

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГЛАВНАЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ  
им. А. И. ВОЕЙКОВА

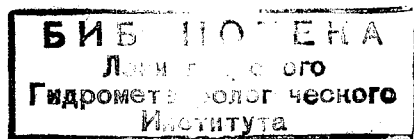
06  
т 18

Т Р У Д Ы

ВЫПУСК 228

# ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В МЕТЕОРОЛОГИИ

Под редакцией  
д-ра физ.-мат. наук Л. С. ГАНДИНА  
и канд. физ.-мат. наук Р. Л. КАГАНА



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД • 1968

Сборник представляет собой четвертый выпуск трудов ГГО под данным названием. В нем, как и в предыдущих сборниках этой серии, рассматриваются вопросы исследования статистической структуры метеорологических полей и приложения этой информации к решению различных метеорологических задач.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, интересующихся применением статистических методов в метеорологии.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник является четвертым из серии трудов ГГО, посвященных применению статистических методов в метеорологии. Предыдущие сборники были опубликованы в 1964 (Труды ГГО, вып. 165), 1966 (вып. 191) и 1967 гг. (вып. 208). По своей тематике сборник аналогичен предыдущим выпускам и содержит работы по исследованию статистической структуры метеорологических полей, а также по приложению данных о статистической структуре к вопросам объективного анализа, рационального размещения сети станций и интерпретации данных наблюдений.

Статья Л. С. Гандина представляет собой сокращенный вариант отчета, написанного для Комиссии по климатологии Всемирной метеорологической организации (ВМО). Сокращения относятся к материалам, которые изложены в данном сборнике в статье Л. С. Гандина, Р. Л. Кагана и В. П. Таракановой. Эта статья содержит результаты исследования структуры приземной температуры воздуха в некоторых районах и приложение этих результатов к вопросу о рациональном размещении сети станций. Проблеме планирования сети станций посвящена также статья Ю. М. Либермана, в которой выполнены количественные оценки увеличения информации при расширении сети станций по плану, предложенному ВМО.

Вопросы объективного анализа рассмотрены, кроме того, в статье Р. Л. Кагана и Г. Х. Хатамкулова, а также в работах М. О. Кричак и К. М. Лугиной. В первой из этих статей детально анализируется точность определения дифференциальных характеристик метеорологического элемента по данным о самом этом элементе в зависимости от точности наблюдений, шага дифференцирования и статистической структуры. Рассмотрен, в частности, вопрос о построении разностных формул, дающих максимальную в статистическом смысле точность аппроксимации. Некоторые из полученных результатов нашли применение в работе М. О. Кричак, посвященной объективному анализу поля ветра. В статье К. М. Лугиной производится сопоставление данных объективного анализа поля геопотенциала, выполненного в различных странах. Эти данные сравниваются с фактическими значениями на станциях, что позволяет судить о сравнительных достоинствах различных методов анализа. Для целей объективного анализа осредненных по времени полей выполнена работа

Р. Л. Кагана и К. М. Лугиной, в которой исследована статистическая структура средних месячных значений геопотенциала и температуры на уровне 500 мб.

Три статьи посвящены вопросам рациональной интерпретации данных наблюдений. В статьях Р. Л. Кагана и Л. Л. Брагинской продолжены исследования по интерпретации показаний инерционных приборов, выполнявшиеся этими авторами в предыдущие годы. К. Я. Винников рассмотрел вопрос о рациональной интерпретации данных широкоугольных спутниковых радиометров. В его работе показано, что такие данные являются весьма полезными, если относить их к оптимальной площади осреднения, составляющей лишь небольшую часть видимой площади.

## О ПЛАНИРОВАНИИ СЕТИ КЛИМАТОЛОГИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ

1. Наиболее совершенный подход к планированию сети станций должен основываться на экономических соображениях. Зная расположение станций на некоторой площади, можно на основании сведений по статистической структуре метеорологических полей оценить среднюю ошибку, с которой известны метеорологические элементы на этой площади. Чем больше эта ошибка, тем больше и убытки, обусловленные недостаточным знанием метеорологических условий. Очевидно также, что указанная ошибка уменьшается с увеличением густоты станций, а следовательно, и затрат на их содержание. Поэтому можно поставить задачу о нахождении оптимальной густоты сети, соответствующей минимуму суммы затрат и убытков. Из весьма общих соображений вытекает, что такая задача всегда имеет решение.

Однако в настоящее время мы не располагаем информацией, позволяющей практически решить эту задачу. Зависимость убытков от точности, с которой известны метеорологические поля, является весьма сложной и почти не изученной. Поэтому взамен экономической приходится использовать чисто метеорологическую постановку задачи о рациональном размещении сети. При такой постановке требуемая точность, с которой необходимо знать метеорологические элементы всюду на некоторой площади, постулируется заранее и разыскивается минимальная густота сети, обеспечивающая эту точность. Всюду в дальнейшем будет рассматриваться только эта метеорологическая постановка задачи.

2. Впервые количественный подход к решению указанной задачи был предложен О. А. Дроздовым [6]. Он исходил из требования, чтобы средняя квадратическая ошибка линейной интерполяции метеорологического элемента на середину отрезка между станциями не превосходила некоторой заданной величины. Подбирая «тройки» станций, расположенные на одной прямой и притом так, что центральная станция находится на равном расстоянии от крайних, он определял путем обработки массового материала наблюдений этих станций зависимость средней квадратической ошибки интерполяции от расстояния между крайними станциями. В дальнейшем в работе О. А. Дроздова и А. А. Шепелевского [8] было показано, что указанная ошибка однозначно связана со структурной функцией рассматриваемого метеорологического элемента, которая значительно легче поддается вычислению путем обработки массовых данных наблюдений. Используя эту связь и исходя из требования, чтобы средняя квадратическая ошибка интерполяции на центр отрезка между станциями не превышала средней квадратической ошибки наблюдений. Дроздов и

Шепелевский разработали методику оценки максимальных допустимых расстояний между станциями. В их статье приводятся также конкретные данные, относящиеся к давлению, температуре и осадкам.

Вслед за этим в ГГО был выполнен цикл работ, посвященных применению метода Дроздова — Шепелевского к основным метеорологическим элементам. К этому циклу относятся работы О. А. Дроздова по температуре, как средней суточной, так и за отдельные сроки, В. П. Курской по месячным суммам осадков, Е. И. Абрамовой и О. А. Дроздова по снежному покрову, Г. Л. Гакен по числу дней с грозами, О. А. Дроздова и Р. Ф. Сохриной по температуре почвы.

На основании результатов всех этих исследований был разработан перспективный план развития сети метеорологических станций СССР. Этот план в дальнейшем подвергался уточнениям. Одновременно разрабатывались пути усовершенствования методики Дроздова — Шепелевского. Так, в работе [1] было показано, что задача о рациональном размещении сети станций родственна задаче объективного анализа метеорологических полей, и рекомендовано взамен ошибки линейной интерполяции исходить из ошибки оптимальной интерполяции. Такой путь получил развитие в дальнейших работах Л. С. Гандина [2] и особенно С. А. Машковича [13, 14] применительно к сети аэрологических станций. Аналогичный путь использовался также в ряде работ, опубликованных в отчетах рабочих групп Комиссии по синоптической метеорологии ВМО по проблеме сети станций [15, 16].

Применение этого пути позволило перейти к конкретным указаниям наиболее целесообразных пунктов установки новых аэрологических станций [13, 14]. В ряде выполненных в ГГО исследований, из которых укажем работы [9, 10, 11], были разработаны методы оценки точности средних по площади значений по данным наблюдений в точках. Этот вопрос существен для планирования сети наблюдений за теми элементами (осадки, снежный покров), для которых основной интерес представляют осредненные по площади, а не точечные величины.

Укажем еще, что в последние годы разработана методика вычисления характеристик статистической структуры с помощью электронных вычислительных машин [3, 4]. Применение этой методики позволяет получать характеристики структуры со значительно меньшей затратой труда и с существенно большей надежностью, чем это делалось раньше вручную.

3. Методы оценки сети, излагаемые ниже, базируются на применении статистических характеристик случайных полей — структурных, ковариационных и корреляционных функций. Поэтому, прежде чем переходить к методам оценки сети, необходимо вкратце рассмотреть эти функции и способы их вычисления.

Будем обозначать чертой сверху результат осреднения, которое следует понимать, строго говоря, в вероятностном смысле, но которое практически осуществляется по некоторой ограниченной выборке. Тогда

$$f'(x, y) = f(x, y) - \bar{f}(x, y) \quad (1)$$

представляет собой отклонение элемента  $f$  в точке с координатами  $x, y$  от среднего значения (аномалию). Среднее значение  $\bar{f}'(x, y)$  равно, разумеется, нулю. Средний квадрат величины  $f'$

$$D_f(x, y) = \overline{f'^2(x, y)} \quad (2)$$

называют дисперсией элемента  $f$  в рассматриваемой точке.

Рассмотрим теперь две функции, каждая из которых зависит, вообще говоря, от четырех независимых переменных. Первая из этих функций представляет собой средний квадрат разности значений  $f'$  в двух точках

$$b_f(x_1, y_1, x_2, y_2) = [f'(x_1, y_1) - f'(x_2, y_2)]^2 \quad (3)$$

и называется структурной функцией элемента  $f$ , а вторая есть среднее произведение значений  $f'$  в двух точках

$$m_f(x_1, y_1, x_2, y_2) = f'(x_1, y_1) \cdot f'(x_2, y_2) \quad (4)$$

и называется ковариационной функцией. Величина  $D_f$  представляет собой частный случай функции  $m_f$ , а именно:

$$D_f(x, y) = m_f(x, y, x, y). \quad (5)$$

Из формул (3) и (4) следует также, что функции  $m_f$  и  $b_f$  связаны соотношением

$$b_f(x_1, y_1, x_2, y_2) = D_f(x_1, y_1) + D_f(x_2, y_2) - 2m_f(x_1, y_1, x_2, y_2). \quad (6)$$

Если имеется некоторый набор точек  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , то значения функции  $m_f$  для всех пар из этого набора образуют симметричную матрицу порядка  $n$ , которая называется ковариационной матрицей. Ее диагональными элементами являются дисперсии  $D_f$ .

Если применить операции (3) и (4) к величинам  $f'$ , деленным на соответствующие средние квадратические изменчивости ( $\sqrt{D_f}$ ), то получим нормированную структурную функцию

$$\beta_f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{\left[ \frac{f'(x_1, y_1)}{\sqrt{D_f(x_1, y_1)}} - \frac{f'(x_2, y_2)}{\sqrt{D_f(x_2, y_2)}} \right]^2} \quad (7)$$

и автокорреляционную функцию

$$\mu_f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{f'(x_1, y_1)}{\sqrt{D_f(x_1, y_1)}} \cdot \frac{f'(x_2, y_2)}{\sqrt{D_f(x_2, y_2)}} = \frac{m_f(x_1, y_1, x_2, y_2)}{\sqrt{D_f(x_1, y_1) D_f(x_2, y_2)}}. \quad (8)$$

Эти функции связаны простым соотношением

$$\beta_f(x_1, y_1, x_2, y_2) = 2 - 2\mu_f(x_1, y_1, x_2, y_2). \quad (9)$$

Подобно ковариационной матрице можно рассматривать корреляционную матрицу, составленную из значений  $\mu_f$  для всех пар из некоторого набора точек. Диагональные элементы этой матрицы, очевидно, равны единице.

Применительно к высотным полям (высоты изобарической поверхности, температуры) для не очень больших расстояний между точками,

$$\rho_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \quad (10)$$

с хорошей точностью выполняется условие горизонтальной однородности и изотропии для функций  $b$  и  $m$ , согласно которому эти функции зависят только от расстояния  $\rho$ . Оценки показывают, что без существенных погрешностей можно пользоваться предположением об однородности и изотропии для ковариационных и структурных функций аэрологических полей вплоть до расстояний порядка 2000 км. Еще точнее выполняются эти предположения для нормированных функций  $\beta$  и  $\mu$ , поскольку в этом случае не требуется, чтобы величина  $D_f$  была постоянной.

Для наземных полей на выполнимость указанного предположения существенно влияют свойства подстилающей поверхности и в особенности

рельеф. В горных районах предположение об однородности и изотропии заведомо не выполняется. Практически об однородности и изотропии можно говорить только применительно к равнинным районам со сравнительно однородной подстилающей поверхностью. Именно такие районы мы и будем рассматривать, причем функции одного аргумента  $\rho$  будем обозначать теми же буквами, что и функции четырех аргументов —  $x_1, y_1, x_2, y_2$ , например,

$$\mu_f(\rho_{12}) = \frac{f'(x_1, y_1) f'(x_2, y_2)}{\sqrt{D_f(x_1, y_1) D_f(x_2, y_2)}}. \quad (11)$$

4. Исходными данными для вычисления введенных функций служат данные обычных метеорологических наблюдений. Объем выборки, необходимый для получения достоверных результатов, различен для различных метеорологических элементов. Обычно для этой цели достаточно данных 60 станций для 60 моментов времени. Станции должны быть, разумеется, внутри рассматриваемого района, причем предпочтительнее использовать неравномерно расположенные станции так, чтобы среди всевозможных пар из этих станций примерно одинаковое количество приходилось на малые, средние и большие расстояния. Что касается моментов времени, то соседние моменты должны отстоять друг от друга на достаточно точные интервалы (обычно 2—3 суток) с тем, чтобы данные для таких моментов не были бы сильно коррелированными. Поскольку рассматриваемые статистические характеристики обладают годовым ходом, необходимо использовать выборку в пределах одного сезона или даже одного месяца.

В качестве средних значений (норм  $\bar{f}$  и дисперсий  $D_f$ ) необходимо брать значения, осредненные по той же самой выборке, а не величины, известные из других источников, как, например, из климатических справочников. Вычисление поля норм (а в случае расчета нормированных функций — и поля дисперсий) является первым этапом при вычислении корреляционных и структурных функций. Далее происходит переход к отклонениям  $f'$  или  $\frac{f'}{\sqrt{D_f}}$ , после чего вычисляются произведения или квад-

раты разностей этих величин для всех пар станций и для всех моментов времени. Эти значения затем осредняются по всем моментам времени и, если вычисления ведутся в предположении однородности и изотропии, еще и по градациям расстояния  $\rho$ , выбранным заранее. Результатами этих вычислений являются ковариационная, корреляционная или структурная матрицы или соответственно значения ковариационной, корреляционной или структурной функции для середин введенных градаций расстояния.

Такие результаты нуждаются в некоторой последующей обработке.

Во-первых, необходимо учитывать, что случайные ошибки в исходных данных приводят к систематическим погрешностям в значениях рассматриваемых функций. Наиболее простое и обычно достаточное предположение о характере случайных ошибок наблюдений, которым мы и в дальнейшем будем пользоваться, состоит в том, что ошибки  $\delta_f$  в различных точках не коррелированы ни с истинными значениями наблюдаемых величин

$$\overline{\delta_f(x_1, y_1) f'(x_2, y_2)} = 0, \quad (12)$$

ни между собой

$$\overline{\delta_f(x_1, y_1) \delta_f(x_2, y_2)} = \begin{cases} 0 & \text{при } \rho_{12} \neq 0 \\ \sigma_f^2(x_1, y_1) & \text{при } \rho_{12} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

где  $\sigma_f$  — средняя квадратическая ошибка наблюдений.



Можно показать, что при выполнении равенств (12) и (13) случайные ошибки не сказываются на значениях ковариационной функции, за исключением значения при нулевом расстоянии, т. е. дисперсии  $D_f$ , которая получается завышенной на  $\sigma_f^2$ ,

$$D'_f(x, y) = D_f(x, y) + \sigma_f^2(x, y). \quad (14)$$

Структурная функция  $b_f$  оказывается завышенной на сумму средних квадратов ошибок в точках. Это верно для всех расстояний  $\rho$ , кроме нулевого, при котором эта функция, разумеется, равна нулю

$$b'_f(x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{cases} b_f(x_1, y_1, x_2, y_2) + \sigma_f^2(x_1, y_1) + \sigma_f^2(x_2, y_2) & \text{при } \rho_{12} \neq 0 \\ b_f(x_1, y_1, x_1, y_1) = 0 & \text{при } \rho_{12} = 0 \end{cases} \quad (15)$$

Соответственно искажаются и нормированные функции.

Если принять наряду с однородностью и изотропией, что  $\sigma_f$  не зависит от координат, то указанное обстоятельство может быть использовано для оценки средней квадратической ошибки  $\sigma_f$ . Действительно, экстраполируя, например, функцию  $b'_f(\rho)$  на нулевое расстояние, получим  $2\sigma_f^2$ . Заметим, что величина  $\sigma_f$  в действительности обусловлена не только ошибками наблюдений, но и микроклиматическими погрешностями, т. е. влиянием мелкомасштабных различий подстилающей поверхности и т. п.

Из сказанного следует, что, прежде чем использовать вычисленные функции, необходимо исключить из них систематические погрешности, обусловленные влиянием случайных ошибок.

Второе обстоятельство, вызывающее необходимость дальнейшей обработки данных по рассматриваемым функциям, состоит в том, что лишь функции из весьма ограниченного класса могут быть ковариационными и корреляционными. Действительно, средний квадрат линейной комбинации

$$\begin{aligned} A &= p_1 f'_1(x_1, y_1) + p_2 f'_2(x_2, y_2) + \dots + p_n f'_n(x_n, y_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n p_i f'_i(x_i, y_i) \end{aligned} \quad (16)$$

равен, очевидно,

$$\overline{A^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j m_f(x_i, y_i, x_j, y_j) \quad (17)$$

и по самому своему смыслу положителен. Это означает, что любая ковариационная матрица должна быть положительно определенной. То же верно и для корреляционной матрицы. Соответственно ограничен класс функций, могущих быть структурными функциями.

Обычно при вычислении корреляционных матриц оказывается, что в некоторых из используемых моментов времени нет данных на некоторых из используемых станций. Это обстоятельство может приводить к нарушению условия положительной определенности матрицы. Это условие может быть проверено путем вычисления собственных чисел матрицы — все они должны быть положительны. В противном случае использование такой матрицы может приводить к абсурдным результатам.

Если используется предположение об однородности и изотропии, то нарушение положительной определенности может быть вызвано также тем фактом, что это предположение выполняется лишь приближенно. Для обеспечения положительной определенности корреляционной (или

ковариационной) функции можно исходить из того, что она эквивалентна положительности двумерного спектра, т. е. положительности интеграла

$$\Phi(k) = \int_0^{\infty} \rho_f(\rho) J_0(k\rho) \rho d\rho \quad (18)$$

при всех значениях волнового числа  $k$  ( $J_0$  — функция Бесселя). Именно с этой целью удобно аппроксимировать вычисленную функцию выражением, имеющим положительный спектр и содержащим несколько свободных параметров [например, выражением  $e^{-a\rho^b} J_0(c\rho)$  при положительных параметрах  $a$ ,  $b$  и  $c$ ], и подобрать эти параметры таким образом, чтобы точность аппроксимации была не меньше точности, с которой можно считать известной корреляционную функцию.



Рис. 1. К интерполяции между станциями.

5. Рассмотрим теперь метод Дроздова — Шепелевского.

Проведем ось  $x$  вдоль отрезка, соединяющего две соседние станции, расстояние между которыми равно  $l$ , так что абсциссы станций будут  $\xi$  и  $\xi + l$  (рис. 1). Тогда формула линейной интерполяции величин  $f'$  в какую-либо точку  $\xi + x$  указанного отрезка имеет вид

$$f'(\xi + x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) f'(\xi) + \frac{x}{l} f'(\xi + l). \quad (19)$$

В действительности нам известны не точные значения  $f'(\xi)$  и  $f'(\xi + l)$  на станциях, а значения, измеренные с некоторыми ошибками  $\delta(\xi)$  и  $\delta(\xi + l)$ , которые мы будем считать случайными в указанном выше смысле. Тогда средний квадрат ошибки определения  $f'(\xi + x)$  по формуле (19) будет равен

$$E = \left\{ \left(1 - \frac{x}{l}\right) [f'(\xi) + \delta(\xi)] + \frac{x}{l} [f'(\xi + l) + \delta(\xi + l)] - f'(\xi + x) \right\}^2 \quad (20)$$

или на основании определения ковариационной функции и свойств случайных ошибок

$$E = 2 \left[ 1 - \frac{x}{l} + \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] m_f(0) + \left[ 1 - 2\frac{x}{l} + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \sigma_f^2 - 2 \left(1 - \frac{x}{l}\right) m_f(x) - 2\frac{x}{l} m_f(l - x) + 2\frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) m_f(l), \quad (21)$$

где предположена однородность и изотропия ковариационной функции, а также равенство средних квадратических ошибок наблюдений на двух станциях. Подставляя сюда выражение ковариационной функции через структурную

$$m_f(x) = m_f(0) - \frac{1}{2} b_f(x), \quad (22)$$

вытекающее из формул (5) и (6) при условии однородности и изотропии, можно переписать формулу (21) в виде

$$E = \left(1 - \frac{x}{l}\right) b_f(x) + \frac{x}{l} b_f(l - x) - \frac{x}{l} \left(1 - \frac{x}{l}\right) b_f(l) + \left[ 1 - 2\frac{x}{l} + 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \sigma_f^2. \quad (23)$$

На концах отрезка величина  $E$ , естественно, равна  $\sigma_f^2$ . Структурные функции большинства метеорологических элементов таковы, что величина  $E$  максимальна при  $x = \frac{l}{2}$ , т. е. для середины отрезка. Для этой точки формула (23) принимает вид

$$E = b_f\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{1}{4} b_f(l) + \frac{1}{2} \sigma_f^2. \quad (24)$$

Формула (24) представляет собой основу метода Дроздова — Шепелевского. Зная структурную функцию рассматриваемого метеорологического элемента в рассматриваемом районе, можно определить зависимость  $E$  от  $l$  и по этой зависимости, задав максимальную допустимую среднюю квадратическую ошибку  $\sqrt{E}$ , найти максимальное допустимое расстояние  $l$  между станциями. В большинстве работ с этой целью выдвигалось требование, чтобы средний квадрат ошибки интерполяции точных значений [т. е. правая часть формулы (24) без последнего члена] не превышал среднего квадрата  $\sigma_f^2$  ошибки наблюдений. Это соответствует условию  $E \leq \frac{3}{2} \sigma_f^2$ .

При таком подходе выводы о рациональной густоте сети станций для данного метеорологического элемента могут быть разными для разных районов, если структурная функция различна. Но в пределах заданного района (и заданного сезона) ответ дается одним числом — максимальным допустимым расстоянием  $l$  между станциями.

Если дисперсия  $D_f$  существенно меняется в рассматриваемом районе, то предпочтительнее производить линейную интерполяцию не  $f'$ , а нормированных отклонений  $\frac{f'}{\sqrt{D_f}}$ , т. е. вместо формулы (19) исходить из соотношения

$$f'(\xi + x) = \sqrt{D_f(\xi + x)} \left[ \left(1 - \frac{x}{l}\right) \frac{f'(\xi)}{\sqrt{D_f(\xi)}} + \frac{x}{l} \frac{f'(\xi + l)}{\sqrt{D_f(\xi + l)}} \right] \quad (25)$$

и, в частности, для середины отрезка

$$f'\left(\xi + \frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{D_f\left(\xi + \frac{l}{2}\right)} \left[ \frac{f'(\xi)}{\sqrt{D_f(\xi)}} + \frac{f'(\xi + l)}{\sqrt{D_f(\xi + l)}} \right]. \quad (26)$$

Тогда вместо формулы (24) будем иметь

$$E = D_f\left(\xi + \frac{l}{2}\right) \left\{ \beta_f\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{1}{4} \beta_f(l) + \left[ \frac{1}{D_f(\xi)} + \frac{1}{D_f(\xi + l)} \right] \sigma_f^2 \right\}$$

или, с большой точностью,

$$E = D_f\left(\xi + \frac{l}{2}\right) \left[ \beta_f\left(\frac{l}{2}\right) - \frac{1}{4} \beta_f(l) \right] + \frac{1}{2} \sigma_f^2. \quad (27)$$

Если по-прежнему исходить из заданного значения  $E$ , то допустимое расстояние теперь получится изменяющимся в пределах района вместе с изменением дисперсии. Вместе с тем можно фиксировать квадрат не абсолютной, а относительной ошибки интерполяции, т. е. величину меры ошибки интерполяции

$$\varepsilon = \frac{E}{D_f\left(\xi + \frac{l}{2}\right)}. \quad (28)$$

Действительно, если, скажем, в одной точке средняя квадратическая изменчивость температуры  $\sqrt{D_T}$  составляет, допустим,  $5^\circ$ , а в другой  $10^\circ$ , то одна и та же ошибка интерполяции, скажем,  $1^\circ$ , менее приемлема в первой точке, чем во второй. Тем не менее представляется более рациональным исходить из абсолютной, а не из относительной ошибки, поскольку для всех приложений климатологической информации важна именно абсолютная ошибка.

6. Вместо квадрата ошибки интерполяции на середину отрезка можно рассматривать среднее по отрезку значение квадрата ошибки

$$\bar{E}^{(l)} = \frac{1}{l} \int_{\xi}^{\xi+l} E(x) dx = \frac{1}{l} \int_0^l E(x) dx. \quad (29)$$

Подставляя (23) в (29), нетрудно получить выражение для  $\bar{E}^{(l)}$  через структурную функцию рассматриваемого метеорологического элемента и среднюю квадратическую ошибку наблюдений за ним [12]

$$\bar{E}^{(l)} = 2 \int_0^l (1-\zeta) b_f(\zeta l) d\zeta - \frac{1}{6} b_f(l) + \frac{2}{3} \sigma_f^2. \quad (30)$$

Можно думать, что с принципиальной точки зрения правильнее пользоваться формулой (30), чем формулой (24). Действительно, нас должны интересовать именно средние по территории значения ошибок, с какими требуется знать метеорологический элемент. Кроме того, иногда встречаются такие структурные функции, при которых максимум  $E(x)$  приходится не на середину  $x = \frac{l}{2}$  отрезка между станциями. В этих случаях использование формулы (24) едва ли целесообразно, в то время как формула (30) сохраняет свое значение.

Другое возможное обобщение методики Дроздова—Шепелевского было указано самими авторами методики и состоит в переходе от интерполяции вдоль отрезка к интерполяции на плоскости. Такое обобщение является вполне естественным. Во-первых, необходимо знать с определенной точностью значения метеорологического элемента не только на отрезках, соединяющих соседние станции, но и всюду на территории. Во-вторых, можно ожидать, что переход от одномерной интерполяции к плоской увеличит точность интерполяции и потому уменьшит требования к густоте сети.

Переходя от одномерной линейной интерполяции к линейной интерполяции на плоскости, необходимо, очевидно, задавать не только расстояние между соседними станциями, но и взаимное расположение станций. Кроме того, если при интерполяции использовать данные более чем трех станций, то линейную интерполяцию следует понимать в смысле метода наименьших квадратов, подобно тому, как это делается при объективном анализе метеорологических полей с помощью полиномов (в данном случае — полиномов первой степени). Иначе говоря, если откладывать координаты станций  $x_i, y_i$  по осям  $x$  и  $y$ , а значения  $\tilde{f}'(x_i, y_i)$  — по оси  $z$ , то следует разыскивать плоскость  $z = \tilde{f}(x, y)$  такую, чтобы сумма квадратов расстояний

$$\tilde{f}(x_i, y_i) - f'(x_i, y_i)$$

была бы минимальной. Результатом интерполяции будет значение  $\tilde{f}(x_0, y_0)$ , равное координате  $z$  точки найденной плоскости с горизон-

тальными координатами  $x_0, y_0$ , соответствующими интересующему нас пункту.

Нахождение формул такой интерполяции и оценка среднего квадрата ошибки ее не вызывает принципиальных трудностей при любом количестве и взаиморасположении станций. Однако если мы интересуемся лишь максимальным допустимым расстоянием между станциями, то целесообразно задавать простую, идеализированную схему взаимного расположения станций, например, предполагая, что станции образуют регулярную треугольную или квадратную сетку. С этой точки зрения наиболее простым обобщением методики Дроздова — Шепелевского является использование вместо формулы (24) выражения для среднего квадрата ошибки линейной интерполяции на центр равностороннего треугольника со стороной  $l$

$$E = b_f \left( \frac{l}{\sqrt{3}} \right) - \frac{1}{3} b_f(l) + \frac{1}{3} \sigma_f^2 \quad (31)$$

или центр квадрата со стороной  $l$

$$E = b_f \left( \frac{l}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{4} b_f(l) - \frac{1}{8} b_f(l\sqrt{2}) + \frac{1}{4} \sigma_f^2. \quad (32)$$

При структурных функциях, характерных для большинства метеорологических элементов, формулы (31) и (32) дают максимальные значения среднего квадрата ошибки по площади соответственно треугольника и квадрата. Аналогично предыдущему можно пользоваться формулами для средних по площади квадратов ошибок. Эти формулы сравнительно громоздки и потому мы их не приводим.

Хотя с принципиальной точки зрения вычисление  $E$  по формуле (31) или (32) предпочтительнее использования формулы (24), количественное различие между результатами таких вычислений оказывается обычно небольшим. Именно по этой причине расчеты по планированию сети станций, о которых говорилось выше, были выполнены на основании формулы (24).

В еще большей мере сказанное относится к привлечению информации с более удаленных станций. Например, выполняя интерполяцию на центр отрезка между двумя станциями, можно пытаться дополнительно привлечь данные в точках той же прямой, лежащих вне рассматриваемого отрезка. Точность результата интерполяции изменится при этом весьма мало.

Заметим еще, что вместо среднего квадрата ошибки интерполяции  $E$  иногда исходят из среднего квадрата  $\tilde{E}$  ошибки сопоставления, понимая под последней разность между результатом интерполяции и значением, которое могло бы быть измерено в той же точке. Так как измерения производятся с ошибками, то  $\tilde{E} > E$ , а именно, в рамках используемых предположений о случайных ошибках наблюдений

$$\tilde{E} = E + \sigma_f^2. \quad (33)$$

Так как соотношение (33) не зависит от расстояния  $l$  (и от способа интерполяции), то использование ошибок сопоставления эквивалентно использованию ошибок интерполяции.

7. Во всех предыдущих рассуждениях сведения о статистической структуре использовались лишь для оценки точности интерполяции, в то время как способ интерполяции задавался заранее независимо от структуры метеорологического элемента и точности наблюдений. Тем самым

заранее задавались коэффициенты, с которыми данные наблюдений входили в результат интерполяции — интерполяционные веса.

Возможен более совершенный подход, состоящий в том, что интерполяционные веса не задаются заранее, а разыскиваются на основании сведений о статистической структуре и точности наблюдений таким образом, чтобы средний квадрат ошибки интерполяции был минимальным по сравнению с его значениями при любом другом выборе весов. Такой способ называется оптимальной интерполяцией. Понятно, что средний квадрат ошибки оптимальной интерполяции, вообще говоря, меньше, чем средний квадрат ошибки интерполяции по любой заранее заданной формуле.

Остановимся вкратце на теории этого метода.

Пусть известны значения  $f'_i = f'(x_i, y_i)$  отклонений метеорологического элемента  $f$  от нормы в  $n$  точках  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ .

Будем искать значение  $f'_0 = f'(x_0, y_0)$  этого отклонения в интересующей нас точке  $(x_0, y_0)$  в виде

$$f'_0 = p_1 f'_1 + p_2 f'_2 + \dots + p_n f'_n = \sum_{i=1}^n p_i f'_i. \quad (34)$$

Здесь  $p_i$  представляют собой интерполяционные веса, пока не определенные. Так как значения  $f'_i$  известны нам не точно, а с некоторыми случайными ошибками наблюдений  $\delta_f(x_i, y_i) = \delta_i$ , то средний квадрат ошибки интерполяции по формуле (34) равен

$$E = \sum_{i=1}^n [p_i (f'_i + \delta_i) - f'_0]^2, \quad (35)$$

где в качестве  $f'_i$  и  $f'_0$  фигурируют истинные, а не измеренные значения. Пользуясь определением ковариационной функции (4) и свойствами случайных ошибок наблюдений (12) и (13), можно переписать формулу (35) в виде

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j m_f(x_i, y_i, x_j, y_j) + \sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_f^2(x_i, y_i) - 2 \sum_{i=1}^n p_i m_f(x_i, y_i, x_0, y_0) + D_f(x_0, y_0)$$

или, обозначая для краткости

$$m_f(x_i, y_i, x_j, y_j) = m_{ij}; \quad \sigma_f^2(x_i, y_i) = \sigma_i^2, \quad (36)$$

в виде

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j m_{ij} + \sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n p_i m_{i0} + m_{00}. \quad (37)$$

С помощью формулы (37) может быть вычислен средний квадрат ошибки интерполяции при любых интерполяционных весах  $p_i$ . Например, если положить в (37)  $n=2$ ,  $p_1=p_2=\frac{1}{2}$ ,  $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_f$ ,  $m_{10}=m_{20}=m_f\left(\frac{l}{2}\right)$ ,  $m_{12}=m_f(l)$ , то получим формулу, эквивалентную формуле (24), для вычисления среднего квадрата ошибки линейной интерполяции на середину отрезка.

Будем теперь искать веса  $p_i$  из условия, чтобы величина  $E$  была минимальной. Приравнявая с этой целью производные от  $E$  по всем  $p_i$  нулю, получим систему  $n$  линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} p_j + \sigma_i^2 p_i = m_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (38)$$

для определения  $n$  весов  $p_i$  по известным значениям ковариационной функции и средних квадратических ошибок наблюдений. Интерполяция, осуществляемая по формуле (34) с весами, находимыми из системы (38), называется оптимальной интерполяцией. Комбинируя уравнения (38) с равенством (37), можно получить более простую формулу для  $E$

$$E_{\text{опт}} = m_{00} - \sum_{i=1}^n p_i m_{i0}. \quad (39)$$

Но в отличие от (37) формула (39) верна для среднего квадрата ошибки не любой, а лишь оптимальной интерполяции.

Если можно воспользоваться предположением об однородности и изотропии для ковариационной функции, включающим также постоянство дисперсии  $D=m(0)$ , то использование оптимальной интерполяции существенно облегчается, так как величины  $m_{ij}$  ( $i$  и  $j=0, 1, \dots, n$ ) зависят тогда только от расстояния между соответствующими точками. В этом случае удобно привести уравнения (38) и (39) к безразмерному виду путем деления их на  $D$ . Тогда получим соответственно

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij} p_j + \eta_i p_i = \mu_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (40)$$

и

$$\varepsilon_{\text{опт}} = 1 - \sum_{i=1}^n p_i \mu_{i0}, \quad (41)$$

где  $\mu_{ij}$  представляют собой значения корреляционных функций, а через  $\eta_i$  и  $\varepsilon_{\text{опт}}$  обозначены средние квадраты относительных ошибок наблюдения и оптимальной интерполяции, которые мы будем называть мерами ошибок наблюдения и интерполяции,

$$\varepsilon = \frac{E}{D}; \quad \eta_i = \frac{\sigma_i^2}{D}. \quad (42)$$

Именно в таком виде оптимальная интерполяция используется при объективном анализе аэрологических полей.

Предположение об однородности и изотропии обычно лучше выполняется для корреляционной функции, чем для ковариационной. Имея это в виду, заменим в формулах (38) и (39)  $m$  через  $\mu$  по формуле (8). Введя далее обозначение

$$q_i = \sqrt{\frac{D_i}{D_0}} p_i, \quad (43)$$

где  $D_i = D_f(x_i, y_i)$  — дисперсия в  $i$ -той точке, получим для определения  $q_i$  систему, совпадающую по виду с выражением (40),

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij} q_j + \eta_i q_i = \mu_{i0} \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (44)$$

и выражение для меры ошибки интерполяции, совпадающее с (41),

$$\varepsilon_{\text{опт}} = 1 - \sum_{i=1}^n q_i v_{i0}, \quad (45)$$

где в этом случае

$$\varepsilon = \frac{E}{D_0}; \quad \eta_i = \frac{\sigma_i^2}{D_i}. \quad (46)$$

Как видно из формул (43) и (34), величины  $q_i$  представляют собой веса для интерполяции нормированных отклонений  $\frac{f'}{\sqrt{D}}$

$$\frac{f_0'}{\sqrt{D_0}} = \sum_{i=1}^n q_i \frac{f_i'}{\sqrt{D_i}}. \quad (47)$$

В случае однородности поля дисперсий

$$D_0 = D_1 = D_2 = \dots = D_n = D$$

из формул (44), (45), (46) и (47) получим, как частный случай, формулы (40), (41), (42) и (34).

Заметим, что средний квадрат ошибки интерполяции в общем случае (37) можно тоже выразить через веса  $q_i$ , а именно:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_i q_j v_{ij} + \sum_{i=1}^n q_i^2 \eta_i - 2 \sum_{i=1}^n q_i v_{i0} + 1, \quad (48)$$

где  $\eta_i$  и  $\varepsilon$  определяются формулами (46), а сама интерполяция проводится по формуле (47) при любых  $q_i$ .

8. Как уже упоминалось, в работах советских исследователей выполнены численные эксперименты по конкретному планированию аэрологической сети станций. Коротко говоря, эти эксперименты состоят в следующем. По данным о распределении аэрологических станций по площади северного полушария вычисляется с помощью оптимальной интерполяции распределение средней квадратической ошибки  $\sqrt{E}$  по этой площади для рассматриваемого метеорологического элемента. В точках, где величина  $\sqrt{E}$  максимальна, предлагается основать новые станции. Затем поле  $\sqrt{E}$  вычисляется заново в предположении, что рекомендуемые станции уже существуют, и снова находятся точки максимума  $\sqrt{E}$  и т. д.

Применительно к наземной сети станций такое конкретное планирование едва ли целесообразно, по крайней мере в настоящее время. Во-первых, такие расчеты для наземной сети затруднены вследствие того, что статистическая структура наземных полей различна в разных физико-географических условиях и во многих случаях еще очень плохо изучена. Во-вторых, целесообразное положение новых наземных станций в большей степени зависит от особенностей территории и от нужд оперативного обслуживания, чем это имеет место для аэрологических станций. По всем этим причинам для наземной сети предпочтительнее лишь указывать допустимые расстояния между станциями, не занимаясь расчетами оптимального положения новых станций. Поэтому достаточно ограничиться расчетами точности оптимальной интерполяции при простых, идеализированных схемах расположения станций.



Так, например, если оптимальная интерполяция производится на центр образованного станциями правильного треугольника

$$\mu_{12} = \mu_{13} = \mu_{23} = \mu(l); \quad \mu_{10} = \mu_{20} = \mu_{30} = \mu\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right),$$

где  $l$  — сторона треугольника, и меры ошибки наблюдений на этих станциях одинаковы ( $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$ ), то одинаковы и веса  $q_i$  ( $q_1 = q_2 = q_3 = q$ ); для определения  $q$  получаем из (44) выражение

$$[1 + \eta + 2\mu(l)] q = \mu\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right). \quad (49)$$

Подставляя  $q$  из (49) в (44), получим формулу для меры ошибки оптимальной интерполяции

$$\varepsilon_{\text{опт}} = 1 - \frac{3\mu^2\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \eta + 2\mu(l)}. \quad (50)$$

Таким же образом можно получить формулы для меры ошибки оптимальной интерполяции на середину отрезка

$$\varepsilon_{\text{опт}} = 1 - \frac{2\mu^2\left(\frac{l}{2}\right)}{1 + \eta + \mu(l)} \quad (51)$$

и на центр квадрата

$$\varepsilon_{\text{опт}} = 1 - \frac{4\mu^2\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right)}{1 + \eta + 2\mu(l) + \mu(l\sqrt{2})}. \quad (52)$$

Соответствующие формулы для меры ошибки линейной интерполяции легко получаются из (31), (24) и (32) и имеют следующий вид: для центра треугольника

$$\varepsilon_l = \frac{4}{3} - 2\mu\left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right) + \frac{2}{3}\mu(l) + \frac{1}{3}\eta, \quad (53)$$

для середины отрезка

$$\varepsilon_l = \frac{3}{2} - 2\mu\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{1}{2}\mu(l) + \frac{1}{2}\eta, \quad (54)$$

для центра квадрата

$$\varepsilon_l = \frac{5}{4} - 2\mu\left(\frac{l}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{2}\mu(l) + \frac{1}{4}\mu(l\sqrt{2}) + \frac{1}{4}\eta. \quad (55)$$

Сравнивая их соответственно с формулами (50), (51) и (52), можно показать, что мера ошибки линейной интерполяции превосходит меру ошибки оптимальной интерполяции. Следующий простой пример показывает, что отличие между  $\varepsilon_{\text{опт}}$  и  $\varepsilon_l$  может быть велико.

Пусть производится интерполяция на середину отрезка, причем отрезок настолько велик, что  $\mu\left(\frac{l}{2}\right) = \mu(l) = 0$ . Тогда по формуле (54) по-

лучим  $\varepsilon_l = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\eta$ , т. е. средний квадрат ошибки линейной интерполяции будет превышать  $\frac{3}{2}D_0$ . В случае же оптимальной интерполяции будем иметь, согласно (51),  $\varepsilon = 1$ , так что средний квадрат ошибки интерполяции будет равен дисперсии  $D_0$ . При этом интерполяционные веса получаются равными нулю, так что и  $f'_0 = 0$ , и результат оптимальной интерполяции равен среднему климатологическому значению.

Оценка соотношения между точностью линейной и оптимальной интерполяции позволяет заключить, что оптимальная интерполяция имеет существенное преимущество в следующих случаях:

а) если рассматриваются расстояния  $l$ , для которых корреляционная функция мала (редкая сеть станций);

б) если станции расположены существенно несимметрично относительно точки, в которую производится интерполяция;

в) если точность наблюдений (или микроклиматическая погрешность) на разных станциях существенно различна;

г) если ошибки наблюдений или микроклиматические ошибки сравнимы с изменчивостью рассматриваемого элемента.

Все эти случаи практически осуществляются при различных применениях оптимальной интерполяции, например, при объективном анализе метеорологических полей. Однако при оценке допустимых расстояний между станциями случаи «а», «б» и «в» почти не встречаются. Действительно, при этом рассматривается симметричное расположение станций и точность наблюдений на них предполагается одинаковой. Расстояния  $l$ , с которыми при этом приходится иметь дело, малы в том смысле, что значения корреляционной функции близки к единице. Поэтому при расчетах рациональных расстояний между станциями для метеорологических элементов, измеряемых с большой точностью (например, давление и температура воздуха), можно пользоваться как оптимальной, так и линейной интерполяцией. Для элементов, определяемых с малой точностью или с большой микроклиматической погрешностью (осадки, снежный покров, температура поверхности почвы) необходимо исходить лишь из точности оптимальной интерполяции.

9. При оценке допустимых расстояний между станциями необходимо иметь в виду, что для некоторых метеорологических элементов, таких, как осадки, снежный покров, испарение, радиационный баланс, основной интерес представляют значения не в точках, а осредненные по некоторым площадям. Применительно к таким элементам следует исходить не из точности интерполяции в точку, а из точности определения средних по площади значений. Такие оценки также могут быть выполнены на основании сведений о статистической структуре рассматриваемых полей. Понятно, что задание некоторой точности средних по площади значений требует менее густой сети, чем задание такой же точности для точечных значений.

Значения некоторого элемента, осредненные по площади, в среднем в меньшей степени отклоняются от норм, чем значения в точках. Поэтому заменять среднее по площади значением в отдельной точке, как это часто делается, значит мириться с ошибками, которые носят систематический характер — получаются слишком большие отклонения от норм. Правильнее определять среднее значение по площади с помощью способа, представляющего собой естественное обобщение метода оптимальной интерполяции и состоящего в следующем.

Будем искать среднюю по площади  $S$  величину отклонения  $f'$  элемента  $f$  от нормы,

$$\bar{f}'^{(S)} = \frac{1}{S} \iint_{(S)} f'(x, y) dx dy, \quad (56)$$

в виде линейной комбинации наблюдаемых значений

$$\bar{f}'^{(S)} = \sum_{i=1}^n a_i f'(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n a_i f'_i, \quad (57)$$

где веса  $a_i$  определим из требования, чтобы средний квадрат замены такой величины (56) приближенным значением (57) с учетом ошибок наблюдений  $\delta_i$

$$E = \left[ \sum_{i=1}^n a_i (f'_i + \delta_i) - \frac{1}{S} \iint_{(S)} f'(x, y) dx dy \right]^2 \quad (58)$$

был бы наименьшим. Такая задача вполне аналогична задаче оптимальной интерполяции и отличается от нее лишь тем, что разыскивается не значение в точке, а среднее по площади. Соответственно уравнения для определения весов  $a_i$  и для вычисления  $E$  аналогичны уравнениям (37), (38) и (39) и имеют вид:

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j m_{ij} + \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i r_i + F, \quad (59)$$

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} a_j + \sigma_i^2 a_i = r_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (60)$$

$$E_{\text{опт}} = F - \sum_{i=1}^n a_i r_i. \quad (61)$$

Здесь  $F$  представляет собой дисперсию среднего по площади значения, т. е. средний квадрат величины  $\bar{f}'^{(S)}$  из (56),

$$F = \left[ \frac{1}{S} \iint_{(S)} f'(x, y) dx dy \right]^2, \quad (62)$$

а  $r_i$  — значения взаимной ковариационной функции, описывающей статистическую связь точечных значений с осредненной по площади величиной,

$$r_i = f'(x_i, y_i) \frac{1}{S} \iint_{(S)} f'(x, y) dx dy. \quad (63)$$

Как видно из (62) и (63), величины  $F$  и  $r_i$  могут быть выражены через ковариационную функцию самого элемента, а именно:

$$F = \frac{1}{S^2} \iint_{(S)} \iint_{(S)} m(x, y, x', y') dx dy dx' dy', \quad (64)$$

$$r_i = \frac{1}{S} \iint_{(S)} m(x, y, x_i, y_i) dx dy. \quad (65)$$

В случае однородности и изотропии для ковариационной функции вычисление интегралов в формулах (64) и (65) для площадей достаточно простого вида не представляет существенных трудностей. Если же предполагать однородность и изотропию по отношению к корреляционным, а не к ковариационным функциям, то можно перейти в соотношениях (60), (61), (64) и (65) к таким функциям подобно тому, как это было сделано для обычной оптимальной интерполяции.

