ЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ЛАВНАЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ им. А. И. ВОЕЙКОВА

ТРУДЫ

ВЫПУСК 336

ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В МЕТЕОРОЛОГИИ

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук Л. С. ГАНДИНА
и д-ра физ.-мат. наук Р. Л. КАГАНА

ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ
ЛЕНИНГРАД • 1974

УДК 551.5 : 311.17(061.6)

Сборник посвящен изучению и приложениям данных о статистической структуре полей метеорологических элементов, а также статистическим методам оценки экономической эффективности метеорологической информации. Выполнены оценки точности расчета статистических характеристик и, в частности, корреляционных функций при ограниченном объеме выборок. Рассматриваются вопросы об особенностях структуры метеорологических полей в тропиках и об учете этих особенностей при планировании систем наблюдений. В связи с задачей четырехмерного усвоения данных выполнены численные эксперименты по оптимальному согласованию прогностической информации, произведены оценки пространственно-временной корреляции барического поля.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов метеорологических и родственных специальностей.

П $\frac{21004\text{-}179}{069\,(02)\text{-}74}$ 12-74(1)

Р. Л. КАГАН

О ТОЧНОСТИ РАСЧЕТА РОСТРАНСТВЕННЫХ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ II

1. В статье [4] был рассмотрен вопрос о точности расчета вариационных функций. Было показано, что при оценке точности вариационных функций решающее значение имеет учет простанственной связности выборочных моментов, вследствие которой ри пространственном осреднении их точность этих функций увеичивается сравнительно медленно. Даны некоторые оценки приенительно к конкретным типам статистической структуры.

Полученные в [4] оценки могут использоваться и примениельно к корреляционным функциям в случаях, когда последние олучаются путем нормирования ковариационных функций на неоторые средние значения дисперсий (см. например [2]).

Однако при изучении статистической структуры часто предпочительно вычислять непосредственно корреляционную функцию пуем осреднения отдельных коэффициентов корреляции для пар анций, расстояние между которыми находится в пределах заданой градации [3, 5]. Рассмотрение этого случая и является предетом настоящей статьи.

2. Пусть мы рассматриваем случайное поле величины $f(x, y)$. начение этой величины в точке i с координатами x_i и y_i будем ля удобства записи обозначать f_i. Полагаем, что средние значеия этой величины во всех точках поля равны нулю. Очевидно, это е повлияет на общность наших выводов.

Будем обозначать чертой сверху осреднение по статистическоу ансамблю. Тогда для i-той точки имеем

$$\overline{f_i} = 0. \tag{1}$$

Связь между значениями величины f в точках i и k описываетя ковариационным (R_{ik}) и корреляционным (r_{ik}) моментами

$$R_{ik} = \overline{f_i f_k}, \quad r_{ik} = \frac{\overline{f_i f_k}}{\sqrt{\overline{f_i^2} \cdot \overline{f_k^2}}} = \frac{R_{ik}}{\sqrt{R_{ii} R_{kk}}}. \tag{2}$$

рактически расчет ведется лишь по ограниченному объему даных, вследствие чего полученные значения моментов будут отлиаться от истинных. Пусть мы располагаем n независимыми реаизациями поля f. Тогда для каждой пары точек можно получить ценку величин R и r. Так, для пары точек i и k:

$$R^*_{ik} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(f_i^{(j)} - \tilde{f}_i\right)\left(f_k^{(j)} - \tilde{f}_k\right); \qquad (\text{}$$

$$r^*_{ik} = \frac{R^*_{ik}}{\sqrt{R^*_{ii}R^*_{kk}}}. \qquad (\text{}$$

Здесь R^*_{ik} — выборочная ковариация, r^*_{ik} — выборочный коэ фициент корреляции, $\tilde{f}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f_i^j$ — выборочное среднее знач ние величины f_i (верхний индекс при величине f_i означает номе реализации, так что суммирование производится по всем реали зациям).

Для пары точек s и t имеем аналогично:

$$R^*_{st} = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(f_s^{(j)} - \tilde{f}_s\right)\left(f_t^{(j)} - \tilde{f}_t\right), \qquad (3$$

$$r^*_{st} = \frac{R^*_{st}}{\sqrt{R^*_{ss}R^*_{tt}}}. \qquad (4$$

Связность между парами выборочных моментов R^*_{ik} и R^*_{s} а также r^*_{ik} и r^*_{st} характеризуется их ковариацией

$$m_R(i,\ k;\ s,\ t) = \overline{\left(R^*_{ik} - R_{ik}\right)\left(R^*_{st} - R_{st}\right)}, \qquad (5$$

$$m_r(i,\ k;\ s,\ t) = \overline{\left(r^*_{ik} - r_{ik}\right)\left(r^*_{st} - r_{st}\right)}. \qquad (6$$

Можно показать (см., например, формулу (8) в [4]), что ковариация ковариационных моментов определяется формулой

$$m_R(i,\ k;\ s,\ t) = \frac{1}{n-1}\left(R_{is}R_{kt} + R_{it}R_{ks}\right). \qquad (7$$

Эта формула является точной для случая, когда коррелируемая величина имеет нормальное распределение. Получение точной формулы для ковариации коэффициентов корреляции является затруднительным. Поскольку, однако, при практических расчетах в большинстве случаев нет необходимости производить оценку погрешности с большой точностью, ограничимся получением приближенных значений величины m_r.

Для этой цели представим выборочные ковариационные моменты в виде

$$R^*_{ik} = R_{ik}(1 + \delta_{ik}); \quad R^*_{st} = R_{st}(1 + \delta_{st}). \qquad (8)$$

Величины δ_{ik} и δ_{st} являются относительными погрешностями соответствующих выборочных ковариаций

$$\delta_{ik} = \frac{R^*_{ik} - R_{ik}}{R_{ik}}; \quad \delta_{st} = \frac{R^*_{st} - R_{st}}{R_{st}}. \qquad (8a)$$

Подстановка (8) в формулы (4) и (4¹) дает

$$r^*_{ik} = r_{ik}\,\alpha_{ik}, \qquad r^*_{st} = r_{st}\,\alpha_{st}, \tag{9}$$

е

$$\alpha_{ik} = \frac{1+\delta_{ik}}{\sqrt{(1+\delta_{ii})(1+\delta_{kk})}}, \qquad \alpha_{st} = \frac{1+\delta_{st}}{\sqrt{1+\delta_{ss})(1+\delta_{tt})}}.$$

Подставляя эти формулы в (6), получаем

$$m_r(i,\ k;\ s,\ t) = r_{ik}\,r_{st}\overline{(\alpha_{ik}-1)(\alpha_{st}-1)}. \tag{10}$$

Естественно полагать величины δ_{ik} малыми по сравнению единицей. Очевидно, что это предположение справедливо при очень малом числе реализаций и при корреляционных функиях, не очень близких к нулю. Поэтому величины α в формулах) можно получить, представляя знаменатель в виде разложения ряд и ограничиваясь первыми членами разложения

$$\begin{aligned}\alpha_{ik} = 1 &+ \left(\delta_{ik} - \frac{1}{2}\delta_{ii} - \frac{1}{2}\delta_{kk}\right) + \left(\frac{3}{8}\delta_{ii}^2 + \frac{3}{8}\delta_{kk}^2 + \right.\\ &\left. + \frac{1}{4}\delta_{ii}\delta_{kk} - \frac{1}{2}\delta_{ii}\delta_{ik} - \frac{1}{2}\delta_{kk}\delta_{ik}\right) + \ldots;\\ \alpha_{st} = 1 &+ \left(\delta_{st} - \frac{1}{2}\delta_{ss} - \frac{1}{2}\delta_{tt}\right) + \left(\frac{3}{8}\delta_{ss}^2 + \frac{3}{8}\delta_{tt}^2 + \right.\\ &\left. + \frac{1}{4}\delta_{ss}\delta_{tt} - \frac{1}{2}\delta_{ss}\delta_{st} - \frac{1}{2}\delta_{tt}\delta_{st}\right) + \ldots\quad.\end{aligned} \tag{11}$$

В силу несмещенности ковариаций средние значения всех веичин δ равны нулю. Средние же значения их произведений, соласно (7) и (8а), определяются формулами:

$$\begin{aligned}&\overline{\delta_{ii}^2} = \frac{2}{n-1}, \qquad \overline{\delta_{ii}\,\delta_{kk}} = \frac{2r_{ik}^2}{n-1};\\ &\overline{\delta_{ik}\,\delta_{st}} = \frac{1}{n-1}\,\frac{r_{is}r_{kt}+r_{it}r_{ks}}{r_{ik}r_{st}};\\ &\overline{\delta_{ik}\,\delta_{ss}} = \frac{2}{n-1}\,\frac{r_{is}\,r_{ks}}{r_{ik}}.\end{aligned} \tag{12}$$

Учитывая (11) и (12), нетрудно получить:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\alpha_{ik}} &= 1 - \frac{1}{2(n-1)}\left(1 - r_{ik}^2\right),\\ \overline{\alpha_{st}} &= 1 - \frac{1}{2(n-1)}\left(1 - r_{st}^2\right),\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$$\overline{(\alpha_{ik}-1)(\alpha_{st}-1)} \simeq \overline{\left(\delta_{ik} - \frac{1}{2}\delta_{ii} - \frac{1}{2}\delta_{kk}\right)\left(\delta_{st} - \frac{1}{2}\delta_{ss} - \frac{1}{2}\delta_{tt}\right)} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{2}\left(r_{is}^2 + r_{it}^2 + r_{ks}^2 + r_{kt}^2\right) + \frac{r_{is}r_{kt} + r_{it}r_{ks}}{r_{ik}r_{st}} - \right.$$

$$\left. - \frac{r_{is}r_{ks}}{r_{ik}} - \frac{r_{it}r_{kt}}{r_{ik}} - \frac{r_{is}r_{it}}{r_{st}} - \frac{r_{ks}r_{kt}}{r_{st}}\right]. \qquad (14$$

Формулы (13) характеризуют смещение выборочных коэффициентов корреляции. Из формулы (14), учитывая (10), получаем приближенную оценку ковариации коэффициентов корреляции

$$m_r(i,\ k;\ s,\ t) = \frac{1}{n-1}\left[\frac{1}{2} r_{ik}r_{st}\left(r_{is}^2 + r_{it}^2 + r_{ks}^2 + r_{kt}^2\right) + \right.$$

$$\left. + \left(r_{is}r_{kt} + r_{it}r_{ks}\right) - r_{ik}\left(r_{is}r_{it} + r_{ks}r_{kt}\right) - r_{st}\left(r_{is}r_{ks} + r_{it}r_{kt}\right)\right]. \qquad (15$$

Частными случаями этой формулы являются известные формулы для дисперсии выборочных коэффициентов корреляции

$$m_r(i,\ k;\ i,\ k) = \frac{1}{n-1}\left(1 - r_{ik}^2\right)^2,$$

$$m_r(s,\ t;\ s,\ t) = \frac{1}{n-1}\left(1 - r_{st}^2\right)^2. \qquad (16)$$

Воспользовавшись формулами (15) и (16), получим выражение для коэффициента корреляции между выборочными корреляционными моментами $\overset{*}{r}_{ik}$ и $\overset{*}{r}_{st}$

$$\mu_r(i,\ k;\ s,\ t) = \frac{m_r(i,\ k;\ s,\ t)}{\sqrt{m_r(i,\ k;\ i,\ k)\, m_r(s,\ t;\ s,\ t)}} =$$

$$= \left[\frac{1}{2} r_{ik}r_{st}\left(r_{is}^2 + r_{it}^2 + r_{ks}^2 + r_{kt}^2\right) + \left(r_{is}r_{kt} + r_{it}r_{ks}\right) - \right.$$

$$\left. - r_{ik}\left(r_{is}r_{it} + r_{ks}r_{kt}\right) - r_{st}\left(r_{is}r_{ks} + r_{it}r_{kt}\right)\right] / \left(1 - r_{ik}^2\right)\left(1 - r_{st}^2\right). \qquad (17)$$

В соответствии с формулой (17) величина μ_r определяется корреляционной матрицей величин f_i, f_k, f_s, f_t. Поскольку при расчете корреляционных функций предполагается однородность и изотропность поля, эта матрица, а следовательно и величина μ_r определяются лишь взаимным расположением точек i, k, s, t.

Ограничимся рассмотрением трех вариантов расположения этих точек, при которых расстояние между точками i и k и точками s и t одинаково. Обозначим его l, а расстояние между точками, делящими пополам соответствующие отрезки, обозначим d (рис. 1). Напомним, что именно эти варианты были рассмотрены в [4] при оценке корреляции ковариаций.

Тогда при расположении всех точек вдоль одной прямой (схема A) получаем

$$\mu_r^A(l,\ d) = \left\{\frac{1}{2} r^2(l)\left[2r^2(d) + r^2(d + l) + r^2(|d - l|)\right] - \right.$$

$$- 2r(l)\, r(d)\left[r(|d - l|) + r(d + l)\right] + r^2(d) +$$

$$+r(|d-l|)\,r(d+l)\Big\}/[1-r^2(l)]^2. \qquad (18^{А})$$

При расположении точек в соответствии со схемой *Б* получим ормулу

$$\mu_r^{Б}(l,\ d)=\{[1+r^2(l)]\,[r^2(d)+r^2(\sqrt{d^2+l^2})]-$$
$$-4r(l)\,r(d)\,r(\sqrt{d^2+l^2}]\}/[1-r^2(l)]^2. \qquad (18^{Б})$$

Наконец, в случае схемы *В* имеем

$$\mu_r^{В}(l,\ d)=\{2r(\sqrt{d^2+l^2/2+dl})\,r(\sqrt{d^2+l^2/2-dl})-$$
$$-r(l)\,[r^2(\sqrt{d^2+l^2/2+dl})+r^2(\sqrt{d^2+l^2/2-dl})]\}/[1+r(l)]\times$$
$$\times[1-r^2(l)]. \qquad (18^{В})$$

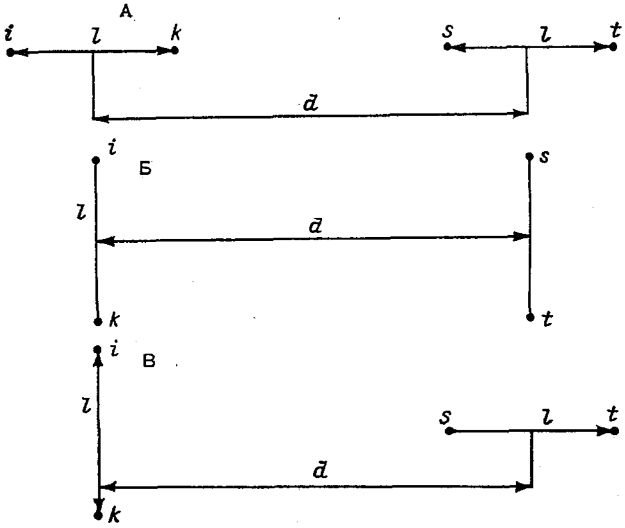


Рис. 1. Схема расположения точек задания исходных данных.

Некоторые результаты расчетов по формулам (18) приводятся в табл. 1. Оценки были выполнены для корреляционных функций вида:

$$r_1(l)=e^{-(l/l_0)^2}, \qquad (19)$$

$$r_2(l)=(1+l/l_0)\,e^{-l/l_0}, \qquad (20)$$

$$r_3(l)=e^{-l/l_0}. \qquad (21)$$

Сравнение данных табл. 1 с аналогичными данными по корреляции ковариаций, приведенными в [4], показывает, что в некоторых случаях имеет место полное совпадение их. Так обстоит

Таблица

Коэффициент корреляции между выборочными коэффициентами корреляции

$r(d)$	$r(l)$											
	Схема *А*				Схема *Б*				Схема *В*			
	0,9	0,8	0,7	0,5	0,9	0,8	0,7	0,5	0,9	0,8	0,7	0,5
Корреляционная функция $r(l)=e^{-l}$												
1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,48	0,45	0,42	0,3
0,9	0,40	0,54	0,65	0,75	0,50	0,61	0,68	0,76	0,42	0,42	0,40	0,3
0,8	0,32	0,32	0,39	0,53	0,36	0,42	0,48	0,57	0,33	0,34	0,34	0,3
0,7	0,24	0,24	0,24	0,35	0,27	0,31	0,34	0,42	0,26	0,26	0,27	0,2
0,6	0,18	0,18	0,18	0,21	0,20	0,22	0,25	0,30	0,19	0,20	0,20	0,2
0,5	0,12	0,12	0,12	0,12	0,14	0,15	0,17	0,20	0,13	0,14	0,14	0,1
0,4	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	0,10	0,11	0,13	0,08	0,09	0,09	0,1
0,3	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05	0,06	0,06	0,07	0,05	0,05	0,05	0,0
0,2	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02	0,03	0,03	0,02	0,02	0,02	0,0
Корреляционная функция $r(l)=(1+l)\ e^{-l}$												
1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,49	0,48	0,46	0,4
0,9	0,41	0,51	0,59	0,70	0,69	0,73	0,75	0,78	0,36	0,36	0,36	0,3
0,8	0,19	0,23	0,30	0,45	0,49	0,53	0,56	0,60	0,25	0,26	0,27	0,2
0,7	0,09	0,10	0,13	0,25	0,35	0,38	0,41	0,45	0,17	0,18	0,18	0,1
0,6	0,04	0,04	0,04	0,11	0,25	0,27	0,29	0,32	0,11	0,11	0,12	0,1
0,5	0,02	0,01	0,01	0,02	0,16	0,18	0,19	0,22	0,07	0,07	0,07	0,0
0,4	0,00	0,00	0,00	0,00	0,10	0,11	0,12	0,14	0,04	0,04	0,04	0,04
0,3	0,00	0,00	−0,01	−0,01	0,06	0,06	0,07	0,08	0,02	0,02	0,02	0,02
0,2	0,00	0,00	0,00	−0,01	0,02	0,03	0,03	0,03	0,01	0,01	0,01	0,01
Корреляционная функция $r(l)=e^{-l^2}$												
1,0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,50	0,49	0,48	0,44
0,9	0,52	0,55	0,58	0,65	0,81	0,81	0,81	0,81	0,32	0,32	0,32	0,31
0,8	0,18	0,22	0,27	0,38	0,64	0,64	0,64	0,64	0,18	0,19	0,19	0,19
0,7	−0,04	0,00	0,05	0,17	0,49	0,49	0,49	0,49	0,08	0,08	0,09	0,10
0,6	−0,16	−0,12	−0,08	0,03	0,36	0,36	0,36	0,36	0,00	0,01	0,02	0,03
0,5	−0,18	−0,16	−0,13	−0,06	0,25	0,25	0,25	0,25	−0,04	−0,04	−0,03	−0,01
0,4	−0,15	−0,14	−0,13	−0,09	0,16	0,16	0,16	0,16	−0,06	−0,06	−0,05	−0,04
0,3	−0,09	−0,09	−0,09	−0,08	0,09	0,09	0,09	0,09	−0,06	−0,06	−0,06	−0,05
0,2	−0,02	−0,02	−0,03	−0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	−0,04	−0,04	−0,04	−0,04

ело, например, для схемы Б в случае корреляционной функции ı. В этом случае подстановка в ($18^Б$) дает

$$\mu_r^Б(l,\ d) = r^2(d). \qquad (22)$$

Точно такая же формула получена в [4] для величины $\mu_R^Б\,(l,\ d)$.

Однако в других случаях между указанными величинами име-тся существенное различие. Так, для корреляционной функции 21) получаем при больших значениях d (при $d>l$, т. е. $(d)<r(l))$ значения величины μ_r примерно вдвое меньше, чем оответствующие значения μ_R. В частности, в случае схемы A по-учаем простую формулу

$$\mu_r = \frac{1}{2} r^2(d) \quad \text{при } d > l. \qquad (23)$$

Обращает на себя внимание наличие области отрицательной корреляции моментов для корреляционных функций r_1 (схемы A и B) и r_2 (схема A). Этот результат является неожиданным, поскольку все рассмотренные корреляционные функции исходного поля являются существенно положительными. Для ковариационных моментов подобная область отрицательной корреляции имеет место при больших d лишь для знакопеременных корреляционных функций.

Как уже указывалось, формулы (15)—(23) выведены в предположении не слишком малых значений n. Эти формулы не пригодны также при r_{ik} и r_{st} очень близких к единице (в этом случае в формуле (11) необходимо учитывать старшие члены разложения). Получение формул для этих случаев очень затруднительно. Некоторые оценки для малых объемов выборки были получены Е. И. Федорченко [6] методом статистического моделирования. Ею показано, что ковариация коэффициентов корреляции и их дисперсия может в этом случае существенно превышать оценки, получающиеся по асимптотическим формулам (15) и (16), в связи с чем в последние необходимо вводить соответствующие поправки. Корреляция же коэффициентов корреляции даже при небольших объемах выборки сравнительно мало отличается от оценок, получаемых по формулам (17) и (18).

3. Располагая данными о корреляции между отдельными выборочными моментами, можно аналогично выполненным в [4] оценкам для ковариационных функций оценить точность пространственных корреляционных функций. Пусть оценка корреляционной функции для некоторой градации расстояний, среднее расстояние для которой равно l, получается путем осреднения N_l моментов

$$\hat{r}(l) = \frac{1}{N_l} \sum_{p=1}^{N_l} r^*_{i_p k_p}. \qquad (24)$$

В этом случае дисперсия величины $\hat{r}(l)$ определяется формуло

$$\sigma^2_{\hat{r}(l)} = \sigma^2_{r(l)} \overset{\wedge}{\mu}_r(l), \qquad (2$$

где, согласно (16),

$$\sigma^2_{r(l)} = \frac{1}{n-1}\,[1 - r(l)^2]^2, \qquad (25^1$$

а

$$\overset{\wedge}{\mu}_r(l) = \frac{1}{N_l^2} \sum_{p=1}^{N_l} \sum_{q=1}^{N_l} \mu(i_p,\ k_p;\quad i_q,\ k_q) \qquad (26$$

есть среднее из коэффициентов корреляции между выборочным моментами, осредняемыми в данной градации. При отсутстви корреляции между моментами из (25) и (26) получается обычная формула

$$\sigma^2_{\hat{r}(l)} = \frac{1}{N_l}\sigma^2_{r(l)}. \qquad (25'$$

Поскольку фактически корреляция между моментами имеет место, то погрешности выборочных корреляционных функций существенно превышают значения, определяемые по формуле (25'). Точные оценки величины $\sigma^2_{\hat{r}}$ требуют громоздких расчетов с учетом реального расположения пунктов наблюдения. Мы ограничимся рассмотрением предельного случая, когда сеть станций на территории S, используемая при расчете корреляционной функции, является столь густой, что суммирование в (26) может быть заменено интегрированием.

Для этого случая имеем

$$\overset{\wedge}{\mu}_r(l) = \frac{\iiiint\!\!\iint\limits_S \mu(i_p,\ k_p;\ i_q,\ k_q)\, dx_{i_p} dy_{i_p} dx_{i_q} dy_{i_q} d\varphi_p d\varphi_q}{\iiiint\!\!\iint\limits_S dx_{i_p} dy_{i_p} dx_{i_q} dy_{i_q} d\varphi_p d\varphi_q}, \qquad (27)$$

где интегрирование по всем переменным осуществляется таким образом, чтобы точки (x_{ip}, y_{ip}), (x_{iq}, y_{iq}), $(x_{ip} + l\cos\varphi_p,\ y_{jp} + l\sin\varphi_p)$ и $(x_{iq} + l\cos\varphi_q,\ y_{ip} + l\sin\varphi_q)$ лежали в области S (см. рис. 2).

Некоторые оценки такого рода, полученные для случайных полей, корреляционные функции которых описываются формулами (19), (20) и (21), представлены в табл. 2. При этом считалось, что площадь S, данными наблюдений на которой мы располагаем, представляет собой квадрат со стороной L. Интегрирование в формуле (27) осуществлялось численно методом Монте-Карло. При расчетах приходилось учитывать, что непосредственное вычисле-

---

[1] Как показано в [6], в случае малых объемов выборки ($n<30$) в эту формулу должен быть введен зависящий от n и $r(l)$ поправочный множитель.

ние значений μ_r по формуле (17) при малых значениях l невозможно, поскольку она при $l=0$ приводит к неопределенности. Поэтому значения $\hat{\mu}_r$ при малых l определялись путем экстраполяции.

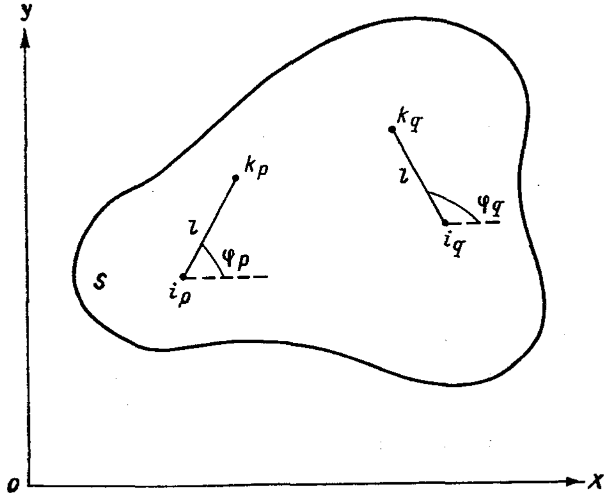


Рис. 2. К определению величины $\hat{\mu}_r(l)$.

При рассмотрении табл. 2 обращает на себя внимание увеличение средней корреляции $\hat{\mu}_r$ между моментами для фиксированных L с увеличением l. Это связано с тем, что при увеличении l уменьшается доля удаленных друг от друга пар станций и возрастает доля близко расположенных пар, для которых корреляция между мометами сравнительно высока.

Сравнение значений $\hat{\mu}_r$ в табл. 2 с рассчитанными в [4] величинами $\hat{\mu}_R$, характеризующими среднюю корреляцию ковариационных моментов, показывает, что для расстояний l, малых по сравнению с размерами квадрата L, $\hat{\mu}_r$ оказывается примерно в два раза меньше, чем $\hat{\mu}_R$, а при расстояниях, сравнимых с размерами квадрата, они примерно одинаковы. Это означает, что уточнение корреляционной функции за счет осреднения по градациям расстояния при малых l больше, чем соответствующее уточнение ковариационной функции, а при больших оно примерно одинаково.

Из табл. 2 следует, что при одинаковых значениях безразмерного масштаба l/l_0 величина $\hat{\mu}_r$ (l) принимает различные значения для разных корреляционных функций. Если, однако, в качеств аргумента использовать не этот масштаб, а соответствуюшие ем значения корреляции $r(l)$, то ход $\hat{\mu}_r(l)$ для различных корреляционных функций оказывается подобным. Это хорошо видно н рис. 3, на котором по оси абсцисс отложены значения $r(l)$, а п оси ординат — относительные величины $\hat{\mu}_r(l)/\hat{\mu}_r(0)$. Для всех тре

Таблица 2

Зависимость $\hat{\mu}_r$ от l для квадратов со стороной L

r	L/l_0	l/l_0				
		0	0,25	0,50	0,75	1,0
r_1	1	0,29	0,37	0,48	0,54	0,61
	2	0,10	0,11	0,13	0,19	0,23
r_2	1	0,40	0,50	0,59	0,64	0,68
	2	0,27	0,29	0,32	0,39	0,44
r_3	1	0,20	0,27	0,34	0,38	0,43
	2	0,09	0,12	0,15	0,17	0,20

рассмотренных нами корреляционных функций эти величины отличаются мало. Если ограничиться не очень большими расстояниями ($l<L/2$), то этот ход может быть приближенно описан формулой

$$\hat{\mu}_r(l) = \frac{2\hat{\mu}_R(0)}{[1+r(l)]^2}. \tag{28}$$

Здесь

$$\hat{\mu}_R(0) = \frac{1}{L^4} \int\limits_{x=0}^{L} \int\limits_{y=0}^{L} \int\limits_{\xi=0}^{L} \int\limits_{\eta=0}^{L} r^2\left[\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right] dx dy d\xi d\eta \tag{29}$$

представляет собой средний коэффициент корреляции между выборочными дисперсиями величины f на площади L^2. Зависимость значений величины $\hat{\mu}_R(0)$ от размеров территории для рассматриваемых корреляционных функций представлена на рис. 4. Оказывается, что до размеров стороны квадрата, характеризующихся корреляцией $r(L)=0{,}1$, эта зависимость может быть приближенно представлена в виде

$$\hat{\mu}_R(0) = 1 - A[1-r(L)], \tag{30}$$

где $A=0{,}67$ для корреляционной функции r_1, $A=0{,}78$ для функции r_2, $A=0{,}98$ для функции r_3.

Формулы (25), (28) и (30) позволяют приближенно оценивать озможную точность выборочных корреляционных функций, поучаемых по данным наблюдений на квадрате в случае не слишом больших его размеров $(r(L)>0,1)$ и не слишком больших начений $l(l<L/2)$. Напомним, что при этом предполагается чень густая сеть станций. В случае реальной сети точность опреееления корреляционной функции будет несколько меньше.

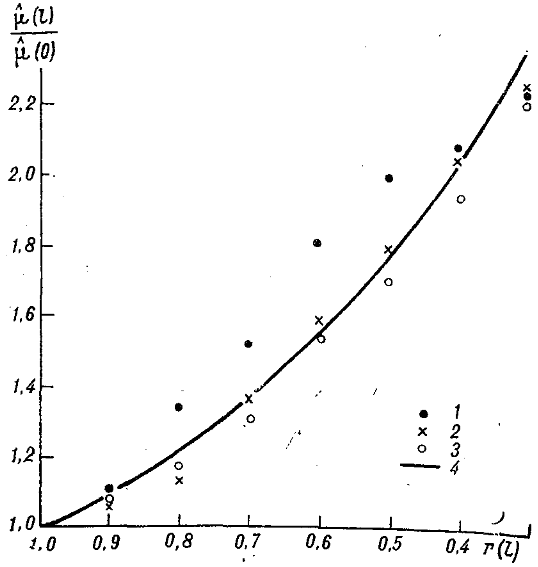


Рис. 3. Зависимость величин $\hat{\mu}_r(l)/\hat{\mu}_r(0)$ от l для $r(L)=0{,}1$.

1) $r_1(l)$; 2) $r_2(l)$; 3)$r_3(l)$; 4) аппроксимация $\frac{\hat{\mu}_r(l)}{\hat{\mu}'(0)}=\frac{4}{[1+r(l)]^2}$.

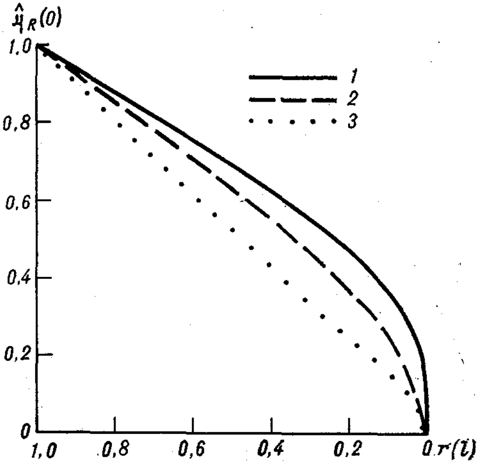


Рис. 4. Зависимость величины $\hat{\mu}_R(0)$ от размеров квадрата.

1 — $r_1(l)$; 2 — $r_2(l)$; 3 — $r_3(l)$.

Представляет интерес сравнение точности корреляционн функции $\hat r(l)$, полученной путем осреднения корреляционных м ментов, с корреляционной функцией $\hat r'(l)$, которую можно получи путем нормировки выборочной ковариационной функции

$$\hat r'(l) = \frac{\hat R(l)}{\hat R(0)}. \qquad (3$$

Согласно [4], дисперсия выборочной ковариационной функци определяется по формуле

$$\sigma^2_{\hat R(l)} = \frac{\sigma^4}{n-1}\left[1 + r^2(l)\right]\hat\mu_R(l). \qquad (3$$

Таким образом, если бы в формуле (31) нормировка корр ляционной функции осуществлялась на истинное значение диспе сии коррелируемой величины, то погрешность соответствующе корреляционной функции определялась бы по формуле

$$\sigma^2_{\hat r''(l)} = \frac{1}{n-1}\left[1 + r^2(l)\right]\hat\mu_R(l). \qquad (32^1$$

Сравнивая формулы (25) и (32^1), получаем

$$\frac{\sigma^2_{\hat r(l)}}{\sigma^2_{\hat r''(l)}} = \frac{[1 - r(l)^2]^2}{1 + r^2(l)}\,\frac{\hat\mu_r(l)}{\hat\mu_R(l)}. \qquad (33$$

Это отношение при не очень больших l существенно меньш единицы.

В действительности нормировка ковариационной функции осу ществляется на выборочную дисперсию. Поскольку последняя по ложительно коррелирует с выборочной ковариационной функцией точность корреляционной функции $\hat r'(l)$ повышается. Оценим е погрешность аналогично тому, как мы это делали для отдельных моментов.

Пусть

$$\hat R(l) = R(l)(1 + \delta_l), \qquad \hat R(0) = R(0)\,(1 + \delta_0), \qquad (34$$

где величины $\delta_l = \frac{\hat R\,(l) - R(l)}{R\,(l)}$ и $\delta_0 = \frac{\hat R(0) - R(0)}{R\,(0)}$ являются малыми относительными погрешностями выборочных ковариационных функций.

Подстановка (34) в (31) дает

$$\hat r'(l) = r(l)\,\alpha_l, \qquad (35)$$

где с точностью до малых высшего порядка

$$\alpha_l = 1 + (\delta_l - \delta_0). \qquad (36)$$

В результате получаем, пренебрегая смещенностью выборочной рреляционной функции

$$\sigma^2_{r'(l)} \cong r^2(l)\,\overline{(\delta_l - \delta_0)^2}. \qquad (37)$$

Учтем, что по определению

$$\overline{\delta_l^2} = \frac{1}{R^2(l)}\,\sigma^2_{\hat{R}(l)}; \quad \overline{\delta_0^2} = \frac{1}{R^2(0)}\,\sigma^2_{\hat{R}(0)};$$

$$\overline{\delta_l\,\delta_0} = \frac{1}{R(l)\,R(0)}\,\sigma_{\hat{R}(l)}\,\sigma_{\hat{R}(0)}\,\hat{\mu}_R(l,\ 0), \qquad (38)$$

е $\hat{\mu}_R(l,\ 0)$ — коэффициент корреляции между выборочными ко-
ариационными функциями для значений аргумента l и 0.

Как показано в [4], для рассмотренных типов статистической
труктуры, фиксированных размеров квадрата L и для не очень
ольших градаций расстояния $l<L/2$

$$\sigma_{\hat{R}(l)}\,\sigma_{\hat{R}(0)}\,\hat{\mu}_R(l,\ 0) \cong \frac{2\,\sigma^4}{n-1}\,\hat{\mu}_R(0). \qquad (39)$$

одстановка (39) в (37) дает

$$\sigma^2_{\hat{r}'(l)} \cong \frac{2\,\mu_R(0)}{n-1}\,[1 - r(l)]^2. \qquad (40)$$

Сравнение с (32^1) показывает, что нормировка ковариацион-
ой функции на выборочную дисперсию действительно предпоч-
ительнее нормировки на истинную дисперсию (практически речь
ожет, конечно, идти лишь об использовании дисперсий, получен-
ых по большему объему данных). Более того, оказывается, что
очность полученной таким образом корреляционной функции
пределах применимости наших допущений совпадает с точно-
тью корреляционной функции $\hat{r}(l)$. В самом деле, подстановка
формулу (25) выражений (25^1) и (28) дает

$$\sigma^2_{\hat{r}(l)} \cong \frac{2\,\mu_R(0)}{n-1}\,[1 - r(l)]^2. \qquad (41)$$

Таким образом для случая, когда предположение об однородности и изотропности справедливо по отношению к ковариационным функциям, точность обоих способов расчета пространственных корреляционных функций одинакова. Поскольку трудоемкость расчета корреляционной функции, по крайней мере, в два раза больше трудоемкости расчета ковариационной функции, использование последней в этом случае предпочтительнее. К сожалению, в реальных условиях однородность и изотропность применительно к ковариационным функциям выдерживается редко. В случае, когда вариация дисперсии на территории превышает погрешности выборочных дисперсий, определяемые формулой (32), полученные нами оценки являются сильно заниженными. В этом случае целесообразнее производить непосредственный расчет корреляционных функций, применительно к которым гипотеза об однородности и изотропности может оказаться более опра данной.

4. Все приведенные выше оценки относятся лишь к погре ностям корреляционных функций, обусловленным ограниче ностью выборки. В реальных условиях необходимо учитыва также влияние ошибок в исходных данных и локальной неодн родности местности. Как показано в [1], случайные бессвязн погрешности наблюдений и локальные неоднородности, масшт которых меньше характерного расстояния между станциями, с стематически занижают значения корреляционной функции для аргументов, отличных от нуля. Эмпирические значения простра ственной корреляционной функции $r'(l)$ связаны с истинными р венством

$$r'(l)=\frac{1}{1+\eta^2}\,r(l),$$

(4

где η^2 — мера случайных ошибок, определяемая как отношени дисперсии погрешностей за счет случайных факторов к истинно дисперсии коррелируемой величины.

Занижение значений эмпирических корреляционных моменто приводит к тому, что выборочная погрешность их, оцениваемая п формуле (25′), может существенно увеличиться. Корреляция между различными выборочными моментами при этом не изменитс Поэтому относительное уточнение, достигаемое при осреднени корреляционных моментов, оказывается таким же, как и в случа отсутствия погрешностей в исходных данных.

При расчете корреляционных функций обычно, наряду со средними значениями коэффициентов корреляции для данной градации расстояний, оценивается рассеяние индивидуальных моментов относительно средней величины. Сравнение этих оценок с значениями, которые соответствовали бы случаю однородного и изотропного поля, позволяет судить о степени фактической неоднородности корреляционной функции исследуемого поля.

Для иллюстрации сказанного выполним некоторые оценки точности пространственной корреляционной функции месячных сумм осадков, полученной в работе А. И. Полищук [5]. В этой работе приводятся корреляционные функции для различных районов центра Европейской территории СССР и для различных месяцев летнего сезона. Мы ограничимся рассмотрением корреляционной функции, полученной для юго-западного района исследованной в [5] территории. В этом районе, площадью около 550 000 км², использованы данные 95 станций за 30 лет (следовательно, $n=30$). Корреляционная функция сумм осадков за май хорошо аппроксимируется формулой

$$r'(l)=0{,}8e^{-l/720}. \tag{43}$$

В этой формуле l отсчитывается в км, пространственный масштаб корреляции l_0 равен 720 км. Рассматриваемая зона является довольно компактной, так что можно пользоваться оценками, относящимися к квадрату той же площади. Сторона соответствующего квадрата составляла бы около 740 км. Очевидно, можно приближенно считать, что $L=l_0$. Количество станций в зоне достаточно велико, и описанная выше замена суммирования в формуле (27) интегрированием является оправданной.

Некоторые оценки для этого случая приведены в табл. 3.

В первых четырех графах таблицы приводятся заимствованные из [5] значения середин градации l, среднего коэффициента корреляции для градации l, числа пар станций N_l, расстояние между которыми находится в пределах данной градации, и среднее квадратическое отклонение $\sigma_{r\text{ф}}$ коэффициентов корреляции для этих пар. В пятой графе приводится стандартная ошибка индивидуального коэффициента корреляции, определенная по формулам (25^1) и (43) для объема выборки $n=30$.

Таблица 3

Оценка точности корреляционной функции сумм осадков за май (по данным [5]) для юго-западного района

l км	r'	N_l	$\sigma_{r\text{ф}}$	σ_r	l/l_0	$\hat{\mu}_r(l/l_0)$	$\sigma_{\hat{r}}$	σ'_r	σ''_r	$N_{\text{экв}}$
38	0,76	22	0,14	0,08	0,05	0,20	0,04	0,07	0,12	5,0
62	0,72	78	0,12	0,08	0,09	0,21	0,04	0,08	0,09	4,8
88	0,72	84	0,13	0,09	0,12	0,21	0,04	0,08	0,10	4,8
125	0,67	231	0,15	0,10	0,17	0,22	0,05	0,09	0,12	4,5
175	0,62	297	0,16	0,11	0,24	0,24	0,05	0,10	0,13	4,2
225	0,56	329	0,16	0,12	0,31	0,25	0,06	0,11	0,12	4,0
275	0,56	378	0,16	0,13	0,38	0,27	0,07	0,11	0,12	3,7
325	0,53	355	0,15	0,14	0,45	0,29	0,07	0,12	0,10	3,4
375	0,48	371	0,17	0,14	0,52	0,31	0,08	0,12	0,12	3,2
425	0,45	389	0,18	0,15	0,59	0,33	0,08	0,12	0,13	3,0
475	0,43	366	0,15	0,15	0,66	0,34	0,09	0,12	0,08	2,9
525	0,40	346	0,17	0,16	0,73	0,36	0,09	0,13	0,11	2,8
575	0,37	305	0,18	0,16	0,80	0,38	0,10	0,13	0,13	2,6
650	0,32	448	0,19	0,17	0,90	0,40	0,10	0,13	0,14	2,7
750	0,26	304	0,19	0,17	1,04	0,42	0,11	0,13	0,14	2,4

Далее приводятся значения безразмерного расстояния l/l_0 и соответствующие им значения среднего коэффициента корреляции между моментами $\hat{\mu}_r$, определенные по формуле

$$\hat{\mu}_r(l) = \frac{0{,}04 + 1{,}96e^{-L/l_0}}{(1+e^{-l/l_0})^2}, \qquad (44)$$

которая в соответствии с (28) и (30) получается для экспоненциальной корреляционной функции (21).

В восьмой графе приводятся значения средней квадратической ошибки выборочной корреляционной функции для условий однородной и изотропной территории, вычисленные по формуле

$$\sigma_{\hat{r}} = \sigma_r \sqrt{\hat{\mu}_r}, \tag{45}$$

а в девятой — ожидаемое рассеяние выборочных коэффициентов корреляции при этих условиях

$$\sigma'_r = \sigma_r \sqrt{1 - \hat{\mu}_r}. \tag{46}$$

Очевидно, превышение фактического рассеяния коэффициентов корреляции $\sigma_{r\text{ф}}$ над ожидаемым связано с неоднородностью поля. Оно характеризуется величиной $\sigma''_r = \sqrt{\sigma^2_{r\text{ф}} - \sigma'^2_r}$, которая также приводится в табл. 3. Наличие этой неоднородности может учитываться при оценке точности корреляционной функции, если ввести какие-то дополнительные предположения о характере неоднородности территории. Если, как это обычно делается, полагать распределение неоднородности никак не связанным с выбором пар станций, используемых при расчете значения корреляционной функции для данной градации, то при числе N таких пар имеем

$$\sigma'_{\hat{r}} = \sqrt{\sigma^2_{\hat{r}} + \frac{\sigma''^2_r}{N}}; \tag{47}$$

или

$$\sigma'_{\hat{r}} = \sigma_r \sqrt{\hat{\mu}_r - \frac{1 - \hat{\mu}_r}{N} + \frac{\sigma^2_{r\text{ф}}}{N \sigma^2_r}}. \tag{48}$$

Сравнивая (48) с (45), видим, что при осреднении в градации сотен и даже десятков корреляционных моментов неоднородность поля при сделанных предположениях не сказывается на точности средних значений. Последнюю по-прежнему можно оценивать по формуле (45). Однако значения корреляционных моментов для конкретных пар станций, вычисленные согласно формуле (43), могут вследствие неоднородности сильно отличаться от истинных. Для данного случая эти различия характеризуются величиной σ''_r.

В последнем столбце табл. 3 приводятся значения $N_{\text{экв}} = (\sigma_r/\sigma_{\hat{r}})^2$, которое представляет собой эквивалентное число независимых пар станций, осреднение корреляции по которым обеспечивало бы ту же точность расчета корреляционной функции. Фактическое наличие корреляции между моментами приводит к необходимости для обеспечения той же точности корреляционной функции обрабатывать в десятки раз большие объемы исходных данных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Л., Гидрометеоиздат, 1963, с. 287.
2. Гандин Л. С., Болтенков В. П. К методике исследования трехмерной макроструктуры метеорологических полей.—«Труды ГГО», 1964, вып. 165, с. 5—15.
3. Журавлева Е. Б., Каган Р. Л., Поляк И. И. Вычисление автокорреляционных и взаимных корреляционных функций по нескольким реализациям случайного процесса.—«Труды ГГО», 1971, вып. 289, с. 20—28.
4. Каган Р. Л. О точности расчета пространственных корреляционных функций.—«Труды ГГО», 1973, вып. 308, с. 3—19.
5. Полищук А. И. О статистической структуре летних осадков.—«Труды ГГО», 1972, вып. 286, с. 39—54.
6. Федорченко Е. И. Об оценке точности корреляционных моментов, полученных по малым выборкам.— См. наст. сб.

Е. И. ФЕДОРЧЕНКО

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ МОМЕНТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ ПО МАЛЫМ ВЫБОРКАМ

В настоящее время при решении многих задач метеорологии используются данные о статистической структуре, в частности, корреляционные функции метеорологических элементов. В связи с этим очевидна важность вопроса о точности корреляционных функций. Эти функции получаются обычно в результате осреднения корреляционных моментов, относящихся к некоторым заданным градациям расстояния или сдвигам во времени. Для того чтобы определить, насколько полученные значения корреляционных функций будут точнее индивидуальных моментов, необходимо оценить связность выборочных корреляционных моментов. Можно указать на несколько работ, в которых изучается точность временных корреляционных функций (см., например, [1]), а также на работу Р. Л. Кагана [2], посвященную вопросу о точности пространственных корреляционных функций, которая носит наиболее общий характер.

Однако необходимо подчеркнуть, что полученные в этих работах формулы являются асимптотическими. Так, Р. Л. Каганом [2] выведена следующая формула для оценки ковариации $m(i, k; s, t)$ между выборочными корреляционными моментами r_{ik} и r_{st}

$$m(i,\ k;\ s,\ t)=\frac{1}{n-1}\left(r_{ik}r_{st}\ \left(r_{is}^2+r_{it}^2+r_{ks}^2+r_{kt}^2\right)/2+r_{is}r_{kt}+\right.$$
$$\left.+r_{it}r_{ks}-r_{ik}(r_{is}r_{it}+r_{ks}r_{kt})-r_{st}(r_{is}r_{ks}+r_{it}r_{kt})\right). \qquad (1).$$

Здесь r_{ik} и r_{st} — коэффициенты корреляции между значениями рассматриваемой случайной функции f, которая предполагается гауссовской, в точках i, k и s, t соответственно; n — число независимых значений f, используемых при расчете r_{ik} и r_{st}. Аналогичный смысл имеют обозначения r_{is}, r_{it}, r_{ks} и r_{kt}.

В частном случае, когда точки s и t совпадают с точками i и k соответственно, получаем известное выражение для дисперсии коэффициента корреляции

$$D(i,\ k)=\frac{1}{n-1}\left(1-r_{ik}^2\right)^2. \qquad (1a)$$

С помощью формул (1) и (1a) получается следующее выражение для оценки коэффициента корреляции $\mu(i,\ k;\ s,t)$ между выборочными моментами r_{ik} и r_{st}:

$$\mu(i,\ k;\ s,\ t)=\frac{m(i,\ k;\ s,\ t)}{\sqrt{D(i,\ k)\,D(s,\ t)}}=$$

$$=r_{ik}r_{st}\left(r_{is}^2+r_{it}^2+r_{ks}^2+r_{kt}^2\right)/2+r_{is}r_{kt}+r_{it}r_{ks}-$$

$$-\frac{r_{ik}(r_{is}r_{it}+r_{ks}r_{kt})-r_{st}(r_{is}r_{ks}+r_{it}r_{kt})}{\left(1-r_{ik}^2\right)\left(1-r_{st}^2\right)}. \tag{2}$$

Формулы (1), (1а) и (2) справедливы при достаточно больом числе n значений f, используемых при расчете r_{ik} и r_{st}.

Представляло интерес посмотреть, как будут вести себя коваиация и коэффициент корреляции между r_{ik} и r_{st} при небольшом исле n. Для этой цели нами использовался метод статистическо моделирования.

На основе заданного расположения точек i, k, s, t и корреляионной функции, связывающей значения в этих точках, т. е. по уществу на основе задания корреляционной матрицы n раз осуествлялось моделирование значений в этих четырех точках, заем вычислялись коэффициенты корреляции r_{ik} и r_{st}, и такая проедура повторялась N раз, после чего вычислялись фактические овариация $m^*(i,\ k;\ s,\ t)$ и коэффициент корреляции $\mu^*(i,\ k;\ s,\ t)$ ежду выборочными корреляционными моментами.

Моделирование значений в четырех точках поля осуществляось с помощью алгоритма (3), который представляет собой лиейное преобразование бессвязных значений x_k в связные. Коэфициенты преобразования a_{ik} можно найти по формулам (4) исхоя из задания корреляционной матрицы $R=(R_{ik})$:

$$y_i=\sum_{k=1}^{i}a_{ik}x_k \qquad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4), \tag{3}$$

$$a_{ik}=\frac{R_{ik}-\sum\limits_{j=1}^{k-1}a_{ij}\,a_{kj}}{a_{kk}} \qquad (k=1,\ \ldots,\ i-1),$$

$$a_{ii}=\sqrt{R_{ii}-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}^2},\ (i=1,\ 2,\ 3,\ 4). \tag{4}$$

В качестве x_k брались случайные числа, распределенные по ормальному закону с математическим ожиданием О и дисперией 1.

Опыты по моделированию с целью оценки m^* и μ^* производились нами для трех схем расположения точек, которые изображены на рис. 1. При этом использовались корреляционные функции вида (5) и (6):

$$r(d)=\exp(-d), \tag{5}$$

$$r(d)=(1+d)\exp(-d). \tag{6}$$

Приведем некоторые результаты, относящиеся к случа
$n=10$.

На рис. 2*а*, *б* для схемы А расположения точек i, k, s, t ко
реляционной функции (5) $r(d)=0{,}9$ (рис. 2*а*) и $r(d)=0{,}5$ (рис. 2
изображены значения μ, полученные по формуле (2), и значен
μ^*, полученные в результате моделирования 2000 пар r_{ik} и

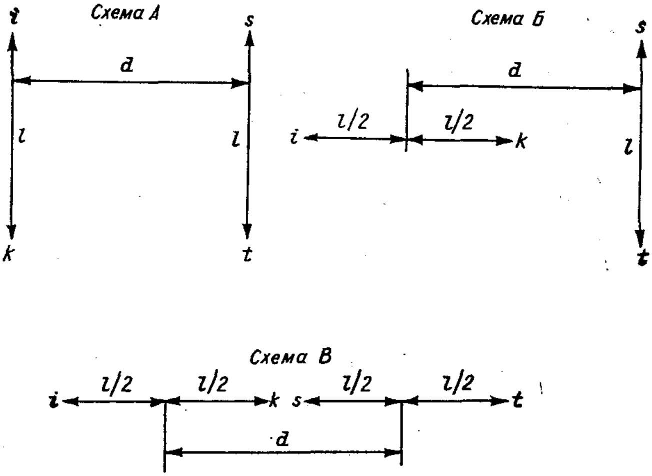


Рис. 1. Схемы расположения точек.

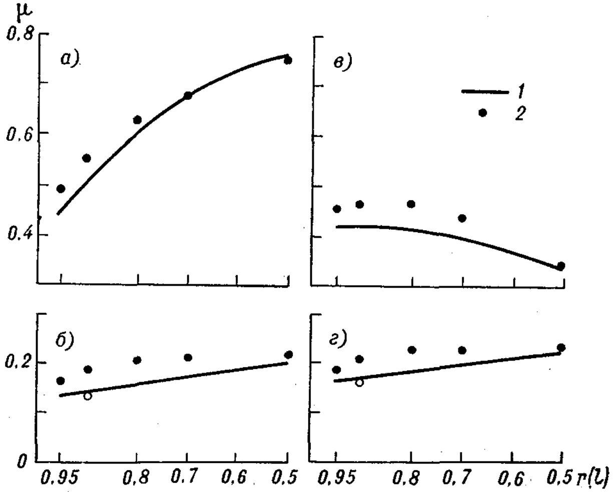


Рис. 2. Зависимость коэффициента корреляции между моментами от расстояния между точками.

а — схема *А*, корреляционная функция (5), $r(d)=0{,}9$; *б* — схема *А*, корреляционная функция (5), $r(d)=0{,}5$; *в* — схема *Б*, корреляционная функция (5), $r(d)=0{,}9$; *г* — схема *А*, корреляционная функция (6), $r(d)=0{,}5$.
1 — μ, *2* — μ^*.

