

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГЛАВНАЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ им. А. И. ВОЕЙКОВА

ТРУДЫ

ВЫПУСК 256

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ
ИССЛЕДОВАНИЯ
ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук М. Е. ШВЕЦА и
канд. физ.-мат. наук Б. Е. ШНЕЕРОВА

БИБЛИОТЕКА
Ленинградского
Гидрометеорологического
Института



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД • 1970

АН 3560

06
Т 178

В сборник включены статьи по теории климата и численному моделированию атмосферной циркуляции. Приведены результаты эмпирического исследования средних многомерных притоков тепла к атмосфере для северного полушария. Рассмотрена методика учета процессов в пограничном слое при численном моделировании общей циркуляции атмосферы.

Рассчитан на специалистов метеорологов и океанологов.

М. Е. ШВЕЦ, Л. Р. ДМИТРИЕВА-АРРАГО,
Л. Н. МАГАЗЕНКОВ, Л. В. САМОЙЛОВА,
Б. Е. ШНЕЕРОВ

ЧИСЛЕННАЯ МОДЕЛЬ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ НА ПОЛУШАРИИ

ВВЕДЕНИЕ

Численные эксперименты, основанные на физических закономерностях атмосферных движений и процессов тепло- и влагообмена, приобрели важное значение для разработки численных методов прогноза погоды и изучения генезиса климата и общей циркуляции. Имеющиеся в этой области достижения (см. [1, 2]), безусловно, заслуживают того, чтобы занять заметное место в теории прогноза и общей циркуляции атмосферы.

Однако в указанных работах имеется существенный недостаток, заключающийся в том, что при вычислении радиационных притоков тепла используются климатологические значения влажности и облачности. Вследствие этого динамические характеристики и притоки тепла не находятся в должном соответствии.

В данной статье излагается схема общей циркуляции атмосферы, которая по своему физическому содержанию отличается от предыдущих исследований данной проблемы тем, что облачность и влажность не задаются, а определяются в процессе интегрирования соответствующих уравнений. Однако температура океана считается известной по климатологическим данным. Отказ от задания этой температуры потребовал бы включения в модель системы уравнений, описывающих закономерности океанической циркуляции. По ряду причин в настоящее время рассмотрение такой полной задачи представляется еще преждевременным.

В данной работе изучается общая циркуляция в северном полушарии для холодного времени года. Благодаря этому можно пренебречь испарением с суши, что существенно облегчает решение задачи.

В статье используются следующие основные обозначения:

- A — поток длинноволновой радиации, направленный вниз,
- a — средний радиус Земли,
- B — поток длинноволновой радиации, направленный вверх,
- C — балл облачности,

- c_p — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении,
 c_v — удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме,
 α — излучательная способность подстилающей поверхности,
 F — радиационный баланс,
 f — относительная влажность,
 g — ускорение силы тяжести,
 H — высота σ -поверхности,
 H_s — высота рельефа,
 L — скрытая теплота конденсации,
 $l = 2\Omega \cos \theta$ — параметр Кориолиса,
 p — давление,
 p_s — давление у поверхности Земли,
 Π_T — турбулентный вертикальный поток тепла,
 Π_q — турбулентный вертикальный поток влаги,
 Q — поток суммарной радиации,
 q — удельная влажность,
 R_B — газовая постоянная воздуха,
 r — альbedo подстилающей поверхности,
 S — поток прямой солнечной радиации,
 T — температура воздуха,
 T_s — температура земной поверхности,
 t — время,
 u — составляющая скорости ветра вдоль широтного круга с положительным направлением к востоку,
 v — составляющая скорости ветра вдоль меридиана с положительным направлением к югу,
 λ — долгота места,
 ν — коэффициент горизонтального макротурбулентного перемешивания,
 ρ — плотность воздуха,
 $\sigma = \frac{p}{p_s}$ — координата по вертикали,
 τ_λ — составляющая напряжения трения вдоль широтного круга,
 τ_θ — составляющая напряжения трения вдоль меридиана,
 θ — дополнение до широты места,
 Ω — угловая скорость вращения Земли,
 $\omega = \frac{dp}{dt}$ — изобарическая вертикальная скорость,
 $\omega = \frac{d\sigma}{dt}$ — обобщенная вертикальная скорость в σ -системе координат,
 $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$.

§ 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЗАДАЧИ И МЕТОД ЕЕ РЕШЕНИЯ

1. Система уравнений

Рассматривается система уравнений термогидродинамики, описывающих перенос количества движения, тепла и влаги в атмосфере. Используется сферическая система координат, в качестве независимой переменной по вертикали взято отношение давления p к его значению у поверхности земли p_s (так называемая σ -система координат [3]). Система уравнений включает:

1) уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \bar{\omega} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{uv \operatorname{ctg} \theta}{a} + lv = \\ = - \frac{g}{a \sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \lambda} - \frac{R_B T_s}{p_s a \sin \theta} \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \nu \nabla^2 u - \frac{g}{p_s} \frac{\partial \tau_\lambda}{\partial \sigma}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \bar{\omega} \frac{\partial v}{\partial \sigma} - \frac{u^2 \operatorname{ctg} \theta}{a} - lv = \\ = - \frac{g}{a} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{R_B T_s}{p_s a} \frac{\partial p_s}{\partial \theta} + \nu \nabla^2 v - \frac{g}{p_s} \frac{\partial \tau_\theta}{\partial \sigma}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right];$$

2) уравнение притока тепла

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \bar{\omega} \frac{\partial T}{\partial \sigma} - \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T \bar{\omega}}{p_s \sigma} = \\ = \nu \nabla^2 T + \frac{g}{p_s c_p} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Pi_r + F); \end{aligned} \quad (1.3)$$

3) уравнение переноса водяного пара

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial q}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial q}{\partial \theta} + \bar{\omega} \frac{\partial q}{\partial \sigma} = \nu \nabla^2 q + \frac{g}{p_s} \frac{\partial \Pi_q}{\partial \sigma}; \quad (1.4)$$

4) уравнение гидростатичности движения, проинтегрированное по вертикали от σ до 1,

$$H = H_s + \frac{R_B}{g} \int_{\sigma}^1 \frac{T}{\xi} d\xi; \quad (1.5)$$

5) уравнение неразрывности

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{1}{a \sin \theta} \left[\frac{\partial (p_s u)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (p_s v \sin \theta)}{\partial \theta} \right] + \frac{\partial (p_s \bar{\omega})}{\partial \sigma} = 0.$$

Интегрируя левую часть этого уравнения по всей толще атмосферы и используя граничное условие $\bar{\omega} = 0$ при $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$, получим

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \int_0^1 D d\xi = 0, \quad (1.6)$$

где для краткости обозначено

$$D = \frac{1}{a \sin \theta} \left[\frac{\partial (p_s u)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (p_s v \sin \theta)}{\partial \theta} \right]. \quad (1.7)$$

Наконец, интегрируя уравнение неразрывности по вертикали от 0 до σ и используя известное соотношение

$$\bar{\omega} = p_s \bar{\omega} + \sigma \frac{dp_s}{dt},$$

получим

$$\bar{\omega} = \frac{\sigma}{p_s} \int_0^1 D d\xi - \frac{1}{p_s} \int_0^{\sigma} D d\xi, \quad (1.8)$$

$$\bar{\omega} = - \int_0^{\sigma} D d\xi + \sigma \left[\frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial p_s}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial p_s}{\partial \theta} \right]. \quad (1.9)$$

Таким образом, считая, что составляющие напряжения трения, потоки тепла и влаги, входящие в правые части исходных уравнений, являются функциями искоемых величин, а также ряда заданных «внешних» параметров задачи, получим замкнутую систему восьми уравнений, (1.1) — (1.9), для определения восьми неизвестных величин: u , v , T , q , p_s , H , $\bar{\omega}$ и ω . Отметим, что в уравнениях переноса водяного пара и притока тепла не учтены стоки водяного пара вследствие конденсации и выделение скрытой теплоты при фазовых переходах воды. Эти процессы моделируются в схеме с помощью специальной процедуры, рассмотренной в § 5.

2. Граничные условия

На верхней границе атмосферы при $\sigma = 0$:

$$а) \bar{\omega} = 0, \quad (1.10)$$

$$б) A = 0, \quad (1.11)$$

На уровне подстилающей поверхности при $\sigma = 1$:

$$а) u = v = \bar{\omega} = 0, \quad (1.12)$$

б) для океана задается температура его поверхности

$$T_s = T_s(\lambda, \theta), \quad (1.13)$$

в) для суши используется уравнение теплового баланса для подстилающей поверхности

$$\Pi_r + L\Pi_q + F = 0. \quad (1.14)$$

Предполагается, что потоки массы, тепла и влаги на экваторе обращаются в нуль, т. е. при $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$v = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0. \quad (1.15)$$

Все функции считаются периодическими по λ .

3. Интегрирование уравнений модели

Решение системы (1.1) — (1.9) осуществляется с помощью метода расщепления. Этот метод был впервые использован для интегрирования уравнений динамики атмосферы Г. И. Марчуком и показал свою эффективность при решении задачи краткосрочного прогноза погоды [4]. В соответствии с идеей этого метода решение системы уравнений общей циркуляции атмосферы на каждом шаге по времени осуществляется в несколько этапов. При этом принимается следующая последовательность действий. На первом этапе производится расчет изменений метеорологических элементов, обусловленных радиационным притоком тепла, вертикальным турбулентным обменом и взаимодействием атмосферы с подстилающей поверхностью. Полученные значения используются в качестве начальных данных для решения системы уравнений адвекции, описывающих перенос метеорологических элементов вдоль траектории движения с учетом горизонтального макромасштабного перемещения. Далее производится динамическое согласование полученных полей путем решения задачи адаптации. Наконец, на последнем этапе производится определение облачности и коррекция полученных полей температуры и влажности с учетом выделившейся теплоты конденсации и процессов конвекции.

4. Выбор сетки

Все переменные величины определяются в узлах широтно-долготной сетки с шагом $\Delta\lambda$ по широте и с шагом $\Delta\theta$ по долготе.

При реализации данной модели принимается $\Delta\lambda = \Delta\theta = 5^\circ$, так что всего на полушарии на одном уровне располагается 1297 узлов, включая полюс. Рассматривается семь уровней, соответствующих значениям σ , равным 0,2; 0,3; 0,5; 0,7; 0,85; 0,99 и 1,00. Координаты каждого узла определяются индексом i , который отсчитывается вдоль широты к востоку от гринвичского меридиана, индексом j , который отсчитывается вдоль меридиана по направлению к югу, и индексом k , отсчитываемым по вертикали от верхней границы

атмосферы. При этом шаг по вертикали является переменной величиной, зависящей от σ . Прогноз осуществляется с шагом по времени Δt , индекс n определяет количество таких шагов. Для сеточного значения функции вводится обычное обозначение

$$f_{i,j,k}^n = f(i \Delta \lambda, j \Delta \theta, \sigma_k, n \Delta t),$$

где $i=0, 1, \dots, I$; $j=0, 1, \dots, J$; $k=1, 2, \dots, K$.

Переменный шаг по вертикали $\Delta \sigma_k$ равен

$$\Delta \sigma_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}. \quad (1.16)$$

В дальнейшем в тех случаях, когда это не вызовет неправильного толкования формулы, какой-либо из индексов может быть опущен.

§ 2. ПРИТОКИ ЛУЧИСТОЙ ЭНЕРГИИ

Основное обстоятельство, которое следует иметь в виду при разработке метода расчета радиационных притоков тепла для применения в численных схемах общей циркуляции атмосферы и долгосрочного прогноза погоды, состоит в том, что гидродинамические схемы дают ограниченную информацию о состоянии атмосферы. Это связано как с применяемым обычно малым вертикальным разрешением атмосферы, так и с тем, что некоторые параметры, от которых зависит величина притока радиации, не могут быть получены из гидродинамической схемы. К ним относятся, в частности, характеристики рассеивающих свойств атмосферы, альbedo подстилающей поверхности и облаков. Особое значение в расчетах притоков радиации имеет облачность. Используемый сейчас во многих исследованиях способ учета облачности [5, 6] требует сведений о степени покрытости небосвода, выраженной в баллах облачности. Эта характеристика в настоящее время может быть получена только приближенно, например, путем привлечения статистических связей между баллами облачности, полученными из наблюдений, и величинами влажности или вертикальной скорости, которые рассчитываются в численной схеме [7, 8].

Таким образом, оказывается, что в расчет притоков радиации входят параметры, известные только приближенно. В связи с этим возникают вопросы, связанные с точностью расчетов. Первый — какую ошибку вносит недостаток информации в величину потоков и притоков радиации? Второй — какая точность требуется в задании основных параметров, если известны требования к точности расчета потоков и притоков радиации?

Следует отметить, что необходимая точность расчета притоков радиации зависит от чувствительности всей гидродинамической схемы к колебаниям в притоках энергии.

Ответ на второй вопрос может быть дан только после проведения численных экспериментов на основе гидродинамической модели, включающей радиационные притоки тепла.

Первый из перечисленных вопросов может быть изучен независимо от гидродинамической схемы в виде некоторых частных экспериментов.

1. Потоки коротковолновой радиации

Широко известна и используется схема расчета потоков радиации, предложенная Манабе и Стриклером. Эта схема, однако, страдает существенным недостатком, который состоит в неучете трансформации поля излучения за счет поглощения аэрозолями и эффекта многократного рассеяния коротковолновой радиации.

1. Для построения схемы расчета потоков коротковолновой радиации в статье [9] предлагается использовать работы К. С. Шифрина, И. Н. Минина, О. А. Авасте, Н. П. Пятовской [10, 11, 12], учитывающие влияние многократного рассеяния.

Рассмотрим участок спектра 0,29—0,72 мкм. Для более полного учета действующих в атмосфере факторов введем в схему расчета потоков суммарной и прямой радиации поглощение озоном.

Для расчета потоков суммарной радиации на уровне z в интервале 0,29—0,72 мкм используется формула

$$Q_z = \int_{0,29}^{0,72} J_0(\lambda) B^*(\lambda) e^{-\sec i [k_\lambda \omega_z]} d\lambda. \quad (2.1)$$

Здесь $J_0 d\lambda$ — интенсивность солнечной радиации, приходящей на верхнюю границу атмосферы в данном участке спектра; $B^*(\lambda)$ — функция, преобразующая поток J_0 в освещенность на уровне z с учетом многократного рассеяния [2],

$$B^*(\lambda) = \frac{2R_z(\lambda) \cos i}{4 + (3 - x_1)(1 - r) \tau_z^\infty(\lambda)}, \quad (2.2)$$

где

$$R_z = 1 + \frac{3}{2} \cos i + \left(1 - \frac{3}{2} \cos i\right) e^{-\tau_z^\infty \sec i}. \quad (2.3)$$

Параметр x_1 характеризует вытянутость индикатрисы рассеяния:

$$x_1 = \frac{3}{2} \int_0^\pi x(\gamma) \sin \gamma \cos \gamma d\gamma,$$

где γ — угол рассеяния, x — индикатриса рассеяния, r — альbedo подстилающей поверхности.

Оптическая толщина атмосферы вычисляется по формуле

$$\tau_z^\infty = \tau_{o,p}(\lambda) e^{-\alpha z} + \tau_{o,a}(\lambda) e^{-\beta z}, \quad (2.4)$$

где $\tau_{o,p}$ — релейевская спектральная оптическая толщина, $\tau_{o,a}$ — аэрозольная спектральная оптическая толщина, $\alpha = 0,125$ 1/км, $\beta = 0,898$ 1/км [10].

В формуле (2.1) k_λ — логарифмический коэффициент поглощения озона по Вигру [13], ω_z — общее содержание озона от верхней границы атмосферы до данного уровня z по Элтерману (модель 1964) [14], i — зенитный угол солнца.

Поток прямой солнечной радиации S на горизонтальную поверхность с учетом однократного рассеяния и поглощения озоном в спектральном интервале 0,29—0,72 мкм рассчитывается по формуле

$$S_z = \int_{0,29}^{0,72} J_0(\lambda) \cos i e^{-\sec i [\tau_z^\infty(\lambda) + k_\lambda \omega_z]} d\lambda. \quad (2.5)$$

Потоки суммарной и прямой радиации на уровне z в спектральном интервале 0,72—5,0 мкм рассчитываются по формулам:

$$Q_z = \int_{0,72}^{5,0} J_0(\lambda) B^*(\lambda) T(X_{\text{H}_2\text{O}}) T(X_{\text{CO}_2}) d\lambda, \quad (2.6)$$

$$S_z = \int_{0,72}^{5,0} J_0(\lambda) \cos i e^{-\sec i [\tau_z^\infty(\lambda)]} T(X_{\text{H}_2\text{O}}) T(X_{\text{CO}_2}) d\lambda. \quad (2.7)$$

Функция пропускания $T(X)$, входящая в выражения (2.6) и (2.7), вычисляется по приближенной формуле [10]

$$T(X) = 1 - \frac{X}{a(\lambda)X + b(\lambda)}. \quad (2.8)$$

Коэффициенты a и b для различных участков спектра для H_2O и CO_2 приведены в работе К. С. Шифрина и О. А. Авасте [10]. Расчет взвешенных поглощающих масс X_k производится по формуле

$$X_k = \sqrt{W_k \sec i (p + l)^n} \Big|_{z_k}^\infty, \quad (2.9)$$

где

$$\overline{(p + l)^n} \Big|_{z_k}^\infty = \frac{W'_k}{W_k}; \quad (2.10)$$

$$W_k = \int_{z_k}^\infty \rho_n dz; \quad (2.11)$$

$$W'_k = \int_{z_k}^\infty \rho_n (p + l)^n dz; \quad (2.12)$$

n — коэффициент, учитывающий влияние переменности давления на величину поглощающей массы ($n=0,3$ для H_2O и $n=0,4$ для CO_2); ρ_n — плотность поглощающего вещества; W_k^∞ — содержание поглощающего вещества в столбе воздуха от верхней границы атмосферы до уровня z_k .

Таким образом, с помощью выражений (2.9) и (2.10) рассчитываются взвешенные поглощающие массы водяного пара.

Для расчета поглощающих масс CO_2 используются формулы, приведенные в работе [10].

2. Для вычисления эффективных потоков коротковолновой радиации на различных уровнях в атмосфере необходимо знать величину потока отраженной радиации.

Яркость отраженного потока вычисляется по формуле

$$B(\vartheta, \varphi, i) = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} J_0(\lambda) r(\lambda) B^*(\lambda) T_1(\vartheta, \varphi, i, \lambda) d\lambda. \quad (2.13)$$

Для потока отраженной радиации имеем

$$R(i) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} B(\vartheta, \varphi, i) \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (2.14)$$

где ϑ — угол визирования, φ — азимут, T_1 — функция, описывающая ослабление радиации в атмосфере.

В спектральном интервале 0,29—0,72 мкм без учета зависимости от азимута функция T_1 представляется в виде

$$T_1 = e^{-[k_{\lambda} \omega_k^{\infty} \sec i + (\tau_i^k + k_{\lambda} \omega_i^k) \sec \vartheta]}. \quad (2.15)$$

В спектральном интервале 0,72—5,0 мкм использовалось следующее выражение для T_1 :

$$T_1(\vartheta, i, \lambda) = e^{-\tau_i^k \sec \vartheta} T[X'_{\text{H}_2\text{O}}(\vartheta, i, \lambda)] T[X'_{\text{CO}_2}(\vartheta, i, \lambda)]. \quad (2.16)$$

В выражении (2.15) учтено однократное рассеяние отраженного под углом ϑ луча, поглощение падающего и отраженного луча водяным паром и углекислым газом.

Поглощающие массы $X'_{\text{H}_2\text{O}}$ и X'_{CO_2} рассчитываются для всего пути, пройденного лучом от верхней границы атмосферы до уровня z_k по формуле

$$X' = X_l^{\infty}(i) + X_l^k(\vartheta), \quad (2.17)$$

где X_l^{∞} — поглощающая масса на пути луча от верхней границы атмосферы до отражающей поверхности l , X_l^k — поглощающая масса на пути отраженного луча от отражающей поверхности l до уровня z_k .

На рис. 1 представлена система использованных обозначений и траектория луча до уровня z_k . Функция $T(X')$ вычисляется по формуле (2.8). Оптическая толщина τ_l^k рассчитывается по формуле

$$\tau_l^k = \tau_l^{\infty} - \tau_k^{\infty} \quad (2.18)$$

с учетом выражения (2.4).

Выполним в (2.14) численное интегрирование по ϑ . При этом, следуя работе [7], разобьем интервал интегрирования на четыре части: 0—30, 30—50, 50—70, 70—90°. Тогда, если пренебречь зависимостью яркости от азимута, получим

$$R = 2\pi \left\{ B(20^\circ, i) \int_0^{30^\circ} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + B(40^\circ, i) \int_{30^\circ}^{50^\circ} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + \right. \\ \left. + B(60^\circ, i) \int_{50^\circ}^{70^\circ} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta + B(80^\circ, i) \int_{70^\circ}^{90^\circ} \cos \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \right\}. \quad (2.19)$$

В результате после вычисления интегралов для потока отраженной радиации получим следующее выражение:

$$R = 2\pi \{ B(20^\circ, i) 0,0670 + B(40^\circ, i) 0,1115 + \\ + B(60^\circ, i) 0,1500 + B(80^\circ, i) 0,1710 \}. \quad (2.20)$$

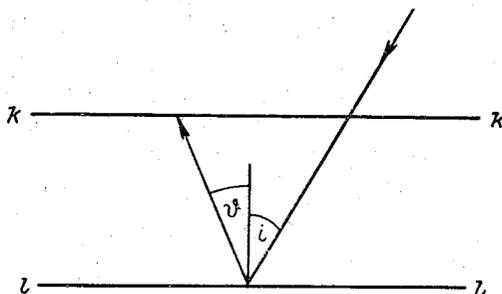


Рис. 1.

Альbedo отраженной поверхности примем независимым от λ . В этом случае яркость отраженного под углом ϑ луча вычисляется путем численного интегрирования по спектру.

Для $\vartheta = 20^\circ$

$$B(20^\circ, i) = \frac{r}{\pi} \{ J_0(0,72) \Delta\lambda B^*(0,72) T_1(20^\circ, i, 0,72) + \\ + J_0(0,76) \Delta\lambda B^*(0,76) T_1(20^\circ, i, 0,76) + \dots + \\ + J_0(4,5) \Delta\lambda B^*(4,5) T_1(20^\circ, i, 4,5) \}. \quad (2.21)$$

Аналогичным образом записываются выражения для $B(40^\circ, \lambda)$; $B(60^\circ, \lambda)$; $B(80^\circ, \lambda)$.

3. Для проверки качества предлагаемой схемы расчета потоков коротковолновой радиации по предложению К. Я. Кондратьева был использован материал аэростатных наблюдений, проведенных сотрудниками кафедры физики атмосферы ЛГУ. В качестве исходного материала использовались данные четырех полетов. Наблюдения производились в слое от земной поверхности до высоты 30 км. В трех

полетах (11 июля 1964 г., 22 июля 1964 г. и 21 октября 1965 г.) были безоблачные условия. В одном полете (23 октября 1964 г.) верхняя граница облачности была расположена на высоте 1,8—2 км. При подъеме аэростата регистрировались величинны потоков радации, высоты солнца и метеорологические характеристики. По данным на земных наблюдений определено альбедо подстилающей поверхно-сти в районе аэростата наблюдений.

Таким образом, в расчетах использовались следующие измерен-ные величины:

- 1) значения давления (мм рт. ст.) на 32 уровнях;
- 2) значения угрюлости водяного пара (мм рт. ст.) на тех же уровнях;

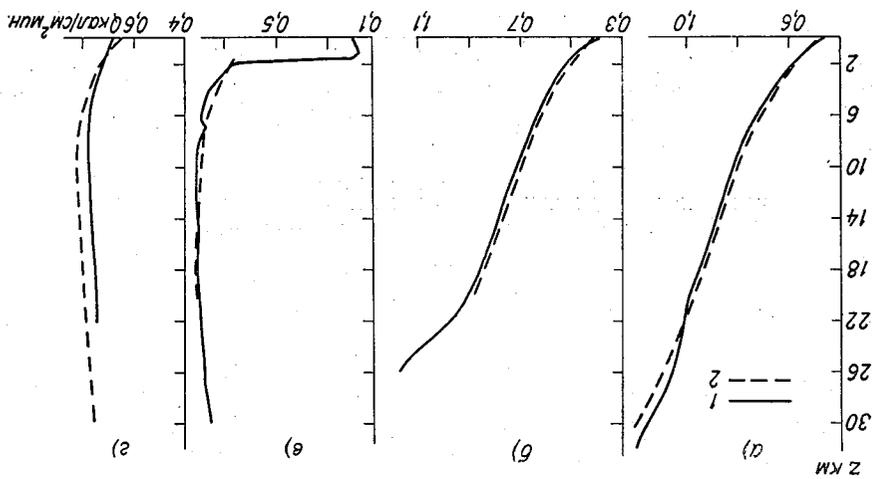


Рис. 2. Потоки суммарной радации на горизонтальную поверхность. а — 11/11/1964 г., б — 22/11/1964 г., в — 23/10/1964 г., г — 21/10/1965 г.; 1 — измеренные, 2 — рассчитанные.

- 3) набор высот z км, соответствующих восьми уровням, для ко-торых рассчитываются величинны потоков;
- 4) набор высот солнца;
- 5) альбедо подстилающей поверхности.

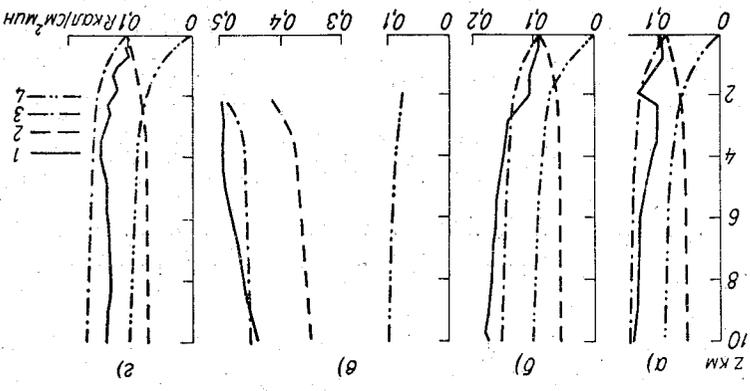
Расчеты были проведены при значении солнечной постоянной $1,94 \text{ ккал/см}^2 \text{ мин}$. [15].

На рис. 2—4 представляются величинны рассчитанных и фактиче-ских потоков суммарной и прямой радации на горизонтальную по-верхность, а также потоков отраженной радации.

Сравнение кривых показывает удовлетворительное совпадение рассчитанных и измеренных величин. Наибольшие расхождения от-мечаются в величинах отраженного потока. Это обстоятельство мо-жет быть объяснено следующим образом. В процессе наблюдений регистрируется поток отраженной радации, состоящий из потока,

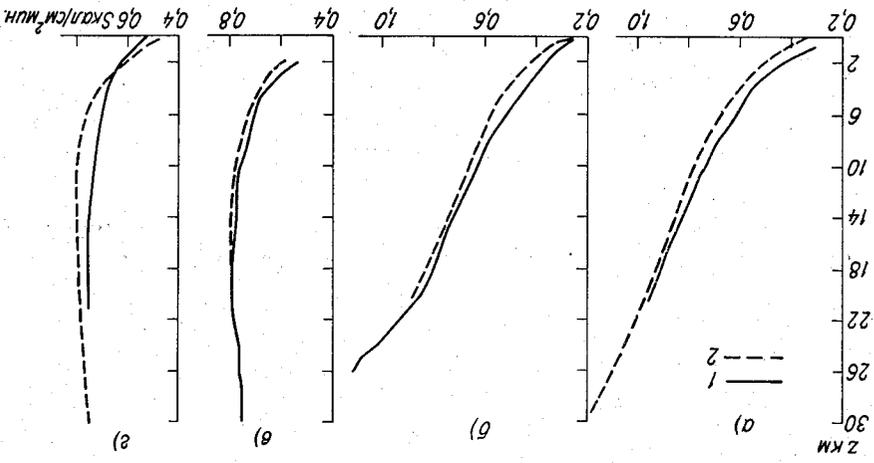
по формулам, предложенным И. Н. Минниным и К. С. Шифриным. Однако расчеты по этим формулам достаточно громоздки. Поэтому мы воспользовались расчетами, выполненными Н. П. Пятовской и

Рис. 4. Потоки отраженной радиации.
а) 11/VII 1964 г., б) 22/VII 1964 г., в) 23/X 1964 г., г) 21/X 1965 г.;
1) замеренные, 2) рассчитанные, 3) $R+D_1$, 4) D_1 .



Формулы (2.20) и (2.21) дают только первую составную часть потока. Вторая его часть может быть учтена, если рассчитать дымку

Рис. 3. Потоки прямой радиации на горизонтальной поверхности.
а - 11/VII 1964 г., б - 22/VII 1964 г., в - 23/X 1964 г., г - 21/X 1965 г.;
1 - замеренные, 2 - фактические.



отраженную земной поверхностью, и потока, рассеянного назад слоем атмосферы от поверхности земли до данного уровня, называемого дымкой и обозначенного здесь через D_1 .

К. С. Шифриным [11] для различных условий подстилающей поверхности, и выбрали из них те, которые соответствуют наиболее близким к использованным в наших расчетах значениям альbedo подстилающей поверхности. Поскольку яркость дымки значительно зависит от альbedo, то эта составная часть отраженного потока, взятая приближенно, может вносить ошибки в значение R .

По полученным значениям суммарной и отраженной радиации рассчитан коротковолновый баланс $F_1 = R - Q$ в безоблачных условиях, приведенный в табл. 1. Для сравнения приведен коротковолновый баланс по данным наблюдений.

Представляет также интерес провести сопоставление величин притока радиации к слою.

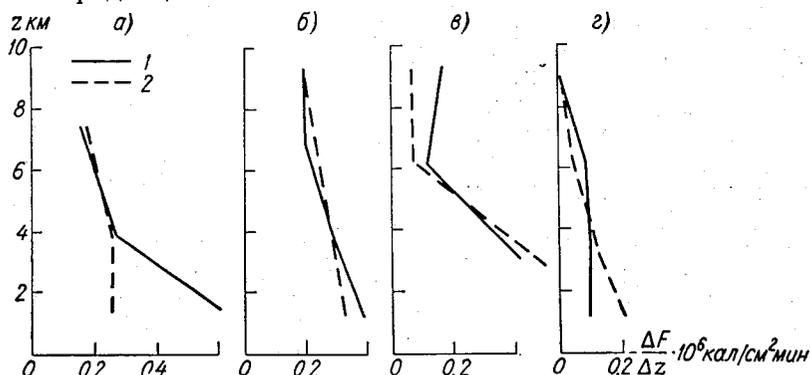


Рис. 5. Приток радиации к единичным условиям.

a — 22/VII 1964 г., *б* — 11/VII 1964 г., *в* — 23/X 1964 г., *г* — 21/X 1965 г.;
1 — измеренные, 2 — рассчитанные.

Таблица 1

Измеренные и рассчитанные величины коротковолновой радиации

z км	22/VII 1964		11/VII 1967		23/X 1964		21/X 1965	
	F_1 рассч	F_1 изм						
0	-0,3155	-0,2830	-0,3920	-0,357	-0,1850	-0,1850	-0,5347	-0,5710
2 200							-0,5830	-0,5910
2 500			-0,4732	-0,4560				
2 600	-0,3828	-0,4200						
4 000					-0,2707	-0,2610	-0,6073	-0,6090
5 000	-0,4770	-0,4860	-0,5437	-0,5290				
8 400					-0,3293	-0,3520	-0,6278	-0,6480
8 600			-0,6273	-0,6020				
10 000	-0,5356	-0,5630	-0,6542	-0,6300	-0,3396	-0,3780	-0,6288	-0,6370

На рис. 5 представлены графики притока $\Delta F_1/\Delta z$, где ΔF_1 вычислялось как разность значений коротковолнового баланса на двух уровнях. Значение $\Delta F_1/\Delta z$ отнесено к середине слоя.

Отрицательные значения притока физического смысла не имеют. Они получены в результате несинхронности наблюдений на разных уровнях, связанной с изменением высоты солнца.

Для количественных оценок расхождений в потоках и притоках были вычислены отношения $S_{\text{рассч}}/S_{\text{изм}}$ и $Q_{\text{рассч}}/Q_{\text{изм}}$ (табл. 2) и отношения $F_1_{\text{рассч}}/F_1_{\text{изм}}$, $\Delta F_1_{\text{рассч}}/\Delta F_1_{\text{изм}}$ (табл. 3).

Таблица 2 показывает, что расхождения величин потоков находятся в пределах 0—20%. В одной точке расхождение составляет 28%. Наибольшие различия приходится на нижние слои атмосферы, до 2—2,5 км. Это обстоятельство частично можно объяснить, очевидно, отсутствием в расчетной схеме учета поглощения радиации аэрозолями.

Хотя вопрос о поглощении аэрозолями в настоящее время еще не исследован в достаточной мере, отдельные косвенные указания на влияние этого фактора имеются [16]. Однако этот вопрос нуждается в тщательном исследовании.

Из табл. 3 следует, что расхождения в величинах притока могут быть довольно значительны. Однако анализ показал, что большие ошибки наблюдаются в случаях малой величины радиационных притоков тепла.

Таким образом, результаты сопоставления показывают, что рассмотренная схема расчета потоков S , Q и R коротковолновой радиации может быть применена как для расчетов по данным наблюдений в отдельных конкретных случаях, так и в модели общей циркуляции атмосферы.

4. Приведенные выше формулы были использованы для выяснения влияния альбедо подстилающей поверхности, индикатрисы рассеяния, осреднения зенитного угла и ограниченности сведений о влажности на величину потока и притока радиации в спектральном интервале 0,7—5 мкм.

В численном эксперименте с вариациями альбедо земной поверхности рассмотрены величины потока и притока радиации при четырех значениях альбедо: 0,16; 0,25; 0,6; 0,8.

В табл. 4 представлены потоки суммарной и отраженной радиации, эффективный поток F_1 на данном уровне z , приток к слою ΔF_1 , отношение притоков при разных значениях альбедо. Из рассмотренной таблицы следует, что влияние альбедо подстилающей поверхности на величину притока радиации к отдельным слоям атмосферы невелико. В основном влияние альбедо проявляется в нижних слоях атмосферы. Примеры в таблице, относящиеся к отдельным реальным случаям распределения водяного пара, показывают, что изменение альбедо от значения 0,16 до 0,8 приводит к различию в притоках к нижнему слою атмосферы всего в 25%. Отсюда следует, что требования к точности задания альбедо при вычислении притока радиации не должны быть высокими. Например, выбор альбедо равным 0,25 вместо 0,16 представляется допустимым, так же как замена величин альбедо 0,6 и 0,8 их средним значением, равным 0,7 [29].

Отношение рассчитанных и измеренных значений потоков

21/X 1965			23/X 1964			22/VII 1964			11/VII 1964		
z км	$S_{расч}/S_{изм}$	$Q_{расч}/Q_{изм}$	z км	$S_{расч}/S_{изм}$	$Q_{расч}/Q_{изм}$	z км	$S_{расч}/S_{изм}$	$Q_{расч}/Q_{изм}$	z км	$S_{расч}/S_{изм}$	$Q_{расч}/Q_{изм}$
0	0,87	0,942	0			0	1,00	1,05	0	1,24	1,08
1,0	0,97	1,00	1,0			1,3	1,14	0,95	1,3	1,28	1,06
1,6	1,00	1,01	1,6			2,0	1,15	0,98	2,0	1,19	1,05
2,2	1,02	1,02	2,2	1,09	0,99	2,6	1,16	0,98	2,5	1,14	1,03
3,0	1,02	1,02	2,6	1,08	0,98	3,6	1,16	0,98	3,5	1,11	1,01
4,0	1,04	1,02	3,0	1,07	0,97	5,0	1,12	0,97	4,0	1,07	0,98
5,0	1,04	1,02	3,3	1,04	0,95	7,0	1,08	0,97	5,0	1,10	1,00
7,0	1,07	1,03	4,0	1,04	0,97	9,0	1,06	0,97	6,0	1,06	0,98
8,4	1,05	1,02	5,0	1,00	0,96	10,0	1,05	0,97	8,0	1,05	0,99
10,0	1,05	1,03	7,0	1,01	0,98	16,0	1,00	0,97	8,6	1,06	1,01
14,0	1,05	1,05	8,4	1,01	0,97	20,0	1,02	0,97	10,0	1,05	1,00
26,0			10,0	1,00	0,97				11,0	1,03	0,98
30,0			16,0	0,99	0,98				15,0	1,01	0,98
			20,0	0,99	1,00				27,0		1,01
									30,0		1,03

Таблица 3

Отношение рассчитанных и измеренных значений притоков

22/VII 1964			11/VII 1967			23/X 1964			21/X 1965		
z км	$F_{расч}/F_{изм}$	$\Delta F_{расч}/\Delta F_{изм}$	z км	$F_{расч}/F_{изм}$	$\Delta F_{расч}/\Delta F_{изм}$	z км	$F_{расч}/F_{изм}$	$\Delta F_{расч}/\Delta F_{изм}$	z км	$F_{расч}/F_{изм}$	$\Delta F_{расч}/\Delta F_{изм}$
0	1,1148		0	1,0980		2,2	1,0		0	0,9364	
		0,419			0,818			1,1277			2,4147
2,6	0,9114		2,50	1,0377		4,0	1,0371		2,20	0,9865	
		0,974			0,965			0,6482			1,350
5,0	0,9198		5,00	1,0278		8,4	0,9355		4,00	0,997	
		1,143			1,14			0,3969			0,525
10,0	0,9513		8,60	1,0420		10,0	0,8984		8,40	0,9688	
					0,960						-0,0909
			10,00	1,0384					10,00	0,9871	

243560

Верхняя граница слоя зондирования, км		Слой, км	Альbedo																																																																																																						
			0,16						0,25																																																																																																
			Q	R	F ₁	ΔF ₁	Q	R	F ₁	ΔF ₁																																																																																															
10	0,0	0—2,5	0,2433	0,03918	-0,2041	-0,0795	0,2445	0,06112	-0,1834	-0,0818	2,5	0,0	0,3164	0,03276	-0,2836	-0,0547	0,3166	0,04873	-0,2652	-0,0553	5,0	0,0	0,3700	0,03164	-0,3383	-0,0605	0,7202	0,04657	-0,3205	-0,0606	8,6	0,0	0,4302	0,03136	-0,3988	-0,0179	0,4303	0,04612	-0,3811	-0,0179	10,0	0,0	0,4481	0,03132	-0,4168	-0,0179	0,4481	0,04606	-0,3989	-0,0179	30	0,0	0—8	0,2457	0,03931	-0,2064	-0,1746	0,2469	0,06172	-0,1852	-0,1778	8,0	0,0	8—15	0,4126	0,03156	-0,3810	-0,0677	0,4126	0,04955	-0,3630	-0,0678	15,0	0,0	15—27	0,4801	0,03140	-0,4487	-0,1084	0,4801	0,04929	-0,4308	-0,1084	27,0	0,0	27—30	0,5884	0,03133	-0,5571	-0,0374	0,5884	0,04918	-0,5392	-0,0374	30,0	0,0		0,6258	0,03132	-0,5945		0,6258	0,04918	-0,5766	-0,0374

Верхняя граница слоя зондирования, км	Уровень, км	Слой, км	Альбедо												$\Delta F_{1(0,8)} / \Delta F_{1(0,16)}$	$\Delta F_{1(0,6)} / \Delta F_{1(0,16)}$	$\Delta F_{1(0,25)} / \Delta F_{1(0,16)}$						
			0,6						0,8														
			Q	R	F ₁	ΔF_1	Q	R	F ₁	ΔF_1	Q	R	F ₁	ΔF_1									
10	0,0	0-2,5	0,2490	0,1494	-0,09960	-0,0922	0,2518	0,2014	0,0504	-0,0988	0,2515	0,1509	-0,1006	-0,1912	0,2542	0,2034	-0,0508	-0,1990	1,029	1,150	1,017	1,138	
	2,5	2,5-5,0	0,3176	0,1258	-0,1958	-0,0678	0,3182	0,1695	-0,1487	-0,0679	0,4129	0,1212	-0,2918	-0,0679	0,4131	0,1633	-0,2498	-0,0981	1,011	1,057	1,061	1,006	
	5,0	5,0-8,6	0,3706	0,1215	-0,2491	-0,0673	0,3708	0,1637	-0,2071	-0,1084	0,4305	0,1204	-0,3101	-0,1084	0,4803	0,1625	-0,3179	-0,1084	1,002	1,008	1,000	1,000	
	8,6	8,6-10,0	0,4305	0,1204	-0,3101	-0,0179	0,4307	0,1621	-0,2686	-0,0375	0,4483	0,1202	-0,3281	-0,0375	0,5884	0,1621	-0,4263	-0,0375	0,9891	1,000	1,000	1,000	1,003
	10,0		0,4483	0,1202	-0,3281		0,4484	0,1621	-0,2863		0,6258	0,1202	-0,5056		0,6259	0,1621	-0,4638						
30	0,0	0-8	0,2515	0,1509	-0,1006	-0,1912	0,2542	0,2034	-0,0508	-0,1912	0,2515	0,1509	-0,1006	-0,1912	0,2542	0,2034	-0,0508	-0,1912	1,017	1,093	1,017	1,138	
	8,0	8-15	0,4129	0,1212	-0,2918	-0,0679	0,4131	0,1633	-0,2498	-0,0679	0,4129	0,1212	-0,2918	-0,0679	0,4131	0,1633	-0,2498	-0,0981	1,061	1,001	1,061	1,006	
	15,0	15-27	0,4802	0,1205	-0,3597	-0,1084	0,4803	0,1625	-0,3179	-0,1084	0,4802	0,1205	-0,3597	-0,1084	0,4803	0,1625	-0,3179	-0,1084	1,000	1,000	1,000	1,000	
	27,0	27-30	0,5884	0,1203	-0,4681	-0,0375	0,5884	0,1621	-0,4263	-0,0375	0,5884	0,1203	-0,4681	-0,0375	0,5884	0,1621	-0,4263	-0,0375	1,000	1,000	1,000	1,000	
	30,0		0,6258	0,1202	-0,5056		0,6259	0,1621	-0,4638		0,6258	0,1202	-0,5056		0,6259	0,1621	-0,4638		1,000 ¹	1,003	1,000 ¹	1,003	

¹ Колебания величины связаны с ошибками расчета.

Другая практически важная сторона методики расчета потоков состоит в необходимости оценок погрешностей, которые вызваны ограниченностью исходных данных о влажности, используемых для расчета поглощающих масс. С этой целью из 32 имевшихся в распоряжении значений, которые описывали профиль влажности в рассматриваемом слое, были выбраны шесть значений. Остальные 26 значений, которые использовались в расчете потоков, были получены путем интерполяции.

Таким образом, расчеты потоков радиации проводились в двух вариантах. Первый вариант — поглощение массы рассчитывалось по 32 значениям влажности, взятым из данных наблюдений. Второй вариант — поглощающие массы рассчитывались с использованием интерполированных значений.

Для интерполяции была применена экспоненциальная зависимость влажности от σ , где $\sigma = p/p_0$ — линейная зависимость давления от высоты.

Полученные значения потоков представлены в табл. 5. Сравнение этих величин показывает, что использование интерполированных значений влажности и давления приводит к расхождениям в величине потоков прямой и суммарной радиации и в величине притоков, не превосходящим нескольких процентов. Таблица 5 содержит результаты расчетов для двух реальных случаев при достаточно гладком профиле влажности. В реальных условиях особенности в распределении влажности обычно имеют место в случае появления облачности, однако при этом поглощающие массы должны быть рассчитаны отдельно для надоблачного и подоблачного слоев.

Таблица 5

Уровень, км	S		Q		S		Q	
	с интер- поляцией	без интер- поляции						
0	0,2886	0,2864	0,3451	0,3426	0,1664	0,1653	0,2124	0,2110
1,6	0,3717	0,3702	0,3911	0,3896	0,2323	0,2316	0,2527	0,2520
2,6	0,3882	0,3959	0,4089	0,4067	0,2750	0,2705	0,2847	0,2800
3,5	0,4221	0,4107	0,4191	0,4177	0,2976	0,2932	0,3038	0,2993
5,0	0,4264	0,4258	0,4307	0,4301	0,3238	0,3223	0,3279	0,3264
7,0	0,4336	0,4343	0,4365	0,4372	0,3511	0,3491	0,3539	0,3519
16,0	0,4256	0,4270	0,4266	0,4279	0,4321	0,4334	0,4330	0,4344
20,0	0,4202	0,4197	0,4206	0,4202	0,4822	0,4809	0,4828	0,4815

Для выяснения влияния формы индикатрисы рассеяния были выполнены расчеты при значениях параметра μ_1 , равных 0,6, 1,2 и 2,0. Результаты показали, что при этом расхождения в величине суммарной радиации составляют 5—8%.

Выводы, полученные в статье, позволяют включать в расчеты притока коротковолновой радиации приближенные значения альбедо подстилающей поверхности и пользоваться небольшим числом уровней по вертикали в расчетах потоков и притоков радиации.

2. Потоки длинноволновой радиации

Расчет потоков длинноволновой радиации производится по известным формулам [6, 17].

Для потоков на уровне z , направленных сверху вниз, в безоблачных условиях используется выражение

$$A_z^\infty = E [T(m)] + \int_{E(m)}^{E(M)} D(u - m) dE [T(u)]. \quad (2.22)$$

Для потоков, направленных снизу вверх,

$$B_z^s = E [T(m)] - \int_0^{E(m)} D(m - u) dE [T(u)] + (1 - d) \int_0^{E(M)} D(u + m) dE [T(u)], \quad (2.23)$$

где

$$m = \int_0^z \rho_n dz, \quad (2.24)$$

$$M = \int_0^\infty \rho_n dz, \quad (2.25)$$

D — функция пропускания, E — излучение абсолютно черного тела, m — масса поглощающего вещества от поверхности земли до уровня z , M — содержание поглощающего вещества во всей толще атмосферы, ρ_n — плотность поглощающего вещества.

В качестве функции пропускания используется предложенная Ф. Н. Шехтер интегральная функция, учитывающая зависимость поглощения от количества водяного пара, углекислого газа и озона.

Уточненный вариант функции пропускания Шехтер [18] имеет вид

$$D(\text{H}_2\text{O}, \text{CO}_2, \text{O}_3) = D(\text{H}_2\text{O}, \text{CO}_2) - A(\text{O}_3), \quad (2.26)$$

где $D(\text{H}_2\text{O}, \text{CO}_2)$ — функция пропускания для водяного пара и углекислого газа одновременно, $A(\text{O}_3)$ — функция поглощения для озона.

Выражение для $D(\text{H}_2\text{O}, \text{CO}_2)$ построено так, что входным параметром является только масса водяного пара, а влияние CO_2 при

этом учитывается автоматически на основании функциональной связи между массами H_2O и CO_2 :

$$D(H_2O, CO_2) = D(W) = D^*(W) - \Delta D, \quad (2.27)$$

где

$$D^* = 0,471e^{-0,695 \sqrt{W}} + 0,529e^{-8,94 \sqrt{W}}. \quad (2.28)$$

W — эффективная поглощающая масса водяного пара, определяемая с помощью выражения

$$W = \frac{1}{\sqrt{p_0}} \int_0^z \rho_n \sqrt{p} dz. \quad (2.29)$$

Значения поправки ΔD следующие:

$W \dots \dots$	0,0001	0,0003	0,001	0,003	0,01	0,03	0,1	0,3	1	3
$100\Delta D \dots$	7,4	8,2	8,5	8,9	9,2	7,4	5,2	2,2	0,2	0

Вычисление эффективных поглощающих масс производится по формулам, полученным Р. Л. Каганом [19] из (2.29) с использованием уравнения состояния и уравнения статики и приспособленным для расчета по данным об упругости водяного пара и давлении на различных уровнях:

$$W_i = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta W_j, \quad (2.30)$$

$$\Delta W_j = 0,01 \left(\frac{l_j}{\sqrt{p_j}} + \frac{l_{j+1}}{\sqrt{p_{j+1}}} \right) (p_j - p_{j+1}) \quad (2.31)$$

при $i=2, 3, 4, \dots; j=1, 2, 3, \dots$

Здесь i — число уровней, учитываемых при расчете поглощающих масс.

Функция поглощения для озона представлена следующими данными:

$m_{O_3} \dots \dots$	0,01	0,033	0,06	0,1	0,2	0,4	0,6
$100A(O_3) \dots$	0,4	0,9	1,6	2,3	3,3	4,1	4,4

Вычисление интегралов, входящих в (2.22) и (2.23), по формуле Симпсона позволяет получить приближенные выражения для потоков (см. [6]). Эффективные потоки длинноволновой радиации F_2 на каждом уровне вычисляются в виде $F_2 = B - A$.

3. Расчет потоков в облачных условиях

Используемая схема учета облачности [5, 6] состоит в следующем: поток на уровне z вычисляется как сумма потоков, относящихся к облачной и безоблачной частям небосвода и взятых с соответствующими весами.

При трехслойной облачности в поток на уровне z входят потоки от всех облачных слоев в соответствии со схемой, представленной в качестве примера на рис. 6.

В общем случае поток сверху на уровне z вычисляется как сумма:

$$F_z^\dagger = (A_z^\infty + Q_z^\infty) \left(1 - \sum_{i=1}^3 \widehat{C}_i \right) + (A_z^{i_1} + Q_z^{i_1}) \widehat{C}_1 + \\ + (A_z^{i_2} + Q_z^{i_2}) \widehat{C}_2 + (A_z^{i_3} + Q_z^{i_3}) \widehat{C}_3. \quad (2.32)$$

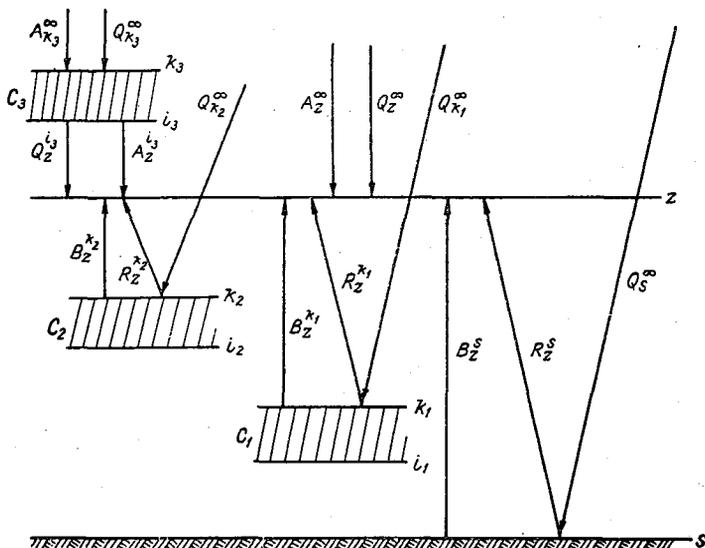


Рис. 6. Схема направлений потоков радиации в облачных условиях.

Потоки, направленные снизу вверх, вычисляются по формуле

$$F_z^\ddagger = (B_z^s + R_z^s) \left(1 - \sum_{i=1}^3 \widetilde{C}_i \right) + (B_z^{k_1} + R_z^{k_1}) \widetilde{C}_1 + \\ + (B_z^{k_2} + R_z^{k_2}) \widetilde{C}_2 + (B_z^{k_3} + R_z^{k_3}) \widetilde{C}_3. \quad (2.33)$$

Смысл входящих в выражения (2.32) и (2.33) величин представлен ниже: $A_z^{i_1}$, $A_z^{i_2}$, $A_z^{i_3}$ — потоки длинноволновой радиации от нижней границы облаков нижнего, среднего и верхнего ярусов соответственно; $B_z^{k_1}$, $B_z^{k_2}$, $B_z^{k_3}$ — потоки длинноволновой радиации, достигающие уровня z , от верхней границы облаков нижнего, среднего и верхнего ярусов соответственно; $Q_z^{i_1}$, $Q_z^{i_2}$, $Q_z^{i_3}$ — потоки коротковол-

новой радиации, пропущенной облаками нижнего, среднего и верхнего ярусов; $R_z^{k_1}$, $R_z^{k_2}$, $R_z^{k_3}$ — потоки коротковолновой радиации, отраженной от верхней границы облаков нижнего, среднего и верхнего ярусов соответственно, и достигшие уровня z ; \widehat{C}_i — балл облачности, видимой снизу с данного уровня z ; \widetilde{C}_i — балл облачности, видимой сверху с данного уровня z .

Для пересчета реальной облачности C_i в видимую снизу или сверху при $i=1$ для облаков нижнего яруса, при $i=2$ для облаков среднего яруса и при $i=3$ для облаков верхнего яруса используются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} C_1 &= \widehat{C}_1, \\ C_2 &= \frac{\widehat{C}_2}{1 - \widehat{C}_1}, \\ C_3 &= \frac{\widehat{C}_3}{1 - (\widehat{C}_2 + \widehat{C}_3)}; \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{\widetilde{C}_1}{1 - (\widetilde{C}_2 + \widetilde{C}_3)}, \\ C_2 &= \frac{\widetilde{C}_2}{1 - \widetilde{C}_3}, \\ C_3 &= \widetilde{C}_3. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Если один из трех облачных слоев отсутствует, то в формулах (2.32) — (2.35) соответствующее значение C_i полагается равным нулю и формулы автоматически переходят в соответствующие данному частному случаю.

