

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГЛАВНАЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ им. А. И. ВОЕЙКОВА

Т Р У Д Ы

ВЫПУСК 272

ЧИСЛЕННЫЙ
ПРОГНОЗ ПОГОДЫ
И
ТЕОРИЯ КЛИМАТА

Под редакцией
академика Г. И. МАРЧУКА
и д-ра физ.-мат. наук М. И. ЮДИНА

Российский государственный
гидрометеорологический
институт
ВНЕШСВЯЗКА
195190, СПб, Марковский пр., 38



ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ

ЛЕНИНГРАД • 1972

Приводятся исследования по учету различных физических факторов в гидродинамическом прогнозе погоды, моделям общей циркуляции атмосферы, вычислительным схемам, применяемым для интегрирования уравнений динамики атмосферы на длительные сроки.

Впервые публикуются краткие таблицы обобщенных сферических функций, которые могут быть полезны при решении ряда задач теоретической геофизики.

Сборник рассчитан на специалистов метеорологов, синоптиков, климатологов, физиков атмосферы и океана, магнитологов, гравиметристов и др., а также преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в области численных методов прогноза погоды.

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ СРЕДНЕГО ДВИЖЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ДОЛГОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА И ТЕОРИИ КЛИМАТА

1. При исследовании крупномасштабных атмосферных процессов, как и при всяком исследовании в области гидродинамики реальных турбулентных движений, невозможно обойти принципиальные вопросы о том, как наиболее целесообразно разделять движение на среднее и флуктуационное и какими способами должны быть описаны суммарные эффекты, связанные с влиянием флуктуационного движения на среднее. Современное состояние статистической теории турбулентности не позволяет однозначно ответить на этот вопрос. Не приходится удивляться поэтому, что в гидродинамических моделях, предназначенных для исследования одних и тех же явлений, вводятся самые различные определения среднего движения.

Так, ряд гидродинамических моделей общей циркуляции атмосферы развивается в сторону все большей детализации среднего движения, что достигается путем уменьшения шага сетки как в горизонтальных, так и в вертикальном направлениях. Эта тенденция хорошо видна в обзоре, представленном Дёёсом [1].

С другой стороны, увеличивается число работ, в которых непосредственно рассчитываемыми средними величинами являются значения метеозлементов, проинтегрированные по всему кругу широты. Отклонения от средних зональных значений, включая волны планетарных масштабов, рассматриваются при этом как элементы флуктуационного движения. Для описания влияния флуктуаций на среднее движение либо используются идеи полуэмпирической теории макротурбулентности, либо в рассмотрение вводятся статистические моменты второго порядка [2, 3] и др.

Во многих отношениях привлекательной является идея модели атмосферных движений, пригодной для целей долгосрочного прогноза погоды и в пределе (при осреднении результатов длительного интегрирования уравнений модели по времени) правильно описывающей основные климатические закономерности. Разработка такой модели ведется Е. Н. Блиновой [4, 5] и др. Много общего имеется в моделях общей циркуляции [6] и долгосрочного прогноза [7] геофизической лаборатории гидродинамики США.

Решение этой задачи весьма существенно зависит от того, каким образом выделяется среднее движение. В п. 2 этот вопрос будет рассмотрен с энергетической точки зрения. В п. 3 предлагается метод приближенного описания взаимодействия среднего и флуктуационного полей.

2. Можно по-разному подходить к вопросу о целесообразном способе осреднения в целях численного долгосрочного прогноза. Нам представляется определяющим следующее соображение. Выбор должен быть сделан таким образом, чтобы уменьшить неопределенность описания энергетического взаимодействия между средним и флуктуационным движением. В особенности большие трудности связаны с описанием трансформации энергии, т. е. притоков кинетической энергии от движений одних масштабов к движениям других масштабов. Лоренц [8] рассмотрел интересный случай движения жидкости, имеющий ряд общих свойств с баротропной моделью атмосферы. Он показал, что в этом случае механическое взаимодействие движений разных масштабов приводит к абсолютной неустойчивости, причем неустойчивость имеет место по отношению к начальным возмущениям любых (в том числе сколь угодно малых) масштабов. Для рассматриваемого случая срок, на который может быть дан прогноз, не превышает недели. В работах Смагоринского [9] и др. было показано, что выводы Лоренца о непредсказуемости состояния исследованной им гипотетической среды не могут быть перенесены на реальную атмосферу. Расчеты по модели Смагоринского указывают на возможности детерминированного прогноза с заблаговременностью порядка трех недель.

С нашей точки зрения, наиболее важный вывод из происшедшей дискуссии состоит в необходимости детально рассмотреть и осмыслить имеющиеся эмпирические данные о трансформации энергии в атмосфере и учитывать энергетические свойства атмосферы при построении гидродинамической модели. Обратимся к соответствующим данным. В работе Солцмена [10] были выведены уравнения, описывающие энергетическое взаимодействие между волновыми движениями различных волновых чисел n . При этом разложению в ряд Фурье подвергаются значения скорости в точках, расположенных на разных долготах при заданных широте, давлении и времени, а затем определяются средняя удельная кинетическая энергия K_n , приходящаяся на n -ю гармонику, величина L_n , означающая кинетическую энергию, передающуюся за единицу времени от элементарных волновых движений всех номеров $m \neq n$ к n -й гармонике, и величина M_n , означающая кинетическую энергию, передающуюся за единицу времени от волны с номером n к среднему зональному движению ($n=0$).

Предложенный метод спектрального анализа энергетики атмосферы был применен в ряде работ. Как видно из сводки, приведенной в работе [11], в большинстве случаев расчеты величин L_n и M_n ограничены одной изобарической поверхностью или же относятся к весьма коротким интервалам времени. К наиболее полным отно-

сются расчеты Янга¹, выполненные для восьми изобарических поверхностей (1000, 850, 700, 500, 300, 200, 150, 100 мб) от 20° с. ш. до 87,5° с. ш. для годовичного интервала времени (февраль 1963 — январь 1964 г.). Наряду с этими данными значительный интерес представляют результаты расчетов Солцмена и Тьюэлса [12], относящиеся к поверхности 500 мб и выполненные по 9-летнему интервалу (июль 1965 г., июнь 1964 г.). Отметим, что в тех и других расчетах не рассматривалась доля трансформации кинетической энергии, связанная с вертикальными движениями. Расчеты ограничивались 15 гармониками.

В табл. 1 приводятся данные расчетов Янга (L_n, M_n) и Солцмена и Тьюэлса ($L_n(0,5), M_n(0,5)$) отдельно для холодного (октябрь—март) и теплого полугодия. Знак каждой величины положителен, если имеет место приход энергии к n -й гармонике. Приведены также оценки вероятных погрешностей расчетов Солцмена и Тьюэлса, указанные в их работе ($\varepsilon_L, \varepsilon_M$).

Сопоставление значений L и M , средних во всей колонне воздуха, с их значениями, которые получаются, если условия на эквивалентно-баротропном уровне 500 мб распространить на всю атмосферу, позволяет сделать ряд определенных выводов. А именно, из табл. 1 видно, что интенсивность процессов трансформации энергии на уровне 500 мб в 2—5 раз меньше, чем в среднем по всей колонне воздуха. Вместе с тем бросается в глаза высокая корреляция рассматриваемых рядов значений, практически полное совпадение знаков величин. Весьма четко выделяется область волновых чисел 5—10, представляющая источник кинетической энергии как более коротких, так и более длинных волновых движений. Это та область, для которой линейная теория бароклинных возмущений приводит к выводу о неустойчивости возмущений. Однако потеря кинетической энергии в результате нелинейного взаимодействия ограничивает рост амплитуд возмущений в этой области. Аналогичными свойствами обладают движения, характеризующиеся волновым числом $n=2$ и описывающие значительную долю кинетической энергии муссонной циркуляции.

Большинство отмеченных явлений получили в той или иной мере объяснение в теоретических исследованиях планетарных волн [13, 14, 15 и др.].

Рассчитаем на основании данных табл. 1 полный приток кинетической энергии к системе крупномасштабных атмосферных движений, включающей m первых гармоник (при $m=0$ это будет приток энергии к среднему зональному движению, при $m=1$ — к зональному движению и планетарной волне с номером 1 и т. д.). Определяемая таким путем величина трансформации энергии, которую мы обозначим Tr , равна

$$Tr = \sum_{n=0}^m (L_n + M_n). \quad (1)$$

¹ К сожалению, в Ленинграде не удалось обнаружить технический отчет Мичиганского университета, в котором опубликованы результаты этой работы. Приводимая ниже выборка сведений из нее взята из обзорной статьи [11].

Спектральные характеристики трансформации кинетической энергии L_n и M_n в единицах 10^{-2} Вт/м²

		n															
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		Холодное полугодие															
L_n		44	-20	3	2	-12	-3	-15	-7	-3	-1	-1	-1	2	3	4	5
$L_n(0,5)$		14,8	-10,7	4,7	2,5	-0,4	-3,8	-5,7	-5,5	-2,1	-2,0	0,1	0,1	0,4	1,2	2,7	3,8
ϵ_L		3,8	4,3	4,3	4,2	4,4	3,9	4,0	3,6	3,0	2,5	2,0	2,0	1,7	1,5	1,2	1,1
M_n	48	-9	-21	12	-3	-5	-2	-8	-4	-3	-2	0	0	-2	-1	0	0
$M_n(0,5)$		-1,2	-4,2	-2,7	-1,2	-1,9	-2,3	-3,1	-1,8	-1,4	-0,8	-0,6	-0,6	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1
ϵ_M		0,5	0,9	1,0	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1
		Теплое полугодие															
L_n		6	-3	7	0	0	-8	-7	-6	-3	-1	0	0	1	5	4	5
$L_n(0,5)$		2,6	0,1	1,3	-0,1	-0,2	-3,5	-2,2	-1,5	-0,8	-0,3	0,7	0,7	0,5	1,2	0,8	1,4
ϵ_L		1,7	1,9	1,9	1,9	2,0	2,0	2,0	1,8	1,6	1,3	1,0	1,0	0,8	0,7	0,6	0,5
M_n	63	-7	-9	-8	-6	-3	-8	-5	-4	-3	-5	-2	-2	-2	-1	0	0
$M_n(0,5)$		0,2	-1,0	-1,4	-1,1	-1,0	-2,0	-1,4	-1,1	-1,0	-0,7	-0,4	-0,4	-0,3	-0,2	-0,1	-0,1
ϵ_M		0,2	0,4	0,4	0,4	0,3	0,3	0,3	0,2	0,2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	<0,05	<0,05

Она характеризует интенсивность обмена кинетической энергией между средним и флуктуационным движением при различных способах определения среднего движения. Значения Tr в среднем для всей колонны и для эквивалентно-баротропного уровня приводятся в табл. 2. При рассмотрении полученных значений Tr обнаруживается весьма важное свойство атмосферных движений. Оказывается, что система движения, включающая волновые движения с номерами от $n=0$ до $n=8$, практически не расходует и не получает кинетической энергии за счет нелинейного взаимодействия с движениями меньших масштабов. Если разделить область бароклининой неустойчивости таким образом, что волны с номерами 5—8 отнести к среднему движению, а с номерами 9—10 — к флуктуационному, то образуются две системы, в среднем не обменивающиеся кинетической энергией.

Таблица 2

Приток кинетической энергии Tr к системе атмосферных движений, включающей n первых гармоник, в единицах 10^{-2} вт/м²

	m											
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Холодное полугодие												
Tr	48	83	42	57	56	39	34	11	0	—6	—9	—10
$Tr(0,5)$	22	26	21	23	24	22	16	7	0	—4	—7	—7
Теплое полугодие												
Tr	63	62	50	49	43	40	24	12	2	—4	—10	—12
$Tr(0,5)$	12	14	13	13	12	11	6	2	0	—2	—3	—3

Отметим сразу же, что приведенные в табл. 1 погрешности при расчете величин $L(0,5)$, $M(0,5)$ относительно велики. Поэтому полученные значения $Tr(0,5)$ нельзя рассматривать как достаточно надежные. Ошибки при вычислении Tr по всей колонне должны быть еще больше вследствие снижения точности метеорологических данных на больших высотах и в связи с тем, что значения Tr получены по более короткому ряду. Существенные неточности вносят также обрыв тригонометрического ряда значением $n=15$ и связанные с этим обрывом искусственные условия¹

$$\sum_{n=0}^{15} M_n = 0; \quad \sum_{n=1}^{15} L_n = 0.$$

¹ Учитывая неточность этих условий, мы не проводили расчетов Tr для значений $m > 11$.

Вследствие этого полученный важный вывод требует дополнительной проверки. В наших расчетах трансформации энергии, выполненных совместно с И. П. Гусевой, М. П. Голод и Н. К. Рубцовой, был применен другой подход. Прежде всего были выведены формулы для непосредственного расчета трансформации энергии в функции от выбираемого волнового числа m . Значения Tr вычислялись отдельно для каждого дня, что дает возможность не только оценивать среднюю интенсивность обмена кинетической энергией

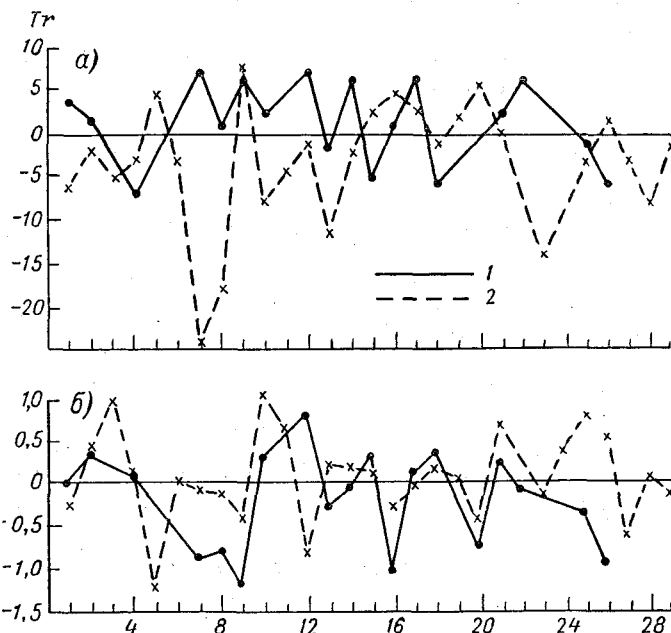


Рис. 1.

между движениями различных масштабов, но также судить о характерных значениях величин Tr в конкретных синоптических ситуациях. Более подробное изложение методики и результатов расчетов, выполненных в основном в Ленинградском гидрометеорологическом институте при участии указанных четырех авторов, будет дано в отдельной статье.

Здесь ограничимся рассмотрением итоговых графиков, на которых представлены значения трансформации энергии при $m=3$ (а) и $m=8$ (б) для каждого дня февралей 1959 г. (кривая 1) и 1960 г. (кривая 2) (рис. 1). Сопоставление масштабов величин ясно показывает, что обмен кинетической энергией между системами атмосферных движений, включающими волны с номерами $n \leq 8$ и $n > 8$, относительно очень мал. Это относится не только к суммарным значениям за длительные промежутки времени, но и к отдельным конкретным ситуациям. Вероятно, именно поэтому все приведенные в табл. 2 значения Tr для $m=8$ оказались близкими к нулю.

Таким образом, если применить формулу осреднения, выделяющую первые восемь составляющих разложения поля скорости в ряд Фурье по долготе, то мы практически избавляемся от необходимости включать в рассмотрение в уравнениях движения квадратичные члены

$$\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \overline{v'v'}}{\partial y}. \quad (2)$$

Выше уже говорилось, что определение этих величин для целей долгосрочного прогноза и теории общей циркуляции сопряжено со значительными трудностями. При современном состоянии теории турбулентности неточности выражения этих турбулентных напряжений через характеристики поля среднего движения имеют порядок самих величин. Поэтому возможность пренебречь этими слагаемыми не только упрощает теорию, но означает также уточнение моделей атмосферных движений.

Выделение крупномасштабной части поля скорости может быть осуществлено в рамках как спектральных, так и конечно-разностных моделей. При этом предпочтительными следует признать методы определения средней скорости, включающие приблизительно одинаковое сглаживание поля в долготном и широтном направлениях. Можно рекомендовать прямой путь полного решения задачи в отношении спектрального состава среднего движения, состоящий в разложении поля скорости по обобщенным сферическим функциям и последующей оценке трансформации энергии для различных значений волнового числа l . Математические основы метода изложены, например, в статье [16], а применены к исследованию атмосферной циркуляции в [17, 18 и др.]. Нам представляется, что исследования в этом направлении могут привести не только к решению этой задачи, но прольют свет на многие неясные вопросы динамики планетарных волн. На первых порах для приближенного решения задачи можно исходить из соображений об изотропности движений в области масштабов нескольких сот километров. Примем, что средний масштаб движения с волновым числом $m=8$ равен

$$L_1 = \frac{a \cos \frac{\pi}{4}}{8} = \frac{a}{11,3}. \quad (3)$$

Здесь a — средний радиус Земли.

Заметим далее, что дифференцирование по горизонтальным переменным гармоники с волновыми числами l, m приводит к умно-

жению амплитуды на множитель $\frac{\sqrt{l(l+1)}}{a}$, т. е. масштаб движения равен

$$L = \frac{a}{\sqrt{l(l+1)}}. \quad (4)$$

Приравнявая $L=L_1$, получаем для компонент среднего движения максимальное значение $l=11$. Решение уравнений динамики

атмосферы для такой спектральной модели не приводит к громоздким расчетам, в особенности если использовать там, где это требуется, разработанный недавно метод быстрого преобразования Фурье.

Рассмотрим теперь конечно-разностный вариант модели при условии, что функция задана в узлах широтно-долготной сетки. В этом случае, как известно из теории рядов Фурье, отфильтровывание коротковолновой части спектра функции f может быть выполнено путем осреднения функции по формуле

$$\bar{f}(\lambda_k) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n f(\lambda_j) \frac{\sin \frac{2m+1}{2} (\lambda_k - \lambda_j)}{\sin \frac{1}{2} (\lambda_k - \lambda_j)}. \quad (5)$$

Здесь n — число узлов на параллели. Коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\bar{f}$ точно равны коэффициентам разложения функции f для волновых чисел, меньших или равных m , и обращаются в нуль для волновых чисел, превосходящих m . Поэтому, принимая $m=8$, получаем искомый фильтр.

3. Эффекты влияния флуктуационных движений на среднее движение выражаются в форме ряда дополнительных слагаемых в уравнениях динамики атмосферы. Величины (2), которые удалось исключить из рассмотрения, представляют собой лишь часть этих слагаемых.

Рассмотрим теперь ряд других эффектов, связанных с тепловым взаимодействием флуктуационного и среднего движения, преобразованием потенциальной энергии в кинетическую, влиянием флуктуаций вертикальной скорости на конденсацию.

Прежде всего необходимо иметь в виду известное соотношение, связывающее работу сил давления с турбулентным потоком тепла. Запишем уравнение энергии в форме

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + uN_\lambda + vN_\varphi, \quad (6)$$

где λ — долгота; φ — широта; u , v — горизонтальные составляющие скорости; a — средний радиус Земли; $K = \frac{u^2 + v^2}{2}$ — удельная кинетическая энергия; N_λ , N_φ — составляющие силы трения. Учитывая уравнение неразрывности

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial (v \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right] + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial p} = 0 \quad (7)$$

($\tilde{w}$ — аналог вертикальной скорости) и уравнение статики

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\frac{RT}{p}, \quad (8)$$

приведем работу силы давления к виду

$$-\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\frac{1}{a \cos \varphi} \left[\frac{\partial (\Phi u)}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\Phi v \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right] -$$

$$-\frac{\partial (\Phi \tilde{w})}{\partial p} + \tilde{w} \frac{\partial \Phi}{\partial p}$$

или

$$-\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = -\operatorname{div}_3 (\Phi \mathbf{V}) - \frac{R}{p} T \tilde{w}. \quad (9)$$

Здесь div_3 означает трехмерную дивергенцию в пространстве x, y, p . При интегрировании по всей атмосфере первый член правой части (9) обращается в нуль. Далее, в среднем для всей атмосферы при интегрировании за длительный срок

$$\frac{\overline{dK}}{dt} \approx 0$$

(— знак пространственно-временного осреднения). При этих же условиях средняя работа сил трения приблизительно равна удельной диссипации энергии с обратным знаком

$$\overline{uN_\lambda + vN_\varphi} \approx -\overline{D}.$$

Итак, из уравнения энергии (6) следуют приближенные равенства

$$\overline{-\frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{v}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}} \approx -\overline{\frac{R}{p} T \tilde{w}} \approx \overline{D}. \quad (10)$$

Здесь D — удельная диссипация энергии.

Физический смысл соотношений (10) весьма прост — преобразование потенциальной энергии в кинетическую уравнивает диссипацию кинетической энергии. Видно также, что суммарная работа сил давления пропорциональна потоку тепла и что в среднем

этот поток должен быть направлен вверх (так как знаки $\tilde{w}$ и истинной вертикальной скорости w противоположны).

Заметим еще, что если выделить геострофические составляющие скорости

$$u = u_g + u', \quad v = v_g + v',$$

то работа сил давления принимает вид

$$-\frac{u'}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - \frac{v'}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}.$$

Из этих элементарных выводов можно сделать следующие заключения. Для того чтобы уравнения динамики атмосферы правильно описывали интегральные энергетические соотношения, необходимо учитывать не только крупномасштабные, но и относительно

мелкомасштабные составляющие величин u' , v' , $\tilde{w}$, представляющих собой, как хорошо известно, мелкомасштабные поля. При этом особенно важно введение поправок к u' , v' в главные слагаемые уравнений движения — lv , lu , а к величине $\tilde{w}$ — в уравнении притока тепла. Известно, что современные модели общей циркуляции атмосферы обладают тем недостатком, что в них недооценивается кинетическая энергия волновых возмущений. Хотя мы не имеем прямых доказательств того, что этот недостаток обусловлен прене-

брежением флуктуациями u' , v' , $\tilde{w}$ в масштабах волн, длина которых меньше удвоенного шага сетки, такая гипотеза представляется логичной. Конечно, она подлежит проверке. В модели, которая относится к среднему движению лишь длинноволновую часть спектра ($n \leq 8$), учет флуктуаций в полях агеострофического ветра и вертикальных скоростей приобретает особенно большое значение.

Поскольку флуктуационное движение не рассматривается индивидуально, величины u' , v' , $\tilde{w}$ следует трактовать как случайные величины. Однако было бы неправильным вводить в рассмотрение

произвольно заданные случайные величины, так как u' , v' , $\tilde{w}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям, выведенным в наших работах [19, 20 и др.]. Эти уравнения связывают между собой изучаемые случайные величины и определяют корреляцию между ними.

Итак, необходимо получить решение уравнений агеострофического ветра в области спектра $n > 8$.

Поскольку наша модель основывается на установленном факте малости динамических взаимодействий между средним и флуктуационным движением при $m=8$, в уравнениях для u' , v' не должны учитываться члены, содержащие $J(u, v)$ (J — знак якобиана). В данном варианте модели не будут рассматриваться также части флуктуационных скоростей, обусловленные неравенством нулю якобианов $J(T, u)$ и $J(T, v)$. Заметим, что введение поправок на эти члены привело бы к изменениям кинетической энергии, пропорциональным моментам 3-го порядка. Введение таких поправок вряд ли может дать положительный эффект до тех пор, пока детально не изучены свойства флуктуационных полей скорости. Наконец, отбросим несущественные для движений рассматриваемых масштабов члены, содержащие dl/dt . После введения указанных упрощений уравнения агеострофического ветра принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial u'}{\partial \zeta} + d^2 \nabla^2 u' &= \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial N_y}{\partial \zeta} + \frac{R}{l^3 d} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial}{\partial x} \frac{\varepsilon}{c_p \rho} \right), \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial v'}{\partial \zeta} + d^2 \nabla^2 v' &= - \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial N_x}{\partial \zeta} + \frac{R}{l^3 d} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta \frac{\partial}{\partial y} \frac{\varepsilon}{c_p \rho} \right), \\ \zeta^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \zeta^2} + d^2 \nabla^2 \tilde{w} &= - \frac{\zeta^2}{l} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial N_y}{\partial x} - \frac{\partial N_x}{\partial y} \right) - \frac{R \zeta}{l^3 d} \nabla^2 \frac{\varepsilon}{c_p \rho}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{\zeta}{H_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{K\zeta}{H_0} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \approx - \frac{R\zeta}{H_0^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(K \frac{\partial T'}{\partial y} \right), \\ N_y &= \frac{\zeta}{H_0} \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{K\zeta}{H_0} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \approx \frac{R\zeta}{H_0^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(K \frac{\partial T'}{\partial x} \right), \end{aligned} \quad (12)$$

H_0 — высота однородной атмосферы, T' обозначает флуктуации температуры, так как рассматриваются лишь волны с номерами $n > 8$. Уравнения записаны в локальных координатах x, y .

Наиболее удобным способом решения уравнений (11) является суперпозиция решений для отдельных гармоник. При этом отчетливо видно, что включение флуктуаций температуры и связанных с ними уравнениями (11) отклонений ветра от геострофического и вертикальной скорости дает дополнительные источники кинетической энергии и направленные кверху потоки тепла.

При реализации модели предполагается вводить величины T' как случайные (по методу Монте-Карло) и соответствующие $u', v', \tilde{w}, q'$, где q' — флуктуация удельной влажности, в основном обусловленная значением вертикальной скорости.

В заключение отметим, что реализация предлагаемой модели потребует многих численных экспериментов и дополнительных исследований. Весьма важно, в частности, провести тщательное сопоставление этой модели с моделями, в которых компоненты движения с волновыми числами $n > 8$ рассматриваются индивидуально. Это даст возможность оценить минимальные интервалы времени, для которых разработанный статистический подход становится целесообразным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Döös B. R. Numerical experimentation related to GARP. — GARP publications series, 1970, No. 6.
2. Блинова Е. Н. К вопросу о прогнозе сглаженных значений метеорологических элементов на среднем уровне атмосферы. — ДАН СССР, 1958, т. 123, № 3.
3. Kurihara Y. A statistical-dynamical model of the general circulation of the atmosphere. — J. Atm. Sci., 1970, vol. 27, No. 6.
4. Блинова Е. Н. Гидродинамическое исследование нестационарных атмосферных процессов планетарного масштаба. — ДАН СССР, 1961, т. 140, № 2, 3.
5. Блинова Е. Н. Обобщение гидродинамической теории климата и долгосрочного прогноза погоды. — Труды ГМИ, 1967, вып. 15.
6. Манабе С., Смагоринский Дж., Стриклер Р. Ф. Численное моделирование средней картины общей циркуляции с учетом процессов влагообмена. — В кн.: «Теория климата». Л., Гидрометеониздат, 1967.
7. Miyakoda K. et al. Experimental extended predictions with a ninelevel hemispheric model. — Monthly Weather Rev., 1969, vol. 97, No. 1.
8. Lorenz E. N. The predictability of a flow which possesses many scales of motion. — Tellus, 1969, vol. 21, No. 3.
9. Smagorinsky J. Problems and promises of deterministic extended range forecasting. — Bull. Americ. Met. Soc., 1969, vol. 50, No. 5.

10. Saltzman B. Equations governing the energetics of the larger scales of atmospheric turbulence in the domain of wave number. — J. Met., 1957, vol. 14, No. 6.
11. Saltzman B. Large-Scale Atmospheric Energetics in the Wave-Number Domain. — Rev. Geophysics Space Physics, 1970, vol. 8, No. 2.
12. Saltzman B. and Tewele S. Further statistics on the exchange of kinetic energy between harmonic components of the atmospheric flow. — Tellus, 1964, vol. 16, No. 4.
13. Блинова Е. Н. Решение нелинейной задачи об атмосферных движениях планетарного масштаба. — Труды ГМИ, 1970, вып. 47.
14. Курбаткин Г. П. Некоторые задачи моделирования ультрадлинных атмосферных волн. — ДАН СССР, 1970, т. 192, № 4.
15. Машкович С. А., Вейль И. Г. О крупномасштабных атмосферных процессах с «отрицательной» вязкостью. — Метеорология и гидрология, 1970, № 8.
16. Гельфанд И. М., Шапиро З. Я. Представления группы вращений трехмерного пространства и их применение. — Успехи математических наук, 1952, т. 7, вып. 1 (47).
17. Ефимов В. А. К стационарной нелинейной модели общей циркуляции атмосферы. Труды ГГО, 1967, вып. 208.
18. Ефимов В. А. Спектральная форма уравнений динамики атмосферы для системы обобщенных сферических функций. — Метеорология и гидрология, 1969, № 8.
19. Юдин М. И. Предвычисление поля ветра и связанных с ним метеорологических элементов. — ДАН СССР, 1957, т. 112, № 1.
20. Юдин М. И. Полная система уравнений для определения агеострофического ветра и вертикальных движений. — Материалы совещания координационной комиссии по численным методам прогноза. Л., Гидрометеиздат, 1961.

В. П. ДЫМНИКОВ, Г. Р. КОНТАРЕВ,
Г. М. ВИНОГРАДОВА, Л. Е. КАМИНСКАЯ

НЕАДИАБАТИЧЕСКАЯ ОПЕРАТИВНАЯ СХЕМА КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

1. Постановка задачи и метод решения

Рассматривается бароклинная неадиабатическая модель атмосферы, описываемая в системе координат x, y, p, t следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y + lv &= -gz_x, \\ v_t + uv_x + vv_y - lu &= -gz_y, \\ T_t + uT_x + vT_y - \frac{\gamma_a - \gamma}{g} \frac{RT^*}{p} \tau &= \frac{\epsilon}{c_p} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{gp}{RT} k \left(\frac{gp}{RT} \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_a \right), \\ u_x + v_y + \tau_p &= 0, \\ T &= -\frac{gp}{R} z_p, \end{aligned} \quad (1)$$

где u, v, τ — соответственно компоненты вектора скорости относительно осей x, y, p ; l — параметр Кориолиса; p — давление; z и T — отклонения высоты изобарической поверхности и температуры от стандартных значений; γ и T^* — стандартные значения температурного градиента и температуры соответственно.

В качестве граничных условий по вертикали выберем следующие:

$$w = w_0 \text{ при } p = P; \quad \tau = 0 \text{ при } p = 0, \quad (2)$$

где w — вертикальная компонента вектора скорости в системе координат (x, y, z) ; P — давление на уровне моря.

Поле влажности рассматривается в двухкомпонентном приближении: удельная влажность и удельная водность. Основные

уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} q_t^{(1)} + u q_x^{(1)} + v q_y^{(1)} &= f^{(1)} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{g^2 k p^2}{R^2 T^2} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial p}, \\ q_t^{(2)} + u q_x^{(2)} + v q_y^{(2)} &= -f^{(1)} - f^{(2)} + \frac{\partial}{\partial p} \frac{g^2 k p^2}{R^2 T^2} \frac{\partial q^{(2)}}{\partial p}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} f^{(1)} &= -\alpha [q^{(1)} - q_m(T)] q^{(2)}, \\ f^{(2)} &= \bar{\alpha} [q^{(2)} - \bar{q}^{(2)}(T)], \end{aligned} \quad (4)$$

где $q_m(T)$ — максимальная удельная влажность; $\alpha, \bar{\alpha}$ — феноменологические коэффициенты, $\bar{q}^{(2)}(T)$ — функция температуры, определяемая из обработки эмпирического материала.

Приток тепла за счет фазовых превращений вычисляется по формуле

$$\varepsilon = -L f^{(1)}. \quad (5)$$

Граничные условия на боковой поверхности:

$$T_t = u_t = v_t = q_t^{(1)} = q_t^{(2)} = 0.$$

Для вычисления w_0 — вертикальной скорости на границе планетарного пограничного слоя — используется модель И. М. Бобылевой, С. С. Зилитинкевича, Д. Л. Лайхтмана [1]:

$$\begin{aligned} l v - \frac{1}{\rho} p_x + (k u_z)_z &= 0, \\ -l u - \frac{1}{\rho} p_y + (k v_z)_z &= 0, \\ \alpha_T (k \theta_z)_z &= \tilde{p}_0 \exp\left(-\frac{z}{\tilde{L}}\right) \tilde{L}, \\ k(u_z^2 + v_z^2) - \alpha_T \frac{g}{T} k \theta_z + \alpha_b (k b_z)_z &= c \frac{b^{3/2}}{l}, \\ k &= \tilde{l} \sqrt{b}, \\ \tilde{l} &= -\tilde{\kappa} \psi / \psi_z, \quad \psi = c \frac{b^{3/2}}{\tilde{l} k}, \\ w_z + u_x + v_y &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где θ — потенциальная температура, k — коэффициент турбулентной вязкости, b и l — средние значения кинетической энергии и пространственного масштаба пульсаций, $\tilde{p}_0 = -k \theta_z|_{z=z_0}$, $\tilde{L} = \kappa v_*/l$,

v_* — скорость трения, $\alpha_T, c, \alpha_b, \kappa, \tilde{\kappa}$ — безразмерные константы теории.

Граничные условия:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} u &= 0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} v = 0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} w = 0, \\ \lim_{z \rightarrow H} u &= G \cos \alpha, \quad \lim_{z \rightarrow H} v = G \sin \alpha, \\ -k\rho c_p \theta_z + B + LE &= S - I = R.\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned}S &= (1,7 \sin h_0 - 0,32 \sqrt{\sin h_0})(1 - 0,075n), \\ I &= (a - b \sqrt{e}) \sigma T^4 (1 - 0,075n),\end{aligned}$$

z_0 — шероховатость подстилающей поверхности, G — модуль геострофического ветра, α — угол полного поворота ветра в пограничном слое, H — высота пограничного слоя, B — поток тепла в почву, LE — затраты тепла на испарение, I — эффективное излучение подстилающей поверхности, A — альbedo подстилающей поверхности, S — поток суммарной коротковолновой радиации, e — упругость водяных паров, n — облачность в баллах. Поскольку облачность прогнозируется, при решении задачи (6) принято правило: $n=10$, если облачность есть, и $n=0$, если облачности нет.

Решение системы (6) и (7) выражается с помощью универсальных функций от безразмерных параметров, связанных с геострофическим ветром и температурой на верхней границе пограничного слоя и стратификацией температуры [1].

Нахождение решения системы (1), (3), (6) в момент времени $t + \Delta t$ по известному решению в момент времени t производится в четыре этапа. На первом этапе решается система, описывающая перенос метеорологических полей по траекториям частиц:

$$\varphi_t + u\varphi_x + v\varphi_y = 0. \quad (8)$$

Здесь вектор φ имеет вид

$$\varphi = \begin{pmatrix} u \\ v \\ T \\ q^{(1)} \\ q^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Для решения системы (8) используется модификация метода предиктор-корректор, предложенная в работе [2].

На втором этапе решается система, описывающая турбулентную диффузию полей $q^{(1)}$, $q^{(2)}$ и T :

$$\begin{aligned}\frac{\partial q^{(1)}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial p} \frac{kp^2 g^2}{R^2 T^2} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial p}, \\ \frac{\partial q^{(2)}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial p} \frac{kp^2 g^2}{R^2 T^2} \frac{\partial q^{(2)}}{\partial p}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial p} \frac{kgp}{RT} \left(\frac{gp}{RT} \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_a \right).\end{aligned}\quad (10)$$

Для решения этой системы принимаем следующие граничные условия.

На верхней границе атмосферы

$$q^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial q^{(1)}}{\partial p} = \frac{\partial T}{\partial p} = 0, \quad (11)$$

на нижней границе считаем известными (получаем из решения задачи пограничного слоя) турбулентные потоки тепла и влаги

$$k \frac{\partial T}{\partial p} \text{ и } k \frac{\partial q^{(1)}}{\partial p}, \text{ а } q^{(2)} = 0.$$

Система (10) решается с помощью явной схемы, устойчивость которой обусловлена выполнением условия Куранта.

На третьем этапе решается система, описывающая адаптацию метеорологических полей:

$$\begin{aligned} u_t + lv &= -gz_x, & v_t - lu &= -gz_y, \\ T_t - \frac{\gamma_a - \gamma}{gp} RT^* \tau &= 0, \\ u_x + v_y + \tau_p &= 0, & T &= -\frac{gp}{R} z_p. \end{aligned} \quad (12)$$

Система (12) решается с помощью метода биортогонализации [3].

На четвертом этапе решается задача согласования полей удельной влажности и температуры:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q^{(1)}}{\partial t} &= f^{(1)}, \\ \frac{\partial q^{(2)}}{\partial t} &= -f^{(1)} - f^{(2)}, \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= -\frac{L}{c_p} f^{(1)}. \end{aligned} \quad (13)$$

Система (13) решается с помощью неявной разностной схемы, устойчивой при любых шагах по времени [4].

2. Объективный анализ

Для решения сформулированной задачи в начальный момент времени требуется задание в узлах регулярной сетки всех прогнозируемых функций: $u, v, z, T, q^{(1)}$ и $q^{(2)}$.

Объективный анализ поля геопотенциала проводится методом оптимальной интерполяции, разработанным Л. С. Гандиным [5]. При отборе влияющих станций производится горизонтальный контроль. Решение системы уравнений, определяющих интерполяционные коэффициенты, производится с помощью процедур, предложенных Форсайтом и Молером [6].

Начальные значения u, v рассчитываются по геострофическим формулам, а значения температуры — по уравнению статики.

Для получения начальных значений удельной влажности проводится объективный анализ температуры точки росы. Этот анализ основан на разложении поля температуры точки росы по собственным функциям оператора, описывающего вертикальное турбулентное перемешивание. Затем проводится интерполяция первых четырех коэффициентов Фурье в узлы регулярной сетки [7].

Заметим, что отбрасывание последних коэффициентов Фурье в разложении поля влажности обеспечивает не только фильтрацию мелкомасштабных составляющих поля, но и отбраковку ошибок измерения (или передачи по каналам связи), поскольку формально они эквивалентны локальным возмущениям.

3. Область интегрирования

Областью интегрирования данной задачи является трехмерная сеточная область с шагом сетки по горизонтали 300 км и пятью стандартными уровнями по p : 1000, 850, 700, 500, 300 мб. Число узлов по x — 26, по y — 22. Область с центром в г. Новосибирске покрывает территорию Советского Союза.

Для повышения точности температура рассчитывается на промежуточных уровнях — 925, 775, 600 и 400 мб. На тех же уровнях рассчитываются и поля удельной влажности и слоистообразной облачности.

Поскольку в правой части системы уравнений, описывающих адаптацию метеорологических полей, содержатся члены с малой разностью больших величин, эти члены необходимо считать с особой тщательностью. С этой целью для расчета полей u , v , z вводятся сдвинутые по горизонтали сетки [8]. В [8] показано, что введение таких сеток дает существенный положительный эффект.

4. Оперативный комплекс

На рис. 1 представлена блок-схема автоматической системы обработки метеорологической информации, использующая ЭВМ БЭСМ-6 и «Минск-22», связанные между собой аппаратурой передачи данных «Обь», разработанной в Вычислительном центре СО АН СССР.

Исходная информация о полях геопотенциала, температуры и дефицита точки росы поступает с метеорологических станций в ЭВМ «Минск-22» Новосибирского регионального центра. Здесь производится контроль, упаковка информации, которая затем по системе «Обь» передается непосредственно в ЭВМ БЭСМ-6 Вычислительного центра. Работа оперативных программ БЭСМ-6 производится с помощью магнитной ленты. Сначала информация контролируется, расшифровывается и записывается на магнитную ленту. Затем последовательно работают блоки объективного анализа поля геопотенциала, объективного анализа поля влажности, далее — прогноза элементов погоды, и наконец результат прогноза

упаковывается, кодируется и по системе «Обь» передается в ЗСУГМС, где распечатывается на печатающем устройстве ЭВМ «Минск-22».

