентов корреляции и дисперсии составляющих скорости ветра для четырех различных широтных поясов Америки ($>50^\circ$, $40-50^\circ$, $30-40^\circ$, $<30^\circ$ с. ш.).

На рис. 5 изображены собственные векторы зональной составляющей скорости ветра (зима) для различных широтных поясов, соответствующие пяти тропосферным уровням (950, 850, 700, 500 и 300 мб).

Рассмотрение рис. 5 позволяет сделать вывод о практической независимости собственных векторов от широты.

На рис. 6 изображены собственные векторы зональной и меридиональной составляющих скорости ветра в различные сезоны (зима, лето) для одного и того же широтного пояса ($40-50^\circ$ с. ш.).

Январь 1958 г.															
	23—24			24—25			25—26			26—27			27—28		
	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в
d_1	65,6	72,4	81,2	80,8	85,4	87,4	80,5	78,0	82,7	87,9	88,3	88,7	91,1	89,5	92,2
d_2	95,0	95,1	95,5	96,4	97,1	97,5	95,6	96,3	97,2	95,9	96,2	96,6	96,7	97,3	97,8
d_3	97,7	98,1	98,3	98,5	98,6	98,8	97,4	97,9	98,5	97,7	98,2	98,6	98,6	98,8	99,0

Июль 1959 г.															
	6—7			7—8			8—9			9—10			10—11		
	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в	а	б	в
d_1	70,8	74,3	75,2	73,8	76,0	77,1	67,9	70,0	71,9	68,3	67,3	68,8	73,5	73,1	73,8
d_2	86,9	87,3	88,0	80,9	82,8	85,2	78,7	78,5	89,4	87,1	87,2	87,6	88,5	88,5	89,4
d_3	91,2	91,3	93,5	86,3	88,4	91,4	93,1	94,1	96,8	95,0	95,1	95,5	95,9	95,9	96,3

Результаты, приведенные на рис. 5 и 6, позволяют сделать заключение об устойчивости системы собственных векторов при переходе от

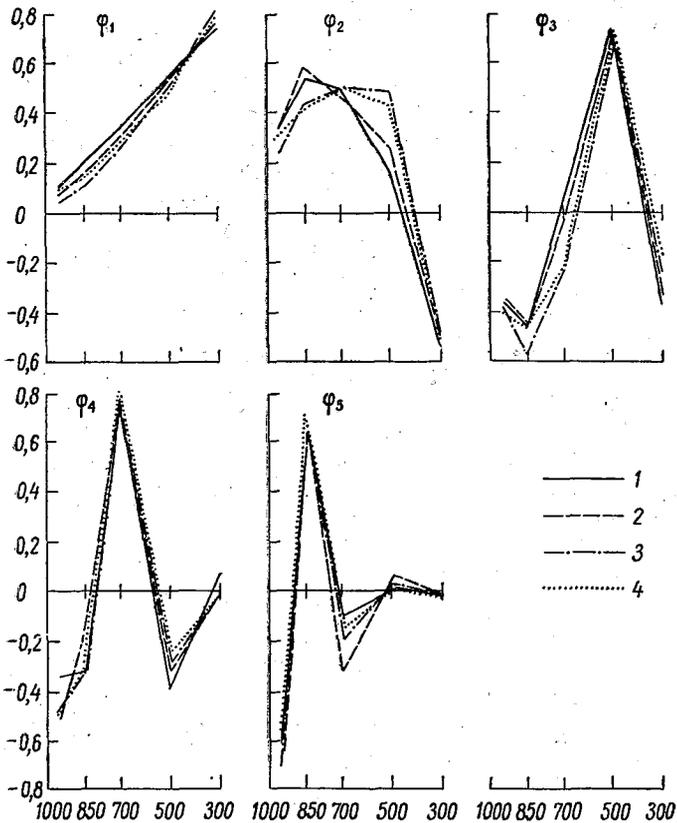


Рис. 5. Собственные векторы зональной составляющей скорости ветра для различных широтных поясов (тропосфера). Зима.

1 — $> 50^\circ$ с. ш., 2 — $40-50^\circ$ с. ш., 3 — $30-40^\circ$ с. ш., 4 — $< 30^\circ$ с. ш.

сезона к сезону. Кроме того, видно, что собственные векторы обеих составляющих близки между собой.

Большой интерес представляет сопоставление собственных векторов скорости ветра и суточных изменений геопотенциала. Сравнение рис. 3, 5 и 6 показывает, что собственные векторы суточных изменений геопотенциала и составляющих скорости ветра довольно близки.

Расчеты показали, что характер распределения дисперсий по «главным колебаниям» составляющих скорости ветра вполне аналогичен характеру распределения дисперсий при разложении суточных изменений геопотенциала.

На рис. 7 приведены собственные векторы составляющих скорости ветра для двух сезонов в полосе 40—50° с. ш., соответствующие шести уровням (950, 850, 700, 500, 300 и 200 мб).

Сравнение рис. 5, 6 и 7 подтверждает установленный ранее факт, что

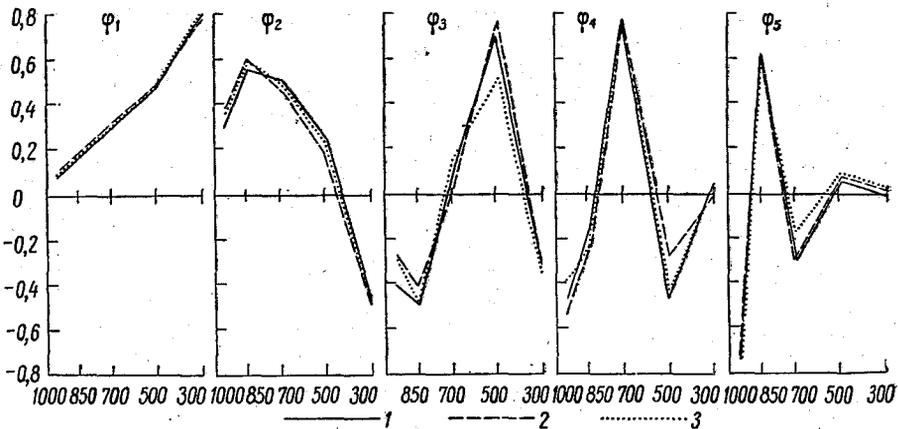


Рис. 6. Собственные векторы составляющих скорости ветра (40—50° с. ш., тропосфера).

1 — зональная составляющая, лето; 2 — меридиональная составляющая, зима; 3 — меридиональная составляющая, лето.

добавление нового уровня (200 мб) не изменяет практически тропосферных «главных колебаний», но приводит к появлению дополнительного «главного колебания» (ϕ_3 на рис. 7).

Сопоставление результатов рис. 3 и 7 подтверждает также отмеченный выше факт близости собственных векторов составляющих скорости ветра и суточных изменений геопотенциала. При сравнении собственных векторов составляющих скорости ветра и суточных изменений геопотенциала следует иметь в виду, что используемые данные для ветра и геопотенциала относились к разным периодам времени и к различным географическим континентам.

Изложенные выше результаты, на наш взгляд, позволяют высказать предположение, что распределения по высоте ряда метеорологических элементов обладают сходными закономерностями, так что можно говорить о существовании некоторой универсальной системы «главных колебаний» для этого ряда.

Связано ли появление вектора ϕ_3 на рис. 3 и 7 с простым увеличением числа уровней или же его форма определяется учетом стратосферы? И вообще, как меняется форма «главных колебаний» при замене одних уровней другими? Для ответа на эти вопросы были рассчитаны собственные векторы составляющих скорости ветра для

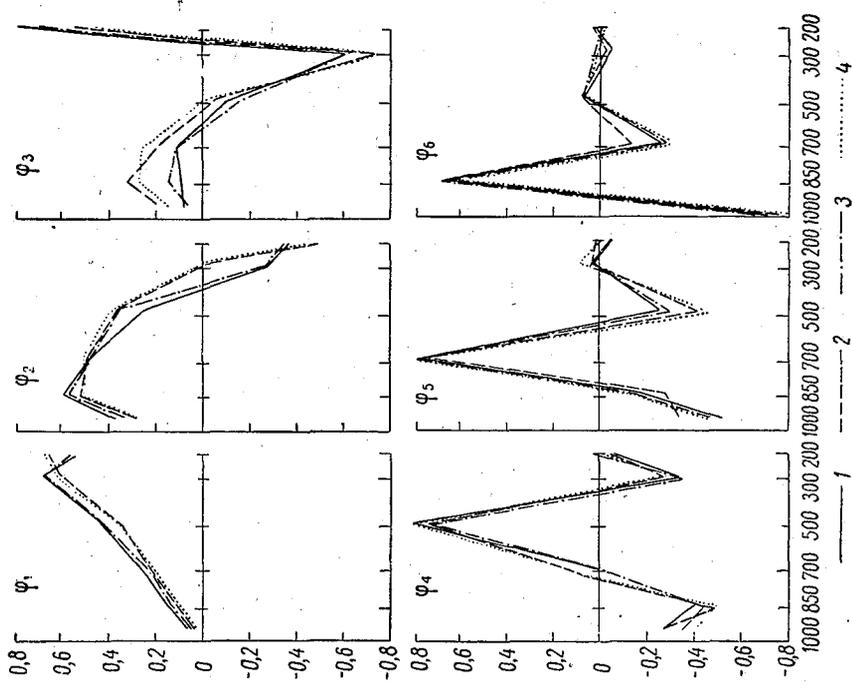


Рис. 7. Собственные векторы составляющих скорости ветра (40—50° с. ш., тропосфера и нижняя стратосфера).
 1 — меридиональная составляющая, зима; 2 — меридиональная составляющая, лето; 3 — зональная составляющая, зима; 4 — зональная составляющая, лето.

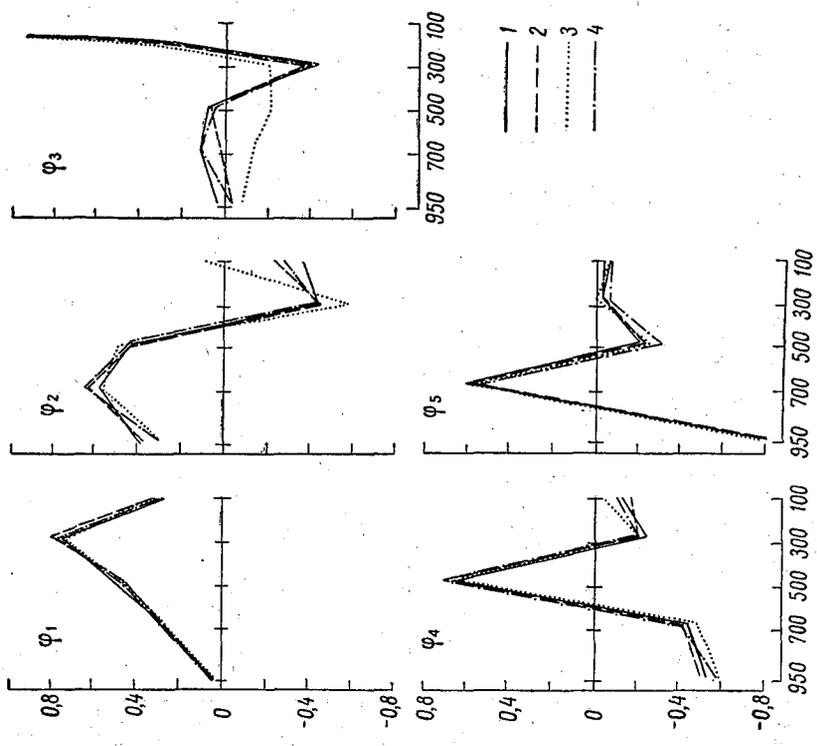


Рис. 8. Собственные векторы составляющих скорости ветра (40—50° с. ш., тропосфера и нижняя стратосфера).
 1 — меридиональная составляющая, зима; 2 — меридиональная составляющая, лето; 3 — зональная составляющая, зима; 4 — зональная составляющая, лето.

поверхностей 950, 700, 500, 300 и 100 мб. Таким образом, один тропосферный уровень (850 мб) был заменен стратосферным (100 мб). Значения собственных векторов приведены на рис. 8. Сравнение рис. 6 и 8 показывает, что учет поверхности 100 мб (вместо поверхности 850 мб) сравнительно мало меняет формы векторов φ_1 , φ_2 , φ_4 и φ_5 . Третий же вектор на рис. 8 существенно отличается от соответствующего вектора на рис. 6. Форма вектора φ_3 на рис. 8 очень близка к форме вектора φ_3 на рис. 7. Это позволяет сделать вывод о том, что «главное колебание», описываемое вектором φ_3 на рис. 7 и 8, появляется только при включении в рассмотрение стратосферных уровней:

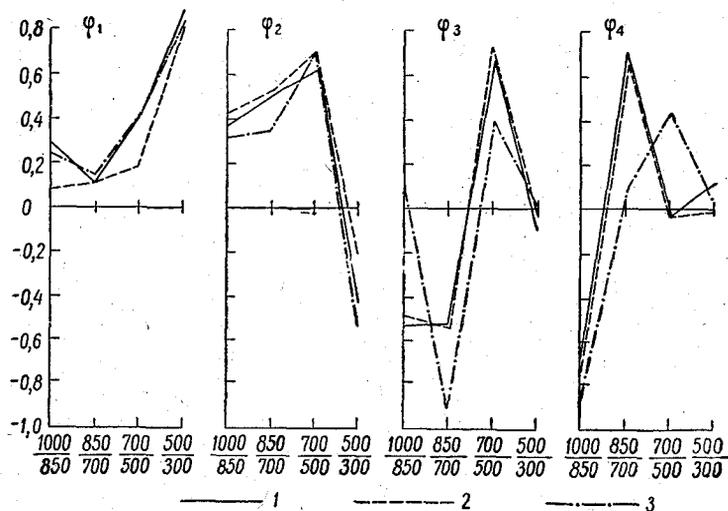


Рис. 9. Собственные векторы изменений относительной топографии.
1 — сентябрь 1950 г., 2 — май 1951 г., 3 — май 1952 г.

7. Воспользовавшись данными работы [4], можно построить корреляционные матрицы вертикальных профилей адвективных изменений относительной топографии слоев $\frac{1000}{850}$, $\frac{850}{700}$, $\frac{700}{500}$, $\frac{500}{300}$ и адвективных изменений вихря скорости для трех независимых выборок (сентябрь 1950 г., май 1951 г., май 1952 г.).

На рис. 9 и 10 изображены собственные векторы адвективных изменений относительной топографии и вихря соответственно. Сравнение с приводимыми выше результатами показывает, что первые два собственных вектора изменений относительной топографии и вихря (на которые, как и ранее, приходится большая доля суммарной дисперсии) сходны по форме с первыми собственными векторами составляющих скорости ветра и суточных изменений геопотенциала. При рассмотрении рис. 9 и 10 следует учитывать, что точность вычислений адвективных изменений значительно меньше точности определения локальных характеристик.

8. При оценке скорости сходимости разложений по оптимальным функциям в предыдущих разделах рассматривалась суммарная по всем уровням величина дисперсии, описываемая тем или иным количеством членов разложений. Было показано, что уже 2—3 первых члена разложения описывают примерно 90% суммарной дисперсии рассматриваемой функции.

Для целого ряда практических задач, в том числе и для задачи прогноза, крайне важно знать, какие ошибки за счет отбрасывания ряда членов возникают на отдельных уровнях.

Достаточно ли для описания значений метеоэлементов на любом из рассматриваемых уровней ограничиться 2—3 членами разложения по оптимальным функциям?

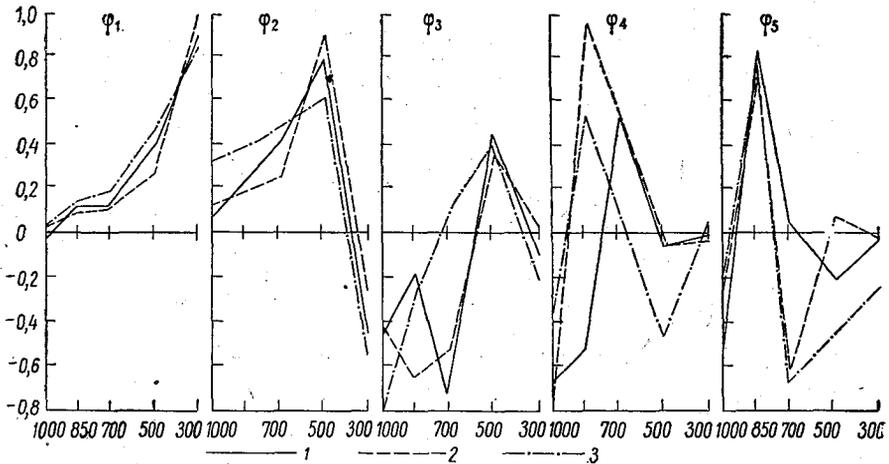


Рис. 10. Собственные векторы изменений вихря.
1 — сентябрь 1950 г., 2 — май 1951 г., 3 — май 1952 г.

Пусть функция $f(x, y, \zeta_k, t)$ разложена в ряд по оптимальным функциям $\varphi_i(\zeta_k)$

$$f_k = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_{ik}, \quad (18)$$

$$a_i(x, y, t) = \sum_{l=1}^n f_l \varphi_{il}. \quad (19)$$

Оценим средний квадрат ошибки представления функции f на уровне $\zeta = \zeta_k$ с помощью m членов разложения (18) ($m \leq n$)

$$\begin{aligned} \overline{\delta_{km}^2} &= \overline{\left(f_k - \sum_{i=1}^m a_i \varphi_{ik} \right)^2} = B_{kk} - 2 \sum_{i=1}^m \overline{f_k a_i \varphi_{ik}} + \\ &+ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \overline{a_i a_j \varphi_{ik} \varphi_{jk}}. \end{aligned}$$

Но

$$\sum_{i=1}^m \overline{f_k a_i \varphi_{ik}} = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \overline{f_k f_l \varphi_{il} \varphi_{ik}} = \sum_{i=1}^m \sum_{l=1}^m B_{kl} \varphi_{il} \varphi_{ik} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{ik}^2,$$

так как [см. формулу (15)]

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n B_{kl} \varphi_{il} &= \lambda_i \varphi_{ik}, \\ \overline{a_i a_j} &= \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ \lambda_i & \text{при } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

ввиду некоррелированности величин a_i .

Учитывая эти результаты, окончательно имеем

$$\overline{\delta_{km}^2} = B_{kk} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{ik}^2 \quad (20)$$

Относительная дисперсия, описываемая m членами разложения, равна

$$d_{km} = \frac{1 - \overline{\delta_{km}^2}}{B_{kk}} = \frac{\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_{ik}^2}{B_{kk}} \quad (21)$$

Для оценки скорости сходимости оптимальных разложений на отдельных уровнях были использованы разложения суточных изменений геопотенциала для четырех выборок (см. табл. 2 и рис. 3), рассмотренных в п. 4.

Величины относительных дисперсий, приходящихся на сумму одного, двух и трех «главных колебаний», приведены в табл. 6.

Таблица 6

k мб	Январь			Апрель			Июль			Октябрь		
	d_{1k}	d_{2k}	d_{3k}									
1000	36,2	92,7	93,2	1,2	86,2	92,0	5,8	85,2	87,3	27,4	93,4	94,6
850	53,7	94,7	94,8	14,2	91,7	93,2	32,8	91,6	91,9	48,7	97,2	97,2
700	73,8	95,3	95,3	38,3	74,4	76,0	54,4	84,3	84,3	65,3	93,3	93,3
500	90,8	93,1	93,5	75,7	78,2	91,1	83,5	89,6	89,7	91,3	92,6	95,1
300	90,7	95,1	99,2	91,4	93,5	94,1	89,7	92,1	99,2	92,1	96,8	98,8
200	86,1	93,0	99,6	80,8	85,4	97,6	82,6	88,8	99,6	89,5	94,4	100,0

Примечание. Величины d_{ik} даны в процентах.