Эффективный поток в облачных условиях вычисляем как

$$F_z = F_z^\uparrow - F_z^\downarrow.$$

4. Вычисление радиационных притоков тепла

Для получения расчетной формулы притоков по данным на ограниченном числе уровней предполагается, что эффективный поток F_1 может быть представлен квадратичной функцией вертикальной координаты в виде:

$$F_k = a + b(\sigma - \sigma_k) + c(\sigma - \sigma_k)^2.$$

Найдем выражения коэффициентов a , b , c через значения потоков на уровнях $k-1$, k , $k+1$. Если ввести обозначения

$$\sigma_{k+1} - \sigma_k = \Delta\sigma_{k+1} = p,$$

$$\sigma_k - \sigma_{k-1} = \Delta\sigma_k = q,$$

то получим

$$b = \frac{q^2 F_{k+1} - p^2 F_{k-1} - F_k (q^2 - p^2)}{pq(p+q)}.$$

Так как $\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right)_{\sigma=\sigma_k} = b$, то

$$\left.\frac{\partial F}{\partial \sigma}\right|_{\sigma=\sigma_k} = \frac{q}{p(p+q)} F_{k+1} - \frac{p}{q(p+q)} F_{k-1} - \frac{q-p}{pq} F_k.$$

Радиационный приток тепла Φ выражается через производную $\frac{\partial F}{\partial \sigma}$ следующим образом:

$$\Phi = \frac{g}{c_p p_s} \frac{\partial F}{\partial \sigma}.$$

Расчет притоков производится по следующим исходным данным:

- 1) распределению влажности,
- 2) распределению давления,
- 3) альбедо подстилающей поверхности и облаков,
- 4) поглощающим свойствам облаков.

§ 3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ МОДЕЛИ

1. Учет силы трения, притоков тепла и влаги

Изменения скорости ветра, температуры и влажности, обусловленные вертикальной турбулентной диффузией и лучистым притоком тепла, описываются в данной схеме следующими уравнениями:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{g}{p_s} \frac{\partial \tau_\lambda}{\partial \sigma}, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{g}{p_s} \frac{\partial \tau_\theta}{\partial \sigma}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{g}{c_p p_s} \frac{\partial}{\partial \sigma} (\Pi_\tau + F), \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{g}{p_s} \frac{\partial \Pi_q}{\partial \sigma}. \quad (3.4)$$

Примем, что высота планетарного пограничного слоя совпадает с уровнем σ_{k-2} , а внутри пограничного слоя расположены два

расчетных уровня¹, σ_{k-1} и σ_k , вне этого слоя сила трения и турбулентные притоки тепла равны нулю. Следовательно,

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \frac{\partial v_k}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial q_k}{\partial t} = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial T_k}{\partial t} = \frac{g}{p_s c_p} \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)_{\sigma_k} = \Phi(\sigma_k). \quad (3.6)$$

Возьмем в качестве вертикальной координаты вместо σ геометрическую высоту z и запишем основные уравнения для пограничного слоя в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_\lambda}{\partial z}, \quad (3.1')$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_\theta}{\partial z}, \quad (3.2')$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{c_p \rho} \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_\tau + F), \quad (3.3')$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi_q}{\partial z}. \quad (3.4')$$

Пусть δ означает высоту пограничного слоя, h — высоту приземного слоя, H — высоту уровня σ_{k-1} , z_0 — шероховатость подстилающей поверхности. Внутри приземного слоя ($z_0 \leq z \leq h$)

$$\frac{\partial \tau_\lambda}{\partial z} = \frac{\partial \tau_\theta}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_\tau + F) = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \Pi_\tau(z_0) + F(z_0) &= \Pi_\tau(h) + F(h); \\ \tau_\lambda(z_0) &= \tau_\lambda(h); \quad \tau_\theta(z_0) = \tau_\theta(h). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Введем в рассмотрение масштабы скорости ветра u_* , температуры T_* и удельной влажности q_* по формулам:

$$\tau(z_0)/\rho = u_*^2, \quad \Pi_\tau(z_0) = -c_p \rho b u_* T_*,$$

$$\Pi_q(z_0) = -b \rho u_* q_*,$$

где b — постоянная Кармана.

Сформулируем граничные условия.

а) На верхней границе пограничного слоя (т. е. при $z = \delta$)

$$\tau_\lambda = \tau_\theta = 0; \quad \Pi_\tau = \Pi_q = 0; \quad \frac{\partial \Pi_\tau}{\partial z} = \frac{\partial \Pi_q}{\partial z} = 0. \quad (3.8)$$

¹ Уровень σ_k совпадает с поверхностью земли.

Тогда, согласно (3.5) и (3.6), для этой границы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial q}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \Phi(\delta). \quad (3.9)$$

б) На верхней границе приземного слоя (т. е. при $z=h$) граничные условия для суши и океана сформулируем отдельно.

Для суши. Согласно [1], для зимних условий можно принять, что испарение и поток тепла в почву равны нулю. Следовательно,

$$q_* = 0. \quad (3.10)$$

Но тогда уравнение теплового баланса для поверхности суши запишется в виде

$$(\Pi_T + F)_{z=z_0} = 0.$$

Это уравнение, согласно (3.7), можно переписать в ином виде:

$$c_p \rho k u_* T_* = F. \quad (3.11)$$

Для океана. Будем считать известными, согласно климатическим данным, температуру поверхности океана $T_s = T(z_0)$ и насыщающее значение удельной влажности $q_s = q^{\max}[T(z_0)]$.

Проинтегрируем уравнения (3.1')—(3.4') по z в пределах от h до δ . Тогда, приняв во внимание граничные условия (3.8), получим

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -u_*^2 \cos \alpha, \quad (3.1'')$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = -u_*^2 \sin \alpha, \quad (3.2'')$$

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = -k u_* T_* - \frac{1}{c_p \rho} [F(h) - F(\delta)], \quad (3.3'')$$

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial t} = -k u_* q_*. \quad (3.4'')$$

Здесь α — угол между направлениями вектора напряжения трения вблизи подстилающей поверхности и касательной к кругу широты, а также введено обозначение

$$\bar{\chi}(u, v, T, q) \equiv \int_h^\delta \chi dz.$$

Аппроксимируя χ полиномом четвертой степени по z , удовлетворяющим всем граничным условиям (3.8), получим

$$\bar{\chi} = a_1 \chi(H) + a_2 \chi(h) + a_3 \chi(\delta), \quad (3.12)$$

где

$$a_1 = (\delta - h) c \left(\frac{\delta - h}{\delta - H} \right)^3,$$

$$a_2 = (\delta - h) \left(\frac{1}{4} - c \right),$$

$$a_3 = (\delta - h) \left\{ \frac{3}{4} + c \left[1 - \left(\frac{\delta - h}{\delta - H} \right)^3 \right] \right\},$$

$$c = \frac{\delta - h}{20(H - h)}.$$

Если $(H - h) \ll \delta$, то с достаточной точностью имеем

$$a_1 = (\delta - h)(c - 0,15),$$

$$a_2 = (\delta - h)(0,25 - c),$$

$$a_3 = 0,15(\delta - h).$$

Теперь, приняв во внимание граничные условия (3.9) и выражения (3.11) и (3.12), можно систему уравнений (3.1')—(3.4'') записать отдельно для суши и океана в следующем виде:

Для суши

$$\frac{\partial}{\partial t} [a_1 u(H) + a_2 u(h)] = -u_*^2 \cos \alpha, \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [a_1 v(H) + a_2 v(h)] = -u_*^2 \sin \alpha, \quad (3.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [a_1 T(H) + a_2 T(h)] = -\frac{F(\delta)}{c_p \rho} - a_3 \Phi(\delta). \quad (3.15)$$

Для океана

$$\frac{\partial}{\partial t} [a_1 u(H) + a_2 u(h)] = -u_*^2 \cos \alpha, \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [a_1 v(H) + a_2 v(h)] = -u_*^2 \sin \alpha, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [a_1 T(H) + a_2 T(h)] = -ku_* T_* - \frac{1}{c_p \rho} [F(h) - F(\delta)] - a_3 \Phi(\delta), \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [a_1 q(H) + a_2 q(h)] = -ku_* q_*. \quad (3.19)$$

Так как внутри приземного слоя направление скорости ветра слабо изменяется и совпадает с направлением вектора напряжения трения, то можно принять, что

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= u(H)/V(H), \\ \sin \alpha &= v(H)/V(H),\end{aligned}\quad (3.20)$$

где

$$V^2 = u^2 + v^2.$$

Система уравнений (3.13) — (3.15) содержит семь неизвестных, а система (3.16) — (3.19) — одиннадцать неизвестных. Для замыкания этих систем воспользуемся известными выражениями для профилей скорости ветра, температуры и влажности [21]:

$$\begin{aligned}u(h) &= \frac{u_*}{k} [f(h/L) - f(z_0/L)] \cos \alpha, \\ T(h) - T(z_0) &= T_* [f(h/L) - f(z_0/L)], \\ q(h) - q(z_0) &= q_* [f(h/L) - f(z_0/L)]\end{aligned}\quad (3.21)$$

(здесь L — масштаб длины,

$$L = \frac{u_*^2}{b^2(\beta T_* + 0,61gq_*)},$$

а $\beta = g/T$ — параметр плавучести) и четырьмя эмпирическими соотношениями, полученными в работе [22]:

а) для океана и суши

$$-bu_*T_* = \frac{10^{-2}V^2(\delta)}{\beta} \mu N(\mu), \quad (3.22)$$

б) для суши

$$u_* = V(\delta) M(\mu) \left[0,089 - 0,00356 \ln \frac{V(\delta)}{lz_0} \right], \quad (3.23)$$

в) для океана

$$u_* = 0,030V(\delta) M(\mu), \quad (3.24)$$

$$-bu_*q_* = 10^{-2}V(\delta) [q(z_0) - q(\delta)] N(\mu). \quad (3.25)$$

Здесь

$$N(\mu) = [0,274 + 0,0167\mu^{1/3}]^2, \quad (3.26)$$

$$M(\mu) = 1 + 0,8 \left(\frac{\mu}{1000} \right) - 0,3 \left(\frac{\mu}{1000} \right)^2 + 0,08 \left(\frac{\mu}{1000} \right)^3, \quad (3.27)$$

$$\mu = \beta \frac{T(z_0) - T(\delta) - 8,4}{lV(\delta)}. \quad (3.28)$$

Приведенные выше эмпирические соотношения (3.22) — (3.25) не справедливы для низких широт. Вопрос о закономерностях пограничного слоя вблизи экватора требует еще как теоретических, так и экспериментальных исследований.

2. Интегрирование уравнений адвекции

Систему уравнений адвекции выпишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \bar{\omega} \frac{\partial u}{\partial \sigma} = \\ = \nu \left[\frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right], \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \bar{\omega} \frac{\partial v}{\partial \sigma} = \\ = \nu \left[\frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} \right], \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \bar{\omega} \frac{\partial T}{\partial \sigma} = \nu \left[\frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \lambda^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{u}{a \sin \theta} \frac{\partial q}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial q}{\partial \theta} + \bar{\omega} \frac{\partial q}{\partial \sigma} = \nu \left[\frac{1}{a^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 q}{\partial \lambda^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2} \right]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

В правой части этих уравнений опущены малые члены вида $\frac{\operatorname{ctg} \theta}{a^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}$, поскольку даже для полярных областей эти слагаемые на два порядка меньше остальных членов.

Эта система в свою очередь расщепляется на три последовательно решаемые задачи. Сначала осуществляется перенос величин u , v , T и q вдоль круга широты, затем вдоль меридиана и, наконец, вдоль вертикали. Для краткости записи введем так называемую стандартную систему координат по соотношениям

$$\begin{aligned} dx &= a \sin \theta d\lambda, \\ dy &= a d\theta \end{aligned} \quad (3.33)$$

и вектор-функцию

$$\Phi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ T \\ q \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Тогда система (3.26) — (3.29) примет вид

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \nu \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right]. \quad (3.35)$$

Это векторное уравнение также решается методом расщепления. Оно разбивается на два уравнения таким образом, чтобы в каждом из них присутствовали производные лишь по одной пространственной переменной. Сначала решается уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + u \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad (3.36)$$

на промежутке времени $t_n \leq t \leq t_n + \Delta t$, а затем, принимая за начальное распределение функцию Φ , полученную в результате решения (3.36) для момента $t_n + \Delta t$, решаем уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad (3.37)$$

на этом же промежутке по времени. Поскольку алгоритм решения этих уравнений одинаков, ограничимся рассмотрением (3.36).

В схемах численного моделирования общей циркуляции атмосферы и океана Лиса [23] и Кроули [24] были предложены явные конечно-разностные схемы второго порядка точности по пространственным координатам для одного скалярного квазилинейного уравнения, входящего в (3.35), и показано, что эти схемы условно устойчивы. Однако при интегрировании на длительный срок они дают значительные ошибки в фазе. В дальнейшем Фроммом [25] и Кроули [26] были разработаны более сложные разностные схемы, позволяющие уменьшить ошибки в амплитуде и фазе численного решения за счет повышения порядка аппроксимации пространственных производных.

В отличие от указанных работ, будем рассматривать не одно уравнение, а систему уравнений (3.36) и находить их совместное решение. В работе [27] найдено точное решение системы (3.36) в интегральной форме, используя которое можно построить различные конечно-разностные схемы.

Введем новую скалярную функцию φ и вектор-функцию Ψ согласно нелинейным соотношениям

$$u = -2\nu \frac{\partial \ln \varphi}{\partial x}; \quad \Psi = \Phi \cdot \varphi. \quad (3.38)$$

Нетрудно показать (см. [27]), что φ и Ψ удовлетворяют уравнению теплопроводности, например $\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0$. Рассматривая решение этого уравнения на неограниченной прямой в промежутке времени $t_n \leq t \leq t_n + \Delta t$ при начальных условиях для φ

$$\varphi^n = \exp \left[-\frac{1}{2\nu} \int_0^x u^n d\xi \right] \quad (3.39)$$

и для Ψ

$$\Psi^n = \Phi^n \cdot \varphi^n, \quad (3.40)$$

вытекающих из (3.38), получим для $x=0$

$$\varphi^{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu\Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^n \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\nu\Delta t}\right) d\xi, \quad (3.41)$$

$$\Psi^{n+1} = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu\Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^n \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\nu\Delta t}\right) d\xi. \quad (3.42)$$

Отсюда, на основании (3.38), получим

$$\Phi_0^{n+1} - \Phi_0^n = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [\Phi^n - \Phi_0^n] \varphi^n \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\nu\Delta t}\right) d\xi}{\int_{-\infty}^{\infty} \varphi^n \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\nu\Delta t}\right) d\xi}. \quad (3.43)$$

Здесь Φ_0^n — значение функции Φ в начале координат.

Из (3.43) можно получить решение в узлах рассматриваемой сетки. Поместим начало координат в узел сетки i и примем, что при вычислении функции φ по (3.39) имеет место линейная зависимость u от x :

$$u = c + bx. \quad (3.44)$$

Введем обозначение

$$J_k = \int_{-\infty}^{\infty} \xi^k \varphi^n \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\nu\Delta t}\right) d\xi. \quad (3.45)$$

Беря этот интеграл по частям, получим

$$J_k = 2\nu\Delta t(k-1)J_{k-2} - 2\nu\Delta t \int_{-\infty}^{\infty} \xi^{k-1} \frac{\partial \varphi^n}{\partial \xi} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\nu\Delta t}\right) d\xi. \quad (3.46)$$

Заменяя на основании (3.38) $\frac{\partial \varphi^n}{\partial \xi}$ на $-\frac{1}{2\nu}\Phi^n u^n$ и используя (3.44) и (3.45), придем к следующему рекуррентному соотношению:

$$(1 + b\Delta t)J_k = -c\Delta t J_{k-1} + 2\nu\Delta t(k-1)J_{k-2}. \quad (3.47)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \bar{J}_1 &= -\beta, \\ \bar{J}_2 &= \beta^2 + \gamma, \\ \bar{J}_3 &= -\beta(\beta^2 + 3\gamma), \\ \bar{J}_4 &= \beta^4 + 6\beta^2\gamma + 3\gamma^2 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (3.48)$$

Здесь

$$\bar{J}_k = \frac{J_k}{J_0}, \quad \beta = \frac{c \Delta t}{1 + b \Delta t}, \quad \gamma = \frac{2\nu \Delta t}{1 + b \Delta t}.$$

Если теперь представить функцию Φ^n в виде отрезка ряда Тейлора в окрестности $x=0$:

$$\Phi^n - \Phi_i^n = \sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial^k \Phi^n}{\partial x^k} \right)_i \frac{x^k}{k!},$$

то, подставляя это выражение в (3.43) и используя (3.45), получим

$$\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n = \sum_{k=1}^N \bar{J}_k \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial^k \Phi^n}{\partial x^k} \right)_i. \quad (3.49)$$

Из формулы (3.49) можно получить, как частный случай, ряд известных аппроксимаций. Рассмотрим несколько таких схем.

1) $c = u_i$, $b = 0$, $N = 1$. В этом случае, согласно (3.49),

$$\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n = -u_i^n \Delta t \left(\frac{\partial \Phi^n}{\partial x} \right)_i, \quad (3.50)$$

или

$$\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n = \begin{cases} \alpha (\Phi_i^n - \Phi_{i-1}^n) & \text{при } u_i^n \geq 0 \\ \alpha (\Phi_{i+1}^n - \Phi_i^n) & \text{при } u_i^n < 0 \end{cases} \quad (3.51)$$

$$\alpha = \frac{u_i^n \Delta t}{\Delta x}. \quad (3.52)$$

Полученная схема является альтернативной схемой первого порядка аппроксимации.

2) $c = u_i^n$, $b = 0$, $N = 2$. Тогда

$$\Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n = -u_i^n \Delta t \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_i + \left[\frac{(u_i^n \Delta t)^2}{2} + \nu \Delta t \right] \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)_i \quad (3.53)$$

или, заменяя производные от Φ^n по формуле центральных разностей и вводя обозначение

$$r = \frac{\nu \Delta t}{(\Delta x)^2}, \quad (3.54)$$

получаем

$$\begin{aligned} \Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n = & -\frac{\alpha}{2} (\Phi_{i+1}^n - \Phi_{i-1}^n) + \\ & + \left(\frac{\alpha^2}{2} + r \right) (\Phi_{i+1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i-1}^n). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Эта формула была получена иным путем в работе Лиса [23] для случая $v=0$.

3) $c=u_i^n$, $b=0$, $N=4$. В этом случае, аппроксимируя производные с четвертым порядком точности [28], получим

$$\begin{aligned} \Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n = & -\frac{\alpha}{12} [8(\Phi_{i+1}^n - \Phi_{i-1}^n) - (\Phi_{i+2}^n - \Phi_{i-2}^n)] - \\ & -\frac{1}{24}(\alpha^2 + 2r) [30\Phi_i^n - 16(\Phi_{i+1}^n + \Phi_{i-1}^n) + (\Phi_{i+2}^n + \Phi_{i-2}^n)] - \\ & -\frac{1}{12}(\alpha^3 + 6ar) [-2(\Phi_{i+1}^n - \Phi_{i-1}^n) + \Phi_{i+2}^n - \Phi_{i-2}^n] + \\ & +\frac{1}{24}(\alpha^4 + 12\alpha^2 r + 12r^2) [6\Phi_i^n - 4(\Phi_{i+1}^n + \Phi_{i-1}^n) + \\ & + (\Phi_{i+2}^n + \Phi_{i-2}^n)]. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Эта схема для случая $v=0$ приведена в работе Кроули [26].

4) Рассмотрим теперь случай $b = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^n$, $c = u_i^n$. Полагая в формуле (3.49) $N=2$, получим

$$\begin{aligned} \Phi_i^{n+1} - \Phi_i^n = & -\frac{\alpha'}{2}(\Phi_{i+1}^n - \Phi_{i-1}^n) + \\ & + \left(\frac{\alpha'^2}{2} + r\right)(\Phi_{i+1}^n - 2\Phi_i^n + \Phi_{i-1}^n), \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\alpha' = \frac{u_i^n \Delta t}{\Delta x \left(1 + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t\right)}.$$

Как нетрудно показать, эта схема удовлетворяет закону сохранения первого момента для уравнений движения.

Отметим, что с помощью (3.49) могут быть получены схемы, обладающие свойством сохранения также и вторых моментов для уравнений движения. Так например, рассматривая уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

и полагая в (3.49) $c = \frac{1}{3}(u_{i+1} + u_i + u_{i-1})$ и $b=0$, получим схему Аракава [33], удовлетворяющую условиям сохранения среднего значения u и u^2 на заданном отрезке при соответствующих граничных условиях.

Рассмотрим теперь уравнение для вертикальной адвекции

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\bar{\omega} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}. \quad (3.58)$$

Возьмем $\bar{\omega}$ в момент $t = n\Delta t$, тогда можно получить формулу, аналогичную (3.55),

$$\Phi_k^{n+1} = \Phi_k^n + \frac{\bar{\omega}_k^n \Delta t (\bar{\omega}_k^n \Delta t - \Delta\sigma_k)}{\Delta\sigma_{k+1} (\Delta\sigma_{k+1} + \Delta\sigma_k)} (\Phi_{k+1}^n - \Phi_k^n) - \frac{\bar{\omega}_k^n \Delta t (\bar{\omega}_k^n \Delta t + \Delta\sigma_{k+1})}{\Delta\sigma_k (\Delta\sigma_{k+1} + \Delta\sigma_k)} (\Phi_k^n - \Phi_{k-1}^n),$$

где

$$\Delta\sigma_k = \sigma_k - \sigma_{k-1},$$

$$\Delta\sigma_{k+1} = \sigma_{k+1} - \sigma_k.$$

Для равномерной сетки ($\Delta\sigma_k = \Delta\sigma_{k+1} = \Delta\sigma_{k-1}$) получаем формулу (3.55), в которой следует положить $v=0$ и $\alpha = \frac{\bar{\omega}_k^n \Delta t}{\Delta\sigma}$.

3. Решение системы уравнений адаптации

На этом этапе решается задача динамического согласования метеорологических полей. Рассматривается следующая система уравнений:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + lv = -\frac{g}{a \sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \lambda} - \frac{R_B T}{p_s a \sin \theta} \frac{\partial p_s}{\partial \lambda}, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - lu = -\frac{g}{a} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{R_B T}{p_s a} \frac{\partial p_s}{\partial \theta}, \quad (3.60)$$

$$H = H_s + \frac{R_B}{g} \int_0^1 \frac{T}{\xi} d\xi, \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \int_0^1 D d\xi = 0, \quad (3.62)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha - 1}{\alpha} \frac{T \omega}{p_s \sigma} = 0. \quad (3.63)$$

Здесь и далее

$$l = \left(2\Omega + \frac{u}{a \sin \theta} \right) \cos \theta. \quad (3.64)$$

К этой системе нужно присоединить еще соотношение (1.9) для определения величины ω .

Преобразуем первые два уравнения системы. Обозначив для краткости

$$f_u = \frac{g}{a \sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \lambda} + \frac{R_B T}{p_s a \sin \theta} \frac{\partial p_s}{\partial \lambda}, \quad (3.65)$$

$$f_v = \frac{g}{a} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{R_B T}{p_s a} \frac{\partial p_s}{\partial \theta}, \quad (3.66)$$

получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + lv &= -f_u, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - lu &= -f_v.\end{aligned}\quad (3.67)$$

Если ввести комплексную скорость

$$w = u + iv$$

и комплексную функцию

$$F = f_u + if_v,$$

то систему (3.67) можно записать в виде одного уравнения:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - ilw = -F. \quad (3.68)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$w^{n+1} = w^n e^{il \Delta t} - \int_{t_n}^{t_{n+1}} F e^{il(t_{n+1} - \xi)} d\xi. \quad (3.69)$$

Вынося из под знака интеграла среднее значение F на отрезке (t_n, t_{n+1}) , которое мы обозначим через F^* , получим

$$w^{n+1} = w^n e^{il \Delta t} - \frac{iF^*}{l} (1 - e^{il \Delta t}). \quad (3.70)$$

Раскрывая вещественную и мнимую части выражения (3.70), придем к следующим равенствам:

$$\begin{aligned}u^{n+1} &= u^n \cos \varepsilon - v^n \sin \varepsilon - \frac{1}{l} [f_u^* \sin \varepsilon - f_v^* (1 - \cos \varepsilon)], \\ v^{n+1} &= u^n \sin \varepsilon + v^n \cos \varepsilon - \frac{1}{l} [f_u^* (1 - \cos \varepsilon) + f_v^* \sin \varepsilon].\end{aligned}\quad (3.71)$$

Здесь

$$\varepsilon = t \Delta t. \quad (3.72)$$

Величины p_s и T , входящие в f_n^* и f_v^* , рассчитываются для момента $t_n + \Delta t/2$ по явной схеме. Таким образом определяются

$$p_s^* = p_s^n - \frac{\Delta t}{2} \int_0^1 D^n d\xi \quad (3.73)$$

и

$$T^* = T^n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{T}{p_s} \frac{\omega^n}{\sigma}. \quad (3.74)$$

По найденным значениям T^* определяется

$$H^* = H_s + \frac{R_B}{g} \int_{\xi}^1 \frac{T^*}{\xi} d\xi. \quad (3.75)$$

Далее p_s^* , H^* и T^* подставляются в (3.65) и (3.66), затем по полученным значениям f_u^* и f_v^* и полю скоростей в момент времени t_n находятся, согласно (3.71), составляющие скорости u^{n+1} и v^{n+1} . Далее определяется $p_s^{n+1} \sin \theta$ по формуле

$$p_s^{n+1} = p_s^n - \frac{\Delta t}{a \sin \theta} \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \lambda} (u^* p_s^*) + \frac{\partial}{\partial \theta} (v^* p_s^* \sin \theta) \right] d\xi, \quad (3.76)$$

где

$$u^* = \frac{1}{2} (u^{n+1} + u^n),$$

$$v^* = \frac{1}{2} (v^{n+1} + v^n).$$

По значениям u^{n+1} , v^{n+1} и p_s^{n+1} из (1.9) получим ω^{n+1} . Тем самым завершается определение поля скорости и приземного давления на рассматриваемом шаге по времени. Остается определить динамически согласованное поле температуры в момент t_{n+1} . Оно рассчитывается по следующей формуле:

$$T^{n+1} = T^n + \frac{(\kappa - 1) \Delta t T^n}{2 \kappa \sigma p_s} (\omega^n + \omega^{n+1}). \quad (3.77)$$

4. Конечно-разностная аппроксимация производных

При вычислении производных по пространственным координатам вводится постоянный шаг по долготе

$$\Delta u = a \Delta \theta \approx 555 \text{ км} \quad (3.78)$$

и переменный шаг по широте

$$\Delta x_j = x_j a \sin \theta_j \Delta \lambda. \quad (3.79)$$

Здесь x_j — целочисленная функция, которая принимает следующие значения:

$$\begin{aligned} x_1 = 12, \quad x_2 = 6, \quad x_3 = 4, \quad x_4 = 3, \quad x_5 = \dots = x_8 = 2, \\ x_9 = \dots = x_{18} = 1. \end{aligned} \quad (3.80)$$

Таким образом, минимальное значение шага Δx_j равно 390 км, максимальное — 708 км. Производные по горизонтали вычисляются с помощью центральных разностей:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial f}{a \partial \theta} \right)_{i, j, k} &\approx \frac{f_{i, j+1, k} - f_{i, j-1, k}}{2 \Delta y}, \\ \left(\frac{\partial f}{a \sin \theta \partial \lambda} \right)_{i, j, k} &\approx \frac{f_{i+x_j, j, k} - f_{i-x_j, j, k}}{2 \Delta x_j}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Величина D аппроксимируется следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{i, j, k} = \frac{1}{2} &\left\{ \frac{(p_s^u)_{i+x_j, j, k} - (p_s^u)_{i-x_j, j, k}}{\Delta x_j} + \right. \\ &\left. + \frac{(p_s^v)_{i, j+1, k} \sin \theta_{j+1} - (p_s^v)_{i, j-1, k} \sin \theta_{j-1}}{\Delta y \sin \theta_j} \right\}. \end{aligned} \quad (3.82)$$

Интегралы, входящие в расчетные формулы, вычисляются по способу трапеций.

Перейдем теперь к определению искоемых функций в полюсе, который является особой точкой рассматриваемых уравнений. Полагая, что вертикальная составляющая вихря скорости и дивергенция скорости в полюсе ограничены [30], получим, что при $0=0$

$$\begin{aligned} u &= \hat{u}(\sigma, t) \cos \lambda - \hat{v}(\sigma, t) \sin \lambda, \\ v &= \hat{u}(\sigma, t) \sin \lambda + \hat{v}(\sigma, t) \cos \lambda. \end{aligned} \quad (3.83)$$

Здесь \hat{u} и \hat{v} определяются по значениям функций u и v соответственно на ближайшем к полюсу круге широты, где эти функции рассчитываются в процессе прогноза. Для удобства расчетов широта $0=0$ трактуется как граница области, содержащая 72 узла. Составляющие вектора скорости определяются в этих узлах по формулам (3.83), благодаря чему среднее значение потока массы внутрь области на этой границе равно нулю. Любая скалярная величина определяется в полюсе также по ее значениям на соседнем круге широты и во всех узлах границы $0=0$ принимает одно и то же значение.

§ 4. УЧЕТ КОНВЕКЦИИ И ТЕПЛОТЫ КОНДЕНСАЦИИ. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОБЛАЧНОСТИ

В данном параграфе рассматривается метод определения количества облачности (в баллах) и ее границ, а также метод коррекции температуры T и влажности q за счет процессов конденсации и конвекции.

1. Прогноз облачности

Прогнозируется облачность трех ярусов. При этом принимается, что облачность верхнего яруса располагается в слое 500—300 мб, облачность среднего яруса — в слое 850—500 мб, облачность нижнего яруса — в слое 990—850 мб. Обозначим балл облачности верхнего яруса C_v , среднего — C_c и нижнего — C_n . Балл облачности каждого яруса определяется по значениям средней относительной влажности в соответствующем слое \hat{f}_1 , \hat{f}_2 и \hat{f}_3 на основе эмпирического графика Смагоринского (см. [31]), устанавливающего следующую связь указанных величин:

$$C_v = \begin{cases} 0 & \text{при } \hat{f}_1 \leq 0,60 \\ 3,25\hat{f}_1 - 1,95 & \text{при } 0,60 < \hat{f}_1 \leq 0,90 \\ 1 & \text{при } 0,90 < \hat{f}_1 \end{cases}$$

$$C_c = \begin{cases} 0 & \text{при } \hat{f}_2 \leq 0,35 \\ 2\hat{f}_2 - 0,7 & \text{при } 0,35 < \hat{f}_2 \leq 0,85 \\ 1 & \text{при } 0,85 < \hat{f}_2 \end{cases}$$

$$C_n = \begin{cases} 0 & \text{при } \hat{f}_3 \leq 0,25 \\ 1,72\hat{f}_3 - 0,43 & \text{при } 0,25 < \hat{f}_3 \leq 0,83 \\ 1 & \text{при } 0,83 < \hat{f}_3 \end{cases} \quad (4.1)$$

Назовем значения $\hat{f}_1=0,90$, $\hat{f}_2=0,85$, $\hat{f}_3=0,83$ критическими и обозначим их через $f_{1кр}$, $f_{2кр}$, $f_{3кр}$. Средние значения относительной влажности в слое определяются через прогностические значения относительной влажности по формулам:

$$\hat{f}_1 = \frac{1}{2}(f_2 + f_3),$$

$$\hat{f}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{7} f_3 + f_4 + \frac{4}{7} f_5 \right),$$

$$\hat{f}_3 = \frac{1}{2}(f_5 + f_6). \quad (4.2)$$

Здесь f_k являются известными функциями q_k , T_k :

$$f_k = \frac{q_k}{q_k^{\max}(T_k)},$$

где $q_k^{\max}(T_k)$ определяется по формуле Магнуса

$$q_k^{\max}(T_k) = \frac{3,8}{p_s \sigma_k} \exp \left\{ 1,71 \frac{T_k - 273}{T_k - 38} \right\}.$$

Переходя к определению границ облачности, заметим, что вертикальное разрешение, принятое в данной модели, недостаточно для того, чтобы получить с достаточным приближением реальные значения толщины облаков. Поэтому вводятся промежуточные уровни

$$\sigma_{k+1/2} = \frac{1}{2}(\sigma_k + \sigma_{k+1}) \quad k = 2, 3, \dots, K-2,$$

для которых T , q и f находятся путем линейной интерполяции.

Принимается следующая схема определения границ облачности. Если в результате расчетов по формулам (4.1), (4.2) окажется, что имеет место облачность какого-либо яруса, то

а) в случае сплошной облачности ($C=1$) она располагается на всех последовательно расположенных уровнях (основных и промежуточных), соответствующих данному ярусу, для которых $f > f_{кр}$ начиная с уровня с максимальным f ;

б) в случае несплошной облачности ($C < 1$), облачность приписывается только тому уровню, где f максимально.

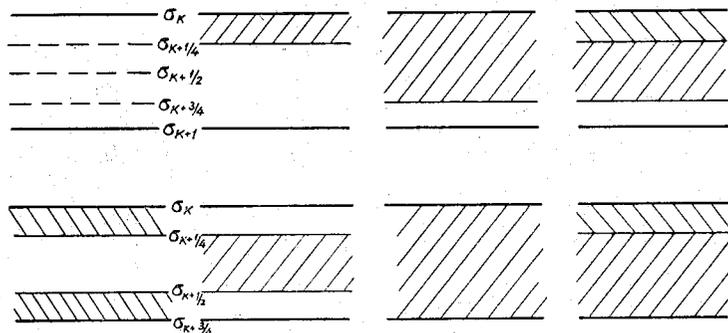


Рис. 7. Возможное распределение облачности по вертикали в основном слое.

жужоных), соответствующих данному ярусу, для которых $f > f_{кр}$ начиная с уровня с максимальным f ;

б) в случае несплошной облачности ($C < 1$), облачность приписывается только тому уровню, где f максимально.

От каждого таким образом определенного уровня облачность распространяется вверх и вниз на $1/4$ толщины основного слоя, т. е. слоя, заключенного между двумя соседними основными σ -уровнями. На рис. 7 представлены возможные варианты расположения облачности. Основные уровни, между которыми располагается облачность, проведены жирными линиями. Тонкие линии обозначают границы облачности. Область, занятая облачностью, заштрихована, причем облачность разных ярусов в пределах одного основного слоя обозначается штриховкой разного наклона.

При реализации этой схемы все уровни перебираются сверху вниз (от σ_2 до σ_{K-1}). Если на данном уровне отмечается облачность определенного яруса, то этот уровень уже не рассматривается при распределении облачности нижележащего яруса, что исключает возможность наличия на уровнях облачности двух ярусов сразу.

Построенная схема прогноза облачности дополняется следующими условиями:

- а) в случае $q_k^{\max} < \frac{0,12}{\rho_3 \sigma_k}$ облачность на уровне k отсутствует;
- б) на уровне $K - 1$ облачность отсутствует всегда.

2. Учет конденсации и конвекции

В настоящей схеме процессы конденсации и конвекции учитываются раздельно, в два этапа. На первом этапе осуществляется коррекция полей температуры и влажности, обусловленная только конденсацией в облачных слоях; на втором этапе — коррекция, обусловленная конвекцией, причем предполагается, что удельная влажность в облаке в течение всего процесса конвекции остается насыщающей.

Учет конденсации. Рассматривается конденсация в слоях облачности, лежащих на основных σ -уровнях. Если значение относительной влажности на уровне σ_k , содержащем облачность μ -того яруса, превышает $f_{\mu \text{кр}}$, то происходит выделение тепла конденсации, вследствие чего температура T_k и влажность q_k воздуха изменяются. Их новые значения, T_k^* , q_k^* , рассчитываются по формулам:

$$q_k^* = f_{\mu \text{кр}} \{ q_k^{\max}(T_k) + \beta_k (T_k^* - T_k) \}, \quad (4.3)$$

$$T_k^* = T_k - \lambda C_{\mu} (q_k^* - q_k), \quad (4.4)$$

где

$$\beta_k = \frac{dq_k^{\max}(T_k)}{dT}, \quad \lambda = \frac{L}{c_p}.$$

Формула (4.3) получается из условия конденсации

$$q_k^* = f_{\mu \text{кр}} q_k^{\max}(T_k). \quad (4.5)$$

Если разложить $q_k^{\max}(T_k)$ в ряд по степеням $T_k^* - T_k$ и ограничиться двумя первыми членами разложения, что в данном случае обеспечивает достаточную точность, то получим формулу (4.3).

Формула (4.4) получена в соответствии с предположением Смагоринского о том, что процесс конденсации происходит настолько быстро, что имеет место только локальное изменение температуры. Тогда уравнение энергии может быть записано в виде

$$c_p \frac{\partial T}{\partial t} \Delta t = -LC_{\mu} (q^* - q). \quad (4.6)$$

Заменяя приращение температуры через $T_k^* - T_k$, получаем формулу (4.4).

В отличие от существующих схем учета тепла конденсации, здесь предусматривается, что конденсация может происходить и при несплошной облачности.

Учет конвекции. Коррекция температуры и влажности для учета конвекции производится в том случае, если в насыщенном воздухе вертикальный градиент температуры превышает влажноадиабатический γ^{ba} , а в ненасыщенном воздухе — сухоадиабатический γ^{ad} . В каждом основном слое значения γ^{ba} и γ^{ad} , рассчитанные в σ -системе, полагаются постоянными по вертикали в пределах этого слоя. Значения температуры, входящие в выражения для γ^{ba} и γ^{ad} , берутся как средние по соответствующему основному слою.

Для того чтобы влияние любого конвективного процесса можно было всякий раз выразить через изменения температуры и влажности на основных уровнях (так как только эти значения T и q могут быть учтены в других частях схемы), принимается, что в каждом основном слое температура изменяется пропорционально γ^{ba} в облаке и пропорционально γ^{ad} вне облака. В этом случае, если конвекция происходит, то она целиком охватывает основной слой или несколько таких слоев. Обозначим через C_1 , C_2 и C_3 балл облачности, занимающей верхнюю, среднюю или нижнюю части основного слоя соответственно. Тогда условие отсутствия конвекции может быть записано так:

$$\frac{T_{k+1} - T_k}{\Delta\sigma_k} \leq \gamma_k^{ad} (1 - C) + \gamma_k^{ba} C, \quad (4.7)$$

где

$$C = \frac{1}{4} (C_1 + 2C_2 + C_3).$$

В случае невыполнения условия (4.7) происходит конвекция, в результате которой значения температуры T и влажности q на основных уровнях изменяются. Если конвекция охватывает m основных слоев, то новые значения температуры T^* на соответствующих основных уровнях могут быть определены из системы уравнений:

$$\frac{T_{i+1}^* - T_i^*}{\Delta\sigma_i} = \gamma_i^{ad} (1 - C_i) + \gamma_i^{ba} C_i \quad i = k, \dots, k + m - 1, \quad (4.8)$$

$$\sum_{i=k}^{m-1} (T_i^* + T_{i+1}^*) \Delta\sigma_i = \sum_{i=k}^{m-1} (T_i + T_{i+1}) \Delta\sigma_i. \quad (4.9)$$

Формула (4.9) получена в предположении, что конвекция происходит без конденсации. В этом случае выполняется условие [32]

$$\int_{\sigma_k}^{\sigma_n} (T - T^*) d\sigma = 0. \quad (4.10)$$

Приблизительно вычисляя этот интеграл по формуле трапеций, получаем формулу (4.9).

ЛИТЕРАТУРА

1. Теория климата. Сборник переводных статей. Под ред. Л. С. Гандина, А. С. Дубова, М. Е. Швеца. Гидрометеоздат, Л., 1967.
2. Динамика крупномасштабных атмосферных процессов. Труды международного симпозиума, Москва, 23—30 июня 1965 г. Под ред. А. С. Монина. Изд. «Наука», М., 1967.
3. Гандин Л. С., Дубов А. С. Численные методы краткосрочного прогноза погоды. Гидрометеоздат, Л., 1968.
4. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Гидрометеоздат, Л., 1967.
5. Manabe S., Strickler R. F. Thermal equilibrium of the atmosphere with a convective adjustment. *J. Atm. Sci.*, v. 21, No. 4, 1964.
6. Дмитриева-Арраго Л. Р. Расчет потоков и притоков длинноволновой радиации в облачных условиях. Тр. ГГО, вып. 197, 1968.
7. Lewis W. Forecasting 700 mb dewpoint depression by a 3-dimensional trajectory technique. *Mon. Wea. Rev.*, v. 85, No. 9, 1957.
8. Smagorinsky J. On the dynamical prediction of large-scale condensation by numerical methods. Monograph No. 5, Physics of Precipitation. Amer. Geophys. Un., 1960.
9. Дмитриева-Арраго Л. Р., Самойлова Л. В. Об учете вертикального распределения водяного пара, альбедо подстилающей поверхности и изменения высоты солнца при расчетах коротковолновой радиации в схеме общей циркуляции атмосферы. Изв. АН СССР, «Физика атмосферы и океана», т. 6, № 1, 1970.
10. Шифрин К. С., Авасте О. А. Потоки коротковолновой радиации в безоблачной атмосфере. Сб. «Исследования по физике атмосферы», № 2. Тарту, 1960.
11. Шифрин К. С., Пятовская Н. П. Поле коротковолновой радиации над типичными подстилающими поверхностями. Тр. ГГО, вып. 166, 1964.
12. Шифрин К. С., Коломийцев В. Ю., Пятовская Н. П. Определение потока уходящей коротковолновой радиации с помощью искусственных спутников земли, Тр. ГГО, вып. 166, 1964.
13. Vigroux E. Contributions à l'étude expérimentale de l'absorption de l'ozone. *Ann. phys.*, 8, 1953.
14. Elterman L. Atmospheric attenuation model 1964. *Environmental Res. Pap.* No. 46, 1964.
15. Кондратьев К. Я., Никольский Г. А. Вариации солнечной постоянной по данным аэростатных исследований в 1962—1968 гг. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, т. 6, № 4, 1970.
16. Кастров В. Г. Измерение поглощения солнечной радиации в свободной атмосфере до 3—5 км. Тр. ЦАО, вып. 8, 1952.
17. Гандин Л. С. [и др.]. Основы динамической метеорологии. Гидрометеоздат, Л., 1955.
18. Шехтер Ф. Н. О радиационных диаграммах. Тр. ГГО, вып. 150, 1963.
19. Каган Р. Л. О расчете потоков теплового излучения в безоблачной атмосфере. Тр. ГГО, вып. 174, 1965.
20. Атлас теплового баланса. Под ред. М. И. Будыко. ГГО, 1955.
21. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1, гл. 4. Изд. «Наука», М., 1965.
22. Дубов А. С., Орленко Л. Р. Об учете процессов в пограничном слое при численном моделировании общей циркуляции атмосферы. См. наст. сб.
23. Leith C. E. Numerical simulation of the earth's atmosphere. *Methods in Computational Physics*. Vol. 4, 1965 (перевод в сб. «Численные методы решения задач динамики, атмосферы и океана». Под ред. Л. Р. Дмитриевой-Арраго, Л. В. Руховец, М. Е. Шнеерова. Гидрометеоздат, Л., 1968).
24. Crowley W. P. A global numerical ocean model: part 1. *J. Comput. Phys.*, vol. 3, No. 1, 1968.
25. Fromm J. E. A method for reducing dispersion in convective difference schemes. *J. Comput. Phys.*, vol. 3, No. 2, 1968.

26. Crowley W. P. Numerical advection experiments. Mon. Wea. Rev., vol. 96, No. 1, 1968.

27. Швец М. Е., Мелешко В. П. О численном алгоритме решения системы уравнений гидродинамики атмосферы. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, т. 1, № 9, 1965.

28. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ, М., 1953.

29. Дмитриева - Арраго Л. Р. [и др.]. О схеме расчета потоков коротковолновой радиации в атмосфере. Метеорология и гидрология, № 8, 1970.

30. Ким В. Ф. Некоторые результаты численного эксперимента по квазигеострофической модели прогноза геопотенциала на полусфере. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, т. 4, № 2, 1968.

31. Дмитриева - Арраго Л. Р., Колоскова Л. Ф., Орлова Л. С. Испытание графика Дж. Смагоринского для определения балла облачности. Тр. ГГО, вып. 236, 1969.

32. Manabe S., Smagorinsky J., Strickler R. F. Simulated climatology of a general circulation model with a hydrologic cycle. Mon. Wea. Rev., v. 93, No. 12, 1965 (перевод см. в [1]).

33. Kolisky H. G. A study of the physical, mathematical and computer problems behind the global numerical weather calculations. Technical Report No. 38.002, July, 6, 1966 г.

ОБ УЧЕТЕ ПРОЦЕССОВ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ ПРИ ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ

1. Опыт работы по численным методам краткосрочного прогноза погоды показал, что притоки и потери энергии в атмосфере в результате взаимодействия с подстилающей поверхностью играют определенную роль в изменении полей метеоэлементов за временные интервалы порядка 1—2 суток, но отнюдь не являются основными, определяющими факторами. Так, в рамках суточного прогноза учет диссипации кинетической энергии за счет турбулентного трения в нижнем километровом слое улучшает оправдываемость прогноза наземного поля давления на 7—8% [1]. Учет радиационных и турбулентных притоков тепла, согласно исследованиям М. Е. Швеца, Б. Е. Шнеерова и Л. Ф. Колосковой [2], улучшает оправдываемость прогноза геопотенциала в средней тропосфере на 2—3%. Следует заметить, что эти цифры характеризуют увеличение оправдываемости тех хорошо отработанных схем, относительная ошибка которых в рамках адиабатических и недиссипативных моделей составляет 0,7—0,8. Применительно к схемам с относительной ошибкой больше единицы учет перечисленных выше факторов может дать большее улучшение оправдываемости [3].

Таким образом, при краткосрочном прогнозе погоды нужно было прежде всего научиться предсказывать перемещения воздушных масс с неизменными свойствами, т. е. без учета трансформации. Естественно, что и в рамках суточных прогнозов необходимо уметь предсказывать также резкие перестройки полей, связанные с возникновением новых барических образований. Но причина подобных резких перестроек еще окончательно не выяснена, в частности, подобные процессы часто связывают с потерей устойчивости движения. Обмен энергией в таких условиях (т. е. при потере устойчивости движения) совсем не изучен.

Иначе обстоит дело с долгосрочным прогнозом или теорией климата. Для длительных процессов уже нельзя в качестве основного

приближения изучать перемещения метеорологических объектов с неизменными свойствами. Трансформация этих свойств под влиянием притоков и стоков энергии является в этом случае основным содержанием задачи. Известны, например, работы, авторы которых при построении схем прогноза на срок больше месяца вообще отказывались от рассмотрения адвекций температуры и вихря скорости, ограничиваясь анализом только энергетических соотношений [4].

Таким образом, изучение специфики процессов в слоях атмосферы, где наиболее интенсивно происходит обмен энергией, делается одним из узловых вопросов построения теории климата. К числу таких слоев в первую очередь относится пограничный слой, в котором наиболее интенсивно проявляется взаимодействие атмосферы с подстилающей поверхностью.

Способы учета процессов в пограничном слое атмосферы при численном моделировании общей циркуляции обсуждались до сих пор главным образом в двух работах. Первая — это известные исследования, проводимые под руководством Дж. Смагоринского (например, [5, 6]) и вторая — доклад А. С. Монины и С. С. Зилитинкевича на симпозиуме по численным прогнозам погоды в Токио в 1968 г. [7]. В работах Смагоринского рассматривалась довольно грубая модель обмена теплом, влагой и количеством движения в пограничном слое атмосферы, но все расчеты были доведены до конкретных результатов — построения глобальных карт распределения осредненных значений основных метеоэлементов и компонент энергетического баланса атмосферы.

В докладе Монины и Зилитинкевича практически делается заявка на то, как можно более детально, более точно описать закономерности пограничного слоя, но никаких конкретных расчетов не было проведено.

В модели Смагоринского потоки количества движения (τ), тепла (H_0) и влаги (E_0) на уровне подстилающей поверхности задавались в виде

$$\tau = -\rho(h) c_D(h) |\mathbf{V}(h)| \mathbf{V}(h), \quad (1)$$

$$H_0 = \rho(h) c_p c_D(h) |\mathbf{V}(h)| \left(T_0 - \frac{T(h)}{\xi^z} \right), \quad (2)$$

$$E_0 = \rho(h) c_D(h) |\mathbf{V}(h)| [r_s(T_0) - r(h)], \quad (3)$$

где ρ — плотность воздуха; h — высота приземного слоя воздуха, соответствующая вертикальной координате в изобарической системе координат $\xi(h) = 0,991$; \mathbf{V} — вектор горизонтальной скорости ветра; c_p — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении; c_D — коэффициент сопротивления, равный отношению $v_*^2 / V^2(h)$ (v_* — динамическая скорость); T_0 и $T(h)$ — температура подстилающей поверхности и на высоте h соответственно; $T_0 - \frac{T(h)}{\xi^z}$

соответствует разности потенциальных температур на упомянутых выше уровнях; $r_s(T_0)$ — насыщающее значение отношения смеси¹ при температуре T_0 ; $r(h)$ — значение отношения смеси на уровне h .

Коэффициент сопротивления c_D рассчитывается по формуле, соответствующей логарифмическому профилю ветра,

$$c_D = \left(\frac{\kappa}{\ln \frac{h}{z_0}} \right)^2,$$

где κ — постоянная Кармана, z_0 — шероховатость подстилающей поверхности.

Требуемый для расчетов потоков количества движения, тепла и влаги на высотах коэффициент турбулентного обмена k находится согласно схеме Россби—Монтгомери:

$$k = \zeta^2 \left| \frac{dV}{dz} \right|, \quad (4)$$

$$\zeta = \begin{cases} \kappa(z + z_0) & \text{при } z \leq h \\ \kappa(h + z_0) \frac{N - z}{N + z} & \text{при } h \leq z \leq N \\ 0 & \text{при } N \leq z \end{cases} \quad (5)$$

Здесь N означает высоту пограничного слоя атмосферы ($N = 2,5$ км); h — высота приземного слоя ($h = 75$ м), ζ — путь смешения.

В докладе А. С. Моница и С. С. Зилитинкевича предлагается более корректный учет процессов турбулентного переноса в приземном слое. Предполагая атмосферу однородной по горизонтали, а происходящие процессы стационарными, авторы записывают законы сопротивления и обмена в соответствии с теорией подобия для турбулентного режима в пограничном слое вращающейся стратифицированной жидкости в виде

$$\ln \text{Ro} \frac{v_*}{V_g} = B + \sqrt{\frac{\kappa^2}{\left(\frac{v_*}{V_g}\right)^2} - A^2}, \quad (6)$$

$$\sin \alpha = - \frac{A}{\kappa} \frac{v_*}{V_g} \text{sign } l, \quad (7)$$

$$\frac{T_*}{\delta\theta} = \frac{1}{\ln \left(\text{Ro} \frac{v_*}{V_g} \right) - C}, \quad (8)$$

$$\frac{q_*}{\delta q} = \frac{1}{\ln \left(\text{Ro} \frac{v_*}{V_g} \right) - D}, \quad (9)$$

¹ В модели Смагоринского предполагалось, что поверхность земли повсюду является полностью увлажненной.

где $Ro = V_g / lz_0$ — число Россби; V_g — геострофический ветер; l — параметр Кориолиса; α — угол поворота ветра в пограничном слое; $\delta\theta$ и δq — перепады потенциальной температуры и влажности соответственно между верхней границей пограничного слоя и уровнем шероховатости; $T_* = -\frac{H_0}{\kappa c_p \rho v_*}$ и $q_* = -\frac{E_0}{\kappa \rho v_*}$ — масштабы температуры и влажности соответственно; A, B, C, D — безразмерные универсальные функции от параметра стратификации $\mu = \kappa^3 \frac{g}{T} \frac{T_*}{lv_*}$

(g — ускорение силы тяжести, \bar{T} — средняя абсолютная температура слоя). Эти функции находились путем обработки экспериментальных данных следующим образом. По данным градиентных наблюдений с помощью методики, изложенной в работе [9], определялись значения динамической скорости и турбулентных потоков тепла и влаги на уровне подстилающей поверхности. По данным синхронных аэрологических наблюдений определялся градиентный ветер и перепады температуры и влажности во всей толще пограничного слоя. Сопоставлением полученных значений были найдены искомые функции A, B, C, D .

Пользуясь значениями полученных функций и соотношениями (6) — (9), можно выразить угол поворота α , геострофический коэффициент трения v_* / v_g и планетарные числа Стентона ($-H_0 / c_p \rho V_g \delta\theta$) и Дальтона ($-E_0 / \rho V_g \delta q$) через функции, зависящие только от числа Ro и внешнего параметра стратификации

$$S = \frac{g}{T} \frac{\delta\theta}{lV_g}. \quad (10)$$

В настоящей работе описание процессов в пограничном слое для численного моделирования общей циркуляции будет, вообще говоря, ближе к работе А. С. Мони́на и С. С. Зили́тинкевича, чем к подходу Дж. Смагоринского. Мы также ограничимся интегральными характеристиками пограничного слоя, не вдаваясь в его внутреннюю структуру. Задание профиля коэффициента обмена по Россби—Монтгомери во всей толще пограничного слоя (как это делает Смагоринский) — фиктивная детализация, лишь качественно соответствующая структуре реально существующего экмановского подслоя. Мы в дальнейшем будем принимать, что все турбулентные потоки на верхней границе пограничного слоя (1—1,5 км) равны нулю и задача будет заключаться в нахождении потоков на подстилающей поверхности по разностям значений соответствующих метеозлементов на границах пограничного слоя, по значениям геострофического ветра и стратификации всей толщи пограничного слоя. Подобный подход позволяет находить соответствующие притоки той или иной субстанции только во всем пограничном слое, которые могут быть отнесены к некоторому условному уровню внутри этого слоя.