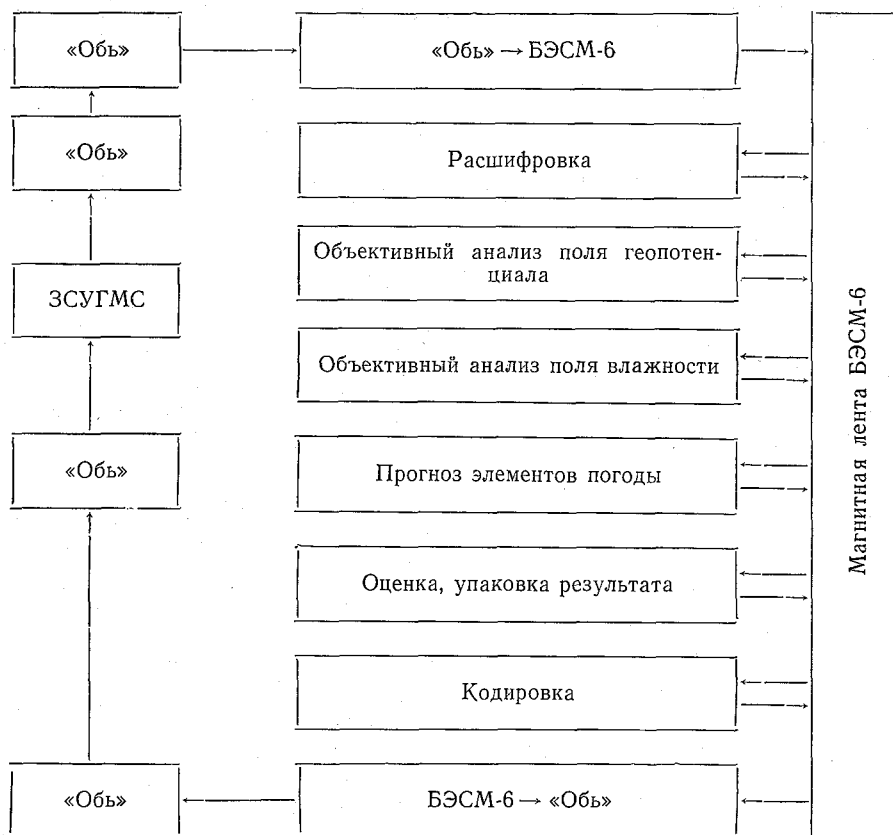


Рис. 1. Блок-схема автоматической системы обработки метеорологической информации.

5. Результаты оперативных испытаний

В мае—июне 1970 г. была проведена оценка качества прогнозов барических полей по 30 ситуациям и полей температуры и ветра по 11 ситуациям. Для сопоставления параллельно оценивались барические поля, предвычисленные по квазигеострофической модели С. А. Белоусова.

В табл. 1 приводятся результаты статистической оценки прогнозов.

Относительная ошибка ε прогнозов барических полей как по полным уравнениям, так и по квазигеострофической схеме получалась в среднем одинаковой, тогда как оправдываемость эволюции ρ в прогнозах по полным уравнениям оказалась в среднем на 9%

Таблица 1

Оценка прогнозов барического поля

Поверх- ность, мб	Схема	Относительная ошибка		Оправдываемость эволюции	
		ϵ	ϵ'	ρ	ρ'
1000	По полным уравнениям	0,95	0,88	0,38	0,43
850	По полным уравнениям	0,96	0,91	0,37	0,34
	Квазигеострофическая	0,96	0,92	0,32	0,34
700	По полным уравнениям	0,93	0,93	0,35	0,35
	Квазигеострофическая	0,97	0,94	0,30	0,30
500	По полным уравнениям	0,90	0,88	0,37	0,37
	Квазигеострофическая	0,87	0,87	0,24	0,31
300	По полным уравнениям	0,80	0,80	0,47	0,51
	Квазигеострофическая	0,82	0,82	0,34	0,30
Среднее по уровням	По полным уравнениям	0,91	0,88	0,39	0,40
	Квазигеострофическая	0,91	0,89	0,30	0,31

выше. В 44% случаев расстояние между фактическим центром и центром, предсказанным схемой по полным уравнениям, не превышает 200 км, т. е. менее 1 шага сетки. Для квазигеострофической модели соответственно получено 27% таких случаев.

Высокие значения относительной погрешности, полученные по обеим схемам, объясняются плохой освещенностью метеорологическими станциями восточной (большей) части территории прогноза. Восточнее Новосибирска сеть станций становится редкой, данные по Китаю отсутствуют почти ежедневно.

В этом отношении весьма показательными являются оценки ϵ' и ρ' , приведенные в табл. 1. Они выполнены для пунктов, расположенных на территории Архангельской, Московской, Горьковской областей и Коми АССР. Этот район относится к пограничной части области интегрирования, где результаты прогноза существенно искажаются в силу граничных условий, поставленных на боковых границах. Тем не менее оценки для этих пограничных областей оказались не хуже, чем для всей территории. Отсюда можно сделать вывод, что на оценки ϵ и ρ , приведенные в табл. 1, следует делать поправку за счет восточной половины области прогноза с редкой сетью станций.

Поскольку счет велся с обычной сеткой, на результатах сказалось сглаживание, обусловленное недостаточно точной аппроксимацией на этапе адаптации. Во-первых, это проявилось в несоответствии между числом предсказанных новообразований (31%) и числом предсказанных исчезновений барических центров (70%); соответствующие цифры для квазигеострофической схемы 31 и 18%. Во-вторых, как следствие сглаживания, вертикальные движения получились в основном слабыми по интенсивности. Это в свою очередь

приводило к тому, что схемой улавливались только зоны интенсивных осадков.

В табл. 2 приведены оценки прогнозов полей температуры и ветра в свободной атмосфере (на уровнях 850, 700, 500 и 300 мб) и у поверхности земли.

Оценка прогнозов температуры и ветра

Таблица 2

Поверх- ность, мб	Температура			Направление ветра			Скорость ветра		
	ρ_T	ε_T	$\Delta T_{абс}$	ρ_φ	ε_φ	$\Delta \varphi_{абс}$	ρ_V	ε_V	$\Delta V_{абс}$
Земля	0,40	1,07	4,2	—	—	98	—	—	2,7
850	0,64	0,74	3,1	0,44	0,69	47	0,39	0,78	3,1
700	0,63	0,71	2,2	0,71	0,56	33	0,44	0,83	4,2
500	0,39	0,74	1,9	0,42	0,86	40	0,38	0,86	6,0
300	—	—	—	0,63	0,82	37	0,61	0,76	7,6
Среднее по уровням	0,52	0,82	2,9	0,55	0,73	51	0,46	0,81	4,7

Оценки прогноза ветра и температуры в свободной атмосфере значительно выше, чем у поверхности земли, и это естественно, так как прогноз метеоэлементов у поверхности земли — задача гораздо более сложная, чем прогноз в свободной атмосфере. Тем не менее результаты численного прогноза полей ветра и температуры сопоставимы с синоптическим прогнозом. Так, за этот же период ошибка синоптического прогноза температуры для Новосибирска была у поверхности земли 3,3°, а на уровне 850 мб — 2,8°.

В июле 1970 г. оперативные программы были переведены на сдвинутые сетки, что немедленно сказалось на качестве прогнозов: сглаживание исчезло, резко возрос процент предсказанных новообразований, улучшился прогноз вертикальных токов и осадков.

Были проведены дополнительные оценки качества прогнозов, результаты представлены в табл. 3 и 4.

Таблица 3

Оправдываемость (%) прогнозов положения центров барических образований (а — квазигеострофическая схема, б — схема по полным уравнениям)

Поверх- ность, мб	Расстояние между фактическим и прогностическим положениями центров, км							
	≤ 200		≤ 400		≤ 600		> 600	
	а	б	а	б	а	б	а	б
1000	—	50	—	72	—	91	—	9
850	21	34	60	71	85	100	15	—
700	30	52	62	75	85	95	15	5
500	19	55	59	64	86	100	14	—
300	22	51	60	85	77	100	23	—

В заключение заметим, что дальнейшее развитие схемы будет связано в первую очередь с расчетом радиационных притоков тепла в свободной атмосфере, расчетом эффективного излучения Земли и приходящей коротковолновой радиации. Это позволит нам не только отработать методику расчета указанных параметров, существенно необходимых для задачи прогноза на более длительные сроки, но и значительно улучшить прогноз таких величин, как поле приземной температуры, поле слоистообразной облачности и т. п.

Авторы пользуются случаем, чтобы выразить глубокую признательность Г. И. Марчуку за научное руководство работой, а также С. М. Шульману и В. В. Пененко за активную помощь при организации оперативных испытаний и внедрении схемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобылева И. М., Зидитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. Турбулентный режим в термически-стратифицированном планетарном пограничном слое атмосферы. — В кн.: «Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн». М., «Наука», 1967.
2. Дымников В. П., Контарев Г. Р. Некоторые эксперименты со схемой численного прогноза погоды. — В кн.: «Численные методы решения задач прогноза погоды и общей циркуляции атмосферы». Новосибирск, 1970.
3. Марчук Г. И., Контарев Г. Р., Ривин Г. С. Краткосрочный прогноз погоды по полным уравнениям на ограниченной территории. — Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1967, т. 3, № 11.
4. Дымников В. П. О некоторых особенностях численного решения уравнений переноса влажности в атмосфере. — Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1969, т. 5, № 6.
5. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Л., Гидрометеониздат, 1963.
6. Forsythe G. F., Moler C. B. Computer solution of linear algebraic systems. Prentice-Hall, inc. Englewood Cliffs, No. 7. 1967.
7. Дымников В. П., Контарев Г. Р. Объективный анализ поля геопотенциала с помощью собственных функций динамического оператора. — В кн.: «Статистические методы в метеорологии», Новосибирск, 1969.
8. Контарев Г. Р. Об особенностях численной аппроксимации системы уравнений адаптации. — В кн.: «Численные методы решения задач прогноза погоды и общей циркуляции атмосферы». Новосибирск, 1970.

Таблица 4

Оправдываемость (%) прогноза
новообразований и исчезновений
барических центров

Поверх- ность, мб	Ново- образование		Исчезнове- ние	
	а	б	а	б
1000	—	70	—	60
850	22	70	70	69
700	—	88	—	50
500	14	89	50	60
300	17	84	63	70

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ СОВМЕЩЕННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЛАНЕТАРНОЙ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ И ГИДРОСФЕРЫ

Известно, что основные трудности реализации математических моделей циркуляции атмосферы заключаются в необходимости проводить интегрирование по времени на долгий срок уравнений динамики атмосферы. Интегрирование уравнений должно проводиться с шагами по времени менее 10 минут на срок минимум 100—200 суток для атмосферы и на срок до 10 лет с шагами порядка суток для океана. Реализация таких моделей требует ЭВМ большого быстродействия и больших затрат машинного времени на указанных машинах. Если бы тем или иным путем удалось получить аналитическое решение по времени, то реализация циркуляционных моделей не вызывала бы затруднений при моделировании процессов любых временных периодов.

«Вероятно, самым большим теоретическим достижением явилось бы получение общего аналитического решения точных уравнений. В настоящее время одним из препятствий к получению такого решения является наше неумение адекватно описывать трение и конденсацию. Получение общего решения той или иной идеализированной системы уравнений явилось бы почти равноценным достижением. Однако и эта задача, по-видимому, не может быть решена до тех пор, пока исходные уравнения не будут в такой мере упрощены, чтобы исключить непериодические решения» (Э. Н. Лоренц [1]).

Характерный для атмосферы непериодический режим описывается в уравнениях динамики атмосферы членами, учитывающими нелинейное взаимодействие волновых возмущений. Нелинейный перенос энергии за пределы учитываемого спектра волновых возмущений для получения периодического решения должен быть адекватно описан членами, выражающими эффект турбулентной вязкости. Правильное задание коэффициента планетарной турбулентной вязкости позволит описать эффекты планетарной турбулентности соответственно нелинейному взаимодействию волновых возмущений. Связь между планетарной турбулентностью и нелинейным взаимодействием достаточно четко определяется при проведении

процесса осреднения уравнений планетарной динамики по Рейнольдсу [5].

Путь аналитического учета конденсации был предложен в [18] и может быть развит в различных моделях планетарной динамики, решаемых спектральным методом.

Выпишем уравнения модели совмещенной динамики атмосферы и океана.

Уравнения динамики бароклинной атмосферы

$$\frac{\partial V}{\partial t} + w \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{i}{2a} VL_1(V) + \frac{i}{2a} UL_2(V) - \\ - 2\omega i \cos \theta V = \frac{i}{a} L_6(\Phi) + \alpha \frac{\partial}{\partial p} \nu p^2 \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{K}{a^2} L_7(V); \quad (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + w \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{i}{2a} VL_3(U) + \frac{i}{2a} UL_4(U) + \\ + 2\omega i \cos \theta U = \frac{i}{a} L_5(\Phi) + \alpha \frac{\partial}{\partial p} \nu p^2 \frac{\partial U}{\partial p} + \frac{K}{a^2} L_8(U); \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} + \frac{i}{2a} L_1(V) + \frac{i}{2a} L_4(U) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{i}{2a} VL_5(T) + \frac{i}{2a} UL_6(T) + w \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\gamma_a - \gamma}{g} R \frac{T}{p} w = \\ = \alpha \frac{\partial}{\partial p} \nu p^2 \frac{\partial T}{\partial p} + \frac{K}{a^2} L_9(T) - \frac{g}{c_p} \frac{\partial Q}{\partial p} + \frac{Lc}{c_p}; \quad (4)$$

$$T = -\frac{p}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial p}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial s'}{\partial t} + \frac{i}{2a} VL_5(s') + \frac{i}{2a} UL_6(s') + w \frac{\partial s'}{\partial p} - \beta \frac{w}{p} = \\ = -\frac{g}{c_p} \frac{\partial Q}{\partial p} + \alpha \frac{\partial}{\partial p} \nu p^2 \frac{\partial s'}{\partial p} + \frac{K}{a^2} L_9(s'); \quad (6)$$

$$c = f_1(s'); \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha \frac{\partial}{\partial p} k_0 p^2 \frac{\partial Q}{\partial p} - \alpha_c Q &= -2\alpha_c \sigma T^4 \\ \frac{gp}{RT} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial p} + \lambda \tilde{\Phi} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$k_0 = f_2(s'); \quad \lambda = f_3(s'). \quad (9)$$

Здесь $V = -v_\varphi - iv_\theta$; $U = v_\varphi - iv_\theta$ — комбинации компонент скорости в сферической системе координат; w — аналог вертикальной

скорости в изобарической системе координат; Φ — геопотенциал; T — температура; s' — дефицит точки росы; Q — поток излучения в инфракрасной области; $\tilde{\Phi}$ — поток излучения в коротковолновом диапазоне; ω — угловая скорость вращения Земли; g — ускорение силы тяжести; p — давление; $\alpha = \left(\frac{g}{RT}\right)^2$; R — газовая постоянная для сухого воздуха; a — радиус Земли; $\bar{T}(p)$ — средняя температура, определенная, следуя [2], из формул

$$\Phi = \bar{\Phi}(p) + \Phi',$$

$$T = \bar{T}(p) + T',$$

$$\bar{T} = - \frac{p}{Rg} \frac{d\bar{\Phi}}{dp}$$

(впоследствии штрихи над Φ и T опускаем); γ_a — адиабатический температурный градиент; γ — температурный градиент стандартной атмосферы [16]; α_c — эффективная постоянная; $\beta = -\alpha + \frac{\kappa - 1}{\kappa} T$, $\alpha = \left(\frac{d \ln E}{d\tau'}\right)^{-1}$; E — упругость насыщения пара; τ' — температура точки росы; $\kappa = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$ — отношение теплоемкостей воздуха при постоянном давлении и постоянном объеме; β — постоянная величина; K — коэффициент макротурбулентности; ν — коэффициент турбулентного перемешивания по вертикали (величины ν и K определяются полем скорости); L — скрытая теплота конденсации; c — скорость конденсации; k_0 — эффективный коэффициент диффузии длинноволнового излучения [2]; σ — постоянная Стефана—Больцмана; λ — эффективный коэффициент отражения коротковолновой радиации облачной поверхностью;

$$L_j(u) = \frac{\partial u}{\partial \theta} - (-1)^j \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + b_j \operatorname{ctg} \theta \cdot u;$$

$$(j = 1, 2, \dots, 6)$$

$$L_j(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} + d_j \frac{2i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - c_j \frac{u}{\sin^2 \theta}$$

$$(j = 7, 8, 9)$$

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 1, 4 \\ -1 & \text{при } j = 2, 3 \\ 0 & \text{при } j = 5, 6 \end{cases} \quad d_j = \begin{cases} -1 & \text{при } j = 7 \\ 1 & \text{при } j = 8 \\ 0 & \text{при } j = 9 \end{cases}$$

$$c_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j = 7, 8 \\ 0 & \text{при } j = 9 \end{cases}$$

Функции f_i ($i=1, 2, 3$) полагаем эмпирически заданными от аргумента s' . Следуя предложению М. И. Юдина, скорость конденсации c представляем с помощью зависимости $c = -\alpha \Delta s'$, где $\Delta s'$ — величина конденсационного нагрева. Величина $\Delta s'$ связана с s' функциональной зависимостью следующего типа:

$$\Delta s' = \begin{cases} 0 & \text{при } s' > 0, \\ \varphi(s') & \text{при } s' < 0. \end{cases}$$

В отличие от схемы учета конденсации влаги для спектральных методов решения, предложенной в [18], схема М. И. Юдина требует более простой обработки при настройке на спектральный метод решения, так как функция $\Delta s'$ может быть достаточно точно представлена в виде степенного ряда по s' с небольшим числом членов ряда

$$\Delta s'(s') = \sum_j a_j s'^j. \quad (10)$$

Аналогично в виде степенного ряда по s' представляются эффективный коэффициент диффузии k и коэффициент λ , которые скачкообразно возрастают в зонах, где $s' < 0$ (т. е. зоны облачности):

$$k_0 = \sum_j b_j s'^j, \quad \lambda = \sum_j n_j s'^j. \quad (11)$$

Уравнения краевых условий на верхней границе атмосферы

$$\begin{aligned} \nu p^2 \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_{p=0} &= \nu p^2 \frac{\partial U}{\partial p} \Big|_{p=0} = \nu p^2 \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{p=0} = \nu p^2 \frac{\partial s'}{\partial p} \Big|_{p=0} = \tau \Big|_{p=0} = 0; \\ \Phi \Big|_{p=0} &= S_{\odot}(t, \theta). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\frac{\partial V}{\partial p} = \frac{\partial U}{\partial p}$; $\frac{\partial T}{\partial p}$ и $\frac{\partial s'}{\partial p}$ задаются в уравнениях параметрически на последнем расчетном уровне; $S_{\odot}$ — поток солнечной радиации на верхнюю границу атмосферы; $k_0|_{p=0} = k_0|_{p_j}$; $Q|_{p=0} = \xi' Q|_{p=p_j}$ (p_j — давление на последнем расчетном уровне).

Условие для Q соответствует равенству уходящего излучения на верхней границе атмосферы излучению на последнем расчетном уровне с поправочным коэффициентом ξ' на поглощение слоем атмосферы в пределах $0 \leq p \leq p_j$.

Уравнения динамики термохалинного океана

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \tilde{\omega} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + \frac{i}{2a} \tilde{V} L_1(\tilde{V}) + \frac{i}{2a} \tilde{U} L_2(\tilde{V}) - \\ - 2\omega i \cos \theta \tilde{V} = -\frac{i}{\rho a} L_6(p) + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\gamma} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} + \frac{\tilde{K}}{a^2} L_7(\tilde{V}) + N_1; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \tilde{\omega} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} + \frac{i}{2a} \tilde{V} L_3(\tilde{U}) + \frac{i}{2a} \tilde{U} L_4(\tilde{U}) + 2\omega i \cos \theta \tilde{U} = \\ = \frac{i}{\rho a} L_5(p) + \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\gamma} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} + \frac{\tilde{K}}{a^2} L_8(\tilde{U}) + N_2; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z} + \frac{i}{2a} L_1(\tilde{V}) + \frac{i}{2a} L_4(\tilde{U}) = 0; \quad (15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} + \frac{i}{2a} \tilde{V} L_5(\tilde{T}) + \frac{i}{2a} \tilde{U} L_6(\tilde{T}) + \tilde{\omega} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\gamma} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \frac{\tilde{K}}{a^2} L_9(\tilde{T}); \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{i}{2a} \tilde{V} L_5(S) + \frac{i}{2a} \tilde{U} L_6(S) + \tilde{\omega} \frac{\partial S}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial z} \tilde{\gamma} \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\tilde{K}}{a^2} L_9(S); \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (\rho - 1) \cdot 10^3 = 28,14 - 0,0735 \tilde{T} - 0,00469 \tilde{T}^2 + \\ + (0,802 - 0,002 \tilde{T})(S - 35). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь $\tilde{V} = -\tilde{v}_\varphi - i\tilde{v}_\theta$, $\tilde{U} = \tilde{v}_\varphi - i\tilde{v}_\theta$ — компоненты скорости течений в океане; $\tilde{T}$ — температура; ρ — плотность воды; S — соленость. Уравнение (19) есть уравнение состояния морской воды [3].

Трудности применения спектральных методов в изучении динамики океана связаны со сложной конфигурацией береговых линий. М. Е. Шве́ц предложил задать в районах материков вязкость достаточно большой, а напряжения касательного трения, создаваемого атмосферой, равными нулю, чтобы свести движения гидросферы в зоне материков к состоянию покоя, тем самым моделируя в гидросфере конфигурацию материков. Точность такой постановки задачи будет определяться возможностью задать функционально тензорное поле напряжений, близкое к нулю в районах гидросферы и стремящееся к бесконечности в районах материков, причем на границах «материк—океан» напряжения должны возрастать подобно δ -функции. Члены N_1 и N_2 в уравнениях движения для гидросферы определяются тензором указанных напряжений. Следуя [4], зададим указанный тензор в том виде, когда его компоненты преобразуются независимо друг от друга при проведении преобразования вращения координат. Если

$$\begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} \\ n_{31} & n_{32} & n_{33} \end{vmatrix}$$

— тензор напряжений, создаваемых материками, то его инвариантный относительно вращений аналог будет

$$\begin{vmatrix} n_{11} - in_{21} - i(n_{12} - in_{22}) & n_{11} - in_{21} - i(n_{12} + in_{22}) & n_{13} - in_{23} \\ n_{11} + in_{21} - i(n_{12} - in_{22}) & n_{11} + in_{21} + i(n_{12} + in_{22}) & n_{13} + in_{23} \\ n_{31} - in_{32} & n_{31} + in_{32} & n_{33} \end{vmatrix}. \quad (20)$$

В сферических координатах тензор (20) записывается в виде

$$\begin{vmatrix} n_{\varphi\varphi} - n_{\theta\theta} + 2in_{\theta\varphi} & n_{\varphi\varphi} + n_{\theta\theta} & -n_{\varphi r} - in_{\theta r} \\ n_{\varphi\varphi} + n_{\theta\theta} & n_{\varphi\varphi} - n_{\theta\theta} - 2in_{\theta\varphi} & -n_{\varphi r} + in_{\theta r} \\ -n_{r\varphi} - in_{r\theta} & -n_{r\varphi} + in_{r\theta} & n_{rr} \end{vmatrix}. \quad (21)$$

Компоненты тензора (21) являются линейными функциями составляющих тензора скоростей деформаций, но с учетом переменной вязкости. Компоненты (21) могут быть введены в уравнения динамики вязкой жидкости по аналогии с [11]. Тогда

$$\begin{aligned} N_1 = & \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[-\frac{i}{a} \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} - \frac{\tilde{V}}{a} \right] + \\ & + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \varphi} - \tilde{V} \operatorname{ctg} \theta \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \frac{i}{a} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right); \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} N_2 = & \frac{\partial \mu}{\partial z} \left[-\frac{i}{a} \left(\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} - \frac{\tilde{U}}{a} \right] + \\ & + \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varphi} - \tilde{U} \operatorname{ctg} \theta \right) \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \frac{i}{a} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial z} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \mu}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (23)$$

где $\mu(\theta, \varphi, z)$ — вязкость, стремящаяся к бесконечности в зоне материка и к нулю в гидросфере.

Уравнения краевых условий на дне океана

$$\begin{aligned} \tilde{V} = \tilde{U} = 0; \quad \tilde{\omega} = & \frac{V_k i}{2a} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \frac{U_k i}{2a} \left(\frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

где $\tilde{V}_k, \tilde{U}_k$ — значения скорости на последнем учитываемом уровне в океане; $H(\theta, \varphi)$ — рельеф дна; $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} = \frac{\partial S}{\partial z} = 0$; $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}$ и $\frac{\partial S}{\partial z}$ на последнем уровне в океане задаются параметрически.

Уравнения «склейки» решений для атмосферы и океана

$$\begin{aligned} \tilde{w}|_{z=0} = & \left[-\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\tilde{V}i}{2a} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\tilde{U}i}{2a} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

В уравнении (25) значения $\tilde{V}$ и $\tilde{U}$ берутся на поверхности океана.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{i}{4a} \int_0^z [L_1(\tilde{V}) + L_4(\tilde{U})] dz = 0; \quad (26)$$

$$\begin{aligned} w = & \frac{\partial p_s}{\partial t} - w_{\text{оп}} \rho g = -w_{\text{оп}} \rho g - \\ & - \int_0^1 \left\{ p_s [L_1(V) + L_4(U)] \frac{i}{2a} + \frac{Vi}{2a} \times \right. \\ & \times \left(\frac{\partial p_s}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial p_s}{\partial \varphi} \right) + \frac{Ui}{2a} \left(\frac{\partial p_s}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial p_s}{\partial \varphi} \right) \left. \right\} d\sigma'; \\ w_{\text{оп}} = & \frac{\hat{V}i}{2a} \left(\frac{\partial H_s}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial H_s}{\partial \varphi} \right) + \\ & + \frac{\hat{U}i}{2a} \left(\frac{\partial H_s}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial H_s}{\partial \varphi} \right); \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} \Big|_{z=0} = & l_1 (-v_{\varphi r} - i v_{\theta r}) \delta; \\ \tilde{\rho} \tilde{v} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} \Big|_{z=0} = & l_1 (-v_{\varphi r} + i v_{\theta r}) \delta; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = -l_2 \delta s'^{(2)}; \quad (29)$$

$$v \frac{\partial s'}{\partial p} = -\beta' s'^{(2)}; \quad (30)$$

$$\begin{aligned} -\lambda_0 \rho' g \frac{\partial T}{\partial p} \Big|_{p=p_s} + \delta \lambda^* \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \Big|_{z=0} - \\ - \lambda_0 \frac{L}{c_p} \rho' g \frac{\partial s'}{\partial p} \Big|_{p=p_s} = -r \sigma \tilde{T}^4 + \tilde{\Phi} \Big|_{p=p_s} (1 - \Gamma); \end{aligned} \quad (31)$$

$$k_0 \frac{\partial Q}{\partial p} \Big|_{p=p_s} = \tilde{\Phi} \Big|_{p=p_s} (1 - \Gamma) (1 - \delta) + (Q \Big|_{p=p_s} - 2\sigma \tilde{T}^4 \Big|_{z=0}) \delta; \quad (32)$$

$$\begin{aligned} T \Big|_{p=p_s} = \tilde{T} \Big|_{z=0}; \\ V \Big|_{p=p_s} = U \Big|_{p=p_s} = 0; \quad \Phi \Big|_{p=1000 \text{ мб}} = 0; \quad p \Big|_{z=0} = p_s. \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь ξ — высота свободной поверхности океана; z — глубина последнего расчетного уровня в океане; p_s — давление атмосферы у поверхности Земли, приведенное к уровню моря. В (27) параметр интегрирования $\sigma' = p/p_s$ (интеграл в (27) рассчитывается по значениям неизвестных на расчетных уровнях). Величины $-v_{\varphi r} - i v_{\theta r}$ и $-v_{\varphi r} + i v_{\theta r}$ — компоненты тензора турбулентных напряжений на ближайшем к поверхности Земли расчетном уровне ($v_{\varphi r} = \overline{v'_\varphi v'_r}$, $v_{\theta r} = \overline{v'_\theta v'_r}$); H_s — высота рельефа; $\hat{V}$, $\hat{U}$ — эффективные линейные комбинации скорости на ближайших к поверхности Земли расчетных уровнях; $\bar{\rho}$ — средняя плотность воздуха у Земли;

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{на море,} \\ 0 & \text{на суше.} \end{cases}$$

l_i ($i=1, 2$) — параметры пограничного слоя; $s'^{(2)}$ — дефицит точки росы на ближайшем к земной поверхности расчетном уровне; ω_{op} — вертикальные скорости, вызванные орографией.

Уравнения (28) позволяют определять напряжения касательного трения непосредственно из компонент тензора турбулентных напряжений для ближайшего к океану уровня в атмосфере. Уравнение (29) позволяет рассчитывать изменение солёности в верхнем слое океана соответственно испарению. Уравнение (30), следуя апробированной в [2, 12] методике, позволяет учесть испарение с поверхности моря и суши (β' — функция испаряемости [17]). Уравнение теплового баланса (31) взято в форме, предложенной Е. Н. Блинновой [8]. Здесь $\tilde{\Phi}|_{p=p_s} (1 - \Gamma)$ — приход коротковолновой суммарной радиации к земной поверхности [17], r — коэффициент серости (в первом приближении принимается постоянным для любой поверхности и фактически должен быть функцией координат и времени), λ_0 — коэффициент температуропроводности воздуха, λ^* — коэффициент температуропроводности воды, ρ' — плотность воздуха у земной поверхности, Γ — альбедо поверхности суши и океана. Уравнение (31) совместно с уравнением (33) является краевым условием для уравнений (4), (17), а уравнение (32) есть краевое условие для уравнения (8). В уравнениях (31), (32) величины

$\frac{\partial T}{\partial p}$, $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial z}$, $k \frac{\partial Q}{\partial p}$ рассчитываются по значениям $T|_{p=p_s} = \tilde{T}|_{z=0}$

и $Q|_{p=p_s}$ и значениям T , $\tilde{T}$, Q на ближайшем к земной поверхности расчетном уровне в атмосфере и океане с введением параметризации пограничных слоев.

Таким образом, изложенная модель является замкнутой по всем неизвестным при условии задания Γ и β' , расчет которых из уравнений математической физики пока не предусматривается. В модели введена простейшая параметризация пограничного слоя,

которая впоследствии может быть уточнена введением более детального учета турбулентного взаимодействия в пограничном слое в рамках теории турбулентного взаимодействия между океаном и атмосферой.

Рассматриваемые уравнения записываются для определенного числа уровней по p и z , для этого производные от неизвестных по p и z представляются с помощью центральных разностей. При аппроксимации используются уравнения краевых условий и условий «склейки». Полученная система уравнений от переменных t, θ, φ решается спектральным методом, базирующимся на системе обобщенных сферических функций [5—7, 13—15]. Рассмотрим особенности применения спектрального метода к задаче циркуляции атмосферы и океана.

Спектральное представление функций μ, N_1, N_2

Вязкость, определяющая область материков в гидросфере, должна обладать свойством δ -функции, т. е. стремится к бесконечности в районах материков и к нулю в зоне океана. Для построения такой функции строится сначала функция

$$M(\theta, \varphi) = \begin{cases} |M_1(\theta, \varphi)| > 1 & \text{для материков,} \\ |M_2(\theta, \varphi)| \leq 1 & \text{для океана.} \end{cases}$$

Тогда $\mu = M^d$, где $d = 2b > 0$.

Представив $M(\theta, \varphi)$ в виде ряда по T_{0n}^l , получим μ с помощью повторного применения оператора перемножения рядов $Y(x, z)$, т. е.

$$M(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l M_{l,n} T_{0n}^l(\theta, \varphi),$$

где $T_{m,n}^l$ — обобщенные сферические функции, и

$$\begin{aligned} Y(M, M) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=-k}^k M_{k,s} T_{0s}^k \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{j=-q}^q M_{q,j} T_{0j}^q = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{j=-q}^q M_{k,s} M_{q,j} \sum_{l=|k-q|}^{k+q} c(k, q, l; 0, 0, 0) \times \\ &\quad \times c(k, q, l; s, j, s+j) T_{0s+j}^l. \end{aligned}$$

Если

$$\mu = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l \mu_{l,n} T_{0n}^l,$$

то

$$\mu_{l,n} = M_{l,n}^{2b} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{j=-q}^q \Theta c(k, q, l; 0, 0, 0) M_{k,s}^{(b)} M_{q,j}^{(b)}, \quad (34)$$

где

$$\Theta = \begin{cases} c(k, q, l; s, j, s+j) & \text{при } s+j=n; |k-q| \leq l \leq k+q, \\ 0 & \text{при } s+j \neq n; l \leq |k-q|, l > k+q, \end{cases}$$

$c(k, q, l; s, j, s+j)$ — коэффициенты Клебша—Гордана [6], $M_{l,n}^{(2b)}$ — коэффициенты разложения по T_{0n}^l функции $M^{2b}(\theta, \varphi)$ ($b=1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$).

Функция $M(\theta, \varphi)$ может быть разложена в сходящийся в среднем ряд по системе обобщенных сферических функций T_{0n}^l . Аналогично может быть разложена и функция $M^{2b} = \mu$. По формуле (34), путем последовательного применения оператора Y к функции M можно рассчитать коэффициенты $M_{l,n}^{(2b)}$ по коэффициентам $M_{l,n}$.

Если $M(\theta, \varphi)$ представляется усеченным рядом до $l=L_1$, то точное представление M^{2b} включает $2bL_1$ членов ряда по T_{0n}^l .

Если

$$N_1 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-l}^l N_{l,n}^{(1)}(t) T_{1n}^l(\theta, \varphi),$$

$$N_2 = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-l}^l N_{l,n}^{(2)}(t) T_{-1n}^l(\theta, \varphi),$$

то

$$N_{l,n}^{(1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=-q}^q \Theta \left[-\frac{\sqrt{q(q+1)}}{a} c(k, q, l; 0, 1, 1) \times \right. \\ \times \frac{\partial \mu_{k,s}}{\partial z} \left(\tilde{w}_{q,j} + \frac{\partial \tilde{V}_{q,j}}{\partial z} - \frac{\tilde{V}_{q,j}}{a} \right) - \frac{1}{a^2} c(k, q, l; 2, -1, 1) \times \\ \times \sqrt{(k+2)(k-1)(q+1)q} \tilde{V}_{k,s} \tilde{w}_{q,j} + \\ \left. + \frac{\sqrt{q(q+1)}}{a} c(k, q, l; 0, 1, 1) \frac{\partial \tilde{w}_{k,s}}{\partial z} \mu_{q,j} \right],$$

$$N_{l,n}^{(2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=-q}^q \Theta \left[-\frac{\sqrt{q(q+1)}}{a} c(k, q, l; 0, -1, -1) \times \right. \\ \times \frac{\partial \mu_{k,s}}{\partial z} \left(\tilde{w}_{q,j} + \frac{\partial \tilde{U}_{q,j}}{\partial z} - \frac{\tilde{U}_{q,j}}{a} \right) - \frac{1}{a^2} c(k, q, l; 2, 1, -1) \times \\ \times \sqrt{(k+2)(k-1)(q+1)q} \tilde{U}_{k,s} \mu_{q,j} + \frac{\sqrt{q(q+1)}}{a} \times \\ \left. \times c(k, q, l; 0, -1, -1) \frac{\partial \tilde{w}_{k,s}}{\partial z} \mu_{q,j} \right],$$

где $\tilde{V}_{l,n}$, $\tilde{U}_{l,n}$, $\tilde{w}_{l,n}$ — спектральные амплитуды полей $\tilde{V}$, $\tilde{U}$, $\tilde{w}$.

Периодизация задачи по времени

При решении задачи о моделировании динамики двух существенно разноинерционных систем во взаимосвязанном состоянии приходится сталкиваться с необходимостью решать уравнения относительно некоторого периодического по времени движения в обеих, упомянутых выше, средах.

Введем безразмерное время

$$\tau = \Omega t,$$

где $\Omega = \frac{2\pi}{T_0}$ (T_0 — период колебаний). Оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ преобразуется в оператор $\Omega^{-1} \frac{\partial}{\partial \tau}$, и решение по времени будет ищиться в промежутке $0 \leq \tau \leq 2\pi$. Введением переменной τ налагаем условие периодичности колебаний атмосферы и гидросферы с выбранным периодом T_0 . В пределах периода T_0 колебания с меньшим периодом учитываются, если искать решение для спектральных коэффициентов в виде комплексного ряда Фурье по переменной τ , причем ряд Фурье должен включать весь спектр необходимых временных колебаний с периодом, меньшим T_0 . Например,

$$\tilde{V}_{l,n}(\tau) = \sum_{j=0}^J V_{l,n}^j e^{ij\tau},$$

где J определяет минимальный период колебания по времени, который необходимо учесть в решении. Период T_0 выбирается таким образом, чтобы условие периодичности решения было близко к природной реальности.

Усечение учитываемого спектра волновых возмущений

В практических расчетах неизбежно приходится проводить в спектральных методах все операции с усеченными рядами. Задав в рядах ограниченный спектр учитываемых волновых возмущений, получаем решение тоже в пределах взятого спектра. Проводя периодизацию задачи по времени и отыскивая периодические решения, оставляем непериодическую часть решения за пределами учитываемого спектра. Так, перемножение рядов в нелинейных членах приводит к появлению гармоник, которые не были учтены в усеченном по спектру ряде.

Пусть L — нелинейный оператор с квадратической нелинейностью, представимый линейной комбинацией обобщенных сферических функций. Тогда

$$L \left(\sum_{l=|m|}^N \sum_{n=-l}^l \alpha_{l,n} T_{m,n}^l \right) = \sum_{l=|m|}^N \sum_{n=-l}^l \beta_{l,n} T_{m,n}^l + \\ + \sum_{l=N+1}^{2N} \sum_{n=-l}^l \gamma_{l,n} T_{m,n}^l$$

Коэффициенты $\beta_{l,n}$ и $\gamma_{l,n}$, как следует из [7], могут быть выражены через коэффициенты $\alpha_{l,n}$ и коэффициенты Клебша—Гордана.

Если, например,

$$L = w \frac{\partial V}{\partial p} + \frac{i}{2a} V \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta V \right) + \\ + \frac{i}{2a} U \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \operatorname{ctg} \theta V \right),$$

то

$$\beta_{l,n} = \sum_{k=0}^N \sum_{s=-k}^k \sum_{q=1}^N \sum_{l=-q}^q \Theta_{\beta} \left[c(k, q, l; 0, 1, 1) w_{k,s} \frac{\partial V_{q,j}}{\partial p} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{q(q+1)}}{2a} c(k, q, l; 1, 0, 1) V_{k,s} V_{q,j} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{(q+2)(q-1)}}{2a} c(k, q, l; -1, 2, 1) U_{k,s} V_{q,j} \right],$$

где

$$\Theta_{\beta} = \begin{cases} c(k, q, l; s, j, s+j) & \text{при } s+j=n; |k-q| \leq l \leq N \leq k+q, \\ 0 & \text{при } s+j \neq n; l < |k-q|; l > k+q; l > N, \end{cases}$$

а $\gamma_{l,n}$ выражается такой же формулой с заменой Θ_{β} на Θ_{γ} , где

$$\Theta_{\gamma} = \begin{cases} c(k, q, l; s, j, s+j) & \text{при } s+j=n; N < l < k+q, \\ 0 & \text{при } s+j \neq n; l < N; l > k+q. \end{cases}$$

Величина $D_m = \sum_{l=N+1}^{2N} \sum_{n=-l}^l \gamma_{l,n} T_{m,n}^l$ определяет диссипацию энергии

в сторону спектра волновых возмущений, не учитываемых в усеченных рядах. Следуя принципу осреднения уравнений по Рейнольдсу, полагаем, что D_m может быть линейно аппроксимировано членами уравнений динамики атмосферы (океана), характеризующими турбулентную вихревую вязкость.

Удовлетворяя проинтегрированным уравнениям динамики, получаем

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} D_m \sin \theta d\theta d\varphi d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} K_m \Delta \mathbf{x}^{(m)} \sin \theta d\theta d\varphi d\tau, \quad (35)$$

где $\mathbf{X}^{(m)}$ ($m=1, 0, -1$) — компонент вектора $\mathbf{X}$ с номером m :

$$\mathbf{X} = (V, T, U).$$

Тогда

$$K_m = - \frac{a^2 \sum_{l=N+1}^{2N} \sum_{n=-l}^l \sum_{j=0}^J \gamma_{l,n,(m)}^j B_{l,n,(m)}^j}{\sum_{l=|m|}^N \sum_{n=-l}^l \sum_{j=0}^J X_{l,n,(m)}^j l(l+1) B_{l,n,(m)}^j}, \quad (36)$$

где K_m — коэффициент макротурбулентности (индекс m указывает номер компоненты вектора $\mathbf{X}$ в операторе, описывающем турбулентность); $X_{l,n,(m)}^j$ — спектральные амплитуды компоненты m вектора $\mathbf{X}$;

$$B_{l,n,(m)}^j = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi e^{ij\tau} T_{m,n}^l \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, d\tau.$$

Таким образом, нелинейная аperiодическая диссипация энергии может быть учтена интегрально заданием коэффициента вихревой вязкости согласно интегральным соотношениям типа (35). Так, определенные коэффициенты турбулентной вязкости будут различными для уравнений движения, переноса тепла, влаги, солёности, что и соответствует природе турбулентного переноса разных субстанций. С помощью соотношений (36) удастся интегрально замкнуть систему определением значений коэффициентов макротурбулентности.