Рассмотрим простейший случай, когда  $n=1$ . Тогда имеется лишь одно уравнение (60)

$$(m_{11} + \sigma_1^2) a_1 = r_1,$$

откуда

$$a_1 = \frac{\frac{r}{m_{11}}}{1 + \frac{\sigma_1^2}{m_{11}}}. \quad (66)$$

Отношение  $\frac{\bar{r}}{m_{11}}$  представляет собой коэффициент корреляции между значением в точке и средним по площади и потому оно меньше единицы. Следовательно, вес  $a_1$  есть всегда правильная дробь, тем меньшая, чем больше площадь  $S$  и чем больше ошибки наблюдений и микроклиматические погрешности. Вес  $a_1$  может рассматриваться с этой точки зрения как коэффициент редукции данных наблюдений на станции при отнесении этих данных к некоторой площади. Обычно такие коэффициенты пытаются находить эмпирическим путем. Формулы (66) и (65) дают возможность вычислять этот коэффициент при известной статистической структуре метеорологического элемента.

В общем случае среднее по площади определяется по данным наблюдений не в одной, а в нескольких точках. Тогда средний квадрат ошибки определения среднего по площади может быть найден с помощью формул (60) и (61). В случае равномерного распределения станций он зависит от статистической структуры рассматриваемого метеорологического элемента, от точности наблюдений, от расстояния между соседними станциями и от площади осреднения.

10. В большей части исследований, выполненных в Советском Союзе по проблеме рационального размещения сети наземных метеорологических станций, использовалась методика Дроздова — Шепелевского. Эта методика предусматривала следующие этапы работы.

1) Вычисление структурной функции рассматриваемого метеорологического элемента. Это вычисление производилось вручную и потому объем его был сравнительно невелик. В частности, расчеты велись не для всех пар из заданной совокупности станций, а лишь для некоторых избранных пар. Структурная функция вычислялась отдельно для разных физико-географических районов и для разных месяцев года. Результатами таких вычислений были графики зависимости структурной функции от расстояния между станциями.

2) Определение среднего квадрата ошибок наблюдений (включая микроклиматическую погрешность) путем экстраполяции структурных функций на нулевое расстояние и введение соответствующих поправок в структурные функции.

3) Нахождение средней квадратической ошибки  $\sqrt{E}$  линейной интерполяции элемента на центр отрезка между станциями как функции расстояния между станциями и определение максимального допустимого расстояния между станциями.

Из изложенного ранее ясно, что в настоящее время эта методика может быть существенно уточнена. В особенности это относится к вычислениям структурной (или корреляционной) функции, результаты которых нельзя считать очень надежными. Тем не менее основные выводы, которые были сделаны на основании указанного цикла исследований, едва ли будут поколеблены, по крайней мере с качественной стороны, в результате более точных оценок. Эти выводы состоят в следующем.

Основные метеорологические элементы, традиционно наблюдаемые на станциях наземной сети, можно в первом приближении разделить на три группы соответственно требованиям к густоте сети наблюдений над этими элементами.

К первой группе, требующей наименее густой сети станций, относятся давление воздуха, температура почвы на глубинах и продолжительность солнечного сияния. Точнее говоря, речь идет о значениях давления за отдельные сроки наблюдений (срочных значениях давления), средних месячных значениях температуры почвы на глубинах и о продолжитель-

ности солнечного сияния за месяц. Для равнинных областей СССР допустимое расстояние между пунктами наблюдений за этими элементами составляет 150—200 км.

Вторую группу метеорологических элементов, занимающую с рассматриваемой точки зрения промежуточное положение, составляют температура и влажность воздуха, скорость ветра и количество облачности. Для температуры воздуха требования к густоте сети обычно несколько меньшие, чем для других перечисленных элементов, однако это различие невелико. Допустимым расстоянием между станциями для этой группы элементов является 50—60 км. Это относится главным образом к средним суточным значениям, хотя для отдельных сроков требования приблизительно такие же. В последнем случае имеется в виду интерполяция наблюдений, производимых в один и тот же момент по местному времени.

Наконец, к третьей группе относятся осадки, характеристики снежного покрова, а также элементы, объединяемые термином «метеорологические явления» (грозы, туманы, метели и др.). Для элементов этой группы необходимы расстояния между пунктами наблюдения, не превышающие 30 км. Но и в этом случае применительно, например, к осадкам речь идет о допустимости интерполяции не суточных, а лишь месячных сумм. Заметим в связи с этим, что для повторяемости атмосферных явлений за малые интервалы времени вообще трудно говорить об однозначном определении таких характеристик, как корреляционная и структурная функция, поскольку атмосферные явления осуществляются лишь изредка. Это же относится и к осадкам, по крайней мере к их суммам за отдельные дни. Можно думать, что более определенные выводы о требованиях к сети станций для этих элементов можно получить, если отправляться не от интерполяции точечных значений, а от определения средних по площади. О применении такого подхода к осадкам будет сказано ниже. Что касается других элементов, то для них подобные исследования не проводились.

11. Приведенные оценки допустимых расстояний относятся только к равнинной местности; в горных условиях требования к густоте сети более жесткие. Кроме того, эти оценки представляют собой лишь некоторые средние цифры. В действительности требования к густоте сети существенно меняются от одного физико-географического района к другому соответственно изменению статистической структуры метеорологических элементов. Наконец, следует помнить, что указанные оценки базируются на сравнительно мало надежных данных о структурных функциях.

По всем этим причинам приведенные оценки могут рассматриваться лишь в качестве первого приближения. Основываясь на них, можно получить лишь общие представления о планировании сети станций — представления, которые необходимо конкретизировать применительно к различным физико-географическим условиям на основе детальных и надежных сведений о структуре метеорологических полей.

Хотя вопросы планирования климатологических станций часто рассматривают вне связи с потребностями синоптического обслуживания, в действительности многие климатологические станции являются также синоптическими. Это вполне естественно, так как содержание отдельной климатологической сети и отдельной синоптической сети вело бы к неоправданным материальным затратам. Поэтому при планировании сети климатологических станций необходимо также иметь в виду потребности синоптического обслуживания.

Далее следует учитывать, что в связи со строительством крупных сооружений и другими хозяйственными мероприятиями у различных

ведомств часто возникает потребность в детальных сведениях о метеорологическом режиме в отдельных пунктах или вдоль отдельных трасс. В таких случаях организуются специальные станции, потребность в существовании которых сравнительно скоро отпадает. Такие станции, ввиду отсутствия на них длинных рядов наблюдений, явно нерационально включать в общее число климатологических станций.

Наконец, необходимо удовлетворить потребность в станциях, данные которых могут использоваться для изучения долговременных изменений климата. К длине рядов наблюдений на таких станциях, к точности и репрезентативности наблюдений на них должны, естественно, предъявляться повышенные требования.

12. На основании сказанного в предыдущих пунктах можно сформулировать следующие общие соображения о структуре сети климатологических станций.

Эта сеть прежде всего делится на основную сеть и специальные станции. Специальные станции организуются на сравнительно короткий срок (несколько лет). Данные наблюдений этих станций не подлежат обработке и хранению вместе с данными основной сети, а изучаются отдельно, в связи с потребностями, для удовлетворения которых была организована каждая такая станция.

В отличие от специальных станций закрытие станций основной сети может практиковаться лишь в исключительных случаях. Если вследствие застройки территории или по другим причинам станция основной сети перестает быть репрезентативной для окружающей территории, допускается перенос станции на небольшое расстояние. Факт такого переноса должен быть каждый раз тщательно оговорен. При планировании станций основной сети необходимо стремиться к тому, чтобы переносы происходили возможно реже.

По объему наблюдений станции основной сети делятся на три группы (что примерно соответствует классификации, принятой в ВМО).

На станциях первой группы производятся наблюдения над атмосферными явлениями, видимостью, облачностью, осадками, снежным покровом, температурой воздуха и почвы, влажностью воздуха, ветром, давлением, солнечным сиянием. Рациональное расстояние между станциями этой группы составляет в среднем 150—200 км и должно уточняться применительно к конкретному физико-географическому району.

Из числа станций первой группы должны быть выделены реперные станции. Реперные станции служат в основном для двух целей: для изучения долговременных изменений климата и для корректировки данных других станций. Соответственно этим целям в качестве реперных следует выбирать станции, уже имеющие возможно более длинные ряды наблюдений и притом такие станции, необходимость переноса которых в будущем наименее вероятна. На реперных станциях должна быть наиболее доброкачественная и наиболее тщательно поверяемая аппаратура.

Оценка рациональной густоты реперных станций должна производиться по данным о статистической структуре средних месячных значений метеорологических элементов. Систематических исследований такого рода пока не было. Согласно ориентировочным данным, реперные станции можно располагать на расстояниях 300—400 км одна от другой, так что приблизительно каждая четвертая или каждая пятая из станций первой группы должна быть реперной.

Аэрологические станции, на которых выполняются так называемые геофизические наблюдения (актинометрические, теплобалансовые, озонметрические, наблюдения над элементами атмосферного электричества и т. п.), как правило, также должны быть на базе станций первой группы.

Объем наблюдений на станциях второй группы меньше, чем на станциях первой группы. На них не производится наблюдений над продолжительностью солнечного сияния и температурой почвы на глубинах. Кроме того, на станциях второй группы можно, как правило, не измерять давление воздуха. Исключение составляют горные станции. Кроме того, если станция является также синоптической, то должна определяться так называемая барическая тенденция — изменение давления за последние три часа. Однако для этой цели не обязательно измерять давление с помощью барометра, а можно пользоваться относительным (дифференциальным) прибором.

Рациональное расстояние между станциями второй группы составляет в среднем около 50—60 км. При этом приблизительно каждая десятая станция второй группы является станцией первой группы.

Третью группу станций составляют так называемые посты, на которых производятся наблюдения лишь над атмосферными явлениями, осадками и снежным покровом или даже лишь над некоторыми из этих элементов. Рациональное расстояние между такими станциями составляет в среднем 25—30 км на равнинной территории и примерно вдвое меньше в горных районах. Весьма вероятно, что требования к густоте сети этих станций в дальнейшем существенно понизятся благодаря разработке радиолокационного метода определения осадков. Однако в настоящее время этот метод еще недостаточно точен. Кроме того, надо иметь в виду, что и после внедрения радиолокационной аппаратуры будет необходимо некоторое время производить параллельно с радиолокационными и обычные осадкомерные наблюдения.

13. В последнее время в связи с интересом, проявленным Комиссией по климатологии ВМО к проблеме рационального размещения сети станций, в ГГО были выполнены исследования по некоторым аспектам этой проблемы. Ниже кратко излагаются постановка и результаты некоторых из этих исследований, проведенных под руководством Р. Л. Кагана.

Как уже упоминалось, при оценке сети осадкомерных станций важно учитывать, что основной интерес представляют не значения осадков в отдельных точках, а величины, осредненные по той или иной площади (или суммы осадков по площади). Соответственно и требования к густоте сети осадкомерных станций должны базироваться на задании точности определения средних по площади осадков.

Для изучения этого вопроса нужно прежде всего знать корреляционные функции обычных точечных значений осадков. Эти функции были вычислены по методике, описанной выше, для ряда районов СССР и для сумм осадков за различные периоды. Вычисления велись в предположении об однородности и изотропии в каждом районе.

Результаты этих вычислений показали, что корреляционные функции осадков существенно различны в разных физико-географических районах. Так, на рис. 2 приведены корреляционные функции  $\mu(\rho)$  месячных сумм осадков для трех районов. Мы видим, что корреляционная функция в районе Приморья затухает с ростом расстояния  $\rho$  существенно быстрее, чем в районе Валдая, а на Украине — быстрее, чем в Приморье. Этот результат хорошо согласуется с физико-географическими особенностями указанных районов. Он означает, что требования к густоте сети станций должны быть более жесткими, допустим, для Украины, чем для района Валдая.

Естественно также, что корреляционная функция существенно зависит от интервала суммирования осадков. Так, на рис. 3 показаны корреляционные функции сумм жидких осадков за 10 дней, за месяц и за сезон для района Валдая. Чем за больший интервал суммируются осадки, тем

медленнее затухает их корреляционная функция с ростом расстояния. Относительная ошибка определения сумм осадков (включающая микроклиматическую погрешность) также возрастает с уменьшением интервала времени, как это видно из значений меры ошибки наблюдений  $\eta$ ,

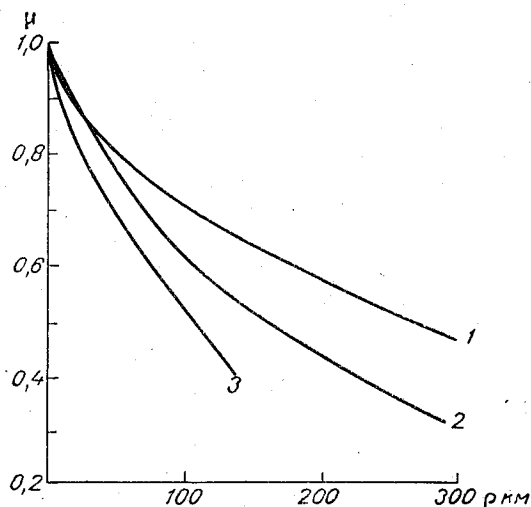


Рис. 2. Корреляционные функции месячных сумм жидких осадков для районов Валдая (1), Приморья (2) и Украины (3).

приведенных на рис. 3. Отсюда вытекает, что требования к густоте сети являются тем более жесткими, чем за меньший интервал времени необходимо знать суммы осадков.

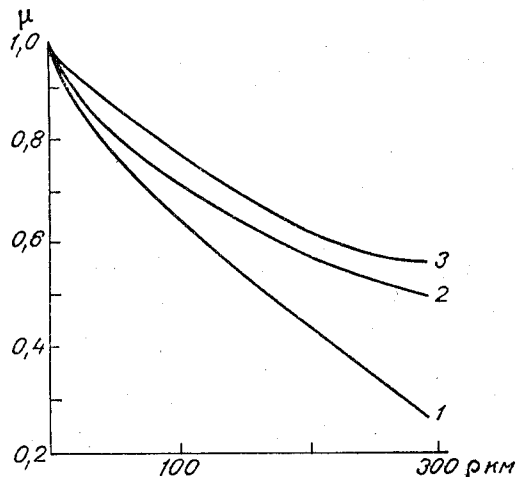


Рис. 3. Корреляционные функции сумм жидких осадков для района Валдая.  
1 — 10 дней,  $\eta=0,005$ ; 2 — месяц,  $\eta=0,003$ ; 3 — сезон,  $\eta=0,002$ .

Зная корреляционную функцию точечных значений, можно с помощью формулы (64) вычислить взаимную корреляционную функцию  $r(\rho)$ , описывающую корреляцию между осадками в точке и средними по площади, а с помощью формулы (65) определить средний квадрат  $F$  суммы осадков, осредненных по площади. На рис. 4 представлены в качестве при-



мера результаты таких вычислений для месячных сумм осадков в районе Валдая. На этом рисунке приведены нормированные значения величин  $r$  и  $F$ , а именно значения, деленные на дисперсию  $D$  точечных величин. Область осреднения, для которой выполнены вычисления, представляет собой квадрат с заданной площадью  $F$ . В этом случае взаимная корреляционная функция зависит, строго говоря, не только от расстояния  $\rho$  между точкой и центром квадрата, но и от расположения точки по отношению к квадрату (такой зависимости не было бы, если бы областью осреднения был круг). Вычисления показывают, однако, что влияние расположения точки на значения взаимной корреляционной функции

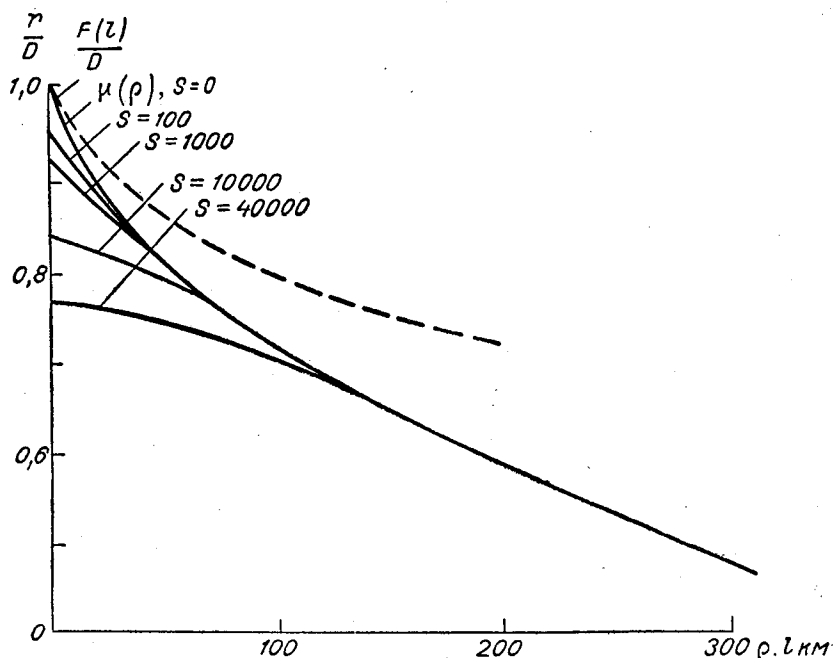


Рис. 4. Функции  $\frac{r(\rho)}{D}$  (сплошные кривые) и величины  $\frac{F}{D}$  (прерывистая кривая) для месячных сумм жидких осадков в районе Валдая в зависимости от площади осреднения  $S = l^2$ .

весьма мало и им можно пренебречь. Более того, результаты расчетов практически остаются в силе применительно к любым, не слишком вытянутым областям осреднения.

Чем меньше расстояние от точки до центра области осреднения по сравнению с размерами последней, тем меньше взаимная корреляционная функция по сравнению с автокорреляционной функцией точечных величин. Весьма интересно, что это различие быстро уменьшается с ростом  $\rho$ . Практически взаимная корреляционная функция совпадает с автокорреляционной начиная уже с расстояния  $\rho = \sqrt{S}$ , т. е. когда точка отстоит от области осреднения на величину радиуса этой области.

Что касается величины  $\frac{F}{D}$ , то для заданной площади она, естественно, меньше, чем коэффициент корреляции  $r(0)$  между средней по

площади и значением в ее центре. Это различие возрастает с ростом площади  $S$ .

14. Расчеты, подобные описанным, были выполнены для нескольких районов применительно к суммам осадков за различные интервалы времени. С помощью таких данных можно вычислить точность определения осадков, осредненных по области любой площади  $S$  при заданном расположении станций.

Эти вычисления могут быть существенно упрощены в том случае, если станции расположены равномерно и если расстояние между станциями мало по сравнению с размером области осреднения. Как показывают оценки, в этом случае точность оптимального определения среднего по площади значения почти не отличается от точности простой замены этого значения средним арифметическим из данных на станциях по формуле

$$\bar{f}'^{(S)} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i', \quad (67)$$

так что все веса

$$a_i = \frac{1}{n}. \quad (68)$$

Подставляя (68) в (59), получаем для этого случая формулу для среднего квадрата ошибки определения средней по площади

$$E = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n r_i + F, \quad (69)$$

где еще предполагается, что средняя квадратическая ошибка измерений  $\sigma_i$  одинакова на всех станциях ( $\sigma_i = \sigma$ ).

С помощью формулы (69) были выполнены расчеты средней квадратической ошибки  $\sqrt{E}$  определения средней по области суммы осадков как функции площади области  $S$  и количества станций в этой области  $n$ . Вычисления были проведены применительно к суммам осадков за различные интервалы времени и для различных физико-географических районов. В качестве примера в табл. 1 приведены результаты таких расчетов для сумм за 10 дней и за месяц и для двух районов. Величины, приведенные в табл. 1, представляют собой отношение средней квадратической ошибки  $\sqrt{E}$  определения средней по площади  $S$  суммы осадков к среднему значению этой суммы, которое принято равным

$$\bar{f}^{(S)} \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{f}_i. \quad (70)$$

Данные табл. 1 показывают, что точность месячных сумм осадков примерно в 1,5 раза выше точности сумм за 10 дней. Эта точность весьма существенно различается для разных физико-географических районов, так что и требования к густоте сети осадкомерных станций весьма различны в разных районах. Так, при пяти станциях на заданной площади в районе Валдая обеспечивается примерно такая же точность, как при двадцати станциях в районе Украины.

Погрешность определения средних по площади  $S$  осадков сравнительно медленно возрастает с увеличением площади  $S$  и сравнительно быстро убывает с увеличением числа станций  $n$ . Отсюда, в частности, следует, что при фиксированной плотности сети станций ошибка убывает с ростом площади  $S$ .

Таблица 1

Относительная ошибка  $\frac{\sqrt{E}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{f}_i} \cdot 100\%$  определения средней по площади суммы

осадков за 10 дней ( $t=10$ ) и за месяц ( $t=30$ ) для районов Валдая (В) и Украины (У)

| n  | t  | Район | S км <sup>2</sup> |    |     |     |      |      |
|----|----|-------|-------------------|----|-----|-----|------|------|
|    |    |       | 10                | 50 | 100 | 500 | 1000 | 2000 |
| 2  | 10 | В     | 8                 | 11 | 13  | 16  | 18   | 19   |
|    |    | У     | 23                | 27 | 30  | 33  | 35   | 38   |
|    | 30 | В     | 5                 | 8  | 8   | 10  | 11   | 12   |
|    |    | У     | 13                | 15 | 16  | 19  | 20   | 21   |
| 5  | 10 | В     | 5                 | 7  | 8   | 10  | 11   | 12   |
|    |    | У     | 14                | 17 | 19  | 21  | 22   | 24   |
|    | 30 | В     | 3                 | 5  | 5   | 6   | 7    | 7    |
|    |    | У     | 8                 | 9  | 10  | 12  | 13   | 13   |
| 10 | 10 | В     | 4                 | 5  | 6   | 7   | 8    | 9    |
|    |    | У     | 10                | 12 | 13  | 15  | 16   | 17   |
|    | 30 | В     | 2                 | 3  | 4   | 4   | 5    | 5    |
|    |    | У     | 6                 | 7  | 7   | 9   | 9    | 10   |
| 20 | 10 | В     | 3                 | 4  | 4   | 5   | 6    | 6    |
|    |    | У     | 7                 | 8  | 9   | 10  | 11   | 12   |
|    | 30 | В     | 2                 | 2  | 3   | 3   | 4    | 4    |
|    |    | У     | 4                 | 5  | 5   | 6   | 6    | 7    |
| 50 | 10 | В     | 2                 | 2  | 2   | 3   | 4    | 4    |
|    |    | У     | 5                 | 5  | 6   | 7   | 7    | 8    |
|    | 30 | В     | 1                 | 2  | 2   | 2   | 2    | 2    |
|    |    | У     | 3                 | 3  | 3   | 4   | 4    | 4    |

Пользуясь подобными таблицами, можно определять минимальное необходимое количество станций, равномерно распределенных на заданной площади, обеспечивающее заданную точность суммы осадков за определенный период, осредненной по этой площади.

Вместе с тем приходится считаться с реально существующей неравномерной сетью. Очевидно, что при прочих равных условиях неравномерная сеть станций обеспечивает меньшую точность. Насколько это существенно, можно видеть из следующего примера.

На рис. 5 приведено расположение станций на площади квадрата  $100 \times 100$  км<sup>2</sup>, используемых для оценки средней по этой площади суммы осадков. Для такого расположения выполнены оценки при использовании корреляционной функции месячных сумм жидких осадков для района Валдая.

На рис. 5 приведены также веса  $a_i$  для оптимального определения средней по площади, найденные путем решения системы уравнений (60). Эти веса существенно отличаются от значения  $\frac{1}{n} = 0,200$ , которое используется при замене средней по площади средним арифметическим из данных наблюдений. Именно веса станций, близких одна к другой, получаются существенно меньшими, а вес единственной станции на западе площади — существенно большим чем 0,200.

Соответственно этому относительная погрешность получается меньшей, если пользоваться оптимальными весами, а именно 12% вместо 15%. Вместе с тем обе эти величины существенно превосходят относительную ошибку для случая пяти равномерно расположенных станций, которая составляет 8%.

Отсюда следует, во-первых, что неравномерность сети существенно снижает точность определения средних по площади и, во-вторых, что в случае неравномерной сети вместо обычного использования среднего арифметического из данных наблюдений необходимо пользоваться оптимальными весами. Оба эти факта еще существеннее применительно к суммам осадков за меньший интервал времени и к районам с более быстро затухающей корреляционной функцией осадков.

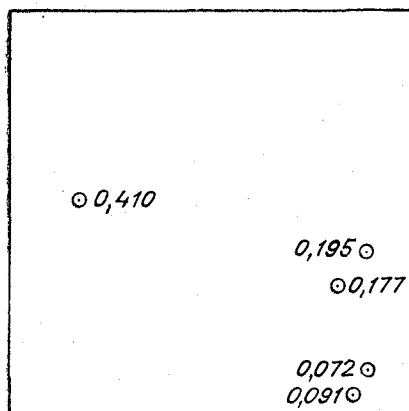


Рис. 5. Пример неравномерной сети станций.

15. В другом исследовании, выполненном в Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова [5], изучался вопрос о требованиях к густоте сети станций, дающих среднюю суточную температуру воздуха. При этом исследовании были получены и использованы более надежные данные о статистической структуре по сравнению с теми, которыми могли располагать О. А. Дроздов и его сотрудники.

Упомянутые расчеты были предприняты с целью отработки методики определения допустимых расстояний между станциями и получения выводов общего характера. Эти расчеты относились лишь к одному метеорологическому элементу — средней суточной температуре воздуха — и к небольшому числу районов. Поэтому результаты расчетов не могут быть использованы для получения конкретных рекомендаций по густоте сети станций на обширных территориях.

Вместе с тем, хотя исследования такого рода в ГГО будут продолжены, представляется возможным уже сейчас заключить, что с помощью предлагаемого метода можно оценивать требования к густоте сети станций различного рода в различных районах. Такие расчеты явно нецелесообразно выполнять в централизованном порядке не только потому, что объем исходных данных должен быть весьма большим, но и потому, что использование этих данных должно сопровождаться анализом репрезентативности наблюдений отдельных станций. Естественно, что специалисты, знакомые с особенностями расположения и работы станций, значительно успешнее справятся с таким анализом.

Наиболее целесообразно было бы производить такую работу для каждой страны или группы стран с небольшой территорией, находящихся в одинаковых физико-географических условиях, силами специалистов этих стран.

Для стран с обширной территорией, охватывающей разные физико-географические районы, желательна дальнейшая децентрализация этой работы. Для того чтобы методика таких расчетов была унифицирована, а результаты вычислений, выполненных в разных странах, были сопоставимы между собой, желательно составить инструкцию по выполнению этих расчетов и анализу их результатов. Кроме того, применительно к развивающимся странам целесообразно предусмотреть такие мероприятия, как организация учебных семинаров, посещение таких стран специалистами из других стран, выполнение расчетов на вычислительных машинах других стран и т. п.

Наряду с такой работой необходимо продолжать научные исследования, направленные на дальнейшее развитие количественных методов оценки требований к густоте сети. В частности, как уже указывалось, до настоящего времени количественный подход еще не применялся к оценке требуемой густоты сети реперных станций. Исследования в этом направлении необходимо выполнить в самое ближайшее время. Имеется также ряд других вопросов, которые нуждаются в исследовании.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г ан д и н Л. С. О принципах рационального размещения сети станций. Труды ГГО, вып. 111, 1961.
2. Г ан д и н Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеониздат, Л., 1963.
3. Г ан д и н Л. С., Мелешко В. П., Мещерская А. В. О применении универсальных цифровых машин для исследования статистической структуры метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 143, 1963.
4. Г ан д и н Л. С., Болтенков В. П. К методике исследования трехмерной структуры метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
5. Г ан д и н Л. С., Каган Р. Л., Тараканова В. П. К вопросу о рациональном планировании сети наблюдений за температурой воздуха. См. наст. сб.
6. Дроздов О. А. Метод построения сети станций в равнинной местности. Труды ГГО, вып. 12, 1936.
7. Дроздов О. А. О принципах рационализации сети метеорологических станций. Труды ГГО, вып. 123, 1961.
8. Дроздов О. А., Шепелевский А. А. Теория интерполяции в стохастическом поле метеорологических элементов и ее применение к вопросам метеорологических карт и рационализации сети. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1, вып. 13, 1946.
9. Каган Р. Л. О точности определения средней по площади по данным точечных измерений. Труды ГГО, вып. 175, 1965.
10. Каган Р. Л. К оценке репрезентативности осадкомерных данных. Труды ГГО, вып. 191, 1966.
11. Каган Р. Л., Гущина М. В., Полищук А. И. О репрезентативности осадкомерных данных. Метеорология и гидрология, № 3, 1967.
12. Лайхтман Д. Л., Каган Р. Л. Некоторые вопросы рационализации снегосъемок. Труды ГГО, вып. 108, 1960.
13. Машкович С. А. Применение быстродействующих вычислительных машин в целях планирования развития сети аэрологических станций. Метеорология и гидрология, № 7, 1963.
14. Машкович С. А. Некоторые вопросы планирования размещения аэрологических станций в свете задач объективного анализа аэрологических наблюдений. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Гидрометеониздат, Л., 1964.
15. Rapport préliminaire du group de travail de la commission de météorologie synoptique sur les réseaux. OMM, Note Technique, No 30, 1960.
16. Final report of the working group on networks. WMO, Commission for synoptic meteorology. Doc. 35, 1966.

## К ВОПРОСУ О РАЦИОНАЛЬНОМ ПЛАНИРОВАНИИ СЕТИ НАБЛЮДЕНИЙ ЗА ТЕМПЕРАТУРОЙ ВОЗДУХА

Начиная с классической работы О. А. Дроздова и А. А. Шепелевского [1], стало общеизвестно, что рациональная густота сети метеорологических станций должна определяться на основании данных о пространственной структуре измеряемых величин. Разработанная в [1] методика оценки ошибок интерполяции в зависимости от густоты сети использовалась в ряде исследований по проблеме рационализации сети станций (см., например, [2]). При выполнении этих исследований расчеты статистической структуры приходилось производить вручную, что по необходимости сокращало объем используемого материала, а потому и статистическую обеспеченность выводов. В настоящее время наличие электронных вычислительных машин (ЭВМ) существенно облегчает расчет статистической структуры метеорологических полей. Такого рода расчеты в большом объеме производились для метеорологических полей в свободной атмосфере в связи с задачей объективного анализа их [3]. Для приземных полей такие расчеты почти не производились.

В настоящей статье делается попытка получения более надежных данных по статистической структуре поля температуры, чем это возможно при расчетах вручную. На основе этих данных изучается вопрос о требованиях к густоте сети станций, измеряющих среднюю суточную температуру воздуха. Особый интерес представляло, наряду с оценками для территории Советского Союза, выполнить такие расчеты для более южных районов, для которых они пока не производились.

Единственным таким районом, для которого мы располагали достаточным объемом данных, оказался восток Китая. Эта территория была первоначально разбита на три района, в каждом из которых использовались данные примерно 30 метеорологических станций. Районы и местоположение станций схематически представлены на рис. 1. В качестве исходных послужили данные о средней суточной температуре воздуха<sup>1</sup> из ежемесячников КНР за 1951—1953 гг. для четырех месяцев (январь, апрель, июль и октябрь). По каждой станции были использованы данные через три дня (для уменьшения временной связности исходных рядов) — всего по 39 значений.

---

<sup>1</sup> Средняя суточная температура по большинству станций определялась как среднее из значений температуры воздуха за 6, 14 и 21 час по среднему солнечному времени. Лишь по небольшому числу станций она определялась с использованием данных самописцев.

Вычисление статистической структуры производилось на ЭВМ «Урал-4» для каждого района и для каждого месяца в отдельности.

При расчетах корреляционной структуры поля температуры в свободной атмосфере до расстояний порядка 1000—1500 км его можно считать климатически однородным [3]. Коэффициенты корреляции и ковариации (ненормированный коэффициент корреляции) для любой пары пунктов практически зависят лишь от расстояния между ними. Поэтому вычисление как корреляционных, так и ковариационных функций может производиться в предположении однородности и изотропности, что существенно упрощает расчет.

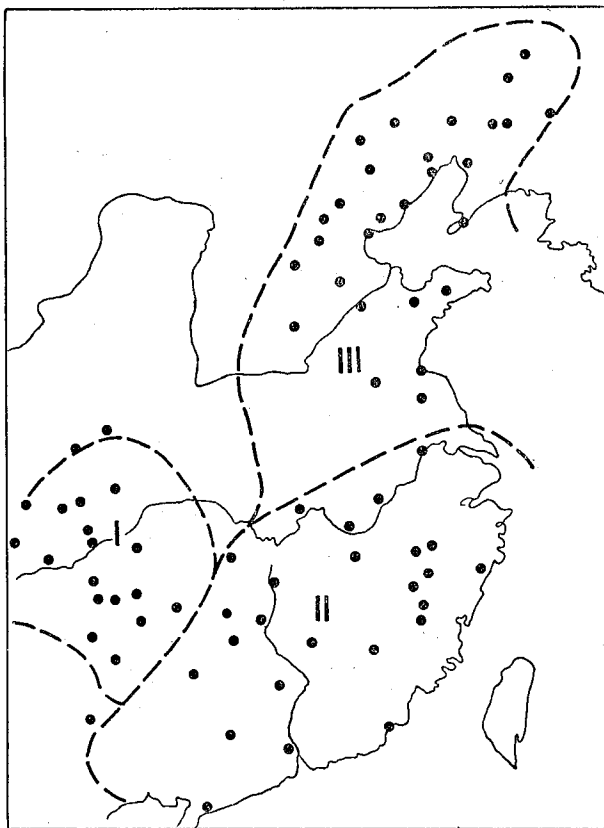


Рис. 1. Районы и пункты, данные которых использовались для определения корреляционных функций температуры по Восточному Китаю.

Для проверки выполнимости гипотез однородности и изотропности для поля приземной температуры были рассчитаны как ковариационные и корреляционные функции при этих предположениях, так и ковариационные и корреляционные матрицы, т. е. таблицы индивидуальных значений коэффициентов ковариации и корреляции для всех пар станций.

В результате сразу же выяснилось, что гипотеза об однородности и изотропности совершенно не выполняется для ковариационной функции средних суточных температур воздуха, в то время как для корреляционной функции эта гипотеза вполне применима. Это отчетливо видно на рис. 2, где приведены графики зависимости коэффициентов ковариации

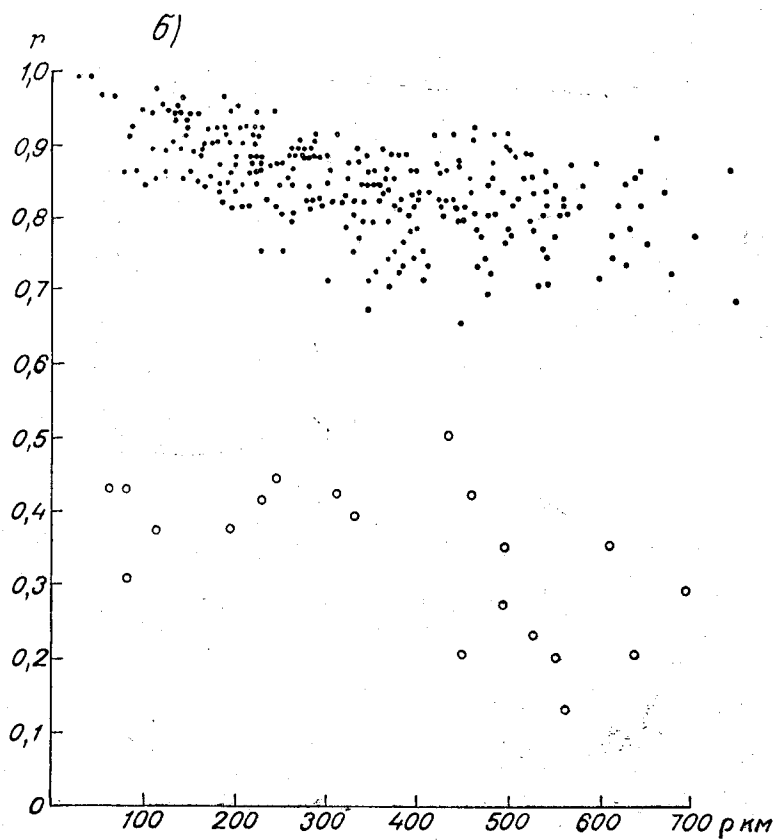
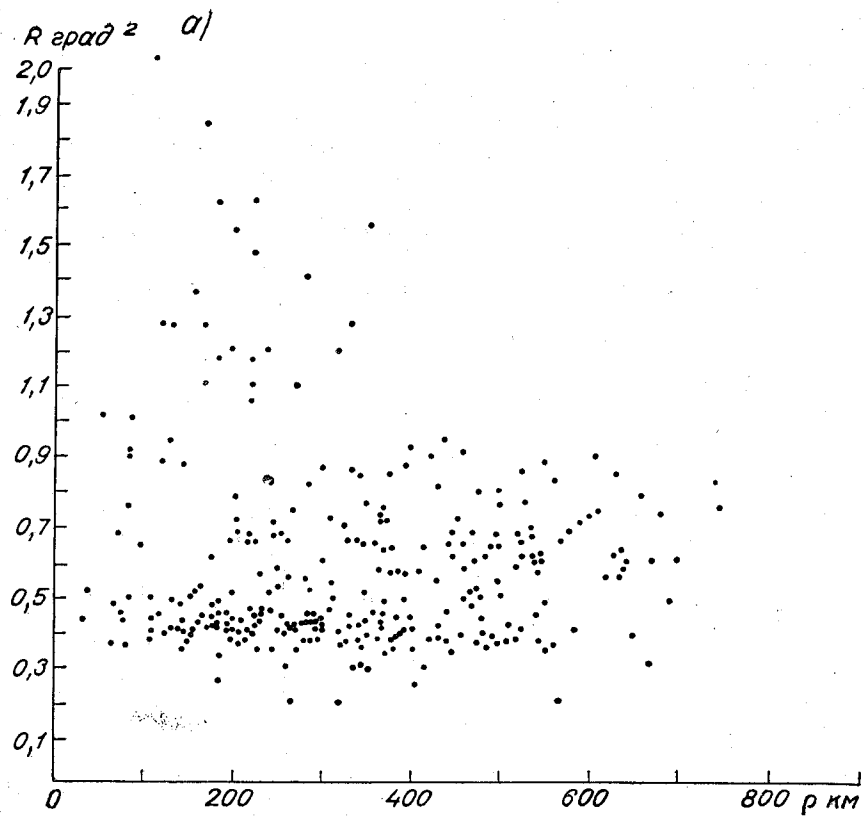


Рис. 2. Зависимость элементов кавариационной (а) и корреляционной (б) матрицы средней суточной температуры воздуха от расстояния между станциями (район I, январь).



(рис. 2а) и корреляции (рис. 2б) от расстояния между станциями для января по району I. На рис. 2а не обнаруживается почти никакой зависимости, в то время как точки на рис. 2б выявляют четкую зависимость корреляции от расстояния между станциями. Более того, все «выскакивающие» точки, помеченные на рис. 2б кружками, соответствуют элементам одной и той же строки корреляционной матрицы, т. е. коэффициентам корреляции температуры на некоторой одной станции с температурой всех остальных станций. Отсюда следует, что данные этой станции либо ошибочны, либо не репрезентативны и потому подлежат исключению.

Таким образом, гипотеза об однородности и изотропности поля приземной средней суточной температуры воздуха применительно к коэффициентам корреляции не только выполняется с хорошей точностью, но и может быть использована для проверки надежности наблюдений на отдельных станциях.

Указанное резкое различие между свойствами корреляционных и ковариационных функций обусловлено неоднородностью поля дисперсий средней суточной температуры воздуха. Заметим, что различие такого рода отмечалось и применительно к аэрологическим полям, однако в свободной атмосфере оно выражено значительно слабее. Усиление этого эффекта для приземной температуры естественно приписать влиянию неоднородностей подстилающей поверхности.

При расчете корреляционных функций осуществлялось осреднение коэффициентов корреляции для всех пар станций, расстояние между которыми укладывалось в заданную градацию. Полученные для всех трех выбранных районов корреляционные функции приводятся в табл. 1. Значения корреляционных функций отнесены в ней к середине градаций расстояния. Там же приводятся и величины  $n$ , показывающие, какое число коэффициентов корреляции подвергалось осреднению для получения соответствующего значения корреляционной функции.

Данные табл. 1 показывают, что для первой градации расстояния (0—50 км) значения корреляционной функции получены по малому числу пар станций и потому мало надежны. Для больших расстояний корреляционные функции оказываются гораздо более надежными.

Корреляционные функции во всех трех выделенных районах в пределах каждого сезона мало отличаются друг от друга. Поэтому все последующие расчеты велись без деления на районы, по осредненным корреляционным функциям.

Что касается различных сезонов, то корреляционная функция обнаруживает значительный годовой ход. Летом она затухает значительно быстрее, чем в остальные сезоны, что, вероятно, связано с закономерным изменением строения слоя со сверхадиабатическими температурными градиентами в летнее время.

Будем аппроксимировать эмпирические значения корреляционных функций экспоненциально-степенной зависимостью

$$r'(p) = r'(0) e^{-\left(\frac{p}{p_0}\right)^n} \quad (1)$$

Здесь  $p$  — расстояние,  $p_0$  — радиус корреляции, т. е. расстояние, на котором корреляция убывает в  $e$  раз,  $n$  — структурный параметр ( $0 \leq n \leq 2$ ).

Приведенные в табл. 1 корреляционные функции удовлетворительно описываются формулой (1) при  $n=1$ . Значения параметров  $r'(0)$  и  $p_0$  приводятся в табл. 2.

Таблица 1

## Корреляционные функции средней суточной температуры воздуха

| Расстояние,<br>км | Район I |      |      |      |    | Район II |      |      |      |    |
|-------------------|---------|------|------|------|----|----------|------|------|------|----|
|                   | I       | IV   | VII  | X    | n  | I        | IV   | VII  | X    | n  |
| 25                | 0,98    | 0,99 | 0,87 | 0,98 | 2  | 0,91     | 0,95 | 0,59 | 0,94 | 3  |
| 75                | 0,89    | 0,97 | 0,86 | 0,96 | 6  | 0,95     | 0,97 | 0,84 | 0,86 | 3  |
| 125               | 0,91    | 0,96 | 0,79 | 0,94 | 18 | 0,88     | 0,96 | 0,78 | 0,94 | 10 |
| 175               | 0,85    | 0,93 | 0,69 | 0,90 | 21 | 0,90     | 0,93 | 0,63 | 0,90 | 14 |
| 250               | 0,84    | 0,92 | 0,64 | 0,86 | 52 | 0,86     | 0,89 | 0,60 | 0,87 | 43 |
| 350               | 0,80    | 0,89 | 0,50 | 0,78 | 46 | 0,80     | 0,84 | 0,52 | 0,78 | 38 |
| 450               | 0,80    | 0,86 | 0,42 | 0,74 | 33 | 0,78     | 0,80 | 0,43 | 0,76 | 60 |
| 550               | 0,79    | 0,85 | 0,27 | 0,70 | 25 | 0,73     | 0,77 | 0,37 | 0,72 | 50 |

| Расстояние,<br>км | Район III |      |      |      |    | Осредненные данные |      |      |      |     |
|-------------------|-----------|------|------|------|----|--------------------|------|------|------|-----|
|                   | I         | IV   | VII  | X    | n  | I                  | IV   | VII  | X    | n   |
| 25                | 0,83      | 0,98 | 0,92 | 0,98 | 1  | 0,92               | 0,97 | 0,90 | 0,96 | 6   |
| 75                | 0,90      | 0,96 | 0,83 | 0,97 | 8  | 0,90               | 0,96 | 0,84 | 0,94 | 17  |
| 125               | 0,88      | 0,91 | 0,77 | 0,95 | 15 | 0,85               | 0,94 | 0,78 | 0,94 | 43  |
| 175               | 0,86      | 0,88 | 0,73 | 0,94 | 29 | 0,87               | 0,91 | 0,69 | 0,91 | 64  |
| 250               | 0,84      | 0,85 | 0,67 | 0,91 | 31 | 0,84               | 0,89 | 0,64 | 0,88 | 126 |
| 350               | 0,79      | 0,82 | 0,54 | 0,88 | 63 | 0,79               | 0,84 | 0,52 | 0,81 | 147 |
| 450               | 0,73      | 0,79 | 0,46 | 0,84 | 57 | 0,76               | 0,81 | 0,44 | 0,78 | 150 |
| 550               | 0,68      | 0,72 | 0,35 | 0,80 | 41 | 0,73               | 0,77 | 0,33 | 0,75 | 116 |

Значения эмпирических корреляционных функций при малых расстояниях  $r'(0)$  отличны от единицы за счет погрешностей измерения и влияния микроклиматических различий в расположении станций. Эти различия оказываются максимальными зимой. Это можно приписать влиянию неоднородности в зимних инверсиях температуры, в свою очередь обусловленных мелкомасштабными неоднородностями рельефа.