Как уже отмечалось выше, для расчетов турбулентных потоков различных субстанций на уровне подстилающей поверхности по перепадам температуры, влажности и скорости ветра на границах пограничного слоя необходимо знать некоторые эмпирические функции. Примеры такого рода функций приведены в работе [7]. Для стационарной и однородной атмосферы эти функции должны быть универсальны, и поэтому их, вообще говоря, достаточно определить раз и навсегда хотя бы по наблюдениям в каком-нибудь одном пункте (что и сделано в работе [8] по данным, полученным в О'Нейле). Но реальная атмосфера отличается от рассматриваемой модели, вследствие чего целесообразно было, во-первых, использовать данные наблюдений в различных климатических условиях, что мы в настоящей работе, применительно к потоку тепла, и делаем, не задаваясь априорно той или иной схемой.

Во-вторых, методика расчета потоков тепла и количества движения [9], использованная в работе [8], основана на сопоставлении с данными прямых методов измерений. Эти методы, обладающие несомненной перспективностью, в настоящее время еще недостаточно отработаны, и поэтому представляло интерес получить искомые экспериментальные функции с привлечением данных о потоках тепла, полученных методом теплового баланса.

Наконец, третье отличие от работы [7] заключается в отбрасывании несущественных эффектов, таких как, например, влияние стратификации влажности на турбулентный обмен над сушей и извостатического округление расчетов для условий океана.

2. В качестве связи турбулентного потока тепла на уровне подстилающей поверхности H_0 со стратификацией пограничного слоя мы воспользуемся рис. 1, взятым из работы [10]. По оси y здесь отложен безразмерный поток тепла

$$y = \frac{g}{T} \frac{H_0}{\rho c_p} \frac{1}{V_g^2 l}, \quad (11)$$

по оси x — безразмерный параметр стратификации пограничного слоя

$$x = \frac{g}{T} \frac{T_0 - T_N - \gamma_N N}{V_g l} \quad (12)$$

(здесь γ_N — вертикальный градиент температуры на верхней границе пограничного слоя, близкий к $6^\circ/\text{км}$; N — высота пограничного слоя).

Необходимые для расчетов значения H_0 определялись по градиентным наблюдениям и сопоставлялись с данными теплосбалансовых наблюдений. При дальнейшей обработке использовались только те данные, для которых оба метода давали одинаковые (в пределах допустимых погрешностей) результаты. Значения геострофического ветра, перепада температур, высоты пограничного слоя и температурного градиента на этом уровне брались по данным синхронных аэрологических наблюдений. При подборе материала стремились

выбирать условия, близкие к стационарным (послеполуденные и полуденные сроки) и однородным (отсутствие резких горизонтальных температурных градиентов).

На рис. 1 нанесены данные, соответствующие широкому диапазону климатических условий (северо-запад ЕТС — Воейково; зона пустыни — Пахта-Арал, Махталы).

Располагая экспериментально установленной связью $y=f(\mu)$ (рис. 1), можно получить зависимость чисел Стентона и Дальтона от устойчивости (при условии, что испарение не лимитируется запасами влаги в почве). Исходя из одинаковости механизмов турбулентных переносов тепла и влаги, можно записать

$$\frac{E_0}{\rho \delta q V_g} = \frac{H_0}{c_p \rho V_g \delta \theta} = \varphi(\mu) \quad (13)$$

$$\delta \theta = T_0 - T_N - \gamma_N N, \quad \delta q = q_0 - q_N.$$

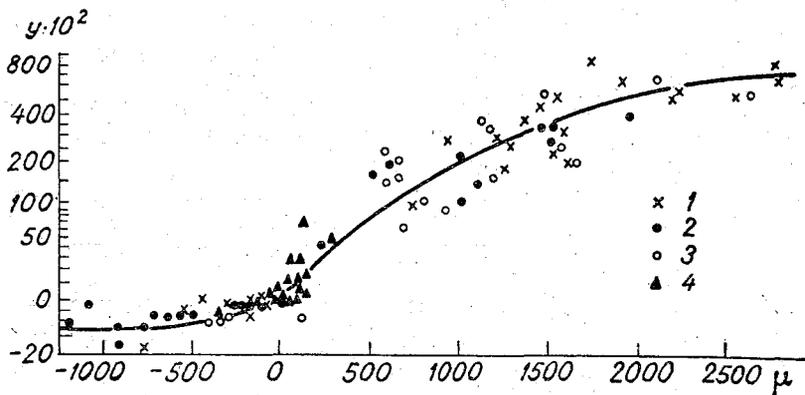


Рис. 1. Связь безразмерного потока тепла с безразмерным параметром стратификации по данным в разных климатических зонах.

1 — Пахта-Арал, 2 — Махталы, 3 — Жовтневоє, 4 — Воейково.

Выражая $\frac{H_0}{c_p \rho}$ через y с помощью (11) и $\delta \theta$ через μ с помощью (12), получим

$$\frac{E_0}{\rho V_g \delta q} = \frac{H_0}{c_p \rho V_g \delta \theta} = \varphi(\mu) = \frac{f(\mu)}{\mu}. \quad (14)$$

Для удобства дальнейших расчетов по моделированию общей циркуляции [18] целесообразно аппроксимировать эмпирическую кривую аналитической функцией. Расчеты, выполненные Г. Х. Цейтиным, показали, что удобной формой аппроксимации является выражение

$$y \cdot 10^2 = \mu [0,274 + 0,0167\mu^{1/3}]^2. \quad (15)$$

В табл. 1 приводятся значения функции y в рассматриваемом диапазоне изменения аргумента μ по данным, снятым с эмпирического графика, и рассчитанные по формуле (15). Среднее

Таблица 1

	$\mu \cdot 10^{-3}$										
	-1	-0,75	-0,50	-0,25	0	0,25	0,50	1	1,5	2,0	2,5
Уэктс · 10 ²	-11,4	-11,2	-10,0	-7,1	0	36,0	82,5	195	323	470	625
Урассч · 10 ²	-13,0	-12,0	-10,0	-6,1	0	34	77	190	330	580	615
Δy %	13	7	0	17	0	6	7	3	2	6	2

расхождение по 11 точкам, равномерно расположенным в интервале рассматриваемых изменений μ , составляет 6%, что не выходит за рамки точности предлагаемой схемы.

Из теории подобия следует, что числа Стентона и Дальтона, помимо зависимости от устойчивости, о которой только что шла речь, должны, вообще говоря, еще зависеть от числа Россби ($Ro = V_g / l z_0$). Приведенные выше расчеты проводились в диапазоне чисел Россби $10^6 - 10^8$. Сравнительно малый разброс точек на рис. 1 свидетельствует о том, что в рассматриваемом диапазоне чисел Россби их влиянием на расчеты потоков тепла и влаги можно пренебречь. Физически это представляется вполне оправданным, поскольку число Россби определяет главным образом геострофический коэффициент трения v_* / V_g и мало влияет на числа Стентона и Дальтона.

Отметим также, что изменчивость чисел Россби обусловлена в первую очередь изменчивостью шероховатости, а поскольку в задачах моделирования общей циркуляции в настоящее время все расчеты ведутся для некой средней, постоянной для всей суши шероховатости, то диапазон изменения числа Россби при различных значениях задаваемой шероховатости оказывается сравнительно невелик и зависимостью от него чисел Стентона и Дальтона можно пренебречь.

Окончательно расчетные выражения для определения потоков тепла и влаги с использованием аналитического представления функции можно записать в виде

$$H_0 = c_{pp} \rho \delta \theta \cdot 10^{-2} \cdot V_g \left[0,274 + 0,0167 \left(\frac{g}{T} \frac{\delta \theta}{V_g l} \right)^{1/3} \right]^2,$$

$$E_0 = \rho \delta q \cdot 10^{-2} V_g \left[0,274 + 0,0167 \left(\frac{g}{T} \frac{\delta \theta}{V_g l} \right)^{1/3} \right]^2. \quad (16)$$

Вертикальный градиент температуры в свободной атмосфере γ_N , входящий в выражение (13) для $\delta \theta$, может быть определен по значениям температур на поверхностях 700 и 850 мб:

$$\gamma_N = \frac{T_{850} - T_{700}}{\text{OT}_{850}^{700}}.$$

Приближенно значение этого градиента может быть принято равным 6 град/км.

Перейдем теперь к геострофическому коэффициенту трения и углу поворота ветра в пограничном слое. Эмпирические данные по связи v_*/V_g с Ro при нейтральной стратификации по данным различных авторов приведены на рис. 2. В этом случае эмпирически определяемые функции A и B , содержащиеся в выражении (6), выражаются в константы, которые могут быть рассчитаны по методу наименьших квадратов по точкам, изображенным на рис. 2. Для

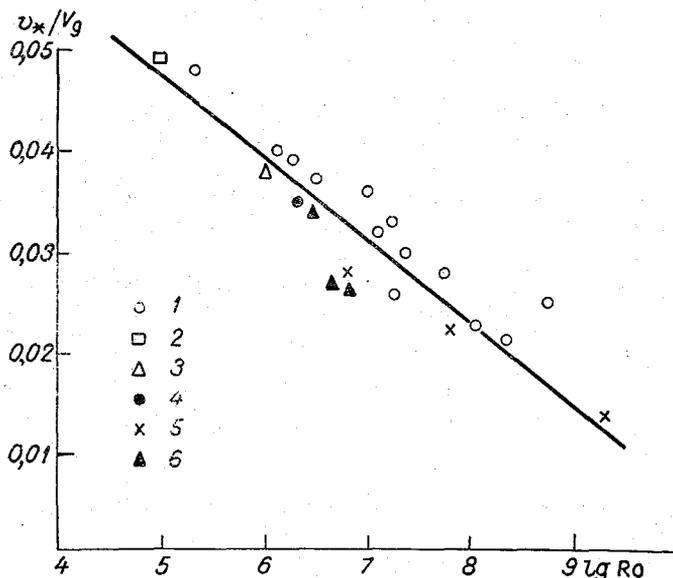


Рис. 2. Зависимость коэффициента сопротивления от числа Россби в условиях нейтральной стратификации по данным различных авторов.

1—4 — по данным Блэкедара [13], 5 — по данным Сафроновой [14], 6 — рассчитанные по данным работы Курпаковой и Орленко [15].

удобства дальнейших расчетов упростим соотношение (6). Из теоретических работ по профилям ветра в пограничном слое следует, что величина A не превосходит нескольких единиц. Тогда, используя малость A по сравнению с членом $\frac{\alpha}{v_*/V_g}$ в рассматриваемом диапазоне значений геострофического коэффициента трения, перепишем (6) в виде

$$\ln Ro \frac{v_*}{V_g} = B + \frac{\alpha}{\frac{v_*}{V_g}} - \frac{A^2}{2\alpha} \frac{v_*}{V_g}.$$

Значения A и B оказались равными 2,2 и 0,218 соответственно. Данные С. С. Зилитинкевича и Д. В. Чаликова [8] соответствуют

величинам $A=10,0$ и $B=7,84$. Различие полученных значений является следствием того, что в рассматриваемом диапазоне величин Ro и v_*/V_g постоянные A и B (при их значениях порядка нескольких единиц) практически не сказываются на характере связи между числом Россби и геострофическим коэффициентом трения. Если положить $A=B=0$, то кривая, соответствующая зависимости (6), и в этом случае будет также близка к семейству экспериментальных точек.

Для упрощения машинных расчетов мы стилизуем связь v_*/G с $\ln Ro$ в виде линейной зависимости. Естественно, подобная стилизация будет справедлива только в данном диапазоне чисел Ro :

$$\left. \frac{v_*}{V_g} \right|_{\mu=0} = 0,089 - 0,0082 \lg Ro. \quad (17)$$

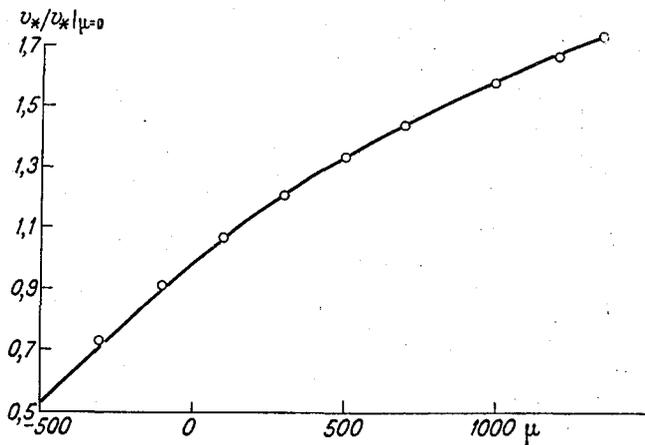


Рис. 3. Отношение коэффициентов сопротивления стратифицированной и нейтральной атмосферы по данным Сафроновой [14].

Для термически стратифицированной атмосферы представим зависимость геострофического коэффициента трения от числа Россби и параметра стратификации следующим образом:

$$\frac{v_*}{V_g} = \Phi_1(Ro) \cdot \Phi_2(\nu) \quad (18)$$

при условии, что $\Phi_2(0) = 1$.

Для определения отношения геострофических коэффициентов трения стратифицированной и нейтральной атмосферы, т. е. функции $\Phi_2(\mu)$, были использованы данные М. М. Сафроновой [14] для $Ro=10^7$ (рис. 3).

Параметр стратификации в работе [14] определялся по данным о температуре на высоте 2 м, а не по температуре подстилающей поверхности, которая содержится в формуле (12). Пересчет пара-

метра стратификации производился на основании результатов работы [15].

В диапазоне изменений μ от -500 до $+1500$ искомая зависимость может быть в свою очередь представлена в аналитическом виде:

$$\frac{v_*}{V_g} = \frac{v_*}{V_g} \Big|_{\mu=0} [1 + 0,80(\mu \cdot 10^{-3}) - 0,29(\mu \cdot 10^{-3})^2 + 0,077(\mu \cdot 10^{-3})^3]. \quad (19)$$

Средняя относительная ошибка такого представления по 11 равномерно расположенным точкам в указанном диапазоне изменений μ составляет меньше 1%.

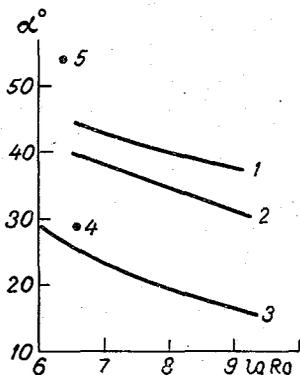


Рис. 4. Зависимость угла между реальным ветром вблизи земной поверхности и геострофическим от числа Россби при разных стратификациях по данным работы [14].

1) $\mu = -200$; 2) $\mu = -30$; 3) $\mu = 0$; 4, 5) по данным работы [15] при $\mu = 20$ и $\mu = -210$ соответственно.

Заменяя $\frac{v_*}{V_g} \Big|_{\mu=0}$ согласно (17), окончательно получаем

$$\frac{v_*}{V_g} = (0,089 - 0,00821g Ro) [1 + 0,80(\mu \cdot 10^{-3}) - 0,29(\mu \cdot 10^{-3})^2 + 0,077\mu^3]. \quad (20)$$

Теперь остается рассмотреть зависимость угла отклонения между направлениями реального и геострофического ветра вблизи земной поверхности. К сожалению, эта характеристика изучена еще крайне мало. Мы ограничимся приведением рис. 4, на котором изображены зависимости интересующего нас угла отклонения от чисел Россби при различных стратификациях пограничного слоя атмосферы по данным работы [14]. Как видно из этого рисунка, при устойчивой стратификации углы отклонения могут быть очень велики. При неустойчивой стратификации (на рисунке эти данные отсутствуют) кривая зависимости близка к нейтральным условиям.

3. Выражения для коэффициента сопротивления, чисел Стентона и Дальтона над океаническими поверхностями изменяются только за счет того явления, что шероховатость, входящая в число Россби, не будет теперь уже внешним параметром. Обусловленная

характером волнения, она в этом случае сама будет определяться внешними факторами. Из теории подобия следует, что безразмерная шероховатость gz_0/v_*^2 является функцией аналога числа Рейнольдса $Re_w = v_*^3/gv$ (v — коэффициент молекулярной вязкости). Обычно используется асимптотическое представление этой функции, возникающее при больших значениях Re_w в константу. Следуя Чарноку [11], запишем

$$z_0 = m \frac{v_*^2}{g}. \quad (21)$$

Постоянная m , согласно измерениям С. А. Китайгородского и Ю. А. Волкова [12], может быть принята равной 0,035. Тогда в умеренных широтах ($l \neq 0$) геострофический коэффициент трения для океанических районов делается функцией другого безразмерного параметра, g/mlV_g . Теоретические оценки [16, 17] показывают, что эта зависимость очень слабая и практически может не учитываться. Согласно работе [17], значение v_*/V_g равно 0,028. Тогда, полагая, что влияние термической стратификации над океаном аналогично ее влиянию над материком, получим следующее расчетное выражение:

$$\frac{v_*}{V_g} = 0,028 [1 + 0,80(\mu \cdot 10^{-3}) - 0,29(\mu \cdot 10^{-3})^2]. \quad (22)$$

В силу того, что диапазон изменения параметра устойчивости над океаном много меньше, чем над сушей, при записи формулы (22) пренебрегаем кубическим членом с μ .

Как показали результаты обработки наблюдений на НИС «А. И. Воейков», зависимость планетарных чисел Стентона и Дальтона от стратификации для условий океана остается такой же, какая была получена для суши. Таким образом, расчеты потоков тепла и влаги могут проводиться по формулам (16).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубов А. С. Об учете приземного трения при прогнозе поля давления у земли. Тр. ГГО, вып. 71, 1957.
2. Шве́ц М. Е., Шнееров Б. Е., Колоскова Л. Ф. Об использовании радиационных измерений со спутников в модели крупномасштабных атмосферных движений. Тр. ГГО, вып. 166, 1964.
3. Воробьев В. И. Учет пограничного слоя в численном прогнозе погоды. Автореферат диссертации, ЛГМИ, 1969.
4. A d e m T. On the physical basis for numerical prediction of monthly and seasonal temperatures in the troposphere-ocean-continent system. Mon. Wea. Rev. v. 92, No. 3, 1964. (Перевод в сб. «Теория климата». Под ред. Л. С. Гандина, А. С. Дубова, М. Е. Швеца. Гидрометеиздат, Л., 1967.)
5. S m a g o r i n s k y J., M a n a b e S., H o l l o w a y J. L. Numerical results from a nine-level general circulation model of the atmosphere. Mon. Wea. Rev., v. 83, No. 12, 1965. (Перевод в сб. «Теория климата». Под ред. Л. С. Гандина, А. С. Дубова, М. Е. Швеца. Гидрометеиздат, Л., 1967.)
6. M a n a b e S., S m a g o r i n s k y J., S t r i c k l e r R. F. Simulated climatology of a general circulation model with a hydrologic cycle. Mon. Wea. Rev., v. 83,

№ 12, 1965. (Перевод в сб. «Теория климата». Под ред. Л. С. Гандина, А. С. Дубова, М. Е. Швеца. Гидрометеиздат, Л., 1967.)

7. Монин А. С., Зилитинкевич С. С. Об учете микро- и мезомасштабных явлений в численных моделях атмосферы. ВМО—МСГГ. Симпозиум по численному прогнозу погоды, Токио, 26 ноября—4 декабря 1968 г.

8. Зилитинкевич С. С., Чаликов Д. В. О законах сопротивления и обмена теплом и влагой при взаимодействии атмосферы с подстилающей поверхностью. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, № 7, 1968.

9. Зилитинкевич С. С., Чаликов Д. В. Определение универсальных профилей скорости ветра и температуры в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, № 3, 1967.

10. Орленко Л. Р. О термическом равновесии в пограничном слое атмосферы. Сб. «Равновесный градиент температуры». Под ред. М. И. Будыко и М. И. Юдина. Гидрометеиздат, Л., 1967.

11. Charnock H. Wind stress on a water surface. Q. J. Roy. Met. Soc., No. 350, 1955.

12. Китайгородский С. А., Волков Ю. А. О параметре шероховатости морской поверхности и расчете турбулентных потоков количества движения в приводном слое атмосферы. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, № 9, 1965.

13. Blackadar A. K. The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. F. Geophys. Res., v. 67, No. 8, 1962.

14. Сафронова М. М. Геострофический коэффициент трения и угол отклонения наземного ветра от геострофического по экспериментальным данным. Тр. ГГО, вып. 241, 1969.

15. Курпакова Т. А., Орленко Л. Р. О закономерностях распределения температуры и ветра в пограничном слое. Тр. ГГО, вып. 205, 1967.

16. Лайхтман Д. Л. Динамика пограничных слоев атмосферы и моря с учетом взаимодействия и нелинейных эффектов. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, т. 2, № 10, 1966.

17. Орленко Л. Р. О расчете касательного напряжения над водной поверхностью в задаче прогноза ленинградских наводнений. Тр. ГГО, вып. 257, 1970.

18. Швец М. Е. [и др.]. Численная модель общей циркуляции атмосферы на полушарии. См. наст. сб.

ВЛИЯНИЕ ЛЕДОВИТОСТИ НА ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ АТМОСФЕРЫ

Теория зонального распределения температуры [7] позволяет оценить влияние изменений характеристик подстилающей поверхности на тепловой режим атмосферы. Такой характеристикой является, в частности, размер полярной шапки льда.

Тепловой режим атмосферы для средних климатических условий, а также для условий полного отсутствия льда в полярных широтах рассмотрен в [8]. Здесь будут изложены результаты решения задачи для различных положений средней зональной границы льда $\varphi_{\text{л}}$ (в градусах широты), характеризующих увеличение ледовитости северного полушария по сравнению с современными условиями.

Перемещение границы льда сказывается прежде всего на зональных величинах альbedo подстилающей поверхности a и планетарного альbedo подстилающей поверхности Γ''' .

Если принять для льда, покрытого снегом, $a=0,85$, а для снега на суше $a=0,70$, то для величин a и Γ''' , соответствующих различным положениям $\varphi_{\text{л}}$, получим распределения, приведенные в табл. 1: данному значению $\varphi_{\text{л}}$ соответствуют все a и Γ''' , полученные для широты $\varphi_{\text{л}}$ и более северных широт.

Таблица 1

Распределение величин a и Γ''' для различных $\varphi_{\text{л}}$

$\varphi_{\text{л}}$	a	Холодное полугодие		Теплое полугодие	
		Γ'''	Γ	Γ'''	Γ
0	0,82	0,25	0,56	0,25	0,56
30	0,78	0,24	0,54	0,24	0,53
50	0,77	0,18	0,58	0,20	0,56
70	0,76	0,15	0,61	0,18	0,58
90	0,85			0,19	0,62

В табл. 1 приведены также планетарные величины альbedo Γ для системы Земля—атмосфера (методику расчета Γ''' и Γ см. в [8]).

С изменением a и Γ изменяются величины солнечной радиации, поглощенной земной поверхностью и системой Земля—атмосфера. Эти изменения можно оценить с помощью данных табл. 1.

Что касается средних зональных значений потоков тепла V от подстилающей поверхности к более глубоким слоям, то распределения V , соответствующие различным $\varphi_{\text{л}}$, можно получить из условий, что для ледяной поверхности поток V равен $2,8 \text{ ккал} \cdot \text{см}^2/\text{полугодие}$ [5], а для суши, покрытой снегом, он так мал, что им можно пренебречь. Затем предполагается, что испарение на всех широтах

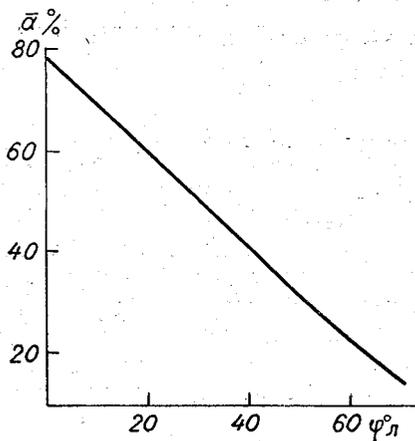


Рис. 1. Зависимость альbedo подстилающей поверхности \bar{a} северного полушария от $\varphi_{\text{л}}$.

севернее $\varphi_{\text{л}}$ равно нулю, а полугодовые зональные суммы осадков равны их современным значениям в полярных широтах. Кроме того, принимается, что средняя степень облачности остается такой же, как и при современных климатических условиях. Это же относится к величинам всех входных параметров задачи (в том числе и перечисленных) южнее $\varphi_{\text{л}}$. Ошибки в распределении потоков тепла, связанные с этим предположением, уменьшаются по мере смещения границы $\varphi_{\text{л}}$ к югу и при $\varphi_{\text{л}}=0$ будут наименьшими, а поэтому минимальными должны быть и ошибки в определении теплового режима для этого предельного случая. Согласно [1], изменение облачности мало влияет на величины зональных температур.

Зная распределения a для различных $\varphi_{\text{л}}$, можно рассчитать средние значения альbedo подстилающей поверхности \bar{a} для северного полушария, соответствующие различным условиям оледенения. Зависимость a от $\varphi_{\text{л}}$ представлена на рис. 1.

Основные параметры атмосферы северного полушария — средняя температура у земной поверхности \bar{t} , температура на экваторе ($t_{\text{э}}$) и полюсе ($t_{\text{п}}$) для теплого и холодного полугодий — представлены на рис. 2 как функции a .

Параметры атмосферы для двух полугодий, соответствующие одному и тому же режиму оледенения, можно получить из предположения, что при данном режиме оледенения положения $\varphi_{\text{л}}$ одинаковы для обоих полугодий.

Представление об изменении среднего индекса зональной циркуляции атмосферы α составим, приняв, что α изменяется

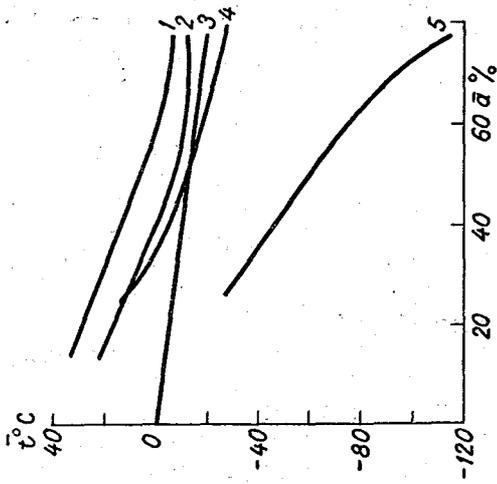


Рис. 2. Зависимость t_o (1), t_r (2), t_n (3), t_z (4), $t_{n,x}$ (5) от a .

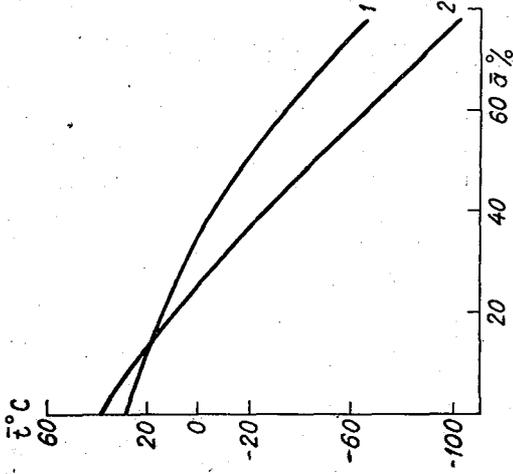


Рис. 3. Зависимость \bar{t} от a (величины E, r и V равны современным климатологическим).
1 — холодное полугодие, 2 — теплое полугодие.

приблизительно пропорционально изменению контраста температур экватор—полюс ΔT . При современных условиях оледенения для теплого полугодия $\bar{\alpha} = 36$, для холодного $\bar{\alpha} = 60$; $\bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\omega} 10^3$, где α и ω —

угловые скорости вращения атмосферы и земли соответственно.

Приведенные здесь расчеты выполнены в предположении, что количество водяного пара в атмосфере M не изменяется при увеличении оледенения. Очевидно, более близким к действительности было бы предположение о том, что M уменьшается. С помощью результатов работы [7] можно приблизительно оценить эффект уменьшения M на температуру атмосферы \bar{t} для теплого полугодия (при условии, что относительная влажность с увеличением ледовитости не изменяется): для различных $\varphi_{\text{л}}$ понижение \bar{t} равно 8—9°. Представление об отепляющем эффекте уменьшения испарения (а также V для теплого полугодия), введенном в данные расчеты, можно составить, сравнив полученные результаты с характеристиками влияния a на \bar{t} при неизменных фазовых притоках тепла [7]. В пересчете на параметры настоящей задачи эти характеристики дают зависимость \bar{t} от a , изображенную на рис. 3.

В полном соответствии с качественными представлениями полученные результаты показывают, что смещение к югу границы оледенения весьма существенно сказывается на среднем тепловом режиме атмосферы. Даже при смещении $\varphi_{\text{л}}$ на 1° широты к югу относительно современного значения приводит к понижению средней годовой температуры \bar{t} приблизительно на 1°. Для холодного полугодия изменения основных параметров атмосферы больше, чем для теплого. Температуры на экваторе для обоих полугодий в пределах ошибок расчетов (3—5°) получились одинаковыми. Этот результат понятен: если при современном режиме выполняется это условие, то тем более оно должно выполняться при смещении $\varphi_{\text{л}}$ к югу для обоих полугодий.

При $\varphi_{\text{л}} = 0$ средняя годовая температура воздуха у поверхности земли $\bar{t} \approx -20^\circ \text{C}$. Формула, использованная в [2] для оценки этой характеристики, дает такой же результат, если положить $\alpha_s = 0,30$ (0,20 — планетарное альbedo подстилающей поверхности, 0,10 — планетарное альbedo атмосферы).

Следует отметить уменьшение контраста температур экватор—полюс для теплого полугодия с увеличением оледенения, связанное, очевидно, с выравниванием величин поглощенной радиации по мере смещения $\varphi_{\text{л}}$ к экватору. В связи с этим интенсивность зональной циркуляции будет уменьшаться для теплого полугодия, а устойчивость циркуляции будет возрастать. Для холодного полугодия индекс циркуляции увеличивается почти линейно с уменьшением широты $\varphi_{\text{л}}$ и неустойчивость циркуляции возрастает. На широтах $\varphi_{\text{л}}$ температуры изменяются в пределах —6, —12°С, что

удовлетворительно согласуется с температурой атмосферы на средней границе ледяной шапки, соответствующей современным климатическим условиям.

В статье не рассматривается вопрос о причинах развития оледенения Земли, здесь даны только некоторые количественные оценки следствий оледенения. Правда, при этом оказалось, что при опускании границы оледенения до некоторой широты (до 20° с. ш.) начинается его самопроизвольное, без воздействия внешних причин, распространение к экватору.

Гипотез о причинах изменений климата как в историческую эпоху, так и в геологическом прошлом известно довольно много. Ошибочность некоторых из них уже доказана (например, гипотезы Симпсона). А те, которые в какой-то степени согласуются с полученными фактическими данными об изменениях климата, нуждаются в дальнейшем существенном теоретическом и экспериментальном обосновании.

Ограничимся только несколькими замечаниями относительно некоторых гипотез. Гипотеза о влиянии на климат запыления атмосферы продуктами вулканических извержений, вероятно, может быть дополнена предположением о таком же воздействии на климат пылевого вещества, попадавшего в верхние слои атмосферы при столкновении с Землей крупных метеоритов и астероидов. По мнению академика В. Г. Фесенкова, весьма вероятно, что земная поверхность аналогично поверхности Луны и Марса в геологическом прошлом часто испытывала удары метеоритов и астероидов, при которых породы из кратеров и расплавленное вещество метеоритов значительно уменьшали прозрачность атмосферы. О существенности подобных процессов в прошлом говорит большое число морфологических структур, открытых на земной поверхности в последнее время благодаря фотографированию с самолетов и искусственных спутников. Уже в 1966 г. было открыто 110 таких структур. В. Г. Фесенков предполагает, что влияние продуктов метеоритных взрывов на климат могло быть по крайней мере не меньше, чем влияние вулканической пыли (количественные характеристики последнего приведены в [9]).

Имеются экспериментальные и теоретические доказательства того, что частые метеоритные удары влияли и на вулканическую активность. Вполне вероятно, что повышенной метеоритной активности в прошлом соответствовала повышенная метеорная активность. По этой причине Земля чаще попадала в облака космической пыли, что также уменьшало количество приходящей к Земле солнечной радиации. Затем, вероятно, «вулканическую» гипотезу можно связать с гипотезой о воздействии на климат солнечной активности. Такое предположение оправдывается тем, что в геотектонической деятельности намечаются связи как с 11-летними, так и с 80—90-летними циклами солнечной активности [11]: максимальные значения энергии землетрясений приходятся на годы максимумов и минимумов 11-летних циклов солнечной активности (со сдвигом 1 год).

В эти же годы произошли все катастрофические землетрясения с магнитудой более 8, например, лиссабонское 1755 г., китайское 1920 г., аляскинское 1964 г. Извержение Кракатао пришлось на год максимума солнечной активности, а извержение Катмаи — на год минимума.

В [11] отмечены звенья причинно-следственной связи солнечной активности с геотектоникой: изменения солнечной активности — изменения угловой скорости вращения Земли — деформации в литосфере — усиления геотектонической активности. Физические механизмы связи между отдельными звеньями этой цепи пока только намечаются. Например, о влиянии солнечной активности на угловую скорость Земли писали многие авторы. Пока наиболее вероятным представляется механизм передачи такого влияния через атмосферную циркуляцию, причем последняя влияет не только на среднюю угловую скорость вращения Земли, но и на взаимные смещения отдельных блоков земной коры [6] (вследствие чего в литосфере, очевидно, могут возникать деформации).

Много интересных вопросов возникает также в связи с возможной зависимостью величины солнечной постоянной от степени солнечной активности [4]. Прежде всего, вероятно, здесь речь может идти об изменениях величины метеорологической солнечной постоянной, которые связаны с изменениями потока солнечной радиации на пути от верхней границы атмосферы до того уровня, где находится измеряющий радиацию прибор. Величина «астрофизической» солнечной постоянной, как показывают современные экспериментальные измерения на спутниках, от солнечной активности практически не зависит. На ее величину могут влиять только облака космической пыли, периодически и спорадически появляющиеся в межпланетном пространстве между Солнцем и Землей [3]. В верхних слоях атмосферы на величину солнечной радиации могут оказывать достаточное влияние, по-видимому, только озон и водяной пар (по последним ракетным измерениям его концентрация в мезосфере на три порядка больше принимавшихся ранее теоретических значений). Следующий вопрос состоит в том, может ли солнечная активность вызывать изменения концентраций этих компонент атмосферы. Относительно водяного пара пока ничего не известно, так же как не известны причины его столь высокой концентрации в верхних слоях. Что касается озона, то в работах [10] и [12] показано влияние на его концентрацию сильных хромосферных вспышек со сдвигом во времени от 1 часа до 3—4 дней. Причем изменения концентрации озона таковы, что могли бы вызвать колебания величины солнечной постоянной на 1—2%. Правда, химические процессы, приводящие при этом к изменениям концентрации озона, пока не ясны.

В работе [9] оценивается влияние вариаций величины солнечной постоянной (в зависимости от солнечной активности) на средний термический режим тропосферы. С этими изменениями должны быть связаны изменения условий конденсации и испарения,

а следовательно, горизонтальных полей температуры и общей циркуляции атмосферы.

Следует заметить, что если вариации солнечной постоянной связаны с изменениями потока солнечной радиации в верхних слоях, то это также может создавать горизонтальную неоднородность термических полей.

Количественно оценить все эти эффекты можно будет с помощью численных экспериментов на гидродинамических моделях циркуляции, в которых все основные звенья тепло- и влагооборота, с учетом обратных связей, будут описаны количественно достаточно корректно.

Таким образом, намечается несколько путей влияния солнечной активности на общую циркуляцию и климат тропосферы — непосредственный и опосредованные, через динамическое взаимодействие верхних и нижних слоев атмосферы [7] и влияние вулканической деятельности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Будыко М. И. О происхождении ледниковых эпох. Метеорология и гидрология, № 11, 1968.
2. Будыко М. И. Полярные льды и климат. Гидрометеиздат, Л., 1969.
3. Калитин Н. Н. Космическая пыль и актинометрические измерения. ДАН СССР, т. 45, № 9, 1944.
4. Кондратьев К. Я., Никольский Г. А. Вариации солнечной постоянной по азостатным исследованиям. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, т. 6, № 3, 1970.
5. Лайхтман Д. Л. Некоторые закономерности теплового режима Центральной Арктики. Сб. «Вопросы физики пограничного слоя атмосферы в Арктике», т. 226. Изд. «Морской транспорт», Л., 1959.
6. Павлов Н. Н. Изменение скорости вращения Земли, деформации земной коры и солнечная активность. Изв. Главной астрономической обсерватории в Пулкове, № 183, 1968.
7. Ракипова Л. Р. Тепловой режим атмосферы. Гидрометеиздат, Л., 1957.
8. Ракипова Л. Р. Изменение зонального распределения температуры в атмосфере в результате активных воздействий на климат. Сб. «Современные проблемы климатологии». Гидрометеиздат, 1966.
9. Ракипова Л. Р. О влиянии вулканических извержений на температуру атмосферы. Тр. ГГО, вып. 236, 1969.
10. Стеблова Р. С. Возмущения стационарного распределения атмосферного озона. Геомагнетизм и аэрономия, т. 3, 1963.
11. Сытинский А. Д. О связи геотектоники с солнечной активностью. Бюлл. советской антарктической экспедиции, № 28, 1961.
12. Sekihara K. The sun activity and atmospheric ozone. J. Met. Soc. Japan, No. 6, 1961.

К. В. ПЯТЫГИНА, Т. С. ФИЛИПОВА

О СВЯЗИ КЛИМАТОЛОГИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ, КОЛИЧЕСТВА ОСАДКОВ И ВЛАЖНОСТИ ВОЗДУХА

1. В работе [3] дано распределение вертикальных скоростей над северным полушарием для поверхности 850 мб. Вертикальная скорость находилась из осредненного по времени уравнения вихря скорости с учетом рельефа местности [1, 2, 3]. Значения вертикальной скорости рассчитывались для узлов регулярной сетки по среднемноголетним значениям давления и температуры. Данные о давлении и температуре взяты из атласа карт, являющегося приложением к монографии Р. Ф. Сохриной, О. Н. Челпановой, В. Я. Шаровой [7]. Основным периодом осреднения данных является период 1881—1935 гг. Поэтому вычисленные нами климатологические значения вертикальной скорости можно рассматривать как нормы вертикальной скорости. Эти нормы получены для всех 12 месяцев года.

При анализе распределения вертикальных скоростей были вычислены также коэффициенты множественной корреляции осадков с вертикальной скоростью и наземной относительной влажностью. Значения относительной влажности снимались с карт, представленных в работе [8], а значения месячных сумм осадков — с карт, представленных в том же атласе, что и карты давления и температуры [7].

Коэффициенты множественной корреляции между указанными величинами вычислены по широтным кругам для января и июля. Расчет их проведен для двух вариантов. В первом варианте в расчет включены районы с горными массивами, во втором варианте они исключены.

Полученные коэффициенты множественной корреляции показали, что в июле корреляционная связь осадков с вертикальной скоростью и наземной относительной влажностью в среднем выше, чем в январе. При этом корреляционная связь осадков с вертикальной скоростью и относительной влажностью для января в среднем выше в случае варианта без исключения районов с горными массивами,

для июля — наоборот. Так, для варианта с горными массивами коэффициенты корреляции для широтных кругов в среднем равны 0,63 и 0,65 соответственно для января и июля, а для варианта с исключением районов с горными массивами они равны 0,54 для января и 0,72 для июля.

2. В работах О. А. Дроздова [4, 5] показано, что связь осадков с относительной влажностью по наземным данным из-за недостаточной их репрезентативности по сравнению с относительной влажностью на высотах менее четкая. Это установлено при использовании ежедневных данных об осадках и влажности воздуха. Затем полученные результаты были осреднены по времени. Сравнение относительной влажности и количества осадков в работе [4] произведено отдельно для высот 1,5 и 3,0 км по семи станциям юга ЕТС в апреле—октябре 1946—1948 гг. По полученным графикам была вычислена вероятность выпадения осадков при различных градациях относительной влажности. Между вероятностью выпадения осадков и относительной влажностью установлена полуэмпирическая связь, причем для высоты 1,5 км эта связь оказалась более тесной. Зависимость осадков от относительной влажности при этом установлена без учета вертикальных движений воздуха.

Представляло интерес найти коэффициенты множественной корреляции и при использовании средних многолетних значений относительной влажности на высотах. В качестве последних нами брались значения относительной влажности на уровне 850 мб.

В табл. 1 и 2 приложения представлены коэффициенты множественной корреляции количества осадков с вертикальной скоростью и относительной влажностью для наземного уровня и уровня 850 мб соответственно для широтных кругов, отстоящих друг от друга на 5°.

Пользуясь этими таблицами, выпишем коэффициенты корреляции, полученные осреднением их для рассматриваемых широтных кругов, в виде табл. 1.

Т а б л и ц а 1

	Вариант расчета			
	с горами		без гор	
	I	VII	I	VII
$R_{\text{овр}}_{\text{наз}}$	0,63	0,65	0,54	0,72
$R_{\text{овр}}_{850}$	0,61	0,73	0,58	0,73

В таблице через $R_{\text{овр}}_{\text{наз}}$ обозначен коэффициент множественной корреляции между осадками (o), вертикальной скоростью (ω) и наземной относительной влажностью ($r_{\text{наз}}$), а через $R_{\text{овр}}_{850}$ — коэф-

коэффициент корреляции между теми же элементами, только вместо наземной влажности входит относительная влажность на уровне 850 мб (r_{850}).

Из этой таблицы видно, что при замене наземной относительной влажности высотной коэффициент множественной корреляции для варианта с горными массивами для января в среднем почти не изменился, а для июля повысился на 0,08. Для варианта с исключением районов с горными массивами имеем обратную картину. При этом получилось, что в январе оптимальным оказался вариант с сохранением районов с горными массивами, а в июле оба варианта дали совершенно одинаковые коэффициенты корреляции ($R_{Owr_{850}} = 0,73$).

Повышение в июле коэффициента корреляции $R_{Owr_{850}}$ по сравнению с $R_{Owr_{наз}}$ указывает на то, что в горных условиях летом относительная влажность на уровне 850 мб по сравнению с наземной влажностью, очевидно, является более репрезентативной.

В данной работе коэффициенты множественной корреляции осадков с вертикальной скоростью и относительной влажностью на уровне 850 мб были вычислены также для апреля и октября, т. е. для срединных месяцев остальных сезонов.

Пользуясь табл. 2 приложения, выпишем значения $R_{Owr_{850}}$, осредненные по восьми широтным кругам, в виде табл. 2. Из таблицы видно, что для января коэффициенты множественной корреляции $R_{Owr_{850}}$ оказались ниже, чем для остальных трех месяцев. Очевидно, здесь некоторую роль сыграло то, что в зимний период под влиянием ветра происходит выдувание снега из осадкомеров, в результате чего точность данных об осадках снижается.

Таблица 2

	Вариант расчета							
	с горами				без гор			
	I	IV	VII	X	I	IV	VII	X
$R_{Owr_{850}}$	0,61	0,72	0,73	0,74	0,58	0,77	0,73	0,74

3. О. А. Дроздовым в работах [4, 5] получена полуэмпирическая формула зависимости количества осадков от влажности воздуха. В этой формуле количество осадков прямо пропорционально произведению влагосодержания атмосферы и некоторой функции, представляющей эмпирическую зависимость количества осадков от относительной влажности. Коэффициент пропорциональности определяет интенсивность циркуляции (интенсивность вертикальных движений).

Указанная полуэмпирическая формула отражает тот факт, что количество осадков зависит как от относительной влажности, так и

от влагосодержания атмосферы. В работе [5] влагосодержание атмосферы в первом приближении было заменено абсолютной влажностью воздуха у земли. При этом было показано, что вероятность осадков в основном определяется относительной влажностью воздуха, а интенсивность осадков — наземной абсолютной влажностью. Но интенсивность осадков в некоторой степени определяется и относительной влажностью воздуха. Так, при очень высоких и очень низких значениях относительной влажности интенсивность осадков обычно небольшая, а при влажности 75—55% — наибольшая.

Поэтому представляло интерес получить коэффициенты множественной корреляции осадков с вертикальной скоростью и абсолютной влажностью воздуха и для средних многолетних значений этих элементов. В наших расчетах значения абсолютной влажности были заменены значениями удельной влажности.

В табл. 3 приложения приведены результаты расчетов множественной корреляции с использованием наземной удельной влажности ($R_{owe_{наз}}$), а в табл. 4 приложения — с использованием удельной влажности на уровне 850 мб ($R_{owe_{850}}$).

Пользуясь этими таблицами, выпишем здесь коэффициенты корреляции, полученные усреднением их для восьми широтных кругов (60—25° с. ш.), в виде табл. 3.

Таблица 3

	Вариант расчета							
	с горами				без гор			
	I	IV	VII	X	I	IV	VII	X
$R_{owe_{наз}}$	0,73	0,59	0,49	0,66	0,66	0,68	0,66	0,66
$R_{owe_{850}}$	0,70	0,53	0,48	0,64	0,68	0,70	0,67	0,64

Таблица показывает, что зависимость осадков от удельной влажности также оказалась довольно существенной. При этом наибольшие значения коэффициентов множественной корреляции для варианта без исключения районов с горными массивами получились в январе, наименьшие — в июле. Для варианта с исключением районов с горными массивами коэффициенты множественной корреляции слабо меняются от одного месяца к другому, а также при замене наземной удельной влажности влажностью на уровне 850 мб.

Таким образом, если замена наземной относительной влажности высотной в среднем привела к увеличению коэффициентов множественной корреляции осадков с вертикальной скоростью и влажностью, то такая замена при использовании удельной влажности не

дала увеличения коэффициентов корреляции. Этот результат является вполне естественным, так как удельная влажность у земли в большей степени характеризует влагосодержание атмосферы.

Сравним теперь средние коэффициенты множественной корреляции, приведенные в табл. 1—3. Для удобства сопоставления выпишем их для варианта с горными массивами в виде табл. 4.

Таблица 4

	I	IV	VII	X
$R_{owr_{\text{наз}}}$	0,63	—	0,65	—
$R_{owr_{850}}$	0,61	0,72	0,73	0,74
$R_{owe_{\text{наз}}}$	0,73	0,59	0,49	0,66
$R_{owe_{850}}$	0,70	0,53	0,48	0,64

Эта таблица показывает, что и климатологические значения осадков определяются не только вертикальными движениями, но и относительной влажностью на уровне 850 мб, а также удельной влажностью воздуха на уровне земли. При этом связь с удельной влажностью в зимний период оказалась более тесной по сравнению с другими сезонами. Этот результат совпадает с результатом, полученным О. А. Дроздовым и А. С. Григорьевой [5, 6] для более коротких периодов осреднения (1951—1953 гг.).

Из сопоставления коэффициентов корреляции $R_{owr_{850}}$ и $R_{owe_{\text{наз}}}$ можно сделать заключение, что в зимний период количество осадков в большей степени определяется их интенсивностью, а весной, летом и осенью — их вероятностью. Из этого, конечно, не следует, что зимой интенсивность осадков больше, чем в другие сезоны. За счет большего количества осадков летом как их вероятность, так и их интенсивность в среднем обычно больше, чем зимой. Заключение, сделанное нами, означает только, что в зимний период изменчивость повторяемости осадков в среднем меньше, чем изменчивость их интенсивности, а в остальные сезоны — наоборот.

При использовании относительной влажности у земли, как указано в работах [1, 3], исключение северных широт 75—65° дало увеличение коэффициентов множественной корреляции. То же самое получилось и в настоящей работе при корреляции осадков с вертикальной скоростью и относительной влажностью на уровне 850 мб.

Но для удельной влажности сохранение северных широт, наоборот, привело к увеличению значений коэффициентов множественной корреляции. Это относится как к наземному уровню, так и к уровню 850 мб для января, апреля, октября. Исключение представляет июль (см. табл. 3 и 4 приложения). Очевидно, это связано с тем,

что, как показал анализ табл. 4, зимой, когда наблюдаются более низкие температуры, количество осадков в большей степени определяется их интенсивностью. Достаточно низкие температуры в северных широтах имеют место и в переходные сезоны года (апрель, октябрь). Поэтому в более северных широтах количество осадков в основном определяется их интенсивностью во все сезоны, кроме летнего периода. Летом количество осадков в северных широтах определяется как их интенсивностью, так и их вероятностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Решетникова К. А. Определение вертикальных токов из уравнений динамики атмосферы и анализ их среднемесячных значений. Тр. ГГО, вып. 71, 1957.

2. Пятыгина К. В., Федорова Э. А. Вычисление вертикальных скоростей, осредненных во времени. Тр. ГГО, вып. 197, 1968.

3. Пятыгина К. В., Коморина Э. А. Распределение вертикальных скоростей над северным полушарием. Тр. ГГО, вып. 236, 1969.

4. Дроздов О. А. О связи относительной влажности с количеством и вероятностью осадков. Тр. ГГО, вып. 50 (112), 1955.

5. Дроздов О. А. и Григорьева А. С. Влагооборот в атмосфере. Гидрометеоиздат, Л., 1963.

6. Григорьева А. С. Влагооборот на юге Европейской территории СССР в холодный период. Тр. ГГО, вып. 70, 1957.

7. Сохрина Р. Ф., Челпанова О. Н., Шарова В. Я. Давление воздуха, температура воздуха и атмосферные осадки северного полушария. Гидрометеоиздат, Л., 1959.

8. Szava-Kovats Jozsef. Verteilung der Luftfeuchtigkeit auf der Erde. Ann. hydrogr. u. marit. Meteorologie, B. LXVI, N. 8, 1938.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Коэффициенты множественной корреляции осадков с вертикальной скоростью и наземной относительной влажностью

φ° с. ш.	Вариант расчета			
	с горами		без гор	
	I	VII	I	VII
60	0,40	0,26	0,28	0,51
55	0,65	0,48	0,68	0,71
50	0,66	0,76	0,74	0,87
45	0,60	0,71	0,57	0,67
40	0,73	0,72	0,47	0,76
35	0,64	0,74	0,64	0,83
30	0,78	0,79	0,61	0,84
25	0,55	0,71	0,35	0,53
Среднее	0,63	0,65	0,54	0,72

Таблица 2

Коэффициенты множественной корреляции осадков с вертикальной скоростью и относительной влажностью на уровне 850 мб

φ° с. ш.	Вариант расчета							
	с горами				без гор			
	I	IV	VII	X	I	IV	VII	X
60	0,31	0,56	0,48	0,43	0,44	0,68	0,54	0,51
55	0,44	0,56	0,55	0,74	0,64	0,64	0,61	0,84
50	0,62	0,74	0,85	0,82	0,72	0,74	0,88	0,89
45	0,60	0,81	0,75	0,81	0,55	0,84	0,79	0,74
40	0,66	0,89	0,83	0,84	0,46	0,90	0,74	0,80
35	0,69	0,76	0,83	0,82	0,45	0,85	0,84	0,78
30	0,85	0,72	0,80	0,74	0,72	0,84	0,83	0,77
25	0,73	0,76	0,73	0,59	0,70	0,68	0,60	0,63
Среднее	0,61	0,72	0,73	0,74	0,58	0,77	0,73	0,74

Таблица 3

Коэффициенты множественной корреляции осадков с вертикальной скоростью
и наземной удельной влажностью

φ° с. ш.	Вариант расчета							
	с горами				без гор			
	I	IV	VII	X	I	IV	VII	X
75	0,92	0,87	0,68	0,94	0,93	0,92	0,61	0,95
70	0,91	0,77	0,63	0,77	0,94	0,90	0,40	0,79
65	0,86	0,62	0,36	0,71	0,93	0,88	0,18	0,73
60	0,74	0,71	0,11	0,48	0,88	0,73	0,46	0,69
55	0,78	0,67	0,35	0,74	0,80	0,74	0,57	0,76
50	0,82	0,54	0,40	0,62	0,82	0,65	0,74	0,70
45	0,74	0,60	0,26	0,64	0,63	0,52	0,63	0,50
40	0,69	0,69	0,45	0,69	0,61	0,70	0,44	0,59
35	0,71	0,55	0,70	0,69	0,46	0,76	0,80	0,72
30	0,75	0,51	0,78	0,66	0,58	0,83	0,86	0,67
25	0,62	0,48	0,77	0,73	0,50	0,52	0,81	0,68
Среднее для $\varphi = 75 \div 25^\circ$	0,78	0,64	0,51	0,70	0,74	0,74	0,59	0,71
Среднее для $\varphi = 60 \div 25^\circ$	0,73	0,59	0,49	0,66	0,66	0,68	0,66	0,66

Таблица 4

Коэффициенты множественной корреляции осадков с вертикальной скоростью
и удельной влажностью на уровне 850 мб

φ° с. ш.	Вариант расчета							
	с горами				без гор			
	I	IV	VII	X	I	IV	VII	X
75	0,94	0,90	0,40	0,84	0,96	0,95	0,50	0,90
70	0,81	0,80	0,41	0,81	0,84	0,89	0,22	0,82
65	0,83	0,58	0,39	0,75	0,82	0,74	0,33	0,74
60	0,67	0,63	0,26	0,48	0,82	0,59	0,42	0,63
55	0,67	0,57	0,17	0,71	0,71	0,61	0,63	0,74
50	0,79	0,53	0,29	0,56	0,80	0,65	0,64	0,70
45	0,67	0,42	0,27	0,56	0,57	0,49	0,48	0,35
40	0,67	0,46	0,40	0,71	0,68	0,68	0,53	0,54
35	0,74	0,24	0,77	0,69	0,65	0,85	0,83	0,74
30	0,78	0,64	0,81	0,68	0,78	0,93	0,90	0,71
25	0,57	0,76	0,83	0,72	0,40	0,79	0,90	0,68
Среднее для $\varphi = 75 \div 25^\circ$	0,74	0,59	0,45	0,68	0,73	0,74	0,58	0,69
Среднее для $\varphi = 60 \div 25^\circ$	0,70	0,53	0,48	0,64	0,68	0,70	0,67	0,64

*Л. С. ГАНДИН, Р. Л. КАГАН,
В. П. МЕЛЕШКО, Л. В. РУХОВЕЦ*

УПРОЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ ПО ТЕРМИЧЕСКОМУ РЕЖИМУ АТМОСФЕРЫ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

За последние годы получило интенсивное развитие новое направление в динамической метеорологии, которое принято называть численными экспериментами по общей циркуляции атмосферы. Эти эксперименты состоят, по существу, в интегрировании на весьма длительные сроки уравнений динамики атмосферы при задании некоторого искусственного начального состояния и при учете неадиабатических факторов. В процессе интегрирования поля метеорологических элементов стремятся к некоторым установившимся в среднем распределениям с отклонениями от средних, напоминающими нестационарные крупномасштабные возмущения. Таким образом, выполнение указанных численных экспериментов представляет собой, по существу, решение задач теории климата и общей циркуляции методом установления.