Кроме того, нелинейная диссипация энергии появляется в уравнениях (7) — (9), (19), (24), (25), (27) — (32). (Нелинейная диссипация в соотношениях (22) — (23) может быть учтена в уравнениях движения уточнением равенств типа (36).) Но для этих уравнений можно пренебречь эффектом нелинейной диссипации, если в рядах учитывается достаточно широкий диапазон волновых возмущений. Существенно важным для получения правильного решения, является, как следует из [21], физически корректно обоснованное усече-

ние рядов, описывающих скорости $V, \tilde{V}, U, \tilde{U}$ при расчете движения жидкости в поле силы Кориолиса. Члены уравнений движения типа $2\omega i \cos \theta V$ и $2\omega i \cos \theta U$ при подстановке в них рядов

$$V = \sum_{l=1}^L \sum_{n=-l}^l V_{l,n}(\tau) T_{ln}^l,$$

$$U = \sum_{l=1}^L \sum_{n=-l}^l U_{l,n}(\tau) T_{-ln}^l,$$

согласно формуле [4],

$$\frac{V(l+n+1)(l-n+1)(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(l+1)} T_{m,n}^{l+1} + \frac{nm}{l(l+1)} T_{m,n}^l +$$

$$+ \frac{V(l+n)(l-n)(l+m)(l-m)}{l(2l+1)} T_{m,n}^{l-1} = \cos \theta T_{m,n}^l,$$

приводят к появлению функций T_{ln}^{L+1} и T_{-ln}^{L+1} соответственно, которые не учитываются при принятом усечении в рядах для V и U . Для проведения коррекции при усечении рядов необходимо, как следует из [21], разрешить систему спектральных уравнений относительно неизвестных коэффициентов усеченной части спектра.

Разрешив указанные системы относительно $V_{L+1, n}$ и $U_{L+1, n}$ соответственно, для замыкания системы спектральных уравнений движения, при условии усечения спектра учитываемых возмущений, достаточно дополнить спектральные уравнения относительно $V_{L, n}$ и $U_{L, n}$ найденными значениями $V_{L+1, n}$ и $U_{L+1, n}$.

Решение линейной трехдиагональной системы алгебраических уравнений для каждого заданного индекса n может быть проведено с использованием метода непрерывных дробей. Если обозначить

$$\frac{V_{l+1, n}}{V_{l, n}} = N_{l+1, n},$$

то последнее уравнение системы с трехдиагональной матрицей можно записать

$$A_{L, n} \frac{1}{N_{L, n}} + B_{L, n} + C_{L, n} N_{L+1, n} - D_L \Phi_{L, n} V_{L, n}^{-1} = 0$$

или

$$A_{L, n} + B_{L, n} N_{L, n} + C_{L, n} N_{L+1, n} N_{L, n} - D_L \Phi_{L, n} V_{L-1, n}^{-1} = 0.$$

Тогда путем несложных преобразований получим

$$N_{L+1, n} = - \frac{A_{L, n}}{C_{L, n} N_{L, n}} - \frac{B_{L, n} - D_L \Phi_{L, n} V_{L-1, n}^{-1}}{C_{L, n}},$$

где

$$N_{L, n} = - \frac{A_{L-1, n}}{C_{L-1, n} N_{L-1, n}} - \frac{B_{L-1, n} - D_{L-1} \Phi_{L-1, n} V_{L-2, n}^{-1}}{C_{L, n}},$$

$$N_{|n|, n} = - \frac{B_{|n|, n}}{C_{|n|, n}} + \frac{D_{|n|} \Phi_{|n|, n} V_{|n|, n}^{-1}}{C_{|n|, n}}$$

(расчет дробей производится до $l=n$), затем

$$V_{L+1, n} = V_L N_{L+1, n}.$$

Настройка модели на реальные природные условия

Вводимой физико-географической информацией в модель является:

1) функция испаряемости с земной поверхности, которая характеризует способность поверхности к испарению влаги (эта функция задается в координатах τ , θ , φ и представляется набором спектральных амплитуд);

2) распределение материков и океанов, моделируемое функцией $\mu(\theta, \varphi)$ или ее нормированной функцией $\delta(\theta, \varphi)$;

3) функция рельефа дна $H(\theta, \varphi)$ для расчета конфигурации подводных течений в термохалинном океане;

4) градиенты γ_a и γ для настройки модели на реальную температурную стратификацию;

5) поток солнечной радиации на верхнюю границу атмосферы $S_\odot(\theta, \varphi)$;

6) альbedo земной поверхности $\Gamma(\theta, \varphi, \tau)$, задаваемое набором коэффициентов спектра¹;

7) облачность, которая рассчитывается с помощью эмпирически подобранной зависимости полиномиального вида и учитывается в расчетах с помощью коэффициентов K_0 и λ ;

8) осадки, моделируемые с помощью эмпирической зависимости $c(s')$;

9) рельеф земной поверхности, учитываемый в нижнем краевом условии для ω .

В модели единственной поглощающей субстанцией считается водяной пар. Эффект поглощения CO_2 и O_3 не учитывается, так как не выписываются уравнения диффузии CO_2 и O_3 . Но в расчетах эмпирических зависимостей $f_i(s')$ ($i=2, 3$) может быть учтено среднее распределение CO_2 и O_3 , что является одним из средств настройки на реальные природные условия.

В модели принимаются для расчетов потоков излучения уравнения переноса излучения, предложенные Г. И. Марчуком [2], где поток коротковолнового излучения полагается проинтегрированным по спектру; и считается, что могут быть заданы необходимые эффективные параметры. Моделирование процессов в приземном слое в первом приближении производится в простейшем виде, но впоследствии может быть уточнено на основе имеющихся теорий пограничного слоя.

В модели исследуются периодические движения, а все аперiodические эффекты движения интегрально учитываются планетарной вязкостью. Аналогично выходят за пределы учитываемого спектра движения, с периодом, меньшим τ/J , но так как J может быть задана произвольно и ограничивается только мощностью применяемой ЭВМ, то модель позволяет учесть любой спектр временных колебаний в пределах выбранного периода T_0 .

Необходимость поиска периодических решений, а не применение метода установления в решении задачи Коши объясняется трудностью решения задачи Коши совместно для двух разноинерционных систем (атмосфера и океан). Кроме того, периодические решения позволяют исследовать временные колебания, в то время как метод установления дает в результате решения некоторое одно установившееся состояние колебаний и не позволяет исследовать годовой ход колебаний элементов движения.

Решение системы спектральных уравнений

В случае решения периодической задачи в качестве спектральных уравнений будет не система обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью, принятая в работах [6,

¹ Альbedo облаков учитывается коэффициентом λ в уравнении переноса коротковолнового излучения. Поверхность облаков считается абсолютно белой и не учитывается эффект поглощения коротковолновой радиации, т. е. атмосферу предполагаем средой абсолютно прозрачной для коротковолнового излучения со свойством отражения его от поверхности облаков.

19, 20], а система нелинейных алгебраических уравнений того же типа нелинейности и порядка. Достаточно большой порядок системы позволяет применить для ее решения только метод простой итерации и исключает возможность применения более точных методов, типа метода Ньютона или метода наискорейшего спуска.

Оценив порядок коэффициентов спектра в алгебраических спектральных уравнениях, можно построить специальный итерационный, достаточно быстро сходящийся процесс, в котором итерационному приближению подвергаются только относительно малые члены, типа нелинейных членов в уравнениях движения, тогда как равные по абсолютной величине нелинейные и линейные члены в уравнениях притока тепла и диффузии учитываются точным решением линейных алгебраических систем. Структура общей системы спектральных уравнений такова, что позволяет построить итерационный процесс на решении ряда линейных подсистем порядка не более $L(L+2)J$, где L — наибольший верхний индекс суммирования в рядах по обобщенным сферическим функциям $T_{m,n}^l$ аппроксимирующих неизвестные.

Не останавливаясь на способах построения начального приближения и не вдаваясь в громоздкие детали спектральных уравнений, изложим вкратце последовательный ход итерационного процесса при решении системы нелинейных уравнений.

Так как уравнения для океана по своей спектральной структуре имеют много общего с уравнениями для атмосферы, то изложение метода решения приведем применительно к спектральным уравнениям для атмосферы.

Пусть

$$\left. \begin{aligned} \Phi^d &= \sum_{l=0}^L \sum_{n=-l}^l \Phi_{l,n}^d(\tau) T_{0n}^l(\theta, \varphi) \\ V^d &= \sum_{l=1}^L \sum_{n=-l}^l V_{l,n}^d(\tau) T_{1n}^l(\theta, \varphi) \\ U^d &= \sum_{l=1}^L \sum_{n=-l}^l U_{l,n}^d(\tau) T_{-1n}^l(\theta, \varphi) \\ T^d &= \sum_{l=0}^L \sum_{n=-l}^l S_{l,n}^d(\tau) T_{0n}^l(\theta, \varphi) \\ w^d &= \sum_{l=0}^L \sum_{n=-l}^l w_{l,n}^d(\tau) T_{0n}^l(\theta, \varphi) \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

(d — номер уровня по вертикали).

Неизвестные коэффициенты в рядах (37) определяются набором спектральных коэффициентов в рядах типа

$$\Phi_{l,n}^d = \sum_{j=0}^J \check{\Phi}_{l,n}^{d,j} e^{ij\tau}.$$

Полагая ξ равным номеру итерационного приближения, решаем следующие системы линейных алгебраических уравнений [6]:

а) спектральная форма уравнения статики

$$\frac{\Phi_{l,n,\xi}^{d+1,j} - \Phi_{l,n,\xi}^{d-1,j}}{2\Delta p} = -\frac{R}{p^d} S_{l,n,\xi-1}^{d,j} \quad (38)$$

(Δp — шаг по координате p) представляет собой ряд систем порядка D , где $D = \max d$, с двухдиагональной матрицей для каждого элемента спектра с индексами l, n ;

б) спектральные формы уравнений движения

$$\begin{aligned} ijV_{l,n,\xi}^{d,j} - 2\omega i \left[V_{l+1,n,\xi}^{d,j} \frac{V(l+n+1)(l-n+1)(l+2)l}{(2l+3)(l+1)} + \right. \\ \left. + V_{l,n,\xi}^{d,j} \frac{n}{l(l+1)} + V_{l-1,n,\xi}^{d,j} \frac{V(l+n)(l-n)(l+1)(l-1)}{(2l-1)l} \right] = \\ = \frac{Vl(l+1)}{a} \Phi_{l,n,\xi}^{d,j} + \psi_{l,n,\xi-1}^{d,j}; \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} ijU_{l,n,\xi-1}^{d,j} + 2\omega i \left[U_{l+1,n,\xi}^{d,j} \frac{V(l+n+1)(l-n+1)(l+2)l}{(2l+3)(l+1)} - \right. \\ \left. - U_{l,n,\xi}^{d,j} \frac{n}{l(l+1)} + U_{l-1,n,\xi}^{d,j} \frac{V(l+n)(l-n)(l+1)(l-1)}{(2l-1)l} \right] = \\ = \frac{Vl(l+1)}{a} \Phi_{l,n,\xi}^{d,j} + \chi_{l,n,\xi-1}^{d,j}, \end{aligned} \quad (40)$$

где $\psi_{l,n,\xi-1}^{d,j}$ и $\chi_{l,n,\xi-1}^{d,j}$ — спектральные амплитуды нелинейных членов в уравнениях движения совместно с членами, описывающими эффекты турбулентности, рассчитанные по предыдущему приближению. (В системе (39) — (40) значения $\Phi_{l,n,\xi}^{d,j}$ получены из решения систем (38). Коэффициенты $\chi_{l,n}^{d,j}$, $\psi_{l,n}^{d,j}$ на один-два порядка меньше основных членов системы. Системы (39) — (40) разбиваются на $L-2$ линейные подсистемы порядков от 3 до L с трехдиагональной матрицей);

в) спектральная форма уравнения неразрывности

$$\frac{\omega_{l,n,\xi}^{d+1,j} - \omega_{l,n,\xi}^{d-1,j}}{2\Delta p} = -\frac{Vl(l+1)}{2a} (V_{l,n,\xi}^{d,j} + U_{l,n,\xi}^{d,j}) \quad (41)$$

(система (41) может быть решена аналогично системе (38));

г) спектральная форма уравнения притока тепла

$$\begin{aligned}
 & i j S_{l,n,\xi}^{d,j} + \sum_{k=0}^L \sum_{s=-k}^k \sum_{q=1}^L \sum_{l=-q}^q \Theta \left[c(k, q, l; 0, 0, 0) w_{k,s,\xi}^{d,j} \times \right. \\
 & \quad \times \left(\frac{S_{q,l,\xi-1}^{d+1,j} - S_{q,l,\xi-1}^{d-1,j}}{2\Delta p} - \frac{\gamma_a - \gamma}{g p^d} R S_{q,l,\xi}^{d,j} \right) + \\
 & \quad + \frac{V q (q+1)}{2a} c(k, q, l; 1, -1, 0) (V_{k,s,\xi}^{d,j} S_{q,l,\xi}^{d,j} + \\
 & \quad + (-1)^{l-k-q} U_{k,s,\xi}^{d,j} S_{q,l,\xi}^{d,j} \left. \right] = \alpha^d \frac{1}{(\Delta p)^2} \left[\left(\frac{p^{d+1} + p^d}{2} \right)^2 (S_{l,n,\xi-1}^{d,j} - \right. \\
 & \quad - S_{l,n,\xi-1}^{d+1,j}) - \left(\frac{p^{d-1} + p^d}{2} \right)^2 (S_{l,n,\xi-1}^{d-1,j} - S_{l,n,\xi-1}^{d,j}) \left. \right] - \frac{K^d}{a^2} l(l + \\
 & \quad + 1) S_{l,n,\xi}^{d,j} - \frac{g}{c_p} \frac{Q_{l,n,\xi}^{d+1,j} - Q_{l,n,\xi}^{d-1,j}}{2\Delta p} + \frac{L}{c_p} c_{l,n,\xi}^{d,j}. \quad (42)
 \end{aligned}$$

Спектральная форма для уравнения дефицита точки росы аналогична. В системе (42) по предыдущему приближению вычисляются только производные по вертикали первого и второго порядка, что позволяет свести решение системы (42) к линейной системе порядка $L^2 + 2L$, которая может быть разрешена методом дробления матрицы системы на клетки.

Аналогично строятся итерационные формулы для уравнений переноса излучения и уравнений «склейки» решений, которые также допускают последовательные разбиения на подсистемы линейных уравнений для определения соответствующих неизвестных.

При достаточно точном начальном приближении такой процесс решения потребует сравнительно небольшого числа итераций (2—3), причем каждая итерация несет в себе соответствующее уточнение физической части расчета.

Классификация периодических решений

Класс исследуемых колебаний атмосферы и гидросферы ограничивается заданием периода T_0 . Если $T_0 = 1$ год, то циркуляция полагается периодически повторяющейся в течение годовых периодов. Если желательно исследовать многолетние колебания, то период надо соответственно увеличить. Включенные в модель колебания по времени ограничиваются заданием индекса J , и для включения в рассмотрение быстропротекающих процессов (в пределах суточного хода) индекс J должен быть взят достаточно большим; если $T_0 = 1$ год, то $J = 365$. Но для исследования процессов с сезонным ходом, если $T_0 = 1$ год, $J = 5 \div 6$. Выбор $T_0 = 1$ год оправдывается ярко выраженной в природе годовой цикличностью основных черт динамики атмосферы и гидросферы. Тогда естественно внутри периода T_0 изучать только климатические колебания атмосферы и океана, которые повторяются периодически каждый год (расположение основных центров действия атмосферы, направления океанических течений). Задаваемые в модели поля $\Gamma(\theta, \varphi, \tau)$

и $\beta'(\theta, \varphi, \tau)$ могут быть представлены рядами типа

$$\Gamma(\theta, \varphi, \tau) = \sum_{l=0}^L \sum_{n=-l}^l \left(\sum_{j=0}^6 \Gamma_{l,n}^{(j)} e^{ij\tau} \right) T_{ln}^l(\theta, \varphi).$$

Для расчета коэффициентов $\Gamma_{l,n}^j$, разлагая по системе функций T_{ln}^l функции $\Gamma(\tau, \theta, \varphi)$ для различных τ_i из промежутка $(0, 2\pi)$ и принимая $T_0=1$ год, определяем таблично заданные наборы функций $\Gamma_{l,n}(\tau)$. Затем, применяя обычную методику разложения в ряды Фурье, получаем

$$\Gamma_{l,n}^{(j)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Gamma_{l,n}(\tau) e^{-ij\tau} d\tau.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Лоренц Э. Н. Природа и теория общей циркуляции атмосферы. Л., Гидрометеиздат, 1970.
2. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Л., Гидрометеиздат, 1967.
3. Саркисян А. С. Основы теории и расчет океанических течений. Л., Гидрометеиздат, 1966.
4. Гельфанд И. М., Минлос Г. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применение. Физматгиз, 1958.
5. Ефимов В. А. К численному моделированию динамического режима атмосферы в высоких широтах южного полушария. — Труды ГГО, 1970, вып. 256.
6. Ефимов В. А. Спектральная форма уравнений динамики атмосферы для системы обобщенных сферических функций. — Метеорология и гидрология, 1969, № 8.
7. Ефимов В. А. Решение гидродинамических задач на сфере методом разделения переменных. — Труды ГГО, 1968, вып. 197.
8. Блинова Е. Н. Работы по гидродинамическому долгосрочному прогнозу погоды, ведущиеся в СССР. — Труды ММЦ, 1965, вып. 5.
9. Мелешко В. П., Швеиц М. Е. К вопросу о прогнозе дефицита влажности. — Труды ГГО, 1960, вып. 114.
10. Швеиц М. Е. К вопросу о влагообороте в атмосфере. — Труды ГГО, 1952, вып. 33 (95).
11. Кочин Н. Е. Об упрощении уравнений гидромеханики для случая общей циркуляции атмосферы. — Труды ГГО, 1936, вып. 4.
12. Спар Д. Влажно-неадиабатическая модель для изучения циклогенеза с осреднением по вертикали. — Труды Токийского симпозиума по численным методам прогноза погоды. Л., Гидрометеиздат, 1967.
13. Ефимов В. А. Инвариантно-групповой метод в краевых задачах планетарной динамики атмосферы. — Труды ГГО, 1970, вып. 256.
14. Ефимов В. А. Решение нелинейных уравнений динамики атмосферы на сфере. — Метеорология и гидрология, 1968, № 5.
15. Ефимов В. А. Спектральное разложение векторных полей ветра. — Труды ГГО, 1969, вып. 236.
16. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Л., Гидрометеиздат, 1963.
17. Атлас теплового баланса земного шара. Под ред. М. И. Будыко. Москва, 1963.
18. Robert A. The treatment of moisture and precipitation in atmospheric models integrated by the spectral method. — J. Applied Met., 1968, vol. 7, No. 5.
19. Robert A. The integration of a low order spectral form of the primitive meteorological equations. — J. Met. Soc. Japan. Ser. II, 1966, vol. 44, No. 5.
20. Silbermann I. Planetary waves in the atmosphere. — J. Met., 1954, vol. 11.
21. Eliassen E., Machenbauer B., Rasmussen E. On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields. Københavns Universitet, Institut Teoretisk Meteorologi. Report No. 2, Copenhagen, 1970.

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО МОДЕЛИРОВАНИЮ ЦИРКУЛЯЦИОННОГО И ТЕРМИЧЕСКОГО РЕЖИМА ЗИМНЕЙ МЕЗОСФЕРЫ

Атмосфера, простирающаяся на тысячи километров от земной поверхности, очень неоднородна по своему строению и свойствам. Различные слои атмосферы — тропосфера, стратосфера, мезосфера, термосфера — отличаются друг от друга характером общей циркуляции и термическим строением. Одна из основных причин этого различия — особенности пространственного и временного распределения источников и стоков тепла в каждом слое.

Из всех слоев по своему вертикальному термическому строению наиболее близкой к тропосфере является мезосфера. Этот слой расположен на высотах 50—85 км, и его характерной особенностью является падение температуры с высотой. По этой причине мезосферу иногда называют «второй тропосферой».

Но по другим своим свойствам мезосфера резко отличается как от тропосферы, так и от других слоев атмосферы. Прежде всего здесь необычен годовой ход температуры. Верхняя часть мезосферы — мезопауза (80—85 км) — является самым холодным атмосферным слоем. Летом здесь температура понижается до -100 , -130°C . Столь низких температур в земной атмосфере больше нигде нет. А зимой верхняя половина мезосферы теплее, чем летом. Для полярной мезопаузы разности зимних и летних температур достигают 100°C .

По этой причине в зимней мезосфере температура увеличивается от экватора к полюсу, а в летней, наоборот, убывает от экватора к полюсу. Правда, широтный ход летом выражен слабее, чем зимой.

Следующей характерной особенностью термического режима мезосферы является его зависимость от уровня солнечной активности. Так, в период МГГ амплитуда годового хода температуры в полярной мезосфере составляла 70°C , а в период МГСС — только 45°C [4].

Теоретических работ, в которых исследовались бы особенности термического и динамического режима мезосферы, пока очень немного. Одной из первых является работа Келлога [7], в ко-

торой он произвел ориентировочную оценку притока тепла, связанного с рекомбинацией атомарного кислорода в мезосфере и показал, что этот приток может скомпенсировать радиационное выхолаживание мезосферы за счет углекислого газа. В дальнейшем этот результат был подтвержден расчетами рекомбинационной энергии с учетом вертикальных движений воздуха [11], а также эффектов молекулярной и турбулентной диффузии [1].

Попутно следует отметить, что роль атомарного кислорода (в который превращается молекулярный кислород выше 100 км под действием ультрафиолетовой солнечной радиации) весьма велика и в других явлениях и процессах, происходящих в атмосфере.

Атомарный кислород легко вступает в реакцию с метаном, в результате которой образуется водяной пар. Последний, вероятно, является одной из причин образования серебристых облаков, возникающих летом в мезосфере.

Затем можно предположить, что атомарный кислород может взаимодействовать с углеводородными и водородными соединениями не только естественного, но и искусственного происхождения, попадающими в верхние слои атмосферы из тропосферы. Поэтому существует мнение, что он может выполнять роль интенсивного очистителя атмосферы. В настоящее время основным источником загрязнения атмосферы считается топливо. Но во все геологические эпохи существовал более мощный фактор загрязнения атмосферы — вулканы. И если за миллионы лет выброшенные вулканами массы углекислого и сернистого газов, на много порядков превышающие масштабы современного искусственного загрязнения, не сделали атмосферу непригодной для жизни, то это, по-видимому, можно объяснить тем, что значительная часть их была нейтрализована в верхних слоях атмосферы посредством химических реакций с атомарным кислородом.

Некоторые исследователи ответственность за необычный тепловой режим мезосферы и мезопаузы возлагают на углекислый газ. В далекой инфракрасной области спектра молекулы CO_2 имеют интенсивную полосу поглощения (15 мкм), которая, как известно, в спектре собственного излучения атмосферы дает для мезосферы наибольший тепловой эффект. Были произведены многочисленные попытки теоретически рассчитать скорость нагрева и охлаждения атмосферы, определяемую углекислым газом. На кафедре физики атмосферы Ленинградского университета удалось выполнить эти расчеты с достаточной полнотой и точностью [5, 6]. При этом выяснилось, что процессы поглощения и излучения радиации углекислым газом в мезосфере протекают так, что они не могут быть причиной указанных особенностей теплового режима мезосферы.

Другие исследователи считают, что нисходящие движения воздуха над полюсом могут привести к адиабатическому разогреву зимней полярной мезосферы.

Первое полное теоретическое исследование циркуляционного и термического режима мезосферы с помощью уравнений гидро- и

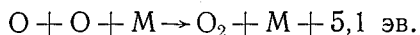
термодинамики было выполнено Лиови [8]. Он получил качественно правильный широтный ход температуры в зимней мезосфере. Но зависимость температуры мезосферы от солнечной активности с помощью схемы Лиови исследовать нельзя. Это можно сделать при помощи схемы, которая учитывает химический приток тепла, обусловленный рекомбинацией атомарного кислорода. Дело в том, что образование атомарного кислорода в полярной ионосфере может быть связано с процессами, вызывающими полярные сияния [1], интенсивность которых, в свою очередь, зависит от уровня солнечной активности.

Численные эксперименты, поставленные нами, имеют целью исследовать основные закономерности термического и циркуляционного режима мезосферы и влияние на него различных притоков тепла. К настоящему времени выполнены численные эксперименты по термическому и циркуляционному режиму зимней мезосферы. Ниже дается подробное изложение этих работ.

Как известно, существенным отличием общего характера физических процессов, происходящих в мезосфере, от характера процессов в стратосфере и тропосфере является тесная связь радиационных и динамических факторов с химическими и фотохимическими. Так, крупномасштабные атмосферные движения, в значительной мере определяемые распределением радиационных притоков тепла, в свою очередь, через температуру влияют на инфракрасное излучение атмосферы, а также с некоторых высот сопровождаются изменениями концентраций химически активных газов как вследствие механического перераспределения по высоте, так и в результате различных химических реакций. Эти изменения в случае экзотермических реакций сопровождаются выделением энергии (рекомбинационной, например).

Резкое повышение температуры в зимний период происходит в условиях отсутствия ультрафиолетового солнечного излучения (полярная ночь) и при наличии чистой радиационной потери тепла слоем, обусловленной термическим излучением углекислого газа (равной, по некоторым оценкам, 10^{-4} вт/г) и озона. Таким образом, факт существования теплой зимней полярной мезопаузы объяснить радиационными причинами невозможно. Следовательно, надо найти источники дополнительной энергии, получаемой этим слоем, которая компенсировала бы радиационное охлаждение и обеспечила бы дополнительное нагревание.

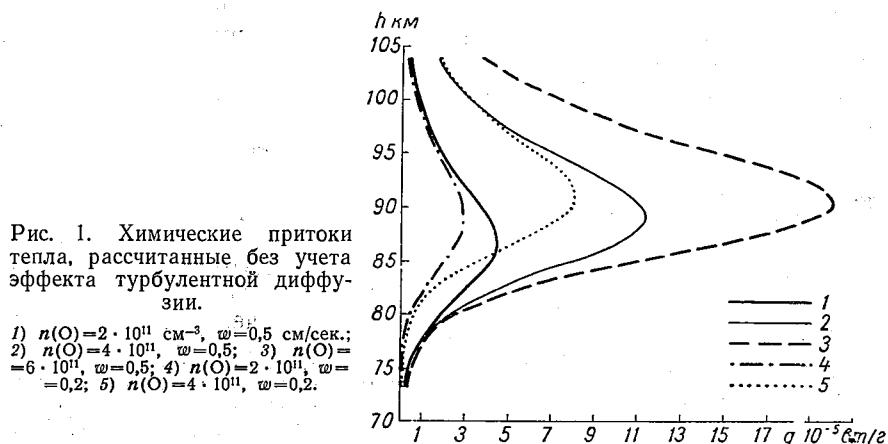
Одним из таких притоков выше 65 км является, как уже упоминалось, так называемый химический приток тепла, связанный с выделением энергии при экзотермической рекомбинации атомарного кислорода в процессе тройного соударения:



Химический приток становится эффективным лишь при наличии в слое нисходящих потоков, которые переносят атомарный кислород, содержащийся на высоких уровнях, в более плотные слои, где с увеличением плотности резко возрастает вероятность тройного

соударения, а следовательно, и величина химического притока тепла [7].

На основе экспериментальных данных об измерениях интенсивности и энергии корпускулярных потоков в полярных сияниях в работе [1] сделано заключение, что воздействие частиц полярных сияний (главным образом электронов) эквивалентно наличию в слое источников ионов определенной интенсивности. Далее показано, что в результате вторичных химических реакций в этом слое образуется атомарный кислород, количество которого зависит от времени прохождения воздушной массы через слой, где корпускулярные потоки теряют основную часть своей энергии. Затем произведен расчет распределения по высоте выделяющейся рекомби-



национной энергии в слое 70—100 км, причем были учтены вертикальные движения воздуха и эффекты молекулярной и турбулентной диффузии. В дальнейшем по полученному в [1] алгоритму была составлена программа расчета распределения по высоте концентрации атомарного кислорода и выделяющейся рекомбинационной энергии. Результаты расчетов представлены на рис. 1 (случай молекулярной диффузии) и рис. 2 (учтен эффект турбулентной диффузии с коэффициентами турбулентности 10^6 и $2 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{сек.}$). При расчетах варьировались следующие параметры: вертикальная скорость опускания воздушной массы w (для кривых на рис. 2 а $w = 0,2 \text{ см/сек.}$, на рис. 2 б $w = 0,5 \text{ см/сек.}$), коэффициент турбулентной диффузии K и концентрация атомарного кислорода $n(\text{O})$ на исходном уровне 105 км. Как видно из рисунков, величины химического притока тепла q_x в зависимости от принятых параметров колеблются от 10^{-5} до 10^{-4} Вт/г , т. е. по порядку величины сравнимы со скоростью радиационного охлаждения слоя и потому должны вносить существенный вклад в его термический и динамический режим.

Поэтому представляет интерес изучить влияние этого мезосферного притока на циркуляцию и термический режим мезосферы. Для

решения этой задачи была рассмотрена двухмерная схема циркуляции в меридиональном разрезе, предложенная Лиови [8].

В этой схеме за основу берется система уравнений динамики атмосферы для осредненных по широтным кругам величин составляющих скорости ветра, температуры и геопотенциала, записанная в логарифмическо-изобарической сферической системе координат и включающая уравнения движения, статики, неразрывности и притока тепла. Радиационный приток тепла в этой схеме складывается из поглощения солнечной радиации O_3 и инфракрасного излучения в 15-мкм полосе CO_2 . Исходная система далее

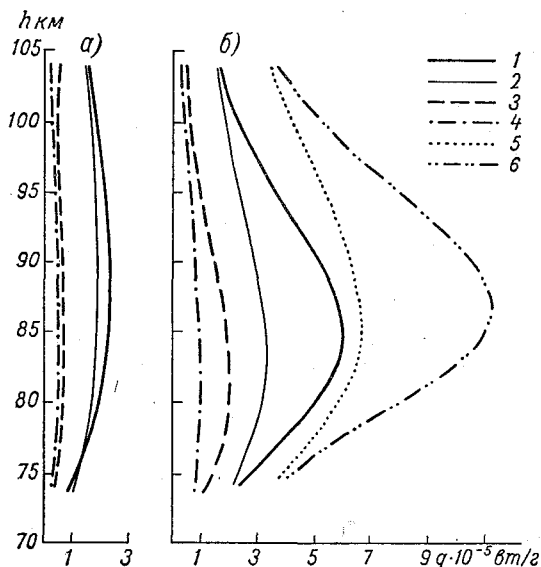


Рис. 2. Химические притоки тепла, рассчитанные с учетом эффекта турбулентной диффузии для $w=0,2$ см/сек. (а) и $w=0,5$ см/сек. (б).

- 1) $n(O)=4 \cdot 10^{11}$ см $^{-3}$, $K=10^6$ см 2 /сек.; 2) $n(O)=4 \cdot 10^{11}$, $K=2 \cdot 10^6$; 3) $n(O)=2 \cdot 10^{11}$, $K=10^6$; 4) $n(O)=2 \cdot 10^{11}$, $K=2 \cdot 10^6$; 5) $n(O)=6 \cdot 10^{11}$, $K=2 \cdot 10^6$; 6) $n(O)=6 \cdot 10^{11}$, $K=10^6$.

упрощается путем ряда преобразований (переход к безразмерным переменным, разложение искомых величин в ряд по степеням малого параметра E , введение функции тока) и сводится к решению линейного дифференциального уравнения 2-го порядка в частных производных с постоянными коэффициентами относительно функции тока [8].

Это уравнение решается с учетом поставленных граничных условий методом представления искомых величин в виде рядов по функциям, специально выбранным таким образом, чтобы можно было произвести разделение переменных. Схема Лиови была реализована на ЭВМ М-220 с некоторыми уточнениями [2].

В работе [2] было произведено полное разложение поля притока тепла в ряд с большим числом гармоник (Лиови аппроксимировал приток тепла только одной гармоникой с эмпирически подобранным коэффициентом), дан вывод формулы для коэффициентов разложения. Произведенные расчеты показали, что полученный ряд быстро сходится. Конфигурация поля притока тепла

передается разложением достаточно хорошо при учете 10 членов ряда. Задача учета в схеме химического притока тепла была решена следующим образом.

Анализ рассчитанных вертикальных профилей химических притоков тепла q_x для разных величин $n(0)$ и k позволил аппроксимировать их линейной функцией высоты и вертикальной скорости:

$$q_x = (a + bZ)w. \quad (1)$$

Здесь w и Z — безразмерные вертикальная скорость и высота, введенные в [8]. Коэффициенты линейной аппроксимации a , b находились из решения системы линейных алгебраических уравнений вида (1) для различных вертикальных профилей q_x . Существенной особенностью введенной аппроксимации является зависимость q_x от вертикальной скорости опускания воздушных масс. Эта зависимость показана на рис. 2 а и 2 б, из которых видно, что при прочих равных условиях увеличение вертикальной скорости (от 0,2 см/сек. для кривых на рис. 2 а до 0,5 см/сек. для кривых на рис. 2 б) ведет к увеличению химического притока тепла.

Запишем систему безразмерных уравнений Лиови [8] с учетом химического притока тепла:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{k_{M^*}}{\sigma}\right)u_1 - v_1 = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial Z} + \left(\frac{1 - Y^2}{Y^2}\right)\frac{\partial T_1}{\partial Y} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial Y} + \frac{\partial w_1}{\partial Z} - w_1 = 0, \quad (4)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \tau} + \sigma^{-1}(k_{T^*} + k_{R^*})\right]T_1 + R_s w_1 + (a + bZ)w_1 = q_1, \quad (5)$$

где Z , Y , τ — безразмерные координаты; u_1 , v_1 , w_1 , T_1 , q_1 — безразмерные зональная, меридиональная и вертикальная составляющие скорости ветра, температура и внешний радиационный приток тепла [8], связанные с координатами φ , $\pi(p) = -H \ln \frac{p}{p_s}$, t и со

средними значениями $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{T}$, $\bar{q}$ исходной системы уравнений движения статики и притока тепла [8] следующими соотношениями:

$$Z = H^{-1}\pi, \quad Y = \sin \varphi, \quad \tau = \sigma t, \quad w = (H\sigma)^{-1}\bar{w},$$

$$u = (2\Omega a)^{-1}(\operatorname{ctg} \varphi)\bar{u}, \quad v = (a\sigma)^{-1}(\operatorname{ctg} \varphi)\bar{v},$$

$$T = (2\Omega a)^{-2}RT^*, \quad T = T_0(\pi) + T^*(\varphi, \pi, t), \quad q = (4\Omega^2 a^2 \sigma c_p)^{-1}Rq_1,$$

$$u = u_1\varepsilon + u_2\varepsilon^2 + \dots, \quad v = v_1\varepsilon + v_2\varepsilon^2 + \dots, \quad w = w_1\varepsilon + w_2\varepsilon^2 + \dots,$$

$$q = q_1\varepsilon, \quad T = T_1\varepsilon + T_2\varepsilon^2 + \dots,$$

$$\varepsilon = \max |q| = R(4\Omega^2 a^2 \sigma c_p)^{-1} \max |q_1|,$$

где q_1 — амплитуда внешнего нагревания; k_{T^*} , k_{M^*} — коэффициенты, характеризующие турбулентную вязкость, k_{R^*} — коэффициент аппроксимации внешнего притока тепла [8]; $R_s = (4\Omega^2 a^2 T_0)^{-1} g H^2 \left(\frac{RT_0}{c_p H} - \frac{dT_0}{d\pi} \right)$ — параметр статистической устойчивости [8]; остальные обозначения — стандартные.

Исходя из системы (2) — (4) выведем уравнение для функции тока с учетом химического притока тепла. Задав экспоненциально вид аналитической зависимости искомых переменных от безразмерного времени τ : $u_1 = u'_1 e^{i\tau}$, $v_1 = v'_1 e^{i\tau}$ и т. д., приходим к следующей системе уравнений:

$$\left(i\ell + \frac{k_{M^*}}{\sigma} \right) u'_1 - v'_1 = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial u'_1}{\partial Z} + \left(\frac{1 - Y^2}{Y^2} \right) \frac{\partial T'_1}{\partial Y} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial v'_1}{\partial Y} + \frac{\partial w'_1}{\partial Z} - w'_1 = 0, \quad (8)$$

$$[i\ell + \sigma^{-1} k_{H^*}] T'_1 + R_s w'_1 + (a + bZ) w'_1 = q'_1. \quad (9)$$

Здесь $k_{H^*} = k_{T^*} + k_{R^*}$.

Вводя функцию тока ψ следующим образом:

$$w'_1 = \frac{\partial \psi}{\partial Y}; \quad v'_1 = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} - \psi \right),$$

получаем систему уравнений для соленоидального движения:

$$\left(i\ell + \frac{k_{M^*}}{\sigma} \right) u'_1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} - \psi \right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial u'_1}{\partial Z} + \left(\frac{1 - Y^2}{Y^2} \right) \frac{\partial T'_1}{\partial Y} = 0, \quad (11)$$

$$(i\ell + \sigma^{-1} k_{H^*}) T'_1 + [R_s + (a + bZ)] \frac{\partial \psi}{\partial Y} = q'_1. \quad (12)$$

Находим u'_1 и T'_1 из уравнений (10) и (12) соответственно:

$$u'_1 = \frac{1}{i\ell + \sigma^{-1} k_{M^*}} \left(\psi - \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right), \quad (13)$$

$$T'_1 = - \frac{[R_s + (a + bZ)]}{i\ell + \sigma^{-1} k_{H^*}} \frac{\partial \psi}{\partial Y} + \frac{1}{i\ell + \sigma^{-1} k_{H^*}} q'_1. \quad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в (11), получаем

$$\frac{1}{il + \sigma^{-1}k_{M*}} \left(\frac{\partial \psi}{\partial Z} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} \right) - \left(\frac{1 - Y^2}{Y^2} \right) \frac{[R_s + (a + bZ)]}{il + \sigma^{-1}k_{H*}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} +$$

$$+ \frac{1}{il + \sigma^{-1}k_{H*}} \frac{\partial q'_1}{\partial Y} \left(\frac{1 - Y^2}{Y^2} \right) = 0. \quad (15)$$

Умножая (15) на $(il + \sigma^{-1}k_{H*})$ и учитывая, что

$$\frac{il + \sigma^{-1}k_{H*}}{il + \sigma^{-1}k_{M*}} = \frac{l^2 - \frac{il}{\sigma} k_{H*} + \frac{il}{\sigma} k_{M*} + \frac{1}{\sigma^2} k_{H*} k_{M*}}{l^2 + \frac{1}{\sigma^2} k_{M*}^2} =$$

$$= \frac{\sigma^2 l^2 - il \sigma k_{H*} + il \sigma k_{M*} + k_{H*} k_{M*}}{\sigma^2 l^2 + k_{M*}^2} =$$

$$= \frac{\frac{\sigma^2 l^2}{k_{H*}} + il \sigma (P - 1) + k_{M*}}{\sigma^2 l^2 + k_{M*}^2} = \frac{1 + \frac{\sigma^2 l^2}{k_{H*} k_{M*}} + \frac{il \sigma}{k_{M*}} (P - 1)}{\left(1 + \frac{\sigma^2 l^2}{k_{M*}^2} \right)},$$

где $P = \frac{k_{M*}}{k_{H*}}$, переписываем (15) в виде

$$P [R_s + (a + bZ)] \left(\frac{1 - Y^2}{Y^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \left[1 + \frac{\sigma^2 l^2}{k_{M*}^2} \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[1 + \frac{\sigma^2 l^2}{k_{H*} k_{M*}} + \frac{il \sigma}{k_{M*}} (P - 1) \right] \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) = \left(\frac{1 - Y^2}{Y^2} \right) \frac{\partial q'_1}{\partial Y}. \quad (16)$$

Учитывая, что для рассматриваемой модели P принимается равным 1, окончательно получаем

$$[R_s + (a + bZ)] \left(\frac{1 - Y^2}{Y^2} \right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} + \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} - \frac{\partial \psi}{\partial Z} \right) =$$

$$= \left(\frac{1 - Y^2}{Y^2} \right) \frac{\partial q'_1}{\partial Y}. \quad (17)$$

Далее, проводя процесс разделения переменных для уравнения (17) аналогично [8], т. е. представляя q'_1 , ψ в виде следующих рядов:

$$q'_1 = \sum_{m=0}^{\infty} S_m(Z) \frac{d\eta_m}{dY},$$

$$\psi = \sum_{m=0}^{\infty} \eta_m(Y) \psi_m(Z),$$

приходим к одномерным уравнениям

$$\frac{1-Y^2}{Y^2} \frac{d\eta_m}{dY^2} = -L_m^2 \eta_m, \quad (18)$$

$$\frac{d^2\psi_m}{dZ^2} - \frac{d\psi_m}{dZ} - L_m^2 P [R_s + (a + bZ)] \psi_m = -L_m^2 P \sin Z. \quad (19)$$

Уравнение (19) отличается от аналогичного уравнения Лиови наличием переменного коэффициента, что значительно усложняет его аналитическое решение. Поэтому это уравнение со следующими краевыми условиями:

$$\psi_m(Z)|_{Z=0} = 0, \quad (20)$$

$$\psi_m(Z)|_{Z=Z_k} = 0 \quad (21)$$

решаем конечно-разностным методом. Условие (20) тривиально, условие (21) требует затухания возмущений, вызываемых введением в модель источников и стоков тепла, на бесконечности; Z_k принимается равным 60, что практически соответствует верхней границе атмосферы.