Таблица 2

## Зависимость параметров корреляционной функции от сезона

| Параметр          | Месяц |      |      |      |
|-------------------|-------|------|------|------|
|                   | I     | IV   | VII  | X    |
| $r'(0)$ . . .     | 0,94  | 0,99 | 0,98 | 0,99 |
| $\rho_0$ км . . . | 2200  | 2300 | 540  | 2300 |
| $\eta$ . . . . .  | 0,06  | 0,01 | 0,02 | 0,01 |

В табл. 2 приводятся также значения меры ошибок за счет погрешностей измерения и микроклиматической неоднородности. Эта величина, представляющая собой отношение дисперсии ошибок к дисперсии исследуемой величины, обозначена  $\eta$  и вычислена по формуле

$$\eta = \frac{1 - r'(0)}{r'(0)}. \quad (2)$$

Переходя от эмпирической корреляционной функции  $r'(\rho)$  к истинной корреляционной функции  $r(\rho)$ , получаем

$$r(\rho) = e^{-\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n} \quad (3)$$

Зная вид корреляционной функции, нетрудно оценить значения меры ошибки линейной интерполяции, т. е. отношение дисперсии ошибки к дисперсии самой средней суточной температуры. Воспользовавшись формулами (53) — (55) из статьи [4] и представляя корреляционную функцию в виде разложения в ряд, можно для не очень больших расстояний ( $\rho \leq 0,4\rho_0$ ) получить сравнительно простые формулы меры ошибки интерполяции  $\varepsilon$ .

Именно при интерполяции на середину отрезка длиной  $l$  (расстояние между станциями) имеем

$$\varepsilon_2(l) = \frac{\eta}{2} + K_2(n)[1 - r(l)], \quad (4)$$

где

$$K_2(n) = 2^{1-n} - 0,5. \quad (5)$$

Для меры ошибки интерполяции на центр треугольника со стороной  $l$  имеем

$$\varepsilon_3(l) = \frac{\eta}{3} + K_3(n)[1 - r(l)] \quad (6)$$

при

$$K_3(n) = 2\left(3^{-\frac{n}{2}} - 3^{-1}\right). \quad (7)$$

Таблица 3

Зависимость  $K_2$  и  $K_3$  от значения структурного параметра  $n$

|                   |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $n \dots \dots$   | 0    | 0,2  | 0,4  | 0,6  | 0,8  | 1,0  | 1,2  | 1,4  | 1,6  | 1,8  | 2,0  |
| $K_2 \dots \dots$ | 1,50 | 1,24 | 1,11 | 0,82 | 0,65 | 0,50 | 0,37 | 0,25 | 0,16 | 0,07 | 0,00 |
| $K_3 \dots \dots$ | 1,33 | 1,13 | 0,94 | 0,77 | 0,62 | 0,49 | 0,37 | 0,26 | 0,16 | 0,08 | 0,00 |

Из табл. 3 видно, что  $K_2$  и  $K_3$  мало отличаются. Поэтому основное различие между формулами (4) и (6) относится к той части ошибки интерполяции, которая определяется микроклиматическими различиями. Впредь будем оценивать среднюю квадратическую относительную погрешность интерполяции температуры на центр треугольника. Для рассмотренных районов  $n=1$  и формула (6) приводится к виду

$$\sqrt{\varepsilon(l)} = \sqrt{\frac{\eta}{3} + 0,49 \frac{l}{\rho_0}}. \quad (6')$$

Зависимость  $\sqrt{\varepsilon}$  от  $l$  для различных сезонов показана на рис. 3.

При очень густой сети станций (при малых  $l$ ) ошибка интерполяции отлична от нуля за счет микроклиматических различий. Она меняется от 7% для переходных сезонов до 14% для зимнего сезона. С разрежением сети точность интерполяции уменьшается. Особенно быстро это уменьшение происходит летом.

Заметим, что применительно к использованным расстояниям между станциями  $l$  применение оптимальной интерполяции вместо линейной не изменило бы результаты.

Поскольку в пределах одного сезона функция  $\varepsilon(l)$  одинакова в разных районах рассматриваемой территории, то, если исходить из заданной относительной ошибки  $\sqrt{\varepsilon}$ , требования к густоте сети также будут одинаковы. Однако нам представляется более правильным исходить не из относительной, а из абсолютной ошибки интерполяции, определяемой по формуле

$$\sqrt{E} = \sigma \sqrt{\varepsilon}, \quad (8)$$

где  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонение интерполируемой величины.

Если пользоваться таким критерием точности интерполяции, то максимально допустимое расстояние между станциями будет изменяться по территории вместе с дисперсией, так что изолинии рекомендуемых расстояний  $l_m$  будут совпадать с изолиниями дисперсий.

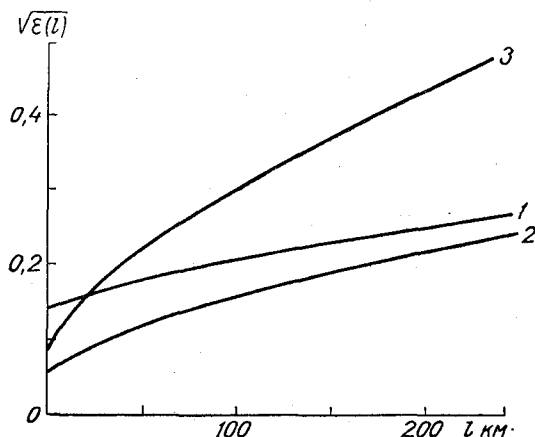


Рис. 3. Зависимость средней квадратической относительной погрешности линейной интерполяции от расстояния между станциями (Восточный Китай).

1 — январь, 2 — апрель и октябрь, 3 — июль.

Примеры таких карт приведены на рис. 4. На первой из них приведены изолинии  $l_m$  для лета, соответствующие средней квадратической ошибке  $\sqrt{E}$  средней суточной температуры, равной  $0,5^\circ$ . На второй карте показаны изолинии  $l_m$  для зимы, соответствующие  $\sqrt{E}=1,0^\circ$ . Принятие разных значений  $E$  для лета и зимы было связано не только с тем, что для ряда прикладных задач летом требуется знать температуру с большей точностью, чем зимой. Помимо этого, величина  $\sqrt{E}=0,5^\circ$  зимой недостижима там, где дисперсия велика (в северной части рассматриваемой территории) при любой густоте сети — этому препятствует наличие значительной микроклиматической погрешности, о которой говорилось выше. Следует иметь в виду, что дисперсия температуры воздуха в зимний период вообще велика; для рассматриваемого района она превышает в 3—4 раза дисперсию для летнего периода.

То, что с помощью описанного метода получают различные требования к густоте станций на разных участках территории, представляется положительной чертой этого метода. Что касается различий в этих требованиях в разные сезоны, то при планировании сети станций, по-види-

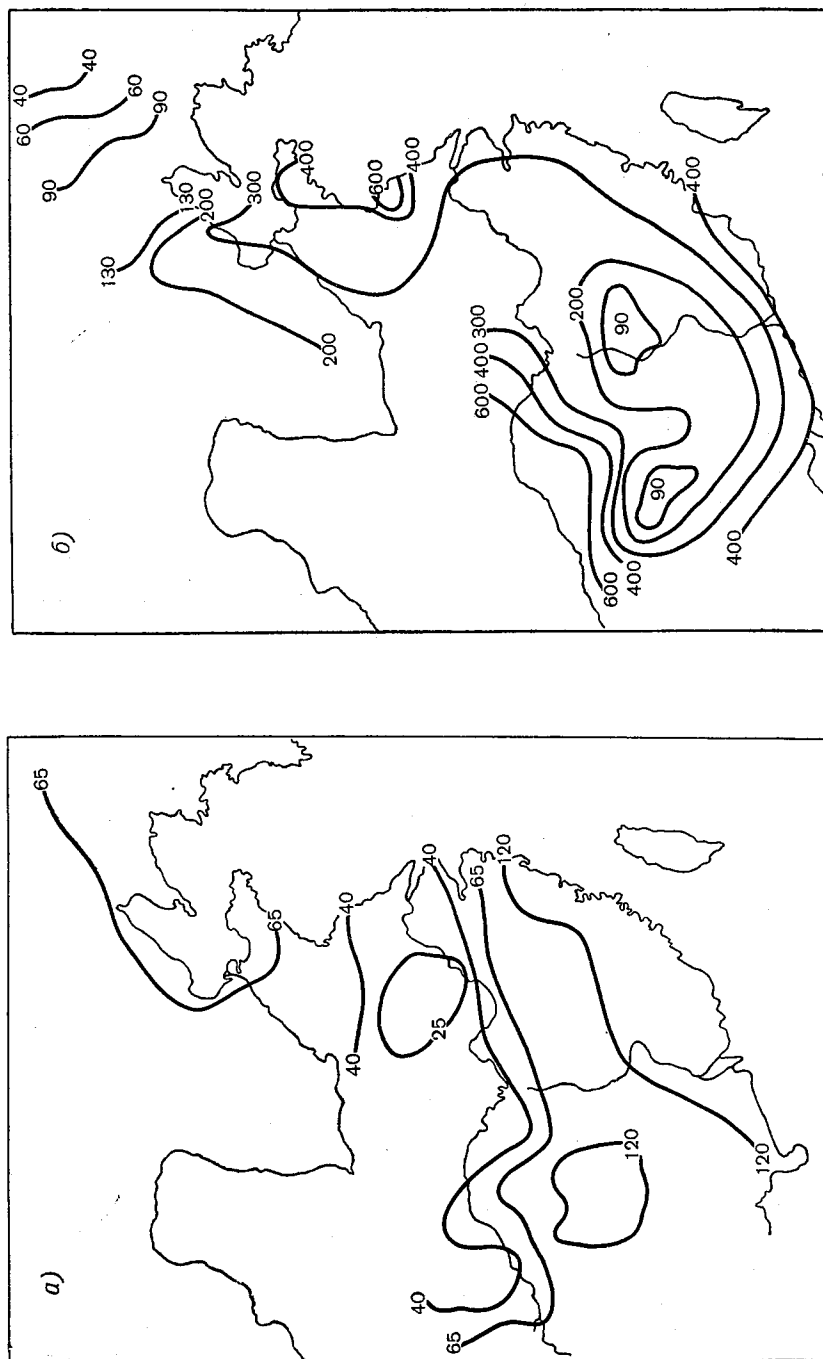


Рис. 4. Карта максимальных допустимых расстояний  $l_m$  км между станциями для Восточного Китая.  
 а — лето,  $\sqrt{E}=0,5^\circ$ ; б — зима,  $\sqrt{E}=1,0^\circ$ .

тому, целесообразно руководствоваться данными для того сезона, для которого требования к густоте станций в данном районе наибольшие. Вместе с тем целесообразно иметь в виду и такие возможности, как функционирование некоторых станций только в течение одного сезона или сокращение объема наблюдений некоторых станций в отдельные сезоны.

Заметим, что применительно к аэрологической сети станций в настоящее время оказалось возможным перейти от расчета оптимальной густоты сети к определению того, в каких конкретных пунктах должны быть установлены необходимые дополнительные станции. Эти пункты находятся путем априорной теоретической оценки возможного уточнения при различном размещении дополнительных станций [5]. В случае сети наземных климатологических станций вследствие неоднородности приземных полей критерий уменьшения теоретической ошибки интерполяции недостаточен для определения целесообразности установки станций в данном пункте. Необходим еще учет характеристики физико-географических условий в данном пункте. Поэтому для наземной климатологической сети целесообразно на данном этапе ограничиваться теоретической оценкой рекомендуемой густоты сети.

Аналогичные расчеты были выполнены для двух районов Азиатской территории СССР: Западной Сибири и Забайкалья. По каждому из районов использовались данные по средней суточной температуре воздуха более чем по 20 станциям, любезно предоставленные нам Н. В. Смирновой. Схематическое расположение станций в выбранных районах представлено на рис. 5. По каждому из четырех месяцев, для которых велись расчеты, были использованы данные за 12 лет (1946—1957 гг.), всего по 96 значений для одной станции (за каждый месяц данные отбирались через четыре дня).

Полученные значения корреляционных функций средней суточной температуры приводятся в табл. 4.

Таблица 4

Корреляционные функции средней суточной температуры воздуха

| Расстояние,<br>км | Западная Сибирь |      |      |      |    | Забайкалье |      |      |      |    |
|-------------------|-----------------|------|------|------|----|------------|------|------|------|----|
|                   | I               | IV   | VII  | X    | n  | I          | IV   | VII  | X    | n  |
| 25                | 0,95            | 0,94 | 0,94 | 0,98 | 2  | 0,92       | 0,90 | 0,94 | 0,88 | 3  |
| 75                | 0,98            | 0,99 | 0,97 | 0,97 | 6  | 0,86       | 0,90 | 0,92 | 0,90 | 10 |
| 125               | 0,95            | 0,97 | 0,94 | 0,93 | 9  | 0,87       | 0,88 | 0,88 | 0,91 | 17 |
| 175               | 0,93            | 0,95 | 0,92 | 0,92 | 3  | 0,84       | 0,78 | 0,83 | 0,89 | 13 |
| 250               | 0,87            | 0,91 | 0,88 | 0,92 | 18 | 0,77       | 0,80 | 0,76 | 0,87 | 41 |
| 350               | 0,82            | 0,88 | 0,82 | 0,85 | 27 | 0,73       | 0,79 | 0,68 | 0,83 | 41 |
| 450               | 0,75            | 0,85 | 0,74 | 0,82 | 38 | 0,64       | 0,78 | 0,62 | 0,80 | 30 |
| 550               | 0,70            | 0,83 | 0,71 | 0,75 | 27 | 0,61       | 0,75 | 0,56 | 0,76 | 24 |
| 700               | 0,58            | 0,75 | 0,59 | 0,65 | 45 | 0,53       | 0,66 | 0,47 | 0,70 | 11 |

Из табл. 4 видно, что для каждого района корреляционные функции средней суточной температуры для зимнего и летнего сезонов отличаются сравнительно мало и, следовательно, могут быть объединены. Аналогично обстоит дело с корреляционными функциями для весеннего и осеннего сезонов. Заметим, что в эти сезоны корреляция убывает медленнее, чем зимой или летом, что, возможно, является следствием ложной корреляции за счет влияния годового хода. Корреляционные функции для обоих районов рассматриваются отдельно, ввиду существенных

различий между ними. Наиболее серьезное различие заключается в том, что полученные эмпирические значения корреляционной функции для малых расстояний оказываются гораздо большими для Западной Сибири, чем для Забайкалья. Это является естественным результатом гораздо больших микроклиматических различий в местоположении станций, которые характерны для территории Забайкалья.

Важно отметить, что для рассматриваемых районов поле дисперсий существенно однороднее, чем для Китая. Для каждого сезона разброс значений среднего квадратического отклонения  $\sigma$  по территории составляет около 10—15% средней его величины. Учитывая это, нет необходимости в детальном районировании рассматриваемых территорий по густоте сети. Достаточно оценить густоту, соответствующую средней изменчивости для данного сезона.

Полученные эмпирические корреляционные функции также удовлетворительно описываются формулой (1). Значения входящих в формулу (1) параметров и осредненные по территории величины средней температуры и среднего квадратического отклонения приводятся в табл. 5.

Таблица 5

Характеристики поля средней суточной температуры

| Характеристика        | Западная Сибирь |      |      |     | Забайкалье |      |      |      |
|-----------------------|-----------------|------|------|-----|------------|------|------|------|
|                       | I               | VII  | IV   | X   | I          | VII  | IV   | X    |
| $\bar{t}^o$ . . . . . | -18,2           | 15,5 | 1,4  | 1,1 | -25,7      | 17,7 | -0,8 | -2,6 |
| $\sigma^o$ . . . . .  | 8,1             | 3,4  | 5,4  | 4,8 | 6,5        | 2,9  | 4,3  | 4,4  |
| $r'(0)$ . . . . .     | 0,99            |      | 0,99 |     | 0,95       |      | 0,93 |      |
| $\rho_0$ км . . . . . | 1600            |      | 2200 |     | 1500       |      | 2200 |      |
| $n$ . . . . .         | 1,15            |      | 1,12 |     | 0,94       |      | 1,12 |      |
| $\eta$ . . . . .      | 0,01            |      | 0,01 |     | 0,05       |      | 0,07 |      |

Вычисленные по формулам (6) и (8) значения средней квадратической погрешности интерполяции  $\sqrt{E}$  для некоторых расстояний  $l$  приводятся в табл. 6. Погрешности интерполяции для переходных сезонов различаются мало и потому объединены.

Таблица 6

Зависимость средней квадратической погрешности интерполяции от расстояния между станциями

| Район           | Месяц | $l$ км |      |      |      |      |      |
|-----------------|-------|--------|------|------|------|------|------|
|                 |       | 0      | 25   | 50   | 100  | 200  | 400  |
| Западная Сибирь | I     | 0,46   | 0,62 | 0,82 | 1,12 | 1,59 | 2,30 |
|                 | IV, X | 0,28   | 0,38 | 0,47 | 0,62 | 0,87 | 1,25 |
|                 | VII   | 0,19   | 0,26 | 0,34 | 0,47 | 0,67 | 0,97 |
| Забайкалье      | I     | 0,84   | 1,05 | 1,24 | 1,54 | 1,98 | 2,68 |
|                 | IV, X | 0,66   | 0,69 | 0,73 | 0,83 | 0,98 | 1,29 |
|                 | VII   | 0,37   | 0,47 | 0,55 | 0,69 | 0,88 | 1,17 |

Таким образом, как и для территории Китая, абсолютные погрешности интерполяции для зимнего сезона существенно больше, чем для летнего. При этом погрешности интерполяции для территории Забайкалья значительно больше, чем для Западной Сибири. Если исходить из единого допуска для обоих районов, то густота сети станций в Забайкалье должна

быть гораздо больше. Действительно, при расстоянии между станциями около 100 км для Западной Сибири и около 25 км для Забайкалья погрешности интерполяции для обоих районов примерно одинаковы и составляют около  $0,5^\circ$  для летнего и около  $1,0^\circ$  для зимнего сезона. В равной мере, если принять единый допуск, необходимо устанавливать различную густоту сети для разных сезонов.

Заметим, что и в случае, если мы будем исходить не из абсолютной, а из относительной погрешности интерполяции, для обеспечения одинаковой точности интерполяции в разных районах необходима различная густота сети.

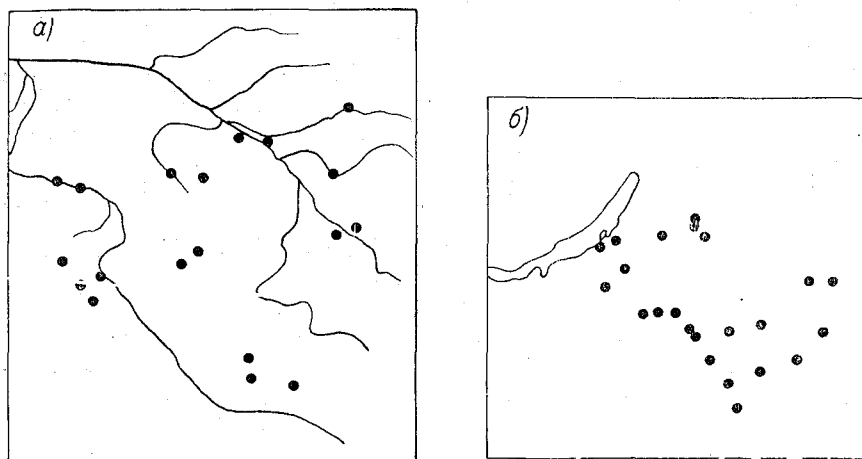


Рис. 5. Расположение пунктов, данные которых использовались для определения корреляционных функций.  
а — Западная Сибирь, б — Забайкалье.

Представляется, что максимально допустимая погрешность интерполяции может выбираться различной для районов различной народнохозяйственной освоенности. Она может быть различной и для разных сезонов в зависимости от степени влияния погрешности в определении исследуемого элемента на хозяйственные мероприятия, характерные для данного сезона.

В конечном счете оптимальная густота сети метеорологических станций должна определяться из экономических соображений, подобно тому, как это предложено в [6].

#### ЛИТЕРАТУРА

- ✓ 1. Дроздов О. А., Шепелевский А. А. Теория интерполяции в стохастическом поле метеорологических элементов и ее применение к вопросам метеорологических карт и рационализации сети. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1, вып. 13, 1946.
- ✓ 2. Дроздов О. А. О принципах рационализации сети метеорологических станций. Труды ГГО, вып. 123, 1961.
3. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеониздат, Л., 1963.
- ✓ 4. Гандин Л. С. О планировании сети климатологических станций. См. наст. сб.
5. Машкович С. А. Применение быстродействующих вычислительных машин в целях планирования развития сети аэрологических станций. Метеорология и гидрология, № 7, 1963.
6. Гандин Л. С., Каган Р. Л. Об экономическом подходе к планированию метеорологической сети. Труды ГГО, вып. 208, 1967.



## О ТОЧНОСТИ АНАЛИЗА ПОЛЯ ГЕОПОТЕНЦИАЛА НАД СЕВЕРНЫМ И ЮЖНЫМ ПОЛУШАРИЯМИ

Точность анализа полей различных метеорологических элементов может быть оценена априорно, если известны координаты наблюдательных станций и характеристики статистической структуры полей [1]. Соответствующая методика численного эксперимента применительно к полям геопотенциала и температуры над северным полушарием развита в ряде работ С. А. Машковича и С. И. Губановой [3, 7, 8, 9]. Эта методика основана на использовании в качестве показателя точности анализа поля двух критериев: меры ошибки оптимальной интерполяции  $\varepsilon$  и средней квадратической ошибки такой интерполяции  $\sqrt{E}$ , связанных между собой соотношением

$$\sqrt{E} = \sqrt{\varepsilon m_f(0)}, \quad (1)$$

где  $m_f(0)$  — дисперсия элемента  $f$ .

С помощью указанных критериев можно достаточно полно описать точность интерполяции значений элемента в пределах рассматриваемой территории. Однако для целей численных прогнозов важно иметь представление о точности, с которой анализируются не только поля самих элементов, но и поля различных дифференциальных (конечно-разностных) характеристик этих элементов. В работе [2] выведены формулы, позволяющие оценить средний квадрат конечной разности и среднюю квадратическую ошибку ее определения по данным анализа поля элемента. На основании этих формул разработан алгоритм и составлена программа расчета для электронных вычислительных машин М-20 и БЭСМ-4 [5, 6].

Программа предусматривает вычисление в узлах квадратной сетки любого из трех показателей —  $B$ ,  $D$ ,  $F$ , причем исходной информацией для расчета являются координаты всех станций, существующих на рассматриваемой территории, и сведения о статистической структуре поля, заданные в виде автокорреляционной функции элемента. Применительно к первой конечной разности величины  $B$ ,  $D$  и  $F$  определяются соотношениями:

$$B = \sqrt{\bar{\alpha}^2} = \sqrt{D m_f(0)}, \quad (2)$$

$$D = \frac{r_{\beta\beta}^2}{m_f(0)}, \quad (3)$$

$$F = \frac{\bar{\alpha}^2}{m_f(0)} = \frac{r_{\beta\beta}^2}{m_f(0)} = \sqrt{B^2 D}. \quad (4)$$

Здесь  $\alpha$  — абсолютная ошибка определения дифференциальной характеристики (первой производной),  $\beta$  — абсолютная ошибка определения соответствующего конечно-разностного аналога,  $r$  — шаг дифференцирования, черта означает осреднение в статистическом смысле.

Величина  $B$  представляет собой среднюю квадратическую абсолютную ошибку вычисления дифференциальной характеристики, а величина  $D$  характеризует среднюю квадратическую ошибку, отнесенную к изменчивости (дисперсии) элемента. Величина  $F$  есть среднее геометрическое величин  $B^2$  и  $D$  и используется в качестве простейшего показателя, характеризующего одновременно распределение абсолютных и относительных ошибок. Программой предусмотрено также, что параллельно с  $B$ ,  $D$  и  $F$  вычисляются показатели точности интерполяции  $\varepsilon$  и  $E$  значений самого элемента.

Выполненные численные опыты позволили проанализировать точность определения первых конечных разностей в поле геопотенциала на территории северного полушария и предложить некоторые рекомендации по расширению существующей аэрологической сети [5, 6]. В настоящей статье приводятся результаты следующей серии опытов для территорий северного и южного полушарий. Основное внимание уделяется распределениям характеристик  $\varepsilon$  и  $F$ , а для северного полушария — также и  $E$ . Расчеты выполнены применительно к сети аэрологических станций, регулярно сообщаящих данные наблюдений в Гидрометеорологический центр СССР. Эта сеть по состоянию на 1 января 1967 г. насчитывает 677 станций в северном полушарии и 110 станций в южном полушарии. Кроме того, оценивается эффект повышения точности анализа, который следует ожидать в случае расширения аэрологической сети северного полушария по плану Всемирной метеорологической организации (ВМО). Такого рода оценки впервые предприняты в работе [6], причем в основу их был положен план, принятый IV конгрессом ВМО в 1963 г. За время, прошедшее после IV конгресса, план расширения сети претерпел существенные изменения; новый его вариант обсуждался на V конгрессе ВМО в 1967 г. Этот последний вариант и рассматривается в настоящей работе.

Рассмотрение полученных результатов начнем с распределения меры ошибки интерполяции  $\varepsilon$ . Существующая сеть станций размещена на территории северного полушария крайне неравномерно, и эта неравномерность обуславливает резкие различия в точности анализа поля геопотенциала (рис. 1). Над континентами Евразии и Северной Америки значения  $\varepsilon$  не превышают 0,10, а над значительными частями этих территорий составляют лишь 0,01—0,02. Над территорией Африки, где сеть станций заметно реже, значения  $\varepsilon$  увеличиваются до 0,20—0,25. Для акваторий океанов характерна малая точность интерполяции, совершенно недостаточная для практических целей. В целом значения  $\varepsilon$  увеличиваются с севера на юг — от 0,05—0,10 на широте 40—50° до 0,60—0,70 на широте 10°. Обширный максимум имеет место в умеренных широтах Тихого океана. В Северном Ледовитом океане значения меры ошибки интерполяции существенно выше, чем в континентальных частях Арктики (до 0,20), однако ввиду сравнительно небольших размеров этого района величина  $\varepsilon$  не достигает здесь столь высоких значений, какие характерны для Тихого и Атлантического океанов. Описанное распределение величины  $\varepsilon$  в северном полушарии соответствует результатам, полученным ранее Машковичем [7]. Некоторое уменьшение значений  $\varepsilon$  над океанами по сравнению с результатами Машковича объясняется, по-видимому, тем, что в наших опытах число «влияющих» станций было увеличено с 8 до 15 и использовалась иная автокорреляционная функция.

На рис. 2 показана аэрологическая сеть и приведено распределение  $\epsilon$  для южного полушария. Плотность сети станций в южном полушарии в среднем в шесть раз меньше, чем в северном, поэтому точность анализа здесь существенно ниже. Даже на материках значения  $\epsilon$  составляют 0,10—0,20, т. е. так же велики, как в Центральной Арктике. Что касается обширных океанических акваторий южного полушария, то здесь значения  $\epsilon$ , как правило, превышают 0,50, тогда как в северном полушарии такие значения характерны лишь для сравнительно небольших площадей

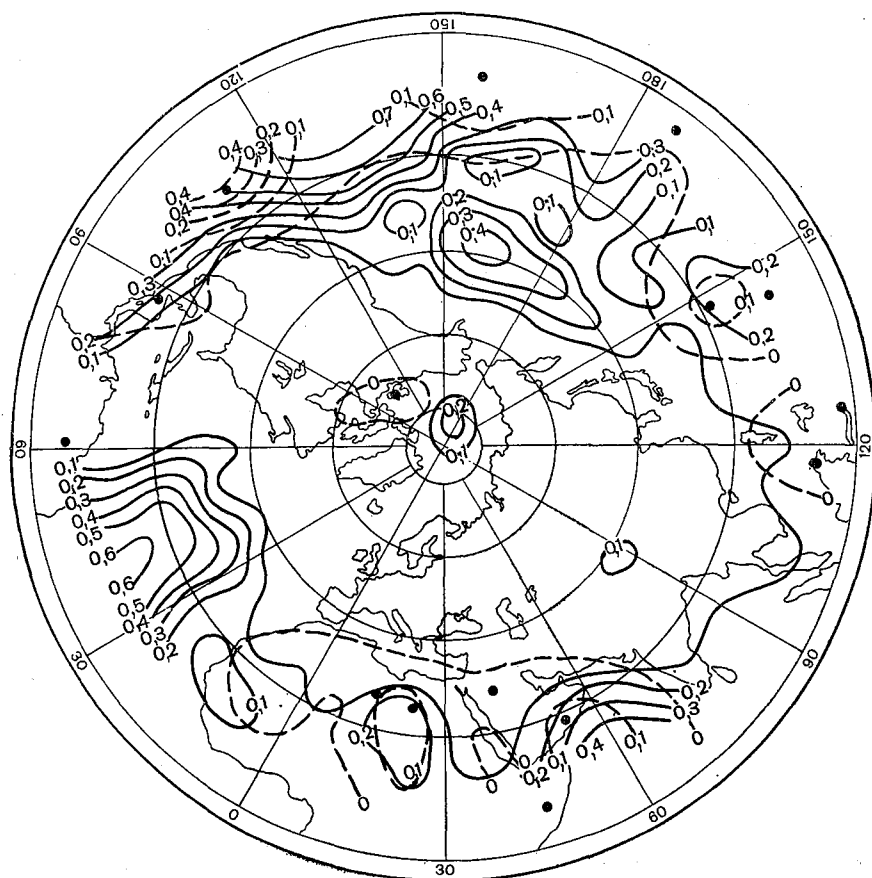


Рис. 1. Распределение меры ошибки интерполяции  $\epsilon$  на северном полушарии.

в центральных частях Тихого и Атлантического океанов. Особенно плохо анализируется поле в южном полушарии над Тихим океаном между Южной Америкой и островами Полинезии: здесь на очень большой площади величины  $\epsilon$  составляют 0,70—0,90 и более, а абсолютный максимум достигает 0,97. О том, насколько плохо обстоит дело с аэрологической информацией в южном полушарии, можно судить по следующему сравнению. Известно, что для синоптиков европейских стран наиболее трудным для анализа оказывается район Северной Атлантики, где аэрологическую информацию поставляют лишь девять кораблей погоды и несколько островных станций. Но даже в этом наиболее трудном районе значения  $\epsilon$  составляют всего 0,02—0,08. В южном же полушарии такие значения  $\epsilon$  являются минимальными и отмечаются только на очень небольшой части суши. На всей остальной территории полушария  $\epsilon$

много выше; иными словами, оперативная аэрологическая информация практически почти полностью отсутствует.

Если распределение меры ошибки интерполяции  $\varepsilon$  определяется только плотностью сети станций, то средняя квадратическая ошибка интерполяции  $\sqrt{E}$  существенно зависит также и от климатической изменчи-

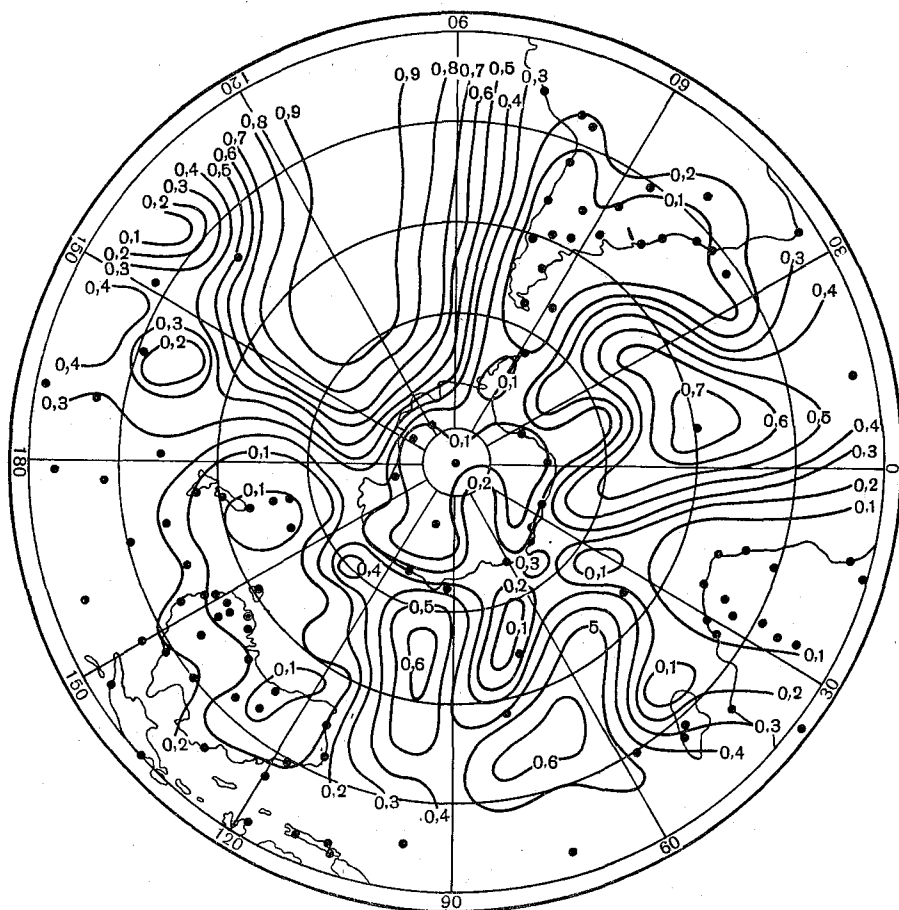


Рис. 2. Аэрологическая сеть и распределение меры ошибки интерполяции  $\varepsilon$  на южном полушарии.

вости геопотенциала. Из рис. 3 видно, что абсолютные ошибки интерполяции максимальны в умеренных широтах над Тихим и Атлантическим океанами, т. е. в районах, где имеет место сочетание большой изменчивости элемента и малой плотности сети. Распределение значений  $E$  по градациям, отвечающее существующей сети северного полушария, приведено в табл. 1 (вариант I).

Таблица 1

| Вариант | Распределение значений $E$ по градациям (‰) |             |             |             |             |             |             |             |             |      |
|---------|---------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|------|
|         | 0,0—<br>1,0                                 | 1,0—<br>2,0 | 2,0—<br>3,0 | 3,0—<br>4,0 | 4,0—<br>5,0 | 5,0—<br>6,0 | 6,0—<br>7,0 | 7,0—<br>8,0 | 8,0—<br>9,0 | ≥9,0 |
| I       | 8,9                                         | 28,1        | 16,1        | 8,0         | 7,6         | 3,1         | 2,7         | 2,6         | 2,2         | 20,6 |
| II      | 9,5                                         | 32,5        | 15,9        | 7,6         | 5,4         | 2,5         | 2,0         | 2,2         | 2,2         | 20,2 |

Осредненное по территории северного полушария значение  $E$  оказалось равным  $4,2$  гп. дкм<sup>2</sup>, а максимальное значение —  $87,4$  гп. дкм<sup>2</sup>.

Перейдем теперь к рассмотрению результатов, характеризующих точность анализа конечных разностей в поле геопотенциала, именно рассмотрим распределение показателей  $D$  и  $F$ .

Можно показать, что величина  $D$  представляет собой определенную комбинацию значений  $\varepsilon$  [4]. Поэтому географическое распределение  $D$



Рис. 3. Распределение среднего квадрата ошибки интерполяции  $E$  в северном полушарии (гп. дкм<sup>2</sup>).

подчинено тем же закономерностям, что и распределение  $\varepsilon$ , — оно полностью определяется плотностью аэрологической сети. Естественно, что для южного полушария характерны значительно большие значения  $D$  по сравнению с северным (табл. 2, вариант I). В частности, осредненное по территории полушария значение  $D$  равно соответственно  $0,157$  и  $0,100$ .

Интересно сравнить найденные максимальные значения  $D$  и  $\varepsilon$  с их предельными теоретическими значениями, отвечающими полному отсутствию аэрологической информации. В последнем случае оптимальная интерполяция, по существу, невозможна: значения элемента в узлах сетки заменяются климатическими нормами. Мера ошибки такой «интерполяции» есть, очевидно,  $\varepsilon_{\text{пред}} = 1,000$ . Соответствующее значение характеристики  $D$  при принятом шаге дифференцирования  $r = 600$  км равно  $D_{\text{пред}} = 0,237$ . Вычисленные же максимальные значения этих характери-

стик для северного полушария равны  $\epsilon_{\text{макс}}=0,788$  и  $D_{\text{макс}}=0,220$ , а для южного соответственно 0,970 и 0,237, причем реальные значения  $\epsilon$  и  $D$  близки к указанным максимальным значениям на больших площадях, особенно в южном полушарии. Это означает, что существующая аэрологическая сеть в обширных районах земного шара обеспечивает точность анализа, лишь немного превосходящую точность анализа, выполненного только на основании климатической информации. Сказанное относится как к полю геопотенциала, так и к полям его дифференциальных характеристик.

Таблица 2

| Полушарие | Вариант | Распределение значений $D$ по градациям (%) |           |           |           |           |           |           |           |           |             |
|-----------|---------|---------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
|           |         | 0,00—0,02                                   | 0,02—0,04 | 0,04—0,06 | 0,06—0,08 | 0,08—0,10 | 0,10—0,12 | 0,12—0,14 | 0,14—0,16 | 0,16—0,18 | $\geq 0,18$ |
| Южное     | I       | —                                           | 0,9       | 3,2       | 3,6       | 6,8       | 8,1       | 10,2      | 11,3      | 14,8      | 41,0        |
| Северное  | I       | 1,3                                         | 14,9      | 12,4      | 12,5      | 13,1      | 11,3      | 9,7       | 8,6       | 6,3       | 9,9         |
|           | II      | 1,3                                         | 15,0      | 13,6      | 12,8      | 15,2      | 12,7      | 8,0       | 7,7       | 6,0       | 7,7         |

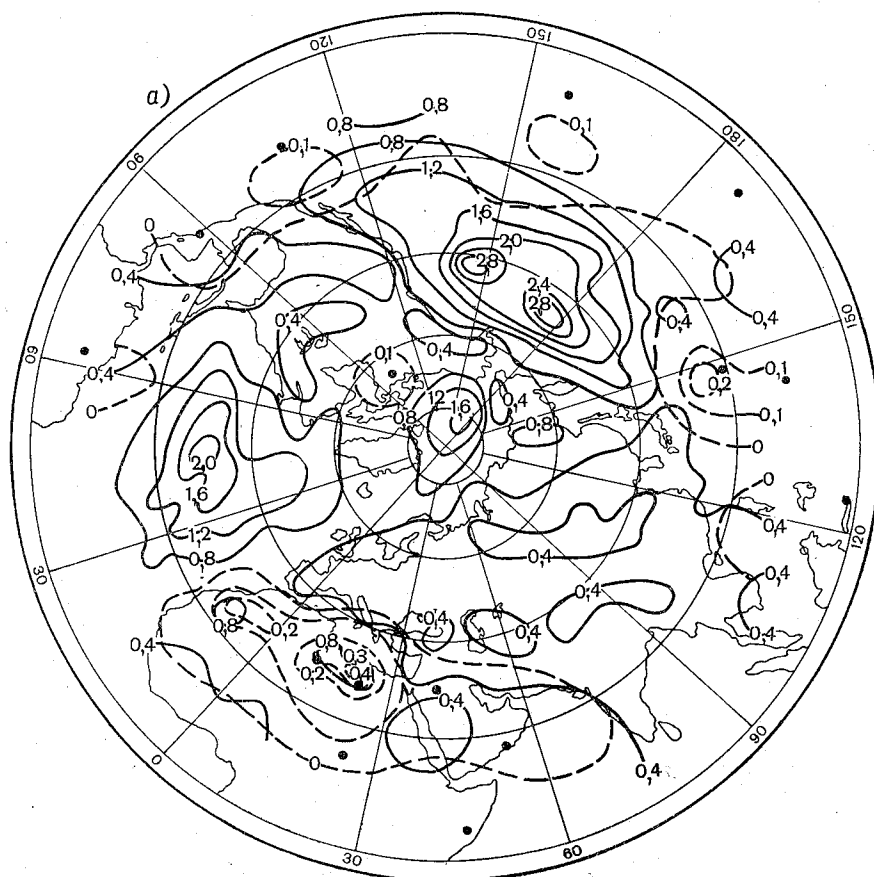
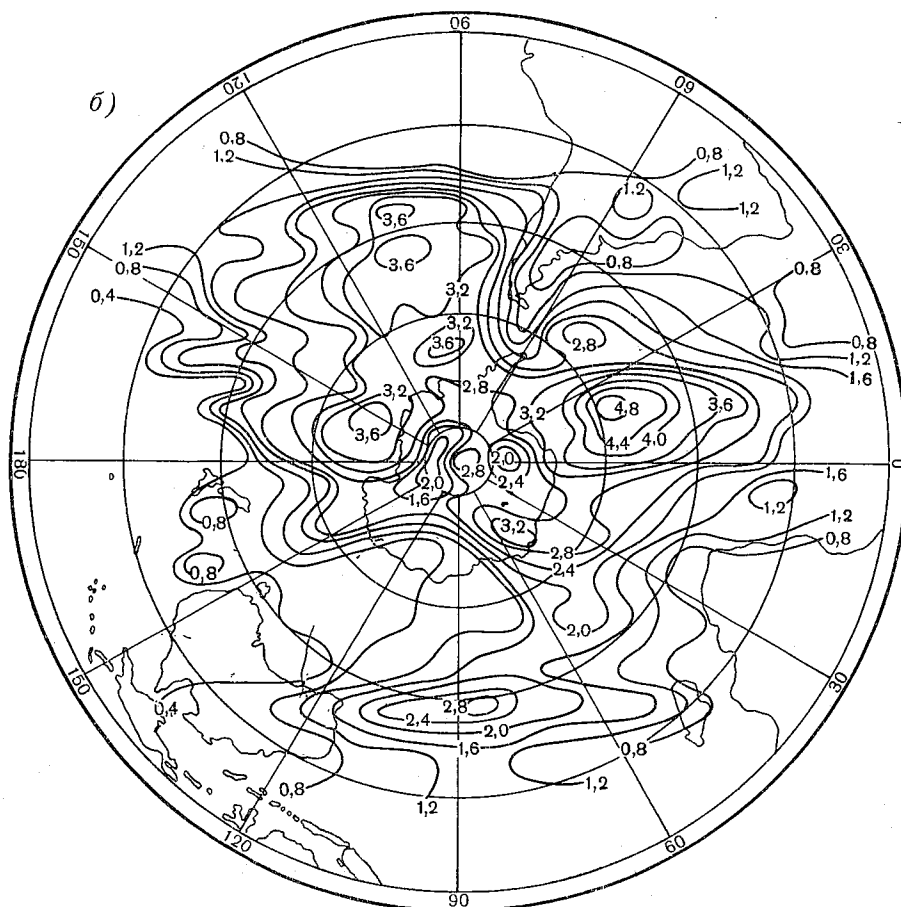


Рис. 4. Распределение величины  $F$  в северном

Распределение показателя  $F$  иллюстрируется рис. 4 и табл. 3 (вариант I). Это распределение для двух полушарий оказывается весьма различным. Так, если в северном полушарии значение 2,00 гп. дкм превышено только в 3,4% всех случаев, то в южном полушарии — в 33,4%. Осредненное по территории полушарий значение равно соответственно 0,70 и 1,61 гп. дкм, а максимальные значения составляют 3,28 и 5,17 гп. дкм.

Таблица 3

| Полушарие | Вариант | Распределение значений $F$ по градациям (%) |           |           |           |           |           |           |           |           |             |
|-----------|---------|---------------------------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-------------|
|           |         | 0,00—0,50                                   | 0,50—1,00 | 1,00—1,50 | 1,50—2,00 | 2,00—2,50 | 2,50—3,00 | 3,00—3,50 | 3,50—4,00 | 4,00—4,50 | $\geq 4,50$ |
| Южное     | I       | 17,0                                        | 20,0      | 16,0      | 13,6      | 8,9       | 11,0      | 7,3       | 4,6       | 1,0       | 0,6         |
| Северное  | I       | 42,9                                        | 36,9      | 12,3      | 4,4       | 2,7       | 0,5       | 0,2       | —         | —         | —           |
|           | II      | 47,3                                        | 33,2      | 11,7      | 4,4       | 2,7       | 0,5       | 0,2       | —         | —         | —           |
|           | III     | 43,0                                        | 41,7      | 13,5      | 1,8       | —         | —         | —         | —         | —         | —           |



(а) и южном (б) полушариях (гп. дкм).

В работах [5, 6] предложен способ количественной оценки повышения точности анализа при рационализации (расширении) сети станций. Такая оценка может быть выполнена априорно; для этого достаточно сопоставить поля  $B$ ,  $D$ ,  $F$ ,  $\varepsilon$ ,  $E$ , рассчитанные применительно к существующей сети и к планируемой сети.

Всемирная метеорологическая организация планирует открыть на северном полушарии в течение 1968—1971 гг. 16 новых аэрологических станций. На рис. 1, 3, 4 географическое положение этих станций обозначено точками, а пунктирные изолинии показывают, насколько снизятся значения  $\varepsilon$ ,  $E$  и  $F$  в результате такого расширения сети.

В табл. 1, 2, 3 вариант I соответствует сети, существующей в настоящее время, а вариант II — расширенной сети. Из этих данных видно, что предполагаемое расширение сети даст весьма незначительный эффект. В частности, не улучшится анализ в тех обширных районах океанов, где особенно недостаточен объем информации. Практически не изменятся при этом и характеристики точности, осредненные по полушарию.