Остановимся несколько подробнее на анализе данных табл. 6. Обращает на себя внимание факт возможности однопараметрического представления изменений высот некоторых изобарических поверхностей. А именно, как видно из табл. 6, изменение высот поверхностей 500, 300 и 200 мб можно представить с помощью одного лишь параметра. Как это следует, например, из формулы (3) первая компонента разложения a_1 приближенно может трактоваться как среднее значение высоты слоя (хотя с большими весами входят поверхности, более высоко расположенные).

Как известно, однопараметрические модели атмосферы, когда в качестве параметра бралась средняя высота слоя, широко использовались в 50-х годах для целей численного прогнозирования (баротропные модели). Считалось, что однопараметрические модели позволяют прогнозировать высоты двух изобарических поверхностей 500 и 700 мб, причем средняя высота слоя отождествлялась с высотами этих поверхностей. До настоящего времени остается спорным вопрос, какой из уровней — 500 или 700 мб — предпочтительнее выбирать в качестве уровня, прогнозируемого с помощью баротропной модели.

Использование оптимальных разложений позволяет уточнить значения параметра, который может быть положен в основу однопараметрических моделей. При использовании первой компоненты разложения в качестве единственного параметра описание изменений высот поверхности 700 мб производится со значительной ошибкой, в то время как опи-

сание изменений поверхности 500 мб производится с большой точностью (см. табл. 6).

Результаты табл. 6 показывают, что наиболее эффективно с помощью одного параметра представляются изменения высот поверхностей 300 и 200 мб, в то время как изменения высот поверхностей 1000, 850 и 700 мб не могут быть описаны с помощью одного параметра.

Привлечение второго параметра существенно меняет картину. С помощью двухпараметрической модели возможно достаточно точное представление изменений уже на всех уровнях.

Как известно, в 50-х годах появился целый ряд работ (Филлипс, Иди, Соьер и Бушби, Томпсон и Гейтс и др.), посвященных разработке двухпараметрических моделей прогноза. В этих работах выбор параметров моделей делался обычно без достаточных обоснований, чаще всего в качестве параметров использовалась средняя высота и средняя температура слоя.

Результаты, приведенные в табл. 6, позволяют объяснить относительную успешность прогнозов, полученных с помощью таких моделей. Действительно, как уже отмечалось выше, первая компонента разложения приближенно может толковаться как среднее значение высоты слоя; вторая же компонента приближенно представляет среднюю температуру слоя. Очевидно, использование в качестве параметров коэффициентов при первых двух оптимальных функциях явилось бы уточнением двухпараметрических моделей.

Кроме того, использование оптимальной системы функций позволяет уточнить двухпараметрическую модель путем увеличения числа параметров, если необходимо получить большую точность, чем та, которую дает двухпараметрическая оптимальная модель.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить признательность проф. М. И. Юдину за ряд советов, полученных мною при выполнении настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров Н. А. Аналитическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляющих. Тр. ЦИП, вып. 74, 1959.
2. Обухов А. М. Статистическое описание непрерывных полей. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, № 24 (151); 1954.
3. Обухов А. М. О статистически ортогональных разложениях эмпирических функций. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1960.
4. Чаплыгина А. С. 24-часовые изменения термобарических полей в свободной атмосфере. Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, № 33 (160), 1956.
5. Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Физматгиз, 1960.
6. Charles B. N. Empirical models of interlevel correlation of winds. Journ. of Meteorology. v. 16, No 5, 1959.
7. Fukuoka A. A study of 10-day forecast. Geophysical Magazine, No 3, 1951.
8. Lorenz E. N. Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction. Sci. Rep., No 1, statis. Fest. Proj. contract. No AF 19(604)-1566, 1956. MIT.
9. White R. M., Cooley D. S., Derby R. S., Seaver F. A. The development of efficient linear statistical operators for the prediction of sea-level pressure. Journ. of Meteorology. v. 5, No 5, 1958.

Н. И. ЯКОВЛЕВА, А. В. МЕЩЕРСКАЯ, Г. Д. КУДАШКИН

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОЛЕЙ ДАВЛЕНИЯ (ГЕОПОТЕНЦИАЛА) МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЕСТЕСТВЕННЫМ СОСТАВЛЯЮЩИМ

Представлены результаты разложения полей давления (геопотенциала) по естественным ортогональным составляющим с учетом разновидностей синоптических процессов для земной поверхности и уровня 500 мб на территории естественного синоптического района (по Б. П. Мультановскому). Показана возможность применения естественных функций времени для типизации синоптических процессов.

Введение

В настоящее время в поисках количественных характеристик состояний атмосферных движений широко используются статистические методы исследования. При этом весьма важно свести к минимуму число параметров, характеризующих атмосферные движения на больших пространствах.

Среди различных статистических методов с этой точки зрения наибольший интерес представляет метод разложения метеорологических полей по естественным составляющим. В отличие от других способов аналитического представления полей с помощью специальных заранее известных функций, в этом методе естественные составляющие определяются статистически из совокупности полей и потому физически более обоснованы.

В связи с этим ряд по естественным составляющим сходится быстрее, и потому сокращается число новых трансформированных переменных, характеризующих метеорологическое поле (по сравнению с рядом по специальным заранее заданным функциям).

В настоящее время этот метод получает все большее применение [1, 2, 4, 7, 8, 9 и др.].

Однако само представление о естественных составляющих и их применение, в частности, к характеристике состояний атмосферных движений требует дальнейшего исследования.

Данная работа имеет целью исследование свойств естественных составляющих разложения полей давления у земли и геопотенциала (AT_{500}) с учетом синоптических разновидностей на территории первого естественного синоптического района по Б. П. Мультановскому. Вместе с тем исследуется возможность применения полученных естественных составляющих для типизации синоптических процессов.

§ 1. Методика исследования

Метод статистического анализа с помощью разложения поля метеорологического элемента по естественным составляющим достаточно подробно описан и проиллюстрирован на некоторых примерах в ряде опубликованных работ, например в работе Н. А. Багрова [1], Фукуока [9], А. М. Обухова [4].

Используя работу Н. А. Багрова, коротко изложим некоторые положения указанного метода, чтобы облегчить дальнейшее чтение и понимание статьи.

Метод разложения по естественным составляющим заключается в том, что давление (геопотенциал) в каждой точке поля представляется в виде суммы произведений двух функций

$$P(x_i, y_i, t_k) = \sum_{j=1}^n T_j(t_k) X_j(x_i, y_i), \quad (1)$$

где $T_j(t)$ — параметры разложения, зависящие только от времени; они имеют определенное значение для данного поля и меняются при рассмотрении другого поля; $X_j(x, y)$ — естественная функция, зависящая только от координат рассматриваемых точек поля, от их месторасположения.

В дальнейшем будем пользоваться сокращенными обозначениями: $T_j(t_k) = T_{jk}$ и $X_j(x_i, y_i) = X_{ji}$. Обе функции ортогональные; находятся статистически по совокупности метеорологических полей. Основой их определения является условие минимума средней квадратической ошибки разложения по всему объему рассматриваемых полей

$$\Delta = \sum_k \sum_i (P_{ik} - \sum_j T_{jk} X_{ji})^2 = \min. \quad (2)$$

Функции X_j определяются из системы уравнений, которую представим следующим образом:

$$\sum A_{is} X_i = \lambda X_s \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где A_{is} — элементы корреляционной матрицы $\{A\}$ (корреляционные моменты), получаемые по совокупности полей для точек поля i и s . Число λ является собственным числом матрицы $\{A\}$ и определяется из характеристического уравнения той же матрицы $\{A\}$. В результате решения характеристического уравнения получается n значений λ_j ($j = 1, 2, \dots, n$), n равно общему числу членов ряда в разложении.

Из системы уравнений (3) для каждого значения λ_j находится l различных решений X_{ji} (l равно общему числу точек поля).

Совокупность таких значений X_{ji} для данного λ_j составляет естественную функцию X_j .

Временная функция T_{jk} , соответствующая собственному вектору X_j , определяется с использованием условия нормирования $\sum_{j=1}^l X_{ji}^2 = 1$ по соотношению

$$T_{jk} = \sum_{i=1}^l P_{ik} X_{ji}. \quad (4)$$

Точность представления полей давления (геопотенциала) по некоторому числу h естественных составляющих определяется показателем

$$R_h^2 = \frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_i A_{ii}} = \frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^n \lambda_j}, \quad (5)$$

где A_{ii} — диагональные элементы корреляционной матрицы $\{A\}$.

Вообще в разложении (1) число слагаемых может быть равно числу точек поля ($l=n$), в которых снимаются исходные данные. Однако значимость (вклад) каждого слагаемого не одинакова.

Наиболее значимыми естественными составляющими будут те, которые соответствуют наибольшим значениям λ_j . Поэтому обычно значения λ_j располагают в убывающем порядке, и наибольший интерес представляют естественные векторы и временные функции, соответствующие малым порядковым номерам j ($j=1, 2, \dots$). Так как сумма (1) довольно быстро сходится, то практически можно ограничиться несколькими первыми естественными составляющими.

На этом более подробно остановимся в § 3.

Применение рассмотренного метода вообще целесообразно было бы начать с территории всего северного полушария, чтобы выявить самые существенные черты общей циркуляции атмосферы. Следующий шаг должен состоять в уточнении характеристик атмосферных движений с помощью статистического метода на территории отдельных секторов полушария.

Но можно идти по другому направлению: начать исследование с территории, составляющей часть северного полушария. В дальнейшем целесообразно проделать такие же расчеты по другим частям полушария. Затем произвести объединение, используя приемы, предложенные в работах Уайта и др. [7, 8], для получения параметров атмосферных состояний по всему северному полушарию.

Следуя таким путем, получаем характеристики атмосферной циркуляции как по всему полушарию, так и по отдельным районам. Если будет необходимо, данную методику можно использовать для нахождения параметров для еще более мелких областей. В результате будет найдена ступенчатая система параметров, характеризующих атмосферные движения на территориях различных размеров (полушария, отдельного материка, части материка и пр.).

Мы начали исследование с территории, составляющей примерно $\frac{1}{6}$ территории северного полушария. Таким образом, в данной статье представлены результаты первого шага исследования.

Теперь приступим к изложению конкретных расчетов с использованием метода разложения полей давления (геопотенциала) по естественным составляющим.

В наших конкретных расчетах использованы две нерегулярные сетки точек (рис. 1), приблизительно равномерно расположенные по территории от 80 до 30° с. ш. и от 40° з. д. до 90° в. д., что составляет по долготе $\frac{1}{3}$ северного полушария.

Использование двух систем точек поля дает возможность проанализировать влияние объема исходных данных и расположения точек на результаты разложения.

Каждая система состояла из 26 точек, по возможности совпадающих с метеостанциями, что облегчало снятие данных с карт и обеспечивало более надежные исходные данные. Над океанами взяты либо островные станции, либо данные кораблей погоды. Только в двух точках над океанами (из 52) значения давления (геопотенциала) снимались с изолиний.

Метод разложения по естественным составляющим весьма трудоемок, поэтому все расчеты проводились на ЭВМ.

Разложение полей давления (геопотенциала) производилось по каждой системе точек отдельно.

Расчеты состояли из трех этапов:

1) нахождения элементов корреляционных матриц с помощью ЭВМ «Урал-1»,

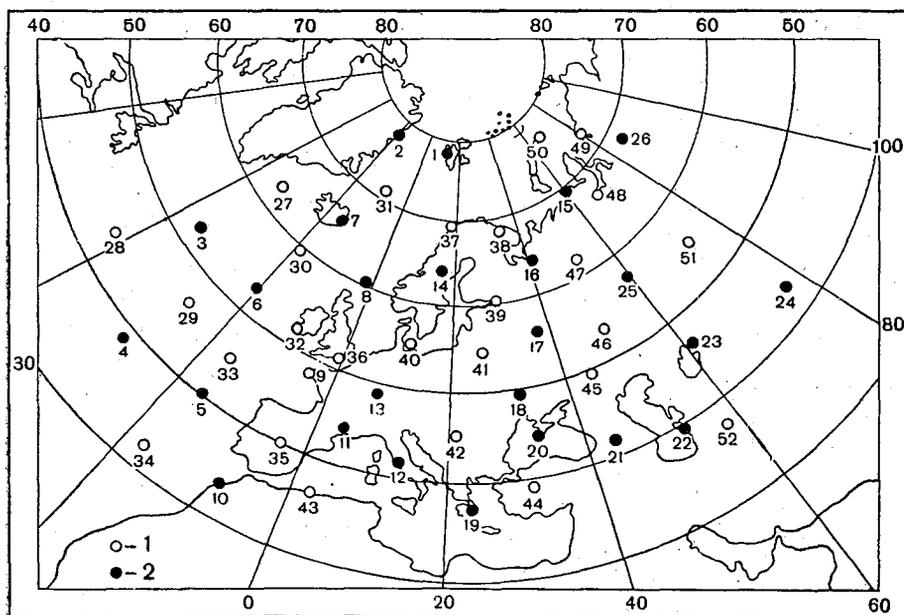


Рис. 1. Расположение и нумерация точек, данные в которых использовались для расчетов.

1 — первая система точек, 2 — вторая система точек.

2) определения собственных чисел и естественных векторов (БЭСМ-2),

3) вычисления параметров разложения каждого индивидуального поля давления (геопотенциала) («Урал-1»).

Для нахождения собственных естественных векторов и собственных чисел корреляционных матриц $\{A\}$ использовался метод Якоби — метод приведения матриц к диагональному виду при помощи элементарных «вращений» [5].

Достоверность определения собственных чисел и собственных векторов проверялась двумя способами.

Во-первых, использовался показатель R^2 (5). Для $h=26$, т. е. при использовании всех слагаемых в разложении полей, этот показатель должен быть равен единице. При расчете λ_j методом Якоби наибольшее значение $R^2=1,0003$. Следовательно, максимальные расхождения между суммой всех собственных чисел и суммой всех диагональных элементов

матрицы не превышает 0,03%. Это говорит о высокой точности значений λ_j и X_j , полученных методом Якоби.

Во-вторых, для симметричных матриц, какими являются корреляционные матрицы $\{A\}$, все собственные числа должны быть положительными. Однако в первых расчетах среди собственных чисел появились отрицательные величины λ_j , по абсолютному значению составляющие около 10% λ_1 . Это свидетельствовало о том, что система при наличии всех 26 точек оказалась плохо обусловленной.

После соответствующего анализа было установлено, что появление отрицательных значений λ_j связано с наличием в используемой системе таких точек, данные в которых почти не дают дополнительной информации о поле, так как сильно коррелируют с данными на соседних станциях.

После того как из первой системы точек была удалена 20-я точка, а из второй системы точек — две точки (39 и 49), отрицательные значения λ_j либо совсем не появлялись, либо они оказывались по абсолютному значению не более 0,01% λ_1 , что мало существенно для описания полей с помощью разложения по естественным составляющим.

Расчет λ_j и соответствующих им естественных векторов для корреляционных матриц 25-го порядка занимает на машине БЭСМ-2 5—7 мин. при числе итераций от 1000 до 1400 (программа составлена в Математическом институте Академии наук СССР им. В. А. Стеклова).

§ 2. Исходные данные

В данной работе мы ограничились исследованием только зимнего периода года (январь, февраль, декабрь). В основу выборки исходного материала была положена типизация синоптических процессов Г. Я. Вангенгейма. Этим преследовалась цель начать исследование характеристик состояний атмосферных движений с более однородных групп процессов и одновременно иметь возможность в дальнейшем сопоставить синоптическую типизацию с объективными параметрами, полученными с помощью метода разложения на естественные составляющие.

Согласно рекомендации сотрудницы ААНИИ М. С. Болотинской, из всех разновидностей основных типов циркуляции Г. Я. Вангенгейма были выделены наиболее четко выраженные следующие разновидности: в восточном типе разновидность стационарирования V (E V), в меридиональном типе разновидность Лпл 1^a и в западном типе разновидность «западный перенос».

За период с 1951 по 1961 г. (январь, февраль, декабрь) согласно каталогу Г. Я. Вангенгейма отобрано примерно одинаковое число элементарных синоптических процессов (по 7—8 э. с. п.) трех указанных разновидностей. В это число вошли почти все э. с. п. меридиональной и восточной разновидностей, которые наблюдались с 1951 по 1961 г., и около 50% э. с. п. с разновидностью «западный перенос».

За указанный десятилетний период сняты данные давления с наземной синоптической карты и данные геопотенциала с карт АТ₅₀₀ (за 3 часа) за 111 дней; из них 22 дня относятся к разновидности E V, 22 дня — к Лпл 1^a, 21 день — к разновидности «западный перенос» и 46 дней — к самым различным разновидностям. Эти 46 дней составлены из отдельных дней — по одному предшествующему и одному замыкающему каждый выбранный элементарный синоптический процесс (дополнительные дни к э. с. п.).

Расчет естественных составляющих проведен по данным 111 дней, которые составили основную выборку, а также для каждой из указанных

групп материала (три группы с различными разновидностями синоптических процессов и группа из 46 дней, дополнительных к э. с. п.). Так как расчет проводился по двум системам точек и по двум уровням, в общей сложности были найдены естественные составляющие по 20 матрицам 24—26-го порядка. Впоследствии материал был пополнен данными за два непрерывных периода: с 6 декабря 1956 г. по 24 января 1957 г. (50 дней) и с 15 декабря 1958 г. по 15 февраля 1959 г. (63 дня).

§ 3. Оценка разложения полей и анализ естественных функций X_j

Вклады отдельных слагаемых разложения полей можно охарактеризовать соответствующими собственными числами корреляционных матриц (λ_j). Сумма всех собственных чисел дает суммарную дисперсию давления (геопотенциала) по всему объему данной группы материала. А отдельно λ_j определяют ту часть общей дисперсии, которая учитывается j -тым слагаемым разложения полей. Поэтому, чем больше величина λ_j , тем большую значимость имеет j -тое слагаемое, тем с большим «весом» входит оно в представление полей с помощью разложения по естественным составляющим. Следовательно, естественная функция X_j , соответствующая данному λ_j , имеет также большую значимость.

Расчитанные собственные числа и соответствующие им естественные ортогональные векторы X_j для каждой выборки пронумерованы в порядке убывания значений λ_j . В табл. 1 и 2 представлены все значения собственных чисел (от $j=1$ до $j=26$) при использовании первой системы точек (см. рис. 1), а также вклады отдельных составляющих разложения по различным группам материала на поверхности 500 мб и на уровне моря.

Прежде чем перейти непосредственно к анализу табл. 1 и 2, остановимся на вопросе о влиянии характера среднего значения давления (геопотенциала), вычитаемого из исходных данных.

Обычно статистический анализ (разложение полей по естественным составляющим) применяется к отклонениям исходных значений от некоторой средней. Например, в работе Н. А. Багрова [1], а также в работе Фукуока [9] исключается средняя по полю величина геопотенциала (давления) для каждого индивидуального поля (т. е. пространственная средняя). В данной же работе основные расчеты проведены с использованием отклонений от временной средней (нормы), полученной по 111 дням в каждой точке поля. Вместе с тем дополнительно была рассчитана одна матрица с использованием пространственной средней геопотенциала AT_{500} (по тому же материалу) с тем, чтобы выяснить влияние способа определения средней на качество разложения полей по естественным составляющим.

В табл. 2 представлены собственные числа, полученные для отклонений исходных данных от временной средней (случай I) и пространственной средней (случай II). На первые 10 членов ряда в первом случае приходится 88% общей дисперсии, а во втором случае на те же 10 членов ряда приходится 96% дисперсии. Первые четыре члена ряда в случае I учитывают 63% суммарной дисперсии геопотенциала, в случае II — 87%.