Применение метода установления является существенно более трудоемкой процедурой, нежели построение теории климата и общей циркуляции на основе стационарной модели. Вместе с тем метод установления обладает рядом принципиальных преимуществ. Во-первых, уравнения стационарной теории климата и общей циркуляции нельзя получить простым отбрасыванием производных по времени в уравнениях динамики атмосферы. В силу нелинейности этих уравнений при построении такой теории приходится учитывать крупномасштабный турбулентный обмен. Параметры этого обмена являются, строго говоря, функциями координат и определение таких функций заведомо не проще, чем нахождение распределений измеряемых метеорологических параметров. При решении же задачи методом установления применяются уравнения, описывающие «мгновенные» состояния, и указанная трудность не является столь

ограничительной. Во-вторых, при использовании метода установления удается получать не только средние состояния, но и отклонения от этих средних. При этом каждое отдельно взятое «мгновенное» поле интереса не представляет. Однако статистические характеристики указанных отклонений, описывающие осредненные свойства отклонений и взаимодействие их со средним движением, представляют собой важные характеристики крупномасштабных атмосферных процессов и могут быть, по крайней мере в принципе, получены при использовании метода установления.

Указанными преимуществами численных экспериментов по общей циркуляции атмосферы и объясняется тот факт, что они развиваются весьма интенсивно, несмотря на чрезвычайную трудоемкость вычислений и обусловленные ею колоссальные затраты времени на электронных вычислительных машинах [14, 16, 11, 12, 8, 13].

Обсуждая современное состояние рассматриваемой проблемы, необходимо наряду с признанием значительных успехов отметить следующее.

При современном состоянии вопроса построение конкретной модели связано с весьма значительным произволом. Этот произвол проявляется не только в выборе конкретных значений тех или иных констант или функций, описывающих, скажем, распределение примесей, поглощающих и излучающих радиацию, или, например, в решении таких формальных моментов, как выбор горизонтального и вертикального разрешения сеточной области. В гораздо большей степени указанный произвол проявляется при количественном описании основных факторов, формирующих общую циркуляцию атмосферы. Например, в модели Смагоринского [16] применен способ учета конвективного теплообмена путем «запрещения» вертикальных температурных градиентов, превышающих заданное значение, а в модели Лиса [9] использован совсем иной, параметрический способ описания конвекции, также трудно поддающийся непосредственному обоснованию. Модель Смагоринского отличается от всех других моделей, между прочим, и способом учета горизонтального турбулентного перемешивания, которое описывается с помощью нелинейных членов, включающих деформацию вектора горизонтальной скорости, причем преимущества такого способа не ясны. Можно было бы привести множество других примеров подобного рода.

При таком обилии «степеней свободы» при построении моделей общей циркуляции можно опасаться, что успешные результаты экспериментов являются следствием более или менее произвольного решения ряда вопросов конструирования модели, а при других, столь же обоснованных построениях модели эксперимента привели бы к неудаче. Не является абсурдным и противоположное представление, что результаты экспериментов малочувствительны к варьированию модели и этим объясняется их успешность. Во всяком случае приходится признать, что весь этот вопрос, являющийся, по существу, вопросом о механизме влияния различных факторов на общую циркуляцию атмосферы, остается невыясненным в свете

существующих моделей общей циркуляции и выполненных с их помощью численных экспериментов.

Между тем задача выявления механизма формирования метеорологического режима является не менее, а более важной, нежели задача получения результатов, близких к действительности. Только выявив механизм влияния каждого из факторов и их взаимодействия, можно рассчитывать построить модель, адекватную реальным процессам планетарного масштаба, а не такую модель, в которой наряду с весьма грубым учетом некоторых из определяющих факторов с преувеличенной сложностью и громоздкостью учитываются другие, менее важные.

Исследование механизма воздействия различных факторов на метеорологический режим весьма трудно проводить с помощью детализированных, громоздких моделей, поскольку при этом интересные нас эффекты могут затушевываться из-за влияния других факторов. Кроме того, такие исследования неизбежно должны включать значительное количество численных экспериментов, выполнить которые на основе детализированных моделей весьма трудно вследствие очень больших затрат машинного времени. Поэтому при таком рода исследованиях целесообразно, по крайней мере на первой стадии, пользоваться весьма простыми физическими моделями, усложняя и обобщая их постепенно по мере развития исследований. Существенно, что такой путь позволяет более тщательно изучать различные аспекты математической реализации моделей, играющие, как известно (см., например, [3]), весьма важную роль.

Помимо сказанного, эксперименты с простыми моделями имеют и непосредственное значение. Некоторые аспекты метеорологического режима, в особенности относящиеся к распределению температуры, заведомо могут быть объяснены с помощью сравнительно простых моделей. На это указывают удовлетворительные результаты, полученные в этом отношении при полном пренебрежении циркуляцией атмосферы или при параметрическом описании ее влияния.

Кроме того, применение упрощенных моделей представляется неизбежным при исследовании метеорологических режимов отдаленного прошлого нашей планеты и при изучении возможных изменений климата в результате изменения тех или иных внешних факторов. Для рассмотрения этих вопросов мы не имеем столь детальной информации о значениях параметров и функций, влияющих на метеорологический режим, какая имеется по данным наблюдений, характеризующих нынешние условия. Предположение о неизменности таких параметров и функций является тем менее обоснованным, чем более детализированная модель привлекается для исследования. Поэтому для объяснения климатов прошлого и будущего заведомо необходимо пользоваться простыми моделями. То же относится в еще большей мере к изучению режимов атмосфер других планет.

По всем этим причинам в качестве одного из направлений численных экспериментов, развиваемых в Главной геофизической обсерватории, были приняты эксперименты с упрощенными моделями. В качестве первой такой модели была принята термотропная квазигеострофическая неадиабатическая модель.

В адиабатическом варианте термотропная негеострофическая модель была предложена Томпсоном и Гейтсом [18]. Несколько раньше частные варианты такой модели были построены Иди [6], Элиассеном [7], Сойером и Бушби [17] и рядом других исследователей. Неадиабатическая термотропная квазигеострофическая модель была рассмотрена М. Е. Швецом и Б. Е. Шнееровым [4] в связи с вопросами учета неадиабатических факторов при численном прогнозе. Используемая нами модель является лишь немногим более полной, чем приведенная в работе [4], причем дополнительно учтены главным образом факторы, существенные для численных экспериментов по формированию метеорологического режима. Эта модель изложена в следующем параграфе.

§ 2. ТЕРМОТРОПНАЯ КВАЗИГЕОСТРОФИЧЕСКАЯ НЕАДИАБАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Обозначим через

$$\frac{D}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \quad (1)$$

индивидуальную производную при горизонтальном движении. Тогда при обычных предположениях можно записать уравнение вихря в виде

$$\frac{D(\Omega + l)}{dt} = l \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} + k \nabla^2 \Omega, \quad (2)$$

а уравнение притока тепла в виде

$$\frac{DT}{dt} = \frac{l^2 m^2}{R} \frac{\omega}{\zeta} + \frac{g}{c_p \tilde{p}_1} \frac{\partial (P + \Lambda)}{\partial \zeta} + \frac{Ls}{c_p} + k' \nabla^2 T. \quad (3)$$

Здесь t — время; x и y — горизонтальные координаты; $\zeta = \frac{p}{\tilde{p}_1}$ —

вертикальная координата; p — давление, \tilde{p}_1 — стандартное значение

давления на уровне моря; $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$ и $\omega = \frac{d\zeta}{dt}$ — составляющие скорости; $\Omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ — относительный вихрь; l — параметр Кориолиса; c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении; g — ускорение силы тяжести; L — скрытая теплота конденсации; R — газовая постоянная для воздуха; P — вертикальный

турбулентный поток тепла; Λ — суммарный лучистый вертикальный поток тепла (так называемый радиационный баланс с обратным знаком), P и Λ положительны при направлении вверх; s — масса воды, конденсирующейся в единице массы воздуха за единицу времени; k и k' — коэффициенты макротурбулентной вязкости и температуропроводности; $\nabla = i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}$ — двумерный оператор Гамильтона, i и j — единичные векторы вдоль осей x и y ;

$$m^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g l^2}$$

есть параметр статической устойчивости; T — температура; γ_a и γ — сухоадиабатический и фактический вертикальные температурные градиенты.

Введем обозначение

$$\int_0^1 () d\zeta = \overline{()}, \quad (4)$$

согласно которому черта сверху означает результат осреднения по вертикальному столбу единичного поперечного сечения. Применяя операцию (4) к уравнению (2) и учитывая, что $\omega = 0$ при $\zeta = 0$, получим

$$\frac{D(\overline{\omega + l})}{dt} = l\omega_1 + k\nabla^2 \overline{\omega}. \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 соответствует значению переменной на нижней границе атмосферы (при $\zeta = 1$), а индекс 0 — значению переменной на верхней границе (при $\zeta = 0$).

Применяя далее операцию (4) к уравнению (3), считая параметр m постоянным по высоте и учитывая, что $P_0 = 0$, получим

$$\frac{DT}{dt} = \frac{l^2 m^2}{R} \left(\frac{\overline{\omega}}{\zeta} \right) + \frac{g}{P_1 c_p} (P_1 + \Lambda_1 - \Lambda_0 + Lr) + k' \nabla^2 T, \quad (6)$$

где

$$r = \frac{\tilde{p}_1}{g} \bar{s}$$

представляет собой количество влаги, конденсирующееся за единицу времени в вертикальном столбе единичного сечения.

Заметим, что алгебраическая сумма потоков тепла

$$M = P_1 + \Lambda_1 - \Lambda_0 + Lr, \quad (7)$$

входящая в правую часть уравнения (6), может быть записана в другом виде, если исключить сумму $P_1 + \Lambda_1$ с помощью условия теплового баланса на подстилающей поверхности

$$P_1 + \Lambda_1 + \Pi + LE = 0,$$

где Π — поток тепла в почву, а E — скорость испарения. Тогда получим

$$M = -\Lambda_0 - \Pi + L(r - E), \quad (8)$$

или, если записать Λ_0 в виде

$$\Lambda_0 = A - (1 - \alpha_0)S,$$

где A — уходящее длинноволновое излучение; S — поток коротковолновой радиации, приходящий на верхнюю границу атмосферы; α_0 — альbedo системы Земля—атмосфера, то

$$M = (1 - \alpha_0)S - A - \Pi + L(r - E). \quad (9)$$

Чтобы исключить $\left(\frac{\omega}{\zeta}\right)$ из (6), проинтегрируем уравнение (2) от 0 до ζ . Учитывая, что $\omega_0 = 0$, получим

$$l\omega = \int_0^\zeta \left[\frac{D(\Omega + l)}{dt} - k\nabla^2\Omega \right] d\eta.$$

Отсюда

$$l\left(\frac{\omega}{\zeta}\right) = \int_0^1 \int_0^\zeta \left[\frac{D(\Omega + l)}{dt} - k\nabla^2\Omega \right] d\eta \frac{d\zeta}{\zeta},$$

или после несложных преобразований

$$l\left(\frac{\omega}{\zeta}\right) = -\overline{\ln \zeta \left[\frac{D(\Omega + l)}{dt} - k\nabla^2\Omega \right]}. \quad (10)$$

Комбинируя (10) с (5), можно получить

$$l\left(\frac{\omega}{\zeta}\right) = -\chi \overline{\left[\frac{D(\Omega + l)}{dt} - k\nabla^2\Omega \right]} + l\omega_1, \quad (11)$$

где

$$\chi(\zeta) = 1 + \ln \zeta, \quad (12)$$

причем, согласно (12) и (4),

$$\overline{\chi} = 0. \quad (13)$$

Подставляя (11) и (7) в (6), получим

$$\frac{D\bar{T}}{dt} + \frac{lm^2}{R} \overline{\chi \frac{D(\Omega + l)}{dt}} = \frac{gM}{\rho_1 c_p} + \frac{l^2 m^2}{R} \omega_1 + \frac{lm^2 k}{R} \overline{\chi \nabla^2 \Omega} + k' \nabla^2 \bar{T}. \quad (14)$$

Введем теперь предположения о квазистатичности

$$T = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad (15)$$

где $\Phi = gz$ — геопотенциал, z — высота, квазигеострофичности

$$u = -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y}; \quad v = \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x}; \quad \Omega = \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi \quad (16)$$

и термотропности

$$\frac{\partial T}{\partial \sigma} = f(\zeta) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \sigma} \quad (\sigma = x, y, t). \quad (17)$$

Из (17) и (15) следует, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \sigma} - RF(\zeta) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \sigma}, \quad (18)$$

где

$$F(\zeta) = 1 - \int_{\zeta}^1 f(\eta) \frac{\partial \eta}{\eta}. \quad (19)$$

При этом, согласно (17), (18) и (19),

$$\bar{f} = 1, \quad (20)$$

$$\bar{F} = 0, \quad (21)$$

$$F(1) = 1. \quad (22)$$

Укажем два простейших с формальной точки зрения задания вида функции $f(\zeta)$.

а) $f(\zeta) = 1$. В этом случае $F(\zeta) = 1 + \ln \zeta$, так что $F(\zeta)$ совпадает с $\chi(\zeta)$ (12). При этом $\bar{T}(x, y, t)$ описывает поля температуры на всех уровнях, а $\bar{\Phi}(x, y, t)$ описывает поле геопотенциала поверхности $\zeta = \frac{1}{e} \approx 0,368$ (e — основание натуральных логарифмов), так как на этом уровне функция F обращается в нуль.

б) $f(\zeta) = 2\zeta$. В этом случае $F(\zeta) = 2\zeta - 1$ и функции $\bar{T}(x, y, t)$ и $\bar{\Phi}(x, y, t)$ описывают поля температуры и геопотенциала поверхности $\zeta = 1/2$.

С помощью соотношений (16) — (21) и (13) нетрудно получить следующие равенства:

$$\frac{D(\Omega + l)}{dt} = \frac{1}{l} \left[\nabla^2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} + J \left(\bar{\Phi}, \frac{1}{l} \nabla^2 \bar{\Phi} + l \right) + \right. \\ \left. + cR^2 J \left(\bar{T}, \frac{1}{l} \nabla^2 \bar{T} \right) \right],$$

$$\frac{D\bar{T}}{dt} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{1}{l} J(\bar{\Phi}, \bar{T}),$$

$$\nabla^2 \Omega = \nabla^2 \left(\frac{1}{l} \nabla^2 \bar{\Phi} \right),$$

$$\chi \nabla^2 \bar{\Omega} = - \frac{R}{a} \nabla^2 \left(\frac{1}{l} \nabla^2 \bar{T} \right),$$

$$\begin{aligned} \chi \frac{D(\Omega + l)}{dt} = & - \frac{R}{al} \left[\nabla^2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + J \left(\bar{\Phi}, \frac{1}{l} \nabla^2 \bar{T} \right) + \right. \\ & \left. + J \left(\bar{T}, \frac{1}{l} \nabla^2 \bar{\Phi} + l \right) \right] + \frac{bR^2}{l} J \left(\bar{T}, \frac{1}{l} \nabla^2 \bar{T} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где использовано обычное обозначение для якобиана

$$J(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (24)$$

а также введены обозначения для безразмерных констант модели

$$a = \frac{1}{F\chi}; \quad b = \overline{F^2\chi}; \quad c = \overline{F^2}. \quad (25)$$

Численные значения этих коэффициентов зависят только от задания функции $f(\zeta)$, причем вариация вида этой функции может приводить к существенному изменению значений a , b и c . В частности, для двух приведенных случаев:

$$\text{а) } f(\zeta) = 1, \quad a = 1, \quad b = -2, \quad c = 1;$$

$$\text{б) } f(\zeta) = 2\zeta, \quad a = 2, \quad b = -\frac{1}{9}, \quad c = \frac{1}{3}.$$

Величина ω связана с обычной вертикальной скоростью $\omega = \frac{dz}{dt}$ соотношением

$$\omega = - \frac{\zeta}{RT} \left(g\omega - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right). \quad (26)$$

Применяя формулу (26) к уровню $\zeta=1$ и используя (16), получим

$$\omega_1 = \frac{1}{RT} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{g}{RT} \omega_1,$$

или, на основании (18) и (22),

$$\omega_1 = \frac{1}{RT} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} - R \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} \right) - \frac{g}{RT} \omega_1. \quad (27)$$

Вертикальная скорость ω_1 на уровне $\zeta=1$ может быть обусловлена влиянием турбулентной вязкости в пограничном слое атмосферы, учёт которого заменяется соотношением на нижней границе

атмосферы, а также орографией. При обычных, наиболее простых предположениях

$$\omega_1 = \omega_b + \omega_r, \quad (28)$$

причем влияние турбулентной вязкости описывается формулой

$$\omega_b = \sqrt{\frac{k_0}{2l^3}} \nabla^2 \Phi_1, \quad (29)$$

где k_0 — коэффициент турбулентной вязкости в пограничном слое, а влияние орографии — формулой

$$\omega_r = \frac{1}{l} J(\Phi_1, h), \quad (30)$$

где h — высота рельефа.

Подставляя (29) и (30) в (28) и пользуясь соотношениями (18) и (22), получим

$$\omega_1 = \frac{1}{l} \left[J(\bar{\Phi} - R\bar{T}, h) + \sqrt{\frac{k_0}{2l}} \nabla^2 (\bar{\Phi} - R\bar{T}) \right]. \quad (31)$$

Разумеется, в рамках рассматриваемой модели возможен и более детальный учет вязкости и орографии.

Используя соотношения (23), (27) и (3), преобразуем уравнения (5) и (14) к виду

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} - \frac{l^2}{RT} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right) = & -J \left(\bar{\Phi}, \frac{1}{l} \nabla^2 \bar{\Phi} + l \right) - \\ & - cJ \left(\Phi', \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi' \right) + kl \nabla^2 \left(\frac{1}{l} \nabla^2 \bar{\Phi} \right) - \frac{lg}{RT} \left[J(\bar{\Phi} - \Phi', h) + \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{k_0}{2l}} \nabla^2 (\bar{\Phi} - \Phi') \right]; \quad (32) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial t} - \frac{a}{m^2} \frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \frac{al^2}{RT} \left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} - \frac{\partial \Phi'}{\partial t} \right) = & -J \left(\bar{\Phi}, \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi' \right) - \\ & - J \left(\Phi', \frac{1}{l} \nabla^2 \bar{\Phi} + l \right) + \frac{a}{m^2 l} J(\bar{\Phi}, \Phi') + abJ \left(\Phi', \frac{1}{l} \nabla^2 \Phi' \right) + \\ & + kl \nabla^2 \left(\frac{1}{l} \nabla^2 \Phi' \right) - \frac{ak'}{m^2} \nabla^2 \Phi' - \frac{agR}{\tilde{\rho}_1 c_p m^2} M + \\ & + \frac{al}{RT} \left[J(\bar{\Phi} - \Phi', h) + \sqrt{\frac{k_0}{2l}} \nabla^2 (\bar{\Phi} - \Phi') \right], \quad (33) \end{aligned}$$

где обозначено

$$\Phi' = R\bar{T}. \quad (34)$$

Если суммарный приток тепла M является заданной функцией координат и времени или заданным образом связан с искомыми

функциями $\overline{\Phi}$ и Φ' , то уравнения (32) и (33) образуют систему двух уравнений с этими двумя искомыми функциями. По отношению к локальным производным $\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \Phi'}{\partial t}$ система (32) — (33) является системой четвертого порядка эллиптического типа. Из нее могут быть получены уравнения типа Гельмгольца для двух линейных комбинаций указанных производных, о чем подробнее сказано ниже.

§ 3. ИНЕРЦИОННЫЕ ИНВАРИАНТЫ МОДЕЛИ

При ряде упрощающих предположений и в частности при пренебрежении неадиабатическими факторами можно показать, что существуют некоторые осредненные по горизонтальной области (S) интегрирования системы (32) — (33) величины, которые не меняются с течением времени. Будем называть такие величины инерционными инвариантами модели. Эти инерционные инварианты можно рассматривать как обобщение известных инерционных инвариантов баротропной модели (см., например, [5]), простейшими из которых являются средний по области (S) вихрь, средняя кинетическая энергия и средний квадрат абсолютного вихря.

Примем следующие упрощающие предположения.

а) Параметр Кориолиса l считается переменным только в качестве переносного вихря, т. е. в виде слагаемого под знаком якобиана в правых частях уравнений (32) и (33). Во всех остальных случаях он заменяется постоянным, например, средним по области (S) значением l (черта снизу здесь и далее означает осреднение по области (S), т. е.

$$\underline{(\quad)} = \frac{1}{S} \iint_{(S)} (\quad) dx dy, \quad (35)$$

где S — площадь области (S)). При указанном предположении систему (32) — (33) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{L_0^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) &= -J(\psi, \nabla^2 \psi + l) - \\ &- cJ(\tau, \nabla^2 \tau) + k \nabla^4 \psi - \frac{l}{H} \left[J(\psi - \tau, h) + \sqrt{\frac{k_0}{2l}} \nabla^2 (\psi - \tau) \right], \quad (36) \\ \nabla^2 \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{a}{m^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{a}{L_0^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) &= -J(\psi, \nabla^2 \tau) - \\ &- J(\tau, \nabla^2 \psi + l) + \frac{a}{m^2} J(\psi, \tau) + abJ(\tau, \nabla^2 \tau) + k \nabla^4 \tau - \\ &- \frac{ak'}{m^2} \nabla^2 \tau - \frac{agRM}{c_p m^2 l p_1} + \frac{al}{H} \left[J(\psi - \tau, h) + \sqrt{\frac{k_0}{2l}} \nabla^2 (\psi - \tau) \right], \quad (37) \end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\psi = \frac{\bar{\Phi}}{l}; \quad \tau = \frac{\Phi'}{l} = \frac{RT}{l}; \quad (38)$$

$$L_0^2 = \frac{RT}{l^2}; \quad H = \frac{RT}{g}. \quad (39)$$

б) Значения $\bar{\Phi}$ и Φ' , а следовательно, и значения ψ и τ на контуре (Γ) области (S) являются константами, т. е. не меняются ни вдоль этого контура, ни со временем. Простоты ради будем отсчитывать ψ и τ от этих граничных значений, т. е. положим

$$\psi|_{(\Gamma)} = \tau|_{(\Gamma)} = 0. \quad (40)$$

в) Притоки тепла, диссипативные силы и влияние орографии отсутствуют. Тогда система (36) — (37) принимает вид

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{L_0^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = -J(\psi, \nabla^2 \psi + l) - cJ(\tau, \nabla^2 \tau); \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{a}{m^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{a}{L_0^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = & -J(\psi, \nabla^2 \tau) - \\ & - J(\tau, \nabla^2 \psi + l) + \frac{a}{m^2} J(\psi, \tau) + abJ(\tau, \nabla^2 \tau). \end{aligned} \quad (42)$$

Рассмотрим сначала частный случай рассматриваемой модели, который будем называть моделью A , а именно, пренебрежем в левой части уравнений малыми членами, описывающими влияние сжимаемости и содержащими множитель $1/L_0^2$. Инерционные уравнения модели A получим, пренебрегая вторым членом левой части уравнения (41) и третьим членом левой части уравнения (42):

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = -J(\psi, \nabla^2 \psi + l) - cJ(\tau, \nabla^2 \tau); \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{a}{m^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = & -J(\psi, \nabla^2 \tau) - J(\tau, \nabla^2 \psi + l) + \\ & + \frac{a}{m^2} J(\psi, \tau) + abJ(\tau, \nabla^2 \tau). \end{aligned} \quad (44)$$

Вывод инерционных инвариантов базируется на двух известных фактах, а именно:

1) Если $A|_{(\Gamma)} = 0$ (или $B|_{(\Gamma)} = 0$), то

$$\underline{J(A, B)} = \underline{AJ(A, B)} = \underline{BJ(A, B)} = 0. \quad (45)$$

Действительно, согласно формуле Грина—Остроградского,

$$\begin{aligned} \iint_{(S)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \int_{(\Gamma)} (P dx + Q dy), \\ J(A, B) &= \frac{1}{S} \iint_{(S)} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x} \right) dx dy = \\ &= \frac{1}{S} \iint_{(S)} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial B}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(A \frac{\partial B}{\partial x} \right) \right] dx dy = \int_{(\Gamma)} A dB = 0. \end{aligned}$$

Остальные равенства (45) сводятся к данному, так как, например,

$$AJ(A, B) = J\left(\frac{A^2}{2}, B\right).$$

2) Если $A|_{(\Gamma)} = 0$, то

$$A \nabla^2 B = - \nabla A \cdot \nabla B. \quad (46)$$

Формула (46) является следствием так называемой обобщенной формулы Грина

$$\iint_{(S)} A \nabla^2 B dx dy = - \iint_{(S)} \nabla A \cdot \nabla B dx dy + \int_{(\Gamma)} A \frac{\partial B}{\partial n} d\Gamma.$$

Осредним теперь уравнение (43) по области (S). Получим на основании (40) и (45)

$$\frac{d}{dt} \nabla^2 \psi = 0, \quad (47)$$

так что величина

$$I_1 = \nabla^2 \psi \quad (48)$$

является инерционным инвариантом модели A. Согласно (38) и (16), I_1 представляет собой осредненный по области (S) вихрь среднего геострофического ветра, пропорциональный циркуляции этого ветра по контуру (Г). Вместе с тем легко убедиться на основании (18) и (21), что величина I_1 равна геострофическому вихрю, осредненному по всему рассматриваемому объему.

Аналогичным образом, осредняя уравнение (14), получим второй линейный инвариант модели A

$$I_2 = \nabla^2 \tau - \frac{a}{m^2} \tau, \quad (49)$$

который представляет собой осредненные значения «усиленного вихря» термического ветра.

Умножим далее уравнение (43) на ψ и затем применим операцию (35). Учитывая (40), (45) и (46), получим выражение

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 = c \psi J(\tau, \nabla^2 \tau). \quad (50)$$

Аналогично, умножив уравнение (44) на $c\tau$, получим после осреднения формулу

$$\frac{d}{dt} \frac{c}{2} \left[(\nabla \tau)^2 + \frac{a}{m^2} \tau^2 \right] = c \tau J(\psi, \nabla^2 \tau). \quad (51)$$

Складывая (50) и (51) и замечая, что в силу (40)

$$\psi J(\tau, \nabla^2 \tau) + \tau J(\psi, \nabla^2 \tau) = J(\psi \tau, \nabla^2 \tau) = 0,$$

получим

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \frac{c}{2} (\nabla \tau)^2 + \frac{ac}{2m^2} \tau^2 \right] = 0. \quad (52)$$

Равенство (52) показывает, что модель А допускает квадратичный инерционный инвариант

$$I_3 = \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \frac{c}{2} (\nabla \tau)^2 + \frac{ac}{2m^2} \tau^2, \quad (53)$$

имеющий смысл энергии модели. Именно,

$$E_k = \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \frac{c}{2} (\nabla \tau)^2 \quad (54)$$

представляет собой, как видно из формул (18), (25) и (38), осредненную кинетическую энергию, причем

$$E_{k\psi} = \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 \quad (55)$$

есть кинетическая энергия среднего геострофического ветра, а

$$E_{k\tau} = \frac{c}{2} (\nabla \tau)^2 \quad (56)$$

— кинетическая энергия термического ветра. Наконец, величина

$$E_\tau = \frac{ac}{2m^2} \tau^2 \quad (57)$$

представляет собой, с точностью до начала отсчета, внутреннюю энергию. С учетом равенств (54)—(57) формула (53) для инварианта I_3 может быть переписана в виде

$$I_3 = E_k + E_\tau = E_{k\psi} + E_{k\tau} + E_\tau. \quad (58)$$

Покажем, что модель A допускает еще один квадратичный инерционный инвариант. С этой целью умножим (43) на $\nabla^2\psi + l$ и применим операцию (35):

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\nabla^2\psi + l)^2 = -c (\nabla^2\psi + l) J(\tau, \nabla^2\tau), \quad (59)$$

а уравнение (44) умножим на $c\nabla^2\tau$ и тоже применим операцию (35):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{c}{2} (\nabla^2\tau)^2 - \frac{ac}{m^2} \nabla^2\tau \frac{\partial\tau}{\partial t} &= -c \nabla^2\tau J(\tau, \nabla^2\psi + l) + \\ &+ \frac{ac}{m^2} \nabla^2\tau J(\psi, \tau). \end{aligned} \quad (60)$$

Поскольку, в силу (40),

$$\left. \frac{\partial\tau}{\partial t} \right|_{(\Gamma)} = 0,$$

то формула (46) дает

$$\nabla^2\tau \frac{\partial\tau}{\partial t} = -\frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\nabla\tau)^2.$$

Учитывая это и выражая последний член в формуле (60) с помощью соотношения (50), перепишем эту формулу в виде

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{c}{2} (\nabla^2\tau)^2 + \frac{ac}{2m^2} (\nabla\tau)^2 - \frac{a}{2m^2} (\nabla\psi)^2 \right] = -c \nabla^2\tau J(\tau, \nabla^2\psi + l). \quad (61)$$

Наконец, складывая (59) и (61) и принимая во внимание, что, в силу (40),

$$(\nabla^2\psi + l) J(\tau, \nabla^2\tau) + \nabla^2\tau J(\tau, \nabla^2\psi + l) = J\{\tau, \nabla^2\tau (\nabla^2\psi + l)\} = 0,$$

получим искомый инвариант

$$I_4 = (\nabla^2\psi + l)^2 + c (\nabla^2\tau)^2 + \frac{ac}{m^2} (\nabla\tau)^2 - \frac{a}{m^2} (\nabla\psi)^2, \quad (62)$$

который, используя обозначения

$$N_\psi = (\nabla^2\psi + l)^2,$$

$$N_\tau = c (\nabla^2\tau)^2, \quad (63)$$

$$N = N_\psi + N_\tau, \quad (64)$$

(55) и (56), можно переписать также в виде

$$I_4 = N + \frac{2a}{m^2} (E_{\kappa\tau} - E_{\kappa\psi}) = N_\psi + N_\tau + \frac{2a}{m^2} (E_{\kappa\tau} - E_{\kappa\psi}). \quad (65)$$

При этом формулы (18), (25) и (38), (63), (64) и (65) показывают, что N представляет собой осредненный квадрат абсолютного вихря.

состоящий из квадрата абсолютного вихря среднего геострофического ветра N_ψ и квадрата вихря термического ветра N_τ .

Рассмотрим теперь тот же вопрос об инерционных инвариантах применительно к модели B , отличающейся от модели A частичным учетом сжимаемости, а именно, удержанием слагаемого $-\frac{1}{L_0^2} \frac{\partial \psi}{\partial t}$

в уравнении (41) при пренебрежении другими слагаемыми в (41) и (42), описывающими влияние сжимаемости. Рассуждая аналогично предыдущему, нетрудно показать, что модель B также допускает два линейных и два квадратичных инварианта, а именно:

$$I_1 = \nabla^2 \psi - \frac{1}{L_0^2} \psi, \quad (66)$$

$$I_2 = \nabla^2 \tau - \frac{a}{m^2} \tau, \quad (67)$$

$$I_3 = E_{\kappa\psi} + E_{\kappa\tau} + E_\psi + E_\tau, \quad (68)$$

$$I_4 = N_\psi + N_\tau + \frac{2a}{m^2} (E_{\kappa\tau} - E_{\kappa\psi}) + \frac{2}{L_0^2} E_{\kappa\psi} - N', \quad (69)$$

где

$$E_\psi = \frac{1}{2L_0^2} \psi^2 \quad (70)$$

представляет с точностью до начала отсчета потенциальную энергию, и

$$N' = \frac{m^2}{aL_0^2} \left(l + \frac{a}{m^2} \psi \right)^2. \quad (71)$$

В отличие от упрощенных моделей A и B , будем называть модель, описываемую, в инерционном варианте, уравнениями (41) и (42), моделью B . Линейные инерционные инварианты этой модели имеют следующий вид:

$$I_1 = \nabla^2 \psi - \frac{1}{L_0^2} (\psi - \tau), \quad (72)$$

$$I_2 = \nabla^2 \tau - \frac{a}{m^2} \tau + \frac{a}{L_0^2} (\psi - \tau) \quad (73)$$

и содержат каждый обе искомые функции ψ и τ . Применяя, однако, линейное преобразование

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \psi + h_1 \tau, \\ \varphi_2 &= \tau - h_2 \psi, \end{aligned} \quad (74)$$

нетрудно из I_1 и I_2 получить инварианты, содержащие каждый лишь одну из функций φ_1 или φ_2 :

$$\begin{aligned}\tilde{I}_1 &= \nabla^2 \varphi_1 - \frac{\lambda_1}{L_0^2} \varphi_1, \\ \tilde{I}_2 &= \nabla^2 \varphi_2 - \frac{\lambda_2}{L_0^2} \varphi_2.\end{aligned}\quad (75)$$

При этом константы h_1 , h_2 , λ_1 и λ_2 связаны с параметрами модели соотношениями

$$\begin{aligned}ah_1 &= h_2 = \nu - \mu, \\ \lambda_1 &= 1 + \mu - \nu, \quad \lambda_2 = 1 + \mu + \nu,\end{aligned}\quad (76)$$

где обозначено

$$2\mu = a \frac{m^2 + L_0^2}{L_0^2} - 1; \quad \nu^2 = \mu^2 + a. \quad (77)$$

Заметим, что это же преобразование позволяет перейти от системы уравнений (36)—(37) к совокупности двух уравнений, каждая из которых содержит производную по времени лишь от одной из функций φ_1 или φ_2 и является уравнением Гельмгольца по отношению к этой производной.

Энергетический инвариант в модели B получается в случае выполнения равенства

$$ac = 1 \quad (78)$$

и имеет вид

$$I_3 = \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + \frac{c}{2} (\nabla \tau)^2 + \frac{1}{2L_0^2} (\psi - \tau)^2 + \frac{1}{2m^2} \tau^2. \quad (79)$$

Что касается второго квадратичного инерционного инварианта, то для модели B такой инвариант получить не удастся.

Наличие инерционных инвариантов и знание их имеют существенное значение при интегрировании уравнений модели на долгие сроки. Применяя соответствующую конечно-разностную запись якобианов, можно, как показал Аракава [5], обеспечить выполнение равенств (45) не только в дифференциальной, но и в разностной форме. Тогда в инерционном варианте указанные инварианты будут иметь место и для разностной схемы численного интегрирования уравнений модели с точностью до ошибок интегрирования по времени и ошибок округления.

Поведение численных моделей с этой точки зрения можно изучать, проводя численные эксперименты в инерционном варианте и прослеживая за изменением инвариантов.

Кроме сказанного, представляет определенный интерес изучить изменения инерционных инвариантов под влиянием каждого из неинерционных факторов. В силу того, что последние входят в уравнения модели линейно, результат воздействия нескольких факторов

на инвариант получится простым суммированием влияний каждого фактора.

Обозначая неинерционные члены в правых частях уравнений (36) и (37) соответственно через Q_ψ и Q_τ и производя преобразования, аналогичные предыдущим, нетрудно получить следующие уравнения:

$$\frac{dI_1}{dt} = Q_\psi, \quad (80)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = Q_\tau, \quad (81)$$

$$\frac{dI_3}{dt} = -\psi Q_\psi - c\tau Q_\tau, \quad (82)$$

$$\frac{dI_4}{dt} = \left(\nabla^2\psi + \frac{a}{m^2}\psi + l \right) Q_\psi + c \nabla^2\tau Q_\tau, \quad (83)$$

верные во всех случаях, если только соответствующий инерционный инвариант существует.

Исходя из соотношений (80)–(83), рассмотрим влияние некоторых из неинерционных факторов, учтенных в уравнениях (36) и (37), на инерционные инварианты. Основным из этих факторов является приток тепла M . В этом случае

$$Q_\psi = 0; \quad Q_\tau = -\frac{agR}{c_p m^2 l p_1} M = -\beta M \quad (84)$$

и равенство (80) дает

$$\frac{dI_1}{dt} = 0, \quad (85)$$

т. е. I_1 не меняется под влиянием притока тепла. В модели A , согласно (48), инвариант I_1 представляет собой циркуляцию $\nabla^2\psi$ среднего геострофического ветра по контуру (Γ). Поэтому равенство (85) означает, что модель A не применима для численных экспериментов с начальным состоянием покоя, например над полушарием. Действительно, в этом случае в начальный момент $\nabla^2\psi = 0$ и, следовательно, $\nabla^2\psi$ будет оставаться равным нулю все время. Следовательно, с моделью A можно проводить численные эксперименты с учетом притока тепла, лишь отправляясь от начальной ситуации с реальным значением $\nabla^2\psi$, например, задавая в качестве начального распределения ψ поле норм или какое-либо фактическое поле.

Иначе обстоит дело с моделью B . Для этой модели I_1 определяется формулой (72), которую, вводя линейный масштаб L_ψ поля ψ соотношением

$$\nabla^2\psi = -\frac{1}{L_\psi^2}\psi, \quad (86)$$

можно переписать в виде

$$I_1 = \frac{1}{L_0^2} \tau - \left(\frac{1}{L_0^2} + \frac{1}{L_\psi^2} \right) \psi.$$

При нулевом начальном условии, согласно (85), $I_1 = 0$ и потому получаем

$$\psi = \frac{L_\psi^2}{L_0^2 + L_\psi^2} \tau, \quad (87)$$

так что под влиянием притока тепла одновременно с генерацией τ будет генерироваться пропорциональное τ и имеющее тот же знак значение ψ .

Это рассуждение показывает, насколько существен достаточно полный учет сжимаемости в численных экспериментах, по крайней мере в рамках квазигеострофической или квазисоленоидальной модели, несмотря на то, что соответствующие слагаемые в уравнениях модели сравнительно малы.

Пусть приток тепла определяется выражением

$$M = M_0 - \alpha \tau, \quad (88)$$

где M_0 и α — заданные функции координат. Член $-\alpha\tau$ в формуле (88) описывает «отрицательную обратную связь» между притоком тепла и температурой, т. е. увеличение оттока тепла с ростом температуры (главным образом путем увеличения уходящего излучения). Подставляя (88) в (84), получим на основании соотношений (81) — (83):

$$\frac{dI_2}{dt} = -\beta (M_0 - \alpha \tau), \quad (89)$$

$$\frac{dI_3}{dt} = c\beta (\tau M_0 - \alpha \tau^2), \quad (90)$$

$$\frac{dI_4}{dt} = c\beta (\nabla M_0 \cdot \nabla \tau - \nabla \alpha \tau \cdot \nabla \tau). \quad (91)$$

Если в начальный момент задается изотермия, то в начальный момент $\tau = 0$, и поэтому последний член в (89) пропадает.

Применительно к моделям А и Б можно, вводя аналогично (86) линейный масштаб L_τ поля τ :

$$\nabla^2 \tau = - \frac{1}{L_\tau^2} \tau, \quad (92)$$

переписать формулу (49) для I_2 в виде

$$I_2 = - \left(\frac{a}{m^2} + \frac{1}{L_\tau^2} \right) \tau. \quad (93)$$

(Учет дополнительного члена в I_2 для модели В, согласно формуле (73), не изменил бы существенно это рассуждение.) Поэтому в начальный момент

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\beta m^2 L_\tau^2}{a L_\tau^2 + m^2} M_0, \quad (94)$$

так что происходит генерация τ того же знака, что и M_0 , и пропорционального M_0 по величине. В дальнейшем рост $|\tau|$ замедляется и процесс стремится к установлению, которое, однако, наступает при слишком больших значениях $|\tau|$, а именно таких, при которых приток тепла полностью уравнивается обратной связью.

Рассмотрим поэтому влияние макротурбулентного теплообмена, для которого имеем

$$Q_\psi = 0; \quad Q_\tau = -\frac{ak'}{m^2} \nabla^2 \tau, \quad (95)$$

и потому формулы (80) — (83) дают:

$$\frac{dI_1}{dt} = 0, \quad (96)$$

$$\frac{dI_2}{dt} = -\frac{ak'}{m^2} \nabla^2 \tau, \quad (97)$$

$$\frac{dI_3}{dt} = -\frac{ack'}{m^2} (\nabla \tau)^2, \quad (98)$$

$$\frac{dI_4}{dt} = -\frac{ack'}{m^2} (\nabla^2 \tau)^2. \quad (99)$$

Выражения (98) и (99) показывают, что влияние макрообмена приводит к уменьшению квадратичных инвариантов, что вполне естественно.

Согласно (89) и (97), изменение инварианта I_2 при совместном действии притока тепла и макротурбулентного теплообмена равно

$$\frac{dI_2}{dt} = -\beta (M_0 - \alpha \tau) - \frac{ak'}{m^2} \nabla^2 \tau. \quad (100)$$

Вводя L_τ соотношением (92) и полагая для простоты α не зависящим от координат, получим из соотношения (100) для условий установления $\left(\frac{dI_2}{dt} = 0\right)$ формулу

$$\tau = \frac{\alpha \beta m^2 L_\tau^2}{ak' + \beta m^2 L_\tau^2} M_0, \quad (101)$$

показывающую, что при заданном $|M_0|$ величина $|\tau|$ уменьшается с ростом коэффициента макротурбулентной температуропроводности k' .

Рассмотрим еще влияние орографии, которое в уравнениях (36) и (37) описывается членами

$$Q_{\psi} = -\frac{l}{H} J(\psi - \tau, h);$$

$$Q_{\tau} = \frac{al}{H} J(\psi - \tau, h). \quad (102)$$

Подставляя (102) в (80) и (81), получим, согласно (45), что

$$\frac{dI_1}{dt} = \frac{dI_2}{dt} = 0, \quad (103)$$

а подстановка в (82) дает

$$\frac{dI_3}{dt} = -\frac{l}{H} [\psi J(\tau, h) + ac\tau J(\psi, h)]. \quad (104)$$

Правая часть (104) обращается тождественно в нуль лишь при дополнительном условии

$$ac = 1,$$

уже встречавшемся выше, (78). Это условие не следует непосредственно из формулировки модели. В частности, из двух рассмотренных на стр. 79 простейших случаев задания «профильной» функции $f(\xi)$ условие (78) выполняется в случае (а) и не выполняется в случае (б). Поскольку, с другой стороны, трудно сомневаться в том, что влияние орографии, учитываемое в предположении идеальности обтекания, не должно сказываться на суммарной энергии, отсюда следует, что способы описания профилей, при которых выполняется условие (78), заслуживают предпочтения.

Аналогичным образом может быть исследовано влияние других неинерционных факторов, учитываемых в рассматриваемой модели, на ее инерционные инварианты.

§ 4. СХЕМА ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1. Описание сетки. Территория, для которой производится численное интегрирование, и покрывающая ее конечно-разностная сетка выбираются, как правило, не только с учетом особенностей рассматриваемой модели, но и исходя из возможностей ЭВЦМ, на которой должна быть реализована модель.

Выбор рассматриваемой ниже сетки определялся, во-первых, тем, что для квазигеострофической модели приэкваториальная область должна быть исключена, во-вторых, — возможностями ЭВЦМ М-220, с помощью которой производились все численные эксперименты с различными вариантами модели, изложенной в § 2.

На карте стереографической полярной проекции с главным масштабом по широте 60° рассматривается квадратная сетка, образу-

щая восьмиугольник (рис. 1). Если дополнить сетку фиктивными узлами (изображенными на рис. 1 в виде кружков), то получим квадрат, содержащий $27 \times 27 = 729$ узлов, из которых 112 узлов фиктивные. Таким образом, сетка содержит 617 узлов. При масштабе карты 1 : 30 000 000 угловые точки восьмиугольника располагаются на широте 15° . Расстояние между узлами у полюса составляет примерно 700 км, на широте 60° — около 640 км, на широте 15° — около 440 км.

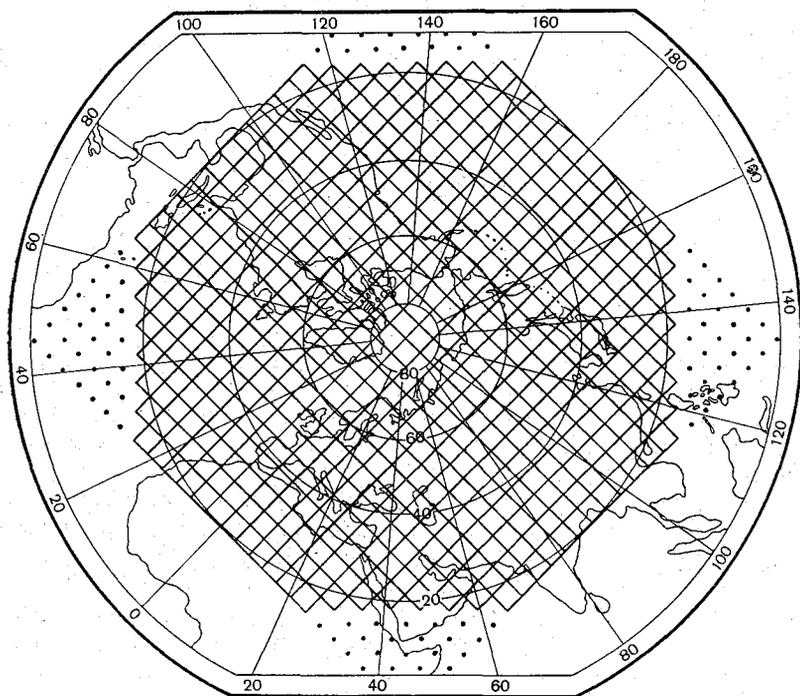


Рис. 1. Сетка, используемая в численных экспериментах.

Уравнения (36), (37) для выбранной картографической проекции примут вид:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{L_0^2 n^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = -J(\psi, n^2 \nabla^2 \psi + l) - cJ(\tau, n^2 \nabla^2 \tau) +$$

$$+ k \nabla^2 (n^2 \nabla^2 \psi) - \frac{l}{H} \left[J(\psi - \tau, h) + \sqrt{\frac{k_0}{2l}} \nabla^2 (\psi - \tau) \right], \quad (105)$$

$$\nabla^2 \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{a}{m^2 n^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{a}{L_0^2 n^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = -J(\psi, n^2 \nabla^2 \tau) -$$

$$\begin{aligned}
 & - J(\tau, n^2 \nabla^2 \psi + l) + \frac{a}{m^2 n^2} J(\psi, \tau) + ab J(\tau, n^2 \nabla^2 \tau) + k \nabla^2 (n^2 \nabla^2 \tau) - \\
 & - \frac{ak'}{m^2} \nabla^2 \tau - \frac{agR\mu}{c_p m^2 l p_1 n^2} + \frac{al}{H} \left[J(\psi - \tau, h) + \sqrt{\frac{k_0}{2l}} \nabla^2 (\psi - \tau) \right].
 \end{aligned}
 \tag{106}$$

Здесь n — параметр увеличения картографической проекции, который для рассматриваемой проекции связан с широтой φ следующим соотношением:

$$n^2 = \left(\frac{1,8659}{1 + \sin \varphi} \right)^2.$$

2. Аппроксимация пространственных производных. Вопрос аппроксимации пространственных производных в случае нелинейной системы, предназначенной для интегрирования на длительные сроки, имеет большое значение. Как известно, в нелинейных уравнениях при аппроксимации пространственных производных конечными разностями ошибки, связанные с невозможностью представления на сетке волн, длины которых меньше шага сетки, приводят к искажению длинноволновых компонент. Эти ошибки, кроме искажения амплитуд и фаз компонент, представимых на сетке, при некоторых условиях могут приводить и к так называемой «нелинейной неустойчивости». Аракава [5], однако, показал, что при определенной аппроксимации пространственных производных (якобианов) можно избавиться от нелинейной неустойчивости, хотя искажение амплитуд и фаз представимых на сетке компонент остается. Аракава рассмотрел случай баротропного уравнения вихря для двумерного потока несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = J(\zeta, \psi), \tag{107}$$

где ψ — функция тока, $\zeta = \nabla^2 \psi$.

Если на границе L области S , для которой производится интегрирование, $\psi = \text{const}$, то из (107) вытекают следующие три закона сохранения:

$$\nabla^2 \psi = \text{const}, \tag{108}$$

$$(\nabla \psi)^2 = \text{const}, \tag{109}$$

$$(\nabla^2 \psi)^2 = \text{const}. \tag{110}$$

Величина (108) есть линейный инвариант, выражающий закон сохранения среднего вихря, (109) и (110) представляют собой квадратичные инварианты, выражающие законы сохранения соответственно средней кинетической энергии и среднего квадрата вихря. Аракава показал, что если в (107) пространственные производные аппроксимировать конечными разностями определенным образом,

а именно, представить якобиан J по следующей схеме (имеющей второй порядок аппроксимации):

$$\begin{aligned}
 J_{ij}(\psi, \zeta) = & \frac{1}{12d^2} [(\psi_{i, j-1} + \psi_{i+1, j-1} - \psi_{i, j+1} - \psi_{i+1, j+1}) \times \\
 & \times (\zeta_{i+1, j} + \zeta_{i, j}) - (\psi_{i-1, j-1} + \psi_{i, j-1} - \psi_{i-1, j+1} - \psi_{i, j+1}) \times \\
 & \times (\zeta_{i, j} + \zeta_{i-1, j}) + (\psi_{i+1, j} + \psi_{i+1, j+1} - \psi_{i-1, j} - \psi_{i-1, j+1}) \times \\
 & \times (\zeta_{i, j+1} + \zeta_{i, j}) - (\psi_{i+1, j-1} + \psi_{i+1, j} - \psi_{i-1, j-1} - \psi_{i-1, j}) \times \\
 & \times (\zeta_{i, j} + \zeta_{i, j-1}) + (\psi_{i+1, j} - \psi_{i, j+1}) \cdot (\zeta_{i+1, j+1} + \zeta_{i, j}) - \\
 & - (\psi_{i, j-1} - \psi_{i-1, j}) (\zeta_{i, j} + \zeta_{i-1, j-1}) + (\psi_{i, j+1} - \psi_{i-1, j}) \times \\
 & \times (\zeta_{i-1, j+1} + \zeta_{i, j}) - (\psi_{i+1, j} - \psi_{i, j-1}) \cdot (\zeta_{i, j} + \zeta_{i+1, j-1}), \quad (111)
 \end{aligned}$$

(где d — шаг сетки),

то для получившегося дифференциально-разностного уравнения будут справедливы перечисленные выше три закона сохранения, что не только исключает возможность возникновения нелинейной неустойчивости, но и исключает ошибку в описании среднего масштаба движения, хотя спектральное распределение энергии может отличаться от того, которое соответствует дифференциальному уравнению (107). Схема (111) не гарантирует точности в описании амплитуды и фазы отдельной волны.

Кроме того, практическое интегрирование уравнения (107) требует конечно-разностной аппроксимации также и производной по времени, что в свою очередь может приводить к нарушению инвариантности указанных средних характеристик.

Наконец, если исследуемое движение жидкости описывается не уравнением (107), а уравнением более общего вида или системой уравнений, то, вообще говоря, нельзя утверждать, что аппроксимация якобианов по схеме Аракава исключает возможность возникновения нелинейной неустойчивости. Действительно, даже если для рассматриваемой модели движения можно получить законы сохранения квадратичных величин в дифференциальной форме (что, вообще говоря, не всегда имеет место), то это еще не означает, что и в разностном виде эти законы будут иметь место.

Так, например, для вывода сохраняемости величин (53) и (62) в дифференциальной форме используется очевидное тождество

$$AJ(B, C) + BJ(A, C) = J(AB, C),$$

которое для разностной аппроксимации якобианов по Аракава (как впрочем и для ряда других аппроксимаций) не выполняется.

В настоящей работе при проведении основных расчетов аппроксимация якобианов производилась по схеме Аракава (111). Обеспечивает ли эта аппроксимация вместе с принятой аппроксимацией производной по времени сохранение интегральных инвариантов для различных модификаций модели, описанной в § 2, проверялось эмпирически, путем интегрирования на длительные сроки.

инерционных схем. Изложению результатов этих экспериментов посвящена работа [1].

Схема аппроксимации якобианов (111) применима лишь для внутренних точек области. Для точек границы, если для них выполняется условие $\psi = \text{const}$, Аракава предложил схему аппроксимации якобианов, которая в случае, например, границы $j=0$ имеет вид

$$J(\psi, \zeta)_{i,0} = \frac{1}{12d^2} [(\psi_{i,0} + \psi_{i+1,0} - \psi_{i,1} - \psi_{i+1,1}) \cdot (\zeta_{i,0} + \zeta_{i+1,0}) - (\psi_{i-1,0} + \psi_{i,0} - \psi_{i-1,1} - \psi_{i,1}) \cdot (\zeta_{i-1,0} + \zeta_{i,0}) + (\psi_{i+1,0} + \psi_{i+1,1} - \psi_{i-1,0} - \psi_{i-1,1}) \cdot (\zeta_{i,0} + \zeta_{i,1}) + (\psi_{i+1,0} - \psi_{i,1})(\zeta_{i,0} + \zeta_{i+1,1}) + (\psi_{i,1} - \psi_{i-1,0})(\zeta_{i-1,1} + \zeta_{i,0})] \quad (112)$$

(для внутренних точек области $j > 0$). Эта схема принята в настоящей работе.