Значительно больший эффект следует ожидать в случае, когда пункты для организации новых станций выбираются не произвольно, а определяются путем численного эксперимента на основании требования максимального снижения ошибок анализа. Выполненные к настоящему времени численные опыты подтверждают целесообразность такого подхода [3, 5—9]. В качестве иллюстрации в табл. 3 (вариант III) приведено распределение  $F$ , полученное с учетом 10 дополнительных станций, «расставленных» таким образом, чтобы снижение величины  $F$  было бы максимальным. Естественно, что все 10 станций в этом случае размещаются в центральных частях Тихого, Атлантического и Северного Ледовитого океанов, т. е. в областях, где точность анализа наименьшая. Такое расширение сети обеспечивает заметно больший эффект по сравнению с планом ВМО. В частности, осредненное по территории полушария значение  $F$ , равное в настоящее время 0,70 гп. дкм, снижается до 0,62 гп. дкм против 0,67 гп. дкм по плану ВМО.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г ан д и н Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеиздат, Л., 1963.
2. Г ан д и н Л. С., И ль и н Б. М., Л и б е р м а н Ю. М., Ю д и н М. И. О точности определения конечных разностей при анализе метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 168, 1965.
3. Г у б а н о в а С. И. О рациональном размещении аэрологических станций на северном полушарии. Метеорология и гидрология, № 8, 1965.
4. Л и б е р м а н Ю. М. Оценка точности определения дифференциальных характеристик метеорологических полей. Труды ЛГМИ, вып. 22, 1964.
5. Л и б е р м а н Ю. М. О точности определения конечных разностей при анализе поля геопотенциала по данным существующей аэрологической сети. Изв. АН СССР, физика атмосферы и океана, т. 1, № 11, 1965.
6. Л и б е р м а н Ю. М. Анализ плана ВМО по расширению существующей аэрологической сети с точки зрения потребностей численных прогнозов. Метеорология и гидрология, № 4, 1967.
7. М а ш к о в и ч С. А. Применение быстродействующих вычислительных машин в целях планирования развития сети аэрологических станций. Метеорология и гидрология, № 7, 1963.
8. М а ш к о в и ч С. А. Некоторые вопросы размещения аэрологических станций в свете задач объективного анализа аэрологических наблюдений. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Гидрометеиздат, Л., 1964.
9. М а ш к о в и ч С. А., Г у б а н о в а С. И. Опыт применения методики объективного анализа карт барической топографии северного полушария. Труды ММЦ, вып. 10, 1965.



## О ТОЧНОСТИ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

1. Одним из важных вопросов, возникающих при решении дифференциальных уравнений методом сеток, является выбор конечно-разностных аналогов дифференциальных операторов. Обычно при оценке точности той или иной конечно-разностной формулы исходят из разложения дифференцируемой величины в ряд по степеням шага дифференцирования. Такого рода оценки являются в значительной степени формальными и не учитывают индивидуальных свойств дифференцируемых величин. Более перспективными являются способы оценки, учитывающие сведения о статистических свойствах этих величин. Такие способы позволяют применять методы теории случайных полей. Пользуясь этими методами, авторы работы [6] оценивают точность, с которой могут определяться конечно-разностные операторы по данным наблюдений на сети станций. Однако вопрос о точности, с которой сами эти операторы аппроксимируют соответствующие производные, в [6] не ставился. Рассмотрение его и является целью настоящей статьи.<sup>1</sup>

Пусть в  $n$  точках известны значения величины  $f_i$ , измеренные с некоторыми ошибками  $\delta_i$ ,

$$f'_i = f_i + \delta_i. \quad (1)$$

Относительно величины  $f$  полагаем, что средние значения ее равны нулю во всех точках,<sup>2</sup>

$$\bar{f}_i = 0. \quad (2)$$

Черта сверху означает осреднение по статистическому ансамблю. Полагаем также величину  $f$  однородной и изотропной случайной функцией, так что пространственная корреляционная функция ее  $R_{ff}$  для любой пары точек зависит лишь от расстояния между ними:

$$R_{ff}^{ik} = \overline{f_i f_k} = R_{ff}(\rho_{ik}),$$

$$\rho_{ik} = \sqrt{(x_i - x_k)^2 + (y_i - y_k)^2}. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Аналогичная задача решалась Киперсом. Используемый Киперсом метод отличен от нашего, однако, насколько можно судить по опубликованному в [14] краткому изложению, окончательные результаты должны совпадать. К сожалению, мы не располагаем пригодными для сравнения результатами расчетов по схеме Киперса.

<sup>2</sup> Практически это означает, что мы рассматриваем отклонения величины от ее нормы.

Ошибки  $\delta_i$  будем считать случайными в том смысле, что ошибки в различных точках не коррелируют ни между собой, ни со значениями самой величины  $f$ :

$$\overline{\delta_i \delta_k} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ \overline{\delta_i^2} & \text{при } i = k \end{cases} \quad (4)$$

$$\overline{f_i \delta_k} = 0.$$

По данным о величине  $f$  необходимо оценить некоторый линейный дифференциальный оператор  $F$  от нее в точке 0.

Будем аппроксимировать величину  $F_0$  линейной комбинацией исходных величин

$$\tilde{F}_0 = \sum_{i=1}^n p_i f_i', \quad (5)$$

где  $p_i$  — некоторые весовые множители.

Точность аппроксимации (5) определяется формулой

$$E = \overline{(F_0 - \tilde{F}_0)^2} = \overline{\left(F_0 - \sum_{i=1}^n p_i f_i'\right)^2}. \quad (6)$$

После возведения в квадрат и осреднения получим формулу для дисперсии ошибки аппроксимации  $E$

$$E = \sigma_F^2 - 2 \sum_{i=1}^n p_i R_{Ff}^i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n p_i p_k R_{ff}^{ik} + \sum_{i=1}^n p_i^2 \overline{\delta_i^2}. \quad (7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\sigma_F^2 = \overline{F_0^2} \quad (8)$$

— дисперсия величины  $F$ ,

$$R_{Ff}^i = \overline{F_0 f_i'} \quad (9)$$

— взаимная корреляционная функция величин  $F$  и  $f$ .

Величины  $\sigma_F^2$  и  $R_{Ff}^i$  для линейных дифференциальных операторов  $F$  от однородных и изотропных функций могут быть однозначно выражены через заданную корреляционную функцию исходных величин. Для случая первой производной такой вывод приводится в [4, 11]. Аналогичные выкладки можно произвести и для других дифференциальных операторов. Для наиболее часто встречающихся дифференциальных операторов формулы, связывающие величины  $\sigma_F^2$  и  $R_{Ff}^i$  с корреляционной функцией исходных величин, приводятся в табл. 1. При пользовании ею следует помнить, что точка, для которой ищется величина  $F$ , помещена в начало координат.

Формула (7) может использоваться не только для оценки точности заданных конечно-разностных формул, но и для выбора из них такой, которая обеспечивала бы минимальную в смысле метода наименьших квадратов ошибку аппроксимации. Весовые множители для такой формулы должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^n p_k^0 R_{ff}^{ik} + p_i^0 \overline{\delta_i^2} = R_{Ff}^i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Эта система получается приравниванием нулю производных от величины  $E$  по всем  $p_i$ .

Точность конечно-разностной формулы с оптимальными весами  $p_i^0$ , полученными в результате решения системы (10), определяется формулой

$$E = \sigma_F^2 - \sum_{i=1}^n p_i^0 R_{Ff}^i. \quad (11)$$

Таблица 1

Формулы для расчета величин  $\sigma_F^2$  и  $R_{Ff}$  по заданной функции  $R_{ff}$

| $F$                                                                                  | $\sigma_F^2$                   | $R_{Ff}$                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{\partial f}{\partial x}$                                                      | $-R_{ff}''(0)$                 | $-\frac{x}{\rho} R_{ff}'(\rho)$                                                |
| $\frac{\partial f}{\partial y}$                                                      | $-R_{ff}''(0)$                 | $-\frac{y}{\rho} R_{ff}'(\rho)$                                                |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$                                                  | $R_{ff}^{(IV)}(0)$             | $\frac{y^2}{\rho^3} R_{ff}'(\rho) + \frac{x^2}{\rho^2} R_{ff}''(\rho)$         |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$                                                  | $R_{ff}^{(IV)}(0)$             | $\frac{x^2}{\rho^3} R_{ff}'(\rho) + \frac{y^2}{\rho^2} R_{ff}''(\rho)$         |
| $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$                                         | $\frac{1}{3} R_{ff}^{(IV)}(0)$ | $\frac{xy}{\rho^2} \left[ R_{ff}''(\rho) - \frac{R_{ff}'(\rho)}{\rho} \right]$ |
| $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ | $\frac{8}{3} R_{ff}^{(IV)}(0)$ | $\frac{R_{ff}'(\rho)}{\rho} + R_{ff}''(\rho)$                                  |

2. Приведенные выше формулы позволяют производить оценки для произвольного размещения точек. В частном случае, когда  $F=f$ , задача сводится к оптимальной интерполяции величины  $f$  [3]. Алгоритмы оптимальной интерполяции хорошо разработаны. Нетрудно воспользоваться ими и в общем случае, когда  $F$  не совпадает с  $f$ , так как при этом матрица системы (10) остается неизменной, а меняется лишь правая часть в зависимости от выбора величины  $F$ . С методической точки зрения наибольший интерес представляет рассмотрение точности конечно-разностных операторов для регулярной системы точек. Такие оценки и были выполнены авторами.

При расчетах такого рода необходимо иметь в виду, что требование дифференцируемости исходной функции  $f$  налагает довольно жесткие ограничения на ее корреляционную функцию. Например, для того чтобы исходная величина была дифференцируемой, необходимо, чтобы ее корреляционная функция была дифференцируемой вместе со своей первой производной. Для того чтобы величина  $f$  была дважды дифференцируемой,  $R_{ff}$  должна быть непрерывной вместе со своими производными до третьего порядка включительно. Это обстоятельство важно учитывать при выборе аппроксимационных формул для  $R_{ff}(\rho)$ . В частности, часто используемые степенные и экспоненциальные корреляционные функции не удовлетворяют этим требованиям, так как при  $\rho=0$  не имеют производной.

Мы будем далее использовать следующие аппроксимации:

$$R_1(\rho) = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{\rho}{L_1}\right) e^{-\frac{\rho}{L_1}}, \quad (12)$$

$$R_2(\rho) = \sigma_f^2 \left(1 + \frac{\rho}{L_2} + \frac{1}{3} \frac{\rho^2}{L_2^2}\right) e^{-\frac{\rho}{L_2}}, \quad (13)$$

$$R_3(\rho) = \sigma_f^2 e^{-\frac{\rho^2}{L_3^2}}, \quad (14)$$

где  $\sigma_f^2$  — дисперсия величины  $f$ .

Функция  $R_1$  соответствует случайным функциям, имеющим первые производные, но не имеющим производных более высоких порядков. Функция  $R_2$  соответствует случайным функциям, имеющим первые и вторые производные, а функция  $R_3$  — случайным функциям, имеющим производные всех порядков.

Удобно перейти к нормированным корреляционным функциям  $r(\rho)$  и к безразмерным расстояниям. Тогда

$$R_i(\rho) = \sigma_f^2 r_i(\rho), \quad (15)$$

$$r_1(\rho_1) = (1 + \rho_1) e^{-\rho_1}, \quad (16)$$

$$r_2(\rho_2) = \left(1 + \rho_2 + \frac{1}{3} \rho_2^2\right) e^{-\rho_2}, \quad (17)$$

$$r_3(\rho_3) = e^{-\rho_3^2}, \quad (18)$$

при этом

$$\rho_i = \frac{\rho}{L_i}.$$

В дальнейшем мы будем для краткости пользоваться формулами (16) — (18), опуская индексы 1, 2, 3 при безразмерном расстоянии  $\rho$ .

Удобно также при расчетах перейти от абсолютных значений ошибок  $E$  к их относительным величинам  $\varepsilon$ ,

$$\varepsilon = \frac{E}{\sigma_f^2} = \mu - 2 \sum_{i=1}^n p_i \omega_i + \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n p_i p_k r_{ik} + \sum_{i=1}^n p_i^2 \gamma_i, \quad (19)$$

где

$$\mu = \frac{\sigma_F^2}{\sigma_f^2}, \quad \omega_i = \frac{R_{Ff}^i}{\sigma_f^2},$$

$$\gamma_i = \frac{\overline{\delta_i^2}}{\sigma_f^2}$$

— мера точности измерения исходной величины.

Соответственно формулы (10) и (11) заменяются следующими:

$$\sum_{k=1}^n p_k^0 r_{ik} + p_i^0 \gamma_i = \omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (20)$$

$$\varepsilon_0 = \mu - \sum_{i=1}^n p_i^0 \omega_i. \quad (21)$$

В табл. 2 приводятся использованные при расчетах формулы для  $\mu$  и  $\omega$  при разных корреляционных функциях.

Таблица 2

Величины  $\mu$  и  $\omega$  для различных дифференциальных операторов

| Корреляционная функция                                                      | $r_1(\rho) = (1 + \rho) e^{-\rho}$ |               | $r_2(\rho) = \left(1 + \rho + \frac{1}{3}\rho^2\right) e^{-\rho}$ |                                               | $r_3(\rho) = e^{-\rho^2}$ |                             |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------|---------------|-------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------|---------------------------|-----------------------------|
|                                                                             | $\mu$                              | $\omega_l$    | $\mu$                                                             | $\omega_l$                                    | $\mu$                     | $\omega_l$                  |
| $F = \frac{\partial f}{\partial x}$                                         | 1                                  | $x e^{-\rho}$ | $\frac{1}{3}$                                                     | $\frac{1}{3} x (1 + \rho) e^{-\rho}$          | 2                         | $2x e^{-\rho^2}$            |
| $F = \frac{\partial f}{\partial y}$                                         | 1                                  | $y e^{-\rho}$ | $\frac{1}{3}$                                                     | $\frac{1}{3} y (1 + \rho) e^{-\rho}$          | 2                         | $2y e^{-\rho^2}$            |
| $F = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$                                     | —                                  | —             | 1                                                                 | $-\frac{1}{3} (1 + \rho - x^2) e^{-\rho}$     | 12                        | $(4x^2 - 2) e^{-\rho^2}$    |
| $F = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$                                     | —                                  | —             | 1                                                                 | $-\frac{1}{3} (1 + \rho - y^2) e^{-\rho}$     | 12                        | $(4y^2 - 2) e^{-\rho^2}$    |
| $F = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$                            | —                                  | —             | $\frac{1}{3}$                                                     | $x y e^{-\rho}$                               | 4                         | $4x y e^{-\rho^2}$          |
| $F = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ | —                                  | —             | $\frac{8}{3}$                                                     | $-\frac{1}{3} (2 + 2\rho - \rho^2) e^{-\rho}$ | 32                        | $4(\rho^2 - 1) e^{-\rho^2}$ |

Расчеты выполнялись на ЭВМ «Урал-4» для квадратной и треугольной сетки точек. Схематическое размещение точек приводится на рис. 1.

Безразмерный шаг  $h$  варьировался в широком диапазоне (от 0,05 до 1,00 для корреляционной функции  $r_1$  и от 0,05 до 2,00 для корреляционных функций  $r_2$  и  $r_3$ ). Варьировались также значения меры ошибок наблюдений  $\eta$  от 0 до 0,5. При расчетах предполагалось, что значения  $\eta$  одинаковы во всех пунктах.

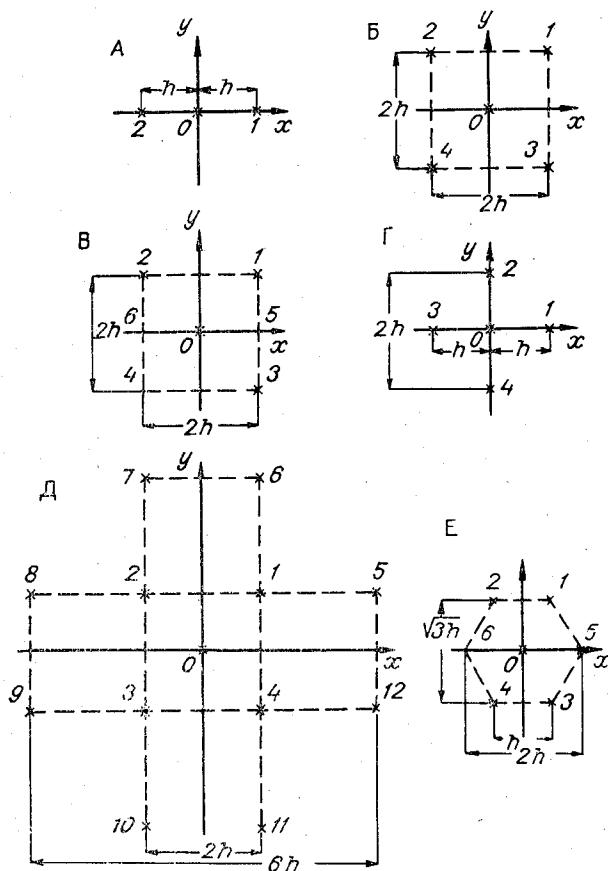


Рис. 1. Схемы размещения точек задания исходных данных.

Для заданного шага  $h$  при заданной мере ошибок  $\eta$  для заданной корреляционной функции вычислялись следующие величины:

- а) погрешность для оптимальной разностной формулы,
- б) оптимальные значения весовых коэффициентов,
- в) погрешность для обычно применяемой разностной формулы.

В отличие от оптимального такой вариант назовем стандартным.

После вычисления погрешностей находились отношения  $\frac{\varepsilon}{\mu} = \tilde{\varepsilon}$ , представляющие собой меру ошибок аппроксимации производной (отношение ошибок к дисперсии производной). Вычисляются также отношения оптимальных весовых множителей к соответствующим множителям для стандартного варианта. Они называются далее относительными весами.

3. В приложении I, а также в табл. 1 и 2 приложений II и III приводятся данные оценок, полученных для конечно-разностных формул,

аппроксимирующих первую производную. Результаты для различных корреляционных функций и для различного размещения пунктов, данные в которых используются, получаются количественно различными. Однако в качественном отношении они имеют много общего.

В случае отсутствия ошибок наблюдения ( $\eta=0$ ) точность аппроксимации первой производной убывает с увеличением шага  $h$ . При наличии ошибок ( $\eta \neq 0$ ) зависимость усложняется. При малых  $h$  дисперсия погрешности аппроксимации  $\varepsilon$  очень большая. Даже для оптимального варианта она близка к дисперсии искомой производной. В стандартном варианте погрешности могут значительно превышать последнюю.

С увеличением  $h$  погрешность  $\varepsilon$  убывает до некоторого оптимального значения шага  $h_0$ , для которого она принимает минимальное значение  $\varepsilon_0$ , после чего  $\varepsilon$  начинает снова возрастать. Такой ход погрешностей обусловлен тем, что они определяются двумя факторами.

При малом шаге дифференцирования погрешность определения производной почти целиком определяется ошибкой задания исходных величин. При увеличении шага влияние этого фактора уменьшается. Однако при этом возрастает погрешность аппроксимации за счет естественной изменчивости истинных значений величины  $f$ . При достаточно большом шаге приращение погрешности за счет этого фактора начинает превышать убывание ее за счет первого фактора, в результате чего и происходит общий рост величины  $\varepsilon$ .

Указания на существование оптимального шага дифференцирования делались давно. Укажем, например, работы И. П. Ветлова [1] и Л. С. Гандина [2]. Подбор шага осуществлялся обычно исходя из различных эмпирических соображений. С. Панчев [9] предлагает выбирать шаг таким образом, чтобы дисперсия конечно-разностной формулы совпадала с дисперсией искомой производной. Нам представляется более естественным исходить при выборе шага из условия минимальности средней квадратической ошибки аппроксимации. Такой подход позволяет одновременно оценить точность, с которой могут определяться производные при заданной точности исходных данных.

Решая задачу на оптимум, можно получить формулы для оценки  $h_0$  и  $\varepsilon_0$  в зависимости от выбора разностной схемы. Выпишем, например, эти формулы для случая аппроксимации первой производной центральной разностью по схеме А

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx p(f_1 - f_2). \quad (22)$$

В этом случае имеем для оптимального варианта:

$$\eta = - \frac{r'(2h_0) r'(h_0)}{r''(h_0)} + r(2h_0) - 1, \quad (23)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{2r'(h_0) r''(h_0)}{r'(2h_0)} - r''(0). \quad (24)$$

Для стандартного же варианта  $\left(p = \frac{1}{2h}\right)$  получаем другие значения  $h_0$  и  $\varepsilon_0$ , которые определяются следующими условиями:

$$\eta = r(2h_0) - h_0 [r'(2h_0) + 2r'(h_0)] + 2h_0^2 r''(h_0), \quad (25)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2h_0^2} [(1 + \eta) - r(2h_0)] + \frac{2}{h_0} r'(h_0) - r''(0). \quad (26)$$

Формулы (23) или (25) позволяют получить  $h_0$  для заданного  $\eta$ . Подстановка  $h_0$  в (24) или (26) определяет  $\varepsilon_0$ .

В табл. 3 приводятся значения  $h_0$  и  $\varepsilon_0$  при различных  $\eta$  для корреляционных функций  $r_1$ ,  $r_2$  и  $r_3$ . Для всех этих функций имеет место рост оптимального шага и минимальной ошибки аппроксимации  $\varepsilon_0$  с увеличением ошибок в исходных данных. При не очень больших значениях  $\eta$  (по крайней мере до  $\eta=0,1$ ) наиболее выгодный шаг  $h_0$  и соответствующая точность аппроксимации оказываются практически одинаковыми при использовании как оптимального, так и стандартного вариантов. Это тем более существенно, что при малых  $h$  и при очень больших  $h$  расчет по этим вариантам дает существенные различия (см. таблицы в приложениях). При больших  $\eta$  между обоими вариантами также имеются расхождения. Однако этот случай практически большого интереса не представляет, так как на практике редко приходится заниматься дифференцированием метеорологических полей, измеряемых с такой малой точностью. Напомним, что  $\eta > 0,1$  означает, что ошибка измерений (фактически в нее входят и микроклиматические различия) в среднем превышает 30% изменчивости величины  $f$ .

Таблица 3

Зависимость оптимального шага  $h_0$  и меры ошибки аппроксимации первой производной по формуле центральных разностей  $\tilde{\varepsilon}_0$  от точности исходных данных

| $\eta$ | $r_1$               |                         |                     |                         | $r_2$               |                         |                     |                         | $r_3$               |                         |                     |                         |
|--------|---------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|---------------------|-------------------------|
|        | оптимальный вариант |                         | стандартный вариант |                         | оптимальный вариант |                         | стандартный вариант |                         | оптимальный вариант |                         | стандартный вариант |                         |
|        | $h_0$               | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$               | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$               | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$               | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$               | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$               | $\tilde{\varepsilon}_0$ |
| 0      | 0                   | 0                       | 0                   | 0                       | 0                   | 0                       | 0                   | 0                       | 0                   | 0                       | 0                   | 0                       |
| 0,001  | 0,12                | 0,12                    | 0,12                | 0,12                    | 0,34                | 0,02                    | 0,33                | 0,02                    | 0,24                | 0,01                    | 0,21                | 0,01                    |
| 0,005  | 0,19                | 0,19                    | 0,19                | 0,20                    | 0,50                | 0,06                    | 0,48                | 0,06                    | 0,32                | 0,02                    | 0,25                | 0,03                    |
| 0,010  | 0,24                | 0,24                    | 0,24                | 0,26                    | 0,58                | 0,09                    | 0,55                | 0,09                    | 0,35                | 0,04                    | 0,31                | 0,04                    |
| 0,020  | 0,30                | 0,30                    | 0,31                | 0,32                    | 0,67                | 0,13                    | 0,66                | 0,13                    | 0,39                | 0,06                    | 0,36                | 0,06                    |
| 0,050  | 0,40                | 0,40                    | 0,41                | 0,44                    | 0,83                | 0,21                    | 0,83                | 0,21                    | 0,45                | 0,11                    | 0,42                | 0,11                    |
| 0,100  | 0,50                | 0,50                    | 0,51                | 0,57                    | 0,95                | 0,30                    | 1,00                | 0,30                    | 0,47                | 0,17                    | 0,48                | 0,17                    |
| 0,200  | 0,60                | 0,60                    | 0,63                | 0,74                    | 1,10                | 0,41                    | 1,24                | 0,42                    | 0,56                | 0,27                    | 0,55                | 0,27                    |
| 0,500  | 0,73                | 0,73                    | 0,81                | 1,09                    | 1,28                | 0,58                    | 1,62                | 0,65                    | 0,61                | 0,45                    | 0,68                | 0,47                    |

Из табл. 3 следует также, что для значения  $\eta=0,02$ , которое часто принимается при объективном анализе, даже оптимальный выбор шага дифференцирования не позволяет определять первую производную методом центральных разностей с относительной погрешностью, меньшей 25%. Такая погрешность имеет место, когда корреляционная функция дифференцируемой величины описывается формулой  $r_3$ . Для функций  $r_1$  и  $r_2$  минимальная погрешность  $\sqrt{\tilde{\varepsilon}}$  составляет 55 и 35% соответственно.

Для уточнения расчета производных естественно попытаться рассчитывать их по исходным данным не в двух, а в большем числе точек. Однако рассмотрение табл. 4, где приводятся результаты расчета по схемам (см. рис. 1), включающим большее число точек для корреляционной функции  $r_1$ , показывает, что уточнение при этом достигается небольшое. При переходе от двухточечной схемы А к четырехточечной схеме Б минимальные погрешности остаются теми же. Можно показать, что это справедливо при любой корреляционной функции исходных величин. Оптимальный шаг для схемы Б оказывается в 1,4 раза меньше оптимального шага для схемы А.

Даже при использовании для расчета первых производных данных 12 точек (схема Д) дисперсия погрешности уменьшается лишь на 25%.



Таблица 4

Зависимость оптимального шага  $h_0$  и меры ошибки аппроксимации первой производной по разным схемам от точности исходных данных (корреляционная функция  $r_1$  — оптимальный вариант)

| $\eta$ | Схема |                         |       |                         |       |                         |       |                         |       |                         |
|--------|-------|-------------------------|-------|-------------------------|-------|-------------------------|-------|-------------------------|-------|-------------------------|
|        | А     |                         | Б     |                         | В     |                         | Д     |                         | Е     |                         |
|        | $h_0$ | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$ | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$ | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$ | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$ | $\tilde{\varepsilon}_0$ |
| 0      | 0     | 0                       | 0     | 0                       | 0     | 0                       | 0     | 0                       | 0     | 0                       |
| 0,001  | 0,12  | 0,12                    | 0,08  | 0,12                    | 0,09  | 0,09                    | —     | —                       | 0,12  | 0,10                    |
| 0,005  | 0,19  | 0,19                    | 0,13  | 0,19                    | 0,13  | 0,15                    | —     | —                       | 0,17  | 0,17                    |
| 0,010  | 0,24  | 0,24                    | 0,17  | 0,24                    | 0,17  | 0,19                    | 0,07  | 0,18                    | 0,22  | 0,21                    |
| 0,020  | 0,30  | 0,30                    | 0,21  | 0,30                    | 0,20  | 0,24                    | 0,11  | 0,22                    | 0,28  | 0,26                    |
| 0,050  | 0,40  | 0,40                    | 0,28  | 0,40                    | 0,27  | 0,32                    | 0,12  | 0,29                    | 0,37  | 0,35                    |
| 0,100  | 0,50  | 0,50                    | 0,35  | 0,50                    | 0,35  | 0,40                    | —     | —                       | 0,46  | 0,43                    |
| 0,200  | 0,60  | 0,60                    | 0,42  | 0,60                    | 0,42  | 0,49                    | —     | —                       | 0,56  | 0,53                    |
| 0,500  | 0,73  | 0,73                    | 0,52  | 0,73                    | 0,54  | 0,63                    | —     | —                       | 0,69  | 0,67                    |

4. В таблицах приложений II и III приводятся результаты оценок, выполненных для дифференциальных операторов второго порядка. Оценки относятся к величинам, статистическая структура которых описывается корреляционными функциями  $r_2$  и  $r_3$ .

Зависимость точности аппроксимации от шага дифференцирования для вторых производных, в общем, такова же, как и для первых производных. Во всех случаях, когда  $\eta \neq 0$ , ошибки аппроксимации велики при малых шагах, минимальны при некотором оптимальном выборе шага, а при дальнейшем росте шага монотонно увеличиваются. Однако ход  $\varepsilon$  при малых  $h$  в оптимальном варианте имеет существенную особенность. Особенность эта заключается в том, что аппроксимация второй производной по трехточечной схеме А обеспечивает некоторую информацию об истинных значениях производной и при  $h=0$  (для первой производной при  $\eta \neq 0$  и  $h=0$  такая информация отсутствует). В этом случае значения величины  $f$  во всех трех точках входят с одинаковым весом в отличие от стандартного варианта, для которого вес центральной точки имеет обратный знак и вдвое больше по абсолютной величине весов крайних точек. С увеличением шага  $h$  погрешность аппроксимации сначала возрастает и лишь затем начинает убывать, как это было в случае первой производной. Аналогичный ход погрешности аппроксимации в оптимальном варианте имеет место при аппроксимации лапласиана по пятиточечной схеме Г.

Такой ход погрешности аппроксимации связан с тем, что в отличие от первой производной, которая не коррелирована со значениями дифференцируемой величины в той же точке, вторые (кратные) производные имеют с ней отрицательную корреляцию. Это следует, например, из данных табл. 1, если учесть, что  $R'_{ff}(0) = 0$  и  $R''_{ff}(0) < 0$ . В связи с этим при малых  $h$  значения  $f$  во всех точках могут приближенно рассматриваться как три неточных измерения в одной точке. Именно поэтому они все входят с одинаковым весом.

При росте  $h$  вес центральной точки 0 возрастает, а веса крайних точек убывают, сумма же квадратов весов при этом увеличивается. Вследствие этого погрешность за счет ошибок измерений также растет с ростом  $h$ , так как она пропорциональна сумме квадратов весов. Поскольку погрешность за счет конечно-разностной аппроксимации точных значений также увеличивается с ростом  $h$ , то растет и вся погрешность аппроксимации в целом.

При дальнейшем росте  $h$  (тем раньше, чем меньше  $\eta$ ) веса крайних точек 1 и 2 становятся положительными, а затем достигают максимума, после чего начинают уменьшаться. После этого соотношение двух факторов, определяющих погрешность аппроксимации, оказывается тем же, что и для первых производных, т. е. начинается уменьшение погрешности до некоторого оптимума, после которого происходит монотонный рост ее. Однако и при очень больших шагах дифференцирования разностная формула дает некоторую информацию о второй производной за счет уже упоминавшейся корреляции ее со значением  $f$  в центральной точке. Нетрудно видеть, что в оптимальном варианте при  $h \rightarrow \infty$  отличен от нуля лишь вес центральной точки 0, а  $\varepsilon|_{h=\infty}(\eta) = \varepsilon|_{h=0}(3\eta)$ .

Таблица 5

Зависимость оптимального шага  $h_0$  и минимальной дисперсии аппроксимации вторых производных  $\tilde{\varepsilon}_0$  от точности исходных данных (стандартный вариант)

| $\eta$ | $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ |                         |       |                         | $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ |                         |       |                         | $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ |                         |       |                         |
|--------|-------------------------------------|-------------------------|-------|-------------------------|----------------------------------------------|-------------------------|-------|-------------------------|-------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-------|-------------------------|
|        | $r_2$                               |                         | $r_3$ |                         | $r_2$                                        |                         | $r_3$ |                         | $r_2$                                                                   |                         | $r_3$ |                         |
|        | $h_0$                               | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$ | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$                                        | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$ | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$                                                                   | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$ | $\tilde{\varepsilon}_0$ |
| 0      | 0                                   | 0                       | 0     | 0                       | 0                                            | 0                       | 0     | 0                       | 0                                                                       | 0                       | 0     | 0                       |
| 0,001  | 0,56                                | 0,34                    | 0,41  | 0,04                    | 0,34                                         | 0,34                    | 0,26  | 0,03                    | 0,59                                                                    | 0,34                    | 0,42  | 0,04                    |
| 0,005  | 0,79                                | 0,46                    | 0,51  | 0,09                    | 0,47                                         | 0,46                    | 0,31  | 0,07                    | 0,83                                                                    | 0,45                    | 0,53  | 0,09                    |
| 0,010  | 0,92                                | 0,52                    | 0,56  | 0,12                    | 0,54                                         | 0,52                    | 0,35  | 0,10                    | 0,97                                                                    | 0,50                    | 0,61  | 0,12                    |
| 0,020  | 1,06                                | 0,58                    | 0,62  | 0,16                    | 0,63                                         | 0,58                    | 0,38  | 0,14                    | 1,12                                                                    | 0,56                    | 0,65  | 0,16                    |
| 0,050  | 1,32                                | 0,67                    | 0,70  | 0,24                    | 0,78                                         | 0,67                    | 0,43  | 0,21                    | 1,41                                                                    | 0,65                    | 0,75  | 0,21                    |
| 0,100  | 1,58                                | 0,73                    | 0,79  | 0,32                    | 0,92                                         | 0,74                    | 0,48  | 0,28                    | 1,68                                                                    | 0,72                    | 0,84  | 0,32                    |
| 0,200  | 1,90                                | 0,80                    | 0,89  | 0,42                    | 1,10                                         | 0,81                    | 0,53  | 0,38                    | >2,00                                                                   | >0,78                   | 0,97  | 0,41                    |
| 0,500  | >2,00                               | <0,92                   | 1,06  | 0,59                    | 1,43                                         | 0,90                    | 0,62  | 0,54                    | >2,00                                                                   | <0,92                   | 1,14  | 0,58                    |

Погрешность аппроксимации смешанной второй производной таких особенностей не имеет и зависимость ее от шага  $h$  имеет тот же характер, как и для первой производной. Более того, сами значения оптимальных шагов  $h_0$ , соответствующих минимальной ошибке, близки к оптимальным шагам для первой производной. Это хорошо видно из сопоставления данных табл. 3 и 5. В последней приводятся значения оптимальных шагов и минимальной погрешности аппроксимации дифференциальных операторов второго порядка для простейших схем. В табл. 5 приводятся данные лишь для стандартного варианта, когда используются следующие разностные формулы:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} (f_1 + f_2 - 2f_0) \quad (27)$$

(схема А),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{4h^2} (f_1 + f_4 - f_2 - f_3) \quad (28)$$

(схема Б),

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h^2} (f_1 + f_2 + f_3 + f_4 - 4f_0) \quad (29)$$

(схема Г).

Значения  $h_0$  и  $\varepsilon_0$  для оптимального варианта, как и в случае первой производной, отличаются сравнительно мало. Стоит отметить лишь, что в стандартном варианте  $h_0$  при малых значениях меры ошибки наблюдений  $\eta$  несколько меньше, чем в оптимальном. Начиная с  $\eta=0,1$  соотношение между ними становится обратным.

Из табл. 5 следует, что для заданной корреляционной функции максимальная точность аппроксимации практически одинакова для всех рассматриваемых операторов второго порядка. Естественно, что она существенно меньше точности аппроксимации первой производной. Как уже указывалось, оптимальные шаги для первой производной и для смешанной производной второго порядка близки между собой. Оптимальные шаги сетки для оператора Лапласа несколько больше, чем для второй производной, однако различием этим практически можно пренебречь. Сравнение  $h_0$  для первых и вторых производных показывает, что их отношение растет с уменьшением меры ошибок исходных данных  $\eta$ . Однако и эта зависимость является слабой, так что отношение шагов меняется от 1,5 до 1,7 для корреляционной функции  $r_2$  и от 1,7 до 2,0 для корреляционной функции  $r_3$ . Учитывая, что в области оптимума величина погрешности сравнительно мало зависит от шага  $h$ , можно приближенно считать, что оптимальный шаг для расчета производной второго порядка и оператора Лапласа в 1,7 раза больше оптимального шага для производных первого порядка и смешанной производной.

5. Полученные выше результаты относятся к некоторым частным типам корреляционных функций. Они применимы к конкретным метеорологическим полям в той мере, в какой статистическая структура этих полей может быть описана этими корреляционными функциями.

Наиболее изученной является в настоящее время статистическая структура поля геопотенциала. Однако даже для этого элемента имеющиеся сведения нельзя считать достаточными. Особенно это относится к статистической структуре для малых расстояний ( $\rho \leq 300$  км). Именно по этой причине разные авторы до сих пор используют различные формулы для аналитического представления корреляционных функций геопотенциала. Различия между формулами, как правило, находятся в пределах разброса экспериментальных данных, поэтому при использовании их для анализа самих исходных данных они не очень существенны. При переходе же к анализу полей производных они оказываются уже существенными. Для этих целей приходится заранее отказываться от использования степенных, экспоненциальных и экспоненциально-косинусных аппроксимаций, как соответствующих случайным полям, не имеющим даже первых производных.

М. И. Юдин [11] показал целесообразность использования при расчете статистической структуры данных о статистических свойствах конечных разностей. Полученные таким путем аппроксимационные формулы для корреляционных функций в принципе позволяют получать правильные выводы и о статистической структуре производных. По данным Юдина, корреляционная функция геопотенциала изобарической поверхности 500 мб аппроксимируется формулой  $r_1(\rho)$ . При этом масштаб  $L_1$  составляет 1000 км, т. е. расстояние в формуле (16) должно отсчитываться в тысячах километров. Эта функция использовалась также в работах Л. С. Гандина [4], С. Панчева [9] и М. С. Татарской [10] (летний период). На основании функции  $r_1$  была исследована структура составляющих геострофического ветра, пропорциональных первым производным поля геопотенциала. Полученные таким образом для геострофического ветра данные хорошо согласуются с данными для реального ветра.

Как уже упоминалось, функция  $r_1$  соответствует случайным полям, не имеющим производных выше первого порядка. Это выражается, например, в том, что полученные по  $r_1$  спектральные плотности для производных второго порядка имеют особенность в области коротких волн. Поэтому при исследовании поведения производных более высоких порядков с помощью функции  $r_1$  Юдину [12] пришлось исключить из рассмотрения эту область. В работе Панчева [9] вводится гауссовский фильтр, который подавляет коротковолновые пульсации и оставляет почти неизменными пульсации длинноволновые.

Оба эти приема практически означают переход от исходной корреляционной функции  $r_1$  к некоторой другой корреляционной функции. Методически представляется неудобным пользоваться одновременно такой функцией с фильтром при анализе старших производных и исходной функцией  $r_1$  при анализе полей геопотенциала и ветра. С этой точки зрения было бы более удобно использовать аппроксимации  $r_2$  и  $r_3$ .

Насколько нам известно, функция  $r_2$  для аппроксимации статистической структуры метеорологических полей не использовалась. Функция же  $r_3$  использовалась для аппроксимации корреляционной функции приземного давления И. А. Дюбкиным [7].

Для аппроксимации корреляционной функции геопотенциала изобарической поверхности 500 мб формулу  $r_3$  использовали Панчев [8], Киперс [14] и др. У Панчева параметр  $L_3 \approx 1300$  км. Это хорошо согласуется с эмпирическими данными о структуре геопотенциала, приведенными в статье Л. С. Гандина и Е. И. Багровой [5]. Киперс использует близкое значение  $L_3 = 1400$  км.

Исходя из данных табл. 3, нетрудно сравнить оптимальные шаги дифференцирования в стандартном двухточечном варианте (схема А) для аппроксимационных формул Юдина и Панчева (табл. 6).

Таблица 6

Оптимальный шаг дифференцирования  $h_0$  и точность определения первой производной поля геопотенциала при разных аппроксимациях корреляционной функции

| $\eta$ | Аппроксимация |                         |                |                         |
|--------|---------------|-------------------------|----------------|-------------------------|
|        | по Юдину [11] |                         | по Панчеву [8] |                         |
|        | $h_0$ тыс. км | $\tilde{\varepsilon}_0$ | $h_0$ тыс. км  | $\tilde{\varepsilon}_0$ |
| 0,001  | 0,12          | 0,12                    | 0,27           | 0,01                    |
| 0,005  | 0,19          | 0,20                    | 0,32           | 0,03                    |
| 0,010  | 0,24          | 0,26                    | 0,40           | 0,04                    |
| 0,020  | 0,31          | 0,32                    | 0,46           | 0,06                    |
| 0,050  | 0,41          | 0,44                    | 0,54           | 0,11                    |
| 0,100  | 0,51          | 0,57                    | 0,62           | 0,17                    |
| 0,200  | 0,63          | 0,74                    | 0,71           | 0,27                    |
| 0,500  | 0,81          | 1,09                    | 0,88           | 0,53                    |

Такое сравнение показывает, что при аппроксимации Панчева геострофический ветер по полю геопотенциала можно рассчитывать при более редкой сети станций и притом с гораздо большей точностью, чем это имело бы место при аппроксимации Юдина. Для решения вопроса, какая аппроксимация ближе к действительности, требуются дополнительные исследования. Представляется, что ответ на этот вопрос, помимо непосредственного расчета корреляционных и структурных функций, могут дать численные опыты по анализу поля ветра с использованием обеих

аппроксимаций и сравнением расчетного геострофического ветра с реальным.

Во всяком случае следует иметь в виду, что при обычных значениях  $\eta \approx 0,01 \div 0,02$  средняя квадратическая относительная погрешность определения геострофического ветра по полю давления превышает 20%. Известно, что отклонения ветра от геострофического в свободной атмосфере имеют этот же порядок. Следовательно, по данным за отдельные сроки наблюдений на одном уровне расчет отклонений ветра от геострофического невозможен.

Еще более необходимы дополнительные исследования для решения вопроса о применении данных по статистической структуре к производным более высоких порядков и для менее исследованных полей. Из относящихся к производным второго порядка результатов общее значение имеет, по-видимому, вывод о выгоде выбора большего шага дифференцирования по сравнению с шагом дифференцирования для нахождения первых производных. Этот вывод полностью согласуется с качественными выводами, полученными разными авторами как из эмпирических [13], так и из теоретических [12] соображений.

Заметим, наконец, что в реальных случаях метеорологические станции не располагаются в виде регулярной сетки. Конечно, для целей объективного анализа такое расположение не обязательно. В рамках изложенного выше способа расчета оптимальных конечно-разностных формул анализ производных исходных полей может осуществляться и по нерегулярной сетке параллельно с оптимальной интерполяцией исходных величин. Существуют, однако, величины, непосредственно не измеряемые, а вычисляемые, которые имеются обычно лишь в пунктах регулярной сети станций. К таким величинам относятся, например, поля вертикальных скоростей, вихря, прогностические поля. Для таких полей очень существенно иметь в виду, что ошибки определения их в разных точках не являются некоррелированными, как это предполагалось нами. Принципиально учет такой корреляции трудностей не составляет. Однако для этого необходимы дополнительные сведения о статистической структуре. Например, для оценки точности получения производных по прогностическим полям необходимо иметь сведения о корреляции ошибок прогноза в разных пунктах. В настоящее время такие сведения отсутствуют.

### Выводы

1. Точность, с которой конечно-разностные операторы аппроксимируют линейные дифференциальные операторы, может быть однозначно определена по данным о статистической структуре дифференцируемой величины.

2. Для заданного размещения пунктов, в которых имеются данные об исходной величине, могут быть построены наилучшие в смысле метода наименьших квадратов конечно-разностные формулы.

3. При наличии ошибок в исходных данных существует оптимальный шаг дифференцирования. Выбор его обеспечивает наименьшую ошибку аппроксимации производной для заданной сетки точек.

4. В случае, когда корреляционная функция исходных величин описывается одной из трех рассмотренных нами формул, точность аппроксимации и оптимальный шаг дифференцирования могут быть получены из приведенных в работе таблиц.

5. Для рассмотренных видов корреляционных функций оптимальный шаг для конечно-разностных формул, аппроксимирующих вторые кратные производные, оказывается примерно в 1,7 раза больше оптимального шага для первых производных и второй смешанной производной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ветлов И. П. О вычислении производных метеорологических элементов. Метеорология и гидрология, № 1, 1960.
2. Гандин Л. С. О принципах рационального размещения сети метеорологических станций. Труды ГГО, вып. 111, 1961.
3. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеоздат, Л., 1963.
4. Гандин Л. С. Об оптимальной интерполяции векторных полей. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
5. Гандин Л. С., Багрова Е. И. О структуре поля высот поверхности 500 мб. Труды ГГО, вып. 99, 1959.
6. Гандин Л. С., Ильин Б. М., Либерман Ю. М., Юдин М. И. О точности определения конечных разностей при анализе метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 168, 1965.
7. Дюбкин И. А. О структуре поля давления на уровне моря в высоких широтах северного полушария. Труды ААНИИ, т. 271, вып. 1, 1964.
8. Панчев С. Към въпроса за аналитичното представяне на структурната и корелационна функции на геопотенциала на ниво 500 мб. Хидрология и метеорология, № 6, 1963.
9. Панчев С. О выборе «шага» при конечно-разностном дифференцировании некоторых метеорологических элементов. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1964.
10. Татарская М. С. Пространственная статистическая структура геопотенциала. Изв. АН СССР, сер. физ. атм. и океана, т. 1, № 7, 1965.
11. Юдин М. И. Некоторые закономерности структуры геопотенциала. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
12. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Гидрометеоздат, Л., 1963.
13. Knighting E. K., Jones D. E., Hinds M. K. Numerical experiment in the integration of the meteorological equations of motion. Quart. Journ. of the Royal Met. Soc., vol. 84, No. 360, 1958.
14. Kuipers W. J. A. Density of meteorological networks in relation to accuracy of estimation. World Met. Organiz. Commission for synopt. meteorol. Final rep. of the working group on networks. Appendix I, 1962.