На первый взгляд может показаться, что в случае II представляется возможность получить лучшие результаты разложения полей по сравнению со случаем I. Однако следует обратить внимание на то, что суммарная дисперсия в случае II получилась почти в три раза выше, чем в случае I (11 844 дкм² вместо 4193). Поэтому для сравнения эффективности разложения в зависимости от характера вычитаемой средней

Оценка разложения поля давления в ряд по естественным функциям (уровень моря)

j	Все случаи (для отклонений от средних по времени)			Ст V (восточный тип)			ЛПЛ 1 ^a (меридиональный тип)			Западный перенос (западный тип)			Группа дней, дополнительных кэ.с.п.		
	m = 111			m = 22			m = 22			m = 21			m = 46		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	612,54	27,2	27,2	603,49	37,1	37,1	624,53	32,3	32,3	416,33	29,3	29,2	570,78	25,7	25,7
2	373,20	16,6	43,8	303,76	18,7	55,8	373,06	19,3	51,6	286,29	20,1	49,4	358,24	16,2	41,9
3	317,27	14,2	57,9	245,48	15,1	70,8	267,01	13,8	65,4	209,63	14,7	64,2	334,99	15,1	57,0
4	206,78	9,2	67,1	114,87	7,1	78,0	188,13	9,7	75,1	145,31	10,2	74,3	224,90	10,1	67,1
5	131,31	5,8	72,9	101,19	6,2	84,2	130,29	6,7	81,8	86,96	6,1	80,4	127,32	5,7	72,8
6	109,65	4,9	77,8	61,71	3,8	88,0	91,12	4,7	86,5	60,51	4,2	84,7	123,38	5,6	78,4
7	98,22	4,4	82,7	53,42	3,3	91,3	64,67	3,3	89,9	55,45	4,0	88,7	104,91	4,7	83,1
8	77,69	3,4	85,6	37,64	2,3	93,6	46,40	2,4	92,3	32,51	2,3	91,0	76,87	3,5	86,6
9	60,29	2,7	88,3	23,55	1,4	95,0	32,95	1,7	94,0	29,76	2,1	93,0	69,97	3,2	89,8
10	53,15	2,4	90,8	20,71	1,3	96,3	31,07	1,6	95,6	23,14	1,6	94,7	44,76	2,0	91,8
11	39,31	1,7	92,4	15,52	1,0	97,3	21,12	1,1	95,7	20,63	1,4	95,1	42,52	1,9	93,7
12	33,68	1,5	93,9	13,38	0,8	98,1	17,60	0,9	97,6	16,04	1,1	97,2	32,69	1,5	95,2
13	21,37	1,0	94,8	11,59	0,7	98,8	14,29	0,7	98,3	12,76	0,9	98,1	23,02	1,0	96,2
14	19,74	0,9	95,7	8,49	0,5	99,3	13,60	0,7	99,0	9,29	0,6	98,8	19,91	0,9	97,1
15	17,62	0,8	96,5	5,17	0,3	99,6	7,90	0,4	99,4	6,95	0,5	99,3	12,07	0,5	97,6
	$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 2250,75$		$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 1625,78$	$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 1934,78$		$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 1422,69$	$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 2218,85$								

Примечания. m — число случаев; графы означают: 1 — собственные числа, выраженные в дкм², λ_j; 2 — отношение (λ_j/λ₀) дисперсий каждого члена ряда к суммарной дисперсии $\sum_{j=1}^{25} \lambda_j$; 3 — R_т².

Оценка разложения поля геопотенциала в ряд по естественным функциям (поверхность 500 мб)

j	Все случаи (для отклонений от средних по времени)			Все случаи (для отклонений от средних по пространству)			Ст. V (восточный тип)			Лпл I а (меридиональный тип)			Западный перенос (западный тип)		
	m = 111			m = 111			m = 22			m = 22			m = 21		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	971,91	23,0	23,0	8279,41	69,7	69,7	1280,25	39,1	39,1	1201,12	35,2	35,2	999,04	36,9	36,9
2	793,15	18,9	42,0	889,07	7,5	77,4	634,33	19,6	58,4	501,70	14,7	49,8	430,44	15,8	52,8
3	501,62	12,0	54,0	590,25	5,0	82,3	436,81	13,3	71,7	451,38	13,2	63,1	325,75	12,4	64,8
4	380,92	9,1	63,0	476,94	4,0	86,3	207,27	6,3	77,9	292,19	8,6	71,6	195,88	7,2	72,1
5	252,12	6,0	69,0	300,03	2,5	88,9	177,16	5,4	83,4	202,46	5,9	77,6	173,88	6,6	78,7
6	208,31	5,0	74,0	250,58	2,1	91,1	137,34	4,2	87,5	164,86	4,8	82,4	144,37	5,3	84,0
7	181,18	4,3	78,0	167,52	1,4	92,3	90,24	2,8	90,3	133,99	3,9	86,3	93,85	3,5	87,5
8	157,47	3,8	82,0	148,14	1,2	93,6	73,73	2,2	92,6	108,22	3,2	89,5	82,99	3,6	90,6
9	120,26	2,9	85,0	125,15	1,1	95,2	54,83	1,7	94,2	92,32	2,7	92,2	65,94	2,4	93,0
10	110,33	2,7	87,8	107,57	0,9	95,5	48,12	1,5	95,7	75,20	2,2	94,4	44,72	1,6	94,7
11	89,40	2,1	90,0	103,15	0,9	96,4	38,45	1,2	96,9	49,94	1,5	95,8	38,63	1,4	96,1
12	77,96	1,8	91,7	77,68	0,6	97,3	27,26	1,0	97,7	36,34	1,1	96,9	29,76	1,1	97,2
13	65,89	1,6	93,2	57,62	0,5	97,7	22,50	0,7	98,4	29,77	0,9	97,8	23,57	0,9	98,0
14	52,55	1,2	94,4	50,02	0,4	98,0	14,79	0,4	98,8	27,55	0,8	98,6	17,60	0,6	98,7
15	44,29	1,1	95,6	42,60	0,3	98,3	10,88	0,3	99,2	18,83	0,6	99,2	12,84	0,5	99,2
	$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 4192,82$		$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 11844,7$		$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 3281,5$		$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 3415,30$		$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 2706,91$						

Примечание. Усл. обозначения см. в табл. I.

необходимо найти остаточную дисперсию, соответствующую сумме $26-h$ членов, т. е. найти разность

$$\Delta D_h = \left(\sum_{j=1}^{26} \lambda_j - \sum_{j=1}^h \lambda_j \right).$$

Эта разность характеризует ту долю дисперсии, которая не учитывается суммой h членов ряда в разложении.

Остаточная дисперсия ΔD_h , поделенная на сумму всех λ_j $\left(\sum_{j=1}^{26} \lambda_j \right)$, может быть выражена через показатель точности представления полей суммой h членов (R_h^2) [см. (5)].

$$\frac{\Delta D_h}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} = 1 - R_h^2 = \delta_h.$$

Таким образом, чем больше величина ΔD_h , тем больше ошибка δ_h при данной $\sum_j \lambda_j$ в описании полей суммой h членов разложения.

В табл. 3 и 4 даны значения ΔD_h и δ_h для отдельных выборок, причем h меняется от 1 до 10.

Таблица 3

Остаточная дисперсия (дкм²), приходящаяся на сумму h членов разложения (уровень моря)

h	Все случаи (для отклонений от средних по времени)		Ст V (восточный тип)		Лпл 1а (меридиональный тип)		Западный перенос (западный тип)		Группа издней дополнительных к э. с. п.	
	$m = 111$		$m = 22$		$m = 22$		$m = 21$		$m = 46$	
	ΔD_h	δ_h	ΔD_h	δ_h	ΔD_h	δ_h	ΔD_h	δ_h	ΔD_h	δ_h
25	2251	0	1626	0	1935	0	1422	0	2219	0
1	1634	72,8	1022	63,0	1310	67,7	1007	70,8	1648	74,3
2	1265	68,0	719	44,2	937	48,4	720	50,6	1290	58,1
3	948	46,0	473	29,2	670	34,6	504	35,8	955	43,0
4	740	37,0	358	22,0	482	24,9	365	25,7	730	32,9
5	609	31,0	257	15,8	352	18,2	278	19,6	603	27,2
6	499	26,0	196	12,0	300	13,5	218	15,3	480	21,6
7	401	22,0	142	8,7	196	10,1	162	11,3	375	16,9
8	323	18,0	104	6,4	150	7,7	129	9,0	298	16,9
9	263	15,0	80	5,0	117	6,0	100	7,0	228	10,2
10	210	12,2	60	3,7	87	4,4	76	5,3	183	8,2

Из сопоставления соответствующих остаточных дисперсий случаев I и II (см. табл. 4) следует, что представление полей геопотенциала несколькими первыми членами разложения (до пятого включительно) получается более точным при исключении из данных геопотенциала временной средней в каждой точке поля. Например, для $h=4$ остаточная дисперсия в случае I составляет 1545 дкм², в случае II — 1609 дкм². При учете более пяти членов ряда точность описания полей в обоих случаях

Остаточная дисперсия (дкм²), приходящаяся на сумму h членов разложения (поверхность 500 мб)

h	Все случаи (для отклонений от средних по пространству)	Все случаи (для отклонений от средних по времени)		Ст V (восточный тип)		Лпл 1 ^a (меридиональный тип)		Западный перенос (западный тип)	
	$m = 111$	$m = 111$		$m = 22$		$m = 22$		$m = 22$	
	ΔD_h	ΔD_h	δ_h	ΔD_h	δ_h	ΔD_h	δ_h	ΔD_h	δ_h
20	11 845	4193	0	3281	0	3415	0	2707	0
1	3 565	3221	77,0	2001	60,9	2214	64,8	1708	63,1
2	2 676	2428	58,0	1367	41,6	1712	50,2	1278	47,2
3	2 086	1926	46,0	930	28,3	1261	36,9	952	35,2
4	1 609	1545	37,0	723	22,1	969	28,4	756	27,9
5	1 309	1293	31,0	546	16,6	767	22,4	576	21,3
6	1 058	1085	26,0	409	12,5	602	17,6	432	16,0
7	890	904	22,0	319	9,7	468	13,7	338	12,5
8	742	747	18,0	245	7,4	360	10,5	255	9,4
9	617	627	15,0	190	5,8	268	7,8	189	7,0
10	510	517	12,2	142	4,3	193	5,6	144	5,3

становится сравнимой. Однако более ценным следует считать первый способ, позволяющий увеличить значимость нескольких первых естественных составляющих. К тому же среднее временное значение геопотенциала само по себе имеет вполне определенный физический смысл.

Перейдем теперь к анализу результатов разложения, полученных по различным группам материала на двух уровнях.

Как видно из табл. 1 и 2, на первые 10 членов ряда в различных группах материала приходится от 90 до 95% суммарной дисперсии полей на наземном уровне, и 88—96% — на AT_{500} .

Таким образом, барические поля почти полностью можно представить всего лишь 10 из 26 членов ряда разложения по естественным составляющим. Для учета $\frac{2}{3}$ (по 111 случаям) дисперсии полей достаточно взять всего лишь четыре первые члена ряда в разложении. При этом на наземном уровне и на AT_{500} точность представления полей давления (геопотенциала) почти одна и та же. Если же сравнить быстроту сходимости ряда по отдельным группам материала, то здесь выявится больше различий.

В группах отдельных синоптических разновидностей значимость первых естественных составляющих оказывается выше, чем по всему материалу (111 случаям) и в группе из 46 случаев со смешанными разновидностями. Так, например, первые четыре члена на наземном уровне (см. табл. 1) учитывают 74—78% суммарной дисперсии по каждой группе разновидностей, тогда как по всему материалу — 67%; на AT_{500} соответственно 72—87% и 63%. В группе из 46 случаев со смешанными синоптическими разновидностями четыре члена ряда учитывают 67% общей дисперсии (см. табл. 1). Это показывает, что синоптическая типизация дает возможность выделить атмосферные движения, отличающиеся значительной однородностью из всей совокупности наблюдающихся атмосферных движений. Используемый метод разложения полей чувствителен к такого рода разбивке материала по процессам, аналогичным друг другу.

Подобные выводы можно получить также из табл. 3 и 4 при рассмотрении остаточных дисперсий для каждого собственного числа в отдельных разновидностях и по всему материалу. Остаточная дисперсия для четырех членов в группах разновидностей синоптических процессов приблизительно равна остаточной дисперсии для шести и семи членов в группе из 111 случаев. Таким образом, первые четыре слагаемых ряда при использовании естественных функций, полученных по всему материалу, включают и черты выборок однородных синоптических процессов и основную характеристику поля более крупных выборок.

Тот факт, что для каждой разновидности скорость сходимости разложения больше, чем по всему материалу, можно объяснить следующим образом. Метод разложения по естественным ортогональным функциям устраняет линейные связи между отдельными естественными составляющими разложения. В этом смысле сходимость разложения наиболее быстрая. Однако для рассматриваемых разновидностей получилась еще лучшая скорость сходимости. Следовательно, между естественными составляющими (по материалу этих разновидностей) существуют нелинейные связи, которые проявились при разделении материала и сказались на скорости сходимости разложения.

Итак, можно ожидать, что разделение материала по некоторым количественным признакам на группы, характеризующиеся более однородным состоянием атмосферных движений, позволит получить лучшее описание полей. Тогда было бы возможно еще уменьшить число временных функций для характеристики основных черт полей.

Если остановиться на частностях, то можно указать, что из рассматриваемых разновидностей, судя по величине остаточных дисперсий (см. табл. 3 и 4), меньшая ошибка в представлении полей несколькими первыми членами ряда приходится на разновидность Ст V (восточного типа), а также на разновидность «западный перенос». Несколько ниже точность в группе меридионального типа (Лпл 1^а). Так, например, сравним величины ΔD_n , приходящиеся на сумму первых четырех членов ряда в указанных синоптических группах:

1) на наземном уровне 358, 365 и 481 дкм², что составляет 48, 49 и 65% соответствующей остаточной дисперсии по всему материалу (графа 1 табл. 3);

2) на АТ₅₀₀ 723, 756 и 965 дкм², что составляет 47, 49 и 63% остаточной дисперсии по 111 случаям.

Таким образом, в разновидности восточного типа нелинейные связи между составляющими в разложении проявились сильнее, чем по другим разновидностям. И потому для описания, например, наземных полей с точностью до 78% в группе восточной разновидности нужно взять всего лишь четыре слагаемых, тогда как та же точность представления полей в группе из 111 случаев может быть получена 6—7 членами.

Приведем пример представления конкретного поля с помощью естественных составляющих (X_j , рассчитанных по 111 дням).

На рис. 2а дано фактическое поле геопотенциала АТ₅₀₀ от 12 января 1959 г. в отклонениях от временной средней. На рис. 2б, в, г представлены поля, рассчитанные с учетом 2, 4 и 10 членов разложения (1). Из сопоставления рисунков видно, что даже первые два слагаемых улавливают основные черты фактического поля. Поле, восстановленное с учетом четырех слагаемых, почти точно совпадает с исходным, так что поля, построенные с учетом 6, 8 и 10 слагаемых, лишь незначительно уточняют некоторые мелкие особенности поля.

Перейдем к рассмотрению полей полученных естественных ортогональных функций X_j , являющихся функциями координат точек поля.

На рис. 3 и 4 приведены поля первых четырех естественных функций X_j на AT_{500} и на уровне моря (рассчитанные по всему объему материала из 111 случаев), причем для уровня моря представлены поля X_j , полученные по первой и второй сеткам точек.

Следует отметить, что поля естественных функций по первой и второй системам точек весьма похожи между собой для первых четырех функций (рис. 3). В полях функций с порядковыми номерами выше 4 и 5, полученных по первой и второй системам точек (не представлены в статье), появляются более существенные различия, отражающие мелкомасштабные черты поля, соответствующие той или другой используемой системе точек.

Таким образом, наличие двух систем точек позволяет определить, какие из полученных функций более устойчивы и более надежны.

Используем для характеристики надежности функций другой прием, который заключается в следующем.

Исключим из одной и той же системы точек (1) одну точку (20-ю) и найдем разности соответствующих значений X_{ji} в каждой точке сетки, полученные по полной сетке (из 26 точек) X_{ji} и по сетке из 25 точек X_{ji}' . Следует отметить, что наличие 20-й точки в первой системе точек при расчете собственных чисел корреляционной матрицы по всем 111 случаям не приводило к появлению отрицательных значений λ_j .

Таблица 5

Изменения значений естественных составляющих для системы из 26 и 25 точек ($\Delta X_j \cdot 10^{-3}$) по 111 случаям (уровень моря)

Номер точки i	ΔX_1	ΔX_2	ΔX_3	ΔX_4	ΔX_5	ΔX_6	ΔX_7	ΔX_8
1	1	-2	-21	-8	46	395	158	-66
2	0	2	-36	-10	52	-211	-35	-72
3	-1	0	-15	-6	-119	-107	-568	240
4	0	0	2	-2	14	-294	172	-36
5	3	2	6	-1	33	-150	281	21
6	8	8	-5	-9	43	13	-294	-41
7	8	8	-29	-12	53	74	-101	46
8	13	10	2	-5	5	114	34	40
9	10	9	12	-3	-1	-127	81	5
10	0	0	0	0	19	-95	227	24
11	3	3	9	-1	-10	101	69	-24
12	-2	-1	4	-1	-50	-236	-34	-86
13	3	2	13	1	-26	-184	-18	-89
14	6	3	4	1	22	-27	118	12
15	0	-2	-1	4	-6	-83	118	58
16	0	-2	1	5	-29	79	28	55
17	-4	-3	-5	0	-13	-9	247	-86
18	-8	-5	-7	-3	-80	-227	334	-163
19	-6	-3	-6	-2	-62	-253	-75	-68
20	-	-	-	-	-	-	-	-
21	-6	-3	-7	-2	-33	-41	-66	-35
22	-6	-4	-7	-2	-28	22	-129	-32
23	-5	-3	-8	0	14	185	-75	-13
24	-3	-3	-8	-1	1	42	-123	-28
25	-3	-4	-10	0	16	172	-63	-23
26	-1	0	-12	-4	-55	-379	233	-26

В табл. 5 представлены разности $(X_{ji} - X_{ji}') = \Delta X_{ji}$ соответственно по точкам для восьми первых векторов. Данная таблица подтверждает