. е. $N=2000$). Величина $r(l)$ при этом менялась от 0,95 до 0,5. в рисунка видно, что согласие между μ и μ^* вполне удовлетво- тельное. Отклонения μ^* от μ для $r(d)=0,9$ не превышают 0,12 μ, для $r(d)=0,5$ не превышают 0,37 μ. Относительно большие от- онения μ^* от μ для $r(d)=0,5$ вызваны тем, что в этом случае solютные значения μ меньше, чем для $r(d)=0,9$ и, следователь- , имеют бо́льшую дисперсию. Но как в случае $r(d)=0,9$, так в случае $r(d)=0,5$ отклонения μ^* от μ не превосходят $2\sigma_\mu$ (ве- чина σ_μ оценивалась по формуле (1 а)) и могут быть вызваны не- статочной длиной выборки ($N=2000$). Для подтверждения того, о отклонения μ^* от μ являются случайными, для $r(d)=0,5$ $r(l)=0,9$ было получено значение μ^* исходя из большего числа $V=10\,000$) моделируемых пар r_{ik} и r_{st}. Это значение нанесено рис 2 *б* кружком. Как видно из рисунка, в этом случае практически равно μ.

Проведенные нами ыты позволили сделать ывод о возможности оименения формулы (2) ля оценки коэффициен- я корреляции μ между ыборочными корреля- ионными моментами ри любых значениях n.

Однако формулу (1) ля расчета ковариации и формулу (1 а) для асчета дисперсии коэф- ициентов корреляции ри небольших n исполь- овать нельзя. Формула 2) оказывается справед- ивой при малых n из-за ысокой степени связно- ти между значениями n^* и D^*, вследствие ко- орой отношение m^* к m рактически не зависит т $r(d)$ и равно отноше- ию D^* к D.

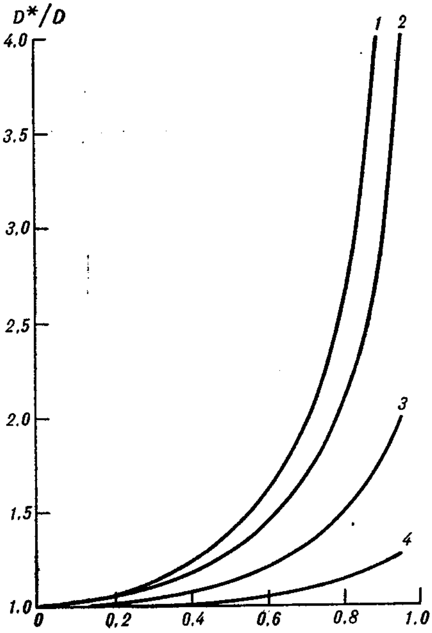


Рис. 3. Зависимость поправочного множителя к дисперсии выборочного коэффициента корреляции от его значения и объема выборки.

1 — $n=4$, *2* — $n=6$, *3* — $n=10$, *4* — $n=20$.

Зависимости $c=D^*/D$ т $r(l)$ для некоторых n риведены на рис. 3. При зменении $r(l)$ от 0 до 1 величина D^*/D монотонно возрастает от 1 до ∞ и тем медленнее, чем больше n. Как видно из рисунка, для $n>20$ D^*/D при реально используемых значениях $r(l)$ практически равно 1 (при $r(l)=1$ D^*/D обращается в ∞).

Для иллюстрации справедливости формулы (2) при различных типах статистической структуры и расположениях точек на рис. приведены также значения μ и μ^* при $r(d)=0,5$ с использование корреляционной функции (6) и схемы A (рис. 2 *г*) и при $r(d)=0,$ с использованием корреляционной функции (5) и схемы (рис. 2 *в*) расположения точек i, k, s, t. С целью подтверждени случайности отклонений μ^* от μ на рис. 2 *г* при $r(l)=0,9$ кружко нанесено также значение μ^*, полученное по большему чи лу ($N=10\,000$) моделируемых коэффициентов корреляции r_{ik} и r Некоторые оценки, выполненные при $N=10\,000$ для схемы B ра положения точек также дают значения μ^*, близкие к μ. Так, дл $r(d)=0,5$ и $r(l)=0,9$ (корреляционная функция (5)) величин μ^*/μ оказалась равной 0,95.

Таким образом, проведенные опыты позволили сделать сл дующие выводы.

1. Для расчета коэффициента корреляции между выборочным корреляционными моментами можно использовать формулу (2 при любых значениях n.

2. Для оценки ковариации между выборочными коэффицие тами корреляции и дисперсии коэффициентов корреляции пр малых n необходимо значения m и D, полученные по формула (1) и (1 а) соответственно, домножить на поправочные множит ли $c\ (n, r)=D^*/D$, приведенные на рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем авт матического управления, ч. I. М., «Советское радио», 1963. 896 с.
2. Каган Р. Л. О точности расчета пространственных корреляционных фун ций II.— См. наст. сб.

Е. И. ФЕДОРЧЕНКО

ВЛИЯНИИ СВЯЗНОСТИ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ РЯДОВ НА ТОЧНОСТЬ ВЫБОРОЧНЫХ МОМЕНТОВ

При изучении метеорологических рядов широко используются акие характеристики их, как дисперсия, асимметрия и эксцесс. оскольку они часто вычисляются по сравнительно небольшим бъемам данных, важно иметь представление об их точности. Во ногих случаях при оценке точности выборочных моментов исользуются известные формулы математической статистики, выеденные для бессвязных рядов наблюдений. Между тем метеоологические ряды, как правило, являются связными, что уменьает информацию, содержащуюся в них, по сравнению с бессвязыми рядами того же объема. Это обстоятельство необходимо читывать при оценке точности выборочных характеристик вреенных рядов.

Оценки точности среднего арифметического и дисперсии, поученные с учетом коррелированности рядов, приводятся, наприер, в работе Г. Бейли и Дж. Хэммерсли [1]. Наиболее полно опрос о точности этих моментов рассматривается А. С. Марчено [2]. Аналогичных оценок для моментов более высокого поряда, насколько нам известно, не делалось. В некоторых работах (см., например, [3]) предлагается вводить эмпирические поправочые множители к стандартным погрешностям асимметрии и экцесса для независимых наблюдений. Такого рода множители, поученные для выборок определенного объема, разумеется, не моут быть использованы для выборок другого объема, а также для ядов, характеризующихся другой временной корреляцией. Поэтому редставляется целесообразным получить оценки точности асимметрии и эксцесса, которые могли бы быть использованы для связных выборок любого объема. Получение таких оценок и является предметом настоящей статьи. Поскольку при оценке вторых выборочных моментов изучается обычно лишь их дисперсия и не исследуется непосредственно ошибка моментов, ниже будет рассмотрен также более детально вопрос о точности дисперсии.

Пусть f — гауссовская случайная функция с постоянным математическим ожиданием, равным 0, и дисперсией σ^2, $(f_1, f_2, ..., f_N)$ — последовательность ее значений, связанных корреляционной матрицей $R=(r_{ik})$. По этой последовательности вычисляются статистические характеристики величины f. В качестве оценок дисперсии, асимметрии и эксцесса используются

$$\hat{\mu}_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i^2 - \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} f_i f_k, \qquad ($$

$$\hat{A} = \frac{\hat{\mu}_3}{\hat{\mu}_2^{3/2}} = \frac{1}{\hat{\mu}_2^{3/2}}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i^3 - \frac{3}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} f_i^2 f_k + \frac{2}{N^3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} f_i f_k f_s\right], \qquad ($$

$$\hat{E} = \frac{\hat{\mu}_4}{\hat{\mu}_2^2} - 3 = \frac{1}{\hat{\mu}_2^2}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} f_i^4 - \frac{4}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} f_i^3 f_k + \right.$$

$$\left. + \frac{6}{N^3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} f_i^2 f_k f_s - \frac{3}{N^3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} f_i f_k f_s\right]. \qquad ($$

Здесь и далее μ_i представляет собой центральный момен i-того порядка, A — асимметрию и E — эксцесс, $\hat{\mu}_i$, $\hat{A}$, $\hat{E}$ — соо ветствующие выборочные характеристики.

Будем оценивать дисперсии выборочных моментов $D\hat{\mu}_i$, кото рые характеризуют разброс относительно их математическог ожидания, и ошибки выборочных моментов $\Delta\hat{\mu}_i$, характеризующи степень их возможных уклонений от истинных значений. Очевид но:

$$D\hat{\mu}_i = \overline{\hat{\mu}_i^2} - \left(\overline{\hat{\mu}_i}\right)^2, \qquad (4$$

$$\Delta\hat{\mu}_i = \overline{\left(\hat{\mu}_i - \mu_i\right)^2} = D\hat{\mu}_i + \left(\overline{\hat{\mu}_i} - \mu_i\right)^2. \qquad (5$$

Здесь черта сверху означает операцию математического ожидания.

Из формулы (5) видно, что для несмещенных моментов $D\hat{\mu}$ и $\Delta\hat{\mu}_i$ совпадают. При наличии смещения эти величины сущест венно различны.

Путем подстановки (1)—(3) в формулу (4) получаем:

$$D\hat{\mu}_2 = \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{f_i^2 f_k^2} + \frac{1}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\overline{f_i f_k f_s f_t} -$$

$$- \frac{2}{N^3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\overline{f_i^2 f_k f_s} - \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{f_i^2}\,\overline{f_k^2} -$$

$$- \frac{1}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\overline{f_i f_k}\,\overline{f_s f_t} + \frac{2}{N^3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\overline{f_i^2}\,\overline{f_k f_s}, \qquad (6)$$

$$D\hat{\mu}_3=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{f_i^3 f_k^3}+\frac{9}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\overline{f_i^2 f_k^2 f_s f_t}+$$

$$+\frac{4}{N^6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\overline{f_i f_k f_s f_t f_l f_m}-\frac{6}{N^3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\overline{f_i^3 f_k^2 f_s}+$$

$$+\frac{4}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\overline{f_i^3 f_k f_s f_t}-\frac{12}{N^5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\overline{f_i^2 f_k f_s f_t f_l}, \qquad (7)$$

$$D\hat{\mu}_4=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{f_i^4 f_k^4}+\frac{16}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\overline{f_i^3 f_k^3 f_s f_t}+$$

$$+\frac{36}{N^6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\overline{f_i^2 f_k^2 f_s f_t f_l f_m}+$$

$$+\frac{9}{N^8}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\overline{f_i f_k f_s f_t f_l f_m f_p f_q}-$$

$$-\frac{8}{N^8}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\overline{f_i^4 f_k^3 f_s}+\frac{12}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\overline{f_i^4 f_k^2 f_s f_t}-$$

$$-\frac{6}{N^5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\overline{f_i^4 f_k f_s f_t f_l}-\frac{48}{N^5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}f_i^3\overline{f_k^2 f_s f_t f_l}+$$

$$+\frac{24}{N^6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\overline{f_i^3 f_k f_s f_t f_l f_m}-$$

$$-\frac{36}{N^7}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\overline{f_i^2 f_k f_s f_t f_l f_m f_p}-$$

$$-\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\overline{f_i^4 f_k^4}-\frac{16}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\overline{f_i^3 f_k}\cdot\overline{f_s^3 f_t}-$$

$$-\frac{36}{N^6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\overline{f_i^2 f_k f_s}\cdot\overline{f_t^2 f_l f_m}-$$

$$-\frac{9}{N^8}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N}\overline{f_i f_k f_s f_t}\,\overline{f_l f_m f_p f_q}+$$

$$+\frac{8}{N^3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\overline{f_i^4}\cdot\overline{f_k^3 f_s}-\frac{12}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\overline{f_i^4}\cdot\overline{f_k^2 f_s f_t}+$$

$$+\frac{6}{N^5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\overline{f_i^4}\cdot\overline{f_k f_s f_t f_l}+\frac{48}{N^5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\overline{f_i^3 f_k}\cdot\overline{f_s^2 f_t f_l}-$$

$$-\frac{24}{N^6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\overline{f_i^3 f_k}\cdot\overline{f_s f_t f_l f_m}+$$

$$+\frac{36}{N^7}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\overline{f_i^2 f_k f_s}\cdot\overline{f_t f_l f_m f_p}. \qquad (8$$

Суммы в правых частях (6)—(8) можно представить чере элементы корреляционной матрицы $R=(r_{ik})$ в соответствии с об щим правилом вычисления моментов четного порядка гауссовски случайных функций (см., например, [4]). Так, например,

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\overline{f_i^3 f_k^2 f_s f_t f_l}=$$

$$=\sigma^4\left[\frac{9}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}r_{ik}r_{st}+\frac{6}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}r_{ik}r_{ks}r_{kt}+\right.$$

$$+\frac{36}{N^5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}r_{ik}r_{st}r_{tl}+\frac{18}{N^5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}r_{ik}r_{st}^2 r_{sl}+$$

$$\left.+\frac{36}{N^5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}r_{ik}r_{ks}r_{st}r_{sl}\right]. \qquad (9$$

В результате для $D\hat{\mu}_2$ и $D\hat{\mu}_3$ имеем:

$$D\hat{\mu}_2=\frac{2\sigma^4}{N^2}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}r_{ik}^2-\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}r_{ik}r_{is}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}r_{ik}r_{st}\right], \qquad (10)$$

$$D\hat{\mu}_3=\frac{6\sigma^6}{N^2}\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}r_{ik}^3-\frac{6}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}r_{ik}^2 r_{is}+\right.$$

$$+\frac{3}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}r_{ik}^2 r_{st}+\frac{4}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}r_{ik}r_{is}r_{it}+$$

$$+\frac{12}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}r_{ik}r_{is}r_{kt}-\frac{24}{N^3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}r_{ik}r_{is}r_{tl}+$$

$$\left.+\frac{30}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}r_{ik}r_{st}r_{lm}\right]. \qquad (11)$$

Аналогичное выражение для $D\hat{\mu}_4$ ради экономии места нами не приводится.

Точная оценка дисперсии асимметрии и эксцесса является за-
уднительной. Мы ограничимся приближенной оценкой, которую
ожно получить путем использования разложения этих характе-
истик в ряд по степеням относительных ошибок моментов.

Представим четные выборочные моменты в виде

$$\hat{\mu}_2 = \mu_2(1+\varepsilon_2), \quad \hat{\mu}_4 = \mu_4(1+\varepsilon_4), \tag{12}$$

це $\varepsilon_2 = \frac{\hat{\mu}_2 - \mu_2}{\mu_2}$ и $\varepsilon_4 = \frac{\hat{\mu}_4 - \mu_4}{\mu_4}$ — относительные ошибки соответству-
щих выборочных моментов.

С использованием (12) выборочные асимметрия и эксцесс мо-
ут быть представлены в виде:

$$\hat{A} = \frac{\hat{\mu}_3}{\mu_2^{3/2}}(1+\varepsilon_2)^{-\frac{3}{2}}, \quad \hat{E} = \frac{\hat{\mu}_4}{\mu_2^2}(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_2)^{-2}. \tag{13}$$

Соответственно оценки для дисперсий этих величин имеют вид:

$$D\hat{A} = \frac{1}{\mu_2^3}\overline{\hat{\mu}_3^2(1+\varepsilon_2)^{-3}},$$

$$D\hat{E} = \frac{\mu_4^2}{\mu_2^4}\left[\overline{(1+\varepsilon_4)^2(1+\varepsilon_2)^{-4}} - \left(\overline{(1+\varepsilon_4)(1+\varepsilon_2)^{-2}}\right)^2\right]. \tag{14}$$

Полагаем, что ε_2, ε_4 и $\hat{\mu}_3$ — малы. Тогда, ограничиваясь в раз-
ожении в ряд величины $D\hat{A}$ членами первого порядка, получаем

$$D\hat{A} \approx \frac{D\hat{\mu}_3}{\sigma^6}. \tag{15}$$

Представляя $D\hat{E}$ в виде ряда и ограничиваясь в разложении
осьмыми моментами, получаем

$$D\hat{E} = \frac{D\hat{\mu}_4}{\sigma^8} + \frac{36D\hat{\mu}_2}{\sigma^4} - \frac{12}{\sigma^6}\left(\overline{\hat{\mu}_2\hat{\mu}_4} - \overline{\hat{\mu}_2}\,\overline{\hat{\mu}_4}\right). \tag{16}$$

Через элементы корреляционной матрицы r_{ik} величина $D\hat{E}$ вы-
ажается следующим образом:

$$D\hat{E} = \frac{24}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} r_{ik}^4 - \frac{192}{N^3}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N} r_{ik}^3 r_{is} +$$

$$+ \frac{96}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N} r_{ik}^3 r_{st} + \frac{288}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N} r_{ik} r_{ks} r_{kt}^2 +$$

$$+ \frac{576}{N^4}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N} r_{ik} r_{st} r_{kt}^2 - \frac{144}{N^5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} r_{il} r_{kl} r_{sl} r_{tl} -$$

$$- \frac{864}{N^5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} r_{ik} r_{st} r_{sl}^2 - \frac{1728}{N^5}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} r_{ik} r_{ks} r_{st} r_{sl} +$$

$$+\frac{1440}{N^6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} r_{ik}r_{st}r_{lt}r_{mt}+$$

$$+\frac{216}{N^6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} r_{ik}r_{st}r_{lm}^2+$$

$$+\frac{1728}{N^6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} r_{ik}r_{st}r_{lt}r_{lm}+$$

$$+\frac{720}{N^6}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} r_{ik}r_{ks}r_{lt}r_{lm}-$$

$$-\frac{3024}{N^7}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{p=1}^{N} r_{ik}r_{st}r_{lm}r_{mp}+$$

$$+\frac{864}{N^8}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{s=1}^{N}\sum_{t=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{N} r_{ik}r_{st}r_{lm}r_{pq}. \qquad (17$$

Временны́е метеорологические ряды, как правило, представляют собой несколько серий наблюдений, таких что элементы различных серий можно считать независимыми, а внутри серий элементы связаны друг с другом, и притом одинаково в каждой серии (например, когда обрабатываются многолетние данные з какой-либо конкретный месяц).

Это значит, что последовательность $(f_1, f_2, \ldots, f_N)$ можно разбить на t независимых векторов размерности n, корреляционны матрицы которых R_n одинаковы. В этом случае корреляционная матрица R оказывается клеточной диагональной матрицей с одинаковыми клетками R_n и формулы для $D\hat{\mu}_2$, $D\hat{A}$ и $D\hat{E}$ принимаю вид:

$$D\hat{\mu}_2=\frac{2\sigma^4}{n^2t^2}\left[t\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} r_{ik}^2-\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} r_{ik}r_{is}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} r_{ik}r_{st}\right], \qquad (18)$$

$$D\hat{A}=\frac{6}{n^2t^2}\left[t\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} r_{ik}^3-\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} r_{ik}r_{is}+\right.$$

$$+\frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} r_{ik}^2r_{st}+\frac{4}{n^2t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} r_{ik}r_{is}r_{it}+$$

$$+\frac{12}{n^2t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} r_{ik}r_{is}r_{kt}-\frac{24}{n^3t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} r_{ik}r_{is}r_{tl}+$$

$$\left.+\frac{10}{n^4t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} r_{ik}r_{st}r_{lm}\right], \qquad (19)$$

$$D\hat{E}=\frac{24}{n^2t^2}\left[t\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} r_{ik}^4-\frac{8}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} r_{ik}^3r_{is}+\right.$$

$$+\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} r_{ik}^3r_{st}+\frac{12}{n^2t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} r_{ik}r_{ks}r_{kt}^2+$$

$$+\frac{24}{n^2t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} r_{ik}r_{st}r_{kt}^2-\frac{6}{n^3t^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} r_{il}r_{kl}r_{sl}r_{tl}-$$

$$-\frac{36}{n^3t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} r_{ik}r_{st}r_{sl}^2-\frac{72}{n^3t^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} r_{ik}r_{ks}r_{st}r_{sl}+$$

$$+\frac{60}{n^4t^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} r_{ik}r_{st}r_{lt}r_{mt}+$$

$$+\frac{9}{n^4t}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} r_{ik}r_{st}r_{lm}^2+$$

$$+\frac{72}{n^4t^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} r_{ik}r_{st}r_{lt}r_{mt}+$$

$$+\frac{30}{n^4t^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} r_{ik}r_{ks}r_{lt}r_{mt}-$$

$$-\frac{126}{n^5t^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} r_{ik}r_{st}r_{lm}r_{mp}+$$

$$\left.+\frac{36}{n^6t^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} r_{ik}r_{st}r_{lm}r_{pq}\right]. \qquad (20)$$

Аналогично могут быть получены выражения для ошибок моментных характеристик:

$$\Delta\hat{\mu}_2=D\hat{\mu}_2+\frac{\sigma^4}{n^4t^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} r_{ik}r_{st}, \qquad (21)$$

$$\Delta\hat{E}=D\hat{E}+\frac{164}{n^8t^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} r_{ik}r_{ks}r_{lt}r_{mt}-$$

$$-\frac{216}{n^7t^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} r_{ik}r_{st}r_{lm}r_{mp}+$$

$$+\frac{81}{n^8t^4}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} r_{ik}r_{st}r_{lm}r_{pq}. \qquad (22$$

В случае, когда серии представляют собой стационарную случайную последовательность с корреляционной функцией

$$r|i-k| = \exp(-\alpha|i-k|), \qquad (23$$

суммы в правых частях (18)—(22) можно получить в явном виде Обозначим коэффициент корреляции между смежными членами последовательности через q, т. е. $q=\exp(-\alpha)$.

Тогда $D\hat{\mu}_2$ примет вид:

$$D\hat{\mu}_2 = \frac{2\sigma^4}{n^2t^2}\left[t\cdot\left(\frac{n(1+q^2)}{1-q^2}-\frac{2q^2(1-q^{2n})}{(1-q^2)^2}\right)-\frac{(1+q)^2}{(1-q)^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{4q^{n+1}}{(1-q)^2}+\frac{4q(1+q)(1-q^n)}{n(1-q)^3}-\frac{4q^2(1-q^{2n})}{n(1-q)^2(1-q^2)}+\frac{4q^2(1-q^n)^2}{n^2(1-q)^4}\right]. \qquad (24$$

Выражения для $D\hat{A}$ и $D\hat{E}$ в силу их громоздкости здесь не приводятся. Покажем лишь в качестве примера, как вычисляется сумма $S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} r_{ik}\ r_{is}\ r_{kt}$.

$$S=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} q^{|i-k|}\,q^{|i-s|}\,q^{|k-t|}=$$

$$=\frac{1}{(1-q)^2}\sum_{i=1}^{n}(1+q-q^i-q^{n-i+1})\sum_{k=1}^{n}(1+q-q^k-q^{n-k+1})=$$

$$=\frac{1}{(1-q)^2}\sum_{i=1}^{n}(1+q-q^i-q^{n-i+1})\times$$

$$\times\left[\frac{(1+q)^2}{1-q}+\frac{q^{n+1}-1-2q-2q^2}{1-q^2}(q^i+q^{n-i+1})-iq^i-(n-i+1)q^{n-i+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{(1-q)^2}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(1+q)^3}{1-q}-2q^{n+1}\frac{q^{n+1}-1-2q-2q^2}{1-q^2}+(n+1)\,q^{n+1}-\right.$$

$$-(1+q)iq^i-(1+q)(n-i+1)\,q^{n-i+1}+iq^{2i}+(n-i+1)\,q^{2(n-i+1)}+$$

$$+\frac{q^{n+1}-2-4q-3q^2}{1-q}(q^i+q^{n-i+1})-$$

$$\left.-\frac{q^{n+1}-1-2q-2q^2}{1-q^2}(q^{2i}+q^{2(n-i+1)})\right]=\frac{1}{(1-q)^4}\times$$

$$\times\left[n(1+q)^3(1-q)+n(n-1)q^{n+1}(1-q)^2+2nq^{n+1}(q+3)(1-q)+\right.$$

$$+\frac{2nq^{n+3}(1-2q^{n-1})(1-q)}{1+q}+\frac{2q^2(1+q^2-q^{n+1})(1-q^{2n})}{(1+q)^2}+$$

$$+2q^2(1-q^{2n})+2q(1-q^n)(q^{n+1}-3-5q-3q^2)\Big].$$

Остальные суммы в правых частях (19)—(22) находятся ана-
ично.

Для бессвязных рядов формулы (18)—(20) и (21)—(22) дают
стные выражения:

$$D\hat{\mu}_2(0)=\frac{2(nt-1)}{n^2t^2},\qquad(25)$$

$$D\hat{A}(0)=\frac{6}{nt}\left(1-\frac{3}{nt}+\frac{2}{n^2t^2}\right),\qquad(26)$$

$$D\hat{E}(0)=\frac{24}{nt}\left(1-\frac{4}{nt}+\frac{9}{n^2t^2}-\frac{6}{n^3t^3}\right),\qquad(27)$$

$$\Delta\hat{\mu}_2(0)=\frac{2nt-1}{n^2t^2},\qquad(28)$$

$$\Delta\hat{E}(0)=\frac{24}{nt}-\frac{96}{n^2t^2}+\frac{216}{n^3t^3}-\frac{135}{n^4t^4}.\qquad(29)$$

Формулы именно такого типа обычно используются при оцен-
точности выборочных моментов. Сравнение их с вышеприве-
ными формулами показывает, насколько существенно учиты-
ь наличие связности в рядах наблюдений. При таком сравне-
удобно рассматривать отношения вида:

$$B_2(q)=\frac{D\hat{\mu}_2(q)}{D\hat{\mu}_2(0)},\quad C_2(q)=\frac{\Delta\hat{\mu}_2(q)}{\Delta\hat{\mu}_2(0)},\qquad(30)$$

$$B_3(q)=\frac{D\hat{A}(q)}{D\hat{A}(0)},\qquad(31)$$

$$B_4(q)=\frac{D\hat{E}(q)}{D\hat{E}(0)},\quad C_4(q)=\frac{\Delta\hat{E}(q)}{\Delta\hat{E}(0)}.\qquad(32)$$

Нами были выполнены расчеты характеристик точности выбо-
чных моментов для различных значений коэффициента корре-
ции q и разных объемов выборки. Некоторые результаты этих
счетов приведены в приложениях 1—4. В этих приложениях на-
ду с характеристиками точности выборочных моментов для
ссвязных рядов (для дисперсии — в долях σ^4) приводятся для
язных рядов относительные величины, введенные формулами
0)—(32).

Рассмотрение этих данных показывает, что с увеличением объ-
а выборки nt относительные величины B_i и C_i увеличиваются,
е. влияние связности возрастает. При росте объема выборки за

счет изменения длины серии n при фиксированном их числе t у личение B_i и C_i, естественно, происходит быстрее, чем при ро nt за счет изменения t при фиксированном n. При больших о емах выборки эти величины мало зависят от объема выбор Анализ формулы (24) и аналогичных формул для асимметр и эксцесса показывает, что при достаточно больших объемах в борки величины B_i и C_i могут быть описаны единой асимптоти ской формулой вида

$$B_i = C_i = \frac{1+q^i}{1-q^i}. \qquad ($$

На возможность использования этой формулы для диспер указывалось, например, в работе [2]. Аналогичная формула им место и для оценки точности среднего арифметического (при эт $i=1$). Формулу (33) можно использовать для оценки числа н блюдений, которое обеспечивает ту же точность расчета выбор ных моментов, что и при заданном числе независимых наблю ний. Из нее следует, что связность величины f на точности м ментов высшего порядка сказывается в меньшей степени, чем точности среднего арифметического и дисперсии.

Как уже указывалось, формулой (33) можно пользоват лишь при достаточно больших объемах выборки, особенно п высоких коэффициентах корреляции q. Для иллюстрации этого рис. 1 приводятся зависимости B_2, B_3 и B_4 от q для различн числа серий t при фиксированной их длине $n=30$. Из рисунка в но, что для заданной длины серии величина B_i очень существен отличается от полученной по формуле (33) в случае одной и дв серий, но уже при $t=5\div10$ ($nt=150\div300$) практически мало личается от асимптотических значений. Разумеется, при друг выборе длины ряда объем выборки, при котором достигается т кое приближение, будет другим. Значения B_i, вычисленные формуле (33), приводятся в последней строке соответствующих т лиц приложений. Как уже указывалось, значения C_i при больш объемах выборки отличаются от B_i незначительно, что являет естественным следствием формулы (5), поскольку с увеличени объема выборки смещение моментных характеристик уменьша ся. При малых объемах выборки величины B_i и C_i заметно р личаются. Сравнение этих величин для дисперсии показывает, ч приближенно выполняется сооотношение

$$C_2(t,\ n,\ q) = B_2(2t,\ n,\ q). \qquad ($$

Это равенство является точным в случае $r_{ik}=1\,(i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,$ Для остальных значений q различие между $C_2(t, n, q)$ и $B_2(2t, n,$ не имеет практического значения, поэтому таблицы величи $C_2(t, n, q)$ нами не приводятся. Влияние связности рядов на х рактеристику точности дисперсии $\widehat{\Delta\mu}_2$ можно оценивать по данн приложения 1, пользуясь соотношением (34). Для эксцесса пр

ятся как таблица значений B_4 (приложение 3), так и таблица
чений C_4 (приложение 4). Последние даны лишь для трех зна-
ій t, при которых C_4 заметно отличны от B_4.

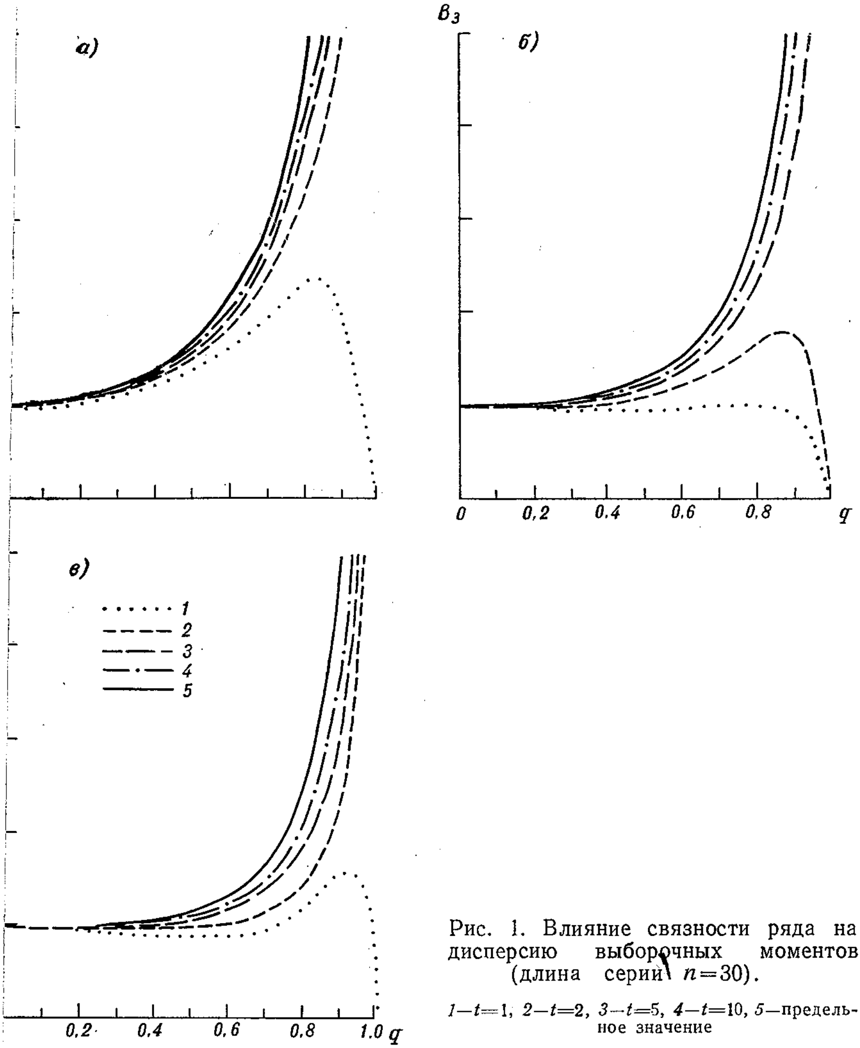


Рис. 1. Влияние связности ряда на дисперсию выборочных моментов (длина серии $n=30$).

1—$t=1$, 2—$t=2$, 3—$t=5$, 4—$t=10$, 5—предельное значение

Из рис. 1 видно, что зависимость дисперсии выборочных мо-
нтов от параметра q оказывается различной при различном чис-
независимых серий t. Для случая $t=1$ (весь ряд состоит из
ой серии) при больших значениях q имеет место максимум ве-
іин B_i, после чего они стремятся к 0 при дальнейшем росте q.
я асимметрии зависимость такого рода отмечается также для
2. При $t>1$ (для асимметрии при $t>2$) величины B_i не имеют

максимума и при больших q монотонно возрастают, принимая $q=1$ значения:

$$B_2(t,\ n,\ 1)=\frac{n^2(t-1)}{nt-1},$$

$$B_3(t,\ n,\ 1)=\frac{(t^2-3t+2)n^3}{t^2n^2-3nt+2},$$

$$B_4(t,\ n,\ 1)=\frac{(t^3-4t^2+9t-6)n^4}{t^3n^3-4n^2t^2+9nt-6}.$$

Кроме того, обращает на себя внимание убывание величин при малых q, что особенно заметно при $t=1$ и при малых зн ниях n. Это хорошо видно на рис. 2, на котором приводятся чения величины B_2 для $t=1$, 2 и $n=4$, 10, 30. При $t=1$ (рис. монотонное убывание дисперсии при $n=4$ происходит на всем тервале изменения q. При $n=10$ убывание имеет место до $q=$ При $n=30$ оно отмечается еще на меньшем интервале. Для при больших n участок убывания при малых q на графике, и по таблицам, проследить трудно, однако рассмотрение соот ствующих производных показывает, что при любых n и t им место локальный минимум, который практического значения имеет.

Такая зависимость B_2 от q вызвана тем, что хотя с увел нием связности выборки количество информации о значении

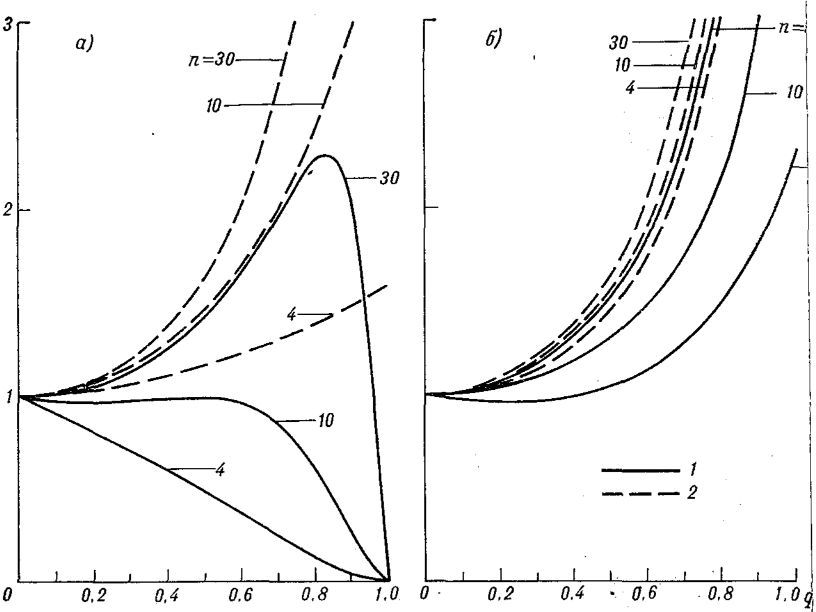


Рис. 2. Влияние связности ряда на точность смещенной и несмещенно выборочной дисперсии.

$а - t=1$; $б - t=2$. $1 - B_2$; $2 - A_2$.

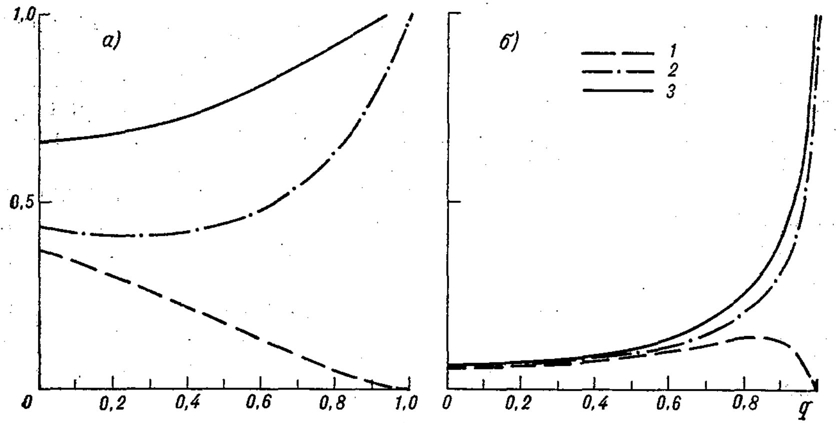


Рис. 3. Зависимость точности выборочной дисперсии от связности ряда ($t=1$).

а – $n=4$; б – $n=30$; 1 – $D\hat{\mu}_2$; 2 – $\Delta\hat{\mu}_2$; 3 – $D\tilde{\mu}_2$.

одержащееся в выборке, уменьшается, но проявляется это уменьение как в росте $D\hat{\mu}_2$, так и в увеличении смешенности $\hat{\mu}_2$. При $=1$, $q=1$ изменчивость величины f в данной серии отсутствует, выборочная дисперсия, равная нулю, не дает нам никакой инфорации об истинной дисперсии σ^2. Заметим, что обычно используеая при расчете выборочной дисперсии оценка

$$\hat{\mu}_2' = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} f_i^2 - \frac{1}{N(N-1)}\left(\sum_{i=1}^{N} f_i\right)^2$$

вляется несмещенной лишь для бессвязных рядов. Несмещенная ценка дисперсии $\tilde{\mu}_2$ описывается формулой

$$\tilde{\mu}_2 = \frac{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N} f_i^2 - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} f_i\right)^2}{1 - \frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} r_{ik}}. \qquad (38)$$

Можно показать, что дисперсия несмещенной оценки с увеличением q возрастает монотонно. Это хорошо видно на рис. 2, на котором штриховыми линиями представлены величины $A_2 = \frac{D\tilde{\mu}_2(q)}{D\tilde{\mu}_2(0)}$.

Отметим, что точность, с которой несмещенные оценки характеризуют истинные значения моментов при небольших объемах выборки может быть заметно меньшей, чем для использованных оценок (1)—(3). В качестве примера на рис. 3 нанесены значения $D\hat{\mu}_2$, $\Delta\hat{\mu}_2$ и $D\tilde{\mu}_2$ для $t=1$. Из рис. 3 видно, что при $n=4$ ошибка несмещенной оценки значительно больше ошибки смещенной оценки. Различие между ними заметно и при $n=30$. Данные рис еще раз показывают, что при малом числе серий дисперсия м ментных характеристик при высокой связности ряда не имеет н чего общего с точностью моментных характеристик, которая ну на для практических приложений. При большом числе серий э величины практически совпадают.

Напомним, что приведенные таблицы относятся к случаю ст ционарных гауссовских рядов, корреляция которых внутри сер характеризуется экспоненциальной зависимостью (23). Для р дов, характеризующихся другими статистическими свойствам влияние связности скажется, по-видимому, аналогичным образо хотя количественные характеристики его могут быть и иными. З метим, однако, что при принятых предположениях полученны оценки могут быть использованы (по крайней мере, приближенн для довольно широкого круга метеорологических элементов.

В заключение рассмотрим пример оценки точности выборо ных моментов, получаемых по рядам средней суточной темпер туры воздуха. Исследование этого элемента показало [5, 6, 7], чт распределение этой величины сравнительно мало отличается с нормального, а временная корреляция ее удовлетворительно оп сывается зависимостью (23). При этом коэффициент корреляци q значений средней суточной температуры за смежные сутки и меняется, как правило, в пределах 0,7—0,8 для различных станци

Таблица

Дисперсия выборочных характеристик средней суточной температур воздуха

Характеристика	$\sigma^2_{P_i}\|_{q=0}$	$q=0,7$			$q=0,8$		
		B_i	$\sigma^2_{P_i}$	σ_{P_i}	B_i	$\sigma^2_{P_i}$	σ_{P_i}
$t=1$							
$P_2=\hat{\mu}_2/\sigma^2$	0,0644	1,95	0,1255	0,355	2,26	0,1455	0,382
$P_3=\hat{A}$	0,1804	0,96	0,1732	0,416	0,87	0,1570	0,396
$P_4=\hat{E}$	0,7012	0,95	0,6660	0,816	1,14	0,7992	0,894
$t=10$							
P_2	0,0066	2,71	0,0179	0,134	4,04	0,0267	0,163
P_3	0,0198	1,87	0,0370	0,192	2,66	0,0526	0,229
P_4	0,0789	1,49	0,1176	0,343	2,05	0,1618	0,402
$t=25$							
P_2	0,0027	2,76	0,0074	0,086	4,15	0,0112	0,106
P_3	0,0080	1,94	0,0155	0,125	2,83	0,0226	0,150
P_4	0,0318	1,56	0,0496	0,226	2,20	0,0700	0,265

месяцев года [8]. Оценим точность моментных характеристик,
ределенных для какого-либо месяца ($n=30$) по данным наблю-
ний за 1, 10 и 25 лет. Последовательность оценок, использую-
их вышеописанные результаты, иллюстрируется табл. 1.

В табл. 1 для единообразия записи приняты обозначения P_2,
, P_4 для характеристик, оценки дисперсий которых приводятся
приложениях 1—3 соответственно. Во втором столбце приводят-
оценки точности для бессвязных рядов заданного объема, взя-
е из второго столбца приложений. Далее для каждого из коэф-
ициентов корреляции приводятся значения B_i и $\sigma^2_{P_i} = \sigma^2_{P_i}\big|_{q=0} \cdot B_i$.

Из табл. 1 видно, что точность моментов, определенная по дан-
ым за один год, весьма невысока. Среднее квадратическое откло-
ние выборочной дисперсии, определенное по данным за 25 лет,
ставляет около 10%. Средние квадратические отклонения выбо-
чной асимметрии и эксцесса для такого объема наблюдений со-
авляют соответственно около 0,14 и 0,25. Эти оценки следует
еть в виду, пользуясь данными о распределениях средних су-
чных температур, приведенных в Справочнике по климату
ССР [9], которые в большинстве случаев получены по 25-летним
дам. Если пренебречь возможными дополнительными ошибками
счет группировки данных, то приведенные выше цифры харак-
ризуют точность моментов, которые могут быть получены по
нным этих распределений. Из них следует, например, что с ве-
ятностью 95% выборочные оценки асимметрии и эксцесса не
лжны отклоняться от нулевых значений на 0,3 и 0,5 соответст-
нно. При наличии бóльших отклонений есть основания предпо-
гать распределения средних суточных температур существенно
клоняющимися от нормального.

Зависимость значений B_2 от связности ряда и объема выборки

n	$10^4 \cdot D\,\hat{\mu}_2\ (0)$	q										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,9
$t = 1$												
4	3750	1,00	0,90	0,81	0,71	0,60	0,49	0,36	0,24	0,13	0,04	0,
8	2188	1,00	0,96	0,93	0,92	0,89	0,86	0,78	0,65	0,44	0,17	0,
10	1800	1,00	0,97	0,96	0,97	0,98	0,98	0,95	0,85	0,63	0,28	0,
24	0799	1,00	1,00	1,03	1,10	1,20	1,34	1,53	1,75	1,88	1,46	0,
30	0644	1,00	1,00	1,04	1,12	1,23	1,41	1,64	1,95	2,26	2,05	1,
90	0220	1,00	1,01	1,07	1,17	1,33	1.58	1,96	2,57	3,66	5,76	6,
$t = 2$												
4	2188	1,00	0,97	0,95	0,96	0,98	1,03	1,12	1,27	1,48	1,81	2,0
8	1172	1,00	0,99	1,01	1,05	1,12	1,23	1,38	1,61	1,99	2,72	3,3
10	0950	1,00	1,00	1,02	1,08	1,17	1.29	1,47	1,74	2,18	3,07	3,9
24	0408	1,00	1,01	1,06	1,14	1,28	1,49	1,80	2,27	3,04	4,63	6,6
30	0328	1,00	1,01	1,06	1,15	1,30	1,52	1,86	2,38	3,26	5,09	7,4
90	0110	1,00	1,02	1,08	1,18	1,35	1,62	2,03	2,72	4,05	7,40	12,0
$t=5$												
4	0950	1,00	1,00	1,02	1,07	1,16	1,29	1,48	1,75	2,13	2,65	2,9
8	0488	1,00	1,01	1,05	1,12	1,25	1,43	1,70	2,13	2,83	4,10	5,1
10	0392	1,00	1,01	1,05	1,14	1,27	1,47	1,76	2,23	3,04	4,61	6,0
24	0165	1,00	1,02	1,07	1,17	1,33	1,57	1,95	2,57	3,71	6,47	10,0
30	0132	1,00	1,02	1,07	1,18	1,34	1,59	1,98	2,63	3,84	6,87	11,1
90	0044	1,00	1,02	1,08	1,19	1,37	1,64	2,08	2,82	4,29	8,38	15,3
$t=10$												
4	0488	1,00	1,01	1,04	1,11	1,22	1,37	1,59	1,90	2,32	2,90	3,2
8	0247	1,00	1,01	1,06	1,15	1,29	1,49	1,81	2,29	3,10	4,53	5,6
10	0198	1,00	1,01	1,06	1,16	1,30	1,52	1,86	2,39	3,31	5,10	6,6
24	0083	1,00	1,02	1.08	1,18	1,35	1,60	2,00	2,67	3,93	7,07	11,2
30	0066	1,00	1,02	1,08	1,18	1,35	1,61	2,03	2,71	4,04	7,45	12,3
90	0022	1,00	1,02	1,08	1,19	1,37	1,65	2,09	2,85	4,37	8,70	16,3
$t=20$												
4	0247	1,00	1,01	1,05	1,13	1,24	1,41	1,64	1,97	2,41	3,02	3,4
8	0124	1,00	1,02	1,07	1,16	1,31	1,52	1,86	2,37	3,23	4,75	5,9
10	0100	1,00	1,02	1,07	1,17	1,32	1,55	1,90	2,47	3,45	5,34	7,0
24	0042	1,00	1,02	1,08	1,18	1,35	1,62	2,03	2,72	4,04	7,37	11,7
30	0033	1,00	1,02	1,08	1,19	1,36	1,63	2,05	2,75	4,13	7,74	12,9
90	0011	1,00	1,02	1,08	1,19	1,37	1,65	2,10	2,86	4,41	8,87	16,9

n	$10^4 \cdot D\overset{\wedge}{\mu}_2(0)$	q										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
							$t = 25$					
4	0198	1,00	1,01	1,05	1,13	1,25	1,42	1,65	1,98	2,43	3,04	3,43
8	0100	1,00	1,02	1,07	1,16	1,31	1,53	1,87	2,39	3,25	4,78	6,01
10	0080	1,00	1,02	1,07	1,17	1,32	1,56	1,91	2,48	3,47	5,39	7,07
24	0033	1,00	1,02	1,08	1,19	1,36	1,63	2,05	2,76	4,15	7,80	13,0
30	0027	1,00	1,02	1,08	1,19	1,36	1,63	2,05	2,76	4,15	7,80	13,0
90	0009	1,00	1,02	1,08	1,19	1,37	1,65	2,10	2,87	4,41	8,90	17,0
							$t = 30$					
4	0165	1,00	1,01	1,06	1,13	1,25	1,42	1,66	1,99	2,44	3,06	3,45
8	0083	1,00	1,02	1,07	1,16	1,31	1,54	1,87	2,40	3,27	4,82	6,04
10	0036	1,00	1,02	1,07	1,17	1,32	1,56	1,92	2,49	3,49	5,42	7,11
24	0028	1,00	1,02	1,08	1,19	1,36	1,62	2,04	2,73	4,07	7,47	11,6
30	0022	1,00	1,02	1,08	1,19	1,36	1,63	2,05	2,77	4,16	7,84	13,1
90	0007	1,00	1,02	1,08	1,19	1,37	1,65	2,10	2,87	4,42	8,92	17,0
							$t = 60$					
4	0083	1,00	1,01	1,06	1,14	1,26	1,43	1,68	2,01	2,47	3,10	3,49
8	0042	1,00	1,02	1,07	1,17	1,32	1,55	1,89	2,43	3,31	4,89	6,13
10	0033	1,00	1,02	1,07	1,17	1,33	1,57	1,93	2,52	3,53	5,50	7,22
24	0014	1,00	1,02	1,08	1,19	1,36	1,63	2,04	2,75	4,11	7,57	12,1
30	0011	1,00	1,02	1,08	1,19	1,36	1,63	2,06	2,78	4,19	7,94	13,3
90	0004	1,00	1,02	1,08	1,19	1,38	1,66	2,10	2,87	4,43	8,97	17,2
∞		1,00	1,02	1,08	1,20	1,38	1,67	2,15	2,94	4,56	9,53	19,0

Зависимость значений B_3 от связности ряда и объема выборки

n	$10^4 \cdot D \hat{A}(0)$	q										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,9
							$t = 1$					
4	5625	1,00	0,84	0,69	0,54	0,40	0,27	0,16	0,08	0,03	0,00	0,
8	4922	1,00	0,92	0,82	0,71	0,59	0,47	0,35	0,23	0,11	0,02	0,
10	4320	1,00	0,93	0,85	0,76	0,66	0,55	0,44	0,31	0,17	0,04	0,
24	2196	1,00	0,97	0,94	0,92	0,90	0,88	0,86	0,80	0,66	0,34	0,
30	1804	1,00	0,98	0,96	0,94	0,94	0,95	0,97	0,96	0,87	0,53	0,
90	0645	1,00	0,99	1,00	1,02	1,07	1,16	1,33	1,59	2,00	2,39	1,
							$t = 2$					
4	4922	1,00	0,93	0,85	0,76	0,66	0,55	0,43	0,31	0,17	0,06	0,0
8	3076	1,00	0,96	0,92	0,87	0,83	0,78	0,72	0,63	0,47	0,21	0,0
10	2565	1,00	0,97	0,93	0,90	0,87	0,85	0,82	0,76	0,62	0,33	0,1
24	1173	1,00	0,99	0,93	0,98	1,01	1,07	1,16	1,30	1,44	1,32	0,8
30	0951	1,00	0,99	0,99	1,00	1,03	1,11	1,23	1,41	1,66	1,73	1,2
90	0323	1,00	1,00	1,01	1,04	1,10	1,22	1,43	1,80	2,49	3,95	4,9
							$t = 5$					
4	2565	1,00	0,97	0,95	0,93	0,92	0,93	0,98	1,07	1,26	1,61	1,8
8	1389	1,00	0,99	0,98	0,98	1,00	1,05	1,14	1,29	1,58	2,24	2,9
10	1129	1,00	0,99	0,98	0,99	1,02	1,08	1,19	1,38	1,71	2,47	3,3
24	0488	1,00	1,00	1,00	1,03	1,08	1,19	1,37	1,68	2,25	3,51	5,2
30	0392	1,00	1,00	1,00	1,03	1,09	1,21	1,40	1,75	2,38	3,82	5,7
90	0132	1,00	1,00	1,01	1,05	1,12	1,26	1,50	1,93	2,82	5,20	8,7
							$t = 10$					
4	1389	1,00	0,99	0,98	0,98	1,01	1,07	1,17	1,36	1,67	2,21	2,6
8	0722	1,00	0,99	0,99	1,01	1,06	1,14	1,30	1,56	2,05	3,13	4,1
10	0582	1,00	1,00	1,00	1,02	1,07	1,17	1,33	1,62	2,17	3,43	4,7
24	0247	1,00	1,00	1,01	1,04	1,11	1,23	1,45	1,83	2,57	4,48	7,2
30	0198	1,00	1,00	1,01	1,04	1,11	1,24	1,46	1,87	2,66	4,72	7,8
90	0066	1,00	1,00	1,01	1,05	1,13	1,27	1,52	1,98	2,93	5,67	10,4
							$t = 20$					
4	0722	1,00	0,99	1,00	1,01	1,06	1,14	1,27	1,51	1,88	2,51	2,9
8	0368	1,00	1,00	1,00	1,03	1,09	1,19	1,38	1,70	2,30	3,60	4,8
10	0296	1,00	1,00	1,01	1,03	1,10	1,21	1,41	1,75	2,41	3,94	5,5
24	0124	1,00	1,00	1,01	1,05	1,12	1,25	1,48	1,90	2,74	5,00	8,4
30	0100	1,00	1,00	1,01	1,05	1,12	1,26	1,50	1,93	2,80	5,21	9,0
90	0033	1,00	1,00	1,01	1,05	1,13	1,28	1,53	2,00	2,99	5,91	11,2

n	$10^4 \cdot D \hat{A}(0)$	q										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
							$t = 25$					
4	0582	1,00	1,00	1,00	1,02	1,06	1,15	1,29	1,53	1,93	2,57	3,04
8	0296	1,00	1,00	1,01	1,03	1.09	1,20	1,40	1,73	2,36	3,70	5,00
10	0237	1,00	1,00	1,01	1,04	1,10	1,22	1,42	1,78	2,46	4,05	5,74
24	0100	1,00	1,00	1,01	1,05	1,12	1,26	1,49	1,92	2,78	5,11	8,63
30	0080	1,00	1,00	1,01	1,05	1,12	1,26	1,50	1,94	2,83	5,31	9,25
90	0027	1,00	1,00	1,02	1,05	1,13	1,28	1,53	2,01	3,00	5,96	11,4
							$t = 30$					
4	0488	1,00	1,00	1,00	1,02	1,07	1,16	1,31	1,55	1,96	2,61	3,09
8	0247	1,00	1,00	1,01	1,04	1,10	1,21	1,41	1,75	2,39	3,77	5,09
10	0198	1,00	1,00	1,01	1,04	1,10	1,22	1,43	1,80	2,50	4,12	5,85
24	0083	1,00	1,00	1,01	1,05	1,12	1,26	1,50	1,93	2,80	5,18	8,79
30	0066	1,00	1,00	1,01	1,05	1,13	1,26	1,51	1,95	2,85	5,37	9,41
90	0022	1,00	1,00	1,02	1,05	1,13	1,28	1,54	2,01	3,01	5,99	11,5
							$t = 60$					
4	0247	1,00	1,00	1,01	1,03	1,09	1,18	1,34	1,60	2,03	2,72	3,21
8	0124	1,00	1,00	1,01	1,04	1,11	1,23	1,43	1,80	2,48	3,93	5,32
10	0100	1,00	1,00	1,01	1,04	1,11	1,24	1,46	1,84	2,58	4,30	6,12
24	0042	1,00	1,00	1,01	1,05	1,12	1,27	1,51	1,95	2,86	5,37	9,19
30	0033	1,00	1,00	1,01	1,05	1,13	1,27	1,52	1,97	2,90	5,55	9,82
90	0011	1,00	1,00	1,02	1,05	1,13	1,28	1,54	2,02	3,03	6,08	11,8
∞		1,00	1,00	1,02	1,06	1,13	1,29	1,55	2,04	3,10	6,38	12,9