МЕРА ОШИБКИ АППРОКСИМАЦИИ ПЕРВОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РАЗНОСТНЫМИ ФОРМУЛАМИ ПРИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ

$$\text{ФУНКЦИИ } r_1(\rho) = (1+\rho)e^{-\rho}$$

Таблица I

Мера ошибки двухточечной аппроксимации первой производной по схеме А

| h    | η                   |       |       |       |       |        |        |        |         |       |                     |       |       |       |       |       |       |       |
|------|---------------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|-------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      | Стандартный вариант |       |       |       |       |        |        |        |         |       | Оптимальный вариант |       |       |       |       |       |       |       |
|      | 0                   | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05   | 0,1    | 0,2    | 0,5     | 0     | 0,001               | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   |
| 0    | 0                   | ∞     | ∞     | ∞     | ∞     | ∞      | ∞      | ∞      | ∞       | 0     | 1,000               | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 0,05 | 0,033               | 0,233 | 1,033 | 2,033 | 4,033 | 10,033 | 20,033 | 40,033 | 100,033 | 0,033 | 0,203               | 0,533 | 0,692 | 0,817 | 0,917 | 0,957 | 0,978 | 0,991 |
| 0,10 | 0,066               | 0,116 | 0,316 | 0,566 | 1,066 | 2,566  | 5,066  | 10,066 | 25,066  | 0,066 | 0,116               | 0,273 | 0,405 | 0,564 | 0,757 | 0,861 | 0,925 | 0,968 |
| 0,15 | 0,099               | 0,122 | 0,211 | 0,322 | 0,544 | 1,211  | 2,322  | 4,544  | 11,211  | 0,097 | 0,121               | 0,205 | 0,290 | 0,414 | 0,617 | 0,757 | 0,859 | 0,938 |
| 0,20 | 0,132               | 0,144 | 0,194 | 0,257 | 0,382 | 0,757  | 1,382  | 2,632  | 6,382   | 0,129 | 0,143               | 0,194 | 0,251 | 0,342 | 0,519 | 0,668 | 0,795 | 0,905 |
| 0,25 | 0,164               | 0,172 | 0,204 | 0,244 | 0,324 | 0,564  | 0,964  | 1,764  | 4,164   | 0,160 | 0,169               | 0,204 | 0,243 | 0,312 | 0,459 | 0,601 | 0,739 | 0,872 |
| 0,30 | 0,196               | 0,201 | 0,223 | 0,251 | 0,307 | 0,473  | 0,751  | 1,307  | 2,973   | 0,190 | 0,196               | 0,222 | 0,251 | 0,304 | 0,425 | 0,555 | 0,693 | 0,841 |
| 0,40 | 0,257               | 0,260 | 0,273 | 0,288 | 0,319 | 0,413  | 0,569  | 0,882  | 1,819   | 0,248 | 0,252               | 0,267 | 0,285 | 0,319 | 0,404 | 0,506 | 0,632 | 0,792 |
| 0,50 | 0,315               | 0,317 | 0,325 | 0,335 | 0,355 | 0,415  | 0,515  | 0,715  | 1,315   | 0,304 | 0,307               | 0,317 | 0,329 | 0,353 | 0,415 | 0,495 | 0,604 | 0,759 |
| 0,60 | 0,371               | 0,372 | 0,378 | 0,385 | 0,399 | 0,440  | 0,510  | 0,649  | 1,065   | 0,357 | 0,359               | 0,367 | 0,376 | 0,393 | 0,440 | 0,504 | 0,596 | 0,741 |
| 0,70 | 0,423               | 0,424 | 0,428 | 0,434 | 0,444 | 0,474  | 0,525  | 0,627  | 0,934   | 0,408 | 0,409               | 0,415 | 0,422 | 0,436 | 0,473 | 0,524 | 0,602 | 0,734 |
| 0,80 | 0,472               | 0,473 | 0,476 | 0,480 | 0,488 | 0,512  | 0,551  | 0,629  | 0,863   | 0,456 | 0,457               | 0,462 | 0,467 | 0,478 | 0,508 | 0,551 | 0,617 | 0,735 |
| 0,90 | 0,518               | 0,519 | 0,522 | 0,525 | 0,531 | 0,549  | 0,580  | 0,642  | 0,827   | 0,501 | 0,502               | 0,506 | 0,511 | 0,519 | 0,544 | 0,580 | 0,638 | 0,742 |
| 1,00 | 0,561               | 0,562 | 0,564 | 0,566 | 0,571 | 0,586  | 0,611  | 0,661  | 0,811   | 0,544 | 0,545               | 0,548 | 0,552 | 0,559 | 0,580 | 0,610 | 0,659 | 0,753 |

Оптимальные веса при двухточечной аппроксимации первой производной по схеме А

| h    | η    |       |       |      |      |      |      |      |      |      |       |       |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 0    | 0,051 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  | 0    | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  |      |
| 0    | ∞    | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1,00 | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |      |
|      | 0,05 | 10,16 | 8,38  | 4,91 | 3,24 | 1,93 | 0,87 | 0,45 | 0,23 | 0,09 | 1,02  | 0,84  | 0,49 | 0,32 | 0,19 | 0,09 | 0,04 | 0,02 | 0,01 |
|      | 0,10 | 5,16  | 4,88  | 4,02 | 3,29 | 2,41 | 1,34 | 0,77 | 0,42 | 0,17 | 1,03  | 0,98  | 0,80 | 0,65 | 0,48 | 0,27 | 0,15 | 0,08 | 0,04 |
|      | 0,15 | 3,50  | 3,40  | 3,08 | 2,75 | 2,27 | 1,48 | 0,94 | 0,54 | 0,24 | 1,05  | 1,02  | 0,93 | 0,83 | 0,68 | 0,44 | 0,27 | 0,16 | 0,07 |
|      | 0,20 | 2,66  | 2,62  | 2,46 | 2,29 | 2,01 | 1,47 | 1,01 | 0,63 | 0,29 | 1,07  | 1,05  | 0,98 | 0,92 | 0,80 | 0,59 | 0,40 | 0,25 | 0,12 |
|      | 0,25 | 2,16  | 2,13  | 2,04 | 1,94 | 1,77 | 1,39 | 1,02 | 0,67 | 0,33 | 1,08  | 1,07  | 1,02 | 0,97 | 0,88 | 0,69 | 0,51 | 0,34 | 0,16 |
|      | 0,30 | 1,82  | 1,81  | 1,75 | 1,68 | 1,57 | 1,29 | 1,00 | 0,69 | 0,36 | 1,09  | 1,08  | 1,05 | 1,01 | 0,94 | 0,78 | 0,60 | 0,41 | 0,21 |
|      | 0,40 | 1,40  | 1,39  | 1,37 | 1,33 | 1,27 | 1,11 | 0,92 | 0,68 | 0,39 | 1,12  | 1,12  | 1,09 | 1,06 | 1,02 | 0,89 | 0,74 | 0,55 | 0,31 |
|      | 0,50 | 1,15  | 1,14  | 1,13 | 1,10 | 1,07 | 0,96 | 0,83 | 0,65 | 0,40 | 1,15  | 1,14  | 1,13 | 1,11 | 1,07 | 0,96 | 0,83 | 0,65 | 0,40 |
|      | 0,60 | 0,98  | 0,97  | 0,96 | 0,95 | 0,92 | 0,85 | 0,75 | 0,61 | 0,39 | 1,17  | 1,17  | 1,16 | 1,14 | 1,10 | 1,02 | 0,90 | 0,74 | 0,47 |
|      | 0,70 | 0,85  | 0,85  | 0,84 | 0,83 | 0,81 | 0,76 | 0,68 | 0,57 | 0,38 | 1,19  | 1,19  | 1,18 | 1,16 | 1,14 | 1,06 | 0,96 | 0,80 | 0,54 |
|      | 0,80 | 0,76  | 0,76  | 0,75 | 0,74 | 0,73 | 0,68 | 0,62 | 0,53 | 0,37 | 1,21  | 1,21  | 1,20 | 1,19 | 1,16 | 1,10 | 1,00 | 0,85 | 0,59 |
|      | 0,90 | 0,68  | 0,68  | 0,67 | 0,67 | 0,66 | 0,62 | 0,57 | 0,50 | 0,35 | 1,23  | 1,22  | 1,22 | 1,20 | 1,18 | 1,12 | 1,03 | 0,89 | 0,63 |
| 1,00 | 0,62 | 0,62  | 0,61  | 0,61 | 0,60 | 0,57 | 0,53 | 0,46 | 0,34 | 1,24 | 1,24  | 1,23  | 1,22 | 1,20 | 1,14 | 1,06 | 0,93 | 0,67 |      |



Мера ошибки четырехточечной аппроксимации первой производной по схеме Б

| h    |       | η                   |       |       |       |       |        |        |        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------|-------|---------------------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      |       | 0                   | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05   | 0,1    | 0,2    | 0,5   | 0     | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   |
| 0    |       | Стандартный вариант |       |       |       |       |        |        |        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|      |       | ∞                   | ∞     | ∞     | ∞     | ∞     | ∞      | ∞      | ∞      | ∞     | ∞     | 0     | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 0,05 | 0,047 | 0,147               | 0,547 | 1,047 | 2,047 | 5,047 | 10,047 | 20,047 | 50,047 | 0,047 | 0,141 | 0,387 | 0,546 | 0,702 | 0,853 | 0,920 | 0,958 | 0,983 |
| 0,10 | 0,094 | 0,119               | 0,219 | 0,344 | 0,594 | 1,344 | 2,594  | 5,094  | 12,594 | 0,092 | 0,119 | 0,211 | 0,302 | 0,433 | 0,638 | 0,774 | 0,871 | 0,943 |
| 0,15 | 0,140 | 0,151               | 0,195 | 0,251 | 0,362 | 0,695 | 1,251  | 2,362  | 5,695  | 0,136 | 0,149 | 0,195 | 0,247 | 0,332 | 0,502 | 0,650 | 0,780 | 0,896 |
| 0,20 | 0,185 | 0,191               | 0,216 | 0,247 | 0,310 | 0,497 | 0,810  | 1,435  | 3,310  | 0,179 | 0,187 | 0,215 | 0,247 | 0,305 | 0,435 | 0,569 | 0,708 | 0,851 |
| 0,25 | 0,229 | 0,233               | 0,249 | 0,269 | 0,309 | 0,429 | 0,629  | 1,029  | 2,229  | 0,221 | 0,226 | 0,245 | 0,267 | 0,308 | 0,408 | 0,523 | 0,656 | 0,813 |
| 0,30 | 0,271 | 0,274               | 0,285 | 0,299 | 0,327 | 0,410 | 0,549  | 0,827  | 1,660  | 0,262 | 0,265 | 0,279 | 0,296 | 0,326 | 0,404 | 0,501 | 0,623 | 0,782 |
| 0,40 | 0,352 | 0,354               | 0,360 | 0,368 | 0,383 | 0,430 | 0,508  | 0,665  | 1,133  | 0,339 | 0,341 | 0,350 | 0,360 | 0,379 | 0,430 | 0,499 | 0,597 | 0,746 |
| 0,50 | 0,427 | 0,428               | 0,432 | 0,437 | 0,447 | 0,477 | 0,527  | 0,627  | 0,927  | 0,411 | 0,413 | 0,418 | 0,425 | 0,439 | 0,475 | 0,526 | 0,603 | 0,734 |
| 0,60 | 0,495 | 0,496               | 0,499 | 0,502 | 0,509 | 0,530 | 0,565  | 0,634  | 0,842  | 0,478 | 0,479 | 0,484 | 0,488 | 0,498 | 0,525 | 0,565 | 0,626 | 0,738 |
| 0,70 | 0,557 | 0,558               | 0,560 | 0,562 | 0,567 | 0,582 | 0,608  | 0,659  | 0,812  | 0,540 | 0,541 | 0,544 | 0,548 | 0,555 | 0,576 | 0,607 | 0,657 | 0,751 |
| 0,80 | 0,613 | 0,613               | 0,615 | 0,617 | 0,621 | 0,632 | 0,652  | 0,691  | 0,808  | 0,597 | 0,597 | 0,600 | 0,603 | 0,608 | 0,625 | 0,650 | 0,690 | 0,770 |
| 0,90 | 0,663 | 0,663               | 0,664 | 0,666 | 0,669 | 0,678 | 0,694  | 0,724  | 0,817  | 0,648 | 0,648 | 0,650 | 0,653 | 0,658 | 0,671 | 0,691 | 0,724 | 0,792 |
| 1,00 | 0,707 | 0,707               | 0,708 | 0,710 | 0,712 | 0,720 | 0,732  | 0,757  | 0,832  | 0,694 | 0,695 | 0,696 | 0,698 | 0,702 | 0,713 | 0,729 | 0,757 | 0,814 |
| 0    |       | Оптимальный вариант |       |       |       |       |        |        |        |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|      |       | ∞                   | ∞     | ∞     | ∞     | ∞     | ∞      | ∞      | ∞      | ∞     | ∞     | 0     | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |

Оптимальные веса при четырехточечной аппроксимации первой производной по схеме Б

| h    | η               |       |       |      |      |      |      |      |      |                    |       |       |      |      |      |      |      |      |
|------|-----------------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|--------------------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
|      | Абсолютные веса |       |       |      |      |      |      |      |      | Относительные веса |       |       |      |      |      |      |      |      |
|      | 0               | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  | 0                  | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  |
| 0    | ∞               | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1,00               | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |
| 0,05 | 5,12            | 4,61  | 3,30  | 2,44 | 1,60 | 0,79 | 0,43 | 0,22 | 0,09 | 1,02               | 0,92  | 0,66  | 0,49 | 0,32 | 0,16 | 0,09 | 0,04 | 0,02 |
| 0,10 | 2,62            | 2,54  | 2,27  | 2,01 | 1,63 | 1,04 | 0,65 | 0,37 | 0,16 | 1,05               | 1,02  | 0,91  | 0,80 | 0,65 | 0,42 | 0,26 | 0,15 | 0,06 |
| 0,15 | 1,78            | 1,75  | 1,66  | 1,55 | 1,38 | 1,03 | 0,72 | 0,45 | 0,21 | 1,07               | 1,05  | 1,00  | 0,93 | 0,83 | 0,62 | 0,43 | 0,27 | 0,13 |
| 0,20 | 1,36            | 1,35  | 1,30  | 1,25 | 1,15 | 0,94 | 0,72 | 0,48 | 0,25 | 1,09               | 1,08  | 1,04  | 1,00 | 0,92 | 0,75 | 0,58 | 0,38 | 0,20 |
| 0,25 | 1,11            | 1,10  | 1,08  | 1,04 | 0,98 | 0,84 | 0,68 | 0,49 | 0,27 | 1,11               | 1,10  | 1,08  | 1,04 | 0,98 | 0,84 | 0,68 | 0,49 | 0,27 |
| 0,30 | 0,94            | 0,94  | 0,92  | 0,90 | 0,86 | 0,76 | 0,64 | 0,48 | 0,28 | 1,13               | 1,13  | 1,10  | 1,08 | 1,03 | 0,91 | 0,77 | 0,58 | 0,34 |
| 0,40 | 0,73            | 0,73  | 0,72  | 0,70 | 0,68 | 0,63 | 0,55 | 0,44 | 0,28 | 1,17               | 1,16  | 1,15  | 1,12 | 1,09 | 1,01 | 0,88 | 0,70 | 0,45 |
| 0,50 | 0,60            | 0,60  | 0,59  | 0,58 | 0,57 | 0,53 | 0,48 | 0,40 | 0,27 | 1,20               | 1,20  | 1,18  | 1,16 | 1,14 | 1,06 | 0,96 | 0,80 | 0,54 |
| 0,60 | 0,51            | 0,51  | 0,50  | 0,50 | 0,49 | 0,46 | 0,42 | 0,36 | 0,26 | 1,22               | 1,22  | 1,20  | 1,20 | 1,18 | 1,10 | 1,01 | 0,86 | 0,62 |
| 0,70 | 0,44            | 0,44  | 0,44  | 0,43 | 0,43 | 0,41 | 0,38 | 0,33 | 0,24 | 1,23               | 1,22  | 1,21  | 1,20 | 1,20 | 1,15 | 1,06 | 0,92 | 0,67 |
| 0,80 | 0,39            | 0,39  | 0,39  | 0,38 | 0,38 | 0,36 | 0,34 | 0,30 | 0,22 | 1,25               | 1,24  | 1,23  | 1,22 | 1,21 | 1,16 | 1,09 | 0,96 | 0,70 |
| 0,90 | 0,35            | 0,35  | 0,35  | 0,34 | 0,34 | 0,33 | 0,31 | 0,27 | 0,21 | 1,26               | 1,25  | 1,24  | 1,23 | 1,22 | 1,19 | 1,12 | 0,97 | 0,76 |
| 1,00 | 0,31            | 0,31  | 0,31  | 0,31 | 0,31 | 0,30 | 0,28 | 0,25 | 0,18 | 1,24               | 1,24  | 1,24  | 1,24 | 1,24 | 1,20 | 1,12 | 1,00 | 0,72 |

Таблица 5

Мера ошибки шеститочечной аппроксимации первой производной по схеме В

С\*

| h    |       | $\eta$              |          |          |          |          |          |          |          |       |                     |       |       |       |       |       |       |       |  |
|------|-------|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|
|      |       | Стандартный вариант |          |          |          |          |          |          |          |       | Оптимальный вариант |       |       |       |       |       |       |       |  |
|      | 0     | 0,001               | 0,005    | 0,01     | 0,02     | 0,05     | 0,1      | 0,2      | 0,5      | 0     | 0,001               | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   |  |
| 0    | 0     | $\infty$            | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 0     | 1,000               | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |  |
| 0,05 | 0,640 | 0,107               | 0,375    | 0,710    | 1,379    | 3,387    | 6,734    | 13,427   | 33,507   | 0,032 | 0,105               | 0,296 | 0,444 | 0,609 | 0,793 | 0,884 | 0,938 | 0,974 |  |
| 0,10 | 0,081 | 0,097               | 0,164    | 0,248    | 0,415    | 0,917    | 1,754    | 3,427    | 8,447    | 0,065 | 0,094               | 0,161 | 0,231 | 0,340 | 0,537 | 0,691 | 0,814 | 0,915 |  |
| 0,15 | 0,120 | 0,128               | 0,158    | 0,195    | 0,269    | 0,492    | 0,864    | 1,608    | 3,839    | 0,096 | 0,116               | 0,154 | 0,192 | 0,258 | 0,402 | 0,549 | 0,697 | 0,847 |  |
| 0,20 | 0,159 | 0,164               | 0,180    | 0,201    | 0,243    | 0,369    | 0,578    | 0,996    | 2,251    | 0,128 | 0,142               | 0,171 | 0,196 | 0,240 | 0,344 | 0,466 | 0,610 | 0,784 |  |
| 0,25 | 0,198 | 0,200               | 0,211    | 0,224    | 0,251    | 0,332    | 0,465    | 0,733    | 1,536    | 0,158 | 0,169               | 0,193 | 0,213 | 0,246 | 0,324 | 0,423 | 0,552 | 0,733 |  |
| 0,30 | 0,235 | 0,237               | 0,244    | 0,254    | 0,272    | 0,328    | 0,421    | 0,607    | 1,165    | 0,188 | 0,196               | 0,217 | 0,234 | 0,260 | 0,323 | 0,404 | 0,518 | 0,693 |  |
| 0,40 | 0,306 | 0,308               | 0,312    | 0,317    | 0,327    | 0,359    | 0,411    | 0,516    | 0,829    | 0,247 | 0,252               | 0,266 | 0,280 | 0,300 | 0,346 | 0,404 | 0,492 | 0,646 |  |
| 0,50 | 0,373 | 0,374               | 0,377    | 0,380    | 0,387    | 0,407    | 0,440    | 0,507    | 0,708    | 0,303 | 0,306               | 0,317 | 0,327 | 0,344 | 0,381 | 0,427 | 0,497 | 0,629 |  |
| 0,60 | 0,435 | 0,436               | 0,438    | 0,440    | 0,445    | 0,459    | 0,482    | 0,528    | 0,668    | 0,357 | 0,359               | 0,366 | 0,375 | 0,389 | 0,420 | 0,459 | 0,517 | 0,630 |  |
| 0,70 | 0,492 | 0,493               | 0,494    | 0,496    | 0,499    | 0,510    | 0,527    | 0,561    | 0,663    | 0,408 | 0,409               | 0,415 | 0,422 | 0,433 | 0,460 | 0,493 | 0,543 | 0,642 |  |
| 0,80 | 0,545 | 0,545               | 0,546    | 0,547    | 0,550    | 0,558    | 0,571    | 0,597    | 0,676    | 0,456 | 0,457               | 0,462 | 0,467 | 0,476 | 0,499 | 0,529 | 0,572 | 0,659 |  |
| 0,90 | 0,592 | 0,592               | 0,594    | 0,595    | 0,597    | 0,600    | 0,613    | 0,634    | 0,696    | 0,501 | 0,502               | 0,506 | 0,510 | 0,518 | 0,538 | 0,564 | 0,603 | 0,680 |  |

Оптимальные веса при шестигрочечной аппроксимации первой производной по схеме В

| $h$  | $\eta$ |       |       |      |      |      |      |      |      |      | $p_1=p_3=-p_2=-p_4$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|------|--------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|---------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 0      | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  | 0    |                     |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 0    | 0      | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  | 0    | $p_5=-p_6$          |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
| 0,05 | 0      | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  | 0    | $\infty$            | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |
| 0,10 | 12,80  | 3,46  | 2,57  | 2,02 | 1,41 | 0,75 | 0,42 | 0,22 | 0,09 | 1,34 | 1,34                | 3,03 | 2,46 | 1,95 | 1,38 | 0,73 | 0,41 | 0,22 | 0,09 | 0,09 |
| 0,15 | 6,35   | 2,57  | 1,81  | 1,58 | 1,32 | 0,91 | 0,60 | 0,36 | 0,16 | 0,62 | 0,62                | 1,27 | 1,47 | 1,39 | 1,21 | 0,86 | 0,58 | 0,35 | 0,16 | 0,16 |
| 0,20 | 4,21   | 2,48  | 1,54  | 1,32 | 1,13 | 0,86 | 0,64 | 0,43 | 0,21 | 0,38 | 0,38                | 0,50 | 0,92 | 0,96 | 0,93 | 0,77 | 0,59 | 0,40 | 0,20 | 0,20 |
| 0,25 | 3,14   | 2,32  | 1,47  | 1,21 | 1,01 | 0,80 | 0,63 | 0,45 | 0,25 | 0,26 | 0,26                | —    | 0,58 | 0,68 | 0,71 | 0,65 | 0,54 | 0,40 | 0,22 | 0,22 |
| 0,30 | 2,50   | 2,09  | 1,44  | 1,16 | 0,95 | 0,74 | 0,60 | 0,45 | 0,26 | 0,19 | 0,19                | —    | 0,35 | 0,47 | 0,54 | 0,55 | 0,49 | 0,39 | 0,23 | 0,23 |
| 0,40 | 2,08   | 1,86  | 1,39  | 1,14 | 0,92 | 0,71 | 0,58 | 0,45 | 0,28 | 0,14 | 0,14                | 0,26 | 0,21 | 0,33 | 0,42 | 0,46 | 0,43 | 0,36 | 0,23 | 0,23 |
| 0,50 | 1,55   | 1,47  | 1,24  | 1,08 | 0,89 | 0,67 | 0,54 | 0,43 | 0,28 | 0,08 | 0,08                | 0,04 | 0,07 | 0,16 | 0,24 | 0,32 | 0,33 | 0,31 | 0,22 | 0,22 |
| 0,60 | 1,23   | 1,20  | 1,08  | 0,98 | 0,84 | 0,65 | 0,52 | 0,41 | 0,28 | 0,05 | 0,05                | 0,03 | 0,03 | 0,08 | 0,14 | 0,23 | 0,26 | 0,26 | 0,20 | 0,20 |
| 0,70 | 1,03   | 1,01  | 0,94  | 0,88 | 0,79 | 0,63 | 0,51 | 0,40 | 0,28 | 0,03 | 0,03                | 0,02 | 0,01 | 0,04 | 0,09 | 0,16 | 0,20 | 0,21 | 0,18 | 0,18 |
| 0,80 | 0,88   | 0,87  | 0,83  | 0,79 | 0,72 | 0,60 | 0,49 | 0,39 | 0,27 | 0,02 | 0,02                | 0,01 | 0,01 | 0,03 | 0,06 | 0,12 | 0,12 | 0,18 | 0,16 | 0,16 |
| 0,90 | 0,76   | 0,76  | 0,75  | 0,70 | 0,66 | 0,56 | 0,47 | 0,38 | 0,26 | 0,02 | 0,02                | 0,02 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,09 | 0,11 | 0,15 | 0,14 | 0,14 |
| 0,90 | 0,71   | 0,68  | 0,66  | 0,64 | 0,61 | 0,53 | 0,46 | 0,37 | 0,26 | 0,02 | 0,02                | 0,02 | 0,01 | 0,02 | 0,04 | 0,07 | 0,10 | 0,12 | 0,13 | 0,13 |

Мера ошибки шеститочечный аппроксимации первой производной по схеме Е (треугольная сетка)

| $h$  | $\eta$              |          |          |          |          |          |                     |          |          |       |       |       |
|------|---------------------|----------|----------|----------|----------|----------|---------------------|----------|----------|-------|-------|-------|
|      | Стандартный вариант |          |          |          |          |          | Оптимальный вариант |          |          |       |       |       |
|      | 0                   | 0,001    | 0,005    | 0,01     | 0,02     | 0,05     | 0,1                 | 0,2      | 0,5      | 0     | 1,000 | 1,000 |
| 0    | 0                   | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$            | $\infty$ | $\infty$ | 0     | 1,000 | 1,000 |
| 0,05 | 0,032               | 0,166    | 0,699    | 1,366    | 2,699    | 6,699    | 13,366              | 26,699   | 66,699   | 0,032 | 0,153 | 0,936 |
| 0,10 | 0,064               | 0,098    | 0,231    | 0,398    | 0,731    | 1,731    | 3,398               | 6,731    | 16,731   | 0,063 | 0,098 | 0,805 |
| 0,15 | 0,096               | 0,111    | 0,170    | 0,244    | 0,392    | 0,837    | 1,578               | 3,059    | 7,504    | 0,094 | 0,110 | 0,678 |
| 0,20 | 0,128               | 0,136    | 0,169    | 0,211    | 0,294    | 0,544    | 0,961               | 1,794    | 4,294    | 0,124 | 0,133 | 0,525 |
| 0,25 | 0,159               | 0,164    | 0,185    | 0,212    | 0,265    | 0,425    | 0,692               | 1,225    | 2,825    | 0,153 | 0,160 | 0,433 |
| 0,30 | 0,189               | 0,193    | 0,208    | 0,226    | 0,263    | 0,374    | 0,560               | 0,930    | 2,041    | 0,182 | 0,187 | 0,383 |
| 0,40 | 0,249               | 0,251    | 0,259    | 0,270    | 0,290    | 0,353    | 0,457               | 0,666    | 1,290    | 0,238 | 0,240 | 0,263 |
| 0,50 | 0,306               | 0,307    | 0,312    | 0,319    | 0,332    | 0,372    | 0,439               | 0,572    | 0,972    | 0,291 | 0,293 | 0,352 |
| 0,60 | 0,360               | 0,361    | 0,364    | 0,369    | 0,378    | 0,406    | 0,452               | 0,545    | 0,823    | 0,342 | 0,343 | 0,437 |
| 0,70 | 0,411               | 0,412    | 0,414    | 0,418    | 0,425    | 0,445    | 0,479               | 0,547    | 0,751    | 0,390 | 0,391 | 0,492 |
| 0,80 | 0,459               | 0,460    | 0,462    | 0,464    | 0,470    | 0,485    | 0,511               | 0,563    | 0,720    | 0,436 | 0,437 | 0,531 |
| 0,90 | 0,504               | 0,505    | 0,506    | 0,508    | 0,512    | 0,525    | 0,545               | 0,586    | 0,716    | 0,479 | 0,480 | 0,586 |
| 1,00 | 0,546               | 0,547    | 0,548    | 0,550    | 0,553    | 0,563    | 0,580               | 0,613    | 0,713    | 0,520 | 0,521 | 0,612 |

Оптимальные веса при шестигрочечной аппроксимации первой производной по схеме Е (треугольная сетка)

| h    | η    |       |       |      |      |      |      |      |      |      |       |       |      |      |      |      |      |      |      |
|------|------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|
|      | 0    | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  | 0    | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  |      |
| 0    | ∞    | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | ∞    | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |      |
|      | 0,05 | 6,78  | 5,94  | 3,96 | 2,80 | 1,76 | 0,83 | 0,23 | 0,09 | 3,39 | 2,97  | 1,98  | 1,40 | 0,88 | 0,42 | 0,22 | 0,11 | 0,03 |      |
|      | 0,10 | 3,45  | 3,32  | 2,90 | 2,50 | 1,96 | 1,19 | 0,40 | 0,17 | 1,72 | 1,66  | 1,45  | 1,25 | 0,98 | 0,59 | 0,36 | 0,20 | 0,09 |      |
|      | 0,15 | 2,34  | 2,30  | 2,14 | 1,98 | 1,72 | 1,23 | 0,50 | 0,23 | 1,17 | 1,15  | 1,07  | 0,99 | 0,86 | 0,61 | 0,42 | 0,25 | 0,12 |      |
|      | 0,20 | 1,78  | 1,76  | 1,69 | 1,61 | 1,46 | 1,15 | 0,56 | 0,28 | 0,89 | 0,88  | 0,84  | 0,80 | 0,63 | 0,58 | 0,43 | 0,28 | 0,14 |      |
|      | 0,25 | 1,45  | 1,44  | 1,40 | 1,35 | 1,26 | 1,03 | 0,58 | 0,31 | 0,72 | 0,72  | 0,70  | 0,67 | 0,63 | 0,53 | 0,42 | 0,29 | 0,15 |      |
|      | 0,30 | 1,23  | 1,22  | 1,19 | 1,16 | 1,10 | 0,96 | 0,58 | 0,33 | 0,61 | 0,61  | 0,60  | 0,58 | 0,55 | 0,48 | 0,40 | 0,29 | 0,16 |      |
|      | 0,40 | 0,95  | 0,94  | 0,93 | 0,92 | 0,88 | 0,80 | 0,56 | 0,34 | 0,47 | 0,47  | 0,46  | 0,46 | 0,44 | 0,40 | 0,35 | 0,28 | 0,17 |      |
|      | 0,50 | 0,78  | 0,78  | 0,77 | 0,76 | 0,74 | 0,69 | 0,51 | 0,34 | 0,39 | 0,39  | 0,39  | 0,38 | 0,38 | 0,37 | 0,34 | 0,31 | 0,26 | 0,17 |
|      | 0,60 | 0,67  | 0,66  | 0,66 | 0,65 | 0,64 | 0,60 | 0,47 | 0,33 | 0,33 | 0,33  | 0,33  | 0,33 | 0,33 | 0,32 | 0,30 | 0,28 | 0,24 | 0,16 |
|      | 0,70 | 0,58  | 0,58  | 0,58 | 0,58 | 0,53 | 0,54 | 0,44 | 0,32 | 0,29 | 0,29  | 0,29  | 0,29 | 0,29 | 0,28 | 0,27 | 0,25 | 0,22 | 0,16 |
| 0,80 | 0,52 | 0,52  | 0,52  | 0,52 | 0,51 | 0,49 | 0,40 | 0,30 | 0,26 | 0,26 | 0,26  | 0,26  | 0,26 | 0,25 | 0,24 | 0,23 | 0,20 | 0,15 |      |
| 0,90 | 0,47 | 0,47  | 0,47  | 0,47 | 0,46 | 0,44 | 0,38 | 0,29 | 0,24 | 0,24 | 0,24  | 0,24  | 0,25 | 0,23 | 0,22 | 0,21 | 0,19 | 0,14 |      |
| 1,00 | 0,43 | 0,43  | 0,43  | 0,43 | 0,42 | 0,41 | 0,35 | 0,27 | 0,22 | 0,22 | 0,22  | 0,22  | 0,21 | 0,21 | 0,20 | 0,19 | 0,18 | 0,14 |      |

МЕРА ОШИБКИ АННОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ РАЗНОСТНЫМИ ФОРМУЛАМИ ПРИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ

$$\text{ФУНКЦИИ } r_2(\rho) = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{3}\right) e^{-\rho}$$

Таблица I

Мера ошибки двухточечной аппроксимации первой производной по схеме А

| h                   | η                  |       |       |       |        |        |        |        |        |                    |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---------------------|--------------------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                     |                    |       |       |       |        |        |        |        |        |                    |       |       |       |       |       |       |       |       |
|                     | 0                  | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02   | 0,05   | 0,1    | 0,2    | 0,5    | 0                  | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   |
| Стандартный вариант |                    |       |       |       |        |        |        |        |        |                    |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 0                   | 0                  | ∞     | ∞     | ∞     | ∞      | ∞      | ∞      | ∞      | ∞      | 0                  | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 0,05                | 6·10 <sup>-5</sup> | 0,600 | 3,000 | 6,000 | 12,000 | 30,000 | 60,000 | 120,00 | 300,00 | 6·10 <sup>-5</sup> | 0,375 | 0,750 | 0,858 | 0,924 | 0,969 | 0,984 | 0,993 | 0,996 |
| 0,10                | 3·10 <sup>-4</sup> | 0,150 | 0,750 | 1,500 | 3,000  | 7,500  | 15,000 | 30,000 | 75,000 | 3·10 <sup>-4</sup> | 0,132 | 0,432 | 0,603 | 0,752 | 0,882 | 0,939 | 0,969 | 0,987 |
| 0,15                | 0,001              | 0,069 | 0,333 | 0,669 | 1,335  | 3,333  | 6,669  | 13,335 | 33,333 | 0,001              | 0,066 | 0,255 | 0,405 | 0,576 | 0,774 | 0,873 | 0,933 | 0,972 |
| 0,20                | 0,003              | 0,042 | 0,189 | 0,378 | 0,753  | 1,878  | 3,753  | 7,503  | 18,753 | 0,002              | 0,039 | 0,165 | 0,282 | 0,438 | 0,660 | 0,795 | 0,885 | 0,951 |
| 0,30                | 0,008              | 0,025 | 0,090 | 0,174 | 0,342  | 0,840  | 1,674  | 3,342  | 8,340  | 0,007              | 0,024 | 0,087 | 0,156 | 0,267 | 0,474 | 0,642 | 0,783 | 0,900 |
| 0,40                | 0,017              | 0,026 | 0,063 | 0,111 | 0,204  | 0,486  | 0,954  | 1,893  | 4,704  | 0,015              | 0,025 | 0,063 | 0,108 | 0,186 | 0,354 | 0,519 | 0,681 | 0,843 |
| 0,50                | 0,030              | 0,036 | 0,060 | 0,090 | 0,150  | 0,330  | 0,630  | 1,230  | 3,030  | 0,026              | 0,033 | 0,060 | 0,090 | 0,147 | 0,279 | 0,429 | 0,597 | 0,786 |
| 0,60                | 0,048              | 0,051 | 0,069 | 0,090 | 0,126  | 0,255  | 0,465  | 0,879  | 2,130  | 0,039              | 0,045 | 0,063 | 0,087 | 0,132 | 0,237 | 0,369 | 0,528 | 0,732 |
| 0,80                | 0,093              | 0,093 | 0,105 | 0,117 | 0,138  | 0,210  | 0,327  | 0,561  | 1,263  | 0,078              | 0,081 | 0,093 | 0,108 | 0,135 | 0,210 | 0,306 | 0,444 | 0,651 |
| 1,00                | 0,150              | 0,150 | 0,156 | 0,165 | 0,189  | 0,225  | 0,269  | 0,450  | 0,900  | 0,126              | 0,129 | 0,138 | 0,147 | 0,168 | 0,222 | 0,297 | 0,411 | 0,606 |
| 1,20                | 0,214              | 0,215 | 0,219 | 0,224 | 0,234  | 0,266  | 0,318  | 0,422  | 0,734  | 0,185              | 0,187 | 0,193 | 0,201 | 0,216 | 0,257 | 0,317 | 0,412 | 0,586 |
| 1,50                | 0,319              | 0,319 | 0,322 | 0,325 | 0,332  | 0,352  | 0,385  | 0,452  | 0,652  | 0,284              | 0,285 | 0,289 | 0,294 | 0,305 | 0,334 | 0,379 | 0,452 | 0,595 |
| 2,00                | 0,492              | 0,492 | 0,494 | 0,496 | 0,500  | 0,511  | 0,529  | 0,567  | 0,680  | 0,458              | 0,458 | 0,461 | 0,464 | 0,471 | 0,489 | 0,517 | 0,565 | 0,666 |

Оптимальные веса при двухточечной аппроксимации первой производной по схеме А

| η                  |      |       |       |      |      |      |      |      |      |      |       |       |      |      |      |      |      |      |
|--------------------|------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|
| h                  | 0    |       |       |      |      |      |      |      |      | η    |       |       |      |      |      |      |      |      |
|                    | 0    | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  | 0    | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  |
| Абсолютные веса    |      |       |       |      |      |      |      |      |      |      |       |       |      |      |      |      |      |      |
| 0                  | ∞    | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1,00 | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |
| 0,05               | 10,0 | 6,25  | 2,50  | 1,43 | 0,77 | 0,32 | 0,16 | 0,08 | 0,03 | 1,00 | 0,62  | 0,25  | 0,14 | 0,08 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,00 |
| 0,10               | 5,02 | 4,36  | 2,86  | 2,00 | 1,25 | 0,59 | 0,31 | 0,16 | 0,06 | 1,00 | 0,87  | 0,57  | 0,40 | 0,25 | 0,12 | 0,06 | 0,03 | 0,01 |
| 0,15               | 3,36 | 3,15  | 2,51  | 2,00 | 1,42 | 0,76 | 0,43 | 0,23 | 0,10 | 1,01 | 0,94  | 0,75  | 0,60 | 0,43 | 0,23 | 0,13 | 0,07 | 0,03 |
| 0,20               | 2,54 | 2,44  | 2,13  | 1,83 | 1,43 | 0,86 | 0,52 | 0,29 | 0,12 | 1,02 | 0,98  | 0,85  | 0,73 | 0,57 | 0,35 | 0,21 | 0,12 | 0,05 |
| 0,30               | 1,72 | 1,69  | 1,58  | 1,46 | 1,27 | 0,91 | 0,62 | 0,38 | 0,17 | 1,03 | 1,01  | 0,95  | 0,88 | 0,75 | 0,55 | 0,37 | 0,23 | 0,10 |
| 0,40               | 1,31 | 1,30  | 1,24  | 1,19 | 1,08 | 0,86 | 0,64 | 0,42 | 0,21 | 1,05 | 1,04  | 0,99  | 0,95 | 0,86 | 0,69 | 0,51 | 0,34 | 0,17 |
| 0,50               | 1,07 | 1,06  | 1,03  | 1,00 | 0,94 | 0,79 | 0,63 | 0,44 | 0,24 | 1,07 | 1,06  | 1,03  | 1,00 | 0,94 | 0,79 | 0,63 | 0,44 | 0,24 |
| 0,60               | 0,91 | 0,91  | 0,89  | 0,87 | 0,82 | 0,72 | 0,60 | 0,45 | 0,25 | 1,09 | 1,09  | 1,07  | 1,04 | 0,98 | 0,87 | 0,72 | 0,54 | 0,30 |
| 0,80               | 0,71 | 0,71  | 0,70  | 0,69 | 0,68 | 0,62 | 0,54 | 0,43 | 0,27 | 1,14 | 1,13  | 1,12  | 1,10 | 1,10 | 0,99 | 0,87 | 0,68 | 0,43 |
| 1,00               | 0,59 | 0,59  | 0,59  | 0,58 | 0,57 | 0,53 | 0,48 | 0,40 | 0,27 | 1,19 | 1,18  | 1,17  | 1,16 | 1,13 | 1,06 | 0,96 | 0,80 | 0,54 |
| 1,20               | 0,51 | 0,51  | 0,51  | 0,50 | 0,49 | 0,47 | 0,43 | 0,37 | 0,27 | 1,23 | 1,23  | 1,22  | 1,20 | 1,18 | 1,12 | 1,03 | 0,89 | 0,63 |
| 1,50               | 0,43 | 0,43  | 0,42  | 0,42 | 0,41 | 0,40 | 0,37 | 0,33 | 0,24 | 1,28 | 1,28  | 1,28  | 1,27 | 1,25 | 1,19 | 1,11 | 0,98 | 0,73 |
| 2,00               | 0,33 | 0,33  | 0,33  | 0,33 | 0,33 | 0,32 | 0,30 | 0,27 | 0,21 | 1,34 | 1,33  | 1,33  | 1,32 | 1,30 | 1,26 | 1,19 | 1,07 | 0,82 |
| Относительные веса |      |       |       |      |      |      |      |      |      |      |       |       |      |      |      |      |      |      |
| 0                  | ∞    | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1,00 | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    |
| 0,05               | 10,0 | 6,25  | 2,50  | 1,43 | 0,77 | 0,32 | 0,16 | 0,08 | 0,03 | 1,00 | 0,62  | 0,25  | 0,14 | 0,08 | 0,03 | 0,02 | 0,01 | 0,00 |
| 0,10               | 5,02 | 4,36  | 2,86  | 2,00 | 1,25 | 0,59 | 0,31 | 0,16 | 0,06 | 1,00 | 0,87  | 0,57  | 0,40 | 0,25 | 0,12 | 0,06 | 0,03 | 0,01 |
| 0,15               | 3,36 | 3,15  | 2,51  | 2,00 | 1,42 | 0,76 | 0,43 | 0,23 | 0,10 | 1,01 | 0,94  | 0,75  | 0,60 | 0,43 | 0,23 | 0,13 | 0,07 | 0,03 |
| 0,20               | 2,54 | 2,44  | 2,13  | 1,83 | 1,43 | 0,86 | 0,52 | 0,29 | 0,12 | 1,02 | 0,98  | 0,85  | 0,73 | 0,57 | 0,35 | 0,21 | 0,12 | 0,05 |
| 0,30               | 1,72 | 1,69  | 1,58  | 1,46 | 1,27 | 0,91 | 0,62 | 0,38 | 0,17 | 1,03 | 1,01  | 0,95  | 0,88 | 0,75 | 0,55 | 0,37 | 0,23 | 0,10 |
| 0,40               | 1,31 | 1,30  | 1,24  | 1,19 | 1,08 | 0,86 | 0,64 | 0,42 | 0,21 | 1,05 | 1,04  | 0,99  | 0,95 | 0,86 | 0,69 | 0,51 | 0,34 | 0,17 |
| 0,50               | 1,07 | 1,06  | 1,03  | 1,00 | 0,94 | 0,79 | 0,63 | 0,44 | 0,24 | 1,07 | 1,06  | 1,03  | 1,00 | 0,94 | 0,79 | 0,63 | 0,44 | 0,24 |
| 0,60               | 0,91 | 0,91  | 0,89  | 0,87 | 0,82 | 0,72 | 0,60 | 0,45 | 0,25 | 1,09 | 1,09  | 1,07  | 1,04 | 0,98 | 0,87 | 0,72 | 0,54 | 0,30 |
| 0,80               | 0,71 | 0,71  | 0,70  | 0,69 | 0,68 | 0,62 | 0,54 | 0,43 | 0,27 | 1,14 | 1,13  | 1,12  | 1,10 | 1,10 | 0,99 | 0,87 | 0,68 | 0,43 |
| 1,00               | 0,59 | 0,59  | 0,59  | 0,58 | 0,57 | 0,53 | 0,48 | 0,40 | 0,27 | 1,19 | 1,18  | 1,17  | 1,16 | 1,13 | 1,06 | 0,96 | 0,80 | 0,54 |
| 1,20               | 0,51 | 0,51  | 0,51  | 0,50 | 0,49 | 0,47 | 0,43 | 0,37 | 0,27 | 1,23 | 1,23  | 1,22  | 1,20 | 1,18 | 1,12 | 1,03 | 0,89 | 0,63 |
| 1,50               | 0,43 | 0,43  | 0,42  | 0,42 | 0,41 | 0,40 | 0,37 | 0,33 | 0,24 | 1,28 | 1,28  | 1,28  | 1,27 | 1,25 | 1,19 | 1,11 | 0,98 | 0,73 |
| 2,00               | 0,33 | 0,33  | 0,33  | 0,33 | 0,33 | 0,32 | 0,30 | 0,27 | 0,21 | 1,34 | 1,33  | 1,33  | 1,32 | 1,30 | 1,26 | 1,19 | 1,07 | 0,82 |