Аппроксимация лапласианов производилась по обычной пятиточечной схеме

$$\nabla^2 f_{i,j} = \frac{1}{d^2} (f_{i+1,j} + f_{i,j+1} + f_{i-1,j} + f_{i,j-1} - 4f_{i,j}). \quad (113)$$

В начальный момент определялись значения лапласианов не только во внутренних, но и в граничных точках (путем экстраполяции). О вычислении лапласианов в точках границы в последующие моменты времени будет идти речь ниже. Отметим лишь, что значение лапласианов на границе во все моменты времени необходимы не только для расчетов по формулам (112), (111), но и для расчета членов, описывающих макрообмен.

3. Схема интегрирования по времени. В работе Д. Лилли [10] установлено, что метод Адамса—Бэшфорта обладает определенными преимуществами перед другими известными явными методами. Это же обстоятельство было отмечено в работе Н. В. Исаева и М. С. Фукса-Рабиновича [2].

В настоящей работе метод Адамса—Бэшфорта применялся во всех основных экспериментах, при этом на первом шаге использовался метод Эйлера. Схема интегрирования такова.

По значениям функций ψ^k и τ^k в момент времени k определяются правые части уравнений (105) и (106). Далее уравнения интегрируются для определения значений $\frac{\partial \psi^k}{\partial t}$ и $\frac{\partial \tau^k}{\partial t}$ во всех внутренних

точках, при этом на границе принимается, что ψ и τ есть константы, не зависящие ни от пространственных координат, ни от времени. Интегрирование уравнений (105) и (106) производится с помощью

ускоренного метода Лимбмана. По значениям $\frac{\partial \psi^k}{\partial t}$, $\frac{\partial \tau^k}{\partial t}$ и $\frac{\partial \psi^{k+1}}{\partial t}$, $\frac{\partial \tau^{k+1}}{\partial t}$ за два последовательных момента времени опреде-

ляются величины ψ^{k+2} , τ^{k+2} с применением метода Адамса—Бэшфорда:

$$\left. \begin{aligned} \psi^{k+2} &= \psi^{k+1} + \frac{3}{2} \Delta t \frac{\partial \psi^{k+1}}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial \psi^k}{\partial t}, \\ \tau^{k+2} &= \tau^{k+1} + \frac{3}{2} \Delta t \frac{\partial \tau^{k+1}}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial \tau^k}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (114)$$

В начальный момент времени для этой цели используется метод Эйлера:

$$\left. \begin{aligned} \psi^1 &= \psi^0 + \frac{\partial \psi^0}{\partial t} \Delta t, \\ \tau^1 &= \tau^0 + \frac{\partial \tau^0}{\partial t} \Delta t. \end{aligned} \right\} \quad (115)$$

Как уже отмечалось выше, для расчетов по рассматриваемой схеме необходимо на каждом шаге по времени получать значения лапласианов в граничных точках. В некоторых схемах это требование заменяют другим. Так, например, в ряде схем численного прогноза принимается условие постоянства искомым функций в двух рядах граничных точек. В работе Филлипса [14] на границе принимается условие равенства нулю лапласиана от функции тока. В настоящей работе в основных расчетах значения лапласианов на границе рассчитывались путем интегрирования уравнений (105) и (106) по времени относительно $\nabla^2 \psi$ и $\nabla^2 \tau$. При этом члены в левых частях уравнений, содержащие $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ и $\frac{\partial \tau}{\partial t}$, равны нулю, так как ψ и τ — константы на границе. Кроме того, члены, описывающие макрообмен, в граничных точках принимались равными нулю. Для интегрирования по времени уравнений относительно $\nabla^2 \psi$ и $\nabla^2 \tau$ на границе также использовался метод Адамса—Бэшфорда (на первом шаге — метод Эйлера):

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi^{k+2} &= \nabla^2 \psi^{k+1} + \frac{3}{2} \Delta t F_1^{k+1} - \frac{1}{2} \Delta t F_1^k, \\ \nabla^2 \tau^{k+2} &= \nabla^2 \tau^{k+1} + \frac{3}{2} \Delta t F_2^{k+1} - \frac{1}{2} \Delta t F_2^k, \end{aligned} \right\} \quad (116)$$

где F_1^k и F_2^k — значения в момент времени k правых частей уравнений (105) и (106) соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. [и др.]. Численное интегрирование инерционной модели на длительные сроки. См. наст. сб.
2. Исаев Н. В., Фукс-Рабинович М. С. Об одном конечно-разностном алгоритме решения уравнения вихря для средней тропосферы над северным полушарием. Тр. ГМЦ, вып. 19, 1968.
3. Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана. Сб. пер. под ред. Л. Р. Дмитриевой-Арраго, Л. В. Руховца, Б. Е. Шнеерова. Гидрометеоздат, Л., 1968.
4. Швец М. Е., Шнееров Б. Е. К учету результатов радиационных измерений со спутников в неадиабатической модели атмосферы. ДАН СССР, т. 152, № 3, 1963.
5. Arakawa A. Computational design for long-term numerical integrations of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. J. Comput. Phys., vol. 1, No. 1, 1966. (Перевод в сб. «Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана». Гидрометеоздат, 1968.)
6. Eady E. T. Note on weather computing and the so-called $2\frac{1}{2}$ -dimensional model. Tellus, vol. 4, No. 3, 1952.
7. Eliassen A. Simplified dynamic models of the atmosphere designed for the purpose of numerical prediction. Tellus, vol. 4, No. 3, 1952.
8. Kasahara A., Washington W. M. NCAR global general circulation model of the atmosphere. Mon. Wea. Rev., vol. 95, No. 7, 1967.
9. Leith C. E. Convection in a six-level model atmosphere. Сб. «Динамика крупномасштабных атмосферных процессов». Изд. «Наука», М., 1967.
10. Lilly D. K. On the computational stability of numerical solutions of time-dependent non-linear geophysical fluid dynamics problems. Mon. Wea. Rev., vol. 93, No. 1, 1965. (Перевод в сб. «Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана». Гидрометеоздат, 1968.)
11. Manabe S., Strickler R. F. Thermal equilibrium of the atmosphere with a convective adjustment. J. Atm. Sci., vol. 21, No. 4, 1964. (Перевод в сб. «Теория климата». Гидрометеоздат, 1967.)
12. Mintz J. Very long-term global integration of the primitive equations of atmospheric motion. WMO Technical Note No. 66. WMO—IUGG Symposium on Research and Development Aspects of Long-Range Forecasting. Boulder, Colo, 1964. Geneva 1965. (Перевод в сб. «Теория климата». Гидрометеоздат, 1967.)
13. Miyakoda K. et al. Experimental extended predictions with a nine-level hemispheric model. Mon. Wea. Rev., vol. 97, No. 1, 1969.
14. Phillips N. A. The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment. Q. J. Roy. Met. Soc., vol. 82, No. 352, 1956. (Перевод в сб. «Теория климата». Гидрометеоздат, 1967.)
15. Phillips N. A. An example of nonlinear computational instability. The atmosphere and the sea in motion. N. Y., 1959. (Перевод в сб. «Атмосфера и океан в движении». ИЛ, 1963.)
16. Smagorinsky J., Manabe S., Holloway J. L. Numerical results from a nine-level general circulation model of the atmosphere. Mon. Wea. Rev., vol. 93, No. 12, 1965. (Перевод в сб. «Теория климата». Гидрометеоздат, 1967.)
17. Sawyer J. C., Bushby P. H. A barotropic model of atmosphere suitable for numerical integration. J. Meteor., vol. 10, No. 1, 1953. (Перевод в сб. «Численные методы прогноза погоды». Гидрометеоздат, 1960.)
18. Thompson P. D., Gates L. W. A test of numerical prediction methods based on the barotropic and two-parameter baroclinic models. J. Meteor., vol. 13, No. 2, 1956.

О ЗАДАНИИ ПРИТОКОВ ТЕПЛА ПРИ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАХ С ПОМОЩЬЮ ТЕРМОТРОПНОЙ МОДЕЛИ

Данная статья содержит описание климатологических данных по суммарному притоку тепла к атмосфере, использованных в работе [1] для проведения численных экспериментов по интегрированию на долгий срок уравнений термотропной модели атмосферной циркуляции. Анализ этих данных необходим для понимания результатов численных экспериментов с упомянутой моделью и представляет также известный самостоятельный интерес.

Интегрирование уравнений динамики атмосферы на долгий срок требует учета неадиабатичности атмосферных процессов, т. е. учета притоков и стоков тепла в атмосфере. Это обстоятельство учитывается путем введения соответствующих членов в уравнения модели. В частности, в описанной в статье [1] термотропной модели предусмотрен учет радиационного и конденсационного притоков тепла в атмосферу, а также обмена тепла между атмосферой и подстилающей поверхностью. Суммарный приток тепла к вертикальной колонне воздуха единичного поперечного сечения, представляющий, с точностью до изменения теплосодержания колонны, количество тепла, перераспределяемое горизонтальными движениями в атмосфере, может быть рассчитан по формуле

$$M = (1 - \Gamma)S - A - \Pi + L(r - E), \quad (1)$$

где S — поток солнечной радиации, поступающей на границу атмосферы; Γ — альbedo системы Земля—атмосфера; A — уходящее длинноволновое излучение; Π — поток тепла в почву; L — скрытое тепло конденсации; r — количество сконденсировавшейся влаги, которое может приближенно отождествляться с количеством выпавших осадков; E — испарение с подстилающей поверхности. Впредь для краткости величину M будем называть «притоком тепла».

Строгий учет влияния притоков тепла при моделировании термического режима атмосферы требовал бы производить расчеты их

заново для каждого временного шага с учетом изменившихся полей температуры, давления и других метеорологических элементов. Такая постановка задачи делала бы термотропную схему незамкнутой, так как потребовалось бы описание временного хода ряда других параметров. Впрочем, в настоящее время задачи в такой постановке очень трудно реализовать и в многопараметрических схемах, поскольку методика расчета притоков тепла к атмосфере для коротких периодов времени еще в достаточной мере не разработана.

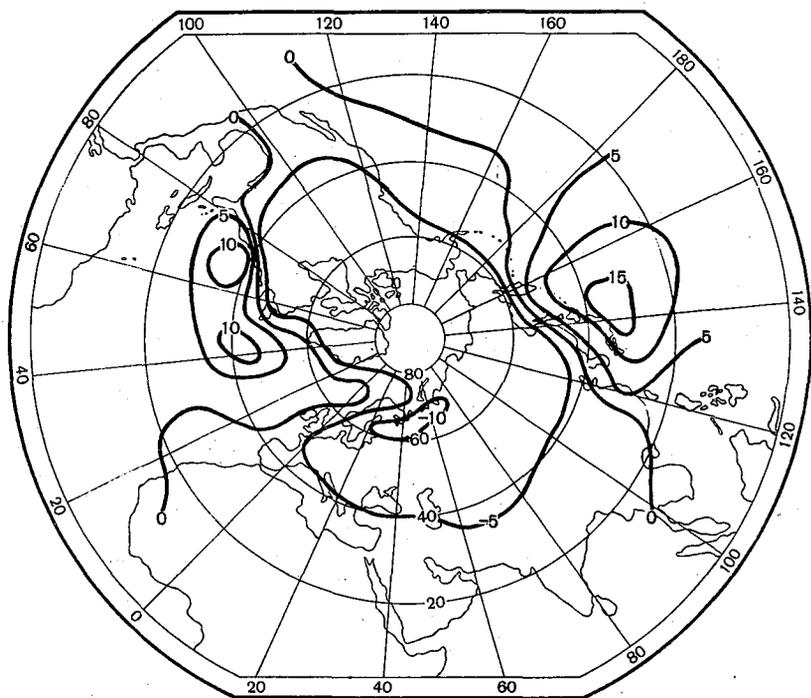


Рис. 1. Приток тепла к атмосфере без учета влагооборота M_c ккал/см²мес. Январь.

Лучше обстоит дело с методикой расчета потоков тепла за сравнительно большие периоды времени (месяц и более). Такая методика, представляющая собой видоизмененную методику расчета климатологических значений составляющих теплового баланса [2], в настоящее время разработана в ГГО. Однако корректное включение и этой методики потребовало бы усложнения термотропной модели путем включения в нее уравнений, описывающих влагооборот в атмосфере, лучистые притоки тепла и т. д., что на данном этапе представляется преждевременным. Естественно, что авторами [1] было решено начать численные эксперименты по термическому режиму путем использования климатологических средних значений притоков тепла к атмосфере.

Расчет карт средних притоков тепла для северного полушария был впервые осуществлен Т. Г. Берлянд [3]. В указанной работе были построены карты средних многолетних месячных (за март, июнь, сентябрь и декабрь) величин атмосферной адвекции, которая, по существу, совпадает с интегральными притоками тепла ко всей толще атмосферы. За последнее время в связи с работами, выполненными при составлении карт «Атласа теплового баланса земного шара» [4], появилась возможность использовать материалы этого

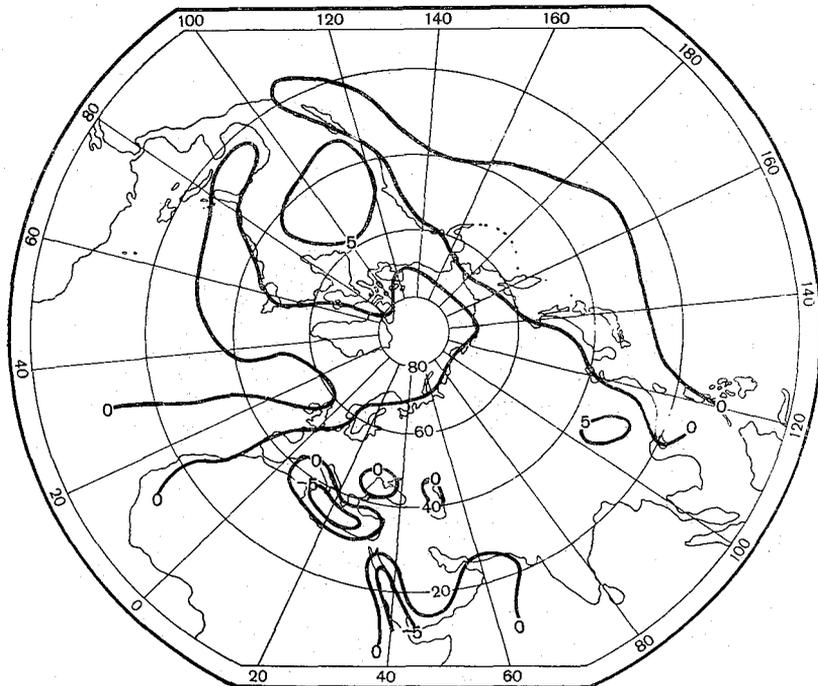


Рис. 2. Приток тепла к атмосфере без учета влагооборота M_e ккал/см² мес.
Июль.

Атласа для построения карт притоков тепла, в которых учитывались бы многочисленные данные наблюдений, выполненных со времени опубликования работы [3]. В результате специально выполненных расчетов были получены карты средних многолетних значений притоков тепла к атмосфере для северного полушария за январь и июль. Благодаря любезному содействию сотрудников сектора теплового баланса отдела физической климатологии и сектора аномалий отдела динамической метеорологии ГГО удалось воспользоваться авторскими экземплярами карт, которые содержат существенно большую информацию, чем карты, опубликованные в Атласе.

В упомянутых картах отсутствовали данные о составляющих теплового баланса для горных и полярных районов. В связи с тем

что на данном этапе влияние орографии в уравнениях динамики атмосферы не учитывается, было сочтено возможным определить составляющие теплового баланса в горных районах путем ориентировочных численных оценок и интерполяции с окружающих равнинных территорий. Оказалось также возможным приближенно оценить составляющие теплового баланса в полярных районах.

На рис. 1—4 приводятся рассчитанные таким образом карты притоков тепла к атмосфере для января и июля. На рис. 1 и 2 при-

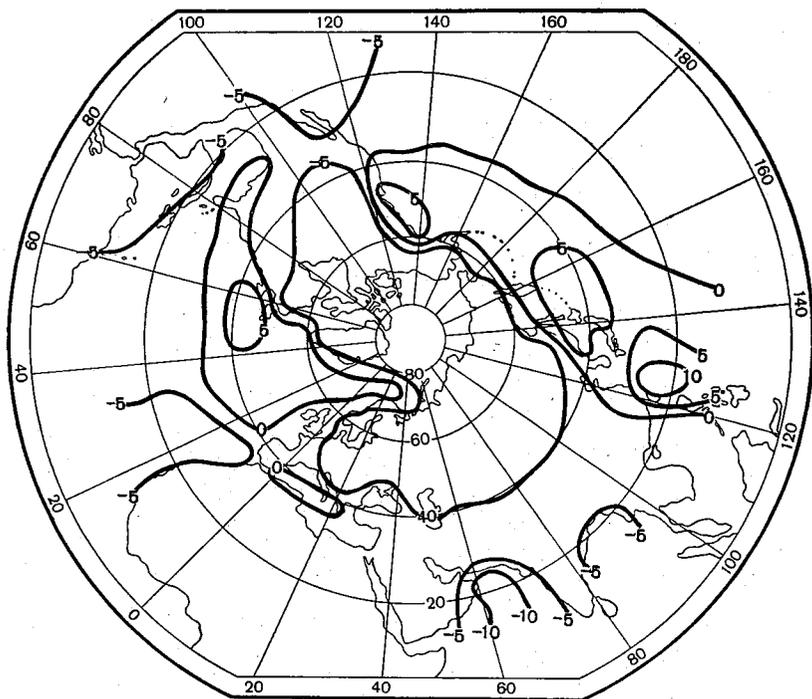


Рис. 3. Полный приток тепла к атмосфере M ккал/см² мес. Январь.

водятся притоки тепла, рассчитанные без учета процессов фазового перехода по формуле

$$M_c = (1 - \Gamma)S - A - \Pi. \quad (2)$$

Эти притоки тепла могут быть использованы при численных опытах по выявлению особенностей циркуляции, которая установилась бы при отсутствии влагооборота в атмосфере.

На рис. 3—4 представлено распределение полного притока тепла, включающего и конденсационные притоки. Расчеты при этом выполнялись по формуле (1) или по формуле

$$M = M_c + L(r - E). \quad (3)$$

При рассмотрении рис. 1—2 обращает на себя внимание резкое различие между притоками тепла над континентами и океанами. Для января притоки тепла в атмосферу над океаном положительны за счет большой теплоотдачи океана. Над континентами же притоки тепла отрицательны. Обратное соотношение имеет место в июле. В результате наибольшие градиенты притоков тепла имеют место не в меридиональном, а в зональном направлении. Это обстоятельство лишний раз подчеркивает большую роль океана как аккумулятора энергии, обеспечивающего сток излишков тепла, возникающих в результате радиационных притоков тепла в течение теплого времени года, и поступление энергии в атмосферу в холодное время года. Тем самым резко уменьшается обмен между полушариями, что является физической основой для самой возможности изолированного исследования процессов циркуляции атмосферы в одном полушарии.

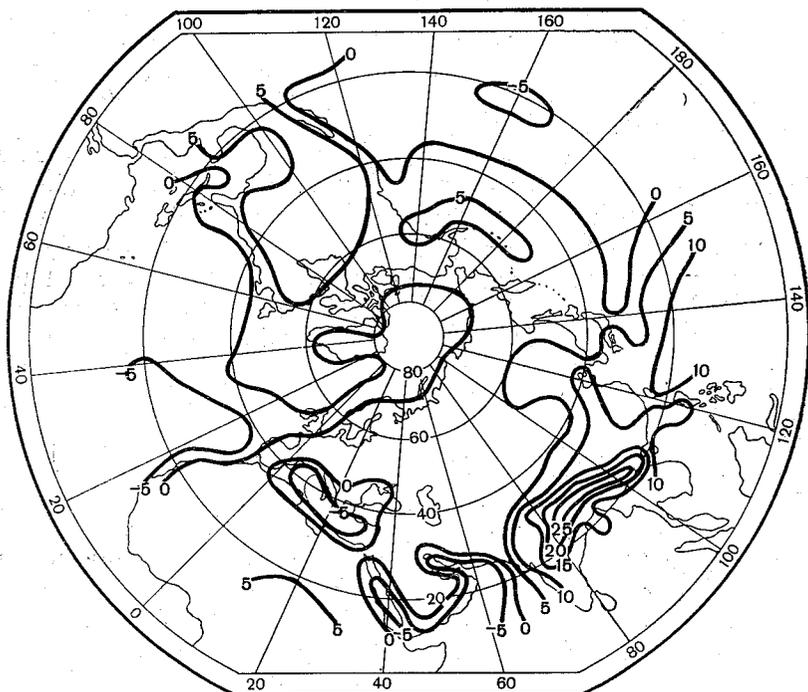


Рис. 4. Полный приток тепла к атмосфере M ккал/см² мес. Июль.

мулятора энергии, обеспечивающего сток излишков тепла, возникающих в результате радиационных притоков тепла в течение теплого времени года, и поступление энергии в атмосферу в холодное время года. Тем самым резко уменьшается обмен между полушариями, что является физической основой для самой возможности изолированного исследования процессов циркуляции атмосферы в одном полушарии.

Включение влагообмена приводит к существенному изменению пространственного распределения притоков тепла. Это изменение оказывается различным в разные сезоны. Как известно, в умеренных широтах на континентах количество осадков превышает испарение, а на океанах, наоборот, осадков выпадает меньше, чем

испаряется влаги. Поэтому учет конденсационных притоков приводит к дополнительному положительному притоку над континентом и к отрицательному притоку над океаном.

В связи с этим на январской карте (рис. 3) происходит сглаживание экстремумов и уменьшение градиентов поля притоков по сравнению с полем притоков, рассчитанным без учета влагообмена (рис. 1). В июле карта, рассчитанная с учетом влагообмена (рис. 4), наоборот, является более пестрой. Экстремумы поля притоков усиливаются. Над континентами значения притоков тепла возрастают повсеместно. Особенно резкое возрастание имеет место в муссонных областях Юго-Восточной Азии, над которыми притоки тепла к атмосфере в июле почти целиком определяются высвобождением скрытого тепла конденсации.

Задание постоянных во времени притоков тепла очень удобно с точки зрения программной реализации модели, однако с физической точки зрения является неоправданным, особенно если параметры модели сильно меняются в процессе расчетов. Так обстоит дело в тех случаях, когда в качестве исходных данных для численных опытов берутся не реальные метеорологические поля, а например, постоянное по полушарию поле температуры. Таким полям должны были бы соответствовать не климатологические, а некоторые другие значения притоков тепла. Изменение поля температуры оказывает влияние на все составляющие теплового баланса атмосферы. Однако наибольшее влияние оно оказывает на уходящее длинноволновое излучение. Повышение температуры за счет наличия притоков тепла приводит к увеличению уходящего излучения, которое компенсирует положительные притоки тепла. Такая же компенсация имеет место и при охлаждении атмосферы. Наличие таких обратных связей в реальной атмосфере и обеспечивает установление стационарного в среднем термического режима атмосферы. При отсутствии учета их в модели можно опасаться, что вследствие того, что за отдельные месяцы средний приток тепла для всего полушария не равен нулю, стационарный режим может установиться на не-реальном уровне или даже совсем не установиться.

Чтобы избежать этого, представлялось необходимым на некотором этапе ввести схематически такую обратную связь путем задания зависимости уходящего длинноволнового излучения от температуры атмосферы. Для этой цели была использована предложенная М. И. Будыко [5] эмпирическая формула, связывающая уходящее излучение системы Земля—атмосфера с температурой и облачностью. Эта формула имеет вид

$$A = (14,0 - 3,0n) + (0,14 - 0,10n)t, \quad (4)$$

где t — температура воздуха на уровне поверхности земли в градусах Цельсия, а n — количество облачности в долях единицы. Уходящее длинноволновое излучение получается в ккал/см²месяц.

Поскольку в данной схеме используется средняя температура столба атмосферы, которая отождествляется с температурой на

уровне 500 мб, при расчетах использовались данные о связи средней многолетней температуры воздуха на уровне 500 мб и на уровне поверхности земли. Эта связь записана в виде

$$t = t_{500} + \Delta, \quad (5)$$

где Δ зависит от широты и характера подстилающей поверхности (океан или континент).

В табл. 1 приводятся использовавшиеся в расчетах средние зональные значения Δ , полученные на основе данных о вертикальных градиентах температуры; которые приведены в монографии И. В. Ханевской [6].

Таблица 1

Средняя разность ($^{\circ}\text{C}$) между температурой воздуха у поверхности земли и на уровне 500 мб

	Месяц	Широта									
		0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
Океаны	I	32,4	31,8	34,2	31,6	31,5	31,4	27,2	27,1	15,0	9,0
	VII	32,4	32,3	31,4	31,9	28,6	25,7	26,5	23,9	22,5	20,8
Континенты	I	32,4	32,4	31,4	29,2	30,7	19,2	17,2	8,6	8,8	—
	VII	32,4	34,5	36,2	36,3	35,8	31,9	30,8	26,4	23,5	—

Подстановка (5) в (4) дает выражение, приближенно описывающее зависимость уходящего излучения от температуры воздуха на среднем уровне. Удобно представить его в виде

$$A' = A^* - B(\bar{T}_r - \bar{T}), \quad (6)$$

где

$$A^* = (0,14 - 0,10n)(T_r + \Delta) - 24(1 - n), \quad (7)$$

$$B = 0,14 - 0,10n, \quad (8)$$

T_r — температура на среднем уровне на границе рассматриваемой области.

Параметр A^* имеет смысл уходящего излучения в данном пункте, которое имело бы место при температуре, равной граничной. Параметр B характеризует интенсивность обратной связи.

Представляя уходящее излучение в форме (6), можно получить

$$M' = M^* + B(\bar{T}_r - \bar{T}), \quad (9)$$

где

$$M^* = (1 - \Gamma)S - A^* - \Pi + L(r - E) \quad (10)$$

имеет смысл притока тепла, который имел бы место в данной точке при температуре, равной граничной.

На рис. 5 и 6 приводятся поля коэффициента обратной связи B для января и июля соответственно. Как следует из (8), эти поля определяются конфигурацией средних полей количества облачности на северном полушарии. Поля M^* сравнительно мало отличаются от соответствующих полей M , приведенных на рис. 1—4. Основное отличие сводится к некоторому уменьшению притоков тепла в уме-

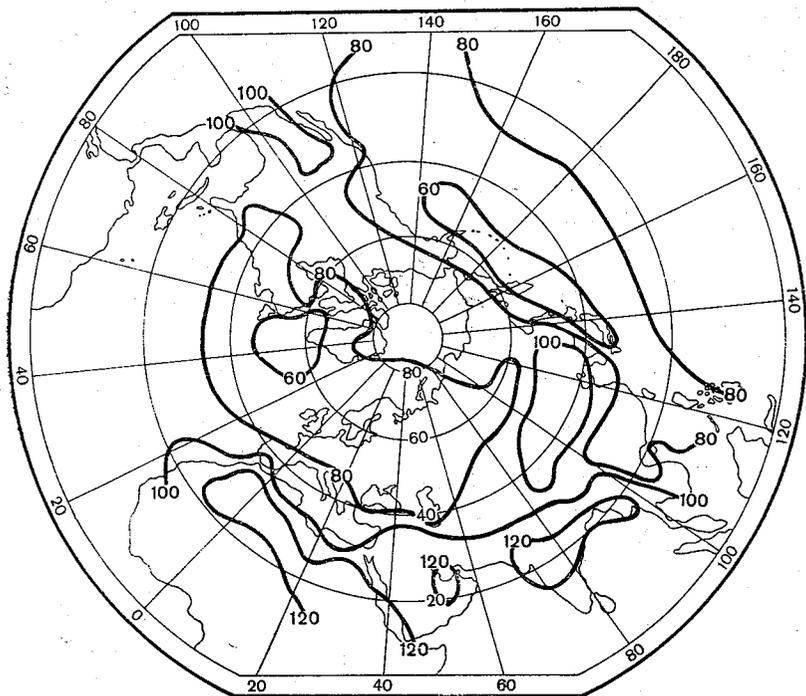


Рис. 5. Коэффициент обратной связи $B \cdot 10^{-3}$ ккал/см² град · мес. Январь.

ренных широтах. Это объясняется тем, что поля M^* рассчитываются в предположении повышенной по сравнению с фактической температуры, следовательно, и повышенного уходящего излучения. Небольшое превышение величин M^* над M отмечается в некоторых тропических районах, что также связано с выравниванием поля температуры.

В заключение заметим, что переход в формуле (4) от температуры на среднем уровне к наземной температуре мог производиться и другим способом. Как указал М. И. Будыко, должна иметь место тесная корреляционная связь между этими температурами. Для выявления этой связи были использованы данные средних месячных температур за январь и июль на высоте 500 мб и у поверхности

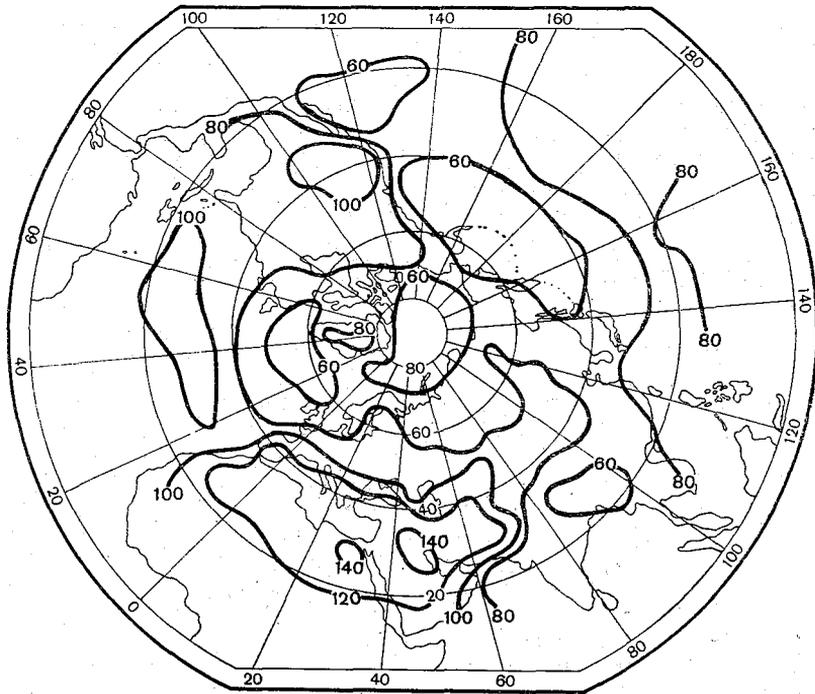


Рис. 6. Коэффициент обратной связи $B \cdot 10^{-3}$ ккал/см² град · мес. Июль

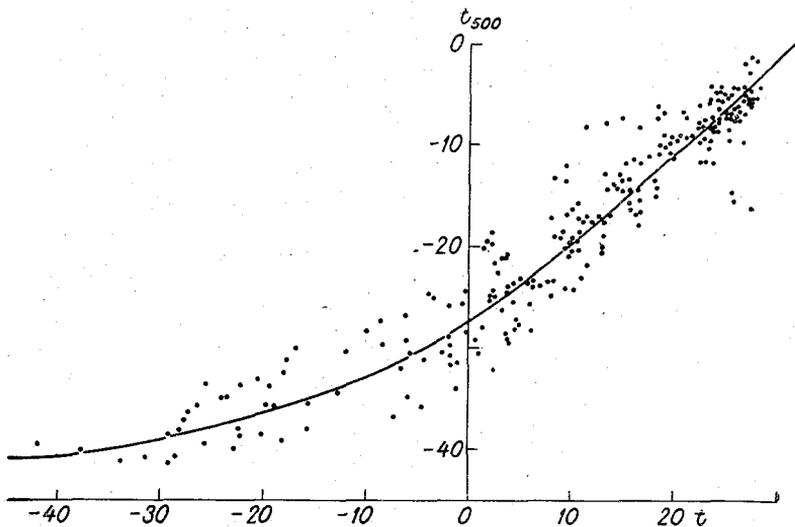


Рис. 7. Зависимость между средней месячной температурой ($^{\circ}\text{C}$) на высоте 500 мб и у поверхности земли.

земли примерно 150 аэрологических станций, сравнительно равномерно расположенных на северном полушарии. Как видно из рис. 7, несмотря на то, что рассматриваются вместе данные различных широтных зон и за различные сезоны, связь между температурами на разных уровнях проявляется вполне четко. Соответствующую зависимость, которую можно аппроксимировать формулой

$$t_{500} = -26,9 + 0,647t + 0,00752t^2, \quad (5')$$

можно использовать вместо формулы (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г ан д и н Л. С. [и др.]. Упрощенная модель для численных экспериментов по термическому режиму атмосферы. См. наст. сб.
2. Б уд ы к о М. И. Тепловой баланс земной поверхности. Гидрометеониздат, Л., 1956.
3. Б е р л я н д Т. Г. Тепловой баланс атмосферы северного полушария. Сб. «А. И. Воейков и современные проблемы климатологии». Гидрометеониздат, Л., 1956.
4. Атлас теплового баланса земного шара. Под ред. М. И. Б уд ы к о. Межведомственный геофизический комитет и ГГО, М., 1963.
5. Б уд ы к о М. И. О происхождении ледниковых эпох. Метеорология и гидрология, № 11, 1968.
6. Х а н е в с к а я И. В. Температурный режим свободной атмосферы над северным полушарием. Гидрометеониздат, Л., 1968.

Л. С. ГАНДИН, Б. М. ИЛЬИН,
В. П. МЕЛЕШКО, Л. В. РУХОВЕЦ

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИНЕРЦИОННОЙ МОДЕЛИ НА ДЛИТЕЛЬНЫЕ СРОКИ

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Решение задач численного моделирования климатического режима атмосферы методом установления связано с интегрированием системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с большим числом шагов по времени. Хотя к настоящему времени опубликовано большое количество работ, посвященных отдельным аспектам этой проблемы (см., например, [2]), однако многие вопросы математического характера пока исследованы недостаточно, что связано с трудностями их теоретического решения. Для получения теоретических выводов часто вместо исходной системы дифференциальных уравнений рассматриваются сравнительно простые «модельные» уравнения, для которых в отдельных случаях удается построить даже точные решения, при этом иногда уравнения линеаризуются, начальные поля задаются в виде отдельных гармоник и т. д.

Такой путь упрощений весьма полезен, так как он позволяет получить выводы о достоинствах и недостатках тех или иных методов, различного рода оценки и т. д. Однако при этом всегда остается открытым вопрос о возможностях перенесения полученных выводов и оценок на случай более сложных нелинейных систем, для которых получение теоретических оценок невозможно. В этих условиях важное значение приобретают эксперименты, связанные с исследованием поведения конечно-разностных решений, полученных с помощью тех или иных численных схем при интегрировании на длительные сроки. При этом для того чтобы иметь возможность проследить за поведением этих решений в «чистом» виде, желательно отказаться от учета возмущающих сил, которые могут исказить выводы о свойствах схем. Так, например, учет физических диссипативных факторов не всегда позволяет судить о степени устойчивости самой вычислительной схемы и т. д.

Второе важное обстоятельство, говорящее в пользу экспериментов с инерционными моделями, состоит также в том, что для последних в ряде случаев удастся получить интегральные следствия, в частности интегральные инварианты, которые могут быть весьма полезными не только при формулировании разностных схем, но и для прослеживания за поведением решений конечно-разностных уравнений. Получение же интегральных инвариантов в случае неинерционных схем возможно, по-видимому, лишь для слишком упрощенных моделей.

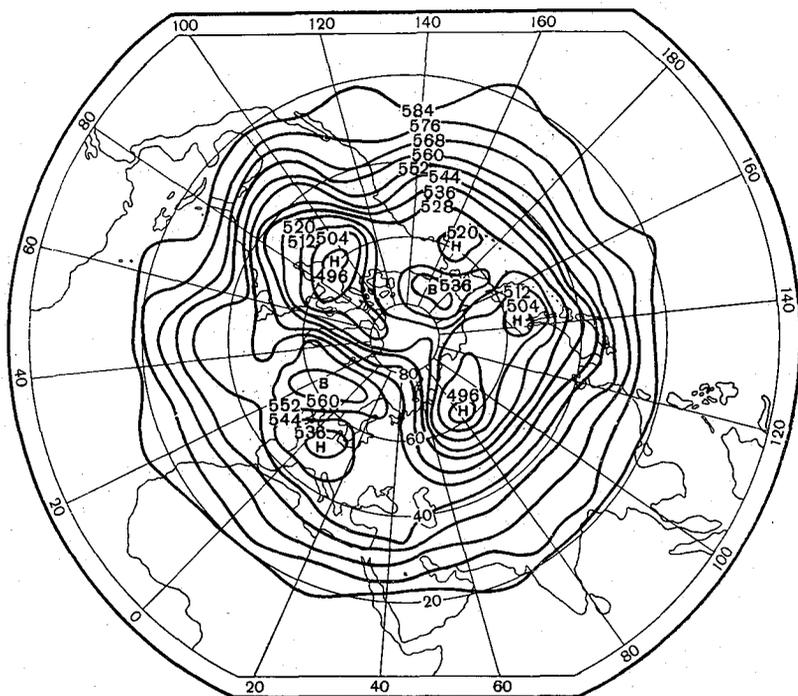


Рис. 1. Поле AT_{500} за 03 часа 27 января 1965 г. (начальное поле).

Широко известны интегральные инварианты баротропного уравнения вихря для двумерного потока несжимаемой жидкости (см., например, [3]). Для атмосферных движений аналогичные инварианты могут быть получены в предположении о постоянстве параметра Кориолиса, если он входит в качестве коэффициента, и переменности его в выражении для абсолютного вихря (т. е. при учете β -эффекта). В этом случае уравнение вихря имеет вид

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -J(\psi, \nabla^2 \psi + l) \quad (1)$$

(обозначения те же, что и в [1]).

Предполагая, что $\psi = \text{const}$ на границе Γ области (S) , получаем следующие три простейших интегральных инварианта:

$$\nabla^2 \psi = \text{const}, \quad (2)$$

$$(\nabla \psi)^2 = \text{const}, \quad (3)$$

$$(\nabla^2 \psi + L)^2 = \text{const}, \quad (4)$$

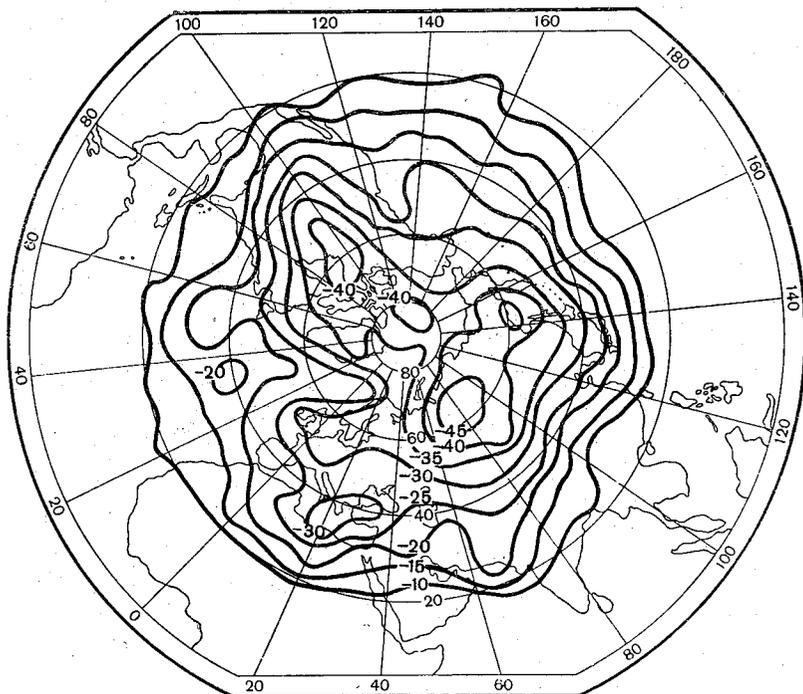


Рис. 2. Поле температуры поверхности 500 мб за 03 часа 27 января 1965 г. (начальное поле).

где

$$\langle \quad \rangle = \frac{1}{S} \iint_{(S)} (\quad) dx dy.$$

Интегральные инварианты для некоторых инерционных вариантов термотропной модели при тех же ограничениях, налагаемых на изменение параметра Кориолиса, приведены в работе [1].

В настоящей работе рассматриваются некоторые результаты экспериментов по интегрированию баротропной и термотропной инерционных моделей. Схема расчета изложена в работе [1].

В качестве начальных полей были выбраны поля геопотенциала и температуры поверхности 500 мб за 0,3 часа 27 января 1965 г. Эти поля приводятся на рис. 1 и 2.

§ 2. ЭКСПЕРИМЕНТЫ С БАРОТРОПНОЙ ИНЕРЦИОННОЙ МОДЕЛЬЮ

а) Аракава [3] показал, что если в (1) пространственные производные в якобиане заменить определенным образом конечными разностями, сохранив производную по времени в дифференциальной форме, то для такого дифференциально-разностного уравнения можно получить законы сохранения (2) — (4). Однако практическое интегрирование уравнения (1) связано с конечно-разностной аппроксимацией производной по времени, что может, вообще говоря, приводить к несохранению величин (2) — (4). Чтобы выяснить, как различные способы аппроксимации производных влияют на сохраняемость величин (2) — (4), были проведены эксперименты по интегрированию уравнения (1) с применением четырех различных явных методов аппроксимации (1) по времени. Были рассмотрены:

1) метод Эйлера

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t} \Delta t, \quad (5)$$

2) метод центральных разностей

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k-1)} + 2 \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t} \Delta t, \quad (6)$$

3) метод Мацуно

$$\left. \begin{aligned} \psi^{*(k+1)} &= \psi^{(k)} + \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t} \Delta t \\ \psi^{(k+1)} &= \psi^{(k)} + \frac{\partial \psi^{*(k+1)}}{\partial t} \Delta t \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

4) метод Адамса—Бэщфорта (А. Б.)

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + \frac{3}{2} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t} \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial t} \Delta t. \quad (8)$$

Что касается линейного интегрального инварианта $\nabla^2 \psi$, то аппроксимация производной по времени как с помощью метода (А. Б.), так и с помощью большинства других известных явных и неявных методов, не отражается на сохраняемости $\nabla^2 \psi$. Действительно, покажем это, например, для метода (А. Б.). Беря операцию ∇^2 от (8), получаем

$$\nabla^2 \psi^{(k+1)} = \nabla^2 \psi^{(k)} + \frac{3}{2} \frac{\partial \nabla^2 \psi^{(k)}}{\partial t} \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial \nabla^2 \psi^{(k-1)}}{\partial t} \Delta t.$$

Или, используя (1),

$$\nabla^2 \psi^{(k+1)} = \nabla^2 \psi^{(k)} - \frac{3}{2} J(\psi, \nabla^2 \psi + I)^{(k)} \Delta t - \frac{1}{2} J(\psi, \nabla^2 \psi + I)^{(k-1)} \Delta t. \quad (9)$$

Осредним (9) по области (S). При условии $\psi = \text{const}$ на границе области $J(\psi, \nabla^2\psi + l) = 0$. Тогда имеем

$$\nabla^2\psi^{(k+1)} = \nabla^2\psi^{(k)}. \quad (10)$$

Равенство (10) показывает, что аппроксимация производной по времени не нарушает инвариантности линейной характеристики $\nabla^2\psi$. Что касается квадратичных инвариантов, то аналогичное свойство для них доказать не удастся. Поэтому остается проверить экспериментально, как различные способы аппроксимации производной по времени отражаются на сохраняемости квадратичных интегральных инвариантов (3) и (4).

Аппроксимация якобиана производилась по схеме Аракава [3]. Кроме того, якобиан рассчитывался также в граничных точках с использованием схемы Аракава (см. [1]). По этим значениям якобиана производилось вычисление лапласиана $\nabla^2\psi$ в граничных точках во все моменты времени. Подробно эта процедура описана в работе [1]. Аналогичная процедура вычисления $\nabla^2\psi$ на границе производилась и при применении трех других методов интегрирования по времени.

При интегрировании использовалась восьмиугольная сетка, покрывающая северное полушарие вплоть до широты 15° . Параметры сетки приведены в работе [1]. Изменение шага сетки с широтой учитывалось путем введения в уравнение масштабного множителя n^2 . Расчеты производились на 50 суток с шагом 0,5 часа.

На рис. 3 приводятся графики изменений квадратичных инвариантов K_ψ и N_ψ — средних по площади кинетической энергии и квадрата абсолютного вихря соответственно (отнесенных к их начальным значениям K_ψ^0 и N_ψ^0). Как видно из этого рисунка, метод (А. Б.) дает удовлетворительное сохранение квадратичных инвариантов: за 50 суток средняя кинетическая энергия увеличивается на 1,2%, увеличение среднего квадрата абсолютного вихря не превосходит 1,4%. Значительно больший рост квадратичных инвариантов дают метод центральных разностей и в особенности методы Эйлера и Мацуно.

На рис. 4 приведена карта AT_{500} за 50-е сутки, полученная с применением метода (А. Б.). В качестве начального, как уже отмечалось выше, используется поле AT_{500} за 27 января 1965 г., приведенное на рис. 1. Поле, представленное на рис. 4, имеет более зональную структуру по сравнению с начальным полем, однако градиенты поля и экстремальные значения близки к реальным. Приводимые результаты показывают, что схема, основанная на аппроксимациях по времени по методу Адамса—Бэшфорта и якобиана по схеме Аракава (схема А. Б. А.), в применении к баротропной модели не приводит к заметной вычислительной неустойчивости. Она недиссипативна, хорошо сохраняет интегральные инварианты.

б) Как уже указывалось выше, в процессе интегрирования по времени производилось вычисление лапласиана в граничных точках.

Был проведен эксперимент, в котором эта процедура была исключена и значения $\nabla^2\psi$ на границе не менялись со временем. На рис. 3

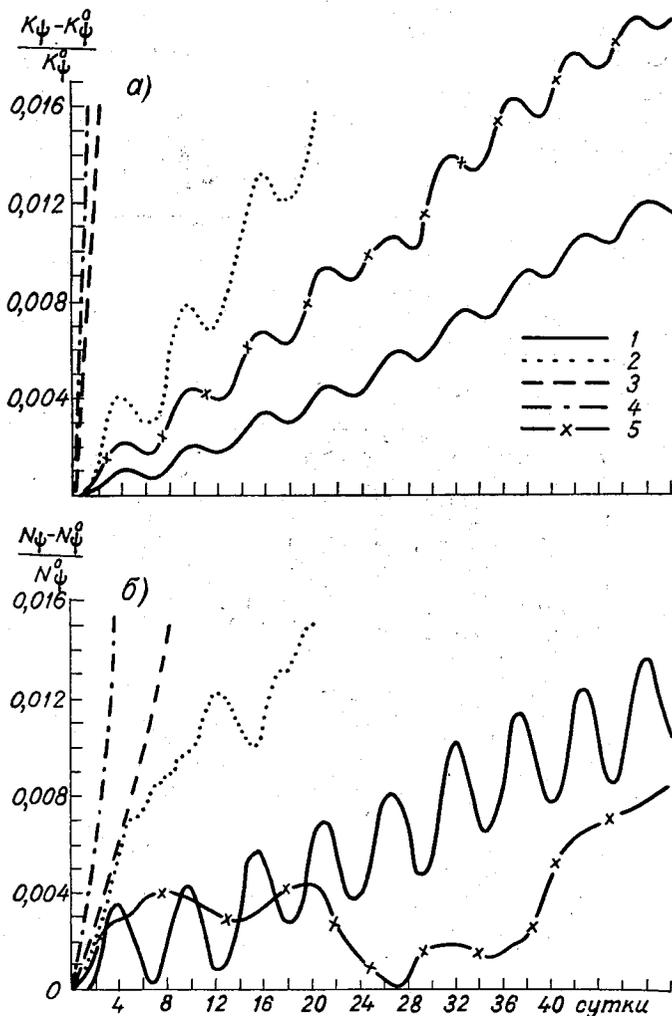


Рис. 3. Изменения энергетического (а) и вихревого (б) квадратичных инвариантов баротропной модели при интегрировании с помощью разных методов.

1 — Адамса—Бэшфорта, 2 — центральных разностей, 3 — Эйлера, 4 — Мацуно, 5 — Адамса—Бэшфорта при условии $\partial \nabla^2 \psi / \partial t = 0$ на границе.

(кривые 5) представлены значения квадратичных инвариантов, полученных при интегрировании по схеме (А. Б. А.) в этом эксперименте.

Эти результаты показывают, что при неизменных во времени значениях лапласиана на границе рост среднего квадрата вихря происходит медленнее, чем в схеме, где значения $\nabla^2\psi$ на границе изменяются со временем. Однако первый квадратичный инвариант (средняя кинетическая энергия) сохраняется в последней схеме лучше. На рис. 5 представлено поле AT_{500} на 50-е сутки, полученное по схеме (А. Б. А.), с постоянными во времени значениями на границе. Сравнение рисунков показывает, что в общем поля довольно близки друг к другу, хотя некоторые различия имеют место.

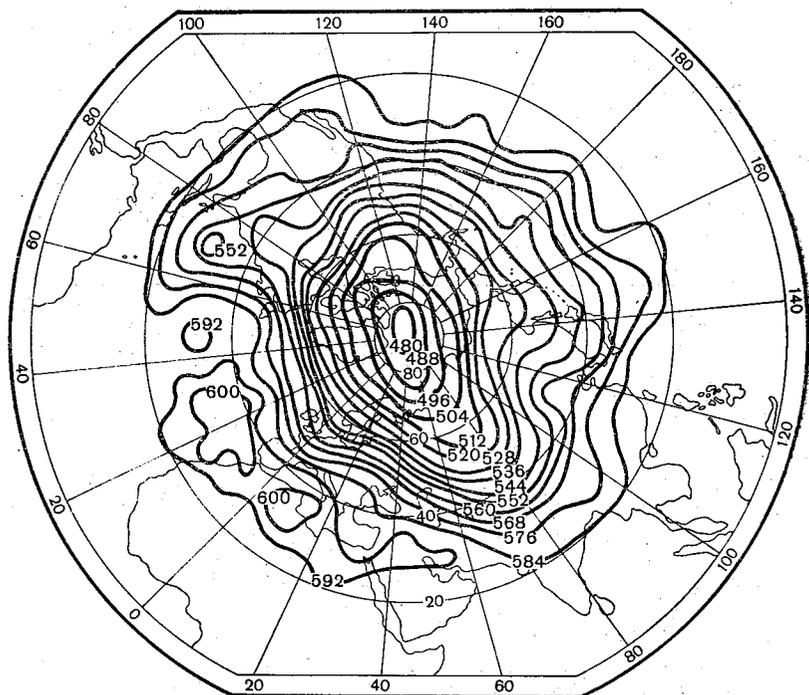


Рис. 4. Поле AT_{500} на 50-е сутки, рассчитанное с помощью метода Адамса—Бэшфорта.

в) Некоторые отклонения интегральных квадратичных инвариантов от постоянного значения, которые имеют место в схеме (А. Б. А.), вызваны рядом причин. Остановимся на двух из них: 1) погрешности аппроксимации производной по времени; 2) погрешности численного решения уравнения Пуассона.

Погрешности аппроксимации производной по времени, если метод фиксирован, зависят от величины шага по времени. В табл. 1 приведены 12-часовые изменения квадратичных инвариантов при интегрировании на трое суток в зависимости от величины шага интегрирования Δt . Из этой таблицы следует, что уменьшение шага

интегрирования от 1 до 0,5 часа приводит к существенному уменьшению изменений квадратичных инвариантов. Дальнейшее дробление шага Δt дает в этом смысле меньший эффект и вряд ли целесообразно с практической точки зрения, так как связано с увеличением времени счета почти в два раза при уменьшении в два раза шага по времени. Более того, в расчетах на установление, где требуется выполнить интегрирование на срок более 100 суток, шаг по времени принимался равным 1 часу, чтобы сократить время счета.

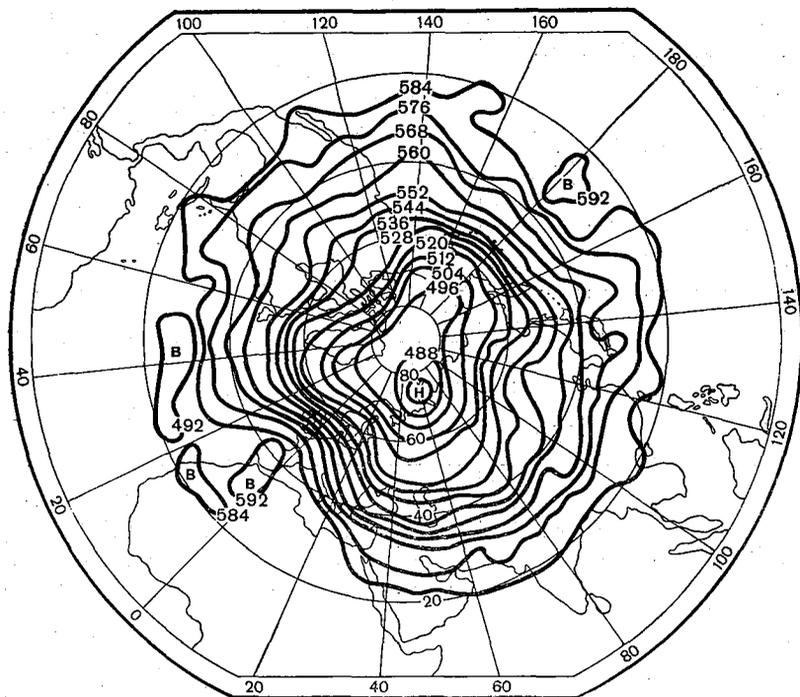


Рис. 5. Поле AT_{500} на 50-е сутки, рассчитанное с помощью метода Адамса—Бэшфорта при условии $\partial \nabla^2 \psi / \partial t = 0$ на границе.

