

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ГЛАВНАЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ
имени А. И. ВОЕЙКОВА

06
Т 78

ТРУДЫ

ВЫПУСК 168

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ И ПРОГНОЗ ПОГОДЫ

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук
М. И. ЮДИНА

194926

БИБЛИОТЕКА
Ленинградского
Гидрометеорологического
Института



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД • 1965

АННОТАЦИЯ

В сборник включены статьи по статистическим исследованиям (разложение полей геопотенциала по естественным ортогональным функциям, оптимальной интерполяции и др.) и их использованию для некоторых метеорологических задач. Ряд статей посвящен разработке и испытанию схем численного прогноза погоды.

Сборник рассчитан на специалистов, работающих в области динамической и синоптической метеорологии, а также на студентов старших курсов и аспирантов соответствующих факультетов.

К. В. ПЯТЫГИНА, В. Г. БЛАЖЕВИЧ, Э. А. ФЕДОРОВА

РЕЗУЛЬТАТЫ ИСПЫТАНИЯ АГЕОСТРОФИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПРОГНОЗА ПОЛЕЙ ВЕТРА И ТЕМПЕРАТУРЫ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ УРОВНЕЙ АТМОСФЕРЫ

Анализируются результаты 27 суточных прогнозов полей ветра и температуры для уровней 850, 500, 300 и 200 мб. Предвычисление производилось по агеострофической модели для схемы в переменных Лагранжа при помощи электронной вычислительной машины большого быстродействия.

1. В агеострофической модели прогноз полей ветра и температуры производится на основании расчета составляющих отклонений ветра от геострофического. При этом горизонтальные составляющие агеострофического ветра (u' , v') и вертикальная скорость ($\tilde{w}$) определяются из уравнений эллиптического типа [1, 2, 3].

$$\left. \begin{aligned} \zeta^2 \frac{\partial^2 \hat{u}'}{\partial \zeta^2} + d^2 \Delta \hat{u}' &= -\zeta \Psi_u \\ \zeta^2 \frac{\partial^2 \hat{v}'}{\partial \zeta^2} + d^2 \Delta \hat{v}' &= -\zeta \Psi_v \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \zeta^2} + d^2 \Delta \tilde{w} = -\zeta F_w. \quad (2)$$

Решение уравнений (1) и (2) можно записать в виде:

$$\left. \begin{aligned} u'(\zeta) &= \sum_{i,j} \mu_i(\zeta, \eta_j) M_i(\eta_j) + \sum_{i,j} \nu_i(\zeta, \eta_j) N_i(\eta_j) \\ v'(\zeta) &= \sum_{i,j} \mu_i(\zeta, \eta_j) P_i(\eta_j) + \sum_{i,j} \nu_i(\zeta, \eta_j) S_i(\eta_j) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\tilde{w}(\zeta) = \sum_j \{ \mu'_0(\zeta, \eta_j) [F_w(\eta_j)]_0 + \mu'_1(\zeta, \eta_j) [F_w(\eta_j)]_1 \}. \quad (4)$$

Обозначения к уравнениям (1)–(4) даны в работе [3]. Функции влияния, или «весовые» функции, рассчитывались для треугольной сетки точек с шагом 330 км. Их значения, несколько уточненные по сравнению со значениями, полученными в работе [3], приведены в табл. 1 и 2 Приложения. Уточнение функций влияния произведено за счет того, что при прогнозе полей ветра и температуры влияние поверхности 100 мб на более низкие уровни в настоящее время совершенно не учитывается, в то время как ранее за счет влияния

поверхности 100 мб были несколько увеличены функции влияния поверхности 200 мб. Так как временные изменения метеоэлементов, происходящие на уровне 100 мб, значительно меньше временных изменений, происходящих на уровне 200 мб, то таким образом мы завышали влияние поверхности 200 мб.

В данной работе, в отличие от работ [3 и 4], прогноз полей ветра и температуры производился по схеме в переменных Лагранжа.

Опишем вкратце методику предвычисления по схеме в переменных Лагранжа.

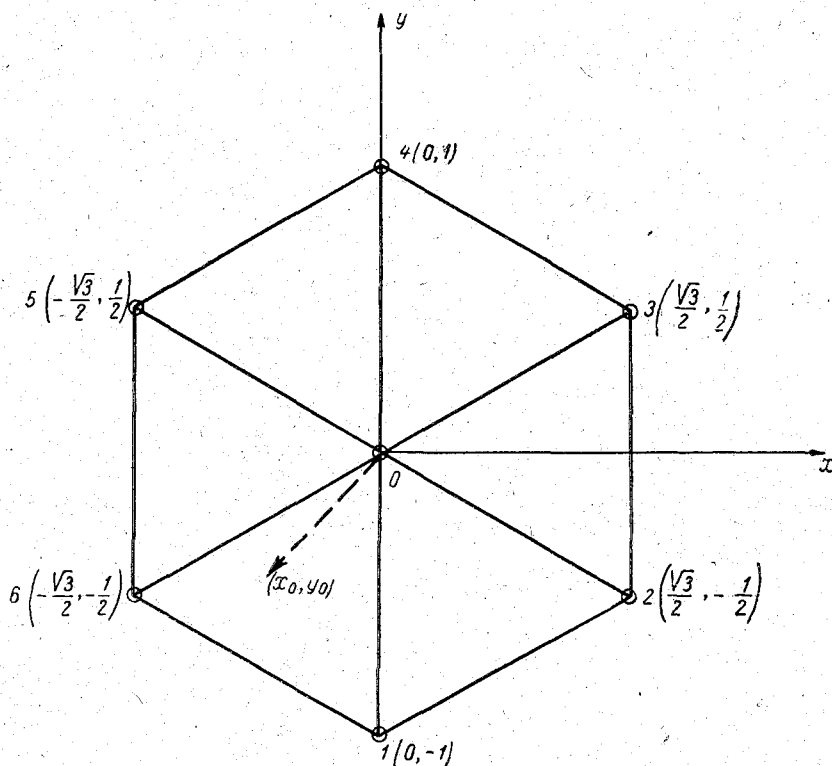


Рис. 1.

После вычисления составляющих агеострофического ветра u' , v' и вертикальной скорости переходим к расчету изменения со временем составляющих скорости ветра и температуры. С этой целью воспользуемся равенствами:

$$\left. \begin{aligned} u' &= -\frac{1}{l} \cdot \frac{dv}{dt} \\ v' &= \frac{1}{l} \cdot \frac{du}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и уравнением притока тепла

$$\frac{dT}{dt} - \frac{l^2 d^2}{R \zeta} \tilde{\omega} = 0. \quad (6)$$

При расчете изменения температуры за счет вертикальных движений учитываются также вертикальные скорости, возникающие за счет приземного турбулентного трения.

Задача решается шагами по времени. Временной шаг τ принимается равным одному часу. Расчет изменений со временем ветра и температуры производится через индивидуальные производные.

Для определения индивидуальных производных на каждом временном шаге рассчитываются траектории воздушных частиц (против направления ветра) с учетом агеострофичности движения. Если начало координат поместить в рассматриваемую точку сетки, то

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -u\tau \\ y_0 &= -v\tau \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Здесь $u = u_r + u'$, $v = v_r + v'$ — значения составляющих скорости действительного ветра в рассматриваемой точке сетки в начальный момент времени; x_0 , y_0 — координаты точки, выйдя из которой воздушная частица через промежуток времени τ окажется в данной точке сетки.

Значения x_0 , y_0 вычисляем в относительных единицах.

Далее определяем, в каком из шести треугольников окажется точка (x_0, y_0) . Обратимся к рис. 1, на котором начало координат совпадает с рассматриваемой точкой сетки, а координаты шести ближайших точек сетки даны в относительных единицах. Вычисляем расстояния точки (x_0, y_0) до сторон шестиугольника (1, 2, 3, 4, 5, 6), сравниваем эти расстояния и по минимальному расстоянию определяем соответствующий треугольник ABC (рис. 2).

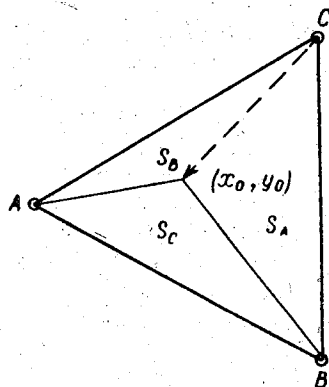


Рис. 2.

Затем линейной интерполяцией по значениям в трех точках сетки находим соответствующие значения u , v , T , u' , v' , $\tilde{w}$ в точке (x_0, y_0) .

Интерполяцию производим по следующей формуле (см. [8]):

$$f(x_0, y_0) = \frac{f_A s_A + f_B s_B + f_C s_C}{S} \quad (8)$$

Здесь S — площадь треугольника ABC ; s_A , s_B , s_C — площади малых треугольников, изображенных на рис. 2.

Определив значения u , v , T , u' , v' , $\tilde{w}$ в точках (x_0, y_0) , можно получить значения u , v , T в точках сетки, которые будут являться исходными значениями составляющих скоростей ветра и температуры для момента $t_0 + \tau$:

$$\left. \begin{aligned} u(x_0 + u_0\tau, y_0 + v_0\tau, \zeta_0, t_0 + \tau) &= u(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) + \\ &\quad + l\tau v'(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) \\ v(x_0 + u_0\tau, y_0 + v_0\tau, \zeta_0, t_0 + \tau) &= v(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) - \\ &\quad - l\tau u'(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) \\ T(x_0 + u_0\tau, y_0 + v_0\tau, \zeta_0, t_0 + \tau) &= T(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) + \\ &\quad + \frac{d^2 l^2}{R \zeta_0} \tau \tilde{w}(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Далее процесс вычислений повторяется.

Если u , v , u' , v' вычислять в м/сек., а вертикальную скорость $\tilde{w}$,

предварительно заменив ее действительной вертикальной скоростью w [1], — в см/сек., то для $\tau=1$ часу формулы (9) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} u(x_0 + u_0\tau, y_0 + v_0\tau, \zeta_0, t_0 + \tau) &= u(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) + \\ &+ 0,525 \sin \varphi v'(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) \\ v(x_0 + u_0\tau, y_0 + v_0\tau, \zeta_0, t_0 + \tau) &= v(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) - \\ &- 0,525 \sin \varphi u'(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) \\ T(x_0 + u_0\tau, y_0 + v_0\tau, \zeta_0, t_0 + \tau) &= T(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) - \\ &- c^2(\zeta_0) w(x_0, y_0, \zeta_0, t_0) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Коэффициент $c^2(\zeta_0)$ для рассматриваемых уровней имеет следующие значения:

Уровень (мб)	850	500	300	200
$c^2(\zeta_0)$	0,129	0,145	0,162	0,346

II. Расчеты по агеострофической модели производились при помощи электронной вычислительной машины большого быстрогодействия.

В качестве исходных данных использовались поля геопотенциала и температуры на уровнях 850, 500, 300 и 200 мб (для каждого уровня 333 значения геопотенциала и 263 значения температуры).

В отличие от схемы в переменных Эйлера [4], для схемы в переменных Лагранжа сглаживание через определенные промежутки времени не производилось [5]. Также не потребовалось сглаживание и на высоких уровнях (300, 200 мб) в исходный момент времени [5]. Это, очевидно, связано с интерполяцией величин u, v, T, u', v', w , что приводит к некоторому их сглаживанию на каждом временном шаге.

В табл. 1 дана оценка оправдываемости 27 опытных прогнозов на сутки. В последней строке этой таблицы приведена средняя оценка оправдываемости. В табл. 2 и 3 представлены средние оценки оправдываемости соответственно для обычных дат (первые 14 случаев табл. 1) и дат, рекомендованных координационной комиссией по численным методам прогноза (последние 13 случаев) [7]. Средние оценки для обычных дат и дат координационной комиссии представлены отдельно ввиду того, что даты координационной комиссии обычно являются более трудными случаями для прогноза.

В табл. 1—3 введены следующие обозначения:

V_Φ — фактическое значение модуля скорости геострофического ветра (м/сек.);

δ_V — средняя абсолютная ошибка прогноза модуля скорости ветра (м/сек.);

$\alpha = \sqrt{\frac{(\delta u)^2 + (\delta v)^2}{V_\Phi^2}}$ — отношение средней квадратической векторной ошибки прогноза ветра к среднему квадратическому значению скорости; $\delta_\Phi T$ — среднее абсолютное значение фактического изменения температуры ($^\circ\text{C}$);

δ_T — средняя абсолютная ошибка предвычисления температуры ($^\circ\text{C}$);

R_T — коэффициент корреляции между предвычисленными и фактическими изменениями температуры за сутки.

В табл. 2 и 3, кроме абсолютной ошибки прогноза модуля скорости δ_V и величины α , даны также ошибка прогноза вектора скорости

$\delta \vec{V}$ м/сек. и относительная векторная ошибка $\alpha' = \frac{\delta \vec{V}}{V_\Phi}$.

Из табл. 2 и 3 видно, что α имеет наименьшее значение для уровня 500 мб.

Таблица 1

Случай	Начальный срок	Уровень, мб																							
		850					500					300					200								
		V_{Φ}	δ_V	α	$\delta_{\Phi T}$	δ_T	R_T	V_{Φ}	δ_V	α	$\delta_{\Phi T}$	δ_T	R_T	V_{Φ}	δ_V	α	$\delta_{\Phi T}$	δ_T	R_T						
1	1959 г. 6/VII	7,4	2,4	0,65	2,6	1,7	0,80	13,2	3,8	0,60	2,3	1,9	0,65	19,0	7,2	0,73	2,3	1,9	0,63	20,6	8,5	0,84	3,9	3,3	0,67
2	7/VII	6,7	1,9	0,56	2,1	1,5	0,71	14,1	3,4	0,56	1,6	1,2	0,53	20,0	6,5	0,68	2,5	2,2	0,63	21,7	6,5	0,69	2,5	3,4	0,32
3	8/VII	6,9	2,6	0,63	2,4	2,1	0,56	14,1	4,5	0,58	2,4	1,6	0,77	20,9	8,0	0,61	2,2	1,6	0,60	19,0	6,8	0,66	3,5	2,8	0,67
4	9/VII	6,6	1,8	0,66	1,8	1,5	0,63	13,4	4,4	0,54	2,1	1,6	0,74	22,6	8,8	0,61	2,0	2,0	0,45	20,8	8,4	0,67	2,3	2,1	0,66
5	10/VII	7,3	3,5	0,79	2,8	2,2	0,61	14,0	4,1	0,68	1,9	1,6	0,60	20,8	6,8	0,73	2,0	2,3	0,41	19,3	7,9	0,74	2,9	3,3	0,30
6	11/VII	9,1	3,3	0,71	3,7	2,2	0,78	17,6	7,1	0,65	3,1	2,5	0,66	25,3	10,5	0,74	3,7	1,9	0,85	24,4	10,4	0,82	4,0	3,5	0,55
7	12/VII	11,2	4,5	0,58	3,2	1,3	0,91	18,8	6,5	0,56	2,6	2,0	0,71	24,5	9,7	0,65	2,8	2,1	0,76	22,4	9,1	0,69	3,7	3,8	0,47
8	13/VII	8,5	3,2	0,65	3,4	1,5	0,92	16,3	4,9	0,61	2,4	1,7	0,76	23,1	7,2	0,64	2,5	2,3	0,45	21,6	7,5	0,75	4,0	3,9	0,67
9	14/VII	7,2	2,1	0,60	3,8	1,8	0,89	13,5	3,3	0,49	2,6	1,3	0,86	18,3	5,4	0,50	2,4	1,5	0,83	18,8	5,9	0,53	3,9	4,4	0,81
10	15/VII	6,4	3,5	0,87	1,9	2,0	0,69	10,7	3,8	0,74	2,0	1,4	0,72	17,5	6,2	0,64	1,9	1,8	0,47	18,1	5,7	0,65	4,1	3,0	0,68
11	18/IV	7,9	2,8	0,71	3,7	1,7	0,88	15,4	5,2	0,62	3,1	1,9	0,79	21,9	10,1	0,77	2,9	3,0	0,52	19,8	9,7	0,89	3,4	2,3	0,74
12	19/IV	8,9	3,3	0,68	3,9	2,3	0,81	15,3	6,4	0,69	3,2	2,6	0,69	22,0	9,0	0,74	2,6	3,0	0,35	18,9	5,6	0,71	3,8	3,1	0,62
13	20/IV	9,1	3,1	0,71	4,4	2,9	0,76	15,9	5,6	0,62	2,8	1,8	0,78	20,7	7,0	0,65	2,2	2,0	0,53	19,8	7,2	0,71	4,2	3,0	0,74
14	21/IV	7,2	2,3	0,68	3,7	2,0	0,86	15,8	4,3	0,44	3,2	1,9	0,83	22,7	8,1	0,59	2,6	1,9	0,76	20,2	5,2	0,54	3,8	2,2	0,83
15	1957 г. 16/IX	6,9	3,2	0,88	2,5	1,7	0,75	12,7	3,8	0,69	2,1	1,7	0,60	20,7	6,5	0,67	1,8	1,9	0,47	21,9	7,6	0,72	3,4	2,9	0,61
16	17/IX	9,2	5,0	0,93	2,4	2,1	0,55	13,7	5,3	0,78	2,3	2,3	0,42	20,6	9,2	0,87	2,4	2,2	0,68	20,5	9,2	0,84	3,1	3,1	0,49
17	23/IX	10,0	3,2	0,68	2,6	1,4	0,86	16,0	5,1	0,61	3,3	2,3	0,64	24,8	9,9	0,77	2,5	3,4	0,24	24,4	12,9	0,89	4,1	3,2	0,61
18	7/X	12,2	4,7	0,85	2,7	2,6	0,56	20,8	6,7	0,63	2,5	2,0	0,73	30,1	13,6	0,72	2,6	2,2	0,69	30,6	14,3	0,73	3,1	2,4	0,64
19	1958 г. 18/I	18,6	6,1	0,59	2,6	2,5	0,78	24,6	7,3	0,48	5,3	3,1	0,85	36,3	13,5	0,57	3,3	3,1	0,55	35,0	11,3	0,49	4,8	4,4	0,76
20	19/I	14,6	4,9	0,71	2,6	2,3	0,83	20,1	5,1	0,55	4,3	2,4	0,83	27,9	10,4	0,59	3,8	2,9	0,72	33,2	12,6	0,65	4,4	2,6	0,84
21	23/I	9,2	4,2	0,96	2,8	2,9	0,37	18,8	5,2	0,78	2,5	2,5	0,41	21,4	8,4	0,69	2,2	1,9	0,72	25,2	10,0	0,65	2,9	3,2	0,48
22	3/II	11,3	4,0	0,61	3,2	2,1	0,73	17,8	5,1	0,54	3,9	1,8	0,89	25,7	8,1	0,60	2,3	1,8	0,75	25,8	9,1	0,64	4,1	3,6	0,56
23	8/II	7,8	3,1	0,72	2,9	2,1	0,69	15,6	7,6	0,66	3,0	3,1	0,45	23,8	13,3	0,81	3,0	2,7	0,55	20,0	9,8	0,75	2,8	3,6	0,56
24	6/III	10,7	3,5	0,59	2,8	1,7	0,80	16,8	3,0	0,46	3,0	2,2	0,68	22,1	5,4	0,54	2,8	2,1	0,63	21,1	8,4	0,71	3,5	2,8	0,71
25	8/VI	6,4	2,6	0,90	3,5	3,0	0,61	14,3	5,2	0,60	2,8	2,6	0,51	21,5	7,5	0,62	2,1	1,8	0,56	18,2	6,1	0,66	4,8	3,5	0,68
26	3/VII	5,4	2,6	0,90	2,2	1,8	0,65	10,3	3,8	0,58	1,6	1,6	0,48	14,0	6,4	0,72	1,6	1,6	0,42	14,2	5,5	0,68	2,8	2,8	0,47
27	17/VII	8,1	2,7	0,61	2,7	1,5	0,85	14,3	4,9	0,56	2,6	2,1	0,87	21,2	7,5	0,66	3,3	2,0	0,74	20,1	7,5	0,64	3,8	3,3	0,54
Среднее		8,8	3,3	0,72	2,9	2,0	0,74	15,5	5,0	0,60	2,8	2,0	0,68	22,6	8,5	0,67	2,5	2,2	0,59	22,1	8,5	0,70	3,6	3,2	0,62

Таблица 2

	Уровень, мб			
	850	500	300	200
V_{Φ}	7,9	14,9	21,4	20,4
δ_V	2,9	4,8	7,9	7,5
$\delta \vec{V}$	4,5	7,6	12,1	12,4
α	0,68	0,60	0,66	0,71
α'	0,57	0,51	0,57	0,61
$\delta_{\Phi} T$	3,1	2,5	2,5	3,6
δ_T	1,9	1,8	2,1	3,2
R_T	0,77	0,72	0,59	0,62

Таблица 3

	Уровень, мб			
	850	500	300	200
V_{Φ}	10,0	16,2	23,9	23,9
δ_V	3,8	5,3	9,2	9,6
$\delta \vec{V}$	6,5	8,5	13,9	14,2
α	0,76	0,61	0,68	0,70
α'	0,65	0,52	0,58	0,59
$\delta_{\Phi} T$	2,7	3,0	2,6	3,7
δ_T	2,1	2,3	2,3	3,2
R_T	0,69	0,64	0,59	0,61

Ошибка прогноза вектора скорости $\delta \vec{V}$ для уровней 850 и 500 мб значительно меньше, чем для уровней 300 и 200 мб. Для уровня 850 мб эта ошибка в среднем равна 5,5 м/сек., для 500 мб — 8,0 м/сек., а для уровней 300 и 200 мб величина $\delta \vec{V}$ в среднем составляет около 13 м/сек. Но относительные векторные ошибки α' на рассматриваемых уровнях имеют близкие значения, изменяясь в пределах 0,51—0,65.

Абсолютная ошибка предвычисления температуры для тропосферы составляет в среднем 2°. Однако для уровня 200 мб эта ошибка значительно больше (3,2°).

Коэффициент корреляции между фактическими и предвычисленными изменениями температуры наибольшей для уровня 850 мб, наименьший для 300 мб.

Из сопоставления табл. 2 и 3 видно, что средние ошибки предвычисления для дат координационной комиссии несколько больше, чем для обычных дат. Так, например, для уровней 500, 300 и 200 мб относительные ошибки α и α' для обычных дат и дат координационной комиссии имеют близкие значения, а для уровня 850 мб α и α' значительно больше для дат координационной комиссии. То же самое имеем для других характеристик оправдываемости прогноза ветра. Оправдываемость прогноза температуры для уровней 850 и 500 мб также лучше для обычных дат.

Результаты, полученные нами для прогноза полей ветра на различных уровнях атмосферы, можно сопоставить с результатами, полученными за границей и приведенными в докладе рабочей группы по численным методам прогноза под председательством Б. Болина [9]. В данном докладе приведены значения ошибок прогноза вектора скорости $\delta \vec{V}$ на сутки для района Западной Европы (табл. 4).

Таблица 4

Уровень (мб)	Число случаев	$\delta \vec{V}_M$ /сек.	Примечание
850	39	9,8	Двухпараметрическая модель, служба прогно- зов ФРГ. Трехпараметрическая модель, служба про- гнозов Англии.
500	39	12,2	
300	39	17,6	
200	43	15,0	

Результаты табл. 2—4 не совсем сопоставимы, так как они основаны на разном фактическом материале, а оценки приведены для различных территорий. Но даже из такого сопоставления следует, что результаты, полученные нами по агеострофической модели, являются вполне удовлетворительными. Как в советской, так и в зарубежной литературе не имеется результатов прогноза температуры для различных уровней атмосферы. Исключение представляет работа А. С. Дубова и А. А. Кобыковой [6], в которой даны результаты прогноза температуры для уровня 200 мб по одноуровневой квазигеострофической модели.

Если сопоставить данные, приведенные в табл. 1, с данными, полученными в работе [6], для одних и тех же исходных дат, которых оказалось 10, то получаем близкие оценки оправдываемости прогноза температуры. Так, например, коэффициент корреляции между предвычисленными и фактическими изменениями температуры по нашей схеме в среднем равен 0,66, а по схеме работы [6] 0,68. В то же время следует отметить, что хотя эти результаты и получены для одних и тех же дат, но территории, по которым производятся оценки, несколько различаются между собой.

III. Остановимся кратко на анализе составляющих агеострофического ветра и вертикальных скоростей.

Как следует из агеострофической схемы, при прогнозе полей ветра и температуры на каждом временном шаге необходимо вычислять горизонтальные составляющие отклонений ветра от геострофического (u' , v') и вертикальную скорость (w).

Рассмотрим сначала результаты расчета u' , v' , w для начального момента времени, так как на их значения и закономерности распределения не сказываются ошибки прогноза полей ветра и температуры. Анализ значений u' , v' , w проведен для 11 случаев. Их средние

абсолютные значения (но 97 пунктам) для различных изобарических поверхностей представлены в табл. 5.

Таблица 5

Дата	Уровень, мб											
	850	500	300	200	850	500	300	200	850	500	300	200
	u' м/сек.				v' м/сек.				w мм/сек.			
1959 г.												
8/VII	0,45	0,88	2,05	2,50	0,34	0,91	2,04	2,34	2,8	5,8	3,9	4,1
9/VII	0,34	0,82	2,16	2,53	0,34	0,65	1,51	1,98	2,4	4,6	5,8	6,1
10/VII	0,34	0,63	1,82	1,96	0,28	0,69	1,68	1,90	3,1	6,1	6,1	4,5
11/VII	0,65	1,25	2,73	3,17	0,49	1,06	2,47	2,90	3,7	7,2	7,4	5,7
12/VII	0,77	2,14	4,72	5,24	0,55	1,63	3,60	4,43	4,2	8,2	7,4	7,6
13/VII	0,73	1,83	3,71	3,33	0,81	1,52	2,89	2,90	4,0	7,1	7,1	6,8
14/VII	0,47	1,36	2,42	2,80	0,49	1,22	2,15	2,24	3,1	6,5	8,4	7,1
15/VII	0,35	0,78	1,26	1,47	0,41	0,84	1,35	1,57	2,5	5,3	5,1	4,0
1958 г.												
18/I	0,57	1,32	2,57	2,62	0,70	1,12	1,88	1,78	4,2	7,9	7,3	4,3
19/I	0,87	1,64	3,38	3,62	1,38	1,70	2,98	2,37	5,1	12,3	11,1	5,5
6/V	0,34	0,89	1,39	1,06	0,42	0,83	1,05	0,77	2,9	5,9	4,8	3,5
Среднее	0,53	1,23	2,56	2,75	0,56	1,11	2,14	2,29	3,4	7,0	6,8	5,4

В среднем для 11 случаев вертикальная скорость для поверхностей 850, 500, 300 и 200 мб имеет значения 3,4; 7,0; 6,8 и 5,4 мм/сек. соответственно. Таким образом, для рассматриваемых дат значения вертикальной скорости на уровнях 500 и 300 мб в среднем оказались почти равными.

Наибольшие значения вертикальной скорости отмечаются чаще всего на уровне 500 мб (6 случаев из 11), иногда на уровне 300 мб (2 случая) и только в одном случае на уровне 200 мб. Кроме того, в двух случаях вертикальная скорость на уровнях 500 и 300 мб оказалась одинаковой. Очевидно, ее максимальное значение находится между этими уровнями.

Горизонтальные составляющие отклонений ветра от геострофического для различных изобарических поверхностей имеют следующие средние значения:

Уровень (мб)	850	500	300	200
u'	0,5	1,2	2,6	2,8
v'	0,6	1,1	2,1	2,3

Наибольшие значения агеострофического ветра u' , v' в среднем наблюдаются на уровне 200 мб. Зимой (при низкой тропопаузе) значения u' , v' на уровне 300 мб часто больше, чем на уровне 200 мб.

Кроме вычисления средних абсолютных значений вертикальной скорости, исследовалось также изменение ее знака с высотой (в каждом из 97 пунктов сетки). Результаты представлены в табл. 6.

На основании анализа 11 случаев можно отметить, что приблизительно в 50% случаев вертикальная скорость в слое 850—200 мб не меняет знака. Изменение знака вертикальной скорости по высоте несколько чаще происходит в слое 300—200 мб, чем в слоях 850—500 и 500—300 мб. При этом изменение знака вертикальной скорости в слое 850—200 мб иногда происходит несколько раз.

Таблица 6

Дата	Число случаев изменения знака w с высотой						
	в одном пункте				в слоях (мб)		
	0	1	2	3	850—500	500—300	300—200
1959 г.							
8/VII	28	63	5	1	16	20	40
9/VII	50	39	8	—	18	20	17
10/VII	42	48	7	—	19	12	31
11/VII	59	35	3	—	11	9	21
12/VII	49	44	4	—	10	13	29
13/VII	48	40	8	1	10	26	23
14/VII	52	39	5	1	15	24	13
15/VII	43	43	10	1	21	19	20
1958 г.							
18/I	51	34	11	1	28	15	16
19/I	55	34	8	—	14	20	16
6/V	39	52	6	—	17	15	32
Сумма	516	471	75	5	179	193	258

Примечание. 0, 1, 2, 3 показывают, сколько раз менялся знак.

Выводы, полученные из табл. 6, еще раз подтверждают заключение, сделанное ранее на значительно меньшем материале [4].

В отношении значений горизонтальных составляющих отклонений ветра от геострофического и вертикальной скорости, рассчитанных на последнем временном шаге (т. е. через сутки), следует указать на занижение их значений по сравнению с начальным сроком. Такое занижение до некоторой степени, очевидно, связано с многократным сглаживанием, получающимся в результате интерполяции рассчитываемых величин на каждом временном шаге по значениям в трех пунктах сетки. В то же время следует отметить, что хотя для агеострофической схемы в переменных Эйлера сглаживание величин u' , v' , w получается значительно меньшим, но ошибки прогноза полей ветра и температуры значительно больше, чем для схемы в переменных Лагранжа [5].

Сильное сглаживание, вероятно, можно уменьшить двумя путями, одним из которых является замена линейной интерполяции по трем точкам квадратической интерполяцией, другим — увеличение временного шага в несколько раз. При этом значительное увеличение временного шага потребует коренного изменения методики расчета индивидуальных производных. Если ранее за промежутки времени, равный одному часу, траектории воздушных частиц не выходили за пределы первого шестиугольника, то за промежуток времени в несколько часов часто будем иметь обратную картину.

Представляет интерес применить оба указанных способа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин М. И. Решение уравнений динамики атмосферы при использовании закономерностей структуры метеорологических полей в целях краткосрочного прогноза погоды. Труды ГГО, вып. 143, 1963.
2. Юдин М. И. Предвычисление поля ветра и связанных с ним метеорологических элементов. ДАН СССР, т. 112, № 1, 1957.

3. Пятыгина К. В. Расчетная схема предвычисления полей ветра и температуры в тропосфере и нижней стратосфере. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
4. Пятыгина К. В., Федорова Э. А., Блажевич В. Г. Предварительные результаты испытания агеострофической схемы предвычисления полей ветра, температуры и вертикальных токов. Труды ГГО, вып. 143, 1963.
5. Пятыгина К. В. Агеострофическая модель прогноза метеозадающих элементов на большом количестве уровней. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Гидрометеиздат, Л., 1964.
6. Дубов А. С. и Кобякова А. А. Опыт прогноза полей давления, температуры и вертикальных токов в нижней стратосфере. Труды ГГО, вып. 143, 1963.
7. Юдин М. И. Синоптический материал для испытания численных методов прогноза. Метеорология и гидрология, № 7, 1960.
8. Гандин Л. С. О линейной интерполяции метеорологических элементов в двух измерениях. Труды ГГО, вып. 71, 1957.
9. Окончательный доклад по численным методам анализа и прогноза погоды (перев. с англ.). НИИАК, М., 1962.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Значение функций влияния для расчета составляющих агеострофического ветра u' , v' на различных уровнях ζ

η_j	$\zeta = 0,85$				$\zeta = 0,5$			
	$10\mu_0$	$10\mu_1$	$10\nu_0$	$10\nu_1$	$10\mu_0$	$10\mu_1$	$10\nu_0$	$10\nu_1$
0,85	-0,437	-0,484	0,545	0,904	0,429	0,402	0,180	0,498
0,5	-0,525	-0,784	0,186	0,515	0,353	0,269	0,469	0,771
0,3	-0,032	-0,112	0,016	0,062	-0,364	-0,361	0,082	0,163
0,2	-0,019	-0,072	0,009	0,039	-0,047	-0,103	0,029	0,111

η_j	$\zeta = 0,3$				$\zeta = 0,2$			
	$10\mu_0$	$10\mu_1$	$10\nu_0$	$10\nu_1$	$10\mu_0$	$10\mu_1$	$10\nu_0$	$10\nu_1$
0,85	0,036	0,205	0,048	0,216	0,026	0,098	0,024	0,103
0,5	0,732	0,986	0,194	0,473	0,174	0,566	0,063	0,241
0,3	0,395	0,438	0,348	0,406	0,624	0,804	0,140	0,327
0,2	-0,308	-0,256	0,159	0,407	0,353	0,388	0,522	0,744

Таблица 2

Значение функций влияния для расчета вертикальной скорости w на различных уровнях ζ

η_j	$\zeta = 0,85$		$\zeta = 0,5$		$\zeta = 0,3$		$\zeta = 0,2$	
	$10\mu'_0$	$10\mu'_1$	$10\mu'_0$	$10\mu'_1$	$10\mu'_0$	$10\mu'_1$	$10\mu'_0$	$10\mu'_1$
0,85	1,628	1,011	0,428	0,821	0,037	0,181	0,012	0,052
0,5	0,661	1,175	2,146	2,763	0,550	1,248	0,081	0,302
0,3	0,043	0,153	0,379	0,811	0,995	1,008	0,203	0,468
0,2	0,018	0,076	0,096	0,357	0,335	0,856	0,603	0,934

О ПРОГНОЗЕ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ В ТРОПОСФЕРЕ

Трехмерное уравнение для изменений давления решается с приближенным граничным условием на нижней границе стратосферы, стилизованной в виде изобарической поверхности. Полученное решение сопоставляется с известными результатами Булеева — Марчука.

В настоящее время оперативные прогнозы полей геопотенциала даются по трехмерной модели Булеева — Марчука [1] в рамках геострофической схемы. В решении Булеева — Марчука рассматривается вся толща атмосферы, поэтому для нахождения изменений геопотенциала в любой точке пространства, строго говоря, необходимо привлекать информацию о процессах в верхних слоях атмосферы, что сделать весьма сложно и, как правило, просто невозможно в силу отсутствия подобных данных. В связи с этим возникает задача, нельзя ли каким-нибудь образом исключить влияние верхних слоев, заменить условие на верхней границе атмосферы приближенным соотношением на том или другом уровне атмосферы. Похожая задача рассматривалась С. Л. Белоусовым и В. Г. Болдыревым [2], которые при разработке схемы прогноза в верхней тропосфере в качестве нижнего граничного условия у земной поверхности использовали приближенное условие баротропности атмосферы на уровне 500 мб. Мы будем действовать иным образом, а именно использовать приближенное граничное условие на верхней границе рассматриваемой области. За такое граничное условие можно принять прогностическое уравнение для нижней стратосферы, полученное в работе [3],

$$\left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + m_1^2 \Delta \right) \frac{\partial z}{\partial t} = -m_1 \left[\frac{g}{l} (z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] - \frac{R}{l} (T, z). \quad (1)$$

Здесь z — высота изобарической поверхности, T — температура, g — ускорение силы тяжести, l — параметр Кориолиса, R — газовая постоянная, $m_1^2 = \frac{R^2 T}{g l^2} \gamma_a$ — параметр статической устойчивости (γ_a — сухов-адиабатический градиент температуры), $\zeta = \frac{p}{p_0}$ — вертикальная координата в изобарической системе отсчета, x — квазигоризонтальная координата, отсчитываемая вдоль меридиана с севера на юг, t — время, Δ и ∇ — символы операторов Лапласа и Якоби соответственно.

Уравнение (1) получено исходя из очень простого и очевидного факта, а именно из наличия в стратосфере изотермии. Приближенность заключается в предположении, что условию изотермии удовлетворяет не только среднее распределение температуры, но и что отдельные ее реализации, получаемые с помощью температурного зондирования, близки к изотермическим. Соотношение (1) получается из уравнения

Булеева — Марчука, если воспользоваться разложением по малому параметру (величине обратно пропорциональной статической устойчивости [4]). Для бесконечно большой статической устойчивости уравнение Булеева — Марчука вырождается в двумерное баротропное уравнение. Если статическая устойчивость конечна, но достаточно велика, то при условии сохранения первого члена разложения получается равенство (1). Это равенство содержит два неизвестных — производную по времени от температуры и производную по времени от геопотенциала. Чтобы замкнуть систему, необходимо привлечь трехмерное уравнение для изменений температуры, полученное также Булеевым и Марчуком, и провести аналогичное разложение по тому же параметру. Тогда получится система двух двумерных уравнений для прогноза полей температуры и геопотенциала в нижней стратосфере. Таким образом, оказывается, что слои с большой статической устойчивостью в известном смысле автономны, но, в отличие от чисто баротропной модели, здесь требуется знание двух параметров — геопотенциала и температуры.

Все эти рассуждения относятся к процессам не слишком большой продолжительности в том смысле, что можно применять адиабатическую стилизацию. Притоки тепла усиливают взаимосвязи между слоями, в уравнении появляются производные по вертикали и упоминавшаяся автономность слоев нарушается, т. е. для решения задачи оказывается необходимым привлекать данные о распределении метеоэлементов во всей толще атмосферы.

Реальная выполнимость соотношения (1) (совместно с соответствующим уравнением для температуры) проверялась на суточных и двухсуточных прогнозах AT_{200} [5]. Оценки прогнозов оказались удовлетворительными, что свидетельствует о разумности принятой стилизации.

Таким образом, мы будем решать известную задачу Булеева — Марчука об интегрировании уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + m^2 \Delta \right) \frac{\partial z}{\partial t} = -m^2 \left[\frac{g}{l} (z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] - \frac{R}{l} \cdot \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta (T, z) \quad (2)$$

с измененным верхним граничным условием. Параметр статической устойчивости $m^2 = \frac{R^2 T}{gl^2} (\gamma_a - \gamma)$ в этом уравнении отличается от аналогичного параметра в соотношении (1) наличием слагаемого γ (реального градиента средней температуры в слое).

Нижнее граничное условие при $\zeta=1$, равно как и условия на боковых границах (затухание на бесконечности), остается без изменений. Что касается верхнего граничного условия, то вместо обычного условия на верхней границе атмосферы

$$\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{\zeta \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad (3)$$

используемого, в частности, и в работе [1], мы воспользуемся соотношением (1), характеризующим наличие изотермии при переходе от тропосферы к стратосфере. Таким образом, граничные условия по вертикальной координате для уравнения (2) запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} \left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \alpha \right) \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{\zeta=1} &= -A \\ \left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + m_1^2 \Delta \right) \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{\zeta=\zeta_0} &= -B_1 - A \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где

$$A = \frac{R}{l}(T, z) = A(x, y, \zeta);$$

$$B_1 = m_1^2 \left[\frac{g}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right];$$

$$\alpha = \frac{R(\gamma_a - \gamma)}{g} \approx 0,1.$$

Величину ζ_0 можно взять равной 0,2, т. е. считать, что уровень 200 мб расположен в стратосфере. На самом деле поверхность 200 мб иногда располагается в верхней тропосфере, но на прогноз в нижней тропосфере это не будет оказывать существенного влияния.

В дальнейшем решение будет идти в соответствии с работой [1]. Перепишем уравнение (2) и граничные условия (4) в полярных координатах:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \frac{\partial z}{\partial t} = -B - A - \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} A, \quad (5)$$

$$\left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + \alpha \right) \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{\zeta=1} = -A(r, \varphi, 1), \quad (6)$$

$$\left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + m_1^2 \right) \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{\zeta=\zeta_0} = -B_1(r, \varphi, \zeta_0) - A(r, \varphi, \zeta_0). \quad (7)$$

Предположим, что функции A и B можно представить в виде ряда:

$$\left. \begin{aligned} B(r, \varphi, \zeta) &= \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} H_n(\rho, \zeta) I_n(r\rho) \rho d\rho \\ A(r, \varphi, \zeta) &= \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} G_n(\rho, \zeta) I_n(r\rho) \rho d\rho \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

(B_1 отличается от B только тем, что множитель m заменен на m_1), где

$$\left. \begin{aligned} H_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} B(r', \varphi, \zeta) I_n(\rho r') r' dr' d\varphi \\ G_n &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} A(r', \varphi, \zeta) I_n(\rho r') r' dr' d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

I_n — функция Бесселя n -го порядка, Re — символ вещественной части числа.

Решение задачи удобно искать в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \operatorname{Re} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi} \int_0^{\infty} S_n(\rho, \zeta) I_n(r\rho) d\rho. \quad (10)$$

Тогда после использования соотношения

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} I_n(\rho r) - \frac{n^2}{r^2} I_n(\rho r) = -\rho^2 I_n(\rho r) \quad (11)$$

получим следующие уравнения и граничные условия для новой неизвестной функции $S_n(\rho, \zeta)$:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial S_n}{\partial \zeta} - \rho^2 S_n = -H_n(\rho, \zeta) - G_n(\rho, \zeta) - \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} G_n(\rho, \zeta); \quad (12)$$

$$\left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} + a\right) S_n \Big|_{\zeta=1} = -G_n(\rho, 1); \quad (13)$$

$$\left(\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} - \rho^2 b\right) S_n \Big|_{\zeta=\zeta_0} = -bH_n(\rho, \zeta_0) - G_n(\rho, \zeta_0), \quad (14)$$

где

$$b = \frac{m_1^2}{m^2} = \frac{\gamma_a}{\gamma_a - \gamma} \approx 2,5. \quad (15)$$

Общее решение (12) имеет следующий вид:

$$S_n(\rho, \zeta) = C_{n1} \zeta^{\nu_1} + C_{n2} \zeta^{\nu_2} + \frac{1}{\nu_1 - \nu_2} \int_{\zeta_0}^{\zeta} \left[-H_n(\rho, \eta) - G_n(\rho, \eta) - \right. \\ \left. - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} G_n(\rho, \eta) \right] D(\zeta^{\nu}, \eta^{\nu}) d\eta, \quad (16)$$

где

$$D(\zeta^{\nu}, \eta^{\nu}) = \begin{vmatrix} \zeta^{\nu_1}; & \zeta^{\nu_2} \\ \eta^{\nu_1}; & \eta^{\nu_2} \end{vmatrix} = \zeta^{\nu_1} \eta^{\nu_2} - \zeta^{\nu_2} \eta^{\nu_1}; \quad (17)$$

$$\nu_1 = -\frac{1}{2} + \mu; \quad \nu_2 = -\frac{1}{2} - \mu; \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{4} + \rho^2}. \quad (18)$$

Условия (13) и (14) дают следующие соотношения для определения постоянных интегрирования C_{ni} :

$$k_1 C_{n1} + k_2 C_{n2} - \frac{1}{2\mu} \int_{\zeta_0}^1 H_n(\rho, \eta) D(k, \eta^{\nu}) d\eta + \\ + \frac{1}{2\mu} \int_{\zeta_0}^1 G_n(\rho, \eta) D(k, \eta^{\nu}) d\eta + \frac{\zeta_0}{2\mu} G_n(\rho, \zeta_0) D(k, \zeta_0^{\nu}) = 0; \quad (19)$$

$$\chi_1 C_{n1} \zeta_0^{\nu_1} + \chi_2 C_{n2} \zeta_0^{\nu_2} = -bH_n(\rho, \zeta_0) - G_n(\rho, \zeta_0), \quad (20)$$

где $k_i = \nu_i + a$; $\chi_i = \nu_i - b\rho^2$ ($i=1,2$).

Подставляя значения C_{ni} , найденные из соотношений (19) и (20), в решение (16), получим:

$$S_n(\rho, \zeta) = -\frac{D(\zeta^{\nu}, k_0)}{2\mu D(k, k_0)} \left[-\int_{\zeta_0}^1 H_n(\rho, \eta) D(k, \eta^{\nu}) d\eta + \right. \\ \left. + \int_{\zeta_0}^1 G_n(\rho, \eta) D(k, \eta^{\nu}) d\eta + \zeta_0 G_n(\rho, \zeta_0) D(k, \zeta_0^{\nu}) \right] + \\ + \frac{D(\zeta^{\nu}, k)}{D(k, k_0)} [bH_n(\rho, \zeta_0) + G_n(\rho, \zeta_0)] + \\ + \frac{1}{2\mu} \left[-\int_{\zeta_0}^{\zeta} H_n(\rho, \eta) D(\zeta^{\nu}, \eta^{\nu}) d\eta + \int_{\zeta_0}^{\zeta} G_n(\rho, \eta) D(\zeta^{\nu}, \eta^{\nu}) d\eta + \right. \\ \left. + \zeta_0 G_n(\rho, \zeta_0) D(\zeta^{\nu}, \zeta_0^{\nu}) \right], \quad (21)$$

где $k_{0i} = \chi_i \zeta_0^{\nu_i}$ ($i=1,2$).

Если ограничиться решением для $r=0$, то, используя условие $I_n=0$ при $n \neq 0$ и $I_0(0)=1$, окончательно решение можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} \Big|_{r=0} = & \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} B(r, \varphi, \eta) M_1(\zeta, r, \eta) r d\varphi dr d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} A(r, \varphi, \eta) M_2(\zeta, r, \eta) r d\varphi dr d\eta + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} B(r, \varphi, \zeta_0) M_3(\zeta, r, \zeta_0) r d\varphi dr, \end{aligned} \quad (22)$$

где функции влияния M_i определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} M_1(\zeta, r, \eta) = & \int_0^\infty \left[\delta_1 \frac{D(\eta^\gamma, k_0) D(k, \zeta^\gamma)}{D(k, k_0)} + \right. \\ & \left. + \delta_2 \frac{D(\zeta^\gamma, k_0) D(k, \eta^\gamma)}{D(k, k_0)} \right] \frac{I_0(r\rho)}{2\mu} \rho d\rho; \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} M_2(\zeta, r, \eta) = & - \int_0^\infty \left[\delta_1 \frac{D(\eta^\gamma, k_0) D(k, \zeta^\gamma)}{D(k, k_0)} + \right. \\ & \left. + \delta_2 \frac{D(\zeta^\gamma, k_0) D(k, \eta^\gamma)}{D(k, k_0)} \right] \frac{I_0(r\rho)}{2\mu} \rho d\rho; \end{aligned} \quad (24)$$

$$M_3(\zeta, r) = b \int_0^\infty \frac{D(\zeta^\gamma, k)}{D(k, k_0)} I_0(r\rho) d\rho, \quad (25)$$

где

$$\delta_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } \eta \leq \zeta \\ 0 & \text{при } \eta > \zeta \end{cases} \quad \delta_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } \eta \leq \zeta \\ 1 & \text{при } \eta > \zeta \end{cases}$$

Рассмотрим прежде всего вопрос о том, можно ли получить решение Булеева — Марчука из (22), если перенести верхнюю границу рассматриваемой области на уровень $\zeta=0$.

При $\zeta_0 \rightarrow 0$ имеют место следующие соотношения:

$$\frac{D(\eta^\gamma, k_0)}{D(k, k_0)} \xrightarrow{\zeta_0 \rightarrow 0} \frac{\eta^{\gamma_1}}{k_1}; \quad (26)$$

$$\frac{D(\zeta^\gamma, k_0)}{D(k, k_0)} \xrightarrow{\zeta_0 \rightarrow 0} \frac{\zeta^{\gamma_1}}{k_1}; \quad (27)$$

$$D(k, k_0) \xrightarrow{\zeta_0 \rightarrow 0} \infty. \quad (28)$$

В силу того что $D(\zeta^\gamma, k)$ не зависит от ζ_0 , а $D(k, k_0) \xrightarrow{\zeta_0 \rightarrow 0} \infty$, функция влияния M_3 обращается в нуль, а выражения (23) и (24) в силу равенств (26) и (27) переписываются в виде:

$$\begin{aligned} M_1^0(\zeta, r, \eta) = & \int_0^\infty \left[\delta_1 \frac{\eta^{\gamma_1}}{k_1} D(k, \zeta^\gamma) + \right. \\ & \left. + \delta_2 \frac{\zeta^{\gamma_1}}{k_1} D(k, \eta^\gamma) \right] \frac{I_0(r\rho)}{2\mu} \rho d\rho; \end{aligned} \quad (29)$$

$$M_2^0(\zeta, r, \eta) = - \int_0^\infty \left[\delta_1 \frac{\gamma_1 \eta^{\gamma_1}}{k_1} D(k, \zeta^\gamma) + \delta_2 \frac{\zeta^{\gamma_2}}{k_1} D(k, \gamma \eta^\gamma) \right] \frac{I_0(rp)}{2\mu} \rho \, d\rho. \quad (30)$$

Выражения, стоящие в правых частях равенств (29) и (30), есть не что иное, как функции влияния для адвекции вихря скорости и адвекции температуры в решении уравнения для $\frac{\partial z}{\partial t}$ с краевым условием, заданным на верхней границе атмосферы. Таким образом, при $\zeta_0 \rightarrow 0$ решение (22) переходит в решение Булеева — Марчука. Это становится

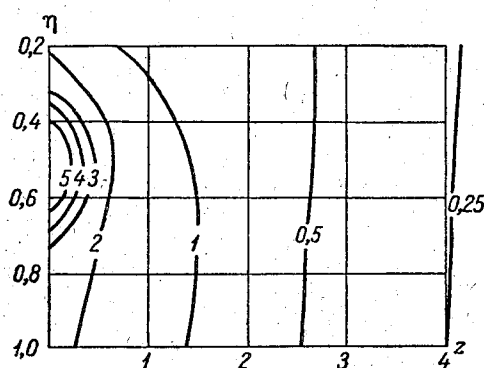


Рис. 1.