Таблица 3

Мера ошибки трехточечной аппроксимации второй производной по схеме А

| h    | η                   |       |       |       |        |        |        |         |                     |                     |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------|---------------------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|---------|---------------------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      | Стандартный вариант |       |       |       |        |        |        |         |                     | Оптимальный вариант |       |       |       |       |       |       |       |       |
|      | 0                   | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02   | 0,05   | 0,1    | 0,2     | 0,5                 | 0                   | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   |
| 0    | 0                   | 0     | 0     | 0     | 0      | 0      | 0      | 0       | 0                   | 0                   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 0,05 | 0,027               | 960,0 | 4800  | 9600  | 19 200 | 48 000 | 96 000 | 192 000 | 4,8·10 <sup>5</sup> | 0,026               | 0,889 | 0,889 | 0,889 | 0,890 | 0,891 | 0,893 | 0,890 | 0,905 |
| 0,10 | 0,053               | 60,00 | 300,0 | 600,0 | 1 200  | 3 000  | 6 000  | 12 000  | 30 000              | 0,052               | 0,880 | 0,888 | 0,889 | 0,890 | 0,892 | 0,894 | 0,897 | 0,906 |
| 0,15 | 0,080               | 11,93 | 59,34 | 118,6 | 237,1  | 592,7  | 1 185  | 2 371   | 5 926               | 0,077               | 0,846 | 0,883 | 0,888 | 0,891 | 0,893 | 0,896 | 0,899 | 0,908 |
| 0,20 | 0,106               | 3,86  | 18,86 | 37,61 | 75,11  | 187,6  | 375,1  | 750,1   | 1 875               | 0,101               | 0,774 | 0,868 | 0,882 | 0,889 | 0,894 | 0,897 | 0,901 | 0,910 |
| 0,30 | 0,157               | 0,898 | 3,861 | 7,564 | 14,97  | 37,19  | 74,23  | 148,3   | 370,5               | 0,148               | 0,568 | 0,797 | 0,846 | 0,873 | 0,891 | 0,899 | 0,905 | 0,914 |
| 0,40 | 0,207               | 0,441 | 1,380 | 2,551 | 4,894  | 11,92  | 23,64  | 47,08   | 117,4               | 0,192               | 0,413 | 0,687 | 0,778 | 0,838 | 0,880 | 0,897 | 0,907 | 0,920 |
| 0,50 | 0,255               | 0,351 | 0,735 | 1,215 | 2,175  | 5,054  | 9,855  | 19,45   | 48,26               | 0,234               | 0,351 | 0,581 | 0,694 | 0,784 | 0,858 | 0,888 | 0,907 | 0,923 |
| 0,60 | 0,301               | 0,347 | 0,532 | 0,764 | 1,227  | 2,616  | 4,631  | 9,561   | 23,45               | 0,274               | 0,340 | 0,568 | 0,618 | 0,724 | 0,828 | 0,874 | 0,903 | 0,925 |
| 0,80 | 0,386               | 0,401 | 0,460 | 0,533 | 0,679  | 1,119  | 1,851  | 3,32    | 7,71                | 0,348               | 0,373 | 0,456 | 0,530 | 0,627 | 0,758 | 0,834 | 0,884 | 0,925 |
| 1,00 | 0,463               | 0,469 | 0,493 | 0,532 | 0,583  | 0,763  | 1,063  | 1,86    | 3,46                | 0,415               | 0,427 | 0,470 | 0,514 | 0,583 | 0,701 | 0,790 | 0,859 | 0,918 |
| 1,20 | 0,531               | 0,534 | 0,545 | 0,560 | 0,589  | 0,676  | 0,820  | 1,110   | 1,978               | 0,475               | 0,481 | 0,506 | 0,533 | 0,579 | 0,672 | 0,757 | 0,834 | 0,907 |
| 1,50 | 0,617               | 0,619 | 0,623 | 0,629 | 0,641  | 0,677  | 0,736  | 0,854   | 1,210               | 0,553               | 0,556 | 0,568 | 0,583 | 0,608 | 0,668 | 0,735 | 0,808 | 0,89  |
| 2,00 | 0,727               | 0,727 | 0,729 | 0,731 | 0,734  | 0,746  | 0,764  | 0,802   | 0,914               | 0,658               | 0,659 | 0,654 | 0,670 | 0,681 | 0,711 | 0,749 | 0,801 | 0,876 |

Оптимальные веса при трехточечной аппроксимации второй производной по схеме А

| h                      | $\eta$ |       |       |       |       |       |       |       |       |      |
|------------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|
|                        | 0      | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   | 0    |
| Веса центральной точки |        |       |       |       |       |       |       |       |       |      |
| 0                      | —      | —0,11 | —0,11 | —0,11 | —0,11 | —0,11 | —0,11 | —0,11 | —0,11 | —    |
| 0,05                   | —      | —0,82 | —0,25 | —0,18 | —0,14 | —0,12 | —0,11 | —0,11 | —0,10 | —    |
| 0,10                   | —208   | —2,76 | —0,65 | —0,38 | —0,24 | —0,16 | —0,13 | —0,12 | —0,10 | 104  |
| 0,15                   | —94,3  | —5,54 | —1,25 | —0,68 | —0,40 | —0,22 | —0,16 | —0,13 | —0,11 | 47,2 |
| 0,20                   | —54,1  | —8,38 | —1,99 | —1,07 | —0,59 | —0,30 | —0,20 | —0,15 | —0,11 | 27,1 |
| 0,30                   | —25,0  | —11,2 | —3,56 | —1,96 | —1,07 | —0,50 | —0,30 | —0,20 | —0,13 | 12,5 |
| 0,40                   | —14,6  | —10,1 | —4,59 | —2,76 | —1,56 | —0,72 | —0,42 | —0,26 | —0,15 | 7,30 |
| 0,50                   | —9,66  | —8,03 | —4,81 | —3,22 | —1,97 | —0,95 | —0,54 | —0,32 | —0,18 | 4,86 |
| 0,60                   | —6,94  | —6,25 | —4,49 | —3,33 | —2,22 | —1,14 | —0,66 | —0,38 | —0,20 | 3,50 |
| 0,80                   | —4,16  | —3,99 | —3,42 | —2,91 | —2,25 | —1,36 | —0,84 | —0,50 | —0,25 | 2,12 |
| 1,00                   | —2,82  | —2,76 | —2,54 | —2,32 | —1,97 | —1,37 | —0,92 | —0,57 | —0,29 | 1,45 |
| 1,20                   | —2,07  | —2,04 | —1,94 | —1,83 | —1,65 | —1,27 | —0,92 | —0,61 | —0,32 | 1,07 |
| 1,50                   | —1,42  | —1,41 | —1,38 | —1,33 | —1,25 | —1,05 | —0,84 | —0,61 | —0,34 | 0,75 |
| 2,00                   | —0,90  | —0,89 | —0,88 | —0,87 | —0,84 | —0,76 | —0,66 | —0,53 | —0,33 | 0,48 |
| Веса крайних точек     |        |       |       |       |       |       |       |       |       |      |
| 0                      | —      | —0,11 | —0,11 | —0,11 | —0,11 | —0,11 | —0,11 | —0,11 | —0,11 | —    |
| 0,05                   | —      | 0,24  | —0,64 | —0,08 | —0,09 | —0,10 | —0,10 | —0,11 | —0,09 | —    |
| 0,10                   | —      | 1,22  | 0,16  | 0,02  | —0,04 | —0,08 | —0,09 | —0,10 | —0,09 | —    |
| 0,15                   | —      | 2,61  | 0,46  | 0,18  | 0,04  | —0,05 | —0,08 | —0,09 | —0,09 | —    |
| 0,20                   | —      | 4,05  | 0,84  | 0,38  | 0,14  | —0,01 | —0,06 | —0,08 | —0,08 | —    |
| 0,30                   | —      | 5,52  | 1,64  | 0,84  | 0,38  | 0,10  | 0,09  | —0,05 | —0,07 | —    |
| 0,40                   | —      | 7,30  | 2,20  | 1,26  | 0,65  | 0,22  | 0,09  | —0,01 | —0,05 | —    |
| 0,50                   | —      | 8,86  | 2,35  | 1,52  | 0,87  | 0,34  | 0,14  | 0,03  | —0,04 | —    |
| 0,60                   | —      | 9,50  | 2,21  | 1,61  | 1,02  | 0,46  | 0,21  | 0,07  | —0,02 | —    |
| 0,80                   | —      | 10,12 | 1,72  | 1,44  | 1,08  | 0,60  | 0,32  | 0,14  | 0,02  | —    |
| 1,00                   | —      | 10,45 | 1,30  | 1,17  | 0,98  | 0,64  | 0,40  | 0,21  | 0,06  | —    |
| 1,20                   | —      | 10,75 | 1,09  | 0,94  | 0,83  | 0,62  | 0,42  | 0,25  | 0,09  | —    |
| 1,50                   | —      | 10,75 | 0,72  | 0,70  | 0,65  | 0,53  | 0,41  | 0,27  | 0,12  | —    |
| 2,00                   | —      | 10,48 | 0,47  | 0,46  | 0,44  | 0,40  | 0,34  | 0,26  | 0,14  | —    |

Мера ошибки четырехточечной аппроксимации смешанной производной по схеме Б

| h    |       | η                   |       |       |       |       |                    |                    |                   |       |                     |       |       |       |       |       |       |       |  |
|------|-------|---------------------|-------|-------|-------|-------|--------------------|--------------------|-------------------|-------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|
|      |       | Стандартный вариант |       |       |       |       |                    |                    |                   |       | Оптимальный вариант |       |       |       |       |       |       |       |  |
| 0    | 0     | 0,001               | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1                | 0,2                | 0,5               | 0     | 0,001               | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   |  |
| 0    | 0     | ∞                   | ∞     | ∞     | ∞     | ∞     | ∞                  | ∞                  | ∞                 | 0     | 1,000               | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |  |
| 0,05 | 0,044 | 120,0               | 600,0 | 1200  | 2400  | 6000  | 12·10 <sup>3</sup> | 24·10 <sup>3</sup> | 6·10 <sup>4</sup> | 0,043 | 0,993               | 0,998 | 0,999 | 0,999 | 0,999 | 0,999 | 0,999 | 1,000 |  |
| 0,10 | 0,087 | 7,587               | 37,59 | 75,09 | 150,1 | 375,1 | 750,1              | 1500               | 3750              | 0,085 | 0,909               | 0,980 | 0,990 | 0,995 | 0,998 | 0,999 | 0,999 | 1,000 |  |
| 0,15 | 0,180 | 1,612               | 7,538 | 14,94 | 29,76 | 74,20 | 148,3              | 296,4              | 740,9             | 0,125 | 0,706               | 0,920 | 0,958 | 0,978 | 0,991 | 0,996 | 0,998 | 0,999 |  |
| 0,20 | 0,172 | 0,641               | 2,516 | 4,860 | 9,547 | 23,61 | 47,05              | 93,92              | 234,5             | 0,164 | 0,505               | 0,812 | 0,894 | 0,944 | 0,976 | 0,988 | 0,994 | 0,998 |  |
| 0,30 | 0,254 | 0,346               | 0,716 | 1,180 | 2,165 | 4,888 | 9,513              | 18,77              | 46,55             | 0,238 | 0,346               | 0,582 | 0,712 | 0,823 | 0,918 | 0,956 | 0,976 | 0,991 |  |
| 0,40 | 0,330 | 0,359               | 0,476 | 0,623 | 0,916 | 1,795 | 3,260              | 6,189              | 14,98             | 0,308 | 0,348               | 0,473 | 0,575 | 0,693 | 0,833 | 0,905 | 0,949 | 0,979 |  |
| 0,50 | 0,401 | 0,413               | 0,461 | 0,521 | 0,640 | 1,000 | 1,601              | 2,801              | 6,401             | 0,372 | 0,391               | 0,456 | 0,520 | 0,612 | 0,754 | 0,847 | 0,913 | 0,962 |  |
| 0,60 | 0,466 | 0,472               | 0,495 | 0,524 | 0,582 | 0,785 | 1,045              | 1,623              | 3,359             | 0,431 | 0,441               | 0,478 | 0,518 | 0,581 | 0,700 | 0,796 | 0,876 | 0,943 |  |
| 0,80 | 0,579 | 0,581               | 0,589 | 0,598 | 0,616 | 0,671 | 0,763              | 0,946              | 1,495             | 0,537 | 0,541               | 0,555 | 0,572 | 0,602 | 0,671 | 0,745 | 0,824 | 0,909 |  |
| 1,00 | 0,672 | 0,673               | 0,676 | 0,679 | 0,687 | 0,710 | 0,747              | 0,822              | 1,047             | 0,626 | 0,628               | 0,635 | 0,643 | 0,659 | 0,698 | 0,746 | 0,808 | 0,889 |  |
| 1,20 | 0,746 | 0,746               | 0,748 | 0,750 | 0,753 | 0,764 | 0,782              | 0,818              | 0,927             | 0,702 | 0,703               | 0,706 | 0,711 | 0,720 | 0,743 | 0,774 | 0,818 | 0,886 |  |
| 1,50 | 0,829 | 0,829               | 0,830 | 0,880 | 0,832 | 0,836 | 0,844              | 0,858              | 0,903             | 0,791 | 0,792               | 0,793 | 0,796 | 0,800 | 0,811 | 0,828 | 0,854 | 0,899 |  |
| 2,00 | 0,914 | 0,914               | 0,914 | 0,914 | 0,914 | 0,916 | 0,918              | 0,923              | 0,937             | 0,891 | 0,891               | 0,892 | 0,892 | 0,893 | 0,898 | 0,904 | 0,916 | 0,937 |  |

Оптимальные веса  $p = p_1 = p_3 = -p_2 = -p_4$  при четырехточечной аппроксимации смешанной производной по схеме Б

| h    | η                  |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      | 0                  | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   | 0     |
| 0    | Абсолютные веса    |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|      | ∞                  | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1,00  |
|      | 103                | 0,77  | 0,16  | 0,08  | 0,04  | 0,02  | 0,01  | 0,00  | 0,00  | 1,03  |
|      | 0,10               | 26,4  | 2,61  | 0,29  | 0,14  | 0,06  | 0,03  | 0,01  | 0,01  | 1,06  |
|      | 0,15               | 12,0  | 4,03  | 1,10  | 0,58  | 0,30  | 0,12  | 0,06  | 0,03  | 1,08  |
|      | 0,20               | 6,93  | 4,10  | 1,56  | 0,88  | 0,47  | 0,20  | 0,10  | 0,05  | 1,11  |
|      | 0,30               | 3,23  | 2,78  | 1,77  | 1,22  | 0,75  | 0,35  | 0,18  | 0,10  | 1,16  |
|      | 0,40               | 1,90  | 1,79  | 1,45  | 1,17  | 0,84  | 0,46  | 0,26  | 0,14  | 1,22  |
|      | 0,50               | 1,27  | 1,24  | 1,10  | 0,97  | 0,79  | 0,50  | 0,31  | 0,18  | 1,27  |
|      | 0,60               | 0,92  | 0,91  | 0,85  | 0,78  | 0,68  | 0,49  | 0,33  | 0,20  | 1,33  |
|      | 0,80               | 0,56  | 0,56  | 0,54  | 0,52  | 0,48  | 0,40  | 0,31  | 0,21  | 1,43  |
|      | 1,00               | 0,38  | 0,38  | 0,38  | 0,37  | 0,35  | 0,31  | 0,26  | 0,20  | 1,52  |
|      | 1,20               | 0,28  | 0,28  | 0,28  | 0,27  | 0,27  | 0,24  | 0,21  | 0,17  | 1,61  |
|      | 1,50               | 0,19  | 0,19  | 0,19  | 0,19  | 0,19  | 0,18  | 0,16  | 0,14  | 1,71  |
| 2,00 | 0,12               | 0,12  | 0,11  | 0,11  | 0,11  | 0,11  | 0,10  | 0,09  | 1,92  |       |
| 0    | Относительные веса |       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|      | 0                  | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
|      | 0,05               | 0,003 | 0,002 | 0,001 | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
|      | 0,10               | 0,023 | 0,023 | 0,012 | 0,006 | 0,002 | 0,001 | 0,00  | 0,00  | 0,00  |
|      | 0,15               | 0,099 | 0,099 | 0,052 | 0,027 | 0,011 | 0,005 | 0,003 | 0,001 | 0,001 |
|      | 0,20               | 0,250 | 0,250 | 0,141 | 0,075 | 0,032 | 0,016 | 0,008 | 0,003 | 0,003 |
|      | 0,30               | 0,637 | 0,637 | 0,439 | 0,270 | 0,126 | 0,065 | 0,036 | 0,014 | 0,014 |
|      | 0,40               | 0,93  | 0,93  | 0,75  | 0,54  | 0,29  | 0,17  | 0,09  | 0,04  | 0,04  |
|      | 0,50               | 1,10  | 1,10  | 0,97  | 0,79  | 0,50  | 0,31  | 0,18  | 0,08  | 0,08  |
|      | 0,60               | 1,22  | 1,22  | 1,12  | 0,98  | 0,70  | 0,48  | 0,29  | 0,13  | 0,13  |
|      | 0,80               | 1,38  | 1,38  | 1,33  | 1,23  | 1,02  | 0,79  | 0,54  | 0,28  | 0,28  |
|      | 1,00               | 1,52  | 1,52  | 1,48  | 1,40  | 1,24  | 1,04  | 0,80  | 0,44  | 0,44  |
|      | 1,20               | 1,61  | 1,61  | 1,56  | 1,55  | 1,38  | 1,21  | 0,98  | 0,63  | 0,63  |
|      | 1,50               | 1,71  | 1,71  | 1,71  | 1,71  | 1,62  | 1,44  | 1,26  | 0,81  | 0,81  |
| 2,00 | 1,92               | 1,92  | 1,76  | 1,76  | 1,76  | 1,60  | 1,44  | 1,12  | 1,12  |       |

Мера ошибки пятиточечной аппроксимации оператора Лапласа по схеме Г

| h    |       | η                   |       |                    |                    |                   |                    |                    |                      |       |       |                     |       |       |       |       |       |       |
|------|-------|---------------------|-------|--------------------|--------------------|-------------------|--------------------|--------------------|----------------------|-------|-------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      |       | Стандартный вариант |       |                    |                    |                   |                    |                    |                      |       |       | Оптимальный вариант |       |       |       |       |       |       |
|      |       | 0                   | 0,001 | 0,005              | 0,01               | 0,02              | 0,05               | 0,1                | 0,2                  | 0,5   | 0     | 0,061               | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   |
| 0    | 0     | ∞                   | ∞     | ∞                  | ∞                  | ∞                 | ∞                  | ∞                  | ∞                    | 0     | 0,833 | 0,833               | 0,834 | 0,834 | 0,835 | 0,837 | 0,840 | 0,848 |
| 0,05 | 0,025 | 1200                | 6000  | 12·10 <sup>3</sup> | 24·10 <sup>3</sup> | 6·10 <sup>4</sup> | 12·10 <sup>4</sup> | 24·10 <sup>4</sup> | 6·10 <sup>5</sup>    | 0,024 | 0,833 | 0,834               | 0,834 | 0,834 | 0,835 | 0,837 | 0,840 | 0,849 |
| 0,10 | 0,049 | 75,05               | 375,0 | 750,0              | 1500               | 3750              | 7500               | 15·10 <sup>3</sup> | 37,5·10 <sup>3</sup> | 0,048 | 0,828 | 0,834               | 0,835 | 0,836 | 0,837 | 0,838 | 0,842 | 0,850 |
| 0,15 | 0,073 | 14,89               | 77,15 | 148,2              | 266,4              | 740,8             | 1482               | 2663               | 7408                 | 0,071 | 0,804 | 0,831               | 0,834 | 0,837 | 0,839 | 0,840 | 0,843 | 0,852 |
| 0,20 | 0,097 | 4,885               | 23,51 | 49,97              | 93,85              | 234,5             | 468,8              | 937,6              | 2344                 | 0,093 | 0,751 | 0,821               | 0,831 | 0,836 | 0,840 | 0,843 | 0,846 | 0,855 |
| 0,30 | 0,144 | 1,170               | 4,774 | 9,404              | 18,66              | 46,44             | 92,74              | 185,3              | 463,1                | 0,135 | 0,580 | 0,771               | 0,808 | 0,828 | 0,841 | 0,847 | 0,852 | 0,861 |
| 0,40 | 0,190 | 0,403               | 1,655 | 3,120              | 6,050              | 14,84             | 29,49              | 58,78              | 146,7                | 0,175 | 0,429 | 0,685               | 0,759 | 0,804 | 0,835 | 0,849 | 0,857 | 0,868 |
| 0,50 | 0,235 | 0,355               | 0,835 | 1,435              | 2,635              | 6,235             | 12,23              | 24,23              | 60,23                | 0,213 | 0,354 | 0,591               | 0,696 | 0,766 | 0,824 | 0,846 | 0,860 | 0,874 |
| 0,60 | 0,278 | 0,336               | 0,567 | 0,856              | 1,435              | 3,171             | 6,065              | 11,85              | 29,21                | 0,249 | 0,330 | 0,516               | 0,624 | 0,719 | 0,803 | 0,839 | 0,861 | 0,880 |
| 0,80 | 0,358 | 0,376               | 0,449 | 0,541              | 0,724              | 1,273             | 2,188              | 4,020              | 9,513                | 0,316 | 0,348 | 0,447               | 0,530 | 0,629 | 0,749 | 0,813 | 0,855 | 0,887 |
| 1,00 | 0,430 | 0,437               | 0,467 | 0,505              | 0,580              | 0,805             | 1,180              | 1,930              | 4,180                | 0,377 | 0,392 | 0,446               | 0,499 | 0,576 | 0,697 | 0,780 | 0,840 | 0,889 |
| 1,20 | 0,494 | 0,498               | 0,512 | 0,530              | 0,567              | 0,675             | 0,856              | 1,218              | 2,303                | 0,431 | 0,439 | 0,471               | 0,505 | 0,560 | 0,663 | 0,748 | 0,821 | 0,885 |
| 1,50 | 0,578 | 0,579               | 0,585 | 0,593              | 0,608              | 0,652             | 0,726              | 0,874              | 1,319                | 0,503 | 0,507 | 0,523               | 0,541 | 0,574 | 0,646 | 0,720 | 0,796 | 0,876 |
| 2,00 | 0,686 | 0,687               | 0,689 | 0,691              | 0,696              | 0,710             | 0,733              | 0,780              | 0,921                | 0,600 | 0,602 | 0,603               | 0,616 | 0,632 | 0,670 | 0,718 | 0,779 | 0,861 |

Оптимальные веса пятиточной аппроксимации оператора Лапласа по схеме Г

| h                                                                                                         | η                      |       |       |       |       |       |       |       |       |      |                    |       |       |       |       |       |       |       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                                                                                                           | 0                      | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   | 0    | 0,001              | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   |
| 0<br>0,05<br>0,10<br>0,15<br>0,20<br>0,30<br>0,40<br>0,50<br>0,60<br>0,80<br>1,00<br>1,20<br>1,50<br>2,00 | Веса центральной точки |       |       |       |       |       |       |       |       |      | Веса крайних точек |       |       |       |       |       |       |       |
|                                                                                                           | —∞                     | —0,13 | —0,13 | —0,13 | —0,13 | —0,13 | —0,13 | —0,13 | —0,12 | ∞    | —0,13              | —0,13 | —0,13 | —0,13 | —0,13 | —0,13 | —0,13 | —0,12 |
|                                                                                                           | —1633                  | —1,19 | —0,34 | —0,24 | —0,19 | —0,15 | —0,14 | —0,13 | —0,12 | 408  | 0,13               | —0,08 | —0,11 | —0,12 | —0,13 | —0,13 | —0,13 | —0,12 |
|                                                                                                           | —417                   | —4,12 | —0,94 | —0,54 | —0,33 | —0,21 | —0,17 | —0,15 | —0,13 | 104  | 0,87               | 0,07  | —0,03 | —0,08 | —0,11 | —0,12 | —0,12 | —0,12 |
|                                                                                                           | —189                   | —8,40 | —1,85 | —0,99 | —0,56 | —0,30 | —0,22 | —0,17 | —0,14 | 47,2 | 1,94               | 0,30  | 0,08  | —0,02 | —0,09 | —0,11 | —0,12 | —0,12 |
|                                                                                                           | —109                   | —13,1 | —2,99 | —1,58 | —0,86 | —0,42 | —0,28 | —0,20 | —0,15 | 27,1 | 3,12               | 0,59  | 0,23  | 0,05  | —0,06 | —0,09 | —0,11 | —0,11 |
|                                                                                                           | —50,2                  | —19,0 | —5,52 | —2,98 | —1,60 | —0,73 | —0,43 | —0,28 | —0,18 | 12,6 | 4,65               | 1,24  | 0,59  | 0,24  | 0,02  | —0,05 | —0,09 | —0,10 |
|                                                                                                           | —29,4                  | —18,5 | —7,50 | —4,34 | —2,40 | —1,08 | —0,61 | —0,37 | —0,22 | 7,36 | 4,57               | 1,76  | 0,96  | 0,46  | 0,12  | 0,00  | —0,06 | —0,09 |
|                                                                                                           | —19,5                  | —15,3 | —8,31 | —5,31 | —3,12 | —1,44 | —0,81 | —0,47 | —0,26 | 4,91 | 3,82               | 2,00  | 1,22  | 0,65  | 0,22  | 0,06  | —0,03 | —0,07 |
|                                                                                                           | —14,1                  | —12,3 | —8,12 | —5,74 | —3,64 | —1,78 | —1,00 | —0,57 | —0,30 | 3,55 | 3,07               | 1,99  | 1,36  | 0,81  | 0,32  | 0,12  | 0,01  | —0,06 |
|                                                                                                           | —8,47                  | —8,01 | —6,58 | —5,39 | —3,97 | —2,25 | —1,34 | —0,77 | —0,38 | 2,16 | 2,03               | 1,64  | 1,32  | 0,94  | 0,47  | 0,22  | 0,07  | —0,03 |
|                                                                                                           | —5,78                  | —5,62 | —5,05 | —4,49 | —3,68 | —2,40 | —1,55 | —0,93 | —0,46 | 1,49 | 1,44               | 1,28  | 1,13  | 0,90  | 0,54  | 0,30  | 0,13  | 0,01  |
| —4,26                                                                                                     | —4,19                  | —3,93 | —3,65 | —3,19 | —2,33 | —1,62 | —1,03 | —0,53 | 1,11  | 1,09 | 1,02               | 0,93  | 0,80  | 0,55  | 0,35  | 0,18  | 0,04  |       |
| —2,96                                                                                                     | —2,93                  | —2,83 | —2,71 | —2,50 | —2,04 | —1,57 | —1,09 | —0,59 | 0,79  | 0,78 | 0,75               | 0,71  | 0,65  | 0,51  | 0,36  | 0,22  | 0,08  |       |
| —1,88                                                                                                     | —1,87                  | —1,84 | —1,80 | —1,73 | —1,54 | —1,31 | —1,01 | —0,62 | 0,52  | 0,51 | 0,50               | 0,49  | 0,47  | 0,41  | 0,33  | 0,23  | 0,11  |       |

МЕРА ОШИБКИ АППРОКСИМАЦИИ ПРОИЗВОДНЫХ РАЗНОСТНЫМИ ФОРМУЛАМИ ПРИ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ

ФУНКЦИИ  $r_3(\rho) = e^{-\rho^2}$

Таблица 1

Мера ошибки двухточечной аппроксимации первой производной по схеме А

| h    |                      | η                   |       |       |       |       |       |       |       |                    |                     |       |       |       |       |       |       |       |     |
|------|----------------------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-----|
|      |                      | Стандартный вариант |       |       |       |       |       |       |       |                    | Оптимальный вариант |       |       |       |       |       |       |       |     |
|      |                      | 0                   | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5                | 0                   | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5 |
| 0    | 0                    | ∞                   | ∞     | ∞     | ∞     | ∞     | ∞     | ∞     | ∞     | 0                  | 1,000               | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 | 1,000 |     |
| 0,05 | 10 <sup>-5</sup>     | 0,100               | 0,500 | 1,000 | 2,600 | 5,000 | 10,00 | 20,00 | 50,00 | 4·10 <sup>-6</sup> | 0,092               | 0,334 | 0,501 | 0,668 | 0,834 | 0,909 | 0,953 | 0,981 |     |
| 0,10 | 1,7·10 <sup>-4</sup> | 0,025               | 0,125 | 0,250 | 0,600 | 1,250 | 2,500 | 5,000 | 12,50 | 7·10 <sup>-5</sup> | 0,025               | 0,113 | 0,203 | 0,338 | 0,560 | 0,718 | 0,836 | 0,927 |     |
| 0,15 | 0,001                | 0,013               | 0,057 | 0,112 | 0,223 | 0,557 | 1,112 | 2,223 | 5,557 | 3·10 <sup>-4</sup> | 0,012               | 0,055 | 0,104 | 0,189 | 0,368 | 0,538 | 0,699 | 0,852 |     |
| 0,20 | 0,003                | 0,009               | 0,034 | 0,065 | 0,128 | 0,315 | 0,627 | 1,252 | 3,128 | 0,001              | 0,008               | 0,034 | 0,064 | 0,120 | 0,253 | 0,404 | 0,576 | 0,772 |     |
| 0,30 | 0,012                | 0,015               | 0,026 | 0,040 | 0,068 | 0,151 | 0,289 | 0,567 | 1,401 | 0,006              | 0,009               | 0,022 | 0,037 | 0,067 | 0,147 | 0,253 | 0,402 | 0,625 |     |
| 0,40 | 0,034                | 0,036               | 0,042 | 0,050 | 0,065 | 0,112 | 0,190 | 0,347 | 0,816 | 0,017              | 0,019               | 0,027 | 0,087 | 0,057 | 0,111 | 0,189 | 0,309 | 0,522 |     |
| 0,50 | 0,074                | 0,076               | 0,079 | 0,084 | 0,094 | 0,124 | 0,174 | 0,274 | 0,574 | 0,041              | 0,042               | 0,048 | 0,055 | 0,070 | 0,111 | 0,172 | 0,271 | 0,464 |     |
| 0,60 | 0,134                | 0,136               | 0,138 | 0,142 | 0,149 | 0,169 | 0,204 | 0,274 | 0,482 | 0,081              | 0,082               | 0,088 | 0,093 | 0,105 | 0,138 | 0,188 | 0,272 | 0,445 |     |
| 0,80 | 0,306                | 0,306               | 0,308 | 0,310 | 0,314 | 0,326 | 0,345 | 0,384 | 0,501 | 0,229              | 0,229               | 0,233 | 0,237 | 0,245 | 0,268 | 0,304 | 0,366 | 0,499 |     |
| 1,00 | 0,509                | 0,510               | 0,511 | 0,512 | 0,514 | 0,522 | 0,534 | 0,560 | 0,634 | 0,448              | 0,449               | 0,451 | 0,454 | 0,459 | 0,475 | 0,499 | 0,542 | 0,634 |     |
| 1,20 | 0,690                | 0,699               | 0,700 | 0,701 | 0,703 | 0,708 | 0,716 | 0,734 | 0,786 | 0,676              | 0,676               | 0,677 | 0,679 | 0,682 | 0,691 | 0,705 | 0,730 | 0,784 |     |
| 1,50 | 0,900                | 0,900               | 0,901 | 0,901 | 0,902 | 0,906 | 0,911 | 0,922 | 0,956 | 0,900              | 0,900               | 0,900 | 0,901 | 0,902 | 0,905 | 0,910 | 0,917 | 0,933 |     |
| 2,00 | 1,026                | 1,026               | 1,026 | 1,026 | 1,027 | 1,029 | 1,032 | 1,038 | 1,057 | 0,995              | 0,995               | 0,995 | 0,995 | 0,995 | 0,995 | 0,995 | 0,990 | 0,996 |     |

Оптимальные веса двухточечной аппроксимации первой производной по схеме А

| $h$ | $\eta$             |       |       |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-----|--------------------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|     | 0                  | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  | 1    | 0    |
| 0   | Абсолютные веса    |       |       |      |      |      |      |      |      |      |      |
|     | $\infty$           | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1,00 |
|     | 0,05               | 10,0  | 9,11  | 6,67 | 5,00 | 3,33 | 1,66 | 0,91 | 0,48 | 0,20 | 1,00 |
|     | 0,10               | 5,05  | 4,92  | 4,48 | 4,02 | 3,34 | 2,22 | 1,42 | 0,83 | 0,37 | 1,01 |
|     | 0,15               | 3,41  | 3,37  | 3,22 | 3,05 | 2,76 | 2,16 | 1,58 | 1,02 | 0,51 | 1,02 |
|     | 0,20               | 2,60  | 2,58  | 2,51 | 2,43 | 2,29 | 1,94 | 1,55 | 1,10 | 0,59 | 1,04 |
|     | 0,30               | 1,81  | 1,81  | 1,78 | 1,76 | 1,70 | 1,56 | 1,36 | 1,10 | 0,68 | 1,09 |
|     | 0,40               | 1,44  | 1,44  | 1,43 | 1,42 | 1,38 | 1,30 | 1,19 | 1,01 | 0,70 | 1,15 |
|     | 0,50               | 1,23  | 1,23  | 1,22 | 1,21 | 1,19 | 1,14 | 1,06 | 0,94 | 0,69 | 1,23 |
|     | 0,60               | 1,10  | 1,10  | 1,09 | 1,08 | 1,07 | 1,03 | 0,97 | 0,87 | 0,66 | 1,32 |
|     | 0,80               | 0,91  | 0,91  | 0,91 | 0,90 | 0,90 | 0,87 | 0,82 | 0,75 | 0,59 | 1,45 |
| 0   | Относительные веса |       |       |      |      |      |      |      |      |      |      |
|     | $\infty$           | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1,00 |
|     | 0,05               | 10,0  | 9,11  | 6,67 | 5,00 | 3,33 | 1,66 | 0,91 | 0,48 | 0,20 | 1,00 |
|     | 0,10               | 5,05  | 4,92  | 4,48 | 4,02 | 3,34 | 2,22 | 1,42 | 0,83 | 0,37 | 1,01 |
|     | 0,15               | 3,41  | 3,37  | 3,22 | 3,05 | 2,76 | 2,16 | 1,58 | 1,02 | 0,51 | 1,02 |
|     | 0,20               | 2,60  | 2,58  | 2,51 | 2,43 | 2,29 | 1,94 | 1,55 | 1,10 | 0,59 | 1,04 |
|     | 0,30               | 1,81  | 1,81  | 1,78 | 1,76 | 1,70 | 1,56 | 1,36 | 1,10 | 0,68 | 1,09 |
|     | 0,40               | 1,44  | 1,44  | 1,43 | 1,42 | 1,38 | 1,30 | 1,19 | 1,01 | 0,70 | 1,15 |
|     | 0,50               | 1,23  | 1,23  | 1,22 | 1,21 | 1,19 | 1,14 | 1,06 | 0,94 | 0,69 | 1,23 |
|     | 0,60               | 1,10  | 1,10  | 1,09 | 1,08 | 1,07 | 1,03 | 0,97 | 0,87 | 0,66 | 1,32 |
|     | 0,80               | 0,91  | 0,91  | 0,91 | 0,90 | 0,90 | 0,87 | 0,82 | 0,75 | 0,59 | 1,45 |



Мера ошибки трехточечной аппроксимации второй производной по схеме А

| h                   | η                  |       |       |       |       |       |       |                    |                   |                    |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---------------------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------|-------------------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                     |                    |       |       |       |       |       |       |                    |                   |                    |       |       |       |       |       |       |       |       |
|                     | 0                  | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2                | 0,5               | 0                  | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   |
| Стандартный вариант |                    |       |       |       |       |       |       |                    |                   |                    |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 0                   | ∞                  | ∞     | ∞     | ∞     | ∞     | ∞     | ∞     | ∞                  | ∞                 | 0                  | 0,667 | 0,667 | 0,668 | 0,669 | 0,672 | 0,678 | 0,688 | 0,714 |
| 0,05                | 2·10 <sup>-5</sup> | 80,00 | 400,0 | 800,0 | 1600  | 4000  | 8000  | 16·10 <sup>3</sup> | 4·10 <sup>4</sup> | 2·10 <sup>-5</sup> | 0,663 | 0,668 | 0,669 | 0,671 | 0,674 | 0,679 | 0,690 | 0,716 |
| 0,10                | 10 <sup>-4</sup>   | 5,000 | 25,00 | 50,00 | 100,0 | 250,0 | 500,0 | 1000               | 2500              | 2·10 <sup>-5</sup> | 0,596 | 0,658 | 0,668 | 0,673 | 0,679 | 0,685 | 0,696 | 0,722 |
| 0,15                | 5·10 <sup>-4</sup> | 0,988 | 4,94  | 9,88  | 19,75 | 49,38 | 98,76 | 197,5              | 493,8             | 10 <sup>-4</sup>   | 0,412 | 0,606 | 0,644 | 0,686 | 0,682 | 0,692 | 0,704 | 0,731 |
| 0,20                | 0,002              | 0,314 | 1,560 | 3,126 | 6,251 | 15,63 | 31,25 | 62,50              | 156,2             | 4·10 <sup>-4</sup> | 0,228 | 0,496 | 0,582 | 0,637 | 0,678 | 0,697 | 0,713 | 0,742 |
| 0,30                | 0,007              | 0,069 | 0,316 | 0,624 | 1,242 | 3,093 | 6,180 | 12,35              | 30,87             | 0,002              | 0,068 | 0,246 | 0,369 | 0,494 | 0,620 | 0,691 | 0,722 | 0,766 |
| 0,40                | 0,021              | 0,040 | 0,118 | 0,216 | 0,411 | 0,997 | 1,974 | 3,926              | 9,786             | 0,006              | 0,031 | 0,118 | 0,202 | 0,319 | 0,498 | 0,614 | 0,700 | 0,778 |
| 0,50                | 0,046              | 0,056 | 0,086 | 0,126 | 0,206 | 0,446 | 0,846 | 1,646              | 4,046             | 0,014              | 0,026 | 0,071 | 0,121 | 0,203 | 0,367 | 0,512 | 0,642 | 0,767 |
| 0,60                | 0,084              | 0,088 | 0,103 | 0,122 | 0,161 | 0,277 | 0,470 | 0,855              | 2,013             | 0,028              | 0,035 | 0,061 | 0,092 | 0,147 | 0,275 | 0,413 | 0,563 | 0,733 |
| 0,80                | 0,198              | 0,200 | 0,204 | 0,211 | 0,223 | 0,260 | 0,320 | 0,442              | 0,809             | 0,084              | 0,087 | 0,099 | 0,113 | 0,140 | 0,212 | 0,307 | 0,440 | 0,640 |
| 1,00                | 0,346              | 0,346 | 0,348 | 0,351 | 0,356 | 0,371 | 0,396 | 0,446              | 0,596             | 0,184              | 0,186 | 0,192 | 0,200 | 0,215 | 0,258 | 0,320 | 0,417 | 0,590 |
| 1,20                | 0,496              | 0,496 | 0,497 | 0,498 | 0,501 | 0,508 | 0,520 | 0,544              | 0,617             | 0,318              | 0,319 | 0,323 | 0,328 | 0,338 | 0,365 | 0,406 | 0,474 | 0,608 |
| 1,50                | 0,679              | 0,679 | 0,680 | 0,680 | 0,681 | 0,684 | 0,689 | 0,699              | 0,729             | 0,513              | 0,514 | 0,516 | 0,519 | 0,524 | 0,540 | 0,564 | 0,604 | 0,691 |
| 2,00                | 0,824              | 0,842 | 0,843 | 0,843 | 0,843 | 0,844 | 0,846 | 0,849              | 0,858             | 0,652              | 0,653 | 0,654 | 0,656 | 0,659 | 0,669 | 0,684 | 0,711 | 0,769 |
| Оптимальный вариант |                    |       |       |       |       |       |       |                    |                   |                    |       |       |       |       |       |       |       |       |

Таблица 4

Оптимальные веса при трехточечной аппроксимации второй производной по схеме А

| h                      | $\eta$ |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |
|------------------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|
|                        | 0      | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   | 0    | ∞    |
| Веса центральной точки |        |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |
| 0                      | —∞     | —0,67 | —0,67 | —0,66 | —0,66 | —0,66 | —0,64 | —0,62 | —0,54 | ∞    | ∞    |
| 0,05                   | —802   | —7,28 | —2,00 | —1,33 | —1,00 | —0,79 | —0,71 | —0,66 | —0,58 | 401  | 401  |
| 0,10                   | —202   | —24,2 | —5,86 | —3,30 | —1,99 | —1,19 | —0,91 | —0,76 | —0,62 | 101  | 101  |
| 0,15                   | —90,9  | —36,7 | —11,2 | —6,28 | —3,56 | —1,84 | —1,24 | —0,92 | —0,69 | 45,4 | 45,4 |
| 0,20                   | —51,9  | —35,3 | —15,7 | —9,48 | —5,48 | —2,70 | —1,68 | —1,15 | —0,78 | 26,0 | 26,0 |
| 0,30                   | —24,2  | —22,0 | —16,8 | —12,5 | —8,51 | —4,59 | —2,79 | —1,74 | —1,02 | 12,1 | 12,1 |
| 0,40                   | —14,4  | —13,9 | —12,4 | —11,0 | —8,89 | —5,79 | —3,79 | —2,38 | —1,31 | 7,27 | 7,27 |
| 0,50                   | —9,84  | —9,70 | —9,19 | —8,64 | —7,71 | —5,88 | —4,29 | —2,88 | —1,59 | 5,03 | 5,03 |
| 0,60                   | —7,32  | —7,27 | —7,06 | —6,82 | —6,38 | —5,37 | —4,28 | —3,10 | —1,79 | 3,81 | 3,81 |
| 0,80                   | —4,73  | —4,72 | —4,66 | —4,58 | —4,45 | —4,09 | —3,61 | —2,93 | —1,91 | 2,59 | 2,59 |
| 1,00                   | —3,45  | —3,44 | —3,42 | —3,38 | —3,32 | —3,15 | —2,89 | —2,50 | —1,78 | 1,97 | 1,97 |
| 1,20                   | —2,72  | —2,72 | —2,71 | —2,69 | —2,65 | —2,54 | —2,39 | —2,12 | —1,60 | 1,53 | 1,53 |
| 1,50                   | —2,20  | —2,20 | —2,20 | —2,18 | —2,16 | —2,09 | —1,98 | —1,80 | —1,42 | 0,97 | 0,97 |
| 2,00                   | —2,01  | —2,01 | —2,00 | —1,99 | —1,97 | —1,91 | —1,83 | —1,67 | —1,34 | 0,29 | 0,29 |
| Веса крайних точек     |        |       |       |       |       |       |       |       |       |      |      |
| 0                      | —∞     | —0,67 | —0,67 | —0,66 | —0,66 | —0,66 | —0,64 | —0,62 | —0,54 | ∞    | ∞    |
| 0,05                   | —802   | —7,28 | —2,00 | —1,33 | —1,00 | —0,79 | —0,71 | —0,66 | —0,58 | 401  | 401  |
| 0,10                   | —202   | —24,2 | —5,86 | —3,30 | —1,99 | —1,19 | —0,91 | —0,76 | —0,62 | 101  | 101  |
| 0,15                   | —90,9  | —36,7 | —11,2 | —6,28 | —3,56 | —1,84 | —1,24 | —0,92 | —0,69 | 45,4 | 45,4 |
| 0,20                   | —51,9  | —35,3 | —15,7 | —9,48 | —5,48 | —2,70 | —1,68 | —1,15 | —0,78 | 26,0 | 26,0 |
| 0,30                   | —24,2  | —22,0 | —16,8 | —12,5 | —8,51 | —4,59 | —2,79 | —1,74 | —1,02 | 12,1 | 12,1 |
| 0,40                   | —14,4  | —13,9 | —12,4 | —11,0 | —8,89 | —5,79 | —3,79 | —2,38 | —1,31 | 7,27 | 7,27 |
| 0,50                   | —9,84  | —9,70 | —9,19 | —8,64 | —7,71 | —5,88 | —4,29 | —2,88 | —1,59 | 5,03 | 5,03 |
| 0,60                   | —7,32  | —7,27 | —7,06 | —6,82 | —6,38 | —5,37 | —4,28 | —3,10 | —1,79 | 3,81 | 3,81 |
| 0,80                   | —4,73  | —4,72 | —4,66 | —4,58 | —4,45 | —4,09 | —3,61 | —2,93 | —1,91 | 2,59 | 2,59 |
| 1,00                   | —3,45  | —3,44 | —3,42 | —3,38 | —3,32 | —3,15 | —2,89 | —2,50 | —1,78 | 1,97 | 1,97 |
| 1,20                   | —2,72  | —2,72 | —2,71 | —2,69 | —2,65 | —2,54 | —2,39 | —2,12 | —1,60 | 1,53 | 1,53 |
| 1,50                   | —2,20  | —2,20 | —2,20 | —2,18 | —2,16 | —2,09 | —1,98 | —1,80 | —1,42 | 0,97 | 0,97 |
| 2,00                   | —2,01  | —2,01 | —2,00 | —1,99 | —1,97 | —1,91 | —1,83 | —1,67 | —1,34 | 0,29 | 0,29 |