Конечно-разностный аналог уравнения (19) будет

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} - b_i y_i = f_i, \quad (22)$$

где

$$b(Z) \equiv L_m^2 P [R_s + (a + bZ)],$$

$$f(Z) \equiv -L_m^2 P S_m(Z),$$

$$y \equiv \psi_m(Z).$$

Преобразуем (22) к следующему виду:

$$(2 - h) y_{i+1} - (4 + 2h^2 b_i) y_i + (2 + h) y_{i-1} = 2h^2 f_i. \quad (23)$$

$$(0 \leq i \leq N)$$

Система (23) представляет собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Указанная система решалась для $N=100$, $h=0,6$ методом Гаусса.

Температура определялась из уравнения притока тепла в форме (9):

$$T'_1 = \frac{q'_1 - (R_s + a + bZ) w'_1}{\left(\frac{k_{H*}}{\sigma} + il\right)} =$$

$$= \frac{l}{\frac{k_{H*}^2}{\sigma^2} - l^2} [q'_1 - (R_s + a + bZ) w'_1] \left(\frac{k_{H*}}{\sigma l} - i\right). \quad (24)$$

Обозначив

$$\frac{l}{\frac{k_{H*}^2}{\sigma^2} - l} [q'_1 - (R_s + a + bZ) w'_1] \equiv B,$$

запишем соотношение (24) в виде

$$T'_1 = B \left(\frac{k_{H*}}{\sigma l} - i \right). \quad (25)$$

Переходим от T'_1 к T_1 посредством принятой зависимости искомых функций от времени:

$$\begin{aligned} T_1 &= B \left(\frac{k_{H*}}{\sigma l} - i \right) e^{il\tau} = B \left(\frac{k_{H*}}{\sigma l} - i \right) (\cos l\tau + i \sin l\tau) = \\ &= B \frac{k_{H*}}{\sigma l} \cos l\tau + B \sin l\tau - i \left(B \cos l\tau - B \frac{k_{H*}}{\sigma l} \sin l\tau \right). \end{aligned} \quad (26)$$

Определяем сдвиг температуры по фазе по отношению к v , w и q из следующего уравнения:

$$B \cos l\tau - B \frac{k_{H*}}{\sigma l} \sin l\tau = 0, \quad (27)$$

тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} l\tau &= \left(\frac{k_{H*}}{\sigma l} \right)^{-1}, \\ \tau &= \frac{1}{l} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sigma l}{k_{H*}} \right) \equiv \tau^*. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя (28) в (26), получаем окончательно

$$T_1 = B \frac{k_{H*}}{\sigma l} \cos l\tau^* + B \sin l\tau^*. \quad (29)$$

Изложенный алгоритм расчета циркуляции и термического режима мезосферы реализован на ЭВМ М-220 на языке АЛГОЛ-60. Программа включает в себя:

а) разложение полей радиационных притоков тепла в ряд по функциям

$$\frac{d\eta_m}{dY} \sin \frac{(m+1)\pi Z}{Z_2 - Z_1},$$

алгоритм разложения описан в статье [2], функции $\frac{d\eta_m}{dY}$ были считаны заранее на ЭВМ «Урал-4»;

б) расчет функций ψ_m методом решения трехдиагональных линейных неоднородных алгебраических систем;

в) расчет вертикально-меридиональных разрезов зональной, меридиональной и вертикальной составляющих скорости ветра и температуры с учетом химического притока тепла.

По полученному алгоритму с помощью составленных программ был проведен ряд численных экспериментов по моделированию динамического и термического режима мезосферы.

Были рассчитаны поля составляющих скорости ветра и температуры мезосферы для различных концентраций атомарного кислорода на уровне 105 км, которым соответствуют различные интенсивности химических притоков тепла q_x . Расчеты были выполнены также для случая, когда химический приток тепла отсутствует.

Для этих экспериментов были взяты три возможные значения концентрации атомарного кислорода нижней ионосферы: $4 \cdot 10^{11}$, $6 \cdot 10^{11}$ и $8 \cdot 10^{11}$ см⁻³. В соответствии с формой профиля притоков q_x значения их ниже высот 63—69 км полагались равными нулю; выше притоки аппроксимировались зависимостями вида (1). Численные значения коэффициентов аппроксимации a , b получены по данным графиков q_x , рассчитанных для указанных значений концентрации атомарного кислорода. При этом величина вертикальной скорости нисходящих движений полагалась равной 0,5 см/сек., а коэффициент вертикального турбулентного перемешивания $2 \cdot 10^6$ см²/сек.

Для аппроксимаций профилей q_x , имеющих точку излома в рассматриваемом интервале высот, рассчитывались две пары коэффициентов a , b . Такая двухслойная аппроксимация отражает особенности профиля q_x (рис. 2): рост его с высотой до определенного уровня, а затем убывание.

Разностная схема решения уравнения (19) была проверена для случая $q_x = 0$. Для этого же случая были произведены расчеты (по составленной для этой цели программе) по аналитической схеме решения соответствующего уравнения, предложенного Лиови [8]. Полученные поля скоростей ветра из разностной и аналитической схем решения оказались близкими.

Результаты проведенных численных экспериментов по циркуляционному и термическому режиму мезосферы представлены на рис. 3—7. Рисунок 3 рассчитан для случая $q_x = 0$, а рис. 4—7 для q_x , соответствующих концентрациям атомарного кислорода $4 \cdot 10^{11}$, $6 \cdot 10^{11}$ и $8 \cdot 10^{11}$ см⁻³.

Увеличение концентрации атомарного кислорода $n(O)$ приводит к увеличению всех составляющих скорости ветра в мезосфере, т. е. к росту интенсивности мезосферной циркуляции. Намечается тенденция к опусканию максимума ветра при $q_x > 0$.

Приращения температуры ΔT за счет действия только химического притока тепла имеют максимальные значения в высоких широтах. С ростом $n(O)$ уровень, на котором в высоких широтах отмечаются максимальные ΔT , понижается на несколько километров. Южнее 25° с. ш. химические притоки тепла не действуют на температуру.

Лиови получил для верхней зимней мезосферы температуру над полюсом $T_{90} = 240^\circ \text{ К}$, над экватором $T_0 = 210^\circ \text{ К}$. Мы для различ-

ных величин $n(O)$ получили следующие значения T_{90} и разности температур полюс—экватор ($T_{90}-T_0$):

$n(O)$ см ⁻³	4·10 ¹¹	6·10 ¹¹	8·10 ¹¹
T_{90} К	245	257	310
$T_{90}-T_0$ К	35	47	100

Разности температур ($T_{90}-T_0$) при $q_x > 0$ ближе к наблюдаемым величинам, чем разности ($T_{90}-T_0$) при $q_x = 0$.

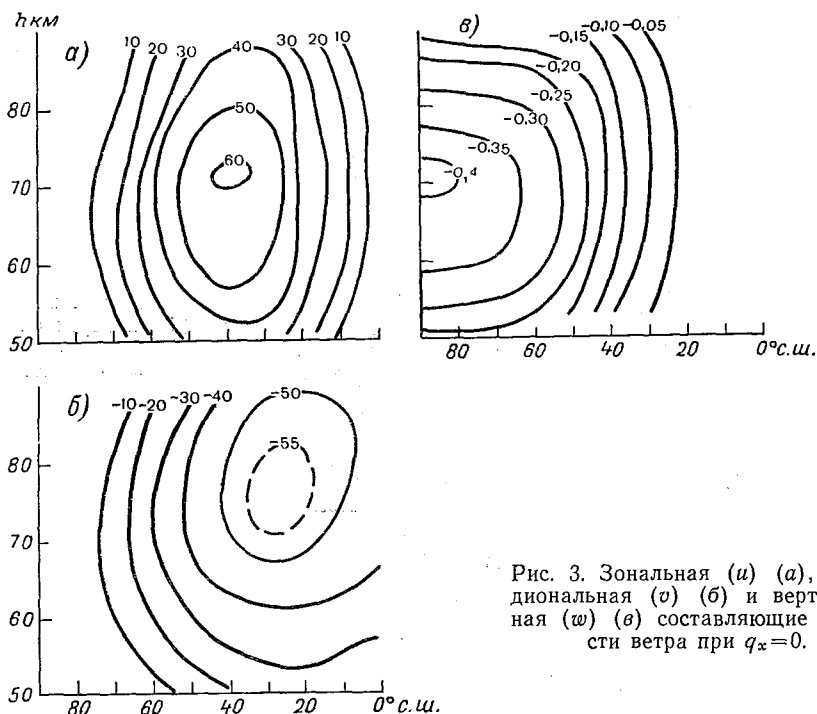


Рис. 3. Зональная (u) (а), меридиональная (v) (б) и вертикальная (w) (в) составляющие скорости ветра при $q_x = 0$.

Летом в полярных широтах мезосферы температуры несколько ниже, чем на экваторе. Поэтому для предварительной оценки величины годовой амплитуды температур в верхней мезосфере над полюсом полученные величины ($T_{90}-T_0$) следует увеличить на 25—30%. Отсюда видно, что в выбранном (на основании измерений интенсивности корпускулярных потоков) диапазоне изменения $n(O)$ могут быть заключены полученные из ракетных наблюдений годовые амплитуды температуры полярной мезосферы для периодов низкой (45°) и высокой (75°) солнечной активности. Это позволяет сделать предварительный вывод о том, что притоки тепла, связанные с рекомбинацией атомарного кислорода, действительно могут быть одной из основных причин особенностей термического режима мезосферы.

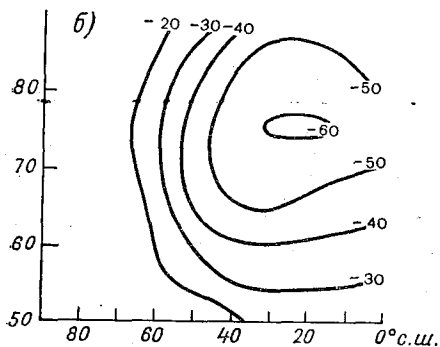
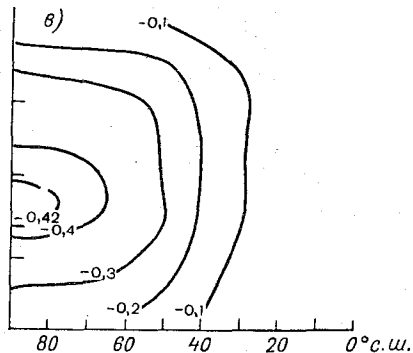
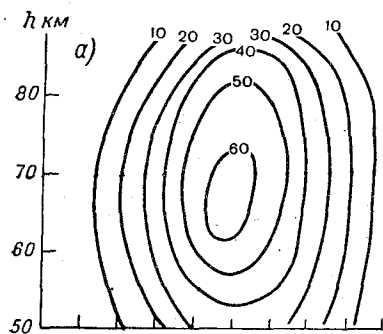


Рис. 4. Зональная (u) (а), меридиональная (v) (б) и вертикальная (w) (в) составляющие скорости ветра для $n(0) = 4 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$.

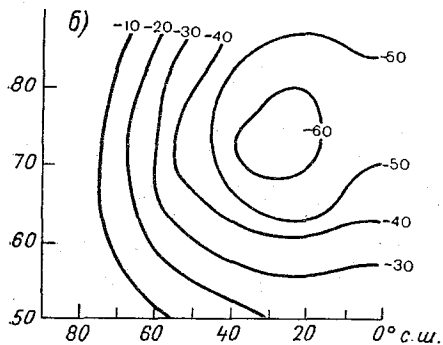
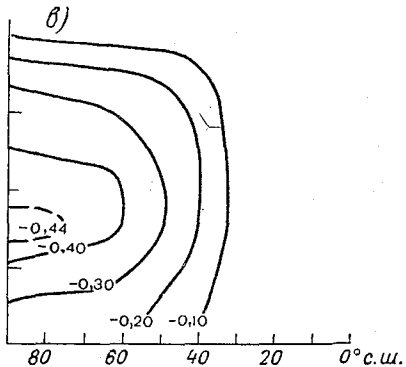
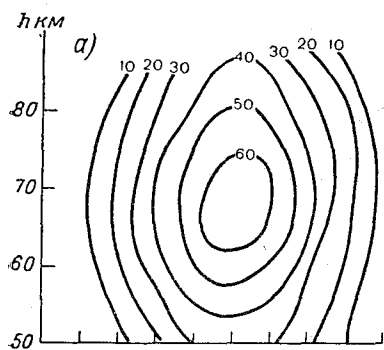
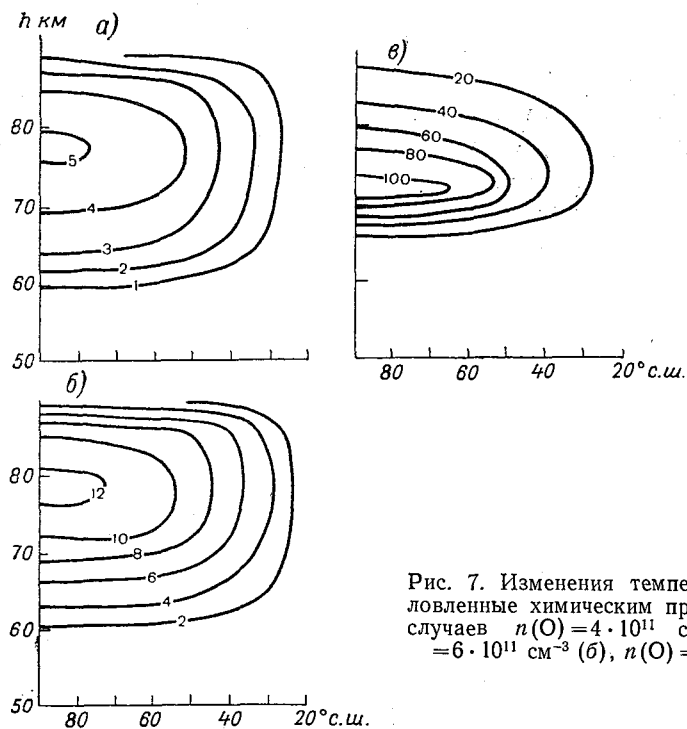
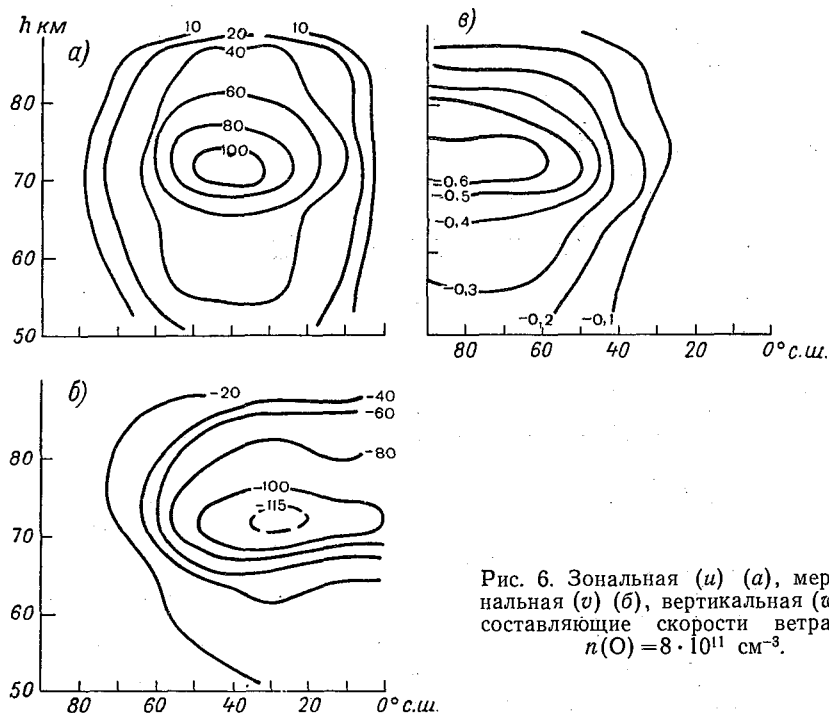


Рис. 5. Зональная (u) (а), меридиональная (v) (б), вертикальная (w) (в) составляющие скорости ветра для $n(0) = 6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-3}$.



Для проверки полученного в настоящей работе вывода о том, что от уровня солнечной активности зависит не только годовая амплитуда температур в полярной мезосфере, но также и разность температур экватор—полюс, пока нет необходимых экспериментальных данных. Но это, безусловно, со временем можно будет сделать.

Результаты сопоставления теоретического предсказания с фактическими данными будут наиболее надежным критерием степени соответствия предлагаемой физической модели циркуляционного и термического режима мезосферы реальным условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бютнер Э. К., Дмитриева Л. К. О распределении атомарного кислорода в зимней полярной мезосфере. Геомagnetизм и аэрономия, 1968, т. VIII, № 4.
2. Ефимова Л. К. Об уточнении одной численной схемы циркуляции в мезосфере. Труды ГГО, 1970, вып. 256.
3. Кац А. Л. Циркуляция в стратосфере и мезосфере. Л., Гидрометеониздат, 1968.
4. Кондратьев К. Я. Конференция по метеорологии стратосферы и мезосферы. — Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 8.
5. Швед Г. М. Тепловой эффект излучения и определяющие его факторы в слое атмосферы от 30 до 100 км. — В кн.: «Проблемы физики атмосферы», № 5, ЛГУ, 1967.
6. Швед Г. М. О тепловом эффекте 15 мкм полосы CO_2 в верхней атмосфере. — В кн.: «Проблемы физики атмосферы», № 3, ЛГУ, 1965.
7. Kellogg W. W. Chenicul heating above the polar mesopause in winter. — J. Met., 1961, vol. 18, No. 13.
8. Leovy C. Simple models of thermally-driven mesospheric circulation. — J. Atm. Sci., 1964, vol. 21, No. 4.
9. Nordberg W. et al. Rocket observations of the structure of the mesosphere. — J. Atm. Sci., 1965, vol. 22, No. 6.
10. Sawada R., Matsushima A. Thermally driven annual atmospheric oscillations as a cause of dynamic heating of the winter polar mesosphere. — J. Met. Soc. Japan, s. II, 1964, vol. 42, No. 2.
11. Young C., Epstein E. S. Atomic oxygen in the polar winter mesosphere. — J. Atm. Sci., 1962, vol. 19, No. 6.

К РАСЧЕТУ ТЕМПЕРАТУРЫ КВАЗИОДНОРОДНОГО СЛОЯ ОКЕАНА

Внимание метеорологов давно привлекает вопрос о предсказании сезонных изменений температуры поверхности океана. Он возникает в задачах теплового баланса, долгосрочных прогнозов, общей циркуляции атмосферы. Следует учитывать, что из-за особенностей перемешивания в поверхностном слое почти одинаковая температура характеризует океан от поверхности до некоторой глубины: возникает так называемый квазиоднородный слой океана (мы будем обозначать его КС). Ниже КС располагается слой резкого падения температуры с глубиной — сезонный термоклин (СТ). На такую двухслойную структуру температурного поля деятельности слоя океана, типичную для масштабов времени порядка месяца, указывает, например, С. А. Китайгородский [2].

Важно отметить различие в режимах турбулентности КС и СТ. Если в КС турбулентность существует в течение всего периода осреднения — такой режим называется сплошной турбулентностью, то в СТ за период осреднения океан может быть и турбулентным и нетурбулентным — такой режим называется перемежающейся турбулентностью. Этот факт особенно подчеркивается в работе А. С. Мониной [6]. Такие экспериментальные положения могут помочь преодолеть одну из основных трудностей построения модели КС — поставить достаточно простые условия на нижней границе слоя. Попытка найти и применить их сделана в настоящей работе.

Для того чтобы проиллюстрировать применяемый метод, рассмотрим наиболее простую задачу. Примем общеупотребительное в океанологии предположение, что эволюция поверхностного слоя за время порядка сезона описывается моделью Экмана для динамики, замыкаемой с помощью стационарного уравнения баланса энергии турбулентности, и уравнением теплопереноса:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = l v, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -l u, \quad (1.2)$$

$$\tau_{xz} = -k \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (1.3)$$

$$\tau_{yz} = -k \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1.5)$$

$$\tau_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} + \tau_{yz} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{g}{\rho} \overline{\rho' w'} + \frac{\partial \overline{b' w'}}{\partial z} = -c \frac{\sqrt{b^3}}{L}, \quad (1.6)$$

$$\overline{\rho' w'} = -\beta_T \overline{T' w'} = -\beta_T q_z, \quad (1.7)$$

$$q_z = -\eta k \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (1.8)$$

$$\overline{b' w'} = -\alpha k \frac{\partial b}{\partial z}, \quad (1.9)$$

$$\rho = \rho_0 - \beta_T T, \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{\partial q_z}{\partial z} - \frac{\partial i}{\partial z}. \quad (1.11)$$

Здесь τ_{xz} , τ_{yz} — касательные напряжения Рейнольдса; $\overline{b' w'}$ — диффузия энергии турбулентности; q_z — турбулентный поток тепла; u , v , w — составляющие скорости течения; l — параметр Кориолиса, равный $2\omega \sin \varphi$; b — энергия турбулентных пульсаций $\frac{1}{3} (\overline{u'^2} +$

$\overline{v'^2} + \overline{w'^2})$; k — коэффициент турбулентного обмена импульсом; L — путь смещения; c — безразмерная функция, определяющая диссипацию турбулентной энергии и обычно принимаемая постоянной в полуэмпирической теории турбулентности [5, 2]; η — отношение коэффициентов турбулентности для тепла и импульса; α — отношение коэффициентов обмена для энергии турбулентности и импульса; T — температура воды; ρ — плотность воды; ρ_0 — некоторая стандартная плотность воды, которая фиксируется при определенной температуре и солености (в нашем случае, когда соленость воды не рассматривается, в нее войдет и влияние солености, и она из постоянной превратится в заданную функцию от солености); i — поток солнечной энергии в океан, отнесенный к ρc_p (c_p — удельная теплоемкость воды).

Мы не приводим здесь обоснования принятой модельной задачи, так как она широко известна. Отметим лишь, что отброшенные в уравнениях (1.1) и (1.2) градиентные члены, с одной стороны, не очень существенны для верхнего слоя океана (см., например, [2]), с другой стороны, вследствие уравнения статики они не войдут в граничные условия (в этом легко убедиться, сделав не-

значительные добавления к дальнейшим рассуждениям); кроме того, эти члены несложно и учесть.

Сосредоточим внимание на изучении КС. Пусть поверхность раздела между КС и СТ описывается уравнением $z=h(t, x, y)$. Следуя В. М. Каменковичу [1], пренебрежем в уравнении (1.11)

членом $w \frac{\partial T}{\partial z}$, поскольку градиент температуры в КС всего лишь порядка 10^{-4} град/см, и будем считать $i|_{z=h}=0$, т. е. все солнечное тепло поглощается к КС. Проинтегрировав уравнения (1.1), (1.2), (1.5), (1.6), (1.11) от поверхности океана до h , получим систему, описывающую тепловой баланс КС:

$$lS_y = \tau_{xh} - \tau_{x0}, \quad (2.1)$$

$$lS_x = \tau_{y0} - \tau_{yh}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} + w_h - u_h \frac{\partial h}{\partial x} - v_h \frac{\partial h}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} & \left(\overline{b'w_h} + \tau_{xh}u_h + \tau_{yh}v_h \right) - \left(\overline{b'w_0} + \tau_{x0}u_0 + \tau_{y0}v_0 \right) + \\ & + \frac{g\beta_T}{\rho h} \int_0^h q_z dz + \int_0^h c_1 \frac{\sqrt{b^3}}{L_1} dz = 0, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$h \frac{\partial T_h}{\partial t} + S_x \frac{\partial T_h}{\partial x} + S_y \frac{\partial T_h}{\partial y} = q_0 + i_0 - q_h \quad (2.5)$$

при обозначениях: $S_x = \int_0^h u dz$, $S_y = \int_0^h v dz$, T_h — температура КС. Заранее договоримся, что все функции с индексом «0» относятся к поверхности океана и считаются известными.

При выводе уравнения (2.3) учитывалось отсутствие в модели градиентов давления, что привело кинематическое условие на поверхности океана к виду $w_0=0$.

Чтобы система (2) позволила получить сведения о температуре КС, нужно найти способ определения τ_{xh} , τ_{yh} , q_h , $\overline{b'w'_h}$ и построить уравнение для h . Используем в качестве дополнительной информации два уже упоминавшихся экспериментальных факта: первый — разрыв производной от температуры воды на h , второй — перемежающийся режим турбулентности в СТ.

Между ними можно предположить и связь. Действительно, постоянное перемешивание вблизи поверхности приводит к квазиизотермии, но если турбулентность начинает перемежаться, то некоторая часть периода осреднения температуры приходится на температуру, формирующуюся вблизи поверхности океана, а остальная часть периода осреднения — на температуру, формирующуюся в глубоких слоях океана. Поэтому общая средняя температура начнет понижаться, как только начнет перемежаться турбулентность, т. е. осредненные профили температуры покажут возникновение СТ.

Дополним эти качественные рассуждения выкладками. Но предварительно выведем полезное следствие из основных определений перемежающейся турбулентности (подробнее эти вопросы можно найти, например, в [7]).

Пусть $a(t, x, y, z)$ — осредняемая функция, A — ее среднее значение. Введем A_T — среднее значение, но такое, которое получилось бы, если бы в течение всего периода осреднения в данной точке поток был турбулентным. Кроме того, введем A_N — тоже среднее, но при условии, что в течение всего периода осреднения поток был нетурбулентным. Условие перемежаемости турбулентного потока позволяет записать соотношение между этими средними в таком виде (см. [7]):

$$A = \gamma A_T + (1 - \gamma) A_N, \quad (3)$$

где $\gamma(t, x, y, z)$ — так называемый коэффициент перемежаемости, т. е. вероятность того, что в точке пространства—времени (t, x, y, z) поток турбулизирован сплошь.

Найдем производную от (3):

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \gamma \frac{\partial A_T}{\partial z} + (1 - \gamma) \frac{\partial A_N}{\partial z} + (A_T - A_N) \frac{\partial \gamma}{\partial z}. \quad (4)$$

При значениях γ , близких к 1 (поток почти все время турбулентен), можно считать, что A_T почти не зависит от характеристик перемежаемости. Но тогда $\frac{\partial A_T}{\partial z}$ совпадает с $\frac{\partial A}{\partial z}$ в зоне сплошной турбулентности. Отсюда следует, что, если выше некоторого уровня h (при $z = h + \varepsilon$) поток сплошь турбулентен, а ниже h (при $z = h - \varepsilon$) турбулентность начинает перемежаться, то производная $\frac{\partial A}{\partial z}$ на h терпит разрыв, который удовлетворяет условию

$$\left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_{h-\varepsilon} - \left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_{h+\varepsilon} = (A_{Nh} - A_{Th}) \frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h, \quad (5)$$

следующему из (4) при $z \rightarrow h$, т. е. $\gamma \rightarrow 1$.

Дальше предположим, что на нижней границе КС терпят разрыв первые производные от всех средних функций, а не только от температуры. Введем оператор скачка на поверхности h по формуле

$$\left[\frac{\partial A}{\partial z} \right] = \left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_{h-\varepsilon} - \left. \frac{\partial A}{\partial z} \right|_{h+\varepsilon}$$

и вспомним, что из кинематических условий согласования на поверхности слабого разрыва (см., например, [4]) следует

$$\left[\frac{\partial A}{\partial s} \right] = - \left[\frac{\partial A}{\partial z} \right] \frac{\partial h}{\partial s}, \quad s := t, x, y. \quad (6)$$

Для того чтобы пояснить дальнейшие выкладки, применим сначала эти соображения к определению потока тепла (1.8), учиты-

вая при этом непрерывность самого потока тепла как средней величины. Тогда

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_1 = \frac{\eta_2 k_2}{\eta_1 k_1} \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_2.$$

Здесь и далее индекс 1 отнесен к области $h - \varepsilon$, а индекс 2 — к $h + \varepsilon$. В соответствии с (5) получим

$$\left[\frac{\partial T}{\partial z} \right] = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_1 - \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_2 = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_2 \left(\frac{\eta_2 k_2}{\eta_1 k_1} - 1 \right) = (T_{Nh} - T_{Th}) \left. \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_h$$

и отсюда

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_2 = \delta T \frac{\left. \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_h}{\frac{\eta_2 k_2}{\eta_1 k_1} - 1}, \quad (7)$$

где введен оператор $\delta T = (T_{Nh} - T_{Th})$ (заметим, что из (3) на h $T_{Th} = T_h$). Поток тепла на h выражается теперь так:

$$q_h = (T_h - T_{Nh}) \frac{\eta_2 k_2 \left. \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_h}{\frac{\eta_2 k_2}{\eta_1 k_1} - 1}. \quad (8.1)$$

По аналогии из (1) получим систему:

$$\tau_{xh} = (u_h - u_{Nh}) \frac{k_2 \left. \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_h}{\frac{k_2}{k_1} - 1}, \quad (8.2)$$

$$\tau_{yh} = (v_h - v_{Nh}) \frac{k_2 \left. \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_h}{\frac{k_2}{k_1} - 1}, \quad (8.3)$$

$$b'w'_h = (b_h - b_{Nh}) \frac{a_2 k_2 \left. \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_h}{\frac{a_2 k_2}{a_1 k_1} - 1}, \quad (8.4)$$

$$\left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right] = 0, \quad (8.5)$$

$$\left[\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right] = 0, \quad (8.6)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial z} \right] \frac{\partial h}{\partial x} + \left[\frac{\partial v}{\partial z} \right] \frac{\partial h}{\partial y} = \left[\frac{\partial w}{\partial z} \right], \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xh}(u_{Nh} - u_h) + \tau_{yh}(v_{Nh} - v_h) + \left[\frac{\partial b'w'}{\partial z} \right] = \\ = - \sqrt{b_h^3} \left[\frac{c}{L} \right] \left. \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_h^{-1}, \end{aligned} \quad (8.8)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial z} \right] \left(w_h - u_h \frac{\partial h}{\partial x} - v_h \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial t} \right) = - \left[\frac{\partial q_z}{\partial z} \right]. \quad (8.9)$$

Система (8), полученная путем применения к (1) оператора скачка, представляет собой динамические условия согласования на поверхности слабого разрыва (см. [4]).

Для преобразования ее в систему граничных условий применим к ней соотношение (5), следующее из предположения о перемежаемости турбулентности в СТ. Тогда

$$\tau_{xh} = (u_h - u_{Nh}) \frac{k_2 \frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h}{\frac{k_2}{k_1} - 1}, \quad (9.1)$$

$$\tau_{yh} = (v_h - v_{Nh}) \frac{k_2 \frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h}{\frac{k_2}{k_1} - 1}, \quad (9.2)$$

$$\overline{b' w_h} = (b_h - b_{Nh}) \frac{\alpha_2 k_2 \frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h}{\frac{\alpha_2 k_2}{\alpha_1 k_1} - 1}, \quad (9.3)$$

$$q_h = (T_h - T_{Nh}) \frac{\eta_2 k_2 \frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h}{\frac{\eta_2 k_2}{\eta_1 k_1} - 1}, \quad (9.4)$$

$$\tau_{xh} = \tau_{Nxh}, \quad (9.5)$$

$$\tau_{yh} = \tau_{Nyh}, \quad (9.6)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xh} (u_{Nh} - u_h) + \tau_{yh} (v_{Nh} - v_h) + \overline{b' w_{Nh}} - \overline{b' w_h} = \\ = - \sqrt{\overline{b_h^3}} \left[\frac{c}{L} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h^{-1}, \end{aligned} \quad (9.7)$$

$$w_h - u_h \frac{\partial h}{\partial x} - v_h \frac{\partial h}{\partial y} = w_{Nh} - u_{Nh} \frac{\partial h}{\partial x} - v_{Nh} \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (9.8)$$

$$w_h - u_h \frac{\partial h}{\partial x} - v_h \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{q_h - q_{Nh}}{T_{Nh} - T_h}. \quad (9.9)$$

Такие граничные условия дают возможность использовать для изучения процессов, происходящих в океане, модели для поверхностного слоя и основной толщи отдельно.

В связи с поставленной задачей введем ряд предположений о процессах в нетурбулентной части СТ, т. е. в основной толще океана. Эти предположения имеют целью максимально упростить задачу, сохраняя лишь ее качественную близость к явлению. Пренебрежем пульсационными потоками субстанций в нетурбулентной части СТ:

$$\tau_{Nxh} = \tau_{Nyh} = q_{Nh} = \overline{b' w_{Nh}} = 0.$$

После чего (9) примет вид:

$$\tau_{xh} = \tau_{yh} = 0; \quad (10.1)$$

$$u_h = u_{Nh}, \quad v_h = v_{Nh}, \quad w_h = w_{Nh}; \quad (10.2)$$

$$q_h = (T_h - T_{Nh}) \frac{\eta_2 k_2 \frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h}{\frac{\eta_2 k_2}{\eta_1 k_1} - 1}; \quad (10.3)$$

$$\overline{b' w_h} = b_h \frac{\alpha_2 k_2 \frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h}{\frac{\alpha_2 k_2}{\alpha_1 k_1} - 1}; \quad (10.4)$$

$$-\overline{b' w_h} = -\sqrt{b_h^3} \left[\frac{c}{L} \right] \frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h^{-1}; \quad (10.5)$$

$$w_h - u_h \frac{\partial h}{\partial x} - v_h \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\eta_2 k_2 \frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h}{\frac{\eta_2 k_2}{\eta_1 k_1} - 1}. \quad (10.6)$$

Последний член правой части (10.6) есть скорость распространения слабого разрыва относительно частиц жидкости. Для приведения выражения этой скорости к более удобному виду обратим внимание на размерность производной от коэффициента перемежаемости $\frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h$, она обратно пропорциональна длине. Если использовать ее в качестве масштаба длин при применении полуэмпирической теории турбулентности, где обычно таким масштабом служит «путь смещения», то можно получить другой вид для искомой скорости распространения слабого разрыва. Так что положим

L_2 равным $-\frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h^{-1}$ (знак минус взят потому, что в выбранной системе координат коэффициент перемежаемости может лишь убывать с глубиной). Естественно, что при этом изменится функция c_2 . Отсюда следует

$$\sqrt{b_h} = \frac{k_2}{L_2} = -k_2 \frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h.$$

Далее из условия непрерывности средних на слабом разрыве имеем

$$[b_h] = 0, \quad [\sqrt{b_h}] = 0, \quad \frac{k_1}{L_1} = \frac{k_2}{L_2}, \quad \frac{L_2}{L_1} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Кроме того, отношение $\frac{\eta_2}{\eta_1}$ всегда меньше 1, так как η_2 берется в устойчиво стратифицированной жидкости, а η_1 — в нейтрально стратифицированной. Произведение двух дробей $\frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{k_2}{k_1}$ (а $\frac{k_2}{k_1}$ тоже правильная дробь и по той же причине) будет меньше каждой из них, будем в дальнейшем пренебрегать им по сравнению с 1. Получим для скорости распространения слабого разрыва

$$\frac{\eta_2 k_2 \frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h}{\frac{\eta_2 k_2}{\eta_1 k_1} - 1} \cong \eta_2 \sqrt{b_h}.$$

Перепишем (10), произведя необходимые преобразования:

$$\tau_{xh} = \tau_{yh} = 0; \quad (11.1)$$

$$u_h = u_{Nh}, \quad v_h = v_{Nh}, \quad w_h = w_{Nh}; \quad (11.2)$$

$$q_h = (T_h - T_{Nh}) \eta_2 \sqrt{b_h}; \quad (11.3)$$

$$\overline{b' w_h} = \sqrt{b_h^3} \frac{a_2}{1 - \frac{a_2}{a_1} \frac{k_2}{k_1}}; \quad (11.4)$$

$$\frac{a_2}{c_2} = \left(\frac{c_1}{c_2} \frac{L_2}{L_1} - 1 \right) \left(\frac{a_2}{a_1} \frac{L_2}{L_1} - 1 \right); \quad (11.5)$$

$$w_h - u_h \frac{\partial h}{\partial x} - v_h \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial h}{\partial t} - \eta_2 \sqrt{b_h}. \quad (11.6)$$

Обратимся к уравнению (11.5), которое представляет собой аналог уравнения баланса энергии турбулентности на поверхности слабого разрыва и позволяет найти связь $\frac{L_2}{L_1}$ с внешними параметрами задачи a_1, a_2, c_1, c_2 . Эта связь выражается в виде решения квадратного уравнения:

$$\left(\frac{L_2}{L_1} \right)_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{c_2}{c_1} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{a_1}{a_2} - \frac{c_2}{c_1} \right)^2 + \frac{a_1}{c_1}}, \quad (12.1)$$

$$\left(\frac{L_2}{L_1} \right)_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{c_2}{c_1} \right) - \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{c_2}{c_1} \right)^2 - \frac{a_1}{c_1} \left(\frac{c_2}{a_2} - 1 \right)}. \quad (12.2)$$

Подкоренное выражение (12.1) получается из (12.2) простым преобразованием.

Чтобы выбрать из двух решений физически приемлемое, воспользуемся тем, что по смыслу должно выполняться неравенство

$0 \leq \frac{L_2}{L_1} \leq 1$. Поскольку, согласно существующим представлениям, $\alpha_1 > c_1$, сразу видно, что (12.1) не удовлетворяет неравенству, тогда как (12.2) может ему удовлетворять, если $c_2 > \alpha_2$. Такая несимметричность для условий, налагаемых на $\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2$, вызвана, по-видимому, принятым различием в определении масштабов длин для областей сплошной и перемещающейся турбулентности.

Еще раз обратим внимание на то, что пока величины $\alpha_1, \alpha_2, c_1, c_2$ считаются параметрами задачи, L_2/L_1 тоже параметр задачи и должен фиксироваться.

Граничные условия (11), (12.2) на границе слоя скачка нужно, строго говоря, сочетать с постановкой задач для пограничного слоя, приводимой в [5]. Но может представить интерес и постановка упрощенной задачи, описывающей интегральные свойства КС. Остановимся на этом вопросе.

Упростим (2.4), воспользовавшись дополнительными предположениями.

1. Считаем, что интегральная диссипация энергии турбулентности пропорциональна продукции энергии турбулентности:

$$\int_0^h c \frac{\sqrt{b^3}}{L} dz = D (\tau_{0x} u_0 + \tau_{0y} v_0 + \overline{b' w_0'}),$$

где D — коэффициент пропорциональности. Это предположение часто используется в теории турбулентного пограничного слоя (см. [5], [2]).

2. Будем заменять скорость течения в КС ее средним по слою значением при интегрировании уравнений по всей толщине КС. Так поступить уместно лишь вследствие малости толщин КС по сравнению с глубиной океана, а также из-за незначительного влияния адвекции тепла на теплосодержание в этом слое.