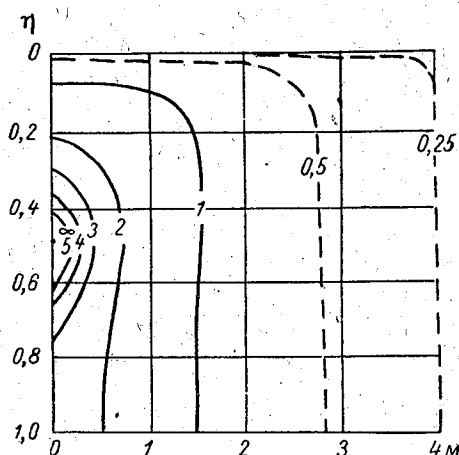


Рис. 2.

более ясным, если учесть, что и верхнее условие (7) при $\zeta_0 \rightarrow 0$ переходит в граничное условие Булеева — Марчука. Действительно, умножим обе части равенства (7) на ζ_0 и устремим ζ_0 к нулю. Тогда в силу конечности $\frac{\partial z}{\partial t}$ и функций A и B_1 во всей области интегрирования получим условие $\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} \xrightarrow{\zeta \rightarrow 0} 0$, совпадающее с (3).

Для определения $\frac{\partial z}{\partial t}$ достаточно знать численные значения только двух функций влияния (M_2 и M_1), поскольку M_3 оказывается связанной с M_1 , а именно:

$$M_3(\zeta, r) = b \zeta_0 M_1(\zeta, r, \zeta_0). \quad (31)$$

Действительно, полагая в выражении (23) $\eta = \zeta_0$, получим

$$M_1(\zeta, r, \zeta_0) = \int_0^\infty \frac{D(\zeta_0^\gamma, k_0) D(k, \zeta^\gamma)}{D(k, k_0)} \frac{I_0(rp)}{2\mu} \rho \, d\rho. \quad (32)$$

Поскольку

$$D(\zeta_0^\gamma, k_0) = \zeta_0^{\gamma_1 + \gamma_2} (\gamma_2 - \gamma_1) = -\frac{2\mu}{\zeta_0},$$

то, согласно равенству (25), получим выражение (31).

Функции влияния M_1 , M_2 и M_3 не выражаются через табличные

интегралы. Расчеты, связанные с численным интегрированием выражений (23) и (24), выполнялись на ЭЦВМ «М-20».

Сопоставление полученных значений M_1 и M_2 с M_1^0 и M_2^0 , приведенными в работе (1), показало, что для уровня земли эти функции весьма мало отличаются друг от друга. Различия делаются заметными только при больших расстояниях по горизонтали (M_1 , например, в этой области убывает несколько медленнее, чем M_1^0). Но, поскольку при практических расчетах эта часть функции влияния все равно не используется, расхождения эти не скажутся на результатах вычисления $\frac{\partial z}{\partial t}$.

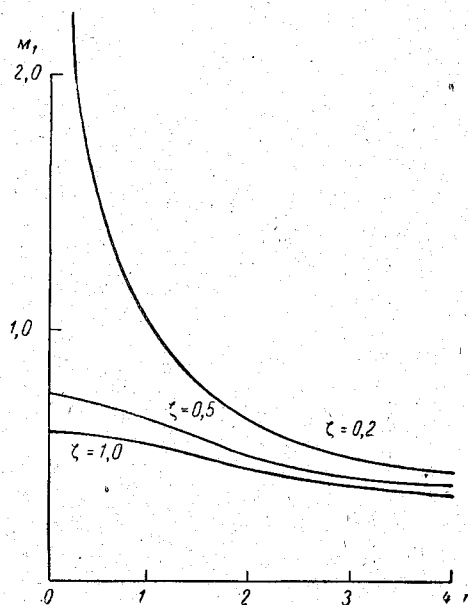


Рис. 3.

На более высоких уровнях различия становятся более ощутимыми. На рис. 1 и 2 приведены значения функции влияния M_1 и M_1^0 (M_1^0 взято из работы [1]) для уровня 500 мб. Здесь также бросается в глаза более замедленное убывание функции M с расстоянием, особенно для малых η .

Результаты расчетов для функции M_3 приведены на рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булеев Н. И., Марчук Г. И. О динамике крупномасштабных атмосферных процессов. Труды ИФА АН СССР, № 2, 1958.
2. Белоусов С. Л., Болдырев В. Г. К вопросу прогноза геопотенциала в верхней части тропосферы. Труды ЦИП, вып. 111, 1961.
3. Дубов А. С. О прогнозе в областях фронтальной зоны в стратосфере. Труды ГГО, вып. 148, 1963.
4. Дубов А. С. О прогнозе поля геопотенциала в нижней стратосфере. Материалы совещания координационной комиссии по численным методам прогноза. Гидрометеиздат, Л., 1961.
5. Дубов А. С., Кобякова А. А. Опыт прогноза полей давления, температуры и вертикальных токов в нижней стратосфере. Труды ГГО, вып. 146, 1963.

ОБ УЧЕТЕ ОТЛИЧИЙ ВЕТРА ОТ ГЕОСТРОФИЧЕСКОГО В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ В ЧИСЛЕННОМ ПРОГНОЗЕ

При расчетах ветра в пограничном слое используется модель коэффициента турбулентного обмена, согласно которой коэффициент растет линейно до некоторой высоты, а затем остается постоянным. Параметры этой модели определяются по данным о геострофическом ветре и шероховатости подстилающей поверхности, согласно Д. Л. Лайхтману, с помощью уравнения баланса турбулентной энергии и соотношения между скоростью ветра и коэффициентом обмена на высоте одного метра. Приводятся результаты сопоставления рассчитанных значений ветра на уровне флюгера с данными синоптических карт. Сопоставляются также геострофические адвекции вихря скорости и температуры с адвекциями тех же элементов, определенных с учетом изменений ветра в пограничном слое.

В современных методах численного прогноза погоды учет турбулентной вязкости в пограничном слое атмосферы сводится, как известно, к введению вертикальных скоростей за счет турбулентного трения в краевое условие на нижней границе атмосферы [6]. Степень эффективности учета этого влияния была оценена в работе [4] на материале регулярных прогнозов с апреля по ноябрь 1955 г., выполнявшихся графоаналитическим методом. Оправдываемость прогнозов наземного поля давления увеличилась в среднем на 5%, в отдельные дни это увеличение достигало 25%.

Влияние пограничного слоя сводится не только к возникновению дополнительных вертикальных движений. В существующих геострофических моделях адвекция ветра и температуры на уровне земли рассчитывается по данным о геострофическом ветре. Поскольку в пограничном слое реальный ветер заметно отличается от геострофического как по величине, так и по направлению, геострофическая стилизация ветра может приводить к значительным отклонениям расчетных значений ветра от их истинных величин. Поскольку, однако, информацию о реальном ветре в прогностических схемах использовать весьма затруднительно, приходится прибегать к результатам расчетов ветра в пограничном слое по данным о поле давления — классической задаче пограничного слоя атмосферы. Похожая задача решается для свободной атмосферы, когда приходится восстанавливать поле агеострофических отклонений по полю давления. Но здесь можно говорить только о сходстве этих задач, поскольку физическая природа отклонений реального ветра от его геострофических значений в обоих случаях совершенно различна. В пограничном слое эти отклонения вызваны силами трения, а в свободной атмосфере — инерционными силами. Для определения агеострофических отклонений достаточно располагать информацией о полях геопотенциала (поля температуры можно определить с помощью дифференцирования по вертикали тех же полей геопотенциала). Для

расчетов ветра в пограничном слое необходимо, кроме того, знать распределение характеристик турбулентного обмена по высоте. Это значительно затрудняет решение задачи, поскольку мы далеко не всегда располагаем подобной информацией.

Д. Л. Лайхтман [5] предложил новый подход к определению профиля ветра в пограничном слое атмосферы. Привлекая к рассмотрению дополнительное соотношение — уравнение баланса турбулентной энергии — он получил возможность определять значения коэффициента турбулентного обмена как функцию внешних параметров: скорости геострофического ветра, шероховатости подстилающей поверхности и термической стратификации. Но при этом требовалось задать функциональную зависимость коэффициента обмена от высоты. В качестве такой зависимости оказалось удобным использовать схему «ломающегося» коэффициента обмена, предложенную в свое время М. И. Юдиным и М. Е. Швецом [8]. Согласно этой схеме, коэффициент обмена линейно растет до некоторой высоты h , а затем остается постоянным. Таким образом, задача сводится к нахождению h и значения коэффициента обмена либо на этой высоте, либо на уровне одного метра.

Изменение ветра с высотой для упомянутой выше модели описывается, как известно, следующими соотношениями [3]:

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{(1+2b)u_g - v_g}{1+2b+2b^2} ah \ln \frac{z}{z_0} \\ v &= \frac{(1+2b)v_g + u_g}{1+2b+2b^2} ah \ln \frac{z}{z_0} \end{aligned} \right\} (z \leq h) \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= u_g - \frac{e^{-a(z-h)}}{1+2b+2b^2} \{ [(1+b)u_g + bv_g] \cos a(z-h) + \\ &\quad + [(1+b)v_g - bu_g] \sin a(z-h) \} \\ v &= v_g - \frac{e^{-a(z-h)}}{1+2b+2b^2} \{ [(1+b)v_g - bu_g] \cos a(z-h) - \\ &\quad - [(1+b)u_g + bv_g] \sin a(z-h) \} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$a = \sqrt{\frac{l}{2k}}; \quad b = ah \ln \frac{h}{z_0}; \quad k = k_1 h,$$

где u и v — компоненты скорости ветра (индекс « g » означает геострофический ветер), l — параметр Кориолиса, h — высота, выше которой коэффициент обмена остается постоянным, z_0 — шероховатость подстилающей поверхности, k_1 — коэффициент турбулентного обмена на высоте одного метра.

Для определения параметров k_1 и h воспользуемся соотношением, предложенным Лайхтманом, которое связывает значение коэффициента турбулентного обмена на верхней границе пограничного слоя k с высотой этого слоя H

$$k = 0,20 \omega_z H^2. \quad (3)$$

Высота пограничного слоя может быть определена, также согласно Лайхтману, из следующего равенства:

$$H = \frac{V_g}{1,5} \sqrt{\frac{(1-\delta)T}{g(\gamma_a - \gamma)}}. \quad (4)$$

В формулах (3) и (4) приняты следующие обозначения: ω_z — угловая скорость вращения земли, δ — диссипация турбулентной энергии, отнесенная к количеству энергии среднего движения, которая трансформируется в турбулентную, γ и γ_a — реальный и адиабатический гра-

диенты температуры, g — ускорение силы тяжести, 0,20 и 1,5 — безразмерные постоянные.

Экспериментальная проверка соотношения (4) на материале Днепровской экспедиции [2] показала, что значение постоянной 1,5 лучше заменить единицей, но если принять это новое значение, то в формулу (4) следует ввести аддитивную поправку порядка 250 м. В дальнейшем будем пользоваться прежними рекомендациями Лайхтмана.

Для простоты дальнейших расчетов ограничимся рассмотрением чисто динамической задачи, т. е. отвлечемся от влияния стратификации. Такой подход диктуется еще и тем, что при прогнозе поля давления для больших территорий отсутствует надежная информация о температурной стратификации в самых нижних слоях воздуха. (В экспедиционных условиях и на станциях особого назначения она получается с помощью специальных градиентных наблюдений.)

Примем для средних условий $\delta=0,5$, $T=300^\circ$, $\gamma=0,3$ град/100 м. Тогда на основании (3) и (4) получим

$$k=0,068V_g^2, \quad (5)$$

где k выражено в м²/сек., V_g — в м/сек.

Эта формула близка к часто применяющемуся соотношению

$$k=0,05V_g^2.$$

Поскольку условились считать, что коэффициент обмена в слоях, расположенных выше h , остается постоянным и поскольку $H \gg h$, то условие (5) может быть отнесено и к уровню h (геострофический ветер в пограничном слое с высотой меняется незначительно). Тогда, согласно предположению о линейности роста коэффициента обмена в слоях ниже h , получим

$$k_1 h = 0,068V_g^2. \quad (6)$$

Привлечем к рассмотрению также соотношения между коэффициентом обмена и скоростью ветра вблизи подстилающей поверхности. Для выбранной нами модели линейного роста коэффициента обмена с высотой (этому, в частности, соответствуют и средние условия температурной стратификации $\gamma=0,3$ град/100 м, близкие к изотермии) имеет место известное соотношение:

$$\frac{k_1}{|V_1|} = \frac{\kappa^2}{\ln \frac{1}{z_0}}, \quad (7)$$

где κ — постоянная Кармана, равная 0,38, k_1 и $|V_1|$ — значения коэффициента обмена и модуля скорости ветра соответственно на высоте одного метра, z_0 задается в метрах.

Таким образом, уравнения (1) и (2) содержат только два независимых параметра: $\vec{V}_g$ и z_0 . Параметры k_1 и h связаны со значениями геострофического ветра, ветра на уровне одного метра и шероховатостью подстилающей поверхности соотношениями (6) и (7).

Выбор z_0 представляет определенные трудности. Поскольку все эти расчеты выполняются для изучения процессов большого масштаба, естественно, что шероховатость должна быть взята значительно больше, чем, например, при изучении процессов над скошенной травой. Мы выбрали $z_0=10$ см. Тогда равенство (7) переписывается в виде

$$\frac{k_1}{|V_1|} = 0,065. \quad (8)$$

По формулам (1), (2), (6) и (8) по данным о градиенте барического поля, снятого с карты наземного давления, рассчитывался ветер на высоте флюгера (11 м) и сопоставлялся со значениями ветра на станциях, также снятыми с синоптической карты. Дополнительно рассчитывался ветер на высоте перелома h . Для случая устойчивых ветров (как правило, в хорошо выраженных циклонах и антициклонах) по материалам 20 станций результаты оказались такими: $R_{\text{фг}}=0,69$, $R_{\text{ф}h}=0,85$, $R_{\text{фф}}=0,90$. Здесь $R_{\text{фф}}$ коэффициент корреляции между рассчитанной и фактической скоростью ветра на уровне флюгера, $R_{\text{ф}h}$ — коэффициент корреляции между фактическим ветром и ветром, рассчитанным для высоты h , $R_{\text{фг}}$ — коэффициент корреляции между фактическим и геострофическим ветром.

Следующая выборка включала станции, освещающие разные точки барического поля. Коэффициенты корреляции, рассчитанные на материале 35 станций, в этом случае оказались гораздо ниже и весьма близки между собой (около 0,5).

Была сделана попытка оценить (на материале обеих выборок) успешность расчетов в зависимости от величины скорости геострофического ветра. С этой целью все данные были разбиты на две группы: первая включала в себя случаи с $V_g > 10$ м/сек., вторая — с $V_g \leq 10$ м/сек. Результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

	$V_g > 10$ м/сек.	$V_g \leq 10$ м/сек.
$R_{\text{фг}}$	0,57	0,08
$R_{\text{ф}h}$	0,59	0,36
$R_{\text{фф}}$	0,61	0,21

Таким образом, можно сделать предварительный вывод о том, что предлагаемый способ расчета ветра оказывается наиболее эффективен в случаях устойчивого режима ветра и при относительно больших его скоростях. При слабых ветрах связь реального ветра с геострофическим оказывается ослабленной, расчетные значения плохо коррелируют со скоростями ветра, снятыми с карты. Необходимо при этом отметить малую точность значений скоростей ветра, снимаемых с карт. Значения коэффициентов корреляции несомненно увеличились бы, если использовать данные специальных наблюдений над ветром или хотя бы данные о ветре, взятые непосредственно из телеграмм.

Расчеты скоростей ветра на высоте флюгера оказались необходимыми в связи с задачей расчета адвекции вихря и адвекции температуры в самых нижних слоях, поскольку эти факторы являются определяющими для изменения давления и температуры на уровне моря [1]. Поэтому представляло интерес провести сопоставление величин адвекций, рассчитанных по геострофическому ветру и ветру, определенному указанным выше способом. При расчетах адвекции вихря скорости последний должен определяться также по рассчитанному, а не по геострофическому ветру.

При определении производных $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ в выражении вихря, согласно равенству (1) (мы определяем вихрь скорости на уровне флюгера, т. е. в слоях ниже h), будем пренебрегать зависимостью шероховатости от координат. Это делается потому, что шероховатость содержится в выражении (1) под знаком логарифма и, следовательно, ее изменения слабо сказываются на значениях скорости. Кроме того,

наши знания о шероховатости еще весьма недостаточны — мы в состоянии только оценить порядок этой величины; сведения об ее пространственной изменчивости практически отсутствуют.

Теперь рассмотрим зависимость характеристик турбулентности от горизонтальных координат. В уравнение (1) эти характеристики входят

только через сочетания $ah = \sqrt{\frac{l}{2}} \frac{1}{\sqrt{k_1 h}} h$. Согласно равенству (6), про-

изведение $\sqrt{k_1 h}$ пропорционально геострофическому ветру. Соответствующие расчеты показывают, что величина h также пропорциональна геострофическому ветру (рис. 1). Таким образом, оказывается, что изменчивость произведения ah обусловлена только изменением параметра Кориолиса. В дальнейшем будем предполагать этот параметр постоянным, что в контексте данной задачи не приведет к большим погрешностям. Таким образом, изменения характеристик турбулентности по горизонтали в рамках принятой стилизации можно не учитывать.

Тогда вихрь рассчитанной скорости ветра окажется пропорциональным геострофическому вихрю:

$$\Omega = \Omega_g \frac{1 + 2b}{1 + 2b + 2b^2} ah \ln \frac{z}{z_0}. \quad (9)$$

Следует иметь в виду, что такое простое соотношение имеет место только для подслоя, расположенного ниже h .

При дифференцировании соотношений (2), описывающих профиль ветра в выше лежащих слоях, появятся поправки за счет изменений характеристик турбулентности по горизонтали, обусловленных изменением скорости геострофического ветра. В соотношениях (2) наряду с комбинациями ah , не зависящими, как было сказано выше, от геострофического ветра, имеются члены с az , в которых компенсирующее влияние параметра h отсутствует, что и приводит к возникновению дополнительных слагаемых в выражении для вихря. Величина этих поправок, так же как и в случае спирали Экмана [3], оказывается того же порядка, что и основной член с геострофическим вихрем.

Поскольку расчетные значения вихря скорости оказались пропорциональными вихрю скорости в геострофическом приближении, различие в коэффициентах корреляции между адвекциями вихря скорости, определенными по геострофическим соотношениям и равенствам (1), будет обусловлено только различием компонент скорости, а не различием градиентов вихря.

Производные по осям x и y от температуры и вихря скорости определялись по треугольной сетке [6] с расстояниями между точками 330 км. Лапласиан наземного давления, необходимый для расчетов геострофического вихря скорости, определялся по семи точкам — одной центральной и шести, расположенным на окружности радиуса 330 км.

Коэффициенты корреляции между величинами адвекций, определенных по геострофическому ветру и ветру, приведенному указанным выше

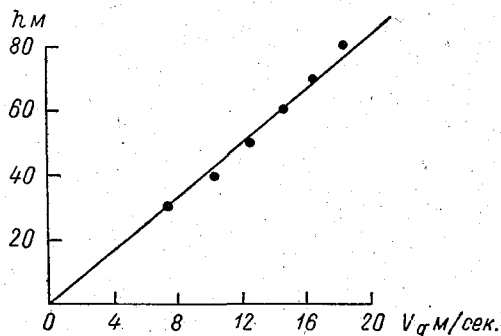


Рис. 1. Зависимость высоты перелома коэффициента турбулентного обмена от скорости геострофического ветра. Точками нанесены отдельные решения системы трансцендентных уравнений ($z_0 = 0,1$ м., $\gamma = 0,3$ град/100 м).

способом к уровню флюгера, оказались равными 0,91 (для адвекции температуры) и 0,90 (для адвекции вихря скорости). К сожалению, мы не смогли провести расчеты для реального ветра, поскольку данные, снятые с синоптической карты, очень неточны и разложение ветра на компоненты и последующее их дифференцирование связано со значительными погрешностями.

Учет изменений ветра в пограничном слое приводит, как это следует из приведенных здесь уравнений, к уменьшению величин адвекций примерно в полтора раза, причем это уменьшение будет сильнее для адвекции вихря.

Приведенные выше коэффициенты корреляции и оценки изменения величин адвекции свидетельствуют о том, что введение указанных поправок на отличие ветра в приземном слое от геострофического будет иметь примерно такой же эффект, как и введение в нижнее граничное условие для изменений давления вертикальной скорости, возникающей за счет турбулентного трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булеев Н. И., Марчук Г. И. О динамике крупномасштабных процессов. Труды ИФА АН СССР, № 2, 1958.
2. Галаджий Н. М., Мелентьева И. И., Ткаченко А. В. Определение высоты пограничного слоя атмосферы различными методами. Труды ГГО и УкрНИГМИ, вып. 144, 1963.
3. Гандин Л. С. О применении полных потоков в динамике пограничного слоя атмосферы. Труды ГГО, вып. 66, 1956.
4. Дубов А. С. Об учете приземного трения при прогнозе поля давления у земли. Труды ГГО, вып. 71, 1957.
5. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеиздат, Л., 1961.
6. Юдин М. И. О прогнозе давления численными методами. Труды ГГО, вып. 71, 1957.
7. Юдин М. И. Решение уравнений динамики атмосферы при использовании закономерностей структуры метеорологических полей в целях краткосрочного прогноза погоды. Труды ГГО, вып. 63, 1963.
8. Юдин М. И., Швец М. Е. Стационарная модель распределения ветра с высотой в турбулентной атмосфере. Труды ГГО, вып. 8, 1940.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПАРАМЕТРОВ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЕСТЕСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

На отдельных примерах показывается целесообразность использования параметров разложения по естественным функциям в синоптике.

1. Метод разложения метеорологических полей по естественным ортогональным функциям, описанный в ряде работ [1, 2, 3], позволяет большой объем информации о данном поле сконцентрировать в сравнительно небольшом числе параметров разложения.

Значение метеорологического элемента в любой точке поля a_i представляется в виде суммы естественных составляющих

$$f(a_i, t_k) = \sum_{j=1}^h T_{jk} \cdot X_{ji} \quad (1)$$

Естественные функции X_{ji} определяются в каждой точке поля по статистической выборке, а число коэффициентов разложения T_{jk} для момента времени t_k зависит от скорости сходимости ряда (1). Преимущество данного метода разложения заключается в том, что функции X_{ji} , по которым производится разложение, являются оптимальными, ряд (1) имеет высокую скорость сходимости и представление эмпирической функции $f(a_i, t_k)$ с высокой степенью точности возможно первыми немногими членами ряда (1). Поэтому анализ полей любого масштаба можно проводить по небольшому числу параметров T_j ($j=1 \div 6$).

Из работ [3—5] следует, что для описания барических полей над территорией Атлантико-Европейского сектора или Американского, составляющего примерно $1/3$ территории северного полушария, с точностью до 75—80% необходимо всего четыре коэффициента. Для описания барического поля над всем северным полушарием с такой же точностью достаточно 10 параметров T_j [4].

Это обстоятельство открывает большие возможности для постановки и решения ряда вопросов в метеорологии.

В зависимости от требования и целей задачи число коэффициентов, используемых при анализе, можно уменьшить до двух или одного.

Так, в работе [3] было показано, что для выделения дней с однородными синоптическими процессами достаточно двух первых коэффициентов (T_1 и T_2).

Таким образом, дальнейшее исследование полей с помощью коэффициентов разложения T_j представляется весьма перспективным. В частности, можно указать на ряд задач, при решении которых использование рассматриваемого статистического анализа по естественным состав-

ляющим может быть особенно эффективным: это построение объективной типизации синоптических процессов, подбор аналогов состояния атмосферных движений и процессов для территорий различных масштабов, анализ сопряженности процессов над различными участками земного шара, экономное хранение информации о метеорологических полях и многое другое.

В данной статье проиллюстрировано на некоторых примерах возможное использование параметров T_i в ряде задач.

Так как первые два параметра (T_1 и T_2), как следует из работы [3], оказались наиболее показательными для выделения однородных групп рассматриваемого материала, попробуем использовать их для объективной типизации синоптических процессов. Для этого следует двумерное пространство с осями T_1 и T_2 каким-то образом разделить на области с определенными значениями коэффициентов T_1 и T_2 . Каждый день со своими значениями T_1 и T_2 интерпретируется точкой в рассматриваемом пространстве. Все дни, попадающие в одну область, будут относиться к одному типу процессов.

Рассмотрим один из простейших способов разделения пространства (T_1 и T_2) на области. Проведем две прямые, параллельные осям T_1 и T_2 , из такого расчета, чтобы в каждую выделенную область попало примерно одинаковое число точек. Одна прямая проведена параллельно оси T_1 при $T_2 = -4$, другая — по оси T_2 . Выделились четыре области и соответственно четыре типа процессов:

I	$T_1 > 0$	$T_2 < -4$
II	$T_1 > 0$	$T_2 > -4$
III	$T_1 < 0$	$T_2 < -4$
IV	$T_1 < 0$	$T_2 > -4$

В данном примере использовано около 160 различных случаев, поэтому в каждую из четырех областей вошло примерно 40 случаев.

Типизацию можно считать целесообразной и удачной, если каждому типу будут соответствовать его характеристики погоды, и чем ярче выражены эти характеристики для крайних типов, тем удачнее типизация. Поэтому по отдельным станциям Атлантико-Европейского сектора были сняты с синоптических карт, кроме давления, данные о температуре воздуха и облачности.

К сожалению, пока нет возможности анализировать коэффициенты (параметры) разложения по естественным функциям полей температуры, облачности и других метеорологических элементов, поэтому рассмотрение погодных характеристик произведем по данным метеорологических станций.

В группе каждого типа значения погодных характеристик были разбиты на ряд градаций и по каждой градации определена повторяемость элемента. Дополнительно были подсчитаны дисперсии давления

$$\sigma_p^2 = (\overline{p_s} - p_i)^2 + (\overline{p_s} - \overline{P_0})^2 = \sigma_{p_i}^2 + \sigma_{p_s}^2, \quad (2)$$

где $\overline{P_0}$ — средняя по всем 160 случаям (генеральная средняя), $\overline{p_s}$ — средняя в группе материала, относящейся к данному типу (s), $\sigma_{p_i}^2$ — дисперсия давления от средней в каждом типе, $\sigma_{p_s}^2$ — дисперсия средних в каждом типе (s) от генеральной средней ($\overline{P_0}$).

Для того чтобы иметь возможность оценить объективную типизацию, имеет смысл сравнить ее с синоптической типизацией. Поэтому тот же материал (160 случаев) был разделен на три типа, согласно

типизации Вангенгейма (С, W, E). В каждом типе определена повторяемость тех же элементов температуры и облачности и по таким же градациям, которые использовались для оценки объективной типизации: для температуры воздуха через 10° , для облачности 0—2, 3—7 и 8—10 баллов. В табл. 1—3 Приложения представлена сводка повторяемости температуры и облачности для двух типизаций по указанным градациям и сводка дисперсий давления. При сравнении типизаций (табл. 1) по температуре и облачности были использованы данные семи метеорологических станций: 1, 7, 13, 14, 17, 19, 25 (рис. 1), а по дисперсии давления — девяти: 1, 3, 5, 7, 13, 14, 17, 25, 26.

Таблица 1

Сравнение синоптической и объективной типизаций

По дисперсии давления $\sigma_{p_i}^2$

Типизация	Станция								
	1	3	5	7	13	14	17	25	26
Синоптическая	185	166	110	237	103	225	145	112	194
Объективная	180	159	109	235	71	119	106	116	174
					+	+	+		+

По температуре воздуха

Типизация	Станция						
	1	7	13	14	17	19	25
Синоптическая	25	44	22	29	49	28	35
Объективная	48	53	23	62	41	27	38
	+	+		+	—		

По облачности

Типизация	Станция						
	1	7	13	14	17	19	25
Синоптическая	11	51	66	72	26	29	33
Объективная	33	43	48	54	36	35	25
	+	—	—	—	+	—	+

Оценка типизаций производилась по каждой станции.

Сравнение по дисперсии давления производится путем сопоставления $\sigma_{p_s}^2$ и $\sigma_{p_i}^2$: чем больше $\sigma_{p_s}^2$ и чем меньше $\sigma_{p_i}^2$, тем более однородные группы материала объединены в типе и тем больше различаются средние значения p_s от типа к типу. Поскольку число типов в двух типизациях различно, для сравнительной оценки были выбраны средние значения $\sigma_{p_i}^2$ из четырех типов объективной типизации и из трех типов

синоптической типизации (табл. 1). Полная сводка всех сведений по дисперсии дана в табл. 1 Приложения.

Как следует из табл. 1, $\bar{\sigma}_{pi}^2$ значительно меньше в объективной типизации, а на 5 станциях они почти равны. Следовательно, по дисперсии давления объективная типизация имеет явное преимущество.

Сравнение по температуре производилось следующим образом. По каждому пункту из каждой типизации выбирались по два наиболее контрастных типа с точки зрения наибольшей повторяемости крайних градаций температуры (из трех градаций), т. е. отбирались два типа,

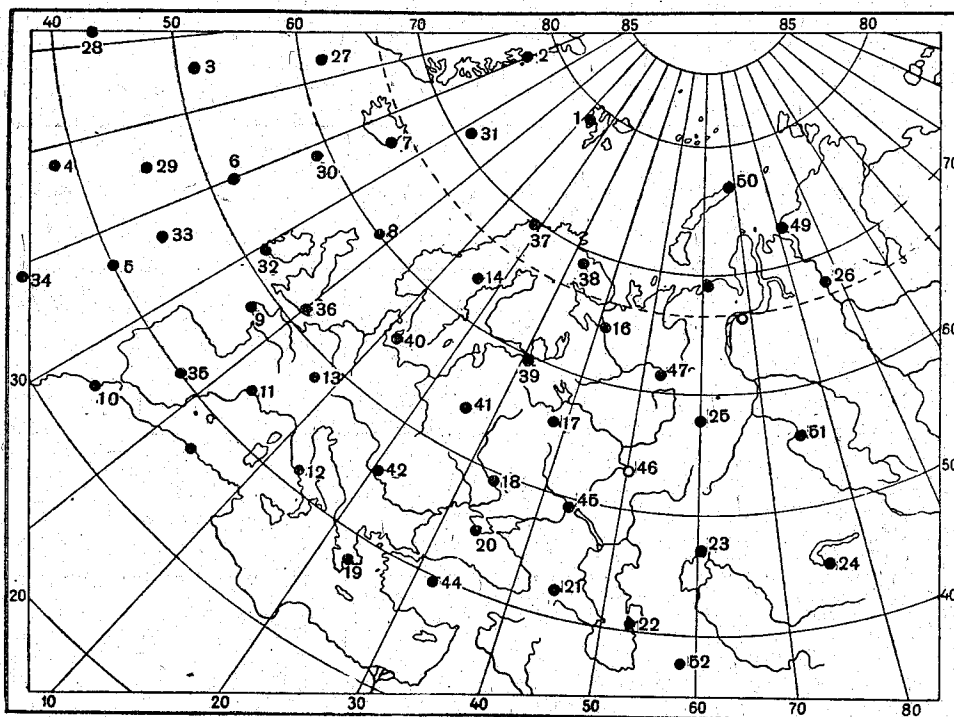


Рис. 1. Сетка точек, в которых снимались исходные данные.

объединяющие: один — наиболее холодные дни, другой — наиболее теплые дни. В табл. 2 Приложения указаны крайние типы по каждому пункту.

В каждой паре контрастных типов находилась процентная разность повторяемостей по двум крайним градациям, а их сумма послужила критерием оценки при сравнении типизаций.

В табл. 1 выписаны эти оценки по пунктам. Чем больше суммарная величина процентной разности, тем отчетливее типизация по температуре. В этом смысле объективная типизация также имеет некоторые преимущества перед синоптической типизацией: из семи по трем станциям получен примерно одинаковый результат, по трем — лучшая оценка для объективной типизации и для одной — худшая оценка для объективной типизации.

Сравнение по облачности производилось таким же способом, как и по температуре (см. табл. 1 и в Приложении табл. 3).

Таблица 2

Коэффициенты корреляции между значениями T_j в Атлантико-Европейском (I) и Американском (II) секторах северного полушария

Данные	T_1^I				T_2^I			
	T_1^{II}	T_2^{II}	T_3^{II}	T_4^{II}	T_1^{II}	T_2^{II}	T_3^{II}	T_4^{II}
Наземные	0,72	0,14	-0,14	0,09	0,28	-0,005	0,08	-0,27
AT ₅₀₀	0,23	0,12	-0,02	-0,03	0,48	-0,14	-0,06	0,12

Данные	T_3^I				T_4^I			
	T_1^{II}	T_2^{II}	T_3^{II}	T_4^{II}	T_1^{II}	T_2^{II}	T_3^{II}	T_4^{II}
Наземные	0,02	-0,20	-0,03	0,02	-0,20	0,16	-0,31	0,35
AT ₅₀₀	-0,33	-0,12	0,14	-0,18	0,19	0,34	-0,08	-0,16

Из табл. 1 следует, что особого преимущества в этом случае нет ни для одной типизации: по трем станциям получен лучший результат по объективной типизации и по четырем — по синоптической.

Более точные объективные сведения о сравнительной оценке двух типизаций можно получить только при анализе параметров разложения по естественным функциям полей температуры, облачности и других метеорологических элементов. Тогда отпадает необходимость сравнивать преимущества типизаций по пунктам, так как при таком сравнении можно выбрать пункт с мало характерным временным ходом температуры, облачности и других метеорологических элементов с точки зрения их связи с основными параметрами атмосферного движения, характеризующими крупномасштабные явления (т. е. с коэффициентами разложения полей давления). По коэффициентам разложения можно судить о главной и наиболее существенной информации о полях метеорологических элементов (температуре, облачности и др.).

Однако, как видно из проведенного сравнения погодных характеристик по пунктам, даже такого рода сопоставления говорят о том, что вполне возможно построение объективной типизации и она имеет все основания для дальнейшего развития.

2. С помощью метода разложения метеорологических полей по ортогональным составляющим можно проследить пространственные связи бароциркуляционного и вообще метеорологического режима северного полушария.

Вопрос о сопряженности циркуляционных процессов над различными ограниченными участками северного полушария неоднократно поднимался в литературе [3]. Однако при изучении связей атмосферных процессов приходилось ограничиваться различного рода качественными показателями. Метод разложения по ортогональным составляющим позволяет количественно оценить степень связанности атмосферных процессов над определенными участками северного полушария. При этом

указанный метод позволяет отделить существенную информацию о метеорологических полях от несущественной, что имеет большое значение для получения четких корреляционных зависимостей.

Коэффициенты разложения T_j являются некоторыми обобщенными характеристиками циркуляции. Первые коэффициенты разложения характеризуют наиболее важные, существенные черты метеорологических полей. Рассмотрим эти коэффициенты.

В табл. 2 приведены коэффициенты корреляции между значениями T_j в Атлантико-Европейском и Американском секторах северного полушария. Для вычисления коэффициентов корреляции использовано по 100 коэффициентов разложения для каждой поверхности (AT_{500} , наземного давления) в каждом секторе.

Проведенные расчеты подтвердили сопряженность атмосферных процессов над Американским и Атлантико-Европейским секторами северного полушария. Коэффициент корреляции r для T_1 обоих секторов оказался равным 0,72 (наземное давление). Сопряженность процессов на средних уровнях тропосферы выражена несколько слабее; для T_2 Атлантико-Европейского и T_1 Американского секторов $r=0,48$, при этом ошибка определения коэффициента корреляции $\delta=0,08$.

Таким образом, циркуляционные процессы над рассматриваемыми секторами северного полушария развиваются синхронно и находятся в тесной зависимости друг от друга, особенно вблизи земной поверхности.

Это открывает возможности новых подходов к решению проблемы долгосрочных прогнозов погоды на полушарии.

Приведенные выше примеры иллюстрируют использование коэффициентов разложения для конкретных задач. Области исследования с помощью коэффициентов разложения, конечно, не ограничиваются этим, и, пожалуй, сейчас даже трудно предугадать все многообразные пути применения метода разложения по ортогональным составляющим для практических целей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров Н. А. Аналитическое представление полей. Труды ЦИП, вып. 64, 1958.
2. Обухов А. М. О статистических ортогональных разложениях эмпирических функций. Изд. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1960.
3. Воробьева Е. В. Сопряженность атмосферных процессов в северном полушарии. Гидрометеиздат, Л., 1962.
4. Яковлева Н. И., Мещерская А. В., Кудашкин Г. Д. Исследование полей давления (геопотенциала) методом разложения по естественным составляющим. Статист. сб. «Материалы рабочей группы по применению статистических методов в метеорологии», № 165.
5. Яковлева Н. И., Мещерская А. В. Анализ барического поля над северным полушарием методом разложения по естественным функциям. См. настоящий сборник.
6. Мещерская А. В., Яковлева Н. И. Уточнение естественных составляющих полей геопотенциала (давления) над Атлантико-Европейским сектором. См. настоящий сборник.

Величины дисперсии давления по объективной и синоптической типизации

Станция																				
Тип	1	3	5	7	13	14	17	25	26	Тип	1	3	5	7	13	14	17	25	26	
	Объективная типизация $\sigma_{p_i}^2$										Синоптическая типизация $\sigma_{p_i}^2$									
I	120	99	150	244	93	138	134	95	104	E	101	132	107	248	133	228	175	106	129	
II	111	119	142	273	94	97	75	141	256	C	174	177	131	222	97	228	96	125	226	
III	292	219	61	178	70	105	111	108	97	W	280	189	92	240	80	218	163	104	226	
IV	196	201	82	247	28	137	105	119	237	$\sigma_{p_i}^2$	185	166	110	237	103	225	145	112	194	
$\overline{\sigma_{p_i}^2}$	181	159	109	235	71	119	106	116	174											
$\sigma_{p_s}^2$		6	6		71	128	57		26			3	3		51	33	17		15	

Таблица 2

Повторяемость температуры воздуха (%) на уровне моря по трем градациям и типам

Тип	Станция									
	градации									
	1	7	13	14	17	19	25			
I	-5	-6	6	5	5	-6	5	6	5	-6
II	-15	-16	-15	-15	-15	-16	-15	16	-5	-15
III	5	15	15	-5	-5	5	5	15	5	15
IV										
Крайние типы										
Разность повторяемо-										
стей в крайних типах										
Сумма разностей										

Объективная типизация

I	28	49	23	18	79	3	0	80	20	31	59	10	57	31	13	10	82	8	5	44	51
II	23	46	31	16	84	0	5	65	30	28	52	20	65	30	5	15	79	6	20	40	40
III	50	40	10	0	63	37	5	83	12	42	50	8	37	45	18	24	76	0	13	36	51
IV	32	53	15	0	92	8	21	56	23	70	30	0	48	48	4	29	71	0	25	42	33
Крайние типы																					
Разность повторяемо-																					
стей в крайних типах																					
Сумма разностей																					

Синоптическая типизация

E	40	40	20	0	88	12	25	72	3	30	61	9	51	33	16	11	84	5	5	43	52
C	37	51	12	32	68	0	25	73	2	54	42	4	30	59	11	34	76	0	15	46	39
W	24	52	24	9	80	1	16	68	16	47	41	12	72	24	4	20	66	4	27	34	39
Крайние типы																					
Разность повторяемо-																					
стей в крайних типах																					
Сумма разностей																					

Таблица 3

Повторяемости облачности (%) по градациям и типам

Тип	Станция									
	градации									
	1	7	13	14	17	19	25			
0-2	3-7	8-10	0-2	3-7	8-10	0-2	3-7	8-10	0-2	3-7-8-10

Объективная типизация

I	59	18	23	42	13	45	28	26	46	31	15	54	15	18	67	80	18	2	72	13	15
II	75	18	7	34	26	40	38	40	22	38	20	42	22	15	68	82	15	3	58	20	22
III	58	37	5	33	23	44	55	15	30	41	23	36	32	36	48	54	36	10	62	15	23
IV	64	23	13	52	28	20	58	14	28	53	25	22	20	37	60	58	37	5	52	28	20
Крайние типы		I, II	III, IV	I, IV	I, IV	I, IV	I, IV	I, IV	I, IV	I, IV	I, IV	I, IV	I, IV	I, III	II, III	II, III	II, III		I, IV		
Разность повторяемо-	16		17	19	43	24	30	48	18	22	54	32	17	36	19	28	35	7	20	25	5
стей в крайних типах																					
Сумма разностей		33																			

Синоптическая типизация

E	62	22	16	32	23	45	24	28	48	26	9	65	21	12	67	80	18	2	67	14	19
C	63	28	9	62	14	24	48	22	30	50	32	18	30	20	50	68	24	8	68	18	14
W	67	23	10	33	29	38	63	16	21	47	25	28	18	19	63	57	35	8	48	25	27
Крайние типы		E, W	E, W	E, C	E, C	E, C	E, W	E, W	E, W	E, C	E, C	E, C	E, C	E, C	E, C	E, W	E, W		C, W		
Разность повторяемо-	5		6	30	51	21	39	66	27	24	72	47	9	26	17	23	29	6	20	33	18
стей в крайних типах																					
Сумма разностей		11																			

ОЦЕНКА АНАЛОГИЧНОСТИ АТМОСФЕРНЫХ СОСТОЯНИЙ И ПРОЦЕССОВ С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРОВ РАЗЛОЖЕНИЯ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ПО ЕСТЕСТВЕННЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

Излагаются приемы определения аналогичности атмосферных состояний и процессов. Исследуется возможность использования для подбора аналогов гидродинамических прогнозов поля давления.

Большинство используемых в настоящее время объективных методов определения аналогичности метеорологических полей основано на принципе точечного сравнения. Это приводит, с одной стороны, к трудности реализации подбора аналогов и, кроме того, не всегда устанавливается аналогия наиболее динамически значимых черт процессов.

Поэтому для подбора аналогов важно выделить сначала наиболее существенную информацию о сравниваемых состояниях и процессах в атмосфере, сжать ее для облегчения реализации задачи.

Значительными возможностями в этом отношении обладает способ, основанный на сравнении параметров разложения полей по естественным ортогональным функциям. В этом случае основная информация о поле может быть дана небольшим числом параметров, сравнение которых намного проще, чем сравнение данных во многих точках поля [4]. Кроме того, упрощается хранение такой информации и реализация подбора аналогов на быстродействующих вычислительных машинах.

За критерий аналогичности метеорологических полей естественно принять параметр, определяемый различием коэффициентов разложения сравниваемых полей по естественным функциям. Обозначим через M_0 критерий аналогичности полей, определяемый из соотношения

$$M_0 = \sum_{j=1}^h [T_j(t_2) - T_j(t_1)]^2, \quad (1)$$

где $T_j(t)$ — коэффициент разложения поля за момент времени t ; суммирование распространяется на h первых коэффициентов. Чем ближе к нулю M_0 , тем более близкими можно считать сравниваемые поля.

Соотношение (1) является реализацией метода подвижной клетки, сформулированного А. М. Омшанским [6], при котором степень сходства полей определяется расстоянием между точками в h -мерном пространстве.

Для большинства метеорологических задач недостаточно оценивать степень сходства отдельных полей, в том числе одного поля давления. Необходимо оценивать одновременно аналогичность полей давления, температуры, влажности, осадков и др. в трехмерном пространстве.

Для этой цели необходимо определить естественные ортогональные функции хотя бы перечисленных метеорологических элементов. По соотношению (1) фактически определяется аналогичность поля данного элемента (назовем ее «парциальной») на одном уровне, так что для определения аналогичности состояния атмосферы необходимо проинтегрировать уравнение (1) по элементам и по высоте. Практически аналогичность состояний можно определять из соотношения

$$M = \sum_i^l \sum_k^m \sum_j^h \alpha_{i,k,j} [T_{i,k,j}(t_2) - T_{i,k,j}(t_1)]^2. \quad (2)$$

Здесь $\alpha_{i,k,j}$ — весовые коэффициенты; h — число коэффициентов разложения, взятых для оценки аналогичности, которое может различаться в зависимости от метеоэлементов и требований к строгости аналогичности; m — число метеоэлементов, по которым оценивается аналогичность состояний; l — число уровней.

Рассмотрение аналогичности состояний в последовательные промежутки времени позволяет оценивать аналогичность процессов ($M_{\text{пр}}$). В частности, для сравнения полей одного элемента, отстоящих на интервал времени τ , на одном уровне можно воспользоваться соотношением

$$M_{\text{пр}} = \sum_j^h \{ [T_j(t_2 + \tau) - T_j(t_2)] - [T_j(t_1 + \tau) - T_j(t_1)] \}^2. \quad (3)$$

Соотношение вида (3), по-видимому, нельзя применять для определения аналогичности процессов большой длительности ввиду существенной нелинейности хода во времени метеоэлементов, а следовательно, и коэффициентов разложения по естественным функциям. Поэтому для сравнения длительных процессов лучше определять сначала аналогичность в дискретные моменты времени по соотношениям вида (1) и (2).

Определив аналогичность состояний $M(t)$ в моменты времени t_2 и t_1 и далее через промежуток времени τ , аналогичность процессов длительностью $n\tau$ можно определить из соотношения

$$M_{\text{пр}} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} M(t), \quad (4)$$

где n — число шагов по времени.

Для практического отыскания аналогичных состояний и процессов необходима картотека коэффициентов разложения полей по естественным функциям. В этом случае реализация подбора аналогов к исследуемому полю или процессу с помощью электронной вычислительной машины не представляет трудности. Для уменьшения расчетов можно рекомендовать сначала путем сравнения отсеять случаи явно неаналогичные.

Для оценки аналогичности можно воспользоваться также графическим методом. Для приближенной оценки достаточно использовать поле точек, нанесенных на плоскости T_1, T_2 . В принципе можно использовать дополнительно график T_3, T_4 и т. д. Если точки таких полей пронумерованы и номерам соответствуют даты случаев, то процедура подбора аналогичных состояний сведется к нанесению точки для исследуемого случая на график и определению дат случаев, точки для которых на графике находятся в радиусе $r_{\text{кр}}$ от данной точки. При этом $r_{\text{кр}}$ определяется требованием к строгости подбора аналогов. Графическим способом можно воспользоваться и для оценки аналогичности

процессов, исследуя степень близости состояний и изменения параметров, характеризующих эти состояния за последовательные моменты времени.

Используя параметры разложения полей по естественным функциям для территорий разных масштабов, легко оценить сходство наиболее значимых «внешних» факторов. Представляется существенным возможность учета не только интегрального критерия аналогичности, рассчитываемого по соотношениям вида (1—4), но и характерных черт сравниваемых процессов, имеющих наибольшее и наименьшее сходство. Эта возможность вытекает из различной масштабности движений, описываемых коэффициентами разложения полей с различными порядковыми номерами.

Рассмотрим вопрос о возможности использования гидродинамического метода прогноза для характеристики аналогичности процессов.

Изучение преемственности атмосферных процессов показало недостаточную обеспеченность сохранения аналогии процессов при аналогичности предыходных. Здесь речь идет об аналогичности, определяемой весьма приближенно.

Действительно, чтобы говорить об абсолютной аналогичности состояний и процессов, необходимо оценивать большое число факторов. Используемые же в настоящее время приемы не позволяют сколь-нибудь уверенно оценивать аналогичность хотя бы важнейших из них. Поэтому можно считать, что в большинстве случаев (исключая случаи неустойчивых атмосферных движений) причиной недостаточной обеспеченности метода аналогов при прогнозе циркуляционных условий является неумение оценивать степень аналогичности как состояний, так и в особенности процессов в атмосфере.

Рассмотрим здесь вопрос о возможности использования гидродинамического прогноза полей геопотенциала для оценки аналогичности процессов. Речь идет о том, можно ли использовать прогностические изменения, полученные гидродинамическим методом, в качестве характеристики процессов в прогностический период времени. Некоторый ответ на этот вопрос можно получить, рассматривая характеристики успешности прогнозов, в частности коэффициент корреляции прогностических и фактических изменений. Но коэффициент корреляции не дает ясного представления о такой возможности из-за значительных относительных ошибок прогнозов, так как для большей части испытанных методов гидродинамического прогноза геопотенциала на сутки относительная ошибка составляет 0,5—1,0.

Существующие методы определения аналогичности состояний в атмосфере в большинстве случаев не дают возможности выявить те особенности исходных состояний, которые ведут к различному развитию процессов в дальнейшем при довольно близких исходных состояниях. Привлечение аналогичности предыходных процессов позволяет несколько дополнить недостающую информацию, что, однако, не всегда обеспечивает успех прогнозирования. Как уже отмечалось, дело прежде всего в точности определения степени аналогичности. Большие возможности для определения аналогичности состояний атмосферы заключены в использовании метода разложения полей по естественным функциям. Но наиболее полно такая задача, по-видимому, может быть решена лишь с привлечением уравнений гидротермодинамики.