ПРИЛОЖЕНИЕ

Зависимость значений B_4 от связности ряда и объема выборки

n	$10^4 \cdot \hat{DE}(0)$	q										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
							$t = 1$					
4	28125	1,00	0,93	0,88	0,83	0,78	0,72	0,63	0,51	0,34	0,13	0,0
8	18867	1,00	0,93	0,86	0,80	0,76	0,74	0,73	0,72	0,64	0,39	0,1
10	16416	1,00	0,94	0,87	0,81	0,76	0,74	0,74	0,76	0,75	0,93	0,2
24	8485	1,00	0,97	0,93	0,89	0,86	0,83	0,84	0,90	0,08	1,32	1,0
30	7012	1,00	0,97	0,94	0,91	0,88	0,87	0,88	0,95	1,14	1,54	1,45
90	2551	1,00	0,99	0,98	0,98	0,99	1,02	1,11	1,27	1,58	2,38	3,61
							$t = 2$					
4	18867	1,00	0,94	0,88	0,84	0,81	0,82	0,89	1,05	1,38	2,01	2,50
8	11755	1,00	0,96	0,99	0,86	0,83	0,80	0,82	0,93	1,24	2,14	3,16
10	9861	1,00	0,96	0,92	0,88	0,85	0,83	0,84	0,93	1,21	2,16	3,39
24	4603	1,00	0,98	0,96	0,95	0,94	0,95	1,00	1,10	1,34	2,20	4,01
30	3743	1,00	0,99	0,97	0,96	0,96	0,98	1,04	1,16	1,43	2,25	4,08
90	1304	1,00	1,00	0,99	1,00	1,02	1,08	1,19	1,43	1,91	3,08	4,84
							$t = 5$					
4	9861	1,00	0,97	0,94	0,91	0,89	0,88	0,91	1,00	1,20	1,62	1,97
8	5433	1,00	0,98	0,96	0,94	0,93	0,95	0,99	1,11	1,37	2,06	2,87
10	4433	1,00	0,98	0,97	0,95	0,95	0,97	1,03	1,15	1,43	2,20	3,19
24	1935	1,00	0,99	0,99	0,99	1,00	1,05	1,15	1,35	1,76	2,82	4,48
30	1558	1,00	0,99	0,99	0,99	1,01	1,06	1,18	1,39	1,84	3,00	4,81
90	0529	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,11	1,25	1,54	2,16	3,90	6,66
							$t = 10$					
4	5433	1,00	0,98	0,97	0,96	0,95	0,97	1,03	1,16	1,42	1,95	2,39
8	2854	1,00	0,99	0,98	0,98	0,99	1,02	1,11	1,28	1,65	2,58	3,63
10	2306	1,00	0,99	0,99	0,98	1,00	1,04	1,13	1,32	1,72	2,76	4,08
24	0983	1,00	1,00	0,99	1,00	1,03	1,08	1,21	1,46	1,99	3,44	5,73
30	0789	1,00	1,00	1,00	1,00	1,03	1,10	1,23	1,49	2,05	3,60	6,10
90	0265	1,00	1,02	1,02	1,01	1,05	1,12	1,27	1,58	2,26	4,27	7,79
							$t=20$					
4	2854	1,00	0,99	0,98	0,98	0,99	1,03	1,12	1,28	1,60	2,22	2,73
8	1463	1,00	1,00	0,99	1,00	1,02	1,07	1,18	1,39	1,85	1,97	4,24
10	1176	1,00	1,00	0,96	1,00	1,02	1,08	1,19	1,43	1,92	3,19	4,77
24	0496	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,11	1,25	1,53	2,13	3,85	6,66
30	0397	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,11	1,26	1,55	2,18	3,99	7,04
90	0133	1,00	1,00	1,00	1.01	1,05	1,13	1,28	1,60	2,31	4,47	8,47

n	$10^4\cdot D\hat{E}(0)$	q										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$t = 25$												
4	2306	1,00	0,99	0,99	0,99	1,00	1,04	1,13	1,31	1,64	2,28	2,81
8	1176	1,00	1,00	0,99	1,00	1,02	1,08	1,13	1,42	1,90	3,04	4,38
10	0945	1,00	1,00	1,00	1,00	1,03	1,09	1,21	1,45	1,96	3,29	4,93
24	0397	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,09	1,25	1,54	2,16	3,95	6,87
30	0318	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,12	1,26	1,56	2,20	4,07	7,26
90	0106	1,00	1,00	1,00	1,01	1,05	1,13	1,29	1,61	2,32	4,52	8,62
$t = 30$												
4	1935	1,00	0,99	0,99	0,99	1,01	1,05	1,15	1,33	1,67	2,32	2,86
8	0983	1,00	1,00	1,00	1,00	1,03	1,08	1,20	1,44	1,93	3,13	4,48
10	0789	1,00	1,00	1,00	1,00	1,03	1,09	1,32	1,47	1,99	3,36	5,05
24	0331	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,11	1,26	1,55	2,18	4,01	7,02
30	0265	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,12	1,27	1,57	2,22	4,13	7,41
90	0089	1,00	1,00	1,00	1,01	1,05	1,13	1,29	1,61	2,33	4,54	8,72
$t = 60$												
4	0983	1,00	1,00	1,00	1,00	1,02	1,07	1,18	1,37	1,74	2,44	3,00
8	0496	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,10	1,23	1,48	2,01	3,30	4,73
10	0397	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,10	1,24	1,51	2,07	3,53	5,34
24	0166	1,00	1,00	1,00	1,01	1,05	1,12	1,27	1,57	2,24	4,18	7,41
30	0133	1,00	1,00	1,00	1,01	1,05	1,12	1,28	1,58	2,26	4,29	7,79
90	0044	1,00	1,00	1,00	1,02	1,05	1,13	1,29	1,62	2,34	4,62	8,98
∞		1,00	1,00	1,00	1,02	1,05	1,13	1,30	1,63	2,39	4,87	9,82

Зависимость значений C_4 от связности ряда и объема выборки

n	$10^4 \cdot C_4$ (0)	q										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
						$t = 1$						
4	28476	1,00	0,94	0,91	0,90	0,91	0,95	1,03	1,19	1,49	2,04	2,5
8	18899	1,00	0,93	0,86	0,81	0,78	0,79	0,85	1,00	1,32	2,13	3,0
10	16425	1,00	0,94	0,87	0,82	0,78	0,77	0,81	0,95	1,27	2,11	3,1
24	8486	1,00	0,97	0,93	0,89	0,86	0,83	0,84	0,93	1,19	2,08	3,6
30	7012	1,00	0,97	0,94	0,91	0,88	0,87	0,89	0,96	1,21	2,10	3,6
90	2551	1,00	0,99	0,98	0,98	0,99	1,02	1,11	1,27	1,59	2,43	4,1
						$t = 2$						
4	18899	1,00	0,94	0,89	0,85	0,83	0,84	0,93	1,12	1,49	2,18	2,73
8	11757	1,00	0,96	0,91	0,87	0,83	0,81	0,83	0,95	1,31	2,31	3,45
10	9862	1,00	0,96	0,92	0,88	0,85	0,83	0,85	0,95	1,27	2,32	3,69
24	4603	1,00	0,98	0,96	0,95	0,94	0,95	1,00	1,10	1,35	2,28	4,30
30	3743	1,00	0,99	0,97	0,96	0,93	0,98	1,04	1,16	1,43	2,32	4,35
90	1304	1,00	1,01	0,99	1,01	1,02	1,08	1,19	1,43	1,91	3,08	4,90
						$t = 5$						
4	9862	1,00	0,97	0,94	0,91	0,89	0,89	0,92	1,00	1,20	1,62	1,98
8	5433	1,00	0,98	0,96	0,94	0,93	0,95	0,99	1,11	1,37	2,07	2,88
10	4433	1,00	0,98	0,97	0,95	0,95	0,97	1,03	1,15	1,44	2,21	3,21
24	1935	1,00	0,99	0,99	0,99	1,00	1,05	1,15	1,35	1,76	2,82	4,5
30	1558	1,00	0,99	0,99	0,99	1,01	1,06	1,18	1,39	1,84	3,00	4,83
90	0529	1,00	1,00	1,00	1,01	1,04	1,11	1,25	1,54	2,16	3,90	6,67

ЛИТЕРАТУРА

1. Bayley G. V., Hammersley J. M. The „effective" number of independent observations in an autocorrelated time series.— Supplement to the J. of Royal Statistical society, 1946, v. 8, No 2, pp. 184—197.
2. Марченко А. С. Устойчивость оценок математического ожидания и дисперсии для связных метеорологических временных рядов.—«Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана», 1965, т. 1, № 9, с. 906—913.
3. Мамонтов Н. В. Точность и надежность статистических характеристик температуры и относительной влажности воздуха с учетом временной связности метеорологических рядов.—«Труды НРГМЦ СССР», 1969, вып. 2, с. 54—63.
4. Обухов А. М. Статистическое описание непрерывных полей.—«Труды Геофиз. института АН СССР», 1954, № 24(151), с. 3—42.
5. Тихомирова Л. В. Некоторые особенности временных рядов распределения температуры воздуха на территории СССР.— В кн.: Применение статистических методов в метеорологии (Труды Всесоюзного симпозиума по применению статистических методов в метеорологии). Л., Гидрометеоиздат, 1971, с. 290—304.
6. Каган Р. Л., Федорченко Е. И. О расчете статистических характеристик выбросов случайной функции.—«Труды ГГО», 1970, вып. 268, с. 146—172.
7. Кобышева Н. В. Косвенные расчеты климатических характеристик. Л., Гидрометеоиздат, 1971. 191 с.
8. Федорченко Е. И., Молчанова Л. Н. Об изменчивости средней суточной температуры воздуха на ЕТС.—«Труды ГГО», 1972, вып. 308, с. 63—71.
9. Справочник по климату СССР. Л., Гидрометеоиздат, 1965.

К. М. ЛУГИН

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТАТИСТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПОЛЕЙ ОСНОВНЫХ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТО НА ПОВЕРХНОСТИ 500 мб В ТРОПИЧЕСКИХ ШИРОТАХ

1. В связи с предполагаемым проведением тропического эксперимента в настоящее время весьма актуален вопрос о рациональном размещении сети наблюдений в тропиках. Наиболее естественным является использование для этой цели метода оптимальной интерполяции, позволяющего по данным о корреляционных функциях и о существующих пунктах наблюдений определить ошибки интерполяции в любой точке исследуемого поля (С. А. Машкович [8], Ю. М. Либерман [7] и др.). В частности, исследования, выполненные Ю. М. Либерманом, позволили дать рекомендации по уточнению плана ВМО по расширению сети метеорологических наблюдений над океаном в умеренных широтах.

Для проведения подобных расчетов в тропических широтах необходимы сведения о статистической структуре метеорологических элементов в этом районе. Однако непосредственных данных о характеристиках статистической структуры в тропиках еще очень мало. Это связано прежде всего с тем, что здесь сеть метеорологических станций очень редка. Из 703 аэрологических станций, расположенных в северном полушарии, только 145 приходится на тропические широты [12]. В настоящее время в связи со все более широким переходом к разработке таких численных схем анализа и прогноза погоды, которые охватывали бы все полушарие в целом, значительно возрос интерес к данным о статистических характеристиках метеорологических элементов в тропиках.

Исследования характеристик статистической структуры полей метеорологических элементов в этой области земного шара выполнены рядом авторов. Поле геопотенциала ряда изобарических поверхностей исследовано Е. М. Добрышманом [2], Г. Стейницем, А. Хассом и др. [12], М. А. Алака и Р. С. Элвандером [9]. Корреляционные функции составляющих вектора ветра рассчитаны Т. П. Калугиной и М. В. Карташовой [4], а также в работах [9] и [12]. Статистическая структура поля температуры в тропиках исследована в работе М. А. Алака и Р. С. Элвандера [9].

Ниже делается попытка дать сводку основных результатов, имеющихся в перечисленных выше работах по характеристикам статистической структуры метеорологических полей в тропических иротах, и производится сравнение с аналогичными характеристи-ами в умеренных широтах.

2. При рассмотрении метеорологического режима тропических айонов обращают на себя внимание, во-первых, значительно мень-ие значения временнóй изменчивости метеорологических элемен-

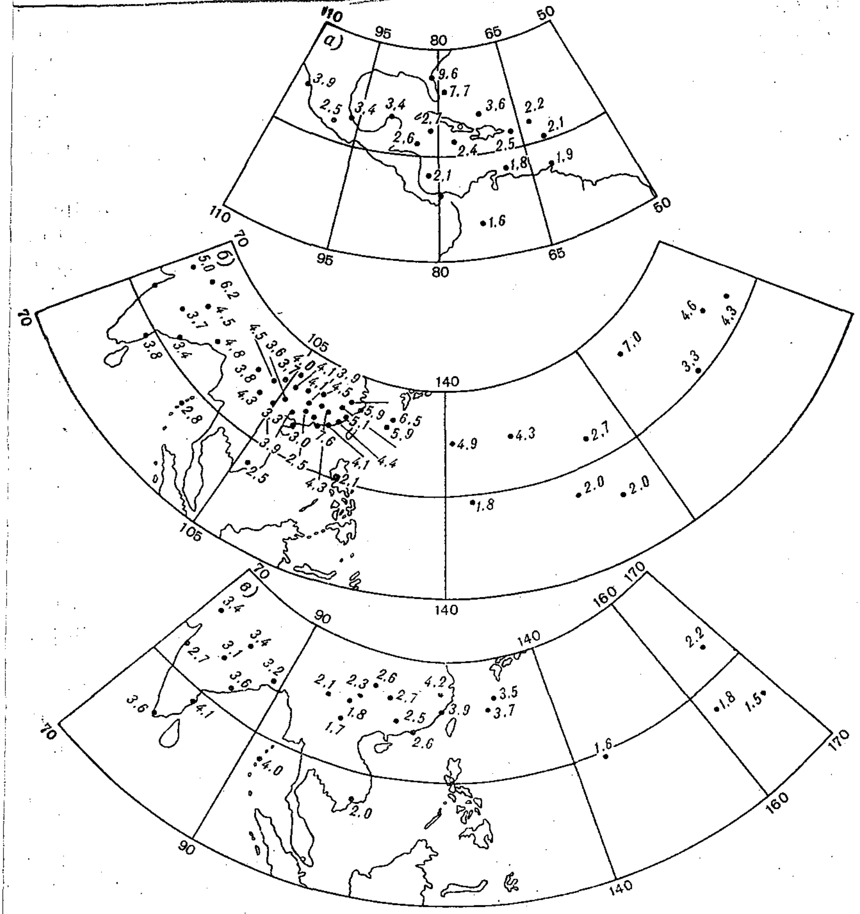


Рис. 1. Значения средних квадратических отклонений поля геопотенциала AT_{500} (дам) для зимы (*а*, *б*) и июля (*в*).

тов и, во-вторых, существенно меньшая пространственная однородность метеорологических полей, чем в умеренных широтах, главным образом в зимний период. На рис. 1 приведены значения средних квадратических отклонений (σ) геопотенциала изобарической поверхности 500 мб для зимнего периода (декабрь, январь, февраль) для тропических широт.

Из рисунка видно, что значения σ в тропических широтах значительно меньше, чем умеренных, где они составляют 10—15 дам. Кроме того, наблюдается резкое уменьшение средних квадратических отклонений от 30° с. ш. к югу. Так, в зоне 30—20° с.ш. величина σ меняется почти в 2 раза.

Аналогичное уменьшение дисперсий с широтой в экваториальной зоне отмечается и для составляющих вектора ветра [4, 5 В отличие от умеренной зоны, где вектор ветра характеризуетс почти круговым распределением, в тропической зоне изменчивост зональной составляющей заметно больше, чем меридионально (см. также [10]). Первая из указанных выше особенностей приводит к тому, что для этого района ошибки наблюдений становятся сравнимыми с естественной изменчивостью метеорологически полей. В связи с этим учет ошибок наблюдений при расчете статистических характеристик в тропической зоне особенно важен

При расчете статистической структуры в умеренных широта обычно используется предположение о локальной однородност метеорологических полей применительно к ковариационной функции. Корреляционную функцию получают путем деления ковариационной функции на среднюю дисперсию. В тропических широтах где, как сказано выше, дисперсия существенно меняется по территории, использование такой методики может приводить к значительным погрешностям, и, вероятно, более оправданным является предположение о локальной однородности применительно не к ковариационным, а к корреляционным функциям.

В некоторых из упомянутых выше работ при расчете статистических характеристик делается попытка учесть указанные особенности метеорологических полей в тропиках. В работе М. А. Алака и Р. С. Элвандера [9] значение дисперсии на каждой станции исправлялось путем вычитания среднего квадрата ошибки наблюдений из вычисленного значения дисперсии. Нормирование ковариационной функции производилось на среднюю по району дисперсию, исправленную таким способом. Е. М. Добрышман [2], наряду с расчетом ковариационной функции поля геопотенциала для юго-востока Азии между 30—0° с. ш., рассчитал также эти функции для двух широтных зон: 0—20° с. ш., 20—30° с. ш. В каждой из указанных широтных зон пространственное изменение дисперсии существенно меньше, чем во всей 30-градусной полосе.

3. Приведем некоторые данные по статистической структуре полей геопотенциала, температуры и ветра в низких широтах на изобарической поверхности 500 мб.

Поле геопотенциала

Первой из известных нам работ по исследованию структуры геопотенциала в тропиках на значительном материале является работа Е. М. Добрышмана [2]. Как уже отмечалось выше, им рассчитана ковариационная функция для района Восточной Азии и островов Тихого океана для июля месяца за 1962—1963 гг. по данным 26 станций, расположенных в зоне 20—0° с. ш., по данным 30 станций в зоне 30—20° с. ш., а также по всем 56 станциям

иесте. На рис. 2 *а* приводятся ковариационные функции, опубли-
ванные Е. М. Добрышманом. Из рисунка видно, что не только
исперсии, но и ковариационные функции для северной зоны су-
ественно выше, чем для южной. Корреляционные функции, полу-
нные путем деления ковариационных на соответствующие дис-
ерсии, представлены на рис. 2 *б*.

Наибольшее количество исходных данных для расчета корре-
ционной функции геопотенциала в тропиках использовано
Стейницем, А. Хассом, А. Манесом, Р. Синаи и З. Альперсо-
м [12]. Ими выполнен расчет для всей тропической зоны север-

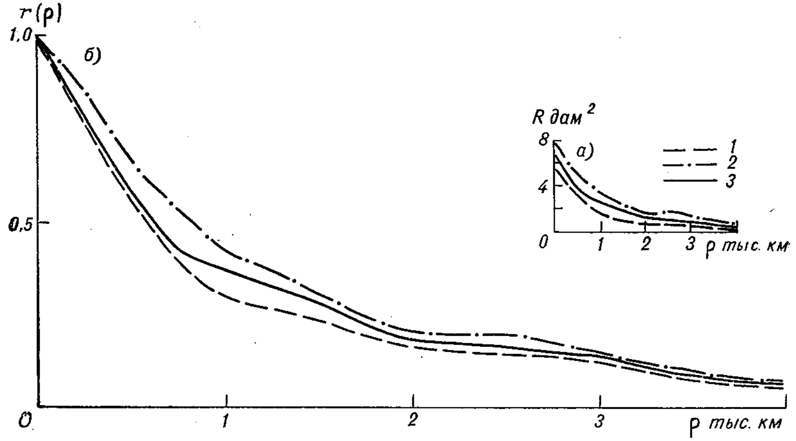


Рис. 2. Пространственные ковариационные (*а*) и корреляционные (*б*) функции геопотенциала изобарической поверхности 500 мб, по данным Е. М. Добрышмана [2].

1 — для зоны 0—20° с. ш., 2 — для зоны 20—30° с. ш., 3 — для зоны 0—30° с. ш.

ого полушария (от 0 до 30° с. ш.) по данным 145 станций за
958—1963 гг. за все 12 месяцев. Полученная корреляционная
ункция аппроксимирована формулой

$$r(\rho) = 0{,}9e^{-0{,}9\rho} + 0{,}1, \qquad (1)$$

де r — значение корреляционной функции, ρ — расстояние
тыс. км.

М. А. Алака и Р. С. Элвандер [9] рассчитали корреляционные
ункции геопотенциала по данным 35 станций, расположенных
районе Карибского моря, раздельно для января и июля. Исполь-
ован десятилетний ряд наблюдений. Для изобарической поверх-
ости 500 мб полученные для каждого из месяцев функции су-
щественно различаются и аппроксимированы следующими анали-
тическими выражениями:
для января

$$r(\rho) = (2{,}91e^{-0{,}111\rho^{0{,}879}} - 1{,}91)\cos(0{,}572\rho); \qquad (2)$$

для июля

$$r(\rho) = 0{,}841e^{-1{,}8\,\rho^{0{,}83}} + 0{,}159. \qquad ($$

По данным, опубликованным в [11], мы рассчитали статист ческие характеристики поля геопотенциала для зимних месяц (декабрь, январь, февраль) за 1958—1963 гг. по данным 49 ста ций в Юго-Восточной Азии и 19 станций в Центральной Амери и Карибском море. При расчете постоянство поля дисперсий предполагалось, т. е. каждый коэффициент корреляции вычисля ся с учетом определенных по тем же данным дисперсий в дв пунктах, исправленных на ошибку наблюдения.

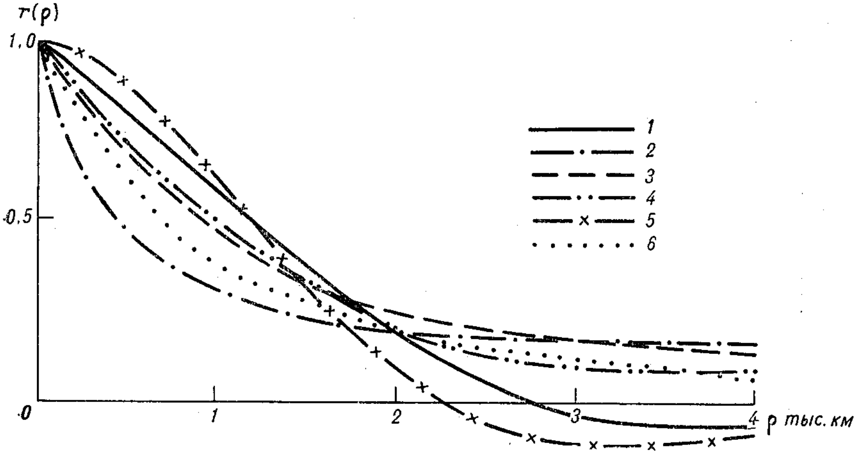


Рис. 3. Пространственные корреляционные функции геопотенциала.
1 — январь; *2* — июль, по данным [9]; *3*, *4*, *5*, *6* — по нашим данным и по данным [12 [3], [2] соответственно.

Полученные по двум указанным районам пространственны корреляционные функции были осреднены с учетом количества к эффициентов корреляции, попавших в каждую из градаций ра стояния. Осредненная функция до расстояния 2000 км хорошо а проксимируется формулой

$$r(\rho) = e^{-0{,}703\,\rho}. \qquad (4$$

На бóльших расстояниях корреляция остается положительно близкой 0,1.

На рис. 3 нанесены все перечисленные выше корреляционн функции геопотенциала для тропических широт. Из рисунка ви но, что в летний период корреляция до расстояния 1000—1500 к убывает значительно быстрее, чем в зимний. На бóльших рассто ниях корреляционная функция летом затухает очень медлен и по данным различных авторов [2, 9] на расстояниях 2500— 4000 км ее значение близко к 0,1. Это может быть связано с мн голетней цикличностью атмосферных процессов. Влияние даж небольших периодических составляющих в ходе геопотенциала н фоне малой естественной изменчивости барического поля в тропиках летом проявляется более четко.

Характерно, что корреляционные функции геопотенциала, полученные Алака и Элвандером [9] для бассейна Карибского моря и Е. М. Добрышманом [2] для Юго-Восточной Азии для июля, близки.

Средняя за год корреляционная функция Стейница и др. [12] практически совпадает с полученной путем осреднения функций для января и июля по данным Алака и Элвандера [9].

Сезонные различия связаны, по-видимому, с тем, что в расчетах статистической структуры использовались станции не только экваториального пояса, но и субтропической зоны, структура в которой зимой приближается к структуре поля геопотенциала умеренных широт. Это хорошо видно при сравнении с данными Л. С. Гандина и Т. И. Кузнецовой [3] для умеренных широт, которые также приведены на рис. 3. Соответствующая корреляционная функция для зимнего сезона хорошо описывается формулой

$$r(\rho) = e^{-0{,}195\,\rho^{1{,}5}} I_0(1{,}065\,\rho), \qquad (5)$$

где I_0 — функция Бесселя, все остальные обозначения прежние.

Для зимнего периода при значительно большей корреляции по сравнению с летом наблюдаются существенные расхождения в данных различных авторов. Вероятно, эти различия связаны с использованием разного объема данных из субтропической зоны. В работе Алака и Элвандера таких данных используется больше, и в результате корреляционная функция оказывается выше, чем по нашим данным и ближе к корреляционной функции умеренных широт.

Обобщая все вышесказанное, можно сделать вывод, что в экваториальной зоне как зимой, так и летом следует использовать корреляционную функцию, полученную для летнего сезона, а в субтропической зоне (севернее 20° с. ш.) необходимо учитывать сезонные различия. В летний период оправдано использование единой для всей области корреляционной функции, зимой может быть использована корреляционная функция для умеренных широт.

Для оценок точности интерполяции необходимы также сведения о дисперсии поля геопотенциала. Учитывая существенный ход поля изменчивости геопотенциала в тропиках, желателен дифференцированный учет его. В частности, для зимнего сезона можно воспользоваться данными рис. 1 *а*, *б*, а для летнего — данными из работы Е. М. Добрышмана (рис. 1 *в*). Для грубых оценок можно использовать характерные значения дисперсии 6 дам^2 для экваториальной зоны в течение всего года, а в зоне 30—20° с. ш. 8 дам^2 летом и 20—25 дам^2 зимой.

Непосредственных оценок точности наблюдения за геопотенциалом в перечисленных выше работах не приводится. Косвенные оценки, выполненные нами, позволяют считать, что среднее квадратическое значение случайной ошибки в определении высоты изобарической поверхности близко к 1 дам.

Поле температуры

Указанные выше сезонные различия характерны также и для статистической структуры поля температуры.

На рис. 4 приводятся корреляционные функции поля температуры, рассчитанные Алака и Элвандером [9] для января и июля

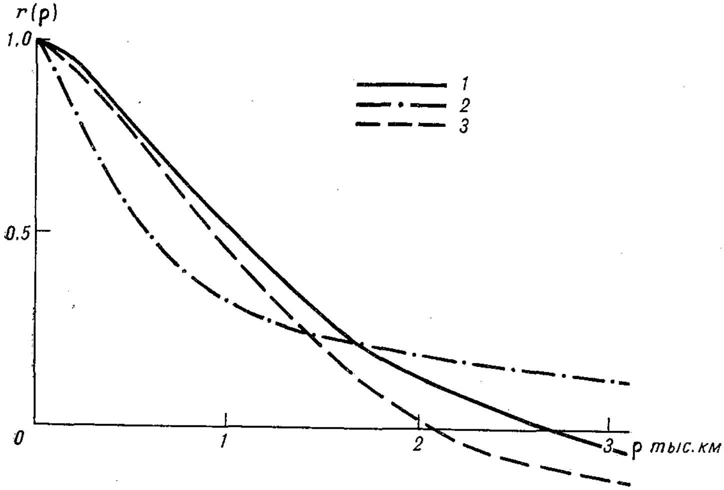


Рис. 4. Пространственные корреляционные функции температуры изобарической поверхности 500 мб.

1 — январь; 2 — июль, по данным [9]; 3 — зима, по данным [1].

и аппроксимированные следующими формулами:
для января

$$r(\rho) = 1{,}13e^{-0{,}561\,\rho^{1{,}41}} - 0{,}13; \qquad (6)$$

для июля

$$r(\rho) = \left(0{,}774e^{-1{,}87\,\rho^{1{,}21}} + 0{,}226\right)\cos(0{,}317\,\rho). \qquad (7)$$

Сопоставление их между собой, а также с корреляционной функцией умеренных широт из работы В. П. Болтенкова [1] для зимы приводит к тем же выводам, что и анализ статистической структуры поля геопотенциала. К сожалению, в работе [9] приведены только средние для всей области значения дисперсии, которые составляют для января 5,6 град^{2}С, для июля 2,0 град^{2}С. Средние квадратические значения случайных ошибок наблюдения за температурой на высотах по данным [9] составляют 0,8°С, что хорошо согласуется с результатами оценок [1] для умеренных широт (1°С).

Поле ветра

Исследования пространственной корреляционной функции сотавляющих вектора ветра в приэкваториальных широтах выполены Т. П. Калугиной, М. В. Карташовой [4] и Т. П. Калугиной, I. В. Туен [5]. Расчеты производились по данным 60 станций, расоложенных между 20° с. ш. и 20° ю. ш. и 70° в. д. и 135° з. д. ыбрано по 60 ситуаций из двух зимних (декабрь — февраль 964-65 и 1965-66 гг.) и из двух весенних (март — май 1965—966 гг.) сезонов.

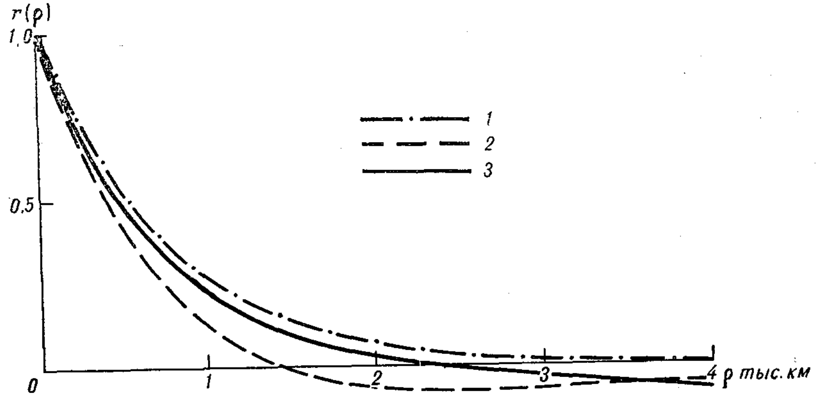


Рис. 5. Пространственные корреляционные функции составляющих вектора ветра для зимы по данным [4].

1 — продольная составляющая, 2 — поперечная составляющая, 3 — среднее из корреляционных функций зональной и меридиональной составляющих.

Нормированные корреляционные функции зональной (U) и меридиональной (V) составляющих для каждого из выбранных сезонов близки, сезонные различия также невелики. Поэтому авторы рекомендуют для практических целей пользоваться одной корреляционной функцией для обеих составляющих и обоих сезонов. Осредненная корреляционная функция составляющих U и V для зимы представлена на рис. 5. Кроме корреляционных функций зональной и меридиональной составляющих вектора ветра, в работе [4] получены также корреляционные функции продольной (U_{ll}) и поперечной (U_{nn}) составляющих для тех же сезонов. Рассчитанные функции аппроксимированы следующими аналитическими выражениями:

продольная составляющая

зима

$$r_{U_{ll}}(\rho) = 0{,}69e^{-0{,}9\,\rho} + 0{,}31(1 - 1{,}1\,\rho)\,e^{-1{,}1\,\rho}; \qquad (8)$$

весна

$$r_{U_{ll}}(\rho) = 0{,}73e^{-0{,}95\,\rho} + 0{,}27(1 - 1{,}05\,\rho)\,e^{-1{,}05\,\rho}; \qquad (9)$$

поперечная составляющая

зима

$$r_{U_{\text{пп}}}(\rho) = 0{,}69(1-0{,}9\,\rho)\,e^{-0{,}9\,\rho} + 0{,}31e^{-1{,}1\,\rho}; \qquad (10)$$

весна

$$r_{U_{\text{пп}}}(\rho) = 0{,}73(1-0{,}95\,\rho)\,e^{-0{,}95\,\rho} + 0{,}27e^{-1{,}05\,\rho}. \qquad (11)$$

Анализ приведенных формул показывает, что сезонные различия для продольных и поперечных составляющих также невелики Однако для различных составляющих корреляционные функции различаются весьма существенно. Корреляционная функция продольной составляющей затухает существенно медленнее, чем поперечной (см. рис. 5). Это обстоятельство следовало бы учитывать при анализе векторного поля ветра, но в настоящее время анализируют обычно отдельно величины U и V, различия между корреляционными функциями которых, как уже указывалось выше, незначительны.

Авторы, отмечают, что, в отличие от умеренных широт, где распределение ветра близко к круговому, в приэкваториальной области наблюдается существенное различие между дисперсиями зональной и меридиональной составляющих. Для зимы их значения соответственно равны 33,3 и 19,1 м²/с².

В работе [9] выполнены расчеты корреляционных функций зональной и меридиональной составляющих вектора ветра для января и июля по тому же объему исходных данных, что и для температуры и геопотенциала. Они аппроксимированы следующими эмпирическими формулами:

июль

$$r_U(\rho) = \left(1{,}02e^{-1{,}71\,\rho^{1{,}36}} - 0{,}02\right)\cos(0{,}19\,\rho); \qquad (12)$$

$$r_V(\rho) = \left(1{,}14e^{-2{,}13\,\rho^{1{,}8}} - 0{,}14\right)\cos(0{,}34\,\rho); \qquad (13)$$

январь

$$r_U(\rho) = \left(2{,}70e^{-0{,}211\,\rho^{1{,}16}} - 1{,}70\right)\cos(0{,}356\,\rho); \qquad (14)$$

$$r_V(\rho) = \left(1{,}69e^{-0{,}441\,\rho^{1{,}40}} - 0{,}69\right)\cos(0{,}279\,\rho). \qquad (15)$$

Описанные корреляционные функции представлены на рис. 6. Из рисунка видно, что в каждом сезоне корреляционные функции составляющих U и V различаются не очень сильно, в то время как сезонные различия весьма значительны. О возможных причинах этих различий уже говорилось выше (см. раздел 3.1).

На рис. 7 представлены осредненные корреляционные функции составляющих U и V для июля и января по данным [9] и по данным [4] для зимы. Как видно из рисунка, корреляционные функции в экваториальной зоне для зимнего сезона и во всей области между 30 и 0° с. ш. для июля на малых расстояниях (до 1000 км) существенно не различаются.

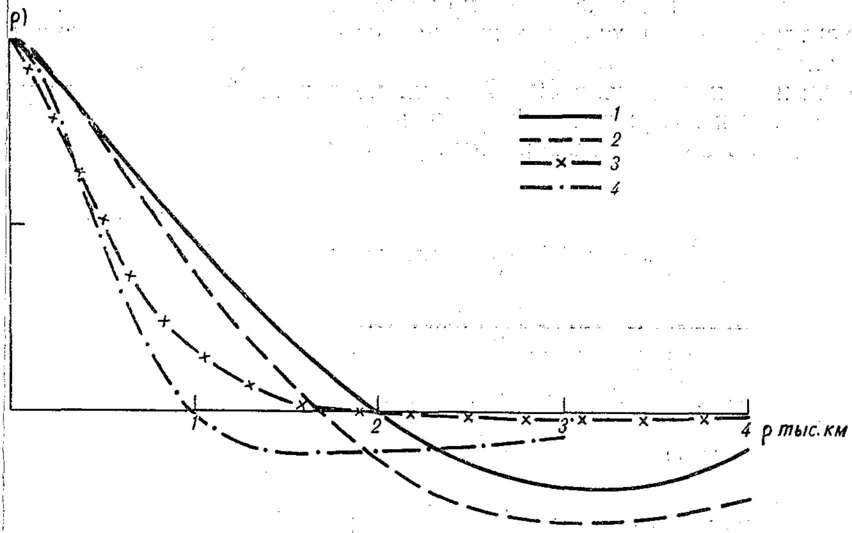


Рис. 6. Корреляционные функции меридиональной и зональной составляющих вектора ветра для января и июля.
1 — r_U, 2 — r_V, январь; 3 — r_U, 4 — r_V, июль.

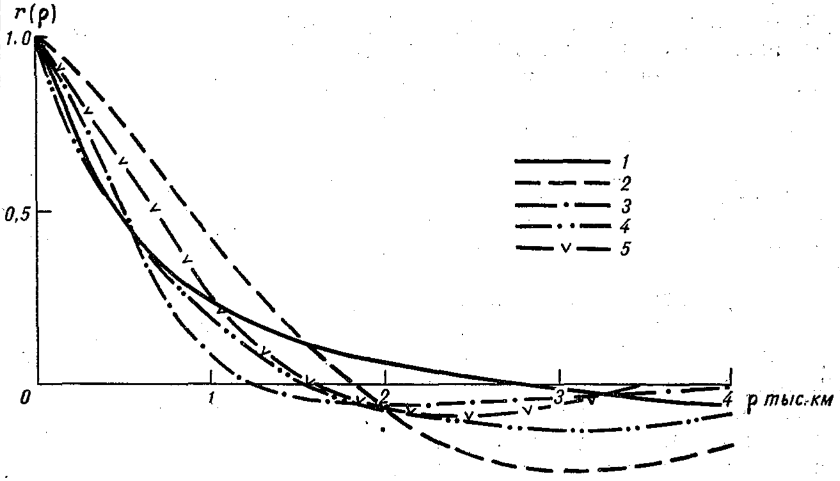


Рис. 7. Пространственные корреляционные функции $r(\rho) = \left(\frac{r_U + r_V}{2}\right)$.
1 — по данным [4]; 2, 3 — по данным [9] для января и июля; 4 — по данным [12]; 5 — по данным [6].

Сравнение данных, полученных Алака и Элвандером [9] за имний период, с данными Калугиной и Карташовой [4] показыает наличие существенных расхождений, которые связаны, вероято, с тем, что в первой из этих работ помимо экваториальной обасти привлечены данные и из субтропиков.

Из таблицы, в которой приводятся дисперсии составляю вектора ветра и средние квадратические ошибки наблюдения данным Алака и Элвандера, видно, что различия между дисп сиями U и V в зоне 30—0° с. ш. невелики. Это не согласуе с данными Калугиной и Карташовой и связано, по-видимому, т же с особенностями выбранных районов.

Таблица

Дисперсии (σ^2) и средние квадратические ошибки наблюдений (δ) за ветром на изобарической поверхности 500 мб по данным [9]

Составляющая вектора ветра	Месяц	σ^2 (м/с)^2	δ м/с
Зональная (U)	Январь	64,4	2,4
	Июль	12,0	2,1
Меридиональная (V)	Январь	51,2	2,4
	Июль	9,0	2,1

В работе Г. Стейница и др. [12] приводится корреляционн функция составляющих вектора ветра для года в целом. Испо зованные этими авторами исходные данные описаны в разделе Корреляционная функция аппроксимирована формулой

$$r(\rho) = \left(0{,}9e^{-1{,}255\,\rho^{0,8}} + 0{,}1\right)\cos\rho. \qquad ($$

Эта корреляционная функция представлена также на рис. 7, которого видно, что данные [12] хорошо согласуются с осре ненной для двух составляющих корреляционной функцией из боты [4].

Для сравнения с корреляцией ветра в умеренных широтах воспользовались результатами работы [6], в которой приводят корреляционные функции меридиональной и зональной составля щих ветра для зимнего и летнего сезонов.

Отмечая отсутствие систематических различий между расс танными функциями, автор рекомендует для целей объективно анализа использовать осредненную для обоих сезонов и обе составляющих корреляционную функцию, представленную так на рис. 7. Из анализа этого рисунка следует, что так же, как и д поля геопотенциала, корреляционная функция ветра в умеренн широтах выше, чем в экваториальных (между 20° с. ш. и 20° ю. и в субтропических в летний период (см. кривую *5*, рис. 7). В зи ний период корреляция составляющих вектора ветра, по данны [9], оказалась даже выше, чем в умеренных широтах.

Таким образом, для практического использования в зо 20° с. ш.—20° ю. ш. для всего года и во всей тропической зо

)° с. ш.—0) для лета можно рекомендовать одну корреляционю функцию из работы [4] (кривая *1*, рис. 7).

В зоне 30—20° с. ш. зимой целесообразно использовать корреционную функцию, полученную для умеренных широт [6] (крия *5*, рис. 7), либо соответствующую функцию из работы [9] (форлы (14, 15)). Наличие широтного хода дисперсии составляющих ктора ветра также следует учитывать при практических расчех. Если для летнего сезона можно рекомендовать соответствуюие данные Алака и Элвандера [9] (см. таблицу) для всей тропческой зоны, то в зимний период в зоне 20° с. ш.— 20° ю. ш. лее оправдано использование результатов Т. П. Калугиной М. В. Карташовой [4], а в зоне 20—30° с. ш.— соответствующих нных таблицы.

4. В заключение следует отметить, что в последующих работах изучению статистических характеристик метеорологических пой в тропической зоне было бы полезно разделить ее на две иротные зоны: экваториальную (20° с. ш. — 20° ю. ш.) и субопическую 20—30° с. ш. В настоящее время представляется бое важным изучение характеристик статистической структуры первую очередь именно в экваториальной зоне.

ЛИТЕРАТУРА

Болтенков В. П. Некоторые характеристики трехмерной макроструктуры температуры воздуха.—«Труды ГГО», 1966, вып. 191, с. 47—57.

Добрышман Е. М. Исследование статистических характеристик поля давления в низких широтах и определение движения по полю давления в экваториальной области.—«Труды ММЦ», 1965, вып. 7, с. 107—122.

Гандин Л. С., Кузнецова Т. И. О пространственной статистической структуре поля геопотенциала.—«Труды ГГО», 1965, вып. 168, с. 84—93.

Калугина Т. П., Карташова М. В. О статистических характеристиках поля ветра в экваториальной зоне и в средних широтах.—«Труды Гидрометцентра СССР», 1969, вып. 39, с. 67—83.

Калугина Т. П., Туен Н. В. О структуре поля ветра в приэкваториальной зоне.—«Метеорология и гидрология», 1967, № 10, с. 8—14.

Кричак М. О. Некоторые результаты исследования статистических характеристик поля ветра.—«Труды ГГО», 1967, вып. 208, с. 32—40.

Либерман Ю. М. О выборе пунктов для организации новых аэрологических станций на Северном полушарии.—«Труды ГГО», 1970, вып. 267, с. 52—62.

Машкович С. А. Применение быстродействующих вычислительных машин в целях планирования развития сети аэрологических станций.—«Метеорология и гидрология», 1963, № 7, с. 3—9.

Alaka M. A. and Elvander R. C. Optimum interpolation from observations of mixed quality.— Monthly Weather Review, 1972, vol. 100, No. 8, p. 612—624.

). Crutcher H. L. Upper wind statistics charts of the Northern Hemisphere vol. 1, 2. Issued by the office of the chief of Naval Operations 1959.

1. Daily series synoptic weather maps. Part II. Daily Bulletin U. S. Weather Bureau. 1958—1963.

2. Steinitz G. e. a. Optimum station network in the Tropics.— Journ. of Appl. Meteor., 1971, vol. 10, No. 3, p. 364—369.

Р. М. КОРОБ

О СТАТИСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПРИЗЕМНОГО ВЕТРА В ЮГО-ЗАПАДНОЙ ЧАСТИ ЕТС

В настоящее время по ветру накоплен огромный материал н блюдений, проведены фундаментальные разработки теоретическо плана по моделям общей циркуляции атмосферы, имеется обши ная литература, посвященная как климатографии, так и климат логии ветра. Особенно возросли возможности науки в изучени сложной структуры ветра с внедрением в практику статистически методов исследования. Однако проблема полного изучения ве ра, особенно регионального, настолько сложна и многообразн что имеющиеся работы далеко не исчерпывают все возрастающи запросы практики.

В статье изложены некоторые результаты выполненного нам широкого исследования режима ветра в юго-западной части Е ропейской территории СССР, касающиеся главным образом ег пространственной статистической структуры. Исходным материало для исследования послужили срочные наблюдения ветра на 6 станциях Украины и Молдавии. Минимальное расстояние межд станциями 18 км, максимальное —930 км. (О расположении станций можно судить по рис. 1.) За 5 лет (1966—1970) для январ и июля с интервалом в три дня выбрано по 60 ситуаций, отдельн для 3 и 15 ч московского времени и для зональной и меридиональной составляющих скорости ветра рассчитаны структурны и корреляционные функции отклонений U и V от норм, вычисленных по материалу выборки. Исходный массив информации обеспечил достаточную надежность полученных результатов.

Приняв гипотезу однородности и изотропности поля аномалий использовано осреднение по всему числу пар пунктов с последующим объединением значений функций для каждой пары станций по градациям расстояний. За интервал градации взято расстояние 50 км. Все расчеты выполнены на ЭВМ «Минск-22» п специально составленной программе. В основу программы положена методика, предложенная в работе Гандина Л. С. и Болтенкова В. П. [2].

Об однородности и изотропности реального ветра можно судить по распределению средних квадратических отклонений о норм компонентов ветра σ_U и σ_V. Применительно к полю дисперсий однородность и изотропность означает, что дисперсии σ^2_U и σ^2_V пооянны для всего поля и равны между собой в каждой точке, е. выполняется закон кругового распределения. Учитывая малую чность наблюдений над ветром, ряд авторов предлагают считать спределение ветра круговым, если отношение средних квадра-ческих отклонений σ_U и σ_V, т. е. $\frac{\sigma_U}{\sigma_V}$ изменяется в пределах 30—1,20.

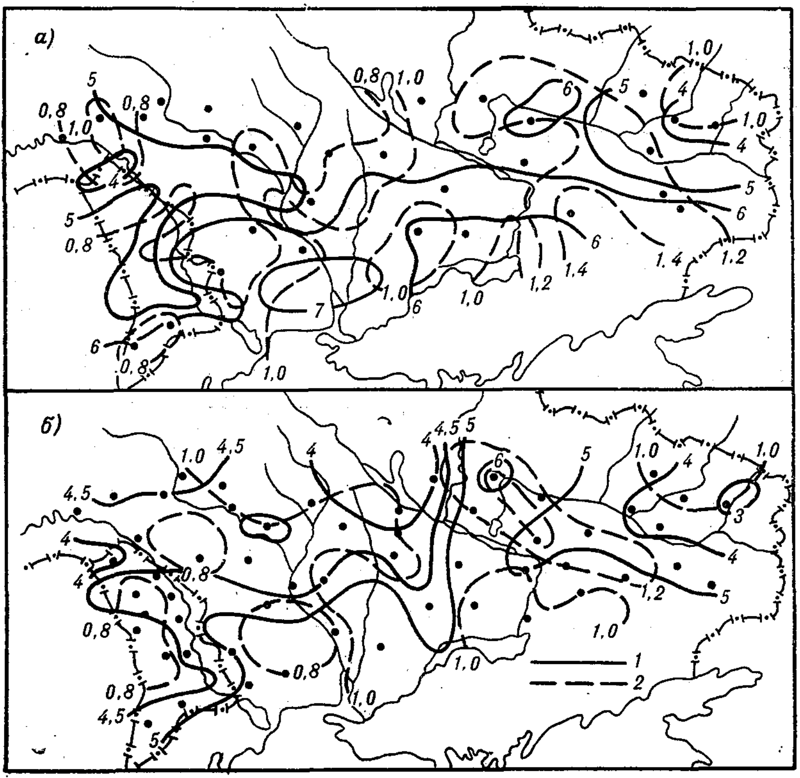


Рис. 1. Карты векторных средних квадратических отклонений.

а — январь, 15 ч.; б — июль, 15 ч; 1 — $\sigma_c = \sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_V^2}$, 2 — $\frac{\sigma U}{\sigma_V}$.

Для большинства рассмотренных станций величина $\frac{\sigma_U}{\sigma_V}$ не выходит из допустимых пределов. В поисках закономерности, мы картировали указанные соотношения (см. рис. 1). Как в январе, так и в июле дисперсия зональной составляющей меньше дисперсии меридиональной на западе района и больше на востоке и $\frac{\sigma_U}{\sigma_V}$ изменяется соответственно от 0,8 до 1,2, превышая эти значения лишь на отдельных участках. При этом нарушения однородности более значительные зимой, чем летом. Характер изменения отношения $\frac{\sigma_U}{\sigma_V}$ по территории объясняется скорее все циркуляционными факторами: с усилением скорости потока происходит рост изменчивости и ход величин σ хорошо согласуетс с распределением норм зональной и меридиональной составляющих. В среднем по освещаемому району значения σ практически равны и отношение $\frac{\sigma_U}{\sigma_V}$ находится в пределах 0,95—0,99 (табл. 1). Таким образом, подтверждаются выводы авторов [4, 5], что распределение ветра в средних широтах в целом мало отличаетс от кругового, во всяком случае в допустимых пределах.

На рис. 1 также представлены поля векторных средних квадратических отклонений $\sigma_c = \sqrt{\sigma_U^2 + \sigma_V^2}$. Анализ их показывает, что летом σ_c изменяется по территории от 4 до 5 м/с, зимой эти колебания более существенные (от 4 до 7 м/с). Различие полей для января и июля подтверждает необходимость отдельного расчета статистических характеристик для каждого сезона. Помимо сезонного, отчетливо проявляется суточный ход средних квадратических отклонений, особенно существенный летом. Как в январе так и в июле максимальные значения σ наблюдаются днем, возрастая в июле от 3 до 15 ч примерно в два раза.

Таблица 1

Дисперсии составляющих ветра σ^2 м^2/с^2, средние квадратические ошибки δ м/с и меры ошибок наблюдений η

	Январь, 0,3 ч		Январь, 15 ч		Июль, 15 ч	
	U	V	U	V	U	V
σ^2	9,7	10,5	12,3	12,7	6,8	7,5
δ	1,73	1,73	1,48	1,64	1,76	1,84
η	0,31	0,29	0,18	0,21	0,46	0,45

В случае однородности и изотропности взаимная связь между корреляционными $R_f(\rho)$ и структурными $B_f(\rho)$ функциями может служить для исправления значений их, полученных эмпирическим путем. Поэтому $R_f(\rho)$ и $B_f(\rho)$, рассчитанные независимо, согласовывались по методике, использованной в работе [2]. Дальнейшая обработка согласованных функций состояла в построении графиков, исключении ошибок наблюдений и последующем нормировании их на $R_f(0)$ и $B_f(\infty)$ соответственно.