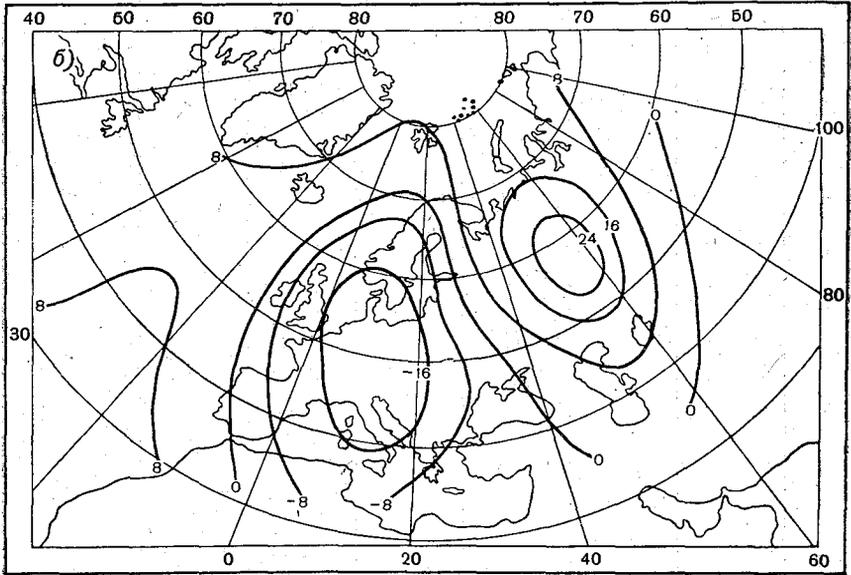
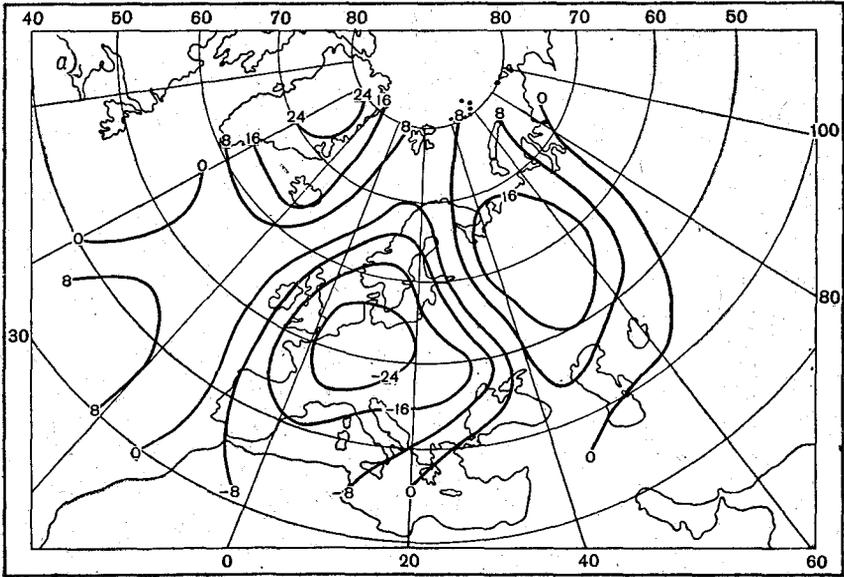
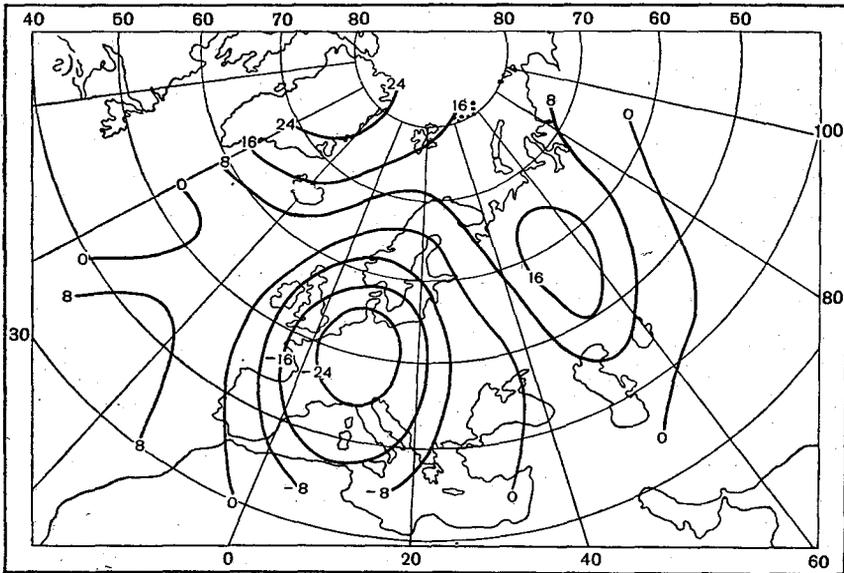
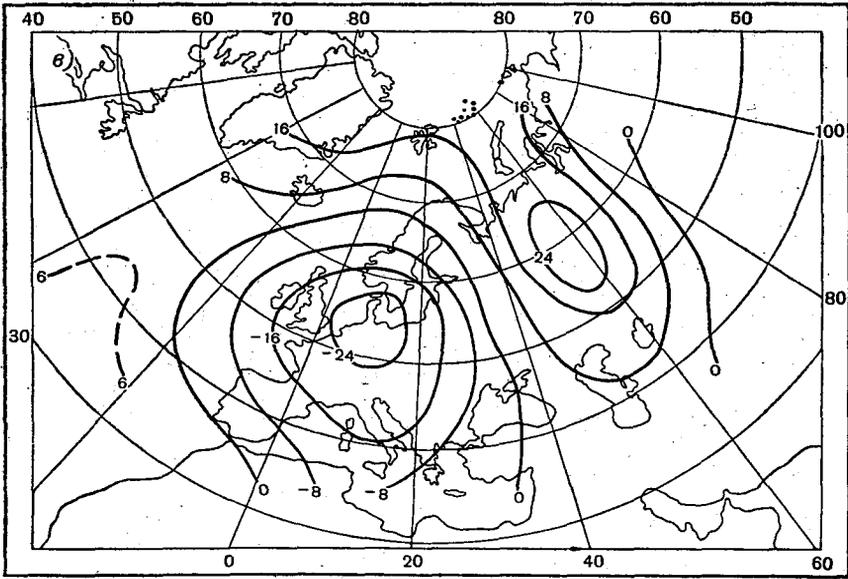


Рис. 2. Поле AT_{500} за 12 января 1959 г.
 а — фактическое поле, б — восстановленное по двум естественным



в отклонениях от временной средней.
 составляющим, *в* — по четырем составляющим, *г* — по десяти.

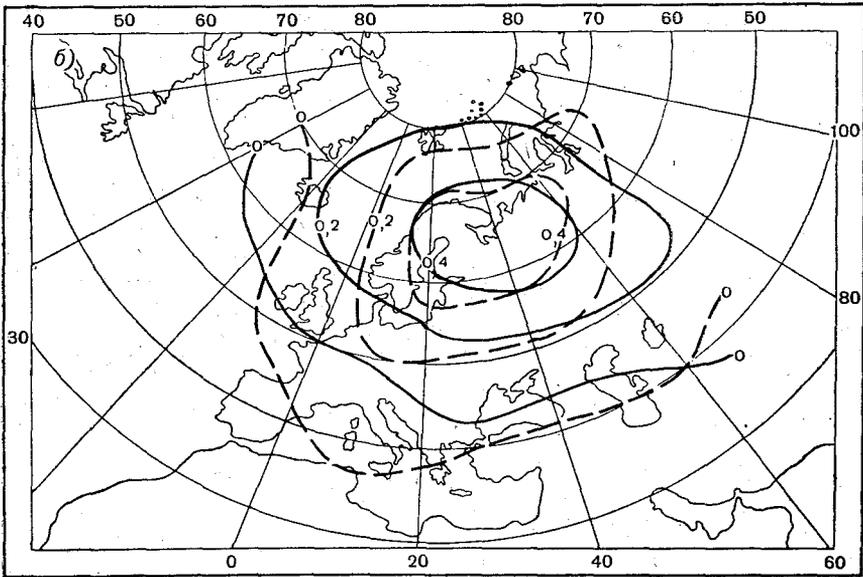
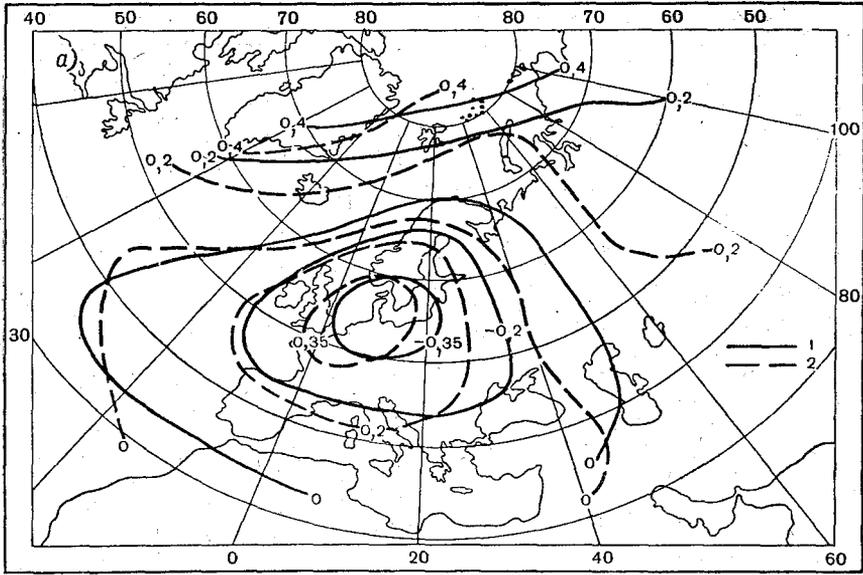
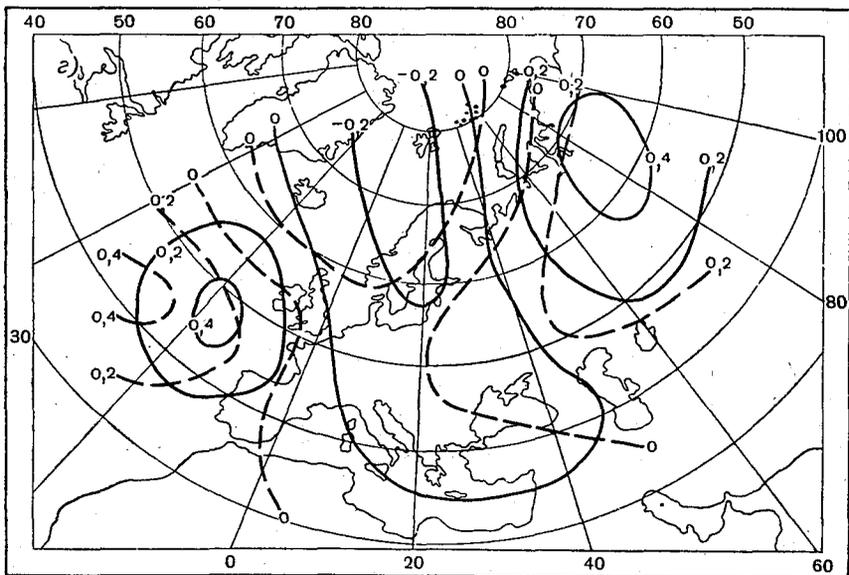
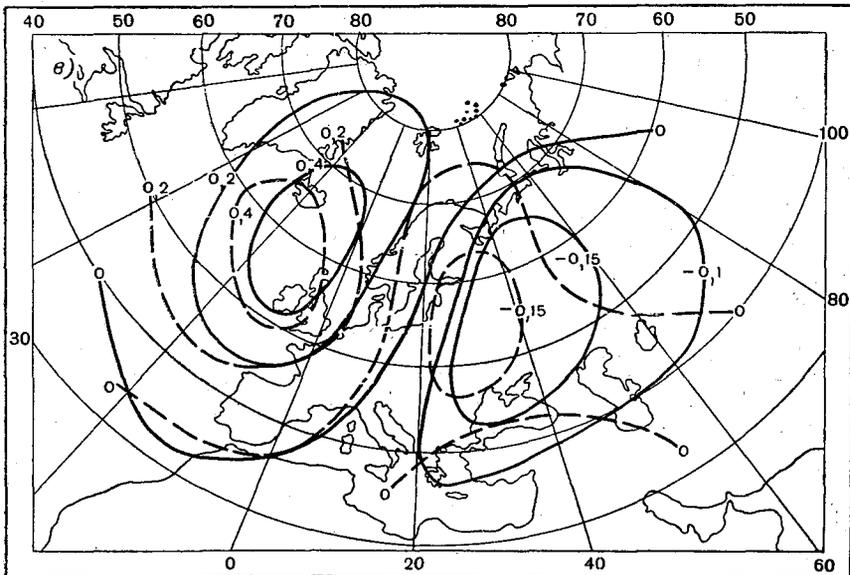


Рис. 3. Естественные функции X_j наземного
a — первая, *б* — вторая, *в* — третья, *г* — четвертая; 1 — рассчитанные по первой



поля давления (для отклонений от временной средней).
 системе точек, 2 — рассчитанные по второй системе точек.

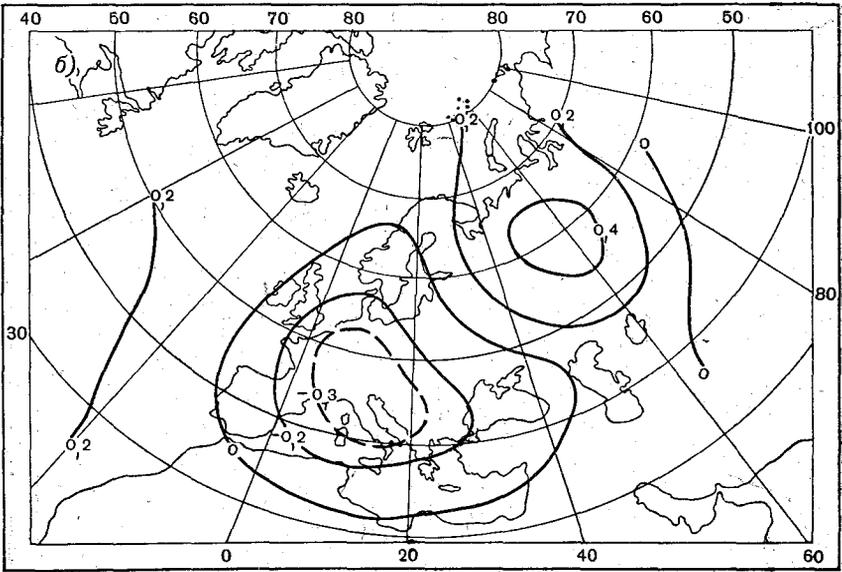
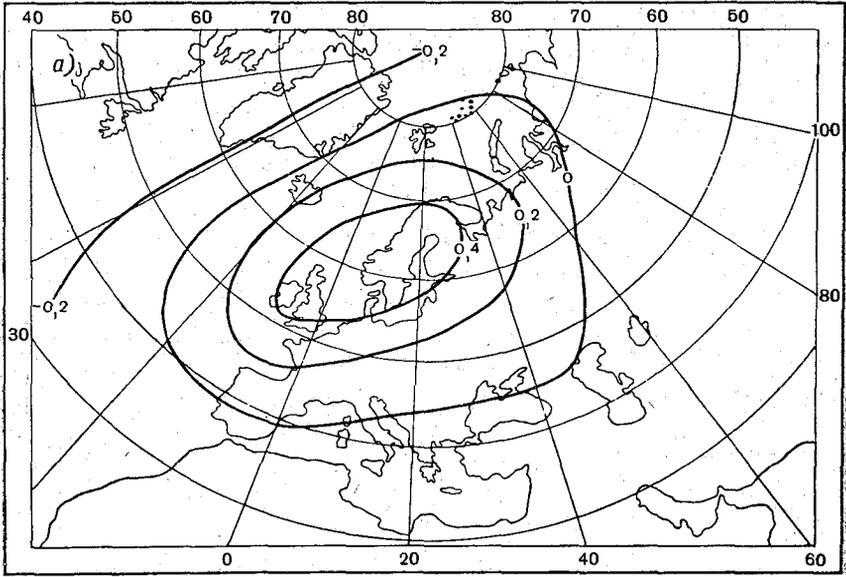
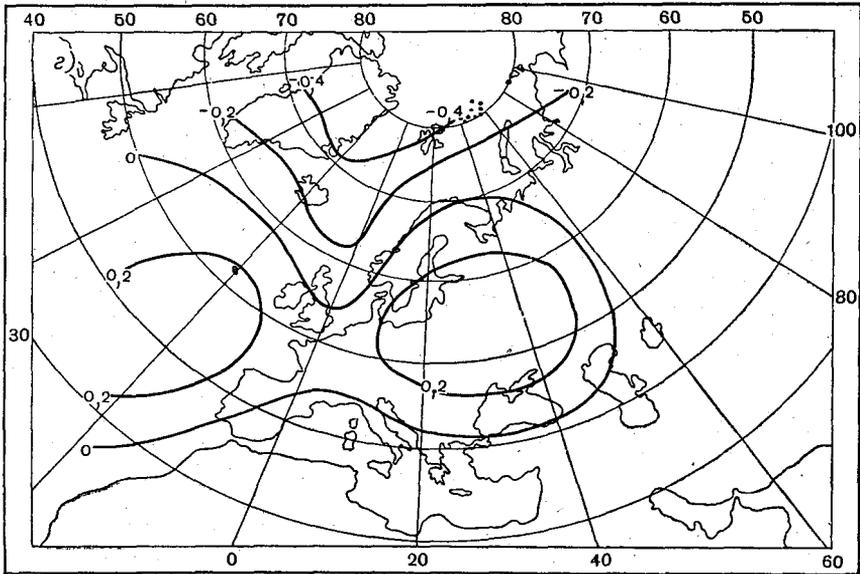
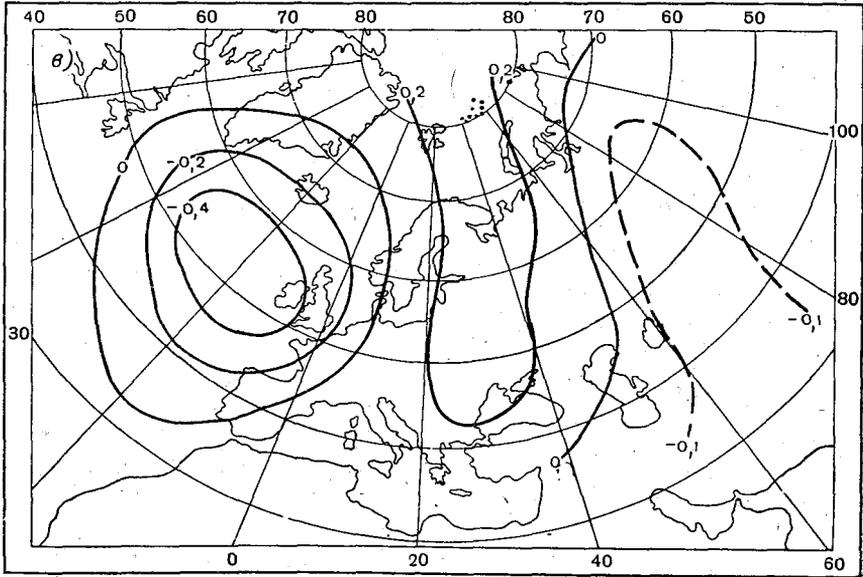


Рис. 4. Естественные функции X_j поля геопотенциала поверхности
Усл. обозначения.



500 мб (для отклонений от временной средней).
см. рис. 3.

вывод о том, что первые четыре естественные функции определены достаточно надежно; различия для четырех первых функций ($j \leq 4$) составляют максимально 0,04 единицы. Вместе с тем для $j \geq 5$ различия между естественными функциями имеют порядок самих значений X_{ji} .

Таким образом, первые естественные функции характеризуют основные крупные черты полей, поэтому они составляют более устойчивую систему функций и слабее реагируют на число и расположение точек поля (при данном числе точек). При этом для их надежного определения достаточно использовать данные по одной системе точек. Менее значимые естественные функции, характеризуя мелкомасштабные черты поля, сильнее реагируют на число и расположение точек поля; поэтому для более правильного их описания, если это необходимо, следует использовать более густую сетку точек. В частности, для этой цели можно воспользоваться приемом, который применен в работе Уайта и др. [7]: рассчитать новую корреляционную матрицу, например 20-го порядка, по первым 10 естественным временным функциям, полученным по первой и второй системам точек. Затем эту матрицу использовать для расчета новых естественных функций X_j , которые будут заключать в себе основную долю информации полей уже по 52 точкам.

Остановимся коротко на описании полей естественных функций X_j с различными порядковыми номерами j , полученных по одной и той же системе точек на двух уровнях.

Предварительно следует обратить внимание на то, что каждая естественная функция X_j определяется с точностью до знака, поэтому не следует придавать особого значения знаку величин X_j , представленных в виде изолиний на полях (рис. 3, 4).