Для характеристики аналогичности процессов можно попытаться, в частности, использовать гидродинамические прогнозы исходя из того, что такие прогнозы должны характеризовать тенденцию процесса.

Для выяснения того, насколько улавливает гидродинамический ме-

тод тенденцию процесса при близких исходных ситуациях, была рассмотрена связь ошибок прогнозов в зависимости от аналогичности исходных ситуаций и прогностических изменений. Предполагалось, что близость исходных ситуаций и прогностических изменений должна сопровождаться сходством полей ошибок сравниваемых прогнозов.

Исходным материалом для исследования послужили оперативные гидродинамические прогнозы полей геопотенциала на сутки, составленные в ММЦ. Рассмотрено 40 прогнозов AT_{500} за февраль и март 1962 года. При этом в нашем распоряжении были прогнозы и их ошибки в 25 пунктах: Бухарест, Белград, Прага, Копенгаген, Стокгольм, Эстерзунд, Мурманск, Архангельск, Ленинград, Рига, Львов, Киев, Тамбов, Москва, Минск, Псков, Горький, Куйбышев, Баку, Сухуми, Симферополь, Нарьян-Мар, Свердловск, Салехард и Аральск.

Для определения аналогичности исходных ситуаций были рассчитаны коэффициенты разложения T_j полей AT_{500} по естественным ортогональным функциям X_j . При этом исходные поля задавались в 25 точках на территории Атлантико-Европейского сектора северного полушария. Естественные функции X_j взяты для зимней выборки из 150 дней. Аналогичность полей AT_{500} за исходные моменты времени приближенно отождествлялась с аналогичностью исходных состояний. Были рассчитаны критерии аналогичности для всех сочетаний из 40 дней по два. Расчет производился по соотношению (1). При этом рассчитаны критерии аналогичности M_j по одному ($j=1$), двум ($j=1, 2$), трем ($j=1, 2, 3$) и четырем ($j=1, 2, 3, 4$) первым коэффициентам разложения по естественным функциям.

Аналогичность исходных полей определялась для территории, примерно совпадающей с областью задания исходных данных для гидродинамического прогноза.

Для возможности оценки аналогичности прогностических изменений по соотношению (3) в перечисленных выше 25 пунктах получены интерполированные значения составляющих естественных функций. В качестве исходных для интерполяции были использованы карты полей естественных функций для Европы. При этом использовались соображения о возможности интерполяции составляющих естественных функций, вытекающие из схождения естественных функций, полученных по данным в двух перекрывающихся сетках точек [4].

Интерполированные естественные функции $X_{j \text{ инт}}$ были использованы для расчета коэффициентов разложения полей AT_{500} за исходные для прогнозов моменты времени, а также прогностических значений AT_{500} . По соотношению (3) рассчитаны критерии аналогичности прогностических изменений M'_j . Величины M' , как и M , рассчитаны для всех 780 сочетаний по одному, двум, трем и четырем коэффициентам разложения полей по $X_{j \text{ инт}}$, затем вычислены коэффициенты корреляции ошибок прогнозов δ_x и δ_y по формуле

$$R_{\text{ош}} = \frac{\overline{\delta_x \cdot \delta_y}}{\sqrt{\sigma_x \cdot \sigma_y}}, \quad (5)$$

где черта сверху означает осреднение, σ — дисперсия соответствующего поля ошибок.

Дальнейшая работа заключалась в сопоставлении коэффициентов корреляции ошибок прогнозов с рассчитанными критериями аналогичности исходных состояний M и прогностических изменений M' . Сначала

анализ был проведен для дней, когда коэффициенты корреляции полей ошибок $R_{\text{ош}} \geq 50\%$ или $R_{\text{ош}} \leq -50\%$. При этом во взятой выборке оказалось $R_{\text{ош}} \geq 50\%$ в 74 случаях и $R_{\text{ош}} \leq -50\%$ в 44 случаях. Ни по одному из параметров аналогичности (M или M') в отдельности случаи с $R_{\text{ош}} \geq 50\%$ и $R_{\text{ош}} \leq -50\%$ четко не разделились, хотя все же выявилась тенденция к преобладанию положительных $R_{\text{ош}}$ при малых значениях M и M' . Наиболее четко эта тенденция проявилась в случае, когда для вычисления M использованы первые два коэффициента разложения, а для вычисления M' — два или три первых коэффициента.

Поэтому были найдены распределения числа случаев с $R_{\text{ош}} \geq 50\%$ и $R_{\text{ош}} \leq -50\%$ с учетом обоих параметров аналогичности M и M' . В табл. 1 представлено распределение числа случаев по некоторым градациям M и M' . В первой строке дается число случаев с $R_{\text{ош}} \geq 50\%$, а во второй — число случаев с $R_{\text{ош}} \leq -50\%$ в данной градации, в скобках — отношение числа случаев с $R_{\text{ош}} \geq 50\%$ к общему числу случаев в градации. При этом M_j и M'_j определены по двум коэффициентам разложения по естественным функциям ($j=1, 2$).

Таблица 1

M'_j M_j	0—250 0—2000	250—500 0—2000	500—1000 0—2000	0—1000 0—2000	0—250 0—3500
$R_{\text{ош}} \geq 50\%$	26 (87)	13 (57)	18 (86)	57 (77)	32 (86)
$R_{\text{ош}} \leq -50\%$	4	10	3	17	5

Из таблицы видно, что в области $M' \leq 1000$, $M \leq 2000$ и особенно в области $M' \leq 250$, $M \leq 2000$ наблюдается явное преобладание случаев с $R_{\text{ош}} \geq 50\%$.

Затем найдено распределение $R_{\text{ош}}$ в зависимости от M и M' для всех 780 сочетаний.

В табл. 2 дано число случаев с $R_{\text{ош}} > 0$ и $R_{\text{ош}} \leq 0$, а также $R_{\text{ош}} \geq 50\%$ и $R_{\text{ош}} \leq -50\%$ по градациям M_j ($j=1, 2$) и M'_j ($j=1, 2$).

Таблица 2

M'_j M_j	0—100 0—200	0—100 0—500	0—200 0—200	0—200 0—500	0—300 0—500	0—500 0—500	Общее число случаев
$R_{\text{ош}} > 0$	19 (79)	30 (75)	32 (70)	55 (71)	76 (72)	105 (69)	457
$R_{\text{ош}} \leq 0$	5	10	14	23	30	47	323
$R_{\text{ош}} \geq 50$	2	3	2	5	8	14	74
$R_{\text{ош}} \leq -50$	0	0	0	1	3	6	44

В табл. 3 представлено распределение числа случаев с $R_{\text{ош}} > 0$ и $R_{\text{ош}} \leq 0$ по градациям M'_j ($j=1, 2, 3, 4$) и M_j ($j=1, 2$). Причем числа в скобках означают отношение числа случаев с $R_{\text{ош}} > 0$ к общему числу случаев в данной градации.

Таблица 3

M'_j M_j	0—100 0—200	0—100 0—500	0—200 0—500	0—500 0—500	Общее число случаев
$R_{\text{ош}} > 0$	8 (80)	11 (79)	28 (72)	63 (70)	457
$R_{\text{ош}} \leq 0$	2	3	11	27	323

Из табл. 2 и 3 видно, что преобладают случаи с положительными коэффициентами корреляции ошибок прогнозов при малых значениях M и M' . Из сравнения табл. 1 и 2 видно, что интервалы значений M' и M , в которых наблюдается явное преобладание положительных коэффициентов, должны быть взяты существенно меньшими, чем те, которые получены при анализе случаев только с высокими $R_{\text{ош}}$ ($\leq -50\%$ и 50%).

Это обстоятельство в некоторой степени указывает на возможные границы критериев аналогичности ($M_{\text{кр}}$ и $M_{\text{кр}}'$).

Рассмотрение табл. 2 и 3 показывает, что для подбора довольно строгих аналогов необходимо значительно увеличить выборку. Так, например, если брать за меру строгости аналогичности $M \leq 200$ и $M' \leq 100$, то в 40-дневной выборке аналог можно найти не для каждого случая. Тем более недостаточно случаев для проведения эмпирической коррекции численных прогнозов посредством использования в качестве поправок ошибок прогнозов для аналогичных ситуаций с соответствующими коэффициентами регрессии.

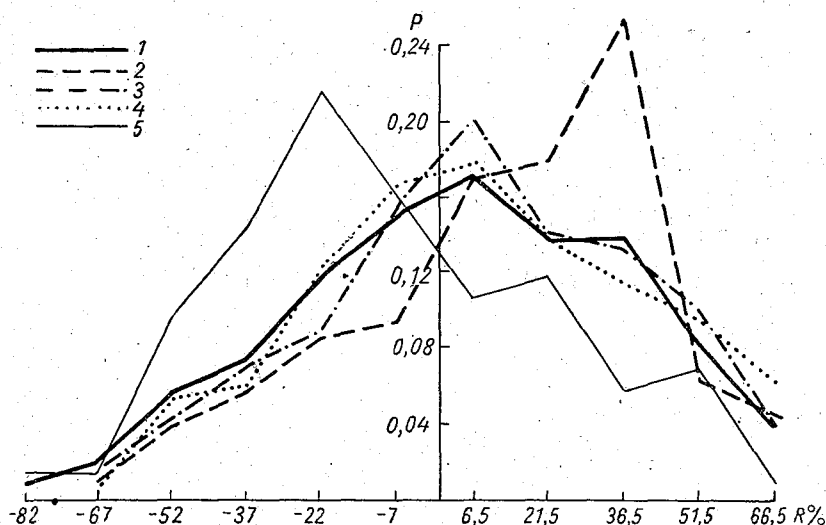


Рис. 1. Распределение коэффициентов корреляции ошибок прогнозов в различных градациях критериев аналогичности M_j и M'_j ($j=1, 2$).

1 — полная выборка; 2 — $M \leq 500$, $M' \leq 300$ (область I); 3 — $M \leq 1000$, $M' \leq 500$ без области I (область II); 4 — $M \leq 2000$, $M' \leq 1000$ без области II (область III); 5 — $M > 3000$, $M' \leq 300$.

М. И. Юдин показал, что эффективность эмпирического исправления прогнозов зависит от величины среднего коэффициента корреляции между ошибками прогнозов $(R_{\text{ош}})_{\text{ср}}$ в пределах градации M и M' , удовлетворяющей требованию строгости подбора аналогов, а также от числа аналогов, используемых для нахождения поправок (n). В этом свете можно идти либо по пути увеличения области M и M' , либо по пути увеличения $(R_{\text{ош}})_{\text{ср}}$. При этом зависимость исправления прогнозов от $(R_{\text{ош}})_{\text{ср}}$ сильнее, чем от n . Поэтому предпочтительнее второй путь, так как увеличение $M_{\text{кр}}$ и $M_{\text{кр}}'$ ведет к одновременному снижению $(R_{\text{ош}})_{\text{ср}}$ (рис. 1). Второй же путь требует увеличения объема выборки, которая используется для подбора аналогов, в частности нужны случаи, для которых рассчитаны гидродинамические прогнозы. Однако в настоящее время эта трудность в значительной мере снимается ввиду наличия оперативных прогнозов, число которых быстро увеличивается.

Из табл. 2 видно, что даже при критерии аналогичности $M_2 \leq 200$

и $M_2' \leq 100$ получается много случаев с плохо коррелированными ошибками прогнозов. Как указал Юдин, плохо коррелированные ошибки прогнозов при аналогичных исходных состояниях и процессах могут явиться следствием разной реализации неустойчивых атмосферных процессов. Кроме того, может проявиться недостаточность использованных критериев аналогичности и погрешности прогностической схемы. Очевидно, что действительно неаналогичные случаи можно отсеять, повысив требования к строгости подбора аналогов, а также оценивая степень аналогичности хотя бы наиболее важных метеорологических полей. Упомянутым методом оценку аналогичности полей можно производить только для AT_{500} (число имевшихся прогнозов также было ограничено). Поэтому для дополнительной оценки степени аналогичности был использован графический прием. В системе координат T_1, T_2 (T_j — коэффициенты разложения полей AT_{500} по естественным функциям) наносились межсуточные фактические и прогностические изменения T . Такая процедура проведена для 24 пар случаев, для которых $M_2 \leq 200$, $M_2' \leq 100$ (табл. 2).

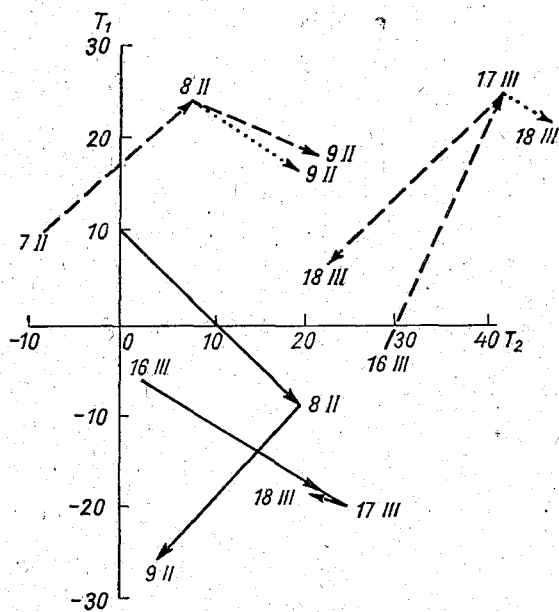


Рис. 2. Межсуточные и прогностические изменения параметров разложения полей AT_{500} по естественным функциям.

Анализ графиков показал, что малость M' не всегда однозначно определяет аналогичность прогностических изменений, а малые M часто сопровождаются довольно значительным различием состояний на меньшей территории.

На рис. 2—4 приведены графики межсуточных изменений параметров разложения полей T_j . Сплошной линией нанесены изменения T_j , рассчитанные по данным в 25 точках на территории Атлантико-Европейского сектора, т. е. T_j , по которым рассчитывался критерий M .

Пунктирная линия относится к параметрам разложения для фактических, а точечная для прогностических изменений геопотенциала, заданных в 25 пунктах, перечисленных выше. Изменения параметров T_j , рассчитанных по данным территорий разных масштабов, нанесены на один график. Сравнивать же значения этих параметров нельзя, так как для разложения полей использованы разные естественные функции.

На рис. 2 приведены межсуточные изменения T для случая прогнозов на 9/II и 18/III 1962 г., причем $R_{\text{ош}} = -26\%$. Процессы до исходных моментов времени развивались в основном аналогично. Прогноз также дал одинаковое по направленности изменение. Однако в последующие сутки фактические изменения, а следовательно, и ошибки прогнозов оказались различными.

Это позволяет предположить, что имела место различная реализация неустойчивости атмосферных движений, хотя какую-то роль, возможно, имело различие начальных состояний на территории Европы.

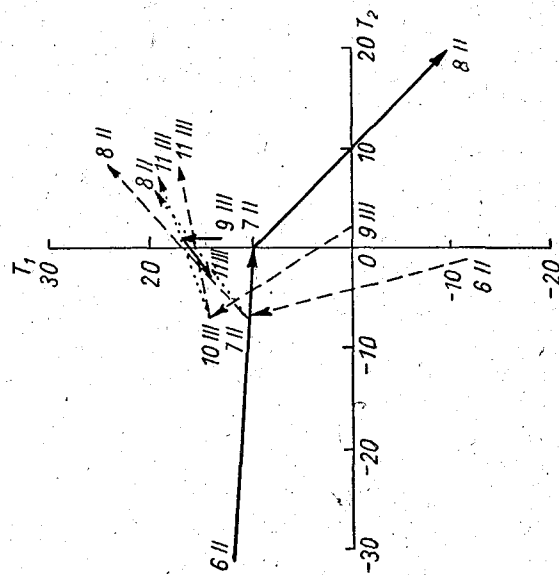


Рис. 3. Межсуготочные и прогностические изменения параметров разложения полей AT_{600} по естественным функциям.

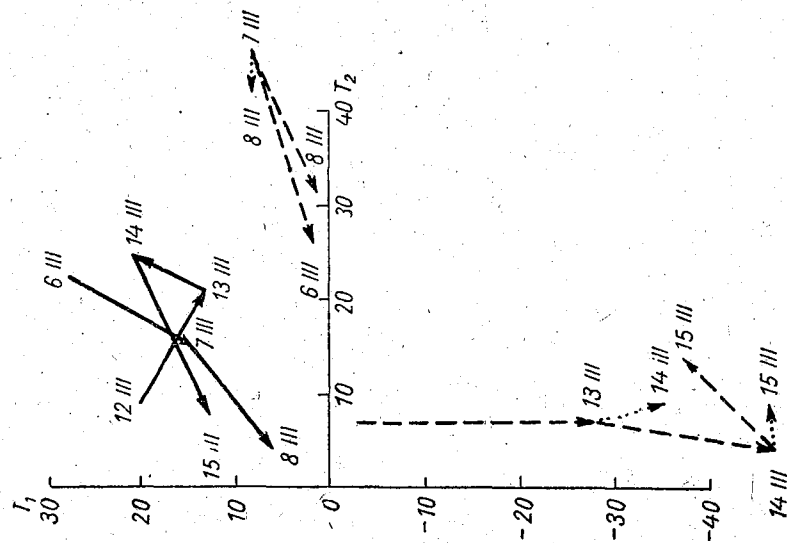


Рис. 4. Межсуготочные и прогностические изменения параметров разложения полей AT_{600} по естественным функциям.

Рассмотрим рис. 3, на котором представлен случай прогнозов на 8/II и 11/III 1962 г. ($R_{\text{ош}} = 41\%$). Здесь очень хорошее сходство исходных состояний и прогностических изменений подтверждается сходством последующих изменений и, следовательно, высокой корреляцией ошибок прогнозов.

Рисунок 4 позволяет проанализировать три пары прогнозов: на 8 и 14/III, 8 и 15/III, 14 и 15/III, для которых $R_{\text{ош}}$ равно 1, —23 и —40% соответственно. Прогностические изменения имеют различное направление и поэтому правильнее отнести эти случаи к неаналогам. Малость же критерия M' обусловлена малостью прогностических изменений.

Относя к неаналогичным случаи, когда направление прогностических изменений на графиках отличалось примерно на 90° и более, мы получили повышенные средние коэффициенты корреляции для области $M \leq 200$ и $M' \leq 100$ от 18 (24 случая) до 22% (19 оставшихся случаев).

Отметим еще, что в ряде случаев причиной плохой корреляции ошибок прогнозов при близких исходных состояниях и прогностических изменениях являются погрешности метода прогноза.

Сделаем краткие выводы.

1. Определение аналогичности метеорологических полей и атмосферных процессов с помощью разложения полей по естественным ортогональным функциям обладает значительными возможностями. При этом сравнению подвергаются наиболее важные черты полей и процессов; реализация метода не представляет трудности.

2. Критерии аналогичности M и M' , рассчитанные по параметрам разложения по естественным функциям геопотенциала поверхности AT_{500} , позволяют сравнительно определенно оценивать степень аналогичности атмосферных состояний и процессов.

3. Дополнительным приемом (графическим) удастся значительно уточнить подбор аналогов. Это дает возможность подойти к решению ряда задач, в частности, выявлению случаев неустойчивых движений в атмосфере и эмпирической коррекции гидродинамических прогнозов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров Н. А. Аналогичность полей метеорологических элементов. Труды ЦИП, вып. 46, 1956.
2. Багров Н. А. Аналитическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляющих. Труды ЦИП, вып. 74, 1959.
3. Вительс Л. А. Групповые характеристики аналогов. Метеорология и гидрология, № 4, 1948.
4. Яковлева Н. И., Мещерская А. В., Кудашкин Г. Д. Исследование полей давления (геопотенциала) методом разложения по естественным составляющим. Сб. «Материалы рабочей группы по применению статистических методов в метеорологии», № 165, 1964.
5. Обухов А. М. О статистически ортогональных разложениях эмпирических функций. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1960.
6. Омшанский А. М. Принципы построения объективного прогноза погоды. Труды ГГО, вып. 26, 1939.
7. Williams S. An empirical correction to the barotropic forecast. Tellus, vol. 10, No 2, 1958.

О СВЯЗИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГРАНИЦЫ СНЕЖНОГО ПОКРОВА С ТИПАМИ ЦИРКУЛЯЦИИ Г. Я. ВАНГЕНГЕЙМА В ВЕСЕННИЙ ПЕРИОД

Рассматривается вопрос о влиянии циркуляционных факторов на последующее перемещение границы снежного покрова.

Для выяснения связи между положением границы устойчивого снежного покрова и типами циркуляции Г. Я. Вангенгейма [1] были использованы построенные декадные карты распределения снежного покрова за март—май с 1949 по 1957 г. Всего было построено 108 карт. Методика построения карт достаточно подробно освещена в ранее опубликованных работах [2, 3], поэтому в данной статье останавливаться на этом не будем. Кроме вышеуказанных, были построены карты, на которые наносились положения изолиний 10 дней со снегом последовательно в первой декаде марта, апреля и мая за каждый год. Эти карты позволили проследить перемещение границы снежного покрова. В общих чертах перемещение происходит в направлении с юго-запада на северо-восток. В качестве примера приводится карта за 1949 год (рис. 1). Продвижение границы устойчивого снежного покрова в отдельные годы может значительно замедляться или ускоряться по времени. На рис. 2 показано положение границы в первой декаде апреля 1951 и 1957 гг.

В 1957 г. граница устойчивого снежного покрова проходит много южнее, чем в 1951 г. Если в западной части Европейской территории Союза ССР положение границ в обоих случаях является достаточно близким, то начиная с 35° в. д. границы значительно расходятся (рис. 2). На 60° в. д. расхождение достигает 10° .

Причины такого различия, как это уже было выявлено при исследовании осенних месяцев, заключаются в различии предшествующих синоптических обстановок.

Все рассмотренные годы можно разбить на две группы: с быстрым перемещением к северу границы устойчивого снежного покрова и замедленным. К первой группе относятся 1950, 1951 и 1953 гг., ко второй — 1949, 1952, 1954—1957 гг.

Далее была проведена увязка положения границы устойчивого снежного покрова с имеющими место в предшествующее время типами циркуляции Г. Я. Вангенгейма. За исходные брались карты за первую декаду апреля. Положение границы сопоставлялось с типами циркуляции, наблюдавшимися в течение полутора месяцев, предшествующих этому сроку. Оказалось, что в годы с быстрым продвижением границы устойчивого снежного покрова к северу в предшествующее время (конец

февраля и март) преобладающим типом циркуляции по Г. Я. Вангенгейму являлся западный W, как наиболее теплый.

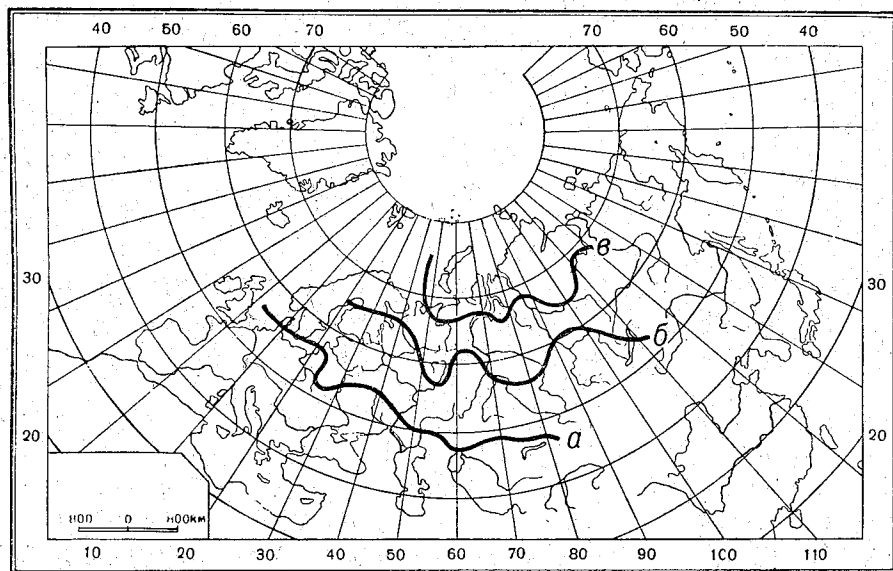


Рис. 1. Перемещение границы снежного покрова в первую декаду марта (а), апреля (б), мая (в) 1949 г.

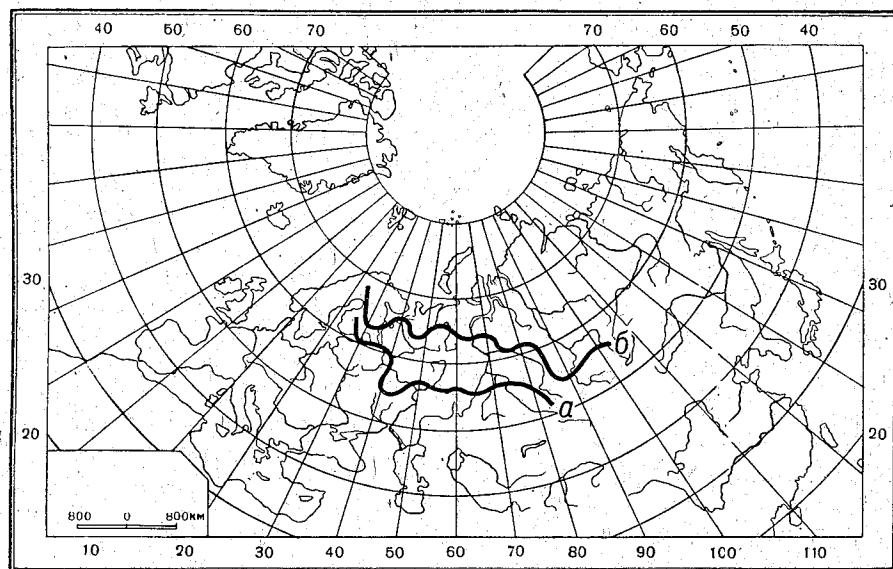


Рис. 2. Положение границы снежного покрова в первой декаде апреля 1957 г. (а) и 1951 г. (б).

В годы же с более медленным перемещением границы снежного покрова преобладающими являлись меридиональный С и восточный Е типы, причем чаще встречался тип Е. Замедленное продвижение границы в этих случаях можно объяснить низкой температурой воздуха, наблюдающейся при типах С и Е, что, очевидно, является препятствием

для таяния снега в весенние месяцы и тормозит продвижение границы снежного покрова к северу.

Для количественных оценок подсчитаны суммы дней с различными типами циркуляции (за вторую половину февраля и за март) в отдельности для случаев более южного и более северного положений границы снежного покрова в первой декаде апреля за каждый исследуемый год.

Для более быстрого перемещения, т. е. для более северного положения границы в первой декаде апреля, были получены результаты, приведенные в табл. 1.

Таблица 1

Число дней с различными типами циркуляции при быстром перемещении границы снежного покрова весной

Год	Тип					
	W		E		C	
	число дней	%	число дней	%	число дней	%
1950	18	41	11	25	15	34
1951	30	68	14	32	0	0
1953	24	55	0	0	20	45
Среднее . . .		55		19		26

Как показано в таблице, при быстром перемещении границы снежного покрова явно преобладающим является западный тип циркуляции W (55%).

Для более медленного перемещения границы, т. е. для более южного ее положения в первой декаде апреля, результаты подсчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Число дней с различными типами циркуляции при медленном перемещении границы снежного покрова весной

Год	Тип					
	W		E		C	
	число дней	%	число дней	%	число дней	%
1949	19	43	19	43	6	14
1952	0	0	19	42	26	58
1954	10	23	23	52	11	25
1955	3	7	18	41	23	52
1956	7	15	26	58	12	27
1957	9	20	28	64	7	16
Среднее . . .		18		50		32

Преобладающими, как видно, в данном случае являются типы E и C. В результате аналогичного исследования, проведенного для осенних месяцев [3], было установлено, что замедленное продвижение границы

снежного покрова (наиболее северное ее положение) связано с преобладанием в предшествующее время типов циркуляции Е и С ($W=19\%$, $E+C=81\%$), что можно объяснить отсутствием осадков при этих типах.

Интересно отметить, что весной медленное продвижение границы снежного покрова (наиболее южное ее положение) связано также с преобладанием типов Е и С ($W=18\%$, $E+C=82\%$).

В данном случае типы Е и С обуславливают холодную антициклональную погоду, которая, по-видимому, препятствует таянию снега.

В заключение можно сказать, что достаточно хорошая связь между положением границы устойчивого снежного покрова с типами циркуляции Вангенгейма, имеющая место как в осенние, так и в весенние месяцы, может быть учтена при прогнозе границы снежного покрова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вангенгейм Г. Я. Основы макроциркуляционного метода долгосрочных метеорологических прогнозов для Арктики. Труды АНИИ, т. 34, 1952.
2. Есакова Н. П., Афанасьева В. Б. О способах характеристики аномалий облачности, снежного покрова и радиационных потоков. Труды ГГО, вып. 143, 1962.
3. Афанасьева В. Б., Есакова Н. П. О связи снежного покрова с типами циркуляции Г. Я. Вангенгейма. Труды ГГО, вып. 161, 1964.

АНАЛИЗ БАРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НАД СЕВЕРНЫМ ПОЛУШАРИЕМ МЕТОДОМ РАЗЛОЖЕНИЯ ПО ЕСТЕСТВЕННЫМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ ФУНКЦИЯМ

Производится статистический анализ барических полей над северным полушарием методом разложения по естественным функциям. Полученные результаты сопоставляются с разложением над Американским и Атлантико-Европейским секторами полушария.

Учитывая преимущества статистического анализа метеорологических полей с помощью разложения их по естественным ортогональным функциям [1, 2, 3], этот метод был использован для анализа барического поля над северным полушарием.

Некоторые методические вопросы освещены в опубликованной работе [3], где метод был применен для анализа полей давления и геопотенциала AT_{500} над территорией первого естественно-синоптического района. В частности, при анализе полей естественных функций X_j над Атлантико-Европейским сектором отмечалось, что наиболее полная интерпретация полей X_j станет возможной только при анализе полей естественных функций по крайней мере над всем северным полушарием.

Для проведения статистического анализа полей над территорией северного полушария были подобраны 26 пунктов для снятия исходных данных на двух уровнях: AT_{1000} и AT_{500} . Для такой территории сетка из 26 точек является довольно редкой. Однако, можно считать, что информация о поле давления по 26 точкам позволит выявить основные крупные черты циркуляции планетарного масштаба. Более подробный анализ полей давления с помощью разложения по естественным функциям дополнительно произведен над двумя крупными секторами северного полушария: Американским и Атлантико-Европейским с использованием большого числа данных.

Подбор точек сетки определялся следующими условиями:

- 1) осветить по возможности равномерно все основные участки северного полушария,
- 2) включить точки из тех районов, которые являются синоптически наиболее значимыми (местоположение основных центров действия атмосферы),
- 3) выбрать те станции, которые имеют наиболее полные ежедневные наблюдения.

На основании этих условий подобрана сетка точек, представленная на рис. 1. Наиболее редко точки расположены над акваторией Тихого океана и над территорией КНР из-за чрезвычайно скудной информации по этим районам. Для всех 25 точек сетки данные получены с метеорологических станций или с кораблей погоды. Только по одной 24-й точке

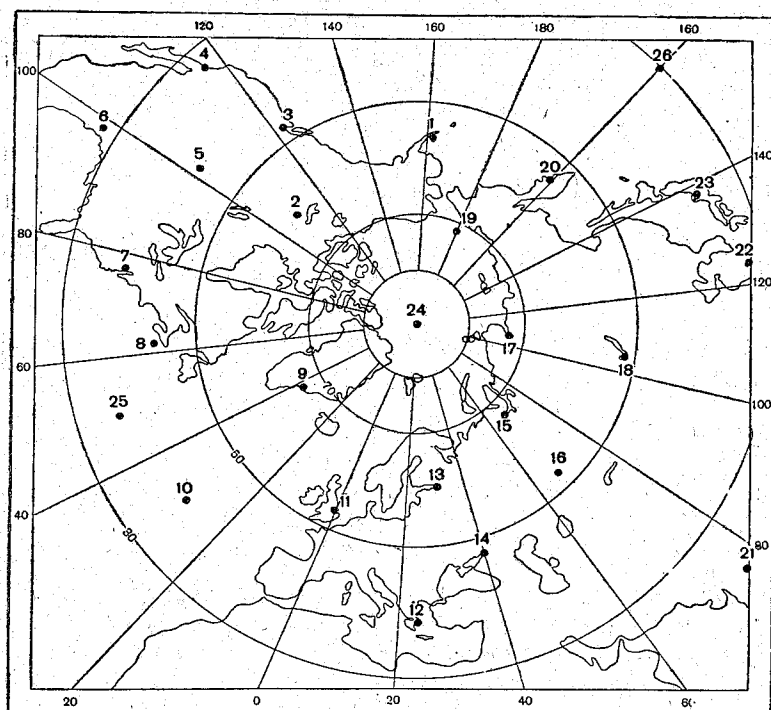


Рис. 1. Сетка точек, используемых для снятия исходных данных по северному полушарию.

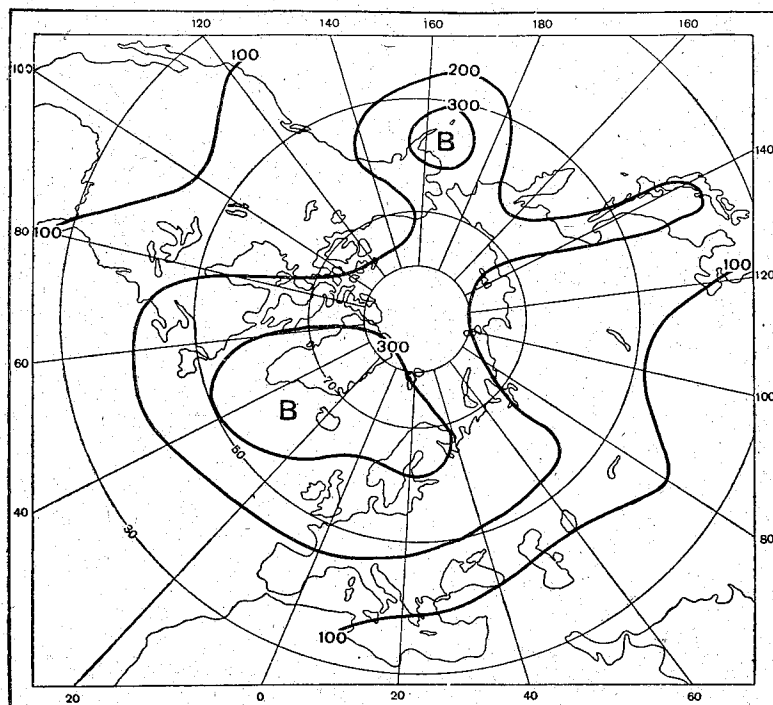


Рис. 2. Карта дисперсии σ_t^2 высот изобарической поверхности AT_{1000} .

(северный полюс) данные целиком снимались по изолиниям с карт. По выбранной сетке точек собраны данные высот изобарической поверхности AT_{1000} и AT_{500} за 00 час. гринвичского времени. Для каждого указанного изобарического уровня была составлена статистическая выборка из 136 дней холодного времени года (с ноября по март за период с 1957 по 1962 г. включительно). В частности, на ноябрь приходилось 19 дней, на март — 16, а на январь, февраль и декабрь — примерно по 35.

Даты для этой выборки подбирались по таблице случайных чисел, причем учитывалось, чтобы разница по времени составляла 3 дня или более (реже 2 дня), с тем чтобы исключить по возможности временную связность процессов. Большая часть данных взята из ежедневных таблиц для северного полушария, издающихся в Вашингтоне с 1957 г. [4].

Разложению по естественным функциям подвергались отклонения высот H_{500} и H_{1000} от средних временных, в каждой точке сетки ($\bar{H}_i - H_{ik}$), здесь i — индекс номера точки сетки ($i=1, 2, \dots, 26$), k — индекс даты, меняющийся во времени ($k=1, 2, \dots, N$), причем

$$\bar{H}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N H_{ik}.$$

Значение использования отклонений от средних по времени в каждой точке сетки заключается в том, что, по существу, анализу подвергается та часть изменений H_{ik} , которая характеризует аномалию барического поля.

Как было показано в работе [3], «вес» точек поля, участвующих в разложении, характеризуется величиной дисперсии $\sigma_i^2 = (\bar{H}_i - H_{ik})^2$ по данным выборки. Из анализа карты дисперсий σ_i^2 (рис. 2) следует, что районы с наибольшим весом точек совпадают с местоположением основных синоптических центров действия: Алеутского и Исландского минимумов. Ближайшей к Исландскому минимуму в принятой сетке является точка 9 (см. рис. 1) на юго-восточной окраине Гренландии, в которой значения σ_i^2 наибольшие: 209 дкм² на AT_{1000} и 373 дкм² на AT_{500} ; второй по значениям σ_i^2 является точка 1: 168 дкм² — на AT_{1000} и 311 дкм² на AT_{500} . Наименьшие значения дисперсии (5—20 дкм²) наблюдаются в районах южных широт ($\varphi=20-35^\circ$). Таким образом, синоптические «минимумы» вносят существенный вклад в первые естественные составляющие при разложении барических полей.

В табл. 1 приведены оценки разложения по естественным функциям высот изобарических поверхностей AT_{1000} и AT_{500} по территории северного полушария.

В табл. 1 представлены собственные числа корреляционной матрицы λ_j ($j=1, 2, \dots, 10$), являющиеся частью суммарной дисперсии рассматриваемого поля, которая учитывается j -тым членом разложения; точность представления полей суммой h членов разложения ($h=1, 2, \dots, 10$) и величины остаточной дисперсии, характеризующие ошибку восстановления полей с помощью числа h естественных составляющих. Как следует из табл. 1, один первый член разложения описывает 19% суммарной дисперсии на AT_{1000} и 16% — на AT_{500} . Первые четыре слагаемых представляют поля высот AT_{1000} с точностью 47% и поля высот AT_{500} — 45%. Десять первых членов разложения описывают 76% дисперсии поля на каждом уровне, а на оставшиеся 16 членов разложения приходится 24%.

Значительный интерес представляют поля первых естественных

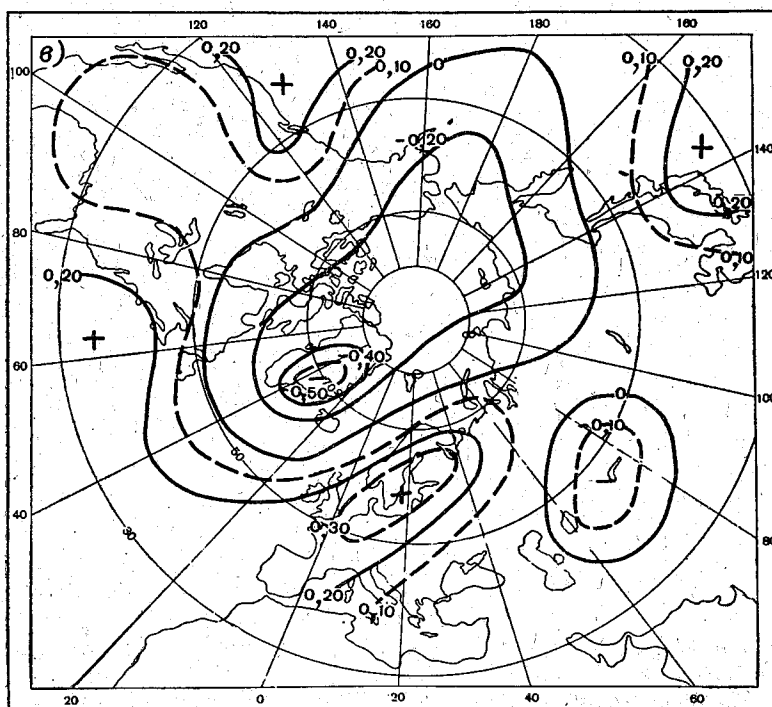
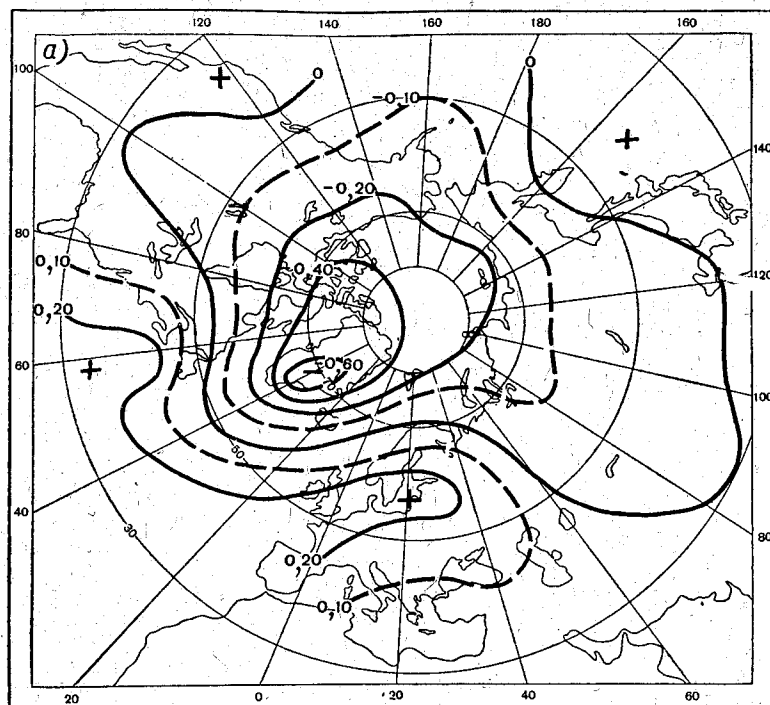
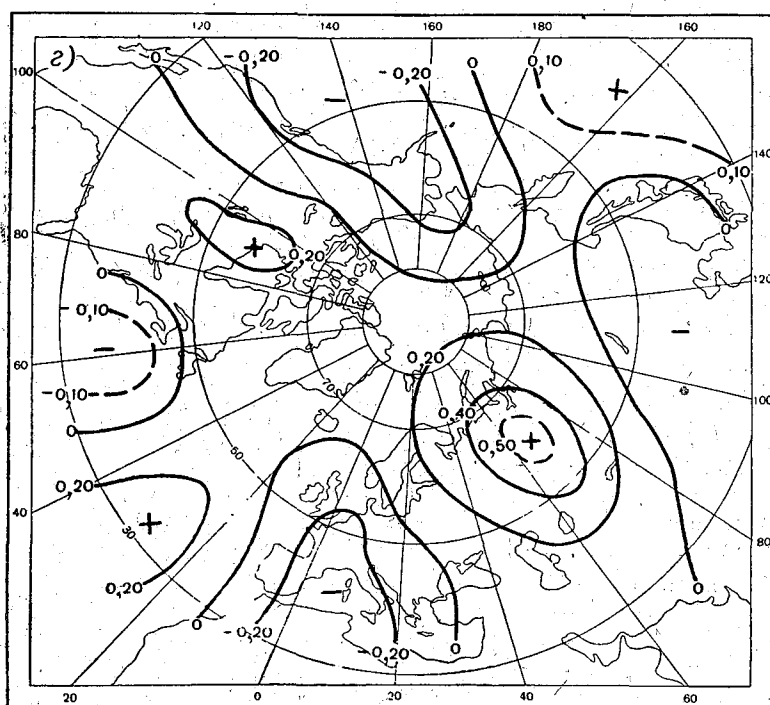
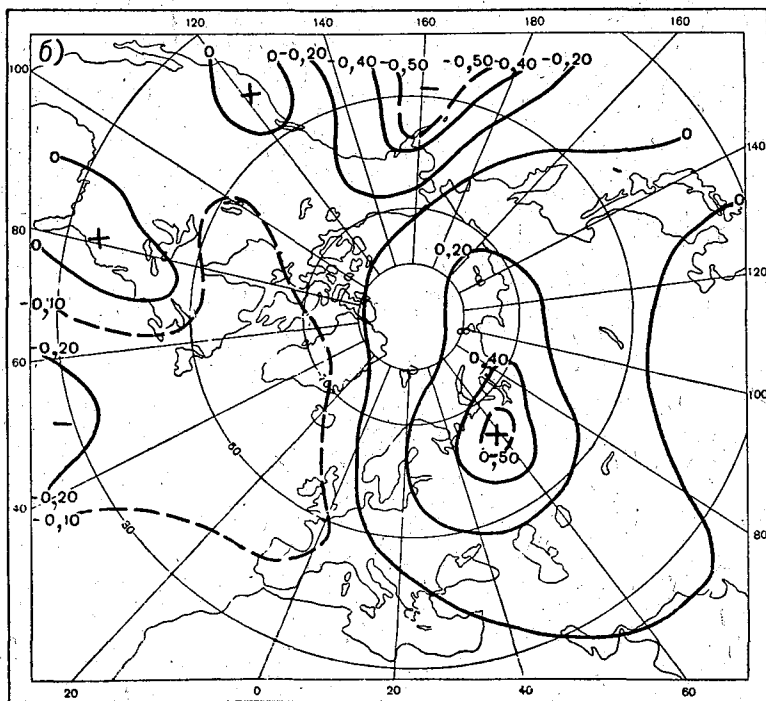


Рис. 3. Карты полей естественных функций

а) $X_1 - AT_{1000}$, б) $X_2 - AT_{1000}$.



над территорией северного полушария.

б) $X_1 - AT_{500}$, г) $X_3 - AT_{500}$.

Таблица 1

Оценка разложения полей высот изобарических поверхностей H_{1000} и H_{500}
по территории северного полушария

j	λ_j	$\sum_{j=1}^h \lambda_j$	$\frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} \%$	$\frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} \%$	$1 - \frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j}$	λ_j	$\sum_{j=1}^h \lambda_j$	$\frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} \%$	$\frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} \%$	$1 - \frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j}$
	λ_j	$\sum_{j=1}^h \lambda_j$	$\frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} \%$	$\frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} \%$	$1 - \frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j}$	λ_j	$\sum_{j=1}^h \lambda_j$	$\frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} \%$	$\frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} \%$	$1 - \frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j}$
	H_{1000}					H_{500}				
1	364	364	19	19	81	720	720	16	16	84
2	213	577	11	30	70	494	1214	11	28	72
3	175	752	9	39	61	413	1633	10	37	63
4	153	905	8	47	53	354	1987	8	45	55
5	126	1031	7	54	46	295	2282	7	52	48
6	109	1140	6	59	41	265	2547	6	58	42
7	94	1234	5	64	36	229	2776	5	63	37
8	79	1313	4	68	32	207	2983	5	68	32
9	74	1387	4	72	28	194	3177	4	72	28
10	67	1459	3	76	24	154	3331	4	76	24
			$\sum_{j=1}^{26} \lambda_j = 1923$					$\sum_{j=1}^{26} \lambda_j = 4405$		

функций над территорией северного полушария. Естественные функции X_{ji} ($i=1, 2, \dots, 26$ по числу точек поля; j — номер слагаемого в разложении) рассчитываются на основе статистической совокупности полей H_{ih} и представляют собой последовательность элементарных форм циркуляции с различной статистической повторяемостью. Таким образом метод позволяет выделить и наиболее существенные черты барических полей и указать на их значимость в общей циркуляции атмосферы.

На рис. 3 представлены поля первых естественных функций X_j на двух уровнях атмосферы.

Поле X_1 на уровне AT_{1000} (рис. 3 а) имеет обширную отрицательную область над арктическими районами с четырьмя отрогами, направленными к центральным частям материков и океанов. Максимальное по абсолютному значению $X_1=0,67$ находится в точке 9, на юго-восточной окраине Гренландии. Между указанными отрогами расположены четыре области с положительными знаками X_1 , приходящиеся на восточную и западную периферии материков и океанов. Гребни и ложбины на AT_{1000} выражены менее отчетливо, чем на AT_{500} , но в целом они отражают наличие четырех длинных волн в барическом поле над северным полушарием.

Таким образом, в поле X_1 проявляется суммарное действие нескольких факторов, не равнозначных по своей силе воздействия на циркуляцию атмосферы. Во-первых, это различие в поле геопотенциала между полюсом и южными широтами северного полушария. Во-вторых, это сильное влияние теплового течения Гольфстрим зимой; кстати говоря, это обстоятельство приводит к смещению центра влияния из района северного полюса в район сильных тепловых контрастов (Гренландия — Гольфстрим). В-третьих, эта неоднородность распределения материков и океанов в зональном направлении и наличие четырех длинных волн в западном потоке атмосферы.

Наиболее активной в поле X_1 по величине и по градиентам является область, располагающаяся примерно над Атлантико-Европейским сектором. Районами максимального влияния, кроме восточной окраины Гренландии ($X_1 = -0,67$) и северного полюса ($X_1 = -0,37$), следует считать район Западной Европы ($X_1 = 0,29$) и юго-западную часть Атлантики ($X_1 = 0,22$).

На AT_{500} поле X_1 (рис. 3 в) в общих чертах повторяет поле X_1 на уровне AT_{1000} . Следовательно, здесь проявляется действие тех же факторов, о которых говорилось выше. Некоторое различие в полях вызвано ослаблением влияния наземных тепловых очагов на AT_{500} в точке 9 $X_1 = -0,53$ вместо $-0,67$ на AT_{1000} и более отчетливым проявлением четырех длинных волн за счет усиления гребней. В частности, в районе Западной Европы $X_1 = 0,35$ (вместо $0,29$ на AT_{1000}), в западной части Американского континента $X_1 = 0,21$ (вместо $0,08$) и т. д.