Средний квадрат случайной ошибки наблюдений δ^2 обычно находят экстраполяцией на нуль структурной или корреляционной функции [1]. При использованном нами объеме выборки экстраполяция не составила особых затруднений в обоих случаях и полученные значения хорошо согласуются. Так же хорошо согласуются значения дисперсий, определенные различными независимыми

особами: вычислением квадратов отклонений от средних (зна-
ние, выданное машиной), экстраполированное на нуль значение
рреляционной функции и величина, полученная в процессе вза-
ного согласования функций, как полусумма $B+2R$, осредненная
всем градациям расстояний. Это говорит о достаточной надеж-
сти полученных результатов.

Значения ошибок наблюдений и дисперсий приведены в табл. 1.
етрудно подсчитать, что средние векторные ошибки $\delta_c = \sqrt{\delta_U^2+\delta_V^2}$
ставляют 2,2—2,6 м/с. Это несколько выше общепринятой точ-
сти измерения ветра на станциях. Большими оказались и вели-
ины мер ошибок наблюдений η, которые варьируют в пределах
т 0,18 до 0,46, что соответствует наличию случайных погреш-
остей в исходных данных в среднем от 42 до 68% естественной
зменчивости ветра. Такой «вес» ошибок наблюдений не позволил
ценить значения функций для 3 ч июля, когда при минималь-
ых в годовом ходе скоростях ветра ошибки наблюдений соизме-
имы с изменчивостью его. На факт увеличения ошибок наблюде-
ий, выделяемых при пространственном осреднении, указывала
ще М. О. Кричак [5]. Причина этого, по-видимому, лежит в фи-
ико-географических различиях в расположении станций, которые,
вляясь систематическими для каждого отдельного пункта, для до-
таточно большой территории уже выступают как случайные, что
риводит к вполне закономерному увеличению их при простран-
твенном осреднении. Поэтому, полученные значения точности
ряд ли можно использовать при оценке репрезентативности на-
людений ветра на станциях.

В табл. 2 приведены значения нормированных корреляционных
ункций аномалий составляющих ветра $r_f(\rho)$. Здесь же указано
исло пар станций и индивидуальных коэффициентов корреляции,
спользованных для получения значения функции в каждой гра-
ации. Мы ограничивались приведением данных лишь для 14 гра-
аций из 19, результаты в которых можно считать достаточно на-
ежными. Анализ корреляционных функций, полученных для
азличных сезонов и расстояний, показал следующее.

1. В январе корреляционные функции составляющих U и V
есьма схожи и для небольших расстояний (до 400 км) практи-
ески можно пользоваться одним осредненным значением; для
ольших ρr_U больше r_V. В июле это превышение наблюдается для
сех расстояний.

2. Переход функций через нуль происходит на расстояниях ρ_0,
ежащих в пределах 730—960 км, при этом ρ_0 больше для зональ-
ой составляющей и уменьшается от зимы к лету. По данным за
нварь также можно отметить некоторый суточный ход, а именно,
меньшение корреляционных связей в ночное время.

3. Начиная с $\rho\approx600$ км для всех функций характерно наличие
олны с амплитудой 0,1—0,2 протяженностью 200—300 км.

Полученные результаты, по крайней мере в качественном от-
ошении, согласуются с данными других авторов [4, 5]. Главное

различие с указанными работами заключается в меньших велич нах радиусов корреляции, что можно объяснить различием объе та исследования (приэкваториальная зона в [4], поверхнос 500 мб в [5]).

Мы ограничимся здесь приведением и анализом корреляцис ных функций. Рассматривать структурные функции просто к функции, по-видимому, нет смысла, ибо в случае согласован функций они представляют собой зеркальное отображение кс реляционных и поэтому новой информации не несут. Значител

Таблиц

Нормированные корреляционные функции аномалий составляющих ветра $r_f(\rho)$

Середина градации, км	Число пар	Число индивидуальных множителей	Январь, 03 ч		Январь, 15 ч		Июль, 15 ч	
			r_U	r_V	r_U	r_V	r_U	r_V
25	36	2160	0,97	0,98	0,97	0,98	0,96	0,96
75	153	9180	0,92	0,92	0,91	0,94	0,90	0,89
125	187	11220	0,87	0,85	0,86	0,90	0,84	0,81
175	189	11340	0,79	0,78	0,81	0,85	0,79	0,74
225	192	11520	0,71	0,71	0,76	0,79	0,73	0,67
275	167	10020	0,63	0,64	0,70	0,72	0,67	0,60
325	123	7380	0,55	0,55	0,65	0,65	0,61	0,53
375	110	6600	0,47	0,46	0,59	0,57	0,56	0,45
425	104	6240	0,39	0,38	0,55	0,48	0,51	0,37
475	101	6060	0,31	0,29	0,49	0,39	0,49	0,30
525	86	5280	0,24	0,22	0,44	0,29	0,47	0,22
575	87	5220	0,20	0,16	0,39	0,22	0,47	0,15
625	60	3600	0,22	0,13	0,39	0,17	0,49	0,16
675	52	3120	0.22	0,17	0,37	0,18	0,49	0,15
ρ_0 км			830	820	960	875	850	730

но интереснее исследование структурных функций с точки зрени изучения изменчивости ветра с расстоянием и эмпирической пр верки ряда теоретических положений.

Так, на основании фундаментальных работ А. Н. Колмогоров А. Н. Обухова, М. И. Юдина известно, что при малых значения ρ структурная функция скорости ветра изменяется пропорци нально $\rho^{2/3}$. С увеличением расстояния «закон $^2/_3$» переходит в «за кон первой степени», т. е. функция $B_f(\rho)$ изменяется линейно, пр порционально ρ. Для проверки выполняемости указанных соотн шений для исследуемой территории была построена зависимос средней квадратической изменчивости модуля вектора ветр

$(\rho) = \sqrt{B_{U}^{2}(\rho) + B_{V}^{2}(\rho)}$ от ρ в логарифмических координатах
ис. 2).

Как видим из рисунка, все точки хорошо ложатся на прямые,
о позволяет аппроксимировать полученные зависимости выра-
ением

$$\sigma_c(\rho) = A\rho^{\alpha}, \tag{1}$$

е A — постоянная, определяемая как начальная ордината пря-
ой; α — показатель степени, равный тангенсу угла наклона пря-
ой.

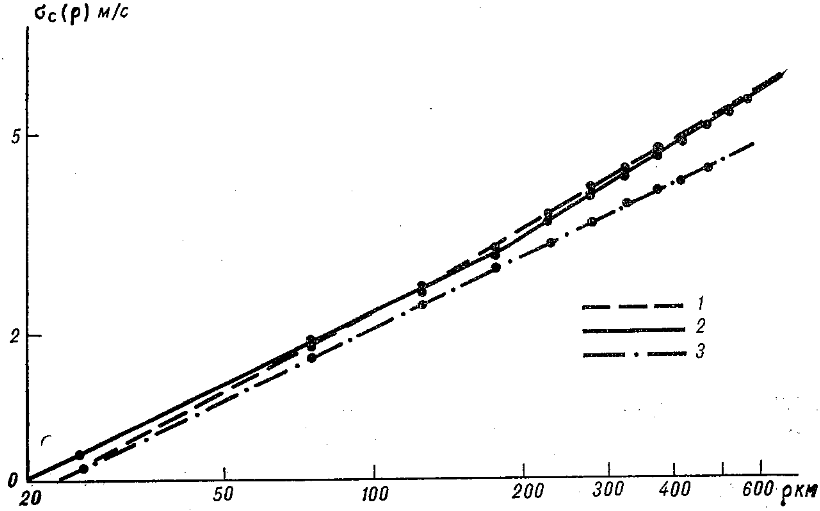


Рис. 2. Зависимость средней квадратической изменчивости вектора ветра $\sigma_c(\rho)$ от ρ в логарифмической шкале.
1 — январь, 03 ч; 2 — январь, 15 ч; 3 — июль, 15 ч.

Значения A и α приведены в табл. 3. Так как в январе отчет-
иво прослеживается излом прямых, то аппроксимация проведена
о участкам: до точки перелома ρ_1 и после ρ_2. Коэффициент A ха-
актеризует величину скорости диссипации энергии от крупных
ульсаций к более мелким, показатель степени α изменяется в за-
исимости от масштаба турбулентности, термических и динами-
еских условий.

Формула (1) достаточно хорошо описывает зависимость измен-
ивости ветра от расстояния в пределах от 20—25 до 500—600 км.
Этот диапазон ограничен размерами первой градации расстояний,
ринятой при обработке, и недостаточной надежностью данных,
олученных при больших расстояниях. Поэтому не исключено, что
бработка другого исходного материала изменит границы приме-
нимости указанных соотношений. Что касается полученных зави-
симостей, то, переходя к структурным функциям, можно заклю-
чить:

1) в июле для $25<\rho<500$ км структурная функция вектор ветра изменяется с расстоянием согласно «закону первой степени»;

2) в январе выполнение «закона первой степени» наблюдаетс для $25<\rho<130$ км в 3 ч и для $20<\rho<190$ км в 15 ч. Для больших расстояний показатель степени при ρ в формуле (1) несколько больше 0,5.

Рассчитанные нами значения хорошо согласуются с результатами М. В. Зовариной [3], полученными примерно для этой территории, но в слое 1—4 км. Величина α в работе [3] составляет 0,56.

Таблица 3

Параметры аппроксимации зависимости средней квадратической изменчивости вектора скорости ветра от расстояния ρ (км)

	Июль	Январь, 3 ч		Январь, 15 ч	
		ρ_1	ρ_2	ρ_1	ρ_2
A	0,067	0,066	0,054	0,071	0,048
α	0,48	0,52	0,60	0,48	0,62

Весьма интересно сопоставить данные об изменчивости ветра со временем и в пространстве. Ведь в случае выполнения гипотезы о «замороженной турбулентности» (перенос флуктуаций скорости средним потоком) можно непосредственно перейти от пространственной изменчивости к изменчивости со временем, заменяя в формуле (1) ρ на $\overline{U}\,\tau$, где $\overline{U}$ — средняя скорость потока в км/ч, τ — временной сдвиг в часах [1]. Практически это должно означать, что изменчивость ветра за интервал времени τ равна измен-

Таблица 4

Изменчивость скорости ветра со временем (м/с), полученная непосредственной обработкой (σ_τ) и через пространственную изменчивость (σ_τ')

		Интервал времени τ, ч									
		3	6	9	12	15	18	21	24	30	36
Январь	σ_τ	2,1	3,0	3,6	4,1	4,5	4,9	5,2	5,5	5,9	6,1
	σ_τ'	1,9	2,7	3,4	4,0	4,5	5,1	5,3	6,0	6,9	7,4
Июль	σ_τ	1,6	2,1	2,5	2,8	3,0	3,2	3,4	3,5	3,7	3,8
	σ_τ'	1,6	2,2	2,7	3,1	3,4	3,7	4,0	4,2	4,6	5,0

ивости его на расстоянии, равном переносу возмущения средним
отоком за время τ.

Исходя из полученных нами норм U и V по исследуемой тер-
итории, средняя скорость ветра составила 24,8 км/ч в январе
19,4 км/ч в июле. Имея данные о пространственной изменчивости
етра и приняв гипотезу замороженной турбулентности, мы вы-
ислили среднюю квадратическую изменчивость скорости ветра за
азличные интервалы времени τ, которая приведена в табл. 4.
Здесь же приведены значения изменчивости скорости ветра σ
олученные в процессе непосредственной статистической обработки
езультатов по 6 станциям описываемой территории за те же
оды.

Как видим из табл. 4, в пределах суток (или 500—600 км) на-
блюдается хорошее выполнение гипотезы о замороженной турбу-
ентности. Это подтверждает также достаточную репрезентатив-
ость полученных нами данных о статистической структуре при-
емного ветра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Л., Гидрометеоиздат, 1967. 287 с.
2. Гандин Л. С., Болтенков В. П. К методике исследования трехмерной макроструктуры метеорологических полей.—«Труды ГГО», вып. 165, 1964, с. 5—15.
3. Заварина М. В. Исследование изменчивости ветра в свободной атмосфере.—«Труды НИУ ГУГМС», сер. 1, вып. 21, 1946, с. 20—64.
4. Калугина Т. П., Карташова М. В. О статистических характеристиках поля ветра в экваториальной зоне и в средних широтах.—«Труды Гидрометцентра СССР», 1969, вып. 39, с. 67—83.
5. Кричак М. О. Некоторые результаты исследования статистических характеристик поля ветра. —«Труды ГГО», вып. 208, 1967, с. 32—40.

Л. Л. БРАГИНСКАЯ, Г. А. СТЕНАНЕНК

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ СОВМЕСТНОЙ ПОВТОРЯЕМОСТ ГРОЗ В РАЗЛИЧНЫХ ПУНКТАХ

Изучение гроз имеет большое народнохозяйственное значен
в связи с тем, что грозы относятся к числу опасных явлений пог
ды. Существенный вред они наносят линиям связи и электропер
дач, авиации и сельскому хозяйству. До последнего времени из
чение режимных характеристик грозовой деятельности сводило
к анализу повторяемости и продолжительности гроз в отдельны
пунктах. Между тем эти данные недостаточны в случае, когд
необходимы сведения о размерах очагов гроз, о вероятности гр
зы по трассе или площади. Исследование пространственной ст
тистической структуры числа дней с грозой выполнено только дл
отдельных районов. Однако, как показано в работе [5], радиу
корреляции числа дней с грозой для центра ЕТС существенно о
личается от полученного в работе [7] для Восточной Сибири.

При переходе от пункта к окружающей территории характер
стики гроз существенно изменяются. В работе А. Н. Лебедев
[3] показано, что на территории Поволжья число дней с грозо
в районе радиусом 100 км в 2—3 раза, а в районе радиусо
200 км в 3—4 раза больше, чем по отдельным пунктам.

Большой интерес представляет вероятность появления гроз
на различных участках площади или трассы при наличии или о
сутствии грозы в ее центре. Такие сведения могут быть получен
если есть данные о вероятности одновременного появления гроз
в различных пунктах. В данной работе предпринята попытка полу
чить такие данные для конкретного географического района.

Для исследования был выбран район Центральных чернозем
ных областей, который по данным Е. П. Архиповой [1] характе
ризуется повышенной грозовой деятельностью. Расчеты выполн
ны для июля, так как в среднем за многолетний период наиболь
шее число дней с грозой наблюдается в июле.

По данным ежедневных наблюдений для каждого случая гр
зы были выписаны число, когда наблюдалась гроза, ее нача
и конец. Были использованы данные 47 станций Белгородско
Курской, Воронежской, Тамбовской и Брянской областей за пер
од 1956—1965 гг. Расположение станций приведено на рис. 1. Та
же приведено рассчитанное для каждой станции среднее числ
явлений в месяц *m*, а также средняя продолжительность явлени

ч). На рис. 1 видно, что число гроз существенно меняется по рритории. На некоторых станциях оно достигает 14—15 явлений; инимальное число гроз наблюдается на станции Россошь, в средм оно составляет 8 случаев в месяц. Средняя длительность грозы еняется по территории в пределах 1,4—4,0 ч, однако это менее адежная характеристика, и полученные для станций Красная ора, Щигры и Ново-Касторное величины t вызывают сомнение; ожно предположить, что на этих станциях неточно отмечается ремя начала и конца явления.

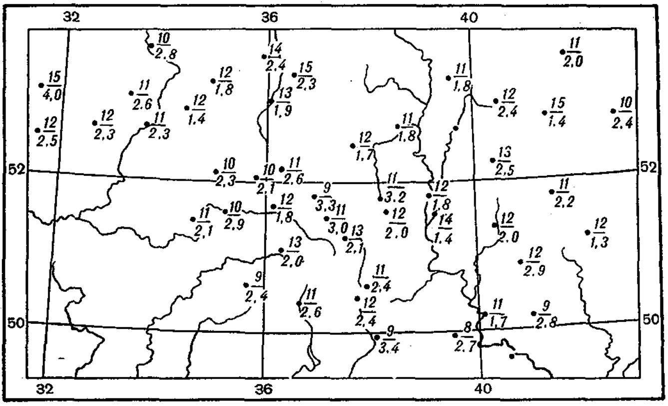


Рис. 1. Среднее число (над чертой) и продолжительность в часах (под чертой) гроз на станциях.

Наряду с характеристиками среднего числа и длительности явлений были получены среднее за месяц число дней с грозой (*a*), среднее число явлений за день с грозой (*в*), а также среднее квадратическое отклонение продолжительности грозы (σ_t). Все эти величины приведены в табл. 1.

Оказалось, что число гроз на 20—30% превосходит число дней с грозой, что хорошо согласуется с оценками А. Н. Лебедева [3]. Что касается среднего квадратического отклонения продолжительности грозы на станции, то оно сравнительно велико и на некоторых станциях близко к средней величине. Полученное в работе среднее число дней с грозой в период 1956—1965 гг. хорошо согласуется с данными, приведенными в Справочнике по климату СССР [6], некоторое различие между ними объясняется недостаточной длиной ряда.

При расчете вероятности одновременного появления грозы в различных пунктах для каждой пары станций определялось число случаев, когда на обеих станциях гроза наблюдалась одновременно, хотя бы в течение малого промежутка времени. При практических расчетах к числу таких случаев относятся и случаи, когда конец грозы в одном пункте совпадал с началом ее в другом

Характеристики повторяемости гроз в отдельных пунктах

Станция	m гроз/мес	a (число дней с грозой)		t ч	σ_t ч	b гроз/де
		за период 1956—1965 гг.	по данным Справочника по климату СССР			
Анна	12	10	10	2,0	1,5	1,2
Белгород	11	8	9	2,6	2,1	1,3
Богородицкое-Фенино	13	9	9	2,1	1,5	1,4
Богучар	9	6	8	2,1	1,8	1,5
Болхов	14	10	11	2,4	1,4	1,4
Большое Троицкое	12	9	8	2,4	1,7	1,3
Борисоглебск	12	9	9	1,9	1,1	1,3
Валуйки	9	8	9	3,4	1,9	1,4
Воронеж	14	10	10	1,4	1,3	1,4
Готня	9	8	7	2,4	1,5	1,1
Дмитриев	10	8	8	2,3	1,3	1,2
Елец	11	9	8	1,8	1,2	1,3
Жердевка	11	9	8	2,2	1,3	1,2
Жуковка	10	9	9	2,8	2,0	1,1
Злынка	12	9	9	2,5	1,7	1,3
Калач	9	7	9	2,8	1,9	1,3
Каменная степь	12	9	9	2,9	2,1	1,3
Карачев	12	9	9	1,8	1,3	1,3
Кирсанов	10	8	8	2,4	1,7	1,2
Красная гора	15	9	9	4,0	2,8	1,7
Конь-Колодезь	12	9	10	1,8	1,6	1,3
Курск	12	9	9	1,8	1,3	1,4
Лев Толстой	11	8	9	1,8	1,6	1,4
Ливны	12	9	9	1,7	1,6	1,4
Липецк	11	7	8	1,5	1,2	1,5
Льгов	10	8	9	2,9	1,7	1,2
Мичуринск	12	9	9	2,1	1,5	1,3
Моршанск	11	9	8	2,0	1,5	1,3
Мценск	15	10	9	2,3	1,4	1,4
Навля	12	8	8	1,4	1,1	1,4
Нижнедевицк	12	9	9	2,0	1,4	1,3
Ново-Касторное	11	9	8	3,2	2,4	1,2
Новый Оскол	11	8	9	2,4	1,5	1,3
Обоянь	13	9	8	2,0	1,5	1,9

Станция	m гроз/мес	a (число дней с грозой)		t ч	σ_t ч	b гроз/день
		за период 1956—1965 гг.	по данным Справочника по климату СССР			
ел	13	9	9	1,9	1,7	1,4
вловск	11	7	8	1,7	1,5	1,6
ныри	11	9	7	2,6	1,9	1,2
чеп	11	10	9	2,6	1,8	1,2
льск	11	8	7	2,1	1,6	1,3
ссошь	8	6	9	2,7	2,7	1,3
вхоз им. Ленина	13	10	9	2,6	1,5	1,3
ародуб	12	10	9	2,3	2,2	1,2
мбов	15	10	8	1,4	1,2	1,5
м	11	10	10	3,0	2,2	1,2
убчевск	11	9	9	2,3	1,5	1,2
теж	10	8	7	2,1	1,3	1,3
игры	9	9	8	3,3	2,7	1,1

ункте. Для каждого случая определялся также и промежуток емени, когда гроза наблюдается на обеих станциях.

Полученные для каждой пары станций результаты были осред- ены по градациям расстояний. Для каждой градации рассчиты- алось среднее за месяц число явлений, наблюдавшихся одновре- енно на двух станциях хотя бы в течение малого промежутка ремени k, а также средний промежуток времени (T), в течение ко- орого явление наблюдалось на обеих станциях. В табл. 2 для каж- ой градации приведены число пар станций, попавших в данную радацию, n; число явлений k, величина T, среднее квадратическое тклонение величины k в градации σ_k, а также среднее квадрати- еское отклонение промежутка времени T в градации σ_T. Число ρ сть среднее для градации расстояние. Из табл. 2 видно, что с уве- ичением расстояния число k убывает, причем на больших рассто- ниях существенно медленнее, чем на малых. Если на расстоянии 75 км число явлений k убывает почти в три раза, то далее (до асстояния 600 км) оно убывает только вдвое. Это объясняется ем, что на малых расстояниях бóльшую роль играют очаги гроз, аиболее вероятный радиус которых, по данным Т. В. Лободина [4], составляет около 20 км. На бóльших расстояниях грозы, на- блюдающиеся в течение какого-либо промежутка времени одно- временно на двух станциях, носят, по-видимому, чаще всего фрон- альный характер. Такие грозы могут охватывать огромные тер- итории протяженностью более 1000 км. Это хорошо согласуется полученным в работе [5] радиусом корреляции месячных значе- ий числа дней с грозой, который имеет порядок около 600 км.

Что касается величины T, то ее зависимость от расстояния ан логична описанной выше зависимости числа k от расстояния. Сто заметить, что некоторые пары станций дают число явлений, одн временно наблюдающихся на двух станциях в течение какого-либо промежутка времени, а также величину промежутка врем ни, когда явление наблюдается на обеих станциях, существен превышающие средние для градации значения k и T. Так, можн отметить станции Красная Гора, Валуйки и Стародуб, котор с остальными станциями дают завышенное число и длительнос гроз, одновременно наблюдающихся на двух станциях в течен какого-либо промежутка времени.

Таблица 2

Число и продолжительность гроз, одновременно наблюдающихся на двух пунктах, в зависимости от расстояния между ними

км	n	k гроз/мес	σ_k гроз/мес	T ч/мес	σ_T ч/мес	v
0	47	11,5	1,6	26,6	8,5	1
45	11	6,9	1,2	11,6	3,0	0,60
75	55	5,1	0,7	8,1	1,9	0,44
125	90	3,6	0,6	5,1	1,5	0,31
175	82	3,0	0,5	4,0	1,3	0,26
250	104	2,5	0,6	3,1	1,2	0,21
350	49	2,0	0,5	2,4	0,8	0,17
450	19	1,7	0,4	2,3	0,6	0,15
600	48	1,6	0,3	2,5	0,8	0,14
730	5	1,4	0,2	2,4	0,7	0,12

В последней графе табл. 2 приведены вероятности v одновременного наблюдения грозы в различных пунктах, полученные путем деления величины k на среднее число явлений на площади Зависимость этой величины от расстояния может быть аппроксимирована суммой экспоненциальных функций вида

$$v(\rho) = 0{,}44e^{-2{,}86|\rho|} + 0{,}56e^{-24{,}5|\rho|}, \qquad (1)$$

где ρ — расстояние в 10^3 км.

Аппроксимация (1) удовлетворительно описывает эмпирические данные для тех расстояний, которые практически имеют место, т. е. для $\rho > 30$ км; разумеется, для меньших расстояний, сопоставимых с размерами очагов грозы, эта формула не точна, поскольку предполагается, что площадь, занимаемая очагом, равна нулю.

Полученная зависимость вероятности от расстояния позволила рассчитать среднюю вероятность того, что в любой точке трассы и площади будет гроза, если она имеет место в центральной точ- , аналогично тому, как это сделал Р. Л. Каган [2] для осадков.

Средняя вероятность p появления грозы в любой точке площа- , если она имеет место в центральной точке, определяется по ормуле

$$p = \frac{1}{S} \iint\limits_{S} v(x,\ y)\, dx\, dy. \tag{2}$$

В случае, когда площадь S ограничена кругом, так как вели- ина v зависит лишь от расстояния от центральной точки, имеем

$$p = 2 \int_{0}^{1} v\left(\frac{l}{2} \rho\right) \rho\, d\rho, \tag{3}$$

е l — диаметр круга.

В результате подстановки (1) в (3) получаем

$$p = \frac{0{,}43}{l^2} \left[1 - (1{,}43l + 1) e^{-1{,}43l}\right] + \frac{0{,}008}{l^2} \left[1 - (12{,}2l + 1) e^{-12{,}2l}\right], \tag{4}$$

е l в 10^3 км.

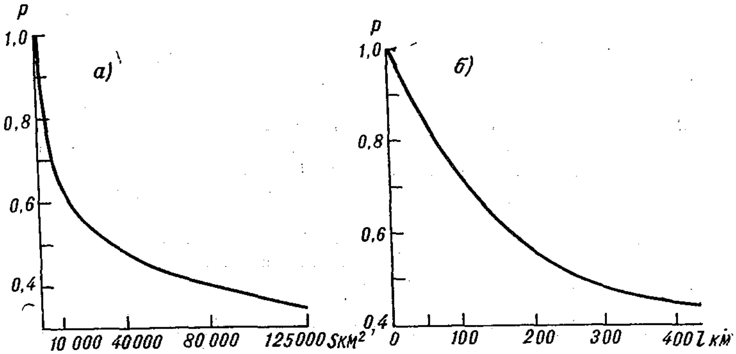


Рис. 2. Средняя вероятность появления грозы в любой точке площади (а) и на трассе (б), если имеет место гроза в центре.

На рис. 2 а представлена зависимость величины p от размера лощади. Для территории площадью 4000 км² вероятность того, то гроза будет иметь место в любой точке при наличии грозы центре равна 80%.

Для авиации большой интерес представляют данные о вероят- ости грозы на трассе. При этом вероятность того, что в любой очке трассы будет гроза, если она имеет место в центральной очке, определяется по формуле

$$p = \frac{1}{l} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} v(\rho)\, d\rho. \tag{5}$$

Подстановка (1) в формулу (5) дает

$$p=\frac{0{,}308}{l}[1-e^{-1{,}43l}]+\frac{0{,}046}{l}[1-e^{-12{,}2l}], \qquad ($$

где l в 10^3 км.

На рис. 2 *б* приведена зависимость величины p от расстояни До расстояний 300—400 км вероятность грозы в любой точке тра сы, если она имеет место в центре, составляет около 45%.

Выполненные оценки пригодны для территории Центральны черноземных областей; применимость их для других условий тр бует дальнейшего исследования. Рассмотренные грозы не разделя лись на фронтальные и внутримассовые, поэтому представляе интерес исследование того, являются ли грозы, наблюдающиес одновременно на двух станциях в течение какого-либо промежутк времени, результатом прохождения фронта, либо это ряд изоли рованных внутримассовых гроз в неустойчиво стратифицированно воздушной массе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архипова Е. П. Карты географического распределения числа дней с гро зой на территории СССР.—«Труды ГГО», 1957, вып. 74, с. 41—60.
2. Каган Р. Л. О редукции метеорологических элементов на площади.— «Труды ГГО», 1966, вып. 191, с. 122—132.
3. Лебедев А. И. Вероятность грозы на ограниченном участке террито рии.— «Труды ГГО», 1957, вып. 74, с. 61—70.
4. Лободин Т. В. Размеры грозовых очагов.—«Метеорология и гидрология» 1967, № 3, с. 79—81.
5. Лугина К. М., Масанова М. Д. Пространственная изменчивость числ дней с грозой.—«Труды ГГО», 1973, вып. 308, с. 145—158.
6. Справочник по климату СССР, часть V. Облачность и атмосферные явле ния, вып. 28, Л., Гидрометеоиздат, 1968, с. 128—135.
7. Филиппов А. Х., Цирулькевич С. Г. Некоторые статистически характеристики гроз на территории СССР.—«Труды ГГО», 1969, вып. 242 с. 72—81.

К. М. ЛУГИНА, Р. Л. КАГАН

К ВОПРОСУ О ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОМ АНАЛИЗЕ БАРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. Важным аспектом проблемы объективного анализа метеорологических полей является привлечение данных, получаемых с метеорологических спутников Земли, трансозондов и некоторых других источников информации, которые не привязываются к стандартным синоптическим срокам и к фиксированным пунктам наблюдений. Для использования асиноптической информации при объективном анализе метеорологических полей представляется очень удобным метод оптимальной интерполяции. Этот метод позволяет априорно оценить средние квадратические погрешности анализа при различном расположении пунктов и сроков наблюдения, не прибегая к громоздким вычислениям на фактическом материале, а используя лишь данные о соответствующих корреляционных функциях и координатах (пространственных и временны́х) пунктов наблюдений.

В работах [11, 16] рассмотрены некоторые вопросы пространственно-временно́й интерполяции и оценены возможные уточнения ее по сравнению с используемой в настоящее время чисто пространственной интерполяцией. Оценки эти, однако, осложнялись тем, что данные по пространственно-временно́й корреляции имели небольшую детальность по времени. В работе Б. В. Овчинского [11] использовалась пространственно-временна́я корреляционная функция давления по данным Е. П. Борисенкова [1]. В работе А. Хасса [16] использовались данные С. М. Олевской [12] о пространственно-временно́й корреляции геопотенциала поверхности 500 мб. Обе эти корреляционные функции, как и корреляционная функция, полученная Г. В. Груза и В. Д. Казначеевой [4], вычислены лишь для сдвигов времени кратных суткам. Большую детальность для барического поля в свободной атмосфере обеспечить трудно в связи с недостаточной частотой наблюдений. Поскольку частота наблюдений за приземным давлением гораздо больше, естественно начать более детальное исследование характеристик пространственно-временно́й структуры именно с него.

Ниже приводятся некоторые данные о пространственно-временно́й корреляции приземного барического поля. Эти данные используются для оценки эффективности привлечения при анализе барического поля наблюдений за другие сроки.

2. Исходные данные для расчетов снимались с карт пого которые составляются в Северо-Западном УГМС через кажд 3 ч. Выписывались данные 50 станций за январь 196 1971 гг. В каждом месяце выбрано 5 трехсуточных серий (25 с ков в каждой серии) с интервалом трое суток между серия Таким образом, для каждой станции имелось 500 значений п земного давления, приведенного к уровню моря.

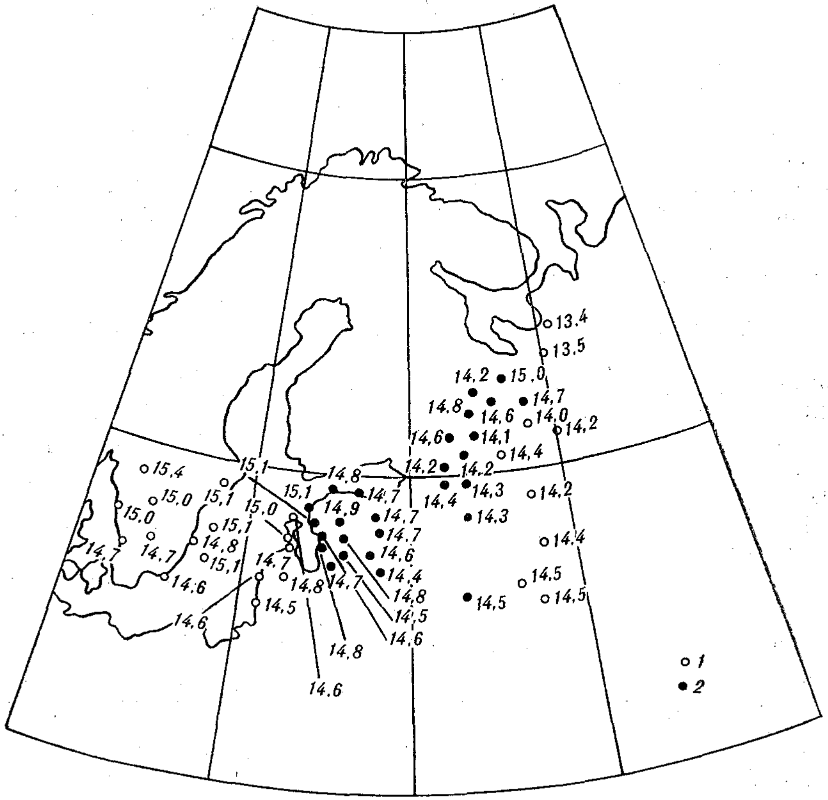


Рис. 1. Расположение пунктов, данные которых использовались дл расчетов.

1 — станции первой группы (те из них, которые располагались на территории ССС вошли также и во вторую группу), *2* — станции второй группы.

Расположение станций, использованных для расчетов, представлено на рис. 1.

Расчеты осуществлялись в предположении однородности и изотропности корреляционной функции относительно пространственного смещения и стационарности ее относительно смещений в времени, т. е. корреляционная функция искалась в виде

$$r(\lambda_i,\ \varphi_i,\ t_i,\ \lambda_k,\ \varphi_k,\ t_k)=r(\rho,\ \tau), \qquad (1$$

$\tau = |t_i - t_k|$ — сдвиг во времени, ρ — расстояние между стан- ями в тыс. км, определяемое по формуле

$$\rho = 6{,}37\left[\frac{\pi}{2} - \arcsin(\sin\varphi_i \sin\varphi_k + \cos\varphi_i \cos\varphi_k \cos\Delta\lambda)\right], \qquad (2)$$

$$\Delta\lambda = \begin{cases} \lambda_i - \lambda_k & \text{при } |\lambda_i - \lambda_k| < \pi \\ 2\pi - |\lambda_i - \lambda_k| & \text{при } |\lambda_i - \lambda_k| \geqslant \pi, \end{cases}$$

и φ — долгота и широта, r — значение корреляционной функции.

Программа, составленная для вычисления пространственно- еменной корреляционной функции, в значительной мере анало- чна программе, описанной в [8]. Отличие заключается в том, о вместо одной пространственной корреляционной функции для нхронных значений в данной программе осуществляется повтор- ый расчет пространственных корреляционных функций для раз- ичных сдвигов времени τ.

В связи с большим количеством исходных данных, даже с ис- льзованием накопителя на магнитном барабане, оказалось за- уднительным проведение расчетов по всему материалу за один иием. Поэтому расчет пространственно-временной корреляции оизводился раздельно для двух групп станций. В первую груп- у вошли 25 станций, расположенных на юге Швеции, в Совет- кой Прибалтике и на северо-западе Европейской территории ССР (ЕТС). Вторая группа включала 40 станций, расположен- ых в Прибалтике и на северо-западе ЕТС. Некоторые станции ыли включены в обе группы (см. рис. 1). Программа преду- матривала непосредственный расчет нормированных корреляци- нных функций, ковариационные функции не вычислялись. При том для каждого коэффициента корреляции средние значения дисперсии для каждой пары пунктов вычислялись заново по ому объему материала, который использовался для расчета это- о коэффициента корреляции. Наряду с этим для каждой станции ыли вычислены средние значения и средние квадратические от- лонения (σ) по всему имеющемуся материалу. Значения σ также риведены на рис. 1.

Сравнение средних значений давления для января, рассчитан- ых за 4 года (1968—1971 гг.), с картами норм [13] показывает, то в последние годы среднее давление на 2—4 мб выше, чем за ериод 1881—1935 гг. Эти различия можно считать несуществен- ыми, если учесть, что, по данным О. А. Дроздова, даже средние а различные десятилетия могут отличаться на 6—8 мб [5]. Средние квадратические отклонения, полученные нами, хорошо согласуют- ся с данными, опубликованными в работе [9] за 30-летний ериод.

3. Сопоставление пространственно-временных корреляционных функций, полученных по данным станций первой и второй групп, показало, что они практически совпадают. Поэтому оказалось возможным их объединение. Соответствующие результаты представлены в табл. 1, в которой приводятся средние из значений коэф-

Пространственно-временная корреляци

Градация, тыс. км	Середина градации, тыс. км.	Число пар	τ=0 ч		τ=3 ч		τ=6 ч	
			r	σ_r	r	σ_r	r	
0	0	65	—	—	0,994	0,002	0,981	0,
0—0,050	0,025	5	0,998	0,000	0,994	0,002	0,981	0,
0,051—0,100	0,075	56	0,996	0,002	0,991	0,003	0,979	0,0
0,101—0,150	0,125	76	0,992	0,003	0,987	0,005	0,975	0,0
0,151—0,200	0,175	70	0,984	0,006	0,980	0,008	0,968	0,0
0,201—0,250	0,225	74	0,977	0,008	0,973	0,010	0,961	0,0
0,251—0,300	0,275	56	0,968	0,010	0,964	0,011	0,952	0,0
0,301—0,350	0,325	48	0,953	0,015	0,950	0,016	0,940	0,0
0,351—0,400	0,375	45	0,938	0,019	0,935	0,021	0,925	0,0
0,401—0,450	0,425	26	0,921	0,029	0,917	0,031	0,907	0,0
0,451—0,500	0,475	38	0,921	0,033	0,917	0,034	0,909	0,0
0,501—0,550	0,525	36	0,907	0,041	0,904	0,043	0,895	0,04
0,551—0,600	0,575	50	0,894	0,040	0,892	0,042	0,883	0,04
0,601—0,700	0,650	111	0,875	0,041	0,873	0,042	0,865	0,04
0,701—0,800	0,750	101	0,835	0,039	0,833	0,041	0,826	0,04
0,801—0,900	0,850	85	0,826	0,035	0,825	0,037	0,819	0,03
0,901—1,000	0,950	52	0,801	0,037	0,796	0,038	0,791	0,03
1,001—1,200	1,100	67	0,755	0,031	0,754	0,031	0,751	0,033
1,201—1,500	1,350	84	0,669	0,051	0,669	0,044	0,667	0,046

Таблица 1

кция поля приземного давления

$\tau=9$ ч		$\tau=12$ ч		$\tau=15$ ч		$\tau=18$ ч		$\tau=21$ ч		$\tau=24$ ч	
	σ_r	r	σ_r	r	σ_r	r	σ_r	r	σ_r	r	σ_r
61	0,009	0,936	0,011	0,908	0,015	0,876	0,019	0,847	0,024	0,811	0,028
61	0,013	0,936	0,019	0,908	0,026	0,877	0,032	0,844	0,038	0,807	0,045
59	0,010	0,936	0,015	0,908	0,019	0,877	0,023	0,842	0,027	0,818	0,031
57	0,012	0,933	0,016	0,905	0,020	0,875	0,034	0,841	0,028	0,814	0,033
50	0,016	0,926	0,020	0,897	0,024	0,869	0,029	0,836	0,034	0,808	0,038
44	0,019	0,921	0,022	0,895	0,028	0,864	0,032	0,833	0,037	0,807	0,041
936	0,020	0,913	0,025	0,887	0,030	0,857	0,035	0,825	0,039	0,803	0,042
923	0,026	0,902	0,031	0,876	0,036	0,848	0,041	0,816	0,046	0,794	0,051
909	0,030	0,887	0,035	0,862	0,041	0,834	0,046	0,804	0,051	0,779	0,056
891	0,041	0,870	0,046	0,846	0,050	0,818	0,054	0,790	0,058	0,763	0,060
894	0,041	0,875	0,044	0,851	0,047	0,825	0,050	0,797	0,050	0,779	0,056
880	0,049	0,862	0,054	0,839	0,058	0,811	0,062	0,784	0,062	0,773	0,069
869	0,047	0,849	0,050	0,826	0,054	0,796	0,057	0,773	0,056	0,760	0,063
852	0,048	0,834	0,051	0,813	0,053	0,788	0,057	0,761	0,058	0,738	0,068
814	0,045	0,798	0,049	0,777	0,054	0,752	0,059	0,726	0,059	0,700	0,074
808	0,041	0,793	0,040	0,773	0,044	0,751	0,049	0,726	0,049	0,700	0,062
781	0,040	0,768	0,041	0,750	0,047	0,730	0,052	0,707	0,052	0,688	0,071
742	0,036	0,729	0,040	0,714	0,047	0,694	0,053	0,672	0,054	0,647	0,074
661	0,048	0,652	0,050	0,640	0,053	0,624	0,058	0,608	0,058	0,575	0,069

Градация, тыс. км	Середина градации, тыс. км	Число пар	τ=27 ч		τ=30 ч		τ=33 ч	
			r	σ_r	r	σ_r	r	
0	0	65	0,777	0,034	0,740	0,037	0,712	0,0
0—0,050	0,025	5	0,771	0,055	0,735	0,062	0,708	0,0
0,051—0,100	0,075	56	0,786	0,035	0,740	0,039	0,709	0,0
0,101—0,150	0,125	76	0,781	0,038	0,739	0,042	0,708	0,0
0,151—0,200	0,175	70	0,775	0,042	0,737	0,045	0,707	0,0
0,201—0,250	0,225	74	0,776	0,044	0,733	0,048	0,704	0,0
0,251—0,300	0,275	56	0,772	0,044	0,731	0,051	0,701	0,0
0,301—0,350	0,325	48	0,763	0,054	0,720	0,059	0,691	0,0
0,351—0,400	0,375	45	0,749	0,057	0,711	0,059	0,682	0,0
0,401—0,450	0,425	26	0,732	0,064	0,719	0,066	0,670	0,0
0,451—0,500	0,475	38	0,748	0,056	0,710	0,058	0,684	0,0
0,501—0,550	0,525	36	0,745	0,071	0,697	0,073	0,672	0,07
0,551—0,600	0,575	50	0,733	0,065	0,688	0,066	0,663	0,06
0,601—0,700	0,650	111	0,714	0,072	0,678	0,075	0,653	0,07
0,701—0,800	0,750	101	0,673	0,080	0,646	0,084	0,620	0,08
0,801—0,900	0,850	85	0,676	0,069	0,646	0,075	0,622	0,08
0,901—1,000	0,950	52	0,664	0,078	0,630	0,084	0,605	0,09
1,001—1,200	1,100	67	0,622	0,086	0,600	0,094	0,517	0,10
1,201—1,50	1,350	84	0,556	0,077	0,547	0,084	0,528	0,09

фициентов корреляции (r), соответствующие данной градации ра
стояний между пунктами (как обычно, значения относятся к с
редине градации) и заданному сдвигу времени. Кроме того, указ
вается величина среднего квадратического отклонения коэфф
циентов корреляции в градации σ_r и количество пар станций
которые попадают в заданную градацию. Для каждой пары ста
ций и каждого сдвига времени (кроме τ=0) вычисляются два к
эффициента корреляции. Один из них соответствует положител
ному сдвигу времени на первой станции по сравнению со второй
а второй — отрицательному сдвигу времени. При наших расчета
в силу условия однородности и стационарности при определени
средней корреляции по градации использовались и те и други
коэффициенты корреляции. Поэтому число фактически использу
емых коэффициентов корреляции составляло 2 n при $\tau \neq 0$ и n пр
$\tau = 0$.

В таблице приводятся значения пространственно-временны
корреляционных функций, соответствующие сдвигу времени д
48 ч. Корреляционные функции для бо́льших сдвигов времени н
приводятся, поскольку они вычисляются по гораздо меньшему
объему исходных данных и, следовательно, мало надежны. Кро

Продолжение таблицы 1

$\tau=36_{\text{ч}}$		$\tau=39_{\text{ч}}$		$\tau=42_{\text{ч}}$		$\tau=45_{\text{ч}}$		$\tau=48_{\text{ч}}$	
r	$\sigma\ r$	r	$\sigma\ r$	r	$\sigma\ r$	r	$\sigma\ r$	r	$\sigma\ r$
,682	0,045	0,654	0,049	0,631	0,047	0,609	0,045	0,589	0,045
,676	0,073	0,647	0,080	0,613	0,081	0,597	0,075	0,579	0,067
,680	0,046	0,651	0,049	0,624	0,051	0,604	0,050	0,587	0,046
,679	0,046	0,651	0,051	0,624	0,052	0,605	0,050	0,586	0,049
,678	0,051	0,651	0,054	0,625	0,056	0,605	0,053	0,586	0,050
,676	0,052	0,647	0,053	0,622	0,053	0,601	0,051	0,576	0,049
,673	0,051	0,646	0,051	0,620	0,053	0,599	0,051	0,580	0,049
,662	0,062	0,635	0,062	0,610	0,053	0,588	0,059	0,568	0,055
,656	0,059	0,629	0,058	0,606	0,056	0,585	0,054	0,567	0,053
,646	0,064	0,621	0,063	0,598	0,062	0,578	0,058	0,565	0,057
,659	0,059	0,636	0,058	0,613	0,057	0,593	0,056	0,576	0,055
,646	0,074	0,623	0,072	0,600	0,070	0,580	0,071	0,566	0,071
,633	0,070	0,616	0,071	0,593	0,070	0,575	0,070	0,561	0,070
,629	0,081	0,606	0,082	0,582	0,084	0,568	0,086	0,552	0,085
,598	0,092	0,573	0,097	0,552	0,101	0,537	0,106	0,523	0,107
,599	0,088	0,576	0,093	0,554	0,100	0,536	0,107	0,521	0,109
.582	0,102	0,561	0,104	0,541	0,117	0,526	0,122	0,512	0,129
,556	0,112	0,534	0,119	0,514	0,128	0,499	0,131	0,487	0,131
0,513	0,097	0,498	0,103	0,483	0,105	0,469	0,111	0,460	0,109

е того, для целей объективного анализа данные измерений за роки, отстоящие более одних суток от интересующего нас момена времени, вряд ли могут быть использованы. Соответственно ри оценке точности интерполяции возможный сдвиг времени не ожет превысить двух суток.

При изучении табл. 1 естественно в первую очередь рассмотеть результаты для первых столбцов, соответствующие τ=0, т. е. исто пространственной корреляционной функции, и первой строки, оответствующие временной корреляционной функции.

Сравнение полученной нами пространственной корреляционной ункции с пространственными корреляционными функциями поля авления, приведенными в работах различных авторов [3, 7, 14], оказывает их удовлетворительное согласование. Наилучшим является согласование наших данных с данными Л. С. Гандина, В. П. Мелешко и А. В. Мещерской [3]. Для корреляционных функций, полученных И. А. Дюбкиным [7] и М. И. Фортус [14], характерно более быстрое затухание с расстоянием, что связано, по-видимому, с использованием данных по другому району. Особенно велики отличия пространственной корреляции для арктического района в [7].

Экстраполяция вычисленных корреляционных функций до ρ дает величину $r(0)$ порядка 0,999, что соответствует мере оши наблюдений $\eta^2=0{,}001$. При дисперсии, равной приблизител 200 мб², получим среднюю квадратическую ошибку исходных д ных 0,4 мб. В работе [3] случайная ошибка наблюдения состав ет 1 мб. Различия в значениях мер ошибок наблюдения связа вероятно, не столько с инструментальными ошибками измере давления, которые, как известно невелики, сколько с возможны неточностями приведения давления к уровню моря.

Как уже указывалось, в известных нам работах по исследован пространственно-временной структуры расчеты велись для сдви времени, кратных 24 ч. Поэтому мы ограничимся сравнением д ных о временной корреляции лишь для таких сдвигов време Из табл. 2, в которой приводится временная корреляция по наш данным и по данным Е. П. Борисенкова [1] и С. М. Олевск [12] (для геопотенциала изобарической поверхности 500 м видно, что в нашем случае затухание корреляции со времен несколько медленнее, однако для сдвигов τ до суток, котор практически представляют наибольший интерес, эти различ сравнительно малы.

Таблица 2

Временна́я корреляция поля давления

Корреляция по данным	τ сут		
	1	2	3
Авторов	0,81	0,60	0,46
[1]	0,76	0,51	0,34
[12]	0,78	0,51	0,30

Пространственная корреляционная функция хорошо аппро симируется формулой вида

$$r'(\rho,0)=r(0)\left(1+\frac{\rho}{1{,}05}\right)e^{-\rho/1{,}05}, \qquad ($$

т. е. практически той же формулой, которая была предложен М. И. Юдиным [15] для аппроксимации пространственной корр ляции поля геопотенциала изобарической поверхности 500 мб. Пр рассмотрении временной корреляционной функции $r(0,\tau)$ видн что ход ее с увеличением сдвига времени аналогичен ходу пр странственной корреляционной функции. При этом оказывается что масштабы пространственной и временной корреляции сохра няют пропорциональность друг другу. Интервалу расстояни 105 км соответствует сдвиг времени 3 ч. Это хорошо видно н рис. 2, где соответствующий подбор масштабов позволил практи чески совместить пространственную и временную корреляцион

) функцию. Таким образом, временна́я корреляционная функ-
давления описывается формулой

$$r'(0,\tau) = r'(0)\left(1+\frac{\tau}{30}\right)e^{-\tau/30}, \qquad (4)$$

сдвиг времени τ отсчитывается в часах.

Полученные результаты наводят на мысль о возможности ис-
ьзования для аппроксимации пространственно-временно́й
уктуры формулы вида

$$r'(\rho,\ \tau) = r(0)\,(1+d)\,e^{-d}, \qquad (5)$$

$$d = \sqrt{\left(\frac{\rho}{1{,}05}\right)^2 + \left(\frac{\tau}{30}\right)^2}.$$

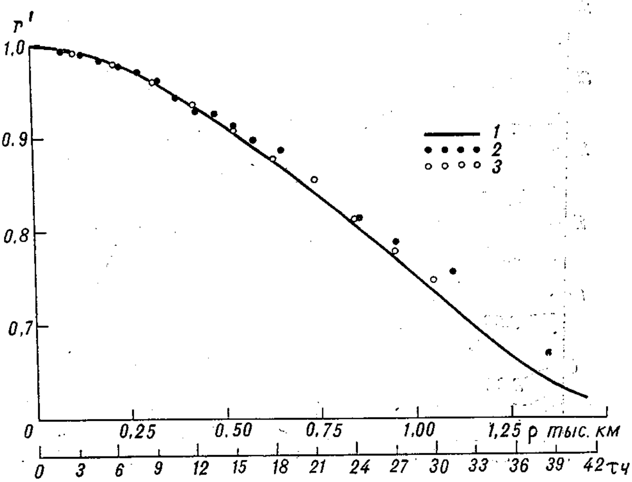


Рис. 2. Пространственная и временна́я корреляционные функции приземного давления.

1 — аппроксимация формулой (5), *2* — значения пространственной корреляционной функции, *3* — значения временно́й корреляционной функции.

Очевидно, в координатах ρ, τ изокорреляты, соответствующие
ой формуле, имеют вид эллипсов, а при таком подборе масшта-
в, когда расстоянию 1050 км соответствует временно́й сдвиг
ч, они имеют вид окружностей.

На рис. 3 приведены изокорреляты, соответствующие формуле
), и проведенные по данным, представленным в табл. 1. Как
дно из рис. 3, эти изокорреляты хорошо согласуются. Это озна-
ет, что в пределах рассмотренных нами пространственных и вре-
нных интервалов аппроксимация (5) хорошо описывает факти-
скую корреляцию поля давления. Согласование наших данных
структуре приземного барического поля с данными о простран-
венной [15] и временно́й [12] корреляции барического поля

в свободной атмосфере дает основание полагать, что формула может быть использована и для описания пространственно-в менной корреляции барического поля в нижней тропосфере.

Согласно [10], аппроксимация (5) обеспечивает положите ность пространственно-временно́го спектра пульсаций давлен что очень важно для использования данных о структуре для лей объективного анализа.