г) Очевидно, что на получаемое решение и значения квадратичных инвариантов оказывает влияние точность решения уравнения Пуассона, которое нужно решать на каждом шаге по времени для получения значений $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ по значениям $\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t}$. Для решения уравнения Пуассона применяется ускоренный метод Либмана. Точность решения определяется заданной величиной допустимой невязки ϵ . В изложенных выше экспериментах допустимая невязка ϵ полагалась равной величине, которая в пересчете на изменение геопотенциала составляет 0,001 дам/час.

12-часовые изменения квадратичных инвариантов баротропной модели
в зависимости от величины шага интегрирования по времени

Время интегрирования, часы ($t + 12$ час.)	$\frac{K_{\psi}(t + 12 \text{ час.}) - K_{\psi}(t)}{K_{\psi}(0)}$			
	$\Delta t = 1$	$\Delta t = 0,5$	$\Delta t = 0,25$	$\Delta t = 0,125$
24	$1,7 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$1,7 \cdot 10^{-4}$
36	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$
48	$4,2 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$2,4 \cdot 10^{-4}$
60	$6,5 \cdot 10^{-4}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$3,9 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$
72	$8,3 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$3,7 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$
Среднее	$4,7 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$3,0 \cdot 10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$

Время интегрирования часы ($t + 12$ час.)	$\frac{N_{\psi}(t + 12 \text{ час.}) - N_{\psi}(t)}{N_{\psi}(0)}$			
	$\Delta t = 1$	$\Delta t = 0,5$	$\Delta t = 0,25$	$\Delta t = 0,125$
24	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$0,0 \cdot 10^{-5}$
36	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$0,7 \cdot 10^{-5}$	$0,5 \cdot 10^{-5}$
48	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$0,9 \cdot 10^{-5}$	$0,6 \cdot 10^{-5}$
60	$4,0 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$	$1,6 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-5}$
72	$4,2 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$0,8 \cdot 10^{-5}$
Среднее	$2,4 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$0,7 \cdot 10^{-5}$

В табл. 2 представлена зависимость 12-часовых изменений квадратичных инвариантов от величины допустимой невязки. Кроме того, в этой таблице приводится среднее число итераций на одном шаге по времени ($\Delta t = 1/2$ часа). Из приводимых в этой таблице результатов следует, что увеличение ϵ от величины 0,001 до 0,002 дам/час незначительно уменьшает число итераций, но существенно увеличивает рост квадратичных инвариантов. С другой стороны, уменьшение ϵ до величин, меньших 0,001 дам/час, хотя и приводит к уменьшению изменений квадратичных инвариантов, но одновременно приводит к росту числа итераций, что затрудняет практическую реализацию задачи на машинах среднего быстродействия при интегрировании на сроки порядка 100 суток. Поэтому в таких экспериментах величина ϵ для изменений геопотенциала принималась равной 0,001 дам/час.

12-часовые изменения квадратичных инвариантов баротропной модели
в зависимости от величины ε

Время интегрирования, часы ($t + 12$ час.)	$\frac{K_\psi(t + 12 \text{ час.}) - K_\psi(t)}{K_\psi(0)}$				
	$\varepsilon = 0,002$	$\varepsilon = 0,001$	$\varepsilon = 0,0005$	$\varepsilon = 0,0001$	$\varepsilon = 0,00001$
24	$3,7 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$1,0 \cdot 10^{-4}$	$0,2 \cdot 10^{-4}$	$0,0 \cdot 10^{-4}$
36	$4,8 \cdot 10^{-4}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$	$0,5 \cdot 10^{-4}$	$0,1 \cdot 10^{-4}$
48	$5,7 \cdot 10^{-4}$	$3,4 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$0,8 \cdot 10^{-4}$	$0,2 \cdot 10^{-4}$
60	$8,2 \cdot 10^{-4}$	$5,0 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$0,3 \cdot 10^{-4}$
72	$7,7 \cdot 10^{-4}$	$4,5 \cdot 10^{-4}$	$2,8 \cdot 10^{-4}$	$1,1 \cdot 10^{-4}$	$0,4 \cdot 10^{-4}$
Среднее	$6,0 \cdot 10^{-4}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$	$2,1 \cdot 10^{-4}$	$0,7 \cdot 10^{-4}$	$0,2 \cdot 10^{-4}$
Среднее число итерации на одном шаге	11	16	23	42	83

Время интегрирования, часы ($t + 12$ час.)	$\frac{N_\psi(t + 12 \text{ час.}) - N_\psi(t)}{N_\psi(0)}$				
	$\varepsilon = 0,002$	$\varepsilon = 0,001$	$\varepsilon = 0,0005$	$\varepsilon = 0,0001$	$\varepsilon = 0,00001$
24	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$0,4 \cdot 10^{-5}$	$0,1 \cdot 10^{-5}$	$0,0 \cdot 10^{-5}$
36	$1,1 \cdot 10^{-5}$	$0,9 \cdot 10^{-5}$	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$0,2 \cdot 10^{-5}$	$0,0 \cdot 10^{-5}$
48	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$1,2 \cdot 10^{-5}$	$0,9 \cdot 10^{-5}$	$0,5 \cdot 10^{-5}$	$0,2 \cdot 10^{-5}$
60	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$2,3 \cdot 10^{-5}$	$1,7 \cdot 10^{-5}$	$0,9 \cdot 10^{-5}$	$0,3 \cdot 10^{-5}$
72	$2,7 \cdot 10^{-5}$	$1,9 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$0,9 \cdot 10^{-5}$	$0,5 \cdot 10^{-5}$
Среднее	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$	$1,0 \cdot 10^{-5}$	$0,5 \cdot 10^{-5}$	$0,2 \cdot 10^{-5}$

§ 3. ЭКСПЕРИМЕНТ С ТЕРМОТРОПНОЙ ИНЕРЦИОННОЙ МОДЕЛЬЮ

В настоящей работе рассматривался инерционный вариант термотропной модели, описываемой следующей системой уравнений (см. [1]):

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} = -J(\psi, \nabla^2 \psi + L) - cJ(\tau, \nabla^2 \tau), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{a}{m^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = & -J(\psi, \nabla^2 \tau) - J(\tau, \nabla^2 \psi + L) + \\ & + \frac{a}{m^2} J(\psi, \tau) + abJ(\tau, \nabla^2 \tau). \end{aligned} \quad (12)$$

Как показано в работе [1], система (11), (12) (в случае $\tau = \text{const}$, $\psi = \text{const}$ на границе) обладает четырьмя интегральными инвариантами:

$$\nabla^2 \psi = \text{const}, \quad (13)$$

$$\nabla^2 \tau - \frac{a}{m^2} \tau = \text{const}, \quad (14)$$

$$K = \frac{1}{2} \left[(\nabla \psi)^2 + c (\nabla \tau)^2 + \frac{ac}{m^2} \tau^2 \right] = \text{const}, \quad (15)$$

$$N = (\nabla^2 \psi + l)^2 + c (\nabla^2 \tau)^2 + \frac{ac}{m^2} (\nabla \tau)^2 - \frac{a}{m^2} (\nabla \psi)^2 = \text{const}, \quad (16)$$

причем (13) и (14) — линейные инварианты, а (15) и (16) — квадратичные.

Аналогично тому, как это было показано в § 2 для баротропной модели, легко показать, что и в случае термотропной инерционной модели аппроксимация производной по времени по методу Адамса—Бэшфорта не приводит к нарушению линейного инварианта (13). Этот вывод легко может быть получен и для другого линейного инварианта (14). Действительно, используем метод Адамса—Бэшфорта для τ :

$$\tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} + \frac{3}{2} \Delta t \frac{\partial \tau^{(k)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial^2 \tau^{(k-1)}}{\partial t^2}. \quad (17)$$

Отсюда

$$\nabla^2 \tau^{(k+1)} = \nabla^2 \tau^{(k)} + \frac{3}{2} \Delta t \frac{\partial \nabla^2 \tau^{(k)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial \nabla^2 \tau^{(k-1)}}{\partial t}.$$

Исключая $\frac{\partial \nabla^2 \tau^{(k)}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \nabla^2 \tau^{(k-1)}}{\partial t}$ с помощью (12) и осредняя по области (S), получим

$$\nabla^2 \tau^{(k+1)} = \nabla^2 \tau^{(k)} + \frac{3}{2} \Delta t \frac{a}{m^2} \frac{\partial \tau^{(k)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta t \frac{a}{m^2} \frac{\partial \tau^{(k-1)}}{\partial t}. \quad (18)$$

Осредним (17) по S:

$$\tau^{(k+1)} = \tau^{(k)} + \frac{3}{2} \Delta t \frac{\partial \tau^{(k)}}{\partial t} - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial \tau^{(k-1)}}{\partial t}. \quad (19)$$

Используем (19) для исключения из (18) производных по времени. Окончательно получаем

$$\nabla^2 \tau^{(k+1)} - \frac{a}{m^2} \tau^{(k+1)} = \nabla^2 \tau^{(k)} - \frac{a}{m^2} \tau^{(k)}. \quad (20)$$

Таким образом, если схема аппроксимации пространственных производных такова, что средние значения якобианов по области

(S) равны нулю (схема Аракава, в частности, удовлетворяет этому условию), то при аппроксимации производных по времени с помощью метода Адамса—Бэшфорта (а также с помощью ряда других методов) законы сохранения линейных величин (13) и (14) имеют место и в конечно-разностной форме.

По-другому обстоит дело с квадратичными инвариантами. В баротропном случае схема Аракава гарантирует сохранение квадратичных инвариантов, схема аппроксимации по времени этого не га-

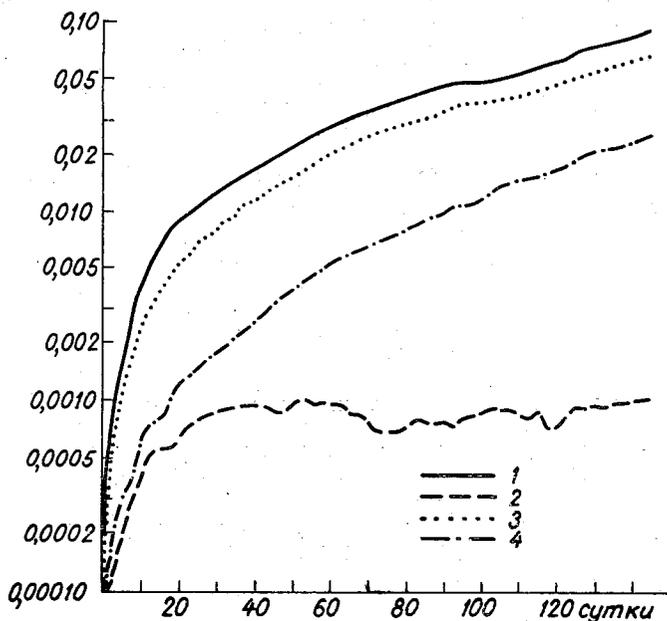


Рис. 6. Изменения квадратичных инвариантов $\frac{N - N^0}{N^0}$

(1, 2) и $\frac{K - K^0}{K^0}$ (3, 4) термотропной модели.

1 — вихревой инвариант при $\Delta t = 1$ час, 2 — вихревой инвариант при $\Delta t = 0,5$ часа, 3 — энергетический инвариант при шаге интегрирования $\Delta t = 1$ час, 4 — энергетический инвариант при $\Delta t = 0,5$ часа.

рантирует. В случае термотропной модели как схема Аракава, так и метод Адамса—Бэшфорта не гарантируют сохранения квадратичных инвариантов для соответствующих дифференциально-разностных уравнений. (Кроме того, на несохраняемость квадратичных и линейных инвариантов могут оказывать влияние погрешности решения двух эллиптических уравнений на каждом шаге по времени, а также ошибки округления.)

Для того чтобы выяснить, как ведут себя квадратичные инварианты термотропной модели при интегрировании на длительные сроки, уравнения (11) и (12) были проинтегрированы на срок

145 суток с применением схемы (А. Б. А.). Были выполнены два эксперимента: один — с шагом $\Delta t = 1$ час, другой — с шагом $\Delta t = 0,5$ часа. Время, необходимое для просчета одного шага на машине М-220 (с быстродействием 20—25 тыс. операций в секунду), составляет 20—30 секунд.

На рис. 6 представлены изменения во времени квадратичных инвариантов термотропной модели, полученные в указанных экспериментах (по оси ординат — логарифмическая шкала). Как видно из этого рисунка, при интегрировании на 145 суток с шагом $\Delta t = 1$ час рост вихревого (N) и энергетического (K) инвариантов не превосходит 10 и 7% соответственно по отношению к их начальным значениям. При шаге $\Delta t = 1/2$ часа рост энергетического инварианта уменьшается почти в 3 раза. Что касается вихревого инварианта, то его величина не превосходит 101% по отношению к начальному значению и после 40—50 суток практически постоянна во времени. К сожалению, переход от шага $\Delta t = 1$ час к шагу $\Delta t = 1/2$ часа связан с увеличением времени счета почти в два раза, что затрудняет расчеты на длительные сроки на машинах среднего быстродействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г ан д и н Л. С. [и др.]. Упрощенная модель для численных экспериментов по термическому режиму атмосферы. См. наст. сб.
2. Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана. Сб. пер. под ред. Л. Р. Дмитриевой-Арраго, Л. В. Руховца, Б. Е. Шнеерова. Гидрометеоздат, Л., 1968.
3. А г а к а в а А. Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. J. Comput. Physics., vol. 1, No. 1, 1966 (перевод в сб. [2]).

Л. С. ГАНДИН, Б. М. ИЛЬИН, Р. Л. КАГАН,
К. М. ЛУГИНА, Л. В. РУХОВЕЦ

О ВЛИЯНИИ СЖИМАЕМОСТИ АТМОСФЕРЫ НА ЭВОЛЮЦИЮ ПЛАНЕТАРНЫХ ВОЛН

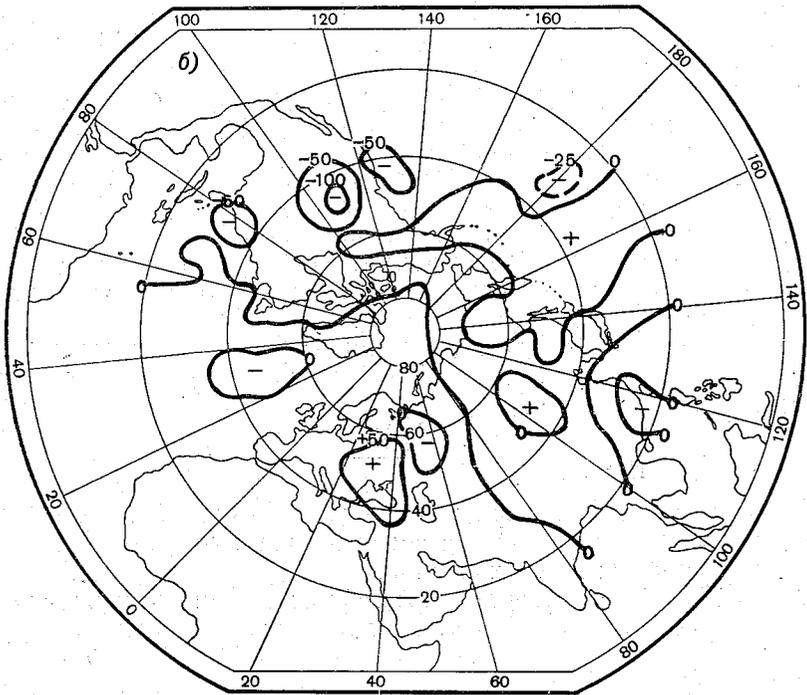
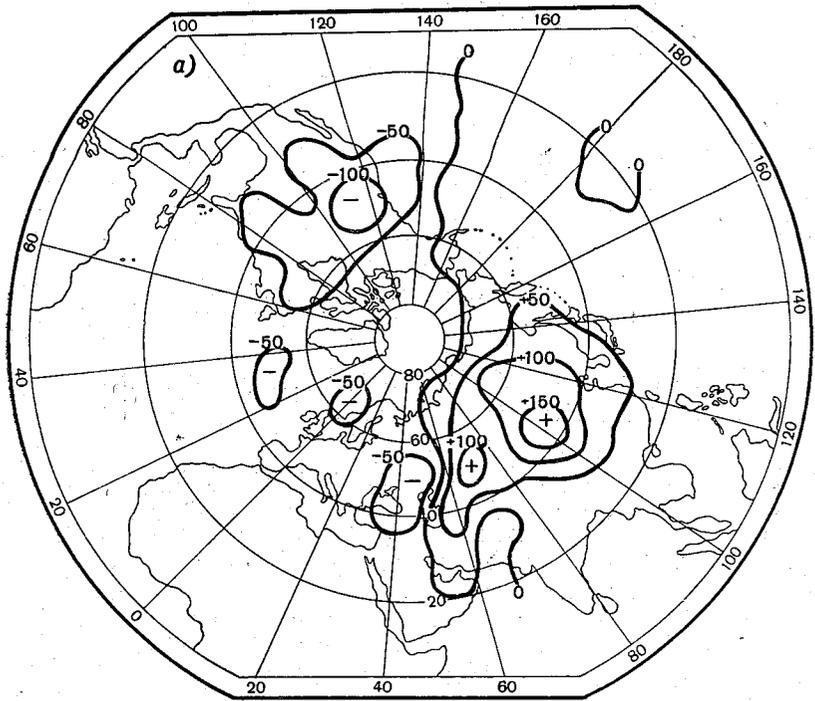
Одним из важнейших требований, предъявляемых к системам уравнений, используемых при моделировании атмосферной циркуляции, является требование возможно более правильного описания эволюции планетарных волн в атмосфере. Как известно со времени работы Россби [5], использование баротропной модели без учета сжимаемости атмосферы приводит к различному направлению перемещения волн разной длины. Если волны в поле давления, соответствующие возмущениям синоптического масштаба (длина волны до 5000 км), перемещаются в восточном направлении, то волны планетарные, длина которых более 5000 км, при расчетах по баротропной модели перемещаются в западном направлении. Это западное смещение планетарных волн не наблюдается в реальной атмосфере. Поэтому при решении задачи численного прогноза погоды делались попытки такого видоизменения модели, которая по возможности подавляла бы обратное движение планетарных волн. Одним из направлений таких работ являлись попытки учесть сжимаемость атмосферы. При этом оказывается, что уравнение Пуассона в квази-геострофических схемах заменяется уравнением Гельмгольца, функции влияния для которых являются более реалистичными (см. [3]), а скорость возвратного движения планетарных волн существенно уменьшается.

Сжимаемость атмосферы характеризуется горизонтальным масштабом L . При сделанных в [1] предположениях он определяется по формуле

$$L = \frac{\sqrt{RT}}{l}, \quad (1)$$

где T — абсолютная температура воздуха, R — газовая постоянная, l — параметр Кориолиса, черта снизу означает осреднение по принятой в [1] области интегрирования.

Случай, когда сжимаемость атмосферы совсем не учитывается, соответствует заданию $L = \infty$. Подстановка в (1) характерных



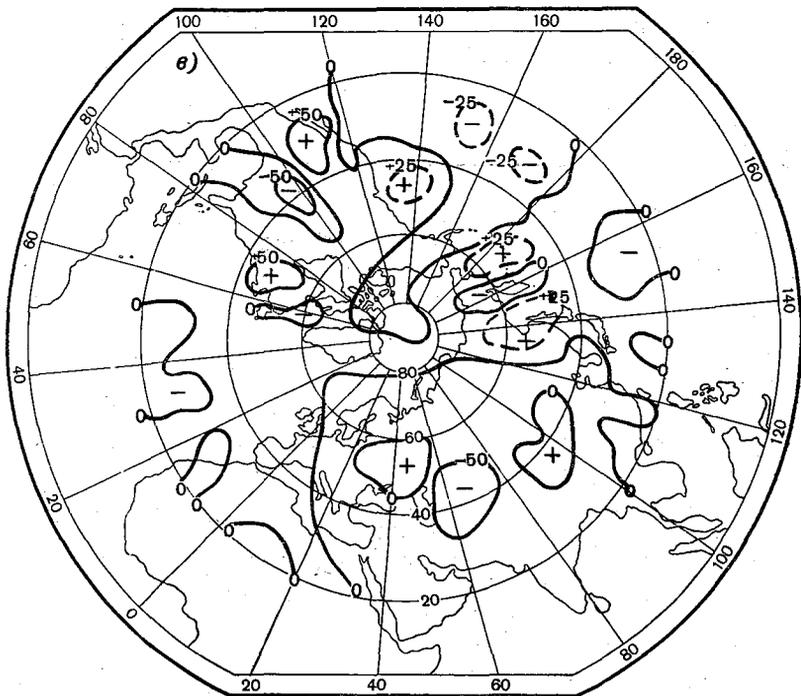


Рис. 1. Поле изменений геопотенциала за час (10^{-3} дам) на 20-е сутки после начала расчетов. Баротропная модель.

а) $L = \infty$, б) $L = 1300$ км, в) $L = 1200$ км.

значений входящих в нее величин дает значения L в диапазоне 1800—2500 км, в зависимости от выбора этих значений и от способа осреднения. Некоторые авторы предпочитают не находить масштаб L на основании формулы (1), а подбирать его эмпирически, исходя из

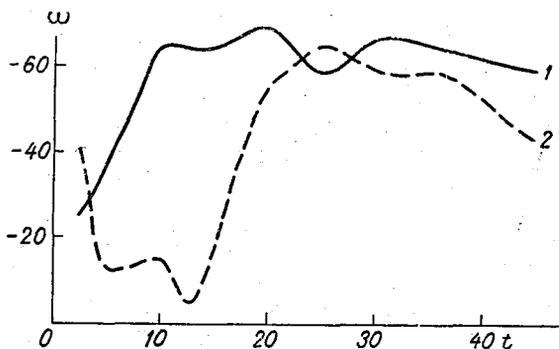


Рис. 2. Угловая скорость смещения ω град/сутки первой гармоники поля геопотенциала при расчетах по баротропной модели на t суток.

1 — для широтного круга 40° с. ш., 2 — для широтного круга 70° с. ш.

требования наибольшего соответствия результатов интегрирования уравнений движения реальным атмосферным движениям. Исследование такого рода производилось, например, Дж. Крессменом [4], который получил наилучшие результаты при значениях параметров схемы, соответствующих $L \approx 1400$ км.

Однако выполняющиеся исследования относились в первую очередь к задаче краткосрочного прогноза погоды и систематическое исследование влияния сжимаемости атмосферы при интегрировании нелинейной системы уравнений на долгие сроки не производилось. В связи с этим нами выполнены некоторые оценки применительно к описанной в [1] баротропной модели. Для этой цели были выполнены расчеты по этой модели на срок до 50 суток.

Уже в исходном поле геопотенциала, которое использовалось при расчетах, несмотря на его сравнительную пестроту (см. рис. 1 в [2]), обнаруживается следующая закономерность. При общем зональном распределении изолиний имеется четко выраженная асимметрия поля, которая свидетельствует о наличии планетарной волны вдоль кругов широт с волновым числом 1. Кроме того, имеет место хорошо выраженный вторичный минимум, свидетельствующий о наличии волн, дважды укладывающихся вдоль широтного круга. Наличие этих двух волн является наиболее характерной чертой исходного поля давления. Еще более отчетливо эта особенность выявляется при рассмотрении полей геопотенциала, полученных путем интегрирования на долгий срок, в результате которого мелкомасштабные особенности поля существенно сглаживаются.

Особенно удобно для изучения эволюции поля давления рассматривать поля изменений геопотенциала. Характерной особенностью этих полей при расчете с заданием $L = \infty$ является четкое деление полушария на две области, в одной из которых преобладает рост геопотенциала, а в другой — падение его. Это показывает, что и в поле изменений геопотенциала первая гармоника является преобладающей. В качестве примера на рис. 1 *a* приводится поле изменений геопотенциала за 1 час, полученное на 20-е сутки после начала интегрирования. Рассмотрение полей изменений за различные сроки показывает, что они смещаются в направлении с востока на запад, причем угловая скорость этого смещения составляет около $60-70^\circ$ в сутки.

Более детальный анализ при визуальном рассмотрении полей оказывается затруднительным, поэтому были использованы некоторые количественные оценки, полученные методом гармонического анализа поля геопотенциала вдоль кругов широт. Анализ выполнялся с помощью составленной А. А. Кобяковой программы для девяти широтных кругов от 30 до 70° с. ш.

В табл. 1 приводятся средние значения амплитуд различных гармоник, полученных в процессе численного интегрирования уравнений баротропной модели. Эти амплитуды вычислены путем осреднения по широтным зонам с учетом длины широтного круга.

Таблица 1

Изменение со временем средних амплитуд (A дам) волн различного масштаба в поле геопотенциала при расчетах по баротропной модели $L = \infty$

Волновое число	t суток								
	0	5	10	20	25	30	35	45	50
1	10,4	13,0	14,0	11,6	14,9	16,3	15,9	15,3	12,1
2	10,9	9,1	8,6	12,5	10,3	7,4	4,8	9,1	12,6
3	4,3	3,5	6,2	7,5	4,1	8,5	7,3	6,2	4,5
4	3,8	6,2	3,8	3,1	7,4	4,7	5,1	6,4	4,5
5	3,5	2,3	3,6	2,1	2,0	3,2	2,6	3,1	5,3
6	4,8	3,5	1,8	1,7	4,3	2,1	2,9	2,9	1,4

Данные табл. 1 подтверждают, что первые две гармоники в поле давления являются преобладающими, следовательно, правильное описание их эволюции имеет решающее значение при моделировании атмосферных движений.

Наряду с амплитудами при гармоническом анализе вычисляется и фазовый угол гармоник для различных широтных кругов. Изменения фазы во времени дают представление о скорости перемещения волн различной длины.

Рассмотрение изменения фазы гармоник показывает, что некоторое время после начала интегрирования скорость смещения меняется довольно нерегулярно и лишь через некоторое время устанавливается сравнительно равномерный ход. Это хорошо видно из рис. 2, на котором представлена зависимость от времени угловой скорости перемещения первой гармоники поля геопотенциала для широтных кругов 40° и 70° с. ш. При расчетах фаза отсчитывалась от Гринвичского меридиана в направлении с запада на восток. Из рис. 2 видно, что сравнительно постоянная скорость смещения первой гармоники (около 60° в сутки в западном направлении) устанавливается примерно на 15-е сутки. Аналогично обстоит дело и со скоростью перемещения других гармоник в различных широтных зонах.

Заметим, что путем рассмотрения данных гармонического анализа вдоль отдельных широтных кругов удается получить правильное представление лишь для тех гармоник и широтных кругов, для которых амплитуда достаточно велика. В тех случаях, когда амплитуда относительно мала, результаты расчета дают совершенно нерепрезентативные скорости перемещения волн как по модулю, так и по направлению. Это, по-видимому, связано с шумами, возникающими при интегрировании и при переинтерполяции с квадратной сетки на широтно-долготную. Поэтому рассмотрение смещения по фазе вдоль отдельных широтных кругов имеет смысл лишь для первых гармоник, и то не во всех случаях.

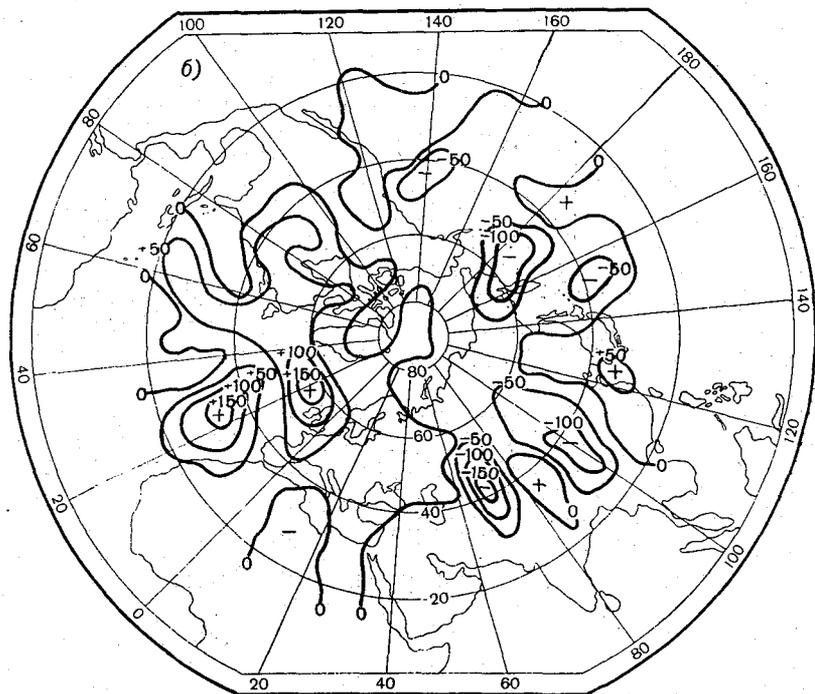
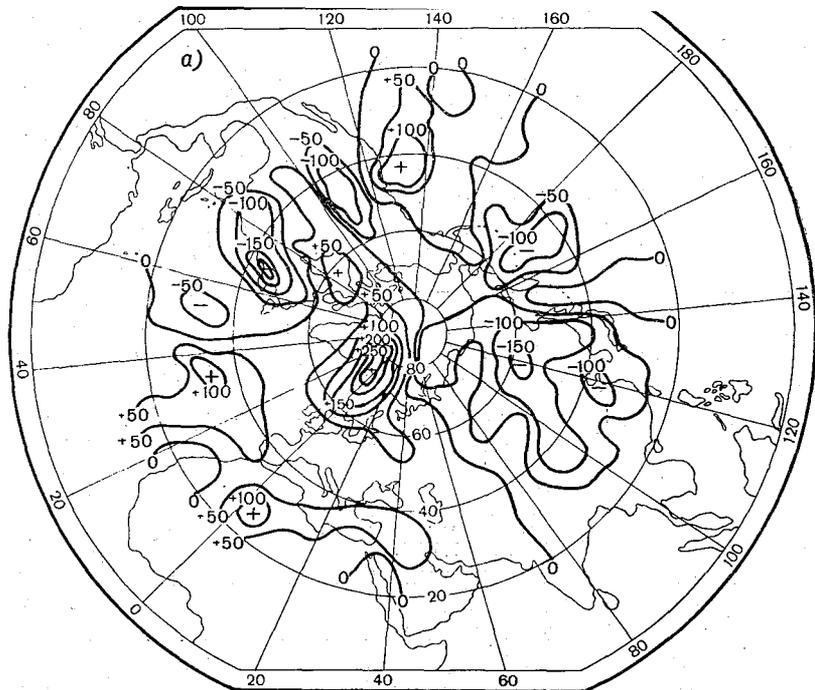
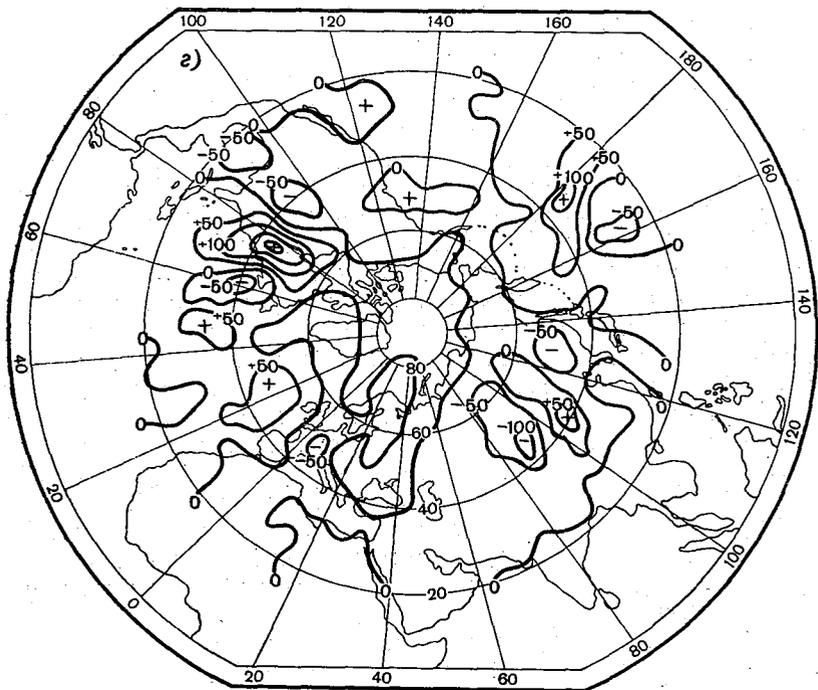


Рис. 3. Поле изменений геопотенциала за час (10^{-3} дам)
 а) $L = \infty$, б) $L = 2500$ км.



на 20-е сутки после начала расчетов. Термотропная модель.
 в) $L=1800$ км, г) $L=1200$ км.

Однако указанная выше тенденция к постепенному установлению скорости смещения планетарных волн прослеживается и по данным табл. 2, в которой приводятся осредненные по всем кругам широт угловые скорости за периоды с 10 по 12-е и с 20 по 22-е сутки с момента начала интегрирования для различных значений масштаба L .

Таблица 2

Средняя угловая скорость (град/сутки) смещения планетарных волн в поле геопотенциала для различных значений волнового числа K

K	L км						
	с 10 по 12-е сутки				с 20 по 22-е сутки		
	∞	2500	1800	1200	∞	1800	1200
1	-32	-32	-20	-14	-71	-33	-19
2	-9	-30	-18	-13	-20	-8	-13
3	15	7	-1	-17	-46	-34	-14
4	-11	8	2	-17	-11	-8	37
5	10	9	-4	9	53	16	45
6	-8	8	47	16	20	32	35

Из табл. 2 видно, что учет сжимаемости атмосферы оказывает значительное влияние на скорость перемещения планетарных волн. Оно сводится к существенному уменьшению скорости обратного движения первых трех гармоник. Так, скорость смещения первой гармоники уменьшается при изменении масштаба от $L = \infty$ до $L = 1200$ более чем в два раза для интервала времени с 10 по 12-е сутки и в три раза для интервала времени с 20 по 22-е сутки. Более сложно обстоит дело для второй и третьей гармоник. Однако в целом эффект учета сжимаемости оказывается таким же. Направление смещения четвертой гармоники оказывается сравнительно неустойчивым и при введении сжимаемости меняется с западного на восточное. Направление смещения пятой и шестой гармоник остается восточным и скорость его изменяется сравнительно мало.

Из приведенных в табл. 2 данных следует, что роль первых гармоник в эволюции поля геопотенциала на полушарии при учете сжимаемости сильно уменьшается. Это обстоятельство хорошо прослеживается и при визуальном рассмотрении полей изменения геопотенциала. Так, например, из рис. 1, на котором, кроме изменений геопотенциала на 20-е сутки для значений масштаба $L = \infty$, приведены также поля изменений для $L = 1800$ (рис. 1 б) и $L = 1200$ км (рис. 1 в). Видно, что при введении сжимаемости области роста и падения геопотенциала, которые ранее четко делили полушарие на две части, становятся более мелкомасштабными и при $L = 1200$ км приближаются по своим размерам к реальным областям роста и падения геопотенциала.

Исходя из вышеуказанного можно полагать, что использование при расчетах значения масштаба $L = 1200$ км существенно

приблизит модель к реальной атмосфере. Дальнейшее уменьшение масштаба L вряд ли целесообразно, поскольку, согласно формуле (1), он будет соответствовать чрезмерно высоким значениям l . Заметим, что выбор $L=1200$ км хорошо согласуется с данными Дж. Крессмена [4].

Приведенные выше результаты относились к баротропной модели атмосферы. Представляло интерес оценить также, какое влияние оказывает учет сжимаемости атмосферы при расчетах по термотропной модели.

К сожалению, к настоящему времени данными гармонического анализа результатов расчетов по этой модели мы не располагаем, поэтому можно сделать лишь некоторые предварительные выводы, основанные на визуальном рассмотрении полей изменений геопотенциала. Заметим, что здесь, как и для баротропной модели, речь идет о расчетах для инерционного варианта модели, без учета неадиабатических и диссипативных факторов.

На рис. 3 представлены поля изменений геопотенциала на 20-е сутки для различных значений масштаба L . Обращает на себя внимание, что при $L=\infty$ (рис. 3 а), в отличие от баротропной схемы, на полушарии выделяются по две области роста и падения геопотенциала, т. е. отмечается преобладание второй гармоники. При учете сжимаемости области роста и падения геопотенциала, как и в баротропном случае, становятся гораздо более мелкомасштабными. Визуальный анализ смещений полей изменений геопотенциала от срока к сроку дает ориентировочную оценку угловой скорости $60^\circ/\text{сутки}$ для $L=\infty$ и $36^\circ/\text{сутки}$ для $L=2500$. Для меньших значений масштаба L из-за большой пестроты поля и трудности идентификации отдельных областей оценить смещение по фазе не удается. Однако хорошее соответствие уже имеющихся результатов с результатами по баротропной модели дает основание надеяться, что и для термотропной модели выбор масштаба $L=1200$ км приведет к удовлетворительному согласованию с реальной атмосферой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г ан д и н Л. С. [и др.]. Упрощенная модель для численных экспериментов по термическому режиму атмосферы. См. наст. сб.
2. Г ан д и н Л. С. [и др.]. Численное интегрирование инерционной модели на длительные сроки. См. наст. сб.
3. О б у х о в А. М. К вопросу о геострофическом ветре. Изв. Ан СССР, сер. геогр. и геофиз., № 4, 1949.
4. C r e s s m a n G. P. Barotropic divergence and very long atmospheric waves. Mon. Wea. Rev., vol. 86, No. 8, 1958.
5. R o s s b y C. G. et al. Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. J. Marine. Res., vol. 2, No. 1, 1939.

*Л. С. ГАНДИН, Б. М. ИЛЬИН, Р. Л. КАГАН,
А. А. КОБЯКОВА, К. М. ЛУГИНА, Л. В. РУХОВЕЦ*

НЕКОТОРЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ФОРМИРОВАНИЮ ТЕРМИЧЕСКОГО РЕЖИМА АТМОСФЕРЫ

В работе [3] была описана упрощенная модель, предназначенная для проведения численных экспериментов по термическому режиму атмосферы. Эта модель может быть использована для различного рода исследований, в том числе для расчетов эволюции полей по реальным начальным данным о полях давления и температуры. Такие расчеты особенно важны для выяснения возможностей прогностического применения модели. С точки зрения формирования термического режима атмосферы, однако, наибольший интерес представляет изучение эволюции при задании начальных условий, существенно отличающихся от фактических. В качестве одного из таких начальных условий естественно было принять задание начального поля температуры постоянным на всем северном полушарии.

В настоящей статье излагаются постановка и предварительные результаты некоторых численных экспериментов, выполненных с помощью упомянутой упрощенной модели¹ при таком задании поля температуры.

§ 1. УСТАНОВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ НЕИЗМЕННОМ ПО ВРЕМЕНИ ПОЛЕ СРЕДНЕГО ВЕТРА

Наряду с заданием начального поля температуры при проведении численных экспериментов необходимо задание начального поля скоростей (функции тока ψ). На первый взгляд, при задании постоянного начального поля температуры можно было бы задать и постоянное на полушарии значение функции тока, т. е. исходить из состояния покоя. Однако, как было показано в [3], в рамках

¹ Поскольку описание модели, ее особенности, относящиеся к ней обозначения и термины подробно изложены в работе [3], публикуемой в настоящем сборнике, мы, как гавило, будем пользоваться ими без особых пояснений.

рассматриваемой физической модели, если пренебречь эффектом сжимаемости, неправомочно производить интегрирование, отправляясь от состояния покоя. Действительно, поскольку в этом случае средний по области вихрь геострофического ветра остается неизменным, а в начальном состоянии покоя равен нулю, то он будет оставаться равным нулю все время, что совершенно не соответствует реальным условиям в атмосфере, характеризующимся наличием четко выраженного циркумполярного вихря. Поэтому, используя модель без учета сжимаемости (модель А) или модель с частичным учетом сжимаемости (модель Б) для численных экспериментов по установлению поля температуры, необходимо задавать начальное поле среднего геопотенциала, близкое к фактическому или по крайней мере характеризующееся близким к фактическому значению среднего вихря.

Наиболее простой вариант таких экспериментов можно получить, если считать поле ψ неизменным по времени и совпадающим, скажем, с полем норм этой функции. Тогда задача сводится к интегрированию уравнения для функции тока термического ветра $\tau = \frac{RT}{l}$ (T — абсолютная температура, R — газовая постоянная, l — параметр Кориолиса). Это уравнение в данном случае имеет вид

$$\nabla^2 \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{a}{m^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -J(\psi, \nabla^2 \tau) - J(\tau, \nabla^2 \psi + l) + \\ + \frac{a}{m^2} J(\psi, \tau) + abJ(\tau, \nabla^2 \tau) - \frac{ak'}{m^2} \nabla^2 \tau - \frac{agRM}{c_p m^2 l p_1}. \quad (1)$$

Здесь в правой части, помимо инерционных членов, учтены слагаемые, описывающие влияние притока тепла и макротурбулентной теплопроводности.

Разумеется, такая модель имеет весьма малое физическое содержание, лишь немного превышающее содержание моделей термического режима, в которых наличием средней атмосферной циркуляции пренебрегается полностью. Тем не менее вычисления с такой моделью были целесообразны прежде всего именно для того, чтобы выяснить, какие черты реального процесса теряются при переходе к ней, т. е. при пренебрежении влиянием изменений температуры на поле движения. Кроме того, в опытах с этой моделью проще всего выяснить, каковы значения коэффициента макротурбулентной теплопроводности k' , отвечающие той или иной степени детализации обратного влияния температуры на приток тепла и, в частности, полностью пренебрежению таким влиянием. Можно думать, что полученные таким путем оценки k' будут применимы и для экспериментов с более полными моделями, поскольку величина k' должна главным образом зависеть от учета указанных обратных связей и в меньшей степени — от других особенностей модели.

По указанным причинам была выполнена небольшая серия численных экспериментов по интегрированию уравнения (1) при за-

крепленном поле $\bar{\varphi}$; совпадающем с полем норм геопотенциала поверхности 500 мб для января. Поле \bar{T} отождествлялось с температурой поверхности 500 мб, причем в качестве начального поля задавалась константа $\bar{T} = -8^\circ\text{C}$, равная средней по границе области величине нормы температуры для января. В процессе интегрирования указанное значение принималось сохраняющимся на границе. Приток тепла принимался равным норме для января согласно «сухой» модели с учетом обратного влияния температуры на уходящее излучение. Поля норм притока тепла и коэффициента

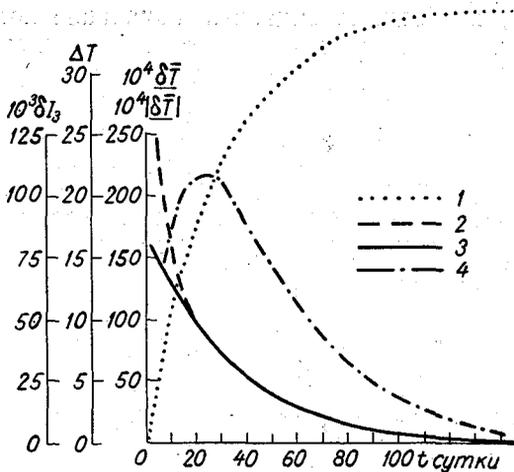


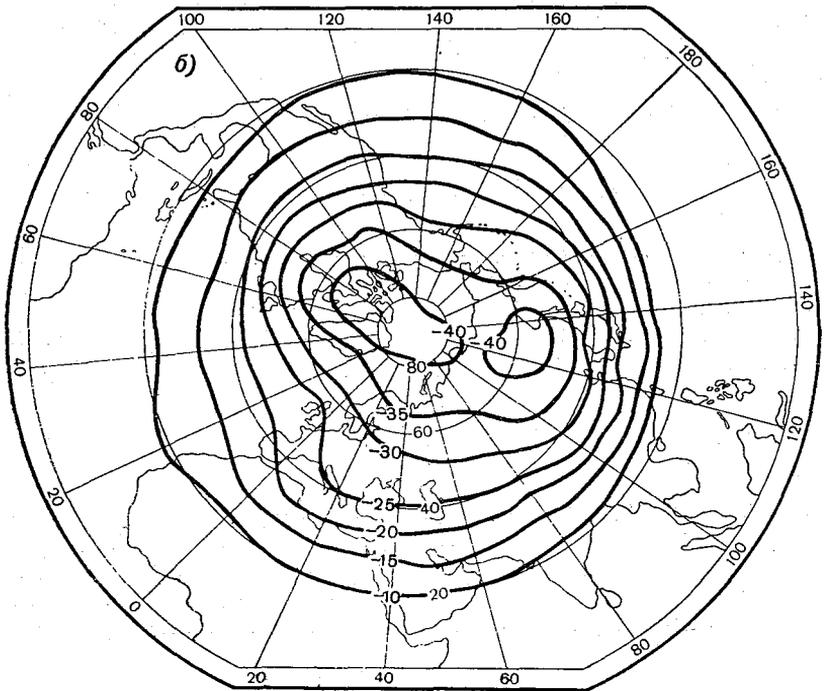
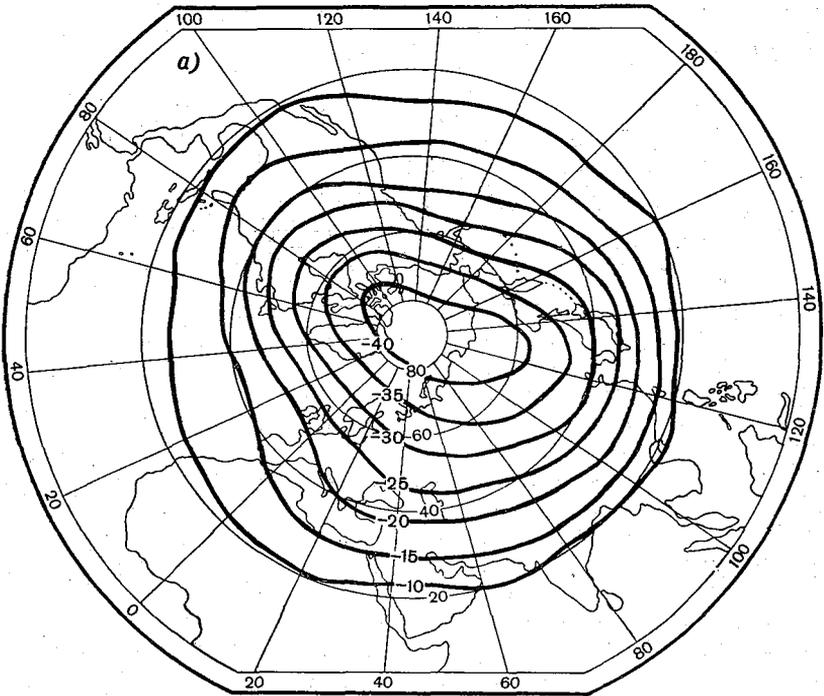
Рис. 1. Изменение во времени некоторых характеристик процесса установления для эксперимента с $k' = 2,5 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}$.

- 1) $\Delta T^\circ\text{C}$, 2) $\frac{\delta T}{\delta t}$ град/час, 3) $\delta \bar{T}$ град/час, 4) δI_3 $1/\text{сек}^2$ 10 суток.

на рис. 1 приведены графики временного хода некоторых характеристик процесса установления для эксперимента с $k' = 2,5 \times 10^6 \text{ м}^2/\text{сек}$. Как видно из этих графиков, процесс установления носит монотонный характер. В частности, разность ΔT температур на границе и в точке минимума температуры (кривая 1) монотонно стремится к предельному значению, равному примерно 35° . Более того, монотонность изменений имеет место практически во всех точках поля. Это видно из сопоставления графиков средних по области интегрирования модулей часовых изменений температуры $|\delta \bar{T}|$

обратной связи приведены на рис. 5 и 9 в [1]. Эксперименты описываемой серии отличались друг от друга лишь значением коэффициента k' , которое в пределах каждого эксперимента принималось постоянным в пространстве и во времени. Интегрирование производилось с шагом $\Delta t = 1$ час при допуске сходимости $\epsilon = 0,001^\circ/\text{час}$. Машинное время, затраченное на эти эксперименты, было сравнительно невелико вследствие того, что интегрировалось лишь уравнение (1), для которого итерации ускоренного метода Либмана сходятся весьма быстро.

Рис. 2. Рассчитанное поле температуры поверхности 500 мб через 140 суток (а) и фактическое поле норм температуры для января (б).



(кривая 2) и средних изменений с учетом знака $-\overline{\delta T}$ (кривая 3). Начиная уже с момента $t=20$ суток эти кривые фактически совпадают.

Рассмотрение упомянутых кривых показывает также, что процесс установления происходит сравнительно медленно, практически прекращаясь лишь через 150 суток. Этот факт можно проиллюстрировать также кривой 4 на рис. 1, дающей ход изменений полной энергии δI_3 за каждые 10 суток. Эти изменения сначала растут, достигают максимума при $t=22$ суток и лишь затем убывают, стремясь к нулю.

Основной вывод, который следует из рассмотрения рис. 1, состоит в том, что, отказываясь от учета влияния температуры на поле скоростей, мы тем самым лишаемся возможности воспроизвести автоколебательный характер атмосферных процессов. Этот вывод следует как из монотонности процесса установления, так и из того факта, что предельное состояние является практически стационарным, а не представляет собой колебания около некоторого среднего поля.

На рис. 2 приведено установившееся поле температуры, точнее, поле для момента $t=140$ суток (а) и фактическое поле норм температуры на поверхности 500 мб для января, несколько измененное путем принятия постоянного значения -8° вдоль границы (б). Сравнение этих полей показывает прежде всего, что минимальные значения для обоих распределений совпадают. Это совпадение является, впрочем, лишь следствием выбора соответствующего значения коэффициента k' . О степени зависимости результатов расчета от этого коэффициента можно судить на основании рис. 3, аналогичного рис. 1, но построенного по данным эксперимента с $k' = 5 \cdot 10^5$ м²/сек. Сопоставление этих двух рисунков показывает, что процесс в обоих случаях протекает аналогично, но при $k' = 5 \cdot 10^5$ м²/сек. установление достигается существенно позже и характеризуется значительно большими контрастами температуры.

Таким образом, эксперименты показывают, что в данной модели целесообразно задавать коэффициент макротурбулентной теплопроводности k' равным примерно $2,5 \cdot 10^6$ м²/сек. Это значение, разумеется, существенно больше, чем то, которое должно характеризовать влияние процессов с масштабами, меньшими шага сетки.

Действительно, если в формулу Ричардсона—Обухова

$$k = 0,2 l_*^{\frac{4}{3}}, \quad (2)$$

выражающую зависимость коэффициента турбулентного обмена k (в см²/сек.) от масштаба l_* (в см) (см., например, [15]), подставить $l_* = 600$ км, то получим приблизительно $k = 5 \cdot 10^5$ м²/сек., а значение $k = 2,5 \cdot 10^6$ м²/сек. соответствует, согласно формуле (2), масштабу l_* около 2000 км. Разумеется, возможность применения формулы (2)

к процессам весьма больших масштабов сомнительна, однако, если иметь в виду лишь ориентировочные оценки, то можно думать, что приведенные цифры правильно отражают существо дела.

Из сказанного следует, что макротурбулентный теплообмен при значении $k' = 2,5 \cdot 10^8$ м²/сек. описывает в рассматриваемой модели не столько влияние дискретности сетки, сколько действие обратных связей температуры и притока тепла, которые не учтены явным образом в модели. Иначе говоря, результаты эксперимента заставляют полагать, что механизм обратной связи путем влияния температуры на уходящее излучение, который учтен в модели с помощью эмпирических соотношений, является, при таком его учете, недостаточно сильным по сравнению со связями, существующими в действительности.

Возвращаясь к рассмотрению рис. 2, можно видеть, что вычисленное поле температуры оказалось весьма близким к реальному полю норм. В частности, эллипсообразная форма изотерм вблизи полюса воспроизведена вполне успешно: и в действительном и в вычисленном поле большая ось этого семейства изотерм направлена приблизительно вдоль меридиана на 70° з. д. — 110° в. д. Правильно отражены также области сгущения изотерм в средних широтах в районах меридианов 130° в. д. и 60° з. д., а также сравнительно слабо выявляющаяся в обоих полях ложбина с осью вдоль меридиана 20° в. д.

Вместе с тем обнаруживается одно систематическое расхождение между рассчитанным и фактическим полями, состоящее в том, что в тропических широтах вычисленные градиенты температуры меньше фактических. В результате все изотермы в умеренных широтах оказались в рассчитанном поле смещенными по направлению к полюсу по отношению к фактическим. Этот эффект хорошо виден на рис. 4, где приведено поле разностей между вычисленными и фактическими значениями норм температуры.

Можно думать, что указанное расхождение обусловлено принятием одинакового для всей области интегрирования значения k' . В действительности циклоническая деятельность в низких широтах развита существенно слабее, чем в умеренных и высоких.

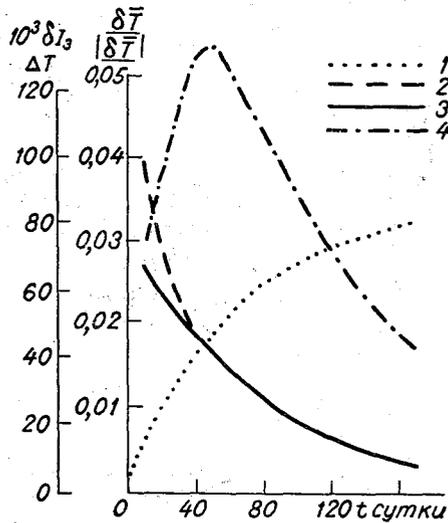


Рис. 3. Изменение во времени некоторых характеристик процесса установления для эксперимента с $k' = 5 \cdot 10^5$ м²/сек.

Усл. обозн. см. рис. 1.