Мера ошибки четырехточечной аппроксимации смешанной производной по схеме Б

| $h$                 | $\eta$            |          |          |          |          |          |          |          |          |                    |       |       |       |
|---------------------|-------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------------------|-------|-------|-------|
|                     | 0                 | 0,001    | 0,005    | 0,01     | 0,02     | 0,05     | 0,1      | 0,2      | 0,5      | 0                  | 0,001 | 0,005 | 0,01  |
|                     | 0                 | 0,001    | 0,005    | 0,01     | 0,02     | 0,05     | 0,1      | 0,2      | 0,5      | 0                  | 0,001 | 0,005 | 0,01  |
| Стандартный вариант |                   |          |          |          |          |          |          |          |          |                    |       |       |       |
| 0                   | 0                 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 0                  | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 0,05                | $3 \cdot 10^{-5}$ | 10,000   | 50,000   | 100,00   | 200,00   | 500,00   | 1000,0   | 2000,0   | 5000     | $7 \cdot 10^{-6}$  | 0,910 | 0,980 | 0,990 |
| 0,10                | $5 \cdot 10^{-4}$ | 0,625    | 3,126    | 6,251    | 12,501   | 31,25    | 62,50    | 125,0    | 312,5    | $13 \cdot 10^{-5}$ | 0,394 | 0,765 | 0,867 |
| 0,15                | 0,003             | 0,126    | 0,620    | 1,237    | 2,472    | 6,175    | 12,35    | 24,69    | 61,73    | $7 \cdot 10^{-4}$  | 0,120 | 0,403 | 0,575 |
| 0,20                | 0,008             | 0,047    | 0,203    | 0,398    | 0,789    | 1,961    | 3,914    | 7,820    | 19,54    | 0,002              | 0,046 | 0,188 | 0,315 |
| 0,30                | 0,035             | 0,042    | 0,073    | 0,112    | 0,189    | 0,420    | 0,806    | 1,578    | 3,893    | 0,011              | 0,022 | 0,062 | 0,108 |
| 0,40                | 0,090             | 0,096    | 0,105    | 0,118    | 0,142    | 0,215    | 0,337    | 0,532    | 1,314    | 0,034              | 0,038 | 0,055 | 0,075 |
| 0,50                | 0,186             | 0,187    | 0,192    | 0,196    | 0,206    | 0,236    | 0,286    | 0,386    | 0,686    | 0,079              | 0,082 | 0,091 | 0,102 |
| 0,60                | 0,307             | 0,308    | 0,310    | 0,312    | 0,317    | 0,331    | 0,356    | 0,404    | 0,548    | 0,156              | 0,158 | 0,164 | 0,170 |
| 0,80                | 0,574             | 0,574    | 0,574    | 0,575    | 0,576    | 0,581    | 0,589    | 0,604    | 0,650    | 0,405              | 0,406 | 0,408 | 0,412 |
| 1,00                | 0,790             | 0,790    | 0,790    | 0,790    | 0,791    | 0,793    | 0,796    | 0,802    | 0,821    | 0,696              | 0,696 | 0,698 | 0,699 |
| 1,20                | 0,918             | 0,918    | 0,918    | 0,918    | 0,918    | 0,919    | 0,921    | 0,924    | 0,931    | 0,895              | 0,895 | 0,895 | 0,896 |
| 1,50                | 0,990             | 0,990    | 0,990    | 0,990    | 0,990    | 0,990    | 0,991    | 0,992    | 0,996    | 0,990              | 0,990 | 0,990 | 0,990 |
| 2,00                | 1,003             | 1,003    | 1,006    | 1,003    | 1,003    | 1,003    | 1,004    | 1,004    | 1,005    | 1,000              | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| Оптимальный вариант |                   |          |          |          |          |          |          |          |          |                    |       |       |       |
| 0                   | 0                 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | 0                  | 1,000 | 1,000 | 1,000 |
| 0,05                | $3 \cdot 10^{-5}$ | 10,000   | 50,000   | 100,00   | 200,00   | 500,00   | 1000,0   | 2000,0   | 5000     | $7 \cdot 10^{-6}$  | 0,910 | 0,980 | 0,990 |
| 0,10                | $5 \cdot 10^{-4}$ | 0,625    | 3,126    | 6,251    | 12,501   | 31,25    | 62,50    | 125,0    | 312,5    | $13 \cdot 10^{-5}$ | 0,394 | 0,765 | 0,867 |
| 0,15                | 0,003             | 0,126    | 0,620    | 1,237    | 2,472    | 6,175    | 12,35    | 24,69    | 61,73    | $7 \cdot 10^{-4}$  | 0,120 | 0,403 | 0,575 |
| 0,20                | 0,008             | 0,047    | 0,203    | 0,398    | 0,789    | 1,961    | 3,914    | 7,820    | 19,54    | 0,002              | 0,046 | 0,188 | 0,315 |
| 0,30                | 0,035             | 0,042    | 0,073    | 0,112    | 0,189    | 0,420    | 0,806    | 1,578    | 3,893    | 0,011              | 0,022 | 0,062 | 0,108 |
| 0,40                | 0,090             | 0,096    | 0,105    | 0,118    | 0,142    | 0,215    | 0,337    | 0,532    | 1,314    | 0,034              | 0,038 | 0,055 | 0,075 |
| 0,50                | 0,186             | 0,187    | 0,192    | 0,196    | 0,206    | 0,236    | 0,286    | 0,386    | 0,686    | 0,079              | 0,082 | 0,091 | 0,102 |
| 0,60                | 0,307             | 0,308    | 0,310    | 0,312    | 0,317    | 0,331    | 0,356    | 0,404    | 0,548    | 0,156              | 0,158 | 0,164 | 0,170 |
| 0,80                | 0,574             | 0,574    | 0,574    | 0,575    | 0,576    | 0,581    | 0,589    | 0,604    | 0,650    | 0,405              | 0,406 | 0,408 | 0,412 |
| 1,00                | 0,790             | 0,790    | 0,790    | 0,790    | 0,791    | 0,793    | 0,796    | 0,802    | 0,821    | 0,696              | 0,696 | 0,698 | 0,699 |
| 1,20                | 0,918             | 0,918    | 0,918    | 0,918    | 0,918    | 0,919    | 0,921    | 0,924    | 0,931    | 0,895              | 0,895 | 0,895 | 0,896 |
| 1,50                | 0,990             | 0,990    | 0,990    | 0,990    | 0,990    | 0,990    | 0,991    | 0,992    | 0,996    | 0,990              | 0,990 | 0,990 | 0,990 |
| 2,00                | 1,003             | 1,003    | 1,006    | 1,003    | 1,003    | 1,003    | 1,004    | 1,004    | 1,005    | 1,000              | 1,000 | 1,000 | 1,000 |

Оптимальные веса  $\rho = \rho_1 = \rho_3 = -\rho_2 = -\rho_4$  при четырехточечной аппроксимации смешанной производной по схеме Б

| η    |                 |       |       |      |      |      |      |      |      |      |                    |       |       |       |       |       |       |       |  |
|------|-----------------|-------|-------|------|------|------|------|------|------|------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--|
| h    | 0               | 0,001 | 0,005 | 0,01 | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  | 0    | 0,001              | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   |  |
|      | Абсолютные веса |       |       |      |      |      |      |      |      |      | Относительные веса |       |       |       |       |       |       |       |  |
| 0    | ∞               | 0     | 0     | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 0    | 1,00 | 0                  | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |  |
| 0,05 | 101             | 9,05  | 1,95  | 0,98 | 0,50 | 0,20 | 0,10 | 0,05 | 0,02 | 1,01 | 0,090              | 0,020 | 0,010 | 0,005 | 0,002 | 0,001 | 0,000 | 0,000 |  |
| 0,10 | 25,1            | 15,5  | 6,00  | 3,40 | 1,82 | 0,76 | 0,39 | 0,20 | 0,08 | 1,02 | 0,620              | 0,24  | 0,14  | 0,07  | 0,03  | 0,02  | 0,01  | 0,003 |  |
| 0,15 | 11,6            | 10,2  | 6,93  | 4,94 | 3,14 | 1,50 | 0,80 | 0,42 | 0,17 | 1,04 | 0,92               | 0,62  | 0,44  | 0,28  | 0,14  | 0,07  | 0,04  | 0,02  |  |
| 0,20 | 6,76            | 6,46  | 5,50  | 4,64 | 3,53 | 2,06 | 1,21 | 0,67 | 0,28 | 1,08 | 1,03               | 0,88  | 0,74  | 0,56  | 0,33  | 0,19  | 0,11  | 0,04  |  |
| 0,30 | 3,29            | 3,25  | 3,12  | 2,97 | 2,70 | 2,13 | 1,57 | 1,03 | 0,51 | 1,18 | 1,17               | 1,12  | 1,07  | 0,97  | 0,77  | 0,56  | 0,37  | 0,18  |  |
| 0,40 | 2,08            | 2,07  | 2,03  | 1,99 | 1,91 | 1,70 | 1,44 | 1,10 | 0,64 | 1,33 | 1,32               | 1,30  | 1,27  | 1,22  | 1,09  | 0,92  | 0,70  | 0,41  |  |
| 0,50 | 1,52            | 1,51  | 1,50  | 1,48 | 1,45 | 1,35 | 1,21 | 1,01 | 0,67 | 1,52 | 1,51               | 1,50  | 1,48  | 1,45  | 1,35  | 1,21  | 1,01  | 0,67  |  |
| 0,60 | 1,20            | 1,20  | 1,10  | 1,18 | 1,16 | 1,11 | 1,03 | 0,90 | 0,65 | 1,73 | 1,73               | 1,71  | 1,70  | 1,67  | 1,60  | 1,48  | 1,30  | 0,94  |  |
| 0,80 | 0,84            | 0,84  | 0,83  | 0,83 | 0,82 | 0,79 | 0,75 | 0,68 | 0,53 | 2,15 | 2,15               | 2,12  | 2,12  | 2,10  | 2,02  | 1,92  | 1,74  | 1,36  |  |
| 1,00 | 0,56            | 0,56  | 0,56  | 0,56 | 0,55 | 0,53 | 0,51 | 0,46 | 0,37 | 2,24 | 2,24               | 2,24  | 2,24  | 2,20  | 2,12  | 2,04  | 1,84  | 1,48  |  |

Таблица 7

Мера ошибки пятиточечной аппроксимации оператора Лапласа по схеме Г

| h    | η                   |       |       |       |       |       |                 |       |       |                    |                     |       |       |       |       |       |       |       |
|------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-----------------|-------|-------|--------------------|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      | Стандартный вариант |       |       |       |       |       |                 |       |       |                    | Оптимальный вариант |       |       |       |       |       |       |       |
|      | 0                   | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1             | 0,2   | 0,5   | 0                  | 0,001               | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   |
| 0    | 0                   |       |       |       |       |       |                 |       |       |                    |                     |       |       |       |       |       |       |       |
| 0,05 | 2·10 <sup>-5</sup>  | 100,0 | 500,0 | 1000  | 2000  | 5000  | 10 <sup>4</sup> | ∞     | ∞     | 6·10 <sup>-6</sup> | 0,500               | 0,500 | 0,501 | 0,502 | 0,505 | 0,510 | 0,520 | 0,546 |
| 0,10 | 8·10 <sup>-5</sup>  | 6,250 | 31,20 | 62,50 | 125,0 | 312,5 | 625,0           | 1280  | 3125  | 2·10 <sup>-5</sup> | 0,471               | 0,500 | 0,505 | 0,508 | 0,512 | 0,517 | 0,527 | 0,553 |
| 0,15 | 4·10 <sup>-4</sup>  | 1,235 | 6,173 | 12,35 | 24,69 | 61,73 | 123,5           | 246,9 | 617,3 | 8·10 <sup>-5</sup> | 0,370               | 0,480 | 0,499 | 0,510 | 0,519 | 0,526 | 0,536 | 0,563 |
| 0,20 | 0,001               | 0,392 | 1,950 | 3,912 | 7,826 | 19,55 | 39,00           | 78,13 | 195,5 | 3·10 <sup>-4</sup> | 0,236               | 0,425 | 0,473 | 0,502 | 0,523 | 0,535 | 0,547 | 0,575 |
| 0,30 | 0,006               | 0,083 | 0,392 | 0,777 | 1,549 | 3,864 | 7,721           | 15,44 | 38,59 | 0,001              | 0,080               | 0,255 | 0,352 | 0,436 | 0,511 | 0,545 | 0,571 | 0,606 |
| 0,40 | 0,017               | 0,041 | 0,139 | 0,261 | 0,505 | 1,238 | 2,458           | 4,900 | 12,23 | 0,004              | 0,035               | 0,133 | 0,218 | 0,321 | 0,454 | 0,530 | 0,583 | 0,638 |
| 0,50 | 0,037               | 0,047 | 0,087 | 0,137 | 0,237 | 0,537 | 1,037           | 2,087 | 5,037 | 0,010              | 0,021               | 0,079 | 0,135 | 0,220 | 0,369 | 0,481 | 0,572 | 0,660 |
| 0,60 | 0,067               | 0,074 | 0,093 | 0,117 | 0,106 | 0,310 | 0,551           | 1,033 | 2,480 | 0,021              | 0,030               | 0,061 | 0,097 | 0,159 | 0,280 | 0,415 | 0,537 | 0,666 |
| 0,80 | 0,166               | 0,167 | 0,174 | 0,181 | 0,106 | 0,242 | 0,318           | 0,471 | 0,929 | 0,063              | 0,067               | 0,081 | 0,098 | 0,130 | 0,211 | 0,313 | 0,446 | 0,629 |
| 1,00 | 0,293               | 0,294 | 0,297 | 0,299 | 0,306 | 0,324 | 0,356           | 0,418 | 0,606 | 0,138              | 0,140               | 0,148 | 0,157 | 0,175 | 0,226 | 0,296 | 0,402 | 0,582 |
| 1,20 | 0,427               | 0,428 | 0,428 | 0,430 | 0,433 | 0,442 | 0,457           | 0,488 | 0,577 | —                  | —                   | —     | —     | —     | —     | —     | —     | —     |
| 1,50 | 0,600               | 0,600 | 0,601 | 0,601 | 0,602 | 0,606 | 0,612           | 0,635 | 0,662 | —                  | —                   | —     | —     | —     | —     | —     | —     | —     |
| 2,00 | 0,774               | 0,774 | 0,774 | 0,774 | 0,775 | 0,776 | 0,778           | 0,781 | 0,794 | —                  | —                   | —     | —     | —     | —     | —     | —     | —     |

Оптимальные веса при пятиточечной аппроксимации оператора Лапласа по схеме Г

| $h$  | $\eta$                 |       |       |       |       |       |       |       |       |                    |       |       |       |       |       |       |       |       |
|------|------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|      | 0                      | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   | 0                  | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,02  | 0,05  | 0,1   | 0,2   | 0,5   |
|      | Веса центральной точки |       |       |       |       |       |       |       |       | Веса крайних точек |       |       |       |       |       |       |       |       |
| 0    | $-\infty$              | -0,80 | -0,80 | -0,80 | -0,80 | -0,79 | -0,79 | -0,77 | 0     | $\infty$           | -0,80 | -0,80 | -0,80 | -0,80 | -0,79 | -0,79 | -0,77 | -0,73 |
| 0,05 | -1605                  | -8,77 | -2,40 | -1,60 | -1,20 | -0,95 | -0,87 | -0,81 | -0,74 | 401                | 1,20  | -0,40 | -0,60 | -0,70 | -0,75 | -0,76 | -0,76 | -0,72 |
| 0,10 | -404                   | -80,6 | -7,13 | -3,99 | -2,40 | -1,44 | -1,11 | -0,94 | -0,80 | 101                | 6,71  | 0,80  | 0,01  | -0,39 | -0,63 | -0,70 | -0,73 | -0,71 |
| 0,15 | -182                   | -52,6 | -14,2 | -7,79 | -4,37 | -2,25 | -1,52 | -1,14 | -0,88 | 45,4               | 12,4  | 2,64  | 0,99  | 0,12  | -0,42 | -0,60 | -0,67 | -0,68 |
| 0,20 | -104                   | -58,3 | -21,6 | -12,3 | -6,92 | -3,35 | -2,09 | -1,44 | -1,00 | 26,0               | 14,1  | 4,60  | 2,20  | 0,80  | -0,13 | -0,44 | -0,59 | -0,65 |
| 0,30 | -48,3                  | -41,8 | -27,2 | -19,1 | -12,1 | -6,09 | -3,61 | -2,24 | -1,34 | 12,1               | 10,3  | 6,38  | 4,17  | 2,28  | 0,66  | -0,01 | -0,36 | -0,54 |
| 0,40 | -28,8                  | -27,4 | -23,0 | -19,1 | -14,4 | -8,53 | -5,30 | -3,25 | -1,80 | 7,27               | 6,87  | 5,60  | 4,50  | 3,15  | 1,46  | 0,54  | -0,03 | -0,38 |
| 0,50 | -19,7                  | -19,2 | -17,7 | -16,2 | -13,8 | -9,65 | -6,59 | -4,22 | -2,30 | 5,03               | 4,80  | 4,44  | 3,96  | 3,22  | 1,97  | 1,04  | 0,34  | -0,18 |
| 0,60 | -14,6                  | -14,5 | -13,9 | -13,2 | -12,0 | -9,51 | -7,16 | -4,93 | -2,77 | 3,81               | 3,76  | 3,56  | 3,39  | 2,95  | 2,15  | 1,39  | 0,68  | 0,05  |
| 0,80 | -9,46                  | -9,42 | -9,27 | -9,08 | -8,73 | -7,83 | -6,71 | -5,27 | -3,32 | 2,59               | 2,58  | 2,52  | 2,45  | 2,32  | 2,00  | 1,60  | 1,10  | 0,46  |
| 1,00 | -6,90                  | -6,88 | -6,82 | -6,74 | -6,60 | -6,20 | -5,63 | -4,78 | -3,34 | 1,97               | 1,96  | 1,94  | 1,91  | 1,85  | 1,70  | 1,49  | 1,18  | 0,69  |

## НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ОБЪЕКТИВНОГО АНАЛИЗА ПОЛЯ ВЕТРА

### Оптимальная интерполяция данных измерений ветра в атмосфере

В работе [6] была описана многоуровневая схема объективного анализа поля ветра, основанная на методе оптимальной интерполяции. Схема предполагает интерполяцию в узлы регулярной сетки составляющих вектора ветра  $u$  и  $v$ , вычисленных по данным ветровых измерений на аэрологических станциях. Задача была реализована на ЭВМ М-20.

Для эмпирической оценки точности предложенной схемы анализа представлялось необходимым осуществить эксперимент по интерполяции не в узлы регулярной сетки, а непосредственно на станции, и затем сравнить интерполированные значения с измеренными. Такое сравнение было выполнено на материале анализа полей  $u$  и  $v$  на трех уровнях для девяти ситуаций. В каждой ситуации использовались данные около 200 станций.

Для расчетов использовался измененный вариант основной программы анализа. В итоге получены следующие средние квадратические ошибки сопоставления значений составляющих вектора ветра  $u$  и  $v$  (м/сек.) на трех уровнях:

|                                       |     |     |      |
|---------------------------------------|-----|-----|------|
| $p$ мб . . . . .                      | 850 | 500 | 300  |
| $[(\tilde{u} - u)^2]^{0,5}$ . . . . . | 5,2 | 7,5 | 11,2 |
| $[(\tilde{v} - v)^2]^{0,5}$ . . . . . | 4,8 | 6,9 | 10,6 |

Поскольку мы сравниваем интерполированные значения не с истинными, а с измеренными величинами, ошибки сопоставления включают в себя как ошибки интерполяции, так и ошибки измерений. Принятое нами значение меры ошибки измерений  $\eta=0,02$  соответствует средним квадратическим ошибкам исходных данных порядка 1—2 м/сек. Оценить ошибки интерполяции можно, соответствующим образом уменьшив приведенные выше ошибки сопоставления.

Мера эмпирической ошибки интерполяции вычисляется по формуле

$\varepsilon = \frac{\bar{E}}{m_{00}}$ , где  $\bar{E}$  — средний квадрат (по 200 станциям) ошибки интерпо-

ляции, а  $m_{00}$  — средняя дисперсия поля  $u$  (или  $v$ ) над рассматриваемой территорией.

Если принять дисперсии  $u$  и  $v$  на уровнях 850, 500 и 300 мб равными 50, 100, 200 м<sup>2</sup>/сек<sup>2</sup>. [7, 10] соответственно, то значения меры ошибки интерполяции на всех трех уровнях окажутся порядка 0,50.

С другой стороны, как известно, нетрудно получить теоретические оценки ошибок оптимальной интерполяции. Для тех же 200 станций и девяти ситуаций средняя величина теоретической меры ошибки интерполяции на всех трех уровнях составила 0,47.

Хорошее согласие теоретических и фактических оценок ошибок интерполяции дает основание полагать, что теоретические ошибки интерполяции, которые всегда могут быть вычислены в процессе анализа, достаточно хорошо характеризуют реальные ошибки интерполяции данных о ветре.

Важно обратить внимание на тот факт, что в случае интерполяции на станции мы сильно разрежаем сеть станций по сравнению с той сетью, которая используется в основном варианте программы интерполяции в узлы регулярной сетки. Разрежение сети станций происходит вследствие того, что данные станции, на которую производится интерполяция, естественно, не учитываются. В случае интерполяции на узлы мы используем всю имеющуюся информацию, в результате средняя по 572 узлам регулярной сетки теоретическая ошибка интерполяции составила 0,395 (по сравнению с 0,470).

Карта меры теоретической ошибки интерполяции в узлы регулярной сетки представлена на рис. 1. Мы видим, что в районах с густой сетью станций значение  $\epsilon$  порядка 0,2—0,3, что соответствует средним квадратическим ошибкам интерполяции порядка 4—5 м/сек. (на уровне 500 мб).

В районах же с редкой сетью, где  $\epsilon$  составляет 0,8—0,9, ошибки интерполяции увеличиваются до 9—10 м/сек. Вообще метод оптимальной интерполяции дает для разреженной сети значения, близкие к норме интерполируемой величины.

В районах с редкой сетью станций, таким образом, имеющаяся информация о ветре оказывается недостаточной для того, чтобы получать значения составляющих вектора ветра в узлах регулярной сетки с необходимой для численного прогноза точностью.

Однако можно ожидать, что привлечение в качестве дополнительной информации сведений о высотах изобарических поверхностей и выполнение совместного объективного анализа данных о геопотенциале и ветре, например, в рамках методики оптимального согласования, предложенной Л. С. Гандиным [1], приведут к заметному повышению точности представления ветра в узлах сетки. Действительно, знание поля геопотенциала позволяет нам получать геострофический ветер, который в свободной атмосфере является хорошим приближением к реальному ветру.

Если бы мы имели сведения о поле геопотенциала в любой точке пространства, мы имели бы возможность без ошибок получать геострофический ветер в узлах регулярной сетки и точность, с которой мы при этом характеризовали бы поле ветра, определялась бы только точностью геострофического приближения.

В реальных условиях мы имеем значения геопотенциала на сравнительно редкой сети аэрологических станций, включающие притом случайные ошибки измерений. Поэтому представляет интерес изучение реальной точности, с которой можно вычислять геострофический ветер в узлах регулярной сетки, и той точности, с которой эти значения будут характеризовать реальный ветер в атмосфере.



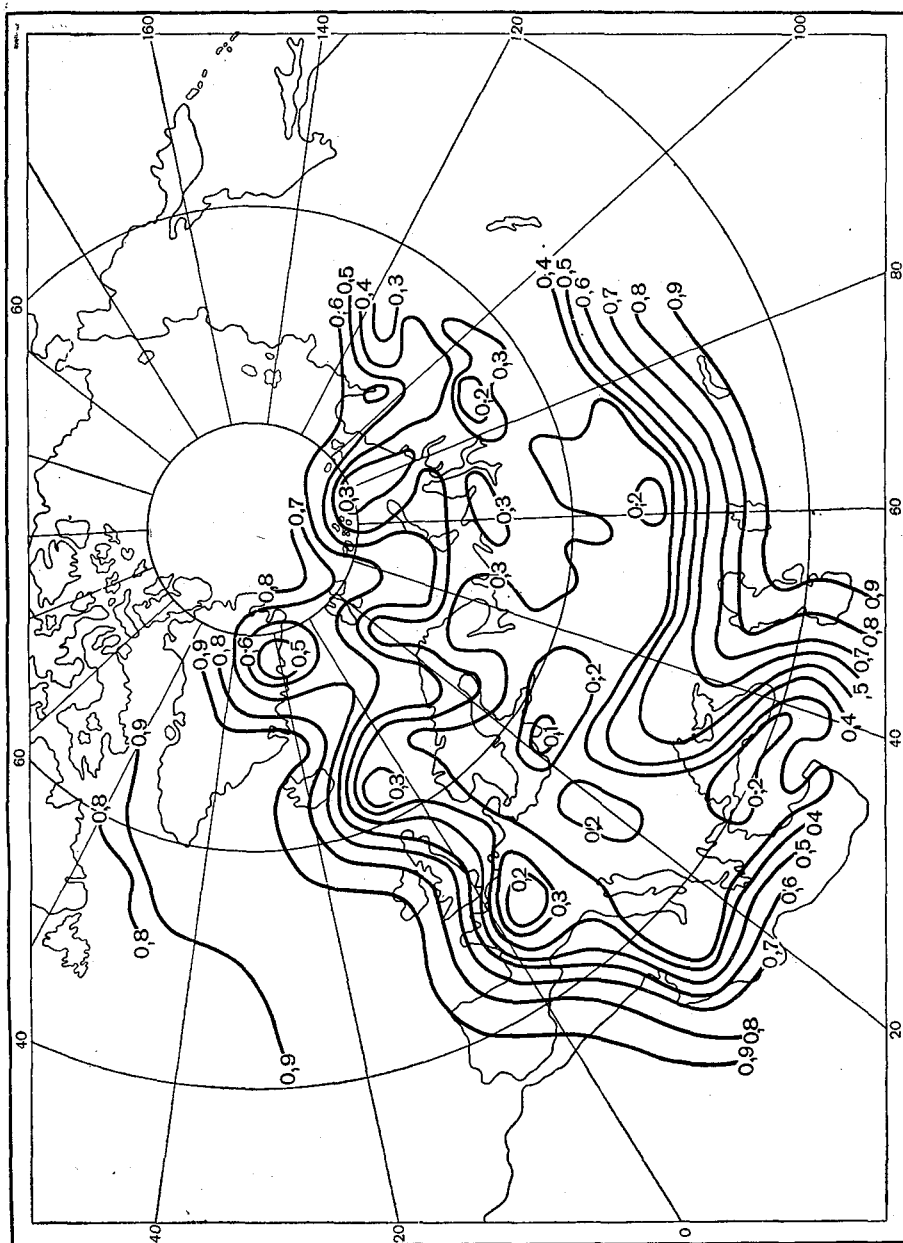


Рис. 1. Карта меры теоретической ошибки интерполяции составляющих реального ветра и  $u$  и  $v$  в узлы регулярной сетки.

## Оптимальный метод расчета составляющих вектора геострофического ветра по данным о геопотенциале в нерегулярной сети станций

Обычный способ расчета геострофического ветра заключается в том, что сначала производится интерполяция значений геопотенциала со станций в узлы регулярной сетки, а затем производные  $\frac{\partial H}{\partial x}$  и  $\frac{\partial H}{\partial y}$  аппроксимируются каким-либо конечно-разностным выражением. Такой способ не является наилучшим, поскольку процесс интерполяции поля геопотенциала сам по себе связан с дополнительными ошибками и потерей части реально имеющейся информации. Подробно этот вопрос рассмотрен в работе [3].

Способ расчета геострофического ветра по данным нерегулярной сети станций был предложен М. И. Юдиным и Р. Э. Соловейчиком [8]. Этот способ основывается на геометрическом подходе к расчету производных, однако, поскольку реальная статистическая структура исходного поля при этом не учитывается, он не является оптимальным в смысле минимума среднего квадрата ошибки получаемых величин.

Оптимальный, в указанном смысле, метод расчета дифференциальных характеристик метеорологических полей предложен Р. Л. Каганом [4, 5].

Применительно к определению первых производных поля геопотенциала суть его заключается в следующем. Отклонения значений производных  $\frac{\partial H}{\partial x}$  и  $\frac{\partial H}{\partial y}$  от их средних значений в точке, обозначенной индексом 0, ищутся в виде линейных комбинаций значений отклонений от норм  $H'_i$  — геопотенциала на окружающих эту точку станциях ( $i=1, 2, \dots, n$ )

$$\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0 \approx \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}\right)_0 = \sum_{i=1}^n p_i H'_i + \overline{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0}. \quad (1)$$

Черта сверху означает осреднение в статистическом смысле.

Требование минимума среднего квадрата ошибки вычисления производной

$$\delta^2 = \left[ \left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial x}\right)_0 - \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)_0 \right]^2 \quad (2)$$

позволяет получить систему  $n$  линейных алгебраических уравнений для определения  $n$  значений весов  $p_i$ ,

$$\sum_{k=1}^n p_k r_{ik} + p_i \eta = \omega_{0i}, \quad (3)$$

где  $r_{ik} = \frac{\overline{H'_i H'_k}}{\sigma_H^2}$  — значения нормированной автокорреляционной функции поля геопотенциала,  $\sigma_H^2$  — дисперсия геопотенциала,  $\eta$  — мера

ошибки «измерений» геопотенциала,  $\omega_{0i} = \frac{\overline{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)'_0 H'_i}}{\sigma_H^2}$  — взаимная корреляционная функция геопотенциала и его первой производной, нор-

мированная на дисперсию поля геопотенциала. Теоретическая ошибка вычисления производной при этом может быть оценена по формуле

$$\varepsilon_0 = \mu_{00} - \sum_{i=1}^n p_i \omega_{0i}, \quad (4)$$

где  $\mu_{00} = \frac{\sigma_{\frac{\partial H}{\partial x}}^2}{\sigma_H^2}$  — отношение дисперсии производной геопотенциала к дисперсии последнего.

Нетрудно видеть, что система уравнений (3) в целом аналогична обычной системе уравнений для определения весов оптимальной интерполяции самого геопотенциала в точку 0. Единственное различие заключается в том, что в правые части уравнений (3) входят значения взаимной корреляционной функции геопотенциала и его производной  $\omega_{0i}$ , а не автокорреляционной функции геопотенциала  $r_{0i}$ , что имеет место в случае интерполяции геопотенциала.

Нам представлялось целесообразным реализовать вышеописанный оптимальный метод расчета производных поля геопотенциала  $\frac{\partial H}{\partial x}$  и  $\frac{\partial H}{\partial y}$  применительно к определению составляющих геострофического ветра

$$u_g = -\frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial y}, \quad v_g = \frac{g}{f} \frac{\partial H}{\partial x} \quad (5)$$

на базе основной программы оптимальной интерполяции, использовавшейся, как уже указывалось, для анализа поля ветра.

Было реализовано два варианта расчета:

- 1) вычисление составляющих геострофического ветра в узлах малой прогностической сетки размером  $26 \times 22$ ;
- 2) вычисление составляющих геострофического ветра непосредственно на станциях.

Поскольку в последнем случае имеется возможность непосредственно сопоставлять данные измерений ветра на станциях с вычисленными значениями геострофического ветра, второй вариант программы имеет особенно большое методическое значение.

Необходимые для решения задачи вычисления производных поля геопотенциала  $\frac{\partial H}{\partial x}$  и  $\frac{\partial H}{\partial y}$  взаимная корреляционная функция  $\omega(\rho)$  и дисперсия производных  $\mu_{00}$  могут быть получены теоретически, как это следует из работ [2, 4, 9], по корреляционной функции поля геопотенциала, если аппроксимирующая ее формула обеспечивает дифференцируемость этой функции. В качестве информации об автокорреляционной функции геопотенциала нами была использована функция

$$r(\rho') = (1 + \rho')e^{-\rho'}, \quad (6)$$

полученная Юдиным [9] для уровня 500 мб, где расстояние  $\rho' = \frac{\rho}{L_0}$ , а  $L_0 = 1000$  км. Поскольку эта функция относится к уровню 500 мб, расчет составляющих геострофического ветра произведен нами именно для этого уровня.

Взаимная корреляционная функция геопотенциала и его производной  $\frac{\partial H}{\partial x}$  вычисляется по формуле

$$\omega_{0i} = -\cos \alpha_i r'(\rho'_{0i}), \quad (7)$$

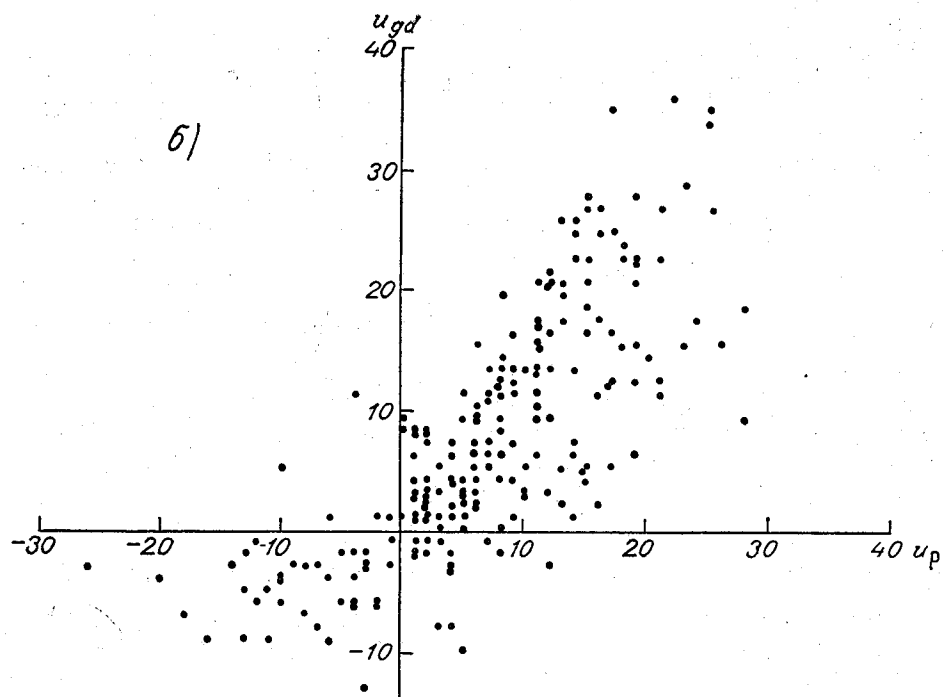
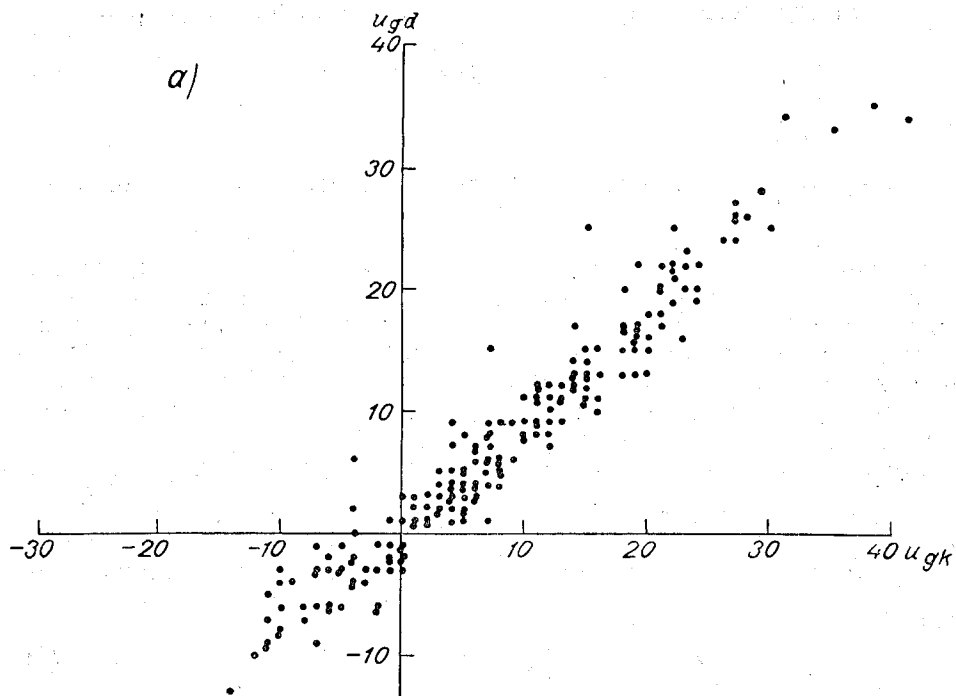


Рис. 2. Корреляционные графики значений конечно-разностного  $u_{gh}$  и дифференциального  $u_{gd}$  ветра (б) и график сравнения значений реального  $u_p$  и геоной

где  $\alpha_i$  — угол между осью дифференцирования  $ox$  и направлением на  $i$ -тую влияющую станцию.

Для производной  $\frac{\partial H}{\partial y}$

$$\omega_{0i} = -\sin \alpha_i r'(\rho_{0i}). \quad (7')$$

Используя формулу (6), получаем для  $\frac{\partial H}{\partial x}$

$$\omega_{0i} = x e^{-\rho_{0i}} \quad \text{и} \quad \mu_{00} = \frac{\sigma_{\frac{\partial H}{\partial x}}^2}{\sigma_H^2} = 1, \quad (8)$$

где  $x = x_i - x_0$  — разность абсцисс нулевой и влияющей точек в тыс. км;

для  $\frac{\partial H}{\partial y}$

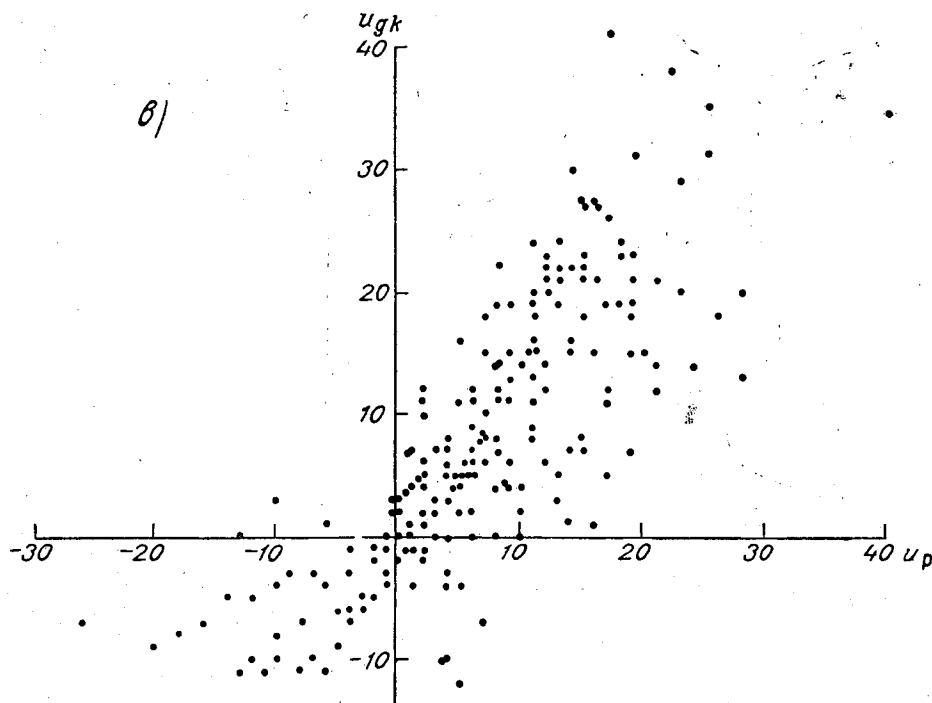
$$\omega_{0i} = y e^{-\rho_{0i}} \quad \text{и} \quad \mu_{00} = 1, \quad (9)$$

где  $y = y_i - y_0$  — разность ординат нулевой и влияющей точек в тыс. км;

$$\epsilon_0 = 1 - \sum_{i=1}^n p_i \omega_{0i}. \quad (10)$$

Нормы составляющих геострофического ветра  $u_g$  и  $v_g$  были получены конечно-разностным методом по нормам поля геопотенциала.

Результаты расчета  $u_g$  и  $v_g$  в узлах сетки сравнивались с геострофическим ветром, вычисленным конечно-разностным методом после предварительного анализа поля геопотенциала. Кроме того, расчеты по обоим



циального  $u_{ga}$  геострофического ветра (а), реального  $u_p$  и геострофического дифференциального  $u_{gk}$  ветра (в), рассчитанных в узлах регулярной сетки.

способам сравнивались с реальным ветром в узлах, полученным путем оптимальной интерполяции. Результаты сравнения по данным расчетов за один день представлены на рис. 2. На рис. 2а по оси абсцисс отложены значения  $u_{gh}$  конечно-разностного, по оси ординат —  $u_{gd}$  дифференциального геострофического ветра.

Расположение точек на графике говорит о том, что величины  $u_{gd}$  несколько меньше, чем  $u_{gh}$  (в области  $u > 10$  м/сек.), хотя в целом они очень близки.

На графиках 2б и 2в по оси абсцисс отложены значения проинтерполированного в узлы реального ветра, а по оси ординат — дифференциального геострофического ветра (рис. 2б) и конечно-разностного геострофического ветра (рис. 2в).

Разброс точек на рис. 2б и 2в существенно больше, чем на рис. 2а, однако в целом точки лежат вдоль биссектрисы координатного угла. Полученные по данным 200 станций коэффициенты корреляции между  $u_{gh}$  и  $u_{gd}$ , между  $u_{gh}$  и  $u_p$  проинтерполированным, а также между  $u_{gd}$  и  $u_p$  проинтерполированным оказались равными 0,97, 0,78, 0,78 соответственно.

Данный эксперимент не позволяет сделать определенный вывод о преимуществах оптимального метода расчета геострофического ветра по сравнению с конечно-разностным, поскольку оба способа дают близкие значения. Значения реального ветра в узлах сетки, полученные в результате интерполяции, не могут служить критерием точности, особенно в районах с редкой сетью станций.

Поле меры теоретической ошибки оптимального метода расчета составляющих геострофического ветра представлено на рис. 3.

Сравнивая эту карту с картой меры ошибки интерполяции реального ветра (рис. 1), мы видим, что в районах с густой сетью станций точность интерполяции реального ветра несколько выше, чем точность расчета геострофического. Но для территорий, плохо освещенных данными наблюдений, ошибки вычисления составляющих геострофического ветра оказываются заметно меньше ошибок интерполяции данных ветровых измерений.

Средняя по полю мера ошибки вычисления геострофического ветра оптимальным методом составляет 0,4. Таким образом, в среднем точность определения геострофического ветра близка к точности, с которой данные измерений ветра освещают рассматриваемый прогностический район.

С помощью второго варианта программы расчета геострофического ветра были произведены численные эксперименты по вычислению составляющих геострофического ветра на станциях и сравнению их с результатами ветровых измерений. Сравнение было произведено на материале четырех ситуаций для полей  $u$  и  $v$ . Средние квадратические отклонения составляющих геострофического ветра от значений составляющих измеренного ветра (в среднем по 170 станциям) составили 6,6 м/сек. (на уровне 500 мб), что соответствует мере ошибки 0,43.

Если учесть меру ошибки измерения ветра  $\eta = 0,02$ , получим эмпирическую среднюю меру ошибки, с которой вычисленный оптимальным методом геострофический ветер характеризует реальный ветер на станциях,  $\varepsilon = 0,41$ .

Теоретическая оценка меры ошибки вычисления составляющих геострофического ветра по 170 станциям оказалась равной 0,39. Близость теоретических и эмпирических оценок может рассматриваться как критерий верности использованной информации о статистической структуре поля геопотенциала.

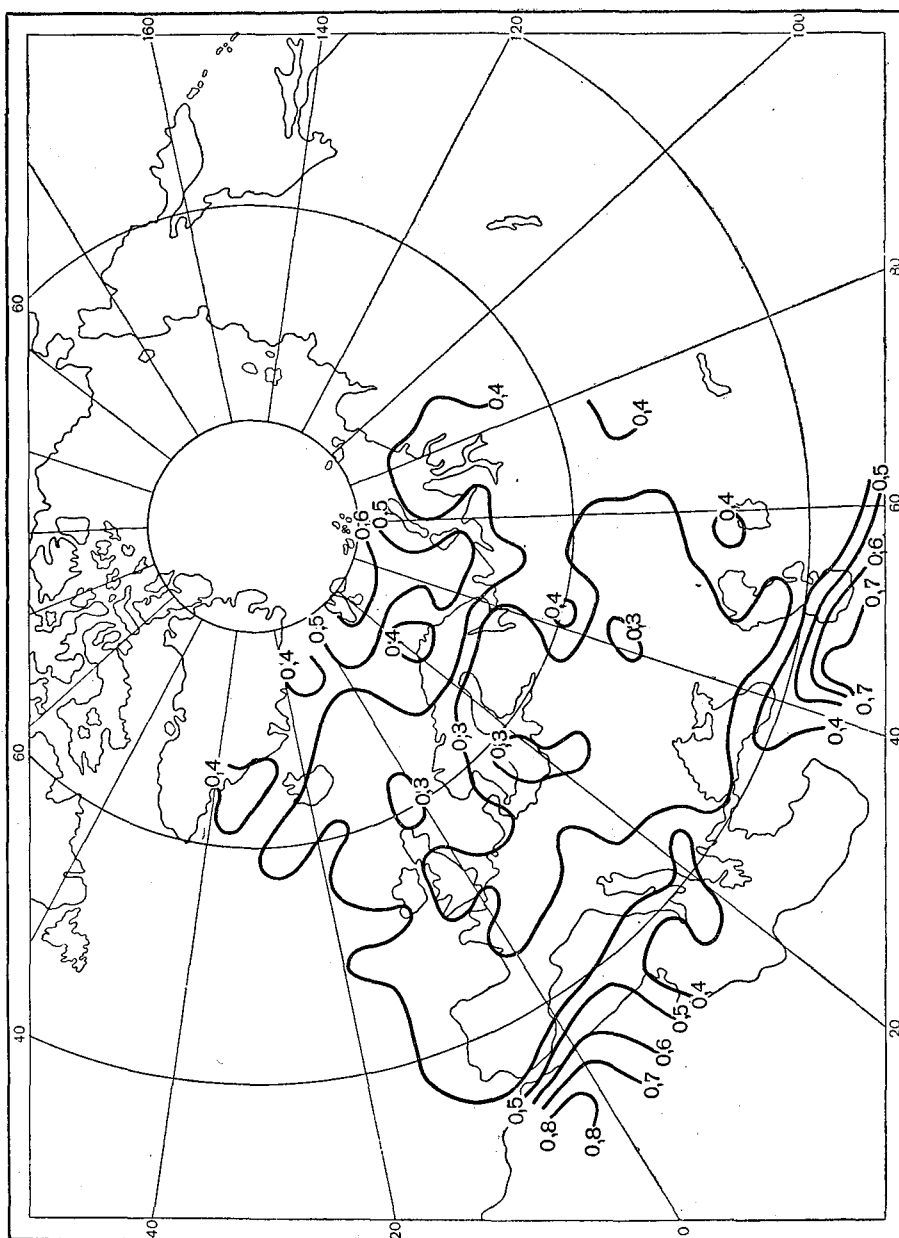


Рис. 3. Карта меры теоретической ошибки оптимального метода расчета географического ветра.