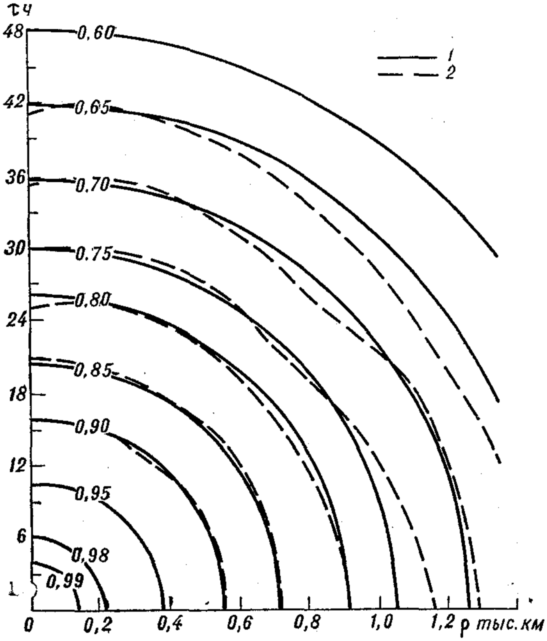


Рис. 3. Изолинии равных значений пространственно-временной корреляции (изокорреляты).
1 — согласно формуле (5), 2 — по данным табл. 1.

Приведенные выше результаты означают, что интервал врем ни 1 ч эквивалентен расстоянию 35 км, что соответствует хара терной скорости переноса в умеренных широтах. Это наводит мысль о целесообразности дальнейшего более детального исслед вания пространственно-временно́й структуры с учетом анизотро ности ее, подобно тому как это делалось в работе [4]. Такое и следование позволит, по-видимому, выявить эффект так назыв емой «замороженной турбулентности», который может сказать в различной корреляции поля давления в направлении ведуще потока и в других направлениях.

Такие различия следовало бы учитывать и при оценках во можной точности интерполяции в связи с задачами объективно анализа и планирования сети станций. Поскольку однако напра ıие ведущего потока меняется от ситуации к ситуации, предвляется оправданным на данном этапе выполнение таких оцек с приведенными выше корреляционными функциями, не учизающими упомянутого эффекта.

4. Полученные нами данные по пространственно-временной рреляции барического поля могут быть использованы для целей ализа его с привлечением данных наблюдений за различные ки. На целесообразность такого подхода к объективному ана-зу указывалось в [1, 2]. Однако конкретных оценок возможноуточнения за этот счет в указанных работах не приводится. Негорые оценки такого рода имеются в работах Б. В. Овчинского l] и А. Хасса [16].

Как уже указывалось, выполненные в этих работах оценки носятся к возможности привлечения к анализу данных за проые сутки. В работе [11] не учитывается наличие ошибок наюдений, которое довольно существенно для небольших расяний. В работе [16], как будет показано ниже, напротив, поэшности ошибок наблюдений приняты нереально большими.

Точность пространственно-временной интерполяции зависит от да факторов, таких, как густота сети станций и их взаимное сположение, интервал времени между сроками наблюдений, кочество пунктов, данные в которых используются при анализе, точность наблюдений в этих пунктах. При оценке влияния этих кторов нет необходимости рассматривать любые возможные четания пунктов и сроков наблюдения. Для этой цели достаточ- рассмотреть некоторые простейшие модели, соответствующие гулярному расположению пунктов наблюдения относительно нкта, для которого производится анализ. Некоторые результаты ких расчетов будут рассмотрены ниже.

При этих расчетах предполагалось, что по данным наблюдений пунктах с координатами x_i, y_i в момент времени t_i производит- оптимальная интерполяция в точку x_0, y_0, t_0. Имеется в виду, о интерполяция производится по формуле

$$f_0 = \overline{f}_0 + \sigma_0 \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\frac{f_i - \overline{f}_i}{\sigma_i} \right), \qquad (6)$$

е f_i — данные наблюдений, $\overline{f}_i$ и σ_i — нормы и средние квадратиские отклонения интерполируемой величины в точке с кооринатами x_i и y_i в момент времени t_i, p_i — веса оптимальной интерляции, определяемые путем решения системы уравнений

$$p_i \eta^2 + \sum_{j=1}^{m} p_j r_{ij} = r_{0i}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (7)$$

е r_{ij} — коэффициент пространственно-временной корреляции ежду наблюдениями i и j, определяемый по формуле (5).

Мера ошибок оптимальной интерполяции (ε^2) определяется, как звестно [2], по формуле

$$\varepsilon^2 = 1 - \sum_{i=1}^{m} p_i r_{0i}.$$

Расчеты производились при различных значениях меры ошиб наблюдения.

На рис. 4 представлены схемы, для которых были выполне оценки точности пространственно-временной интерполяции. Дад краткую характеристику каждой из выбранных схем. Схема

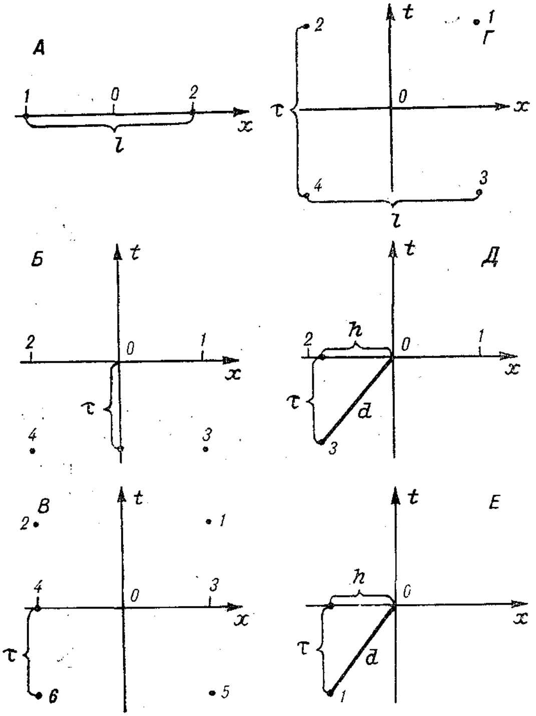


Рис. 4. Схема выбора данных наблюдений для интерполяции.

представляет собой пространственную интерполяцию по двум то кам на середину расстояния между ними. В схемах *Б* и *В* привл каются дополнительные наблюдения в тех же точках за предшес вующий и, соответственно, предшествующий и последующий сроки

В схеме *Г* использованы данные в двух точках и за два срок наблюдения для интерполяции значений на середину отрезк в промежуточный момент времени.

Схема *Д* предусматривает введение одного асиноптическог наблюдения (с переменными координатами x и t) при двух ста дартных наблюдениях на расстоянии l.

В схеме E производится экстраполяция в точку 0 данных од-го асиноптического наблюдения.

Как видно из рис. 4, во всех рассмотренных схемах мы огра-чились для простоты двумерным случаем в предположении, что нкты наблюдений расположены непосредственно на прямой =0 и интерполяция осуществляется на середину отрезка между нктами наблюдений. Разумеется, в общем случае следовало бы есть также и изменение координаты y. Соответствующие оцен- нетрудно выполнить, однако ничего принципиально нового они дадут. Для иллюстрации этого в табл. 3 наряду с ошибками терполяции по двухточечной схеме A приводятся ошибки интер-ляции на центр равностороннего треугольника со сторо-й l по данным синхронных наблюдений в его вершинах. Из бл. 3 видно, что значения ε при $m=2$ и $m=3$ не только одинако- меняются в зависимости от l и η^2, но и мало отличаются коли-ственно.

Таблица 3

Средние квадратические относительные ошибки интерполяции по двум и трем синхронным наблюдениям

m	η^2	l км					
		100	200	400	600	800	1000
2	0,000	0,01	0,02	0,06	0,10	0,15	0,20
	0,001	0,02	0,03	0,06	0,11	0,15	0,20
	0,005	0,05	0,06	0,08	0,12	0,16	0,21
	0,010	0,07	0,07	0,09	0,13	0,17	0,22
	0,020	0,10	0,10	0,12	0,15	0,18	0,23
3	0,000	0,01	0,02	0,06	0,11	0,16	0,21
	0,001	0,02	0,03	0,06	0,11	0,16	0,21
	0,005	0,04	0,05	0,08	0,12	0,16	0,21
	0,010	0,06	0,06	0,08	0,12	0,17	0,22
	0,020	0,08	0,08	0,10	0,14	0,18	0,22

5. Сравнение результатов расчетов по указанным выше схемам точностью пространственной интерполяции по двум точкам (схе-а A) позволяет судить о целесообразности привлечения данных а другие сроки для уточнения объективного анализа.

Во всех рассмотренных нами схемах величина ε монотонно во-растает с ростом расстояния l. Этот факт, отмечаемый практиче-ки во всех работах по оценке точности оптимальной интерполя-ии, связан просто с использованием монотонно убывающих с рас-тоянием корреляционных функций. О влиянии ошибок наблюде-ий на точность оптимальной интерполяции поля давления можно удить по данным, представленным на рис. 5.

Как видно из рис. 5 (см. также табл. 3), влияние величины η ошибку интерполяции оказывается существенным при малых р стояниях, когда ошибки интерполяции точных значений ма и сравнимы с ошибками измерений. При больших расстояни когда ошибки интерполяции точных значений существенно боль ошибок измерений, наличие последних почти не сказывается точности анализа. Как указывалось еще О. А. Дроздов и А. А. Шепелевским [6], при малых расстояниях между ст

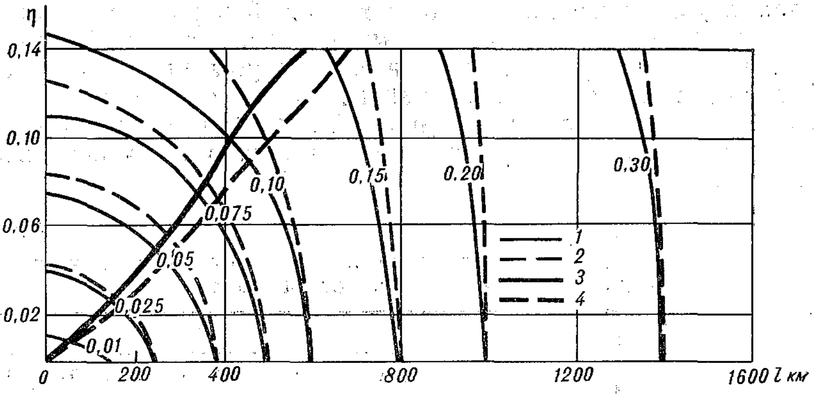


Рис. 5. Зависимость точности интерполяции от расстояния между пунктами и от точности наблюдений.

1 — средняя квадратическая погрешность интерполяции по данным двух синхронных наблюдений (схема *А*); *2* — погрешность интерполяции с использованием данных наблюдений за три часа до срока анализа (схема *Б*); *3* — линия, на которой $\varepsilon=\eta$ для схемы *А*; *4* — линия, на которой $\varepsilon=\eta$ для схемы *Б*.

циями и при наличии ошибок наблюдений интерполированная в личина может быть получена точнее, чем непосредственно изм ренные данные в пункте наблюдения. О. А. Дроздов и А. А. Ш пелевский рекомендовали выбирать расстояние между пункта наблюдений таким, чтобы ошибка интерполяции была рав ошибке наблюдения. Естественно, что это расстояние тем бол ше, чем больше ошибка наблюдений. В частности, при $\eta^2=0,0$ соответствующее расстояние между станциями составляет 150 к при $\eta^2=0,002$—270 км, при $\eta^2=0,01$ порядка 400 км.

В табл. 4 представлено уменьшение средней квадратическо ошибки интерполяции (в %) за счет привлечения данных за пр шлый срок. Как видно из таблицы, при отсутствии ошибок набл дений привлечение данных за предшествующий срок практичес не уточняет анализа. При наличии ошибок наблюдений привл чение данных измерений за прошлый срок увеличивает точнос интерполяции. Однако это уточнение заметно лишь при сравн тельно небольших расстояниях между пунктами наблюдений. Э связано с тем, что в рассматриваемой схеме в пунктах с данны за прошлый срок имеются наблюдения и за срок интерполяци в которых содержится гораздо больше информации.

С увеличением интервала между сроками наблюдений эффект влечения дополнительных данных быстро ослабевает и при эрвалах между сроками больше 12 ч практически не прослежи- гся во всем рассматриваемом нами диапазоне изменения меры ибок наблюдения.

Эффект привлечения данных за предыдушие сроки оказывает- гем больше, чем больше мера ошибок измерения. Так, напри- , как видно из рис. 5, при $\tau=3$ ч и расстоянии между стан- ми 400 км средняя квадратическая ошибка интерполяции при влечении дополнительных данных не изменяется при $\eta^2=0$, ньшается на 1,5% при $\eta^2=0{,}002$ и на 14% при $\eta^2=0{,}02$. Этот фект отмечается при всех τ. Очевидно, что и при $\tau=24$ ч можно ло бы получить определенный эффект привлечения дополнитель- к данных при очень больших значениях η^2.

Практически именно такой случай рассматривался А. Хассом], который ошибочно принял в ковариационной функции М. Олевской [12] значение дисперсии геопотенциала изобари- кой поверхности 500 мб равное 171,8 м² вместо 171,8 дам². результате меры ошибок наблюдений в [16] завышены в 100 з, а погрешности интерполяции занижены на порядок. Со- асно [16], привлечение данных за прошлые сутки уточняет ин- эполяцию на 3—8%. При реальных значениях меры ошибок на- юдений уточнение интерполяции за счет привлечения данных за ошлые сутки было бы гораздо меньше.

Таблица 4

Уменьшение средней квадратической ошибки интерполяции (в %) счет использования данных наблюдений за прошлый срок (схема *Б*)

2	*l* км																			
	100	200	400	600	1000	100	200	400	600	1000	100	240	400	600	1000	100	200	400	600	1000
	$\tau=0$ ч					$\tau=3$ ч					$\tau=6$ ч					$\tau=12$ ч				
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
01	21	12	3	1	0	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
02	23	15	6	2	0	6	3	2	1	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
05	27	22	10	6	2	10	7	4	3	1	4	2	1	1	0	2	0	0	0	0
10	28	24	15	10	3	14	12	10	6	2	6	4	3	2	1	2	1	1	1	1
20	28	26	21	15	5	16	18	14	10	4	9	8	8	6	3	3	2	2	2	2

Поскольку влияние изменения величины η^2 на точность опти- альной пространственно-временной интерполяции в различных кемах расположения точек является аналогичным, в дальнейшем ы ограничимся оценками для одного значения $\eta^2=0{,}01$. Это зна- эние существенно больше того, которое получается для поля приземного давления. Однако для барического поля в свобод атмосфере, которое представляет наибольший интерес, оно бли к фактическому.

В табл. 5 приводятся оценки уточнения анализа $K=\frac{\varepsilon_B-\varepsilon_A}{\varepsilon_A}$ счет использования данных предыдущего и последующего сро по сравнению с двухточечным вариантом (схема *А*) для η =0,01. Из табл. 5 видно, что наиболее существенное уточне интерполяции за счет привлечения данных за другие сроки от чается при сравнительно небольших расстояниях между станц ми и небольших временны́х интервалах между наблюдениями.

Сравнение точности интерполяции с использованием данн за прошлый срок (схема *Б*) с соответствующими оценками, от сящимися к использованию также и данных за последующий ср показывает, что в схеме *В* погрешность оказывается меньше. С нако практически это уменьшение заметно лишь при сравните но малых расстояниях между станциями и малых интервалах в мени.

Таблица 5

Уменьшение (в %) средней квадратической погрешности интерполяции в схеме *В* по сравнению со схемой *А*

τ ч	*l* км			
	100	200	400	1000
0	41	36	21	4
1	41	36	21	4
2	39	36	21	4
3	37	34	20	4
4	34	30	19	4
6	24	20	14	4
9	13	10	6	3
12	7	5	3	2
15	4	3	1	1
18	3	1	1	0
24	1	0	0	0

Из приведенных данных видно, что при интервале времени меж ду сроками наблюдений порядка 12 ч даже при малых рассто ниях между станциями уменьшение ошибки интерполяции в сх мах *Б* и *В* по сравнению с ошибками интерполяции синхронны данных не превосходит нескольких процентов. Следовательно, пр анализе барического поля в свободной атмосфере, данные наблю дений для которой, как правило, поступают через 12 ч, привле ние результатов наблюдений за другие сроки нецелесообзно.

Выше указывалось на неэффективность использования данных другие сроки для интерполяции в стандартные аэрологические оки. Иначе обстоит дело, если требуется оценить давление в монт времени между стандартными сроками наблюдений. Возможя точность интерполяции для таких случаев может быть оценена тем использования данных расчетов по схеме *Г*, приведенных табл. 6, в которой для сравнения представлены также значения для схемы *А*.

Из табл. 6 видно, что при сравнительно небольшом интервале емени между сроками наблюдений интерполяция в промежучный срок может производиться точнее, чем по данным для го же момента времени. При этом, чем больше интервал времни между наблюдениями, тем до больших расстояний между анциями прослеживается этот эффект.

В среднем можно считать, что такое уточнение прослеживаетı до интервалов между сроками наблюдений $\tau=12$ ч. Следовательно, при двухразовых аэрологических наблюдениях пространст-

Таблица 6

Средние квадратические относительные ошибки интерполяции (схема *Г*) при $\eta^2=0{,}01$

τ ч	l км								
	100	200	400	600	800	1000	1400	1600	2000
1	0,05	0,06	0,08	0,12	0,16	0,21	0,31	0,35	0,46
2	0,05	0,06	0,08	0,12	0,16	0,21	0,31	0,36	0,46
4	0,05	0,06	0,08	0,12	0,16	0,21	0,31	0,36	0,46
6	0,06	0,06	0,08	0,12	0,16	0,21	0,31	0,36	0,46
8	0,06	0,06	0,08	0,12	0,16	0,21	0,31	0,36	0,46
12	0,08	0,08	0,10	0,13	0,17	0,21	0,31	0,36	0,45
18	0,12	0,12	0,13	0,15	0,18	0,22	0,31	0,36	0,45
24	0,17	0,17	0,17	0,19	0,21	0,24	0,32	0,36	0,45
Схема *А*	0,07	0,07	0,09	0,13	0,17	0,22	0,31	0,36	0,46

зенно-временная интерполяция может обеспечить ту же точность, что и анализ данных непосредственно в срок наблюдений. В случае одноразовых наблюдений точность интерполяции для малых расстояний существенно уменьшается по сравнению с точностью анализа синхронных данных. Однако и в этих условиях при очень больших расстояниях между станциями (более 1000 км) интерполяция в промежуточные сроки производится точнее, чем интерполяция синхронных данных. Это особенно важно иметь в виду при анализе поля давления для обширных районов земного шар где густота аэрологической сети не превышает указанной.

6. Наиболее эффективным использование данных за други сроки оказывается в том случае, когда они содержат наблюдени в пунктах, близких к точке, в которую производится интерполяци и данные которой в срок анализа отсутствуют. Эффект использ вания таких асиноптических данных, моделируемый нами сх мой *Д*, иллюстрируется рис. 6, на котором приводятся изолини относительного уменьшения погрешности *К* для случаев рассто ний между станциями, равных 600 км и 2000 км. Из рис. 6 видн что привлечение дополнительного асиноптического наблюдения це лесообразно лишь в том случае, если пункт асиноптического на блюдения удален от точки интерполяции не больше, чем стандарт ное синхронное наблюдение. случае сравнительно близког расположения пункта асинопти ческого наблюдения и малых ин тервалов времени эффект его ис пользования может быть значи тельным. С увеличением интер вала времени эффект привлече ния асиноптических данны уменьшается. Однако этот эф фект прослеживается до интер валов времени, временна́я кор реляция для которых сопоставима с пространственной корреляцией для расстояний между точками синхронных наблюдений и пунктом интерполяции ($l/2$). Так, например, при расстоянии между пунктами $l=600$ км уменьшение средней квадратической ошибки составляет 40% при τ, близких к нулю, 23% при $\tau=3$ ч, 10% при $\tau=6$ ч и 5% при сдвиге времени 9 ч, который приблизительно соответствует (по корреляции) расстоянию 300 км. При больших интервалах времени привлечение асиноптических наблюдений для данного l нецелесообразно. Однако в случае более редкой сети привлечение дополнительных данных может оказаться существенным и при больших интервалах времени. Так, например, при $l=2000$ км использование данных асиноптических наблюдений в сравнительно близких точках оказывается эффективным даже при $\tau=24$ ч. На это обстоятельство в свое время указывал Б. В. Овчинский [11]. Его можно использовать и в случае отсутствия асиноптических данных, если имеется пропуск в наблюдениях за срок анализа. Из рассмотрения рис. 6 видно, что при анализе поля геопотенциала целесообразно привлекать лишь те дополнительные дан-

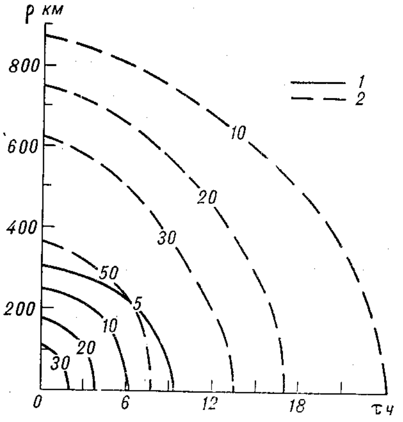


Рис. 6. Уточнение интерполяции за счет привлечения асиноптических данных.
1 — $l=600$ км, 2 — $l=2000$ км.

е, пространственно-временнóе «удаление» которых от пункта
терполяции $d=\sqrt{\left(\frac{\rho}{1050}\right)^2+\left(\frac{\tau}{30}\right)^2}$ не превышает характерного рас-
ояния между точкой интерполяции и пунктом наблюдения (в на-
ем случае $l/2$).

Естественно, что эффект использования дополнительных дан-
х оказывается тем больше, чем меньше «удаление» (d) пункта
блюдения. Более того, при больших расстояниях между пункта-
и наблюдений l и при малых d оказывается, что использование
лько асиноптических данных (схема E) практически обеспечи-
ет ту же точность интерполяции, что и пространственно-времен-
я интерполяция по данным всех трех точек. Следовательно,
этом случае можно ограничиться использованием лишь асиноп-
ческих данных.

Как уже указывалось, приведенные выше оценки являются ус-
вными, поскольку реальное расположение станций не является
егулярным и фактически пространственно-временнóй анализ не
удет производиться по рассмотренным моделям. Представляется,
днако, что эти оценки позволяют судить о возможностях прост-
анственно-временнóй интерполяции, а выводы об «эффективном
адиусе» влияния данных за другие сроки можно использовать при
азработке схемы отбора исходных данных в программах четырех-
ерного объективного анализа.

ЛИТЕРАТУРА

Борисенков Е. П. Физико-статистические методы анализа и предвычисления метеорологических полей.—«Труды ААНИИ», 1963, т. 263, с. 244.
. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Л., Гидрометеоиздат, 1963. 287 с.
. Гандин Л. С., Мелешко В. П., Мещерская А. В. О применении универсальных цифровых машин для исследования статистической структуры метеорологических полей.—«Труды ГГО», 1963, вып. 143, с. 113—129.
. Груза Г. В., Казначеева В. Д. Анизотропная пространственно-временнáя корреляционная функция барического поля.—«Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана», 1968, т. 4, № 7, с. 710—716.
. Дроздов О. А. Основы климатологической обработки метеорологических наблюдений Л., изд. ЛГУ, 1956. 302 с.
. Дроздов О. А., Шепелевский А. А. Теория интерполяции в стохастическом поле метеорологических элементов и ее применение к вопросам метеорологических карт и рационализации сети.—«Труды НИУ ГУГМС», 1946, сер. 1, вып. 13, с. 65—115.
. Дюбкин И. А. О структуре поля давления на уровне моря в высоких широтах.—«Труды ААНИИ», 1964, т. 271, с. 50—59.
. Журавлева Е. Б., Каган Р. Л., Поляк И. И. Вычисление автокорреляционных и взаимных корреляционных функций по нескольким реализациям случайного процесса.—«Труды ГГО», 1971, вып. 289, с. 20—28.
. Мещерская А. В. и др. Естественные составляющие метеорологических полей. Л., Гидрометеоиздат, 1970. 200 с.
0. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, часть 2. М., «Наука», 1967. 720 с.

11. Овчинский Б. В. Интерполирование метеорологических полей с мощью пространственно-временной корреляционной функции.—«Метео логия и гидрология», 1965, № 4, с. 3—11.
12. Олевская С. М. Пространственно-временная структура поля геопот циала H_{500}.—«Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана», 1966, т. № 12, с. 1225—1229.
13. Сохрина Р. Ф., Челпанова О. М., Шарова В. Я. Давле воздуха, температура воздуха и атмосферные осадки Северного полуи рия. Л., Гидрометеоиздат, 1959. 474 с.
14. Фортус М. И. Трехмерная пространственная структура поля геопот циала.— «Труды ГГО», 1964, вып. 165, с. 27—39.
15. Юдин М. И. Некоторые закономерности структуры геопотенциала.—«Тр ды ГГО», 1961, вып. 121, с. 3—18.
16. Huss A. On the introduction of space-time correlation functions in optim objective analysis methods.— Journ. of Appl. Meteor., 1971, Feb. vol. 10, No. p. 152—156.

В. А. ШАХМЕЙСТЕР

ОБ ОДНОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ ПО ЧЕТЫРЕХМЕРНОМУ АНАЛИЗУ

В настоящее время разработаны методы пространственного объективного анализа метеорологических полей, причем при объективиом анализе для некоторого момента времени используются лишь данные наблюдений, относящиеся к этому же самому моменту времени, а сам анализ сводится в основном к пространственной интерполяции в узлы регулярной сетки.

В то же время сейчас все большее развитие получает непрерывная или асиноптическая информация, т. е. информация, не привязанная к определенной точке пространства и к фиксированному моменту времени. Такого рода информацию дают спутники и свободные аэростаты. До недавнего времени спутники давали информацию лишь полукачественного характера. Однако сейчас имеется возможность получения спутниковой информации, непосредственно используемой при анализе и прогнозе метеорологических полей.

Такая асиноптическая информация в будущем будет играть главную роль. В связи с этим встает вопрос о методах ее использования.

При анализе асиноптической информации для данного момента времени необходимо уметь использовать наблюдения, относящиеся к другим, предшествующим моментам времени, т. е. проводить четырехмерное (пространственно-временнóе) усвоение данных наблюдений.

В отличие от методов трехмерного анализа, экстраполяцию метеорологических элементов по времени разумнее производить динамическим путем, т. е. основываясь на модели численного прогноза.

В настоящее время существуют две схемы усвоения данных наблюдений — дискретная и непрерывная.

Ниже будет изложен численный эксперимент, основанный на дискретной схеме усвоения данных наблюдений. При дискретной схеме включение данных наблюдений в «анализ — прогноз» происходит в сравнительно редкие, дискретно расположенные моменты времени. Наблюдения, произведенные в промежуточный момент, экстраполируются вперед по времени на основе прогностической модели к ближайшему из моментов, в который происходит усвоение. Лишь после того как все наблюдения проэкстраполирова к стандартному сроку, они включаются в число исходных данн для объективного анализа метеорологических полей за этот сро

Эксперименты такого рода, как наш, известны в западной л тературе под названием «identical twin experiment».[1] В этих эксп риментах признается, что используемая модель атмосферы абс лютно точна, т. е. отражает истинное состояние атмосферы. П этому считается, что при интегрировании модели мы получаем «и тинные» поля. Данные наблюдений затем получаются искажение этих «истинных» полей. Такой подход хорош тем, что мы можем п лучить и «истину», и «наблюдения» с любым разрешением по пр странству и времени. Это очень удобно для разработки приемов ч тырехмерного усвоения. В то же время, поскольку в таких эк периментах и истина, и наблюдения являются искусственным и происходят из одной и той же модели прогноза, нельзя гаран тировать, что результаты будут аналогичны при переходе к дейст вительным данным наблюдений. Это является большим недостат ком подобных экспериментов.

Выполненный нами эксперимент аналогичен эксперименту Миякода и Галаграна [1]. Основные отличия от [1] и сравнение результатов будут приведены ниже.

Итак, рассмотрим следующий численный эксперимент. Возьмем модель прогноза и проинтегрируем ее от некоторого момента времени t_{-n} до момента времени t_0. Затем выберем точки сетки, которые будем считать пунктами наблюдения. В моменты времени предшествующие t_0, значения прогностических элементов в некоторых точках изменяются на случайную малую величину, и таким образом получаются аналоги «данных наблюдения». По этим «данным наблюдения» в предшествующие моменты времени требуется рассчитать прогностические поля в момент t_0 так, чтобы получилось хорошее согласование с «истинным» полем в момент t_0 [1]

Целью такого эксперимента является выяснение возможностей повышения точности объективного анализа путем введения некоторого дополнительного множества данных.

Рассмотрим модель, которая использовалась для экстраполяции метеоэлементов по времени. Баротропное невязкое уравнение вихря для двумерного потока с учетом сжимаемости имеет вид

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{1}{L_0^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = J(\nabla^2 \psi + l,\ \psi), \qquad (1)$$

где ψ — функция тока, ∇ — двумерный оператор Лапласа, L_0 — характерный масштаб длин, J — оператор Якоби, l — параметр Кориолиса.

Параметр Кориолиса l считается переменным только под знаком якобиана в правой части уравнения (1). Для расчета в правой части (1) использовались конечно-разностные формулы Ара-

---

[1] Эксперимент идентичных близнецов.

ава. Интегрирование по времени велось по методу Адамса-Бэшорта.

Область интегрирования можно описать следующим образом. а карте полярной стереографической проекции с главным масщабом по широте 60° рассматривается квадратная сетка, образуюая восьмиугольник. Шаг сетки составлял около 300 км. Сетка одержит 617 узлов.

Граничные условия:
— абсолютная постоянная на границе. $\nabla^2\Psi$ — сохраняется на ранице области.

Модель имеет три интегральных инварианта:

$$\nabla^2 \overline{\Psi} - \frac{1}{L_0^2}\overline{\Psi} = \text{const}, \tag{2}$$

$$\frac{1}{2}\overline{(\nabla\Psi)^2} + \frac{1}{2L_0^2}\overline{\Psi^2} = \text{const}, \tag{3}$$

$$\overline{(\nabla^2\Psi + l)^2} + \frac{1}{L_0^2}\overline{(\nabla\Psi)^2} - \frac{2}{L_0^2}\overline{l\Psi} = \text{const}, \tag{4}$$

где $\overline{(\quad)} = \frac{1}{S}\iint\limits_{(S)} (\quad)\,dx\,dy.$

Подробное описание схемы интегрирования можно найти в [2].

Пусть мы имеем n последовательных моментов времени

$$t_{-(N-1)},\ t_{-(N-2)},\ \ldots,\ t_{-3},\ t_{-2},\ t_{-1},\ t_0.$$

В начальный момент $t_{-(N-1)}$ поле Ψ известно. С этим полем Ψ как с начальными данными уравнение (1) интегрируется численно вперед от момента $t_{-(N-1)}$ до момента t_0. Таким образом, теперь известны решения уравнения (1) в моменты времени $t_{-(N-1)}$, $t_{-(N-2)}, \ldots, t_{-1}, t_0$.

Эти решения мы будем считать аналогами истинного состояния атмосферы и обозначим

$$\Psi_{\text{ист}}^{-(N-1)},\quad \Psi_{\text{ист}}^{-(N-2)},\quad \ldots,\quad \Psi_{\text{ист}}^{0}.$$

Затем из двумерного массива в 617 точек сетки случайным образом выбираются 80, которые считаются «станциями наблюдения». На станциях значения $\Psi_{\text{ист}}^{-n}$ ($n=0, 1, \ldots, N-1$) изменяются на случайную малую величину, распределенную по нормальному закону, и при этом получается новое множество — аналог данных наблюдения, которое мы обозначим $\Psi_{\text{набл}}^{-n}$. Средняя квадратическая ошибка наблюдения геопотенциальной высоты считалась равной 2 дам. По этим наблюдениям $\Psi_{\text{набл}}^{-n}$. делается объективный анализ во все точки сетки методом оптимальной интерполяции [3]. Полученное поле обозначим $\Psi_{\text{анал}}^{-n}$. После этого с $\Psi_{\text{анал}}^{-n}$. как с начальными данными уравнение (1) интегрируется от момента времени t_{-n} до момента времени t_0. Обозначим полученное решение $\Psi_{\text{пред}}^{-n}$.

Итак, получены поля $\Psi^{-n}_{\text{пред}}$ ($n=0$, 1, ..., $N-1$). Вместо $\Psi^{-0}_{\text{пред}}$ б рется $\Psi^{0}_{\text{анал}}$.

Синтезированное решение вычисляется по формуле

$$\Psi_{\text{син}}(t_0)=\sum_{n=0}^{N-1}\omega_n\,\Psi^{-n}_{\text{пред}}, \qquad (5$$

где $\sum\limits_{n=0}^{N-1}\omega_n=1$.

Рассмотрим среднюю квадратическую ошибку F:

$$F=E\left(\overline{\Psi_{\text{ист}}-\Psi_{\text{син}}}\right)^2, \qquad (6$$

где $(\overline{\quad})$ означает осреднение по площади, а E — статистическо осреднение. Требуется определить ω_n ($n=0$, 1, ..., $N-1$) так, чтоб F стала минимальной. Из (5) и (6) следует, что F имеет вид

$$F=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}\omega_n\,\omega_k\,P_{nk}, \qquad (7$$

где

$$P_{nk}=E\overline{\left(\Psi_{\text{ист}}-\Psi^{-n}_{\text{пред}}\right)\left(\Psi_{\text{ист}}-\Psi^{-k}_{\text{пред}}\right)}.$$

Используя метод множителей Лагранжа, находим ω_n, которые минимизируют квадратичную форму F, из уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial\omega_k}+\lambda=0,\\ \sum\limits_{k=0}^{N-1}\omega_k=1,\end{cases} \tag{8}$$

где λ — множитель Лагранжа.

Система (8) представляет собой систему $N+1$ линейных уравнений с $N+1$ неизвестными.

Представим систему (8) следующим образом:

$$Ax=b, \tag{9}$$

где A — квадратная матрица порядка $N+1$, имеющая вид

$$A=\begin{pmatrix} 2p_{0\,0} & 2p_{0\,1} & \dots & 2p_{0\,N-1} & 1\\ 2p_{1\,0} & 2p_{1\,1} & \dots & 2p_{1\,N-1} & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 2p_{N-1\,0} & 2p_{N-1\,1} & \dots & 2p_{N-1\,N-1} & 1\\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

b и x — $N+1$-мерные вектора

$$\begin{aligned} x&=(\omega_0,\ \omega_1,\ \dots,\ \omega_{N-1},\ \lambda)\\ b&=(0,\ 0,\ 0,\ \dots,\ 0,\ 1). \end{aligned} \tag{11}$$

Можно рассмотреть и такую задачу. Положим

$$F_1 = \overline{(\Psi_{\text{ист}} - \Psi_{\text{син}})^2} \qquad (12)$$

айдем такие ω_n, при которых F_1 минимальна. Эта задача отли-
тся от предыдущей отсутствием статистического осреднения
ешается аналогично. Очевидно, что

$$F_1 = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \omega_n \omega_k \tilde{p}_{nk}, \qquad (13)$$

$$\tilde{p}_{nk} = \overline{\left(\Psi_{\text{ист}} - \Psi_{\text{пред}}^{-n}\right)\left(\Psi_{\text{ист}} - \Psi_{\text{пред}}^{-k}\right)}.$$

В ходе эксперимента решались обе эти задачи.

Заметим, что наше рассмотрение отличается от [1] следующим.
-первых, у нас рассматривается несколько иная модель, чем
[1]. В [1] уравнение (1) берется без учета сжимаемости, гранич-
е условия и сетка у нас также иные, чем в [1]. Кроме того,
ходе нашего эксперимента подсчитывались интегральные инва-
анты (2), (3) и (4). В работе [1] решалась только задача (12)
нимизации теоретической средней квадратической ошибки от-
онения синтезированного решения от истинного.

В нашей работе решалась также задача (13), и в каждом от-
льном случае проводилось сравнение теоретической и эмпири-
ской средней квадратической ошибки. Кроме того, у нас был
оведен более тщательный анализ различных путей построения
триц $\{p_{nk}\}$ и их применения.

В нашем эксперименте в качестве начальных данных были взя-
два действительных поля геопотенциала за 1 и 10 августа
71 г., сглаженные на границе. Расчеты с этими данными произ-
дились независимо. В дальнейшем будем называть расчет с ис-
дными данными от 1 августа — экспериментом 1, а от 10 авгу-
а — экспериментом 2.

В экспериментах 1 и
при интегрировании
авнения (1) считались
тегральные инвариан-
модели. На рис. 1
едставлены кривые из-
нения инварианта I^{ε}
и расчетах $\Psi_{\text{пред}}^{-n}$. Из
авнения кривых на
с. 1 видно, что в экспе-
менте 2 инварианты
няются значительно
дленнее, чем в экспе-
менте 1. То же самое
жно сказать и при

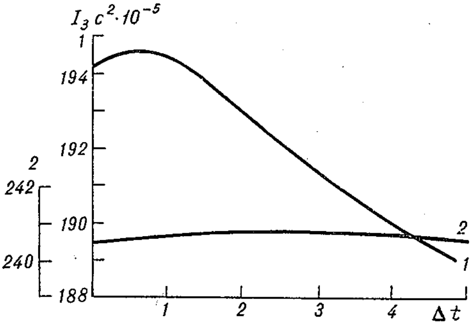


Рис. 1. Ход инварианта I_3 при расчете $\Psi_{\text{пред}}^{-5}$ в эксперименте 1 и в эксперименте 2.

сравнении других инвариантов для двух экспериментов.

Матрицы $\{p_{nk}\}_{n=0}^{N}{}_{k=0}^{N}$ определялись в экспериментах 1 следующим образом: сначала для каждого момента времени $t_{-1}, \ldots, t_{-(N-2)}$ подсчитывались матрицы $\{\tilde{p}_{nk}\}$, а затем проводил статистическое осреднение по всем возможным реализациям (в три одного эксперимента). Заметим, что интегрирование урав ния (1) проводилось на двое суток вперед с шагом $\Delta t=6$ ч, и этому для получения матриц $\{p_{nk}\}$ мы ограничились реализация $\{\tilde{p}_{nk}\}$ для моментов $t_0, t_{-1}, t_{-2}, \ldots, t_{-6}$. Для остальных момен времени число реализаций матриц $\{\tilde{p}_{nk}\}$ слишком мало. Матр $\{p_{nk}\}$, полученную в эксперименте 1, обозначим $P^{(1)}$, а матрицу $\{p$ полученную в эксперименте 2,— $P^{(2)}$. Кроме того, обозначим че $P^{(1+2)}$ матрицу с компонентами

$$p_{nk}^{1+2} = \frac{p_{nk}^{(1)} + p_{nk}^{(2)}}{2}.$$

Таким образом, $P^{(1+2)}$ есть средняя матрица $\{p_{nk}\}$ для эксперим тов 1 и 2. На рис. 2 *а* и *б* представлены двумерные распреде

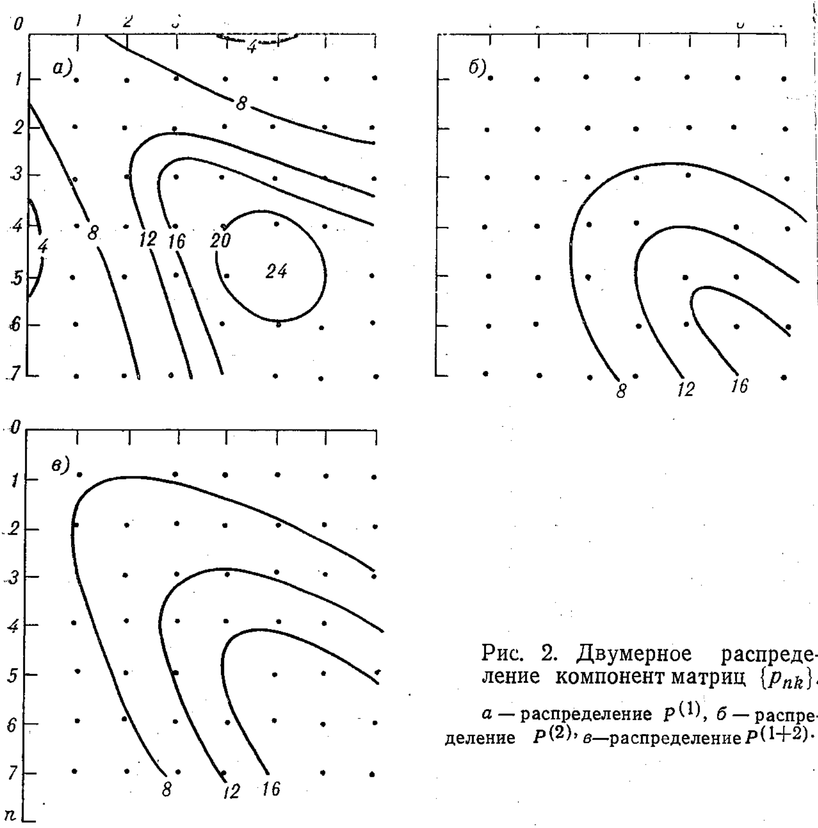


Рис. 2. Двумерное распределение компонент матриц $\{p_{nk}\}$.

а — распределение $P^{(1)}$, *б* — распределение $P^{(2)}$, *в*—распределение $P^{(1+2)}$.

ı компонент матриц $P^{(1}$ и $P^{(2)}$, а на рис. 2 *в* — двумерное рас- деление компонент матрицы $P^{(1+2)}$. Заметим, что матрицы $P^{(1)}$ $^{(2)}$ есть матрицы ковариаций ошибок прогноза в экспериментах 2 и по их распределению можно судить о нарушении предска- мости в этих экспериментах.

Из рисунков видно, что поле $P^{(2)}$ значительно более гладкое, ı $P^{(1)}$, т. е. в эксперименте 2 предсказуемость нарушается мед- нее, чем в эксперименте 1. Этот факт хорошо согласуется с по- ением интегральных инвариантов в экспериментах 1 и 2. Кро- того, это хорошо согласуется также и с тем, что, как будет дно из дальнейшего, в эксперименте 2 среднее квадратическое клонение синтезированного решения от истинного значительно ньше, а веса ω_n убывают гораздо медленнее, чем в экспери- нте 1.

В табл. 1 представлены примеры весов ω_n в экспериментах 1 2 для интервалов $\Delta t=6$ ч, соответствуюшие «возрасту» в 0, 0,25, , ..., 1,75 дня и для интервалов 12 ч, соответствующих «возра- у» в 0, 0,5, 1, 1,5 дня.

Таблица 1

эмер эксперимента	Интервал времени, ч	Дни							
		0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75
1	6	0,40	0,24	0,09	0,08	0,005	0,09	0,07	0,03
	12	0,57		0,19		0,18		0,06	
2	6	0,22	0,18	0,22	0,22	0,10	0,04	0,01	0,02
	12	0,43		0,4		0,16		0,01	

Из табл. 1 видно, что с увеличением n веса ω_n убывают и де- ются пренебрежимо малыми при n больше некоторого n_1 (n_1 зое в каждом эксперименте). Это означает, что в связи с нару- ением предсказуемости никакой полезной информации нельзя олучить из прогнозов, «старше» чем за $n_1 \times \Delta t$ часов.

Оба эксперимента 1 и 2 проводились в следующем порядке. начала решалась задача (13) минимизации средней по площади вадратической ошибки отклонения синтезированного решения от стинного. Очевидно, что в этом случае теоретическая средняя вадратическая ошибка равна эмпирической. Затем были рассчи- аны матрицы $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ и решалась задача (12) для каждого экс- еримента со своей матрицей $\{p_{nk}\}$. Обозначим теоретическую сред- юю квадратическую ошибку $\varepsilon_{\text{т}}^2$, а эмпирическую $\varepsilon_{\text{э}}^2$ и покажем, то в этом случае $E(\varepsilon_{\text{э}}^2) = \varepsilon_{\text{т}}^2$. Действительно,

$$\varepsilon_{\text{т}}^2 = \sum_{n,\,k} \omega_n \omega_k p_{nk}, \qquad (15)$$

где ω_k таковы, что

$$F = E\overline{(\Psi_э - \Psi_{син})^2}$$

минимальна.

Таким образом,

$$\overline{E(\Psi_э - \Psi_{син})^2} = \sum_{n\,k} \omega_n\, \omega_k\, p_{nk}.$$

Но $\overline{(\psi_э - \psi_{син})^2} = \varepsilon_э^2$ и поэтому

$$E\left(\varepsilon_э^2\right) = \varepsilon_т^2.$$

После этого были взяты матрицы $P^{(1)}$ и применены к $\Psi_{пред.}$ эксперимента 2 и наоборот. По тому как меняется $E(\varepsilon_э^2)$ и можно судить, сколь «универсальны» построенные нами матрі $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ и можно ли их применять к данным, которые не уча вовали в их построении. Затем были рассчитаны матрицы $P^{(1+}$ и с ними решалась задача (13) в экспериментах 1 и 2. Это озн чает, что увеличивалось число «образцов» для построения матрі $\{p_{nk}\}$, и интересно при этом наблюдать, как ведет себя $E(\varepsilon_э^2)$ и

Результаты всех этих расчетов приведены на рис. 3 и 4.

На рис. 3 изображены кривые изменения $E(\varepsilon_э^2)$ в эксперименті 1 и 2 в зависимости от N-числа $\Psi_{пред}^{-n}$, участвующих в построені синтезированного р шения $\Psi_{син}$.

Рассмотрим зав симость $E(\varepsilon_э^2)$ для э сперимента 1. Видн что с увеличением $E(\varepsilon_э^2)$ убывает, прі чем наилучший резул тат, как и следовал ожидать, дает решені задачи (13) (кривая I)

При решении зада чи (12) с использова нием матриц $P^{(1)}$ $E(\varepsilon$ возрастает, затем, ко да мы используем мат рицы $P^{(2)}$ (т. е. при з мене «своих» матри «чужими») $E(\varepsilon_э^2)$ зна чительно увеличиваетс (кривая IV), но почт возвращается к преж нему уровню (II) прі использовании матри $P^{(1+2)}$ (кривые III и II)

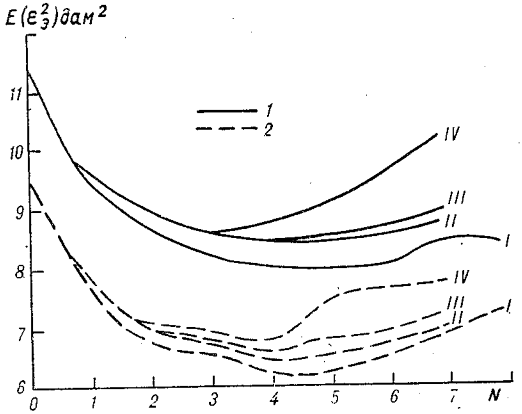


Рис. 3. Зависимость $E(\varepsilon_э^2)$ от N при использовании различных матриц $\{p_{nk}\}$.

I — эксперимент I, 2 — эксперимент 2; кривая I — $E(\varepsilon_э^2)$ при решении задачи (13) с матрицами $\{\tilde{p}_{nk}\}$, кривая II—$E(\varepsilon_э^2)$ при решении задачи (12) с матрицами $\{\overline{p}_{nk}\}$, кривая III—$E(\varepsilon_э^2)$ при применении $P^{(1)}$к данным в эксперименте 2, кривая IV — $E(\varepsilon_э^2)$ при использовании матриц $P^{(1+2)}$.

Заметим, что для кривых *III*, *IV* ошибка начинает сти при n больше некоторо- m. Это можно объяснить м, что при $n>m$ строки мат- цы $\{p_{nk}\}$ считаются по очень лому числу реализаций

${}_{ik}\}$ и свыше определен- х значений n полученные зультаты недостоверны.

На рис. 4 *а* и *б* представле- результаты сравнения $\varepsilon^2_э)$ и $\varepsilon^2_т$ в зависимости N при использовании мат- ц $P^{(1)}$ в эксперименте 2 и триц $P^{(2)}$ в эксперименте 1. з рисунка видно, что введе- е «чужих» матриц ведет к ачительному расхождению ежду $E(\varepsilon^2_э)$ и $\varepsilon^2_т$.

На рис. 4 *в* и *г* сравнива- тся $E(\varepsilon^2_э)$ и $\varepsilon^2_т$ при рас- тах с матрицами $P^{(1+2)}$. идно, что увеличение стати- ического осреднения при дсчете матриц $\{P_{nk}\}$ ведет сближению $E(\varepsilon^{2э})$ и $\varepsilon^2_т$.

На рис. 5 представлены ривые $E(\varepsilon^2_э)$ в экспери- енте 2 для интервалов 6 и 2 ч при решении задач (12) (13).

Видно, что при увеличе- ии Δt ошибка возрастает. Это язано с тем, что при мень- их интервалах используется ольше статистических харак- еристик. Следует отметить, то в обоих случаях конечное зменение ошибки немногим ольше, чем полученное после ,5 дня.

Отметим, что полученные езультаты похожи на резуль- аты работы [1], за исключе- ием того факта, что у нас шибка сначала уменьшается, потом начинает несколько озрастать, а в [1] она затем стается постоянной.

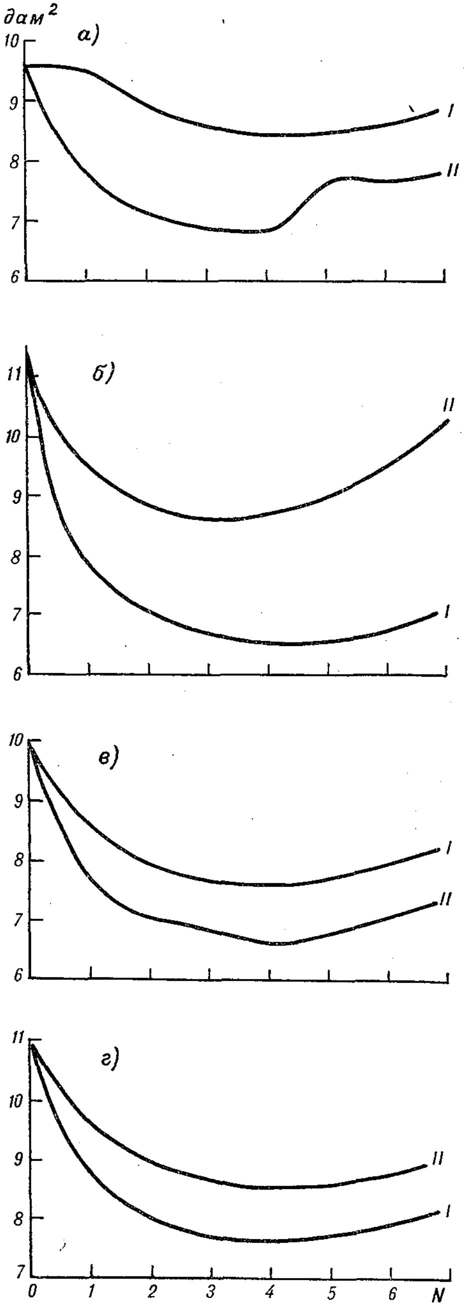


Рис. 4. Зависимость $E^2_т$ (*I*) и $E(\varepsilon^2_э)$ (*II*) от N при использовании матриц в экспериментах 1 и 2.

а — при применении матриц $P^{(1)}$ в эксперименте 2; *б* — при применении матриц $P^{(2)}$ в эксперименте 1, *в* — при применении матриц $P^{(1+2)}$ в эксперименте 2, *г* — при применении матриц $P^{(1+2)}$ в эксперименте 1.

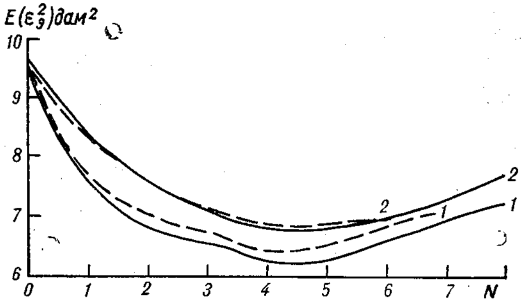


Рис. 5. Зависимость $E(\varepsilon_э^2)$ N для разных интервалов в мени в эксперименте 2. 1 — для $\Delta t=6$ ч, 2 — для $\Delta t=1$ сплошные линии — с применен матриц $\{\widetilde{p}_{nk}\}$ штриховые — с пр нением матриц $P^{(2)}$.