Проинтегрируем $\int_0^h q_z dz$ по частям, воспользовавшись уравнением (1.11) и вторым предположением:

$$\begin{aligned} \int_0^h q_z dz &= q_z z \Big|_0^h + \int_0^h z \left(\frac{\partial T_h}{\partial t} + u \frac{\partial T_h}{\partial x} + v \frac{\partial T_h}{\partial y} + \frac{\partial i}{\partial z} \right) dz = \\ &= q_h h + \frac{h}{2} \left(h \frac{\partial T_h}{\partial t} + S_x \frac{\partial T_h}{\partial x} + S_y \frac{\partial T_h}{\partial y} \right) + \int_0^h z \frac{\partial i}{\partial z} dz. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (2.5), получаем значение интеграла

$$\int_0^h q_z dz = \frac{h}{2} (q_0 + i_0 + q_h) - \int_0^h i dz.$$

Уравнение (2.4) с упрощениями и граничными условиями из системы (11) станет неполным кубическим (см. [3]):

$$\sqrt{b_h^3} + \sqrt{b_h} \eta_2 a h (T_h - T_{Nh}) + h Q_0 - w_0 = 0,$$

где

$$a = \frac{g \beta_T \left(1 - \frac{\alpha_2 L_2}{\alpha_1 L_1}\right)}{2 \rho_h \alpha_2},$$

$$Q_0 = a (q_0 + i_0),$$

$$w_0 = \frac{\left(1 - \frac{\alpha_2 L_2}{\alpha_1 L_1}\right)}{\alpha_2} \left[(1 - D) (\tau_{0x} u_0 + \tau_{0y} v_0 + \overline{b' w_0'}) + \frac{g \beta_T}{\rho_h} \int_0^h i dz \right].$$

Для того чтобы совсем упростить качественный анализ, вместо вышеприведенного полного уравнения воспользуемся его модификацией, которую легко получить по аналогии, если дополнить наши предположения довольно логичным, хотя и грубым способом: а именно, примем, что диффузия энергии турбулентности мала по сравнению с продукцией турбулентности (см. [5], [2]). В результате приходим к линейному уравнению, которым и дополним систему (2) с граничными условиями (11). Так можно получить весьма приближенную модель теплового баланса КС за тот период, который допускается применимостью системы (1), т. е. примерно за месяц. Выпишем уравнения этой модели:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_{0y}}{l} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{0x}}{l} \right) = \eta_2 \sqrt{b_h}, \quad (13.1)$$

$$\frac{\partial h T_h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{T_h \tau_{0y}}{l} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T_h \tau_{0x}}{l} \right) = q_0 + i_0 + T_{Nh} \eta_2 \sqrt{b_h}, \quad (13.2)$$

$$\sqrt{b_h} = \frac{w_0 - h Q_0}{a h (T_h - T_{Nh})}. \quad (13.3)$$

Простота уравнения (13.3) позволяет наглядно представить себе, как эволюционирует толщина КС. Пусть вначале КС имеет некоторую малую толщину (случай нулевой толщины нельзя рассматривать, так как он требует привлечения модели СТ). Когда ветровое воздействие станет сильнее стабилизирующего влияния потока тепла в атмосферу, т. е. будет $w_0 > h Q_0$, КС начнет углубляться согласно (13.3). Если затем ослабеет ветер или усилится приток солнечного тепла в КС, то $w_0 \leq h Q_0$ и произойдет так называемое «запирание» КС:

$$\sqrt{b_h} = 0, \quad h = \frac{w_0}{Q_0}. \quad (14)$$

В дальнейшем при усилении ветра может опять идти углубление, а при ослаблении ветра запирание наступит на меньшей глубине по (14).

Теперь можно ясно видеть, к чему приводит пренебрежение пульсационными потоками в нетурбулентной части СТ: отбросив, например, в (9.9) q_{Nh} , теряем возможность получить перемену знака скорости распространения поверхности раздела КС и СТ, нарушается единообразие в описании процесса, поскольку не учитывается эрозия СТ. Только дальнейшие эксперименты могут определить правомерность такого упрощения.

Отметим, что уравнение (14) уже использовалось в ряде работ (см. [2]) для расчета толщины КС.

Задача о тепловом режиме КС, сформулированная таким образом, может быть решена либо в упрощенном варианте, при заданном T_{Nh} , либо нужно рассматривать модель для нетурбулентной части СТ. Последнее позволит существенно улучшить граничные условия, особенно для потоков импульса. Другим путем усовершенствования модели является уточнение скачка скорости диссипации $\left[\frac{c}{L}\right]$ на границе КС, анализ связи L_2 с производной от ко-

эффициента перемежаемости $\frac{\partial \gamma}{\partial z} \Big|_h$ и получение значения величины c_2 .

Несмотря на грубые упрощения в ходе изложения, свойства полученной модели, по-видимому, отражают особенности эволюции КС правильно. Видимо, можно думать о целесообразности дальнейшей разработки примененного способа построения граничных условий на слабом разрыве с использованием соображений о перемежающейся турбулентности.

Автор считает своим долгом выразить глубокую признательность профессору М. И. Юдину, руководившему работой над изложенным вопросом, а также кандидатам физико-математических наук Л. В. Руховцу, Р. С. Бортковскому и сотрудницам библиотеки ГГО Е. Л. Андрониковой и Л. П. Постовой за внимание и помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каменкович В. М. Об одной модели для определения температуры поверхности океана. — Океанология, 1969, т. 9, вып. 1.
2. Китаigorodский С. А. Физика взаимодействия атмосферы и океана. Л., Гидрометеоиздат, 1970.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М., «Наука», 1968.
4. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М., Физматгиз, 1963.
5. Лайхтман Л. Д. Физика пограничного слоя атмосферы. Л., Гидрометеоиздат, 1970.
6. Монин А. С. Основные особенности морской турбулентности. — Океанология, 1970, т. 10, вып. 2.
7. Ротта И. К. Турбулентный пограничный слой в несжимаемой жидкости. Л., «Судостроение», 1967.
8. Филлипс О. М. Динамика поверхностного слоя океана. М., «Мир», 1969.

РАСЧЕТ ПОТОКОВ КОРОТКОВОЛНОВОЙ РАДИАЦИИ В ОБЛАЧНЫХ УСЛОВИЯХ

Разработка приближенного метода расчета потоков коротковолновой радиации представляет собой практически важную задачу. Формулы для расчета яркости нижней границы облака, полученные на основании решения уравнения переноса [1], слишком сложны для того, чтобы можно было использовать их в задачах моделирования общей циркуляции атмосферы. Поэтому представляется рациональной предложенная С. Манабе и Р. Стриклером [2] идея введения приближенной функции пропускания для облака

$$T_{\text{обл}} = 1 - (\alpha + \beta), \quad (1)$$

учитывающей отражение от верхней границы облака и поглощение внутри облака. Здесь α — альбеда облака, β — коэффициент поглощения облака.

Величины α и β в общем случае являются функциями длины волны, а также функциями оптической толщины облака $\tau_{\text{обл}}$ [1].

Если известен поток суммарной радиации, приходящей на верхнюю границу облака Q_h^∞ , то на нижней границе облака поток равен

$$Q_i = Q_h^\infty [1 - (\alpha + \beta)]. \quad (2)$$

На рис. 1 представлена схема потоков при наличии облака. Здесь ΔH — толщина облака, Δh — расстояние от верхней границы облака до некоторого уровня внутри облака. Буквами k и i обозначаются верхняя и нижняя границы облаков соответственно. Поток суммарной радиации на некотором уровне под облаком обозначен Q_z^i , поток суммарной радиации, достигший земной поверхности, Q_s^i , поток отраженной от облака радиации на некотором уровне z над облаком $R_{\infty, h}^z$.

Потоки суммарной радиации, приходящей на верхнюю границу облака в области спектра 0,29—0,7 мкм и в области 0,7—5 мкм, рассчитываются по формулам, приведенным в [3]. Учитывая эти

формулы для потока на нижней границе облака $z=z_i$ в области 0,29—0,7 мкм, имеем

$$Q_i = \int_{0,29}^{0,7} I_0(\lambda) B^*(\lambda) e^{-k_\lambda \omega_i^\infty \sec \theta} [1 - (\alpha + \beta)] d\lambda, \quad (3)$$

где

$$B^* = \frac{2R \cos \theta}{4 + (3 - z_i)(1 - A) \tau_k^\infty}, \quad (4)$$

$$R = 1 + \frac{3}{2} \cos \theta + (1 - \frac{3}{2} \cos \theta) e^{-\tau_k^\infty \sec \theta}, \quad (5)$$

$$\tau_k^\infty = \tau_{0,p}(\lambda) e^{-0,125z} + \tau_{0,a} e^{-0,898z}, \quad (6)$$

k_λ — коэффициент поглощения озоном, ω_i^∞ — содержание озона от верхней границы атмосферы до нижней границы облака, θ — зенитное расстояние солнца.

На нижней границе облака мы имеем, таким образом, интегральное значение потока суммарной радиации.

Чтобы рассчитать ослабление этой величины слоем воздуха, под облаком следует ввести некоторую интегральную функцию $T(\Delta\omega_z^i, \lambda)$. Если известна спектральная функция пропускания озона, функция T может быть рассчитана по формуле

$$T(\Delta\omega_z^i, \lambda) = \frac{1}{I_0 \Delta\lambda |_{0,29-0,7}} \sum_{n=1}^{14} \left[e^{-k_{\lambda_n} \omega_i^\infty \sec \theta} - e^{-k_{\lambda_n} (\omega_i^\infty \sec \theta + 1,66 \Delta\omega_z^i)} \right] I_0(\lambda) \Delta\lambda_n. \quad (7)$$

Тогда ослабление потока ΔQ_z^i на пути от нижней границы облака до уровня z будет вычисляться по формуле

$$\Delta Q_z^i = Q_i T(\Delta\omega_z^i), \quad (8)$$

а поток на уровне z рассчитывается по формуле

$$Q_z = Q_i - \Delta Q_z^i. \quad (9)$$

Для участка спектра 0,7—5 мкм поток на нижней границе облака вычисляется по формуле (2), где

$$Q_k = \int_{0,7}^5 I_0(\lambda) B_k^*(\lambda) T_{H_2O}(X_k^\infty, \lambda) T_{CO_2}(X_k^\infty, \lambda) d\lambda. \quad (10)$$

Функции пропускания для H_2O и CO_2 — $T_{H_2O}(X_k^\infty, \lambda)$ и $T_{CO_2}(X_k^\infty, \lambda)$ — рассчитываются по формулам из работы [4]:

$$T_{H_2O} = 1 - \frac{X_{H_2O}}{a_{H_2O} X_{H_2O} + b_{H_2O}}, \quad (11)$$

$$T_{CO_2} = 1 - \frac{X_{CO_2}}{a_{CO_2} X_{CO_2} + b_{CO_2}}. \quad (12)$$

Здесь $X_{\text{H}_2\text{O}}$, X_{CO_2} — эффективные поглощающие массы [5]. Таблица коэффициентов $a_{\text{H}_2\text{O}}$, $b_{\text{H}_2\text{O}}$, a_{CO_2} , b_{CO_2} дана в работе [4].

Поток радиации на некотором уровне z под облаком рассчитывается по формуле

$$Q_z^i = Q_i T_{\text{H}_2\text{O}}(\Delta X_z^i) T_{\text{CO}_2}(\Delta X_z^i). \quad (13)$$

Функции пропускания $T_{\text{H}_2\text{O}}(\Delta X_z^i)$ и $T_{\text{CO}_2}(\Delta X_z^i)$ должны описывать ослабление вышедшей из облака радиации добавочной поглощающей массой ΔX на пути от z_i до z .

Будем определять произведение $T_{\text{H}_2\text{O}}(\Delta X) T_{\text{CO}_2}(\Delta X)$ по формуле

$$\begin{aligned} & T_{\text{H}_2\text{O}}(\Delta X_z^i, \lambda) T_{\text{CO}_2}(\Delta X_z^i, \lambda) = \\ & = \frac{1}{I_0 \Delta \lambda \big|_{0,7-5}} \sum_{n=1}^{24} T_{\text{H}_2\text{O}}(\Delta X_z^i, \lambda_n) T_{\text{CO}_2}(\Delta X_z^i, \lambda_n) I_0 \Delta \lambda_n, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$T_{\text{H}_2\text{O}}(\Delta X_z^i, \lambda) T_{\text{CO}_2}(\Delta X_z^i, \lambda) = (1 - \Delta A_{\text{H}_2\text{O}})(1 - \Delta A_{\text{CO}_2}),$$

$\Delta A_{\text{H}_2\text{O}}$ — приращение спектральной функции поглощения водяным паром, ΔA_{CO_2} — приращение спектральной функции поглощения углекислым газом.

Величины $\Delta A_{\text{H}_2\text{O}}$ и ΔA_{CO_2} должны вычисляться с учетом пути, пройденного потоком от верхней границы атмосферы до данного уровня, ввиду существования эффекта Форбса. Поэтому эти функции рассчитываются в виде разностей:

$$\Delta A_{\text{H}_2\text{O}} = T_{\text{H}_2\text{O}}(X_i^\infty, \lambda) - T_{\text{H}_2\text{O}}((X_i^\infty + 1,66\Delta X_z^i), \lambda), \quad (15)$$

$$\Delta A_{\text{CO}_2} = T_{\text{CO}_2}(X_i^\infty, \lambda) - T_{\text{CO}_2}((X_i^\infty + 1,66\Delta X_z^i), \lambda), \quad (16)$$

где X_i^∞ — эффективная поглощающая масса на пути от верхней границы атмосферы до нижней границы облака, $(X_i^\infty + 1,66\Delta X_z^i)$ — эффективная поглощающая масса на пути от верхней границы атмосферы до уровня z . Слагаемое $1,66\Delta X_z^i$ соответствует пути, пройденному диффузной радиацией после выхода из облака.

Таким образом, расчет потока радиации под облаком производился по формуле (9) с использованием выражений (3)—(8) для участка 0,29—0,7 мкм и выражений (10)—(16) для участка 0,7—5 мкм.

Вычисление эффективных поглощающих масс производится по формулам, изложенным в работе [5].

Поток радиации, вышедший из облака и отраженный от земли, обозначим $R_{i,s}^z$ (см. рис. 1). Здесь индекс i означает уровень, откуда приходит радиация, s указывает на то, что отражение происходит от земли, а верхний индекс z означает уровень, на который

приходит отраженная радиация. Расчет потока $R_{i,s}^z$ основан на учете ослабления потока на пути от нижней границы облака до земли и от земли до данного уровня z .

В формуле (8), относящейся к участку спектра 0,29—0,7 мкм, функция ослабления $T(\Delta\omega_z^i)$ заменяется функцией $T(\Delta\omega_{i,s}^z)$, которая имеет следующий вид:

$$T(\Delta\omega_{i,s}^z) = \frac{1}{I_0 \Delta\lambda|_{0,29-0,7}} \sum_{n=1}^{14} \left\{ e^{-k_{\lambda_n} \omega_i^\infty \sec \theta} - e^{-k_{\lambda_n} (\omega_i^\infty \sec \theta + 1,66 \Delta\omega_s^i + 1,66 \Delta\omega_s^z)} \right\}. \quad (17)$$

Величина $\Delta\omega_{i,s}^z$ представляет собой массу озона на пути от нижней границы облака до земной поверхности и от земной поверхности до соответствующего уровня z . Тогда величина ослабления озоном $\Delta R_{i,s}^z$ выражается в виде

$$\Delta R_{i,s}^z = Q_i T(\Delta\omega_{i,s}^z). \quad (18)$$

Поток отраженной радиации получим в виде

$$R_{i,s}^z = r(Q_i - \Delta R_{i,s}^z). \quad (19)$$

Подставляя (18) в (19), имеем

$$R_{i,s}^z = rQ_i [1 - T(\Delta\omega_{i,s}^z)], \quad (20)$$

где r — альбеда отражающей поверхности.

Для участка спектра 0,7—5 мкм поток отраженной радиации рассчитывается по формуле (19) при значении Q_i , относящемся к данному интервалу. Выражение для функции $\Delta R_{i,s}^z$ представляется в виде

$$\Delta R_{i,s}^z = Q_i T(\Delta X_s^i + \Delta X_s^z), \quad (21)$$

где

$$T(\Delta X_s^i + \Delta X_s^z) = \frac{1}{I_0 \Delta\lambda|_{0,7-5}} \sum_{n=1}^{24} T_{H_2O}((\Delta X_s^i + \Delta X_s^z), \lambda_n) \times \\ \times T_{CO_2}((\Delta X_s^i + \Delta X_s^z), \lambda_n) I_0(\lambda_n) \Delta\lambda_n. \quad (22)$$

$$T_{H_2O}((\Delta X_s^i + \Delta X_s^z), \lambda_n) = T_{H_2O}(X_k^\infty, \lambda_n) - \\ - T_{H_2O}[(X_k^\infty + 1,66(\Delta X_s^i + \Delta X_s^z)), \lambda_n], \quad (23)$$

$$T_{CO_2}((\Delta X_s^i + \Delta X_s^z), \lambda_n) = T_{CO_2}(X_k^\infty, \lambda_n) - \\ - T[(X_k^\infty + 1,66(\Delta X_s^i + \Delta X_s^z)), \lambda_n]. \quad (24)$$

Функции T_{H_2O} и T_{CO_2} рассчитываются по формулам (11) и (12) по величине эффективных поглощающих масс.

Выражение для потока отраженной радиации в участке спектра 0,7—5 мкм получим, подставляя (21) в (19):

$$R_{i,s}^z = rQ_i [1 - T(\Delta X_s^i + \Delta X_s^z)]. \quad (25)$$

Расчет потока радиации, отраженной от верхней границы облака, $R_{\infty,k}^z$ может быть произведен по формулам из работы [2] с учетом альбедо облака. Индекс ∞ означает, что отражается поток, пришедший с верхней границы атмосферы, индекс k означает, что отражение произошло от верхней границы облака, индекс z соответствует в этом случае уровню, расположенному над облаком.

При вычислении потоков нисходящей радиации $F_{1,z}$ на уровне, расположенные ниже облака, в условиях переменной облачности используется выражение, аналогичное рассмотренному в работе [6]:

$$F_{1,z} = Q_z^\infty (1 - c) + Q_z^i c, \quad (26)$$

где Q_z^∞ — поток суммарной радиации в безоблачной части небосвода, c — балл облачности, Q_z^∞ рассчитывается по формулам, приведенным в [2], Q_z^i — по формулам (9) и (13).

Поток восходящей радиации $F_{2,z}$ на уровень z , расположенный под облаком, рассчитывается по формуле

$$F_{2,z} = R_s^z = R_{\infty,s}^z (1 - c) + R_{i,s}^z c, \quad z_i \geq z \geq 0. \quad (27)$$

Поток $F_{2,z}$ на уровень, расположенный над облаком, выражается в виде

$$F_{2,z} = R_{\infty,s}^z (1 - c) + R_{\infty,k}^z c, \quad z > z_k, \quad (28)$$

где $R_{\infty,s}^z$ — поток отраженной от земли радиации на уровень z в безоблачной части небосвода.

Функция R_k^z означает поток, отраженный от верхней границы облака, имеющей индекс k , на уровень z над облаком.

Эффективный поток коротковолновой радиации F при наличии облачности рассчитывается как

$$F = F_2 - F_1; \quad (29)$$

индекс z здесь опущен. Приток радиации к слою, обозначаемый через ΔF , вычисляется как разность эффективных потоков на двух уровнях.

В схеме используется предположение о том, что: 1) вся радиация, вышедшая из облака, является рассеянной; 2) радиация, отраженная от Земли и дошедшая до нижней границы облака, полностью отражается назад, не проникая внутрь облака.

Для уровней, расположенных внутри облака, суммарная радиация рассчитывается с помощью линейной интерполяции по значениям на границах.

Формулы (10)–(16), (22), (24) могут быть упрощены, если положить в них $T_{\text{CO}_2} = 1$ и $\Delta A_{\text{CO}_2} = 0$, имея в виду малость поглощения коротковолновой радиации углекислым газом.

Полученные формулы были использованы для выяснения влияния параметров, характеризующих облачность (c , ΔH , α , β), на величину потоков и притоков над облаком и под облаком. На рис. 2 представлена зависимость притока коротковолновой радиации в слое под облаком от коэффициента поглощения облака β при различных высотах расположения облака, при переменной и сплошной облачности. При заданных альбедо ($r = 0,48$), высотах облаков и количестве облаков эта зависимость оказывается слабой (в пределах 20%) при переменной облачности и более сильной (в пределах 50%) для сплошной облачности. Однако эти оценки следует считать весьма приближенными из-за малости самой величины притока под облаком.

Величины потока под облаком и притока к облачному слою, вычисленные в данной работе, близки к величинам, полученным другими авторами (например, [1]). Радиационные характеристики облаков α и β связаны с оптической толщиной облака τ .

Представляет интерес проследить зависимость притока радиации в подоблачном слое от оптической толщины облака. На рис. 3 эта зависимость представлена для различных высот расположения облака и баллов облачности $c = 0,5$ и $c = 1$. Приток в подоблачном

слое уменьшается с увеличением оптической толщины облака. С увеличением закрытости небосвода уменьшается приток к слою между уровнем, соответствующим нижней границе облака, и подстилающей поверхностью. На рис. 4 для иллюстрации представлены графики потоков суммарной и отраженной радиации над облаком, в облаке и под облаком при альбедо облака, равном 0,6, и альбедо земли 0,21. На рис. 5 а (средний ярус) и 5 б (верхний ярус) представлена схема притоков коротковолновой радиации в безоблачных условиях и при наличии однослойной облачности. Из рисунков видно, что облачность вносит изменения в распределение притока радиации к атмосфере по вертикали. При этом увеличивается приток к надоблачному слою. Большое поглощение приходится

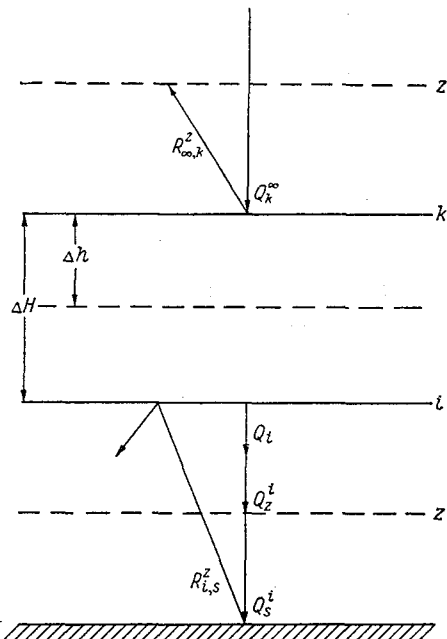


Рис. 1. Схема потоков коротковолновой радиации при наличии облака.

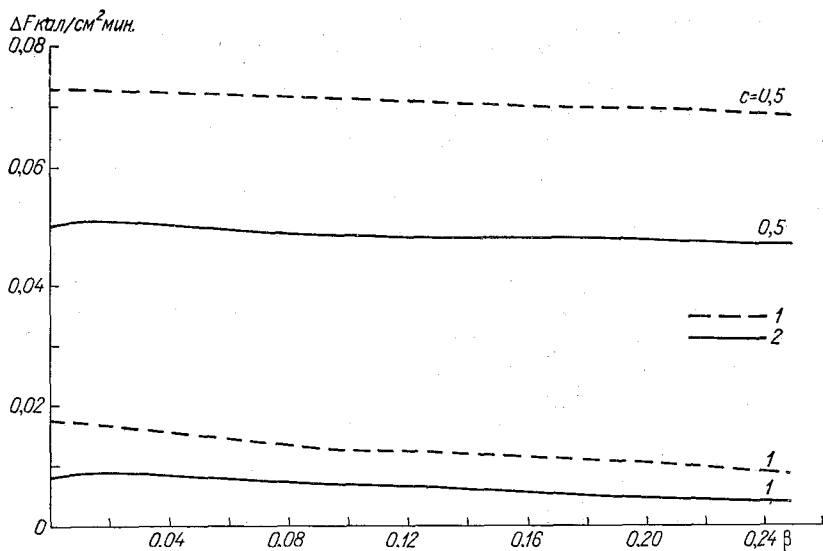


Рис. 2. Зависимость притока коротковолновой радиации в слое под облаком от коэффициента поглощения β .

1 — верхняя граница 300 мб, нижняя 400 мб; 2 — верхняя граница 635 мб, нижняя 720 мб.

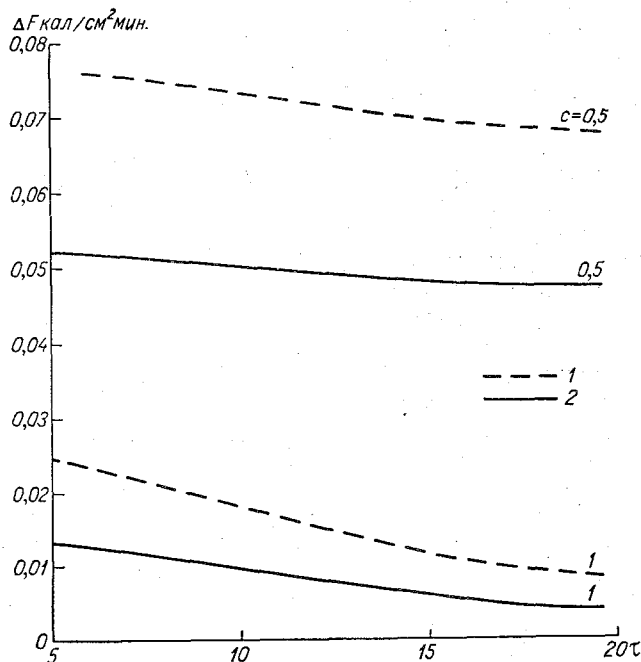


Рис. 3. Зависимость притока радиации в подоблачном слое от оптической толщины облака τ .

1 — верхняя граница 300 мб, нижняя 400 мб; 2 — верхняя граница 635 мб, нижняя 720 мб.

Рис. 4. Потoki суммарной и отраженной радиации при наличии облака среднего яруса ($\alpha=0,6$).

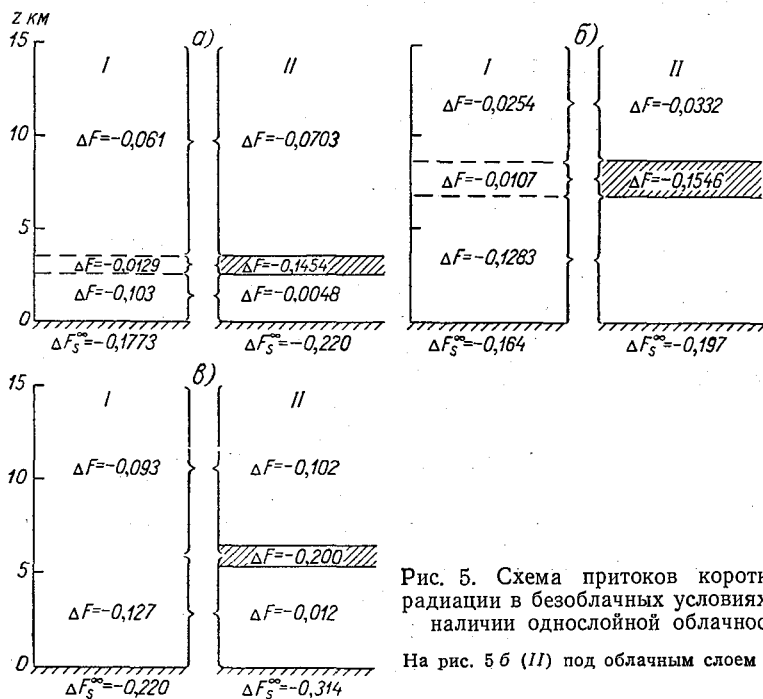
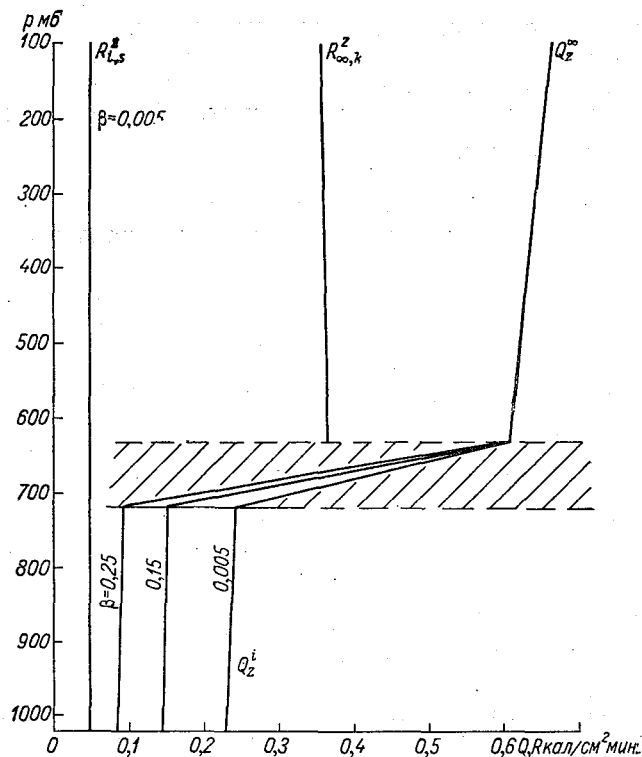


Рис. 5. Схема притоков коротковолновой радиации в безоблачных условиях (I) и при наличии однослойной облачности (II).

На рис. 5 б (II) под облачным слоем $\Delta F = -0,0088$.

на само облако. Для сравнения на рис. 5 в приводим схему из работы [7], которая качественно подтверждает результаты, представленные на рис. 5. Приток коротковолновой радиации ко всей толще атмосферы в облачных условиях, обозначенный на рисунке ΔF_s^∞ , увеличивается.

Из рис. 5 следует, что увеличение притока ко всей толще атмосферы при сплошной облачности находится в пределах 20%. Зависимость от высоты расположения облака почти не проявляется.

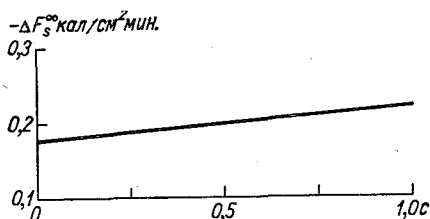


Рис. 6. Зависимость притока радиации ко всей толще атмосферы от балла облачности среднего яруса.

Таблица 1

Ярус	Граница облаков	$\frac{\Delta F_{обл}}{\Delta F_{безобл}} \%$
Средний	В. Г. 635 мб Н. Г. 720 мб	24
Верхний	В. Г. 300 мб Н. Г. 400 мб	20

В табл. 1 представлено отношение притока ко всей толще атмосферы в облачных условиях $\Delta F_{обл}$ к притоку в безоблачных условиях $\Delta F_{безобл}$.

На рис. 6 представлен график притока коротковолновой радиации ко всей толще атмосферы в зависимости от балла облачности при переходе от безоблачных условий к облачным для облаков среднего яруса.

Формулы и результаты, полученные в данной статье, могут быть использованы в качестве основы для построения схемы расчета потоков в условиях трехслойной облачности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фейгельсон Е. М. Радиационные процессы в слоистообразных облаках. Л., Гидрометеиздат, 1965.
2. Манабе С., Стриклер Р. Термическое равновесие в атмосфере с учетом конвекции. — В кн.: «Теория климата». Л., Гидрометеиздат, 1967.
3. Дмитриева-Арраго Л. Р. [и др.]. О схеме расчета потоков коротковолновой радиации в атмосфере. — Метеорология и гидрология, 1970, № 8.
4. Шифрин К. С., Авасте О. А. Потоки коротковолновой радиации в безоблачной атмосфере. — В кн.: «Исследования по физике атмосферы», № 2, Тарту, 1960.
5. Дмитриева-Арраго Л. Р., Самойлова Л. В. К расчету поля коротковолновой радиации в схеме общей циркуляции атмосферы. — Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1970, т. 6, № 1.
6. Дмитриева-Арраго Л. Р. Расчет потоков и притоков длинноволновой радиации в облачных условиях. — Труды ГГО, 1968, вып. 197.
7. Korb G. and Möller F. Theoretical Investigation on Energy Gain by Absorption of Solar Radiation in Clouds. Final Technical Report. Contract No DA-91-591-EUC-1612, Ludwig-Maximilians-Universität. Meteorologisches Institut, München, Germany, 1962, pp. 185.

ОБ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЕ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

Для численного решения задачи прогноза погоды большое значение имеет выбор устойчивых разностных схем, аппроксимирующих с достаточной степенью точности исходные дифференциальные уравнения.

Одним из вариантов таких схем являются схемы, полученные по методу расщепления, разработанные для метеорологических задач Г. И. Марчуком [1]. К настоящему времени, как у нас, так и за рубежом, опубликовано несколько работ [2, 3 и др.], в которых для численного решения задачи прогноза погоды используется метод расщепления. Как известно, в этом методе на первом этапе для решения задачи переноса метеорологических элементов используется схема «предиктор-корректор», а на втором этапе, когда решается задача адаптации метеорологических полей, используется схема «естественного фильтра».

При решении задачи прогноза погоды на сфере, покрытой квазиравномерной шестиугольной сеткой (подробно о сетке см. работу [4]), для реализации схемы предиктор-корректор мы должны в каждом узле сетки ввести некоторую локально-геодезическую систему координат. Но, как оказалось, в этой системе координат смешанные производные по горизонтальным переменным являются некоммутативными. Поэтому в настоящей работе мы рассмотрим метод расщепления, но уже в виде комбинации схемы типа схемы Адамса—Бэшфорта и схемы естественного фильтра.

1. Вопросы аппроксимации и устойчивости

Для получения некоторой конкретной информации об аппроксимации и устойчивости разностной схемы, так же как и в работе [1], рассмотрим простейшую баротропную модель атмосферы и

соответствующую ей систему уравнений запишем сразу в матричной форме:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} + A \bar{\varphi} = 0, \\ \bar{\varphi}(t=0) = \bar{\varphi}^0, \quad (1)$$

где

$$\bar{\varphi} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi = \frac{p'}{p}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -l & RT \frac{\partial}{\partial x} \\ l & 0 & RT \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \\ RT = \text{const.}$$

В соответствии с методом расщепления задача (1) разбивается на две:

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} + A \bar{\varphi} = 0. \quad (3)$$

Используя для аппроксимации производных по x и y центральные разности, для производных по t схему типа схемы Адамса—Бэшфорда и естественного фильтра, получим в точке (k, l) два разностных уравнения, соответствующих уравнениям (3):

$$\bar{\varphi}_{k,l}^* = \bar{\varphi}_{k,l}^n - \frac{3\tau}{2} B \bar{\varphi}_{k,l}^n + \frac{\tau}{2} B \bar{\varphi}_{k,l}^{n-1}, \\ \bar{\varphi}_{k,l}^{n+1} = \bar{\varphi}_{k,l}^* - \tau A^h \bar{\varphi}_{k,l}^{n+1}, \quad (4)$$

где

$$\nabla_k \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_{k+1,l} - \bar{\varphi}_{k-1,l}, \\ \nabla_l \bar{\varphi} = \bar{\varphi}_{k,l+1} - \bar{\varphi}_{k,l-1}, \\ B = \frac{u}{2\Delta x} \nabla_k + \frac{v}{2\Delta y} \nabla_l, \quad A^h = \begin{pmatrix} 0 & -l & RT \frac{\nabla_k}{2\Delta x} \\ l & 0 & RT \frac{\nabla_l}{2\Delta y} \\ \frac{\nabla_k}{2\Delta x} & \frac{\nabla_l}{2\Delta y} & 0 \end{pmatrix},$$

τ — шаг по времени.

Общее разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение (1), имеет вид

$$\bar{\varphi}_{k,l}^{n+1} = \bar{\varphi}_{k,l}^n - \frac{3\tau}{2} B \bar{\varphi}_{k,l}^n + \frac{\tau}{2} B \bar{\varphi}_{k,l}^{n-1} - \tau A^h \bar{\varphi}_{k,l}^{n+1}. \quad (5)$$

Теперь с помощью разложения в ряд Тейлора, предполагая необходимую гладкость функции $\bar{\varphi}$, нетрудно показать, что ошибка аппроксимации ε имеет вид

$$\varepsilon = -\frac{\tau}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\bar{\varphi}}{dt} \right)^{n+1} + O(\tau^2, h^2),$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y},$$

h — шаг сетки.

Таким образом, схема (5) имеет второй порядок точности по переменным x и y и первый порядок по переменной t . Для исследования устойчивости схемы (5), когда коэффициенты u, v, l являются константами, решение уравнения (5) будем искать в виде отдельной гармоники

$$\bar{\varphi}_{k,l} = \Phi_{k,l}(t) e^{2\pi i \left(\frac{k \Delta x}{L_1} + \frac{l \Delta y}{L_2} \right)},$$

полагая, что начальное поле $\bar{\varphi}_{k,l}^0$ представимо в виде

$$\bar{\varphi}_{k,l}^0 = \Phi_{k,l}^0 e^{2\pi i \left(\frac{k \Delta x}{L_1} + \frac{l \Delta y}{L_2} \right)},$$

где L_1 и L_2 — длины волн по x и по y .

Однако известно [1], что матрица A^h имеет различные собственные числа

$$\mu_1 = 0; \quad \mu_{2,3} = \pm i\lambda_{2,3} = \pm i \sqrt{\beta^2 + RT \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\Delta x^2} + \frac{\sin^2 \beta}{\Delta y^2} \right)},$$

где

$$\alpha = \frac{2\pi \Delta x}{L_1}, \quad \beta = \frac{2\pi \Delta y}{L_2},$$

поэтому систему соответствующих собственных векторов, которую обозначим через $\mathbf{V}_m$, можно взять в качестве базиса [5]. И окончательно решение уравнения (5) будем искать в виде

$$\bar{\varphi}_{k,l}^n = \sum_{m=1}^3 \varepsilon_m^n \mathbf{V}_m e^{i(k\alpha + l\beta)}. \quad (6)$$

Теперь, учитывая линейную независимость векторов $\mathbf{V}_m$, для коэффициентов ε_m получим следующее уравнение:

$$(1 + \tau\lambda_m i) \varepsilon_m^2 - (1 - 3ai) \varepsilon_m - ai = 0, \quad (7)$$

где

$$a = \frac{\tau}{2} \left(\frac{u}{\Delta x} \sin \alpha + \frac{v}{\Delta y} \sin \beta \right),$$

и в случае, если $u=v$, $\Delta x=\Delta y$, $L_1=L_2$,

$$a = \frac{\tau u}{\Delta x} \sin \alpha,$$

откуда для $\tau=3600$ сек., $u=10$ м/сек., $\Delta x=3,6 \cdot 10^5$ м имеем

$$\max a = 0,1.$$

Из уравнения (7) найдем

$$\varepsilon_m^{1,2} = \frac{1 - 3ai \pm \sqrt{(1 - 3ai)^2 + 4ai(1 + \tau i \lambda_m)}}{2(1 + \tau i \lambda_m)}.$$

Умножая числитель и знаменатель полученного выражения на $(1 - \tau i \lambda_m)$ и полагая, что

$$\sqrt{(1 - 9a^2 - 4a\tau\lambda_m) - 2ai} = c - id,$$

нетрудно показать, что

$$|\varepsilon_m^{1,2}| = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{(1 \pm c)^2 + (3a \pm d)^2}{1 + \tau^2 \lambda_m^2}}, \quad (8)$$

где

$$c^2 - d^2 = 1 - 9a^2 - 4a\tau\lambda_m, \quad cd = a,$$

$$c^2 = \frac{1}{2} [(1 - 9a^2 - 4a\tau\lambda_m) + \sqrt{(1 - 9a^2 - 4a\tau\lambda_m)^2 + 4a^2}].$$

Проверим, что дает метеорологическая составляющая ($\lambda_1=0$). В этом случае, учитывая, что $\max a=0,1$, можно показать, что

$$c \approx 1 - 4a^2, \quad d \approx a,$$

$$\max |\varepsilon_1^{1,2}| \approx 1 + 2a^4 \approx 1 + 2 \cdot 10^{-4}.$$

Если же $\lambda_m \neq 0$, то расчеты показывают, что при $2T=500$, $R=287$, $L_1=4\Delta x$, $\sin \alpha=1$, $\Delta x=360 \cdot 10^3$, $\lambda = \pm 1,053 \cdot 10^{-3}$, $\tau=1$ час имеем:

$$I \quad u=10, \quad |\varepsilon|=0,2 \quad (\lambda > 0), \quad |\varepsilon|=0,33 \quad (\lambda < 0);$$

$$II \quad u=20, \quad |\varepsilon|=0,265 \quad (\lambda > 0), \quad |\varepsilon|=0,605 \quad (\lambda < 0);$$

$$III \quad u=50, \quad |\varepsilon|=0,595 \quad (\lambda > 0), \quad |\varepsilon|=0,965 \quad (\lambda < 0).$$

Таким образом, схема (5) дает некоторый рост метеорологической составляющей и фильтрует остальные волны. Интересно отметить, что в работе [4] при решении нелинейного баротропного уравнения вихря при счете на 8 суток с шагом 1 час наблюдался весьма незначительный рост квадрата среднего вихря, обусловленный, как это видно, слабой неустойчивостью схемы Адамса—Бэша-форта.

2. Численный эксперимент

Для исследования аппроксимации и устойчивости в нелинейном случае был проведен следующий численный эксперимент.