Исходя из этого факта было бы естественно принять для тропической зоны меньшие значения k' , чем для умеренных и высоких широт. Понятно, что в этом случае получились бы бóльшие значе-

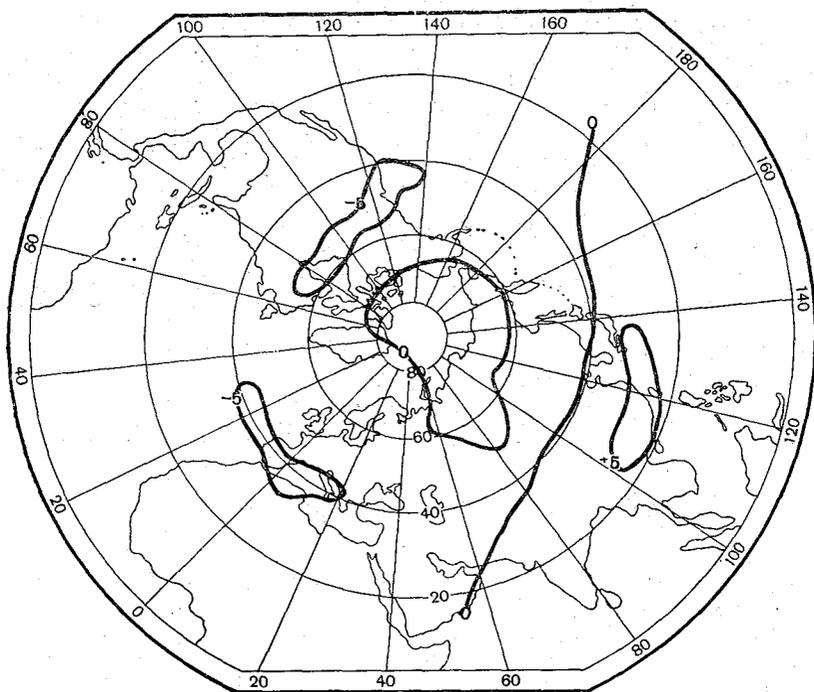


Рис. 4. Поле разностей рассчитанных значений температуры и норм для января.

ния градиентов температуры в низких широтах. Однако, поскольку данная модель имеет в целом ограниченное значение, мы таких экспериментов не производили.

§ 2. ИНТЕГРИРОВАНИЕ МОДЕЛИ С УЧЕТОМ СЖИМАЕМОСТИ АТМОСФЕРЫ ПРИ НАЧАЛЬНОМ УСЛОВИИ ПОКОЯ И ИЗОТЕРМИИ

Традиционным путем проведения численных экспериментов с моделями общей циркуляции атмосферы является интегрирование уравнений таких моделей при начальных условиях, описывающих постоянство температуры в пространстве и равенство скоростей нулю. Этот путь был предложен в работе Филлипса [8], положившей начало данному направлению, и использовался также в экспериментах Минтца—Аракава [7], Лиса [6], Смагоринского [9] и других.

В действительности такой путь, представляющий собой

своеобразное «численное моделирование сотворения мира» отнюдь не должен являться неизменным атрибутом численных экспериментов с моделями общей циркуляции. С одной стороны, этот подход не является достаточным, так как по самому смыслу постановки экспериментов их результаты не должны существенно меняться при каком угодно изменении начальных полей, и для того чтобы проверить, в какой мере выполняется это свойство, целесообразно проводить эксперименты при различном задании начальных полей. С другой стороны, применение указанного подхода сопряжено с весьма большими затратами машинного времени, поскольку начальный период времени, в течение которого происходит установление реального «фона» рассчитываемых полей, имеет порядок величины сотни суток. С этой точки зрения удобнее задавать начальные распределения, более близкие к фактическим полям, чем состояние изотермии и покоя.

Несмотря на приведенные соображения, было целесообразно выполнить хотя бы один эксперимент, отправляясь от состояния изотермии и покоя, чтобы выяснить, каким образом в рамках рассматриваемой модели происходит установление фона и, в частности, сравнить этот процесс с установлением поля температуры при закреплённом поле движения, описанным в предыдущем параграфе.

Как уже указывалось, для того чтобы рассчитывать на разумные результаты, начиная интегрирование от состояния покоя, необходимо достаточно полным образом учесть влияние сжимаемости атмосферы. Рассмотрим с этой точки зрения уравнения (36) и (37), приведенные в работе [3], в которых пренебрежем влиянием приземного трения и орографии:

$$\nabla^2 \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{1}{L_0^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = -J(\psi, \nabla^2 \psi + l) - cJ(\tau, \nabla^2 \tau) + k\nabla^4 \psi, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{a}{m^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{a}{L_0^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) = & -J(\psi, \nabla^2 \tau) - \\ - J(\tau, \nabla^2 \psi + l) + \frac{a}{m^2} J(\psi, \tau) + abJ(\tau, \nabla^2 \tau) + k\nabla^4 \tau - \\ - \frac{ak'}{m^2} \nabla^2 \tau - \frac{agRM}{c_p m^2 \tilde{l} p_1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Легко видеть, что для обеспечения корректной постановки задачи при начальном состоянии покоя решающую роль играет сохранение слагаемого $\frac{1}{L_0^2} \frac{\partial \tau}{\partial t}$ в левой части уравнения (3). Действительно, благодаря учету этого слагаемого изменения фона температуры, обусловленные влиянием притока тепла M , вызывают изменения фона геопотенциала и тем самым формирование среднего

зонального переноса. В то же время учет слагаемых, описывающих влияние сжимаемости, в уравнении (4) имеет меньшее значение, поскольку член $-\frac{a}{L_0^2} \frac{\partial \tau}{\partial t}$ мал по сравнению с членом $-\frac{a}{m^2} \frac{\partial \tau}{\partial t}$

этого уравнения, имеющим ту же структуру. Поэтому в данном эксперименте влияние сжимаемости учитывалось полностью в уравнении (3), а в уравнении (4) этим влиянием пренебрегалось, так что оно использовалось в виде

$$\nabla^2 \frac{\partial \tau}{\partial t} - \frac{a}{m^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -J(\psi, \nabla^2 \tau) - J(\tau, \nabla^2 \psi + l) + \\ + \frac{a}{m^2} J(\psi, \tau) + abJ(\tau, \nabla^2 \tau) + k \nabla^4 \tau - \frac{ak'}{m^2} \nabla^2 \tau - \frac{agRM}{c_p m^2 l \tilde{p}_1}, \quad (5)$$

т. е. отличалось лишь учетом макротурбулентной вязкости (член $k \nabla^4 \tau$) от уравнения (1), использованного в предыдущем эксперименте.

В соответствии с результатами экспериментов, изложенными в работе [4], параметр L_0 был принят равным 1200 км, а на основании результатов экспериментов с закрепленным полем геопотенциала (см. § 1) коэффициент макротурбулентной температуропроводности k' был положен равным $2,5 \cdot 10^6$ м²/сек.

Вводя достаточно полный учет сжимаемости, оказывается возможным включить также эффект макротурбулентной вязкости. Учет этого эффекта целесообразен для описания влияния движений, масштаб которых меньше шага использованной регулярной сетки. В результате небольшой серии численных экспериментов, выполненных с фактическими начальными данными, было найдено, что разумным значением кинематического коэффициента макротурбулентной вязкости k является величина $2 \cdot 10^5$ м²/сек., примерно на порядок меньшая использованного значения коэффициента макротурбулентной температуропроводности k' . Такое различие значений этих коэффициентов обусловлено разной ролью, которую играет включение процессов макротурбулентной вязкости и теплопроводности в рассматриваемую модель. Эффект макротурбулентного теплообмена заменяет главным образом учет реально существующих обратных связей между термическим полем и распределением притока тепла. В то же время учет макротурбулентной вязкости имитируется лишь интегральное влияние движений, масштаб которых мал по сравнению с шагом сетки, на крупномасштабные движения. Последнее подтверждается тем обстоятельством, что, согласно формуле (2), значение коэффициента $k = 2 \cdot 10^5$ м²/сек. соответствует масштабу l_* , составляющему около 300 км, т. е. равному примерно половине шага использованной сетки.

Заметим в связи со сказанным, что в экспериментах по общей циркуляции выбор коэффициентов макрообмена является далеко не столь безобидным делом, каким выбор этих коэффициентов или

параметров процедуры сглаживания представляется при численном краткосрочном прогнозе. Варьирование этих коэффициентов приводит не только к изменению степени пестроты рассматриваемых полей, но и к изменению средних зональных градиентов. В принципе последний эффект имеет место также и в численном прогнозе, но он не проявляется сколько-нибудь заметным образом из-за малости интервала времени, для которого производится прогноз. При выполнении же экспериментов по интегрированию уравнений на долгие сроки степень произвола при выборе коэффициентов макрообмена оказывается сравнительно невелика: уменьшение соответствующего коэффициента приводит к формированию чрезмерно пестрых полей, в то время как увеличение его влечет за собой слишком малые значения зональных градиентов.

Процедура интегрирования системы уравнений (3), (5) состояла в том, что поле производной $\partial\tau/\partial t$, определяемое путем решения уравнения (5), подставлялось в уравнение (3), из которого затем находилась производная $\partial\psi/\partial t$. По техническим причинам было удобнее подставлять в (3) величину $\partial\tau/\partial t$, найденную не на том же, а на предыдущем шаге по времени, так же как и члены правой части этого уравнения. Рассмотрение результатов эксперимента показало, что этот прием не привел к сколько-нибудь заметным искажениям решения, за исключением, практически, лишь самого первого шага по времени.

Уравнения описанной модели были проинтегрированы на срок до 140 суток. Время этого счета на машине М-220 составило около 30 часов, включая детальный расчет и выдачу характеристик вычисляемых полей через каждые 5 суток. Этот расчет производился по двум программам. Одна из этих программ осуществляла выдачу на широкую печать полей геопотенциала Φ и температуры \bar{T} и полей их часовых изменений $\delta\Phi$ и $\delta\bar{T}$. По другой программе производился расчет значений геопотенциала и температуры в узлах широтно-долготной сетки с шагом 5° по меридиану и 10° по кругам широты. Этот расчет осуществлялся путем так называемой квази-оптимальной интерполяции [2].

На основании полученных значений вычислялись средние по кругам широт величины геопотенциала, температуры, зональной и меридиональной составляющих геострофического ветра и кинетической энергии зональной и меридиональной компонент ветра. Кроме того, вычислялись средние по всей области интегрирования значения перечисленных характеристик, а также амплитуды и фазы их первых гармоник вдоль широтных кругов.

На рис. 5 приведены графики изменения средних, максимальных и минимальных значений температуры (а) и геопотенциала (б) в процессе интегрирования. Из этих графиков видно, что в течение первых 80 суток указанные характеристики изменяются монотонно, а затем начинает проявляться колебание их с постепенно возрастающей с течением времени амплитудой. Максимальные значения

\overline{T}_{\max} и $\overline{\Phi}_{\max}$ некоторое время остаются постоянными и равными значениям на границе, и лишь через несколько десятков суток вблизи границы появляются области максимумов температуры и геопотенциала, превышающих граничные значения. Интересно отметить, что если среднее значение геопотенциала $\overline{\Phi}$ в процессе интегрирования приближается к значению $\overline{\Phi}$, соответствующему реальному полю норм, и затем колеблется вблизи этого значения, то средняя по области интегрирования величина температуры \overline{T} все

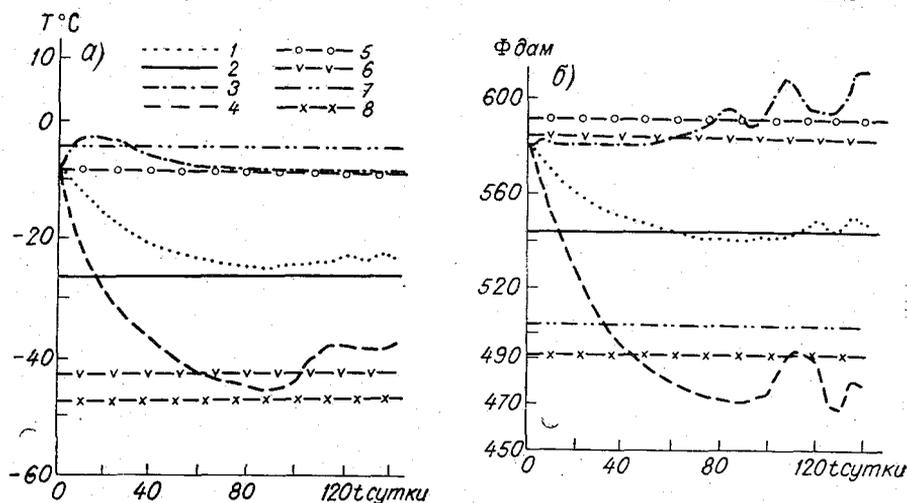


Рис. 5. Изменения со временем средних, максимальных и минимальных значений температуры (а) и геопотенциала (б).

1 — среднее по результатам расчета, 2 — среднее в поле норм, 3 — максимум по результатам расчета, 4 — минимум по результатам расчета, 5 — максимум в поле норм; 6 — минимум в поле норм, 7 — характерная величина максимума для фактических полей, 8 — характерная величина минимума для фактических полей.

время превосходит норму, причем минимальное отличие составляет около 2° . Естественное объяснение этого факта состоит в том, что влияние изменений температуры на изменения геопотенциала, учитываемое в данной модели, позволяет описать перенос тепла возмущениями наиболее крупного масштаба в явном виде, а не как макротурбулентный теплообмен. Это означает, что применительно к данной модели следовало бы пользоваться несколько меньшим значением коэффициента k' , чем $2,5 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек.}$, принятым на основании предыдущих экспериментов (см. § 1). Количественно, впрочем, этот эффект сравнительно невелик: как показал специальный эксперимент с фактическими начальными данными, уменьшение величины k' вдвое по сравнению с использованным значением является, по-видимому, чрезмерным.

Из рис. 5 следует также, что с течением времени контрасты в поле Φ достигают чрезмерно больших значений: максимальные по полю значения Φ_{\max} оказываются большими, а минимальные Φ_{\min} — меньшими не только соответствующих экстремумов поля норм, но и характерных экстремальных значений фактических полей. По-видимому, имеет место некоторое «разбалтывание» решения, т. е. постепенное увеличение степени пестроты рассчитываемых полей. Об этом можно судить также по кривым средних по полю часовых изменений геопотенциала $\delta\Phi$ и температуры δT и средних

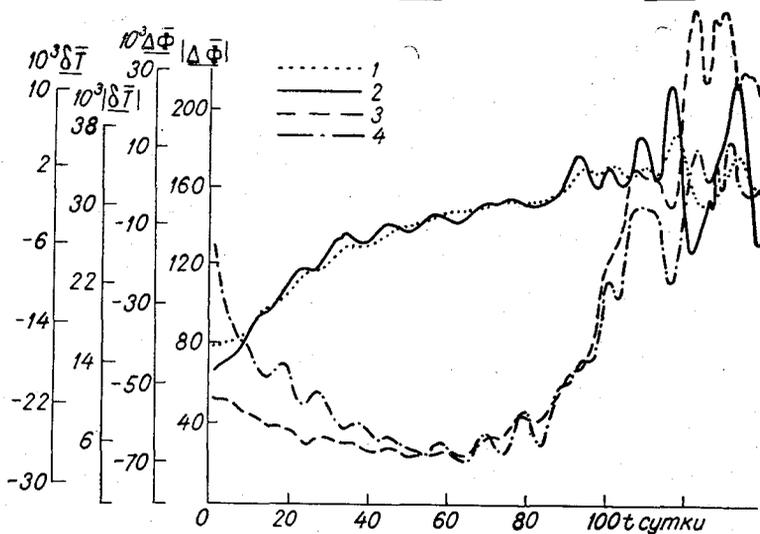


Рис. 6. Графики часовых изменений геопотенциала и температуры. 1 — среднее по области изменение температуры δT град/час, 2 — среднее по области изменение геопотенциала $\Delta\Phi$ д/м/час, 3 — средний модуль изменения геопотенциала $|\Delta\Phi|$ д/м/час, 4 — средний модуль изменения температуры $|\delta T|$ град/час.

модулей этих изменений $|\delta\Phi|$ и $|\delta T|$, приведенным на рис. 6. Примерно на 90-е сутки $\delta\Phi$ и δT , бывшие до этого отрицательными, переходят через нулевое значение и далее колеблются около этих значений, причем амплитуда колебаний $\delta\Phi$ существенно возрастает со временем. Можно видеть также, что в течение всего процесса имеет место значительная положительная корреляция между $\delta\Phi$ и δT , наличие которой естественно приписать учету члена $\frac{1}{L_0^2} \frac{\partial \tau}{\partial t}$ в уравнении вихря (3).

Что касается средних модулей изменений $|\overline{\delta\Phi}|$ и $|\overline{\delta T}|$, то в течение первых 55 суток они почти монотонно убывают, что вполне естественно и отражает постепенно замедляющееся формирование «фона» геопотенциала и температуры. Однако затем имеет место рост указанных величин, который существенно усиливается начиная приблизительно с $t=85$ суток.

Причины указанного поведения модели пока не ясны. Можно видеть, однако, что рост изменений связан с усилением ультрадлинных волн и прежде всего волн с номером 1. Этот эффект наиболее четко проявляется в полях $\overline{\delta T}$ и $\overline{\delta\Phi}$ (особенно во втором из них), которые не подвергались гармоническому анализу, но выдавались для визуального рассмотрения. Некоторое представление об указанном эффекте можно получить также из рис. 7, на котором приведены графики изменения амплитуд волн с номерами 1 и 2 в поле геопотенциала.

На рис. 8 приведены изменения средних по области зональных скоростей геострофического и термического ветра, \underline{u} и \underline{u}_T . Показаны также значения этих скоростей, соответствующие полю норм и фактическим полям. Заметим, что для фактических полей эти значения меньше, чем для полей норм, поскольку последние обладают большей степенью зональности. Как видно из рис. 8, изменения \underline{u} и \underline{u}_T происходят аналогичным образом: Изменяясь от нуля в сторону положительных значений, соответствующих среднему западно-восточному периоду, эти величины остаются меньшими фактических значений приблизительно до $t=30\div 40$ суток, затем переходят через эти значения и продолжают расти вплоть до $t=85$ суток, после чего убывают, достигая значений, заметно меньших по сравнению с этими характеристиками для фактических полей. Эти низкие значения \underline{u} и \underline{u}_T являются косвенным признаком чрезмерной пестроты рассчитываемых полей.

Средние значения меридиональных составляющих геострофического и термического ветра, \underline{v} и \underline{v}_T , пренебрежимо малы по сравнению с \underline{u} и \underline{u}_T , а также по сравнению со средними квадратическими меридиональными скоростями и поэтому здесь не рассматриваются.

Графики изменения кинетической энергии зональной и меридиональной составляющих геострофического ветра представлены на рис. 9. Приведена также кривая кинетической энергии среднего зонального ветра $\underline{u}^2/2$, так что разность ординат $\underline{u}^2/2$ и $\underline{u}_T^2/2$ представляет собой кинетическую энергию зональных возмущений. Как видно из приведенных кривых, в течение первых 30 суток энергия возмущений как зональных, так и меридиональных мала по сравнению с энергией зонального переноса. К тому моменту, когда энергия зональной составляющей достигает значений, соответствующих полю норм (при $t\approx 45$ суток), энергия возмущений составляет около

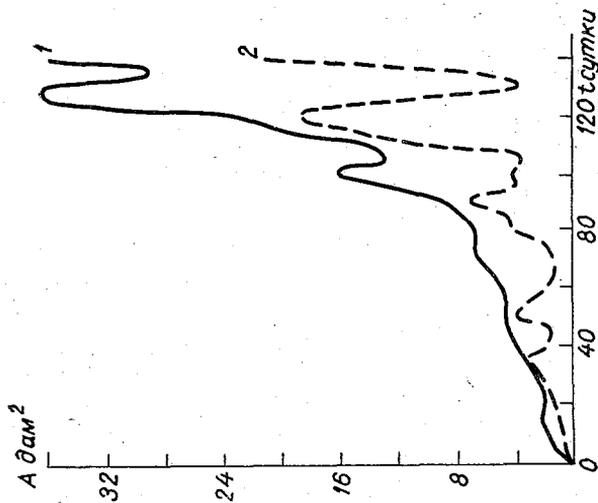


Рис. 7. Изменение во времени средних амплитуд первой (1) и второй (2) гармоник поля геопотенциала.

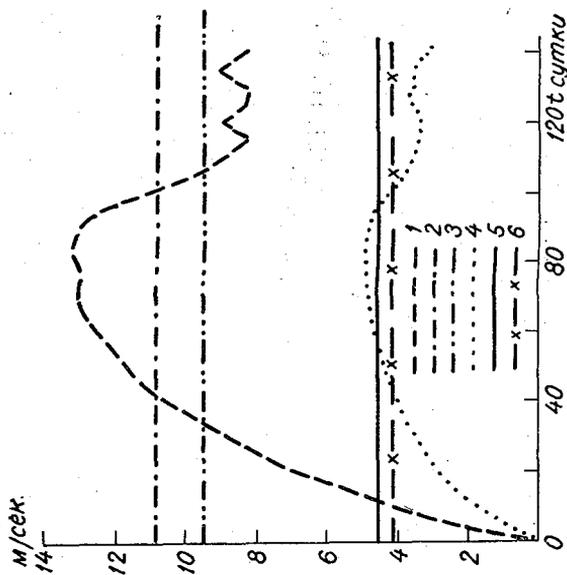


Рис. 8. Изменение во времени средних зональных скоростей геострофического и термического ветра. 1 — u по результатам расчета, 2 — u в поле норм, 3 — u для фактических полей, 4 — u_n по результатам расчета, 5 — u_n в поле норм, 6 — u_n для фактических полей.

20% полной кинетической энергии геострофического ветра. Далее зональная энергия продолжает возрастать и достигает значений, характерных для фактических ситуаций, после чего колеблется около значения, очень хорошо соответствующего характерной величине $u^2/2$ для реальных полей.

Начиная примерно с $t=90$ суток происходит резкий рост как меридиональной энергии, так и энергии зональных возмущений, причем последний имеет место не за счет роста общей зональной энер-

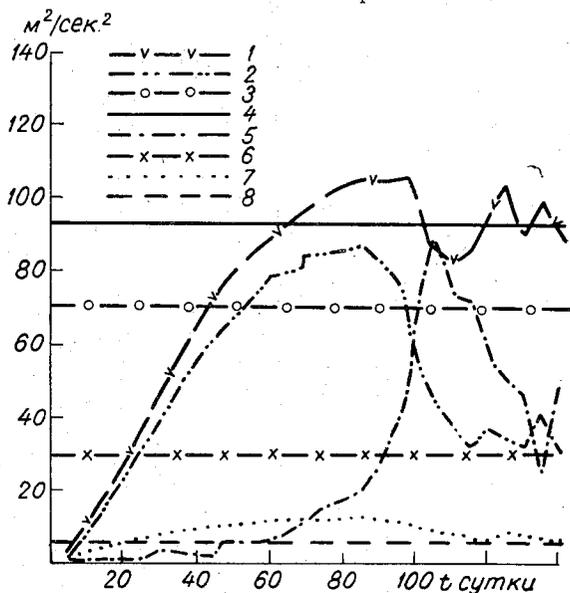


Рис. 9. Изменение со временем компонент кинетической энергии геострофического ветра.

1 — $\overline{u^2/2}$ по результатам расчета, 2 — $\overline{u^2/2}$ по результатам расчета, 3 — $\overline{u^2/2}$ в поле норм, 4 — $\overline{u^2/2}$ для фактических полей, 5 — $\overline{v^2/2}$ по результатам расчета, 6 — $\overline{v^2/2}$ для фактических полей, 7 — $\overline{u_T^2/2}$ — по результатам расчета, 8 — $\overline{v^2/2}$ в поле норм.

гии, а за счет убывания энергии среднего переноса. Особенно сильно возрастает меридиональная энергия. Максимальное ее значение (при $t=105$ суток) втрое превосходит характерные для реальных полей значения и даже оказывается в этот момент несколько превышающим величину зональной энергии. Далее $\overline{v^2/2}$ убывает, что, по-видимому, является началом колебательного процесса изменений около некоторого среднего значения, существенно превосходящего наблюдаемые величины этой энергии.

Таким образом, можно сделать вывод, что упомянутое выше «разбалтывание» решения характеризуется прежде всего завышенными значениями энергии меридиональных движений.

Укажем, что изменения кинетической энергии термического ветра происходят совершенно иным образом, нежели изменения энергии среднего геострофического ветра. Именно, почти все время полная энергия термического ветра лишь незначительно превышает энергию среднего зонального термического ветра. Лишь к самому концу интервала интегрирования энергия возмущений поля термического ветра сравнивается по порядку величины с энергией зонального термического ветра.

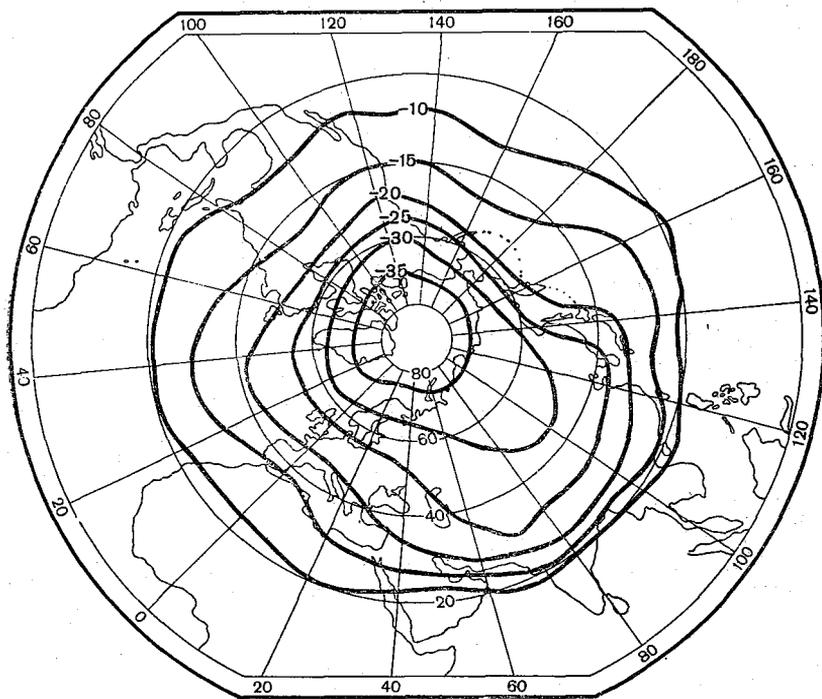


Рис. 10. Рассчитанное поле температуры для $t=135$ суток.

К сожалению, на данном этапе мы не могли из-за технических ограничений производить осреднение рассчитываемых полей также и по времени и имеем данные, относящиеся только к дискретным моментам времени. В качестве примера на рис. 10 приведено поле температуры, рассчитанное к моменту $t=135$. Сопоставление его с полем, приведенным на рис. 2 а, показывает, что при учете взаимодействия изменений температуры и геопотенциала вычисляемые поля обнаруживают сходство не с полем норм, а с фактически наблюдаемыми полями в атмосфере.

Общий вывод, который следует из анализа результатов данного эксперимента, состоит в том, что использованная модель является одной из наиболее простых, если не самой простой моделью, в рам-

как которой удается, начиная с интегрирования от состояния покоя и изотермии, получить поля, сходные с фактическими как по интегральным характеристикам, так и по «мгновенным» распределениям. Вместе с тем имеют место некоторые систематические отклонения характеристик рассчитанных полей от фактических. Причины этих отклонений и пути их преодоления подлежат дальнейшему исследованию. Понятно, что выполнить такие исследования легче, оперируя с упрощенными моделями, чем при помощи детализированных и громоздких моделей атмосферы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Винников К. Я., Каган Р. Л. О задании притоков тепла при численных экспериментах с помощью термотропной модели. См. наст. сб.
2. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеоиздат, Л., 1963.
3. Гандин Л. С. [и др.]. Упрощенная модель для численных экспериментов по термическому режиму атмосферы. См. наст. сб.
4. Гандин Л. С. [и др.]. О влиянии сжимаемости атмосферы на эволюцию планетарных волн. См. наст. сб.
5. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 2. Изд. «Наука», М., 1967.
6. Leith C. E. Numerical simulation of the Earth's atmosphere. Methods in Computational Physics. Vol. 4, 1965.
7. Mintz J. Very long-term global integration of the primitive equations of atmospheric motion. WMO Technical Note, No. 66. WMO—IUGG. Symposium on Research and Development Aspects of Long-Range Forecasting. Boulder, Colo, 1964. Geneva, 1965 (Перевод в сб. «Теория климата». Гидрометеоиздат, Л. 1967).
8. Phillips N. A. The general circulation of the atmosphere: a numerical experiment. Q. Roy. Met. Soc., vol. 82, No. 352, 1956 (перевод в сб. «Теория климата». Гидрометеоиздат, Л. 1967).
9. Smagorinsky J., Manabe S., Holloway J. Numerical results from a nine-level general circulation model of the atmosphere. Mon. Wea. Rev., vol. 93, No. 12, 1965 (перевод в сб. «Теория климата». Гидрометеоиздат, Л. 1967).

ИНВАРИАНТНО-ГРУППОВОЙ МЕТОД В КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ПЛАНЕТАРНОЙ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

В последние годы можно отметить возросшее внимание к так называемому локальному направлению решения дифференциальных уравнений динамики атмосферы, основанному на использовании инвариантно-групповых свойств уравнений гидромеханики [1—3]. Эти методы дают возможность находить ряд инвариантных решений для некоторых упрощенных нелинейных моделей динамики атмосферы. Подобные решения имеют интерес при анализе структуры решения, но не могут быть использованы в математических экспериментах по динамике атмосферы, где необходимо решать конкретные краевые задачи, учитывая большой спектр движений разного масштаба. Поэтому естественно попытаться распространить преимущества инвариантно-группового метода на краевые задачи, т. е. рассмотреть групповые свойства дифференциальных уравнений применительно к решениям, определенным в области с заданными граничными условиями.

Рассмотрим группу Ли, заданную системой уравнений

$$x'^i = f^i(x^1, x^2, \dots, x^n, a) \quad (i=1, \dots, n), \quad (1)$$

где a — параметр преобразования координат x^i в x'^i . Функции f^i удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений [10, 11]:

$$\frac{\partial f^i}{\partial a} = \varphi^i(f_1, f_2, \dots, f_n) \quad (i=1, \dots, n)$$

и начальным условиям

$$f^i|_{a=0} = x^i.$$

Оператор

$$Y = \sum_{i=1}^n \varphi^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (2)$$

где $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$, называется инфинитезимальным оператором группы (1).

Функция $F(x)$ будет инвариантом группы (1), если она удовлетворяет уравнению

$$Y(F(x)) = 0 \quad (3)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \varphi^i(x) \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0.$$

Уравнение (3) имеет $n-1$ функционально-независимых решений

$$F = J^m(x) \quad (m = 1, 2, \dots, n-1),$$

и общее решение имеет вид

$$F(x) = \Omega(J^1(x), J^2(x), \dots, J^{n-1}(x)).$$

Многообразие, заданное уравнением $F(x) = 0$, есть инвариантное многообразие группы (1).

Введем новые координаты, являющиеся функциями от x $u(x)$ и производными $p_i^k = \frac{\partial u^k}{\partial x^i}$ ($i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, l$). Тогда группа может быть задана следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} x'^i &= f^i(x, u, a), \\ u'^k &= g^k(x, u, a), \\ p_i'^k &= h_i^k(x, u, p, a). \end{aligned} \quad (4)$$

Инфинитезимальным оператором группы (4) будет следующий оператор [11]:

$$Y_1 = Y_0 + \psi_i^k \frac{\partial}{\partial p_i^k}, \quad (5)$$

где

$$Y_0 = \varphi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k};$$

$$\varphi^i = \left. \frac{\partial f^i}{\partial a} \right|_{a=0}; \quad \eta^k = \left. \frac{\partial g^k}{\partial a} \right|_{a=0}; \quad \psi_i^k = \left. \frac{\partial h_i^k}{\partial a} \right|_{a=0}.$$

Группа (4) называется продолжением группы (1) на производные первого порядка. Оператор (5) есть продолженный оператор

группы (1). Функции ψ_i^k могут быть определены по следующей формуле:

$$\psi_i^k = \frac{\partial \eta^k}{\partial x^i} + \sum_{s=1}^l \frac{\partial \eta^k}{\partial u^s} p_i^s - \sum_{j=1}^n p_j^k \left(\frac{\partial \varphi^j}{\partial x^i} + \sum_{s=1}^l \frac{\partial \varphi^j}{\partial u^s} p_i^s \right).$$

Аналогично можно построить продолжение группы (4) на производные второго порядка [11].

Функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$, удовлетворяющие соответствующим уравнениям $Y_1(F_1(x))=0$ или $Y_2(F_2(x))=0$, есть инварианты продолженной группы (1) на производные первого и второго порядка соответственно. Уравнения $F_1(x)=0$ или $F_2(x)=0$ задают дифференциальные инвариантные многообразия группы (1). Отсюда можно заключить, что система дифференциальных уравнений допускает группу, если дифференциальное многообразие, задаваемое указанной системой, является дифференциальным инвариантным многообразием допускаемой группы. Если ввести понятие $T(x)$ преобразования на допускаемой системой дифференциальных уравнений группе, то уравнения указанной системы остаются неизменными под действием преобразования $T(x)$.

Задав систему дифференциальных уравнений в следующем виде:

$$Z_i \left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = 0 \quad (i=1, \dots, n), \quad (6)$$

находим инфинитезимальный оператор Y_2 , допускаемый этой системой уравнений с помощью равенств [11]

$$Y_2(Z_i) = 0 \quad (i=1, \dots, n). \quad (7)$$

Уравнения (7) являются определяющими уравнениями для допускаемого системой (6) инфинитезимального оператора Y_2 .

Изложенные понятия для однопараметрической группы можно распространить на группы, зависящие от двух-трех параметров. Рассмотрим основную группу механики, так называемую группу Галилея—Ньютона [9]. В эту группу входят четыре подгруппы:

а) трехпараметрическая подгруппа пространственных переносов (частный случай группы движений трехмерного пространства)

$$x'_i = x_i + a_i \quad (i=1, 2, 3);$$

б) однопараметрическая подгруппа переносов отсчета времени

$$t' = t + a;$$

в) группа вращений трехмерного пространства

$$x'_i = \sum_{k=1}^3 a_{ik} x_k;$$

г) трехпараметрическая подгруппа преобразований к осям, движущимся поступательно с постоянной скоростью,

$$x'_i = x_i + a_i t.$$

Законы движения Ньютона инвариантны относительно указанных преобразований координат.

Таким образом, имеем заданными четыре группы Ли, которые допускаются системой уравнений планетарной динамики атмосферы. В отличие от рассмотренных ранее свойств однопараметрической группы Ли, группы движений и вращений трехмерного пространства и группа преобразований к осям — трехпараметрические, что усложняет методику определения инфинитезимального оператора этих групп.

Но построив тем или иным способом инфинитезимальные операторы этих групп, хотя бы в пространстве, не продолженном на производные, из уравнения (3) можно получить решения, инвариантные относительно этих групп. Но для решения краевых задач следует искать не общее решение уравнения (3), а свести задачу к поиску собственных функций этого уравнения, которые обладают свойством инвариантности относительно преобразований упомянутых групп. Имея набор найденных таким образом собственных функций, можно решать краевую задачу прямым методом поиска решения в виде ряда по этим функциям, используя при этом преимущество инвариантного метода решения.

Построение инфинитезимальных операторов для групп движений и вращений трехмерного пространства облегчается наличием теории представлений этих групп. Для группы движений разработан функционально-аналитический аппарат теории представлений для случая движений евклидовой плоскости [5]:

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \alpha - y \sin \alpha + a, \\ y' &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + b. \end{aligned} \quad (8)$$

Это трехпараметрическая группа с параметрами α , a и b . Положив $\alpha = 0$, получаем группу переносов на плоскости:

$$\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + b. \end{aligned} \quad (9)$$

В дальнейшем удобно применить другие параметры. Вводя полярную систему координат, положим $a = r \cos \varphi$, $b = r \sin \varphi$. Тогда для движения $g(a, b)$ в качестве параметров примем r и φ , т. е. $g(a, b) = g(r, \varphi)$ ($0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < \pi$). Инфинитезимальные операторы группы (8) будут [5]:

$$\begin{aligned} H_1 &= -e^{i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ H_2 &= -e^{-i\varphi} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right). \end{aligned}$$

Оператор H_1H_2 есть оператор Лапласа в полярной системе координат. Пусть f_n — собственные функции оператора H_1H_2 с собственным значением $(-R^2)$, т. е.

$$H_1H_2f_n = -R^2f_n. \quad (10)$$

Собственные функции оператора Лапласа известны:

$$f_n = (-i)^n J_n(Rr) e^{in\varphi}, \quad (11)$$

где $J_n(Rr)$ — функция Бесселя. Тогда, как доказано в [5],

$$H_1f_n = iRf_{n+1}, \quad (12)$$

$$H_2f_n = iRf_{n-1}. \quad (13)$$

Собственные функции оператора H_1H_2 являются матричными элементами представления $T_R(g)$ группы движения (8). Ввиду того, что в группе Галилея—Ньютона подгруппа пространственных переносов (9) не является аналогом группы движений, так как $\alpha=0$, то полностью эффекта инвариантного метода решения в виде рядов по функциям (11) наблюдаться не должно, хотя реализация прямых методов решения по системе координатных функций (11) существенно облегчается, потому что выполняются соотношения (10), (12), (13). Введя в уравнения движения и неразрывности новые неизвестные, $V = v_r + iv_\varphi$ и $U = v_r - iv_\varphi$, где v_r , v_φ — компоненты скорости в полярной системе координат, получим уравнения, в которых подстановка рядов по функциям (11) приводит к возможности реализовать процесс разделения переменных, подобный широко известному методу решения нелинейных уравнений динамики атмосферы в виде рядов по сферическим функциям, изложенному в [12, 13], но для цилиндрической системы координат на базисе функций Бесселя. Однопараметрическая подгруппа переносов отсчета времени не допускает построения на ней инвариантных многообразий ввиду того, что уравнение (3) при $n=1$ не имеет решений, кроме тривиального. Особый интерес представляет группа вращений, которая полностью является подгруппой группы Галилея—Ньютона. В теории представлений группы вращений разработан функционально-аналитический аппарат для матричных элементов представления и найдены инфинитезимальные операторы [4]:

$$L_1 = e^{-i\varphi_2} \left(\operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi_2} - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + i \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

$$L_2 = e^{i\varphi_2} \left(-\operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi_2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} + i \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

$$L_3 = i \frac{\partial}{\partial \varphi_2}.$$

Образовав оператор $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$, получаем уравнение, которому удовлетворяют элементы матрицы представления группы вращений

$$L^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1^2} - 2 \cos \theta \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_1 \partial \varphi_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi_2^2} \right) + l(l+1)U = 0. \quad (14)$$

Здесь $\varphi_1, \theta, \varphi_2$ — углы Эйлера, являющиеся параметрами группы вращений. Собственными функциями уравнения (14) будут обобщенные сферические функции

$$T_{mn}^l(\varphi_1, \theta, \varphi_2) = e^{-im\varphi_1} P_{mn}^l(\cos \theta) e^{-in\varphi_2}.$$

Для того чтобы решить краевую задачу инвариантно-групповым методом, необходимо записать уравнения системы так, чтобы комбинации членов уравнений составляли инфинитезимальные операторы выбранной группы преобразований при заданной параметризации в группе. Для этого введем новые неизвестные

$$V = v_r + iv_\theta; \quad U = v_r - iv_\theta$$

для уравнений, записанных в цилиндрической системе координат, и

$$V = -v_\varphi - iv_\theta; \quad U = v_\varphi - iv_\theta$$

для уравнений, записанных в сферической системе координат. Относительно новых неизвестных уравнения гидродинамики запишутся в следующем виде:

а) цилиндрическая система координат

$$\begin{aligned} & \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{V}{2} H_1(V) + \frac{U}{2} H_2(V) + v_z \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{(V-U)}{2r} V = \\ & = -\frac{1}{\rho} H_1(p) + \nu \left[H_1 H_2(V) + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{2i}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{V}{r^2} \right]; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{V}{2} H_2(U) + \frac{U}{2} H_1(U) + v_z \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{(U-V)}{2r} U = \\ & = -\frac{1}{\rho} H_2(p) + \nu \left[H_1 H_2(U) + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{2i}{r^2} \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{U}{r^2} \right]; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{V}{2} H_2(v_z) + \frac{U}{2} H_1(v_z) + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ & + \nu \left[H_1 H_2(v_z) + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right]; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\frac{1}{2} H_1(V) + \frac{1}{2} H_2(U) + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{U+V}{2z} = 0. \quad (18)$$

Здесь H_1, H_2 — инфинитезимальные операторы группы движений плоскости.

б) сферическая система координат

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{i}{2r} VL_5(v_r) + \frac{i}{2r} UL_6(v_r) + \frac{UV}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \\ + v \left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} L_9(v_r) - \frac{2v_r}{r^2} - \frac{i}{r^2} L_1(V) - \right. \\ \left. - \frac{i}{r^2} L_4(U) \right]; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} + v_r \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{i}{2r} VL_1(V) + \frac{i}{2r} UL_2(V) = \frac{i}{\rho r} L_6(p) + \\ + v \left[\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} L_7(V) - \frac{2i}{r^2} L_6(v_r) \right]; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + v_r \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{i}{2r} VL_3(U) + \frac{i}{2r} UL_4(U) = \frac{i}{\rho r} L_5(p) + \\ + v \left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} L_8(U) - \frac{2i}{r^2} L_5(v_r) \right]; \end{aligned} \quad (21)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} + \frac{i}{2r} L_1(V) + \frac{i}{2r} L_4(U) = 0. \quad (22)$$

Здесь L_j ($j=1, 2, \dots, 9$) — инфинитезимальные операторы группы вращений:

$$L_j = \frac{\partial}{\partial \theta} - (-1)^j \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + b_j \operatorname{ctg} \theta (\dots) \quad (j=1, 2, \dots, 6),$$

$$L_j = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + d_j \frac{2i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} - c_j \frac{(\dots)}{\sin^2 \theta}$$

$$(j=7, 8, 9);$$

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j=1; 4 \\ -1 & \text{при } j=2; 3 \\ 0 & \text{при } j=5; 6 \end{cases} \quad d_j = \begin{cases} -1 & \text{при } j=7 \\ 1 & \text{при } j=8 \\ 0 & \text{при } j=9 \end{cases}$$

$$c_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j=7; 8 \\ 0 & \text{при } j=9 \end{cases}$$

Подстановка рядов по функциям $f_n = (-i)^n e^{in\varphi} J_n(Rr) e^{inz}$ в уравнения (15) — (18) в силу указанных выше причин не приведет к разделению переменных, но ввиду того, что комбинации производных в системе (15) — (18) составляют инфинитезимальные операторы группы движений евклидовой плоскости, функции f_n не изменяются при подстановке в уравнения, и определяющая система относительно коэффициентов рядов может быть выписана после

проведения интегрирования по области решения подобно методу в работе [13]. Решение уравнений динамики атмосферы в виде рядов по обобщенным сферическим функциям приводит к эффекту разделения переменных во всех членах уравнений, что дает возможность эффективно решать задачи нелинейной динамики атмосферы в поле силы Кориолиса. Методы решения, основанные на указанном принципе, опубликованы в ряде работ автора [6—8].

Для четвертой подгруппы группы Галилея—Ньютона, т. е. группы преобразований к осям, движущимся поступательно с постоянной скоростью, нет разработанного аппарата теории представлений, что затрудняет ее применение для решения уравнений в спектральной форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. Катков В. Л. Один класс точных решений уравнения прогноза геопотенциала. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, т. 1, № 10, 1965.

2. Фалькович А. И. Инвариантно-групповые решения гидродинамической модели циркуляции атмосферы для экваториальной области. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, т. 4, № 6, 1968.

3. Рокотян В. Е. Некоторые инвариантно-групповые решения уравнений динамики атмосферы. Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, т. 4, № 3, 1968.

4. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. Физматгиз, 1965.

5. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. Физматгиз, 1965.

6. Ефимов В. А. Решение нелинейных уравнений динамики атмосферы на сфере. Метеорология и гидрология, № 5, 1968.

7. Ефимов В. А. Спектральная форма уравнений динамики атмосферы для системы обобщенных сферических функций. Метеорология и гидрология, № 8, 1969.

8. Ефимов В. А. Решение гидродинамических задач на сфере методом разделения переменных. Тр. ГГО, вып. 197, 1968.

9. Биркгоф Г. Гидродинамика. ИЛ, М., 1963.

10. Чеботарев Н. Г. Теория групп Ли. Гостехиздат, 1940.

11. Овсянников Л. В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1966.

12. Kubota S. Surface spherical harmonic representation of the system of equation for analysis. Papers in Meteorology and Geophysics, vol. 10, No. 3, 4, Tokyo, Japan, 1960.

13. Silbermann J. Planetary waves in the atmosphere. J. Meteor., vol. 11, No. 1, 1954.

К ЧИСЛЕННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ДИНАМИЧЕСКОГО РЕЖИМА АТМОСФЕРЫ В ВЫСОКИХ ШИРОТАХ ЮЖНОГО ПОЛУШАРИЯ

Особенностью математического моделирования динамики атмосферы над Антарктикой является существенное влияние нелинейного взаимодействия волновых возмущений. Для большей части года, когда полностью отсутствует приток радиации в коротковолновой области спектра и поверхность моря и суши покрыта равномерным ледяным покровом, атмосфера над Антарктикой подвергается равномерному выхолаживанию. Такая особенность радиационных полей не может оказать существенное влияние на циклогенез, и поэтому основной перенос энергии между волновыми возмущениями разных волновых чисел будет происходить за счет энергетического нелинейного взаимодействия и за счет орографических влияний. Следовательно, уравнения модели динамики атмосферы над Антарктикой должны детально учитывать нелинейные эффекты и эффект орографического влияния. Кроме того, необходимо учесть влияние стоковых ветров, которые существенны в районе побережья и переносят большие массы воздуха нисходящими движениями с материка к океану.

Одной из основных трудностей математического моделирования динамики атмосферы в полярных районах является наличие полюса, который в уравнениях, записанных в сферической системе координат, является особой точкой. Полюс очень важен в общей циркуляционной схеме в районе Антарктики, так как над ним проходят меридиональные траектории циклонов, пересекающих континент и выходящих из районов морей Уэдделла и Росса. Применение же прямоугольной системы координат с центром в полюсе искажает значения неизвестных на границах области в районах более низких широт ввиду неучета сферичности Земли и приводит к необходимости ставить краевые условия гораздо ближе к полюсу, а не в районе экватора, как это обычно делается в математических моделях циркуляции атмосферы на полушарии. Исключение из рассмотре-

ния хорошо освещенных районов низких широт было бы неоправданным. (Особенно важно детально учесть влияние Кордильер.)

Ввиду относительно малого влияния таких факторов, как неоднородность подстилающей поверхности южнее 55° ю. ш., нелинейное взаимодействие и орографические влияния будут основными действующими факторами. Учет длинноволнового излучения важен лишь при прогнозе на долгие сроки. Учет коротковолновой радиации важен в летнюю часть года и в первом приближении может быть учтен с помощью известных формул для случая безоблачного неба.

С достаточной точностью можно описать движение атмосферы над Антарктикой в рамках обобщенной баротропной модели при условии учета вертикальных движений в нижних слоях атмосферы. Уравнения динамики атмосферы для эквивалентно-баротропного уровня имеют вид:

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\theta}{aA} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{aA \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - \frac{v_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta}{aA} - 2\omega \cos \theta v_\varphi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + N_\theta; \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{v_\theta}{aA} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{v_\varphi}{aA \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta v_\varphi \operatorname{ctg} \theta}{aA} + 2\omega \cos \theta v_\theta = -\frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + N_\varphi; \quad (2)$$

$$-\frac{\rho_0 g}{\rho_0} \omega_s + \frac{\rho_0}{\rho_0} B \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{a} = 0; \quad (3)$$

где v_θ , v_φ — проекции скорости на оси сферической системы координат; θ — дополнение широты; φ — долгота; ω_s — аналог вертикальной скорости, обусловленной рельефом и стоковыми ветрами; Φ — геопотенциал; ω — угловая скорость вращения Земли; ρ_0 и P_0 — плотность и давление воздуха на уровне моря; a — радиус земного шара; A и B — постоянные [2]; N_θ , N_φ — члены, характеризующие влияние макротурбулентного перемешивания.

Учет турбулентного перемешивания необходим, так как в уравнениях фигурируют члены, содержащие вертикальные скорости, возникающие из-за влияния орографии и стоковых ветров, которые увеличивают кинетическую энергию, и для сохранения баланса полной энергии необходимо учесть крупномасштабную вязкость, которая ответственна за сток кинетической энергии.

Члены N_θ и N_φ могут быть найдены в явном виде из уравнений Рейнольдса, полученных осреднением уравнений динамики атмосферы в сферической системе координат. При этом возникают осложнения в связи с тем, что масштабы по горизонтальной и вертикальной координате существенно разные, и поэтому турбулентный

обмен по вертикали и горизонтали характеризуется турбулентными вихрями существенно разного масштаба. Заметим, что при выводе уравнений Рейнольдса для задач планетарной динамики атмосферы эффектом сжимаемости газа можно пренебречь. Тогда силы трения можно представить в виде

$$N_{\theta} = \frac{\overline{\partial v'_{\theta} v'_r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\overline{\partial v'^2_{\theta}}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\overline{\partial v'_{\theta} v'_{\varphi}}}{\partial \varphi} - \frac{v'^2_{\varphi} \operatorname{ctg} \theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\overline{v'_{\theta} v'_r}}{v'_{\theta} v'_r} + \frac{v'^2_{\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r}, \quad (4)$$

$$N_{\varphi} = \frac{\overline{\partial v'_r v'_{\varphi}}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\overline{\partial v'_{\theta} v'_{\varphi}}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\overline{\partial v'^2_{\varphi}}}{\partial \varphi} + \frac{\overline{v'_{\theta} v'_{\varphi}}}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{r} \frac{\overline{v'_{\varphi} v'_r}}{v'_{\varphi} v'_r} + \frac{v'_{\varphi} v'_r}{r} \operatorname{ctg} \theta, \quad (5)$$

где штрихами обозначены пульсации скорости. Трактруя турбулентность как вихревую вязкость, компоненты тензора турбулентных напряжений представим подобно вязким напряжениям:

$$\begin{aligned} \overline{v'_{\theta} v'_r} &= k_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}}{r} \right) + k_2 \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r}, \\ \overline{v'_{\varphi} v'_r} &= k_1 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{v_{\varphi}}{r} \right) + k_2 \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r}; \\ \overline{v'^2_{\theta}} &= 2k_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} + \frac{v_r}{r} \right); \\ \overline{v'^2_{\varphi}} &= 2k_1 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_{\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} \right); \\ \overline{v'_{\theta} v'_{\varphi}} &= k_1 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \theta} - \frac{v_{\varphi} \operatorname{ctg} \theta}{r} \right). \end{aligned}$$

Здесь k_1 — коэффициент турбулентного перемешивания по горизонтали, k_2 — коэффициент турбулентного перемешивания по вертикали.

В отличие от компонент тензора вязких напряжений, компоненты тензора турбулентных напряжений $\overline{v'_r v'_{\theta}}$ и $\overline{v'_r v'_{\varphi}}$ имеют два разных коэффициента вихревой вязкости k_1 и k_2 . Различие между k_1 и k_2 существенно ввиду отличия горизонтального и вертикального масштабов осреднения в задачах планетарной динамики. Подставляя значения компонент тензора турбулентных напряжений в соотношения (4) — (5) и учтя, что эффектом сжимаемости при

выводе уравнений Рейнольдса можно пренебречь, т. е. что $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, получим:

$$N_{\theta} = k_2 \left(\frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial r} \right) + k_1 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \varphi^2} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_{\theta}}{r^2 \sin^2 \theta} \right); \quad (6)$$

$$N_{\varphi} = k_2 \left(\frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial r} \right) + k_1 \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + \right. \\ \left. + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \varphi} - \frac{v_{\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (7)$$

Записав соотношения (6) — (7) в изобарической системе координат и проведя преобразования членов для эквивалентно-баротропного уровня, получим окончательные выражения:

$$N_{\theta} = \frac{k_1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{v_{\theta}}{\sin^2 \theta} \right); \quad (8)$$

$$N_{\varphi} = \frac{k_1}{a^2} \left(\frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_{\varphi}}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial v_{\varphi}}{\partial \theta} + \right. \\ \left. + \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \varphi} - \frac{v_{\varphi}}{\sin^2 \theta} \right). \quad (9)$$

Для эквивалентно-баротропного уровня эффектом гурбулентного перемешивания по вертикали можно пренебречь, так как этот эффект важен в пограничном слое атмосферы и на высоте 500 мб (приблизительная высота эквивалентно-баротропного уровня) мал по сравнению с крупномасштабной вязкостью.