По нашему мнению, это может объясняться тем, что в при построении матриц $\{p_{nk}\}$ было проведено значитель большее статистическое осреднение, тогда как у нас при n боль некоторого m матрицы $\{p_{nk}\}$ считаются по малому числу реал заций, причем это число различно для матриц разной разме ности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Miyakoda K. and Talagrond O. The assimilation of past data in dyr mical analysis, part I.— Tellus XXIII, 1971, v. 23, No. 4—5, p. 310—317.
2. Гандин Л. С. и др. Упрощенная модель для численных эксперимент по термическому режиму атмосферы.—«Труды ГГО», 1970, вып. 2 с. 72—97.
3. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Л., Гидр метеоиздат, 1963. 268 с.

А. И. ПОЛИЩУК

О ПЛАНИРОВАНИИ СИСТЕМ ТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ В ТРОПИЧЕСКОЙ ЗОНЕ

1. В связи с планированием Атлантического тропического на-
дательного эксперимента (Тропэкс) в рамках Программы ис-
дования глобальных атмосферных процессов необходимо сфор-
ировать требования к построению систем наблюдений в тропи-
кой зоне, в частности кораблей погоды, баллонов постоянного
ления и других наблюдательных систем. Для решения этого
роса необходимо иметь оценки по информативности проекти-
мых систем наблюдений.

Под информативностью в [3] предложено понимать точность
ерполяции в промежуточные точки, которая обеспечивается за-
ной системой наблюдений. При таком подходе можно получить
нки информативности системы при конкретном размещении
ктов наблюдений. Именно такие расчеты для тропической зоны
олнены в работе И. Г. Ситникова и Е. Н. Егоровой [16]. Одна-
при планировании новых систем наблюдений удобным оказыва-
я более общий случай, когда в качестве параметра, характери-
ющего систему, рассматривается густота сети, т. е. среднее
стояние между пунктами наблюдений. При этом обычно прини-
ют, что схема расположения пунктов наблюдений остается оди-
ковой по всей территории, а изменяется лишь расстояние между
ктами. Такой путь с использованием линейной интерполяции
лужил основой для планирования метеорологической сети еще
аботах О. А. Дроздова и А. А. Шепелевского [6], а с примене-
м оптимальной интерполяции в работе Л. С. Гандина [1] и в
це других работ [2, 11, 13] для планирования аэрологической
и.

Для тропической зоны в [3] проведены аналогичные оценки,
нако их можно рассматривать в качестве ориентировочных, так
к они получены на основе сведений по статистической структуре
лей умеренных широт, хотя и с учетом изменения дисперсии
широтой. Кроме того, эти оценки произведены лишь для поля
потенциала, в то время как наиболее трудным является вопрос
создании системы наблюдений, обеспечивающей надежную ин-
рмацию о поле ветра на высотах.

В связи с тем что за последнее время появились работы, и чающие статистические свойства полей в низких широтах, ока лось возможным существенно уточнить полученные в [3] выво а также произвести аналогичные расчеты для поля ветра.

Некоторое представление об информативности систем наб дений в тропической зоне могут дать оценки, выполненные в боте Г. Стейница и др. [17] на основе данных о статистичес структуре полей геопотенциала и ветра поверхности 500 мб в т пиках. Однако авторы [17] не только не учитывают измене дисперсии в приэкваториальной зоне, но и не указывают зна ние дисперсии, принятой ими при расчетах, что в значитель степени затрудняет использование приведенных в [17] резуль тов. Кроме того, в [17] нет сравнения оценок информативно систем наблюдений в умеренной и в тропической зонах. Оце интерполяции данных наблюдений в тропиках содержатся так в работе М. А. Алаки и Р. Элвандера [14], но относятся эти оц ки к измерениям на уровне поверхностей 850 и 200 мб.

2. По-прежнему [3] будем полагать, что информационная з чимость системы наблюдений описывается точностью оптималь интерполяции в центр треугольной ячейки по данным наблюде в вершинах треугольника со стороной h, образующего эту ячей Тогда средняя квадратическая ошибка оптимальной интерполяц определяется формулой [2]

$$E=\sigma_f\sqrt{1-\frac{3r^2\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)}{1+2r(h)+\eta}},$$

где, как обычно, принято, что поле величины f статистически нородно и изотропно, имеет дисперсию σ_f^2, нормированную ав корреляционную функцию $r(\rho)$. Мера ошибок измерений η пос янна во всех точках и представляет собой отношение средне квадрата ошибки наблюдений σ_0^2 к дисперсии элемента

$$\eta=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_f^2}.$$

Здесь мы не рассматриваем возможные отклонения от при той схемы, такие как неравномерность размещения пунктов территории, увеличение числа точек наблюдений, привлекаем к интерполяции. Как показано в [3], информационная значимос системы наблюдений при таких отклонениях может существен измениться.

3. На рис. 1 *а* представлены результаты расчетов зависимос E от h и σ_0 по формуле (1) для тропических широт применител но к геопотенциалу поверхности 500 мб. При этом использова корреляционная функция, приведенная в [12] (см. рис. 3, кр вую *3*), которая аппроксимирована зависимостью вида

$$r(\rho)=0{,}91e^{-\rho/1{,}48},$$ (

ρ — в тыс. км. Подробное сравнение этой функции с данны-
других авторов, проведенное в [12], показало, что нормирован-
е корреляционные функции поля геопотенциала AT_{500} в тро-
ических широтах практически совпадают. Специальные расчеты,
оведенные в [3], показали, что общий характер зависимости
енок информативности систем наблюдений от таких параметров
стемы, как точность на-
юдений, густота и строе-
е сети мало меняется при
реходе от одной аппрок-
мации корреляционной
нкции к другой. Это да-
основание использовать
я целей анализа одну кор-
ляционную функцию (3).
Рисунок аналогичен
афикам, полученным в [2,
для умеренных широт,
содержит, семейство изо-
ний *E*. Эти кривые на
с. 1 *а* имеют почти одина-
вый и очень небольшой
клон при всех рассматри-
емых *h*. Однако уменьше-
е ошибки наблюдений
2—3 раза при больших *h*
едкая сеть) привело бы
уменьшению *E* не более,
м на 10%, а для малых *h*
устая сеть) уточнение
ализа не превысит 35%.
ким образом, как и в уме-
нных широтах, для уве-
ичения информативной
ачимости системы наблю-
ний, бо́льший эффект да-
бы увеличение плотности
ти, нежели повышение
чности наблюдений.

На рис. 1, как и на ана-
гичных рисунках в ра-
е опубликованных рабо-
х, проведена изолиния
$=\sigma_0$ (штриховая линия), выделяющая область, в которой ошиб-
а оптимальной интерполяции меньше ошибки наблюдений, и, сле-
овательно, проинтерполированные значения точнее непосред-
твенно наблюденных. По пересечению этой линии с горизонталью
σ_0 можно, исходя из сформулированного Дроздовым и Шепелев-
ким требования, чтобы ошибка интерполяции не превышала

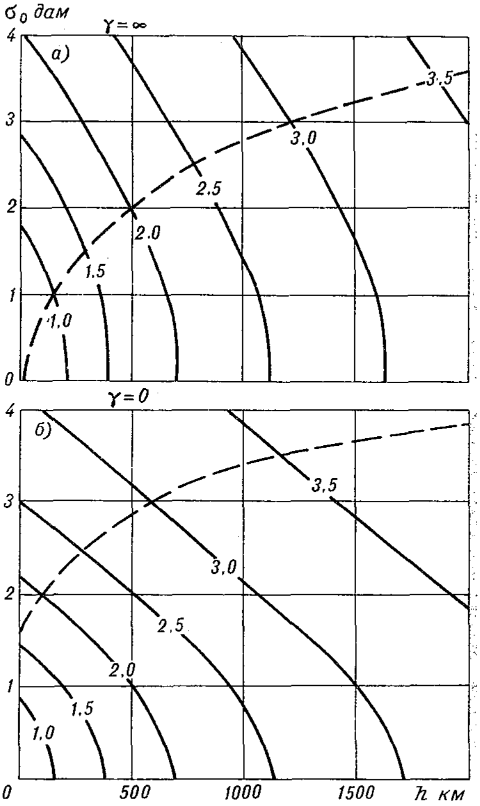


Рис. 1. Средняя квадратическая ошибка *E* (дам) интерполяции геопотенциала как функция расстояния *h* между пунктами наблюдений и средней квадратической ошибки наблюдений σ_0 (тропики).

в среднем ошибки наблюдений, определить максимально допуст мое расстояние h между пунктами при заданной точности набл дений. Так, предполагая, что погрешность радиозондирования с ставляет 2 дам, получим, что $h_{\max}$ для тропических широт не дол но превышать 480 км, а при $\sigma_0=1$ дам, $h_{\max}\approx 120$ км.

Сравнение оценок информативности для тропических (рис. и умеренных широт (см. рис. 1 в работе [3]) показывает, что то ность восстановления поля геопотенциала в отдельных точках п тем оптимальной интерполяции при расстояниях между пунктам наблюдений порядка 300—500 км практически одинакова для ум ренных и для тропических широт. Это можно видеть из табл. в которой приведено отношение $k_1=(E_{\text{ум}}-E_{\text{тр}})/E_{\text{ум}}$ (в проце

Таблица

Сравнение ошибок интерполяции геопотенциала поверхности 500 мб в умеренных ($\sigma_f^2=207$ дам²) и тропических ($\sigma_f^2=18$ дам²) широтах

h тыс. км	σ_0 дам							
	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4
0,05	—75	—44	—20	—9	—3	1	4	10
0,1	—46	—37	—22	—12	—6	—2	2	8
0,2	—22	—20	—15	—11	—6	—2	1	7
0,3	—9	—9	—7	—5	—3	0	3	8
0,4	—1	0	0	1	2	4	5	10
0,5	7	7	7	7	7	8	9	13
0,6	13	13	12	12	12	12	13	16
0,7	18	18	18	17	17	16	17	19
0,8	23	23	22	22	21	21	21	22
0,9	28	27	27	26	25	25	25	26
1,0	32	31	31	30	29	29	29	29
1,2	39	39	38	38	37	36	36	36
1,4	46	45	45	44	44	43	43	43
1,6	51	51	51	50	50	49	49	49
1,8	56	56	56	56	55	55	54	54
2,0	61	61	60	60	60	59	59	58

тах). При значительных ошибках измерений ($\sigma_0=4$ дам) отнош ние k_1 по абсолютной величине меньше 10% при $h\leqslant 500$ км. С уве личением точности измерений и с уменьшением расстояния h сред няя квадратическая ошибка интерполяции в тропических широта существенно возрастает по сравнению с E в зоне умеренных ши рот. При больших же расстояниях h ошибка интерполяции меньш в тропической зоне, чем в умеренных широтах. Сказанное относит

лишь к абсолютным ошибкам и в значительной мере связано
азличием дисперсий поля геопотенциала умеренных и тропи-
ких широт.

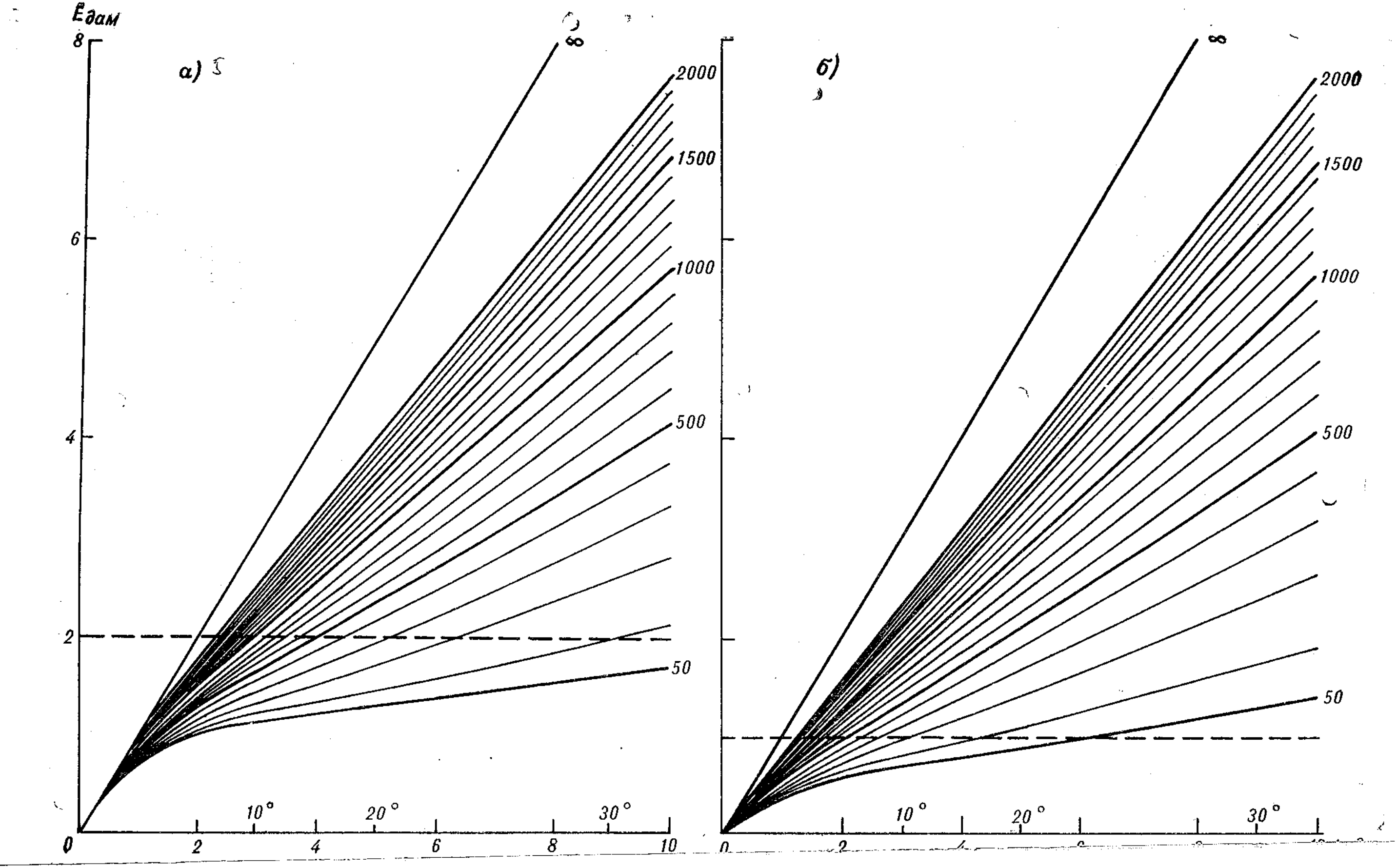
По данным ряда работ [5, 12] можно судить об изменении σ_f^2
и переходе к тропикам, а также о заметном широтном ходе дис-
сии непосредственно в низких широтах. Так, на широте 10°
реднем σ_f^2 может составить величину около 3—9 дам^2, на широ-
20° $\sigma_f^2 \approx 10 \div 15$ дам^2, а на широте 30° может достигать 50 дам^2.
и получении приведенных выше результатов принималось, что
$=18$ дам^2, что можно рассматривать как среднюю дисперсию
потенциала в тропиках в зимнее время. Некоторые оценки вли-
ия широтного хода дисперсии в низких широтах на точность
тимальной интерполяции проведены в [3]. Однако полученные
последнее время данные по статистической структуре [5, 12, 14,
] позволяют провести аналогичные оценки с использованием
рреляционной функции не умеренных, как в [3], а тропических
ирот.

На рис. 2 приведены зависимости средней квадратической
ибки интерполяции E от σ_f и от расстояния h между пунктами
блюдений при двух фиксированных значениях $\sigma_0=2$ дам
$\sigma_0=1$ дам. По оси абсцисс указаны также соответствующие σ_f
ля зимних условий) значения широты места. Кроме того, прове-
ны линии $E=\sigma_0$ и $E=\sigma_f$.

Как видно из рис. 2, заданное значение E может быть получе-
при меньшей густоте сети в зоне широт 10—15°, чем в зоне
—20°. Так, например, при $\sigma_0=2$ дам одна и та же средняя квад-
атическая ошибка получается на широте 10° при $h=1000$ км, а на
ироте 15° при $h=500$ км. При более точных измерениях, напри-
ер, при $\sigma_0=1$ дам соответствие $E=\sigma_0$ достигается лишь для низ-
их широт (10° и менее) и то на расстояниях $h \approx 200$ км.

Таким образом создается впечатление, что для описания про-
ессов в приэкваториальной зоне требования к густоте сети могут
ыть менее жесткими при переходе к более низким широтам. Од-
ако это справедливо лишь в том случае, когда при анализе рас-
матривается величина E и ставится условие равенства этой вели-
ины для всех широт. Такой подход обычно встречается при чис-
енном прогнозе по полушарию, когда анализируются ошибки ин-
ерполяции как во внетропических, так и в тропических широтах.

Однако в тех случаях, когда требуется рассматривать процессы
олько в низких широтах, анализу должна подвергаться относи-
ельная ошибка интерполяции $\varepsilon=E/\sigma_j$, которая по рис. 2 мо-
ет быть определена отношением ординаты при заданном
к ординате при $h=\infty$ (линия $E=\sigma_f$). Поскольку при переходе
более низким широтам дисперсия σ_f уменьшается, а следова-
ельно, при постоянном значении дисперсии ошибок наблюдений
$^2_0$ увеличивается мера ошибки наблюдений, то наблюдается рост
еличины ε. Так, например, при $\sigma_0=2$ дам относительная средняя


Eдам
8
6
4
2
0
а)
∞
2000
1500
1000
500
50
2
4
6
8
10
10°
20°
30°
б)
∞
2000
1500
1000
500
50
0
2
10°
20°
30°

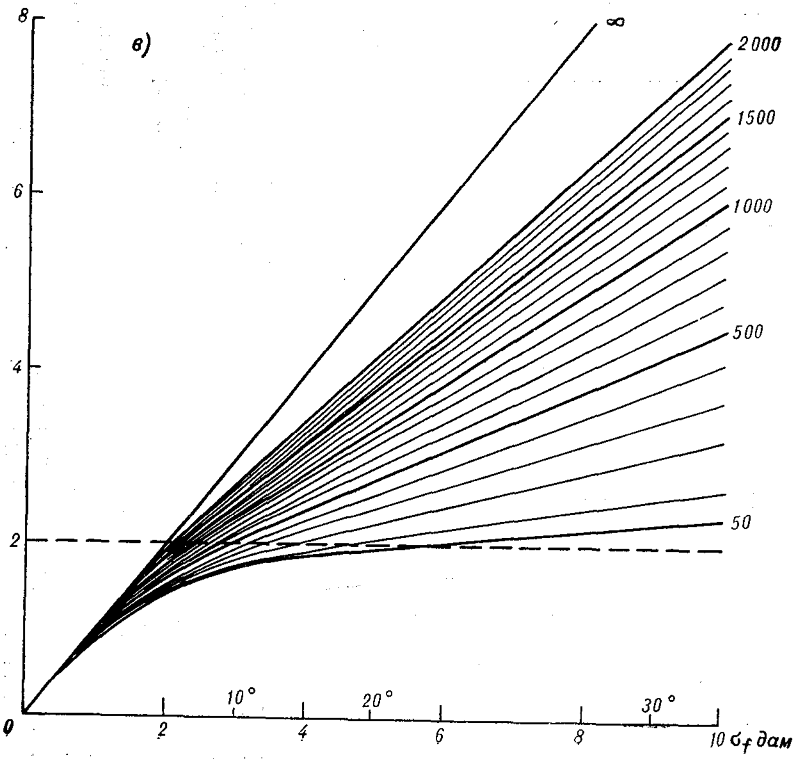


Рис. 2. Средняя квадратическая ошибка E интерполяции геопотенциала как функция среднего квадратического отклонения σ_f и расстояния h (км) между пунктами наблюдений (тропики).

$а$ — $\sigma_0 = 2$ дам, $\gamma = \infty$; $б$ — $\sigma_0 = 1$ дам, $\gamma = \infty$; $в$ — $\sigma_0 = 2$ дам, $\gamma = 0$.

квадратическая ошибка интерполяции при расстоянии $h=500$
составляет 0,46, 0,54 и 0,74 соответственно на широтах 20, 10 и

Таким образом, для изучения процессов непосредственно в т
пической зоне необходимо как увеличение плотности сети, т
и повышение точности наблюдений. Последнее можно иллюст
ровать рис. 2 *б*, построенным для $\sigma_0=1$ дам. При таком значен
погрешности измерений соответствующие указанным широтам
10 и 5° относительные ошибки интерполяции при $h=500$ км сос
вят 0,42, 0,45 и 0,49.

Для сравнения приведенных на рис. 2 зависимостей *E* от
и *h* для тропических широт с аналогичными зависимостями, г
лученными в работе [3], в табл. 2 представлено отношен

Таблица

Уточнение оценок интерполяции геопотенциала поверхности 500 мб в тропической зоне по сравнению с данными работы [3] ($\sigma_0=2$ дам)

h тыс. км	σ_f дам					
	2	3	4	5	7	10
0,05	3	6	10	15	26	49
0,1	6	11	19	27	46	78
0,2	10	21	33	46	74	115
0,4	18	34	51	69	101	141
0,6	23	41	60	78	108	139
0,8	25	44	63	79	104	127
1,0	24	43	60	74	94	111
1,2	23	40	54	66	81	93
1,4	20	35	47	56	68	76
1,6	16	28	38	45	54	60
1,8	13	22	29	34	41	45
2,0	9	16	21	25	29	32

$k_2=(E_{тр}-E'_{тр})/E'_{тр}$ (в процентах). Здесь $E_{тр}$ — средняя квадрати
ческая ошибка интерполяции, вычисленная с использованием кор
реляционной функции (3) геопотенциала в тропической зон
а $E'_{тр}$—ошибка, расчет которой произведен в [3] с учетом диспер
сии тропических широт, но по корреляционной функции работ
[4] геопотенциала умеренных широт. Как видно из этой таблиц
k_2 всегда положительно при всех значениях h и σ_f. Это означае
что оценки информативности систем наблюдений в тропическо
зоне, проведенные в [3], занижены.

Однако эти оценки могут быть использованы при выборе густоты сети в субтропической зоне на широтах 20—30°, для которой
как показано в [12], корреляционная функция поля геопотенциала в зимнее время совпадает с $r(\rho)$ умеренных широт.

ł. Приведенные выше результаты получены в предположении оррелированности ошибок наблюдений. Как отмечалось в [3], горизонтальном зондировании атмосферы (например, при са- етных и спутниковых наблюдениях), когда измерения над ными пунктами производятся с помощью одного и того же при- а, ошибки данных должны быть положительно коррелирова- Учитывая связность ошибок измерений, формула (1) примет

$$E=\sigma_f\sqrt{1-\frac{3r^2\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)}{1+2r(h)+\eta+2\eta\varkappa(h)}}. \quad (4)$$

Здесь, как и в [3], предполагается, что поле ошибок статисти- ки однородно и изотропно, и корреляционная функция его опи- зается зависимостью, аналогичной корреляционной функции юго элемента, а именно

$$\varkappa(\rho)=r(\gamma\rho), \quad (5)$$

э множитель γ характеризует радиус корреляции ошибок изме- ний. При $\gamma<1$ корреляция ошибок затухает с увеличением рас- эяния медленнее, а при $\gamma>1$ — быстрее, чем корреляция самого эмента. В случае $\gamma=0$ ошибка представляет собой одинаковое всех пунктах наблюдений случайное число. Величина $\gamma=\infty$ со- ветствует случаю некоррелированных ошибок, рассмотренному ше. При этом выполняется соотношение

$$\varkappa(\rho)=\left.\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}\text{при } \rho=0\\ \text{при } \rho\neq 0.\end{matrix} \quad (6)$$

(Результаты расчетов, проведенных по формуле (4) при $\gamma=0$, иводятся на рис. 1. Как видно из сравнения этих рисунков, изо- нии E приобретают больший наклон. Это означает, что повыше- е точности наблюдений значительно уменьшает ошибку интер- ляции. Однако положение линии $E=\sigma_0$ на рис. 1 указывает на обстоятельство, что при полностью коррелированных ошибках лучить проинтерполированные значения точнее наблюденных эжно лишь при существенном сгущении сети. Например, при $=2$ дам пункты следовало бы размещать на расстоянии, не пре- ышающем 140 км.

О влиянии коррелированности ошибок на точность интерполя- ии можно судить и по данным табл. 3, которые представляют со- эй отношение $k_3=(E|_\gamma-E|_{\gamma=\infty})/(E)|_{\gamma=\infty})$.Сопоставление k_3 с дан- ыми, приведенными в [3] (см. табл. 6), показывает, что харак- эр зависимости k_3 от γ, h и σ_0 в умеренных и тропических широ- ах аналогичен. А именно, с уменьшением радиуса корреляции шибок величина k_3 уменьшается, причем это уменьшение особен- о заметно при малых расстояниях h между пунктами наблюде- ий. При малых ошибках наблюдений этот эффект быстро убыва- т с ростом h, а при больших σ_0 затухание происходит медленно.

В случае полностью коррелированных ошибок существенно жаются возможности для получения интерполированного зна ния точнее наблюденного во всем диапазоне рассматриваемых рот. Это можно видеть из рис. 2 *в*.

5. Как уже отмечалось выше, правильнее было бы при раз щении пунктов аэрологических наблюдений ориентироваться не точность представления поля геопотенциала, а на точность по чения информации о поле ветра. Изучение статистической стр туры поля ветра довольно подробно проводилось для умерен широт в работах [7, 8], а для низких широт в работах [7, 14, 1 Сравнение этих данных в [12] указало на некоторое различ корреляционных функций поля ветра различных широт, а так на изменение дисперсий при переходе к низким широтам.

Таблиц

Увеличение (в %) ошибки интерполяции геопотенциала поверхности 500 мб в тропических широтах за счет коррелированно ошибок наблюдений

γ	h тыс. км								
	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2
				$\sigma_0 = 0,5,\ \eta = 0,014$					
0	20	12	6	3	2	2	1	1	
0,5	20	11	6	3	2	1	1	1	
1,0	19	11	6	3	2	1	1	0	
2,0	19	10	5	2	1	1	0	0	
5,0	17	9	3	1	0	0	0	0	
10,0	15	6	2	0	0	0	0	0	
				$\sigma_0 = 1,0,\ \eta = 0,057$					
0	42	30	19	11	8	6	5	3	2
0,5	41	29	18	10	7	5	4	2	1
1,0	40	28	17	9	5	4	3	1	1
2,0	39	27	15	7	4	2	1	0	0
5,0	36	22	10	3	1	0	0	0	0
10,0	31	16	5	1	0	0	0	0	0
				$\sigma_0 = 2,0,\ \eta = 0,227$					
0	52	45	35	25	19	15	13	8	6
0,5	52	44	34	22	16	12	10	5	3
1,0	51	43	32	20	14	10	7	3	2
2,0	50	41	29	16	10	6	4	1	0
5,0	46	35	21	8	3	1	1	0	0
10,0	40	26	11	2	0	0	0	0	0

Зависимость E от h и σ_0 для поля ветра умеренных и тропи-
:их широт приведена на рис. 3, аналогичном рис. 1. Для рас-
ı ошибок интерполяции E использованы данные по структуре
я ветра поверхности 500 мб, полученные для умеренных **широт**
О. Кричак [8], а для тропических широт Т. П. Калугиной
І. В. Карташовой [7]. При этом для тропических широт ис-
ьзована, как это де-
ось и при анализе
я ветра умеренных
ют [9], одна корреля-
нная функция, пред-
вленная в работе [12]
рис. 5 (см. кривую 3).
юме того, для тропиче-
й зоны принималась
дняя по данным [14]
персия σ_f^2, равная
м^2/с^2.

Как видно из рис. 3,
ıбольший эффект по-
шения информатив-
:ти сети наблюдений
: в умеренной, так и в
пической зоне может
ть достигнут при
еньшении расстояния
жду пунктами наблю-
ний с одновременным
личением точности из-
рений. Однако при оди-
ковой погрешности из-
рений σ_0 интерполяция
тропической зоне мо-
т производиться с той
точностью, что и в
не умеренных широт
и бóльших расстояниях
жду пунктами наблю-
ния. (Например, при
$=4$ м/с погрешность
$=3$ м/с может быть по-
чена при $h=100$ км
умеренных широтах и при $h=200$ км в тропической зоне.)

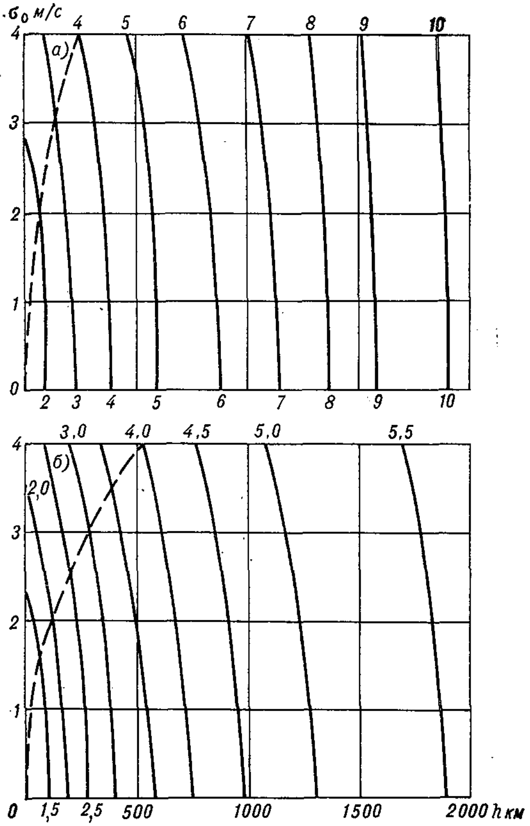
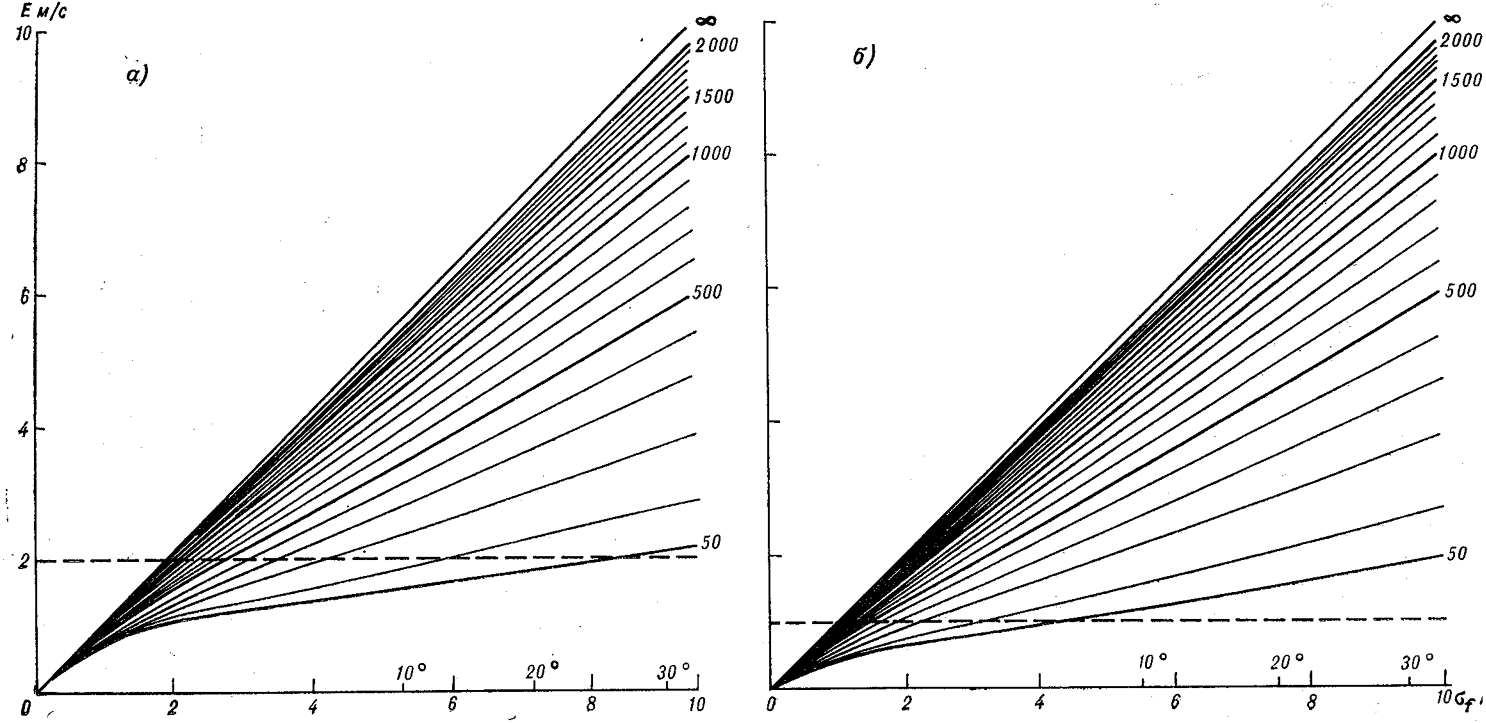


Рис. 3. Средняя квадратическая ошибка E интерполяции ветра как функция расстояния h между пунктами наблюдений и средней квадратической ошибки наблюдений σ_0.

а — умеренные широты, *б* — тропики.

Отражением этого отличия являются положительные значения
ношения k_1 в табл. 4. Однако, как видно из этой таблицы, раз-
чие ошибок интерполяции в разных широтах не достигает 50%
и всех рассматриваемых h и σ_0.

Как и при анализе поля геопотенциала, указанные соотноше-


E м/с
10
8
6
4
2
0
а)
2
4
6
8
10
10°
20°
30°
∞
2000
1500
1000
500
50
б)
0
2
4
6
8
10
σ_f
10°
20°
30°
∞
2000
1500
1000
500
50

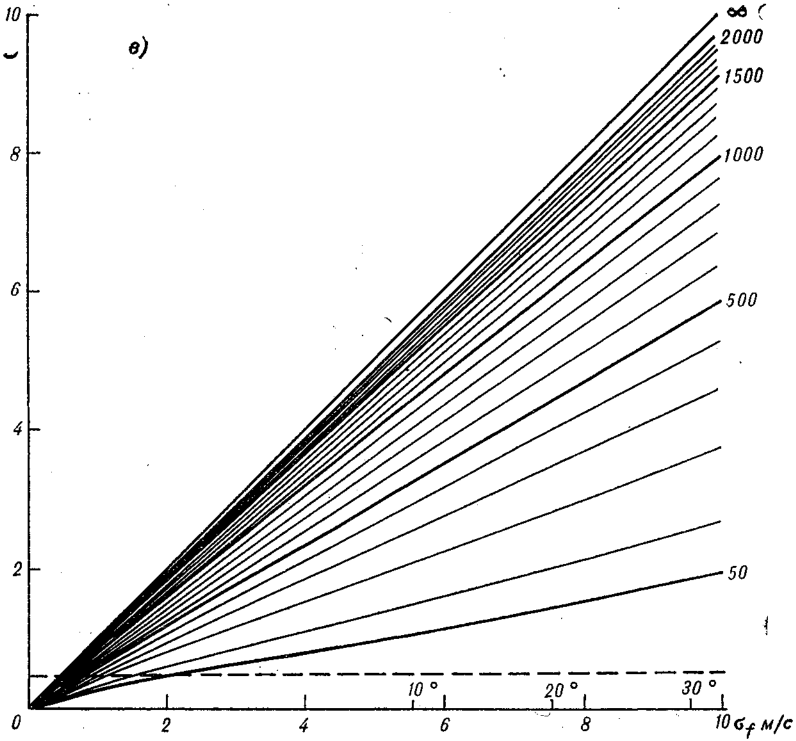


Рис. 4. Средняя квадратическая ошибка E интерполяции ветра как функция среднего квадратического отклоиения σ_i и расстояния h (км) между пунктами наблюдений (тропики).

а — σ_0 =2 м/с; *б* — σ_0 =1 м/с; *в* — σ_0 = 0,5 м/с.

Табл

Сравнение ошибок интерполяции ветра на уровне поверхност
500 мб в умеренных (σ_f^2=107 м²/с²)
и тропических (σ_f^2= 34 м²/с²) широтах

h тыс. км	σ_0 м/с					
	0	1	2	3	3,5	4
0,05	24	23	17	13	12	12
0,1	27	25	21	17	16	15
0,2	27	26	23	21	20	19
0,4	27	26	25	24	23	23
0,6	27	27	26	26	25	25
0,8	28	28	27	27	27	27
1,0	30	30	29	29	30	30
1,2	33	33	33	33	34	34
1,4	37	37	37	37	38	38
1,6	42	42	41	41	41	41
1,8	44	44	44	44	44	44
2,0	44	46	46	45	45	45

ния справедливы только при сравнении абсолютных оши
интерполяции. При переходе к относительным ошибкам ε за с
различия изменчивости самого элемента σ_f в тропических и у
ренных широтах соотношения изменяются.

Влияние широтного хода дисперсии составляющих ветра
переходе к низким широтам на среднюю квадратическую ошиб
интерполяции можно проследить по рис. 4, аналогичному рис.
и построенному для значений σ_0=2, 1 и 0,5 м/с. Согласно [1
дисперсия составляющих ветра в зоне широт 5—30° изменяе
от 9 до 170 м²/с². Естественно, изменение E в низких широтах
ответствует широтному ходу σ_f. Как видно из этих рисунк
с уменьшением σ_f, которое отмечается при переходе к более низк
широтам, величина E уменьшается, а относительная ошибка ε у
личивается. Проводя сопоставление ошибок E, ε и σ_0, аналогичн
сделанному при анализе поля геопотенциала, можно прийти к в
воду, что для тропических широт необходимо проводить наблюд
ния поля ветра с существенно меньшей погрешностью измерен
чем в умеренных широтах. Однако, как показывают расчеты, пр
веденные для σ_0=0,5 м/с, значения E и ε существенно уменьш
ются лишь при малых расстояниях h, а возможности получен
с помощью интерполяции по горизонтали более точных результ
тов, чем единичное измерение, сужаются (сравнить положение л
нии $E=\sigma_0$ на рис. 4 *а* и *в*). Для умеренных широт значительн
повышение точности анализа поля ветра можно достичь, если и

ьзовать согласование полей ветра и геопотенциала по схеме,
дложенной в [10]. К сожалению, использование этой схемы
тропической зоны невозможно, так как в тропиках не выпол-
тся основное условие схемы [10] — совпадение геострофиче-
го и реального ветра.

Отсюда следует, что для изучения процессов в тропиках необхо-
мо стремиться как к увеличению густоты сети, так и к повыше-
нию точности наблюдений по сравнению с ее значениями, до-
гнутыми в настоящее время.

ЛИТЕРАТУРА

Гандин Л. С. О принципах рационального размещения сети метеорологических станций.—«Труды ГГО», 1961, вып. 111, с. 81—98.

Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Л., Гидрометеоиздат, 1963. 283 с.

Гандин Л. С., Каган Р. Л., Полищук А. И. Об оценке информативности систем метеорологических наблюдений.—«Труды ГГО», 1972, вып. 286, с. 120—140.

Гандин Л. С., Кузнецова Т. И. О пространственной статистической структуре поля геопотенциала.—«Труды ГГО», 1965, вып. 168, с. 84—93.

Добрышман Е. М. Исследование статистических характеристик поля давления в низких широтах и определение движения по полю давления в экваториальной области.—«Труды ММЦ», 1965, вып. 7, с. 107—122.

Дроздов О. А., Шепелевский А. А. Теория интерполяции в стохастическом поле метеорологических элементов и ее применение к вопросам метеорологических карт и рационализации сети.—«Труды НИУ ГУГМС», 1946, сер. 1, вып. 13, с. 65—115.

Калугина Т. П., Карташова М. В. О статистических характеристиках поля ветра в экваториальной зоне и в средних широтах.—«Труды Гидрометцентра СССР», 1969, выш. 39, с. 67—83.

Кричак М. О. Некоторые результаты исследования статистических характеристик поля ветра.—«Труды ГГО», 1967, вып. 208, с. 32—40.

Кричак М. О. Методика объективного анализа поля ветра на уровнях 850, 500 и 300 мб.—«Метеорология и гидрология», 1968, № 1, с. 21—27.

. Клуге И. Об использовании данных о ветре при объективном анализе высотного барического поля.—«Труды ГГО», 1970, вып. 267, с. 32—51.

1. Либерман Ю. М. О точности анализа поля геопотенциала над северным и южным полушариями.—«Труды ГГО», 1968, выш. 228, с. 41—48.

2. Лугина К. М. К вопросу о статистической структуре геопотенциала в тропических широтах.—«Труды ГГО», 1967, вып. 208, с. 23—31.

3. Машкович С. А. Некоторые вопросы планирования размещения аэрологических станций в свете задач объективного анализа аэрологических наблюдений.— Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды Л., Гидрометеоиздат, 1964, с. 215—223.

4. Alaka M. A., Elvander R. C. Optimum interpolation from observation of mixed quality.— Monthly Weather Review, 1972, v. 100, No. 8, p. 612—624.

5. Crutcher H. L. Upper wind statistics charts of the Northern Hemisphere, 1959, vol. 1, 2, Issued by the chief of Naval Operations.

6. Sitnikov I. G., Yegorova E. N. Optimum A-scale station distribution studies. GATE, Experiment design proposal by interim scientific and management, group 1971, vol. 2. Annex XI, XV, p. 49.

7. Steinitz G., Huss A., Sinai R. et. al. Optimum station network in the tropics.— Journ. Appl. Meteorol., 1971, vol. 10, No. 3, p. 364—369.

Р. Л. КАГ

К ВОПРОСУ ОБ ОСРЕДНЕНИИ МЕТОДОМ ПОЛИГОНОВ

1. Метод полигонов является одним из наиболее употреб
тельных способов пространственного осреднения данных гид
метеорологических наблюдений. К сожалению, он являтся дово
но трудоемким, что до последнего времени существенно огранич
вало применение его в оперативной практике. В настоящее вре
широкое внедрение ЭВМ открывает большие возможности для а
томатизации процесса обработки данных гидрометеорологическ
наблюдений. Естественно поставить вопрос и о реализации н
ЭВМ методов осреднения метеорологических полей, в частнос
метода полигонов. В последнее время появился ряд работ, посв
щенных автоматизации этого метода [5, 6, 8], однако эти работ
ограничивались либо описанием алгоритма вычислений, без пр
ведения оценок точности осреднения, либо такие оценки давали
лишь для отдельных конкретных примеров. Ниже делается попы
ка более систематически исследовать точность этого метода и с
поставить его с другими способами осреднения.

2. Метод полигонов, восходящий еще к работе А. Тиссена [7
состоит, как известно, в разделении площади, по которой произв
дится осреднение, на элементарные площадки, соответственно чи
лу станций, используемых при осреднении. При ручных расчета
для этой цели каждую станцию соединяют прямыми линиям
с остальными. Эти отрезки делятся пополам и через точки деле
ния проводятся перпендикулярные линии (рис. 1). В результат
пересечения перпендикуляров для каждой станции получается мн
гоугольник (полигон). После того как все полигоны построены
планиметрированием определяются их площади s_i. Для станций
находящихся на краю территории осреднения, определяется лиш
площадь той части полигона, которая приходится на эту терри
торию. После этого осреднение по площади S, на которой распо
ложено n станций, производится по формуле

$$f_S = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i, \qquad (1$$

где f_i — данные наблюдений в i-том пункте, f_s — средняя величи
на, p_i — вес, с которым входит при осреднении станция номера i

В методе полигонов веса принимаются равными отношени ощади элементарного участка s_i ко всей площади осредне-я, т. е.

$$p_i = \frac{s_i}{S}. \qquad (2)$$

При этом выполняется условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \qquad (3)$$

Очевидно, этот метод является применимым для сравнительно днородных по отношению к осредняемой величине территорий.

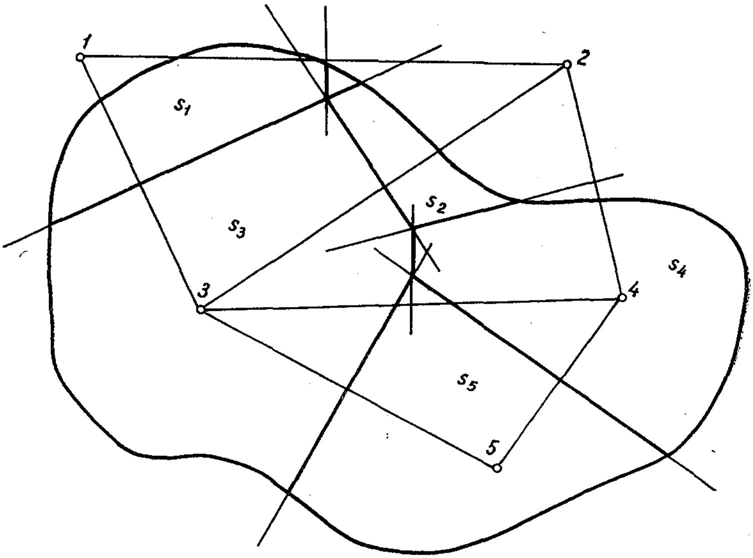


Рис. 1. Схема деления площади осреднения на полигоны.

Однако осреднение методом полигонов можно во многих случаях использовать и для неоднородных территорий, если под величиной f_i понимать не абсолютные значения измеряемых величин, а их отклонения от нормы, абсолютные либо отнесенные к среднему квадратическому отклонению.

Наиболее трудоемка процедура планиметрирования для определения площадей s_i. При условии стабильности сети станций оно может быть выполнено раз навсегда, после чего осреднение по формуле (1) труда не составляет. Следует, однако, иметь в виду, что в оперативных условиях трудно добиться стабильности сети, поскольку нередки случаи несвоевременного поступления данных с той или иной станции. Кроме того, может оказаться целесообразным исключить данные отдельных станций из рассмотрения (например, из-за брака наблюдений или из-за явно аномальных условий на данной станции). В каждом таком случае возникает необходимость новой разбивки территории и пересчета весов. З метим, что стабильность сети редко удается выдерживать и пр обработке данных за прошлые годы, поскольку приходится сч таться с переносами станций, организацией новых станций и т. Это обстоятельство сильно ограничивает возможности применени метода полигонов при ручных расчетах.

Расчеты существенно облегчаются при использовании ЭВМ Х. Фаль [8] реализовал на ЭВМ практически тот же алгоритм который используется при расчетах вручную с построением мно гоугольников. Этот вариант, при котором необходимо использо вать громоздкие аналитические формулы для расчета площаде полигонов и сложные оценки того, какие полигоны и какая част их выходит за пределы территории осреднения, является очен неудобным. Более приемлемым представляется алгоритм, пред ложенный М. Дискином [5, 6], который и будет нами в дальней шем использоваться.

В этом алгоритме используется то обстоятельство, что полигон является геометрическим местом точек, расстояние которых до данной станции меньше расстояний до всех остальных станций Поэтому веса определяются в такой последовательности.

а. Задается контур площади осреднения. Задание это осуществляется путем введения в ЭВМ координат опорных точек контура. Координаты промежуточных точек определяются путем интерполяции между опорными точками. В простейшем варианте интерполяция между каждыми двумя опорными точками может производиться линейно.

б. Задаются координаты пунктов наблюдения.

в. Выбирается густая равномерная сетка вспомогательных точек, полностью покрывающая территорию осреднения. Предпочтительна прямоугольная сетка, которая нами и будет использоваться. Границы сетки определяются крайними значениями координат контура территории осреднения. Густота сетки определяется требованиями к точности определения весов. Целесообразно шаг ее в направлении обеих осей координат выбирать таким, чтобы в обоих направлениях укладывалось одинаковое количество узлов. Таким образом, если $X_{\max}$, $X_{\min}$, $Y_{\max}$ и $Y_{\min}$, соответственно, экстремальные значения абсцисс и ординат контура, соотношение между шагами должно описываться формулой

$$\frac{h_x}{h_y} = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{Y_{\max} - Y_{\min}}. \qquad (4)$$

г. Осуществляется перебор точек вспомогательной сетки. Для каждой точки определяется, расположена ли она внутри контура осреднения. Определяется также расстояние от нее до всех станций и находится та станция, расстояние до которой является минимальным. После окончания перебора выявляется общее число M точек, попавших внутрь контура, и число точек m_1, m_2, ..., m_n, ближайшими к которым оказались соответственно первая, вторая и т. д. станции.

д. Определяются веса осреднения. Ввиду равномерности сетки ни приближенно равны

$$p_i = \frac{m_i}{M}. \tag{5}$$

Степень точности равенства (5) определяется густотой сетки регулярностью расположения станций. Очевидно, что при лю- ом размещении станций нельзя гарантировать погрешность опре- еления весов меньшую, чем величина $1/M$. При неблагоприятном азмещении станций (и при извилистом граничном контуре) по- решности для некоторых значений весов могут быть существен- ю выше.

Ниже будут выполнены некоторые оценки влияния густоты вспомогательной сетки на точность определения весов. Следует иметь в виду, что получение весов не является самоцелью. Нашей задачей является возможно более точное определение средней величины. В силу условия нормировки (3), которое в данном алгоритме соблюдается, погрешности весов для различных станций имеют разные знаки. Поэтому они, как правило, существенно компенсируют друг друга при определении средней величины и относительная погрешность последней в большинстве случаев оказывается гораздо меньше относительной погрешности определения весов.

Именно погрешность определения средней величины является критерием для суждения о правильности выбора способа осреднения. При этом, разумеется, нельзя ограничиться рассмотрением погрешности осреднения в том или ином частном случае. Необходимы их статистические оценки. Для этой цели удобно воспользоваться априорной оценкой средней квадратической погрешности осреднения по данным о статистической структуре осредняемой величины.

Ограничимся простейшим случаем однородности и изотропности территории относительно осредняемой величины f, имеющей во всех точках территории среднее значение $\bar{f}$, дисперсию σ^2 и нормированную корреляционную функцию

$$r_{ik} = r(\rho_{ik}) = \frac{1}{\sigma^2}\left[\overline{f(x_i,\ y_i)\, f(x_k,\ y_k)} - (\bar{f})^2\right], \tag{6}$$

где $\rho_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}$, а черта сверху означает осреднение, понимаемое в статистическом смысле.

Как показано в [3], при заданном расположении пунктов наблюдений точность, с которой осреднение данных наблюдений в них по формуле (1) дает истинную среднюю по территории S, описывается формулой

$$\varepsilon^2 = \mu + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} p_i p_k r_{ik} + \sum_{i=1}^{n} p_i^2 \eta^2 - 2 \sum_{i=1}^{n} p_i \omega_i. \tag{7}$$

Здесь $\varepsilon^2 = E^2/\sigma^2$ — мера ошибок осреднения, E — средняя ква
ратическая ошибка осреднения,

$$\mu = \frac{1}{S^2} \iint\limits_{S(x,\, y)} \iint\limits_{S(\xi,\, \eta)} r\left[\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}\right] dxdyd\,\xi d\eta \qquad ($$

— отношение дисперсии средней по площади S величины к ди
персии точечных значений,

$$\omega_i = \frac{1}{S} \iint\limits_{S(x,\, y)} r\left[\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}\right] dx\,dy \qquad ($$

— корреляция между значениями величины в точке $(x_i,\ y_i)$ и сре
ней по площади, η^2 — мера ошибок измерения, равная отношени
дисперсии ошибок измерения к дисперсии величины f. Для прост
ты полагаем ее далее одинаковой для всех пунктов наблюдени

Интегрирование в формулах (8) и (9) осуществляется числе
но, после чего подстановка в (7) дает оценку точности осредн
ния при любом выборе весов p_i. Для сравнения точности разны
методов осреднения достаточно сравнить величины ε^2, получа
щиеся при соответствующем выборе весов. Наибольшая точност
достигается при выборе оптимальных весов осреднения [3], кот
рые получаются путем решения системы.

$$p_i \eta^2 + \sum_{k=1}^{n} p_k r_{ik} = \omega_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n). \qquad (1$$

Подстановка в (7) получаемых путем решения системы (10
оптимальных весов p_{0i} дает минимальную меру ошибок осре
нения

$$\varepsilon_0^2 = \mu - \sum_{i=1}^{n} p_{o\,i}\, \omega_i. \qquad (11$$

С этой величиной естественно сравнивать оценки точности, по
лучаемые для других способов осреднения. Практически, помим
оптимального осреднения, метод полигонов целесообразно сопо
ставлять также с методом арифметического осреднения, при ко
тором веса всех пунктов измерения берутся одинаковыми и равными $1/n$.

3. С целью получения представления о точности метода полигонов были выполнены расчеты для территорий различных размеров, при различном числе и расположении пунктов наблюдений на ней. Оценивалось также влияние точности наблюдений.