На сфере, покрытой квазиравномерной шестиугольной сеткой, решалась с часовым шагом сроком на 5 суток следующая модельная задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + lv + \mathbf{V} \operatorname{grad} u &= F, \\ \mathbf{V} &= \{u, v\}, \quad v = l\kappa u, \\ u &= A \cos B\theta \sin \beta (\lambda - \alpha t), \end{aligned} \quad (9)$$

где F — точное значение левой части уравнения в любой момент времени t ; l — параметр Кориолиса.

Для аппроксимации нелинейной части уравнения (9) по вре-

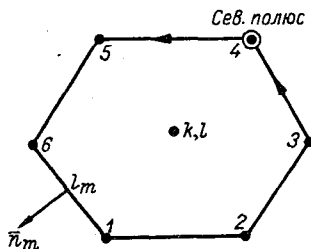


Рис. 1.

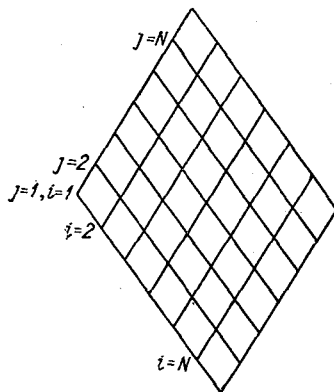


Рис. 2.

мени на первом шаге использовалась явная схема Эйлера, на следующих шагах — схема типа схемы (5):

$$u_{k,l}^{n+1} = \frac{1}{1 + (\tau l)^2} \left[u_{k,l}^n - \frac{\tau}{2} (3B_n^h - B_{n-1}^h) + \tau F^{n+1/2} \right], \quad (10)$$

где

$$B_n^h = (u \operatorname{grad}_\lambda u + v \operatorname{grad}_\theta u)_n^h.$$

Для аппроксимации выражений $\operatorname{grad}_{\lambda, \theta} u$ и использовались формулы второго порядка точности [6]:

$$\begin{aligned} (\operatorname{grad}_{\lambda, \theta} \varphi)_{k,l}^h &= \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} \operatorname{grad}_{\lambda, \theta} \varphi d\sigma \approx \frac{1}{\sigma} \sum_m \int_{l_m} (\varphi n_{\lambda, \theta}) dl_m \approx \\ &\approx \frac{1}{2\sigma} \sum_m (\varphi_{m+1} + \varphi_m) l_m \cdot n_{\lambda, \theta}^m, \end{aligned} \quad (11)$$

где σ — площадь, l_m — звенья контура шестиугольной ячейки, $n_{\lambda, \theta}^m$ — составляющие единичного вектора внешней нормали к линии l_m (рис. 1). При этом значения u на полюсах не считаются, но

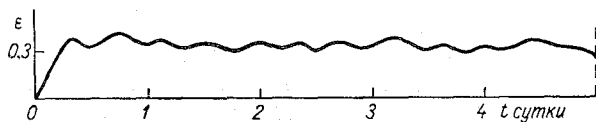


Рис. 3. Изменение ошибки ε с течением времени для

$$A=10, B=\beta=6, N=15, \varepsilon = \frac{1}{N} \sqrt{\sum (u - u^h)^2}.$$

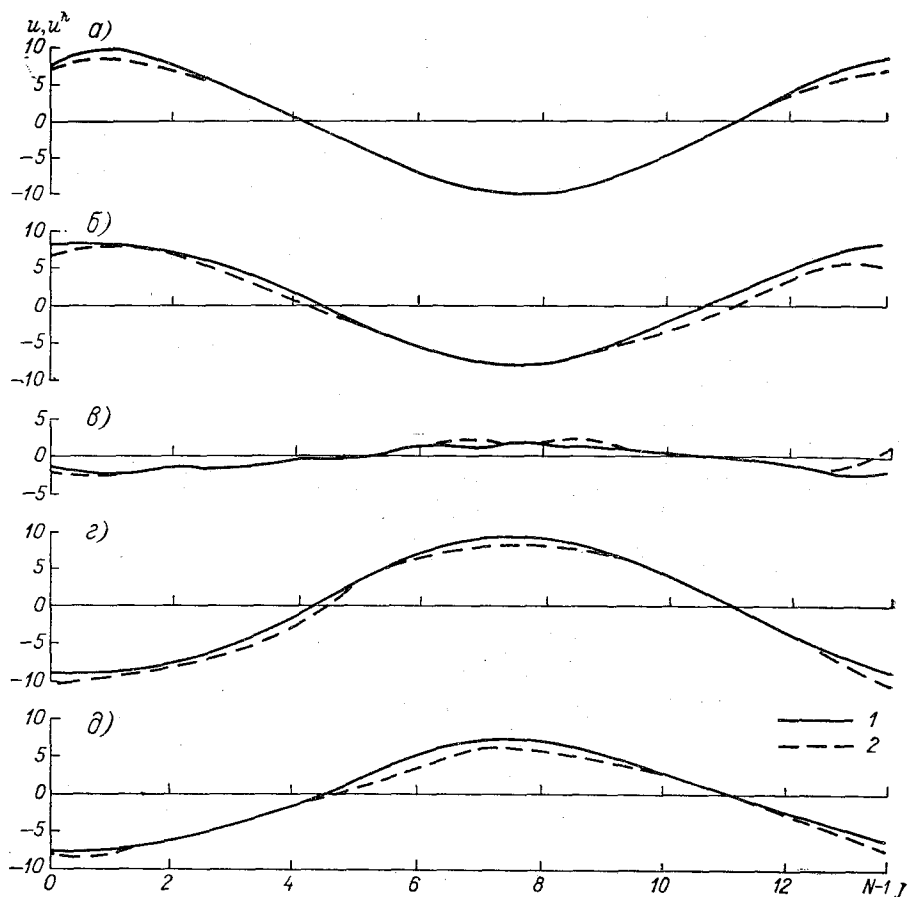


Рис. 4. Сопоставление точного (u) и разностного (u^h) решений для $A=10$, $B=\beta=6$, $\alpha=10^{-5}$.

α — 24 часа, б — 48 час., в — 72 часа, г — 96 час., д — 120 час.; 1 — u , 2 — u^h .

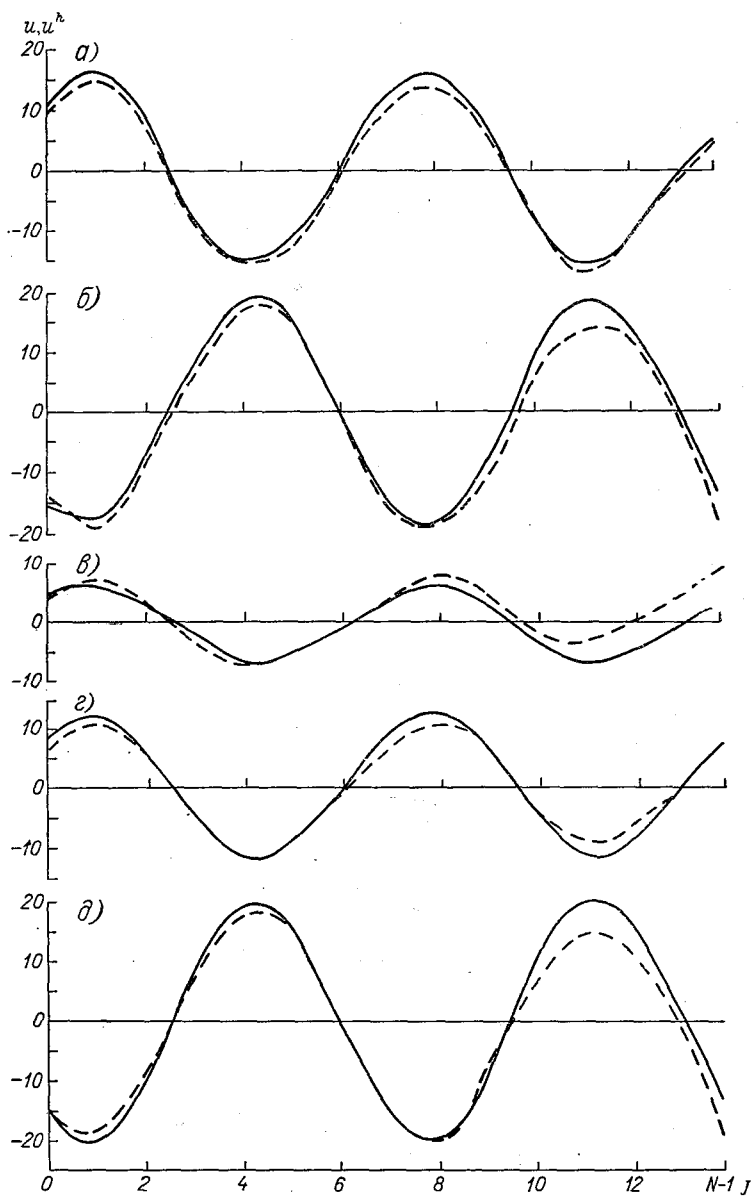


Рис. 5. Сопоставление точного (u) и разностного (u^h) решений для $A=20$, $B=\beta=12$, $\alpha=10^{-5}$.

Усл. обозн. см. рис. 4.

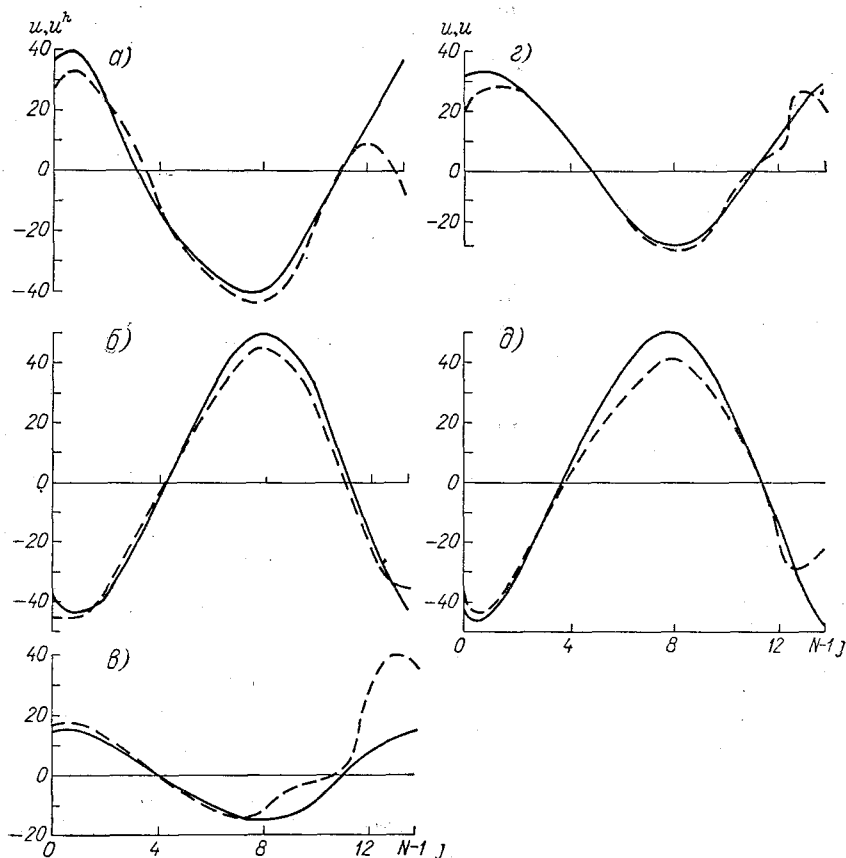


Рис. 6. Сопоставление точного (u) и разностного (u^h) решений для $A=50$, $B=6$, $\beta=12$, $\alpha=10^{-5}$.

Усл. обозн. см. рис. 4.

в околополюсной точке (k, l) , если точка 4 — полюс, при счете оператора $(\text{grad}_{\lambda, \theta} u)_{k, l}^h$ полагаем, что

$$\begin{aligned} &\text{для линии } 3 \rightarrow 4 \quad u_4 = u_3; \\ &\text{для линии } 4 \rightarrow 5 \quad u_4 = u_5. \end{aligned} \quad (12)$$

Всю сферу покрывают десять сферических ромбов. И в каждом таком ромбе (рис. 2) для проверки аппроксимации схемы (10) полученное разностное решение сравнивалось с точным, а по поведению ошибки

$$\varepsilon = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{N^2} (u - u^h)^2},$$

где N^2 — число узлов в ромбе, в которых решалась задача (10), (у нас $N=15$), проверялась устойчивость схемы.

На рис. 3 приводится изменение ошибки ε с течением времени для первого ромба, на рис. 4—6 — сопоставление точного и разностного решений с течением времени для первой граничной линии ($i=1$) первого ромба при различных значениях A , B , β .

Отметим, что при $A=50$ результаты счета на первые и третьи сутки в точках, расположенных около полюса, показывают расхождение между точным и разностным решениями. Это, очевидно, объясняется тем, что граничные условия (12) в этом случае дают плохую аппроксимацию. Во внутренних точках ромба, например для линии $i=6$, таких расхождений нет.

Проведенный численный эксперимент показал, что схема (10) устойчива и дает вполне удовлетворительную аппроксимацию аналитического решения для всех точек, кроме близких к полюсу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Л., Гидрометеониздат, 1967.
2. Дымников В. П., Контарев Г. Р. Некоторые эксперименты со схемой численного прогноза погоды. — В кн.: «Численные методы решения задач прогноза погоды и общей циркуляции атмосферы». Новосибирск, 1970.
3. Каленкович Е. Е., Пененко В. В. Численная схема прогноза полей метеоэлементов для Северного полушария. В кн.: «Численные методы решения задач прогноза погоды и общей циркуляции атмосферы». Новосибирск, 1970.
4. Садурни Р., Аракава А., Минц Е. Интегрирование бездивергентного баротропного уравнения вихря на сфере с помощью двадцатигранно-шестиугольной сетки. — В кн.: «Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана». Л., Гидрометеониздат, 1968.
5. Фаддеев Д. К. и Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.
6. Ким В. Ф. Об одной постановке и численной схеме решения задачи прогноза погоды на сфере. — В кн.: «Численные методы решения задач прогноза погоды и общей циркуляции атмосферы». Новосибирск, 1970.

О ВЫБОРЕ НАЧАЛЬНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ

Численное решение некоторых задач гидродинамического прогноза и общей циркуляции атмосферы сводится к решению на каждом шаге по времени краевой задачи для эллиптического уравнения и переходу от шага к шагу с помощью той или иной аппроксимационной формулы. К такой процедуре сводится, например, численное интегрирование уравнений вихря скорости в квазигеострофическом или квазисоленоидальном приближениях.

Для решения краевой задачи часто применяются итерационные методы. При этом возникает проблема выбора начального приближения. В качестве последнего можно использовать, например, нулевые значения или поле норм искомой функции. Однако в ряде случаев лучшие результаты могут быть достигнуты, если на всех шагах по времени, кроме первого, использовать в качестве начального приближения решение, найденное на предыдущем шаге. Этот способ по сравнению с первым приводит, как правило, к существенному уменьшению количества итераций на каждом шаге по времени и тем самым к сокращению времени счета. Поэтому этот способ получил довольно широкое применение в практике численного прогноза погоды. Однако, как показали эксперименты, о которых речь пойдет ниже, более эффективный способ выбора начального приближения состоит в линейной экстраполяции решений, найденных на двух предыдущих шагах по времени. Именно, пусть x^k , x^{k-1} — решения, полученные для двух последовательных моментов времени k и $k-1$ соответственно. Тогда в качестве начального приближения для момента времени $k+1$ примем

$$x_0^{k+1} = 2x^k - x^{k-1}. \quad (1)$$

В обычно применяемом способе выбора начального приближения, в котором используется лишь решение, полученное на предыдущем шаге, имеем

$$x_0^{k+1} = x^k. \quad (2)$$

Так как в экспериментах, описанных ниже, варьировались коэффициенты при x^k и x^{k-1} , то для удобства дальнейших обозначений запишем более общую формулу нахождения начального приближения в виде

$$x_0^{k+1} = Ax^k + Bx^{k-1}. \quad (3)$$

При $A=2$, $B=-1$ имеем (1), при $A=1$, $B=0$ имеем (2).

По-видимому, впервые способ нахождения начального приближения с помощью (1) был предложен в краткой заметке [1]. Од-

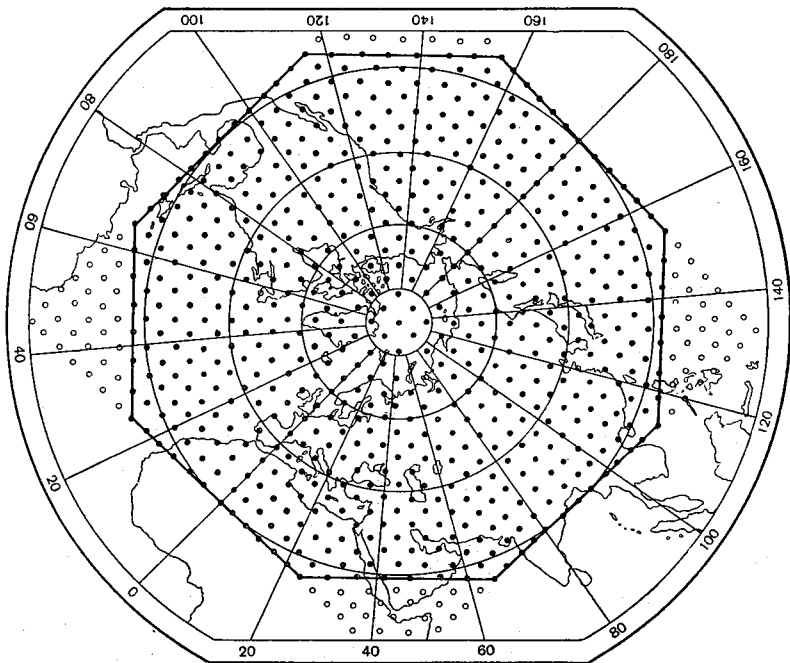


Рис. 1. Сетка, используемая в численных экспериментах.

нако в замечаниях к этой заметке, опубликованных в том же номере журнала, выражалось сомнение в эффективности предложенного способа.

Мы провели ряд численных экспериментов, в которых были сопоставлены различные способы нахождения начального приближения.

Для проведения численных экспериментов на карте стереографической полярной проекции с главным масштабом по широте 60° была выбрана квадратная сетка, образующая восьмиугольник (рис. 1). Если дополнить сетку фиктивными узлами (изображенными на рис. 1 в виде кружков), получим квадрат, содержащий $27 \times 27 = 729$ узлов, из которых 112 узлов фиктивных. Таким образом, сетка содержит 617 узлов. При масштабе карты 1 : 30 000 000

угловые точки восьмиугольника располагаются на широте 15° . Расстояние между узлами у полюса составляет примерно 700 км, на широте 60° около 640 км, на широте 15° около 440 км. Эксперименты производились с помощью баротропной модели атмосферы в предположении квазигеострофичности движений. Для простоты предполагалось, что параметр Кориолиса постоянен там, где он входит в качестве коэффициента, и переменен в выражении для абсолютного вихря (т. е. β -эффект учитывался). В этом случае уравнение вихря имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} = -J(\psi, \nabla^2 \psi + l), \quad (4)$$

где $\psi = \Phi/l_0$; Φ — геопотенциал; l — параметр Кориолиса; l_0 — его среднее значение, используемое в качестве коэффициента; ∇^2 и J — лапласиан и якобиан соответственно. На границе области интегрирования предполагалось, что $\psi = \text{const}$. Кроме того, принималось, что на границе ψ и $\nabla^2 \psi$ не меняются со временем. Аппроксимация якобиана производилась по схеме Аракавы [2], аппроксимация лапласиана — по обычной пятиточечной схеме «крест».

Интегрирование по времени производилось по схеме Адамса—Бэшфорта:

$$\psi^{(k+1)} = \psi^{(k)} + \frac{3}{2} \frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial t} \Delta t - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi^{(k-1)}}{\partial t} \Delta t. \quad (5)$$

Здесь Δt — шаг по времени, который принимался равным 1 часу.

На первом шаге применялась схема Эйлера

$$\psi^{(1)} = \psi^{(0)} + \frac{\partial \psi^{(0)}}{\partial t} \Delta t. \quad (6)$$

В качестве начального условия было выбрано реальное поле AT_{500} за некоторый срок (3 часа 27 января 1965 г.).

На каждом шаге по времени решалась краевая задача для уравнения (4) относительно $\frac{\partial \psi}{\partial t}$. Решение краевой задачи производилось с помощью итерационного метода Либмана с верхней релаксацией. Итерационный процесс на каждом шаге по времени заканчивался после того, как невязка между левой и правой частями конечно-разностного аналога уравнения (4) в каждой точке становилась меньше некоторой заданной величины ϵ . В качестве ϵ принималась величина, которая в пересчете на изменение геопотенциала равна 0,001 дкм/час.

Для определения оптимального значения параметра перерелаксации ν в случае областей простой формы существуют теоретические оценки [3, 4], в других случаях оптимальное значение может быть найдено экспериментально.

На рис. 2 приведены результаты экспериментов по определению оптимальных значений параметра перерелаксации ν для уравнения (4) при различных способах выбора начального приближения. Кривая 1 показывает зависимость числа итераций n от величины пара-

метра перерелаксации ν в случае, когда в качестве начального приближения берутся нулевые значения во всех точках ($A=0, B=0$ — способ 1). Оптимальное значение параметра перерелаксации равно 0,75. Число итераций при этом значении ν , необходимое для удовлетворения указанного выше критерия сходимости, равно 38. Кривая 2 изображает аналогичную зависимость в случае, когда в ка-

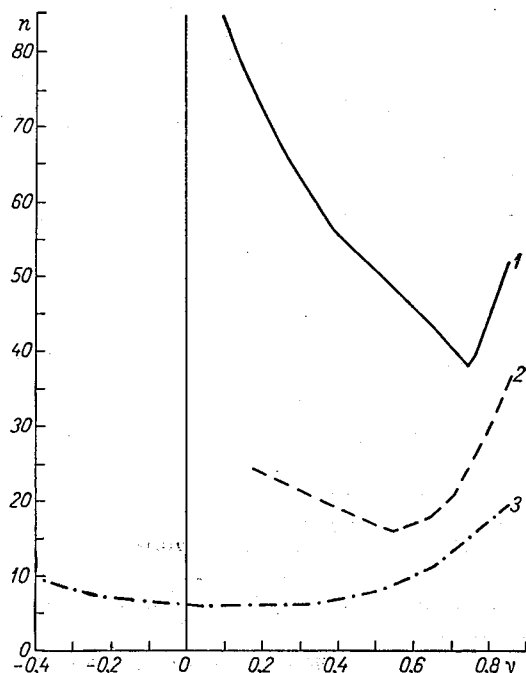


Рис. 2. Зависимость числа итераций n от параметра релаксации ν в баротропной модели без учета сжимаемости атмосферы ($L_0 = \infty$) для различных способов нахождения начального приближения.

1 — способ 1 ($A=0, B=0$); 2 — способ 2 ($A=1, B=0$);
3 — способ 3 ($A=2, B=-1$).

честве начального приближения принимается решение, полученное на предыдущем шаге ($A=1, B=0$ — способ 2). В этом способе оптимальное значение параметра перерелаксации равно 0,55. При этом число итераций уменьшается по сравнению со способом 1 более чем в 2 раза и составляет в среднем 16 (практически мало меняясь от шага к шагу).

Тенденция к уменьшению оптимального значения параметра перерелаксации при переходе от способа 1 к способу 2 ранее отмечалась в работе Брэдли [5].

Кривая 3 на рис. 2 также изображает зависимость числа итераций от величины параметра перерелаксации в случае, когда для

нахождения начального приближения на каждом шаге по времени применяется линейная экстраполяция решений, найденных на двух предшествующих шагах ($A=2$, $B=-1$ — способ 3). В этом случае минимальное число итераций достигается для широкого диапазона значений параметра ν (в пределах примерно 0,0—0,3). При этом число итераций равно в среднем 6. Следует отметить, что при варьировании параметра ν в весьма широких пределах (примерно от $-0,4$ до $+0,6$) количество итераций меняется весьма незначительно.

На рис. 3 приведены результаты аналогичных экспериментов, выполненных для баротропного уравнения вихря, учитывающего сжимаемость атмосферы, т. е. для уравнения

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{l_0^2}{RT} \frac{\partial \psi}{\partial t} = -J(\psi, \nabla^2 \psi + l), \quad (7)$$

где R — газовая постоянная, T — абсолютная температура. Величина $L_0 = \frac{\sqrt{RT}}{l_0}$ (параметр Обухова) принималась равной 2500 км.

Результаты, приводимые на рис. 2 и 3, показывают, что способ нахождения начального приближения путем линейной экстраполяции решений, полученных на двух предыдущих шагах по времени, позволяет существенно уменьшить число итераций по сравнению с другими способами. Кроме того, в этом способе число итераций весьма слабо зависит от величины параметра ν , так что ошибка в определении его оптимального значения практически не отражается на скорости сходимости итерационного процесса. Способ 3 требует хранения в памяти машины полей решений на двух временных шагах, в то время как в способе 2 нужно хранить решение лишь на одном временном шаге. Однако этот недостаток способа 3 проявляется лишь в случае, когда для аппроксимации по времени используются два временных уровня. Если же для этой цели используются три временных уровня (как, например, в схемах Адамса—Бэшфорта, центральных разностей и др.), то применение способа 3 не накладывает дополнительных требований к памяти машины по отношению к тем требованиям, которые накладывает способ интегрирования по времени.

Является ли число итераций в способе 3 (т. е. при $A=2$ и $B=-1$) минимальным или его можно уменьшить путем варьирования параметров A и B в формуле (3)? На рис. 4 представлена зависимость числа итераций от величины A (принималось, что $B=-1-A$), полученная в результате экспериментов с баротропной моделью при трех значениях параметра ν (0, 0,3 и 0,55). Как видно из этого рисунка, способ 3, т. е. линейная экстраполяция решений на двух предыдущих шагах по времени, является оптимальным способом нахождения начального приближения.

Преимущества способа 3 особенно проявляются в том случае, когда интегрирование выполняется для большого числа шагов по

времени, в частности при решении задач по численному моделированию общей циркуляции атмосферы. Действительно, применение способа 3 в численных экспериментах по моделированию термического режима атмосферы с помощью термотропной модели [6] оказалось весьма эффективным и позволило существенно уменьшить время счета.

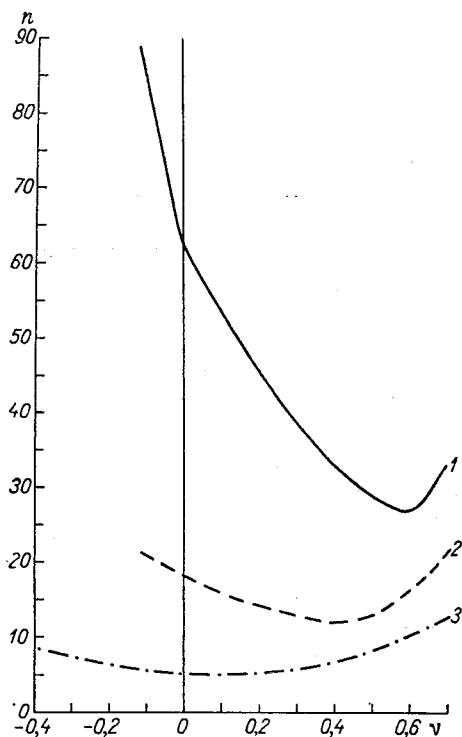


Рис. 3. То же, что на рис. 2, но с учетом сжимаемости атмосферы ($L_0=2500$ км).

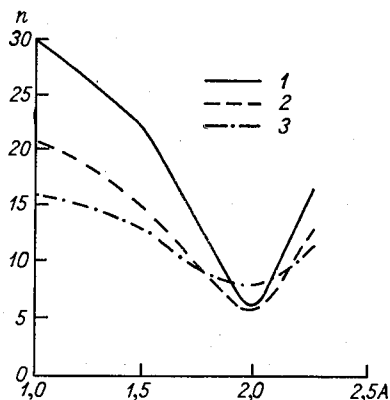


Рис. 4. Зависимость числа итераций n от величины параметра A . Баротропная модель без учета сжимаемости атмосферы ($L_0 = \infty$).

1) $v=0$; 2) $v=0,3$; 3) $v=0,55$.

Внимание авторов на заметку [1] обратил Р. Л. Каган. Пользуясь случаем, авторы выражают ему свою признательность.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sloan L. J., Orville H. D. Time extrapolation in a combination jury marching problem saves computer time. Month. Weath. Rev., 1969, vol. 97, No. 6.
2. Arakawa A. Computational design for long-term numerical integrations of the equations of fluid motion: two-dimensional incompressible flow. Comput. Physics, 1966, vol. 1, No. 1. (Перевод в сб. «Численные методы решения задач динамики атмосферы и океана». Л., Гидрометеоиздат, 1968.)
3. Young D. Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type. Transact. Americ. Math. Soc., 1954, 76, pp. 92—111.
4. Miyakoda K. Contribution to the numerical weather prediction-computation with finite difference. Japan. Geophys., 1962, vol. 3, No. 1.
5. Bradley J. H. S. Some practical aspects of overrelaxation in diagnostic and forecast calculations. Month. Weath. Rev., 1968, vol. 96, No. 11.
6. Гандин Л. С. [и др.]. Упрощенная модель для численных экспериментов по термическому режиму атмосферы. — Труды ГГО, 1970, вып. 256.

СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБЪЕКТИВНОГО АНАЛИЗА МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Основой большинства известных схем объективного анализа метеорологических полей являются методы математической статистики. Это объясняется несколькими причинами, среди которых можно выделить следующие.

1. Статистическая природа метеорологических наблюдений. Величины метеорологических измерений в каждый конкретный момент времени определяются совокупностью разномасштабных процессов, происходящих в атмосфере, ошибками наблюдений и искажением информации при передаче ее по каналам связи. Суммарный эффект подобных факторов позволяет рассматривать поступающие в обработку данные как систему случайных величин.

2. Высокая точность получаемых результатов.

3. Простота и удобство применяемого вычислительного аппарата.

Возможность использования тех или иных методов во многом определяется мощностью имеющихся ЭВМ, характером и направленностью задачи, в рамках которой проводится объективный анализ.

Применяемые в настоящее время методы имеют специфическую направленность, заключающуюся в том, что предполагается существование нескольких стационарно расположенных измерительных пунктов (станций). Изменение характера производимых измерений (например, использование спутниковой информации) потребует коренного пересмотра используемых методов.

Изложение различных схем объективного анализа, приводимое в работах [2, 3, 7 и др.], сводится к простому перечислению этих схем и не указывает на их единство и взаимосвязь.

Основной целью настоящей работы является описание общего математико-статистического подхода к проблеме интерполяции метеорологических полей. Пусть

$$Y = \{y_i\}_{i=0}^n \quad (1)$$

есть случайный вектор, компоненты которого, начиная с номера $k+1$ ($y_{k+1}, \dots, y_n, k < n$), представляют собой измерения какого-либо метеорологического элемента, заданные на $n - k$ пунктах на-

блюдений. Первые $k+1$ ($y_0, \dots, y_k$) компонент вектора Y суть оцениваемые измерения, например значения в узлах регулярной сетки.

Предположим, что

$$E(Y) = X\beta, \quad (2)$$

$$D(Y) = M, \quad (3)$$

где E — знак математического ожидания, D — оператор взятия вторых моментов, $M = \{\mu_{ij}\}_{i,j=0}^n$ — известная невырожденная ковариационная матрица вектора Y , $\beta = \{\beta_j\}_{j=0}^m$ — вектор неизвестных параметров, $X = \{x_{ij}\}_{i=0, j=0}^{nm}$ — известная матрица условной системы уравнений.

Вид правой части (2) определяется предположениями о характере изменения математических ожиданий метеозлемента. Например, в случае одноуровневого полиномиального объективного анализа

$$x_{ij} = x_i^{\alpha_j} y_j^{\gamma_j},$$

где $(x_i y_i)$ — прямоугольные координаты станции, $\alpha_0 = \gamma_0 = 0$, а остальные α_j, γ_j — целые положительные числа. Матрица M определяется статистической структурой метеонаблюдений.

Введем обозначения:

$$Y_1 = \{y_i\}_{i=0}^k, \quad Y_2 = \{y_i\}_{i=k+1}^n, \\ E(Y_1) = X_1\beta, \quad E(Y_2) = X_2\beta, \quad X = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}. \quad (4)$$

Матрицу M представим в виде

$$M = \begin{Bmatrix} M_1 & M_3 \\ M_3^T & M_2 \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

где T — знак транспонирования; M_1, M_2 — ковариационные матрицы векторов Y_1 и Y_2 соответственно; M_3 — матрица моментов связи элементов векторов Y_1 и Y_2 .

При сделанных предположениях будем находить оценки неизвестных величин и их статистические характеристики. Для этого рассмотрим квадратичную форму

$$(Y - X\beta)^T M^{-1} (Y - X\beta), \quad (6)$$

к минимизации которой приводит предположение о нормальном распределении случайного вектора Y [1]:

Дифференцируя (6) по всем неизвестным параметрам

$$y_i (i=0, 1, \dots, k) \quad \text{и} \quad \beta_j (j=0, 1, \dots, m)$$

и приравнивая нулю производные, получим систему линейных уравнений для определения всех требуемых величин.

Однако, прежде чем анализировать общую схему нахождения оценок, сделаем соответствующие предположения и рассмотрим несколько частных схем.

1. Метод наименьших квадратов

Предположим, что в качестве оценок интерполируемых значений принимаются оценки их математических ожиданий, т. е.

$$Y_1 = X_1 \beta. \quad (7)$$

Так как β определяет оценки математических ожиданий, то задача интерполяции сводится к нахождению элементов этого вектора.

Минимизация (6) сводится к минимизации формы

$$(Y_2 - X_2 \beta)^T M_2^{-1} (Y_2 - X_2 \beta) \quad (8)$$

ввиду предположения (7) (первые $k+1$ элементов вектора $Y - X\beta$ равны нулю). Основные соотношения для нахождения оценок в этом случае имеют вид [1]:

$$\hat{\beta} = M_{\hat{\beta}}^{-1} X_2^T M_2^{-1} Y_2, \quad (9)$$

$$M_{\hat{\beta}} = (X_2^T M_2^{-1} X_2)^{-1}, \quad (10)$$

$$\hat{Y}_1 = X_1 \hat{\beta}, \quad (11)$$

$$M_{\hat{Y}_1} = X_1 M_{\hat{\beta}} X_1^T, \quad (12)$$

$$M_V = M_2^{-1} - X_2 M_{\hat{\beta}}^{-1} X_2^T, \quad (13)$$

где M_V — оценка ковариационной матрицы вектора уклонений

$$V = Y_2 - X_2 \hat{\beta};$$

$\hat{\beta}$, $\hat{Y}_1$, $M_{\hat{\beta}}$, $M_{\hat{Y}_1}$ — оценки β , Y_1 и их ковариационных матриц.

Опубликовано несколько схем одноуровневого полиномиального объективного анализа, основанного на вышеизложенных соотношениях [2, 4, 5, 8, 9, 11, 12]. Эти схемы отличаются друг от друга только видом матрицы M_2 .

В работе [4] измерения предполагаются независимыми и равноточными, и поэтому матрица M_2 равна единичной. В работе [2] рассматривается схема, в которой каждому измерению y_i придается вес s_i ($i = k+1, \dots, n$). В этом случае элементы матрицы M_2 определяются следующим образом:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{1}{s_i} & i = j \end{cases} \quad (i, j = k+1, \dots, n). \quad (14)$$

В [5] в качестве M_2 берется корреляционная матрица измерений.

Точность интерполяции при использовании метода наименьших квадратов определяется тем, насколько верно предположение (7) при фиксированном виде матрицы M_2 .

2. Оптимальная интерполяция

Предположим, что математические ожидания величин y_i равны нулю, т. е.

$$E(Y) = 0. \quad (15)$$

К этому случаю приходим, например, тогда, когда проводится обработка отклонений значений метеозлемента от его нормы.

Пусть $k=0$. Тогда, дифференцируя (6) по единственной неизвестной величине y_0 , получаем

$$\hat{y}_0 = PY_2 = \sum_{i=1}^n p_i y_i = M_3 M_2^{-1} Y_2, \quad (16)$$

где

$$p_i = -\frac{m_{i0}}{m_{00}};$$

m_{i0} ($i=0, 1, \dots, n$) — элементы нулевого столбца матрицы M^{-1} ; $P = \{p_i\}_{i=1}^n$. Ясно, что числа $-\frac{m_{i0}}{m_{00}}$ являются решением системы

$$\sum_{j=1}^n p_{ij} p_j = \mu_{0i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (17)$$

Дисперсия $\sigma_{y_0}^2$ определяется формулой

$$\sigma_{y_0}^2 = PM_2 P^T = \sum_{i=1}^n p_i \mu_{0i}. \quad (18)$$

За меру точности интерполяции обычно берется величина

$$\varepsilon = \mu_{00} - \sigma_{y_0}^2 = \mu_{00} - \sum_{i=1}^n p_i \mu_{0i} = \frac{1}{m_{00}}. \quad (19)$$

Полученные оценки представляют собой широко используемый в настоящее время в метеорологии метод оптимальной интерполяции [3]. Метод очень прост, статистически обоснован и во многих случаях наиболее рационален как по своим точностным характеристикам, так и по затратам машинного времени.

При $k>0$ требуемые оценки элементов вектора Y_1 и ковариационной матрицы M_{Y_1} вычисляются по формулам:

$$\hat{Y}_1 = M_3 M_2^{-1} Y_2, \quad (20)$$

$$M_{\hat{Y}_1} = M_3 M_2^{-1} M_3^T. \quad (21)$$

В качестве оценок, аналогичных ε (19), можно брать, например, след матрицы $(M_1 - M_{\hat{Y}_1})$.

3. Схема интерполяции при неизвестных математических ожиданиях

Рассмотрим общую схему интерполяции, т. е. предположим, что неизвестны как y_i ($i=0, 1, \dots, k$), так и β_j ($j=0, 1, \dots, m$).

Дифференцируя форму (6) по y_i ($i=0, 1, \dots, k$), получаем

$$Y_1 = X_1 \beta + M_3 M_2^{-1} (Y_2 - X_2 \beta). \quad (22)$$

Для нахождения оценок элементов вектора β необходимо форму (6) дифференцировать по β_i . Однако ввиду того, что Y_1 есть линейная функция Y_2 (22), форма (6) в действительности зависит только от $(Y_2 - X_2 \beta)$, и поэтому для нахождения оценок β_i необходимо минимизировать форму (8).

Требуемые оценки для β_i задаются формулой (9). Таким образом, вектор интерполируемых значений $\bar{Y}_1$ определяется равенством

$$\bar{Y}_1 = X_1 \hat{\beta} + M_3 M_2^{-1} (Y_2 - X_2 \hat{\beta}), \quad (23)$$

а процедура оценки проходит два этапа:

1) аппроксимация измерений с учетом их статистической структуры: (10)—(13);

2) оптимальная интерполяция отклонений измеренных величин от точечных оценок их математических ожиданий (23).

Для оценки точности интерполяции по формуле (23) определим матрицу ковариаций M_u величин $u = \bar{Y}_1 - Y_1$:

$$M_u = (X_1 - M_3 M_2^{-1} X_2) M_{\hat{\beta}} (X_1 - M_3 M_2^{-1} X_2)^T. \quad (24)$$

Можно вычислить и некоторые другие виды характеристик точности.

4. Несколько примеров интерполяции с помощью рассмотренных схем

Приводимые ниже результаты характеризуют только конкретно рассматриваемые ситуации и имеют иллюстративное значение. Используемые данные не проходили строгого контроля, что, по-видимому, несколько снизило точность.

Для расчетов были выбраны измерения геопотенциала поверхности 500 мб за 16 сроков (январь 1959 г.) на 115 станциях, расположенных на Европейском континенте. Необходимые моменты рассчитывались по соответствующей корреляционной функции, приведенной в работе [3]. В качестве узлов использовались точки (сами станции), в которых имелись реальные измерения, и результаты сравнивались с этими измерениями. Для каждого узла интерполяции строилась локальная прямоугольная система координат с началом в данном узле.

Исходной информацией при проведении расчетов служили данные станций, заключенных в кольцо с центром в начале координат, с большим радиусом 700 км, меньшим 10 км (т. е. измерение на станции, для которой проводилась интерполяция, в расчетах не использовалось, что, несомненно, сказалось на величинах полученных оценок).

Проведение расчетов для каждого конкретного срока наблюдений заканчивалось нахождением отклонений рассчитываемых значений от измеренных и оценкой их стандартов по всем точкам, для которых проводилась интерполяция.