На уровне моря в поле функции X_1 (рис. 3а) основную часть территорий от 70 до 30° с. ш. занимает обширный вихрь; на севере территории проявляется весьма заметное влияние арктических районов, где намечается второй, противоположный по знаку центр. В связи с этим можно отметить наличие четко выраженного градиента, направленного по меридиану приблизительно по 10° в. д. в диапазоне широт от 80 до 55° с. ш. Только в этом диапазоне широт можно говорить о зональности поля.

Для $j=2$ поле естественной функции у земли (см. рис. 3б) представлено на рассматриваемой территории в основном половиной волны: один обширный вихрь с центром, смещенным на северо-восток по отношению к центру вихря в поле X_1 .

В полях естественных функций с порядковым номером $j \geq 3$ отчетливо проявляется несколько вихрей более мелкого масштаба по сравнению с масштабами вихрей в полях первых двух естественных функций.

Поля X_3 и X_4 характеризуются хорошо выраженной меридиональностью поля. Поле X_3 заманчиво было бы сопоставить с полями сейш, полученных В. В. Шулейкиным [6] для муссонных явлений, когда отчетливо проявляется различие влияний моря и суши на циркуляцию атмосферы. Тогда можно было бы придать вполне определенный физический смысл полю X_3 . Однако только дальнейший анализ покажет, насколько правомерна такая интерпретация полей.

В поле X_3 на рассматриваемой территории укладывается примерно целая волна, а в поле X_4 — приблизительно полторы волны, что отражает уменьшение масштаба циркуляции.

На уровне 500 мб отдельные поля естественных функций подобны полям на уровне моря. Например, поля X_j на наземном уровне для $j=2, 3, 4$ напоминают поля X_j на уровне 500 мб соответственно для $j=1, 2, 3$.

На рис. 5 представлено поле первой естественной функции X_1 на AT_{500} , рассчитанное при исключении из исходных данных средней величины геопотенциала по пространству. Это поле типично зональное и соответствует полю норм геопотенциала AT_{500} (рис. 6). Поля естественных функций из этой же серии, но с большими порядковыми номерами ($j > 1$) сходны с уже рассмотренными полями на уровне 500 мб (рис. 4), полученными для отклонений от временных средних.

Более полную физическую трактовку полей естественных функций можно будет сделать только после анализа полей естественных функций на всем северном полушарии.

Анализ полей естественных функций позволяет также ответить на вопрос о том, какие станции и районы рассматриваемой территории дают больший вклад в информацию о поле давления (геопотенциала) при использовании метода естественных составляющих. Из условия нор-

мировки следует, что $\sum_{i=1}^{25} X_{ji}^2 = 1$. Учитывая, что первые четыре слагаемых представляют поля давления (геопотенциала) с точностью до 75—80%, вес каждой точки поля определим как сумму квадратов первых четырех естественных составляющих X_{ji} в каждой точке поля: $\sum_{i=1}^4 X_{ji}^2$,

i — номер точки, j — номер вектора.

На рис. 7 а для примера представлено поле весов точек для AT_{500} (для уровня моря поле весов точек имеет много общего с полем весов для AT_{500}). Из рис. 7 а следует, что точки поля с наименьшими весами располагаются в основном в южных районах территории, а область с наибольшими вкладами — в центральной части территории (Скандинавия, Англия). Сравнивая карты весов точек с картой дисперсии (по 111 случаям) давления (рис. 7 б), убеждаемся в их почти полном совпадении. Таким образом, веса точек получают вполне разумное обоснование. Районы с большой изменчивостью давления поставляют и наиболее ценную информацию о поле, и наоборот. Таким образом, при рассмотрении поля геопотенциала в южных районах, поставляющих малосущественную информацию в совокупность метеорологических полей, можно без особого ущерба свести число точек к минимуму. Однако для поля ветра такие выводы могут оказаться недействительными, так как скорость геострофического ветра пропорциональна $\frac{1}{\sin \varphi}$, где φ — широта места.

§ 4. Анализ параметров разложения временных функций $T_j(t)$

Согласно формуле (4), серия данных давления (геопотенциала) каждого индивидуального поля трансформируется с помощью естественных функций X_j в новые переменные — временные функции $T_j(t)$. Как следует из § 3, для описания 65—80% дисперсии барического поля достаточно использовать всего лишь первые четыре слагаемых в разложении и, следовательно, столько же T_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Таким образом, вместо значений в 26 точках (давления или геопотенциала) анализ поля можно произвести с помощью только четырех параметров.

Выясним, имеется ли возможность использования временных функций для решения вопроса о создании объективной типизации

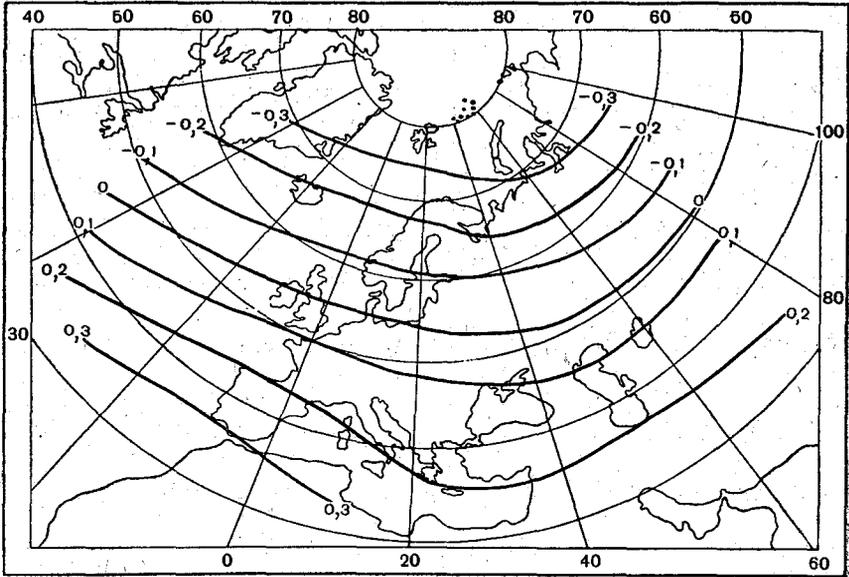


Рис. 5. Первая естественная функция X_1 поля геопотенциала поверхности 500 мб (для отклонений от пространственной средней).

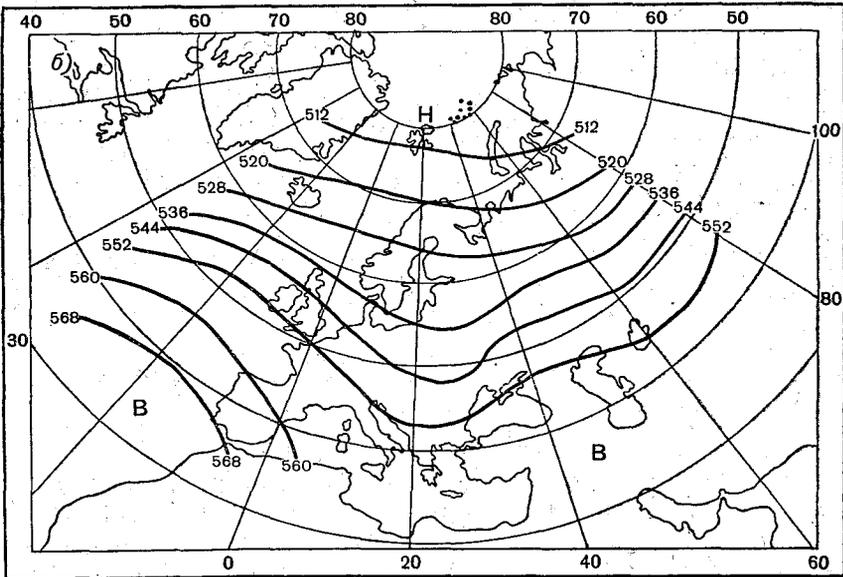


Рис. 6. Карта норм геопотенциала поверхности 500 мб (по 111 случаям).

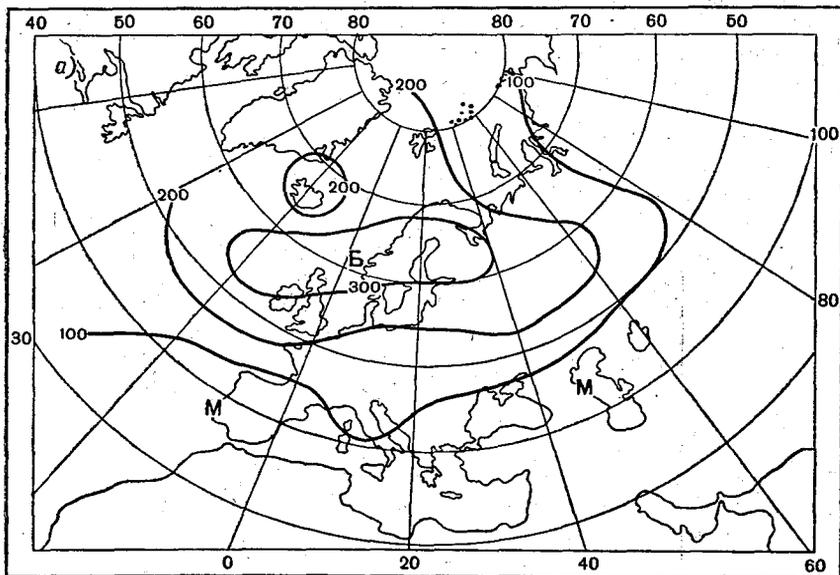


Рис. 7а. Карта весов точек для AT_{500} .

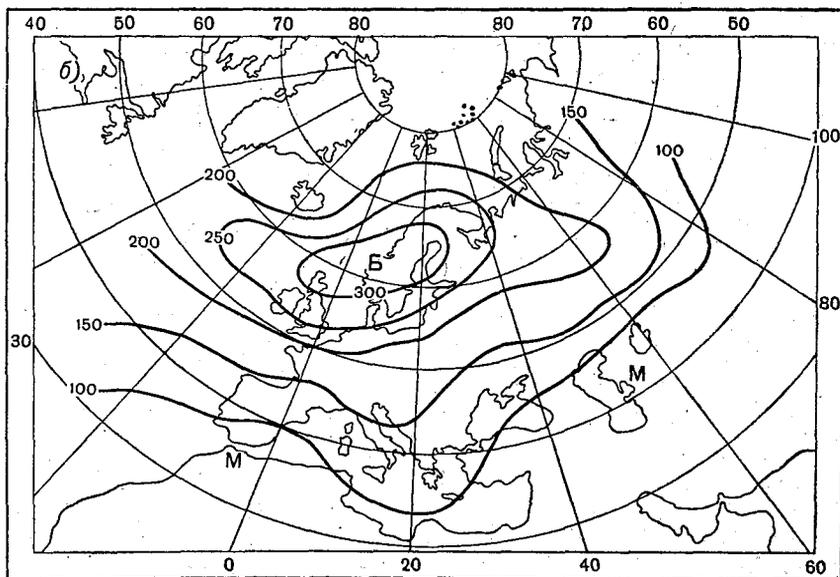


Рис. 7б. Карта изменчивости геопотенциала AT_{500} по основной выборке.

синоптических процессов. С этой точки зрения проанализируем рис. 8 и 9. На рис. 8 даны кривые распределения T_j ($j=1, 2, 3, 4$), построенные по материалу трех разновидностей синоптических процессов, а на рис. 9 — распределение различных случаев по T_1 и T_2 .

Весьма наглядными представляются кривые распределения T_j по данным, соответствующим трем разновидностям синоптических процессов.¹

На рис. 8 отчетливо видно различие кривых распределения значений первой и второй естественных временных функций для указанных разновидностей. В частности, кривая распределения по T_1 для меридиональной разновидности (Лпл. 1^а) заметно сместилась в сторону отрицательных значений $T_1(t)$ (от -70 до $+5$ дкм). Тогда как две другие

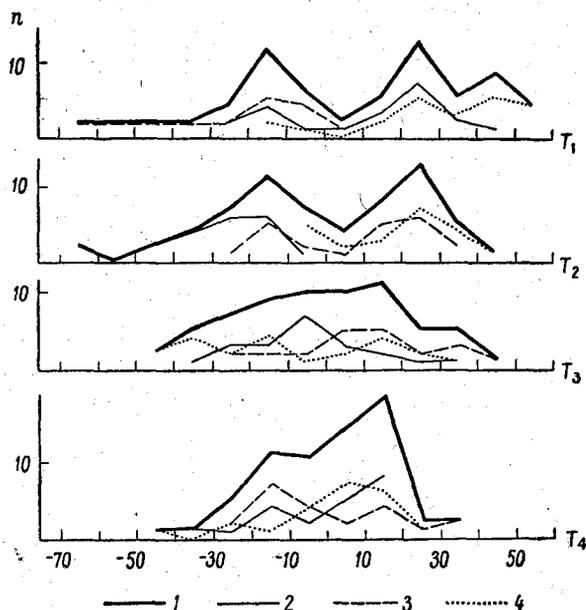


Рис. 8. Кривые распределения естественных функций времени в зависимости от синоптических разновидностей процессов.

T_1 — первая, T_2 — вторая, T_3 — третья, T_4 — четвертая естественные функции времени. 1 — общая кривая распределения; кривые распределения для разновидностей. 2 — «западный перенос», 3 — Лпл 1^а, 4 — Ст V.

кривые распределения, отвечающие выборкам с разновидностями «западный перенос» и Ст V (восточного типа) находятся почти в одном и том же диапазоне значений T_1 : от -15 до $+55$ дкм и от -25 до $+45$ дкм. Тем самым выборка Лпл 1^а может быть выделена по значениям T_1 .

Среди кривых распределения T_2 обращает на себя внимание кривая для разновидности «западный перенос». Ей соответствует диапазон значений T_2 от -65 дкм до 0. В двух других случаях диапазоны значений следующие: E V от 0 до $+45$ дкм, Лпл 1^а от -25 дкм до $+35$ дкм.

Таким образом, применения только одной из временных функций для разделения материала на группы, видимо, недостаточно. Использование же двух функций $T_1(t)$ и $T_2(t)$ одновременно позволит выделить с достаточной определенностью группы случаев, соответствующие в данном примере трем разновидностям синоптических процессов.

¹ При расчете T_j использовались X_{ji} , полученные по данным 111 случаев.

Кривые распределения по T_3 и T_4 имеют меньше различий в зависимости от выборок. Во всяком случае диапазоны значений T_3 и T_4 в отдельных выборках перекрываются почти полностью. Однако не исключено, что можно внести некоторые уточнения в типизацию за счет учета частоты повторений отдельных значений T_3 (или T_4). Например, по T_4 в частоте повторения случаев разновидности Лпл 1* выделяются два

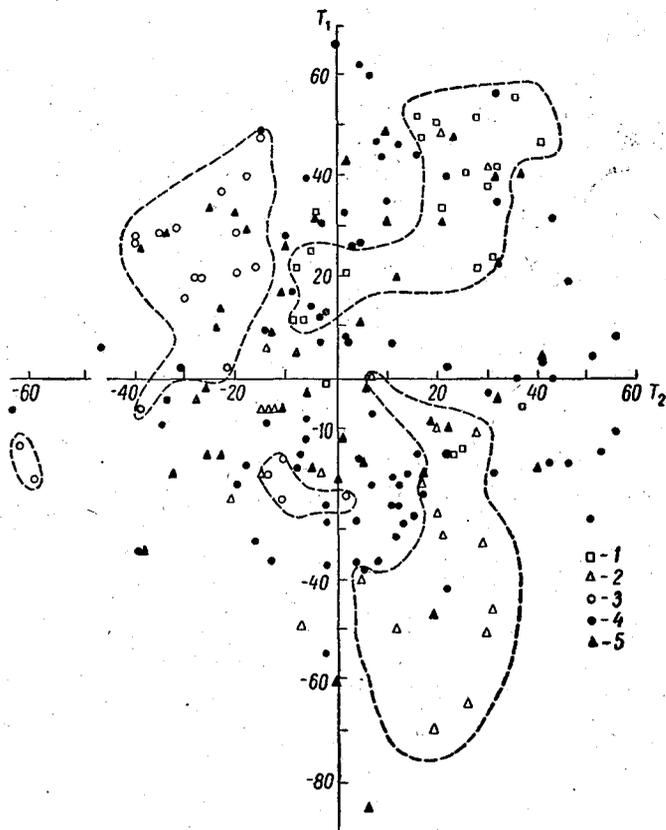


Рис. 9. Распределение случаев в зависимости от значений первой и второй естественных функций времени.

1 — точки, соответствующие случаям разновидности Ст V, 2 — Лпл 1а, 3 — «западный перенос», 4 — точки, соответствующие случаям из непрерывного периода и 5 — случаям, дополнительным к э. с. п.

максимума (один в области отрицательных значений T_4 , другой в области положительных T_4).

В связи с описанным выше характером кривых распределения по выборкам легко понять и характер кривой распределения по 65 случаям, включающим все три разновидности (общая кривая распределения) как объединение отдельных однотипных кривых распределений с различными диапазонами T_j , значительно смещенными относительно друг друга.

Общая кривая распределения по T_1 и T_2 характеризуется большой величиной дисперсии; для функции $T_j(t)$ с порядковым номером $j > 2$ изменчивость уменьшается, и кривые распределения приближаются к одновершинным.

Возможность использования первых двух временных функций для характеристики синоптических процессов можно подтвердить также с помощью рис. 9. На этом графике по осям отложены T_1 и T_2 , а точками представлены все возможные случаи, отнесенные к самым различным разновидностям синоптических процессов.

Для построения рис. 9 использовано около 180 случаев: 65 дней рассмотренных трех разновидностей, 76 дней по двум периодам (с 6 декабря 1956 г. по 24 января 1957 г. и с 15 декабря 1958 г. по 15 февраля 1959 г.) и 46 дней, дополнительных к э. с. п.

Во-первых, следует обратить внимание на то, что значительное увеличение числа случаев (по сравнению с тем, что было использовано для построения кривых распределения рис. 8) не изменило диапазоны значений T_1 и T_2 . Следовательно, выборка из 65 случаев и потому и основная выборка (из 111 дней) достаточны для характеристики всех возможных значений T_j . Во-вторых, из всех точек на рис. 9 можно выделить области точек, соответствующие следующим выборкам: с разновидностью Ст V — область вверху справа на графике, с разновидностью «западный перенос» — область точек вверху слева и с разновидностью Лпл 1^а — область в нижней части графика ближе к центру.

Рисунки 8 и 9 построены по данным на уровне моря, однако в общем аналогичные выводы получаются и для АТ₅₀₀.

Таким образом, из проведенного анализа следует, что первые временные функции T_j (j от 2 до 4) могут быть действительно использованы для построения объективной типизации и нахождения аналогов.

Вместе с тем можно отметить, что в группы рассматриваемых разновидностей вошли случаи с достаточно однородными синоптическими процессами, которые отражают наиболее существенные черты барических полей. Это и позволяет найти для них общие количественные параметры.

Представляет определенный интерес вопрос, насколько аналогичен ход функций T_j по времени для сходных полей векторов X_j .

В § 3 отмечалось сходство следующих полей:

Уровень 500 мб	$X_1 X_2 X_3$
Земля	$X_2 X_3 X_4$

Для указанных пар полей сопоставлены за период с 6 декабря 1956 г. по 24 января 1957 г. соответствующие им временные функции T_j (рис. 10).

Из рис. 10 следует, что сходным полям X_j соответствуют и весьма сходные между собой кривые временного хода функций $T_j(t)$, причем, чем лучше сходство полей X_j , тем больше подобия в ходе $T_j(t)$.

Это соответствие выражает в явном виде известное свойство квазибаротропности атмосферы, которое широко используется при численном прогнозе поля АТ₅₀₀.