Для определенности считалось, что площадь осреднения представляет собой квадрат со стороной L. Такой выбор площади осреднения позволял задавать границу ее всего четырьмя угловыми точками и существенно сокращал машинное время, необходимое для многократного проведения расчетов.

При заданном числе пунктов наблюдения n расчеты производились первоначально для равномерного их размещения. Затем расчеты повторялись для других расположений, получавшихся из рвоначального введением случайных смещений в их координа- . Последние задавались путем использования соответствующей ограммы формирования псевдослучайных чисел. Кроме того, ограмма предусматривала возможность фиксации всех пунктов блюдения в пределах площади осреднения или в какой-либо ее сти.

Различная точность измерений моделировалась путем вариа- и меры ошибок измерения η^2.

Расчеты выполнялись в предположении, что пространственная рреляционная функция осредняемой величины аппроксимирует- формулой

$$r(\rho) = e^{-\rho/\rho_0}, \qquad (12)$$

е ρ_0 — радиус корреляции.

Заметим, что для большинства элементов, для которых про- ранственное осреднение особенно существенно, таких как осад- , испарение, коротковолновая радиация, аппроксимация (12) овлетворительно описывает фактические данные об их прост- анственной корреляции.

Из сопоставления формул (7)—(9) и (12) видно, что точность среднения при заданном расположении пунктов зависит не от инейного масштаба L территории и радиуса корреляции ρ_0 в от- ельности, а от их отношения $l=L/\rho_0$, которое впредь и будет на- и использоваться.

Для выяснения целесообразной густоты вспомогательной сетки ыли выполнены опыты по определению весов методом полигонов утем использования сеток с разным шагом при одном и том же азмещении пунктов в квадрате. Некоторые результаты этих опы- ов для случаев различного размещения на квадрате четырех, де- яти и шестнадцати пунктов приведены в табл. 1. В этой таблице аны максимальные абсолютные отклонения весов, рассчитанных ри M узлов вспомогательной сетки, от весов, рассчитанных при $M=3600$.

Из табл. 1 видно, что при малых M веса могут определяться со значительной ошибкой, достигающей нескольких десятков процентов. С увеличением густоты сетки точность определения весов, как правило, быстро возрастает. Однако в некоторых случаях погрешности определения весов остаются заметными даже при $M=2500$. Интересно отметить, что из рассмотренных случаев наибольшая погрешность в определении весов для $n=9$ и $n=16$ отмечается в вариантах I, соответствующих равномерному расположению пунктов на площади. В то же время именно для этих вариантов выбор M кратным числу пунктов n ($M=900$ при $n=9$, $M=400$ и $M=1600$ при $n=16$) обеспечивает точное определение весов.

Оценка сверху для погрешности определения весов может быть получена по формуле

$$|\Delta p|_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{M}}. \qquad (13)$$

Максимальные отклонения весов от их значени

M	$n=4$				$n=9$	
	I	II	III	IV	I	II
100	0,0244	0,0067	0,0128	0,0008	0,0489	0,0153
400	0,0075	0,0031	0,0047	0,0031	0,0114	0,0100
900	0,0022	0,0014	0,0006	0,0008	0,0000	0,0022
1600	0,0019	0,0008	0,0009	0,0008	0,0114	0,0014
2500	0,0008	0,0007	0,0000	0,0006	0,0087	0,0028
$\bar{p}$	0,2500	0,2500	0,2500	0,2500	0,1111	0,1111

Пользуясь этой формулой, можно оценить густоту вспомогате ной сетки, необходимой для определения весов с заданной т ностью. Например, полагая допустимой величину максимальн ошибки в определении весов $|\Delta p|_{\max}=0,001$, получаем, что шаг вс могательной сетки должен быть в 500 раз меньше попереченых р меров территории осреднения. Принимая допустимой $\Delta p=0,0$ получаем число делений стороны сетки равным 100, что согласу ся также с оценками М. Дискина [6].

Из сказанного следует, что для получения весов с больш точностью необходимы очень густые вспомогательные сетки. П ребор десятков и сотен тысяч узлов при таких сетках может п требовать большого машинного времени. Однако, как уже ук зывалось, разрежение вспомогательной сетки сказывается на то ности осреднения в гораздо меньшей степени, чем на точнос определения весов.

Наибольшим влияние густоты сетки оказывается при $\eta=$ Из рассмотренных в табл. 1 вариантов относительное изменени средней квадратической погрешности по сравнению с рассчита ными при $M=3600$ достигает для $M=100$ около 10% в варианте для $n=9$ и 30% в варианте I для $n=16$. Однако и для этих и дл всех других рассмотренных в ходе расчетов вариантов уже пр $M=400$ и $M=900$ относительное отклонение величины ε от рассчитанной при $M=3600$ не превышает двух процентов. При $\eta\neq0$ эт отклонения еще уменьшаются. Представляется поэтому, что выбор $M=900$ практически обеспечивает достаточно точную реализацию осреднения методом полигонов. Именно такая сетка и использовалась нами при дальнейших оценках.

4. Формула (7) позволяет оценивать точность осреднения пр любом расположении пунктов наблюдения и при произвольном выборе весов осреднения p_i. Однако практическое использование ее при расчетах вручную затруднительно. Для этой цели было бы удобнее пользоваться приближенными формулами, позволяющими в обозримой форме учесть влияние главных факторов на точность осреднения.

Таблица 1

ассчитанных при $M=3600$

		$n=16$			$\frac{1}{2\sqrt{M}}$
III	IV	I	II	III	
0,0089	0,0150	0,0275	0,0186	0,0150	0,0500
0,0058	0,0025	0,0000	0,0064	0,0025	0,0250
0,0033	0,0022	0,0086	0,0027	0,0022	0,0167
0,0026	0,0009	0,0009	0,0019	0,0009	0,0125
0,0014	0,0006	0,0051	0,0014	0,0006	0,0100
0,1111	0,1111	0,0625	0,0625	0,0625	—

Приближенные формулы такого рода были предложены авто-
м [1, 2] для случая равномерного размещения пунктов наблю-
ния на территории. В этом случае веса осреднения естественно
инять одинаковыми и равными $1/n$, т. е. производить осредне-
е методом среднего арифметического. Точность среднего ариф-
тического зависит от размеров площади осреднения S, числа
анций на ней n и от характеристик пространственной структуры
редняемой величины. В частности, для пространственной струк-
ры, характеризующейся экспоненциально убывающей корреля-
онной функцией вида (12), была получена простая формула

$$\varepsilon_1^2(S, n) = \frac{0{,}23\sqrt{S}}{\rho_0}\,\frac{1}{n^{3/2}}, \qquad (14)$$

ргешность которой в пределах $0<S\leqslant 4n\rho_0^2$ не превышает десяти
оцентов.

Здесь и далее, где это особо не оговорено, приводятся фор-
улы для простейшего случая отсутствия ошибок наблюдений
$\eta=0$). Дополнительный учет влияния ошибок наблюдений на
очность осреднения трудностей не представляет, поскольку из
7) следует, что

$$\varepsilon^2(\eta) = \varepsilon^2(0) + \eta^2 \sum_{i=1}^{n} p_i^2. \qquad (15)$$

Как уже указывалось, формула (14) выведена для равномер-
ой сети пунктов наблюдений, каждому из которых соответствует
лощадь одинаковых размеров, причем пункт расположен в цент-
е площади. В реальном случае неравномерной сети эти условия
е выполняются, что приводит к существенному увеличению по-
решности осреднения по сравнению с получающейся по этой фор-
уле. Попытка оценить влияние неравномерности размещения
унктов наблюдения на точность осреднения методом полигонов
ыла предпринята в [4]. При этом влияние на точность осредне-
ия различия площадей элементов осреднения и смещения пунктов

наблюдения относительно их центров оценивалось раздельно. (вместный анализ влияния этих факторов чисто теоретически і полнить для общего случая оказалось затруднительно.

Представлялось поэтому целесообразным выполнить оцен точности осреднения для конкретного расположения пунктов территории и сопоставить их с соответствующими оценками д случая равномерного расположения такого же количества пункт Целью такого сопоставления являлось установление эмпирическ зависимости точности осреднения методом полигонов от нерави мерности сети.

В качестве характеристики неравномерности используем коэ фициент вариации площадей элементов осреднения (равный д метода полигонов коэффициенту вариации весов осреднения), к торый определяется по формуле

$$\alpha = \frac{\sqrt{n\sum\limits_{i=1}^{n} s_i^2 - S^2}}{S} = \frac{\sigma_p}{\bar{p}} = n\,\sigma_p. \qquad (1$$

Разумеется, зависимость ε от параметра α неоднозначна, п скольку при одном и том же значении α пункты наблюдений м гут располагаться более или менее удачно, можно однако над яться, что соответствующее рассеяние величин ε будет не очен велико. Кроме того, следует ожидать, что на эту зависимость вли ют также размеры площади осреднения. Оказывается, однак что для случая корреляционной функции (12) это влияние сра нительно мало.

В качестве примера в табл. 2 приводятся оценки точност осреднения методом полигонов для случая $n=9$ на площад квадрата различных размеров для трех вариантов расположени пунктов на квадрате (рис. 2). В табл. 2 наряду со значениям

Таблица

Зависимость точности осреднения от размеров территории ($n=9$, $\eta=0$)

l	Схема *А* ($\alpha=0$)		Схема *Б* ($\alpha=0,36$)				Схема *В* ($\alpha=0,34$)			
	$\varepsilon_о$	$\varepsilon_{пол}$	$\varepsilon_о$	$\varepsilon_{пол}$	P	$\varepsilon_{ар}$	$\varepsilon_о$	$\varepsilon_{пол}$	P	$\varepsilon_{ар}$
0,05	0,021	0,021	0,032	0,032	1,53	0,039	0,032	0,032	1,54	0,039
0,1	0,030	0,030	0,045	0,045	1,53	0,054	0,045	0,045	1,53	0,055
0,2	0,042	0,042	0,063	0,064	1,52	0,076	0,063	0,064	1,52	0,077
0,5	0,065	0,066	0,098	0,101	1,52	0,118	0,097	0,099	1,50	0,117
0,75	0,080	0,081	0,119	0,123	1,52	0,143	0,117	0,120	1,48	0,139
1	0,091	0,094	0,135	0,141	1,51	0,162	0,133	0,137	1,47	0,156
1,5	0,110	0,114	0,161	0,170	1,49	0,193	0,156	0,165	1,44	0,181
2	0,125	0,131	0,179	0,194	1,48	0,216	0,174	0,187	1,42	0,200

носительной средней квадратической ошибки осреднения ε_{0}, л и $\varepsilon_{\text{ар}}$ соответственно для оптимального осреднения, метода лигонов и среднего арифметического приводятся величины

$$P(\alpha)=\frac{\varepsilon(\alpha)}{\varepsilon_1},$$

рактеризующие превышение ошибки осреднения над ошибкой еднего арифметического из данных такого же числа равномерно сположенных пунктов наблюдения.

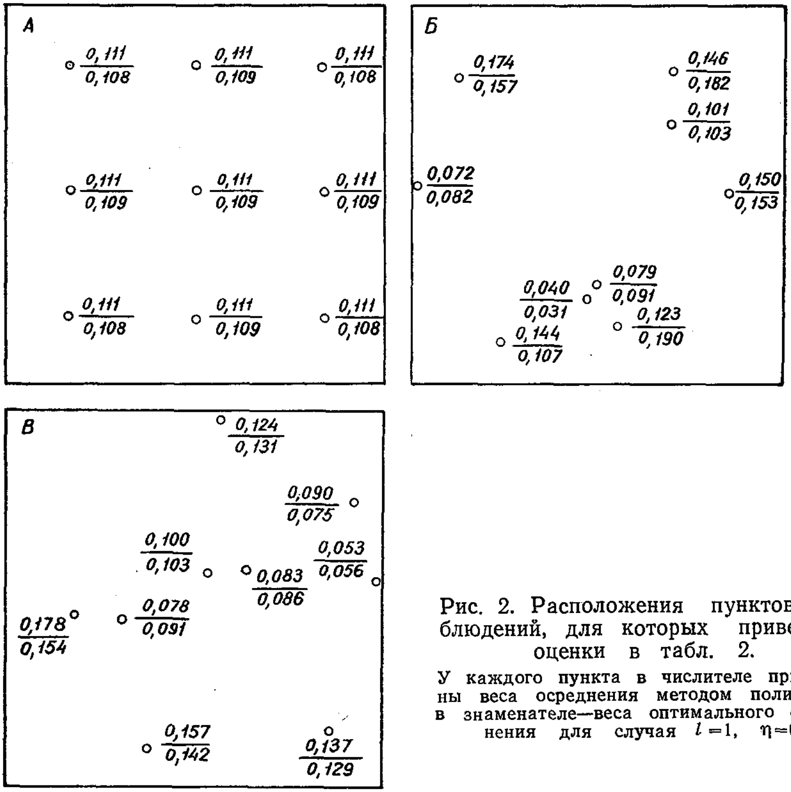


Рис. 2. Расположения пунктов наблюдений, для которых приведены оценки в табл. 2.

У каждого пункта в числителе приведены веса осреднения методом полигонов, в знаменателе—веса оптимального осреднения для случая $l=1$, $\eta=0$.

Из табл. 2 видно, что для этих вариантов, характеризующихся значениями α порядка 0,35, средняя квадратическая погрешность осреднения методом полигонов увеличивается по сравнению с погрешностью осреднения для равномерного размещения пунктов примерно на 50%. Различия между оценками величины P для разных значений $l=L/\rho_0$ невелики и оказываются заметно меньше разброса величины P для фиксированных значений l и α. Поэтому в дальнейшем при определении зависимости P (α) различие l не учитывалось. Большая часть использованных материалов относится к случаям $l=0{,}5$ и $l=1{,}0$.

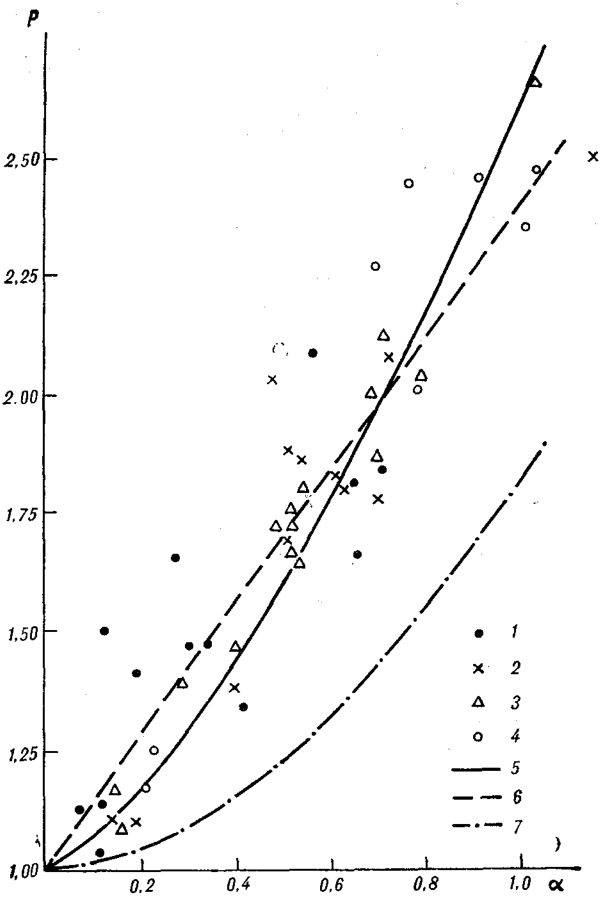


Рис. 3. Увеличение средней квадратической ошибки осреднения за счет неравномерности сети пунктов наблюдения.

1—n=4, 2—n=9, 3—n=16, 4—n=25, 5— $P=1+1{,}6\alpha^{1.4}$, 6—$P=1+1{,}4\alpha$, 7—$P(\alpha)$ согласно [4].

Результаты оценок, выполненных более чем для 50 случаев различного расположения пунктов наблюдений на площади, приводятся на рис. 3. Из рис. 3 видно большое рассеяние значений погрешности для фиксированных значений параметра α. Тем не менее, общая тенденция роста погрешности осреднения с увеличением неравномерности прослеживается достаточно четко. Для ориентировочных оценок можно воспользоваться приближенными формулами

$$P_1(\alpha) = 1 + 1{,}6\,\alpha^{1{,}4}, \tag{17}$$

или

$$P_1'(\alpha) = 1 + 1{,}4\,\alpha. \tag{17'}$$

Аппроксимация P_1' хорошо согласуется с эмпирическими данными в диапазоне $0,3<\alpha<0,8$. Для малых и больших значений лучшее согласие достигается при использовании аппроксимации P_1.

На рис. 3 наряду с кривыми, соответствующими формулам (17) и (17′), приведена полученная в [4] кривая, соответствующая росту ошибок осреднения только за счет вариации площадей элементов осреднения, без учета смещения пунктов наблюдения относительно центров этих элементов. Из сравнения кривых видно, что фактическое наличие такого смещения приводит к увеличению средней квадратической ошибки осреднения приблизительно вдвое.

В случае наличия ошибок наблюдений $\eta\neq 0$ и формула (15) с учетом (16) может быть переписана в виде

$$\varepsilon^2(\eta)=\varepsilon^2(0)+\frac{1+\alpha^2}{n}\eta^2. \qquad (18)$$

В частности, для случая равномерного размещения станций, когда $\alpha=0$, получаем оценку точности для среднего арифметического

$$\varepsilon_1^2(\eta)=\varepsilon_1^2(0)+\frac{1}{n}\eta^2. \qquad (18')$$

Поэтому увеличение средней квадратической погрешности осреднения методом полигонов за счет неравномерности сети опишется формулой

$$P(\eta,\ \alpha)=\frac{\varepsilon(\eta)}{\varepsilon_1(\eta)}=\sqrt{\frac{\varepsilon^2(0)+\frac{1+\alpha^2}{n}\eta^2}{\varepsilon_1^2(0)+\frac{1}{n}\eta^2}}. \qquad (19)$$

Для корреляционной функции (12), учитывая (14) и (17), получаем

$$P(\eta,\ \alpha)=\sqrt{\frac{(1+1,6\,\alpha^{1,4})^2+4,33(1+\alpha^2)\rho_0\sqrt{\frac{n}{S}}\eta^2}{1+4,33\,\rho_0\sqrt{\frac{n}{S}}\,\eta^2}}. \qquad (20)$$

Таким образом, влияние неравномерности существенно зависит как от точности наблюдений, характеризующейся мерой ошибок наблюдения η^2, так и от густоты сети.

Формулу (20) можно переписать в виде

$$P(\lambda,\ \alpha)=\sqrt{\frac{(1+1,6\,\alpha^{1,4})^2+4,33(1+\alpha^2)\,\lambda}{1+4,33\,\lambda}}, \qquad (21)$$

где $\lambda=\frac{\sqrt{n}}{l}\eta^2=\rho_0\sqrt{\frac{n}{S}}\eta^2$ представляет собой безразмерный параметр, учитывающий густоту сети и точность наблюдений.

При $\lambda=0$ получаем формулу (17). С ростом λ величина P уб вает, т. е. влияние неравномерности уменьшается и при больш значениях параметра λ получаем

$$P_2(\alpha)=\sqrt{1+\alpha^2}. \qquad (2$$

Зависимость $P(\lambda,\ \alpha)$ при разных значениях параметров λ и представлена в табл. 3. В этой же таблице приведены значен функции $Q(\lambda,\ \alpha)$, представляющей собой отношение средней ква ратической погрешности осреднения к погрешности осреднен для равномерной сети точек при отсутствии ошибок наблюдени Согласно (14) и (18)

$$\varepsilon(\lambda,\ \alpha)=\sqrt{\frac{0{,}23\sqrt{S}}{\rho_0}\,\frac{1}{n^{3/2}}\,Q(\lambda,\ \alpha)}, \qquad (2$$

где

$$Q(\lambda,\ \alpha)=\sqrt{(1+1{,}6\,\alpha^{1,4})^2+4{,}33(1+\alpha^2)\lambda}. \qquad (2$$

Пользуясь табл. 3 и формулой (23), можно приблизительн оценить влияние неравномерности и сами значения средних квад ратических ошибок осреднения при любом конкретном задани точности исходных данных и густоты сети.

5. С целью выяснения эффективности использования метод полигонов были выполнены для ряда случаев задания расположения пунктов наблюдений и параметров l, n, α, η^2 параллельные оценки точности осреднения этим методом и методом оптимального осреднения и методом среднего арифметического. Поскольку влияние вариации основных параметров на точност осреднения во всех вариантах аналогично, мы ограничимся рассмотрением зависимости точности осреднения от размеров территории для трех вариантов расположения пунктов наблюдений при отсутствии ошибок наблюдения (табл. 2) и зависимости ее от точности наблюдений для четырех вариантов расположения пунктов наблюдений при фиксированных размерах территории (табл. 4). Схемы расположения пунктов наблюдений приводятся на рис. 2 и 4 соответственно.

Сопоставление точности упомянутых методов осреднения приводит к следующим выводам.

а. При отсутствии ошибок наблюдений или при малых их значениях метод полигонов не намного уступает в точности методу оптимального осреднения. Относительные расхождения возрастают с увеличением размеров территории и с увеличением неравномерности расположения станций. Однако и при больших значениях l и α средняя квадратическая погрешность метода полигонов лишь на несколько процентов (во всех рассмотренных случаях не более чем на 10%) превышает соответствующую погрешность оптимальной средней.

б. Расхождение между точностью оптимальной средней и средней арифметической также возрастает с ростом l и α. При малых ошибках наблюдений средняя квадратическая погрешность сред-

Таблица 3

Зависимость величин P и Q от параметров λ и α

λ	α							
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
				$P(\lambda, \alpha)$				
0	1,00	1,17	1,44	1,78	2,17	2,60	3,06	3,56
0,1	1,00	1,12	1,34	1,62	1,94	2,31	2,70	3,12
0,2	1,00	1,10	1,29	1,53	1,81	2,13	2,48	2,86
0,3	1,00	1,09	1,25	1,47	1,72	2,02	2,34	2,68
0,5	1,00	1,07	1,21	1,39	1,62	1,87	2,15	2,46
0,7	1,00	1,06	1,18	1,35	1,55	1,78	2,04	2,32
1,0	1,00	1,05	1,16	1,30	1,49	1,70	1,94	2,19
1,4	1,00	1,04	1,14	1,27	1,44	1,64	1,85	2,08
2,0	1,00	1,04	1,12	1,24	1,40	1,58	1,78	1,99
3,0	1,00	1,03	1,11	1,22	1,36	1,53	1,71	1,91
5,0	1,00	1,03	1,10	1,20	1,33	1,49	1,66	1,84
10	1,00	1,02	1,09	1,18	1,31	1,45	1,61	1,78
∞	1,00	1,02	1,08	1,17	1,28	1,41	1,56	1,72
				$Q(\lambda, \alpha)$				
0	1,00	1,17	1,44	1,78	2,17	2,60	3,06	3,56
0,1	1,20	1,35	1,61	1,94	2,33	2,76	3,23	3,74
0,2	1,37	1,51	1,76	2,09	2,48	2,91	3,39	3,91
0,3	1,52	1,65	1,90	2,22	2,62	3,06	3,55	4,07
0,4	1,65	1,78	2,02	2,35	2,75	3,20	3,69	4,22
0,5	1,78	1,90	2,14	2,47	2,87	3,33	3,83	4,37
0,6	1,90	2,02	2,26	2,59	2,99	3,46	3,97	4,52
0,7	2,01	2,12	2,37	2,70	3,11	3,58	4,10	4,66
0,8	2,11	2,23	2,47	2,81	3,22	3,70	4,22	4,79
0,9	2,21	2,33	2,57	2,91	3,33	3,81	4,35	4,92
1,0	2,31	2,42	2,67	3,01	3,44	3,93	4,47	5,05
1,2	2,49	2,60	2,85	3,20	3,64	4,14	4,70	5,30
1,4	2,66	2,77	3,02	3,38	3,83	4,35	4,92	5,54
1,6	2,82	2,93	3,18	3,55	4,01	4,54	5,13	5,77
1,8	2,97	3,08	3,34	3,71	4,18	4,73	5,33	5,98
2,0	3,11	3,22	3,48	3,87	4,35	4,91	5,26	6,19
2,5	3,44	3,55	3,83	4,23	4,74	5,33	5,98	6,69
3,0	3,74	3,86	4,14	4,57	5,10	5,72	6,41	7,15
3,5	4,02	4,14	4,43	4,88	5,44	6,09	6,81	7,59
4,0	4,28	4,40	4,71	5,17	5,76	6,43	7,19	8,00

λ	α							
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
4,5	4,53	4,65	4,97	5,45	6,06	6,76	7,55	8,39
5,0	4,76	4,89	5,22	5,71	6,34	7,08	7,89	8,76
6,0	5,19	5,33	5,68	6,21	6,88	7,66	8,53	9,47
7,0	5,60	5,74	6,10	6,63	7,38	8,21	9,13	10,12
8,0	5,97	6,12	6,50	7,09	7,84	8,72	9,69	10,73
9,0	6,32	6,47	6,88	7,50	8,28	9,20	10,22	11,32
10	6,66	6,81	7,23	7,88	8,70	9,66	10,73	11,87

него арифметического для неравномерного расположения станци может на 30—40% превышать погрешность оптимального осреднения и осреднения методом полигонов.

в. При увеличении ошибок измерения погрешности осреднени как методом полигонов, так и методом среднего арифметическог возрастают. Однако возрастание это для метода полигонов происходит заметно быстрее, чем для метода среднего арифметического (см. формулы (18) и (18′)). В результате точность осреднения методом среднего арифметического приближается к точност осреднения методом полигонов, а при больших значениях мер ошибки наблюдений η^2 (для рассмотренных в табл. 4 случаев пр $\eta^2>0,5$) превышает ее.

Такое соотношение между точностью метода полигонов и метода среднего арифметического определяется особенностями выбора весов осреднения в них. В самом деле, в соответствии с формулой (2) эти веса при заданном расположении пунктов на территории определяются однозначно, независимо от точности измерения осредняемых величин. Поскольку фактически осредняемые данные содержат случайные ошибки, это должно было бы учитываться в рамках схемы осреднения. Известно, что наилучшим способом сглаживания ошибок равноточных наблюдений является арифметическое осреднение последних. Поэтому рациональная схема осреднения должна бы представлять собой комбинацию осреднения с некоторыми весами истинных значений осредняемой величины и осреднения с равными весами ошибок наблюдений. Разумеется, выделение последних из данных наблюдений невозможно, однако располагая сведениями об их относительной значимости, например, о величине меры ошибок наблюдений, можно установить соотношения между обеими системами весов. Во всяком случае очевидно, что в результате веса осреднения при малых η будут близки к обычным весам метода полигонов, а при больших значениях η они будут существенно сглаженными и близкими к весам, используемым при арифметическом осреднении. При отсутствии такого сглаживания метод полигонов при больших случайных ошибках должен давать погрешности больше метода среднего арифметического, что и наблюдается в действительности.

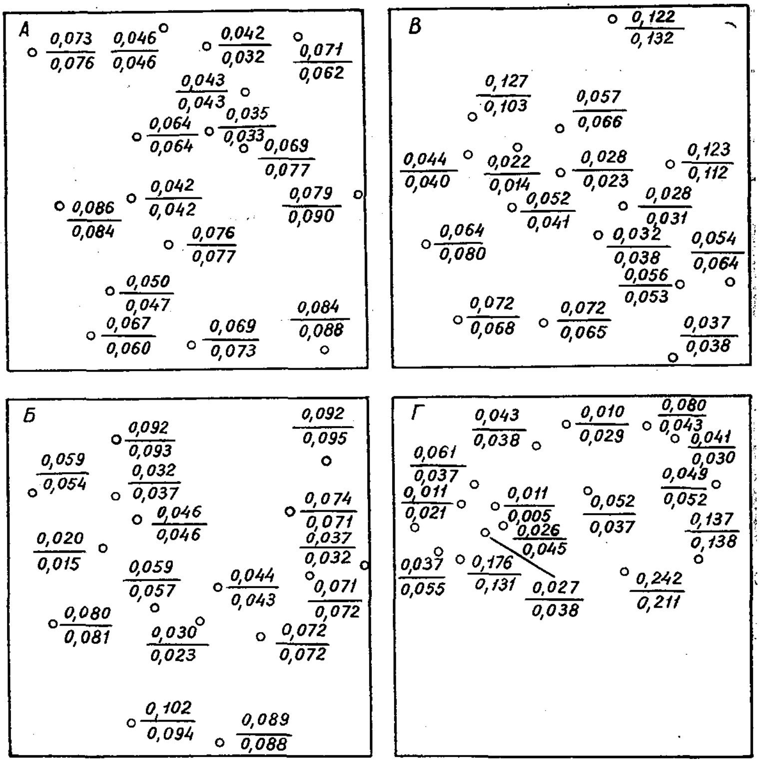


Рис. 4. Варианты расположения пунктов наблюдений, для которых приведены оценки в табл. 4.

У каждого пункта в числителе приведены веса осреднения методом полигонов, в знаменателе — веса оптимального осреднения для случая $\eta=0$.

При упомянутом выше сглаживании условие нормировки (3) остается в силе. Между тем из элементарных соображений ясно, что отказ от этого условия позволил бы существенно уточнить методику осреднения. При этом сумма весов, как правило, должна быть меньше единицы. Уменьшение ее определяется как соотношением случайных ошибок и естественной изменчивости, т. е. величиной η, так и соотношением между радиусом корреляции и размерами элементарных площадей, приходящихся на единицу площади. При отказе от условия нормировки необходимо перейти к осреднению отклонений от нормы.

Как уменьшение относительного рассеяния весов на площади, так и сглаживание их абсолютных значений автоматически обеспечиваются при оптимальном осреднении. Это хорошо видно, например, на рис. 5, на котором приводится зависимость от меры ошибок наблюдений коэффициента вариации $\sigma_p/\overline{p}$ и суммы оптимальных весов осреднения для случая расположения станций в соответствии со схемой *В* рис. 4. Именно отказ от условия нормировки при оптимальном осреднении обеспечивает гораздо боль-

Зависимость точности осреднения от меры ошиб

η^2	Схема *А* (α=0,29)					Схема *Б* (α=0,40)				
	$\varepsilon_о$	$\varepsilon_{пол}$	$\varepsilon_{ар}$	$\varepsilon_{пол}/\varepsilon_о$	$\varepsilon_{ар}/\varepsilon_о$	$\varepsilon_о$	$\varepsilon_{пол}$	$\varepsilon_{ар}$	$\varepsilon_{пол}/\varepsilon_о$	$\varepsilon_{ар}/$
0	0,085	0,086	0,102	1,01	1,21	0,087	0,091	0,120	1,04	1,38
0,01	0,088	0,090	0,105	1,02	1,19	0,091	0,094	0,123	1,03	1,35
0,02	0,092	0,093	0,108	1,02	1,17	0,095	0,098	0,125	1,03	1,32
0,05	0,102	0,104	0,116	1,02	1,14	0,105	0,109	0,133	1,04	1,27
0,1	0,117	0,119	0,129	1,02	1,11	0,119	0,124	0,144	1,04	1,21
0,2	0,141	0,144	0,151	1,02	1,08	0,143	0,151	0,164	1,06	1,15
0,5	0,193	0,203	0,204	1,06	1,06	0,193	0,211	0,214	1,09	1,11
1	0,252	0,274	0,270	1,09	1,07	0,250	0,284	0,277	1,14	1,11
2	0,330	0,378	0,368	1,14	1,12	0,327	0,391	0,374	1,19	1,14

шую его точность по сравнению с другими методами в случая больших ошибок наблюдений.

В принципе, оба эффекта (сглаживание весов и уменьшени их абсолютных значений) могут быть учтены в рамках метода по дигонов путем надлежащей модификации его весов. Так, напри мер, автором выполнены некоторые расчеты с использованием ве сов, определяемых по формуле

$$p_i(\eta) = \frac{n\,\mu[p_i(0) + \eta/n]}{(1+\eta)\,(n\,\mu + \eta^2)}, \qquad (2$$

где $p_i(0)$ — обычные веса осреднения методом полигонов.

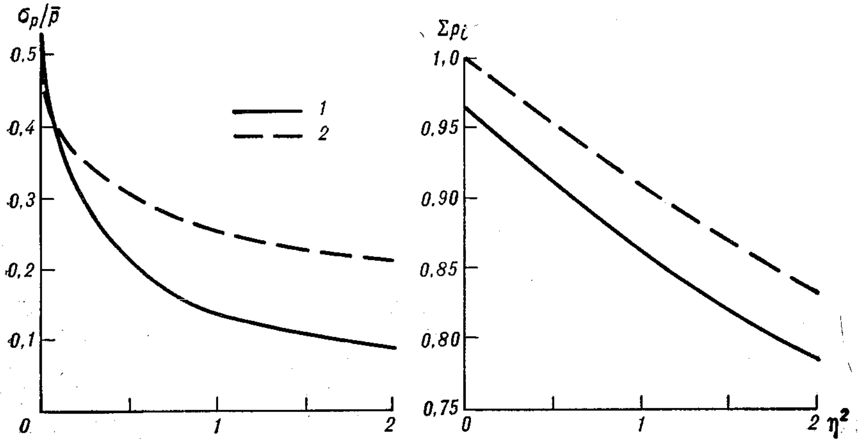


Рис. 5. Сглаживание весов осреднения при увеличении случайных ошибок наблюдений.

1 — для оптимального осреднения, *2* — при выборе весов согласно формуле (25).

Таблица 4

юдения $\eta^2(l=1,0;\ n=16)$

	Схема *В* (α=0,53)					Схема *Г* (α=1,01)				
	$\varepsilon_{пол}$	$\varepsilon'_{пол}$	$\varepsilon_{ар}$	$\varepsilon_{пол}/\varepsilon_0$	$\varepsilon_{ар}/\varepsilon_0$	ε_0	$\varepsilon_{пол}$	$\varepsilon_{ар}$	$\varepsilon_{пол}/\varepsilon_0$	$\varepsilon_{ар}/\varepsilon_0$
95	0,102	0,102	0,132	1,07	1,39	0,202	0,222	0,280	1,10	1,39
99	0,105	0,106	0,134	1,07	1,36	0,204	0,225	0,281	1,10	1,38
02	0,109	0,109	0,136	1,07	1,33	0,206	0,228	0,283	1,10	1,37
12	0,120	0,119	0,143	1,07	1,28	0,213	0,236	0,286	1,11	1,34
26	0,135	0,132	0,154	1,07	1,22	0,222	0,249	0,291	1,12	1,31
49	0,162	0,155	0,173	1,09	1,16	0,238	0,273	0,302	1,14	1,27
98	0,224	0,204	0,220	1,13	1,11	0,275	0,335	0,331	1,22	1,21
254	0,300	0,260	0,283	1,18	1,11	0,318	0,419	0,376	1,32	1,18
329	0,412	0,334	0,377	1,25	1,14	0,377	0,550	0,451	1,46	1,20

Осреднение с использованием таких весов позволяет и при
льших η получать точность осреднения, близкую к точности оп-
мального осреднения (см., например, табл. 4, в которой соот-
тствующие погрешности для схемы *В* обозначены $\varepsilon'_{пол}$). Однако
актическое использование таких вариантов метода полигонов
яд ли целесообразно, поскольку оно требует таких сведений
статистической структуре осредняемого поля, которые достаточ-
ı для реализации наиболее точного метода оптимального осред-
ния.

В силу сказанного метод полигонов целесообразно использо-
ть при сравнительно большой точности данных наблюдений
$^2\leqslant$0,1). В этих случаях он в определенном смысле даже вы-
днее метода оптимального осреднения, поскольку практически
еспечивает ту же точность, не требуя для своей реализации све-
ний о статистической структуре осредняемой величины. Исполь-
вание метода среднего арифметического при сколько-нибудь за-
этной неравномерности ($\alpha>0,2$) в этих условиях нежелательно.

При малой точности данных наблюдений ($\eta^2>0,1$) метод поли-
нов не обеспечивает существенного выигрыша по сравнению
методом среднего арифметического. Поскольку реализация по-
еднего гораздо проще, он является даже предпочтительным.
месте с тем при значительной неравномерности ($\alpha>0,5$) точ-
ость обоих методов невелика, средняя квадратическая погреш-
ость их может на 20—30% превышать погрешность оптимальной
едней. В этом случае наиболее целесообразно использование
тимальной средней.

В заключение напомним, что приведенные оценки относятся
случаю статистической структуры, описываемой экспоненциаль-
ой корреляционной функцией (12). В случае полей, характери-

зующихся статистической структурой другого типа, количест
ные оценки, а возможно даже и некоторые качественные выв
могут измениться. Поэтому при необходимости осреднения под
ных полей целесообразно провести для них аналогичное иссле
вание.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каган Р. Л. О точности определения средней по площади по данным
чечных измерений.—«Труды ГГО», 1965, вып. 175, с. 117—131.
2. Каган Р. Л. К оценке репрезентативности осадкомерных данных.—«
ды ГГО», 1966, вып. 191, с. 22—34.
3. Каган Р. Л. Некоторые вопросы интерпретации осадкомерных данны
«Труды ГГО», 1967, вып. 208, с. 64—75.
4. Каган Р. Л., Полищук А. И. О точности определения средней в
чины по дискретным данным.—«Труды ГГО», 1972, вып. 286, с. 95—
5. Diskin M. H. Thiessen coefficients by a Monte Carlo procedure.— Journ
hydrology, 1969, vol. 8, No. 3., c. 323—335.
6. Diskin M. H. On the computer evaluation of Thiessen weights.— Journ.
hydrology, 1970, vol. 11, No. 1., p. 69—78.
7. Thiessen A. H. Precipitation averages for large areas.— Monthly wea
review, 1911, vol. 39, No. 7, p. 1082—84.
8. Vahl H. Computerized calculation of areal precipitation and its accuracy. D
ribution of precipitation in mountainous areas. Proceed. of Gelio Symposi
vol. II, WMO, No. 326, 1972, p. 510—524.

Л. С. ГАНДИН

ОБ ОЦЕНКЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ПРОГНОЗОВ

По-видимому, М. А. Омшанский впервые предложил исполь-
ать экономические критерии при оценке оправдываемости про-
зов [4, 5]. Применительно к альтернативным прогнозам, т. е.
гнозам одного из двух возможных состояний, этот вопрос был
рассмотрен в работе [5]. В дальнейшем в исследованиях
М. Обухова, А. С. Монина, Н. А. Багрова, Г. А. Карпеева,
Е. Жуковского, а также ряда иностранных специалистов эко-
мические соображения широко привлекались для оценки метео-
логических прогнозов и выработки стратегии их использования.
частности, альтернативным прогнозам посвящены работы [3, 2].
Ниже предлагается простая схема оценки экономической эф-
ктивности альтернативных прогнозов, базирующаяся на рас-
отрении возможных стратегий их использования. Из перечис-
нных работ предлагаемая схема наиболее тесно примыкает к ис-
едованиям М. А. Омшанского [5].

В соответствии с понятием альтернативного прогноза будем
итать, что прогнозируется и может осуществляться одно из двух
зможных состояний x_1 и x_2 метеорологического элемента x. Для
ределенности терминологии будем говорить, что состояние
$=x_1$ представляет собой осуществление некоторого опасного яв-
ния, а состояние $x=x_2$ — отсутствие этого явления.

В табл. 1 приведены обозначения элементов матрицы совмест-
ых повторяемостей прогностических и фактических значений эле-
нта x и матрицы экономических потерь в зависимости от того,
какое из двух значений ориентировано хозяйственное решение
требителя и какое значение имеет место в действительности.

Таблица 1

ктичес кое начение x	Совместные повторяемости		Потери	
	прогностическое значение x		решение потребителя ориентировано на	
	x_1	x_2	x_1	x_2
x_1	α	β	a	b
x_2	γ	σ	c	d

Повторяемости α, β, γ и δ, подчиняющиеся равенству

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=1,$$

не зависят от характеристик потерь и определяются свойств методики прогноза и самого прогнозируемого явления. В ч ности, повторяемость осуществления опасного явления

$$p=\alpha+\beta,$$

а потому и повторяемость его отсутствия

$$q=\gamma+\delta=1-p$$

зависят лишь от свойств самого явления в рассматриваемых ус виях и инвариантны по отношению к методу прогноза.

Что касается элементов a, b, c и d матрицы потерь, то они зависят от повторяемостей α, β, γ и δ и определяются влияни опасного явления на интересующий потребителя народнохоз ственный объект, стоимостью мер, предохраняющих от этого вл ния, и эффективностью таких мер. Имеется в виду, что решен ориентированное на x_1, состоит в принятии мер против опасн явления, а решение, ориентированное на x_2 — в непринятии этих м

Будем считать, что предохранительные меры являются осмы ленными. Это значит, что если опасное явление осуществилось, потери потребителя меньше в том случае, если он принимал п дохранительные меры:

$$a<b,$$

а если явление не осуществилось, то потери меньше в том случ если предохранительных мер принято не было:

$$d<c.$$

Очевидно, что элементы матрицы потерь определены с т ностью до единицы измерения и начала отсчета. Это означа что все величины a, b, c, d можно умножить на один и тот же п ложительный множитель или прибавить к ним одно и то же сл гаемое. Поэтому характеристики экономической эффективнос прогнозов должны зависеть от величин, инвариантных относител но этих линейных преобразований.

Зная матрицы повторяемостей и потерь, легко оценить сре ние потери R потребителя при использовании следующих четыр возможных стратегий.

Стратегия 1 («перестраховка») — потребитель всегда прин мает предохранительные меры независимо от прогноза. В эт случае

$$R=R_1=pa+qc.$$

Стратегия 2 («пренебрежение») — потребитель никогда не пр нимает предохранительных мер. При этом

$$R=R_2=pb+qd.$$

Стратегия 3 («доверие прогнозу») — потребитель принима

упредительные меры, если спрогнозировано опасное явление
принимает мер, если спрогнозировано его отсутствие. В этом
ае

$$R = R_3 = \alpha a + \beta b + \gamma c + \delta d. \qquad (8)$$

атегия 4 («доверие зеркальному прогнозу») — потребитель пре-
раняется от опасного явления, если спрогнозировано его отсут-
е и не предохраняется при прогнозе его наличия. Тогда

$$R = R_4 = \beta a + \alpha b + \delta c + \gamma d. \qquad (9)$$

Предположим сначала, что методика прогноза задана, так что
ичины α, β, γ и δ фиксированы. Вопрос тогда состоит в том,
колько полезны, и полезны ли вообще, такие прогнозы для
личных потребителей.

Очевидно, что если $R_1 < R_3$, то целесообразнее перестраховать-
а не доверять прогнозу, поэтому одним из условий полезности
гноза является неравенство

$$R_3 < R_1, \qquad (10)$$

орое с помощью формул (6) и (8) легко преобразовать к виду

$$\frac{b-a}{c-d} < \frac{\delta}{\beta}. \qquad (11)$$

Аналогично, если $R_2 < R_3$, то целесообразнее пренебрегать воз-
кностью осуществления вредного явления, а не доверять про-
зу, так что вторым условием полезности прогноза является не-
енство

$$R_3 < R_2, \qquad (12)$$

орое с помощью формул (7) и (8) легко преобразовать к виду

$$\frac{b-a}{c-d} < \frac{\gamma}{\alpha}. \qquad (13)$$

Таким образом прогнозы, обладающие характеристиками сов-
тной повторяемости α, β, γ и δ, полезны лишь для тех потреби-
ей, для которых безразмерная комбинация потерь

$$y = \frac{b-a}{c-d} \qquad (14)$$

ходится в интервале от $\frac{\gamma}{\alpha}$ до $\frac{\delta}{\beta}$:

$$\frac{\gamma}{\alpha} < y < \frac{\delta}{\beta}. \qquad (15)$$

Для того чтобы этот интервал не был пустым, необходимо вы-
лнение неравенства

$$\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma > 0, \qquad (16)$$

е. условия положительности коэффициента качественной кор-
ляции между прогностическими и фактическими значениями

элемента x. Впрочем, если выполняется неравенство, против ложное (16), то следует просто перейти к зеркальным прогно т. е. заменить α на β, β на α, γ на δ и δ на γ. Тогда неравен (16) снова будет выполняться. Будем считать, что это уже сд но. В результате из рассмотрения исключается лишь случай Δ т. е. случай отсутствия корреляции между прогностическ и фактическими значениями, когда действительно прогноз бе лезен для всех потребителей.

Величина y, входящая в соотношения (15) и определен формулой (14), не меняется в соответствии со сказанным в в результате изменения начала отсчета или единицы измере компонент a, b, c и d матрицы потерь. Более того, величина изменяется, если изменить начало отсчета отдельно для вели a и b и отдельно для величин c и d. Это означает, что условие п менимости прогноза зависит не от реальных, а лишь от «метео логических» потерь. Иначе говоря, вместо матрицы по $\begin{Bmatrix} a, & b \\ c, & d \end{Bmatrix}$, приведенной в табл. 1, можно использовать матр потерь $\begin{Bmatrix} 0, & b-a \\ c-d, & 0 \end{Bmatrix}$, диагональные элементы которой, соот ствующие правильному учету метеорологической информа равны нулю.

Следует подчеркнуть, что абсолютные значения средних пот зависят не только от y, но еще и от любой из величин $b-a$ $c-d$. Однако условия применимости прогноза зависят не от мих значений средних потерь, а от соотношений между средни потерями при различных стратегиях, которые определяются ли величиной y.

Рассмотрим пример, заимствованный из работы [1] и отно щийся к использованию прогноза теплообеспеченности веге ционного периода в условиях Ленинградской области при выб сорта картофеля. Примем, что $x=x_1$ соответствует недоста тепла во время вегетационного периода и выбору соответствую го такой низкой теплообеспеченности сорта. По данным раб [1] имеем $b-a=92$ руб/га, $c-d=44$ руб/га, так что $y=2{,}1$. касается прогноза, то он, по тем же данным, характеризуется личинами $\alpha=\delta=0{,}30$; $\beta=\gamma=0{,}20$, так что условие применимо прогноза сводится к неравенству $0{,}67<y<1{,}50$. Мы видим, в данном случае y лежит вне пределов применимости прогно который тем самым оказывается бесполезным. Именно, $y>\frac{\delta}{\beta}=1{,}50$, так что наиболее целесообразной оказывается страте перестраховки, т. е. постоянного культивирования сорта, наиме требовательного к теплу. Тот же вывод был получен и в ра те [1].

Как оценить экономическую эффективность прогнозов, е y удовлетворяет неравенствам (15)? С этой целью можно воспо зоваться следующим рассуждением.

Не имея прогноза, потребитель был бы вынужден использова из стратегий 1 или 2, а именно ту из них, средние потери которой меньше. Из формул (6) и (7) следует, что при $\frac{q}{p}$ $R_1>R_2$, так что предпочтения заслуживает стратегия ебрежения. При $y>\frac{q}{p}$ получаем $R_1<R_2$, так что предпочти- на стратегия перестраховки. Из этих формул следует также, «критическое» значение

$$y=y_0=\frac{q}{p} \tag{17}$$

да лежит внутри интервала (15) (если, разумеется, он не пуст, если выполняется условие (16)).

Заметим, что критическое значение y_0, определяемое формулой), имеет ясный смысл. Для выяснения этого смысла запишем енство (17) в виде

$$\frac{py}{q}=\frac{p}{q}\,\frac{b-a}{c-d}=1 \tag{18}$$

аметим, что разность $b-a$ описывает «метеорологические» по- и в случае, когда явление x_1 осуществилось, а хозяйственное ение было принято в предположении его отсутствия (неприня- должных мер); аналогично разность $c-d$ описывает метео- огические потери при принятии напрасных мер, т. е. ориента- на наличие опасного явления, когда его в действительности не ло. Поэтому условие (18) означает, что метеорологические по- и при осуществлении опасного явления во столько раз больше их потерь при отсутствии этого явления, во сколько повторяе- сть самого явления меньше повторяемости его отсутствия. При ом условии средние потери при стратегиях перестраховки пренебрежения совпадают между собой.

Из сказанного ясно, что в интервале

$$\frac{\gamma}{\alpha}<y\leqslant\frac{q}{p}$$

ономический эффект прогноза можно описать разностью $-R_3$, которую согласно формулам (2), (3), (7), (8) и (14) жно записать в виде

$$R_2-R_3=(\alpha y-\gamma)(c-d). \tag{19}$$

а разность равна нулю при $y=\frac{\gamma}{\alpha}$, линейно растет с ростом и принимает наибольшее значение

$$(R_2-R_3)\Big|_{y=\frac{q}{p}}=\frac{\Delta}{p}(c-d) \tag{20}$$

и $y=\frac{q}{p}$. Соответственно в интервале

$$\frac{q}{p}\leqslant y<\frac{\delta}{\beta}$$

экономический эффект прогноза можно описать разностью R_1- выражение для которой

$$R_1 - R_3 = (\delta - \beta y)(c - d) \qquad ($$

получается из формул (2), (3), (7), (8) и (14). Эта разность р на нулю при $y=\frac{\delta}{\beta}$, линейно растет с убыванием y и при $y=$ принимает максимальное значение, совпадающее с (20). Удо еще разделить (19) и (21) на (20), рассматривая тем самым ношение ξ экономического эффекта прогноза к его наибольш значению. Это отношение описывается формулой

$$\xi = \begin{cases} \frac{p}{\Delta}(\alpha y - \gamma) & \text{при } \frac{\gamma}{\alpha} < y \leqslant \frac{q}{p} \\ \frac{p}{\Delta}(\delta - \beta y) & \text{при } \frac{q}{p} \leqslant y < \frac{\delta}{\beta}. \end{cases} \qquad ($$

В качестве примера на рис. 1 представлен график зависимо $\xi(y)$, построенный для случая $\beta=0{,}6\alpha$. Имея подобные графи нетрудно оценить относительную экономическую эффективно прогноза применительно к любому потребителю, если извест экономические показатели последнего.

Перейдем теперь к задаче, противоположной рассмотрен только что. Предположим, что экономические параметры потре теля a, b, c и d зафиксированы, так же как и повторяемость оп ного явления p. Нужно выяснить, каковы ограничения, нала емые на параметры прогноза α, β, γ и δ требованием полезно прогноза для данного потребителя, и если это требование вып нено, то как оценить степень полезности прогноза.

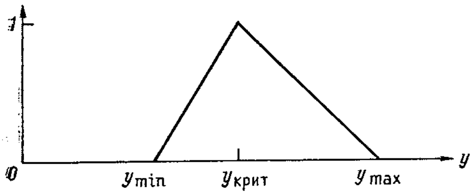


Рис. 1. Зависимость $\xi(y)$ для случая $\beta=0{,}6\alpha$.

С этой целью удобно ввести замену переменных

$$\alpha = \frac{p}{2}(1+u); \quad \beta = \frac{p}{2}(1-u);$$

$$\gamma = \frac{q}{2}(1-v); \quad \delta = \frac{q}{2}(1+v), \qquad (2$$

при которой выполняются равенства (2) и (3). Из условия нео рицательности повторяемостей α, β, γ и δ следует, что

$$-1 \leqslant u, \ v \leqslant 1. \qquad (2$$

При этом случай идеального прогноза ($\alpha=p$; $\delta=q$; $\beta=\gamma=0$) учается при $u=v=1$.

Условие положительности коэффициента качественной корре-
ии (16) приводит к неравенству

$$u+v>0, \tag{25}$$

что все прогнозы, для которых точки квадрата (24) на плос-
ги u, v лежат левее диагонали $u+v=0$, заведомо непримени-
Они, как уже упоминалось, должны быть заменены зеркаль-
и прогнозами.

Далее, условие (11) в новых обозначениях принимает вид

$$pyu+qv>py-q, \tag{26}$$

словие (13)

$$pyu+qv>q-py. \tag{27}$$

юда вытекает следующее.

Если $py=q$, т. е. $y=y_0$ (см. формулу (17)), то неравенства (26)
27) эквиваленты и совпадают с неравенством (25). Последнее
ачает, что в этом случае все осмысленные прогнозы приме-
ы.