В табл. 1 приведены оценки стандартов при интерполяции по способу наименьших квадратов многочленами двух переменных степеней от нулевой до третьей. Измерения предполагались независимыми, т. е. матрица M_2 равна единичной. Число наблюдений, использованных для построения многочлена, не более 22. Результаты интерполяции многочленами степеней 0 и 1 явно неудовлетворительны, а многочленами степеней 2 и 3 примерно одинаковы.

Таблица 1

Результаты интерполяции по способу наименьших квадратов

Степень	Число																Среднее
	11	12	13	14	16	18	19	20	21	22	23	25	26	28	29	30	
0	5,9	5,5	6,7	5,7	4,4	5,0	5,8	6,0	6,6	6,3	5,8	6,1	6,2	5,7	5,3	5,2	5,8
1	4,3	4,2	5,2	4,3	3,3	3,5	4,1	4,1	5,5	4,0	3,4	4,4	5,1	4,4	4,0	4,7	4,3
2	3,4	2,6	3,1	3,9	2,7	3,3	3,0	2,3	3,2	2,6	2,5	3,2	3,0	2,7	2,2	3,2	2,9
3	3,0	3,3	3,0	4,1	2,4	3,2	2,6	2,9	3,5	1,9	2,5	3,6	2,7	3,0	2,6	2,7	2,9

В табл. 2 приведены оценки стандартов при применении метода оптимальной интерполяции. Оценки определялись только для тех ситуаций, когда в расчетах использовались измерения на 5—6 ближайших станциях.

Таблица 2

Результаты объективного анализа методом оптимальной интерполяции

	Число																Среднее
	11	12	13	14	16	18	19	20	21	22	23	25	26	28	29	30	
σ	2,0	2,6	3,5	3,1	2,5	3,0	3,0	2,4	3,0	2,7	2,3	3,4	3,2	3,0	2,7	3,8	2,9

В табл. 3 содержатся стандарты, характеризующие интерполяцию по формуле (23), причем математические ожидания оценивались с помощью многочленов двух переменных степеней от нулевой до третьей. Заметного улучшения оценок не наблюдается, и это,

по-видимому, объясняется формальным применением метода, т. е. использованием в расчетах наблюдений всех станций, имеющихся в данной окрестности. Например, если интерполяцию проводить по наблюдениям только 5—6 ближайших станций, то первой строке табл. 3 будет соответствовать табл. 4. Снижение средней оценки с 3,3 до 3,0 свидетельствует о возможности улучшения получаемых оценок с помощью разработки подходящей методики, аналогичной той, которая применяется при оптимальной интерполяции [2].

Таблица 3

Результаты формального использования общей схемы интерполяции

Степень	Число																Среднее
	11	12	13	14	16	18	19	20	21	22	23	25	26	28	29	30	
0	2,1	2,6	3,6	3,1	2,7	3,2	3,7	2,9	3,5	3,4	2,6	3,5	4,1	3,1	3,3	5,2	3,3
1	2,0	2,9	3,5	3,2	2,6	3,0	3,3	3,0	3,7	3,2	2,9	3,5	3,6	2,9	3,2	4,1	3,2
2	1,9	2,4	3,2	3,9	2,6	3,3	3,0	2,2	3,2	2,5	2,4	3,5	3,0	2,6	2,3	3,3	2,8
3	2,3	2,6	2,9	4,2	2,4	3,3	2,6	2,9	3,4	1,8	2,6	3,9	2,6	3,0	2,7	2,8	2,9

Таблица 4

Результаты интерполяции с помощью общей схемы ($m=0$, n равно 5 или 6)

	Число																Среднее
	11	12	13	14	16	18	19	20	21	22	23	25	26	28	29	30	
σ	2,0	2,6	3,7	3,3	2,6	3,0	3,0	3,4	3,2	2,8	2,4	3,4	3,3	2,9	2,8	3,7	3,0

Далее отметим, что выбранный критерий качества оценок недостаточно корректен. Ввиду того, что каждое наблюдение содержит случайные ошибки, добиваться полного совпадения измерений на станциях и получаемых оценок не имеет смысла.

Мы рассматривали формальный математико-статистический аппарат нахождения оценок интерполируемых значений. Разработка конкретных схем объективного анализа требует детального физико-статистического обоснования и исследования методики их применения. Необходимо решать вопросы о величинах степеней многочленов и участков аппроксимации, количестве аппроксимируемых измерений и т. п. Возможно также, что алгебраические многочлены в качестве аппроксимирующих функций не являются наилучшими.

Отметим далее, что конструирование той или иной схемы интерполяции для данного вектора Y связано с формированием матриц M и X . Если элементы Y состоят из наблюдений разного вида (например, когда для интерполяции значений геопотенциала привлекаются наблюдения с нескольких уровней), то матрица M имеет блочную структуру. Блоки по главной диагонали строятся с помощью автокорреляционных функций, а вне главной диагонали — с помощью

взаимных корреляционных функций наблюдений. Формирование матрицы X связано с выбором аппроксимирующих зависимостей.

В заключение несколько слов о том, необходимо ли наличие нескольких методов объективного анализа и нет ли среди рассмотренных схем абсолютно лучшей. Наиболее прост метод оптимальной интерполяции. Однако при его использовании следует иметь информацию о математических ожиданиях измерений. Метод очень чувствителен к аномальным наблюдениям, требует строгого предварительного контроля данных и нуждается в существенной модификации в случае согласования полей с учетом тех или иных физических соотношений.

Метод наименьших квадратов для построения приемлемых зависимостей можно использовать только при большом числе измерений. В рамках этого метода имеется теория уравнивания по элементам (или уравнивания с помощью коррелят) [6], которая позволяет проводить согласование метеорологических полей с привлечением различных физических соотношений.

Рациональность использования обобщенной схемы требует дальнейших исследований. При отсутствии норм наблюдений в тех точках, где получено измерение, применение этой схемы наиболее естественно. Кроме того, задачи обработки наблюдений, проводимых в различные моменты времени, в различных точках земного шара, разными измерительными комплексами (станциями, спутниками и т. п.), потребуют создания новых схем, и использование данной работы может оказаться весьма полезным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение. М., «Наука», 1968.
2. Белоусов С. Л., Гандин Л. С., Машкович С. А. Обработка оперативной метеорологической информации с помощью электронных вычислительных машин. Л., Гидрометеиздат, 1968.
3. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Л., Гидрометеиздат, 1963.
4. Петров А. А. Об объективном анализе на основе аппроксимации полей полиномами. — Метеорология и гидрология, 1968, № 6.
5. Поляк И. И. О возможности использования статистической структуры метеорологических полей при полиномиальном объективном анализе. — Труды ГГО, 1970, вып. 267.
6. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., Физматгиз, 1962.
7. Марчук Г. И. Численные методы в прогнозе погоды. Л., Гидрометеиздат, 1967.
8. Быков В. В., Курбаткин Г. П. Анализ метеорологических и аэрологических данных с помощью электронной вычислительной машины. — ДАН СССР, 1960, т. 134, № 5.
9. Быков В. В., Курбаткин Г. П. Опыт объективного анализа аэрологических данных. — Изв. СССР. Сер. геофиз., 1961, № 2.
10. Bergthorsson P., Döös B. R. Numerical weather map analysis. — Tellus, 1955, vol. 7, No. 3.
11. Gilchrist B., Cressman G. P. An experiment in objective analysis. — Tellus, 1954, vol. 6, No. 4.
12. Johnson D. H. Preliminary research in objective analysis. — Tellus, 1957, vol. 9, No. 3.

Г. И. РЕЙНЮК

КРАТКИЕ ЧЕТЫРЕХЗНАЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ ОБОБЩЕННЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Основы аппарата обобщенных сферических функций изложены в работах [1, 2]. Обобщенные сферические функции использовались при построении методов решения уравнений гидродинамики на сфере в работах В. А. Ефимова [3—7]. А. Л. Чубуковой [8] был проведен спектральный анализ полей ветра с использованием систем обобщенных функций.

Обобщенные сферические функции являются элементами матрицы представления группы вращений трехмерного пространства и удовлетворяют линейному уравнению

$$\frac{d^2 T_{m,n}^l}{d\theta'^2} + \operatorname{ctg} \theta' \frac{dT_{m,n}^l}{d\theta'} + \left[l(l+1) - \frac{n^2 - 2mn \cos \theta' + m^2}{\sin^2 \theta'} \right] T_{m,n}^l = 0, \quad (1)$$

где $T_{m,n}^l$ — обобщенные сферические функции, и могут быть заданы с помощью следующего выражения:

$$T_{m,n}^l(\varphi_2, \theta', \varphi_1) = e^{-im\varphi_2} P_{m,n}^l(\cos \theta') e^{-in\varphi_1}, \quad (2)$$

где $\varphi_2, \theta', \varphi_1$ — углы Эйлера.

Впоследствии при решении уравнений гидродинамики [4] полагается $\varphi_2 = 0$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\theta' = \theta$, где θ — дополнение широты, φ — долгота.

Функции $P_{m,n}^l$ для $l=0, 1, 2$ и соответствующие матрицы I_l представлений группы вращений имеют следующий вид:

$$I_0 = 1;$$

$$\begin{aligned}
 I_1(\theta) &= \begin{vmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \frac{i \sin \theta}{\sqrt{2}} & -i \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ \frac{i \sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos \theta & \frac{i \sin \theta}{\sqrt{2}} \\ -\sin^2 \frac{\theta}{2} & \frac{i \sin \theta}{\sqrt{2}} & \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{vmatrix}; \\
 I_2(\theta) &= \begin{vmatrix} \frac{1}{4}(\cos \theta + 1)^2 & \frac{i}{2} \sin \theta (\cos \theta + 1) \\ \frac{i}{2} \sin \theta (\cos \theta + 1) & \frac{1}{2}(2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1) \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - \cos^2 \theta) & \sqrt{\frac{3}{2}} i \sin \theta \cos \theta \\ \frac{i}{2} \sin \theta (\cos \theta - 1) & \frac{1}{2}(2 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1) \\ \frac{1}{4}(\cos \theta - 1)^2 & \frac{i}{2} \sin \theta (\cos \theta - 1) \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - \cos^2 \theta) & \frac{i}{2} \sin \theta (\cos \theta - 1) \\ \sqrt{\frac{3}{2}} i \sin \theta \cos \theta & \frac{1}{2}(2 \cos^2 \theta - \cos \theta - 1) \\ \rightarrow \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) & \sqrt{\frac{3}{2}} i \sin \theta \cos \theta \\ \sqrt{\frac{3}{2}} i \sin \theta \cos \theta & \frac{1}{2}(2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1) \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - \cos^2 \theta) & \frac{i}{2} \sin \theta (\cos \theta + 1) \\ \frac{1}{4}(\cos \theta - 1)^2 & \\ \frac{i}{2} \sin \theta (\cos \theta - 1) & \\ \rightarrow -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}(1 - \cos^2 \theta) & \\ \frac{i}{2} \sin \theta (\cos \theta + 1) & \\ \frac{1}{4}(\cos \theta + 1)^2 & \end{vmatrix} \rightarrow \quad (3)
 \end{aligned}$$

Здесь номер строки в матрицах определяется индексом m , а номер столбца — индексом n в функциях $P_{m,n}^l(\cos \theta)$, элементами матрицы являются функции $P_{m,n}^l(\cos \theta)$.

Для расчета обобщенных сферических функций могут быть применены как рекуррентные формулы вида

$$2 \frac{n \cos \theta - m}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta}} P_{m, n}^l(\cos \theta) = l [V(l+n)(l-n+1) \times \\ \times P_{m, n-1}^l(\cos \theta) - V(l-n)(l+n+1) P_{m, n+1}^l(\cos \theta)], \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(l-n)(l+n+1)} P_{m, n+1}^l(\cos \theta) = \\ & = \frac{1}{2} \sqrt{(l-m+1)(l+m)} (1 + \cos \theta) P_{m-1, n}^l(\cos \theta) + \\ & + \frac{1}{2} \sqrt{(l+m+1)(l-m)} (1 - \cos \theta) P_{m+1, n}^l(\cos \theta) - \\ & - m i \sin \theta P_{m, n}^l(\cos \theta), \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \sqrt{(l-n+1)(l+n+1)} P_{m, n}^{l+1}(\cos \theta) = \\ & = \sqrt{(l-m+1)(l+m+1)} \cos \theta P_{m, n}^l(\cos \theta) + \\ & + \frac{i \sin \theta}{2} [V(l-m)(l-m+1) P_{m+1, n}^l(\cos \theta) + \\ & + V(l+m)(l+m+1) P_{m-1, n}^l(\cos \theta)], \end{aligned} \quad (6)$$

так и конкретные аналитические выражения:

$$\begin{aligned} P_{m, n}^l(\cos \theta) &= i^{m-n} \sqrt{\frac{(l-m)! (l-n)!}{(l+m)! (l+n)!}} \times \\ & \times \left(\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^{\frac{m+n}{2}} \sum_{j=\max(m, n)}^l \frac{(l+j)! i^{2j}}{(l-j)! (j-m)! (j-n)!} \left(\frac{1 - \cos \theta}{2} \right)^j; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} P_{m, n}^l(\cos \theta) &= i^{m-n} \sqrt{(l-m)! (l+m)! (l-n)! (l+n)!} \times \\ & \times \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^{\frac{m-n}{2}} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^l \times \\ & \times \sum_{j=M}^N \frac{(-1)^j}{j! (l-m-j)! (l+n-j)! (m-n+j)!} \left(\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right)^j, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} M &= \max(0, n-m), \quad N = \min(l+n, l-m); \\ P_{m, n}^l(\cos \theta) &= \frac{(-1)^{l-n} i^{n-m}}{2^l} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-n)! (l+n)! (l-m)!}} \times \\ & \times (1 + \cos \theta)^{\frac{-m-n}{2}} (1 - \cos \theta)^{\frac{n-m}{2}} \frac{d^{l-m}}{d \cos \theta^{l-m}} \times \\ & \times [(1 - \cos \theta)^{l-n} (1 + \cos \theta)^{l+n}]; \end{aligned} \quad (9)$$

$$P_{m,n}^l(\cos \theta) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(l-m)!(l+m)!}{(l-n)!(l+n)!}} \times \\ \times \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} + i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{-i\varphi}{2}} \right)^{l-n} \times \\ \times \left(i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} + \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{-i\varphi}{2}} \right)^{l+n} e^{im\varphi} d\varphi; \quad (10)$$

$$P_l^m(\cos \theta) = i^m \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-m)!}} P_{m0}^l(\cos \theta) \quad (11)$$

при $m \geq 0$, где $P_l^m(\cos \theta)$ — присоединенные функции Лежандра.

Кроме того, при расчетах используются следующие свойства обобщенных сферических функций:

а) соотношения симметрии

$$P_{m,-n}^l(\cos \theta) = P_{-m,n}^l(\cos \theta), \\ P_{m,n}^l(\cos \theta) = P_{n,m}^l(\cos \theta), \\ P_{m,n}^l(\cos \theta) = P_{-m,-n}^l(\cos \theta), \\ P_{m,n}^l(-\cos \theta) = i^{2l-2m-2n} P_{m,-n}^l(\cos \theta); \quad (12)$$

б) формулы, определяющие значения функций в полюсах,

$$P_{m,n}^l(0) = \delta_{m,n}, \quad (13)$$

где $\delta_{m,n}$ — символ Кронекера.

Для контроля расчетов использовалось соотношение

$$\sum_{n=-l}^l |P_{m,n}^l(\cos \theta)|^2 = 1. \quad (14)$$

При расчетах по формулам (7), (8) во избежание применения функций, имеющих особенности в полюсах, таких, как

$$\left(\frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^{\frac{m-n}{2}}, \text{ применяется соотношение симметрии } P_{m,n}^l(\cos \theta) = \\ = P_{-m,-n}^l(\cos \theta).$$

На рис. 1 и 2 построены графики функций P_{0n}^{l*} и P_{1n}^{l*} для некоторых выбранных индексов n и l , где $P_{m,n}^{l*}$ удовлетворяет равенству $P_{m,n}^l = i^{-n-m} P_{m,n}^{l*}$.

В табл. 1 и 2 приведены значения этих функций для интервала $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ через 5° для $m=0$ (табл. 1) и $m=1$ (табл. 2). В последней графе указывается на симметрию (с) или асимметрию (ас) значений $P_{m,n}^{l*}$ южного полушария относительно значений северного полушария для соответствующих значений l и n . Функции $P_{m,n}^{l*}$ рассчитывались с точностью до восьми знаков. Округление при составлении таблиц проводилось по общепринятым правилам.

l	n	θ°					
		0	5	10	15	20	
1	0	1,0000	0,9962	0,9848	0,9659	0,9396	
	1	0,0000	—0,0616	—0,1228	—0,1830	—0,2418	
2	0	1,0000	0,9886	0,9548	0,8995	0,8245	
	1	0,0000	—0,1063	—0,2094	—0,3062	—0,3936	
	2	0,0000	0,0046	0,0185	0,0410	0,0716	
3	0	1,0000	0,9772	0,9106	0,8042	0,6649	
	1	0,0000	—0,1495	—0,2894	—0,4107	—0,5058	
	2	0,0000	0,0104	0,0407	0,0886	0,1505	
	3	0,0000	—0,0004	—0,0029	—0,0097	—0,0224	
4	0	1,0000	0,9623	0,8532	0,6847	0,4750	
	1	0,0000	—0,1915	—0,3622	—0,4935	—0,5715	
	2	0,0000	0,0178	0,0690	0,1464	0,2396	
	3	0,0000	—0,0010	—0,0076	—0,0248	—0,0556	
	4	0,0000	0,0000	0,0005	0,0023	0,0071	
5	0	1,0000	0,9437	0,7840	0,5471	0,2715	
	1	0,0000	—0,2324	—0,4265	—0,5510	—0,5868	
	2	0,0000	0,0271	0,1027	0,2108	0,3283	
	3	0,0000	—0,0019	—0,0150	—0,0474	—0,1028	
	4	0,0000	0,0001	0,0014	0,0068	0,0202	
	5	0,0000	0,0000	—0,0001	—0,0006	—0,0023	
6	0	1,0000	0,9216	0,7045	0,3983	0,0719	
	1	0,0000	—0,2718	—0,4810	—0,5809	—0,5520	
	2	0,0000	0,0380	0,1408	0,2774	0,4059	
	3	0,0000	—0,0033	—0,0253	—0,0779	—0,1616	
	4	0,0000	0,0002	0,0031	0,0146	0,0418	
	5	0,0000	0,0000	—0,0002	—0,0018	—0,0072	
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0008	
7	0	1,0000	0,8962	0,6164	0,2455	—0,1072	
	1	0,0000	—0,3096	—0,5247	—0,5823	—0,4722	
	2	0,0000	0,0506	0,1821	0,3415	0,4623	
	3	0,0000	—0,0052	—0,0390	—0,1157	—0,2278	
	4	0,0000	0,0004	0,0058	0,0266	0,0732	
	5	0,0000	0,0000	—0,0006	—0,0043	—0,0165	
	6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0005	0,0026	
	7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0002	
8	0	1,0000	0,8675	0,5218	0,0962	—0,2518	
	1	0,0000	—0,3456	—0,5566	—0,5560	—0,3568	
	2	0,0000	0,0646	0,2253	0,3985	0,4897	
	3	0,0000	—0,0077	—0,0560	—0,1596	—0,2950	
	4	0,0000	0,0005	0,0098	0,0435	0,1143	
	5	0,0000	0,0000	—0,0012	—0,0086	—0,0315	
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0012	0,0063	
	7	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0001	—0,0009	
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	

$P_{on}^{I*}(\cos \theta)$

25	30	35	40	45	
0,9063	0,8660	0,8191	0,7660	0,7071	ас
-0,2988	-0,3535	-0,4056	-0,4545	-0,5000	с
0,7321	0,6250	0,5065	0,3802	0,2500	с
-0,4691	-0,5303	-0,5754	-0,6031	-0,6124	ас
0,1094	0,1531	0,2014	0,2530	0,3062	с
0,5016	0,3248	0,1454	-0,0252	-0,1767	с
-0,5686	-0,5954	-0,5849	-0,5384	-0,4593	с
0,2216	0,2964	0,3690	0,4334	0,4841	ас
-0,0422	-0,0699	-0,1055	-0,1484	-0,1976	с
0,2465	0,0234	-0,1714	-0,3190	-0,4062	с
-0,5888	-0,5446	-0,4457	-0,3049	-0,1398	ас
0,3353	0,4200	0,4808	0,5076	0,4941	с
-0,1012	-0,1601	-0,2286	-0,3009	-0,3697	ас
0,0167	0,0327	0,0566	0,0893	0,1307	с
0,0009	-0,2232	-0,3691	-0,4197	-0,3757	ас
-0,5308	-0,3958	-0,2084	-0,0036	0,1815	с
0,4293	0,4902	0,4945	0,4360	0,3202	с
-0,1784	-0,2657	-0,3516	-0,4204	-0,4575	с
0,0453	0,0849	0,1391	0,2051	0,2773	ас
-0,0067	-0,0155	-0,0308	-0,0544	-0,0877	с
-0,2040	-0,3740	-0,4114	-0,3236	-0,1485	с
-0,4069	-0,1864	0,0517	0,2474	0,3544	ас
0,4850	0,4853	0,3982	0,2383	0,0400	с
-0,2644	-0,3640	-0,4337	-0,4502	-0,4003	ас
0,0899	0,1589	0,2422	0,3266	0,3946	с
-0,0201	-0,0445	-0,0837	-0,1383	-0,2056	ас
0,0027	0,0074	0,0169	0,0335	0,05936	с
-0,3441	-0,4101	-0,3096	-0,1006	0,1270	ас
-0,2388	0,0351	0,2574	0,3587	0,3152	с
0,4897	0,4011	0,2152	-0,0139	-0,2151	ас
-0,3460	-0,4296	-0,4414	-0,3634	-0,2059	с
0,1491	0,2454	0,3408	0,4065	0,4156	ас
-0,0438	-0,0918	-0,1610	-0,2443	-0,3265	с
0,0088	0,0232	0,0499	0,0925	0,1513	ас
-0,0011	-0,0036	-0,0093	-0,0207	-0,0404	с
-0,4062	-0,3388	-0,1155	0,1386	0,2983	с
-0,0537	0,2202	0,3534	0,3033	0,1119	ас
0,4395	0,2524	-0,0035	-0,2270	-0,3293	с
-0,4087	-0,4420	-0,3614	-0,1792	0,0469	ас
0,2180	0,3283	0,4036	0,4034	0,3090	с
-0,0796	-0,1561	-0,2512	-0,3410	-0,3932	ас
0,0209	0,0518	0,1044	0,1781	0,2629	с
-0,0039	-0,0120	-0,0296	-0,0616	-0,1108	ас
0,0004	0,0017	0,0052	0,0129	0,0277	с

l	n	θ°				
		0	5	10	15	20
9	0	1,0000	0,8358	0,4228	-0,0427	-0,3517
	1	0,0000	-0,3797	-0,5762	-0,5040	-0,2182
	2	0,0000	0,0801	0,2692	0,4442	0,4834
	3	0,0000	-0,0108	-0,0765	-0,2077	-0,3564
	4	0,0000	0,0010	0,0153	0,0657	0,1636
	5	0,0000	-0,0001	-0,0023	-0,0153	-0,0535
	6	0,0000	0,0000	0,0003	0,0027	0,0131
	7	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0004	-0,0024
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

l	n	θ°			
		50	55	60	65
1	0	0,6428	0,5736	0,5000	0,4226
	1	-0,5417	-0,5792	-0,6124	-0,6408
2	0	0,1198	-0,0065	-0,1250	-0,2321
	1	-0,6031	-0,5754	-0,5303	-0,4691
	2	0,3593	0,4109	0,4593	0,5030
3	0	-0,3002	-0,3886	-0,4375	-0,4452
	1	-0,3536	-0,2288	-0,0938	0,0419
	2	0,5165	0,5270	0,5135	0,4753
	3	-0,2513	-0,3072	-0,3631	-0,4161
4	0	-0,4275	-0,3852	-0,2891	-0,1552
	1	0,0296	0,1831	0,3025	0,3746
	2	0,4389	0,3456	0,2224	0,0813
	3	-0,4274	-0,4663	-0,4803	-0,4653
	4	0,1800	0,2354	0,2941	0,3528
5	0	-0,2545	-0,0868	0,0898	0,2381
	1	0,3145	0,3738	0,3521	0,2577
	2	0,1637	-0,0090	-0,1698	-0,2919
	3	-0,4519	-0,3985	-0,3002	-0,1672
	4	0,3472	0,4051	0,4412	0,4473
	5	-0,1308	-0,1829	-0,2416	-0,3033
6	0	0,0563	0,2297	0,3232	0,3138
	1	0,3514	0,2470	0,0768	-0,1077
	2	-0,1510	-0,2901	-0,3452	-0,3057
	3	-0,2859	-0,1250	0,0520	0,2086
	4	0,4282	0,4136	0,3453	0,2283
	5	-0,2790	-0,3480	-0,4007	-0,4252
	6	0,0960	0,1435	0,2004	0,2632

25	30	35	40	45	
-0,3896	-0,1896	0,0965	0,2900	0,2855	ac
0,1193	0,3313	0,3217	0,1233	-0,1293	c
0,3394	0,0694	-0,1956	-0,3246	-0,2612	ac
-0,4398	-0,3915	-0,2074	0,0426	0,2464	c
0,2885	0,3887	0,4042	0,3024	0,1037	ac
-0,1273	-0,2304	-0,3330	-0,3895	-0,3592	c
0,0410	0,0955	0,1774	0,2727	0,3518	ac
-0,0098	-0,0288	-0,0666	-0,1275	-0,2077	c
0,0017	0,0062	0,0175	0,0408	0,0807	ac
-0,0002	-0,0008	-0,0029	-0,0081	-0,0190	c

70	75	80	85	90	
0,3420	0,2588	0,1736	0,0872	0,0000	ac
-0,6644	-0,6830	-0,6963	-0,7044	-0,7071	c
-0,3245	-0,3995	-0,4547	-0,4886	-0,5000	c
-0,3936	-0,3062	-0,2095	-0,1064	0,0000	ac
0,5407	0,5713	0,5939	0,6077	0,6124	c
-0,4130	-0,3449	-0,2474	-0,1291	0,0000	c
0,1689	0,2781	0,3621	0,4150	0,4330	c
0,4136	0,3307	0,2306	0,1185	0,0000	ac
-0,4638	-0,5038	-0,5339	-0,5526	-0,5590	c
-0,0038	0,1434	0,2658	0,3467	0,3750	c
0,3919	0,3537	0,2666	0,1431	0,0000	ac
-0,0632	-0,1958	-0,3024	-0,3714	-0,3953	c
-0,4200	-0,3450	-0,2453	-0,1275	0,0000	ac
0,4077	0,4552	0,4918	0,5150	0,5229	c
0,3280	0,3427	0,2810	0,1577	0,0000	ac
0,1127	-0,0517	-0,2012	-0,3051	-0,3423	c
-0,3551	-0,3495	-0,2775	-0,1531	0,0000	c
-0,0162	0,1323	0,2573	0,3405	0,3697	c
0,4184	0,3535	0,2562	0,1347	0,0000	ac
-0,3635	-0,4171	-0,4595	-0,4867	-0,4961	c
0,2089	0,0431	-0,1321	-0,2637	-0,3125	c
-0,2528	-0,3178	-0,2558	-0,1679	0,0000	ac
-0,1850	-0,0173	0,1513	0,2749	0,3202	c
0,3114	0,3381	0,2834	0,1610	0,0000	ac
0,0785	-0,0803	-0,2205	-0,3166	-0,3508	c
-0,4123	-0,3581	-0,2647	-0,1407	0,0000	ac
0,3270	0,3857	0,4333	0,4642	0,4749	c

l	n	θ°				
		50	55	60	65	
7	0	0,2854	0,3191	0,2232	0,0423	
	1	0,1552	-0,0533	-0,2286	-0,3055	
	2	-0,3261	-0,3148	-0,1913	-0,0043	
	3	-0,0065	0,1801	0,3000	0,3186	
	4	0,3526	0,2215	0,0473	-0,1298	
	5	-0,3873	-0,4059	-0,3681	-0,2715	
	6	0,2224	0,2967	0,3612	0,4011	
	7	-0,0708	-0,1133	-0,1672	-0,2299	
8	0	0,2947	0,1422	-0,0736	-0,2411	
	1	-0,1181	-0,2734	-0,2830	-0,1500	
	2	-0,2752	-0,0984	0,1137	0,2612	
	3	0,2353	0,3155	0,2591	0,0945	
	4	0,1356	-0,0679	-0,2351	-0,3081	
	5	-0,3791	-0,2862	-0,1277	0,0579	
	6	0,3399	0,3847	0,3755	0,3012	
	7	-0,1764	-0,2516	-0,3238	-0,3762	
	8	0,0525	0,0898	0,1402	0,2017	
9	0	0,1041	-0,1296	-0,2679	-0,2300	
	1	-0,2821	-0,2508	-0,6611	0,1506	
	2	-0,0548	0,1685	0,2790	0,2177	
	3	0,3088	0,2052	-0,0026	-0,1985	
	4	-0,1191	-0,2724	-0,2885	-0,1630	
	5	-0,2304	-0,0342	0,1621	0,2822	
	6	0,3782	0,3252	0,1908	0,0062	
	7	-0,2922	-0,3562	-0,3721	-0,3205	
	8	0,1392	0,2124	0,2890	0,3515	
	9	-0,0391	-0,0715	-0,1180	-0,1776	

Функции

l	n	θ°				
		0	5	10	15	20
1	-1	0,0000	-0,0019	0,0076	-0,0170	-0,0301
	0	0,0000	-0,0616	-0,1228	-0,1830	-0,2418
	1	-1,0000	-0,9981	-0,9924	-0,9830	-0,9698
2	-2	0,0000	-0,0001	-0,0013	-0,0044	-0,0103
	-1	0,0000	-0,0057	-0,0226	-0,0499	-0,0868
	0	0,0000	-0,1063	-0,2094	-0,3062	-0,3936
	1	-1,0000	-0,9905	-0,9622	-0,9160	-0,8529
	2	0,0000	0,0870	0,1723	0,2544	0,3317

70	75	80	85	90	
—0,1485	—0,2730	—0,2835	—0,1779	0,0000	ас
—0,2585	—0,1102	0,0787	0,2331	0,2923	с
0,1768	0,2861	0,2849	0,1756	0,0000	ас
0,2322	0,0712	—0,1102	—0,2509	—0,3038	с
—0,2649	—0,3222	—0,2861	—0,1673	0,0000	ас
—0,1282	0,0364	0,1891	0,2969	0,3358	с
0,4033	0,3600	0,2713	0,1459	0,0000	ас
—0,2961	—0,3590	—0,4112	—0,4456	—0,4577	с
—0,2780	—0,1703	0,0232	0,2017	0,2734	с
0,0536	0,2235	0,2753	0,1850	0,0001	ас
0,2773	0,1584	—0,0352	—0,2084	—0,2773	с
—0,1049	—0,2510	—0,2804	—0,1815	—0,0001	ас
—0,2613	—0,1140	0,0752	0,2309	0,2908	с
0,2181	0,3035	0,2865	0,1726	0,0000	ас
0,1682	0,0013	—0,1616	—0,2802	—0,3236	с
—0,3922	—0,3600	—0,2765	—0,1505	0,0000	ас
0,2694	0,3358	0,3920	0,4298	0,4431	с
—0,0476	0,1594	0,2596	0,1913	0,0001	ас
0,2642	0,2077	0,0210	—0,1762	—0,2594	с
0,0277	—0,1731	—0,2633	—0,1902	—0,0001	ас
—0,2748	—0,1924	—0,0013	0,1876	0,2655	с
0,0392	0,2147	0,2734	0,1862	0,0001	ас
0,2765	0,1481	—0,0448	—0,2136	—0,2803	с
—0,1723	—0,2831	—0,2851	—0,1770	—0,0001	ас
—0,2005	—0,0342	0,1372	0,2657	0,3133	с
0,3799	0,3584	0,2807	0,1545	0,0000	ас
—0,2460	—0,3152	—0,3752	—0,4161	—0,4307	с

Таблица 2

$P_{1n}^{I*}(\cos \theta)$

25	30	35	40	45	
—0,0468	—0,0670	—0,0904	—0,1170	—0,1464	с $n = 1$
—0,2988	—0,3535	—0,4056	—0,4545	—0,5000	с $n = 0$
—0,9531	—0,9330	—0,9096	—0,8830	—0,8535	с $n = -1$
—0,0198	—0,0335	—0,0519	—0,0752	—0,1035	ас $n = 2$
—0,1317	—0,1830	—0,2385	—0,2962	—0,3535	ас $n = 1$
—0,4691	—0,5303	—0,5754	—0,6031	—0,6124	ас $n = 0$
—0,7745	—0,6830	—0,5806	—0,4699	—0,3536	ас $n = -1$
0,4028	0,4665	0,5217	0,5676	0,6035	ас $n = -2$

l	n	θ°					
		0	5	10	15	20	
3	-3	0,0000	0,0000	-0,0002	-0,0011	-0,0034	
	-2	0,0000	-0,0005	-0,0041	-0,0136	-0,0311	
	-1	0,0000	-0,0113	-0,0444	-0,0965	-0,1631	
	0	0,0000	-0,1495	-0,2894	-0,4107	-0,5058	
	1	-1,0000	-0,9792	-0,9179	-0,8198	-0,6906	
	2	0,0000	0,1368	0,2662	0,3817	0,4770	
	3	0,0000	-0,0073	-0,0290	-0,0637	-0,1098	
4	-4	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0003	-0,0011	
	-3	0,0000	0,0000	-0,0007	-0,0037	-0,0111	
	-2	0,0000	-0,0011	-0,0091	-0,0293	-0,0654	
	-1	0,0000	-0,0188	-0,0725	-0,1535	-0,2498	
	0	0,0000	-0,1915	-0,3622	-0,4935	-0,5715	
	1	-1,0000	-0,9641	-0,8603	-0,6992	-0,4975	
	2	0,0000	0,1821	0,3463	0,4768	0,5611	
5	3	0,0000	-0,0150	-0,0582	-0,1247	-0,2070	
	4	0,0000	0,0006	0,0049	0,0159	0,0363	
	-5	0,0000	+0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0004	
	-4	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0010	-0,0039	
	-3	0,0000	-0,0001	-0,0018	-0,0087	-0,0255	
	-2	0,0000	-0,0022	-0,0167	-0,0525	-0,1130	
	-1	0,0000	-0,0280	-0,1060	-0,2169	-0,3361	
6	0	0,0000	-0,2324	-0,4265	-0,5510	-0,5868	
	1	-1,0000	-0,9455	-0,7908	-0,5604	-0,2904	
	2	0,0000	0,2249	0,4153	0,5424	0,5880	
	3	0,0000	-0,0243	-0,0926	-0,1920	-0,3036	
	4	0,0000	0,0015	0,0117	0,0374	0,0822	
	5	0,0000	0,0000	-0,0008	-0,0040	-0,0120	
	-6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	
7	-5	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0003	-0,0014	
	-4	0,0000	0,0000	-0,0003	-0,0025	-0,0098	
	-3	0,0000	-0,0002	-0,0036	-0,0171	-0,0485	
	-2	0,0000	-0,0036	-0,0272	-0,0834	-0,1717	
	-1	0,0000	-0,0389	-0,1439	-0,2825	-0,4111	
	0	0,0000	-0,2718	-0,4810	-0,5809	-0,5520	
	1	-1,0000	-0,9234	-0,7110	-0,4101	-0,0869	
8	2	0,0000	0,2657	0,4732	0,5782	0,5608	
	3	0,0000	-0,0353	-0,1314	-0,2616	-0,3890	
	4	0,0000	0,0028	0,0216	0,0670	0,1411	
	5	0,0000	-0,0001	-0,0022	-0,0107	-0,0312	
	6	0,0000	0,0000	0,0001	0,0010	0,0040	
	-7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	-6	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0001	-0,0005	
9	-5	0,0000	0,0000	0,0000	-0,0007	-0,0037	
	-4	0,0000	0,0000	-0,0008	-0,0053	-0,0201	
	-3	0,0000	-0,0004	-0,0065	-0,0297	-0,0810	
	-2	0,0000	-0,0055	-0,0411	-0,1213	-0,2370	
	-1	0,0000	-0,0515	-0,1849	-0,3455	-0,4651	
	0	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	
	1	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	

25	30	35	40	45	
-0,0081	-0,0162	-0,0288	-0,0468	-0,0709	c n = 3
-0,0582	-0,0953	-0,1417	-0,1960	-0,2555	c n = 2
-0,2387	-0,3167	-0,3901	-0,4522	-0,4968	c n = 1
-0,5686	-0,5954	-0,5849	-0,5383	-0,4593	c n = 0
-0,5380	-0,3708	-0,1987	-0,0313	0,1218	c n = -1
0,5474	0,5894	0,6011	0,5825	0,5350	c n = -2
-0,1648	-0,2258	-0,2897	-0,3532	-0,4132	c n = -3
-0,0033	-0,0078	-0,0159	-0,0290	-0,0484	ac n = 4
-0,0256	-0,0494	-0,0841	-0,1299	-0,1854	ac n = 3
-0,1179	-0,1843	-0,2591	-0,3344	-0,4009	ac n = 2
-0,3473	-0,4311	-0,4875	-0,5063	-0,4817	ac n = 1
-0,5888	-0,5446	-0,4457	-0,3049	-0,1398	ac n = 0
-0,2757	-0,0561	0,1400	0,2942	0,3933	ac n = -1
0,5918	0,5670	0,4907	0,3719	0,2241	ac n = -2
-0,2956	-0,3801	-0,4506	-0,4981	-0,5161	ac n = -3
0,0673	0,1091	0,1605	0,2194	0,2823	ac n = -4
-0,0013	-0,0038	-0,0089	-0,0181	-0,0331	c n = 5
-0,0112	-0,0255	-0,0498	-0,0859	-0,1345	c n = 4
-0,0568	-0,1048	-0,1684	-0,2427	-0,3186	c n = 3
-0,1943	-0,2856	-0,3714	-0,4340	-0,4577	c n = 2
-0,4362	-0,4930	-0,4897	-0,4215	-0,2956	c n = 1
-0,5308	-0,3958	-0,2084	-0,0036	0,1815	c n = 0
-0,0224	0,2039	0,3571	0,4194	0,3894	c n = -1
0,5475	0,4304	0,2582	0,0614	-0,1269	c n = -2
-0,4056	-0,4775	-0,5030	-0,4738	-0,3902	c n = -3
0,1455	0,2225	0,3043	0,3802	0,4383	c n = -4
-0,0275	-0,0528	-0,0891	-0,1365	-0,1932	c n = -5
-0,0005	-0,0018	-0,0049	-0,0113	-0,0228	ac n = 6
-0,0049	-0,0132	-0,0294	-0,0567	-0,0974	ac n = 5
-0,0268	-0,0585	-0,1077	-0,1735	-0,2497	ac n = 4
-0,1031	-0,1795	-0,2680	-0,3519	-0,4103	ac n = 3
-0,2780	-0,3771	-0,4403	-0,4435	-0,3757	ac n = 2
-0,4872	-0,4813	-0,3861	-0,2187	-0,0164	ac n = 1
-0,4069	-0,1864	0,0517	0,2474	0,3544	ac n = 0
0,1900	0,3663	0,4140	0,3375	0,1711	ac n = -1
0,4303	0,2220	-0,0117	-0,2147	-0,3407	ac n = -2
-0,4761	-0,4945	-0,4320	-0,2965	-0,1138	ac n = -3
0,2358	0,3339	0,4137	0,4538	0,4392	ac n = -4
-0,0685	-0,1242	-0,1957	-0,2752	-0,3513	ac n = -5
0,0113	0,0256	0,0496	0,0852	0,1327	ac n = -6
-0,0002	-0,0008	-0,0027	-0,0071	-0,0157	c n = 7
-0,0021	-0,0068	-0,0173	-0,0374	-0,0705	c n = 6
-0,0125	-0,0322	-0,0679	-0,1224	-0,1935	c n = 5
-0,0528	-0,1088	-0,1865	-0,2749	-0,3538	c n = 4
-0,1629	-0,2637	-0,3579	-0,4134	-0,4026	c n = 3
-0,3559	-0,4346	-0,4352	-0,3421	-0,1707	c n = 2
-0,4880	-0,3926	-0,2005	-0,0311	-0,2287	c n = 1

l	n	θ°				
		0	5	10	15	20
7	0	0,0000	—0,3096	—0,5247	—0,5823	—0,4722
	1	—1,0000	—0,8980	—0,6226	—0,2558	0,0961
	2	0,0000	0,3046	0,5195	0,5839	0,4855
	3	0,0000	—0,0479	—0,1734	—0,3288	—0,4529
	4	0,0000	0,0046	0,0348	0,1044	0,2088
	5	0,0000	—0,0003	—0,0047	—0,0217	—0,0605
	6	0,0000	0,0000	0,0004	0,0030	0,0116
	7	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0002	—0,0013
	—8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	—7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0002
	—6	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0002	—0,0014
	—5	0,0000	0,0000	—0,0001	—0,0016	—0,0081
	—4	0,0000	0,0000	—0,0015	—0,0100	—0,0363
	—3	0,0000	—0,0007	—0,0106	—0,0471	—0,1227
	—2	0,0000	—0,0080	—0,0583	—0,1652	—0,3028
	—1	0,0000	—0,0655	—0,2279	—0,4015	—0,4903
8	0	0,0000	—0,3456	—0,5566	—0,5560	—0,3568
	1	—1,0000	—0,8693	—0,5276	—0,1048	0,2444
	2	0,0000	0,3415	0,5535	0,5606	0,3721
	3	0,0000	—0,0620	—0,2175	—0,3889	—0,4873
	4	0,0000	0,0071	0,0515	0,1484	0,2788
	5	0,0000	—0,0005	—0,0084	—0,0376	—0,1004
	6	0,0000	0,0000	—0,0010	0,0067	0,0248
	7	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0008	—0,0042
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004
	—9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	—8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0001
	—7	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0001	—0,0005
	—6	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0005	—0,0032
	—5	0,0000	0,0000	—0,0003	—0,0033	—0,0156
	—4	0,0000	0,0000	—0,0026	—0,0171	—0,0593
	—3	0,0000	—0,0011	—0,0164	—0,0698	—0,1721
	—2	0,0000	—0,0112	—0,0788	—0,2130	—0,3623
	—1	0,0000	—0,0809	—0,2715	—0,4463	—0,4821
9	0	0,0000	—0,3797	—0,5762	—0,5040	—0,2182
	1	—1,0000	—0,8375	—0,4281	0,0357	0,3476
	2	0,0000	0,3762	0,5747	0,5107	0,2337
	3	0,0000	—0,0775	—0,2621	—0,4378	—0,4869
	4	0,0000	0,0101	0,0718	0,1970	0,3440
	5	0,0000	—0,0009	—0,0136	—0,0590	—0,1492
	6	0,0000	0,0000	0,0019	0,0127	0,0451
	7	0,0000	0,0000	—0,0002	—0,0020	—0,0099
	8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0015
	9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0001
	—9	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
	—8	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0001
	—7	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0001	—0,0005
	—6	0,0000	0,0000	0,0000	—0,0005	—0,0032
	—5	0,0000	0,0000	—0,0003	—0,0033	—0,0156
	—4	0,0000	0,0000	—0,0026	—0,0171	—0,0593
	—3	0,0000	—0,0011	—0,0164	—0,0698	—0,1721
	—2	0,0000	—0,0112	—0,0788	—0,2130	—0,3623
	—1	0,0000	—0,0809	—0,2715	—0,4463	—0,4821