Более детальный анализ по выявлению соответствия различных естественных функций X_j на уровне моря и изобарическом уровне АТ₅₀₀ следует провести с использованием рассчитанных значений косинусов углов между рассматриваемыми собственными векторами. Такой анализ позволит определить количественные характеристики степени сходства и различия между естественными функциями различных уровней и может быть полезным для численного гидродинамического прогноза погоды.

Выполненные расчеты и сопоставления показывают, что применение метода разложения барического поля по естественным составляющим дает возможность описывать основные черты синоптической ситуации

при помощи небольшого числа количественных характеристик. Это позволяет использовать параметры разложения поля по естественным составляющим для построения объективной типизации синоптических процессов, а также обобщения и уточнения других синоптико-статистических методов, применяемых для целей долгосрочного прогноза погоды.

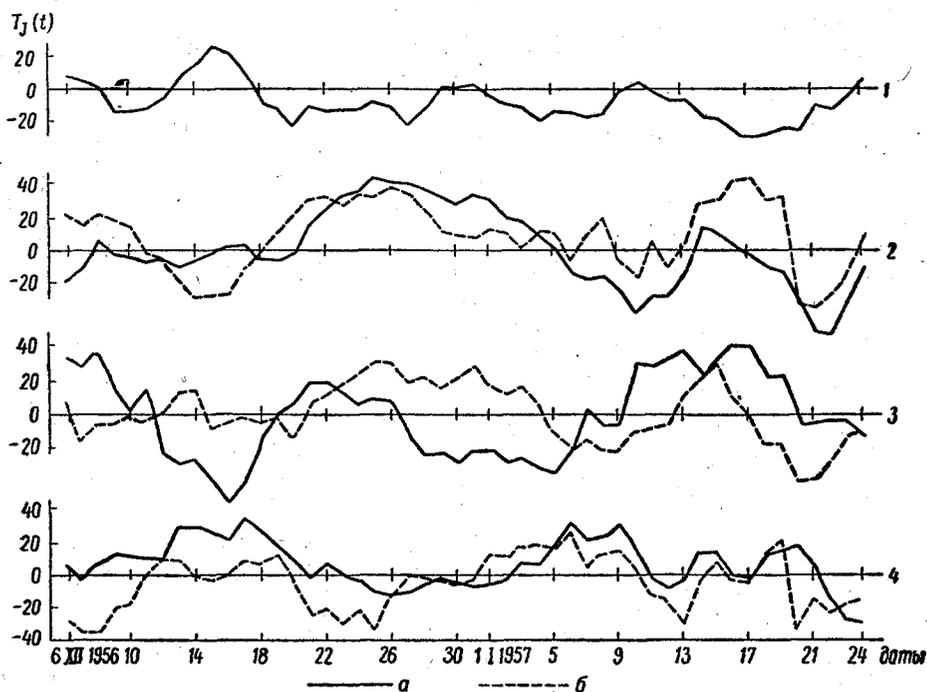


Рис. 10. Ход естественных функций $T_j(t)$ за период с 6 декабря 1959 г. по 24 января 1957 г.

Первая (1а), вторая (2а), третья (3а) и четвертая (4а) естественные функции, рассчитанные по наземному полю давления; первая (2б), вторая (3б) и третья (4б) естественные функции, рассчитанные по полю геопотенциала поверхности 500 мб.

В ближайшее время предполагается уточнить полученные выводы на большем исходном материале, охватывающем все основные разновидности атмосферных процессов примерно в естественной пропорции, а затем распространить анализ на северное полушарие.

При постановке данного исследования и обобщении материалов расчета авторы систематически пользовались консультациями и советами М. И. Юдина. Значительная часть расчетов на ЭВМ выполнена М. А. Красносельской.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров Н. А. Аналитическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляющих. Тр. ЦИП, вып. 74, 1959.
2. Багров Н. А. Аналитическое представление полей. Тр. ЦИП, вып. 64, 1958.
3. Гирс А. А. Основы долгосрочных прогнозов погоды. Гидрометеиздат, Л., 1959.

4. Обухов А. М. О статистических ортогональных разложениях эмпирических функций. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1960.
5. Фадеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. Гостехиздат, М., 1956.
6. Шулейкин В. В. Физика моря. Изд. АН СССР, М. 1953.
7. White R. M., Cooley D. S., Derby R. C. and Seaver F. A. The development of efficient linear operators for the prediction of sea-level pressure. J. Met., v. 15, No 5, 1958.
8. White R. M., Derby R. C., Cooley D. S. and Seaver F. A. Hemispherical prediction by statistical techniques. J. Met., v. 14, No 5, 1957.
9. Fukuoka A. A. A study of 10-day forecast. Geoph. Mag., No 3, 1951.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ АНОМАЛИЯМИ НЕКОТОРЫХ ПОГОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

Устанавливаются статистические связи между аномалиями радиационных потоков, облачности, ледовитости, снежного покрова и характеристиками будущей погоды.

В настоящее время общепризнанно, что решение проблемы долгосрочных прогнозов погоды тесным образом связано с изучением общей циркуляции атмосферы.

Для оценки атмосферной циркуляции вводят различные количественные критерии, которые используются в долгосрочных прогнозах погоды. Большинство авторов учитывают зональный индекс циркуляции.

В последнее время выявилась необходимость учета незональных составляющих циркуляции, что привело к установлению, помимо зональных индексов, также меридиональных.

М. И. Юдин и А. А. Рождественский предложили ввести в рассмотрение своеобразный индекс, характеризующий тепловые различия между океанами и материками и назвали его «меридиональным». В данном случае термин «меридиональный» применяется в том смысле, что он характеризует динамические и термические различия на разных меридианах.

Так как состояние подстилающей поверхности отражается на интенсивности барических образований, то для суждения о тепловых различиях между океанами и материками необходимо было определить разность между средним давлением на площади, занятой материками и океанами в отдельности.

Все перечисленные выше индексы применяются в настоящее время в долгосрочных прогнозах погоды. Однако для успешного развития долгосрочных прогнозов совершенно недостаточно учитывать только циркуляционные факторы, необходимо учитывать процессы тепло- и влагообмена, тесно связанные с состоянием подстилающей поверхности.

Для прогноза крайне важно учесть такие факторы, как облачность, радиационные потоки, распределение снежного покрова и ледовитость. В настоящее время накоплен обширный материал наблюдений, который позволил построить средние многолетние карты указанных характеристик. В нашу же задачу входило отыскание способов количественных характеристик аномалии облачности, снежного покрова, ледовитости и

радиационных потоков. Для этой цели была разработана методика и построены среднедекадные карты облачности, снежного покрова и радиационного баланса отдельных месяцев для территории СССР [7]. Ледовитость северных морей находится в тесной зависимости от тепловых и динамических процессов, происходящих в атмосфере и гидросфере. Как показали исследования В. Ю. Визе [6], ледовитость северных морей оказывает существенное влияние на температуру Северной и Средней Европы. Ясно, что северные моря могут быть в одно и то же время года покрыты льдами в различной степени.

С декадных карт ледовитости по четырехугольной сетке была снята ледовитость северных морей. Делалось это следующим образом.

В каждой точке сетки определялась в баллах от 0 до 10 ледовитость и затем путем суммирования общего числа баллов и деления на число точек получалось среднее значение. Как показали вычисления, среднедекадная величина ледовитости существенно меняется.

Мы также попытались оценить влияние ледовитости северных морей на температуру на ЕТС. Полученные величины ледовитости коррелировались с температурой на ЕТС. Было выбрано две точки на ЕТС. Коэффициенты корреляции вычислялись для синхронных значений, а также со сдвигом на одну и две декады, так что значения температуры брались для более поздней декады. Результаты расчетов представлены в табл. 1. Как видно из таблицы, наибольшие коэффициенты корреляции получались для асинхронных значений, причем, как правило, для значений со сдвигом на 1 декаду.

Таблица 1

Коэффициенты корреляции ледовитость — температура

	Август			Сентябрь			Октябрь		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Синхронные	-0,32	-0,48	-0,36	-0,56	-0,48	-0,43	-0,39	—	—
Со сдвигом на декаду	-0,52	-0,55	-0,65	-0,72	-0,60	-0,88	-0,53	—	—
Со сдвигом на две декады	-0,44	-0,36	-0,12	-0,28	-0,20	-0,45	-0,42	—	—

	Август			Сентябрь			Октябрь		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Синхронные	-0,38	-0,31	-0,27	-0,32	-0,37	-0,45	-0,30	-0,30	—
Со сдвигом на декаду	-0,72	-0,53	-0,59	-0,38	-0,55	-0,64	-0,49	-0,41	—
Со сдвигом на две декады	-0,43	-0,39	-0,38	-0,69	-0,49	-0,35	-0,29	-0,28	—

Для того чтобы иметь возможность учесть влияние снежного покрова при статистическом прогнозе, были построены декадные карты распределения снежного покрова за девять лет (1949—1957 гг.). Для построения карт снежного покрова было отобрано около 300 станций, расположенных на территории СССР. По этим картам за октябрь,

ноябрь и декабрь было подсчитано число дней с наличием снежного покрова в каждой из декад. Затем данные по каждой из отобранных станций были нанесены на бланки, т. е. построены карты числа дней с наличием снежного покрова для каждой декады октября, ноября и декабря. На картах проведены изолинии, показывающие число дней со снегом в данной декаде. При этом изолиния 0 ограничивает территорию, свободную от снежного покрова, изолиния 10 является границей устойчивого снежного покрова. Территория, заключенная между изолиниями 0 и 10 дней со снегом, представляет собой зону неустойчивого снежного покрова. Построенные карты достаточно наглядно показывают последовательное перемещение границы устойчивого снежного покрова (изолиния 10 дней со снегом).

Для корреляции снежного покрова с температурой брались значения температуры в узлах прогностической сетки и широта точки пересечения меридиана прогностической точки с изолинией 5 дней со снегом.

Второй этап работы состоял в установлении статистических связей. Мы попытались учесть одновременно и циркуляционные факторы, и характеристики тепло- и влагообмена.

В нашей работе для характеристики интенсивности атмосферной циркуляции над ограниченной территорией была использована циркуляция скорости по замкнутому контуру. Циркуляция скорости вычислялась по декадным картам давления, построенным в отделе динамической метеорологии Главной геофизической обсерватории. В качестве исследуемого периода были избраны осенние месяцы — сентябрь, октябрь, ноябрь 1948—1957 гг.

Приведем формулы для вычисления зональной и меридиональной составляющих циркуляции скорости:

$$\Gamma_{\text{зон}} = \int_{i, j-m}^{i, j+m} v_{\psi ij} \sin \theta_i d\psi,$$

$$\Gamma_{\text{мер}} = \int_{i-p, j}^{i+p, j} v_{\theta ij} a_0 d\theta,$$

где $v_{\psi ij}$, $v_{\theta ij}$ — меридиональная и зональная составляющие скорости геострофического ветра в узлах сетки; i, j — номера узлов сети точек.

Подставляя значения составляющих скорости ветра через поле давления и заменяя интегралы суммами, получим:

$$\Gamma_{\text{зон}} = \frac{\text{tg } \theta_i \Delta\psi}{4\omega\rho_0 \Delta\theta} \left[\sum_{i=j-m}^{j+m} P_{i+1, k} - \sum_{k=j-m}^{j+m} P_{i-1, k} \right],$$

$$\Gamma_{\text{мер}} = \frac{\Delta\theta}{4\omega\rho \Delta\psi} \left[\sum_{k=i-p}^{i+p} \frac{P_{k, j+1}}{\cos \theta_k \sin \theta_k} - \sum_{k=i-p}^{i+p} \frac{P_{k, j-1}}{\cos \theta_k \sin \theta_k} \right],$$

где p — значение давления в узлах сетки.

Циркуляция скорости вычислялась для двух контуров J_1 и J_2 , состоящих из двух параллелей и двух меридианов. В контуре J_1 зональные составляющие скорости вычислялись для 50 и 60° с. ш., а меридиональные составляющие — для 30 и 50° в. д. В контуре J_2 зональные составляющие скорости определялись для 68 и 78° с. ш., меридиональные составляющие — для 30 и 50° в. д. Далее вычислялась циркуляция ско-

рости для контура, состоящего из двух широтных кругов и двух отрезков меридианов.

Величина циркуляции скорости по замкнутому контуру является весьма удобной характеристикой общей циркуляции атмосферы, так как позволяет учитывать одновременно зональные и меридиональные составляющие циркуляции.

Рассмотрим возможность статистического прогноза при помощи линейного уравнения множественной регрессии, заключающейся в том, что прогнозируемое значение некоторого метеорологического элемента в будущем ищется в виде линейной комбинации известных значений некоторых других элементов в настоящем. В качестве «предсказываемого» мы предполагаем рассматривать температуру и осадки, в качестве «предсказателей» — циркуляционные факторы и характеристики тепло- и влагообмена. Из циркуляционных факторов учтем величины циркуляции скорости по замкнутому контуру J_1 и J_2 , а также меридиональный и зональный индексы.

Значения зонального индекса заимствованы нами из работы [4]. Нами использовались значения зонального индекса для поверхности 700 мб, так как индекс циркуляции на уровне 700 мб может характеризовать в среднем интенсивность циркуляции в нижней половине тропосферы. Среднедекадные величины меридионального индекса были вычислены по методике, предложенной М. И. Юдиным и А. А. Рождественским. Из характеристик тепло- и влагообмена рассматривались облачность, радиационный баланс, снежный покров и ледовитость.

Далее рассчитывались коэффициенты множественной корреляции. Коэффициенты корреляции вычислялись для синхронных значений, а также со сдвигом на одну декаду для значений температуры и осадков. Все расчеты проведены для двух пунктов на территории ЕТС (табл. 2 и 3).

Из анализа таблиц можно сделать вывод, что сравнительно устойчивую связь дают следующие пары величин: температура — J_1 , температура — снежный покров, температура — меридиональный индекс, температура — ледовитость, температура — облачность, температура — радиационный баланс, температура — зональный индекс, осадки — облачность, осадки — зональный индекс, осадки — J_1 .

Используя методы выборочной статистики, можно сказать, что для прогноза температуры следует учитывать семь предсказателей: снежный покров, ледовитость, меридиональный индекс, зональный индекс, циркуляцию скорости J_1 , облачность, радиационный баланс; для прогноза осадков — три предсказателя: облачность, зональный индекс, циркуляция скорости J_1 .

Следует отметить, что введенный нами индекс J_1 дает наилучшие связи как с температурой, так и с осадками. Связи же с индексом J_2 получились весьма слабыми. Это и естественно, так как оба пункта, рассмотренные нами, лежат внутри контура J_1 .

Полученные результаты весьма наглядно иллюстрируют существенную роль местных циркуляционных особенностей в формировании полей температуры и осадков.

Помимо рассмотренных коэффициентов корреляции для отдельных лет, были построены суммарные коэффициенты корреляции по пяти годам. Результаты расчетов представлены в табл. 4 и 5. Хорошие связи получились в основном для тех же предсказателей, что и для отдельных лет. Это подтверждает правильность выбранных предсказателей.

При выполнении данной работы авторы систематически пользовались консультациями М. И. Юдина.

Синхронные коэффициенты корреляции

Год	I-II	I-M	I-3	Ч-Т	I-r	II-M	II-3	II-T	II-r	M-3	M-T	M-r	3-T	3-r	T-r	O-I
1949	0,17	0,61	-0,28	-0,69	-0,26	-0,12	-0,52	0,54	0,54	0,55	-0,69	-0,07	0,05	0,53	-0,37	0,42
1950	0,08	0,42	-0,58	-0,36	-0,58	-0,25	0,16	0,10	-0,15	0,44	-0,32	-0,29	0,04	0,35	-0,41	0,33
1951	0,03	-0,20	-0,83	-0,52	-0,79	-0,41	0,16	-0,48	0,24	0,11	-0,46	0,22	0,06	0,84	0,37	0,26
1952	0,06	0,36	-0,41	-0,67	-0,05	-0,23	-0,77	0,20	-0,58	0,41	-0,35	-0,11	-0,26	0,48	-0,23	0,25
1953	0,23	0,43	-0,63	-0,57	-0,44	-0,06	0,23	-0,35	0,25	-0,43	-0,54	-0,14	-0,26	0,56	0,32	0,48
1954	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1955	0,27	0,34	-0,59	-0,53	-0,49	-0,14	-0,08	0,42	0,24	0,26	-0,53	0,16	0,32	0,49	0,19	0,24
1956	0,09	0,26	-0,71	-0,69	-0,54	-0,09	0,07	0,12	0,12	0,19	-0,48	0,09	0,43	0,61	-0,06	0,43
1957	0,14	0,17	-0,48	-0,72	-0,21	-0,26	0,35	0,03	-0,34	0,12	-0,61	-0,42	0,14	0,39	-0,29	0,49

Год	O-II	O-M	O-3	O-T	O-r	R-I	*R-II	R-M	R-3	R-T	C-T	R-r	Л-T	Л-r	II-JI	M-JI
1949	0,02	0,32	-0,56	0,52	0,65	0,22	0,06	0,14	0,05	0,56	0,79	0,21	-0,48	0,19	0,42	0,19
1950	0,36	-0,08	-0,11	0,18	0,77	0,10	-0,14	0,12	0,21	0,42	0,72	0,09	0,17	0,07	0,53	0,26
1951	-0,39	0,27	-0,68	0,31	0,41	0,36	0,09	0,16	-0,32	0,61	0,66	0,31	-0,60	-0,26	0,29	0,18
1952	0,21	-0,44	0,39	0,45	0,71	0,27	0,04	0,09	0,18	0,39	0,71	0,17	-0,56	-0,14	0,62	0,14
1953	0,22	0,20	0,25	0,74	0,74	0,42	0,11	0,13	0,14	0,69	0,91	0,08	-0,43	0,09	0,51	0,31
1954	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1955	0,11	0,27	-0,41	0,52	0,71	0,39	0,14	0,14	0,21	0,36	0,64	0,18	-0,37	0,19	0,64	0,36
1956	-0,07	0,14	-0,21	0,36	0,53	0,42	0,08	0,09	0,14	0,51	0,53	0,26	-0,59	0,19	0,46	0,29
1957	0,28	0,14	-0,12	0,40	0,49	0,24	0,14	0,04	0,09	0,58	0,44	0,11	-0,41	-0,04	0,58	0,27

Коэффициенты корреляции со сдвигом

Год	I-T	I-r	II-T	II-r	M-T	M-r	З-T	З-r	T-r	r-T	O-T	O-r	R-T	R-r	C-T	R-r	Л-T	Л-r
1949	-0,68	-0,04	-0,39	-0,54	-0,50	0,45	0,46	0,52	0,15	0,38	0,39	0,55	0,42	0,12	0,69	0,12	-0,36	0,21
1950	-0,56	-0,53	0,02	0,04	-0,43	0,23	0,71	0,59	-0,19	0,53	0,31	0,48	0,34	0,04	0,56	0,04	-0,42	-0,15
1951	-0,92	-0,85	0,02	0,41	-0,53	0,02	0,27	0,59	-0,45	-0,33	0,53	0,61	0,59	0,23	0,44	0,23	-0,19	-0,08
1952	-0,55	-0,73	-0,38	0,01	-0,23	-0,42	0,41	0,67	0,22	-0,23	0,61	0,23	0,32	0,11	0,83	0,11	-0,59	0,32
1953	-0,49	-0,63	-0,43	-0,14	-0,53	0,21	0,52	0,48	-0,10	-0,11	0,29	0,71	0,28	0,19	0,76	0,19	-0,63	0,10
1954	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1955	-0,73	-0,62	-0,21	0,36	-0,34	0,09	0,64	0,39	0,14	0,26	0,38	0,61	0,52	0,19	0,49	0,19	-0,51	0,24
1956	-0,56	-0,56	-0,29	-0,06	-0,65	0,14	0,51	0,69	0,21	0,18	0,64	0,39	0,36	0,29	0,74	0,29	-0,28	0,07
1957	-0,65	-0,68	-0,14	0,22	-0,48	0,38	0,32	0,51	0,06	0,13	0,29	0,48	0,45	0,04	0,63	0,04	-0,53	0,09
X	-0,64	-0,58	-0,22	0,17	-0,46	0,14	0,48	0,53	0,05	0,10	0,43	0,51	0,41	0,15	0,64	0,15	-0,44	0,10
$\left(\frac{X}{D}\right)$	+4,9	+2,6	+1,3	0,7	+3,8	0,6	3,4	6,2	0,2	0,4	3,3	3,6	4,1	1,9	4,9	1,9	+3,1	0,7

Примечание. R — радиационный баланс, M — меридиональный индекс, З — зональный индекс, T — температура, Л — ледовитость, С — снег, I — первый индекс, II — второй индекс, O — облачность, r — осадки.