Для решения уравнений (1) — (3) удобно применить метод спектральных разложений на базе обобщенных сферических функций [2—4]. Как показано в работах [2, 3], применение аппарата обобщенных сферических функций позволяет достаточно полно учесть эффекты нелинейного взаимодействия волновых возмущений и детально описать влияние макротурбулентного перемешивания, так как подстановка указанных функций в соотношении (8) — (9) приводит к разделению переменных. Кроме того, решение на базе обобщенных сферических функций в районе полюса учитывает особую точку в уравнениях движения, как и другие спектральные методы решения, основанные на применении рядов по сферическим функциям $e^{in\varphi} \cdot P_n^m(\cos \theta)$, где $P_n^m(\cos \theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра [7]. Но система обобщенных сферических функций отличается от присоединенных полиномов Лежандра тем свойством, что большой набор этих функций не равен нулю в точке полюса, а все полиномы Лежандра обращаются в нуль в точке

полюса, за исключением $P_0^0 = 1$. Поэтому при разложении функции в ряд по присоединенным полиномам Лежандра ее значение в точке полюса равно значению коэффициента при P_0^0 . Обобщенные сферические функции не обращаются в нуль в точке полюса для целого ряда индексов, так как

$$P_{m, -m}^l(\cos 180^\circ) = (-1)^l. \quad (10)$$

Эти свойства функций позволяют непосредственно находить элементы движения атмосферы в самой точке полюса, так как коэффициенты при функциях (10) зависят от времени. Следуя [2, 3], ищем решение уравнений (1) — (3) в виде рядов по обобщенным сферическим функциям T_{mn}^l :

$$\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l \Phi_{l,n}(t) T_{0n}^l(\theta, \varphi), \quad (11)$$

$$V = -v_\varphi - iv_\theta = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-l}^l V_{l,n}(t) T_{1n}^l(\theta, \varphi), \quad (12)$$

$$U = v_\varphi - iv_\theta = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-l}^l U_{l,n}(t) T_{-1n}^l(\theta, \varphi). \quad (13)$$

В рядах (11) — (13) функции T_{00}^l , T_{1-1}^l , T_{-11}^l не равны нулю в полюсе, и значения коэффициентов $\Phi_{l,0}(t)$, $V_{l,-1}(t)$, $U_{l,1}(t)$ как функций времени позволяют определить элементы движения в полюсе. Для решения уравнений (1) — (3) в спектральной форме необходимо w_s также задать в виде ряда по T_{0n}^l :

$$w_s = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l w_{l,n} T_{0n}^l(\theta, \varphi). \quad (14)$$

Используя методику, изложенную в [2, 3], получим следующую систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов (11) — (13):

$$\begin{aligned} V_{l,n} &= x_{l,n} + iy_{l,n}; & U_{l,n} &= z_{l,n} + iu_{l,n}; \\ \Phi_{l,n} &= p_{l,n} + ir_{l,n}; \end{aligned}$$

причем

$$w_{l,n} = v_{l,n} + is_{l,n}. \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dx_{l,n}}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=-q}^q \sigma [c(k, q, l; -1, 2, 1) \times \\ \times \frac{V(q+2)(q-1)}{2\alpha A} (z_{k,s} x_{q,j} - u_{k,s} y_{q,j}) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + c(k, q, l; 1, 0, 1) \frac{\sqrt{q(q+1)}}{2aA} (x_{k,s} x_{q,j} - y_{k,s} y_{q,j}) \Big] + \\
& + 2\omega \left[\frac{n}{l(l+1)} y_{l,n} + \frac{\sqrt{(l+n)(l-n)(l+1)(l-1)}}{(2l-1)l} y_{l-1,n} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{(l+n+1)(l-n+1)(l+2)l}}{(l+1)(2l+3)} y_{l+1,n} \right] = \\
& = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{a} p_{l,n} - \frac{k_1}{a^2} l(l+1) x_{l,n}; \tag{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dy_{l,n}}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=-q}^q \sigma \left[c(k, q, l; -1, 2, 1) \times \right. \\
& \quad \times \frac{\sqrt{(q+2)(q-1)}}{2aA} (x_{q,j} u_{k,s} + z_{k,s} y_{q,j}) + \\
& \quad \left. + c(k, q, l; 1, 0, 1) \frac{\sqrt{q(q+1)}}{2aA} (x_{k,s} y_{q,j} + x_{q,j} y_{k,s}) \right] - \\
& - 2\omega \left[\frac{n}{l(l+1)} x_{l,n} + \frac{\sqrt{(l+n)(l-n)(l+1)(l-1)}}{(2l-1)l} x_{l-1,n} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{(l+n+1)(l-n+1)(l+2)l}}{(l+1)(2l+3)} x_{l+1,n} \right] = \\
& = \frac{\sqrt{l(l+n)}}{a} r_{l,n} - \frac{k_1}{a^2} l(l+1) y_{l,n}; \tag{17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{dz_{l,n}}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=-q}^q \sigma \left[c(k, q, l; 1, 0, 1) (-1)^{l-q-k} \times \right. \\
& \quad \times \frac{\sqrt{q(q+1)}}{2aA} (z_{k,s} z_{q,j} - u_{k,s} u_{q,j}) + c(k, q, l; -1, 2, 1) (-1)^{l-q-k} \times \\
& \quad \times \frac{\sqrt{(q+2)(q-1)}}{2aA} (x_{k,s} z_{q,j} - y_{k,s} u_{q,j}) \Big] - 2\omega \left[-\frac{n}{l(l+1)} u_{l,n} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{(l+n)(l-n)(l+1)(l-1)}}{(2l-1)l} u_{l-1,n} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\sqrt{(l+n+1)(l-n+1)(l+2)l}}{(l+1)(2l+3)} u_{l+1,n} \right] = \\
& = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{a} p_{l,n} - \frac{k_1}{a^2} l(l+1) z_{l,n}; \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{du_{l,n}}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=-q}^q \sigma \left[c(k, q, l; 1, 0, 1) (-1)^{l-k-q} \times \right. \\
& \times \frac{\sqrt{q(q+1)}}{2aA} (z_{k,s} u_{q,j} + u_{k,s} z_{q,j}) + c(k, q, l; -1, 2, 1) \times \\
& \times (-1)^{l-q-k} \frac{\sqrt{(q+2)(q-1)}}{2aA} (x_{k,s} u_{q,j} + y_{k,s} z_{q,j}) \left. \right] + \\
& + 2\omega \left[-\frac{n}{l(l+1)} z_{l,n} + \frac{\sqrt{(l+n)(l-n)(l+1)(l-1)}}{(2l-1)l} z_{l-1,n} + \right. \\
& \left. + \frac{\sqrt{(l+n+1)(l-n+1)(l+2)l}}{(l+1)(2l+3)} z_{l+1,n} \right] = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{a} r_{l,n} - \\
& - \frac{k_1}{a^2} l(l+1) u_{l,n}; \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\rho_0 g}{P_0} B \frac{dp_{l,n}}{dt} - \frac{\rho_0 g}{P_0} v_{l,n} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2a} (z_{l,n} + x_{l,n}) = 0; \\
& \frac{\rho_0 g}{P_0} B \frac{dr_{l,n}}{dt} - \frac{\rho_0 g}{P_0} s_{l,n} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2a} (u_{l,n} + y_{l,n}) = 0. \tag{20}
\end{aligned}$$

Здесь $c(k, q, l; i, j, i+j)$ — коэффициенты Клебша—Гордана [8],

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{при } s+j \neq n; \quad l < |k-q|; \quad l > k+q \\ c(k, q, l; s, j, s+j) & \text{при } s+j = n; \quad |k-q| \leq l \leq k+q \end{cases}$$

Ввиду того, что решается одноуровневая задача, задание краевых условий по вертикали не требуется. На экваторе задается краевое условие равенства нулю потока массы воздуха.

Необходимо определить начальные условия для системы уравнений (15)—(20). Начальные значения для $p_{l,n}$ и $r_{l,n}$ можно получить как результат разложения в ряд по T_{0n}^l начального поля Φ на поверхности 500 мб по формулам [4, 8]:

$$\begin{aligned}
p_{l,n} &= \frac{(-1)^{-n} (2l+1)}{4\pi} \delta \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f_1 d\theta d\varphi; \\
r_{l,n} &= \frac{(-1)^{-n} (2l+1)}{4\pi} \delta \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f_2 d\theta d\varphi; \tag{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1 &= \Phi(\theta, \varphi) \cos n\varphi P_{0n}^l(\cos \theta) \sin \theta; \\
f_2 &= \Phi(\theta, \varphi) \sin n\varphi P_{0n}^l(\cos \theta) \sin \theta; \tag{22}
\end{aligned}$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0 \\ 2 & \text{при } n \neq 0 \end{cases}$$

$$P_{mn}^l(\cos \theta) = i^{-m-n} \sqrt{\frac{(l-m)!(l-n)!}{(l+m)!(l+n)!}} \left(\frac{1+\cos \theta}{1-\cos \theta}\right)^{\frac{m+n}{2}} \times$$

$$\times \sum_{j=\max(m,n)}^l \frac{(l+j)!(-1)^j}{(l-j)!(j-m)!(j-n)!} \left(\frac{1-\cos \theta}{2}\right)^j. \quad (23)$$

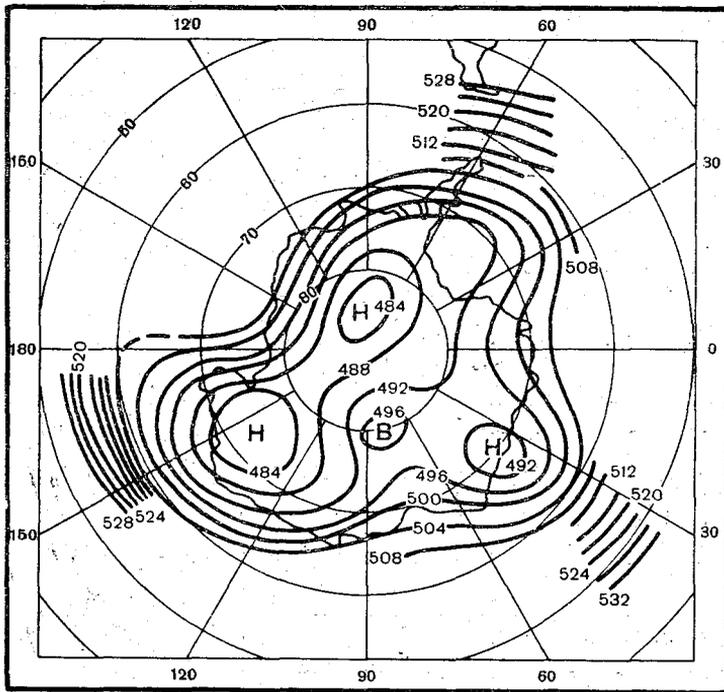


Рис. 1. Среднемесячная карта AT_{500} за июнь 1957, 1958 гг. [1].

Каждый член ряда определяется двумя коэффициентами, $p_{l,n}$ и $r_{l,n}$. Разложенное начальное поле может быть рассчитано по следующей формуле:

$$\Phi = R_e \left[\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l i^{-n} (p_{l,n} + i r_{l,n}) (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) N_{0n}^l(\cos \theta) \right], \quad (24)$$

где

$$P_{0n}^l = i^{-n} N_{0n}^l.$$

Ввиду того, что интегралы в (21) — (22) берутся по всей поверхности сферы, значения функции $\Phi(\theta, \varphi)$ в северном полушарии

удобно задать постоянной величиной. При расчетах вместо функции Φ_{500} рассматривалось поле отклонений

$$\Phi'_{500} = \Phi_{500} - 5800. \quad (25)$$

Для всего северного полушария принималось $\Phi'_{500} = 0$. Такое задание Φ'_{500} отвечает краевым условиям скольжения, соответствующим

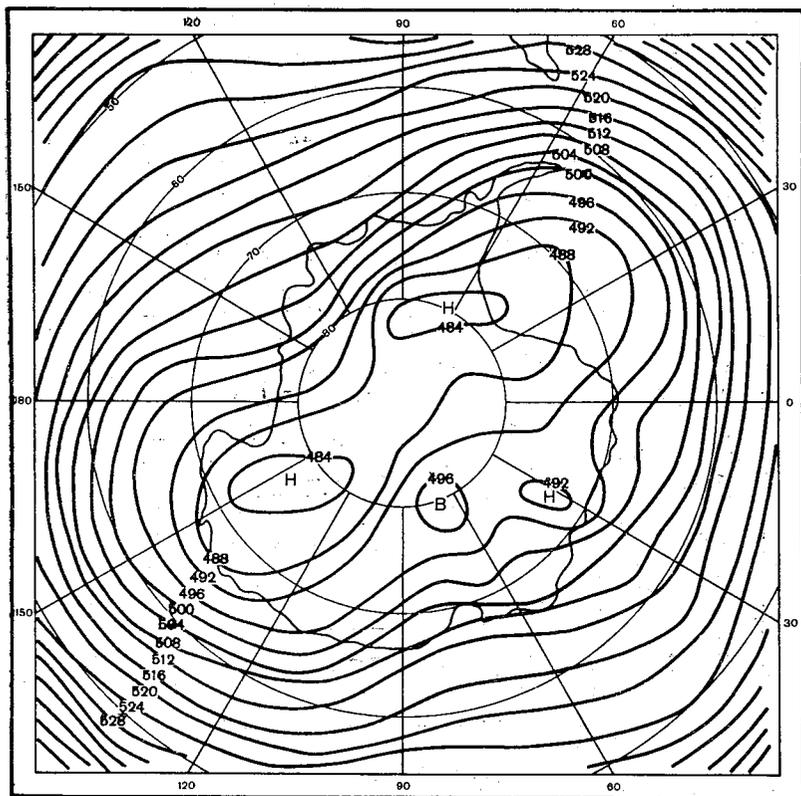


Рис. 2. Разложение поля Φ_{500} за июнь 1957, 1958 гг.

заданию «стенки» на экваторе. Поэтому кубатуры в формулах (21) — (22) могут быть рассчитаны только по южному полушарию. Затем в формуле (24) полагаем $p_{00} = p'_{00} + 5800$. Интегралы (21) — (22) считались по формуле Симпсона для сетки точек через 10° по кругу широты и через 5° по меридиану. Функции (23) при этом необходимо хранить в памяти машины для ускорения расчетов. На рис. 1 и 2 представлен один из примеров реального и разложенного полей.

Разложения в ряд начальных полей проводились до $l=9$, т. е. учитывалось 100 членов ряда. Такое количество членов ряда достаточно, чтобы детально описать начальное поле. Решение ищется в виде ряда с учетом возмущений с волновым числом 9. Более мелкие волновые возмущения учитывать нет необходимости. Но при этом надо иметь в виду, что за счет нелинейного взаимодействия будет утечка энергии от волновых возмущений с малыми волно-

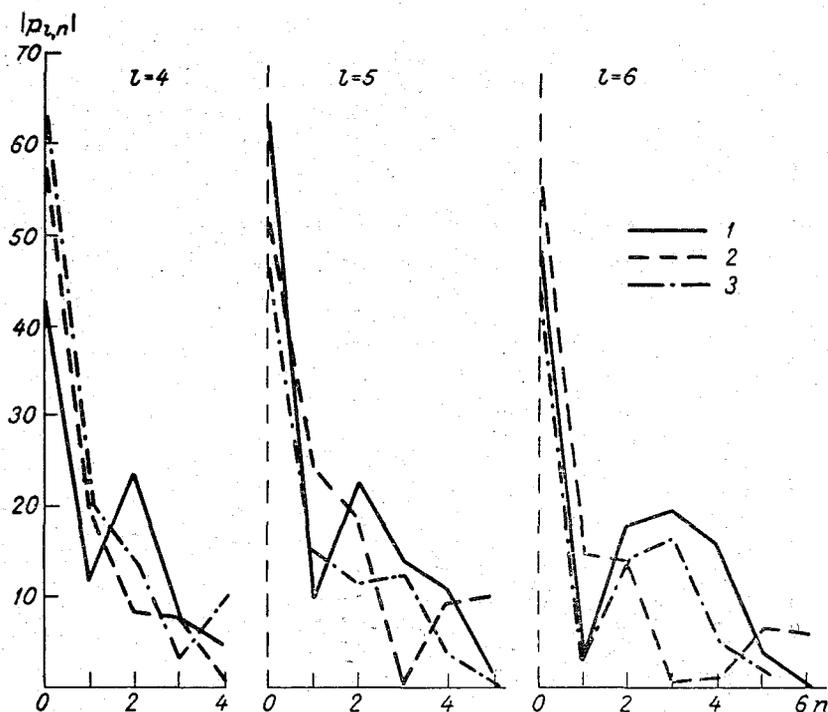


Рис. 3. Модули величин коэффициентов спектра при фиксированных значениях волнового числа l .

1 — май, 2 — июнь, 3 — июль.

выми числами в сторону волновых возмущений с большими волновыми числами. Эта утечка энергии может рассматриваться как энергия диссипации, которая дополнительно с турбулентной вихревой вязкостью приводит к стоку энергии. Чтобы компенсировать этот сток энергии, полагаем существующим постоянно устойчивый западный перенос в районе широт $45-60^\circ$ ю. ш., что соответствует реальным условиям [1]. Учет в модели устойчивого западного переноса достигается фиксацией определенных коэффициентов разложения полей неизвестных в ряды (11) — (13). Движения волновых возмущений во внутренних районах Антарктики южнее 60° ю. ш. и в районе $40-90^\circ$ з. д., где сказывается существенное влияние

Южно-Американского материка, без ограничения по широте, описывается как возмущения, наложенные на западный перенос, который может быть задан двумя-тремя фиксированными коэффициентами.

На рис. 3 представлено распределение величин коэффициентов спектра для волновых возмущений по кругу широты при фиксированных значениях волнового числа l . Из рис. 3 видно, что в основном преобладают возмущения с $n=0$ и в мае возрастает роль волнового возмущения с $n=2$. Причем такая закономерность прослеживается для всех приведенных волновых возмущений по меридиану, т. е. для l , равного 4, 5, 6. Для волновых возмущений с $l < 4$ прослеживается та же закономерность. Для l , равного 8, 9, указанной закономерности не наблюдается, так как эти волновые возмущения

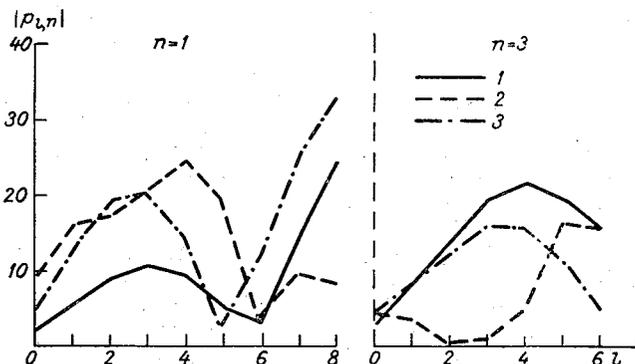


Рис. 4. Модули величин коэффициентов спектра для разных волновых чисел.

1 — май, 2 — июнь, 3 — июль.

в сильной степени зависят от конкретной ситуации в данный момент времени.

На рис. 4 представлено распределение величин коэффициентов спектра для разных волновых чисел l при фиксированном n . Из анализа рис. 3 и 4 можно заключить, что волновые возмущения с $|n|=0$ и $|n|=1$ наиболее устойчивы во времени. Погодные процессы будут характеризоваться волновыми возмущениями начиная с $n=2$ и больше. Для $n=2$ это хорошо видно на рис. 3, где в мае резко выражен максимум коэффициента $\rho_{l,2}$ для всех возмущений по меридиану. Большие значения $\rho_{l,0}$ объясняются устойчивым западным переносом, который описывается гармониками с $n=0$.

В связи с вышесказанным можно заключить, что при гидродинамическом прогнозе в высоких широтах южного полушария погодообразующие процессы будут характеризоваться возмущениями с волновым числом $|n| > 2$ и $l > 3$. Поэтому основной задачей численного моделирования динамики атмосферы над Антарктикой является изучение движения различных волновых возмущений на фоне основного состояния, которое определяется по указанной методике из средних месячных карт абсолютной топографии.

Для интегрирования системы уравнений (15) — (20) необходимо задание начальных значений коэффициентов $x_{l,n}$, $y_{l,n}$, $z_{l,n}$, $u_{l,n}$, которые характеризуют поле ветра. Получение этих коэффициентов из разложений в ряды по T_{ln}^l и T_{-ln}^l реальных полей ветра затруднительно из-за трудности определения v_0 и v_φ . Поэтому ветер в начальном поле можно считать геострофическим, и тогда коэффициенты $V_{l,n}^{(0)}$ могут быть найдены из решения следующей системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей [3]:

$$-2\omega i \left[V_{l,n'}^{(0)} \frac{n'}{l(l+1)} + V_{l-1,n'}^{(0)} \frac{V(l+n')!(l-n')!(l+1)!(l-1)!}{(2l-1)l} + \right. \\ \left. + V_{l+1,n'}^{(0)} \frac{V(l+n'+1)(l-n'+1)(l+2)l}{(l+1)(2l+3)} \right] = \frac{Vl(l+1)}{a} \Phi_{l,n'}^{(0)}, \quad (26)$$

где $\Phi_{l,n'}^{(0)}$ — коэффициенты разложения начального поля Φ в ряд $n' = -n, -n+1, \dots, 0, 1, \dots, n-1, n$. Матрица системы (25) трехдиагональная по индексу l . Исходя из этого для определения коэффициентов $V_{l,n}^{(0)}$ систему (26) можно разбить на $2n+1$ подсистем с трехдиагональной матрицей. Элементы матрицы системы (25) и столбца свободных членов — комплексные числа, что приводит к необходимости отделить мнимую и вещественную части при решении. Имея коэффициенты $V_{l,n}^{(0)}$, коэффициенты $U_{l,n}^{(0)}$ можно определить из уравнения неразрывности для соленоидального потока

$$V_{l,n}^{(0)} = -U_{l,n}^{(0)}.$$

Для интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (15) — (20) можно применить любой из численных методов. Для прогноза до двух-трех суток достаточно применить метод Эйлера [9, 10]. Для более длительных сроков можно применить иной метод, например метод Хойна [6].

При интегрировании систем (15) — (20) на ЭВМ необходимо хранить в памяти заранее просчитанные значения следующих коэффициентов:

$$\sigma; c(k, q, l; -1, 2, 1) \frac{V(q+2)(q-1)}{2aA};$$

$$c(k, g, l; 1, 0, 1) \frac{Vq(q+1)}{2aA},$$

где коэффициенты Клебша—Гордана просчитываются по формуле

$$c(l_1, l_2, l; j, k, j+k) = \\ = \sqrt{\frac{(2l+1)(l_1+j)!(l-j+k)!(l-l_1+l_2)!(l_1+l_2-l)!(l_1+l_2+l+1)!}{(l_1-j)!(l_2+k)!(l_2-k)!(l+j+k)!(l+l_1-l_2)!}} \times$$

$$\times \sum_{s=\max(j+k, l_1-l_2)}^l (-1)^{l_1+k-s} \times$$

$$\times \frac{(l+s)!(l_2+s-j)!}{(l-s)!(s-j-k)!(s-l_1+l_2)!(l_1+l_2+l+1)!}$$

Изложенная методика решения уравнений планетарной динамики применительно к моделированию динамического режима атмосферы в высоких широтах южного полушария позволяет поставить ряд численных экспериментов для изучения движения барических образований в районе Антарктики. В этих экспериментах особо важной деталью является изучение эффектов нелинейного взаимодействия волновых возмущений. Но совпадения результатов численного прогноза с реальностью можно добиться лишь путем многочисленных экспериментов по выделению стационарных волновых возмущений на общем фоне начального поля геопотенциала, на которых, как на заданном фоне, будут развиваться погодообразующие процессы, в частности процессы цикло- и антициклонеза; существенным является также совместное исследование влияния на динамику орографии и нелинейных эффектов. Движение атмосферы над Антарктикой можно рассматривать в каком-то роде как изолированную систему автоколебаний данной части атмосферы, импульсной силой в которой будут возмущения в западном переносе севернее 60° ю. ш., что позволит изучить нелинейные автоколебания атмосферы в этом районе с достаточной близостью к природной реальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Астапенко П. Д. Атмосферные процессы в высоких широтах южного полушария. Изд. АН СССР, Л., 1960.
2. Ефимов В. А. Решение нелинейных уравнений динамики атмосферы на сфере. Метеорология и гидрология, № 5, 1968.
3. Ефимов В. А. Спектральная форма уравнений динамики атмосферы для системы обобщенных сферических функций. Метеорология и гидрология, № 8, 1969.
4. Ефимов В. А. Спектральное разложение векторных полей ветра. Тр. ГГО, вып. 236, 1969.
5. Хинце И. О. Турбулентность. Физматгиз, 1962.
6. Лилли Д. К. О вычислительной устойчивости численных решений нестационарных нелинейных геофизических задач динамики жидкости. Сб. «Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана». Гидрометеоиздат. Л., 1968.
7. Блинова Е. Н. Гидродинамическая теория волн давления, температурных волн и центров действия атмосферы. ДАН СССР, т. 39, № 7, 1943.
8. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. Физматгиз, 1965.
9. Baer F., Platzman G. W. A procedure for numerical integration of the spectral vorticity equations. J. Meteor., vol. 18, No. 3, 1961.
10. Robert A. J. The integration of a low-order spectral form of the primitive meteorological equations. J. Meteor. Soc. Japan, Ser. 11, vol. 44. No., 5, 1966.

ОБ УТОЧНЕНИИ ОДНОЙ ЧИСЛЕННОЙ СХЕМЫ ЦИРКУЛЯЦИИ В МЕЗОСФЕРЕ

Численные эксперименты по циркуляции в высоких слоях атмосферы представляют большой интерес с точки зрения интерпретации довольно обширной информации об этих слоях, полученной в последнее время в связи с использованием ракет и искусственных спутников земли. Работы в этом направлении необходимы для физического обоснования основных закономерностей циркуляции и термического режима атмосферы.

Среди немногочисленных исследований, посвященных данной проблеме, следует отметить статью Лиови [7], в которой представлена теоретическая схема основных особенностей общей циркуляции атмосферы на высотах порядка 40—80 км. Несколько моделей, предложенных в [7], дали возможность получить меридионально-вертикальные разрезы зональной, меридиональной и вертикальной составляющих скорости ветра и температуры для северного и южного полушарий.

В данной работе схема Лиови развивается с целью приспособления ее для различного рода численных экспериментов по циркуляции верхней атмосферы и, в частности, для расчетов моделей с более сложным, чем в [7], пространственным распределением притоков тепла.

Лиови исходил из следующей системы уравнений, записанной в изобарическо-сферической системе координат:

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} - \left(2\Omega + \frac{\bar{u}}{a \cos \varphi} \right) \bar{v} \sin \varphi = -F(\varphi, \pi, t),$$

$$- \left(2\Omega + \frac{\bar{u}}{a \cos \varphi} \right) \bar{u} \sin \varphi = \frac{1}{a} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial \pi} - \frac{R}{H} \bar{T} = 0,$$

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\bar{v} \cos \varphi) + e^{\pi/H} \frac{\partial}{\partial \pi} (e^{-\pi/H} \bar{w}) = 0,$$

$$\frac{D\bar{T}}{Dt} + \bar{w} \frac{R}{c_p H} \bar{T} = \frac{\bar{q}_n}{c_p} - C(\varphi, \pi, t), \quad (1)$$

где $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \bar{w} \frac{\partial}{\partial \pi}$; $\pi(p) = -H \ln\left(\frac{p}{p_s}\right)$ — вертикальная координата; $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} = \left(\frac{D\pi}{\partial t}\right)$, $\bar{T}, \bar{\Phi}$ — зональная, меридиональная, вертикальная скорости ветра, температура и геопотенциал соответственно, осредненные по долготе; Ω — угловая скорость вращения Земли; a — радиус земного шара; R — газовая постоянная для сухого воздуха; c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении для сухого воздуха; члены F и C описывают турбулентный перенос количества движения и тепла соответственно; q_n — радиационный приток тепла на единицу массы; H — высота однородной атмосферы; φ — широта; t — время.

В [7] система (1) путем целого ряда преобразований (переход к безразмерным переменным, разложение переменных по степеням параметра ε , $u = u_1 \varepsilon + \dots$; $v = v_1 \varepsilon + \dots$; $w = w_1 \varepsilon + \dots$; $T = T_1 \varepsilon + \dots$; $q = q_1 \varepsilon$, где $\varepsilon = \max |q| = R(4\Omega^2 a^2 \sigma c_p)^{-1} \cdot \max |q^l|$ — безразмерная амплитуда внешнего радиационного нагревания q_l , введением аналога функции тока ψ_r и т. д.) сводится к решению линейного уравнения

$$R_s P \left(\frac{1 - Y^2}{Y^2} \right) \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial^2 \psi_r}{\partial Z^2} - \frac{\partial \psi_r}{\partial Z} \right) = P \left(\frac{1 - Y^2}{Y^2} \right) \frac{\partial q}{\partial Y}, \quad (2)$$

где P — число Прандтля, R_s — параметр статической устойчивости, определяемый по следующей формуле:

$$R_s = (4\Omega^2 a^2 T_0)^{-1} g H^2 \left(\frac{R T_0}{c_p H} + \frac{dT_0}{d\pi} \right)$$

(здесь g — ускорение силы тяжести). При выводе уравнения (2) вводились следующие обозначения: $w = \frac{\partial \psi_r}{\partial Y} \varepsilon$, $v = -\left(\frac{\partial \psi_r}{\partial Z} - \psi_r\right) \varepsilon$. Уравнение (2) записано в безразмерных переменных, определяемых следующим образом:

$$\begin{aligned} Z &= H^{-1} \pi, & Y &= \sin \varphi, & w &= (H\sigma)^{-1} \bar{w}, \\ u &= (2\Omega a)^{-1} (\cot \varphi) \bar{u}, & v &= (a\sigma)^{-1} (\cot \varphi) \bar{v}, \\ q &= (4\Omega^2 a^2 \sigma c_p)^{-1} R q_l. \end{aligned}$$

В [7] решение уравнения (2) ищется в виде ряда

$$\psi_r = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_m(Y) \psi_m(Z). \quad (3)$$

Тогда, если приток тепла q задать в форме

$$q = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(Z) \frac{d\eta_m}{dY} \quad (4)$$

и если функции $\eta_m(Y)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{d^2\eta_m}{dY^2} = - \frac{L_m^2 Y^2}{(1-Y^2)} \eta_m, \quad (5)$$

где L_m^2 — собственные числа, то относительно $\psi_m(Z)$ может быть получено обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^2\psi_m}{dZ^2} - \frac{d\psi_m}{dZ} - R_s P L_m^2 \psi_m = -L_m^2 P S_m, \quad (6)$$

которое решается при следующих краевых условиях:

$$\psi_m = 0 \text{ при } Z = 0; \quad e^{-Z}\psi_m \rightarrow 0 \text{ при } Z \rightarrow \infty.$$

Для определения собственных функций $\eta_m(Y)$ и собственных чисел L_m^2 введем подстановку

$$\eta_m = (1 - Y^2) F_m(Y), \quad (7)$$

в результате получим уравнение

$$(Y^2 - 1) \frac{d^2 F_m}{dY^2} + 4Y \frac{dF_m}{dY} + (2 - L_m^2 Y^2) F_m = 0. \quad (8)$$

В работе [7] приведены без вывода лишь значения двух собственных чисел и собственных функций. В настоящей работе ставилась задача рассчитать набор собственных функций η_m и их производных для более полного представления притока тепла q в форме (4). Заметим, что в рассматриваемой первой модели Лиови не составил схему расчета коэффициентов ряда (4), а лишь аппроксимировал приток q первым членом ряда (4), причем коэффициент подобран им таким образом, чтобы получаемые максимальные значения q на полюсах соответствовали исходным. Представление же q в виде ряда (4) дает возможность более точно передать конфигурацию поля q .

Уравнение (8) напоминает уравнение Гегенбауэра

$$(y^2 - 1) \frac{dT'_n}{dy^2} + 4y \frac{dT'_n}{dy} - (n^2 + 3n) T'_n = 0,$$

где T'_n — полиномы Гегенбауэра. Поэтому будем искать собственные функции уравнения (8) в виде ряда по полиномам Гегенбауэра

$$F_m(Y) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n T'_n(Y). \quad (9)$$

Воспользуемся рекуррентной формулой для полиномов Гегенбауэра

$$Y^2 T'_n = \frac{(n+1)(n+2)}{(2n+3)(2n+5)} T'_{n+2} + \left[\frac{(n+1)(n+3)}{(2n+3)(2n+5)} + \frac{n(n+2)}{(2n+3)(2n+1)} \right] T'_n + \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+1)} T'_{n-2}.$$

Тогда, заменив член $L_m^2 Y^2 F_m$ согласно этой формуле, получим рекуррентную формулу для коэффициентов ряда (9):

$$\begin{aligned} & -L_m^2 \frac{n(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} a_{n-2} + \left[(2+n^2+3n) - \right. \\ & \left. - \frac{L_m^2 (n+1)(3+n)(2n+1) + n(2+n)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \right] a_n - \\ & - L_m^2 \frac{(n+3)(n+4)}{(2n+5)(2n+7)} a_{n+2} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для нахождения коэффициентов a_n необходимо найти собственные числа L_m^2 и собственные векторы $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ линейной алгебраической системы (10) с трехдиагональной матрицей. Решение такой системы проводится по методу непрерывных дробей [2].

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{(n-1)n(2n+5)(2n+7)}{(4n^2-1)(n+3)(n+4)}, \\ c_n &= \left[(2+n^2+3n) - L_m^2 \frac{(n+1)(n+3)(2n+1) + n(n+2)(2n+5)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \right] \times \\ & \times \frac{(2n+5)(2n+7)}{L_m^2 (n+3)(n+4)}. \end{aligned}$$

Тогда систему (10) запишем следующим образом:

$$b_n a_{n-2} - c_n a_n + a_{n+2} = 0$$

или

$$N_{n+2} = c_n - \frac{b_n}{N_n}, \quad (11)$$

где

$$N_{n+2} = \frac{a_{n+2}}{a_n}.$$

Уравнение (11) примет вид

$$N_n = \frac{b_n}{c_n - N_{n+2}}. \quad (12)$$

Таким образом, уравнение (11) свели к непрерывной дроби.

Сходимость непрерывной дроби (12) легко проверяется. В результате получаем следующие формулы для определения N с четными и нечетными индексами:

$$N_2 = \frac{b_2}{c_2 - \frac{b_4}{c_4 - \frac{b_6}{c_6 - \dots - \frac{b_n}{c_n - N_{n+2}}}}} \quad (13)$$

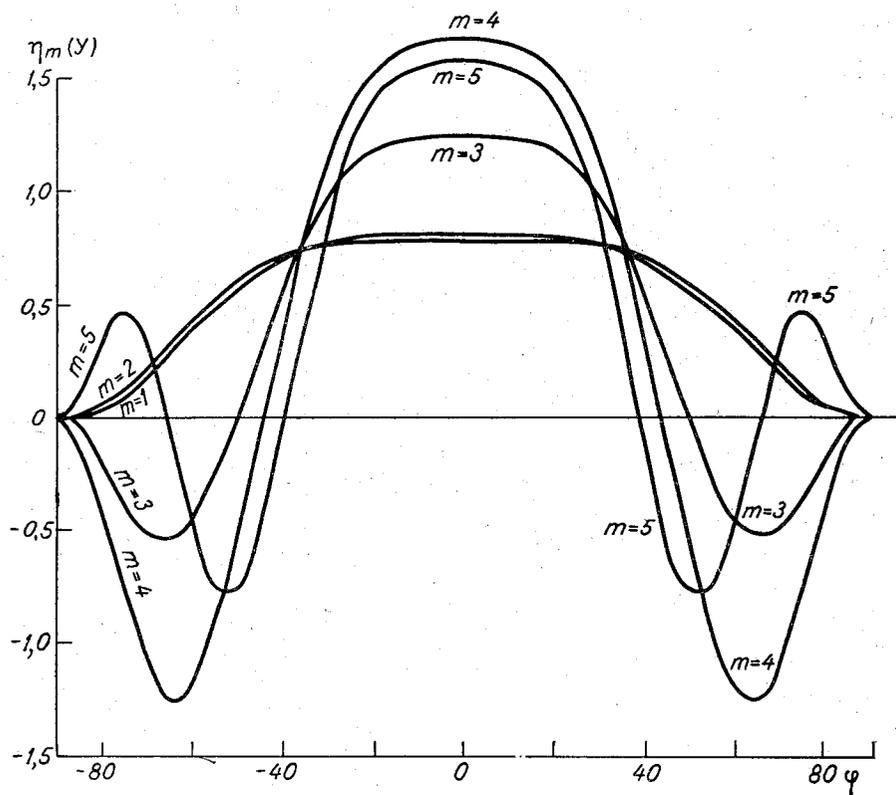


Рис. 1. Функции $\eta_m(\gamma)$ для $m=1 \div 5$.

$$N_3 = \frac{b_3}{c_3 - \frac{b_5}{c_5 - \frac{b_7}{c_7 - \dots - \frac{b_{n+1}}{c_{n+1} - N_{n+3}}}}} \quad (14)$$

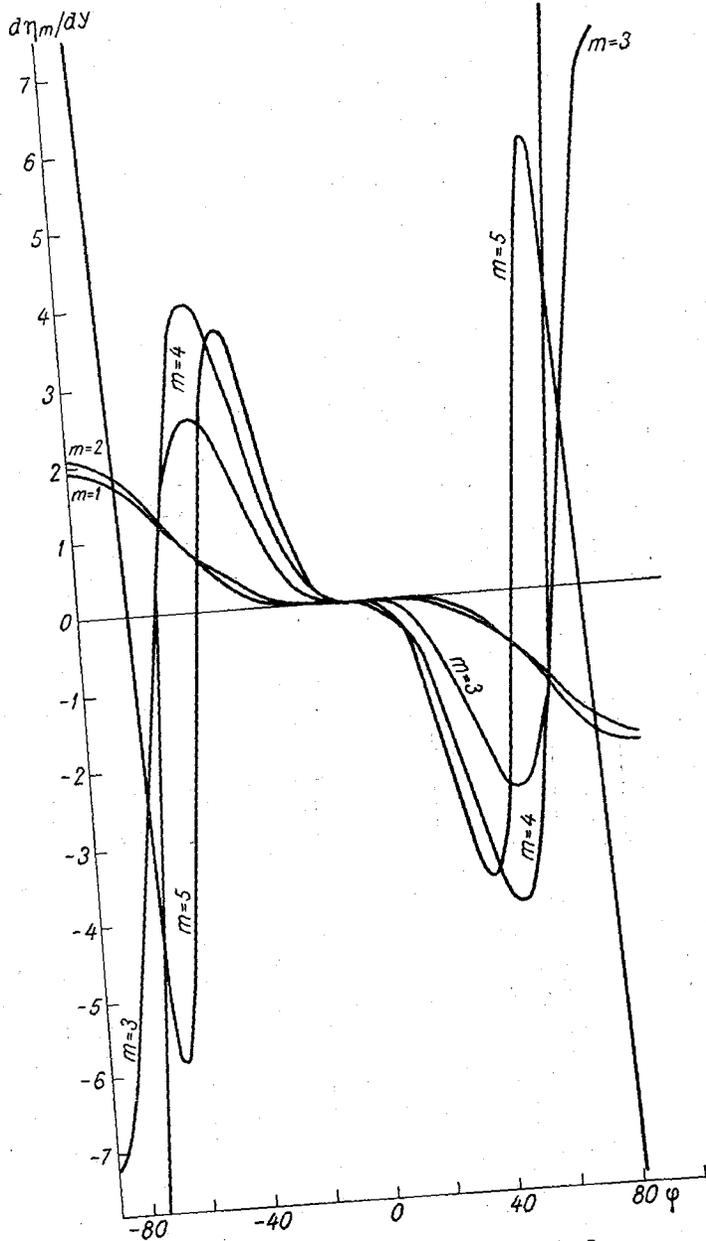


Рис. 2. Функции $d\eta_m/d\gamma$ для $m=1 \div 5$.

Уравнения $c_0 - N_2 = 0$ и $c_1 - N_3 = 0$ являются определяющими уравнениями, для собственных чисел L_m^2 [2] для четных и нечетных m соответственно. Коэффициенты a_n находятся следующим образом:

$$\frac{a_2}{a_0} = N_2 \text{ при } a_0 = 1,$$

тогда $a_2 = N_2$, затем $a_4/a_2 = N_4$, отсюда $a_4 = N_2 N_4$, $a_6 = N_2 N_4 N_6$ и т. д. Для нечетных n получим аналогично $a_1 = 1$, $a_3 = N_3$, $a_5 = N_3 N_5$, $a_7 = N_3 N_5 N_7$. Непрерывные дроби (13), (14) быстро сходящиеся и расчет легко выполним.

Для расчета собственных чисел и собственных векторов, функций η_m и их производных по изложенной выше схеме была составлена программа на ЭВМ «Урал-4». В табл. 1 приводятся значения 34 собственных чисел L_m^2 и приведены первые 10 векторов $a = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ для четных и нечетных индексов.

Функции η_m для $m = 1 \div 34$ были рассчитаны по (7), где $F_m(Y)$ берется в виде ряда (9), причем коэффициенты ряда определялись по изложенной выше схеме. На рис. 1 представлены $\eta_m(Y)$ для $m = 1 \div 5$. По имеющимся $\eta_m(Y)$ рассчитаны функции $d\eta_m/dY$ (рис. 2).

Собственные числа L_m^2

m	L_m^2	m	L_m^2				
				0	1	2	3
0	8,127	17	822,235	0,134433	0,156820	-0,418645	-0,927486
1	12,543	18	963,480	0,008015	0,011131	-0,263330	-0,478151
2	35,420	19	1012,244	0,000263	0,000457	-0,052235	-0,095077
3	44,732	20	1168,293	0,000005	0,000012	-0,006562	-0,010914
4	82,384	21	1221,991	0,000000	0,000000	-0,000397	-0,000835
5	96,619	22	1392,843			-0,000019	-0,000046
6	149,061	23	1451,476			-0,000000	-0,000001
7	168,225	24	1637,131				-0,000000
8	235,464	25	1700,698				
9	259,559	26	1901,163				
10	341,597	27	1939,664				
11	370,626	28	2185,277				
12	467,464	29	2258,655				
13	501,427	30	2495,682				
14	613,067	31	2573,111				
15	651,963	32	2868,652				
16	778,405	33	2946,602				

Теперь надо получить формулы для коэффициентов ряда (4). Для разложения таблично заданного притока тепла q в ряд (4) в [7]¹ выбран следующий вид $S_m(Z)$

$$S_m(Z) = b_m \sin \frac{(m+1)\pi Z}{Z_2 - Z_1}.$$

С учетом вида $S_m(Z)$ формула (4) будет иметь вид

$$q = \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin \frac{(m+1)\pi Z}{(Z_2 - Z_1)} \frac{d\eta_m}{dY}. \quad (4')$$

Теперь остается найти выражение для коэффициентов ряда (4').

Коэффициенты b_m определяются из условия минимума следующего квадратичного функционала:

$$J = \int_{Z_1}^{Z_2} \int_{-1}^1 \left[q - \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sin \frac{(m+1)\pi Z}{Z_2 - Z_1} \frac{d\eta_m}{dY} \right]^2 dY dZ.$$

¹ Как было отмечено выше, Лнови в первой рассматриваемой модели только предложил искать q в виде ряда по $d\eta_m/dY$. Приток тепла q он аппроксимировал посредством только одной гармоники:

$$q = S_{00} \frac{d\eta_0}{dY} \sin \frac{\pi Z}{Z_2 - Z_1} \quad Z_1 \leq Z \leq Z_2.$$

Таблица 1

и собственные векторы

<i>m</i>						
4	5	6	7	8	9	10
-0,512526	-1,154386	-0,544199	-1,237650	-0,558559	1,277184	-0,566256
0,102932	0,491375	0,253493	0,940206	0,326243	1,170801	0,366391
0,295843	0,728125	0,108566	0,082206	-0,038237	-0,450817	-0,133931
0,120549	0,277597	-0,236651	-0,754445	-0,210587	-0,559289	-0,117588
0,025451	0,058570	-0,180744	-0,505013	0,118241	0,520423	0,207587
0,003466	0,008212	-0,062385	-0,168554	0,203997	0,675630	0,013125
0,000336	0,000835	-0,013541	-0,036562	0,108469	0,337541	-0,176793
0,000024	0,000065	-0,002085	-0,005730	0,034263	0,104481	-0,147745
0,000001	0,000004	-0,000243	-0,000688	0,007557	0,023035	-0,065244
0,000000	0,000000	-0,000022	-0,000065	0,001257	0,003877	-0,019501
		-0,000001	-0,000005	0,000165	0,000520	-0,004347
		-0,000000	-0,000000	0,000017	0,000057	-0,000762
				0,000001	0,000005	-0,000108
				0,000000	0,000000	-0,000013
						-0,000001
						-0,000000

Условие минимума функционала J имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial b_m} = & -2 \int_{Z_1}^{Z_2} \int_{-1}^1 q \sin \frac{(m+1)\pi Z}{Z_2 - Z_1} \frac{d\eta_m}{dY} dY dZ + \\ & + 2 \int_{Z_1}^{Z_2} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin \frac{(k+1)\pi Z}{Z_2 - Z_1} \frac{d\eta_k}{dY} \sin \frac{(m+1)\pi Z}{Z_2 - Z_1} \frac{d\eta_m}{dY} dY dZ = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} A_{km} = & 2 \int_{Z_1}^{Z_2} \int_{-1}^1 \sin \frac{(k+1)\pi Z}{Z_2 - Z_1} \sin \frac{(m+1)\pi Z}{Z_2 - Z_1} \frac{d\eta_k}{dY} \frac{d\eta_m}{dY} dY dZ, \\ q_m = & 2 \int_{Z_1}^{Z_2} \int_{-1}^1 q \sin \frac{(m+1)\pi Z}{Z_2 - Z_1} \frac{d\eta_m}{dY} dY dZ. \end{aligned}$$

Тогда система (15) запишется в виде

$$\begin{vmatrix} A_{11}A_{12} \dots A_{1m} \\ A_{21}A_{22} \dots A_{2m} \\ \dots \dots \dots \\ A_{m1}A_{m2} \dots A_{mm} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_m \end{pmatrix}$$

где

$$A_{km} = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq m \\ A_{mm} & \text{при } k = m. \end{cases}$$

Значения A_{mm} рассчитываются, таким образом, по следующей формуле:

$$A_{mm} = 2(Z_2 - Z_1) \int_{-1}^1 \left(\frac{d\eta_m}{dY} \right)^2 dY.$$

Следовательно, для искомых коэффициентов b_m окончательно получаем выражение

$$b_m = \frac{q_m}{A_{mm}} = \frac{2 \int_{Z_1}^{Z_2} \int_{-1}^1 q(Y, Z) \sin \frac{(m+1)\pi Z}{Z_2 - Z_1} \frac{d\eta_m}{dY} dY dZ}{(Z_2 - Z_1) \int_{-1}^1 \left(\frac{d\eta_m}{dY} \right)^2 dY}. \quad (16)$$

Программа расчета коэффициентов разложения b_m по полученной формуле (16) была реализована на ЭВМ М-220. Произведенный расчет коэффициентов b_m показал, что ряд (4) довольно быстро сходится.

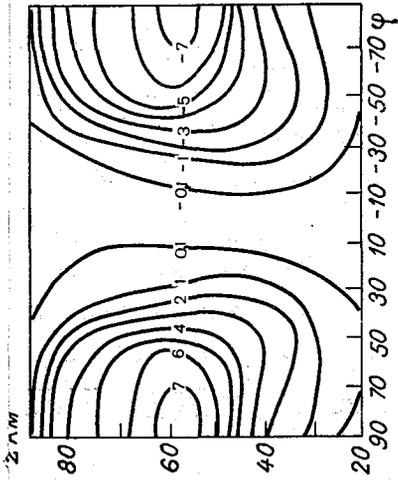


Рис. 3а. Поле q , полученное в результате разложения по 10 коэффициентам.

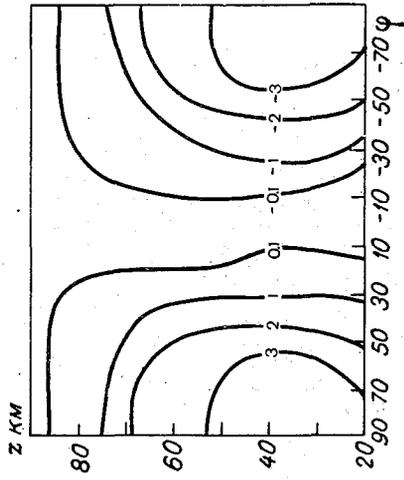


Рис. 3б. Разложение поля q по одному коэффициенту.

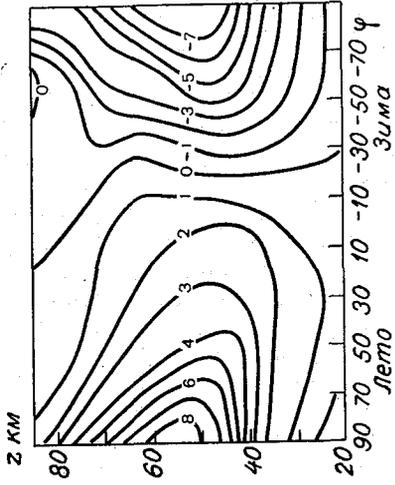


Рис. 3в. Исходное поле q [7].

В качестве первых результатов на рис. За приведено разложение поля притока тепла [7] посредством десяти коэффициентов b_m . Для сравнения приведено поле q , полученное с использованием одного члена ряда (рис. 3б), а также исходное поле [7] (рис. 3в). Как видно из рис. За, полученное в результате разложения поле q в целом хорошо согласуется с исходным (рис. 3в), так величины максимума нагревания (охлаждения), конфигурация изолиний находятся в соответствии. Ограничиться одним членом ряда без специального подбора коэффициента, как видно из рис. 3б, не представляется возможным (максимумы нагревания занижены, конфигурация изолиний передана весьма неточно). В дальнейшем полученные в работе формулы для коэффициентов b_m предполагается использовать для разложения полей q с более сложным пространственным распределением, а также расширить область задания q по вертикали с тем, чтобы подойти к задаче, состоящей в следующем. Кроме притоков тепла, связанных с поглощением и излучением радиации озоном и углекислым газом и определяющих радиационный температурный фон мезосферы, необходимо рассмотреть химический приток тепла, связанный с рекомбинацией атомарного кислорода [1, 6]. Задача эта поставлена Л. Р. Ракиповой. Включение этого притока позволит определить некоторые особенности термического режима мезосферы, а также возмущения циркуляции и температуры в ней, вызываемые солнечной активностью. Это в свою очередь даст возможность продолжить исследования, идеи которых заложены в работах [4, 5, 8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бютнер Э. К., Дмитриева Л. К. О распределении атомного кислорода в зимней полярной мезосфере. Геомагнетизм и аэрономия, т. VIII, № 4, 1968.
2. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. Изд. «Наука», М., 1968.
3. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики, т. 1. ИЛ, М., 1958.
4. Ракипова Л. Р. О механизме связи между тропосферой и верхними слоями атмосферы. Тр. ГГО, вып. 28, 1951.
5. Ракипова Л. Р. К вопросу о взаимодействии между верхними и нижними слоями атмосферы. Метеорология и гидрология, № 1, 1966.
6. Kellogg W. W. Chemical heating above the polar mesopause in winter. J. Meteor., vol. 18, No. 13, 1961. p. 373.
7. Leovy C. Simple models of thermally-driven mesospheric circulation. J. Atm. Sci., vol. 21, No. 4, 1964.
8. Ra k i p o v a L. R. Interaction between the upper and lower layers of atmosphere. Ann. IQSY, vol. 5: Solar-Terrestrial Physics. Massachusetts Inst. Technol. Press, 1969.

СОДЕРЖАНИЕ

М. Е. Швед, Л. Р. Дмитриева-Арраго, Л. Н. Магазенков, Л. В. Самойлова, Б. Е. Шнееров. Численная модель общей циркуляции атмосферы на полушарии	3
А. С. Дубов, Л. Р. Орленко. Об учете процессов в пограничном слое при численном моделировании общей циркуляции атмосферы	45
Л. Р. Ракипова. Влияние ледовитости на основные параметры атмосферы	57
К. В. Пятыгина, Т. С. Филиппова. О связи климатологических значений вертикальной скорости, количества осадков и влажности воздуха	64
Л. С. Гандин, Р. Л. Каган, В. П. Мелешко, Л. В. Руховец. Упрощенная модель для численных экспериментов по термическому режиму атмосферы	72
Р. Л. Каган, К. Я. Винников. О задании притоков тепла при численных экспериментах с помощью термотропной модели	98
Л. С. Гандин, Б. М. Ильин, В. П. Мелешко, Л. В. Руховец. Численное интегрирование инерционной модели на длительные сроки	108
Л. С. Гандин, Б. М. Ильин, Р. Л. Каган, К. М. Лугина, Л. В. Руховец. О влиянии сжимаемости атмосферы на эволюцию планетарных волн	121
Л. С. Гандин, Б. М. Ильин, Р. Л. Каган, А. А. Кобякова, К. М. Лугина, Л. В. Руховец. Некоторые численные эксперименты по формированию термического режима атмосферы	130
В. А. Ефимов. Инвариантно-групповой метод в краевых задачах планетарной динамики атмосферы	147
В. А. Ефимов. К численному моделированию динамического режима атмосферы в высоких широтах южного полушария	155
Л. К. Ефимова. Об уточнении одной численной схемы циркуляции в мезосфере	168

ТРУДЫ, вып. 256

ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ

Титульные редакторы Михаил Ефимович Швед, Борис Ефимович Шнееров
Редактор Г. И. Слабкович Техн. редактор Л. М. Шишкова
Корректоры: О. Д. Рейнгерверц, Г. Н. Римант

Сдано в набор 10/VI 1970 г. Подписано к печати 9/X 1970 г. Формат 60×90^{1/16}. Бумага
типографская № 1. Бум. л. 5,75. Печ. л. 11,5. Уч.-изд. л. 11,8. Тираж 620 экз. М-12437.

Индекс МЛ-57
Гидрометеорологическое издательство. Ленинград. В-53, 2-я линия, д. № 23
Заказ № 324. Цена 83 коп.

Ленинградская типография № 8 Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР. Ленинград. Прачечный пер., д. 6.