Таким образом, с высотой несколько ослабляется влияние наземных очагов и устанавливается интенсивность четырех длинных волн. Сами по себе эти выводы не являются новыми, но они свидетельствуют о том, что даже редкая сетка точек позволила уловить правильные черты планетарной циркуляции. В поле второй естественной функции X_2 (второй по вкладу в общую дисперсию полей) проявляется вторая по значимости последовательность факторов (рис. 3 б). Как на AT_{1000} , так и на AT_{500} , в районе Алеутских островов ярко выражена область больших значений X_2 , обусловленная действием Алеутского минимума. На AT_{1000} , кроме указанной области ($X_2 = -0,525$), над северными районами Евразийского материка сильно выражена обратная по знаку вторая область ($X_2 = 0,544$).

Весьма интересным оказалось поле X_3 на поверхности AT_{500} . Здесь проявились повторно в более чистом виде четыре длинные волны, а в поле X_3 на поверхности AT_{1000} повторно отражается действие Алеутского минимума.

Таким образом, последующие X_j ($j > 1$) показывают, что на нижних поверхностях наиболее существенно влияние наземных источников, а с высотой сильнее проявляется зональность, хотя влияние наземных источников также имеет некоторое значение.

Чтобы еще раз убедиться в том, что с помощью сетки из 26 точек уловлены основные черты крупномасштабной циркуляции над территорией северного полушария, произведем сопоставление с аналогичным статистическим анализом по более густой сетке над частью территории северного полушария. В частности, сравним поля первых естественных функций X_j ($j = 1, 2, 3, 4$), полученные с использованием сетки также из 26 точек по территории первого естественного синоптического района, с полями X_j северного полушария [3, 5]. Как следует из этого сопоставления, поля X_j первого сектора довольно хорошо вписываются в соответствующие поля X_j северного полушария; в частности, можно указать на такое соответствие, приведенное в таблице на стр. 56.

Дополнительно произведем статистический анализ барического поля с использованием сравнительно большого объема информации над территорией Американского сектора северного полушария. Этот сектор ограничим меридианами 165 и 35° з. д. и параллелями 82 и 20° с. ш., что примерно составляет $1/3$ территории северного полушария. В Американском секторе использовалась сетка из 26 точек, по возможности равномерно распределенных по территории (рис. 4). Положение семи точек сетки Американского сектора совпадает с рассмотренными ранее (см. рис. 1). Статистическая выборка составлена из тех же 136 дней холодного времени года, которые вошли в выборку для всего северного

Первый сектор		Северное полушарие
Число случаев в выборке		
111 [3]	150 [5]	

X_1 X_2 X_3 X_4	AT ₁₀₀₀		X_1 X_2 X_3 X_4
	X_1	X_3	
	X_2	X_2	
	X_4	X_4	
X_1 X_2 X_3 X_4	AT ₅₀₀		X_1 X_2 X_3 X_4
	X_1	X_1	
	X_2	X_2	
	X_3	X_3	

полушария. По-прежнему разложение производилось для отклонений в каждой точке от средних по времени высот изобарических поверхностей AT₁₀₀₀ и AT₅₀₀.

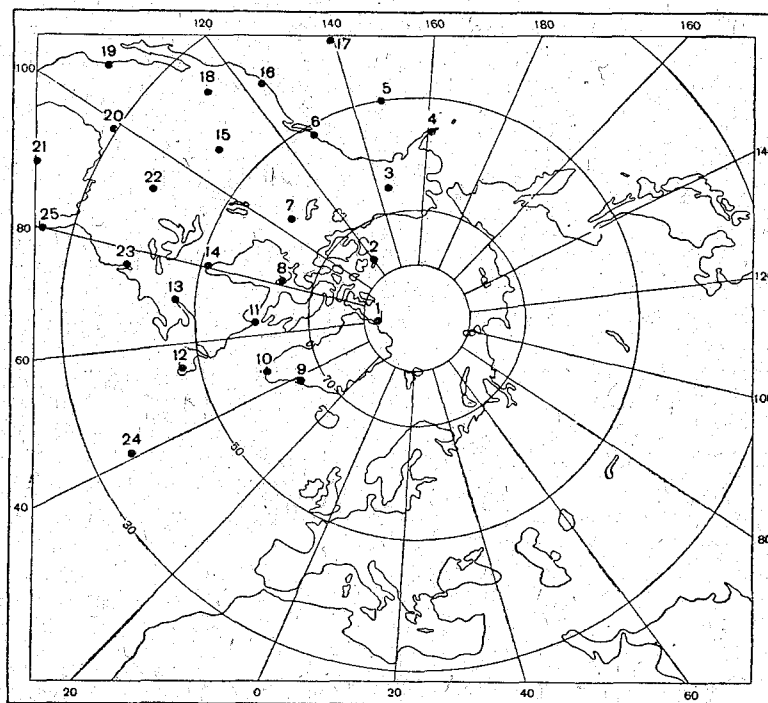


Рис. 4. Сетка точек для снятия исходных данных по Американскому сектору.

Карта дисперсий σ_i^2 , составленная на материале Американского сектора, почти не отличается от карты σ_i^2 по этому же сектору, составленной для северного полушария (рис. 2).

На изобарической поверхности AT₁₀₀₀ по-прежнему отчетливо выделяются два центра действия с высокими значениями дисперсий: один —

Алеутский, другой — в районе юго-восточной Гренландии (точки 9, 10), причем второй центр действия более сильный по величине дисперсии.

Обратимся к оценке сходимости разложения полей геопотенциала по Американскому сектору. Как следует из табл. 2, первые члены вносят вклад по 26% при разложении H_{1000} и H_{500} , суммы четырех первых слагаемых — по 61%, а суммы 10 членов — 84% и 86% соответственно.

Таблица 2

Оценка разложения полей высот изобарических поверхностей H_{1000} и H_{500} по территории Американского сектора

j	λ_j дкм ²	$\sum_{j=1}^h \lambda_j$	$\frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} \%$	$\frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} \%$	$1 - \frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j}$	λ_j дкм ²	$\sum_{j=1}^h \lambda_j$	$\frac{\lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} \%$	$\frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j} \%$	$1 - \frac{\sum_{j=1}^h \lambda_j}{\sum_{j=1}^{26} \lambda_j}$
1	509	509	26	26	74	1299	1299	26	26	74
2	339	848	18	44	56	748	2047	15	42	58
3	189	1037	10	54	46	527	2574	11	52	48
4	131	1168	7	61	39	416	2990	9	61	39
5	108	1276	6	66	34	368	3358	8	68	32
6	94	1370	5	71	29	235	3593	5	73	27
7	82	1452	4	76	24	199	3792	4	77	23
8	73	1525	4	79	21	166	3958	3	81	19
9	52	1577	3	82	18	149	4107	3	84	16
10	49	1626	2	84	16	110	4217	2	86	14
$\sum_{j=1}^{26} \lambda_j = 1925$					$\sum_{j=1}^{26} \lambda_j = 4918$					

В целом скорость сходимости разложения по Американскому сектору несколько выше, чем по северному полушарию и даже по первому естественному синоптическому сектору (ср. с табл. 2—3 [5]) (по выборке из 150 дней). Преимущество в разложении по Американскому сектору обусловлено большим вкладом первых двух слагаемых в разложении, хотя по сумме 10 слагаемых по первому сектору заметно небольшое превышение вклада по сравнению с аналогичными вкладами по Американскому сектору:

Вклад суммы h членов в разложение	Первый сектор		Второй сектор		Северное полушарие	
	назем.	AT ₅₀₀	AT ₁₀₀₀	AT ₅₀₀	AT ₁₀₀₀	AT ₅₀₀
1	20	22	26	26	19	16
2	37	38	44	42	30	28
4	63	62	61	61	47	45
10	88	87	84	86	76	76

Таким образом, несмотря на то, что размеры территории первого и второго секторов северного полушария примерно одинаковы, различие в синоптических процессах и факторах, их определяющих, приводит к некоторому различию оценок сходимости. Поля естественных функций

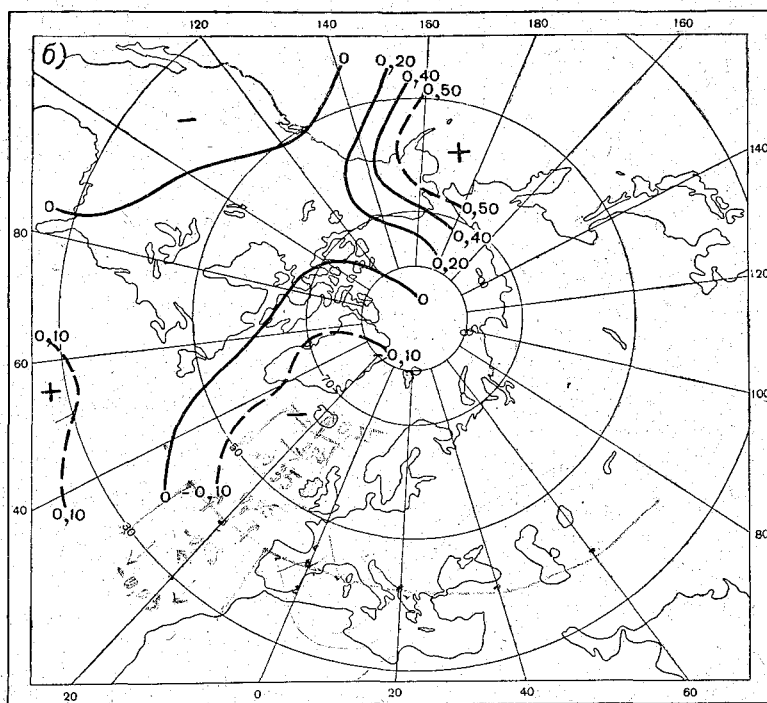
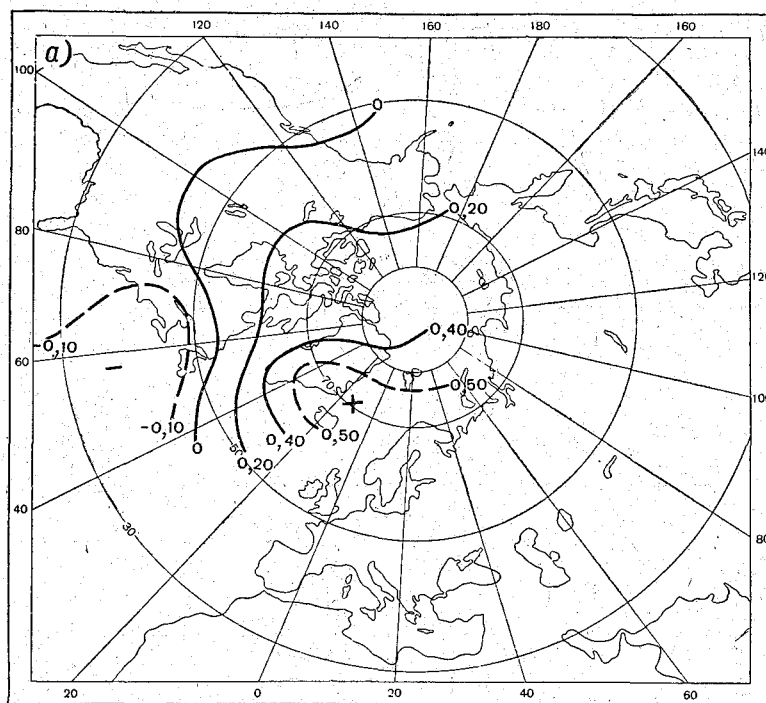


Рис. 5. Карты полей естественных функций поверхности над Амери-
канским сектором.
а) $X_1 - AT_{1000}$, б) $X_2 - AT_{1000}$.

X_j по второму сектору легче поддаются трактовке, чем по первому (см. рис. 1 [5]). Так в поле X_1 (рис. 5 а) отчетливо выделилось влияние одного из наиболее сильных центров действия атмосферы. Максимальные значения X_1 отмечены в точках 9 и 10, близко расположенных к Исландскому центру действия ($X_1=0,58$ на AT_{1000} и $X_1=0,52$ на AT_{500}). В поле X_2 (рис. 5 б) область с наибольшим влиянием переместилась в район Алеутского центра действия ($X_2=0,58$ на AT_{1000} и $X_2=0,54$ на AT_{500}). Поле X_3 (AT_{1000}) и X_4 (AT_{500}) отражают различие влияний материка и океана на синоптические процессы в атмосфере.

Вместе с тем, поля X_1 и X_2 по Американскому сектору также довольно хорошо вписываются в поля X_1 и X_2 по северному полушарию, как по конфигурациям изолиний, так и по значениям X_j . Поля X_3 и X_4 по Американскому сектору на AT_{1000} и AT_{500} имеют сходство с полями X_4 и X_3 по северному полушарию.

Таким образом, несмотря на различную густоту исходной информации по территории северного полушария и по отдельным его секторам, первые наиболее значимые естественные функции, представляющие крупномасштабные черты циркуляции атмосферы, устойчиво проявляются при разложении полей как над всем полушарием, так и над отдельными его частями. Вместе с тем, рассмотрение полей естественных функций X_j над всем северным полушарием облегчает их интерпретацию.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров Н. А. Аналитическое представление полей. Труды ЦИП, вып. 64, 1958.
2. Обухов А. М. О статистических ортогональных разложениях эмпирических функций. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1960.
3. Яковлева Н. И., Мещерская А. В., Кудашкин Г. Д. Исследование полей давления (геопотенциала) методом разложения по естественным составляющим. Сб. «Материалы рабочей группы по применению статистических методов в метеорологии». № 165, 1964.
4. Northern Hemisphere Data Tabulations, Daily Bulletin, Part II, Washington, 1957—1962.
5. Мещерская А. В., Яковлева Н. И. Уточнение естественных составляющих полей геопотенциала (давления) над Атлантико-Европейским сектором. См. наст. сб.

УТОЧНЕНИЕ ЕСТЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛЕЙ ГЕОПОТЕНЦИАЛА (ДАВЛЕНИЯ) АТЛАНТИКО-ЕВРОПЕЙСКОГО СЕКТОРА

Рассмотрены некоторые вопросы методики разложения полей метеорологических элементов по ортогональным составляющим. Уточнены естественные функции полей AT_{500} и наземного давления, проанализирована связь полей естественных функций на различных поверхностях и для различных выборок.

Метод разложения полей метеорологических элементов по ортогональным составляющим открывает новые возможности изучения метеорологических процессов.

В работе [2] приведены некоторые результаты применения этого метода к анализу поля геопотенциала поверхности 500 мб и наземного давления над Атлантико-Европейским сектором северного полушария.

Данная статья является результатом дальнейших разработок в этом направлении, в частности разработок методического характера. Рассматриваются также вновь полученные естественные функции полей AT_{500} и наземного давления за летний период.

В основу применяемого метода исследования положено определение вида естественных функций по некоторой статистической совокупности. В работе [2] для определения вида естественных функций использовалась выборка из 111 полей геопотенциала. В эту выборку вошло большое число однородных барических полей: три группы по 22 барических поля определенной синоптической разновидности [2]. Поэтому возникало опасение, что полученные таким путем естественные функции недостаточно универсальны. Во избежание неточностей был сделан расчет естественных функций по второй выборке, в которую вошло 150 полей геопотенциала за период с 1951 по 1962 г. (с ноября по март).

Чтобы исключить по возможности взаимосвязанную информацию, выборка дат, за которые снимались исходные данные, проводилась с помощью таблицы случайных чисел, но так, чтобы интервал между соседними датами был не менее трех суток. Первая и вторая выборки не совсем независимы. Данные за 46 дополнительных к е. с. п. дней из первой выборки вошли также во вторую выборку.

Интересно проследить, насколько рассматриваемые выборки отличаются от многолетней климатической. В табл. 1 приведены разности квадратических отклонений высот изобарической поверхности 500 мб по средним многолетним данным и по данным первой и второй выборок.

Как следует из табл. 1, указанные разности невелики, особенно это относится к выборке из 150 полей геопотенциала. Это означает, что можно пользоваться естественными функциями как по первой, так и по

второй выборкам, но выборка из 150 полей геопотенциала несколько более универсальна.

К аналогичному выводу приходим при анализе результатов разложения поля геопотенциала в ряд по естественным функциям (табл. 2 и 3). При разложении совокупности однородных барических полей вклад первых членов разложения заметно возрастает. Например, при разложении в ряд 22 барических полей разновидности Ст V (по классификации Вангенгейма) вклад первого члена разложения составил 39%, первых двух — 58% и первых четырех — 78% (табл. 2). Для общей выборки из 111 барических полей вклад первого члена составил лишь 23%, двух — 42% и четырех 63%. Таким образом, скорость сходимости ряда по выборке из 22 однородных барических полей намного больше, чем для выборки из 111 случаев.

Если выборка из 111 случаев недостаточно репрезентативна по сравнению с выборкой из 150 случаев, то вклады первых членов разложения по первой выборке должны быть намного больше, чем по второй. Действительно, скорость сходимости ряда членов разложения по выборке из 150 случаев меньше, чем по выборке из 111 случаев, но эти различия невелики, особенно по данным AT_{500} (табл. 3).

Это подтверждает сделанный ранее вывод, что обе рассматриваемые выборки близки, но выборка из 150 независимых полей геопотенциала более универсальна.

Второй вопрос методического характера связан с влиянием, вычитаемой из исходных данных средней на качество разложения. Во всех расчетах использовались отклонения геопотенциала (давления) от временной средней по данной выборке в каждой точке поля.

Интересно знать, как меняются результаты разложения, если использовать отклонения от средней многолетней нормы.

Из табл. 3 следует, что результаты разложения для отклонений от средней многолетней нормы несколько ухудшаются, но очень незначительно: вклад первого члена уменьшается на 4%, второго — на 2% и третьего на 1%. Поэтому при разложении полей давления по ортогональным функциям при достаточно большом статистическом материале можно пользоваться как средней по выборке, так и средней многолетней нормой.

В табл. 2 и 3 приведены также оценки разложения полей геопотенциала по некоторым другим выборкам: по выборке из 111 полей геопотенциала поверхности 850 мб, по выборке из 180 полей наземного давления за летний период, по структурной функции для независимой выборки. Разложение полей давления за летний период дало несколько меньшую сходимость, чем разложение полей давления за зимний период. При разложении полей AT_{500} , сделанном на основании структурной функции [1], результаты оказались лучше, чем для выборки из 150 полей AT_{500} . Однако скорость сходимости рядов членов разложения для указанных выборок меняется в пределах нескольких процентов, и не всегда ясно, почему скорость сходимости по той или иной выборке лучше.

Очень кратко остановимся на описании вновь полученных естественных функций: наземного давления за зимний и летний периоды, геопотенциала поверхности 500 мб по материалу 150 случаев (рис. 1), а также полей естественных составляющих, рассчитанных по структурной функции (рис. 2). Уже из визуального просмотра карт можно сделать некоторые выводы. Поля естественных функций за летний период размыты и ослаблены по сравнению с полями естественных функций за зимний период. В равной мере это относится к полям естественных

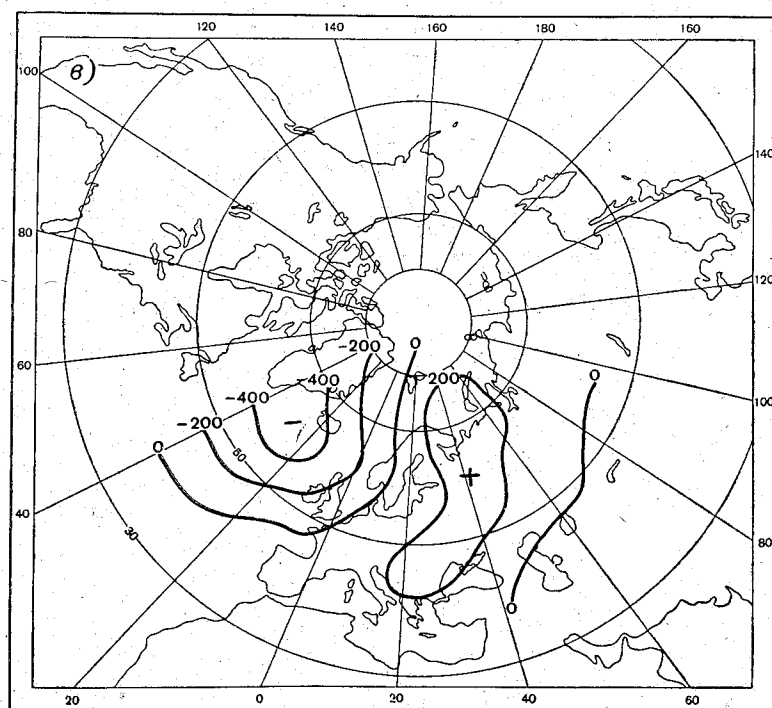
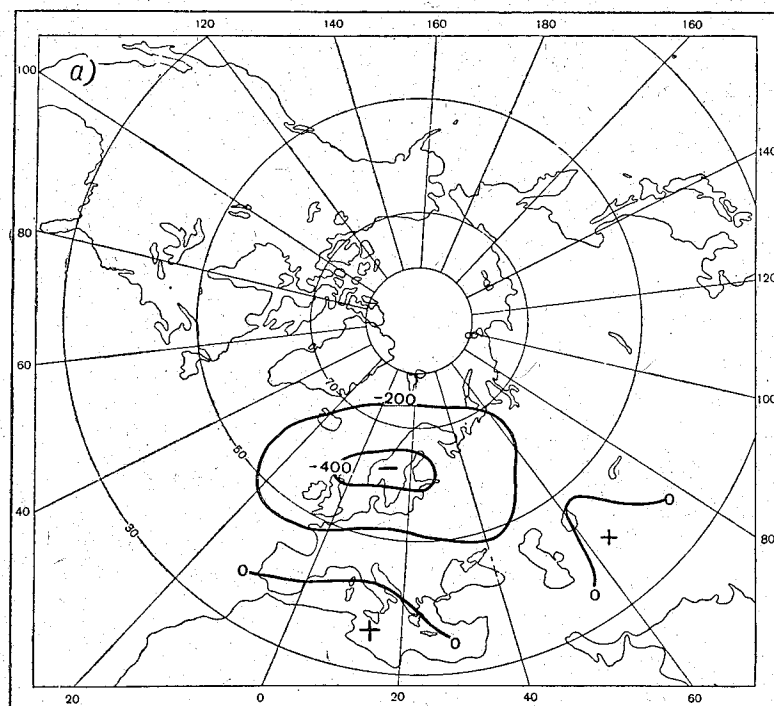
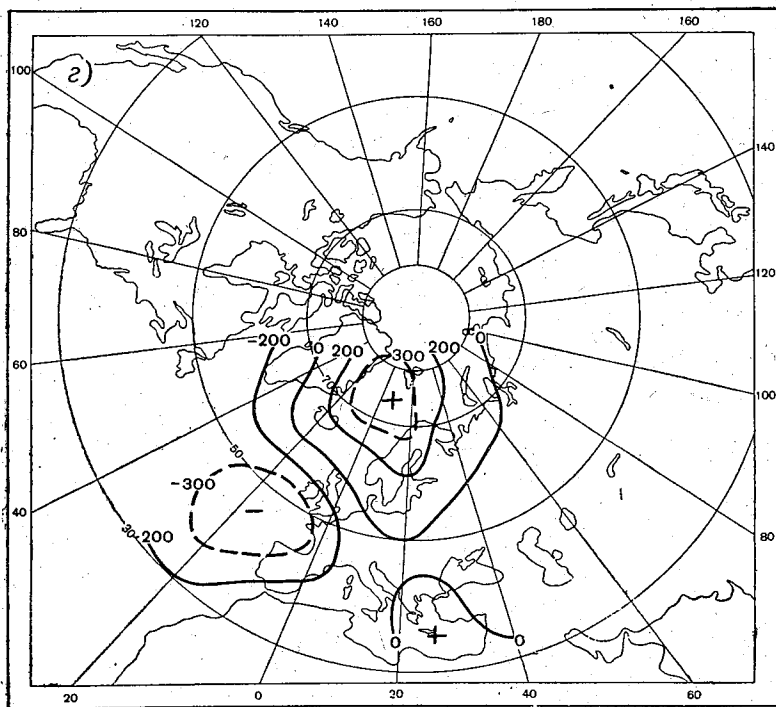
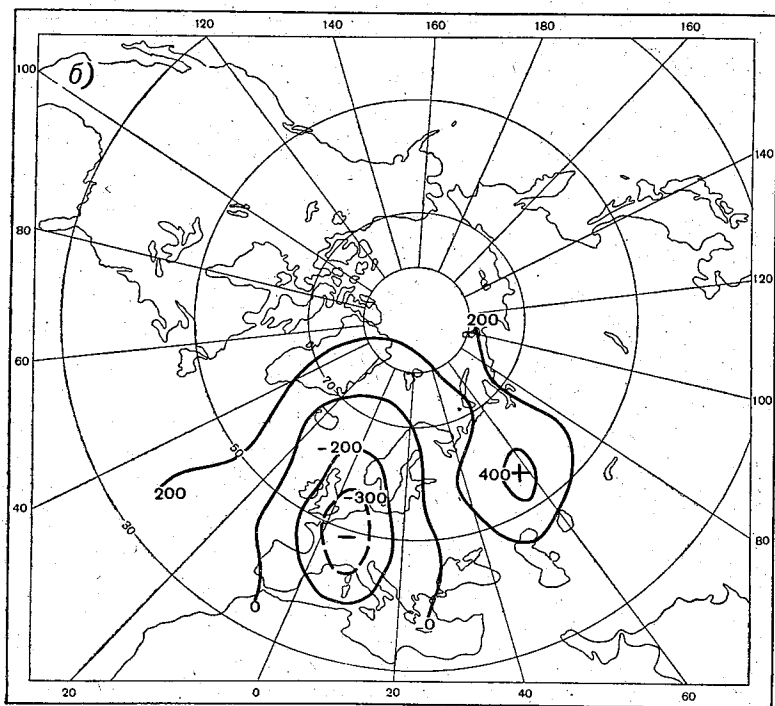


Рис. 1. Поля естественных функций геопотенциала поверхности $\dagger$
 а — первая естественная составляющая,



500 мб за зимний период по выборке из 150 случаев.
 б — вторая, г — третья, з — четвертая.

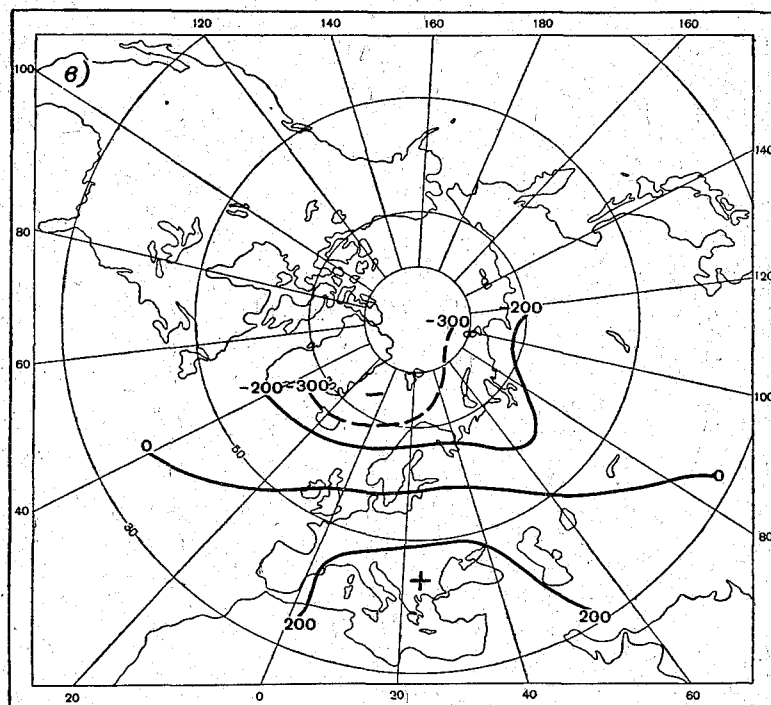
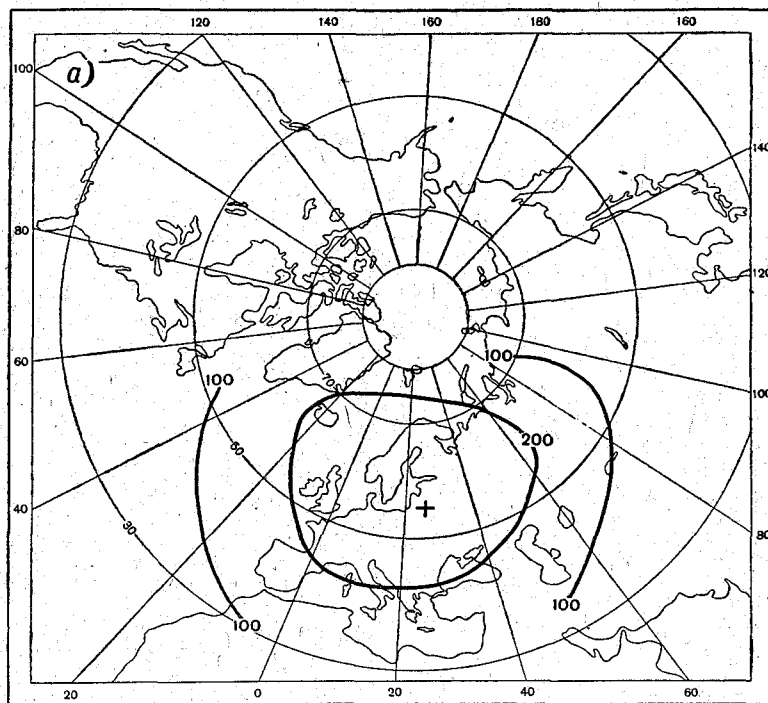
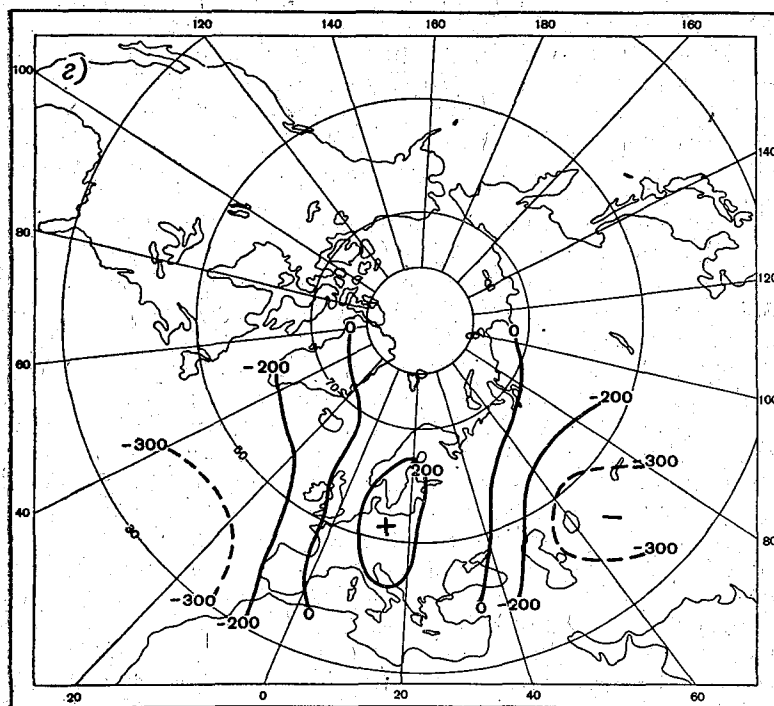
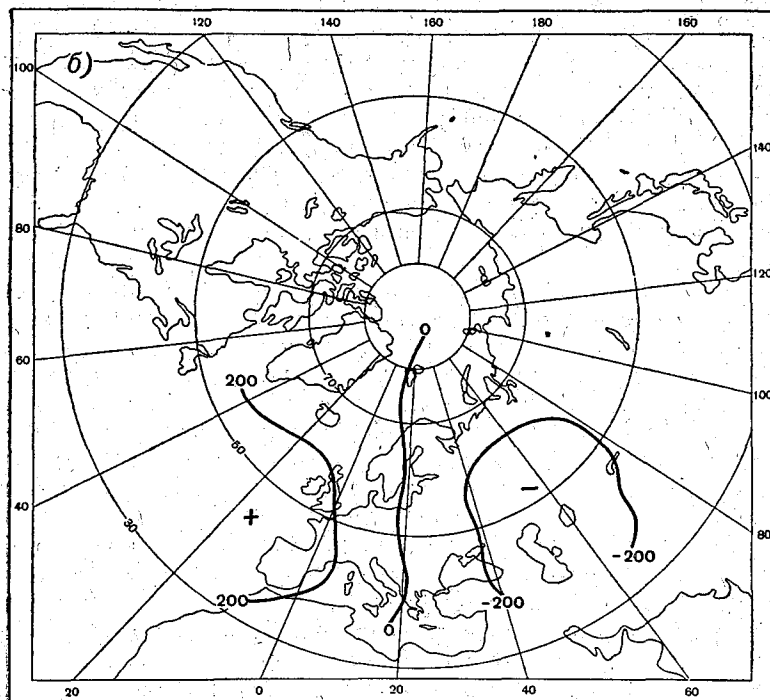


Рис. 2. Поля естественных функций, расщели (Усл. обозначение)



танных по структурной функции.
ния см. рис. 1).

составляющих, рассчитанных по структурной функции. Нетрудно заметить, что поля естественных функций на различных поверхностях и для различных выборок имеют общие черты. Достаточно сравнить поля естественных составляющих для разных выборок, но одной поверхности. Поля естественных функций (x_j) наземного давления для $j=1, 2, 3, 4$ (j — номер составляющей) по выборке из 111 дней напоминают поля естественных функций для $j=1, 2, 3, 4$ по выборке из 150 дней. Поля естественных функций AT_{500} для $j=1, 2, 3, 4$ по первой выборке подобны соответствующим полям естественных функций по второй выборке.

Подобие полей естественных функций можно выразить и количественно. Для этой цели были подсчитаны косинусы углов между отдельными естественными составляющими. Иначе эти величины можно трактовать как коэффициенты корреляции между составляющими. Некоторые результаты расчетов приведены в табл. 4—8 Приложения. В каждой из этих таблиц приведены коэффициенты корреляции (косинусы углов) между естественными составляющими X_j и X_s' . Сезон и число случаев, использованных при расчете X_j ($j=1, 2, 3, 4$) указаны в заголовках таблиц. Таблицы построены таким образом: в первых десяти строках даны коэффициенты корреляции между X_j (при $j=1$) и X_s' (при $s=1, 2, \dots, 10$); во вторых десяти строках — коэффициенты корреляции между X_j (при $j=2$) и теми же X_s' ($s=1, 2, \dots, 10$); и т. д. Обозначим X_j при $j=1, 2, 3, 4$ соответственно X_1, X_2, X_3, X_4 ; а при X_s' при $s=1, 2, \dots, 10$ обозначим соответственно $X_1', X_2', X_3', \dots, X_{10}'$.

Анализируя таблицы 4—8 Приложения убеждаемся, что поля естественных функций, подсчитанных по двум выборкам ($m=111$ и $m=150$) действительно подобны. Это относится в первую очередь к первым наиболее значимым составляющим. По данным о геопотенциале поверхности 500 мб для двух выборок косинус угла между первыми естественными составляющими X_1 и X_1' равен 0,85; между вторыми — X_2 и X_2' — 0,87; между третьими — 0,76 (Приложение, табл. 6).

По наземным данным косинус угла между первыми естественными составляющими равен 0,76, между X_2 первой выборки и X_3 второй выборки — 0,89, между X_3 первой выборки и X_2 второй выборки — 0,94 (Приложение, табл. 4).

По мере увеличения номера естественной составляющей (для $X_4, X_5, X_6, \dots$ и т. д.) связь между естественными составляющими различных выборок затухает. Это подтверждает уже высказанную ранее мысль [2], что наиболее значимые естественные составляющие являются и наиболее устойчивыми.

Используя таблицы 4—8 Приложения, рассмотрим подобие полей естественных составляющих различных поверхностей.

Для одной и той же выборки по 111 дням выявился высокий коэффициент корреляции первых естественных функций, вычисленных по наземным данным и для геопотенциала поверхности 850 мб — 0,96. Очевидно, это объясняется еще достаточно сильным влиянием подстилающей поверхности на высоте 1,5 км (Приложение, табл. 5).

Связь между естественными функциями для наземного давления и геопотенциала поверхности 500 мб оказалась значительно худшей. Особенно это относится к выборкам из 111 дней. Коэффициенты корреляции первых естественных составляющих H_{500} и P_0 для этой выборки не превышали 0,57—0,60 (Приложение, табл. 5). Для выборок из 150 дней максимальные коэффициенты корреляции увеличились до 0,67—0,81 (Приложение, табл. 4 и 6). Таким образом, слабая связь между естественными составляющими геопотенциала поверхности 500 мб и на-

земного давления по 111 дням в какой-то мере может быть следствием недостаточной универсальности выборок.

Перейдем к рассмотрению полей естественных функций наземного давления за летний период (рис. 2). В какой мере барические поля летнего периода повторяют основные черты барических полей за зимние месяцы? Поле наземного давления за летний период довольно сильно отличается от полей давления и геопотенциала за зимние месяцы. Косинусы угла между естественными составляющими летней выборки и естественными составляющими зимней выборки значительно меньше, чем для всех рассмотренных ранее выборок за зимний период. Исключение составляет поле X_1 летней выборки (Приложение, табл. 7). Ему хорошо соответствуют поле X_2' геопотенциала поверхности 850 мб, поле X_1' геопотенциала поверхности 500 мб и поле X_3' наземного давления (коэффициенты подобия равны 0,81—0,87). Интересный вывод напрашивается при сравнении косинусов углов между наземными естественными составляющими летней выборки и наземными естественными составляющими зимней выборки по 150 дням. Большой коэффициент корреляции обнаружился между X_5 летней и X_5' зимней выборок ($r=0,82$), а также между X_6 летней и X_5' зимней выборок ($r=0,78$). Это означает, что характерные черты мелкомасштабных движений (пятая и шестая составляющие) сохраняются независимо от сезона. Однако это заключение, по-видимому, следует в дальнейшем проверить, так как по мере увеличения номера естественных составляющих точность их определения уменьшается.

Наконец, о полях естественных функций, рассчитанных по корреляционной функции (табл. 8). С достаточной определенностью можно сказать, что поля естественных составляющих этой функции наименее сходны с полями естественных составляющих других выборок. Для полей X_1 — X_5 коэффициент корреляции устойчив, но не превышает 0,7, т. е. из всех приведенных выше коэффициентов корреляции является наименьшим. Следует также отметить, что поля первой и второй естественных функций не выделяются большим сходством, так это было отмечено для других выборок. Индивидуальные черты полей первых естественных составляющих, рассчитанных по структурной функции, сглаживаются.

Не будем останавливаться здесь на физической интерпретации полей естественных функций Атлантико-Европейского сектора, так как это целесообразнее сделать при анализе полей естественных функций над всем северным полушарием [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин М. И. Некоторые закономерности структуры поля геопотенциала. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
2. Яковлева Н. И., Мещерская А. В., Кудашкин Г. Д. Исследование полей давления (геопотенциала) методом разложения по естественным составляющим. Статистический сб. «Материалы рабочей группы по применению статистических методов в метеорологии», № 165, 1964.
3. Яковлева Н. И., Мещерская А. В. Анализ барического поля над северным полушарием методом разложения по естественным ортогональным функциям. (См. настоящий сборник.)

Квадратические отклонения и разности квадратических отклонений высот изобарической поверхности 500 мб, зима
Таблица 1

№ точки	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
---------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

По среднемесячным данным и по данным второй выборки (150 дней)

σ_1	14	11	18	12	12	17	16	17	15	9	13	11	12	17	14	16	14	12	9	9	9	10	7	14	13
σ_2	13	13	18	13	12	17	16	18	15	10	13	12	14	17	14	16	16	13	11	9	9	11	8	16	12
$\Delta (\sigma_1 - \sigma_2)$	1	-2	0	-1	0	0	0	-1	0	-1	0	-1	-2	0	0	0	-2	-1	-2	0	0	-1	-1	-1	1

По среднемесячным данным и по данным первой выборки (111 дней)

σ_1	14	11	18	12	12	17	16	17	15	9	13	11	12	17	14	16	14	12	9	9	9	10	7	14	13
σ_3	13	13	16	12	11	15	13	19	14	8	11	12	14	19	13	16	13	12	11	7	7	10	8	15	12
$\Delta (\sigma_1 - \sigma_3)$	1	-2	2	0	1	2	3	-2	1	1	2	-1	-2	-2	1	0	1	0	-2	2	2	0	-1	-1	1

По среднемесячным данным и по данным второй выборки (для отклонений от среднемесячной многолетней нормы), зима

σ_1	14	11	18	12	12	17	16	17	15	9	13	11	12	17	14	16	14	12	9	9	9	10	7	14	13
σ_4	14	14	18	13	12	17	16	18	15	12	14	13	14	17	15	16	15	12	12	8	8	11	8	16	14
$\Delta (\sigma_1 - \sigma_4)$	0	-3	0	-1	0	0	0	-1	0	-3	-1	-2	-2	0	-1	0	-1	0	-3	1	1	-1	-1	-2	-1

Таблица 2

Оценка разложения поля давления в ряд по естественным функциям, уровень моря

s	Выборка для отклонений от средних по времени			Общая выборка								
	зима			зима			лето			зима		
	m = 111			m = 150			m = 180			m = 111		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	612,54	27,2	27,2	470	20	20	149	19	19	555	27	27
2	373,20	16,6	43,8	389	17	37	109	14	33	334	46	19
3	317,27	14,2	57,9	352	15	52	85	11	44	275	99	13
4	206,78	9,2	67,1	270	11	63	78	10	54	176	67	9
5	131,31	5,8	72,9	158	7	70	62	8	62	121	73	6
6	109,65	4,9	77,8	104	4	74	47	6	68	110	79	5
7	98,22	4,4	82,7	101	4	79	38	5	73	99	84	5
8	77,69	3,4	85,6	89	4	82	35	4	77	66	87	3
9	60,29	2,7	88,3	69	3	85	31	4	81	48	89	2
10	53,15	2,4	90,8	55	2	88	27	3	84	42	91	2
	$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 2250,75$			$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 2361$			$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 785$			$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 2061$		

Примечание. Графы означают: 1 — собственные числа, выраженные в дкм² (λ_j), 2 — отношение дисперсий каждого члена ряда к суммарной дисперсии $\lambda_j \sum_{j=1}^{25} \lambda_j$ в процентах, 3 — R_h^2 ; m — число случаев.

Таблица 3

Оценка разложения поля геопотенциала в ряд по естественным функциям, АТ₅₀₀

Общая выборка																			
s	для отклонений от средних по времени						AT ₅₀₀ — N			$\frac{AT_{500} - N}{\sin \varphi}$			по корреляционной функции						
	m = 111			m = 150			m = 150			m = 150			m = 6						
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3				
1	971,91	23,0	23,0	1018	22	22	895	18	18	4,3	17	17	7,5	29	29				
2	793,15	18,9	42,0	778	16	38	838	17	36	3,4	14	31	3,9	15	44				
3	501,62	12,0	54,0	598	13	51	696	14	50	3,4	14	45	3,1	12	56				
4	380,92	9,1	63,0	560	12	62	577	12	62	2,5	10	55	2,2	8	64				
5	252,12	6,0	69,0	263	6	68	297	6	68	2,1	8	63	1,5	6	70				
6	208,31	5,0	74,0	248	5	73	232	5	73	1,5	6	69	1,3	5	75				
7	181,18	4,3	78,0	212	4	78	211	4	77	1,2	5	74	1,1	4	79				
8	157,47	3,8	82,0	183	4	82	178	4	84	1,1	4	78	1,0	4	83				
9	120,26	2,9	85,0	149	3	85	143	3	84	0,9	4	82	0,9	3	86				
10	110,33	2,7	87,8	116	2	87	115	2	86	0,7	3	85	0,7	3	89				
			$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 4192,82$				$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 4722$				$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 4852$				$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 25$				$\sum_{j=1}^{25} \lambda_j = 26$

Примечание. N — средняя многолетняя норма, остальные усл. обозначения см. в табл. 2.

Таблица 4

Коэффициент корреляции (%) между $X_{j\text{наз}}$ (зимняя выборка из 150 случаев) и X_s'

s	X_s'						
	зима						лето
	AT ₅₀₀			$\frac{H_{500}-N}{\sin \varphi}$	AT ₈₅₀	уровень моря	
	m = 150	m = 111	струк- турная	m = 150	m = 111	m = 111	m = 180
X_j при $j = 1$							
1	30	29	31	48	77	87	13
2	30	31	14	19	13	7	68
3	38	14	67	64	8	23	37
4	77	73	5	7	56	37	57
5	6	8	19	14	4	16	9
6	25	15	3	26	10	1	2
7	16	3	36	14	2	9	14
8	29	35	46	37	4	5	3
9	3	0	4	17	12	5	0
10	3	2	13	14	10	5	2
X_j при $j = 2$							
1	42	56	29	34	46	27	51
2	54	32	56	63	20	7	42
3	69	55	11	38	63	89	58
4	8	28	1	48	46	16	10
5	10	29	58	8	32	11	25
6	4	1	27	3	2	24	22
7	1	1	14	11	8	3	14
8	13	25	15	14	4	12	8
9	1	2	2	8	1	8	11
10	9	4	8	7	2	1	16
X_j при $j = 3$							
1	81	68	52	32	8	12	81
2	31	56	32	68	89	94	9
3	15	30	55	11	26	3	39
4	14	2	29	56	14	1	8
5	14	8	2	19	16	8	16
6	9	7	15	8	3	15	30
7	5	27	30	3	14	3	9
8	19	10	28	14	0	8	9
9	11	1	6	4	10	5	6
10	8	0	4	4	13	14	0
X_j при $j = 4$							
1	7	26	15	61	40	37	7
2	67	60	10	6	8	1	44
3	44	67	18	40	58	15	27
4	39	18	68	57	60	74	70
5	9	9	4	26	22	24	9
6	8	10	7	2	8	31	5
7	0	7	24	14	6	20	25
8	1	2	15	6	7	24	11
9	4	4	32	5	8	14	7
10	8	15	12	2	1	6	14

Примечание. $X_{j\text{наз}}$ — на уровне моря.