Синхронные коэффициенты корреляции

Год	I-II	I-M	I-3	I-T	I-r	II-M	II-3	II-T	II-r	M-3	M-T	M-r	3-T	3-r	T-r	O-I
1949	0,17	0,61	-0,28	-0,48	-0,27	-0,12	-0,52	-0,61	-0,09	0,55	-0,34	-0,27	0,69	0,41	-0,17	0,21
1950	0,08	0,42	-0,58	-0,47	-0,84	-0,25	0,16	0,02	0,44	0,44	-0,16	-0,22	0,09	0,37	-0,35	0,09
1951	0,03	-0,20	-0,83	-0,48	-0,91	-0,41	0,16	0,48	0,29	0,11	-0,52	-0,23	0,36	0,73	0,36	0,31
1952	0,06	0,36	-0,41	-0,31	-0,21	-0,23	-0,77	-0,27	0,57	0,41	-0,35	-0,39	0,24	0,23	-0,07	0,41
1953	0,23	0,43	-0,63	-0,62	-0,33	-0,06	0,23	0,52	0,34	-0,43	-0,61	-0,30	0,14	0,84	0,08	0,09
1954	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1955	0,27	0,34	-0,59	-0,53	-0,74	-0,14	-0,08	0,41	0,13	0,26	-0,18	-0,34	0,47	0,31	-0,12	0,31
1956	0,09	0,26	-0,71	-0,68	-0,59	-0,09	0,07	-0,22	0,21	0,19	-0,52	-0,21	0,61	0,21	-0,18	0,27
1957	0,14	0,17	-0,48	-0,61	-0,67	-0,26	0,35	0,20	-0,06	0,12	-0,34	0,11	0,24	0,69	-0,14	0

Год	O-II	O-M	O-3	O-T	O-r	R-I	R-II	R-M	R-3	R-T	C-T	R-r	Л-T	Л-r	II-Л	M-Л
1949	0,10	0,17	-0,31	0,62	0,42	0,09	0,11	0,09	0,22	0,31	0,58	0,18	-0,35	-0,12	0,31	0,09
1950	0,08	0,11	-0,52	0,41	0,76	0,32	0,19	0,12	0,19	0,44	0,61	0,22	-0,68	-0,08	0,52	0,52
1951	0,28	0,19	-0,21	0,38	0,63	0,29	0,26	0,21	0,32	0,58	0,78	0,07	-0,56	-0,04	0,19	0,18
1952	-0,12	0,21	-0,21	0,52	0,52	0,34	0,06	0,07	0,06	0,56	0,81	0,09	-0,43	-0,17	0,28	0,14
1953	-0,16	0,31	-0,09	0,12	0,32	0,18	0,07	0,32	0,05	0,61	0,71	0,17	-0,32	-0,32	0,49	0,21
1954	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1955	0,11	0,14	-0,42	0,53	0,38	0,39	0,21	0,18	0,13	0,43	0,71	0,14	-0,71	-0,14	0,46	0,24
1956	0,06	0,12	-0,18	-0,41	0,69	0,27	0,17	0,11	0,10	0,71	0,49	0,31	-0,31	-0,08	0,53	0,61
1957	0,18	0,04	-0,21	0,39	0,71	0,41	0,08	0,26	0,24	0,24	0,53	0,03	-0,59	-0,41	0,39	0,32

Коэффициенты корреляции со сдвигом

Год	I-T	I-r	II-T	II-r	M-T	M-r	3-T	3-r	T-r	r-T	O-T	O-r	R-T	C-T	R-r	L-T	L-r
1949	-0,62	-0,29	0,15	-0,19	-0,10	0,47	0,39	0,41	0,19	0,40	0,37	0,72	0,22	0,56	0,10	-0,51	0,19
1950	-0,39	-0,19	-0,04	0,31	-0,34	-0,35	0,71	0,55	-0,52	0,67	0,29	0,46	0,36	0,51	0,14	-0,25	-0,08
1951	-0,53	-0,65	-0,03	-0,41	-0,26	-0,25	0,19	0,37	-0,85	-0,65	0,58	0,25	0,42	0,42	0,26	-0,42	0,15
1952	-0,81	-0,41	0,29	0,34	-0,75	-0,45	0,34	0,49	0,25	-0,22	0,49	0,18	0,12	0,64	0,07	-0,16	0,11
1953	-0,21	-0,32	-0,22	-0,23	-0,56	-0,17	0,11	0,30	-0,18	-0,01	0,22	0,82	0,19	0,71	0,09	-0,62	0,42
1954	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
1955	-0,74	-0,48	-0,34	-0,28	-0,47	0,26	0,41	0,54	0,08	-0,19	0,38	0,36	0,31	0,47	0,06	-0,46	0,23
1956	-0,61	-0,64	-0,26	-0,14	-0,39	0,13	0,29	0,39	0,49	-0,31	0,72	0,75	0,19	0,74	0,12	-0,52	+0,08
1957	-0,44	-0,51	0,09	-0,23	-0,56	0,32	0,64	0,59	0,14	-0,07	0,51	0,69	0,24	0,60	0,03	-0,65	-0,05
X	-0,54	-0,44	-0,04	-0,10	-0,43	-0,005	0,38	0,46	-0,05	-0,05	0,38	0,53	0,26	0,58	0,11	-0,45	0,13
$\left(\frac{X}{D}\right)$	-3,2	-2,1	-0,2	0,4	-2,4	-0,2	2,0	4,6	-0,1	0,1	1,7	2,3	2,9	5,3	1,8	-2,8	0,8

Примечание. Усл. обозначения см. табл. 2.

Таблица 4

Общие коэффициенты корреляции

I—II	I—M	I—3	I—T	I—r	II—M	II—3	II—T	II—r	M—3	M—T
0,19	0,09	-0,31	-0,52	-0,43	-0,18	0,07	0,04	-0,27	0,41	-0,51
M—r	3—T	3—r	T—r	O—I	O—II	O—M	O—3	O—T	O—r	r—I
-0,26	0,36	0,49	0,12	0,39	0,09	0,07	0,12	0,51	0,69	0,38
R—II	R—M	R—3	R—T	C—T	R—r	Л—T	Л—r	II—Л	M—Л	
0,11	0,13	0,18	0,54	0,73	0,20	-0,46	0,15	0,42	0,24	

Общие коэффициенты корреляции со сдвигом

I—T	II—T	M—T	3—T	I—r	II—r	M—r	3—r	
-0,49	-0,20	-0,51	0,32	-0,48	-0,19	0,18	0,54	
T—r	r—T	O—T	R—T	C—T	Л—T	O—r	Л—r	R—r
-0,19	-0,18	0,51	0,61	0,74	-0,62	0,75	-0,26	0,14

Примечание. Усл. обозначения см. табл. 2.

Таблица 5

Общие коэффициенты корреляции

I—II	I—M	I—3	I—T	I—r	II—M	II—3	II—T	II—r	M—3	M—T
0,19	0,09	-0,31	-0,61	-0,54	-0,18	0,07	-0,18	-0,11	0,41	-0,52
M—r	3—T	3—r	T—r	O—I	O—II	O—M	O—3	O—T	O—r	R—I
-0,62	0,49	0,60	0,13	0,19	-0,09	0,14	-0,41	0,53	0,74	0,30
R—II	R—3	R—T	C—T	R—r	Л—T	Л—r	II—Л	M—Л		
0,16	0,21	0,49	0,69	0,26	-0,58	-0,19	0,47	0,26		

Общие коэффициенты корреляции со сдвигом

I—T	II—T	M—T	3—T	I—r	II—r	M—r	3—r	
-0,53	-0,20	-0,46	0,51	-0,49	-0,11	-0,39	0,51	
T—r	r—T	O—T	R—T	C—T	Л—T	O—r	Л—r	R—r
-0,19	0,31	0,36	0,30	0,54	-0,61	0,73	0,14	0,11

Примечание. Усл. обозначения см. табл. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Афанасьева В. Б., Богданова-Есакова Н. П. О способах характеристик аномалий облачности, снежного покрова и радиационных потоков. Тр. ГГО, вып. 143, 1962.
2. Берлянд Т. Г. Распределение солнечной радиации на континентах. Гидрометеоздат, Л., 1961.
3. Блинова Е. Н. Гидродинамическая теория волн давления, температурных волн и центров действия атмосферы. ДАН СССР, т. 39, № 3, 1943.
4. Богданова Н. П. Изучение барико-циркуляционного режима Европейской территории СССР для осеннего периода. Тр. ГГО, вып. 114, 1960.
5. Визе В. Ю. Современное состояние вопроса о ледовых прогнозах. Проблемы Арктики, № 1, 1937.
6. Машкович С. А., Добрышман Е. М., Хейфец Я. М. Характеристики зональной циркуляции. Гидрометеоздат, М.-Л., 1958.
7. Рождественский А. А. Исследование синоптических процессов, связанных с осуществлением карских воздействий, на основе изучения процессов циркуляции. Тр. ГГО, вып. 55, 1955.

К ОЦЕНКЕ ЕДИНИЧНЫХ КОЛИЧЕСТВЕННЫХ ПРОГНОЗОВ

Предлагается характеристика оправдываемости количественного прогноза, равная абсолютной величине разности интегральных вероятностей прогностического и фактического значений. Обсуждаются общие свойства этой характеристики. Приведены и проанализированы графики и таблицы для вычисления этой величины применительно к прогнозу некоторых метеорологических элементов.

1. В настоящее время, особенно в связи с интенсивным развитием численных методов прогноза погоды, большое значение приобрела разработка объективных методов оценки успешности количественных прогнозов. Простые статистические характеристики, такие, как коэффициент корреляции между прогностическими и фактическими изменениями и средняя абсолютная или квадратическая разность прогностических и фактических значений, не всегда достаточны с практической точки зрения. Часто отмечаются случаи, когда прогноз, характеризующийся недостаточно высоким, скажем, коэффициентом корреляции, все же вполне удовлетворителен с точки зрения синоптиков, в то время как прогноз, для которого коэффициент корреляции выше, не может удовлетворить потребности практики. В связи с этим при рассмотрении результатов того или иного количественного прогноза метеорологических полей обычно наряду со статистическими характеристиками оправдываемости приводят также карты для конкретных прогнозов. Более того, некоторые авторы, как, например, Берггорссон и др. [3], используют в качестве меры успешности прогнозов баллы, расставляемые синоптиками в результате субъективного сопоставления ими прогностических и фактических полей.

Едва ли правильно утверждать, что такое положение целиком обусловлено несовершенством применяющихся статистических критериев оправдываемости прогнозов. Значительную роль играет также то обстоятельство, что с практической точки зрения зачастую наибольший интерес представляет не средняя оправдываемость прогноза всего поля в целом, а успешность прогноза некоторых характеристик поля. Так, например, если говорить о поле давления, то наибольшее значение имеет правильный прогноз перемещения и эволюции циклонов, антициклонов, фронтов и тому подобных особенностей поля давления, в значительной степени определяющих развитие погодных процессов. В той мере, в какой статистические характеристики успешности касаются прогноза всего поля

в целом, они бессильны учесть эту особенность метеорологических прогнозов.

Вместе с тем не вызывает сомнения и тот факт, что следует стремиться к разработке усовершенствованных характеристик оправдываемости метеорологических прогнозов. Отнюдь не претендуя на кардинальное решение этого вопроса, мы имеем в виду предложить подход к оценке успешности количественных прогнозов, отличающийся от общепринятых путей.

2. Будем исходить из естественного требования, чтобы вводимая характеристика успешности была применима и давала разумные результаты для оценки единичных количественных прогнозов. Под единичным прогнозом мы понимаем однократный прогноз одного численного значения некоторого метеорологического элемента. Иначе говоря, сформулируем задачу так: известно, что прогнозируемое значение некоторого элемента равно x' , истинное значение этого элемента равно x'' , и известно, о каком метеорологическом элементе идет речь. Требуется ввести количественную характеристику успешности этого прогноза, монотонно изменяющуюся с изменением практической ценности прогноза, например, тем большую, чем ниже ценность прогноза.

Термин «ценность прогноза», фигурирующий в этой формулировке, не может быть, разумеется, определен однозначно, ему может быть придано различное понимание в зависимости от того, для каких целей используются результаты прогноза. Например, для защиты растений от заморозков важно уметь хорошо предсказать низкие значения температуры, а точность прогноза высоких значений несущественна. Для планирования работы ветродвигателя важно знать, будет ли скорость ветра выше некоторого нижнего предела рабочих скоростей, а если она окажется ниже этого предела, то совершенно неважно, какой именно — двигатель все равно не будет работать.

Вообще ценность прогноза для целей того или иного конкретного приложения зависит от особенностей этого приложения. Учет этого обстоятельства привел бы, однако, к тому, что успешность одного прогноза пришлось бы оценивать целым множеством характеристик соответственно различным приложениям результатов прогнозов. Поэтому взамен такого рода характеристик или по крайней мере наряду с ними целесообразно иметь и такие параметры успешности, которые не зависели бы явно от особенностей различных приложений, но в то же время учитывали некоторые общие черты всех приложений результатов прогноза.

Рассмотрим с этой точки зрения три случая прогноза суточных изменений давления, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Суточные изменения давления (мб)

Случай №	Прогнозируемые	Фактические
1	+1	-1
2	+2	-2
3	+17	+22

Совершенно очевидно, что второй прогноз был хуже первого; это обстоятельство можно описать с помощью обычной меры — абсолютной ошибки прогноза; в первом случае она равна 2 мб, а во втором — 4 мб.

С этой целью заметим, что приведенные рассуждения эквивалентны преобразованию шкалы элемента в шкалу значений кусочно-постоянной величины

$$z_k = \frac{k}{n} = \int_a^{x_k} f(\xi) d\xi = F(x_k) \quad (4)$$

с последующей оценкой успешности прогноза по абсолютной величине разностей значений z

$$s = |z' - z''|. \quad (5)$$

После перехода к $n = \infty$ кусочно-постоянная функция обратится в непрерывную функцию. Для нахождения ее напомним сначала

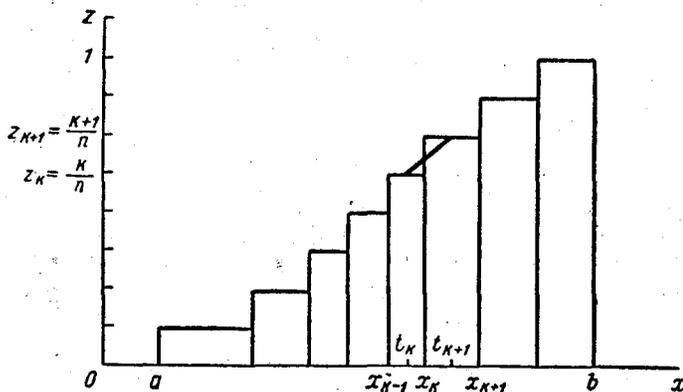


Рис. 1. К выводу формулы (6).

уравнение отрезка, соединяющего середины k -того и $k+1$ -го отрезков графика кусочно-постоянной функции (рис. 1).

$$\frac{z - z_k}{z_{k+1} - z_k} = \frac{x - t_k}{t_{k+1} - t_k}, \quad (6)$$

где

$$t_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}; \quad t_{k+1} = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}; \quad z_k = \frac{k}{n}; \quad z_{k+1} = \frac{k+1}{n}.$$

Подставляя это в (6), получим

$$\frac{z - \frac{k}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{x - \frac{x_{k+1} + x_k}{2}}{\frac{x_{k+1} - x_{k-1}}{2}},$$

откуда угловой коэффициент отрезка равен

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{2}{n}}{x_{k+1} - x_{k-1}}. \quad (7)$$

Введем теперь функцию Φ , обратную функции, описывающей интегральную вероятность. Именно, поскольку

$$\frac{k}{n} = F(x_k),$$

то

$$x_k = \Phi\left(\frac{k}{n}\right) = \Phi(z_k). \quad (8)$$

Согласно (7) и (8),

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{2}{n}}{\Phi\left(\frac{k+1}{n}\right) - \Phi\left(\frac{k-1}{n}\right)}$$

и в пределе при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{\Phi'(z)}.$$

Из соотношения между производными обратных функций получаем

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dF}{dx},$$

откуда

$$z = F(x) + C. \quad (9)$$

Определение постоянной интегрирования C в формуле (9) не сказывается на дальнейших рассуждениях. Наиболее естественно определить C на основании требования, чтобы при $x=a$ было $z=0$. Это дает $C=0$, так что просто

$$z = F(x). \quad (10)$$

Таким образом, мы получили вывод, который легко было предвидеть и до выполнения преобразований. Разбиению шкалы на бесчисленное множество равновероятных интервалов соответствует преобразование шкалы, а именно переход от значений элемента x к значениям интегральной вероятности $F(x)$. При этом для оценки успешности прогноза по-прежнему применяется величина разности

$$s = |z' - z''| = |F(x') - F(x'')|. \quad (11)$$

4. Приведем несколько примеров.

Кривые распределения многих метеорологических элементов, таких, как суточные изменения давления или температуры, можно с большой точностью описать нормальным законом Гаусса

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad (12)$$

где σ — среднее квадратическое значение элемента. Подставляя (12) в (1) (в данном случае $a = -\infty$), получим

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sigma\sqrt{2}}\right), \quad (13)$$

где

$$\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\eta^2} d\eta$$

— функция Крампа.

Если подставить (13) в (11) и перейти к безразмерной переменной

$$t = \frac{x}{\sigma}, \quad (14)$$

представляющей собой отношение интересующего нас значения элемента к его средней квадратической величине, то получим

$$s = \frac{1}{2} \left| \operatorname{erf} \left(\frac{t'}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{t''}{\sqrt{2}} \right) \right|, \quad (15)$$

где одна из величин t' , t'' по-прежнему соответствует прогностическому, а другая — фактическому значению рассматриваемого метеорологического элемента.

На рис. 2 нанесены значения функций $s(t', t'')$ для значений аргументов, меняющихся от -3 до $+3$. Значения s указаны в промилле. На рис. 2 приведены также изолинии, у которых значения s указаны в долях единицы. В силу симметрии графика относительно линий $t' = t''$ и $t' = -t''$ приведена лишь четвертая часть графика. Разумеется, безразлично, по какой из осей отсчитывать t' , а по какой t'' .

Если успешность прогноза характеризовать абсолютной ошибкой прогноза, то изолинии на рисунке, аналогичном рис. 2, были бы направлены параллельно биссектрисе $t' = t''$. Весьма значительные отклонения изолиний s от этих направлений показывают, что учет вероятностей различных значений при оценке прогноза существенно меняет результаты этих оценок: успешный прогноз маловероятных значений оценивается существенно выше, чем успешный прогноз значений, близких к среднему. Так, если обратиться к рассмотренному выше примеру (табл. 1) и принять $\sigma = 10$ мб, то для второго из приведенных в табл. 1 случаев получим $s = 0,158$, а для третьего $s = 0,032$, так что третий прогноз получается примерно в 5 раз лучше второго, в то время как по абсолютной ошибке он в 1,25 раза хуже.