Если $py>q$ $(y>y_0)$, то из двух неравенств (26) и (27) ограни-
ельным является (26): при его выполнении (27) удовлетворя-
я автоматически. Переписав (26) в виде

$$q(1+v)-py(1-u)>0, \tag{28}$$

им, что для применимости прогноза точка в квадрате (24)
лжна лежать справа от прямой, проходящей через вершину
$=1$, $v=-1$ и имеющей угловой коэффициент

$$\frac{dv}{du}=-\frac{py}{q}>-1.$$

рис. 2 *а* представлено несколько таких «демаркационных» пря-
х, соответствующих разным значениям параметра py/q. Точки,

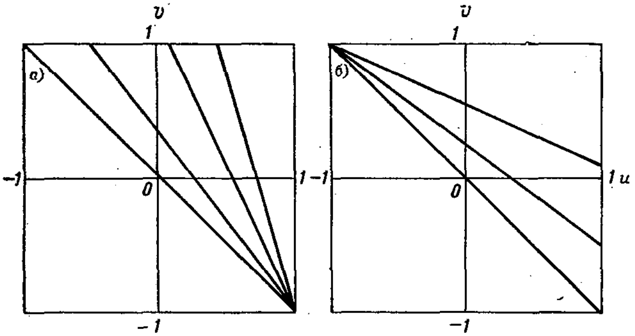


Рис. 2. Демаркационные линии в квадрате $-1\leqslant u$, $v\leqslant 1$.
а) $py/q\geqslant 1$, *б*) $py/q<1$.

лежащие между такой прямой и диагональю $u+v=0$, соответст ют прогнозам осмысленным, но не применимым для данного требителя. Поскольку неравенство (11) тогда не выполняется, по сравнению с ориентацией на такие прогнозы предпочтитель стратегия перестраховки.

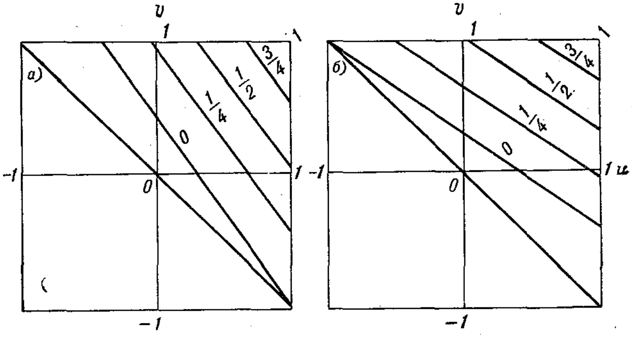


Рис. 3. Изолинии $\zeta(u, v)$.
а) $py/q = 1{,}43$; б) $py/q = 0{,}70$.

Если $py<q$ $(y<y_0)$, то ограничительным является неравенст (27), которое можно переписать в виде

$$py(1+u)-q(1-v)>0 \qquad (2$$

и которое показывает, что для применимости прогноза точк в квадрате (24) должна лежать справа от прямой, проходящ через точку $u=-1$, $v=1$ и имеющей угловой коэффициент

$$\frac{dv}{du}=-\frac{py}{q}>-1$$

(рис. 2 *б*). В этом случае прогнозы, соответствующие точкам, л жащим между такой прямой и диагональю $u+v=0$, осмысленн но не применимы для данного потребителя, так что предпочт тельнее стратегия пренебрежения.

Что касается экономического эффекта прогноза, то, аналоги но предыдущему, этот эффект в случае $py>q$ целесообразно оц нивать разностью потерь R_1—R_3 при стратегиях перестраховк и доверия прогнозу, которая выражается формулой

$$R_1-R_3=\frac{c-d}{2}[(1+v)q-(1-u)py], \qquad (3$$

а в случае $py<q$ — разностью потерь R_2—R_3 при стратегиях пр небрежения и доверия прогнозу, описываемой формулой

$$R_2-R_3=\frac{c-d}{2}[(1+u)py-(1-v)q]. \qquad (3$$

Оценки (30) и (31) удобно нормировать на их максимальные чения, соответствующие идеальному прогнозу ($u=v=1$). Тогда учим

$$=\begin{cases} \dfrac{R_1-R_3}{(R_1-R_3)_{\max}}=\dfrac{1}{2}\left[(1+v)-\dfrac{py}{q}(1-u)\right] & \text{при } py>q \\ \dfrac{R_2-R_3}{(R_2-R_3)_{\max}}=\dfrac{1}{2}\left[(1+u)-\dfrac{q}{py}(1-v)\right] & \text{при } py<q. \end{cases} \qquad (32)$$

формулы (32) следует, что изолинии ζ параллельны демарка- нной линии (соответственно (28) или (29)). При этом на самой аркационной линии $\zeta=0$, а в правом верхнем углу квадрата), соответствующем идеальному прогнозу, ζ принимает макси- льное значение $\zeta=1$.

В качестве примера на рис. 3 показаны изолинии ζ для двух чаев $py/q=1{,}43$ (рис. 3 *а*) и $py/q=0{,}7$ (рис. 3 *б*).

ЛИТЕРАТУРА

андин Л. С. Физические методы в прикладной климатологии.— «Метеорология и гидрология», 1970, № 4, с. 72—79.

арпеев Г. А. О критериях успешности альтернативных прогнозов.— «Известия АН СССР, сер. физика атмосферы и океана», 1966, т. 2, № 8, с. 823—831.

бухов А. М. К вопросу об успешности альтернативных прогнозов.— «Известия АН СССР, сер. геофизич.», 1955, № 4, с. 339—350.

мшанский М. А. Об учете точности прогнозов и их применения. Журн. геофизики, 1933, вып. 4, 489—495.

мшанский М. А. Контроль альтернативных прогнозов.—«Труды ГГО», 1936, вып. 14(4), с. 49—57.

Л. Х. БЕЛЕНЬКИЙ, Е. Е. ЖУКОВСК

О МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИ НА ОСНОВЕ КЛИМАТИЧЕСКИХ ДАННЫХ

Принимая хозяйственные решения, часто приходится учи вать влияние на интересующий нас объект или производствен процесс нескольких метеорологических элементов, причем ед ственным источником информации о погоде служат данные кли тологии. Это имеет место, по крайней мере, в двух ситуациях. первых, иногда прогнозы погоды совсем отсутствуют или им столь низкую оправдываемость, что их использование малоэфф тивно. Во-вторых, специфика целого ряда хозяйственных за такова, что решения принимаются только один раз и затем никогда за период существования рассматриваемого объекта в течение многих лет его эксплуатации корректироваться не гут. Именно так, например, обстоит дело при долгосрочном пла ровании и в строительстве.

Вопросы принятия решений на основе ненадежной метеоро гической информации рассматривались в работах [1, 2 и д и было показано, что выбор оптимальной хозяйственной страте при наличии вероятностных сведений об ожидаемой погоде мо базироваться на анализе некоторого функционала, харак ризующего величину средних потерь потребителя метеоинфор ции при различных стратегиях. Частным случаем являе отыскание так называемой климатически оптимальн стратегии, минимизирующей средние потери при отсутствии прог зов. В работе [3] эта задача была решена применительно к ному влияющему метеоэлементу. Ниже она обобщается на случ нескольких переменных.

Рассмотрим следующую экономико-математическую моде Допустим, что для принятия оптимальных хозяйственных решен необходимо знать точные значения метеорологических элемент $X_1=x_1$, $X_2=x_2$, ..., $X_n=x_n$, однако они заранее неизвестны, и поэ му независимо от конкретной погоды решение принимается всег одно и то же исходя из предположения, что $X_1=a_1$, $X_2=a_2$, . $X_n=a_n$. Таким образом, значения a_1, a_2, ..., a_n от случая к сл чаю не меняются и носят характер климатологических конста Как уже указывалось, такая ситуация будет иметь место при сутствии прогнозов погоды или при невозможности коррекտир вать однажды принятое решение в силу специфики хозяйствен задачи.

Используя векторную форму записи, положим, что если слу- ный вектор $\mathbf{X}$ $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ отличается от вектора $a_1, a_2, \dots, a_n)$, то принятое хозяйственное решение неопти- ьно, и потери, вызванные несоответствием фактической и пред- агаемой погоды, выражаются функцией

$$\theta = \theta(\mathbf{x}, \mathbf{a}), \tag{1}$$

$\mathbf{x}$ — реализация $\mathbf{X}$.

Характер этой функции определяется особенностями рассмат- заемой задачи, и она позволяет рассчитать величину потерь при кретных значениях $\mathbf{x}$ и $\mathbf{a}$. Если теперь учесть, что вектор фак- еской погоды $\mathbf{X}$ от случая к случаю меняется, то об удачности бора вектора $\mathbf{a}$, в соответствии с которым принимаются хозяй- венные решения, можно судить по величине средних потерь

$$R = R(\mathbf{a}) = \int\limits_{(\mathbf{x})} \theta(\mathbf{x}, \mathbf{a}) f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \tag{2}$$

е $f(\mathbf{x})$ — плотность распределения вектора $\mathbf{X}$. Исходя из этой висимости легко оптимизировать хозяйственную стратегию, т. е. йти такой вектор $\mathbf{a} = \mathbf{a}_0$, при котором средние потери минималь- . Для этого часто достаточно решить систему уравнений

$$\partial R / \partial a_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3}$$

Для определенности последующего анализа введем в рассмот- ние нормированные отклонения фактических значений метеоро- гических элементов от предполагаемых. Обозначим их через

$$\Delta_i = \frac{x_i - a_i}{\sigma_i}, \tag{4}$$

е σ_i — среднее квадратическое отклонение метеоэлемента X_i, положим, что потери (1) зависят только от величин и знаков рмированных отклонений Δ_i, т. е.

$$\theta = \theta(\Delta). \tag{5}$$

десь Δ — это вектор, составляющими которого являются эле- ентарные отклонения (4).

Представляют интерес следующие модели.

1. Потери (5) складываются из частных потерь, вызванных есоответствием фактических и предполагаемых значений по каж- ому из метеоэлементов X_i в отдельности, и имеют вид

$$\theta(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(s)} |\Delta_i| \tag{6}$$

$$\theta(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} A_i^{(s)} \Delta_i^2. \tag{7}$$

Здесь $A_i^{(s)}$ — положительные весовые коэффициенты, которые рактеризуют экономическую значимость нормированных откло ний разных знаков и определяются по формуле

$$A_i^{(s)} = A(\operatorname{sign} \Delta_i) = \begin{cases} A_i^- & \text{при } \Delta_i \leqslant 0 \\ A_i^+ & \text{при } \Delta_i > 0. \end{cases}$$

2. Потери (5) пропорциональны корню квадратному из сум квадратов или сумме квадратов нормированных отклонений а коэффициенты пропорциональности зависят от знаков откло ний, т. е.

$$\theta(\Delta) = A^{(s)} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2} \qquad ($$

или

$$\theta(\Delta) = A^{(s)} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2, \qquad (1$$

где положительные коэффициенты $A^{(s)}$ задаются некоторым соо ношением

$$A^{(s)} = A(\operatorname{sign} \Delta_1, \operatorname{sign} \Delta_2, \ldots, \operatorname{sign} \Delta_n). \qquad (1$$

Перечисленные функции потерь представляют собой обобщен на многомерный случай линейных и квадратичных функций п терь, анализировавшихся в [4].

Рассмотрим теперь несколько наиболее простых задач много мерной оптимизации. В частности, будем считать, что речь иде о такой ситуации, когда, принимая хозяйственные решения, необ ходимо учитывать влияние только двух метеорологических факто ров X_1 и X_2, распределение которых описывается совместной пло ностью $f(x_1, x_2)$.

Учитывая это условие, обратимся к функциям потерь (6) и (7) В двумерном варианте они будут иметь вид

$$\theta(\Delta_1, \Delta_2) = \begin{cases} -A_1^- \Delta_1 - A_2^- \Delta_2 & \text{при } \Delta_1 \leqslant 0,\ \Delta_2 \leqslant 0 \\ -A_1^- \Delta_1 + A_2^+ \Delta_2 & \text{при } \Delta_1 \leqslant 0,\ \Delta_2 > 0 \\ A_1^+ \Delta_1 - A_2^- \Delta_2 & \text{при } \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 \leqslant 0 \\ A_1^+ \Delta_1 + A_2^+ \Delta_2 & \text{при } \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \qquad (12$$

и

$$\theta(\Delta_1, \Delta_2) = \begin{cases} A_1^- \Delta_1^2 + A_2^- \Delta_2^2 & \text{при } \Delta_1 \leqslant 0,\ \Delta_2 \leqslant 0 \\ A_1^- \Delta_1^2 + A_2^+ \Delta_2^2 & \text{при } \Delta_1 \leqslant 0,\ \Delta_2 > 0 \\ A_1^+ \Delta_1^2 + A_2^- \Delta_2^2 & \text{при } \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 \leqslant 0 \\ A_1^+ \Delta_i^2 + A_2^+ \Delta_2^2 & \text{при } \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0. \end{cases} \qquad (13)$$

Можно показать, что нахождение оптимального вектора a_1, a_2) сводится в данном случае к выбору составляющих a_1 и a_2 зависимо друг от друга. Действительно, при условии (12) выраение (2) для средних потерь легко приводится к виду

$$R = \sum_{i=1}^{2} \left\{ A_i^+ (\bar{x}_i - a_i) - (A_i^- + A_i^+) \int_{-\infty}^{a_i} (x_i - a_i) f(x_i) dx_i \right\}, \tag{14}$$

е $\bar{x}_i$ — математические ожидания (нормы) метеорологических акторов X_1 и X_2, а $f(x_i)$ — их плотности распределения.

Дифференцируя это выражение по a_1 и a_2 и приравнивая полунные результаты нулю, получим совокупность двух независимых авнений для определения оптимальных значений $a_1 = a_{1o}$ $a_2 = a_{2o}$:

$$\int_{-\infty}^{a_1} f(x_1) dx_1 = \frac{1}{1 + k_1}$$

$$\int_{-\infty}^{a_2} f(x_2) dx_2 = \frac{1}{1 + k_2}, \tag{15}$$

е $k_1 = A_1^- / A_1^+$ и $k_2 = A_2^- / A_2^+$. Аналогично для функций потерь 13) будем иметь совокупность независимых уравнений:

$$(1 - k_1) \int_{-\infty}^{a_1} (x_1 - a_1) f(x_1) dx_1 = \bar{x}_1 - a_1$$

$$(1 - k_2) \int_{-\infty}^{a_2} (x_2 - a_2) f(x_2) dx_2 = \bar{x}_2 - a_2. \tag{16}$$

Таким образом, в одном и другом случае двумерная задача птимизации сводится к решению двух одномерных задач. Более ого, совершенно ясно, что предположение о двумерности не являтся здесь принципиальным. Легко показать, что и при произвольой размерности задачи в случае функций потерь (6) и (7) редние потери будут равны сумме потерь от несовпадения фактиеских и предполагаемых значений по каждому из метеорологичеких элементов, а многомерная задача оптимизации по n переенным сводится к решению n независимых уравнений вида

$$\int_{-\infty}^{a_i} f(x_i) dx_i = \frac{1}{1 + k_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{17}$$

для функций потерь (6) или вида

$$(1 - k_i) \int_{-\infty}^{a_i} (x_i - a_i) f(x_i) dx_i = \bar{x}_i - a_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{18}$$

для функций потерь (7).

Анализируя (17) и (18), убеждаемся, что если по какой-л
координате X_i параметр $k_i=1$, т. е. положительные и отрицат
ные отклонения фактических значений метеорологического эле
та X_i от предполагаемого значения a_i имеют равные веса, то
зависимости от вида закона распределения $f(x_i)$ оптимальным
шением в случае линейных потерь (6) будет ориентация на ме
ну, а при квадратичных потерях (7) — ориентация на норму
теоэлемента X_i. В самом деле, при $k_i=1$ уравнения (17) прев
щаются в уравнения медиан

$$\int\limits_{-\infty}^{a_i} f(x_i)dx_i = \frac{1}{2}, \qquad ($$

а из уравнений (18) следует

$$a_i = a_{i0} = \overline{x}_i. \qquad ($$

При произвольных k_i оптимальные значения $a_i=a_{i0}$ существе
зависят от соответствующих законов распределения $f(x_i)$. Д
справки приведем здесь без вывода только конечные результа
решения одномерной задачи оптимизации для нормального и р
номерного законов распределения метеоэлемента при линейн
и квадратичных потерях (6) и (7):

а) нормальное распределение и линейные потери

$$\Phi\left(\frac{\overline{x}-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{k-1}{k+1}; \qquad ($$

б) нормальное распределение и квадратичные потери

$$\frac{\overline{x}-a}{\sigma} = -\frac{(1-k)\,\Phi^{(1)}\left(\frac{\overline{x}-a}{\sigma}\right)}{1-(1-k)\left[\frac{1}{2}-\Phi\left(\frac{\overline{x}-a}{\sigma}\right)\right]}, \qquad (2$$

где $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^z e^{-\frac{v^2}{2}}dv$ — интеграл вероятности, а $\Phi^{(1)}(z)$
производная от интеграла вероятности (нормальная плотность

в) равномерное распределение и линейные потери

$$a = a_0 = \overline{x} - \frac{k-1}{k+1}\sigma\sqrt{3} = \overline{x} - \frac{k-1}{k+1}l; \qquad (2$$

г) равномерное распределение и квадратичные потери

$$a = a_0 = \overline{x} - \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}\sigma\sqrt{3} = \overline{x} - \frac{\sqrt{k}-1}{\sqrt{k}+1}l. \qquad (24$$

Через l в последних двух формулах обозначена половина ди
пазона возможного изменения метеоэлемента X, распределенно
по равномерному закону.

Следует заметить, что в работе [4] одномерная задача опти-зации хозяйственных решений при нормальном распределении была рассмотрена в самой общей постановке, учитывающей личие прогнозов погоды. Приведенные выше формулы (21) (22) представляют собой конкретизацию полученных там ре-льтатов применительно к задаче оптимизации решений по кли-тологическим данным в отсутствие прогнозов.

Перейдем далее к изучению функций вида (9) и (10). Подобные дели потерь характерны для таких ситуаций, в которых влияние скольких метеорологических элементов описывается не через мму отдельных влияний, а с помощью некоторого более ожного показателя. Возможны задачи, где этот показа-ль зависит от большого числа влияющих метеорологических ементов, однако мы остановимся на наиболее простом вариан- многомерной задачи, когда таких элементов всего два. Функции терь (9) и (10) в этом случае имеют вид:

$$\theta(\Delta_1, \Delta_2) = \begin{cases} A_1\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2} & \text{при } \Delta_1 \leqslant 0,\ \Delta_2 \leqslant 0 \\ A_2\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2} & \text{при } \Delta_1 \leqslant 0,\ \Delta_2 > 0 \\ A_3\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2} & \text{при } \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 \leqslant 0 \\ A_4\sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2} & \text{при } \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \qquad (25)$$

$$\theta(\Delta_1, \Delta_2) = \begin{cases} A_1(\Delta_1^2+\Delta_2^2) & \text{при } \Delta_1 \leqslant 0,\ \Delta_2 \leqslant 0 \\ A_2(\Delta_1^2+\Delta_2^2) & \text{при } \Delta_1 \leqslant 0,\ \Delta_2 > 0 \\ A_3(\Delta_1^2+\Delta_2^2) & \text{при } \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 \leqslant 0 \\ A_4(\Delta_1^2+\Delta_2^2) & \text{при } \Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0. \end{cases} \qquad (26)$$

С целью упрощения дальнейших выкладок будем считать, что влияющие на интересующий нас производственный процесс метеорологические элементы X_1 и X_2 статистически независимы, т. е. двумерная плотность распределения $f(x_1, x_2)$ может быть записана в виде произведения одномерных плотностей $f(x_1)$ и $f(x_2)$ как

$$f(x_1, x_2) = f(x_1) f(x_2). \qquad (27)$$

Кроме того, так как принципиальная схема расчета оптимальных значений a_1 и a_2 для функций потерь вида (25)—(26) и различных законов распределения $f(x_1)$ и $f(x_2)$ одинакова, то мы для определенности положим, что речь идет о функции потерь (26), а распределение обоих метеорологических элементов X_1 и X_2 яв ется равномерным и описывается законом

$$f(x_i)=\begin{cases}\dfrac{1}{2l_i} & \text{при } |x_i-\bar{x}_i|\leqslant l_i\\ 0 & \text{при } |x_i-\bar{x}_i|>l_i\end{cases}\qquad i=1,\ 2.\qquad ($$

Подставляя соотношения (26) и (28) в общую формулу и учитывая, что при равномерном законе распределения сред квадратическое отклонение случайной величины X связано с раметром распределения l зависимостью

$$l=\sigma\sqrt{3},$$

получим следующее выражение для средних потерь:

$$\begin{aligned}R=\frac{1}{4}\{&A_1(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\left[(1-\alpha_1)^2+(1-\alpha_2)^2\right]+\\&+A_2(1-\alpha_1)(1+\alpha_2)\left[(1-\alpha_1)^2+(1+\alpha_2)^2\right]+\\&+A_3(1+\alpha_1)(1-\alpha_2)\left[(1+\alpha_1)^2+(1-\alpha_2)^2\right]+\\&+A_4(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\left[(1-\alpha_1)^2+(1-\alpha_2)^2\right]\},\qquad (2\end{aligned}$$

где

$$-1\leqslant\alpha_1=\frac{\bar{x}_1-a_1}{l_1}\leqslant 1$$

и

$$-1\leqslant\alpha_2=\frac{\bar{x}_2-a_2}{l_2}\leqslant 1.$$

В отличие от предыдущей задачи, когда оптимальные значени $a_{1о}$ и $a_{2о}$ находились независимо друг от друга, здесь мы имеем бо лее сложную ситуацию, так как минимизация средних потерь сво дится к поиску экстремума функции (29) одновременно по дву переменным. При произвольных весах A_i эта задача решаетс численными методами на ЭВМ. В то же время возможны несколь ко частных случаев, когда решение достаточно просто получаетс и в аналитическом виде. Рассмотрим некоторые из них.

1. Все веса A_i одинаковы и равны A, т. е. независимо от знаков нормированных отклонений Δ_1 и Δ_2 потери, вызванные несоответствием фактических и предполагаемых значений метеорологических элементов X_1 и X_2, определяются по формуле

$$\theta(\Delta_1,\ \Delta_2)=A\left(\Delta_1^2+\Delta_2^2\right).\qquad (30)$$

В данном случае климатически оптимальная стратегия состоит в ориентации на нормы метеоэлементов, т. е.

$$a_1=a_{1\,о}=\bar{x}_1,\quad a_2=a_{2\,о}=\bar{x}_2.\qquad (31)$$

При этом средние потери минимальны и будут равны

$$R=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}A_i=2A, \tag{32}$$

2. Веса A_i меняются с изменением знака отклонения только ного из метеорологических элементов, т. е.

$$A_1=A_2=A' \quad \text{и} \quad A_3=A_4=A'' \tag{33}$$

и

$$A_1=A_3=A' \quad \text{и} \quad A_2=A_4=A''. \tag{33а}$$

Соответствующие этим условиям функции потерь имеют вид

$$\theta(\Delta_1,\ \Delta_2)=\begin{cases} A'(\Delta_1^2+\Delta_2^2) & \text{при } \Delta_1\leqslant 0 \\ A''(\Delta_1^2+\Delta_2^2) & \text{при } \Delta_1>0, \end{cases} \quad \text{знак } \Delta_2 \text{ — любой} \tag{34}$$

и

$$\theta(\Delta_1,\ \Delta_2)=\begin{cases} A'(\Delta_1^2+\Delta_2^2) & \text{при } \Delta_2\leqslant 0 \\ A''(\Delta_1^2+\Delta_2^2) & \text{при } \Delta_2>0. \end{cases} \quad \text{знак } \Delta_1 \text{ — любой.} \tag{34а}$$

В первом случае (формулы 33) и (34)) существенным яв- яется только знак отклонения о элементу X_1, во втором случае формулы (33а) и (34а))—толь- о по элементу X_2 (рис. 1).

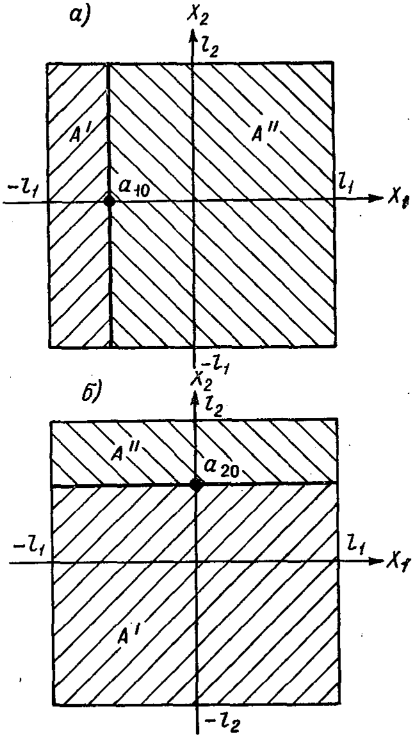


Рис. 1. Оптимальные решения при зависимости потерь от знака отклонения одного из метеоэлементов.

а — влияет знак отклонения X_1, *б* — влияет знак отклонения X_2.

Продифференцировав выра- жение (29) по α_1 и α_2, приравня- м результаты к нулю. При этом олучим систему уравнений, ана- из которой показывает, что при ыполнении любого из условий 33) или (33а) оптимальная стратегия, обеспечивающая мини- мум средних потерь, будет за- ключаться в следующем. По ме- теоэлементу, влияние которого на потери определяется только величиной отклонений и не зави- сит от их знака, надо ориентиро- ваться на норму. По другому ме- теоэлементу, влияние которого на потери определяется как ве- личиной, так и знаком отклоне- ний, надо ориентироваться на значение

$$a=a_0=\overline{x}-\alpha_0\,l, \tag{35}$$

где α_0 в зависимости от отноше- ния весов $k=A'/A''$ рассчитыва- ется по формулам:

$$\alpha_0 = \begin{cases} -1 & \text{при } k \leqslant \frac{1}{13} \\ 1 & \text{при } k \geqslant 13 \end{cases} \qquad (3$$

или a_0 — удовлетворяющий условию $|\alpha_0| < 1$ корень квадратн уравнения

$$\frac{3(1+\alpha)^2+1}{3(1-\alpha)^2+1} = k \quad \text{при} \quad \frac{1}{13} < k < 13. \qquad (3$$

Сравним этот результат с тем, который был получен для одь мерной задачи оптимизации при равномерном распределен и квадратичных потерях (формула (24)). Нетрудно убедить что как в одном, так и в другом случае оптимальное значен $a=a_0$, в соответствии с к торым должно принимать хозяйственное решени сдвинуто относительно но мы метеоэлемента в стор ну большего веса. Однаı при одинаковых k величий сдвига будет разной. Кром того, двумерная схема о ладает следующей интере ной особенностью. Обрати внимание, что согласно с отношению (24) в одноме ном случае оптимальнс значение a_0 совпадает с гр ницей распределения тольк в пределе — при $k \to 0$ ил $k \to \infty$, т. е., когда вес отри цательных или положителі ных ошибок стремится к нулю. Иначе обстоит дело в двумерной за даче. Здесь при любых $k \leqslant \frac{1}{13}$ или $k \geqslant 13$ оптимальное значение a_0 обеспечивающее минимум средних потерь, находится на границе ра пределения. Графики, иллюстрирующие зависимость нормирован ного параметра сдвига $\alpha_0 = \frac{\bar{x} - a_0}{l}$ от k для одномерного и двумерного случаев, представлены на рис. 2. Из него, в частности, видно что при одинаковых k величина сдвига при наличии двух влияющих метеоэлементов всегда будет больше, чем в одномерном случае.

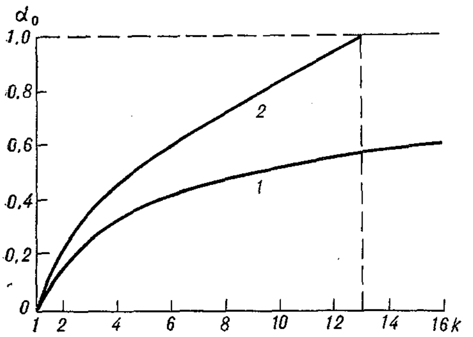


Рис. 2. Зависимость оптимального сдвига $\alpha_0 = \frac{\bar{x} - a_0}{l}$ от отношения весов $k=A'/A''$.

1 — одномерная задача, 2 — двумерная задача.

На рис. 3 приведены зависимости

$$\lambda = 1 - \frac{R(\alpha)}{R(\alpha=0)}\bigg|_{k=\text{const}}, \qquad (36)$$

показывающие, насколько мы будем выигрывать или проигрывать по сравнению со средними потерями при ориентации на норму, ли при $k>1$ ориентироваться на произвольное значение метеолемента $a=\bar{x}-\alpha l$. Кривые построены только для $\alpha>0$, так как для >1 при любых $\alpha<0$ мы будем заведомо проигрывать. Для <1 кривые, аналогичные построенным, соответствуют значениям <0.

3. Веса одинаковы, если отклонения фактических значений меоэлементов X_1 и X_2 от предполагаемых имеют противоположные ли, наоборот, совпадающие знаки, т. е. выполняется одно из раенств

$$A_2=A_3=A \tag{37}$$

ли

$$A_1=A_4=A. \tag{37а}$$

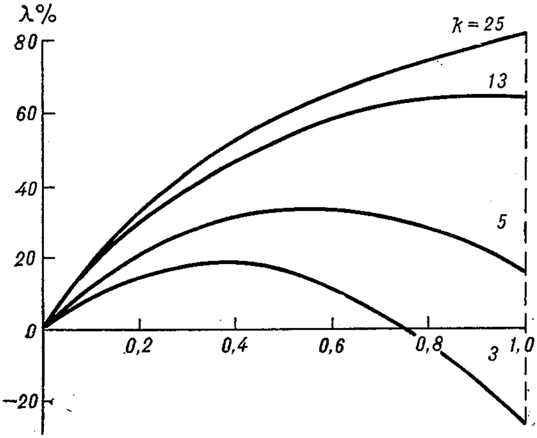


Рис. 3. Зависимость коэффициента λ от сдвига $\alpha=\frac{\bar{x}-a}{l}$ и отношения весов $k=A'/A''$.

Можно показать, что оптимальные значения параметров сдвига α_0 по одной и другой оси в первом случае одинаковы по величине и знаку, а во втором — одинаковы по величине, но противоположны по знаку. Таким образом, условиям (37) и (37а) соответствуют соотношения:

$$\alpha_{1\,0}=\alpha_{2\,0}=\alpha_0 \tag{38}$$

и

$$\alpha_{1\,0}=-\alpha_{2\,0}. \tag{38а}$$

Так как оба случая отличаются друг от друга только знаками, мы более подробно остановимся на первом. Нетрудно убедиться, что при условии (37) средние потери будут равны

$$R=\frac{A_1(1-\alpha)^4+A_1(1+\alpha)^4+2A(1-\alpha^4)}{2}. \tag{39}$$

Сделаем дополнительное упрощение — положим $A=0$. Тог

$$R=\frac{A_1(1-\alpha)^4+A_4(1+\alpha)^4}{2}, \qquad \text{(4}$$

причем легко показать, что минимум R имеет место при

$$\alpha=\alpha_0=\frac{\sqrt[3]{k}-1}{\sqrt[3]{k}+1}. \qquad \text{(4}$$

Отсюда следует, что оптимальной стратегией при условии (3 и $A=0$ является ориентация на значения метеоэлементов

$$a_{1\,0}=\bar{x}_1-\frac{\sqrt[3]{k}-1}{\sqrt[3]{k}+1}\,l_1 \qquad \text{(4}$$

и

$$a_{2\,0}=\bar{x}_2-\frac{\sqrt[3]{k}-1}{\sqrt[3]{k}+1}\,l_2. \qquad \text{(4}$$

Сравнение этих зависимостей с (24) показывает, что хот и здесь мы имеем дело только с двумя весами ($A_2=A_3=0$), однако, как и в предыдущем случае, оптимальные стратегии при двумерной и одномерной схеме отличаются.

Рассмотренные частные случаи позволяют сделать общий вывод, что при функциях потерь (9), (10) даже в сильно упрощенных ситуациях многомерные оптимальные решения не сводятс к принятию оптимальных решений по каждому метеоэлемент в отдельности.

В заключение отметим, что здесь были рассмотрены лишь самые общие положения теории принятия оптимальных решений пр наличии нескольких влияющих метеоэлементов. В дальнейше предполагается провести детальное исследование этого вопрос и, исходя из полученных результатов, решить ряд задач прикладной климатологии, для которых выработка оптимальных хозяйственных решений сводится к анализу соответствующих многомерных экономико-статистических моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С. Об использовании ненадежных прогнозов.—«Известия АН СССР, сер. геофиз.», № 2, 1962, с. 218—229.
2. Жуковский Е. Е. Оптимальные стратегии при использовании агрометеорологических прогнозов.—«Сборник трудов по агрономической физике», вып. 33. Л., Гидрометеоиздат, 1972, с. 254—264.
3. Жуковский Е. Е., Чудновский А. Ф. Оптимальные решения при назначении оросительных норм.—«Труды УкрНИГМИ», вып. 128, 1973, с. 43—47.
4. Жуковский Е. Е., Чудновский А. Ф. Оптимизация экстраполяции (или интерполяции) при критериях качества, отличающихся от средней квадратической погрешности, и ее применение в задачах агрометеорологии.—«Сборник трудов по агрономической физике», вып. 20. Л., Гидрометеоиздат, 1969, с. 93—117.

Е. И. ФЕДОРЧЕНКО

О ВЛИЯНИИ ГРУППИРОВКИ ДАННЫХ НА ТОЧНОСТЬ ВЫБОРОЧНЫХ МОМЕНТОВ

В работе [1] рассматривается вопрос о точности выборочных моментов, вычисленных по несгруппированным данным. В действительности, однако, часто возникает необходимость получения моментов по сгруппированным распределениям. Поэтому представляет интерес оценить, в какой мере группировка искажает значения моментов.

Различные аспекты влияния группировки на потерю информации о тех или иных статистических характеристиках рассматриваются многими авторами [2, 3, 4, 5]. Например, в [5] исследуется вопрос о том, какой вклад в ошибку выборочной дисперсии вносит группировка в случае, если число градаций достаточно велико. Показано, что при таких условиях вклад данного фактора мал и им можно пренебречь. С сожалению, в реальных условиях шаг группировки, с которым задается распределение, нередко оказывается большим и число градаций далеко от оптимального. Для таких случаев учет влияния группировки на точность моментов может оказаться существенным. Предположим, что данные группируются с некоторым шагом Δ, о размере которого никаких дополнительных предположений не делается, а множество интервалов группирования располагается случайно. Какова в этом случае в среднем ошибка выборочных моментов за счет группировки?

Известно [6], что при этих предположениях средние значения начальных моментов, полученных по сгруппированному распределению, отклоняются от истинных. Для того чтобы избавиться от этого искажения, рекомендуется использовать поправки Шеппарда, которые для второго и четвертого моментов вводятся формулами:

$$m_2 = m_2' - \frac{1}{12}\Delta^2, \qquad (1)$$

$$m_4 = m_4' - \frac{1}{2}m_2'\Delta^2 + \frac{7}{240}\Delta^4. \qquad (2)$$

Здесь Δ — шаг группировки, m_2', m_4' — неисправленные значения моментов.

Для центральных моментов поправки, вводимые формула (1) и (2), не всегда обеспечивают ликвидацию систематическ отклонения средних значений моментов от истинных. Однако, к указывается в [6], для всех обычных целей можно использова соотношения (1) и (2) и при оценке центральных моментов. Д проверки справедливости этого утверждения для нормального р пределения, а также для получения оценок влияния группиров на точность таких характеристик, как асимметрия и эксцесс, с дений о которых в литературе обнаружить не удалось, нами бы проведены численные опыты.

Цель первого опыта состояла в выяснении влияния группиро ки на точность моментов при условии, что все другие источни ошибок отсутствуют. Для этого по заданным ширине интерва группировки и расположению множества этих интервалов форм ровалось сгруппированное нормальное распределение, по которо вычислялись моментные характеристики до 4-го порядка включ тельно. При заданном шаге группировки отклонения моменто вычисленных для различных случаев расположения множества и тервалов группировки, от истинных моментов (соответствующи несгруппированному распределению), осреднялись. В результа для разных значений шага группировки были получены средн и средние квадратические ошибки моментов.

Как и следовало ожидать, значения центральных моменто исправленных на поправку Шеппарда, оказались лучше неиспра ленных как в среднем, так и в среднем квадратическом. Для нек торых размеров шага группировки средние квадратические оши ки дисперсии $\sigma^2=\mu_2$ и четвертого центрального момента μ_4 при водятся в табл. 1.

Однако из целесообразности применения поправок Шеппард к центральных моментам не следует, что при расчете таких хара теристик, как асимметрия и эксцесс (практический интерес обычн представляют именно эти величины, а не сами моменты 3-го и 4-г порядков), нужно использовать значения центральных моменто полученных с введением поправок Шеппарда. Например, при расчете эксцесса центральный момент четвертого порядка делится н квадрат второго; группировка вносит искажение в каждую из эти величин, однако эти погрешности оказываются существенно коррелированными, и при делении в значительной мере компенсируют друг друга. Степень этой компенсации, а также возможно влияние на нее поправок Шеппарда без количественных оцено выяснить затруднительно.

Описанный выше опыт показал, что значения асимметрии и эксцесса, вычисленные по центральным моментам с введением поправок, в среднем и в среднем квадратическом лучше значений, полученных без учета поправок, лишь для тех размеров шага группировки, при которых группировка вообще малосущественна (при $\Delta<1{,}5\sigma$). Как видно из табл. 1, в которой приводятся средние квадратические ошибки асимметрии (A) и эксцесса (E), при больших размерах шага группировки значения асимметрии и эксесса, вычисленные без учета поправок, оказываются намного точее значений, вычисленных с поправкой.

Приведенные результаты относятся к случаю, когда влияние руппировки представлено в чистом виде. В действительности одако моменты вычисляют по выборочным распределениям, потому получающаяся при этом ошибка моментов зависит не тольо от группировки, но и от ограниченности выборки.

Таблица 1

Зависимость средней квадратической погрешности моментных характеристик от шага группировки

$\frac{\Delta}{\sigma}$	Без поправки				С поправкой			
	$\frac{\sigma_{\mu_2}}{\mu_2}$	$\frac{\sigma_{\mu_4}}{\mu_2^2}$	σ_A	σ_E	$\frac{\sigma_{\mu_2}}{\mu_2}$	$\frac{\sigma_{\mu_4}}{\mu_2^2}$	σ_A	σ_E
2,0	0,33	2,23	0,10	0,32	0,02	0,42	0,12	0,56
1,9	0,30	1,98	0,06	0,21	0,01	0,27	0,07	0,35
1,8	0,27	1,75	0,03	0,14	0,01	0,16	0,04	0,20
1,7	0,24	1,54	0,02	0,08	0,00	0,08	0,02	0,10
1,6	0,21	1,36	0,01	0,05	0,00	0,04	0,01	0,05
1,5	0,19	1,18	0,00	0,04	0,00	0,02	0,00	0,02
1,4	0,16	1,02	0,00	0,03	0,00	0,01	0,00	0,01
1,2	0,12	0,74	0,00	0,02	0,00	0,01	0,00	0,01
1,0	0,08	0,51	0,00	0,01	0,00	0,01	0,00	0,01
0,5	0,02	0,12	0,00	0,01	0,00	0,01	0,00	0,01

Для оценки одновременного влияния этих факторов на точность моментов использовался метод статистического моделирования. Поскольку вопрос о влиянии группировки возник в связи с конкретной задачей получения моментов средней суточной температуры по данным Справочника по климату [7], проведенный опыт относился к задаче вычисления гауссовской случайной последовательности с экспоненциальной корреляционной функцией. Имеющиеся данные [8, 9] показывают, что такая модель удовлетворительно описывает статистические особенности рядов средней суточной температуры.

Опыт состоял в следующем.

Моделировался набор реализаций случайной гауссовской последовательности с экспоненциальной корреляционной функцией [10]. Длина реализации бралась равной 30 (так как нас интересовали моменты, полученные по распределениям для конкретных месяцев), а количество реализаций варьировалось. Полученные данные группировались с заданным размером интервала группировки и расположением множества этих интервалов. По сгруппированным данным вычислялись моментные характеристики. П каждом шаге группировки отклонения моментов, полученных д различных случаев расположения множества интервалов груп ровки, от моментов теоретического распределения осредняли Такая процедура повторялась многократно. В результате для р личных значений шага группировки были получены средние и ср ние квадратические ошибки моментов.

Таблица

Средние квадратические погрешности моментных характеристик за счет ограниченности обьема выборки и группировки данных (каждому году соответствует серия из 30 наблюдений; коэффициент корреляции между смежными наблюдениями равен 0,

$\frac{\Delta}{\sigma}$	Без поправки				С поправкой			
	$\frac{\sigma_{\mu_2}}{\mu_2}$	$\frac{\sigma_{\mu_4}}{\mu_2^2}$	σ_A	σ_E	$\frac{\sigma_{\mu_2}}{\mu_2}$	$\frac{\sigma_{\mu_4}}{\mu_2^2}$	σ_A	σ_E
				10 лет				
2,0	—	—	0,19	0,52	—	—	0,30	1,02
1,5	—	—	0,16	0,32	—	—	0,21	0,44
1,0	—	—	0,17	0,30	—	—	0,20	0,35
0,5	—	—	0,18	0,31	—	—	0,19	0,32
				15 лет				
2,0	0,37	2,57	0,19	0,48	0,16	1,05	0,30	0,93
1,5	0,24	1,59	0,16	0,26	0,15	0,93	0,20	0,37
1,0	0,17	1,09	0,17	0,28	0,15	0,90	0,19	0,33
0,5	0,15	0,91	0,17	0,28	0,15	0,88	0,18	0,30
				25 лет				
2,0	—	—	0,14	0,44	—	—	0,23	0,82
1,5	—	—	0,10	0,24	—	—	0,13	0,33
1,0	—	—	0,10	0,25	—	—	0,12	0,30
0,5	—	—	0,11	0,27	—	—	0,11	0,28

В табл. 2 представлены средние квадратические ошибки асимметрии и эксцесса, вычисленные по сгруппированным данным ряда наблюдений за 10, 15 и 25 лет, и ошибки центральных моментов, вычисленные по 15-летнему ряду. При этом данные для каждого года представляют собой серии из 30 стационарно связанных величин. Коэффициент корреляции между соседними величинами был принят равным 0,75, что соответствует среднему значению межсуточной корреляции средней суточной температуры. Из данных табл. 2 хорошо видны как необходимость применения попрак Шеппарда к центральным моментам, так и нецелесообразность использования при расчете асимметрии и эксцесса.

Приводящиеся в табл. 2 погрешности являются результатом вместного влияния ограниченности выборки и группировки данных. Наглядное представление о вкладе второго фактора дает

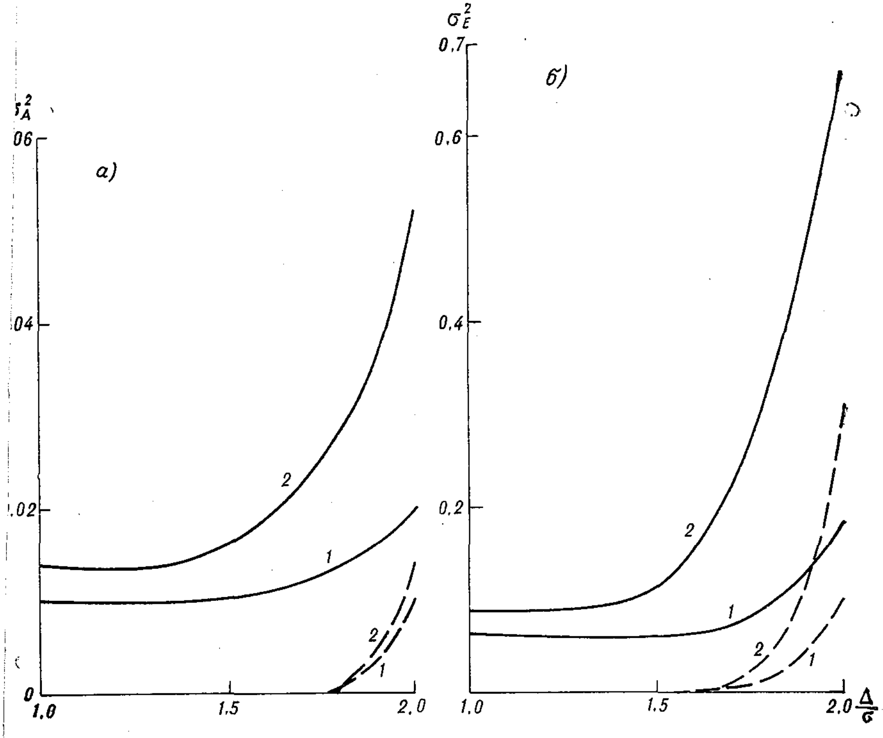


Рис. 1. Зависимость среднего квадрата ошибки асимметрии (*а*) и эксцесса (*б*) от интервала группировки (25 серий по 30 наблюдений, коэффициент корреляции 0,75).

1 — без поправки, *2* — с поправкой.

ис. 1, на котором изображены как упомянутые выше совокупные погрешности (сплошные линии), так и погрешности за счет группировки (штриховые линии). Из этого рисунка видно, что ошибки асимметрии и эксцесса, полученные с учетом поправки Шеппарда, намного больше ошибок моментов, полученных без поправок, а также, что значения среднего квадрата полных ошибок моментов не равны сумме средних квадратов ошибок за счет группировки и ограниченности выборки, а превышают ее, что свидетельствует о положительной корреляции этих ошибок.

Как уже указывалось, целью настоящей работы являлось выяснение вопроса, с какой точностью могут быть получены моменты средней суточной температуры по данным Справочника по климату, в котором распределения приводятся с шагом группиров в 5°. Естественно, что при заданной длине ряда точность момент определяется дисперсией рассматриваемого элемента, которая з висит как от физико-географических условий расположения ста ции, так и от сезона. Полученные результаты позволяют произв дить конкретные оценки.

Таблица 3

Точность определения выборочных моментов температуры (ширина градации 5°, число лет—25)

Месяц	$\frac{5}{\sigma}$	Без поправки			С поправкой		
		$\frac{\sigma_{\mu_2}}{\mu_2}$	σ_A	σ_E	$\frac{\sigma_{\mu_2}}{\mu_2}$	σ_A	σ_E
			Лиепая				
I	0,84	0,09	0,10	0,26	0,08	0,12	0,29
IV	1,68	0,22	0,10	0,28	0,09	0,15	0,44
VII	2,22	0,40	0,25	0,47	0,11	0,78	2,07
X	1,55	0,19	0,10	0,25	0,09	0,13	0,35
			Байрам-Али				
I	0,95	0,09	0,10	0,26	0,08	0,12	0,30
IV	1,28	0,14	0,10	0,28	0,09	0,12	0,30
VII	2,30	0,43	0,29	0,47	0,12	0,92	2,53
X	1,34	0,15	0,10	0,25	0,09	0,12	0,30

В качестве примера в табл. 3 приведены значения средних квадратических ошибок моментных характеристик средней суточной температуры для центральных месяцев сезонов для двух станций — Лиепая и Байрам-Али. Из таблицы видно, что в летние месяцы, когда дисперсии малы, при группировке в 5° значения асимметрии и эксцесса получаются с большой погрешностью. Если для дисперсии эта погрешность уменьшается путем введения поправки Шеппарда, то для асимметрии и эксцесса в соответствии со сказанным ранее, наоборот, резко увеличивается. При подобных условиях точное определение асимметрии и эксцесса может быть достигнуто лишь путем уменьшения интервала группировки.

Поскольку полученные результаты относятся к случаю гауссовского распределения, для которого асимметрия и эксцесс равны нулю, с их помощью можно судить о том, при каких значениях выборочных асимметрии и эксцесса можно говорить об отклонении рассматриваемого распределения от нормального. В дальнейшем, используя изложенные результаты, можно будет оценить, насколько существенны отличия распределения средней суточной температуры в конкретных районах в различные сезоны года от нормального распределения, и в нужных случаях ввести необходимые уточнения в вероятностную модель для этих элементов.

ЛИТЕРАТУРА

Федорченко Е. И. О влиянии связности метеорологических рядов на точность выборочных моментов.— См. наст. сб.

Беляев И. П., Мерцалова Н. Б. К вопросу об оценке одного из методов группировки статистических данных при обработке гидрометеорологической информации.—«Метеорология и гидрология», 1969, № 9, с. 19—23.

Каганский А. С., Кривило П. Ф. О выборе оптимальной ширины градации при установлении законов распределения вероятностей.—«Труды НИИАК», 1969, вып. 51, с. 108—117.

Мамонтов Н. В. Об оптимальном числе градаций при составлении многомерных таблиц распределения метеорологических элементов.—«Труды НИИАК», 1967, вып. 43, с. 63—69.

Першина Р. А. К принципам группировки данных наблюдений при расчете стандарта одновершинных распределений.—«Труды НИИАК», 1961, вып. 12, с. 29—35.

Кендалл М., Стьюарт А. Теория распределений. М., «Наука», 1966. 587 с.

Справочник по климату СССР, ч. II. Л., Гидрометеоиздат, 1965.

Марченко А. С., Помозова Л. И., Чубенко М. А. Временнáя статистическая структура метеорологических процессов.—«Труды НИИАК», 1968, вып. 54(4), с. 35—46.

9. Каган Р. Л., Федорченко Е. И. О расчете статистических характеристик выбросов случайной функции.—«Труды ГГО», 1970, вып. 268, с. 146—172.

10. Каган Р. Л., Канашкин В. К., Федорченко Е. И. О расчете характеристик временны́х рядов методом статистического моделирования.—«Труды ГГО», 1972, вып. 286, с. 71—82.

СОДЕРЖАНИЕ

ТРУДЫ ГГО, вып. 336

Применение статистических методов в метеорологии

Редактор *Н. С. Смирнова*
Технич. редактор *М. С. Костакова*
Корректоры: *Т. В. Алексеева* и *Г. Н. Римант*

Сдано в набор 30/XI 1973 г. Подписано к печати 2/IX 1974 г. М-06435. Формат 60×90¹/₁₆, бумага тип. № 1. Печ. л. 10,75. Уч.-изд. л. 11,25. Тираж 900 экз. Индекс МЛ-86. Заказ № 135. Цена 79 коп.

Гидрометеоиздат. Ленинград, 199053, 2-я линия, д. 23.

Сортавальская книжная типография Управления по делам издательств, полиграфии и книжной торговли Совета Министров Карельской АССР Сортавала, Карельская, 42.

УДК 551.501

О точности расчета пространственных корреляционных функций Каган Р. Л. Труды ГГО, 1973, вып. 336, с. 3—19.

Рассматривается вопрос об оценке точности нормированных автокоррел ционных функций, вычисленных по выборкам ограниченного объема. Оценив ется связность между выборочными корреляционными моментами метеоролог ческих полей, определенными по данным наблюдений в различных точках. Н личие этой связности приводит к тому, что с увеличением числа пунктов, да ные в которых используются при расчетах, точность корреляционных функці возрастает сравнительно медленно.

Приводятся конкретные оценки точности корреляционных функций дл однородных и изотропных метеорологических полей, статистическая структур которых описывается корреляционными функциями вида

$$r_1(l) = e^{-(l/l_0)^2}; \quad r_2(l) = (1 + l/l_0)\, e^{-l/l_0}; \quad r_3(l) = e^{-l/l_0}.$$

Даны приближенные формулы для оценки точности корреляционных фун ций. Рассмотрен вопрос о влиянии погрешностей в исходных данных и неодн родности исследуемой величины. Предлагаемая методика иллюстрируется пр мером оценки точности пространственной корреляционной функции месячны сумм осадков.

Табл. 3. Илл. 4. Библ. 6.

УДК 551.501

Об оценке точности корреляционных моментов, полученных по малым выбор кам. Федорченко Е. И. Труды ГГО, 1973, выш. 336, с. 20—24.

Рассматривается возможность использования асимптотических формул для оценки коэффициента корреляции, ковариации и дисперсии корреляционных моментов, полученных по малым выборкам. Для этого используется метод статистического моделирования.

Показано, что асимптотическую формулу для оценки коэффициента корреляции можно применять при любых объемах выборки. Но для оценки ковариации и дисперсии необходимо значения, полученные по асимптотическим формулам, домножить на поправочный множитель, зависимость которого от объема выборки и коэффициента корреляции приводится в работе.

Илл. 3. Библ. 2.

УДК 551.501

О влиянии связности метеорологических рядов на точность выборочных моментов. Федорченко Е. И. Труды ГГО, 1973, вып. 336, с. 25—47.

Рассматривается вопрос о точности выборочных дисперсий, асимметрии и эксцесса. Получены формулы для расчета дисперсий и ошибок выборочных моментов в предположении связности рядов наблюдений. Приводятся некоторые результаты расчетов по этим формулам.

Табл. 1. Илл. 3. Библ. 9.