Таблица 5

Коэффициент корреляции (%) между $X_{j \text{ наз}}$ (зимняя выборка из 111 случаев) и X_s'

s	X_s'						
	зима						лето
	AT ₅₀₀			$\frac{H_{500}-N}{\sin \varphi}$	AT ₈₅₀		уровень моря
	m = 150	m = 111	структурная	m = 150	m = 111	m = 150	m = 180

 X_j при $j = 1$

1	42	58	29	68	96	86	14
2	62	51	25	40	1	27	56
3	29	1	58	28	14	12	5
4	39	54	27	7	16	37	75
5	15	2	0	2	1	5	3
6	27	3	6	26	4	7	0
7	8	3	27	17	4	9	21
8	29	21	54	29	5	2	10
9	4	0	6	14	2	2	1
10	6	6	13	17	3	1	8

 X_j при $j = 2$

1	76	60	62	27	4	7	76
2	34	59	35	55	94	7	23
3	28	38	61	20	30	94	50
4	37	12	30	62	12	1	1
5	1	3	16	19	0	4	14
6	19	11	3	21	3	5	26
7	2	16	22	4	2	25	1
8	1	13	17	27	2	7	1
9	17	0	15	4	0	4	7
10	2	4	11	9	5	12	7

 X_j при $j = 3$

1	37	48	24	14	21	23	50
2	34	5	69	61	31	89	33
3	71	57	42	28	79	3	56
4	0	34	5	50	41	15	34
5	5	9	36	12	7	32	6
6	27	14	17	23	5	4	25
7	9	2	15	5	10	12	16
8	33	46	1	29	7	5	11
9	8	3	3	22	13	6	14
10	14	1	15	2	7	6	24

 X_j при $j = 4$

1	12	11	23	21	4	37	13
2	37	36	8	5	2	16	56
3	4	55	4	68	43	1	55
4	73	39	45	36	79	74	31
5	4	43	40	24	19	41	23
6	43	27	10	15	21	30	30
7	1	23	26	37	1	1	17
8	23	9	1	21	24	10	9
9	21	7	35	21	4	1	7
10	5	9	41	19	7	6	4

Таблица 6

Коэффициент корреляции (%) между X_{j500} (зимняя выборка из 150 случаев) и X_s'

s	X_s'						
	зима						лето
	AT ₅₀₀		$\frac{H_{500}-N}{\sin \varphi}$	AT ₈₅₀	уровень моря		
	m = 111	структурная	m = 150	m = 111	m = 111	m = 150	m = 180

 X_j при $j = 1$

1	85	80	1	44	42	30	84
2	29	6	89	84	76	42	30
3	3	30	26	9	37	81	28
4	8	15	23	13	12	7	8
5	21	11	24	18	9	4	3
6	21	9	1	1	9	1	13
7	18	21	9	14	19	19	22
8	3	36	15	1	0	3	4
9	1	5	3	4	3	8	2
10	3	8	6	2	5	12	10

 X_j при $j = 2$

1	39	3	91	75	62	30	4
2	87	42	16	25	34	54	18
3	2	38	29	5	34	31	48
4	6	36	9	51	37	67	56
5	14	10	18	16	15	16	1
6	4	37	4	15	18	9	37
7	9	24	5	3	19	2	26
8	8	26	13	0	28	3	1
9	0	13	0	1	2	7	14
10	3	5	2	3	8	11	21

 X_j при $j = 3$

1	5	16	27	14	29	38	22
2	6	38	31	3	28	69	31
3	76	32	50	76	71	15	62
4	36	34	74	29	4	44	50
5	25	66	8	48	8	4	21
6	32	13	4	4	47	4	12
7	2	9	1	16	7	33	30
8	27	4	5	6	7	10	2
9	2	19	7	2	8	12	1
10	1	16	2	10	22	1	7

 X_j при $j = 4$

1	12	17	21	34	39	72	41
2	10	43	4	32	37	2	82
3	60	51	72	44	0	36	27
4	61	46	60	70	73	53	6
5	13	26	7	13	12	22	3
6	38	1	15	1	4	8	9
7	5	18	18	12	20	13	13
8	21	19	16	8	18	9	2
9	2	26	5	19	21	8	10
10	9	18	7	17	16	1	4

Таблица 7

Коэффициент корреляции (%) между X_j наз (летняя выборка из 180 случаев) и X_s'

s	X_s' зима						
	AT ₅₀₀			$\frac{H_{500}-N}{\sin \varphi}$	AT ₈₅₀	уровень моря	
	m = 150	m = 111	структурная	m = 150	m = 111	m = 111	m = 150

 X_j при $j = 1$

1	84	82	59	6	22	14	13
2	4	29	2	81	87	76	51
3	22	2	55	19	8	50	81
4	41	36	26	27	25	13	7
5	4	13	26	26	22	3	2
6	17	3	8	19	11	18	14
7	0	25	3	5	5	8	5
8	7	7	20	26	11	14	0
9	4	2	11	13	8	4	5
10	6	8	7	3	10	16	2

 X_j при $j = 2$

1	30	27	21	22	56	56	68
2	18	11	53	41	10	23	42
3	31	71	31	41	56	33	9
4	82	56	23	63	52	56	44
5	12	4	11	11	22	5	20
6	9	9	3	24	2	27	17
7	9	13	32	9	5	12	15
8	21	10	32	16	9	24	3
9	4	1	27	8	1	9	7
10	3	6	29	26	11	9	1

 X_j при $j = 3$

1	28	5	49	16	10	5	37
2	48	41	54	7	30	50	58
3	62	23	9	70	37	56	39
4	27	29	3	43	72	55	27
5	30	21	51	45	16	6	5
6	17	32	1	7	20	5	31
7	7	23	18	19	13	15	25
8	22	45	4	11	29	22	30
9	1	0	10	5	11	1	9
10	7	7	11	1	8	18	3

 X_j при $j = 4$

1	8	38	11	54	70	75	57
2	56	51	16	6	13	1	10
3	50	41	47	2	53	34	8
4	6	30	37	42	10	31	70
5	27	24	9	12	18	5	8
6	19	27	10	3	21	14	12
7	36	19	18	30	26	35	17
8	35	21	47	49	15	11	25
9	7	3	31	14	0	11	5
10	17	7	4	14	6	14	8

Таблица 8

Коэффициент корреляции (%) между $X_{j\text{струк}}$ (зимняя выборка для AT_{500}) и X_s'

s	X_s'						
	зима						лето
	AT_{500}		$\frac{H_{500}-N}{\sin \varphi}$	AT_{850}	уровень моря		
	$m = 111$	$m = 150$	$m = 150$	$m = 111$	$m = 111$	$m = 150$	$m = 180$

X_j при $j = 1$

1	51	80	17	30	29	31	59
2	17	3	51	67	62	29	21
3	3	16	43	7	24	52	49
4	5	17	17	19	23	16	11
5	22	48	49	6	15	7	23
6	58	4	0	20	3	15	10
7	21	2	4	48	46	48	39
8	19	16	34	11	31	36	7
9	0	2	7	24	—	11	14
10	—	9	23	6	—	17	10

X_j при $j = 2$

1	20	6	36	37	25	14	2
2	24	42	24	11	35	56	53
3	48	38	10	66	70	32	54
4	13	43	61	11	8	10	16
5	2	24	43	16	11	46	26
6	30	8	5	5	24	43	5
7	15	29	3	15	14	14	32
8	37	41	38	51	37	6	4
9	4	3	11	2	—	1	12
10	—	12	12	4	—	15	18

X_j при $j = 3$

1	28	30	56	50	58	67	55
2	64	38	41	70	61	11	31
3	2	32	26	21	42	55	9
4	43	51	15	20	4	18	47
5	4	24	18	1	19	24	38
6	8	43	37	7	1	6	13
7	10	19	27	20	18	4	18
8	27	18	30	12	19	8	4
9	0	7	11	17	—	5	7
10	—	5	9	17	—	15	2

X_j при $j = 4$

1	31	15	37	25	27	5	26
2	24	36	16	20	30	1	23
3	53	34	29	47	5	29	3
4	4	47	61	26	45	68	37
5	4	4	8	1	41	9	18
6	2	9	8	29	1	15	5
7	37	35	31	5	1	10	1
8	3	26	13	13	21	38	16
9	2	14	14	18	—	26	3
10	—	21	25	16	—	23	38

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ И ЭКСТРАПОЛЯЦИИ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Выведены формулы для оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей в общем случае. Рассмотрен ряд частных схем описания корреляционных функций, обеспечивающих положительную определенность интерполяционных систем и тем самым гарантирующих разумные результаты интерполяции или экстраполяции.

В работе [2] рассмотрена задача об оптимальной интерполяции или экстраполяции поля метеорологического элемента. В настоящее время имеется потребность в решении более общей задачи об интерполяции или экстраполяции по данным о любом числе метеорологических элементов. При этом в качестве различных элементов могут также рассматриваться значения одного и того же элемента в различные моменты времени или на различных уровнях.

Соответствующее обобщение формул работы [2] производится весьма просто. Ниже рассматривается это обобщение и обсуждаются пути применения полученных формул в частных случаях, представляющих практический интерес.

Будем всюду в дальнейшем иметь дело с отклонениями метеорологических элементов от некоторых средних распределений (норм). Это означает, что термин «метеорологический элемент» будет пониматься как отклонение элемента от нормы.

Пусть нужно найти значение f_{00} элемента f_0 в точке с радиусом-вектором $\vec{r}_0$, используя для этого сведения о значениях f_{ik} элементов f_k ($k=1, 2, \dots, s$) в точках $\vec{r}_{ik}$ ($i=1, 2, \dots, n_k$), количество которых n_k и расположение может быть различным для различных элементов.

Будем искать величину f_{00} в виде линейной комбинации

$$f_{00} = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} p_{ik} f_{ik}, \quad (1)$$

где веса p_{ik} ($k=1, 2, \dots, s$; $i=1, 2, \dots, n_k$) определим на основании требования, чтобы средний квадрат ошибки интерполяции по формуле (1)

$$E = \left(f_{00} - \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} p_{ik} f_{ik} \right)^2 \quad (2)$$

был минимальным.

В формуле (2) осреднение понимается в статистическом смысле. Пользуясь свойствами такого осреднения, перепишем (2) в виде

$$E = \overline{f_{00}^2} - 2 \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} p_{ik} \overline{f_{00} f_{ik}} + \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_l} p_{ik} p_{jl} \overline{f_{ik} f_{jl}}. \quad (3)$$

Средние произведения в правой части формулы (3) представляют собой корреляционные моменты наблюдаемых значений метеорологических элементов. Будем считать, что ошибки наблюдений носят случайный характер, а именно, что среднее значение каждой ошибки равно нулю, и что ошибки наблюдений над различными элементами и в различных точках не коррелируют ни между собой, ни с истинными значениями элементов. Кроме того, учтем, что в качестве f_{00} в формулу (3) входит истинное значение элемента f_0 в точке r_{00} . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \overline{f_{00}^2} &= m_{0000} \\ \overline{f_{00} f_{ik}} &= m_{0i0k} \\ \overline{f_{ik} f_{jl}} &= m_{ijkl} + \delta_{ij} \delta_{kl} \sigma_{ik}^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь m_{ijkl} — корреляционный момент, описывающий статистическую связь истинных значений элемента f_k в точке r_{ik} и элемента f_l в точке r_{jl} ; σ_{ik} — средняя квадратическая ошибка наблюдений над элементом f_k в точке r_{ik} ; $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, определяемый равенством

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases} \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получим

$$\begin{aligned} E &= m_{0000} - 2 \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} p_{ik} m_{0i0k} + \\ &+ \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_l} p_{ik} p_{jl} m_{ijkl} + \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} p_{ik}^2 \sigma_{ik}^2. \end{aligned} \quad (6)$$

Перейдем теперь от корреляционных моментов к коэффициентам корреляции μ по формуле

$$m_{ijkl} = \sqrt{m_{iikk} m_{jjll}} \mu_{ijkl} \quad (7)$$

и от средних квадратов ошибок наблюдений и интерполяции к отношениям этих величин к дисперсии соответствующего элемента в соответствующей точке, которые назовем, как и в (2), мерами ошибок, по формулам:

$$E = m_{0000} \varepsilon, \quad \sigma_{ik}^2 = m_{iikk} \eta_{ik}. \quad (8)$$

В формулах (7) и (8) m_{iikk} есть, очевидно, дисперсия элемента f_k в точке r_{ik} ; η_{ik} представляет собой меру ошибки наблюдений над элементом f_k в точке r_{ik} , а ε — меру ошибки интерполяции. Деля (6) на m_{0000} и подставляя (7) и (8), найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 1 - 2 \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} p_{ik} \sqrt{\frac{m_{iikk}}{m_{0000}}} \mu_{0i0k} + \\ &+ \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_l} p_{ik} p_{jl} \frac{\sqrt{m_{iikk} m_{jjll}}}{m_{0000}} \mu_{ijkl} + \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} p_{ik}^2 \frac{m_{iikk}}{m_{0000}} \eta_{ik}. \end{aligned} \quad (9)$$

Как видно из формулы (9), удобно ввести замену

$$p_{ik} \sqrt{\frac{m_{iikk}}{m_{0000}}} = q_{ik}, \quad (10)$$

тогда получим

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 - 2 \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} q_{ik} \psi_{0i0k} + \\ + \sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_l} q_{ik} q_{jl} \psi_{ijkl} + \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} q_{ik}^2 \eta_{ik}. \end{aligned} \quad (11)$$

Так как ε лишь множителем отличается от E , а q_{ik} также лишь множителями отличается от p_{ik} , то задача отыскания минимума E по p_{ik} эквивалентна задаче нахождения минимума ε по q_{ik} . Приравнявая с этой целью частные производные от ε по всем q_{ik} нулю, получим систему $n_1 + n_2 + \dots + n_k + \dots + n_s$ линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{l=1}^s \sum_{j=1}^{n_l} \psi_{ijkl} q_{jl} + \eta_{ik} q_{ik} = \psi_{0i0k} \quad (k=1, 2, \dots, s; i=1, 2, \dots, n_k) \quad (12)$$

с таким же количеством неизвестных. На основании этих уравнений выражение (11) может быть записано в значительно более простом виде:

$$\varepsilon = 1 - \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} q_{ik} \psi_{0i0k}. \quad (13)$$

После решения системы (12) можно найти веса p_{ik} с помощью соотношений (10) и затем выполнять интерполяцию по формуле (1). Целесообразнее, однако, и в формуле (1) перейти от весов p_{ik} к пропорциональным им величинам q_{ik} при помощи соотношений (10). Тогда получим

$$\frac{f_{00}}{\sqrt{m_{0000}}} = \sum_{k=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} q_{ik} \frac{f_{ik}}{\sqrt{m_{iikk}}}. \quad (14)$$

Из формулы (14) ясен смысл величин q_{ik} : они представляют собой интерполяционные веса, но, в отличие от p_{ik} , для интерполяции или экстраполяции не самих значений (отклонений от норм) f_{ik} , а нормированных отклонений — отклонений, отнесенных к средней квадратической изменчивости соответствующего элемента в соответствующей точке.

Заметим, что при выводе формул не вводилось никаких предположений о характере коэффициентов корреляции μ_{ijkl} . Однако нетрудно показать, что эти коэффициенты не могут быть любыми. Действительно, по самому смыслу задачи величина ε должна быть положительной правильной дробью:

$$0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (15)$$

Условие (15) будет выполняться, если при любых значениях чисел b_{ik} и b_{jl} имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^s \sum_{l=1}^s \sum_{i=1}^{n_k} \sum_{j=1}^{n_l} b_{ik} b_{jl} \psi_{ijkl} \geq 0, \quad (16)$$

где равенство выполняется лишь в тривиальном случае $b_{ik} \equiv 0$ ($k=1,$

2, ..., s; i=1, 2, ..., n_k). Иначе говоря коэффициенты корреляции μ_{ijkl} должны быть таковы, чтобы квадратическая форма (16) была положительно определенной. Поскольку значения коэффициентов μ_{ijkl} получаются путем обработки эмпирического материала, отнюдь не исключена возможность, что вследствие неточностей сведений об этих коэффициентах неравенство (16) будет нарушаться. Поэтому крайне желательно поступать таким образом, чтобы заранее гарантировать положительную определенность формы (16). Ниже, при рассмотрении частных случаев, этому вопросу будет уделено основное внимание.

1. *Двумерная интерполяция поля одного элемента с однородной и изотропной корреляционной функцией.* Случай двумерной интерполяции поля одного элемента был рассмотрен в работе [2]. В этом случае $s=1$, и нет смысла писать второй индекс у величин f , p , q и η и вторую пару индексов у величин m и μ . Соответственно формулы (14), (12) и (13) приобретают вид

$$\frac{f_0}{\sqrt{m_{00}}} = \sum_{i=1}^n q_i \frac{f_i}{\sqrt{m_{ii}}}, \quad (17)$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij} q_j + \eta_i q_i = \mu_{0i} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (18)$$

$$\varepsilon = 1 - \sum_{i=1}^n q_i \mu_{0i}, \quad (19)$$

а выражение (10) дает

$$q_i = \sqrt{\frac{m_{ii}}{m_{00}}} p_i. \quad (20)$$

Пусть теперь поле элемента f однородно и изотропно относительно ненормированной корреляционной функции. Это означает, что величина m_{ij} зависит лишь от расстояния между точками $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_j$. Отсюда вытекает, в частности, что дисперсии элемента во всех точках одинаковы:

$$m_{ii} = m_{00} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (21)$$

так что, согласно (20) $q_i = p_i$, а из (17)

$$f_0 = \sum_{i=1}^n q_i f_i. \quad (22)$$

Из однородности и изотропии ненормированной корреляционной функции следует то же свойство применительно к нормированной корреляционной функции. В этом случае требование положительности квадратической формы (16) эквивалентно условию положительности двумерной спектральной плотности

$$\varphi(\lambda) = \int_0^\infty \mu(r) I_0(\lambda r) r dr. \quad (23)$$

В силу этого обстоятельства возможен простой способ, обеспечивающий выполнение условия (16). Он состоит в том, что эмпирически определенную корреляционную функцию аппроксимируют какой-либо функцией с положительным двумерным спектром, подбирая вид ее на основании общего поведения функций $\mu(r)$. Если точность аппроксимации получается не ниже точности определения корреляционной функции по

эмпирическому материалу, то такой аппроксимацией можно пользоваться, гарантируя получение разумных результатов.

2. *Двумерная интерполяция поля одного элемента с однородной и изотропной нормированной корреляционной функцией.* Для большинства метеорологических полей требование однородности поля дисперсий является достаточно обременительным. Так, дисперсии геопотенциала изобарических поверхностей в среднем возрастают от океанов к континентам и от низких к высоким широтам, причем эти изменения достигают нескольких сотен процентов. Пока речь идет об интерполяции по данным густой сети станций, различие дисперсий мало сказывается на самих результатах интерполяции и может влиять лишь на оценку точности этих результатов: В районах же с редкой сетью, где вместо интерполяции может иметь место экстраполяция и характерные расстояния велики, учет неоднородности поля дисперсий может существенно изменить и сами значения, находимые путем интерполяции или экстраполяции.

Наиболее простой способ учета неоднородности поля дисперсий базируется на предположении, что нормированная корреляционная функция является однородной и изотропной, т. е. что нарушения однородности и изотропии ненормированной корреляционной функции обусловлены исключительно неоднородностью поля дисперсий. Это предположение можно рассматривать как следующее приближение к действительным закономерностям структуры метеорологических полей, по сравнению с гипотезой однородности и изотропии ненормированной корреляционной функции. То, что это так, можно видеть на примере, приведенном на рис. 1. На нем представлены результаты обработки данных, полученных Н. И. Яковлевой и А. В. Мещерской [9] в процессе исследований по статистически ортогональным разложениям полей геопотенциала изобарических поверхностей. Ими, в частности, были получены корреляционные моменты и коэффициенты корреляции между значениями геопотенциала в различных точках. Эти величины как функции расстояния между точками представлены на рис. 1 а и 1 б соответственно. Рассмотрение их показывает, что при малых расстояниях разброс точек на рис. 1 б, дающем нормированную автокорреляционную функцию, существенно меньше, чем на рис. 1 а, описывающем ненормированную функцию. В то же время виден ограниченный характер этого улучшения — при больших расстояниях разброс точек на обоих графиках весьма велик.

Не представляет трудностей обеспечить положительную определенность интерполяционных матриц в случае принятия гипотезы об однородности и изотропии только нормированной корреляционной функции. Действительно, как видно из (18), для этого по-прежнему достаточно, чтобы функция μ имела положительный двумерный спектр. Разумеется, в качестве этой функции нельзя уже использовать нормированную корреляционную функцию, рассчитанную в предположении однородности дисперсий, а необходимо определить ее заново. В частности для этой цели легко видоизменить методику расчетов с помощью универсальных цифровых машин, которая описана в работах [6] и [5]. Именно нужно в каждой используемой точке вычислить помимо нормы также и дисперсию, затем перейти к отклонениям от нормы, деленным на корень из дисперсии и далее пользоваться программой без каких-либо изменений.

Заметим попутно, что учет неоднородности поля дисперсий особенно существен в задаче о рациональном размещении сети станций [3], [7]. Действительно, поскольку в тропических и экваториальных районах дисперсии геопотенциала и температуры существенно меньше, чем

в умеренных и высоких широтах, расчеты в предположении однородности дисперсий приводят к неоправданно высоким требованиям к густоте сети в низких широтах и к недостаточно высоким требованиям — в высоких.

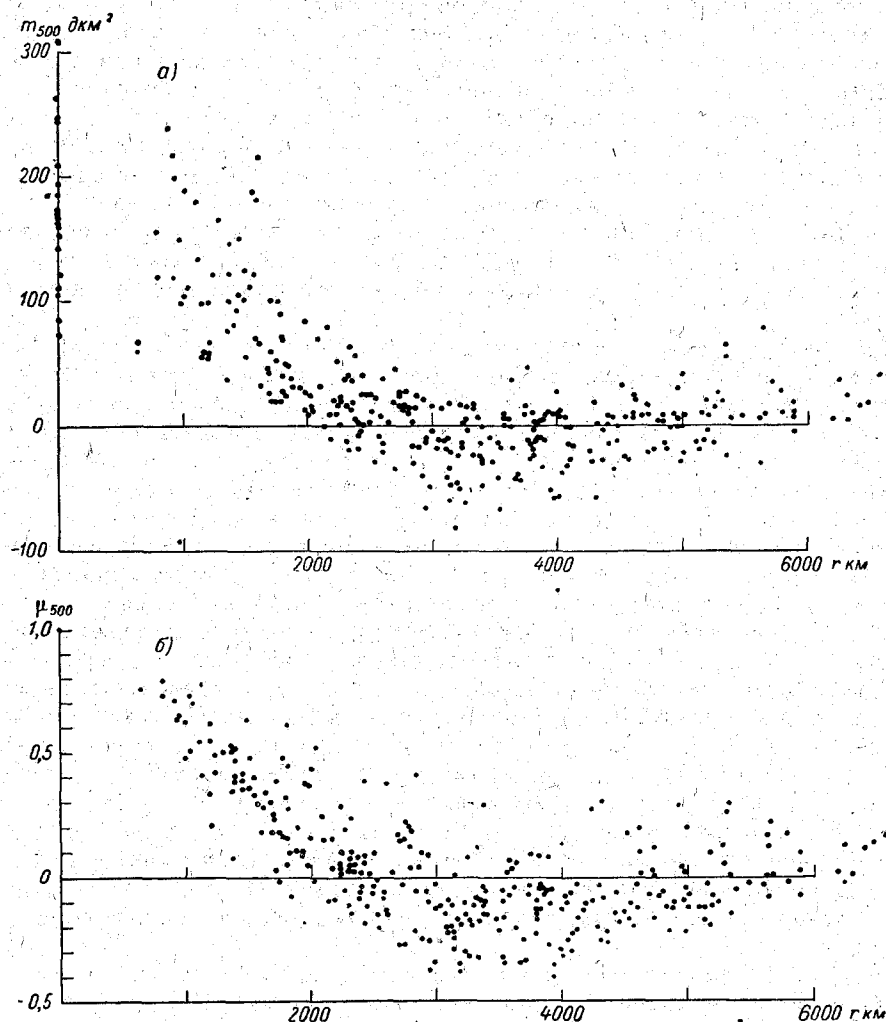


Рис. 1. Нормированные (а) и ненормированные (б) корреляционные моменты как функции расстояния между станциями, по данным А. В. Мещерской и Н. И. Яковлевой.

3. *Двумерная интерполяция полей двух элементов.* Этот случай совпадает с так называемым оптимальным согласованием метеорологических полей, детально рассмотренным в работе [4]. Там был, в частности, указан простейший вариант «одноточечного» согласования. В связи с рассматриваемыми здесь вопросами отметим, что в этом варианте интерполяционная матрица всегда положительна. Что касается общего случая согласования, то для обеспечения разумных результатов необходимо предпринимать специальные меры, которые с несколько более общей точки зрения рассматриваются ниже.

4. *Трехмерная интерполяция поля одного элемента с однородной и*

изотропной корреляционной функцией. Для решения многих практических задач интерполяция по данным на одном уровне оказывается недостаточной и приходится прибегать к пространственной, трехмерной интерполяции. Так при объективном анализе геопотенциала изобарических поверхностей над океанами мы сталкиваемся с тем обстоятельством, что сеть аэрологического зондирования на акваториях океанов весьма редка, в то время как в значительном количестве имеются приземные, судовые наблюдения. По данным Дёсса и Итона [10] учет этих данных даже при грубых предположениях типа замены вертикальных профилей температуры средними климатологическими позволяет существенно улучшить качество объективного анализа на высотах над океанами. Тем более можно рассчитывать на усовершенствование анализа над акваториями океанов, если учитывать статистические связи между наземными и высотными данными, т. е. учитывать трехмерную структуру метеорологических полей.

Хорошо известно, что применительно к движениям большого масштаба в атмосфере вертикальное направление ни в коей мере нельзя считать равнозначным горизонтальному. Для таких движений характерны расстояния по вертикали по крайней мере на два порядка меньше горизонтальных. Это значит, что трехмерные корреляционные функции нельзя принимать зависящими лишь от пространственного расстояния между точками. Вместе с тем, если пользоваться только однородностью и изотропией в горизонтальном направлении, не делая никаких предположений относительно зависимости пространственных корреляционных функций от вертикальных координат точек, то имеется опасность получения корреляционных матриц, не являющихся положительно определенными, что, в свою очередь, может привести к абсурдным результатам.

Во избежание этого М. И. Юдин предложил обобщение гипотезы пространственной однородности и изотропии за счет преобразования координат. Будем считать, что однородность и изотропия на всех горизонтальных (или изобарических) поверхностях соблюдается, так что, если две точки лежат на одной и той же горизонтали, т. е. имеют координаты (x_1, y_1, z) и (x_2, y_2, z) , то корреляционная функция зависит только от расстояния $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Постараемся теперь ввести вместо вертикальной координаты z такую функцию $u = u(z)$, чтобы в системе x, y, u имела место пространственная однородность и изотропия, т. е. чтобы корреляционная функция для двух точек (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) зависела только от «расстояния» $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (u_1 - u_2)^2}$. Если это удастся, то весьма легко обеспечить положительную определенность такой функции. Для этого достаточно потребовать, чтобы была положительна трехмерная спектральная плотность

$$\varphi(\lambda) = \frac{4\pi}{\lambda} \int_0^{\infty} \mu(r) \sin \lambda r \cdot r dr, \quad (24)$$

где

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + u^2}. \quad (25)$$

Простейшим вариантом преобразования координат является преобразование подобия $u = cz$. Если удастся достичь однородности и изотропии путем такого преобразования, то это означает, что изокорреляционные поверхности в системе (x, y, z) представляют собой подобные друг другу эллипсоиды вращения с вертикальными осями вращения.

В системе (x, y, u) эти эллипсоиды превращаются в сферы. Беря величину s порядка 10^{-2} , можно надеяться описать корреляционные функции по крайней мере некоторых метеорологических элементов функциями только расстояния (25).

Изложенная гипотеза имеет, по-видимому, ограниченную область применимости. Так, по данным В. П. Болтенкова [1], пространственная корреляционная функция температуры резко неоднородна вблизи тропопавзы, причем едва ли можно рассчитывать существенно сгладить эту неоднородность каким бы то ни было преобразованием вертикальной координаты. Кроме того, независимо от принятия или непринятия этой гипотезы остается открытым вопрос о том, каким образом обеспечить разумные результаты интерполяции по данным не об одном, а о нескольких метеорологических элементах.

Рассмотрим поэтому еще одну простую модель корреляционных функций.

5. *Интерполяция полей нескольких элементов с подобными корреляционными функциями.* Пусть в интерполяции участвует s различных метеорологических элементов. Тогда мы имеем дело с $\frac{s(s+1)}{2}$ корреляционными функциями, из которых s автокорреляционных и $\frac{s(s-1)}{2}$ взаимных корреляционных. Пусть, далее, все эти функции однородны и изотропны в каком-то количестве измерений, например, в двух измерениях по горизонтали.

Предположим, что все эти функции можно представить в виде

$$m_{kl}(r) = m_{kl}(0)\psi(r), \quad (26)$$

где r — расстояние в горизонтальной плоскости.

Предположение (26) означает, что все $\frac{s(s+1)}{2}$ функции получаются друг из друга преобразованием подобия

$$\frac{m_{k'l'}(r)}{m_{kl}(r)} = \frac{m_{k'l'}(0)}{m_{kl}(0)} = \text{const.}$$

Деля (26) на $\sqrt{m_{kk}(0)m_{ll}(0)}$, можно получить соотношение

$$\mu_{kl}(r) = \mu_{kl}(0)\psi(r), \quad (27)$$

согласно которому, все нормированные автокорреляционные функции совпадают друг с другом, а взаимные отличаются от них лишь постоянными множителями. Можно заметить, впрочем, что предположение (27) само по себе менее ограничительно, нежели (26), и, в частности, может выполняться при горизонтальной неоднородности полей дисперсий.

В рамках указанной модели можно под f_k ($k=1, 2, \dots, s$) понимать не различные элементы, а один и тот же элемент на различных уровнях. В таком варианте модель с подобными корреляционными функциями была испытана М. И. Фортус [8] применительно к полю геопотенциала изобарических поверхностей и оказалась удовлетворительной. Вообще можно рассчитывать на успешное применение этой модели, если радиусы корреляции для всех рассматриваемых корреляционных функций (как автокорреляционных, так и взаимных) мало отличаются друг от друга.

Для обеспечения положительной определенности любой интерполяционной матрицы при подобных корреляционных функциях достаточно удовлетворить два требования: чтобы функция $\psi(r)$ была положи-

тельно определенной и чтобы этим же свойством обладала числовая матрица $\|m_{kl}(0)\|$ или $\|\mu_{kl}(0)\|$. Выполнение обоих этих требований легко проверить непосредственно. Что касается системы уравнений (12) для определения интерполяционных весов, то она в силу соотношений (27) приводится к виду

$$\sum_{l=1}^s \mu_{kl}(0) \sum_{j=1}^{n_l} \psi_{ij} q_{jl} + \eta_{ik} q_{ik} = \mu_{0k}(0) \psi_{0i}, \quad (28)$$

содержащему лишь одну функцию горизонтального расстояния $\psi(r)$. Соответственно преобразуется и выражение (13) для меры ошибки интерполяции

$$\varepsilon = 1 - \sum_{k=1}^s \mu_{0k}(0) \psi_{0i} q_{ik}. \quad (29)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтенков В. П. Исследование статистической макроструктуры температуры воздуха. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
2. Гандин Л. С. Об оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 114, 1960.
3. Гандин Л. С. О принципах рационального размещения сети метеорологических станций. Труды ГГО, вып. 111, 1961.
4. Гандин Л. С. Об оптимальном согласовании метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 124, 1962.
5. Гандин Л. С., Болтенков В. П. К методике исследования трехмерной структуры метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
6. Гандин Л. С., Мелешко В. П., Мещерская А. В. О применении универсальных цифровых машин для исследования статистической структуры метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 143, 1963.
7. Машкович С. А. Применение быстродействующих вычислительных машин в целях планирования развития сети аэрологических станций. Метеорология и гидрология, № 7, 1963.
8. Фортус М. И. Трехмерная пространственная структура поля геопотенциала. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
9. Яковлева Н. И., Мещерская А. В., Кудашкин Г. Д. Исследование полей давления (геопотенциала) методом разложения по естественным составляющим. Труды ГГО, вып. 165, 1963.
10. Döös B. R., Eaton M. A. Upper-air analysis over ocean areas. Tellus, vol. 9, No 2, 1957.

О ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПОЛЯ ГЕОПОТЕНЦИАЛА

С помощью электронной вычислительной машины исследована трехмерная статистическая макроструктура поля геопотенциала на массовом материале. Полученные результаты сопоставлены с данными М. И. Фортус и других авторов.

1. До недавнего времени исследования статистической структуры макромасштабных полей основных метеорологических элементов касались лишь временной и горизонтальной структуры. Однако ряд практических задач приводит к необходимости накопления данных и по трехмерной, пространственной макроструктуре метеорологических полей. Так в настоящее время одной из основных задач развития объективного анализа метеорологических полей является переход от анализа тропосферных полей над хорошо освещенными аэрологической информацией районами суши к построению полей в стратосфере и над акваториями океанов. При переходе от тропосферных уровней к стратосферным мы неизбежно сталкиваемся с уменьшением объема информации и ухудшением ее качества. Чтобы избежать соответственного ухудшения качества объективного анализа для стратосферных уровней, крайне желательно привлекать в качестве исходных данных информацию не только с рассматриваемого уровня, но и с нижележащих поверхностей. Наиболее точно это можно осуществить с помощью оптимальной пространственной интерполяции [2], для чего необходимо иметь данные по пространственной статистической макроструктуре полей анализируемых элементов.

Еще в более резкой форме встает тот же вопрос при попытках объективного анализа высотных полей над океанами. Аэрологические наблюдения над акваториями океанов весьма малочисленны. В то же время данных измерений у поверхности океанов сравнительно много (такие измерения проводят почти все суда, независимо от своего назначения). Поэтому при объективном анализе аэрологических данных над океанами весьма важно привлекать к рассмотрению данные обычных судовых наблюдений, для чего опять-таки требуется знать характеристики пространственной структуры метеорологических полей.

Среди других задач, требующих для своего решения знания пространственной структуры метеорологических полей, заслуживает упоминания задача построения статистически ортогональных разложений. За последнее время опубликован ряд работ, посвященных решению этой задачи и применению получаемых результатов для построения малопараметрических схем динамического прогноза погоды [5], для разработки объективной типизации макросиноптических процессов [7], для построения статистических методов прогноза [9] и т. п. В указанных

работах применялись статистически ортогональные разложения либо вертикальных профилей, либо горизонтальных полей. Вместе с тем ясно, что более обстоятельное решение упомянутых вопросов требует построения статистически ортогональных разложений трехмерных полей. Исходными данными для этого должны служить сведения по пространственной статистической структуре рассматриваемых полей.

2. Если пытаться изучать на эмпирическом материале пространственную статистическую структуру метеорологических элементов, не вводя никаких априорных предположений о закономерностях этой структуры, то требования к объему материала окажутся явно невыполнимыми, как показывают оценки А. М. Обухова. Применительно к горизонтальной структуре эту трудность обычно обходят, пользуясь предположением об однородности и изотропии соответствующих структурных и корреляционных функций, т. е. о зависимости их только от расстояния между точками. Имеется ряд проработок, выясняющих степень законности этого предположения. Сошлемся здесь на недавно опубликованную статью [8]. Изолинии корреляционных функций геопотенциала различных изобарических поверхностей, приведенные в этой статье, можно с большой точностью считать окружностями вплоть до расстояний порядка 2000 км. Вместе с тем из этих графиков видно, что для больших расстояний, при которых корреляция мала, гипотеза однородности и изотропии неприменима.

Естественно ввести аналогичные предположения и применительно к трехмерным характеристикам, описывающим статистическую связь значений элемента в точках, расположенных на различных уровнях. Именно, будем считать, что такие характеристики зависят не от шести скалярных аргументов — координат обеих точек, а лишь от трех аргументов — вертикальных координат двух точек и модуля горизонтальной проекции вектора, их соединяющего. Понятно, что для больших горизонтальных расстояний получаемые при таком предположении результаты можно рассматривать лишь как грубое приближение к действительности, в то время как при малых расстояниях такие результаты заслуживают полного доверия.

В рамках этого предположения трехмерную корреляционную функцию некоторого метеорологического элемента можно рассматривать как совокупность двумерных однородных и изотропных корреляционных функций — автокорреляционных, описывающих статистическую структуру элемента на фиксированном уровне каждая, и кросс-корреляционных, описывающих связь значений элемента на двух фиксированных уровнях каждая.

В работе [3] изложена методика вычисления пространственных структурных и корреляционных функций с помощью быстродействующей универсальной вычислительной машины на основе гипотезы о горизонтальной однородности и изотропии. Результаты применения этой методики к изучению пространственной статистической структуры поля температуры изложены в статье [1]. В настоящей статье излагаются результаты применения той же методики к исследованию трехмерной структуры поля геопотенциала изобарических поверхностей.

Во время выполнения этой работы появилась статья М. И. Фортус [6], посвященная тому же вопросу. В отличие от нас, М. И. Фортус использовала значительно меньший объем исходных данных, но при этом исходила из менее ограничительного предположения, что однородность и изотропия выполняются лишь в широтном направлении — вдоль круга широт $\varphi = 55^\circ$ с. ш. Поэтому сопоставление излагаемых ниже результатов с данными работы [6] интересно как для выяснения необходимого

объема, обеспечивающего получение надежных данных по пространственной структуре, так и для оценки тех последствий, к которым приводит принятие гипотезы о горизонтальной однородности и изотропии.

3. В качестве исходного материала были использованы данные о геопотенциале изобарических поверхностей 850, 700, 500, 300 и 200 мб на 60 станциях, расположение которых показано на рис. 1. Вычисления производились для зимнего сезона. Всего использовано 60 сроков, отстоящих друг от друга не менее чем на четыре дня и относящихся к трем зимам (1959—1962 гг.). Использовать данные за предшествовавшие годы было едва ли целесообразно вследствие меньшей густоты

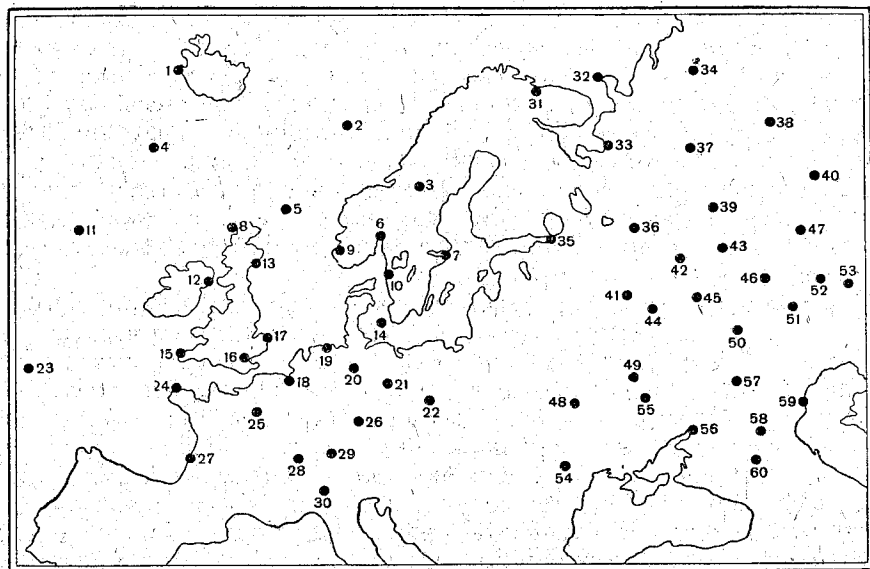


Рис. 1. Расположение пунктов, данные которых использовались для вычисления структурной функции геопотенциала.

и худшего качества таких данных, в особенности на поверхностях 300 и 200 мб.

В отличие от того, как это делалось в работе [1], если данные на той или иной из выбранных станций отсутствовали, вместо них использовался результат субъективной интерполяции на эту станцию.¹ Поэтому объем данных n_i , по которому выполнено осреднение внутри каждого (i -того) интервала расстояний, одинаков для всех полученных функций. Это обстоятельство использовано в качестве одного из средств контроля правильности счета. Величины n_i для каждой градации расстояний приведены в табл. 2.

Поскольку в процессе вычислений определялись средние значения геопотенциала по использованному материалу на всех рассматривавшихся станциях, интересно сопоставить эти средние с климатологическими нормами на этих же станциях для зимы, полученными по существенно большему материалу. Результаты такого сопоставления

¹ Введение интерполированных данных явилось попросту следствием оплошности, допущенной при снятии данных с карт. Поскольку объем интерполированных данных оказался невелик (менее 10% общего объема исходной информации), эта оплошность не должна была заметно повлиять на полученные результаты.

приведены в табл. 1. Они показывают, что расхождения сравнительно велики, в особенности для поверхностей 300 и 200 мб. Хотя эти расхождения могут быть, хотя бы частично, приписаны низкому качеству наблюдений за более ранние годы, следует признать, что данные показывают также, что далеко не безразлично, какие значения норм используются при вычислении структурных и корреляционных функций; необходимо в качестве норм брать средние значения по тому самому материалу, который используется для вычисления структурных и корреляционных функций.

Таблица 1

Расхождения между средними по использованному материалу
и климатологическими нормами (гп. дкм)

Расхождение	Поверхность (мб)				
	850	700	500	300	200
Среднее алгебраическое	0,13	0,65	1,35	2,32	2,99
Среднее квадратическое	1,82	2,46	3,18	4,70	5,30
Максимальное	6	9	7	10	11

4. В табл. 2 приведены значения всех полученных корреляционных функций, исправленные на взаимное согласование со структурными функциями. Способ введения указанных исправлений изложен в работе [3]. В таблице приведены значения не для всех градаций горизонтальных расстояний ρ , а лишь до градации со средним расстоянием $\bar{\rho}=4,700$ км включительно. Анализ значений корреляционных функций при больших расстояниях нецелесообразен как потому, что эти значения получены по сравнительно небольшому числу случаев, так и особенно потому, что при таких расстояниях гипотеза об однородности и изотропии не может быть использована даже в качестве грубого приближения.

В процессе вычислений значение каждой автокорреляционной функции при нулевом горизонтальном расстоянии ρ определялось двумя независимыми способами. Во-первых, попросту вычислялись квадраты отклонений от средних, осредненные по всем использованным точкам и срокам, т. е. по 3600 случаям каждая. Эти величины приведены в первой строчке графы $i=0$. Во-вторых, в процессе взаимного согласования значений корреляционных и структурных функций определялись осредненные по всем градациям расстояний суммы $b+2m$ (b — структурная функция, m — корреляционная). Для автокорреляционной функции половина такой суммы равна значению соответствующей корреляционной функции при нулевом расстоянии. Эти значения приведены во второй строчке графы $i=0$. Они получены по значительно большему материалу и потому заслуживают большего доверия, чем первые.

По расхождениям между каждой парой указанных значений корреляционных функций от нулевого горизонтального расстояния можно судить о степени надежности полученных результатов. Как видно из табл. 2, эти расхождения весьма невелики.

Из табл. 2 видно также, что корреляционные функции сравнительно плавно меняются с изменением расстояния ρ . Исключение составляет градация $i=17$ ($\rho=3500$ км), значения всех корреляционных функций в которой резко «выскакивают вниз». Едва ли можно предполагать,

Таблица 2

Значения корреляционных функций геопотенциала $m_i(\rho_k, \rho_l)$ (гл. дкм)²

i	$\rho_l \cdot 10^{-3}$ км	n_i	(8,8)	(8,7)	(8,5)	(8,3)	(8,2)	(7,7)	(7,5)	(7,3)	(7,2)	(5,5)	(5,3)	(5,2)	(3,3)	(3,2)	(2,2)	$\rho_l \cdot 10^{-3}$ км
0	0	3600	99,7	10,5	117,4	141,5	124,4	126,6	146,3	181,1	161,3	219,4	258,0	229,6	376,8	332,7	341,4	0
1	0,2-0,4	5080	99,9	94,3	114,6	130,8	121,3	109,2	137,7	169,1	154,9	219,4	243,7	224,2	379,5	332,7	345,0	0,3
2	0,4-0,6	9959	89,9	89,0	106,1	127,1	117,2	102,9	129,5	159,8	147,0	192,9	238,1	208,7	328,1	307,1	300,9	0,5
3	0,6-0,8	11759	79,2	82,2	93,3	112,0	104,1	93,8	116,2	144,4	133,8	152,2	198,7	184,8	272,2	258,4	287,5	0,7
4	0,8-1,0	13319	66,9	73,3	85,0	101,0	93,6	83,6	105,4	128,8	122,0	133,7	174,3	165,6	234,6	227,0	253,9	0,9
5	1,0-1,2	15840	56,2	60,7	70,0	82,2	77,2	69,7	84,4	105,8	100,8	106,8	139,3	133,4	191,9	189,1	193,8	1,1
6	1,2-1,4	12600	45,8	50,4	57,1	67,0	64,6	58,7	69,8	85,0	82,6	85,8	110,9	109,0	148,9	150,3	157,4	1,3
7	1,4-1,6	13800	35,5	37,3	40,9	48,9	47,7	42,7	50,3	60,4	60,9	58,9	76,0	79,5	103,9	111,1	123,2	1,5
8	1,6-1,8	12600	25,6	27,2	28,2	30,9	32,1	29,6	32,3	36,7	39,3	38,6	45,8	50,2	58,2	68,6	83,4	1,7
9	1,8-2,0	11400	19,8	17,1	17,3	18,4	20,2	17,6	19,3	20,5	25,0	20,6	25,1	32,0	32,7	45,9	61,6	1,9
10	2,0-2,2	11400	10,3	10,0	7,3	6,4	10,9	10,3	8,0	6,7	14,8	4,3	5,6	16,2	6,6	21,9	40,7	2,1
11	2,2-2,4	11400	4,7	3,4	0,1	-2,9	-1,0	2,3	-2,8	-5,9	-1,9	-8,7	-12,7	-3,7	-16,7	-17,3	15,3	2,3
12	2,4-2,6	12600	2,7	-5,3	-9,7	-14,6	-11,3	-8,3	-15,1	-21,4	-15,3	-22,6	-30,4	-9,5	-33,4	-25,5	-8,7	2,5
13	2,6-2,8	10080	-2,7	-8,9	-10,5	-18,2	-15,7	-13,1	-16,9	-21,2	-20,3	-19,8	-29,3	-19,8	-40,1	-26,3	-12,7	2,7
14	2,8-3,0	8760	-8,4	-12,3	-15,7	-23,7	-19,4	-16,8	-22,8	-30,6	-24,3	-27,3	-35,7	-25,1	-43,6	-33,6	-18,1	3,1
15	3,0-3,2	8280	-8,1	-10,2	-12,2	-18,6	-18,3	-13,5	-17,1	-22,8	-22,3	-18,2	-23,8	-20,4	-26,9	-23,0	-15,8	3,3
16	3,2-3,4	7080	-18,9	-18,9	-22,9	-33,9	-31,4	-21,2	-27,3	-41,6	-34,4	-34,8	-49,6	-41,5	-65,3	-56,4	-42,7	3,5
17	3,4-3,6	8040	-12,2	-14,8	-18,1	-24,0	-24,1	-16,9	-21,9	-27,8	-25,8	-24,6	-29,1	-26,5	-31,4	-27,5	-21,3	3,7
18	3,6-3,8	4800	-9,4	-11,9	-13,5	-19,9	-24,3	-40,1	-15,1	-22,5	-25,2	-17,3	-21,0	-24,0	-20,4	-19,2	-21,0	3,9
19	3,8-4,0	3840	-10,4	-11,4	-13,5	-19,6	-19,2	-11,9	-14,5	-20,0	-16,7	-11,1	-25,1	-12,6	-15,5	-11,8	-7,2	4,1
20	4,0-4,2	2520	-8,6	-12,1	-10,0	-12,8	-13,3	-13,1	-12,5	-17,4	-15,6	-6,1	-7,9	-5,6	-5,1	-4,7	-2,3	4,3
21	4,2-4,4	2639	-4,5	-4,4	-6,4	-10,6	-11,2	-4,4	-3,9	-11,1	-5,8	-3,4	-6,7	-4,0	-7,7	-1,0	-4,5	4,5
22	4,4-4,6	1440	1,0	2,4	0,4	-3,1	-7,4	5,7	7,5	-4,4	3,2	-5,0	2,1	0,9	0,8	4,8	12,6	4,7
23	4,6-4,8																	

Примечание. Здесь и в дальнейшем давление, соответствующее изобарической поверхности, фигурирует в сотнях мб, за исключением поверхности 850 мб, которая обозначена цифрой 8. Например, в графе (8,2) приведены значения корреляционной функции m_i (850, 200).

что это соответствует реальному поведению корреляционных функций. Более вероятно, что этот факт обусловлен какой-либо погрешностью при расчетах.

5. Для возможно более надежного выявления различий в скорости затухания разных корреляционных функций были для каждой из этих функций вычислены отношения:

$$k_1 = \frac{m_7 + m_8 + m_9}{m_3 + m_4 + m_5}, \quad k_2 = \frac{m_{11} + m_{12} + m_{13}}{m_3 + m_4 + m_5}.$$

Величины этих отношений приведены в табл. 3.

Таблица 3

Отношения k_1 и k_2 (%)

	k_1					k_2				
	8	7	5	3	2	8	7	5	3	2
8	40	33	35	34	36	1	-1	-6	-8	-6
7	33	36	33	31	35	-1	-4	-8	-11	-7
5	35	33	30	29	33	-6	-8	-9	-13	-7
3	34	31	29	27	34	-9	-11	-13	-13	-7
2	36	35	33	34	34	2	-6	-7	-7	1

Из этой таблицы видно, что корреляционные функции, относящиеся к средней и верхней тропосфере (500 и 300 мб) затухают быстрее и переходят через нуль при меньших расстояниях, чем функции, относящиеся к нижней тропосфере и к стратосфере. Этот же результат применительно к одноуровненным функциям был получен в упомянутой выше работе Бертони и Лунда [8]. Он означает, что характерный масштаб крупных барических образований уменьшается с высотой, достигает минимума в верхней тропосфере и далее растет с высотой.

Вместе с тем из табл. 3 видно, что указанный эффект выражен в количественном отношении не очень сильно. Поэтому если мириться с небольшими, хотя и систематическими отклонениями, то можно попытаться описать изменение всех полученных корреляционных функций с расстоянием ρ одной и той же функцией от ρ .

Наряду с выяснением характера затухания корреляционных функций большой интерес представляет анализ их значений при нулевом горизонтальном расстоянии. При этом следует учитывать, что величины, фигурирующие в верхней строчке табл. 2, мало надежны, так как они получены по сравнительно небольшому материалу. То же относится и к значениям корреляционных функций при малых горизонтальных расстояниях (300 и 500 км). Поэтому, используя эти значения, приходится их несколько подправлять, основываясь на ходе кривых при больших значениях расстояния. Величины дисперсий (значений одноуровненных корреляционных функций при нулевом расстоянии) получены, как указано выше, по большому материалу, но они искажены наличием случайных ошибок наблюдений, а именно, завышены на средний квадрат случайной ошибки. Поэтому и для этих функций также нужно принимать во внимание ход при расстояниях, отличных от нулевого.

В результате соответствующей проработки была получена матрица значений всех корреляционных функций при нулевом горизонтальном расстоянии, приведенная в табл. 4. В этой таблице ниже главной диагонали выписаны коэффициенты корреляции между значениями геопотенциала на соответствующих уровнях.

Исследование этой матрицы на положительную определенность показало, что она удовлетворяет этому требованию, но является плохо обусловленной. Последнее объясняется попросту тесной связью между абсолютным геопотенциалом различных изобарических поверхностей.