График, приведенный на рис. 2, может быть использован для определения величины s применительно к прогнозу тех метеорологических элементов, кривую распределения которых можно считать гауссовой. При этом практически удобнее откладывать по осям не безразмерные величины t' и t'' , а непосредственно значения x' и x'' .

5. В работе [1] показано, что интегральную функцию распределения скорости ветра можно с достаточной для практических целей точностью описать формулой

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\gamma}, \quad (16)$$

где β и γ — параметры. Обработка фактических данных показывает, что параметр γ меняется примерно от $\gamma = 1$ до $\gamma = 2$.

Если принять формулу (16), то успешность прогноза скорости ветра может быть оценена по формуле

$$s = \left| e^{-\left(\frac{x'}{\beta}\right)^\gamma} - e^{-\left(\frac{x''}{\beta}\right)^\gamma} \right|. \quad (17)$$

На рис. 3 приведены значения величины s в функции от безразмерных аргументов $t' = \frac{x'}{\beta}$ и $t'' = \frac{x''}{\beta}$, причем для параметра γ принято среднее значение $\gamma = \frac{3}{2}$. Рассмотрение кривых на рис. 3 показывает, что в случае ветра зависимость оценки прогноза от величины прогнозируемой скорости выражена весьма сильно. Например, при одной и той же абсолютной погрешности $0,6\beta$ имеем: если $x' = 0,2\beta$; $x'' = 0,8\beta$, то $s = 0,425$, а если $x' = 3\beta$, $x'' = 3,6\beta$, то $s = 0,0044$, так что второй прогноз по этой оценке почти в 100 раз лучше первого.

Интересно, что вдоль каждой линии, параллельной биссектрисе $t' = t''$, величина s меняется не монотонно, а имеет точку максимума.

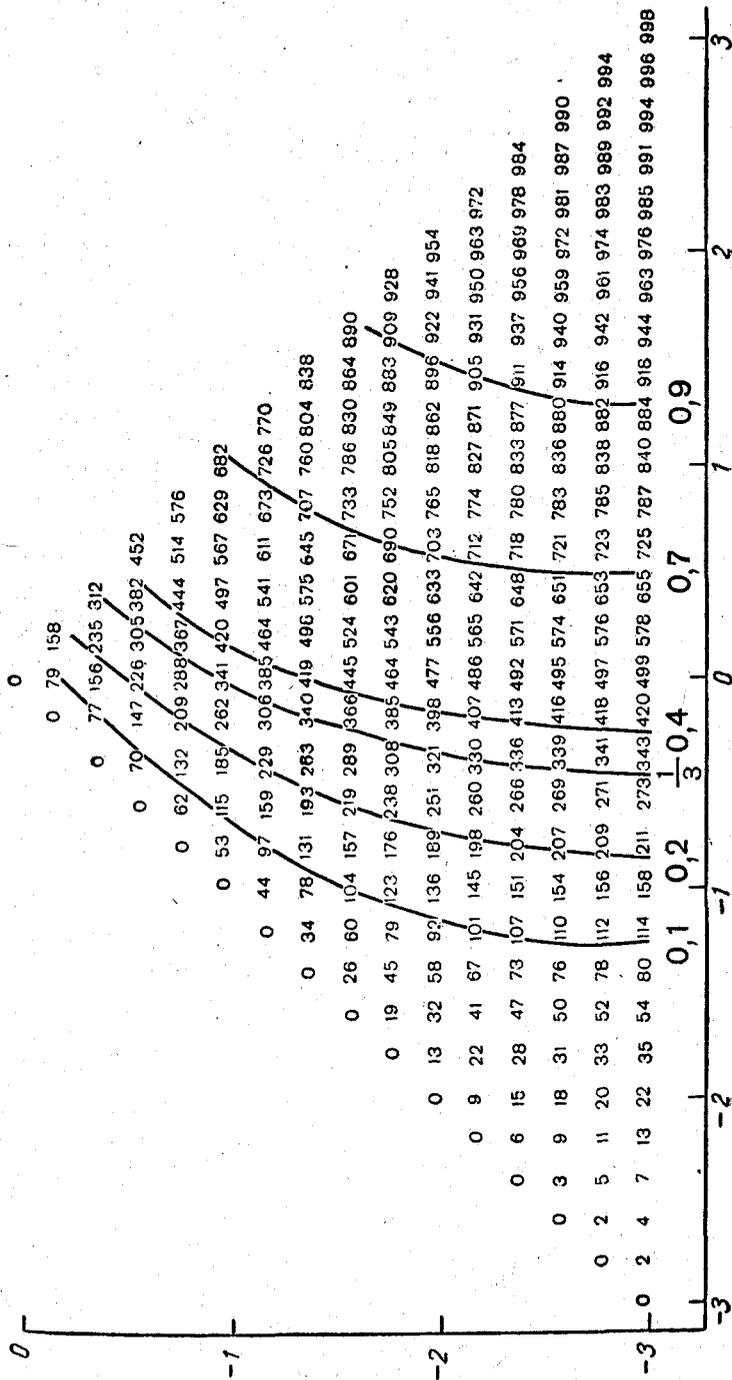


Рис. 2. Функция $s(t', t'')$ (15).

Это означает, что среди всех прогнозов, обладающих одной и той же абсолютной ошибкой, можно указать наихудший. На рис. 3 приведена кривая, являющаяся геометрическим местом этих максимумов. Она пересекается с биссектрисой $t' = t''$ в точке, соответствующей наиболее

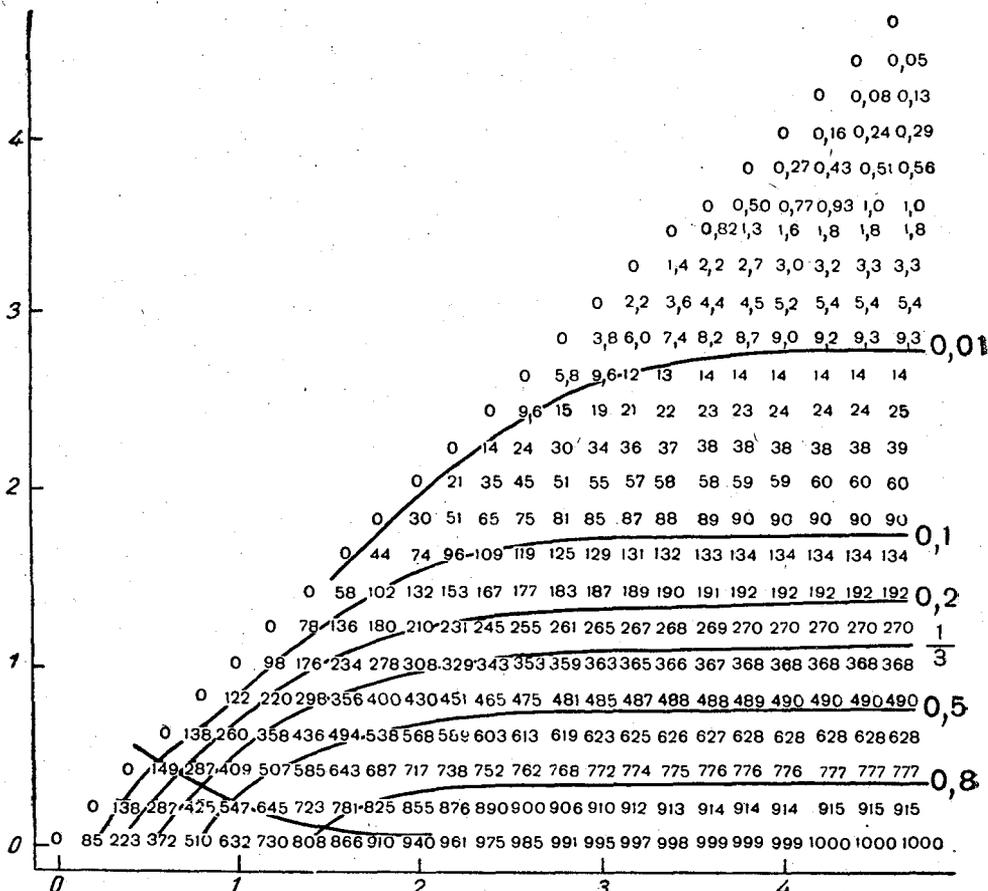


Рис. 3. Функция $s(t', t'')$ (17).

вероятному (модальному) значению скорости ветра, которое, согласно формуле (16), равно

$$x_m = \beta \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma} \right)^{\frac{1}{\gamma}}, \quad (18)$$

что при $\gamma = \frac{3}{2}$ дает $x_m \approx 0,48 \beta$.

Графики, аналогичные приведенному на рис. 3, построенные для разных значений параметров β и γ , можно использовать для оценки успешности единичных прогнозов скорости ветра у земли.

6. До сих пор предполагалось, что статистическая кривая распределения известна как непрерывная функция величины рассматриваемого элемента. По ряду причин это часто бывает не так. Статистическое распределение некоторых элементов известно по столь небольшому числу градаций, что восстановить по нему с разумной точностью

дифференциальную кривую распределения невозможно. Кроме того, большое количество метеорологических элементов, характеризующих не всегда встречающиеся явления (осадки, туман, снежный покров и т. п.), обладает распределениями с конечной вероятностью нулевого значения p_0 . Иначе говоря, ордината дифференциальной кривой распределения в нуле бесконечна, а площадь под кривой при стремлении абсциссы к нулю стремится к конечному пределу, равному вероятности нулевого значения p_0 . Для таких элементов всегда имеется хотя бы одна градация — нулевая.

По этим причинам целесообразно рассмотреть случай, когда вместо дифференциальной кривой распределения, по крайней мере на некотором участке возможных значений метеорологического элемента, заданы лишь вероятности значений по градациям.

Если весь интервал изменения метеорологического элемента разбит на некоторое количество (m) градаций, вероятности попадания в которые $p_1, p_2, \dots, p_0, \dots, p_m$ известны, то необходимо рассмотреть два случая.

1. Прогностическое и фактическое значения (x' и x'') попали в разные градации, допустим, x' в j -тую, а x'' — в l -тую градации. Тогда простым осреднением возможных значений величины s , которое законно в силу преобразования шкалы к равновероятным интервалам, легко получить формулу

$$s = \frac{p_j}{2} + p_{j+1} + \dots + p_{l-1} + \frac{p_l}{2}. \quad (19)$$

2. Обе величины (x' и x'') попали в одну и ту же градацию (i -тую). Тогда, очевидно,

$$s = \frac{p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} + p_i}{p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1}} \int_{p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1}}^{p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1} + p_i} |s' - s''| ds' ds'',$$

т. е.

$$s = \frac{p_i}{3}. \quad (20)$$

Из формулы (20) видно, что в данном случае прогноз нельзя считать абсолютно успешным ($s=0$), как это обычно делается. Более того, успешность такого прогноза тем ниже, чем больше вероятность p_i данной градации.

Если представить себе случай, когда все возможные значения элемента объединены в одну градацию, т. е. $m=1$, то, применяя к этому случаю формулу (20), получим величину s для чисто случайного прогноза $s = \frac{1}{3}$.

Таким образом, если $s < \frac{1}{3}$, то данный прогноз лучше случайного, а если $s > \frac{1}{3}$, то хуже. На рис. 2 и 3 проведены линии, разделяющие области прогнозов, лучших и худших, чем случайный.

Наконец, возможны еще случаи, когда для одной части области значений метеорологического элемента имеется дифференциальная кривая распределения, а для другой части — лишь вероятности по градациям. Приведенные рассуждения легко обобщить и на такие случаи. Мы ограничимся упомянутым выше случаем дифференциальной кривой распре-

деления при конечной вероятности p_0 нулевого значения. Тогда, очевидно,

а) если $x' > 0, x'' > 0$, то $s = |F(x') - F(x'')|$;

б) если $x' = 0, x'' > 0$, то $s = F(x'') - \frac{p_0}{2}$;

в) если $x' = x'' = 0$, то $s = \frac{p_0}{3}$.

7. Простейший, но вместе с тем весьма важный пример прогноза по грациям представляет собой так называемый альтернативный прогноз, т. е. прогноз осуществления или отсутствия некоторого события.

Пусть вероятность этого события равна p . Тогда по формулам (19) и (20) успешный прогноз осуществления события оценивается величиной

$s = \frac{p}{3}$, успешный прогноз отсутствия — величиной $s = \frac{1-p}{3}$, а неудач-

ный прогноз — величиной $s = \frac{1}{2}$, не зависящей от значения p . Эти зависимости изображены графически на рис. 4. На нем приведены также

прямая $s = \frac{1}{3}$, характеризующая случайный прогноз. Очевидно, что, чем

меньше вероятность прогнозируемого явления, тем более ценен успешный прогноз его осуществления, а чем больше вероятность явления, тем ценнее успешный прогноз его отсутствия.

В качестве другого примера приведем таблицу для оценки прогноза количества осадков (в мм), выпавшего за время между двумя последовательными наблюдениями (четырёх-разовые наблюдения в сутки). Таблица 2 составлена по данным о повторяемости осадков по грациям для условий, характерных для центральной части Европейской территории СССР. Разумеется, по данным, приведенным в табл. 1, нельзя строить изолинии хотя бы потому, что размер граций различен.

Помимо закономерностей, аналогичных отмеченным выше для других

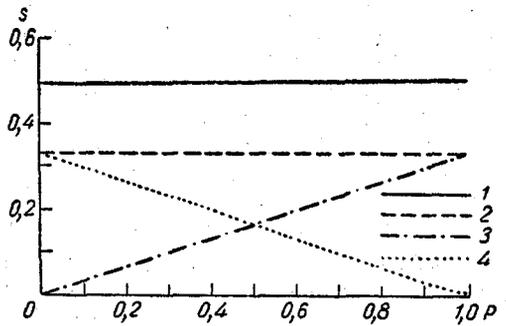


Рис. 4. Оценки альтернативного прогноза. 1 — неудачный прогноз, 2 — случайный прогноз, 3 — удачный прогноз осуществления, 4 — удачный прогноз отсутствия.

Оценки s успешности прогноза осадков

Таблица 2

x''	x'								
	0—0,1	0,1—0,4	0,5—0,9	1,0—1,9	2,0—4,9	5,0—9,9	10—19	20—29	>30
0—0,1	0,067	0,314	0,417	0,500	0,600	0,688	0,730	0,745	0,749
0,1—0,4		0,042	0,103	0,186	0,286	0,374	0,426	0,431	0,435
0,5—0,9			0,026	0,083	0,183	0,271	0,313	0,328	0,332
1,0—1,9				0,029	0,100	0,188	0,230	0,245	0,249
2,0—4,9					0,039	0,088	0,130	0,145	0,149
5,0—9,9						0,0197	0,0419	0,0574	0,0610
10—19							0,0086	0,0155	0,0191
20—29								0,0017	0,0046
>30									0,0007

элементов, в табл. 2 интересно рассмотреть числа, стоящие на диагонали и характеризующие успешность «удачных» прогнозов, т. е. таких, что прогнозистические значения попали в одну градацию с фактическим. Хотя с ростом интенсивности вероятности осадков монотонно убывает, упомянутые числа не убывают монотонно от градации к градации, что объясняется лишь различной величиной последних. Так, оказывается легче успешно предсказать осадки от 2 до 5 мм, чем от 1 до 2 мм, ибо тот факт, что интервал 2—5 мм втрое больше интервала 1—2 мм влияет в данном случае сильнее, чем меньшая вероятность осадков большей интенсивности. Но и при таких градациях в конечном счете основную роль играет распределение вероятностей. В частности, успешный прогноз осадков свыше 30 мм оказывается примерно в 100 раз лучшим успешного прогноза осадков в интервале 0—0,1 мм, хотя величина второго интервала всего 0,1 мм, а первый теоретически бесконечен.

8. Сделаем в заключение несколько замечаний общего характера. Отметим, что идея преобразования шкал метеорологических элементов, положенная в основу предлагаемой методики оценки прогнозов, не является новой. Способы определения параметров кривых распределения с помощью так называемых вероятностных номограмм (см. например, [1]) также основаны на преобразовании шкал. Впервые идея преобразования шкал применительно к метеорологическим элементам была выдвинута, по-видимому, М. А. Омшанским [2]. Он предложил вводить преобразования, сводящие законы распределения к гауссовым. Наконец, как любезно сообщил Л. А. Вительс, он применял методику, аналогичную описанной выше, для сравнительной оценки долгосрочных прогнозов, составленных различными методами.

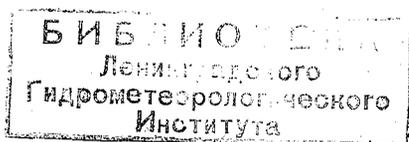
Наконец, следует подчеркнуть, что мы касались здесь только оценки оправдываемости каждого единичного прогноза и не затрагивали вопроса об оценке прогноза совокупности нескольких численных значений. Однако трудно сомневаться в том, что, скажем, среднее абсолютное значение величины s будет лучше характеризовать оправдываемость серии численных прогнозов, чем обычно применяемые средние абсолютные или средние квадратические ошибки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Анапольская Л. Е., Гандин Л. С. Режим больших скоростей ветра на территории СССР для учета ветровых нагрузок на сооружения. Сб. «Вопросы прикладной климатологии». Гидрометеиздат, Л., 1960.
2. Омшанский М. А. Деформация шкал метеорологических элементов и ее практическое значение. Тр. ГГО, вып. 4(1), 1935.
3. Bergthorsson P., Döös B. R., Fryklund S., Haug O., Lindqvist R. Routine forecasting with the barotropic model. Tellus, v. 7. № 2, 1955. Перевод в сб. «Численные методы прогноза погоды». Под ред. Л. С. Гандина и А. С. Дубова. Гидрометеиздат, Л., 1960.

СОДЕРЖАНИЕ

Л. С. Гандин, В. П. Болтенков. К методике исследования трехмерной макроструктуры метеорологических полей	5
В. П. Болтенков. Исследование статистической макроструктуры температуры воздуха	16
М. И. Фортус. Трехмерная пространственная структура поля геопотенциала	27
В. П. Мелешко, И. П. Гусева. Расчет некоторых статистических характеристик для полей температуры и влажности	40
Л. С. Гандин. Об оптимальной интерполяции векторных полей	47
Л. В. Руховец. О статистически оптимальных представлениях вертикальных распределений метеозлементов в тропосфере и нижней стратосфере	60
Н. И. Яковлева, А. В. Мещерская, Г. Д. Кудашкин. Исследование полей давления (геопотенциала) методом разложения по естественным составляющим	78
В. Б. Афанасьева, Н. П. Есакова. Статистические связи между аномалиями некоторых погодных характеристик	105
Л. С. Гандин. К оценке единичных количественных прогнозов	114



Редактор *Л. Л. Беленькая*
Технич. редактор *А. Г. Алексеев*
Корректоры: *А. Ф. Кузнецова, А. В. Хюркес*

Сдано в набор 2/III 1964 г. Подписано к печати 15/V 1964 г.
Бумага 70×108¹/₁₆ Бум. л. 4+1 вкл. Печ. л. 11,07 Уч.-изд. л. 10,28
Тираж 750 экз. М-15240 Индекс МЛ-65
Гидрометеорологическое издательство. Ленинград, В-53, 2-я линия, дом № 23.
Заказ № 110 Цена 72 коп.
Тем. план 1964 г., № 49

Ленинградская типография № 8 «Главполиграфпрома»
Государственного комитета Совета Министров СССР по печати
Ленинград, Прачечный пер., д. 6