	25	30	35	40	45	
	-0,2388	0,0351	0,2574	0,3587	0,3152	$c n = 0$
	0,3370	0,4114	0,3204	0,1181	-0,1096	$c n = -1$
	0,2635	-0,0058	-0,2347	-0,3536	-0,3334	$c n = -2$
	-0,4935	-0,4252	-0,2591	-0,0399	0,1691	$c n = -3$
	0,3244	0,4159	0,4487	0,4012	0,2745	$c n = -4$
	-0,1260	-0,2132	-0,3072	-0,3854	-0,4236	$c n = -5$
	0,0314	0,0675	0,1223	0,1934	0,2727	$c n = -6$
	-0,0046	-0,0125	-0,0277	-0,0533	-0,0913	$c n = -7$
	-0,0001	-0,0004	-0,0015	-0,0044	-0,0108	$ac n = 8$
	-0,0009	-0,0035	-0,0101	-0,0246	-0,0509	$ac n = 7$
	-0,0058	-0,0176	-0,0424	-0,0856	-0,1485	$ac n = 6$
	-0,0263	-0,0642	-0,1264	-0,2091	-0,2968	$ac n = 5$
	-0,0904	-0,1741	-0,2734	-0,3590	-0,3945	$ac n = 4$
	-0,2310	-0,3416	-0,4087	-0,3914	-0,2752	$ac n = 3$
	-0,4143	-0,4392	-0,3458	-0,1521	0,0770	$ac n = 2$
	-0,4348	-0,2419	0,0166	0,2369	0,3302	$ac n = 1$
	-0,0537	0,2202	0,3534	0,3033	0,1119	$ac n = 0$
	0,4048	0,3457	0,1286	-0,1256	-0,2929	$ac n = -1$
	0,0760	-0,2011	-0,3487	-0,3186	-0,1425	$ac n = -2$
	-0,4529	-0,2835	-0,0369	0,1942	0,3221	$ac n = -3$
	0,3959	0,4450	0,3899	0,2328	0,0175	$ac n = -4$
	-0,1957	-0,3037	-0,3896	-0,4160	-0,3586	$ac n = -5$
	0,0641	0,1290	0,2151	0,3063	0,3774	$ac n = -6$
	-0,0142	-0,0361	-0,0751	-0,1334	-0,2076	$ac n = -7$
	0,0019	0,0061	0,0155	0,0334	0,0630	$ac n = -8$
	0,0000	-0,0002	-0,0009	-0,0028	-0,0075	$c n = 9$
	-0,0004	-0,0018	-0,0059	-0,0161	-0,0367	$c n = 8$
	-0,0026	-0,0095	-0,0263	-0,0593	-0,1131	$c n = 7$
	-0,0129	-0,0372	-0,0840	-0,1559	-0,2438	$c n = 6$
	-0,0483	-0,1105	-0,2002	-0,2974	-0,3656	$c n = 5$
	-0,1393	-0,2471	-0,3474	-0,3999	-0,3349	$c n = 4$
	-0,2994	-0,3950	-0,3970	-0,2766	-0,0642	$c n = 3$
	-0,4407	-0,3822	-0,1874	0,0661	0,2608	$c n = 2$
	-0,3329	-0,0593	0,2041	0,3257	0,2526	$c n = 1$
	0,1193	0,3313	0,3217	0,1233	-0,1293	$c n = 0$
	0,3924	0,1989	-0,0858	-0,2853	-0,2912	$c n = -1$
	-0,1021	-0,3236	-0,3312	-0,1468	0,1051	$c n = -2$
	-0,3588	-0,1002	0,1683	0,3185	0,2846	$c n = -3$
	0,4364	0,4084	0,2468	0,0067	-0,2113	$c n = -4$
	-0,2693	-0,3753	-0,4118	-0,3414	-0,1698	$c n = -5$
	0,1097	0,2043	0,3073	0,3808	0,3854	$c n = -6$
	-0,0315	-0,0754	-0,1451	-0,2334	-0,3204	$c n = -7$
	0,0063	0,0191	0,0456	0,0909	0,1559	$c n = -8$
	-0,0008	-0,0030	-0,0087	-0,0210	-0,0436	$c n = -9$

l	n	θ°					
		50	55	60	65	70	
1	-1	-0,1786	-0,2132	-0,2500	-0,2887	-0,3290	
	0	-0,5417	-0,5792	-0,6124	-0,6408	-0,6644	
	1	-0,8214	-0,7868	-0,7500	-0,7113	-0,6710	
2	-2	-0,1368	-0,1746	-0,2165	-0,2616	-0,3031	
	-1	-0,4082	-0,4578	-0,5000	-0,5327	-0,5540	
	0	-0,6031	-0,5754	-0,5303	-0,4691	-0,3935	
	1	-0,2346	-0,1158	0,0000	0,1101	0,2120	
	2	-0,6292	0,6445	0,6495	0,6447	0,6305	
3	-3	-0,1015	-0,1385	-0,1815	-0,2296	-0,2813	
	-2	-0,3167	-0,3756	-0,4279	-0,4691	-0,4952	
	-1	-0,5191	-0,5155	-0,4844	-0,4262	-0,3434	
	0	-0,3536	-0,2288	-0,0938	0,0419	0,1689	
	1	0,2526	0,3542	0,4219	0,4529	0,4471	
	2	0,4618	0,3672	0,2568	0,1365	0,0130	
	3	-0,4667	-0,5112	-0,5446	-0,5657	-0,5737	
4	-4	-0,0751	-0,1096	-0,1519	-0,2010	-0,2553	
	-3	-0,2476	-0,3117	-0,3720	-0,4220	-0,4550	
	-2	-0,4491	-0,4706	-0,4593	-0,4125	-0,3314	
	-1	-0,4133	-0,3066	-0,1719	-0,0237	0,1213	
	0	0,0296	0,1831	0,3025	0,3746	0,3919	
	1	0,4306	0,4065	0,3281	0,2086	0,0652	
	2	0,0634	-0,0932	-0,2296	-0,3222	-0,3915	
	3	-0,5009	-0,4520	-0,3721	-0,2669	-0,1443	
	4	0,3454	0,4045	0,4557	0,4953	0,5208	
5	-5	-0,0557	-0,0869	-0,1273	-0,1764	-0,2323	
	-4	-0,1938	-0,2596	-0,3255	-0,3832	-0,4238	
	-3	-0,3844	-0,4274	-0,4367	-0,4048	-0,3303	
	-2	-0,4320	-0,3547	-0,2327	-0,0817	0,0763	
	-1	-0,1314	+0,0443	0,2011	0,3119	0,3574	
	0	0,3145	0,3738	0,3521	0,2577	0,1127	
	1	0,2813	0,1223	-0,0527	-0,2081	-0,3136	
	2	-0,2760	-0,3628	-0,3759	-0,3169	-0,1997	
	3	-0,2618	-0,1055	0,0569	0,2027	0,3114	
	4	0,4683	0,4627	0,4186	0,3376	0,2265	
	5	-0,2562	-0,3208	-0,3821	-0,4346	-0,4739	
	-6	-0,0414	-0,0691	-0,1071	-0,1552	-0,2120	
	-5	-0,1517	-0,2165	-0,2856	-0,3497	-0,3975	
6	-4	-0,3251	-0,3848	-0,4131	-0,3975	-0,3323	
	-3	-0,4236	-0,3797	-0,2780	-0,1315	0,0346	
	-2	-0,2430	-0,0691	0,1096	0,2532	0,3282	
	-1	0,1726	0,3029	0,3437	0,2877	0,1532	
	0	0,3514	0,2470	0,0768	-0,1077	-0,2528	
	1	-0,0311	-0,2098	-0,3164	-0,3244	-0,2362	
	2	-0,3646	-0,2877	-0,1364	0,0450	0,2067	
	3	0,0780	0,2384	0,3335	0,3445	0,2722	
	4	0,3649	0,2385	0,0791	-0,0865	-0,2292	
	5	-0,4103	-0,4391	-0,4284	-0,3742	-0,2795	
	6	0,1905	0,2552	0,3213	0,3825	0,4324	

75	80	85	90	
-0,3706	-0,4132	-0,4564	-0,5000	$c\ n = 1$
-0,6830	-0,6964	-0,7044	-0,7071	$c\ n = 0$
-0,6294	-0,5868	-0,5436	-0,5000	$c\ n = -1$
-0,3579	-0,4069	-0,4547	-0,5000	$ac\ n = 2$
-0,5624	-0,5567	-0,5360	-0,5000	$ac\ n = 1$
-0,3062	-0,2095	-0,1064	0,0000	$ac\ n = 0$
0,3036	0,3830	0,4488	0,5000	$ac\ n = -1$
0,6080	0,5779	0,5415	0,5000	$ac\ n = -2$
-0,3348	-0,3880	-0,4385	-0,4841	$c\ n = 3$
-0,5027	-0,4893	-0,4535	-0,3953	$c\ n = 2$
-0,2403	-0,1228	0,0016	0,1250	$c\ n = 1$
0,2781	0,3621	0,4150	0,4330	$c\ n = 0$
0,4065	0,3351	0,2389	0,1250	$c\ n = -1$
-0,1074	-0,2188	-0,3161	-0,3953	$c\ n = -2$
-0,5686	-0,5511	-0,5223	-0,4841	$c\ n = -3$
-0,3124	-0,3691	-0,4221	-0,4677	$ac\ n = 4$
-0,4655	-0,4491	-0,4041	-0,3307	$ac\ n = 3$
-0,2214	-0,0918	0,0455	0,1767	$ac\ n = 2$
0,2465	0,3369	0,3817	0,3750	$ac\ n = 1$
0,3537	0,2666	0,1431	0,0000	$ac\ n = 0$
-0,0827	-0,2158	-0,3174	-0,3750	$ac\ n = -1$
-0,4028	-0,3664	-0,2879	-0,1768	$ac\ n = -2$
-0,0137	0,1149	0,2324	0,3307	$ac\ n = -3$
0,5306	0,5243	0,5027	0,4677	$ac\ n = -4$
-0,2922	-0,3520	-0,4071	-0,4528	$c\ n = 5$
-0,4389	-0,4223	-0,3711	-0,2864	$c\ n = 4$
-0,2182	-0,0802	0,0666	0,2025	$c\ n = 3$
0,2163	0,3151	0,3558	0,3307	$c\ n = 2$
0,3304	0,2373	0,0969	-0,0624	$c\ n = 1$
-0,0517	-0,2012	-0,3051	-0,3423	$c\ n = 0$
-0,3500	-0,3119	-0,2087	-0,0625	$c\ n = -1$
-0,0480	0,1094	0,2436	0,3307	$c\ n = -2$
0,3682	0,3664	0,3079	0,2026	$c\ n = -3$
0,0956	-0,0423	-0,1736	-0,2864	$c\ n = -4$
-0,4962	-0,4999	-0,4849	-0,4529	$c\ n = -5$
-0,2740	-0,3366	-0,3938	-0,4397	$ac\ n = 6$
-0,4182	-0,4029	-0,3476	-0,2539	$ac\ n = 5$
-0,2211	-0,0774	0,0772	0,2165	$ac\ n = 4$
0,1880	0,2964	0,3358	0,2965	$ac\ n = 3$
0,3171	0,2232	0,0713	-0,0988	$ac\ n = 2$
-0,0208	-0,1846	-0,2920	-0,3125	$ac\ n = 1$
-0,3178	-0,2858	-0,1679	0,0000	$ac\ n = 0$
-0,0808	0,0951	0,2400	0,3125	$ac\ n = -1$
0,3060	0,3181	0,2416	-0,0989	$ac\ n = -2$
0,1361	-0,0299	-0,1862	-0,2964	$ac\ n = -3$
-0,3238	-0,3537	-0,3151	-0,2165	$ac\ n = -4$
-0,1538	-0,0118	0,1296	0,2538	$ac\ n = -5$
0,4654	0,4780	0,4690	0,4397	$ac\ n = -6$

l	n	0°					
		50	55	60	65	70	
7	—7	—0,0309	—0,0552	—0,0903	—0,1370	—0,1939	
	—6	—0,1186	—0,1805	—0,2508	—0,3198	—0,3744	
	—5	—0,2722	—0,3434	—0,3881	—0,3888	—0,3347	
	—4	—0,3984	—0,3871	—0,3097	—0,1735	—0,0036	
	—3	—0,3137	—0,1588	0,0275	0,1964	0,3000	
	—2	0,0345	0,2139	0,3131	0,3018	0,1864	
	—1	0,3299	0,3054	0,1703	—0,0218	—0,1978	
	0	0,1552	—0,0533	—0,2286	—0,3055	—0,2585	
	1	—0,2757	—0,3228	—0,2408	—0,0683	0,1243	
	2	—0,1931	0,0085	0,1949	0,2992	0,2869	
	3	0,3069	0,3350	0,2502	0,0854	—0,1019	
	4	0,0937	—0,0980	—0,2514	—0,3266	—0,3050	
	5	—0,4033	—0,3188	—0,1799	—0,0114	0,1525	
	6	0,3470	0,4004	0,4180	0,3898	0,3137	
	7	—0,1421	—0,2035	—0,2709	—0,3375	—0,3956	
8	—8	—0,0231	—0,0441	—0,0763	—0,1211	—0,1778	
	—7	—0,0926	—0,1504	—0,2203	—0,2928	—0,3536	
	—6	—0,2259	—0,3040	—0,3623	—0,3785	—0,3365	
	—5	—0,3638	—0,3816	—0,3302	—0,2083	—0,0384	
	—4	—0,3520	—0,2265	—0,0446	0,1418	0,2716	
	—3	—0,0850	0,1200	0,2676	0,3026	0,2125	
	—2	0,2556	0,3141	0,2326	0,0512	—0,1462	
	—1	0,2648	0,0803	—0,1314	—0,2689	—0,2690	
	0	—0,1181	—0,2734	—0,2830	—0,1500	0,0536	
	1	—0,3012	—0,1590	0,0543	+0,2298	0,2824	
	2	0,0862	0,2575	0,2945	0,1871	—0,0070	
	3	0,3023	0,1523	—0,0560	—0,2288	—0,2915	
	4	—0,1850	—0,3047	—0,3006	—0,1788	0,0095	
	5	—0,2194	—0,0301	0,1564	0,2836	0,3120	
	6	0,4016	0,3602	0,2508	0,0914	—0,0834	
9	7	—0,2872	—0,3564	—0,3966	—0,3921	—0,3351	
	8	0,1062	0,1627	0,2289	0,2985	0,3627	
	—9	—0,0173	—0,0353	—0,0646	—0,1074	—0,1634	
	—8	—0,0722	—0,1252	—0,1935	—0,2683	—0,3344	
	—7	—0,1861	—0,2674	—0,3362	—0,3667	—0,3371	
	—6	—0,3249	—0,3672	—0,3414	—0,2365	—0,0701	
	—5	—0,3654	—0,2749	—0,1065	0,0897	0,2427	
	—4	—0,1797	0,0296	0,2132	0,2926	0,2322	
	—3	0,1564	0,2874	0,2681	0,1118	—0,0974	
	—2	0,3037	0,1797	—0,0365	—0,2210	—0,2696	
	—1	0,0403	—0,1803	—0,2800	—0,2051	—0,0078	
	0	—0,2821	—0,2508	—0,0661	0,1506	0,2642	
	1	—0,1180	0,1158	0,2639	0,2402	0,0671	
	2	0,2735	0,2664	0,0993	—0,1197	—0,2572	
	3	0,0985	—0,1290	—0,2701	—0,2503	—0,0876	
	4	—0,3109	—0,2508	—0,0678	0,1410	0,2675	
	5	0,0485	0,2309	0,3038	0,2385	0,0674	
	6	0,2996	0,1349	—0,0627	—0,2279	—0,3020	
	7	—0,3768	—0,3743	—0,2979	—0,1552	0,0223	
	8	0,2343	0,3122	0,3694	0,3858	0,3475	
	9	—0,0796	—0,1303	—0,1939	—0,2646	—0,3333	

75	80	85	90	
-0,2577	-0,3227	-0,3819	-0,4281	c n = 7
-0,4010	-0,3881	-0,3300	-0,2289	c n = 6
-0,2266	-0,0788	0,0824	0,2244	c n = 5
0,1614	0,2800	0,3200	0,2693	c n = 4
0,3075	0,2166	0,0561	-0,1217	c n = 3
0,0086	-0,1680	-0,2801	-0,2871	c n = 2
-0,2922	-0,2710	-0,1439	0,0390	c n = 1
-0,1102	0,0787	0,2331	0,2923	c n = 0
0,2617	0,2923	0,2064	0,0391	c n = -1
0,1669	-0,0134	-0,1859	-0,2870	c n = -2
-0,2484	-0,3063	-0,2581	-0,1218	c n = -3
-0,1952	-0,0306	0,1405	0,2692	c n = -4
0,2770	0,3354	0,3159	0,2244	c n = -5
0,1966	0,0537	-0,0951	-0,2288	c n = -6
-0,4377	-0,4584	-0,4549	-0,4281	c n = -7
-0,2429	-0,3101	-0,3713	-0,4178	ac n = 8
-0,3861	-0,3762	-0,3164	-0,2089	ac n = 7
-0,2330	-0,0826	0,0844	0,2288	ac n = 6
0,1362	0,2651	0,3072	0,2472	ac n = 5
0,2992	0,2137	0,0469	-0,1370	ac n = 4
0,0359	-0,1518	-0,2696	-0,2655	ac n = 3
-0,2690	-0,2615	-0,1288	0,0653	ac n = 2
-0,1359	0,0619	0,2255	0,2734	ac n = 1
0,2235	0,2753	0,1850	0,0000	ac n = 0
0,1905	0,0040	-0,1817	-0,2734	ac n = -1
-0,1917	-0,2784	-0,2274	-0,0654	ac n = -2
-0,2197	-0,0495	0,1407	0,2655	ac n = -3
0,1879	0,2857	0,2655	0,1371	ac n = -4
0,2341	0,0777	-0,1031	-0,2471	ac n = -5
-0,2311	-0,3147	-0,3134	-0,2289	ac n = -6
-0,2287	-0,0871	0,0671	0,2089	ac n = -7
0,4126	0,4405	0,4423	0,4178	ac n = -8
-0,2294	-0,2987	-0,3617	-0,4085	c n = 9
-0,3728	-0,3664	-0,3055	-0,1926	c n = 8
-0,2396	-0,0876	0,0847	0,2312	c n = 7
0,1124	0,2515	0,2966	0,2289	c n = 6
0,2910	0,2130	0,0414	-0,1477	c n = 5
0,0611	-0,1362	-0,2603	-0,2472	c n = 4
-0,2465	-0,2549	-0,1190	0,0839	c n = 3
-0,1579	0,0454	0,2180	0,2565	c n = 2
0,1880	0,2623	0,1711	-0,0273	c n = 1
0,2077	0,0210	-0,1762	-0,2594	c n = 0
-0,1426	-0,2578	-0,2083	-0,0274	c n = -1
-0,2334	-0,0674	0,1375	0,2565	c n = -2
0,1206	0,2541	0,2381	0,0840	c n = -3
0,2486	0,0979	-0,1027	-0,2471	c n = -4
-0,1294	-0,2609	-0,2674	-0,1478	c n = -5
-0,2583	-0,1148	0,0718	0,2288	c n = -6
0,1874	0,2932	0,3089	0,2312	c n = -7
0,2529	0,1143	-0,0439	-0,1925	c n = -8
-0,3897	-0,4243	-0,4308	-0,4086	c n = -9

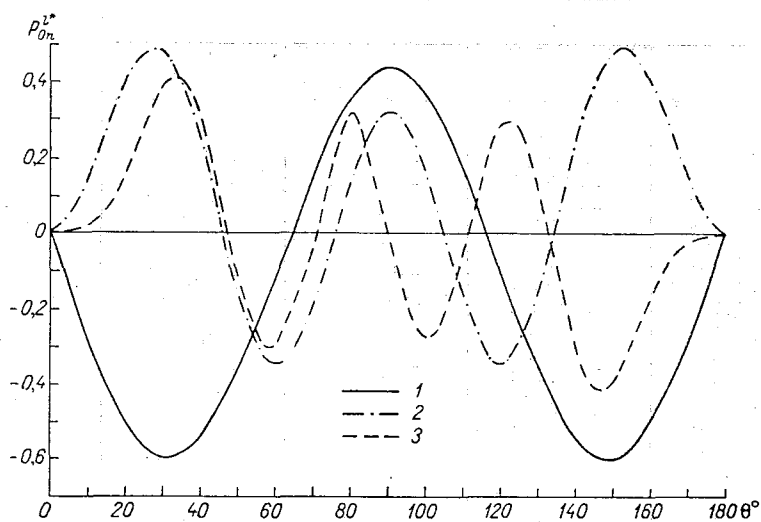


Рис. 1. Функции $P_{0n}^{l*} (\cos \theta)$.

1) $l=3, n=1$; 2) $l=6, n=2$; 3) $l=9, n=4$.

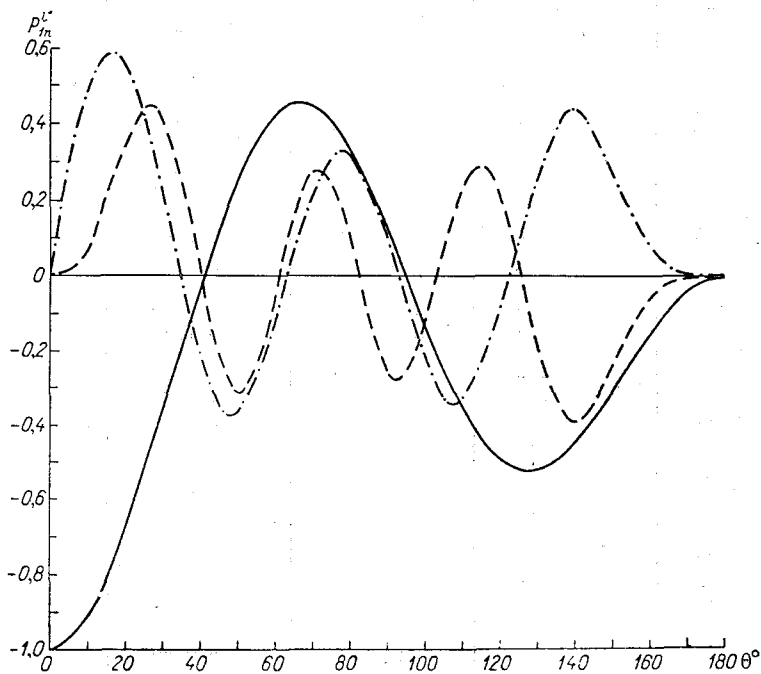


Рис. 2. Функции $P_{ln}^{l*} (\cos \theta)$.

Усл. обозн. см. рис. 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представление группы вращений и группы Лоренца, их применение. М., Физматгиз, 1958.
2. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. М., Физматгиз, 1965.
3. Ефимов В. А. Решение нелинейных уравнений динамики атмосферы на сфере. — Метеорология и гидрология, 1968, № 5.
4. Ефимов В. А. Решение гидродинамических задач на сфере методом разделения переменных. — Труды ГГО, 1968, вып. 197.
5. Ефимов В. А. Спектральное разложение векторных полей ветра. — Труды ГГО, 1969, вып. 236.
6. Ефимов В. А. Спектральная форма уравнений динамики атмосферы для системы обобщенных сферических функций. — Метеорология и гидрология, 1969, № 8.
7. Ефимов В. А. Инвариантно-групповой метод в краевых задачах планетарной динамики атмосферы. — Труды ГГО, 1970, вып. 256.
8. Чубукова А. Л. К построению корреляционной матрицы поля ветра для сферической Земли. — Метеорология и гидрология, 1969, № 8.

ОПЫТ ПРОГНОЗА ГЕОПОТЕНЦИАЛА ИЗОБАРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ 500 мб И ПРИЗЕМНОГО ДАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА ТЕЛЕСКОПИЗАЦИИ

Прогноз приземного поля давления до настоящего времени остается основной задачей в области численного краткосрочного предсказания погоды, несмотря на то, что уже разработан целый ряд схем, позволяющих с приемлемой степенью точности прогнозировать приземное поле. Эти прогнозы осуществляются для большой территории с шагом сетки порядка 300 км. Для высотного поля давления такой шаг является удовлетворительным и соответствует среднему расстоянию между аэрологическими станциями.

Приземное поле давления требуется знать с большей степенью детализации. Исходная информация о давлении на уровне моря имеется на достаточно густой сети станций и принципиально позволяет рассчитывать поле давления с шагом порядка 100 км. Такой прогноз по ограниченной территории с малым шагом сетки необходим для решения многих прикладных задач.

Нам представляется, что для указанной цели перспективным является метод телескопизации. Сущность этого метода состоит в том, что вначале прогнозируется поле давления для расширенной территории с фиктивными граничными условиями, а затем полученный фон уточняется путем решения задачи для малой территории с реальными граничными условиями. Изложенный метод нами был реализован применительно к прогнозу геопотенциала AT_{500} и приземного давления по схеме, предложенной в [1].

Укажем уравнения, лежащие в основе схемы:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = K \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_{0,t} + (1 - K) \left[1,25 \left(\frac{\partial H_{500}}{\partial t} - \frac{\partial H_{1000}^{500}}{\partial t} \right) \right], \quad (1)$$

$$\nabla^2 \frac{\partial H_{500}}{\partial t} - \frac{1}{L_0^2} \frac{\partial H_{500}}{\partial t} = - \frac{g}{l} \{ H, \nabla^2 H \}_{500} - \beta \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)_{500}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_{1000}^{500}}{\partial t} = - \frac{g}{l} \{ H_{500}, H_{1000}^{500} \}. \quad (3)$$

Для решения (2) на границах области значения $\frac{\partial H_{500}}{\partial t}$ считаются заданными. Здесь $\frac{\partial p}{\partial t}$ — изменение давления у земли в момент времени t ; $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{0,t}$ — изменение давления у земли в момент времени t за счет адвекции исходного поля барических тенденций; K — коэффициент, учитывающий вклад исходного поля барических тенденций в изменение приземного давления (значения K зависят от пути, пройденного частицей от начального момента t_0 до момента t); $L_0^2 = \frac{RT}{f^2}$ — параметр Обухова; H_{500} , H_{1000} — высоты изобарических поверхностей 500 и 1000 мб; $H_{1000}^{500} = H_{500} - H_{1000}$; l — параметр Кориолиса.

Подробно методика определения K и $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{0,t}$ описана в [1]. Здесь мы лишь укажем, что точность определения этого члена существенно зависит от точности предвычисления поля геопотенциала AT_{500} , и поэтому сосредоточим внимание на прогнозе AT_{500} . Для решения уравнения (2) применим релаксационный метод.

Если ввести обозначения

$$\frac{\partial H_{500}}{\partial t} \delta t = h, \quad -\frac{g}{l} \{H, \nabla^2 H\}_{500} - \beta \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_{500} = F \quad (4)$$

и заменить в (2) дифференциальные операторы конечно-разностными, то уравнение (2) примет вид

$$h_{i-1,j} + h_{i+1,j} + h_{i,j-1} + h_{i,j+1} - \left(4 + \frac{d^2}{L_0^2}\right) h_{ij} = d^2 F_{ij}. \quad (5)$$

Значения h_{ij} во внутренних узлах регулярной сетки рассчитываются по релаксационной формуле

$$h_{ij}^{(s+1)} = h_{ij}^{(s)} + \alpha \left[h_{i+1,j}^{(s)} + h_{i-1,j}^{(s+1)} + h_{i,j+1}^{(s)} + h_{i,j-1}^{(s+1)} - \left(4 + \frac{d^2}{L_0^2}\right) h_{ij}^{(s)} - d^2 F_{ij}^{(s)} \right]. \quad (6)$$

Как показали расчеты, быстрота сходимости максимальна при $\alpha = 0,3$.

По предвычисленным значениям H_{500} рассчитываются величины K , $\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_{0,t}$, а затем находится $\frac{\partial p}{\partial t}$ и прогностическое значение приземного давления.

Изложенная выше схема расчетов была применена для прогноза приземного давления по территории Юго-Восточной Азии. Были выбраны две области — расширенная и малая, причем малая область находится внутри расширенной. Для удобства счета число узлов

регулярной сетки (26×22) одинаково для большой и малой областей. Однако для малой шаг сетки 150 км, для большой — 300 км. Временной шаг для расширенной области 1 час, для малой — 30 мин.

Отличительной особенностью алгоритма расчета, как уже указывалось ранее, является то, что для расширенной области прогноз осуществляется при фиктивных граничных условиях (h_{ij} на

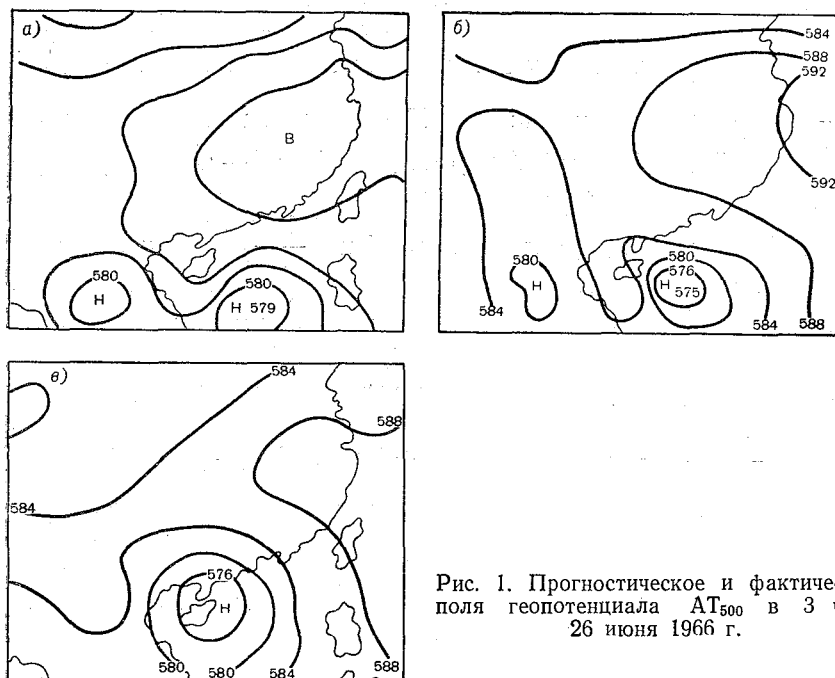


Рис. 1. Прогностическое и фактическое поля геопотенциала AT_{500} в 3 часа 26 июня 1966 г.

граничном контуре полагаются равными нулю), в то время как для малой значения тенденции геопотенциала AT_{500} в граничных узлах получаются путем интерполяции:

$$h_{ij} = \frac{1}{2m} \sum_{s=1}^m h_s, \quad (7)$$

где h_{ij} — значения тенденций в промежуточных узлах малой области, h_s — значения тенденций в узлах расширенной области. Величина $m=2$ или $m=4$ в зависимости от взаимного расположения узлов обеих областей. Так как шаг по времени для малой области вдвое меньше, чем для большой, то граничные значения h_{ij} для этой области сохраняются в течение двух временных шагов. По интерполированным значениям h_{ij} в граничных узлах вычисляются значения H_{ij} , необходимые для вычисления правой части уравнения (5).

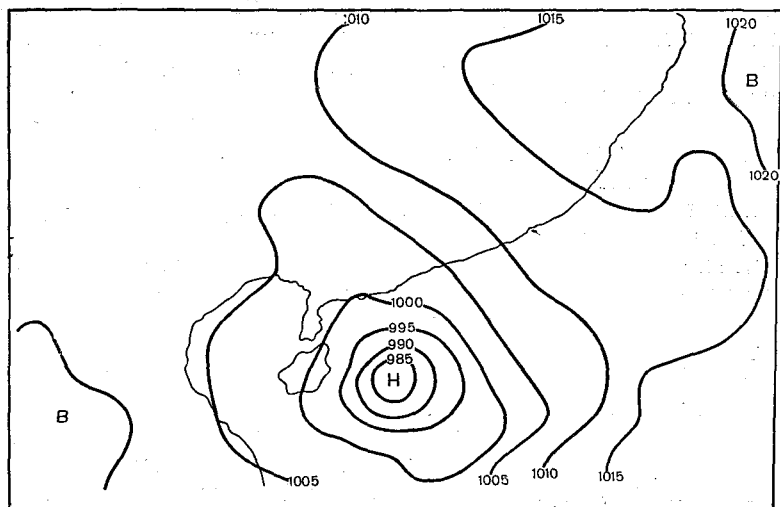


Рис. 2. Прогностическое поле приземного давления в 3 часа 26 июня 1966 г.

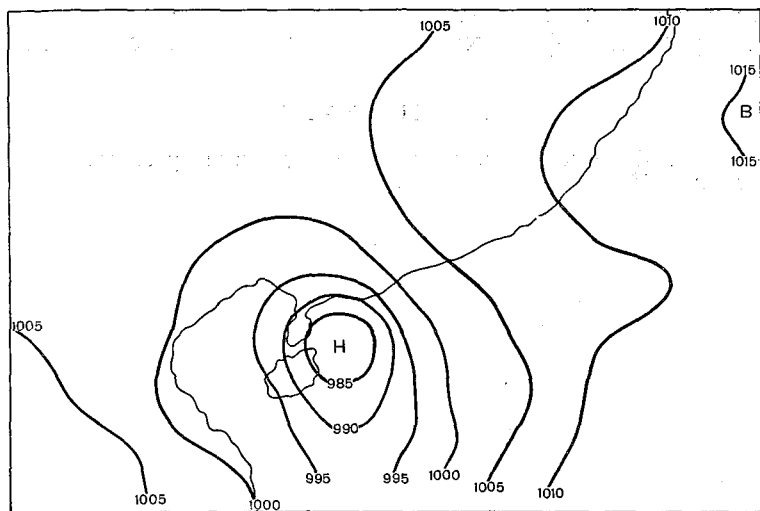


Рис. 3. Фактическое поле приземного давления в 3 часа 26 июня 1966 г.

На рис. 1 приведен пример прогноза AT_{500} на 24 часа с применением телескопизации. Для сравнения приводятся результаты расчетов только для малой области. На рис. 1 *а* представлено прогностическое поле геопотенциала для малой области, полученное при расчете по расширенной области с шагом 300 км и при фиктивных граничных условиях. На рис. 1 *б* приведено прогностическое поле геопотенциала AT_{500} , рассчитанное с шагом 150 км при граничных условиях, полученных путем интерполяции, на рис. 1 *в* — фактическое поле геопотенциала AT_{500} .

Как видно из полученных результатов, расчеты с шагом 300 км дают более высокий фон высоты изобарической поверхности, примерно на 4 дкм, хотя основные черты поля схвачены. Циклонический центр смещен к югу и давление в нем также завышено.

Прогностическое поле, рассчитанное с шагом 150 км, значительно ближе к фактическому. Здесь уже нет систематического завышения высоты изобарической поверхности, поле высот предсказано весьма успешно. Эта успешность особенно высока в области циклонического центра. Расчетное положение центра совпадает с фактическим в пределах одного шага сетки, а давление в центре равно фактическому.

На рис. 2 и 3 приведены результаты прогноза приземного поля давления. (Рисунки для удобства даны в увеличенном масштабе.) Сравнение прогностического и фактического полей приземного давления показывают, что с помощью данной схемы удалось хорошо предсказать положение и давление в центре тропического циклона «Ора».

Нам представляется, что предлагаемый метод является одним из путей уточнения фоновых прогнозов для малых областей.

ЛИТЕРАТУРА

Ильин Б. М. Об одной схеме прогноза поля давления у земли. Труды ГГО, 1968, вып. 226.

СОДЕРЖАНИЕ

М. И. Юдин. К определению среднего движения в задачах долгосрочного прогноза и теории климата	3
В. П. Дымников, Г. Р. Контарев, Г. М. Виноградова, Л. Е. Каминская. Неадиабатическая оперативная схема краткосрочного прогноза погоды	15
В. А. Ефимов. Периодические спектральные решения совмещенной системы уравнений планетарной динамики атмосферы и гидросферы	24
Л. Р. Ракипова, Л. К. Ефимова. Численные эксперименты по моделированию циркуляционного и термического режима зимней мезосферы	44
И. Н. Русин. К расчету температуры квазиоднородного слоя океана	59
Л. Р. Дмитриева-Арраго, Г. В. Паршина, Л. В. Самойлова. Расчет потоков коротковолновой радиации в облачных условиях	70
В. Ф. Ким. Об одной разностной схеме для численного решения задачи прогноза погоды	79
Б. М. Ильин, Л. В. Руховец. О выборе начального приближения при численном решении краевых задач динамики атмосферы	88
Н. К. Гриб, И. И. Поляк. Статистические методы объективного анализа метеорологических полей	94
Г. И. Рейнюк. Краткие четырехзначные таблицы обобщенных сферических функций	102
Нгуен Ван Куанг, В. А. Шнайдман. Опыт прогноза геопотенциала изобарической поверхности 500 мб и приземного давления с использованием метода телескопизации	122

Труды ГГО, вып. 272

Численный прогноз погоды и теория климата

Редактор Г. И. Слабкович

Техн. редактор А. Г. Алексеев

Корректоры: Т. В. Алексеева, Г. С. Макарова

Сдано в набор 23/XI 1971 г. Подписано к печати 27/III 1972 г. М-08103.
Бумага 60×90¹/₈. Типографская № 1. Печ. л. 8,25. Уч.-изд. л. 8,85. Тираж 750 экз.

Индекс МЛ-208. Заказ № 641. Цена 62 коп.

Гидрометеоиздат. Ленинград, В-53, 2-я линия, д. 23.

Ленинградская типография № 8 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Ленинград. Прачечный пер., д. 6.