Таблица 4
Дисперсии, корреляционные моменты и коэффициенты корреляции между абсолютным геопотенциалом различных изобарических поверхностей

	8	7	5	3	2
8	99	102	124	144	131
7	0,93	124	146	182	162
5	0,84	0,92	207	258	240
3	0,76	0,87	0,95	360	330
2	0,72	0,81	0,92	0,95	333

6. В соответствии со сказанным выше была предпринята попытка приближенного описания зависимости всех функций от горизонтального расстояния ρ с помощью одной формулы. В качестве такой формулы, как и в работе [4], была выбрана следующая:

$$m(p_k, p_l, \rho) = m(p_k, p_l, 0) e^{-\beta \rho^\gamma} J_0(k\rho),$$

где J_0 — Бесселева функция. Методика определения параметров β , γ и k была такой же, как в работе [4], за тем исключением, что значения отношений $m(p_k, p_l, \rho)/(m(p_k, p_l, 0))$ были сначала осреднены по всем p_k и p_l . В результате оказалось, что $k=1,065$ (тыс. км) $^{-1}$; $\gamma=1,5$; $\beta=0,195$ (тыс. км) $^{-1,5}$, следовательно, если измерять расстояние в тысячах километров, то аппроксимационная формула имеет вид:

$$m(p_k, p_l, \rho) = m(p_k, p_l, 0) e^{-0,195 \rho^{1,5}} J_0(1,065 \rho).$$

Согласно этой формуле, все функции m обращаются в нуль на расстоянии 2260 км и вплоть до расстояния 5170 км отрицательны. Поскольку в действительности, как было показано выше, характер затухания различных функций несколько различается и, в частности, они переходят через нуль на разных расстояниях, то имеют место закономерные отклонения корреляционных функций от кривой, описывающей аппроксимирующую функцию. Однако эти отклонения невелики. Так на рис. 2 приведены автокорреляционные функции для геопотенциала поверхностей 850, 500 и 300 мб и взаимные корреляционные функции между этими же уровнями. На этом рисунке видно, что разброс относительно аппроксимирующей функции сравнительно невелик.

Разумеется, если производить аппроксимацию каждой отдельной функции, то можно достичь большей точности. Однако при этом не было бы гарантии, что совокупность всех этих аппроксимаций, рассматриваемая как единая, трехмерная корреляционная функция, является положительно определенной, т. е. действительно может быть корреляционной функцией. Следовательно не было бы также гарантии в том, что применение этой функции обеспечивает разумные результаты. Если же пользоваться единой аппроксимацией, приведенной выше, то таких сомнений не возникает, поскольку аппроксимирующая функция имеет положительный двумерный спектр, а матрица значений функций

при нулевом горизонтальном расстоянии является положительно определенной.

7. Сопоставим теперь полученные нами данные с результатами некоторых других исследований и, в первую очередь,—работы М. И. Фортус [6]. В табл. 5 приведены некоторые результаты такого сопоставления.

В этой таблице под коэффициентом межуровневой корреляции понимается коэффициент корреляции между значениями геопотенциала различных изобарических поверхностей на одной вертикали. В качестве

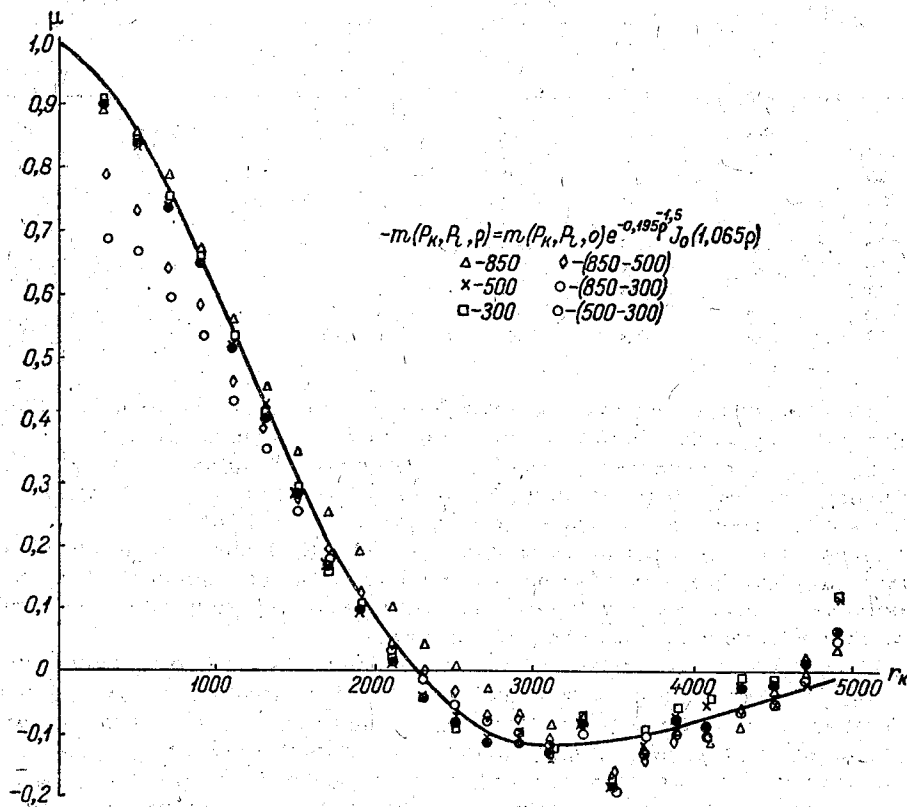


Рис. 2. Корреляционные функции геопотенциала и их аппроксимация.

радиуса корреляции принято горизонтальное расстояние, при котором корреляционная функция переходит через нуль. Данные из работы М. И. Фортус приведены на основании аппроксимаций вида:

$$m(p_k, p_l, \rho) = m(p_k, p_l, 0) e^{-a_{kl} \rho} \cos b_{kl} \rho,$$

содержащихся в этой работе. Радиусы корреляции по нашим данным получены простой интерполяцией табличных значений, приведенных выше (табл. 2).

Рассмотрение табл. 5 показывает, что величины $m(p_k, p_l, 0)$ получились у нас систематически несколько меньшими, чем у М. И. Фортус. Возможно, что это обстоятельство в какой-то мере вызвано использованием нами, наряду с данными наблюдений, также и интерполированных величин. Во всяком случае ясно, что при этом должны получаться заниженные значения дисперсий $m(p_k, p_l, 0)$. Вместе с тем из таблицы

видно, что коэффициенты корреляции для соседних уровней, полученные по данным работы [6], явно слишком велики (0,99 и даже 1,03), наши коэффициенты представляются более правдоподобными.

Таблица 5

Некоторые характеристики корреляционных функций по нашим данным (А)
и по данным М. И. Фортус (Б)

Уровни (мб)		Значение при нулевом горизонтальном расстоянии (гп. дкм) ²		Коэффициент межуровеньной корреляции		Радиус корреляции (тыс. км)	
P_1	P_2	А	Б	А	Б	А	Б
850	850	99	105			2,55	2,42
850	700	102	125	0,93	1,03	2,47	2,54
850	500	121	140	0,84	0,89	2,31	2,50
850	300	144	160	0,76	0,74	2,24	2,31
700	700	121	140			2,38	2,34
700	500	146	180	0,92	0,99	2,25	2,34
700	300	182	195	0,87	0,78	2,21	2,10
500	500	206	235			2,17	2,24
500	300	258	310	0,95	0,96	2,16	2,22
300	300	360	445			2,16	2,10

Что касается радиусов корреляции, то они весьма близки в обеих работах: совпадают как средние значения радиусов корреляции так и характер их изменения с высотой, а именно, убывание вплоть до поверхности 300 мб. Возрастание радиусов корреляции выше этого уровня в работе Фортус, естественно, не обнаружено, поскольку ею не исследовалась структура выше поверхности 300 мб. Полученные нами радиусы корреляции обнаруживают несколько более плавный характер изменения с высотой, чем у Фортус, что следует объяснить существенно большим объемом использованных данных.

Интересно сопоставить данные Фортус по автокорреляционной функции геопотенциала поверхности 1000 мб с аналогичными данными работы [4], в которой рассматривается давление на уровне моря. Радиус корреляции для этой функции равен по данным Фортус 2,96 тыс. км, а по нашим данным 2,94 тыс. км, так что совпадение очень хорошее. Что касается значений функций при нулевом расстоянии, то они заметно расходятся: 118 (гп. дкм)² у М. И. Фортус и 220 мб², что соответствует 141 (гп. дкм)² в работе [4].

Можно думать, что радиусы корреляции и вообще параметры относительной изменчивости корреляционных функций являются более консервативными во времени и в горизонтальном направлении и потому менее различными для разных выборок, чем абсолютные значения этих функций. Поскольку же решение многих задач, в которых используются сведения по статистической структуре, в том числе задач объективного анализа, зависит главным образом именно от относительных характеристик корреляции, достигнутой точности сведений о такого рода характеристиках можно считать достаточной для практических целей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтенков В. П. Исследование статистической макроструктуры температуры воздуха. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
2. Гандин Л. С. Общая задача об оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей. См. настоящий сборник.

3. Г ан д и н Л. С., Б ол т е н к о в В. П. К методике исследования трехмерной макро-структуры метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
4. Г ан д и н Л. С., М е л е ш к о В. П., М е щ е р с к а я А. В. О применении универсальных цифровых машин для исследования статистической структуры метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 143, 1963.
5. Р у х о в е ц Л. В. О статистических оптимальных представлениях вертикальных распределений метеоэлементов в тропосфере и нижней стратосфере. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
6. Ф о р т у с М. И. Трехмерная пространственная структура поля геопотенциала. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
7. Я к о в л е в а Н. И., М е щ е р с к а я А. В., К у д а ш к и н Г. Д. Исследование полей давления (геопотенциала) методом разложения по естественным составляющим. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
8. B e r t o n i E., L u n d I. A. Space correlations of the height of constant pressure surfaces. Journ. Applied Meteorology, vol. 2, No 4, 1963.
9. L o r e n z E. N. Prospects for statistical weather forecasting. Statistical forecasting project. Final report, MIT, 1959.

ОБ ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

Рассматривается задача об одномерной интерполяции и экстраполяции величин, корреляционная функция которых является линейно убывающей.

Для ряда метеорологических задач приходится осуществлять интерполяцию той или иной величины. Во многих случаях оказывается возможным ограничиться одномерной интерполяцией. Так обстоит дело, например, при интерполяции во времени. Одномерная интерполяция использовалась и в ряде работ по рационализации метеорологической сети.

Пусть в n точках, координаты которых соответственно $x_1, x_2, \dots, x_n$ производятся измерения метеорологического элемента f , в результате чего получены значения $f_1, f_2, \dots, f_n$. Требуется определить значение величины f в некоторой точке x , которая, вообще говоря, не совпадает с точками измерения.

Решение этой задачи сводится к построению такой линейной комбинации измеренных величин

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=1}^n p_i f_i, \quad (1)$$

которая давала бы минимальное значение среднего квадрата ошибки интерполяции

$$\bar{\delta}^2 = \overline{[f(x) - \tilde{f}(x)]^2}. \quad (2)$$

В (1) p_i — вес, с которым значение величины f в i -той точке входит в интерполяционную формулу; в (2) черта сверху означает статистическое осреднение.

Веса p_i зависят от x (для данного x они могут быть рассчитаны раз и навсегда).

Без ограничения общности можно положить

$$\bar{f} = 0. \quad (3)$$

Считаем также поле величины f статистически однородным и вводим нормированную корреляционную функцию

$$r(|x_i - x_k|) = \frac{\overline{f_i f_k}}{\sigma^2}, \quad (4)$$

где σ^2 — дисперсия элемента f .

Условие минимальности среднего квадрата ошибки интерполяции дает систему n нормальных уравнений

$$\sum_{k=1}^n p_k r(|x_i - x_k|) = r(|x - x_i|) \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

для нахождения n весов.

Таким образом, при заданном распределении точек, участвующих в процессе интерполяции, веса, соответствующие наиболее выгодной (в смысле метода наименьших квадратов) интерполяции, однозначно определяются статистической структурой интерполируемой величины. Рассмотрим случай, когда корреляционная функция имеет вид

$$r(x) = 1 - A|x|. \quad (6)$$

Такая корреляционная функция имеет смысл при не слишком больших значениях аргумента x . Будем считать, что при интерполяции мы не выходим из области применимости формулы (6). Как показал М. И. Юдин [4], такую структуру имеет поле крупномасштабных пульсаций ветра и некоторых других метеорологических элементов до расстояний порядка 1000 км.

После подстановки (6) в (5) задача сводится к решению системы

$$\sum_{k=1}^n \{1 - A|x_i - x_k|\} p_k = 1 - A|x - x_i| \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

Аналогичная задача решалась П. А. Козуляевым [2, 3]. При этом использовалась более общая корреляционная функция «с изломом», совпадающая с (6) до точки $x = \frac{1}{A}$ и равная нулю при $x \geq \frac{1}{A}$, в результате чего решение получилось очень громоздким. По этой же причине Козуляевым получено решение лишь для случая равноотстоящей последовательности точек. Экстраполяция в (2, 3) производилась лишь на целое число интервалов, а интерполяция — только в пропущенную центральную точку последовательности.

В рассматриваемом случае система уравнений оказывается гораздо проще и удастся решить задачу об экстраполяции и интерполяции в любую точку при произвольном размещении последовательности измерений.

Действительно, рассмотрим определитель системы порядка n .

$$D_n = \begin{vmatrix} 1, & 1 - Ah_1, & \dots, & 1 - A \sum_{s=1}^{k-1} h_s, & \dots, \\ & & & 1 - A \sum_{s=1}^{n-2} h_s, & 1 - A \sum_{s=1}^{n-1} h_s \\ 1 - Ah_1 & 1, & \dots, & 1 - A \sum_{s=2}^{k-1} h_s, & \dots, \\ & & & 1 - A \sum_{s=2}^{n-2} h_s, & 1 - A \sum_{s=2}^{n-1} h_s \\ 1 - A \sum_{s=1}^2 h_s, & 1 - Ah_2, & \dots, & 1 - A \sum_{s=3}^{k-1} h_s, & \dots, \\ & & & 1 - A \sum_{s=3}^{n-2} h_s, & 1 - A \sum_{s=3}^{n-1} h_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{vmatrix}
 1 - A \sum_{s=1}^{i-1} h_s, & 1 - A \sum_{s=2}^{i-1} h_s, & \dots, & 1 - A \sum_{s=k}^{i-1} h_s, & \dots, & 1 - A \sum_{s=l}^{n-2} h_s, & 1 - A \sum_{s=l}^{n-1} h_s \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 - A \sum_{s=1}^{n-3} h_s, & 1 - A \sum_{s=2}^{n-3} h_s, & \dots, & 1 - A \sum_{s=k}^{n-3} h_s, & \dots, & 1 - Ah_{n-2}, & 1 - A \sum_{s=n-2}^{n-1} h_s \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 - A \sum_{s=1}^{n-2} h_s, & 1 - A \sum_{s=2}^{n-2} h_s, & \dots, & 1 - A \sum_{s=k}^{n-2} h_s, & \dots, & 1, & 1 - Ah_{n-1} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 1 - A \sum_{s=1}^{n-1} h_s, & 1 - A \sum_{s=2}^{n-1} h_s, & \dots, & 1 - A \sum_{s=k}^{n-1} h_s, & \dots, & 1 - Ah_{n-1}, & 1
 \end{vmatrix}$$

где введено обозначение

$$h_i = x_{i+1} - x_i.$$

Определитель D_n является симметричным. Если последовательно вычесть из каждой последующей строки предыдущую и из каждого последующего столбца предыдущий, он примет вид:

$$D_n = \begin{vmatrix}
 1, & -Ah_1, & \dots, & -Ah_{k-1}, & \dots, & -Ah_{n-2}, & -Ah_{n-1} \\
 -Ah_1, & 2Ah_1, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\
 -Ah_2, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 -Ah_{i-1}, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 -Ah_{n-2}, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 2Ah_{n-2}, & 0 \\
 -Ah_{n-1}, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & 2Ah_{n-1}
 \end{vmatrix} \quad (9)$$

В преобразованном определителе отличны от нуля лишь числа, стоящие в первой строке, в первом столбце и на главной диагонали. Он легко приводится к диагональному виду, в результате чего получаем:

$$D_n = (2A)^{n-1} \left(1 - \frac{A}{2} \sum_{s=1}^{n-1} h_s \right) \prod_{s=1}^{n-1} h_s. \quad (10)$$

Путем аналогичных преобразований могут быть найдены и алгебраические дополнения определителя, в результате чего получим матрицу алгебраических дополнений к элементам определителя Δ_{ik} , стоящим на пересечении i -той строки и k -того столбца его.

$$\|\Delta_{lk}\| = \begin{vmatrix} \Delta_{11}, & \Delta_{12}, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & \Delta_{1n} \\ \Delta_{21}, & \Delta_{22}, & \Delta_{23}, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & \Delta_{32}, & \Delta_{33}, & \dots, & 0, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & \Delta_{i-1,i}, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & \Delta_{ii}, & \dots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & \Delta_{i+1,i}, & \dots, & 0, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & \Delta_{n-1,n-1}, & \Delta_{n-1,n} \\ \Delta_{n1}, & 0, & 0, & \dots, & 0, & \dots, & \Delta_{nn-1}, & \Delta_{nn} \end{vmatrix} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (2A)^{n-2} \left(1 - \frac{A}{2} \sum_{s=2}^{n-1} h_s \right) \prod_{s=2}^{n-1} h_s, \\ \Delta_{ii} &= D_n \frac{h_{i-1} + h_i}{2Ah_{i-1}h_i} \quad \text{при } i \neq 1, n, \\ \Delta_{nn} &= D_{n-1}, \\ \Delta_{1n} &= \Delta_{n1} = 2^{n-3} A^{n-1} \prod_{s=1}^{n-1} h_s, \\ \Delta_{i,i+1} &= \Delta_{i+1,i} = -\frac{D_n}{2Ah_i}. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим сначала случай собственно интерполяции, когда $0 < x < l$, где $l = \sum_{s=1}^{n-1} h_s$ — координата последней точки.

Пусть точка x , в которую осуществляется интерполяция, лежит между точками x_m и x_{m+1} и отстоит от них соответственно на расстоянии λ и $h_m - \lambda$. Тогда для входящих в правые части уравнений системы (7) значений корреляционных функций можно записать:

$$r(|x - x_i|) = \begin{cases} 1 - A \sum_{s=i}^{m-1} h_s - A\lambda & \text{при } i \leq m \\ 1 - A \sum_{s=m}^{i-1} h_s + A\lambda & \text{при } i > m \end{cases} \quad (13)$$

Решение системы (7) в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{D_n} \left\{ (2A)^{n-2} \left(1 - \frac{A}{2} \sum_{s=2}^{n-1} h_s \right) \prod_{s=2}^{n-1} h_s \left(1 - A\lambda - A \sum_{s=1}^{m-1} h_s \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{D_n}{2Ah_1} \left(1 - A\lambda - A \sum_{s=2}^{m-1} h_s \right) + \right. \\ &\quad \left. + 2^{n-3} A^{n-1} \prod_{s=1}^{n-1} h_s \left(1 + A\lambda - A \sum_{s=m}^{i-1} h_s \right) \right\} \\ p_2 &= \frac{1}{D_n} \left\{ -\frac{D_n}{2Ah_1} \left(1 - A\lambda - A \sum_{s=1}^{m-1} h_s \right) + \right. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{D_n (h_1 + h_2)}{2Ah_1h_2} \left(1 - A\lambda - A \sum_{s=2}^{m-1} h_s \right) - \frac{D_n}{2Ah_2} \left(1 - A\lambda - A \sum_{s=3}^{m-1} h_s \right) \Bigg\} \\
& \dots \dots \dots \\
p_{m-1} &= \frac{1}{D_n} \left\{ \frac{D_n}{2Ah_{m-1}} (1 - Ah_{m-1} - Ah_{m-2} - A\lambda) + \right. \\
& \quad \left. + D_n \frac{h_m + h_{m-1}}{2Ah_{m-1}h_m} (1 - Ah_{m-1} - A\lambda) - \frac{D_n}{2Ah_m} (1 - A\lambda) \right\} \\
p_m &= \frac{1}{D_n} \left\{ - \frac{D_n}{2Ah_m} (1 - Ah_{m-1} - A\lambda) + D_n \frac{h_m + h_{m+1}}{2Ah_mh_{m+1}} (1 - A\lambda) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{D_n}{2Ah_{m+1}} (1 - Ah_m + A\lambda) \right\} \\
p_{m+1} &= \frac{1}{D_n} \left\{ - \frac{D_n}{2Ah_{m+1}} (1 - A\lambda) + \right. \\
& \quad \left. + D_n \frac{h_{m+1} + h_{m+2}}{2Ah_{m+1}h_{m+2}} (1 - Ah_m + A\lambda) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{D_n}{2Ah_{m+2}} [1 - A(h_m + h_{m+1}) + A\lambda] \right\} \\
p_{m+2} &= \frac{1}{D_n} \left\{ - \frac{D_n}{2Ah_{m+2}} (1 - Ah_m + A\lambda) + \right. \\
& \quad \left. + D_n \frac{h_{m+2} + h_{m+3}}{2Ah_{m+2}h_{m+3}} [1 - A(h_m + h_{m+1}) + A\lambda] - \right. \\
& \quad \left. - \frac{D_n}{2Ah_{m+3}} \left(1 - A \sum_{s=m}^{m+2} h_s + A\lambda \right) \right\} \\
& \dots \dots \dots \\
p_n &= \frac{1}{D_n} \left\{ 2^{n-3} A^{n-1} \prod_{s=1}^{n-1} h_s \left(1 - A\lambda - A \sum_{s=1}^{n-1} h_s \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{D_n}{2Ah_{n-1}} \left(1 + A\lambda + A \sum_{s=m}^{n-2} h_s \right) + D_{n-1} \left(1 + A\lambda - A \sum_{s=m}^{n-1} h_s \right) \right\}
\end{aligned} \tag{14}$$

В результате можно получить

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_2 = \dots = p_{m-1} = 0; \quad p_m = \frac{h_m - \lambda}{h_m}; \\
p_{m+1} &= \frac{\lambda}{h_m}; \quad p_{m+2} = \dots = p_n = 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Нетрудно видеть, что веса p_m и p_{m+1} соответствуют линейной интерполяции между точками x_m и x_{m+1} , между которыми лежит точка x .

Рассмотрим теперь случай экстраполяции, когда $x = L > l$. В этом случае

$$r(|x - x_i|) = r(L) + A \sum_{s=1}^{i-1} h_s \tag{16}$$

и аналогично (14) и (15) легко получить решение системы в виде:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= - \frac{A \left(L - \sum_{s=1}^{n-1} h_s \right)}{2 - A \sum_{s=1}^{n-1} h_s} = - \frac{r(l) - r(L)}{1 + r(l)} \\ p_n &= \frac{2 - AL}{2 - A \sum_{s=1}^{n-1} h_s} = \frac{1 + r(L)}{1 + r(l)} \\ p_2 &= p_3 = \dots = p_{n-1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Следовательно, и в случае экстраполяции оптимальным оказывается использование данных лишь в двух точках, но, в отличие от случая чистой интерполяции, здесь используются данные лишь в крайних точках последовательности.

Заметим, что веса p_1 и p_n получаются в точности равными тем, которые имели бы место при экстраполяции по данным измерений в двух крайних точках.

До сих пор считалось, что $\bar{f}=0$, т. е., по существу, речь шла об интерполяции отклонений от нормы. Между тем интересно рассмотреть и более общий случай, когда $\bar{f} \neq 0$. В этом случае естественно наложить на веса в интерполяционной формуле (1) условие нормировки

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (18)$$

Нормированная корреляционная функция имеет вид

$$r(|x_i - x_k|) = \frac{1}{\sigma^2} [\overline{f_i f_k} - (\bar{f})^2]. \quad (19)$$

При этом считается, что $\bar{f_i} = \bar{f_k} = \bar{f}$; при $\bar{f}=0$ формула (19) совпадает с (4).

Нахождение оптимальной в смысле метода наименьших квадратов интерполяционной формулы типа (1) сводится к решению задачи об условном минимуме. Как показал Л. С. Гандин [1], веса в интерполяционной формуле могут быть получены путем решения системы $n+1$ уравнения с $n+1$ неизвестными:

$$\sum_{k=1}^n p_k r(|x_i - x_k|) = r(|x - x_i|) + \alpha \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (20)$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1.$$

Левые части первых n уравнений системы (20) совпадают с уравнениями системы (5) для случая интерполяции отклонений от нормы. Это обстоятельство очень упрощает решение нашей задачи.

Действительно, можно сразу написать

$$p_i = \frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n \Delta_{ki} [r(|x - x_k|) + \alpha] = p_i^{(0)} + \frac{\alpha}{D_n} \sum_{k=1}^n \Delta_{ki}, \quad (21)$$

где $p_i^{(0)}$ — веса для случая, когда $\bar{f}=0$. Подставив (21) в последнее уравнение системы (20), получили

$$\alpha = \frac{1 - \sum_{i=1}^n p_i^{(0)}}{\frac{1}{D_n} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \Delta_{ki}}. \quad (22)$$

Пусть корреляционная функция (19) интерполируемой величины по-прежнему описывается формулой (6). В этом случае можно воспользоваться выведенными ранее формулами для $p_i^{(0)}$, D_n и Δ_{ki} . Для собственно интерполяции согласно (15) имеем:

$$\sum_{i=1}^n p_i^{(0)} = 1; \quad \alpha = 0; \quad p_i = p_i^{(0)}. \quad (23)$$

Следовательно, и в этом случае оптимальной является чисто линейная интерполяция.

Для экстраполяции имеем согласно (12) и (17):

$$\sum_{i=1}^n p_i^{(0)} = \frac{1 + 2r(L) - r(l)}{1 + r(l)},$$

$$\frac{1}{D_n} \sum_{k=1}^n \Delta_{ki} = \begin{cases} \frac{1}{1 + r(l)} & \text{при } i=1 \\ 0 & \text{при } i=2, 3, \dots, n-1 \\ \frac{1}{1 + r(l)} & \text{при } i=n \end{cases} \quad (24)$$

$$\alpha = r(l) - r(L).$$

Подставляя (24) и (17) в (21), получаем окончательно

$$p_1 = 0; \quad p_2 = p_3 = \dots = p_{n-1} = 0; \quad p_n = 1. \quad (25)$$

Наиболее точная экстраполяция для случая $\bar{f} \neq 0$ заключается просто в использовании данных измерений в последней точке.

Заметим, что для случая $n=2$ аналогичные выводы были получены Л. С. Гандиным [1]. Приведенные результаты обобщают эти выводы на случай произвольного числа точек.

Таким образом, для величин, статистическая структура которых описывается формулой (6), оптимальной является чисто линейная интерполяция по данным в двух точках, между которыми лежит интересующая нас точка. В случае экстраполяции отклонений от нормы оптимальной оказывается экстраполяция по данным в точках наиболее близкой и наиболее удаленной от точки экстраполяции. В случае экстраполяции самих значений величины f (т. е. при $\bar{f} \neq 0$) наиболее выгодным является простое использование данных в ближайшей точке.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. Задача об оптимальной интерполяции. Труды ГГО, вып. 99, 1959.
2. Козуляев П. А. К проблемам интерполяции и экстраполяции стационарных последовательностей. Доклады АН СССР, т. 30, № 1, 1941.
3. Козуляев П. А. К теории экстраполяции стационарных последовательностей. Ученые записки МГУ, т. 3, вып. 146, 1950.
4. Юдин М. И. Вопросы теории турбулентности и структуры ветра с приложением к задаче о колебаниях самолета. Вестник ЛГУ, вып. 1, 1946.

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ УХОДЯЩЕЙ РАДИАЦИИ В ОБЛАСТИ ОКНА ПРОЗРАЧНОСТИ АТМОСФЕРЫ 8—12 МК

Предлагается метод определения уходящей радиации в области спектра 8—12 мк, позволяющий в качестве исходных данных использовать информацию о значениях метеозаэлементов на небольшом числе уровней в атмосфере.

Из решения системы дифференциальных уравнений, описывающих распространение длинноволновой радиации в атмосфере, имеем для восходящего потока на уровне верхней границы атмосферы следующее выражение:

$$F = E_{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{dE}{dz} P(\omega, m) dz + (1 - \delta)(A_0 - E_0) P(z=0), \quad (1)$$

где E — излучение черного тела в полусферу, $E_{\infty} = E(z \rightarrow \infty)$, $E_0 = E(z=0)$, z — высота, $P(\omega, m)$ — функция пропускания, $\omega = \int_z^{\infty} \rho_n \left(\frac{p}{p_0} \right)^{0.5} dz$ — эффективная масса водяного пара, ρ_n — плотность водяного пара, $m = \int_z^{\infty} \rho_o \left(\frac{p}{p_0} \right)^{0.2} dz$ — эффективная масса озона, ρ_o — плотность озона, p — давление, $p_0 = p(z=0)$, δ — излучательная способность земной поверхности, A_0 — нисходящий поток радиации на нижней границе атмосферы. В окне прозрачности, как показывают оценки, $A_0 \ll E_0$, вследствие чего в дальнейшем будем полагать $A_0 = 0$.

Зависимость E от температуры излучателя, рассчитанная по формуле Планка, для участка спектра 8—12 мк графически представлена на рис. 1.

В области окна прозрачности действуют две поглощающие субстанции — водяной пар и озон. Анализируя результаты ряда исследований [2, 3, 5], можно заключить, что во всем интервале спектра 8—12 мк логарифмический коэффициент поглощения водяного пара приблизительно постоянен и имеет среднее значение $k = 0,1$ см²/г. При этом функция пропускания водяного пара для направленной радиации имеет вид

$$P_{8-12}(\omega) = e^{-k\omega},$$

а функция пропускания для диффузной радиации

$$P_{8-12}(\omega) = e^{-k\beta\omega},$$

где

$$\beta = \frac{\ln [e^{-k\omega} (1 - k\omega) - k^2 \omega^2 E_i(-k\omega)]}{k\omega}$$

— коэффициент диффузности излучения. Этот коэффициент довольно сильно зависит от ω и изменяется в пределах от 1,58 (при $\omega = 10$ г/см²) до 2 (при $\omega = 0$ г/см²). На рис. 2 кривой представлена зависимость

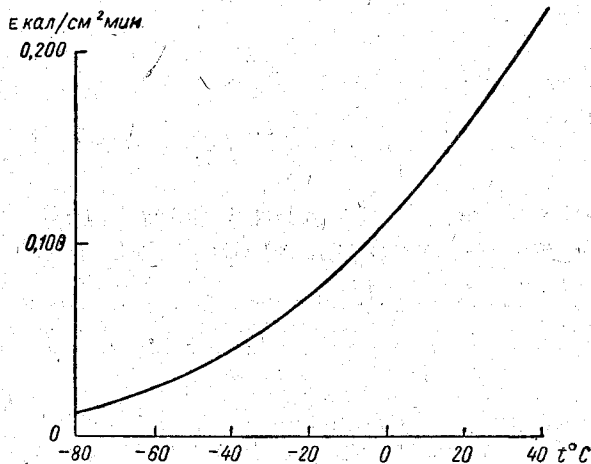


Рис. 1. Излучение черного тела в полусферу для участка спектра 8—12 м.

величины обратной функции пропускания $P_{8-12}(\omega)$ от эффективной массы водяного пара ω . На рисунке видно, что в значительных диапазонах масс водяного пара эту зависимость можно принимать линейной. Этот вывод в дальнейшем будет использован.

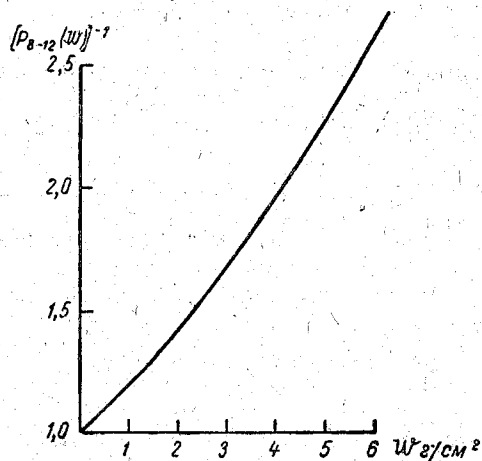


Рис. 2. Зависимость величины, обратной функции пропускания водяного пара в области спектра 8—12 мк от эффективной массы водяного пара.

Озон в области окна прозрачности имеет полосу поглощения в участке спектра 9,6—10,3 мк. При средних температурных условиях излучение черного тела в этом участке составляет 0,334 от излучения в более широком спектральном интервале 8—12 мк.

Вследствие отсутствия в этом интервале полос поглощения водяного пара, для интегральной функции пропускания обеих субстанций имеем право написать

$$P_{8-12}(\omega, m) = 0,666 P_{8-9,6; 10,3-12}(\omega) + 0,334 P_{9,6-10,3}(m) \cdot P_{9,6-10,3}(\omega).$$

А поскольку

$$P_{8-9,6; 10,3-12}(\omega) = P_{9,6-10,3}(\omega) = P_{8-12}(\omega),$$

имеем

$$P_{8-12}(\omega, m) = [0,666 + 0,334 P_{9,6-10,3}(m)] \cdot P_{8-12}(\omega) = P_{8-12}(m) \cdot P_{8-12}(\omega),$$

где $P_{8-12}(m) = 0,666 + 0,334 P_{9,6-10,3}(m)$ — функция пропускания озона в области 8—12 мк.

Зависимость функции пропускания озона от его эффективной массы

для полосы 9,6—10,3 мк получена из работы [6]. При использовании данных по вертикальному распределению озона [4] при различном полном содержании его в атмосфере обнаружено, что функция пропускания озона для уходящей радиации $P_{8-12}(m)$ в тропосфере линейно зависит от высоты

$$P_{8-12}(m) = a + bz.$$

Коэффициенты a и b , при различном полном содержании озона $m' = \int_0^{\infty} \rho_0 dz$, определенные при z в километрах, имеют следующие значения:

m' см	0,220	0,300	0,380	0,460
a	0,836	0,876	0,863	0,846
b	0,0009	0,0012	0,0012	0,0013

из приведенных данных видно, что значения коэффициентов a и b мало зависят от m' . А величина функции пропускания весьма слабо меняется с высотой.

Для выполнения вычислений по формуле (1) необходимо иметь информацию о распределении метеорологических элементов по высоте. Как известно, в результате радиозондирования значения метеозаписей получают на некотором конечном числе уровней в атмосфере. В качестве верхнего уровня можно взять тропопаузу и полагать, что в стратосфере имеет место изотермия. При этом $E_{\infty} = E(z=H)$ и $\frac{dE}{dz} \Big|_{z \geq H} = 0$ (H — высота тропопаузы).

Обозначив значения метеозаписей на отдельных уровнях индексом i (i изменяется от 0 до N), перепишем (1) следующим образом:

$$F = E_N - \sum_{i=1}^N \int_{z_{i-1}}^{z_i} \frac{dE}{dz} P(z) dz - (1 - \delta) E_0 P(z=0). \quad (2)$$

Далее предполагаем, что между любыми двумя соседними уровнями z_{i-1} и z_i :

$$1) \quad \frac{dE}{dz} = \frac{\overline{dE}}{dz} = \frac{E_i - E_{i-1}}{z_i - z_{i-1}};$$

$$2) \quad w = w_{i-1} e^{-\beta_{i,i-1}(z-z_{i-1})}, \quad \text{где } \beta_{i,i-1} = \frac{\ln w_{i-1} - \ln w_i}{z_i - z_{i-1}};$$

$$3) \quad P(z) = \left(a + b \frac{z_{i-1} + z_i}{2} \right) \frac{1}{a_{i,i-1} + b_{i,i-1} \cdot w_{i-1} e^{-\beta_{i,i-1}(z-z_{i-1})}},$$

где

$$a_{i,i-1} = \frac{1}{P(w_{i-1})} + \frac{1}{\frac{P(w_i)}{w_i} - \frac{P(w_{i-1})}{w_{i-1}}} w_{i-1}.$$

Первое из этих предположений, как следует из рис. 1, практически соответствует линейному изменению температуры между соседними уровнями, что хорошо выполняется, поскольку в число уровней z_i обычно включаются «особые точки» зондирования.

Второе предположение представляет собой экспоненциальную интерполяцию эффективного влагосодержания атмосферы. Это предположение

несомненно наилучшим образом соответствует имеющимся сведениям о закономерностях изменения плотности водяного пара с высотой.

Обоснованиями третьего положения являются, установленные ранее, слабая линейная зависимость функции пропускания озона от высоты, позволяющая для каждого из слоев использовать постоянное среднее значение $P_{8-12}(m) = a + b \frac{z_{i-1} + z_i}{2}$, и возможность линейной интерполяции в значительных диапазонах масс водяного пара величины, обратной его функции пропускания $\left(\frac{1}{P_{8-12}(w)} \right)$.

Выполняя интегрирование в выражении (2), получаем формулу для расчета уходящей радиации в окне прозрачности атмосферы 8—12 мк при безоблачном небе

$$F = E_N + \sum_{i=1}^N (E_{i-1} - E_i) \left(a + b \frac{z_{i-1} + z_i}{2} \right) \frac{1}{a_{i,i-1}} \left[1 + \frac{\ln P(w_{i-1}) - \ln P(w_i)}{\ln w_{i-1} - \ln w_i} \right] - (1 - \delta) E_0 a P(w_0).$$

Уходящая радиация при наличии на уровне $z_j (0 \leq j \leq N)$ верхней границы сплошного, непрозрачного в данной области спектра облачного слоя может быть вычислена по аналогичной формуле:

$$F(z_j) = E_N + \sum_{i=j+1}^N (E_{i-1} - E_i) \left(a + b \frac{z_i + z_{i-1}}{2} \right) \frac{1}{a_{i,i-1}} \left[1 - \frac{\ln P(w_{i-1}) - \ln P(w_i)}{\ln w_{i-1} - \ln w_i} \right].$$

Уходящая радиация при положении кромки такого облачного слоя между уровнями z_{i-1} и z_i может быть найдена с помощью линейной интерполяции между значениями $F(z_{i-1})$ и $F(z_i)$.

Для реальных условий, когда одновременно наблюдаются облака нескольких ярусов, уходящее излучение обычно рассчитывается по формуле М. Е. Берлянда

$$F = F_0(1 - n_n - n_{cp} - n_v) + F_n n_n + F_{cp} n_{cp} + F_v n_v,$$

где F_0 , F_n , F_{cp} и F_v — излучение при ясном небе и сплошной облачности нижнего, среднего и верхнего ярусов (соответственно); n_n , n_{cp} и n_v — количество облаков различных ярусов, определенное для наблюдателя, находящегося на внешней границе атмосферы, с учетом частичной прозрачности облаков этих ярусов для потоков излучения в интервале спектра 8—12 мк. Для нахождения n_n , n_{cp} и n_v по наблюдаемому с земной поверхности количеству облаков n_v , n_{cp} и n_n , проще всего воспользоваться известным принципом пропорциональности. Если δ_n , δ_{cp} и δ_v — излучательная способность облаков соответствующих ярусов, имеем следующие формулы:

$$\begin{aligned} n_v &= \frac{\delta_v \bar{n}_v}{1 - n_n - n_{cp}}, \\ n_{cp} &= \frac{\delta_{cp} \bar{n}_{cp}}{1 - n_n} (1 - n_v), \\ n_n &= \delta_n \bar{n}_n (1 - n_v - n_{cp}). \end{aligned}$$

При выводе их предполагалось, что длинноволновое альbedo облаков близко к нулю.

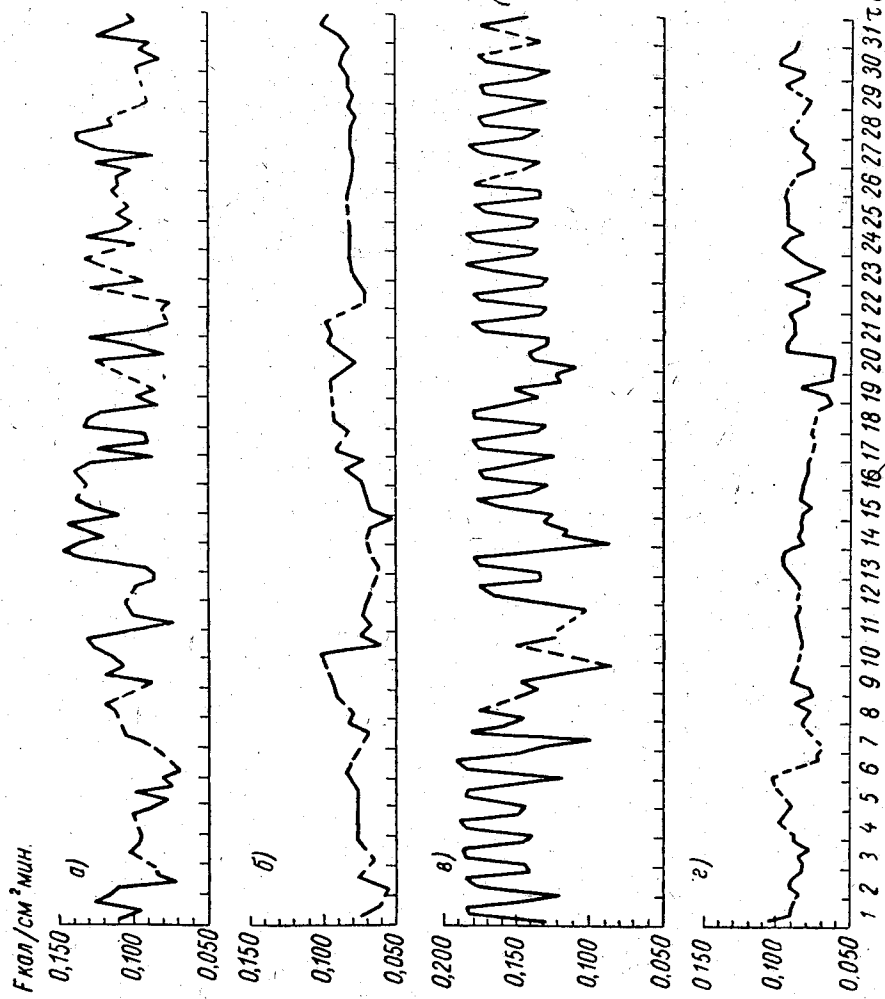


Рис. 3. Уходящее излучение в окне прозрачности атмосферы.

а — Воейково, июль 1957 г.;
 б — Воейково, январь 1959 г.;
 в — Ташкент, июль 1960 г.;
 г — Ташкент, декабрь 1960 г.

Предложенная схема расчета уходящей радиации в окне прозрачности атмосферы 8—12 мк реализована на электронной вычислительной машине «Урал-1» для случая, когда имеются данные об облачности и вертикальном распределении температуры воздуха и эффективного влагосодержания атмосферы.

Величины коэффициентов излучения земной поверхности взяты по данным В. Л. Гаевского [1], хотя эти данные и нуждаются в существенном уточнении. Информация о излучательной способности облаков различных ярусов в настоящее время полностью отсутствует, поэтому в качестве первого приближения взяты значения $\delta_n = \delta_{cp} = 1$, а $\delta_v = 0,5$, используемые обычно при расчетах интегрального уходящего излучения.

Ранее было показано, что коэффициенты c_n , c_{cp} и c_v , численно равные отношению высоты верхней границы облаков нижнего, среднего и верхнего ярусов, к высоте тропопавзы, мало изменяются с широтой и по сезонам. Были найдены их средние значения: $c_n = 0,22$, $c_{cp} = 0,34$, $c_v = 0,85$. Этот вывод использовался в расчетах при отсутствии данных о положении верхней границы облачных слоев.

Результаты расчетов излучения в окне прозрачности атмосферы для зимнего и летнего месяцев над двумя пунктами радиозондирования, находящимися в существенно различных климатических условиях, представлены на рис. 3.

Поскольку ряд важных параметров, входящих в предложенную схему определения уходящей радиации в окне прозрачности атмосферы, известен с недостаточной степенью точности, все результаты расчетов следует рассматривать как ориентировочные.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаевский В. Л. Температура поверхности больших территорий. Труды ГГО, вып. 26 (88), 1951.
2. Anthony R. Atmospheric absorption of solar infra-red radiation. Phys. Rev. 85, 674, 1952.
3. Goody R. M., Roach W. T. Absorption and Emission in the Atmospheric Window from 770—1250 cm^{-1} Quart. Journ. Roy. Met. Soc., vol. 84, No 362, 1958.
4. Manabe S., Möller F. On the Radiative Equilibrium and Heat Balance of the Atmosphere. Montly Weath. Rev. vol. 89, No 12, 1961.
5. Saiedy F. Quart. Journ. Roy. Met. Soc., vol. 87, 1964.
6. Walshaw C. D. Integrated absorption by the 9,6 m band of ozone. Quart. Journ. Roy. Met. Soc., vol. 83, No 357, 1957.

СТАТИЧЕСКИЙ КОНТРОЛЬ АЭРОЛОГИЧЕСКИХ ТЕЛЕГРАММ

Излагается метод статического контроля аэрологических телеграмм, описывается программа контроля для электронной вычислительной машины и приведены результаты машинного контроля для 1000 аэрологических телеграмм.

Среди значений метеорологических элементов, содержащихся в аэрологических телеграммах, всегда имеется некоторая доля ошибочных. Большинство ошибок сравнительно невелико и их можно считать случайными, но есть ошибки настолько большие по величине, что использование их в объективном анализе и численном прогнозе может привести к существенному искажению результата. Эти ошибки будем называть грубыми. Они возникают либо в процессе ручного счета на станции, либо из-за неисправностей технического порядка: плохо работал радиозонд или имелись помехи на каналах связи, по которым передаются телеграммы. Естественно, встает вопрос об отыскании этих ошибок и исправлении или, в крайнем случае, исключении их. Значительные возможности выявления и исправления грубых ошибок кроются в том, что атмосферные движения «квазистатичны», т. е. подчиняются уравнению статики. На этом основан статический контроль, т. е. вертикальный контроль значений геопотенциала и температуры.

Уравнение статики в проекции на вертикаль для слоя между двумя изобарическими поверхностями, предполагая в нем линейное изменение температуры, можно записать в виде

$$H_{i+1} - H_i = A_i + B_i(t_{i+1} + t_i), \quad (1)$$

где H_i , H_{i+1} — значения геопотенциала на соседних изобарических поверхностях в декаметрах, t_i и t_{i+1} — значения температуры в градусах, A_i и B_i — постоянные, свои для каждого слоя.

Вследствие предположения о линейности температуры в слое, уравнения статики будут выполняться неточно, левая часть будет отличаться от правой на некоторую величину δ_i ,

$$\delta_i = H_{i+1} - H_i - A_i - B_i(t_{i+1} + t_i). \quad (2)$$

Специальная проверка показала, что величины δ_i не превосходят по модулю некоторых величин Δ_i , которые будем называть допустимыми невязками, т. е. будем считать значения H_i и H_{i+1} , t_i и t_{i+1} правильными, если уравнение (1) выполняется с точностью до величин δ_i и $|\delta_i| \leq \Delta_i$, если же $|\delta_i| > \Delta_i$, то в уравнении ошибочно одно из этих значений геопотенциала или температуры.

В данной задаче в качестве главных изобарических поверхностей были выбраны поверхности 850, 700, 500, 400, 300, 200, 100 мб. Для

уравнений статики между этими слоями получены значения A_i , B_i и Δ_i , приведенные в табл. 1.

Таблица 1

	Поверхность (мб)						
	850	700	500	400	300	200	100
A_i	155,3	269	178,4	230	324,2	554,2	
B_i	0,285	0,49	0,326	0,42	0,594	1,015	
Δ_i	3	4	3	4	10	12	

Резко увеличенные значения допустимых невязок в двух верхних слоях объясняются тем, что тропопауза часто проходит в слое между поверхностями 300 и 200 мб и тогда предположение о линейности температуры приводит к большим погрешностям.

Рассмотрим различные виды ошибок, встречающихся в аэрологических телеграммах, и возможности их исправления. Причины наличия ошибок в телеграммах могут быть следующими: 1) неисправность радиозонда; 2) неправильно вычислен на станции относительный геопотенциал; 3) искажение значений геопотенциала или температуры на каналах связи.

Ошибки, обусловленные первой причиной, никак не скажутся на уравнении статики, так как значения геопотенциала вычисляются из уравнений статики по температуре, полученной с неисправного радиозонда. Следовательно, ошибки радиозонда нельзя выявить и исправить методом статического контроля.

Пусть теперь на станции неправильно вычислен относительный геопотенциал для k -того слоя. Значения геопотенциальных высот на станции вычисляются «снизу вверх»: сначала вычисляется высота поверхности 1000 мб, для определения высоты поверхности 850 мб к ней добавляют относительный геопотенциал, т. е. толщину слоя 850—1000 мб. Для определения высоты поверхности 700 мб к высоте поверхности 850 мб добавляют толщину слоя 700—850 мб. Подобным образом вычисляются все остальные геопотенциальные высоты. Таким образом, если где-то неправильно вычислена толщина слоя, т. е. относительный геопотенциал, то начиная с этого слоя значения всех геопотенциальных высот будут изменены на величину δH_k^0 .

$$H_{k+1} - H_k = H_k^0 + \delta H_k^0. \quad (3)$$

Если $|\delta H_k^0| > \Delta_i$, то будем иметь ошибку в одном уравнении, для исправления всех значений геопотенциала более высоких поверхностей, начиная с k -той, их нужно уменьшить на величину δH_k^0 .

$$H_{k+i} = H'_{k+i} - \delta H_k^0. \quad (4)$$

И наконец, пусть будет искажено какое-то значение геопотенциала или температуры. Например,

$$H_k' = H_k + \delta H_k, \quad (5)$$

тогда в два соседних уравнения войдет неправильное значение геопотенциала:

$$\begin{aligned} (H_k + \delta H_k) - H_{k-1} &= A_{k-1} + B_{k-1}(t_{k-1} + t_k), \\ H_{k+1} - (H_k + \delta H_k) &= A_k + B_k(t_k + t_{k+1}). \end{aligned} \quad (6)$$

Если бы уравнение (1) выполнялось точно, то невязки в соседних уравнениях были бы одинаковы по величине и противоположны

по знаку. В рассматриваемом же случае, когда имеется ошибка за счет предположения о линейности температуры, будем иметь:

$$\delta H_k = \delta'_{k-1} - \delta_{k-1}; \quad -\delta H_k = \delta'_k - \delta_k, \quad (7)$$

где δ'_{k-1} и δ'_k — действительные значения невязок в уравнениях. Так как речь идет о грубых ошибках, то предполагается, что δH_k значительно больше допустимых невязок Δ_{k-1} и Δ_k . Из равенств (7) следует, что искажение геопотенциала одного уровня приводит к появлению невязок больше допустимых в двух соседних уравнениях, они близки по величине и противоположны по знаку. И наоборот, всегда будем считать, что невязки в соседних уравнениях, противоположные по знаку, вызваны искажением геопотенциала. Считая δ_k и δ_{k-1} небольшими по величине, можно с достаточной точностью исправить геопотенциал на среднее арифметическое невязок:

$$H_k = H'_k + \frac{\delta'_k - \delta'_{k-1}}{2}. \quad (8)$$

Аналогичное рассуждение можно провести для температуры с учетом множителей B_{k-1} и B_k , в этом случае невязки в соседних уравнениях одного знака. Для исправления температуры будем иметь формулу

$$t_k = t'_k + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta'_k}{B_k} + \frac{\delta'_{k-1}}{B_{k-1}} \right). \quad (9)$$

Теперь встает вопрос, как определить тип ошибки, если имеем в уравнении невязку больше допустимой. В качестве критерия для определения ошибки было выбрано следующее положение. Пусть в некотором уравнении невязка δ_k больше допустимой. Если отношение невязок $\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} < 0$ и выполнено условие $\frac{1}{2} < \left| \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \right| < 2$, то ошибка в одном значении геопотенциала H_k ; если $\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} > 0$ и $\frac{1}{2} < \frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \cdot \frac{B_k}{B_{k+1}} < 2$, то ошибка в температуре t_k . Если эти тесты не выполняются, то ошибка в относительном геопотенциале. Так же и по такой же схеме нужно рассмотреть отношение $\frac{\delta_k}{\delta_{k-1}}$. Это можно записать в виде простой схемы, приведенной на рис. 1.

Статический контроль не дает однозначного исправления для ошибочных величин на крайних уровнях. На верхнем уровне имеем двухвариантное исправление:

$$\begin{aligned} H_{100} &= H'_{100} - \delta_6, \\ t_{100} &= t'_{100} + \frac{\delta_6}{B_6}. \end{aligned} \quad (10)$$

На нижнем уровне — трехвариантное исправление:

$$\begin{aligned} H_{850} &= H'_{850} + \delta_1, \\ t_{850} &= t'_{850} + \frac{\delta_1}{B_1} \end{aligned} \quad (11)$$

или, начиная с H_{700} ,

$$H_k = H'_k - \delta_1. \quad (12)$$

В данном случае проводился статический контроль по семи изобразительным поверхностям 850, 700, 500, 400, 300, 200, 100 мб, тогда

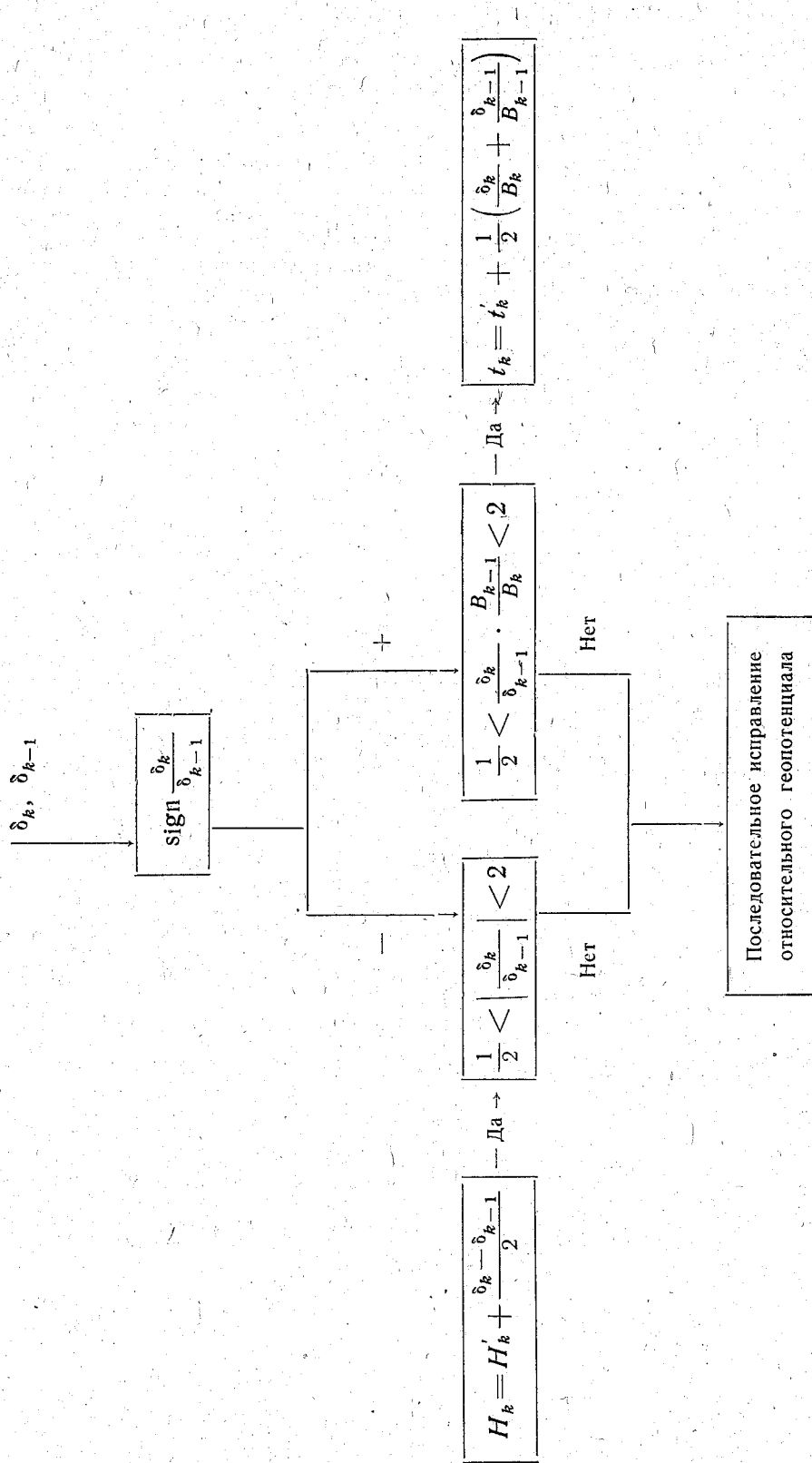


Рис. 1

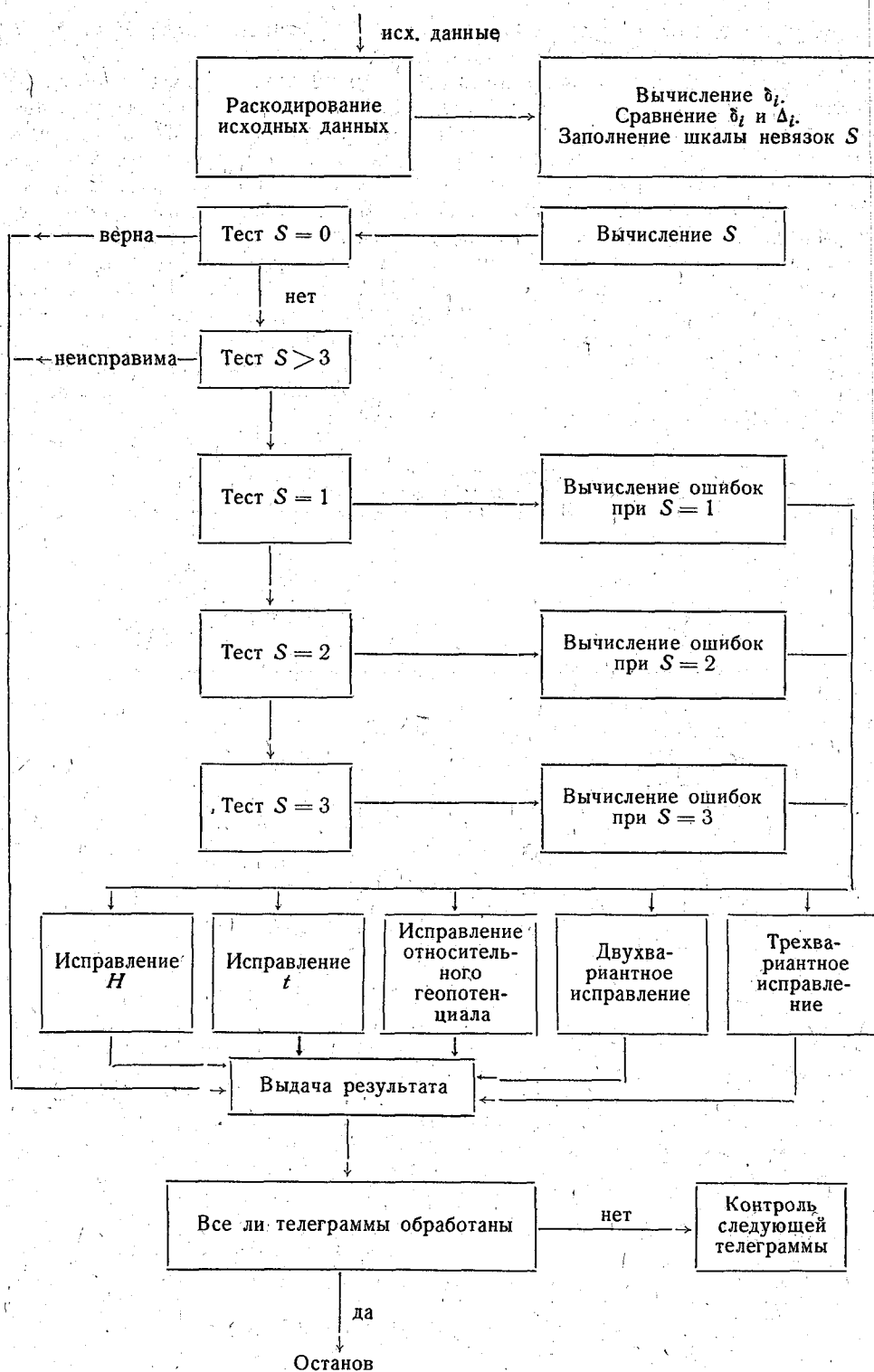


Рис. 2. Блок-схема программы.

система уравнений статики содержала шесть уравнений, значения A_i , B_i и Δ_i для которых приведены в табл. 1.

Телеграмма считалась правильной, если невязки во всех уравнениях были меньше допустимых. Если количество невязок больше допустимых превышало 3, то телеграмма считалась неисправимой. Неисправимой считалась также телеграмма с тремя невязками больше допустимых, если эти невязки располагались подряд или через уравнение. Если же система имела одну, две или три больших невязки, то телеграмма исправлялась. Программа статического контроля была составлена для электронной вычислительной машины и был проведен контроль 1000 аэрологических телеграмм за 9—16/VIII и 23—25/VIII 1962 г. Схема программы приведена на рис. 2. Результаты статического контроля после машинных исправлений проанализированы по картам барической топографии. При анализе были проверены также станции сомнительные, но не исправленные машиной. В некоторых из них оказались ошибочными показания радиозонда.

Таблица 2

Количество аэрологических телеграмм,
содержащих грубые ошибки

Вид ошибки	Количество	Процент от всех телеграмм с ошибками	Процент от общего коли- чества теле- грамм
Одно значение геопотенциала искажено на линиях связи	89	60,2	8,9
Одно значение температуры искажено на линиях связи	21	14,2	2,1
Ошибочно вычислено на стан- ции одно значение относи- тельного геопотенциала	8	5,4	0,8
Два значения геопотенциала искажено на линиях связи	1	0,6	0,1
Одно значение H и одно зна- чение t искажено на линиях связи	3	2,0	0,3
Ошибка радиозондирования	26	17,6	2,6
Сумма	148	100	14,8

Из табл. 2 видно, что телеграммы с грубыми ошибками составляют почти 15% всего количества телеграмм, и статический контроль исправляет более 80% грубых ошибок, почти все остальные грубые ошибки являются ошибками радиозондирования. Среди проверенных 1000 телеграмм не оказалось телеграмм с грубыми ошибками в более, чем трех уравнениях, а ошибки в двух и трех уравнениях редки, причем одно из этих уравнений, как правило, является крайним. Большая часть ошибок приходится на долю геопотенциала, возможные причины этого высказаны в статье [1].

Из табл. 2 видно, что использование статического контроля может исправить значительное число телеграмм с грубыми ошибками или, в крайнем случае, отбраковать неверные телеграммы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. О статическом контроле аэрологических телеграмм. «Метеорология и Гидрология», № 9, 1963.

О ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ ПРИ АНАЛИЗЕ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Получены формулы для оценки среднего квадрата конечной разности и средней квадратической ошибки ее определения по данным анализа поля метеорологического элемента. Выполнены численные эксперименты, позволившие выявить зависимость указанных величин от густоты сети станций, величины шага дифференцирования, статистической структуры поля метеорологического элемента и от некоторых других факторов.

1. При анализе и прогнозе метеорологических полей важную роль играют дифференциальные характеристики этих полей, такие, как географический ветер, вихрь скорости, температурная адвекция и др. В настоящее время уже трудно встретить синоптическое исследование, в котором не привлекалась бы к рассмотрению какая-либо из перечисленных и других дифференциальных характеристик метеорологических полей. Что касается численных методов прогноза, то в них указанные дифференциальные характеристики играют основную роль. При этом, разумеется, во всех случаях производные, через которые определяются эти величины, приближенно заменяются соответствующими отношениями конечных разностей.

В связи со сказанным представляет большой интерес вопрос о точности определения дифференциальных характеристик метеорологических полей. Ошибки в наших сведениях об этих характеристиках определяются двумя обстоятельствами — приближенностью замены производных отношениями конечных разностей и неточностями вычисления самих этих конечных разностей. В данной работе рассматривается лишь второе обстоятельство, иначе говоря, анализируется точность определения конечных разностей значений метеорологического элемента безотносительно к вопросу о том, насколько точно эта конечная разность описывает собой производную.

При оценке точности определения конечно-разностных характеристик важно иметь в виду, что в качестве исходных данных для вычисления этих характеристик используются не непосредственные наблюдения на станциях, а результаты построения поля метеорологического элемента по данным наблюдений, или, как принято говорить, результаты анализа этого поля. При этом результаты анализа в различных точках, используемые для вычисления конечной разности, находятся по одной и той же или приблизительно одной и той же совокупности данных наблюдений. По этой причине корреляция между результатами анализа в различных точках выше той, которая определяется естественной пространственной изменчивостью метеорологического элемента. По этой же причине погрешности анализа в различных точках

не независимы друг от друга, а коррелированы между собой тем теснее, чем меньше расстояние между точками.

Нетрудно указать, как сказываются эти два эффекта на точности определения конечных разностей. Тесная корреляция между самими результатами анализа приводит, очевидно, к уменьшению абсолютных величин конечных разностей по сравнению с их реальными значениями. Аналогичным образом следствием корреляции между ошибками анализа является уменьшение абсолютных ошибок определения конечных разностей по сравнению с теми ошибками, которые имели бы место, если бы ошибки анализа были не коррелированы. Последний факт полезен, так как он приводит к повышению точности конечных разностей. Первый же факт приводит к вредному эффекту — систематическому занижению средних абсолютных (или средних квадратических) значений конечных разностей.

Для того чтобы выяснить, насколько существенно влияние упомянутых фактов, необходимо прибегнуть к количественным оценкам. Такие оценки можно было бы выполнить путем соответствующей обработки массовых данных наблюдений и анализа. Однако если имеются сведения по статистической структуре рассматриваемого метеорологического элемента и по методике анализа полей этого элемента, то точность определения конечных разностей может быть оценена чисто теоретическим путем. Этот путь и будет использован ниже. При этом будем для определенности считать, что анализ поля сводится к интерполяции значений метеорологического элемента в узлы некоторой регулярной сетки.

2. Любая конечно-разностная характеристика поля метеорологического элемента f представляет собой линейную комбинацию значений f в нескольких точках:

$$A = \sum_{k=1}^m b_k f_k, \quad (1)$$

причем

$$\sum_{k=1}^m b_k = 0. \quad (2)$$

Представим f в виде суммы трех величин — среднего климатологического значения (нормы) $\bar{f}$, истинного отклонения от нормы f' и ошибки δ , с которой известна величина f ,

$$f = \bar{f} + f' + \delta. \quad (3)$$

Согласно (3) и (1),

$$A = \sum_{k=1}^m b_k (\bar{f}_k + f'_k + \delta) = \bar{A} + A' + \alpha. \quad (4)$$

Здесь

$$\bar{A} = \sum_{k=1}^m b_k \bar{f}_k \quad (5)$$

представляет собой среднее климатологическое значение величины A ,

$$A' = \sum_{k=1}^m b_k f'_k \quad (6)$$

— фактическое отклонение ее от нормы и

$$\alpha = \sum_{k=1}^m b_k \delta_k \quad (7)$$

— ошибку, с которой известна величина A .

При этом поскольку все $\bar{f}_k' = 0$ и все $\bar{\delta}_k = 0$, то $\bar{A}' = \bar{\alpha} = 0$.

Рассмотрим теперь средние квадраты величин $\bar{A}$, A' и α :

$$\overline{\bar{A}^2} = \bar{A}^2 = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l \bar{f}_k \bar{f}_l, \quad (8)$$

$$\overline{A'^2} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l \overline{f_k' f_l'}, \quad (9)$$

$$\overline{\alpha'^2} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l \overline{\delta_k \delta_l}. \quad (10)$$

Величина $\bar{A}^2$ представляет собой квадрат среднего климатологического значения конечной разности A . Так как поле норм более гладко, чем реальные поля, то эта величина обычно существенно меньше среднего квадрата $\bar{A}'^2$ отклонения конечной разности от нормы. Однако так бывает далеко не всегда. Как показано в работе [3], градиенты норм, связанные с широтным ходом температуры, струйными течениями и т. п., могут приводить к тому, что величины $\bar{A}^2$ для некоторых конечных разностей окажутся сравнимыми с $\bar{A}'^2$. Вместе с тем при оценке точности определения конечных разностей основной интерес представляют их переменные части. Поэтому в дальнейшем величина $\bar{A}^2$ рассматриваться не будет.

Учтем теперь, что вместо данных наблюдений мы пользуемся результатами интерполяции со станций в узлы регулярной сетки. Это означает, что взамен реальных отклонений от норм f' мы имеем дело с интерполированными отклонениями, которые обозначим $\tilde{f}'$. В качестве δ будут фигурировать ошибки, с которыми известны эти проинтерполированные значения. Эти ошибки складываются под влиянием ошибок исходной информации на станциях и ошибок, вносимых при интерполяции. Ради краткости будем называть величины δ ошибками интерполяции. С этими оговорками можно оставить формулу (10) неизменной, а формулу (9) переписать в виде

$$\overline{A'^2} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l \overline{\tilde{f}_k' \tilde{f}_l'}. \quad (11)$$

Удобно еще нормировать полученные выражения, а именно разделить их на дисперсию рассматриваемого метеорологического элемента

$$m_f(0) = \overline{f_k'^2}. \quad (12)$$

Тогда получим

$$\frac{\overline{A'^2}}{m_f(0)} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l \tilde{\rho}_{kl}, \quad (13)$$

$$\frac{\overline{\alpha'^2}}{m_f(0)} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l \varepsilon_{kl}, \quad (14)$$

где обозначено

$$\mu_{kl} = \frac{1}{m_f(0)} \overline{\tilde{f}'_k \tilde{f}'_l}, \quad (15)$$

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{m_f(0)} \overline{\delta_k \delta_l}. \quad (16)$$

Таким образом, для оценок средних квадратических значений конечно-разностных производных и ошибок их определения необходимо уметь определять величины μ_{kl} и ε_{kl} , описывающие корреляционную связь между результатами анализа в различных узлах регулярной сетки и между ошибками анализа в этих узлах.

3. В качестве исходной информации для интерполяции в узлы сетки можно рассматривать величины отклонений от норм f'_i ($i=1, 2, \dots, n$) в некотором количестве пунктов (станций). Тогда при любом методе интерполяции, линейном относительно наблюдаемых значений, величины $\tilde{f}'_k$ и $\tilde{f}'_l$ определяются по формулам:

$$\tilde{f}'_k = \sum_{i=1}^n p_{ik} f'_i, \quad (17)$$

$$\tilde{f}'_l = \sum_{i=1}^n p_{il} f'_i, \quad (18)$$

где p_{ik} и p_{il} — интерполяционные веса.

Подставляя (17) и (18) в (15), получим

$$\mu_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ik} p_{il} \overline{\frac{f'_i f'_j}{m_f(0)}}. \quad (19)$$

Но величины

$$\overline{\frac{f'_i f'_j}{m_f(0)}} = \mu_{ij} \quad (20)$$

представляют собой значения нормированной корреляционной функции для измеренных величин элемента f . Эти значения совпадают со значениями нормированной корреляционной функции для истинных величин элемента, если $i \neq j$. В противном случае ($i=j$) они больше на средний квадрат ошибки наблюдений в рассматриваемой точке.

Подстановка (20) в (19) дает

$$\mu_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ik} p_{jl} \mu_{ij}. \quad (21)$$

Аналогичным образом получим из (19) и (18):

$$\delta_k = f'_k - \tilde{f}'_k = f'_k - \sum_{i=1}^n p_{ik} f'_i,$$

$$\delta_l = f'_l - \tilde{f}'_l = f'_l - \sum_{i=1}^n p_{il} f'_i,$$

откуда вследствие (16) и (20)

$$\varepsilon_{kl} = \mu_{kl} - \sum_{i=1}^n p_{ik} \mu_{il} - \sum_{j=1}^n p_{jl} \mu_{jk} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ik} p_{jl} \mu_{ij}. \quad (22)$$

Комбинируя (21) и (22), можно также написать

$$\varepsilon_{kl} = \mu_{kl} - \sum_{i=1}^n p_{ik} \mu_{il} - \sum_{j=1}^n p_{jl} \mu_{jk} + \tilde{\mu}_{kl}. \quad (23)$$

Формулы (17) — (23) верны независимо от того, какой метод интерполяции используется, лишь бы он был линейным относительно наблюдаемых значений. Предположим теперь, что производится оптимальная интерполяция [1], т. е. такая, при которой интерполяционные веса отыскиваются на основании требования минимизации средних квадратов ошибок интерполяции ε_{kk} и ε_{ll} . Это требование приводит к системам уравнений для определения весов p_{ik} и p_{il} :

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij} p_{jk} = \mu_{ik}, \quad (24)$$

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij} p_{jl} = \mu_{il}. \quad (25)$$

Подставляя (24) и (25) в (21), легко получить, что в случае оптимальной интерполяции

$$\sum_{i=1}^n p_{ik} \mu_{il} = \sum_{i=1}^n p_{il} \mu_{ik} = \tilde{\mu}_{kl}, \quad (26)$$

а согласно (23) и (26),

$$\varepsilon_{kl} = \mu_{kl} - \tilde{\mu}_{kl}. \quad (27)$$

В частности, при $k=l$ получаем известную формулу для меры ошибки оптимальной интерполяции [1]

$$\varepsilon_{kk} = 1 - \sum_{i=1}^n p_{ik} \mu_{ik}. \quad (28)$$

Формулы (26) и (27) позволяют легко вычислять величины μ_{kl} и ε_{kl} , если известна корреляционная функция рассматриваемого элемента и взаиморасположение пунктов наблюдения и узлов регулярной сетки. Подставляя вычисленные по этим формулам значения μ_{kl} и ε_{kl} в формулы (13) и (14), можно оценить точность определения любой конечной разностной характеристики. При этом существенно, что такие оценки выполнимы теоретическим путем, без привлечения данных наблюдений.

Анализ полученных соотношений позволяет сделать одно заключение общего характера. Складывая величины $\overline{A'^2}$ и $\overline{\alpha^2}$, получим, согласно (13) и (14),

$$\frac{\overline{A'^2} + \overline{\alpha^2}}{m_f(0)} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l (\tilde{\mu}_{kl} + \varepsilon_{kl}) \quad (29)$$

или, вследствие (27),

$$\frac{\overline{A'^2} + \overline{\alpha^2}}{m_f(0)} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l \mu_{kl}. \quad (30)$$

Очевидно, что правая часть выражения (30) представляет собой средний квадрат конечной разности (точнее, средний квадрат переменной части конечной разности, отнесенный к дисперсии рассматриваемого

элемента), оцененный в предположении, что в узлах сетки имеются данные наблюдений. Таким образом, формула (30) показывает, что средний квадрат конечной разности, полученный по данным интерполяции, меньше истинного значения среднего квадрата этой конечной разности на средний квадрат ошибки его определения.

С помощью выведенных формул была выполнена серия численных опытов по оценке средних квадратических значений и ошибок определения конечных разностей первого порядка. Вычисления производились для двух идеализированных схем расположения станций и узлов сетки, показанных на рис. 1. На этих схемах кружочками обозначены станции, а крестиками — узлы сетки. Принималось, что узлы сетки и станции расположены регулярно и что на значение метеорологического элемента

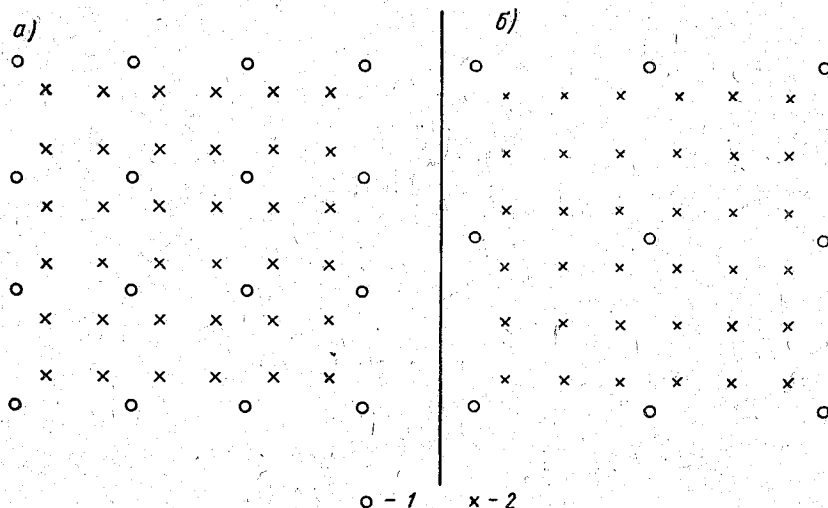


Рис. 1. Расположение станций 1 и узлов сетки 2 в первой (а) и второй (б) схемах.

в каждом узле влияют его значения на всех станциях. Расположение узлов сетки в обеих схемах одинаково, а различна лишь густота сети станций — в первой схеме имеется 16 станций, а во второй на такой же территории — лишь 9 станций. Помимо густоты сети станций, в численных опытах варьировалась также корреляционная функция и расстояние R между соседними станциями. Использовались две корреляционные функции геопотенциала — из работы [4] (функция 1) и из работы [2] (функция 2). Применительно к каждой схеме использовались три значения расстояния между соседними узлами: $d_1=150$ км, $d_2=300$ км и $d_3=600$ км. При этом расположение станций относительно узлов не менялось с изменением d .

Для облегчения вычислений была составлена программа для электронной вычислительной машины большого быстродействия. Исходными данными для вычислений по этой программе являлись координаты станций, координаты узлов и корреляционная функция, задаваемая таблицей. Между табличными значениями корреляционной функции допускалась линейная интерполяция. Кроме того, учитывалось наличие случайных ошибок наблюдения, которые характеризовались средней квадратической ошибкой. Программа предусматривала автоматическое построение уравнений для определения интерполяционных весов p_{ik} ,

решение этих уравнений методом квадратного корня и последующее вычисление и выдачу на печать матриц величин μ_{kl} и ε_{kl} .

Дальнейшие вычисления производились вручную и сводились к оценке, применительно к различным парам узлов, величин C и D . Величина C представляет собой средний квадрат конечной разности, отнесенный к дисперсии самого элемента и умноженный на квадрат шага дифференцирования. Величина D есть результат таких же операций над средним квадратом ошибки определения конечной разности.

Таким образом, отношение $\frac{D}{C}$ представляет собой средний квадрат относительной ошибки определения конечной разности.

Вычисления, произведенные для разных пар узлов, расположенных на одном и том же расстоянии r друг от друга, дают, вообще говоря, различные результаты в зависимости от взаимного расположения узлов

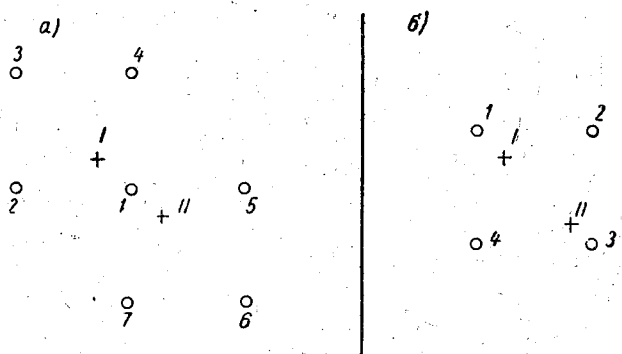


Рис. 2. Схемы взаиморасположения узлов и влияющих станций.

и станций. Именно если среди станций, оказывающих основное влияние на каждый узел, много общих для обоих узлов, то величины C и D получаются малыми. В противоположном случае эти величины существенно больше.

Рассмотрим с этой точки зрения схемы, приведенные на рис. 2. На схеме рис. 2а общей влияющей станцией для узлов I и II является почти исключительно станция 1. В остальном же значение элемента в узле I определяется главным образом его значениями на станциях 2, 3 и 4, а значение в узле II — значениями на станциях 5, 6 и 7. По этой причине как сами проинтерполированные значения в узлах I и II, так и ошибки их определения коррелируют сравнительно слабо, следствием чего и являются сравнительно большие значения величин C и D для этой пары узлов. Иначе обстоит дело с парой узлов, изображенных на схеме рис. 2б. В этом случае значения в обоих узлах определяются в основном величинами в одном и том же «комплексе» влияющих станций, а именно на станциях 1, 2, 3 и 4. Вследствие этого имеет место тесная корреляция как между ошибками интерполяции в эти узлы, так и между самими проинтерполированными величинами. Первое приводит к малости величин D , а второе — к малости величин C .

Последнее обстоятельство особенно существенно. Оно означает, что при интерполяции в густую сетку узлов по данным редкой сети станций, наряду с небольшими случайными ошибками в конечно-разностных характеристиках, будут получаться значительные систематические

ошибки сглаживания. Эти ошибки сводятся к тому, что абсолютные величины конечных разностей по данным такого анализа получатся в среднем существенно заниженными по сравнению с их действительными значениями. Вполне понятно, что эти ошибки сглаживания будут, вообще говоря, тем больше, чем выше порядок разности. Столь же ясно, что такого рода эффект присущ не только объективному анализу, выполняемому посредством оптимальной интерполяции, но и любому другому способу анализа, как объективному, так и субъективному,

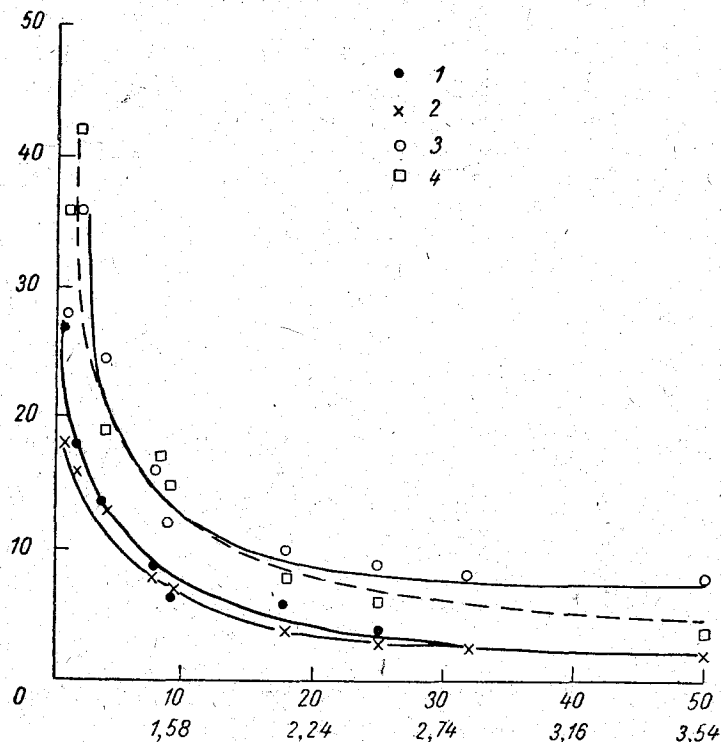


Рис. 3. Зависимость относительной ошибки первой конечной разности от отношения шага дифференцирования к шагу сетки.

1) $R=300$, $d=150$, первая схема; 2) $R=600$, $d=300$, первая схема; 3) $R=1200$, $d=600$, первая схема; 4) $R=300$, $d=100$, вторая схема.

выполняемому путем проведения изолиний. Отличие состоит лишь в том, что в случае оптимальной интерполяции эффект сглаживания легче поддается количественной оценке.

Наряду с особенностями, связанными с локальным положением узлов по отношению к станциям, отчетливо проявляются общие закономерности, связанные с величиной шага дифференцирования и густотой сети станций. На рис. 3 представлена в графической форме зависимость квадрата относительной ошибки первой конечной разности $\frac{D}{C}$ от отношения

$\frac{r}{d}$ для первой корреляционной функции. Кривые приведены для обеих схем при $R=300$ км и только для схемы рис. 2а при $R=600$ км и $R=1200$ км.

Все кривые показывают убывание относительной ошибки с увеличением шага дифференцирования. Это вполне естественно, поскольку

$\frac{D}{C}$ характеризует ошибку вычисления конечной разности независимо от того, с какой точностью конечная разность представляет производную по соответствующему направлению. Сопоставление кривых для первой и второй схем при $R=300$ км иллюстрирует уменьшение точности вычисления конечно-разностных характеристик при уменьшении густоты сети станций. Среднее увеличение относительной ошибки в первых конечных разностях при переходе от первой схемы ко второй составляет около 80% ошибки для первой схемы.

Сравнение кривых для первой схемы, соответствующих разным значениям d , не обнаруживает отчетливой зависимости относительных ошибок от d при его малых значениях, хотя имеется некоторая тенденция к уменьшению $\frac{D}{C}$ при переходе от $d=150$ км к $d=300$ км. Переход от $d=300$ км к $d=600$ км сопровождается закономерным ростом $\frac{D}{C}$. В общем можно утверждать, что одновременное увеличение в равных отношениях расстояний между функциями и расстояний между узлами регулярной сетки сравнительно слабо влияет на точность вычисления конечно-разностных характеристик при густой сети станций и уменьшает эту точность при редкой сети.

Анализируя порознь зависимость величин C и D от отношения $\frac{r}{d}$, можно видеть, что обе эти величины увеличиваются с ростом указанного соотношения, т. е. с увеличением шага дифференцирования, но C увеличивается значительно быстрее, чем D , что и приводит к уменьшению отношения $\frac{D}{C}$, отмеченному выше. Так, при увеличении $\frac{r}{d}$ в $5\sqrt{2} \approx 7$ раз C увеличивается более чем в 30 раз, а D — лишь примерно в 3 раза, как это видно из табл. 1. Таким образом, C растет почти пропорционально r^2 , это означает, что средний квадрат разделенной конечной разности сравнительно медленно убывает с ростом шага дифференцирования, в то время как средний квадрат ошибки разделенной разности быстро уменьшается с ростом шага — почти пропорционально r^{-2} . Этот вывод также иллюстрируется данными табл. 1.

Таблица 1

Сопоставление результатов, полученных для двух корреляционных функций
(схема рис. 2 а, $R = 300$, $d = 150$)

$\frac{r^2}{d^2}$	Функция (1)			Функция (2)		
	C	D	$\frac{D}{C}$ (‰)	C	D	$\frac{D}{C}$ (‰)
1	0,01728	0,00472	27	0,02764	0,00736	27
2	0,03279	0,00580	18	0,04311	0,02618	21
4	0,06322	0,00880	14	—	—	—
8	0,12130	0,01080	9	0,14448	0,02408	17
9	0,18422	0,01178	6	0,15758	0,02616	17
18	0,24778	0,01352	6	0,27904	0,02636	9
25	0,32474	0,01226	4	0,36018	0,02532	7
32	0,39336	0,01260	3	0,43322	0,02618	6
50	0,54444	0,01324	2	0,60230	0,02584	4

Наконец, в табл. 1 приведен пример сопоставления результатов, полученных для двух корреляционных функций. Из этих данных можно

видеть, что вторая функция дает завышенные оценки относительных ошибок конечных разностей по сравнению с первой функцией, хотя характер их зависимости от шага дифференцирования и других факторов сохраняется. Возможно, это завышение связано с тем, что вторая корреляционная функция не является дважды дифференцируемой в нуле, что требуется для существования первой производной.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г ан д и н Л. С. Об оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 114, 1960.
2. Г ан д и н Л. С., Кузнецова Т. И. О структуре полей давления и ветра в средней тропосфере при различных формах циркуляции. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
3. Ю д и н М. И. Соотношения элементов крупномасштабных атмосферных движений и некоторые прогностические следствия. Материалы совещания координационной комиссии по численным методам прогноза. Гидрометеиздат, 1961.
4. Ю д и н М. И. Некоторые закономерности структуры поля геопотенциала. Труды ГГО, вып. 121, 1961.

УХОДЯЩЕЕ ИЗЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ — АТМОСФЕРА

Разработан метод определения уходящего длинноволнового излучения системы земля — атмосфера. Исследуется пространственно-временное распределение его средних месячных и годовых сумм.

Уходящее излучение системы земля — атмосфера является важной характеристикой ее энергетического состояния. Интерес к исследованию этой величины возник в начале столетия и особенно возрос за последние годы в связи с появлением средств, позволяющих производить измерения потоков радиации на больших высотах в атмосфере.

Впервые средняя интенсивность излучения Земли в мировое пространство была получена из условия равенства нулю радиационного баланса планеты. Аббот и Фоуль [15] на основании многолетних наблюдений, произведенных в Астрофизической обсерватории Смитсоновского института (США), определили солнечную постоянную, и, оценив среднее значение планетарного альбедо Земли, нашли, что система земля — атмосфера излучает в среднем $0,33 \text{ ккал/см}^2 \text{ мин.}$, что соответствует температуре «черного излучателя» $T = 256^\circ \text{ К}$. Поскольку такая температура имеет место на высоте 4 км, Аббот и Фоуль пришли к важному выводу, что излучающей субстанцией является находящийся в тропосфере водяной пар, а отчасти и углекислый газ.

Первый метод определения уходящего излучения по данным о средних значениях основных метеорологических элементов разработал Симпсон [28]. Он успешно преодолел трудности интегрирования уравнений переноса тепловой радиации в атмосфере, обусловленные известной сложностью спектра поглощения водяного пара. Основой этого метода является довольно упрощенная схематизация спектра поглощения водяного пара, заключающаяся в том, что в определенных диапазонах длин волн водяной пар считается прозрачным, полупрозрачным или непрозрачным (последнее при влагосодержании слоя не менее $0,03 \text{ г/см}^2$). Полагая влагосодержание изотермической стратосферы не менее $0,03 \text{ г/см}^2$, Симпсон находит, что в интервале длин волн с полной прозрачностью через верхнюю границу атмосферы уходит излучение «черного тела» при температуре земной поверхности; в интервале длин волн с полным поглощением — излучение «черного тела» при температуре стратосферы; в интервале полупрозрачности — среднее между излучением при температурах подстилающей поверхности и стратосферы. При наличии сплошной облачности роль земной поверхности играет верхняя граница облаков. Если известно уходящее излучение при ясном небе F_0 и при пасмурном F_n , то действительное излучение определяется по формуле

$$F = F_0(1 - n) + F_n n,$$

где n — облачность в долях единицы.

Метод Симпсона отличается большой физической ясностью при незначительной трудоемкости расчетов, вследствие чего он используется различными авторами вплоть до настоящего времени лишь с несущественным уточнением границ выделенных спектральных областей [1].

Выполнив расчеты уходящей радиации для различных частей земного шара в течение отдельных месяцев, Симпсон выяснил ряд важных закономерностей ее пространственно-временного распределения. Результаты расчетов Симпсона представлены в виде карт средней интенсивности уходящего излучения для двух месяцев (января и июля), а также графиков широтного хода этой величины для всех 12 месяцев и года.

Альбрехт [16] использует несколько более грубую схематизацию спектра поглощения водяного пара. Он приходит к выводу о существовании «верхнего эмиссионного слоя», расположенного на высоте 8—10 км, физическими условиями которого определяется уходящее излучение. Но в последующие годы различные исследователи и, прежде всего, Меллер [9, 25] при тщательных расчетах такого слоя не обнаружили.

Исходя из более реальной физической модели атмосферы, Баур и Филиппс [18] также проинтегрировали уравнения переноса радиации. Однако предложенный этими авторами метод определения уходящего излучения был применен только к расчетам широтного распределения его интенсивности для двух месяцев (января, июля) северного полушария, и, как указывает К. Я. Кондратьев [9], расчеты эти в такой же мере ориентировочны, как и у предыдущих исследователей, поскольку Баур и Филиппс нерационально усложнили методику и ввели ряд эмпирических параметров, плохо известных из опыта.

Параллельно развиваются графические методы определения потоков теплового излучения в атмосфере. Появляются радиационные номограммы Мюгге-Меллера, Дмитриева, Эльзассера, Ямамото, Шехтер, Нийлиск и др. В основе радиационных номограмм лежит понятие интегральной функции пропускания атмосферных газов, при построении которой производится интегрирование по всем длинам волн. Интегрирование же по вертикальной координате выполняется графически, что позволяет надежно учесть особенности стратификации метеорологических элементов в атмосфере. К. Я. Кондратьев и О. П. Филиппович [8] на основании данных о распределении температуры и влажности воздуха по высоте рассчитали уходящее излучение по номограммам Мюгге-Меллера, Дмитриева, Эльзассера и Шехтер. Результаты сравнивались с аналогичными расчетами Симпсона, Альбрехта, Баура и Филиппса, Багрова.

Получив независимым способом величину солнечной радиации, поглощенной системой земля — атмосфера, Кондратьев и Филиппович смогли в качестве критерия точности определения уходящего излучения использовать условие равенства нулю радиационного баланса планеты в среднем. Оказалось, что наилучшие результаты получаются при использовании номограммы Мюгге-Меллера, Шехтер и Эльзассера.

Известные расчеты широтного хода уходящего излучения над северным полушарием Хаутона [22] для среднегодовых условий и Д. Лондона [25] для основных четырех сезонов выполнены с помощью радиационной номограммы Эльзассера. В этих работах особенно серьезное внимание уделено созданию модели строения атмосферы северного полушария.

В ряде работ Меллера и его сотрудников, в частности [23], для определения уходящего излучения, отождествляемого с восходящим потоком

радиации на поверхности 300 мб, используются эмпирические соотношения, полученные на основе расчетов, выполненных с помощью радиационной номограммы.

Существенный вклад в развитие теоретических методов расчета уходящего излучения внес М. Е. Берлянд. Исходя из схематизации спектра поглощения атмосферных газов по Кондратьеву и предполагая линейную стратификацию температуры воздуха в тропосфере при экспоненциальном законе распределения плотности водяного пара с высотой, М. Е. Берлянд из решения приближенных уравнений переноса радиации получил формулы для уходящего излучения, позволяющие учесть облачность различных ярусов. Эти формулы использовались Т. Г. Берлянд [5] при исследовании теплового баланса атмосферы северного полушария и дали хорошие результаты.

Развивая идеи М. Е. Берлянда и используя современные данные об интегральной функции пропускания атмосферных газов, автору удалось получить более простые формулы для уходящего излучения.

Исходим из системы приближенных дифференциальных уравнений, описывающих распространение потоков длинноволновой радиации в атмосфере:

$$\frac{dA_i}{dz} = k_i \rho (A_i - U_i), \quad (1)$$

$$\frac{dB_i}{dz} = k_i \rho (U_i - B_i), \quad (2)$$

где индекс i означает принадлежность к спектральному интервалу $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$, A_i — поток радиации из верхней полусферы, B_i — поток радиации из нижней полусферы, U_i — излучение черного тела в полусферу, k_i — коэффициент поглощения для диффузной радиации, ρ — плотность поглощающей субстанции, z — высота.

Суммирование по всем длинам волн дает интегральные потоки радиации:

$$\begin{aligned} \sum_i A_i &= A, \\ \sum_i B_i &= B, \\ \sum_i U_i &= U = \sigma T^4, \end{aligned} \quad (3)$$

где T — абсолютная температура воздуха, σ — постоянная Стефана—Больцмана.

Вводим коэффициенты p_i , показывающие, какая часть излучения черного тела приходится на i -тый спектральный интервал:

$$p_i = \frac{U_i}{U}, \quad \sum_i p_i = 1. \quad (4)$$

Ставим граничные условия:

$$z \rightarrow \infty, A_i \rightarrow 0; \quad (5)$$

$$z=0, B_i = \delta p_i U_0 + (1 - \delta) A_{i0}, \quad (6)$$

где δ показывает, насколько излучение земной поверхности отличается от излучения черного тела, $U_0 = U(z=0)$, $A_{i0} = A_i(z=0)$.

Уходящее излучение F_i , согласно определению, находится из условия

$$F_i = (B_i - A_i) \text{ при } z \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Из решения уравнения (2) при условиях (4)–(7) получаем для уходящего излучения

$$F_i = \int_0^\infty k_i p_i U e^{-\int_z^\infty k_i \rho dz} \rho dz + e^{-\int_0^\infty k_i \rho dz} [\delta p_i U_0 + (1 - \delta) A_{i0}]. \quad (8)$$

Оценки Кондратьева [9] показывают, что при решении задач, подобных данной, можно пренебрегать зависимостью k_i и p_i от температуры. Для учета зависимости коэффициентов поглощения k_i от давления, как это обычно принято, полагаем $k_i = k_i' \varphi(p)$, где $\varphi(p)$ — некоторая функция давления p . Вводим понятие эффективной (или приведенной) массы поглощающей субстанции

$$dm = \varphi(p) \rho dz, \quad m = \int_z^\infty \varphi(p) \rho dz, \quad m_0 = \int_0^\infty \varphi(p) \rho dz. \quad (9)$$

Преобразуем (8), используя формулу интегрирования по частям,

$$F_i = p_i U_\infty - \int_{m_0}^0 \frac{dU}{dm} p_i e^{-k_i' m} dm + e^{-k_i' m_0} \frac{1 - \delta}{\delta} E_i, \quad (10)$$

где $E_i = \delta (p_i U_0 - A_{i0})$ — i -тая составляющая эффективного излучения земной поверхности.

Производя суммирование по всем длинам волн и возвращаясь к переменной z , получаем выражение для интегрального излучения

$$F = U_\infty - \int_0^\infty \frac{dU}{dz} \sum_i p_i e^{-k_i' m(z)} dz + \Delta F, \quad (11)$$

где $\Delta F = \frac{1 - \delta}{\delta} \sum_i E_i e^{-k_i' m_0}$ представляет собой поправку к интегральному уходящему излучению, обусловленную отличием излучательной способности земной поверхности δ от единицы. Количественные оценки показывают, что ΔF составляет не более 3% величины F . Это меньше относительной погрешности определения F . Поэтому в дальнейшем будем исходить из предположения, что земная поверхность — «черный» излучатель и $\Delta F = 0$.

Легко увидеть, что сумма, находящаяся под интегралом в выражении (11), есть интегральная функция пропускания.

Обозначив

$$\sum_i p_i e^{-k_i' m} = P(m), \quad (12)$$

получаем

$$F = U_\infty - \int_0^\infty \frac{dU}{dz} P(m) dz. \quad (13)$$

Наиболее надежным образом, на основании современных спектроскопических исследований, интегральная функция пропускания атмосферы для диффузной радиации построена в работах К. Я. Кондратьева и

Х. Нийлиск [11, 24]. Функция пропускания по Кондратьеву и Нийлиск задана в табличной форме и определяется тремя входными параметрами — эффективными массами основных поглощающих длинноволновую радиацию субстанций в земной атмосфере — водяного пара w , углекислого газа l и озона m . Полученное решение легко может быть обобщено на случай нескольких поглощающих субстанций. Однако для конкретной задачи — определения уходящего излучения системы земля — атмосфера — достаточно лишь приближенно учесть поглощение радиации углекислым газом и озоном и свести функцию пропускания к зависимости только от одного параметра — приведенной массы водяного пара и таким образом облегчить интегрирование в выражении (13). Аналогично поступали ранее К. Я. Кондратьев [9] и Ф. Н. Шехтер [13], но при этом были получены функции пропускания, соответствующие задаче определения нисходящих потоков радиации на уровнях, близких к земной поверхности.

Выберем для средних условий законы изменения с высотой эффективных масс поглощающих субстанций.

Принимая для CO_2 постоянство объемной концентрации (0,03%) вплоть до больших высот, согласно [9], имеем

$$\rho_c = \rho_{c,0} e^{-az}, \quad (14)$$

где ρ_c и $\rho_{c,0}$ — плотность углекислого газа на некоторой высоте z и вблизи земной поверхности ($\rho_{c,0} = 5,6 \cdot 10^{-7}$ г/см³), a — параметр, имеющий среднее значение $1,34 \cdot 10^{-6}$ 1/см.

В основе формулы (14) лежит барометрическая формула

$$p = p_0 e^{-az}, \quad (15)$$

где $p_0 = p(z=0)$.

Поскольку для CO_2 $\varphi(p) = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,8}$ (см. [24]), из (9), (14) и (15) получаем выражение для его приведенной массы

$$l(z) = l_0 e^{-1,8az}, \quad l_0 = \frac{\rho_{c,0}}{1,8a}. \quad (16)$$

Вертикальное распределение озона, соответствующее среднему его содержанию в атмосфере 0,300 см, взято из работы [26]. Расчеты при $\varphi(p) = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,2}$ (см. [24]) показывают, что для высоты 18 км эффективная масса озона убывает примерно по линейному закону:

$$m(z) = m_0 - qz, \quad (17)$$

где $m_0 = 0,153$ см O_3 , $q = 0,0025$ см O_3 /км.

Распределение водяного пара с высотой для средних климатологических условий, как известно, может быть описано экспоненциальной зависимостью

$$\rho_{\pi} = \rho_{\pi,0} e^{-\beta'z}, \quad (18)$$

где $\rho_{\pi,0}$ — значение абсолютной влажности у земли, ρ_{π} — то же на уровне z , β' — параметр стратификации (в среднем $\beta' = 4,5 \cdot 10^{-6}$ 1/см).

Полагая $\varphi(p) = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{0,5}$, из (9), (15) и (19) находим

$$w = w_0 e^{-\beta z}, \quad w_0 = \frac{\rho_{\pi,0}}{\beta}, \quad \beta = \beta' + 0,5a. \quad (19)$$

Используя выражение (16), (17) и (18), можем функцию пропускания свести к зависимости от двух переменных

$$P(w, l, m) = P(w, \rho_{п, 0}), \quad (20)$$

поскольку $w = w(\rho_{п, 0}, z)$, $l = l(z)$ и $m = m(z)$.

На рис. 1 линиями 1, 2, 3 показана зависимость интегральной функции пропускания от $\lg w$ при трех различных значениях абсолютной влажности воздуха у земли $\rho_{п, 0}$, равных $1 \cdot 10^{-6}$; $7 \cdot 10^{-6}$; $25 \cdot 10^{-6}$ г/см³.

При расчетах использованы соотношения (16), (17) и (18), а также таблица интегральной функции пропускания для диффузной радиации Кондратьева и Нийлиск [24].

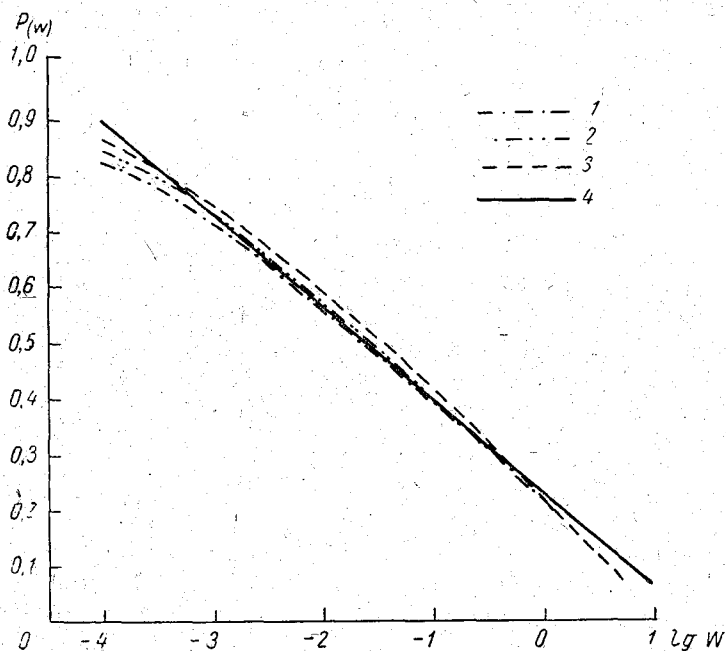


Рис. 1. Функция пропускания для уходящей радиации.

Переходя к одной переменной, аппроксимируем интегральную функцию пропускания прямой 4 на рис. 1. Соответствующее ей аналитическое выражение имеет вид

$$P(w) = \mu \lg \frac{\nu}{w}, \quad (21)$$

причем $\mu = 0,17$; $\nu = 22,5$ г/см²; $0,00003$ г/см $\leq w \leq 10$ г/см.

Вернемся к формуле (13). Известно, что величина производной $\frac{dU}{dz}$ в тропосфере меняется слабо, так как закон изменения температуры с высотой близок к линейному. Для стратосферы, где имеет место изотермия, $\frac{dU}{dz}$ мало отличается от нуля. Вынося за знак интеграла среднее для тропосферы значение $\frac{\overline{dU}}{dz} = \frac{U_H - U_0}{H}$, где $U_H = U(z=H)$, H — высота тропопаузы, и полагая $U_\infty = U_H$, получаем

$$F = U_H - \frac{\overline{dU}}{dz} \int_0^H P(w) dz. \quad (22)$$

Принимая экспоненциальный закон для изменения влажности с высотой, из (19), (21), (22) находим

$$F = U_H + (U_0 - U_H) \frac{P(w_0) + P(w_H)}{2}. \quad (23)$$

Формула (23) позволяет определить уходящее излучение при безоблачном небе или при наличии сплошного, непрозрачного для длинноволновой радиации облачного слоя. В последнем случае индекс «0» соответствует принадлежности к уровню верхней границы облаков.

Легко обнаружить, что если среднее значение функции пропускания $\frac{P(w_0) + P(w_H)}{2}$ считать не зависящим от влагосодержания атмосферы, из (23) как частный случай получается формула, соответствующая методу расчета уходящего излучения Симпсона.

Расчеты по формуле (23), выполненные при различных значениях градиента температуры в тропосфере, температуры и влажности воздуха вблизи земной поверхности, параметра β и высоты тропопаузы H , показали, что, если выполняются принятые предположения о распределении метеорологических элементов по высоте, уходящее излучение линейно зависит от высоты верхней границы облаков h ($0 \leq h \leq H$), изменяясь в следующих пределах:

$$F(h=0) = U_H + (U_0 - U_H) \frac{P(w_0) + P(w_H)}{2}, \\ F(h=H) = U_H.$$

Поэтому для уходящего излучения при сплошной облачности можно записать

$$F(h) = U_H + (U_0 - U_H) \frac{P(w_0) + P(w_H)}{2} \left(1 - \frac{h}{H}\right). \quad (24)$$

Для реальных условий, когда имеются одновременно облака различных ярусов, уходящее излучение может быть определено по формуле, предложенной М. Е. Берляндом,

$$F = F_0(1 - n_n - n_{cp} - n_v) + F_n n_n + F_{cp} n_{cp} + F_v n_v, \quad (25)$$

где F_0 , F_n , F_{cp} и F_v — уходящее излучение при ясном небе и сплошной облачности нижнего, среднего и верхнего ярусов соответственно; n_n , n_{cp} , n_v — количество облаков различных ярусов, определенное для наблюдателя, находящегося на внешней границе атмосферы, с учетом частичной прозрачности облачности верхнего яруса для потоков длинноволновой радиации. Обозначив

$$c_n = \frac{h_n}{H}, \quad c_{cp} = \frac{h_{cp}}{H}, \quad c_v = \frac{h_v}{H},$$

где h_n , h_{cp} и h_v — высота верхней границы облаков нижнего, среднего и верхнего ярусов, из (23) — (25) получаем

$$F = U_H + (U_0 - U_H) \frac{P(w_0) + P(w_H)}{2} (1 - c_n n_n - c_{cp} n_{cp} - c_v n_v). \quad (26)$$

Формула (26) позволяет определять уходящее излучение с учетом облачности при предположениях о линейной стратификации температуры воздуха, экспоненциальном изменении массы водяного пара в тропосфере и изотермии в стратосфере.

Анализ этой формулы показывает, что уходящее излучение определяется в основном тремя параметрами — температурой воздуха,

влажностен содержанием атмосферы и облачностью. При этом величина уходящего излучения увеличивается с ростом температуры тропосферы и уменьшается при уменьшении влагосодержания или облачности.

Поскольку принятая модель атмосферы является приближенной, лучшим формулы, позволяющие определять уходящее излучение для любой стратификации метеорологических элементов, заданной их значениями на нескольких уровнях в атмосфере, обозначенных индексом i (i — меняется от 0 до N). В этом случае в выражении (13) интегрирование производим по слоям. Применяя между соседними уровнями линейную интерполяцию для температуры воздуха и экспоненциальную для массы водяного пара, полагая, что функция пропускания изменяется по логарифмическому закону по крайней мере между любыми двумя значениями аргумента w_i на соседних уровнях, получаем для уходящего излучения при безоблачном небе

$$F_0 = U_N + \sum_{i=1}^N (U_{i-1} - U_i) \frac{P(w_{i-1}) + P(w_i)}{2}. \quad (27)$$

Зависимость уходящего излучения от высоты верхней границы облаков будет в этом случае линейна в каждом интервале $z_{i-1} \leq z \leq z_i$, что дает возможность определять величины F_n , F_{cp} и F_v в выражении (25), не имея значений T и w на уровнях верхних границ облаков всех ярусов.

При расчетах уходящего излучения по климатологическим данным для определения видимого сверху количества облаков каждого яруса можно использовать известный принцип пропорциональности [23, 25], заключающийся в предположении, что облачность среднего или верхнего ярусов существует в закрытой облаками нижнего яруса части неба в той же пропорции, что и в открытой для наблюдений с земли. При этом необходимо учесть частичную прозрачность облаков верхнего яруса для потоков длинноволновой радиации. Излучательная способность облаков верхнего яруса составляет в среднем около 0,5. Этот вывод получен при сравнении эмпирических данных о влиянии облачности на эффективное излучение земной поверхности с результатами расчетов по теоретическим формулам [4]. Заменяя видимое снизу количество облаков верхнего яруса эффективным количеством непрозрачной «черной» облачности и применив принцип пропорциональности, получаем формулы для n_v , n_{cp} и n_n :

$$\begin{aligned} n_v &= \frac{0,5 \bar{n}_v}{1 - \bar{n}_n - \bar{n}_{cp}}, \\ n_{cp} &= \frac{\bar{n}_{cp}}{1 - \bar{n}_n} (1 - n_v), \\ n_n &= \bar{n}_n (1 - n_{cp} - n_v), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\bar{n}_v$, $\bar{n}_{cp}$ и $\bar{n}_n$ — количество облаков верхнего, среднего и нижнего ярусов по наблюдениям с земной поверхности.

Собрав и проанализировав доступный аэрологический материал о положении верхней границы облаков различных форм [2, 3, 5, 6, 10, 12, 19, 21, 25, 29 и др.], автор нашел, что коэффициенты c_n , c_{cp} и c_v , численно равные отношению высоты верхней границы облаков нижнего, среднего и верхнего ярусов к высоте тропопаузы, мало изменяются с широтой и сезоном. В среднем можно принять следующие значения: $c_n = 0,22$, $c_{cp} = 0,34$, $c_v = 0,85$.

Как показано в работе [14], при расчетах уходящего излучения для конкретных синоптических ситуаций достаточно ограничиться данными по температуре и влагосодержанию на трех уровнях в атмосфере. Причем промежуточная между землей и тропопаузой поверхность должна располагаться вблизи уровня 700 мб. Однако, если в качестве исходных данных используются средние многолетние значения метеозадающих элементов, привлечение промежуточного уровня необходимо только для зимних условий высоких и умеренных широт. Но и в этих случаях происходит уточнение месячных сумм уходящего излучения в среднем не более чем на 5%.

Для иллюстрации сказанного в табл. 1 приведены месячные и годовые суммы уходящего излучения для ряда пунктов СССР, рассчитанные по формуле (26) (верхняя строка) и с привлечением данных на поверхности 700 мб по формулам (25), (27) (нижняя строка).

Таблица 1

Месячные и годовые суммы уходящего излучения

Станция	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Год
Бухта Тихая	10,3 10,6	10,5 10,9	10,6 10,9	11,0 11,4	11,7 12,1	12,2 12,4	14,4 13,0	12,0 12,5	11,4 11,7	11,2 11,5	11,0 11,3	10,8 11,0	135,0 139,4
Бухта Тикси	9,4 10,0	9,6 10,2	10,0 10,6	10,8 11,2	11,8 12,2	12,5 13,0	13,0 13,5	12,7 13,1	12,1 12,4	11,2 11,5	10,2 10,7	9,9 10,4	133,1 138,8
Мурманск	11,4 11,7	11,6 11,9	11,9 12,1	12,6 12,7	13,1 13,2	13,7 13,9	13,7 13,9	13,6 13,8	13,1 13,3	12,2 12,5	12,1 12,4	11,7 12,0	150,7 153,4
Якутск	8,7 9,4	9,2 9,8	10,7 10,9	12,1 12,1	13,3 13,2	14,1 14,0	14,4 14,4	13,9 14,0	12,8 12,8	11,4 11,6	9,8 10,3	8,8 9,6	139,2 142,2
Калининград	12,0 12,4	11,8 12,3	12,4 12,7	13,0 13,1	13,6 13,7	14,0 14,1	14,2 14,3	14,2 14,3	13,9 13,9	13,2 13,5	12,7 13,0	12,4 12,7	157,4 160,1
Ашхабад	12,4 12,6	12,7 12,9	13,3 13,5	13,9 14,1	15,1 15,1	16,3 16,2	16,8 16,5	16,9 16,5	16,0 15,9	14,6 14,7	13,3 13,6	12,4 12,8	173,8 174,4

Для выяснения возможности нахождения месячных сумм уходящей радиации при использовании средних значений метеорологических элементов выполнены специальные вычисления. Для зимнего и летнего месяцев в двух пунктах радиозондирования атмосферы, находящихся в существенно различных климатических условиях (Ташкент и Воейково), уходящее излучение вычислялось: а) как среднее из величин, рассчитанных по данным каждого из четырех ежесуточных зондирований и б) по средним за соответствующие месяцы значениям метеорологических элементов. Расхождение полученных обоими способами величин не превысило 3%, что в свою очередь не превосходит вероятной погрешности определения уходящего излучения, составляющей около 10%.

Разработанная методика была применена к исследованию пространственно-временного распределения уходящего излучения по земному шару. Расчеты уходящего излучения системы земля — атмосфера выполнены с помощью электронной вычислительной машины «Урал-1» для 260 пунктов, равномерно расположенных на территории земного шара. Из них 164 находятся на суше и 96 — на океане. Для 50 пунктов уходящее излучение рассчитывалось по формулам (25), (27) с учетом

значений метеоэлементов на поверхности 700 мб. В остальных случаях излучение определялось по формуле (26).

Средние многолетние месячные значения температуры и влажности у земной поверхности, а также средней облачности получены из материалов, собранных в Секторе теплового баланса ГГО. Информация о распределении облачности по ярусам получена из атласа [27] и большого числа отдельных публикаций. Основным источником сведений о температуре тропопаузы явилась работа [20]. Величины полного влагосодержания атмосферы

$$w'_0 = \int_0^{\infty} \rho_n(z) dz$$

снимались с карт О. А. Дроздова и А. С. Григорьевой для северного полушария и с карт Беннона и Стиле [17] — для южного полушария. Эффективное влагосодержание атмосферы определялось по формуле

$$w_0 = \frac{\rho_{n,0}}{\frac{\rho_{n,0}}{w'_0} + 0,5a} \quad (29)$$

Для нахождения массы водяного пара в стратосфере, следуя Д. Лондону, воспользуемся гипотезой о равенстве нулю вертикального градиента удельной влажности выше уровня тропопаузы. Производя интегрирование для эффективного влагосодержания стратосферы, получаем

$$w_H = \int_H^{\infty} \rho_n(z) \varphi(p) dz = 0,622 \frac{1}{g} \cdot \frac{1}{1,5} \sqrt{\frac{p_H}{p_0}} f_H E_H, \quad (30)$$

где $p_H = p(z=H)$, f_H — относительная влажность на уровне тропопаузы, g — ускорение силы тяжести, E_H — максимальная упругость водяного пара при температуре тропопаузы.

Анализ среднеширотных значений f_H и p_H , полученных из работы [25], обнаруживает незначительную пространственную и временную изменчивость произведения $f_H \sqrt{\frac{p_H}{p_0}}$, что позволяет использовать его среднее значение 0,276 для всего земного шара. Воспользовавшись формулой Магнуса, из (21) и (30) получаем

$$P(w_H) = 0,255 - \frac{1,266 t_H}{235 + t_H} \quad (31)$$

Таким образом, в среднем эффективное влагосодержание стратосферы и, следовательно, функция пропускания на уровне тропопаузы определяются только одним параметром — температурой тропопаузы.

На основании рассчитанных величин построены мировые карты месячных (за январь, апрель, июль, октябрь) и годовых сумм уходящего излучения (рис. 2—6). Из-за отсутствия достаточного объема данных метеорологических наблюдений высокогорные районы и полярные области на картах не освещены.

Просматривая построенные карты, легко обнаружить, что поле уходящего излучения очень однородно и диапазон изменений месячных сумм его крайне невелик. На всех картах имеет место слабое возрастание величин F от полюсов к тропикам, связанное с уменьшением облачности и увеличением средней температуры тропосферы в поясах высокого давления. Наибольшие суммы уходящей радиации наблюдаются над пустынями, где незначительная облачность соответствует высокой

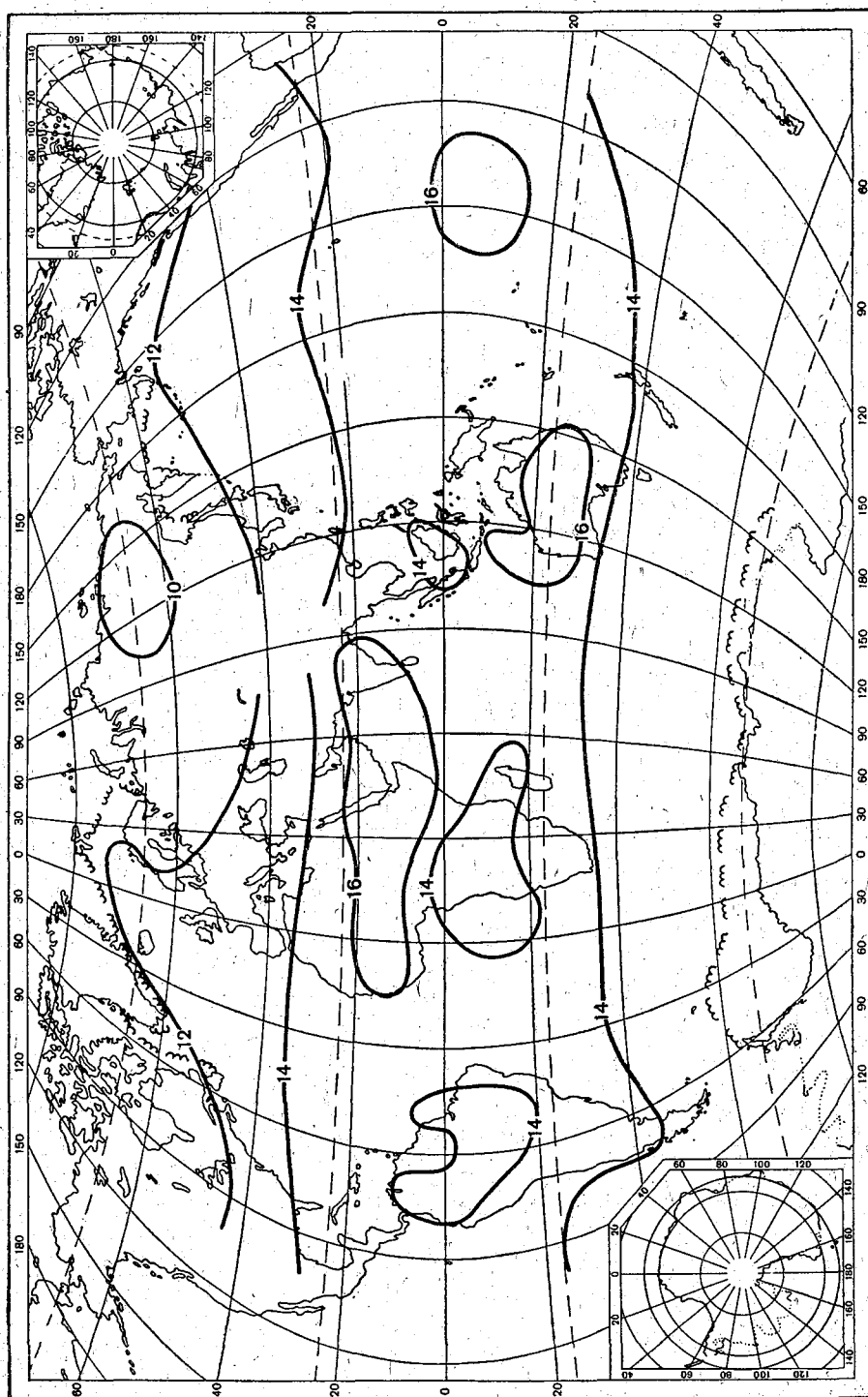


Рис. 2. Уходящее излучение (ккал/см²), январь.

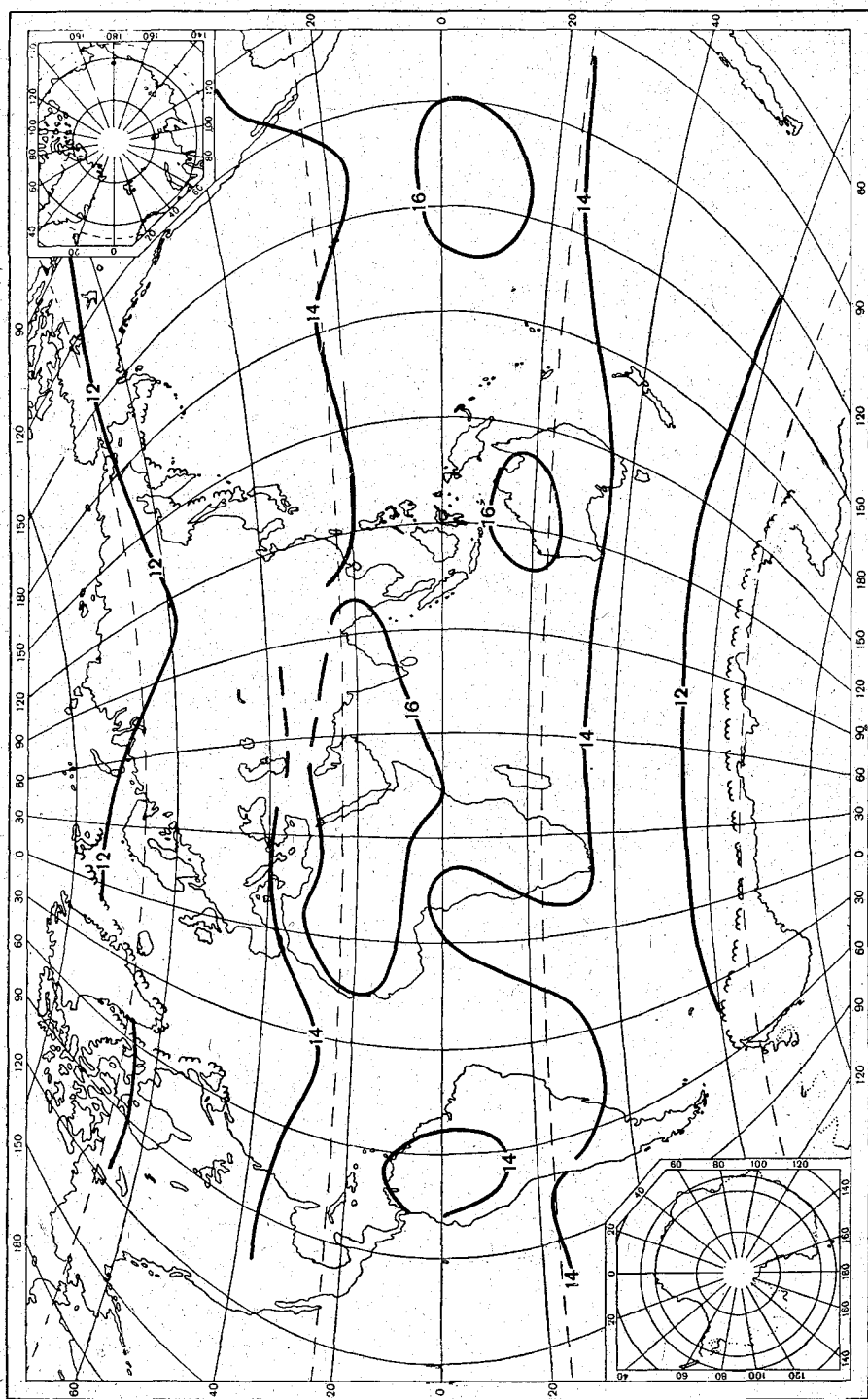


Рис. 3. Уходящее излучение (ккал/см²), апрель.

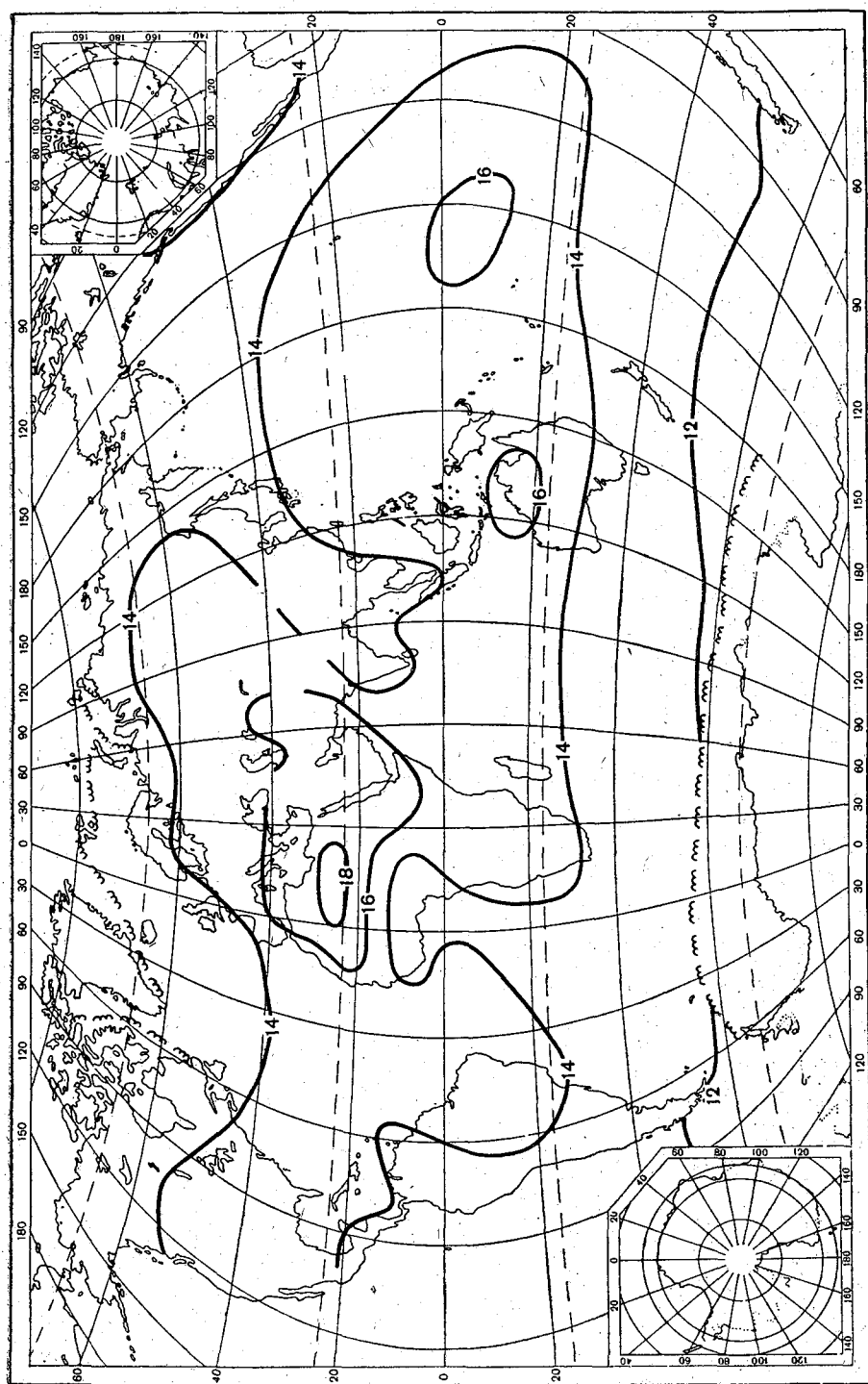


Рис. 4. Уходящее излучение (ккал/см²), июль.

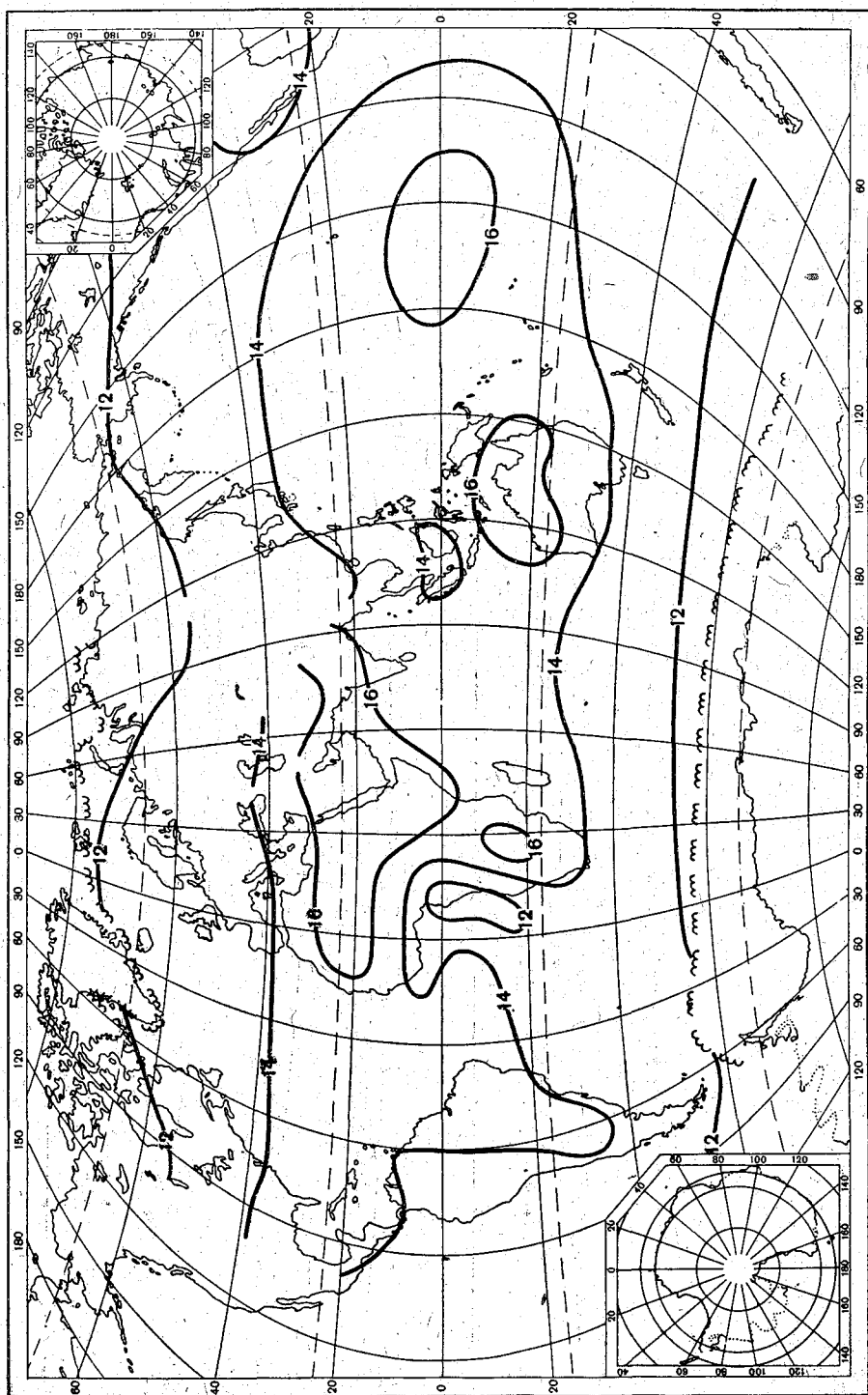


Рис. 5. Уходящее излучение (ккал/см²), октябрь.

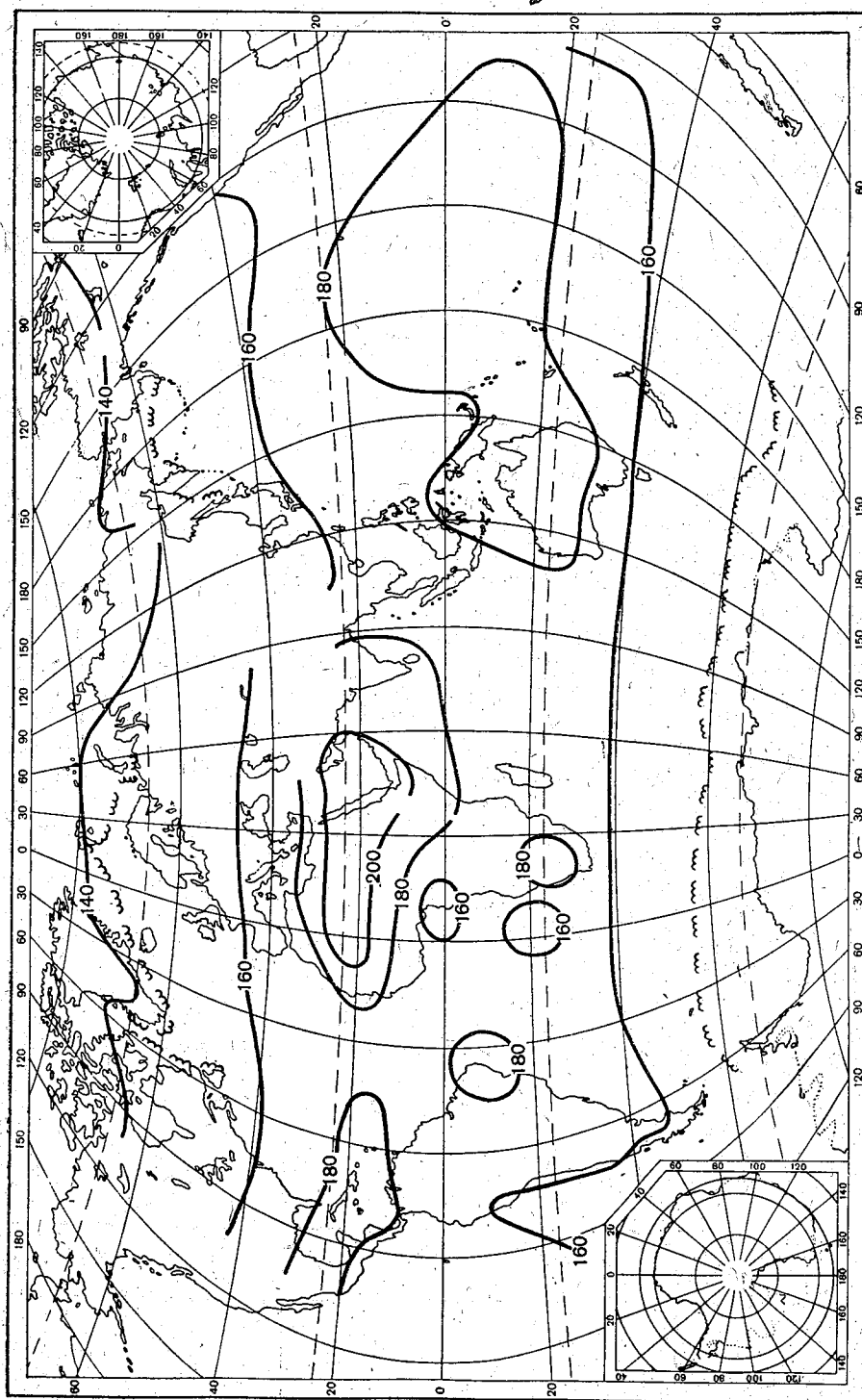


Рис. 6. Уходящее излучение (ккал/см²), год.

температуре воздуха при низком его влагосодержании. Вблизи экватора в районах с повышенной облачностью и очень большой влажностью суммы уходящего излучения заметно снижены.

Годовые суммы уходящего излучения изменяются по земному шару от величин менее 140 ккал/см² в полярных районах до более 200 ккал/см² над североафриканскими и аравийскими пустынями. В южном полушарии над австралийскими и южноафриканскими пустынями уходящее излучение не достигает таких больших величин.

Вдоль экватора не наблюдается сплошного пояса пониженных значений F , как это имеет место на картах Симпсона. Годовые суммы изменяются здесь от менее 160 ккал/см² над Гвинейским заливом и прилегающей к нему частью Африканского материка до 180—190 ккал/см² над более сухими и малооблачными районами.

Заметная аazonальность в ходе изолиний имеет место над холодными и теплыми океаническими течениями. Как правило, с холодными течениями связано снижение, а с теплыми — увеличение сумм уходящего излучения. Большая океаничность южного полушария и положение термического экватора к северу от географического приводит к тому, что в среднем тепловое излучение южного полушария меньше, чем северного.

На месячных картах наблюдается картина в некоторой степени аналогичная имеющей место на годовой. Зимой в северном полушарии резким минимумом выделяется район сибирского антициклона, в то время как над северной Атлантикой повышение значений уходящего излучения связано с Гольфстримом. Интенсивность тропических максимумов и их положение заметно изменяются от сезона к сезону. Летом они располагаются вблизи тропиков и наиболее резко выражены, зимой смещаются в направлении к экватору, значительно ослабевая.

Абсолютный максимум месячных величин уходящего излучения имеет место над центральной частью Сахары, где расположена замкнутая область, очерчиваемая изолинией 18 ккал/см² мес. Абсолютный минимум наблюдается в январе над Восточной Сибирью, здесь значения F не превышают 10 ккал/см² мес.

Годовой ход уходящего излучения в большинстве климатических зон выражен слабо, а часто даже полностью отсутствует. Однако в ряде случаев он выражен довольно резко. Так, например, в Якутске, где от зимы к лету тепловое состояние тропосферы изменяется очень сильно, минимум имеет место зимой и годовая амплитуда составляет 5 ккал/см² мес. Или в Пуне, где с началом летнего муссона появляется мощная облачность и месячные суммы уходящего излучения снижаются на 4—5 ккал/см² по сравнению с их величинами для зимних и весенних месяцев.

Таблица 2

— Средние значения потоков уходящего излучения (кал/см² мин.) над различными широтными зонами земного шара

Широта (град.)	I	IV	VII	X	Год	Широта (град.)	I	IV	VII	X	Год
70—60 с.	0,253	0,273	0,310	0,276	0,273	10—0 с.	0,352	0,350	0,336	0,340	0,341
60—50	0,264	0,289	0,313	0,288	0,287	0—10 ю.	0,340	0,348	0,340	0,340	0,338
50—40	0,281	0,300	0,322	0,304	0,302	10—20	0,340	0,345	0,346	0,340	0,336
40—30	0,304	0,320	0,338	0,330	0,322	20—30	0,340	0,334	0,332	0,324	0,329
30—20	0,333	0,344	0,346	0,350	0,344	30—40	0,322	0,316	0,308	0,310	0,313
20—10	0,350	0,354	0,338	0,347	0,346	40—50	0,299	0,296	0,292	0,291	0,292

По данным карт годовых и месячных сумм уходящей радиации получены средние значения потоков излучения для 10-градусных широтных зон (табл. 2).

Сравнение данных табл. 2 с данными, полученными ранее различными авторами для северного полушария (табл. 3), показывает, что особенно хорошо они согласуются с результатами расчетов Т. Г. Берлянд, Хаутона и Д. Лондона. При этом следует отметить, что после Симпсона только данные Т. Г. Берлянд были получены при осреднении карт уходящего излучения. Остальные же исследователи довольствовались расчетами по средним зональным значениям метеорологических элементов, что значительно снижает ценность результатов.

Таблица 3

Средняя интенсивность уходящего излучения (кал/см² мин.)
над северным полушарием по данным различных авторов

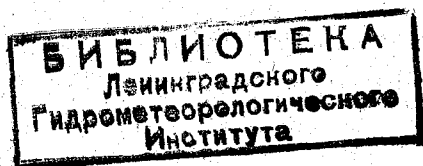
Широта (град.)	Симпсон	Альбрехт	Баур и Филиппс	Багров	Хаутон	Берлянд	Лондон
90—80	0,252	0,225		0,247	0,261		0,245
80—70	0,256	0,230	0,240	0,255	0,273		0,253
70—60	0,266	0,243		0,270	0,284	0,280	0,270
60—50	0,275	0,256	0,253	0,280	0,299	0,290	0,283
50—40	0,280	0,270	0,269	0,289	0,316	0,302	0,306
40—30	0,283	0,282	0,291	0,300	0,334	0,321	0,327
30—20	0,284	0,294	0,298	0,306	0,346	0,332	0,354
20—10	0,283	0,302	0,299	0,304	0,348	0,324	0,354
10—0	0,276	0,304	0,296	0,296	0,343	0,309	0,347

Приведенные в табл. 3 данные демонстрируют развитие наших представлений об уходящем излучении — этой важнейшей характеристике энергетики планеты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров Н. А. Планетарное альbedo Земли. Труды ЦИП, вып. 35 (62), 1954.
2. Баранов А. М. О вертикальной протяженности облаков верхнего яруса. Метеорология и гидрология, № 4, 1960.
3. Баранов А. М. Об облаках верхнего яруса над Европейской территорией СССР. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 39, 1962.
4. Берлянд М. Е. Предсказание и регулирование теплового режима приземного слоя атмосферы. Гидрометеиздат, Л., 1956.
5. Берлянд Т. Г. Тепловой баланс атмосферы северного полушария. Сб. «А. И. Воейков и проблемы современной климатологии». Под ред. М. И. Будыко. Гидрометеиздат, Л., 1956.
6. Боровиков А. М. Характеристика облачных слоев над Москвой по данным самолетных подъемов. Труды ЦАО, вып. 2, 1947.
7. Дроздов О. А., А. С. Григорьева. Влагооборот в атмосфере. Гидрометеиздат, Л., 1963.
8. Кондратьев К. Я., О. П. Филиппович. Об уходящем излучении. Вестн. ЛГУ, № 6, 1952.
9. Кондратьев К. Я. Лучистый теплообмен в атмосфере. Гидрометеиздат, Л., 1956.
10. Курбатова А. В., О. В. Козловская, Н. И. Мазурин. Некоторые пространственные характеристики облаков верхнего яруса над северо-западом ЕТС. Труды ЛГМИ, вып. 12, 1961.
11. Ниилиск Х. Новая радиационная номограмма. Изв. АН ЭССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, № 4, 1961.
12. Решетов Г. Д. Облачность в верхней тропосфере. Труды ЦИП, вып. 81, 1960.
13. Шехтер Ф. Н. К вычислению лучистых потоков тепла в атмосфере. Труды ГГО, вып. 22 (84), 1950.
14. Шнейеро Б. Е. О расчете радиационного баланса системы «земная поверхность — атмосфера» и его составляющих. Метеорология и гидрология, № 7, 1963.

15. Abbot C. G., Fowle F. E. Annals of the astroph. obs. of Smith. Inst., vol. II, 1908.
16. Albrecht F. Der Wärmeumsatz durch die Wärmestrahlung des Wasserdampfes in die Atmosphäre. Zs. Geoph. Jg. Nr 6, 1930.
17. Bannou J. K., Steele L. P. Average water-vapour content of the air. Geoph. Mem., vol. XIII, No 102, 1960.
18. Bauer F., Philipps H. Der Warmenhaushalt der Lufthülle der Nordhalbkugel in Januar und Juli und zur Zeit des Äquinoktion und Solstitein Gerl. Beitr. z. Geoph. Bd. 42, 1934; Bd. 45, 1935.
19. Bary E., Möller F. Die Mittlere vertikale Verteilung von Wolken in Abhängigkeit von Wetterlage. Ber. Dtsch. Wetterdiensts 9, Nr 67, 1960.
20. Goldie N., Moore J. G., Austin E. E. Upper air temperature over the world. Geoph. Mem., vol. XIII, No 101, 1958.
21. Hartmann W. Die Lage der Wolkenschichten über Deutschland in der Nord—Süd — Richtung. Met. Zeitschr. Bd. 50, H 6, 1933.
22. Houghton H. G. On the annual heat balance of the northern hemisphere. J. Met., vol. II, No 1, 1954.
23. Kasten F. G., Korb, Mainer G., Möller F. On the heat balance of the troposphere. Johannes Gutenberg Univ., Final Rep. Contr. AF 61 (052) — 18, 1959.
24. Kondratiev K. J., Nilisk H. Y. The new radiation chart. Geofisica pura e Applicata, vol. 49, 1961.
25. London J. The heat balance of the atmosphere. Final Rep. Contr., No AF 19 (122) — 165, N. Y. U., 1957.
26. Manabe S., Möller F. On the equilibrium and heat balance of the atmosphere. Month. Weath. Rev., vol. 89, No 12, 1961.
27. McDonald. Atlas of climatic charts of the Oceane. Washington, 1938.
28. Simpson G. The distribution of terrestrial radiation. Mem. Roy. Met. Soc. IV, No 23, 1929.
29. Süring R. Die Wolken. Leipzig, 1950.



СОДЕРЖАНИЕ

К. В. Пятыгина, В. Г. Блажевич, Э. А. Федорова. Результаты испытания агеострофической модели прогноза полей ветра и температуры для нескольких уровней атмосферы . . .	3
А. С. Дубов, В. Г. Туриков. О прогнозе поля давления в тропосфере . .	14
А. С. Дубов, Б. М. Ильин. Об учете отличий ветра от геострофического в пограничном слое в численном прогнозе . . .	21
✓ Н. И. Яковлева, А. В. Мещерская. Об использовании параметров разложения по естественным функциям для решения некоторых метеорологических задач . . .	27
✓ Г. Д. Кудашкин. Оценка аналогичности атмосферных состояний и процессов с помощью параметров разложения метеорологических полей по естественным ортогональным функциям . . .	36
В. Б. Афанасьева, Н. П. Есакова. О связи перемещения границы снежного покрова с типами циркуляции Г. Я. Вангенгейма в весенний период . .	45
Н. И. Яковлева, А. В. Мещерская. Анализ барического поля над северным полушарием методом разложения по естественным ортогональным функциям . . .	49
А. В. Мещерская, Н. И. Яковлева. Уточнение естественных функций полей геопотенциала (давление) атлантико-европейского сектора . . .	60
Л. С. Гандин. Общая задача об оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей . . .	75
Л. С. Гандин, Т. И. Кузнецова. О пространственной статистической структуре поля геопотенциала . . .	84
✓ Р. Л. Каган. Об одном частном случае интерполяции . . .	94
К. Я. Винников. Метод определения уходящей радиации в области окна прозрачности атмосферы 8—12 мк . . .	101
И. Н. Пянтелеева. Статистический контроль аэрологических телеграмм . . .	107
Л. С. Гандин, Б. М. Ильин, Ю. М. Либерман, М. И. Юдин. О точности определения конечных разностей при анализе метеорологических полей . .	113
К. Я. Винников. Уходящее излучение системы земля — атмосфера . . .	123

Редактор *Л. И. Штанникова*
Технич. редактор *М. И. Брайнина*
Корректоры: *Е. П. Баскакова* и *А. В. Хюркес*

Сдано в набор 20/XI 1964 г. Подписано к печати
23/II 1965 г. Бумага 70×108¹/₁₆. Бум. л. 4,5.
Прив. печ. л. 12,6. Уч.-изд. л. 11,98. Тираж 620 экз.
М-21061 Индекс МЛ-125

Гидрометеорологическое издательство.
Ленинград, В-53, 2-я линия, дом № 23.

Заказ № 858 Цена 84 коп.

Тем. план 1965 г., № 109

Ленинградская типография № 8 Главполиграф-
прома Государственного комитета Совета Мини-
стров СССР по печати.
Ленинград, Прачечный пер., д. 6