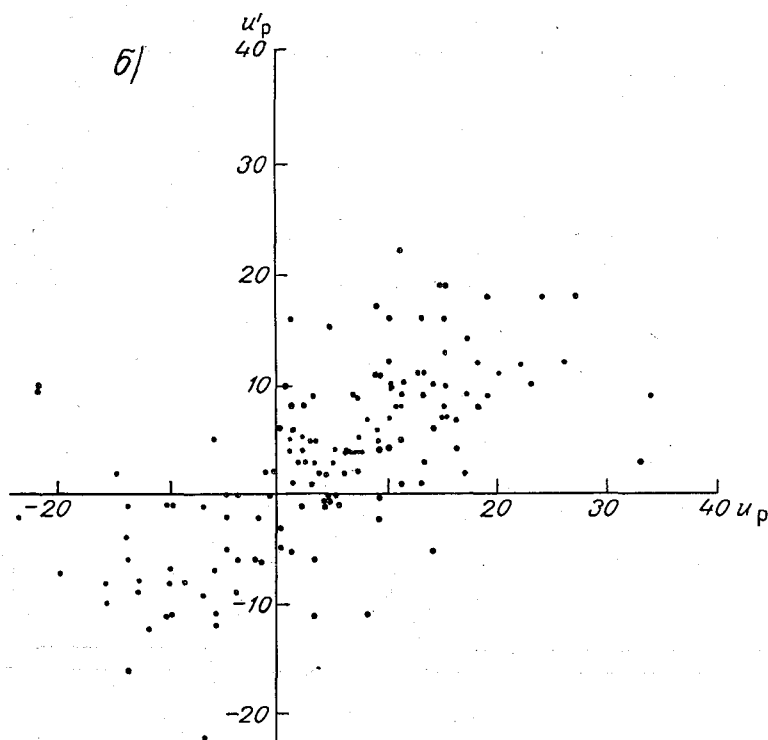
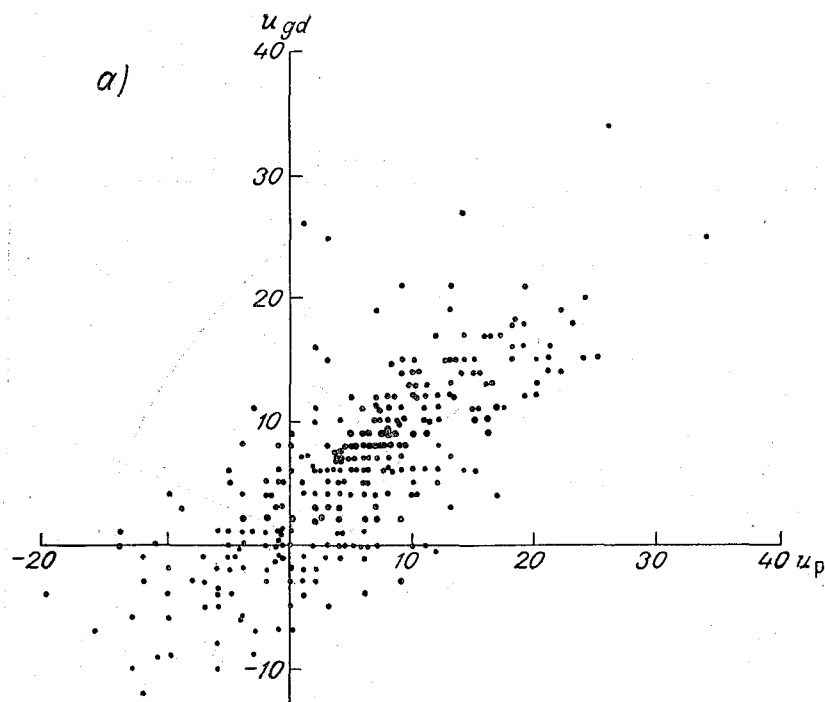


Рис. 4. Графики сравнения на станциях значений измеренного и геострофического ветра (а) и измеренного и проинтерполированного с окружающих станций реального ветра (б).



Графики сравнения результатов интерполяции реального ветра и расчетов геострофического ветра с данными ветровых измерений представлены на рис. 4. По оси абсцисс отложены значения составляющей ветра  $u_p$ , полученные по данным измерений, по оси ординат на рис. 4а — значения геострофического ветра  $u_{gd}$ , а на рис. 4б — результаты оптимальной интерполяции данных измерений на те же станции из окружающих  $u'_p$ .

Разброс точек на рис. 4б несколько больше, чем на рис. 4а. Кроме того, точки на графике сравнения интерполированного и реального ветра расположены в среднем несколько ниже биссектрисы, т. е. имеет место обычное для оптимальной интерполяции сглаживание поля.

В отличие от этого точки на графике сравнения геострофического ветра с реальным расположены более равномерно относительно биссектрисы и, следовательно, геострофический ветер, вычисленный оптимальным методом, имеет примерно ту же дисперсию, что и реальный, что представляется весьма существенным с точки зрения его использования.

На основании полученных оценок точности оптимальной интерполяции поля ветра и оптимального метода вычисления геострофического ветра можно сделать вывод, что в районах с густой сетью станций, где ошибки интерполяции реального ветра невелики, можно этим анализом и ограничиться. В районах с редкой сетью станций, где точность вычисления геострофического ветра выше, чем точность интерполяции реального, лучше пользоваться геострофическим приближением при условии, что используется оптимальный метод вычисления составляющих геострофического ветра.

В первом приближении в каждом узле целесообразно было бы использовать то значение ветра, теоретическая ошибка расчета которого окажется меньше. При таком альтернативном выборе можно рассчитывать, как показывает совместный анализ рис. 1 и 3, на существенное уменьшение средней по полю ошибки данных о ветре в узлах регулярной прогностической сетки.

В заключение необходимо отметить, что осуществленная в данной работе схема интерполяции данных ветровых измерений на станции и метод расчета на станциях значений геострофического ветра, по-видимому, могут быть использованы для автоматического контроля исходных данных о ветре.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г ан д и н Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеиздат, Л., 1963.
2. Г ан д и н Л. С. Об оптимальной интерполяции векторных полей. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
3. Г ан д и н Л. С., И л ь и н Б. М., Л и б е р м а н Ю. М., Ю д и н М. И. О точности определения конечных разностей при анализе метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 168, 1965.
4. К а г а н Р. Л. О построении оптимальных конечно-разностных и квадратурных формул для однородных и изотропных случайных полей. Изв. АН СССР, Физика атмосф. и океана, № 1, 1967.
5. К а г а н Р. Л., Х а т а м к у л о в Г. Х. О точности конечно-разностного представления производных. См. наст. сб.
6. К р и ч а к М. О. Методика объективного анализа поля ветра на уровнях 850, 500 и 300 мб. Метеорология и гидрология, № 1, 1968.
7. К р и ч а к М. О. Некоторые результаты исследования статистических характеристик поля ветра. Труды ГГО, вып. 208, 1967.
8. С о л о в е й ч и к Р. Э., Ю д и н М. И. Метод практического вычисления градиентов. Труды ГГО, вып. 31, 1940.
9. Ю д и н М. И. Некоторые закономерности структуры геопотенциала. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
10. C r u t c h e r H. L. Upper Wind statistics charts of the Northern Hemisphere. Vol 1, 2. Issued by the office of the chief of Naval operations, 1959.

Р. Л. КАГАН, К. М. ЛУГИНА

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА АНОМАЛИЙ АЭРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ НАД СЕВЕРОАМЕРИКАНСКИМ КОНТИНЕНТОМ

1. Для целей объективного анализа аномалий аэрологических полей необходимо накопление данных об их статистической структуре. До недавнего времени таких данных было мало ввиду трудности выполнения соответствующих расчетов вручную. В настоящее время при наличии ЭВМ появилась возможность расчета таких характеристик.

В качестве исходных нами были использованы данные о средних месячных значениях геопотенциала и температуры на изобарической поверхности 500 мб за 10 лет с 1956 по 1965 гг., опубликованные в ежегодниках Бюро погоды США [11]. Всего было отобрано 48 аэрологических станций, расположенных на территории США и Канады. Схема расположения станций приведена на рис. 1. Список станций, их координаты и высоты даны в приложении 1. По этим данным для обоих элементов для каждого месяца в отдельности были вычислены средние значения и средние квадратические отклонения для каждой станции, а также пространственные автокорреляционные функции до расстояний порядка 6000 км. Расчеты выполнялись на ЭВМ «Урал-4» по программе, любезно предоставленной нам Б. М. Ильиным.

В табл. 1 и 2 приложения 2 приводятся средние для выбранного периода значения геопотенциала  $\bar{H}$  и температуры  $\bar{T}$ , соответственно. В табл. 3 и 4 приводятся значения средних квадратических отклонений  $\sigma_H$  и  $\sigma_T$ . Анализ этих характеристик показывает, что в пределах рассматриваемой территории они меняются сравнительно плавно, без резких скачков.

В качестве примера на рис. 2 приведены средние для зимнего сезона поля  $\bar{H}$  и  $\sigma_H$ . Следует отметить, что анализ полей изменчивости является хорошим вспомогательным средством для выявления ошибок в исходных данных. В некоторых случаях опубликованные в [11] данные содержали ошибки, которые резко искажали поле  $\sigma$ . Наличие таких искажений служило признаком необходимости пересчета средних месячных величин по ежедневным данным.

Как видно из табл. 3, 4 приложения 2, изменчивость средних месячных значений аэрологических полей имеет четко выраженный годовой ход с минимумом в летние и максимумом в зимние месяцы.

Располагая значениями средних квадратических отклонений  $\sigma$ , можно оценить точность полученных средних величин. Для этого можно использовать формулу

$$\sigma_{\bar{f}} = \frac{\sigma_f}{\sqrt{n}}, \quad (1)$$

где  $\sigma_f$  — среднее квадратическое отклонение средних месячных значений величины  $f$ ,  $n$  — число лет, использованное для получения среднего многолетнего значения,  $\sigma_{\bar{f}}$  — среднее квадратическое отклонение средних за  $n$  лет от средней, вычисленной за очень длинный период (нормы).

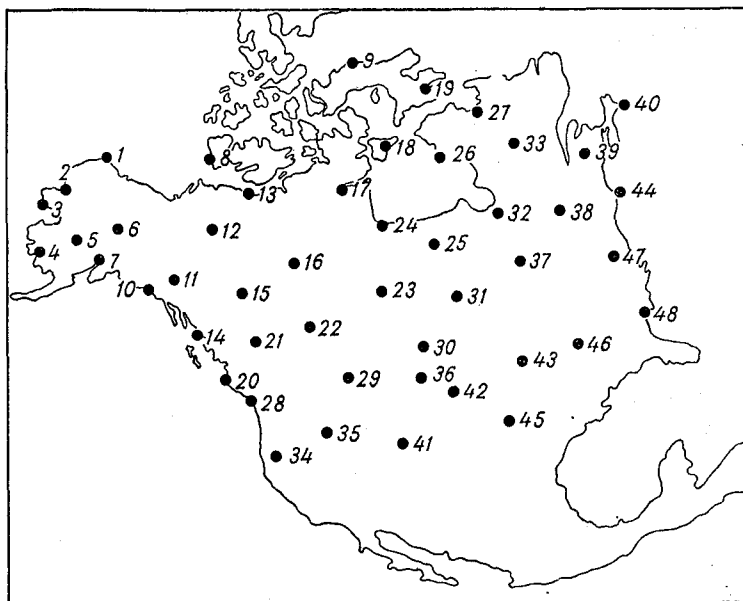


Рис. 1. Расположение станций, данные которых использовались при расчетах.

В нашем случае  $n=10$ , так что

$$\sigma_{\bar{f}} \approx \frac{1}{3} \sigma_f. \quad (2)$$

Таким образом, полученные нами средние величины могут существенно отличаться от нормальных; отличие может быть различным для разных станций и месяцев, но в среднем превышает 1 дкм для геопотенциала и  $0,5^\circ$  для температуры.

Иногда рекомендуется при оценке точности средних месячных величин по формуле (1) подставлять в качестве  $\sigma_f$  средние квадратические отклонения для срочных измерений, а в качестве  $n$  — число таких измерений, использованных при получении средней многолетней. К сожалению, такой способ оценки является неточным, вследствие неучета фактически имеющейся связности рядов срочных измерений. Дело в том, что формула (1) справедлива лишь для несвязных рядов, какими в первом приближении являются ряды средних месячных значений, интервал между которыми составляет 1 год. В результате используемые обычно оценки погрешности средних многолетних являются сильно заниженными.

Правильность оценок типа (1) и (2) можно проиллюстрировать, если сопоставить теоретически возможные разности между средними многолетними по двум разным периодам с фактическими.

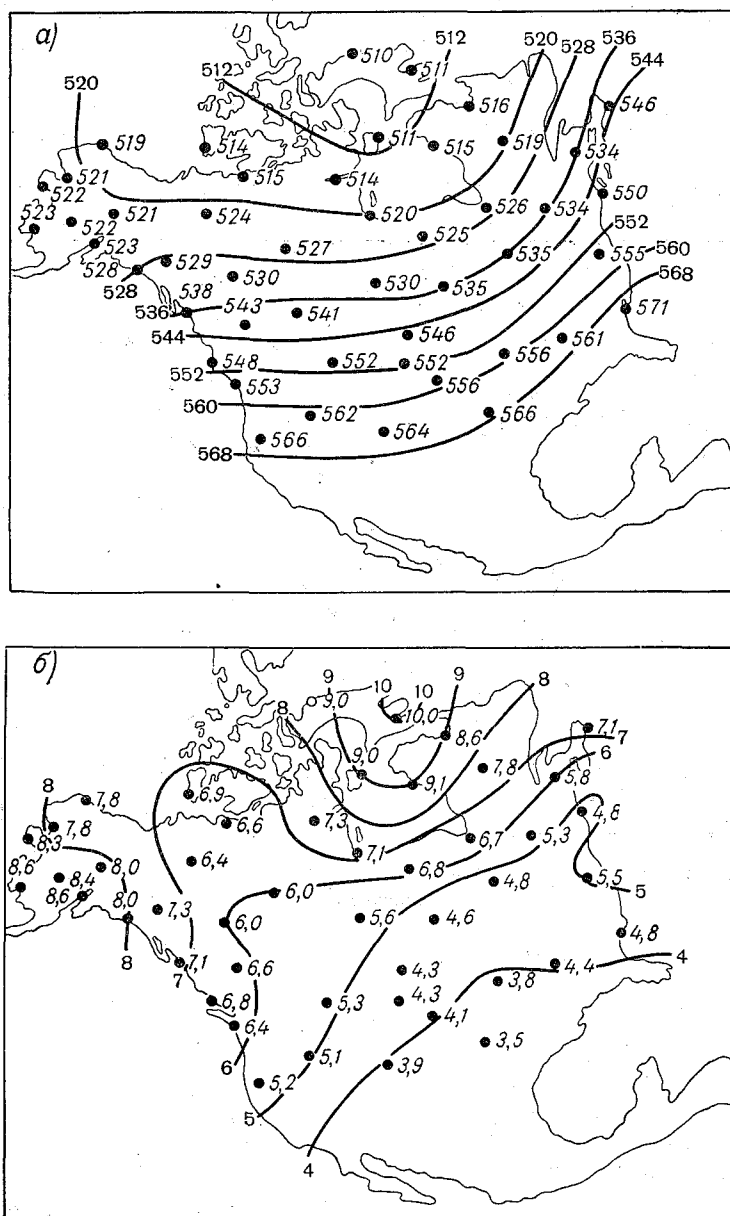


Рис. 2. Поля аномалий геопотенциала  $\bar{H}$  (а) и средних квадратических отклонений  $\sigma_n$  (б) для зимы.

Оценим, например, возможные различия между полученными нами средними за 10 лет (1956—1965 гг.) и использованными в [10] средними за 7 лет (1950—1956 гг.). В этих периодах общим является лишь один год (фактически лишь полгода, так как в [10] использовались данные лишь за первую половину 1956 г.). Будем для простоты считать, что

периоды осреднения не перекрываются. Тогда для разности  $\Delta$  средних многолетних по периодам  $n_1$  и  $n_2$  лет получаем

$$\sigma_{\Delta} = \sigma_f \sqrt{\frac{n_1 + n_2}{n_1 n_2}}. \quad (8)$$

В нашем случае  $n_1=7$ ,  $n_2=10$ , тогда

$$\sigma_{\Delta} \approx 0,5\sigma_f. \quad (4)$$

В табл. 1 производится сравнение фактических средних многолетних значений геопотенциала и температуры для нескольких отобранных наудачу станций. Для этих станций разности средних многолетних значений геопотенциала варьируют от  $-6$  до  $+8$  дкм при средней квадратической разности 2,9 дкм. Аналогичные разности для температуры варьируют от  $-2,1$  до  $1,5^\circ$  при средней квадратической разности  $0,9^\circ$ .

Учитывая, что осредненные по всем 12 месяцам и по всем четырем станциям средние квадратические отклонения  $\sigma_H=4,4$  дкм и  $\sigma_T=1,6^\circ$ , приходим к выводу что априорная оценка (4) хорошо согласуется с фактическими различиями.

Нетрудно получить априорные оценки различий между средними многолетними и в случае перекрывающихся рядов. Например, если первый ряд в  $n$  лет является началом более длинного ряда в  $N$  лет, получаем

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_i = \frac{N-n}{Nn} \sum_{i=1}^n f_i - \frac{1}{N} \sum_{i=n+1}^N f_i. \quad (5)$$

После возведения в квадрат и осреднения имеем

$$\sigma_{\Delta}^2 = \frac{\sigma_f^2}{N} \cdot \frac{N-n}{n}. \quad (6)$$

Если, например, положить  $n=7$ ,  $N=14$ , подобно тому, как это делается в работе [10], получаем

$$\sigma_{\Delta} \approx 0,27\sigma_f. \quad (6')$$

Напомним, что  $\sigma_f$  — среднее квадратическое отклонение не срочных, а осредненных за месяц значений.

Представляет также интерес оценить, какова точность каждого из этих средних месячных значений. Как уже упоминалось, непосредственное использование формулы (1) оказывается невозможным из-за связности данных наблюдений, выполненных в сравнительно близкие сроки. Точная оценка требовала бы специального исследования временной структуры полей геопотенциала и температуры, которое нами не производилось. Можно, однако, воспользовавшись нашими данными, произвести некоторые приближенные оценки.

Будем считать, что затухание корреляции между значениями геопотенциала и температуры в одной точке с возрастанием интервала времени  $\tau$  между измерениями происходит по экспоненциальному закону,

$$r(\tau) = e^{-\alpha\tau}. \quad (7)$$

Тогда, как показано Л. С. Гандиным и Р. Л. Каганом [4] (см. также А. С. Марченко [7]), дисперсия средней арифметической из  $N$  наблюдений  $\bar{f}$ , выполненных через равные интервалы времени, связана с дисперсией отдельных измерений  $\sigma_{f_1}^2$  формулой

$$\sigma_{\bar{f}}^2 = \frac{\sigma_{f_1}^2}{N} \cdot \frac{1+q}{1-q}, \quad (8)$$

Разности между средними многолетними величинами, вычисленными за разные периоды

| Станция | Период, годы | Месяц |    |     |    |   |    |     |      |    |   |    |     |
|---------|--------------|-------|----|-----|----|---|----|-----|------|----|---|----|-----|
|         |              | I     | II | III | IV | V | VI | VII | VIII | IX | X | XI | XII |

|            |                       |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |           |
|------------|-----------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Барроу     | 1956-65               | 523       | 520       | 520       | 526       | 541       | 551       | 554       | 550       | 540       | 523       | 520       | 519       |
|            | 1950-56<br>$\Delta H$ | 519<br>4  | 512<br>8  | 521<br>-1 | 528<br>-2 | 540<br>1  | 548<br>3  | 557<br>-3 | 550<br>0  | 540<br>0  | 527<br>-4 | 522<br>-2 | 512<br>7  |
| Черчилл    | 1956-65               | 514       | 515       | 525       | 535       | 545       | 555       | 562       | 558       | 547       | 541       | 526       | 520       |
|            | 1950-56<br>$\Delta H$ | 516<br>-2 | 518<br>-3 | 522<br>3  | 537<br>-2 | 546<br>-1 | 558<br>-3 | 562<br>0  | 560<br>-2 | 552<br>-5 | 540<br>1  | 531<br>-5 | 521<br>-1 |
| Рapid-Сити | 1956-65               | 549       | 547       | 548       | 557       | 568       | 576       | 584       | 583       | 575       | 570       | 557       | 552       |
|            | 1950-56<br>$\Delta H$ | 548<br>1  | 550<br>-3 | 548<br>0  | 557<br>0  | 567<br>1  | 576<br>0  | 586<br>-2 | 584<br>-1 | 578<br>-3 | 571<br>-1 | 558<br>-1 | 551<br>-1 |
| Вашингтон  | 1956-65               | 551       | 551       | 552       | 562       | 574       | 580       | 583       | 584       | 583       | 572       | 564       | 555       |
|            | 1950-56<br>$\Delta H$ | 557<br>-6 | 555<br>-4 | 555<br>-3 | 561<br>1  | 573<br>1  | 582<br>-2 | 588<br>-5 | 586<br>-2 | 583<br>0  | 576<br>-4 | 563<br>1  | 555<br>0  |

|                   |                       |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
|-------------------|-----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Геопотенциал, дкм |                       |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| Барроу            | 1956-65               | 35,5         | 36,9         | 37,2         | 34,1         | 28,5         | 23,5         | 21,0         | 22,2         | 27,5         | 33,1         | 35,8         | 36,9         |
|                   | 1950-56<br>$\Delta T$ | 36,4<br>0,9  | 38,8<br>1,3  | 36,4<br>-0,8 | 33,3<br>-0,8 | 28,6<br>0,1  | 23,5<br>0    | 19,0<br>-2,0 | 20,6<br>-1,6 | 27,3<br>-0,2 | 31,9<br>-1,2 | 35,3<br>-0,5 | 38,4<br>1,5  |
| Черчилл           | 1956-65               | 36,8         | 37,0         | 34,7         | 30,5         | 25,9         | 20,9         | 17,4         | 18,8         | 23,3         | 25,9         | 32,3         | 35,1         |
|                   | 1950-56<br>$\Delta T$ | 37,2<br>0,4  | 36,6<br>-0,4 | 35,4<br>0,7  | 29,5<br>-1,0 | 25,3<br>-0,6 | 18,8<br>-2,1 | 17,1<br>-0,3 | 18,6<br>-0,2 | 22,1<br>-1,2 | 26,1<br>0,2  | 30,5<br>-1,8 | 34,2<br>-0,9 |
| Рapid-Сити        | 1956-65               | 26,0         | 26,2         | 26,2         | 21,9         | 16,7         | 12,4         | 10,3         | 10,4         | 13,6         | 15,7         | 21,4         | 24,1         |
|                   | 1950-56<br>$\Delta T$ | 25,6<br>-0,4 | 25,4<br>-0,8 | 25,8<br>-0,4 | 21,4<br>-0,5 | 16,8<br>0,1  | 12,2<br>-0,2 | 9,0<br>-1,3  | 9,8<br>-0,6  | 12,9<br>-0,7 | 15,8<br>0,1  | 21,6<br>-0,2 | 24,2<br>0,1  |
| Вашингтон         | 1956-65               | 22,9         | 22,3         | 22,9         | 19,1         | 14,3         | 10,6         | 9,2          | 8,9          | 10,0         | 14,6         | 17,6         | 21,5         |
|                   | 1950-56<br>$\Delta T$ | 21,1<br>-1,8 | 21,8<br>-0,5 | 21,6<br>-1,3 | 19,1<br>0    | 14,4<br>0,1  | 10,6<br>0    | 8,2<br>-1,0  | 8,3<br>-0,6  | 9,8<br>-0,2  | 13,8<br>-0,8 | 18,2<br>0,6  | 21,5<br>0    |

|                    |                       |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
|--------------------|-----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| Температура, град. |                       |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |
| Барроу             | 1956-65               | 35,5         | 36,9         | 37,2         | 34,1         | 28,5         | 23,5         | 21,0         | 22,2         | 27,5         | 33,1         | 35,8         | 36,9         |
|                    | 1950-56<br>$\Delta T$ | 36,4<br>0,9  | 38,8<br>1,3  | 36,4<br>-0,8 | 33,3<br>-0,8 | 28,6<br>0,1  | 23,5<br>0    | 19,0<br>-2,0 | 20,6<br>-1,6 | 27,3<br>-0,2 | 31,9<br>-1,2 | 35,3<br>-0,5 | 38,4<br>1,5  |
| Черчилл            | 1956-65               | 36,8         | 37,0         | 34,7         | 30,5         | 25,9         | 20,9         | 17,4         | 18,8         | 23,3         | 25,9         | 32,3         | 35,1         |
|                    | 1950-56<br>$\Delta T$ | 37,2<br>0,4  | 36,6<br>-0,4 | 35,4<br>0,7  | 29,5<br>-1,0 | 25,3<br>-0,6 | 18,8<br>-2,1 | 17,1<br>-0,3 | 18,6<br>-0,2 | 22,1<br>-1,2 | 26,1<br>0,2  | 30,5<br>-1,8 | 34,2<br>-0,9 |
| Рapid-Сити         | 1956-65               | 26,0         | 26,2         | 26,2         | 21,9         | 16,7         | 12,4         | 10,3         | 10,4         | 13,6         | 15,7         | 21,4         | 24,1         |
|                    | 1950-56<br>$\Delta T$ | 25,6<br>-0,4 | 25,4<br>-0,8 | 25,8<br>-0,4 | 21,4<br>-0,5 | 16,8<br>0,1  | 12,2<br>-0,2 | 9,0<br>-1,3  | 9,8<br>-0,6  | 12,9<br>-0,7 | 15,8<br>0,1  | 21,6<br>-0,2 | 24,2<br>0,1  |
| Вашингтон          | 1956-65               | 22,9         | 22,3         | 22,9         | 19,1         | 14,3         | 10,6         | 9,2          | 8,9          | 10,0         | 14,6         | 17,6         | 21,5         |
|                    | 1950-56<br>$\Delta T$ | 21,1<br>-1,8 | 21,8<br>-0,5 | 21,6<br>-1,3 | 19,1<br>0    | 14,4<br>0,1  | 10,6<br>0    | 8,2<br>-1,0  | 8,3<br>-0,6  | 9,8<br>-0,2  | 13,8<br>-0,8 | 18,2<br>0,6  | 21,5<br>0    |

где  $q=e^{-\alpha\Delta\tau}$  — коэффициент корреляции между соседними членами ряда, отстоящими друг от друга на период времени  $\Delta\tau$ .

Из (8) получаем также

$$q = \frac{N \frac{\sigma_{f_1}^2}{\sigma_f^2} - 1}{N \frac{\sigma_{f_1}^2}{\sigma_f^2} + 1}. \quad (9)$$

Оценим значения  $q$  для зимнего сезона.

Среднее значение дисперсии геопотенциала для этого сезона составляет у нас 42 дкм<sup>2</sup>. Данными о дисперсии геопотенциала значений за отдельные сроки мы для выбранного географического района не располагаем. Воспользуемся полученным для Европы Л. С. Гандиным и Е. И. Багровой [3] значением дисперсии для зимнего сезона  $\sigma_f^2=200$  дкм<sup>2</sup>. Тогда, полагая, что средние месячные получены осреднением двухразовых наблюдений, имеем  $N=60$  ( $\Delta\tau=0,5$  суток) и  $q = \frac{11}{13} \approx 0,85$ . Отсюда получаем

$$\alpha = -\frac{\ln q}{\Delta\tau} \approx 0,34.$$

При одном наблюдении в сутки, когда  $\Delta\tau=1$  и  $N=30$ , можно получить

$$q = \frac{5}{7} \approx 0,71, \quad \alpha \approx 0,33.$$

Таким образом, для скорости затухания корреляционной функции получаем оценку, практически не зависящую от числа сроков аэрологических наблюдений.

В табл. 2 представлены полученные путем подстановки  $\alpha=0,33$  в формулу (7) значения временной корреляционной функции.

Таблица 2

| Временная корреляционная функция срочных значений геопотенциала |      |      |      |      |      |
|-----------------------------------------------------------------|------|------|------|------|------|
| $\tau$ , сутки . . . . .                                        | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    |
| $r(\tau)$ . . . . .                                             | 0,72 | 0,51 | 0,37 | 0,29 | 0,18 |
| $r_1(\tau)$ . . . . .                                           | 0,78 | 0,51 | 0,30 | 0,20 | 0,09 |

В этой же таблице для сравнения приведены обозначенные  $r_1(\tau)$  фактические значения временной корреляционной функции, полученные С. М. Олевской [8] для территории Европы. Сопоставление их показывает удовлетворительное согласие до интервалов времени порядка 3 суток.

В работе [6] показано, что точность, с которой средняя арифметическая из  $N$  равноотстоящих отсчетов характеризует среднюю по периоду  $T$ , в случае экспоненциальной корреляционной функции (7) может быть оценена по формуле

$$\sigma_{f_2}^2 = \frac{\sigma_f^2}{6} \alpha T \frac{1}{N^2}. \quad (10)$$

Подставляя сюда  $\alpha=0,33$  и  $T=30$ , получаем

$$\sigma_{f_2} = 1,3 \frac{\sigma_f}{N}. \quad (11)$$

В случае одноразовых наблюдений имеем

$$\sigma_{H_2} = 0,043 \quad \sigma_H \approx 0,043 \cdot \sqrt{200} = 0,6 \text{ дкм.}$$

В случае двухразовых наблюдений средняя квадратическая ошибка определения средней месячной величины геопотенциала изобарической поверхности 500 мб может для зимнего сезона ориентировочно оцениваться в 0,3 дкм.

Среднее значение дисперсии температуры для зимнего сезона составляет у нас около 4,8 град<sup>2</sup>. Для срочных значений температуры в зимний период примерно по той же территории В. П. Болтенковым [1] получено значение  $\sigma_{t_1} = 23$ . Подстановка этих значений в формулу (9) дает приближенно те же значения для  $q$ , что и для геопотенциала. Это означает, что для оценки точности средних месячных значений температуры можно также воспользоваться формулой (11). В результате получаем для одноразовых наблюдений.

$$\sigma_{T_2} = 0,043 \cdot \sqrt{23} = 0,2^\circ.$$

В случае двухразовых наблюдений средняя квадратическая ошибка определения средней месячной температуры на изобарической поверхности 500 мб может для зимнего сезона ориентировочно оцениваться в 0,1°. Для других сезонов вследствие меньшей изменчивости исследуемых элементов можно ожидать еще большей точности средних месячных значений.

Приведенные оценки характеризуют влияние на точность средних месячных данных естественной временной изменчивости исследуемых величин. Наряду с этим на точности их сказываются как случайные, так и систематические погрешности в данных отдельных наблюдений. Нетрудно видеть, что влияние случайных ошибок наблюдений в месячном выводе оказывается малым. Соответствующие погрешности имеют порядок 0,1 дкм для геопотенциала и порядок 0,05° для температуры.

Влияние возможных систематических погрешностей может оказаться существенным и должно оцениваться дополнительно.

2. При расчете пространственной статистической структуры нами была выбрана в качестве основной характеристики нормированная автокорреляционная функция. Выбор этот определялся неоднородностью полей дисперсий аномалий геопотенциала и температуры, которые от южной до северной части рассматриваемой территории изменяются в несколько раз. При этих условиях ненормированная корреляционная функция также не является однородной, что крайне затрудняет ее использование.

Для каждой пары станций для каждого месяца в отдельности вычислялись коэффициенты корреляции между значениями аномалий на станциях. Полученные значения коэффициентов корреляции группировались по градациям расстояния и осреднялись, причем среднее значение коэффициента корреляции относилось к середине градации.

Полученные таким образом корреляционные функции аномалий геопотенциала и температуры приводятся в приложении 3. Наряду с самими значениями корреляционных функций в таблицах указывается число индивидуальных коэффициентов корреляции  $n_i$ , использованных для получения значения корреляционной функции для данной градации.

Рассмотрение полученных корреляционных функций показывает, что для обоих элементов характерно наличие области отрицательной корреляции для расстояний от 2500 до 5000 км.

Корреляционные функции для каждого месяца в отдельности не являются статистически обеспеченными. Поэтому естественно для дальней-



шего рассмотрения производить их сезонное осреднение, поскольку для различных месяцев одного сезона различия не являются существенными. Более того, оказывается возможным разделение года на два периода — зимний (декабрь, январь февраль) и теплый (так условно назовем остальные три сезона).

В табл. 3 приводятся осредненные по этим периодам значения эмпирических корреляционных функций. Рассмотрение их показывает, что для обоих элементов в зимний период характерны более высокие значения корреляционных функций по сравнению с теплым периодом, а также переход их через нуль на больших расстояниях.

Таблица 3

Осредненные значения эмпирических корреляционных функций средних месячных значений геопотенциала и температуры

| Расстояние,<br>км | Геопотенциал |               | Температура |               |
|-------------------|--------------|---------------|-------------|---------------|
|                   | зима         | теплый период | зима        | теплый период |
| 300               | 0,95         | 0,87          | 0,86        | 0,86          |
| 500               | 0,84         | 0,78          | 0,81        | 0,73          |
| 700               | 0,83         | 0,72          | 0,80        | 0,70          |
| 900               | 0,70         | 0,58          | 0,69        | 0,56          |
| 1100              | 0,58         | 0,51          | 0,60        | 0,46          |
| 1300              | 0,51         | 0,37          | 0,50        | 0,35          |
| 1500              | 0,41         | 0,29          | 0,38        | 0,23          |
| 1700              | 0,26         | 0,14          | 0,23        | 0,13          |
| 1900              | 0,22         | 0,10          | 0,22        | 0,09          |
| 2200              | 0,07         | —0,02         | 0,06        | —0,02         |
| 2600              | —0,06        | —0,10         | —0,04       | —0,10         |
| 3000              | —0,15        | —0,13         | —0,14       | —0,11         |
| 3400              | —0,23        | —0,14         | —0,21       | —0,14         |
| 3800              | —0,30        | —0,15         | —0,28       | —0,14         |
| 4300              | —0,26        | —0,08         | —0,26       | —0,08         |
| 4900              | —0,16        | —0,07         | —0,22       | —0,05         |
| 5500              | —0,12        | —0,05         | —0,18       | 0,00          |
| 6100              | 0,05         | —0,08         | —0,09       | 0,01          |

Корреляционные функции для геопотенциала систематически больше корреляционных функций для температуры. Однако различия эти сравнительно невелики. В частности, они существенно меньше, чем различия в корреляционных функциях одного и того же элемента для разных периодов. В результате оказывается возможным аппроксимировать обе корреляционные функции для одного периода одной и той же зависимостью, различающейся лишь коэффициентом пропорциональности  $r'(0)$ . Параметр  $r'(0)$  представляет собой значение эмпирической корреляционной функции  $r'$  при малых расстояниях.

Все корреляционные функции аппроксимировались формулами вида

$$r'(p) = r'(0) \cos ap e^{-bp^2} \quad (12)$$

Значения входящих в эту формулу параметров приводятся в табл. 4. Там же приводятся средние квадратические отклонения  $\sigma$  для полей аномалий и значения меры ошибок

$$\eta = \frac{1 - r'(0)}{r'(0)}.$$

Параметры корреляционных функций осредненных величин

| Элемент      | Период           | $r'(0)$ | $a$   | $b$  | $n$  | $\eta$ | $\sigma$ |
|--------------|------------------|---------|-------|------|------|--------|----------|
| Геопотенциал | Зимний . . . . . | 0,99    | 0,655 | 0,18 | 1,39 | 0,01   | 6,5 дкм  |
|              | Теплый . . . . . | 0,98    | 0,748 | 0,33 | 1,35 | 0,02   | 4,1 дкм  |
| Температура  | Зимний . . . . . | 0,95    | 0,655 | 0,18 | 1,39 | 0,05   | 2,2°     |
|              | Теплый . . . . . | 0,92    | 0,748 | 0,33 | 1,35 | 0,09   | 1,5°     |

Обращают на себя внимание большие значения параметра  $\eta$ , который варьирует в пределах от 0,01 до 0,09, что соответствует наличию случайных погрешностей в исходных данных, которые в среднем составляют от 10 до 30% естественной изменчивости исследуемой величины. Как мы установили ранее, случайная ошибка в определении средних месячных

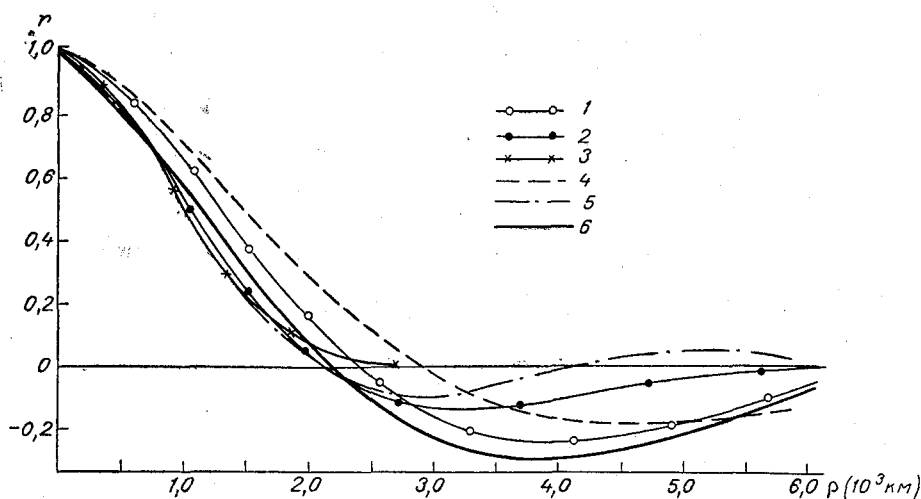


Рис. 3. Нормированные автокорреляционные функции аномалий геопотенциала для зимнего (1) и теплого (2) периодов, а также для срочных значений геопотенциала по данным работ [3] (3), [5] (4), [8] (5) и [9] (6).

значений является небольшой. Поэтому эти погрешности должны определяться главным образом физико-географическими различиями в расположении аэрологических станций. Различия в высоте станций, влияние горных хребтов, особенности формирования облачного покрова могут привести к систематическим различиям даже для сравнительно близко расположенных станций. Для каждого отдельного пункта эти различия являются систематическими, однако для достаточно большой территории они выступают, как случайные. Эти различия для зимнего периода оказываются меньшими, чем для летнего, а для температуры — большими, чем для геопотенциала. Это вполне соответствует тому, что отмечается для корреляционных функций срочных значений геопотенциала и температуры [1, 2].

Вообще сравнение корреляционных функций средних месячных значений с корреляционными функциями значений геопотенциала и температуры в отдельные сроки показывает, что различия между ними сравни-

тельно невелики. Это видно из рис. 3, на котором представлены, наряду с корреляционными функциями аномалий, корреляционные функции срочных значений геопотенциала, полученные различными авторами.

Данные Л. С. Гандина и Т. И. Кузнецовой [5], М. И. Фортус [9] и С. М. Олевской [8] относятся к зимнему периоду. Данные Л. С. Гандина и Е. И. Багровой [3] являются осредненными за весь год. При этом нужно иметь в виду, что все эти корреляционные функции относятся к террито-

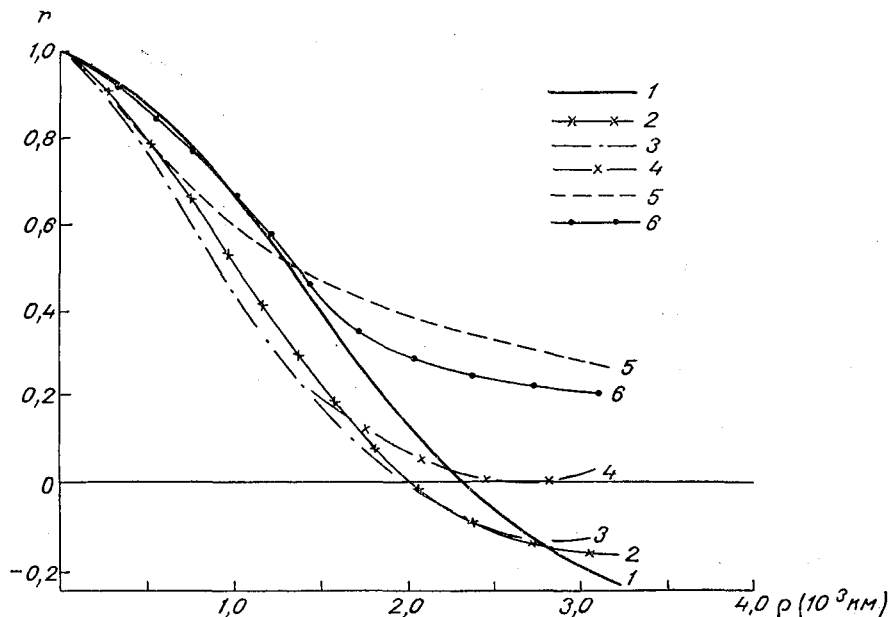


Рис. 4. Нормированные автокорреляционные функции аномалий температуры для зимнего (1) и теплого (2) периодов, а также для срочных значений температуры, по данным В. П. Болтенкова [1], для зимы (3), лета (4), весны (5) и осени (6).

рии Европы. Для удобства сравниваются не эмпирические, а теоретические корреляционные функции

$$r(\rho) = \frac{r'(\rho)}{r'(0)}.$$

Сравнение показывает, что полученные нами корреляционные функции находятся в пределах разброса полученных разными авторами корреляционных функций для срочных значений. Представляется, что это свидетельствует об отсутствии систематических различий между ними. Корреляционная функция аномалий за теплый период для расстояний до 1500 км наиболее близка к данным Гандина и Багровой [3]. Для зимнего периода наибольшее совпадение отмечается с данными Фортус [9].

На рис. 4 приведены нормированные корреляционные функции средних месячных значений и корреляционные функции срочных значений температуры, вычисленные В. П. Болтенковым [1] для того же географического района. Сравнение их показывает, что имеется удовлетворительное согласование с данными Болтенкова за зимний и летний периоды. Для переходных сезонов такое согласование отмечается лишь до расстояний 1200—1500 км. Для больших расстояний данные Болтенкова характеризуются значительно большей связью, причем корреляция остается положительной для расстояний порядка 7000 км.

Авторам представляется, что полученное для переходных сезонов расхождение может быть объяснено завышением корреляционных функций срочных значений за счет влияния годового хода. Действительно, при расчетах в [1] осреднение велось в пределах целого сезона. При этом в качестве нормы использовались не различные значения температуры для разных периодов сезона, а одна величина — средняя арифметическая по всему массиву данных. Такая методика расчета неизбежно должна вызывать наличие ложной корреляции. Попытаемся оценить количественно хотя бы порядок вклада, который может давать эта ложная корреляция.

Ограничиваясь для простоты рассмотрением первой гармоники годового хода и полагая, что фазы годового хода на различных станциях совпадают, мы можем воспользоваться выведенной Гандиным [2] формулой

$$R' = R + \frac{A^2}{2} \left\{ 1 + \frac{\sin\left(\frac{t_2}{12\pi}\right) - \sin\left(\frac{t_1}{12\pi}\right)}{\frac{t_2 - t_1}{12\pi}} - \frac{2 \left[ \sin\left(\frac{t_2}{24\pi}\right) - \sin\left(\frac{t_1}{24\pi}\right) \right]^2}{\left(\frac{t_2 - t_1}{24\pi}\right)^2} \right\}, \quad (13)$$

где  $A$  — амплитуда годового хода (здесь амплитуда понимается не в метеорологическом, а в физическом смысле),  $R$  — истинное значение корреляционной функции (ненормированной),  $R'$  — расчетное значение корреляционной функции  $t_1$  и  $t_2$  — начало и конец периода, данные которого используются при расчете корреляционной функции. Они отсчитываются в месяцах от момента, соответствующего максимуму (условно будем относить его к 15/VII).

Для периода  $T$  месяцев, симметрично расположенного около максимума или минимума или около моментов перехода через среднее значение (за эти моменты условно принимаем 15/IV и 15/IX), получаем

$$R'(\rho) = R(\rho) + A^2 K(T). \quad (14)$$

Значения  $K(T)$  для некоторых периодов приводятся в табл. 5.

Таблица 5  
Мера завышения  $K$  корреляции под влиянием годового хода

| $T$ мес.               | 1         | 2                 | 3    | 6    |
|------------------------|-----------|-------------------|------|------|
| Летний и зимний сезоны | $10^{-4}$ | $2 \cdot 10^{-3}$ | 0,01 | 0,10 |
| Переходные сезоны . .  | 0,02      | 0,09              | 0,18 | 0,50 |

Обозначая  $b = \frac{A^2}{\sigma^2} K(T)$ , имеем оценки для расчетных значений дисперсии и нормированной корреляционной функции:

$$\sigma'^2 = \sigma^2 (1 + b), \quad (15)$$

$$r'(\rho) = \frac{r(\rho) + b}{1 + b}. \quad (16)$$

Для амплитуды годового хода температуры на поверхности 500 мб трудно получить среднее значение  $A = \frac{T_{VII} - T_I}{2} \approx 7^\circ$ .

Воспользовавшись данными [1] и табл. 5, получаем оценки величины  $b$  (табл. 6).

Таблица 6

Значения параметра  $b$  для различных сезонов  
в зависимости от периода осреднения

| Сезон           | T мес.            |                   |      |
|-----------------|-------------------|-------------------|------|
|                 | 1                 | 2                 | 3    |
| Зима . . . . .  | $2 \cdot 10^{-4}$ | $4 \cdot 10^{-3}$ | 0,02 |
| Лето . . . . .  | $8 \cdot 10^{-4}$ | 0,02              | 0,08 |
| Весна . . . . . | 0,06              | 0,26              | 0,54 |
| Осень . . . . . | 0,04              | 0,20              | 0,40 |

Таким образом, при использовании данных за целый сезон завышение дисперсии для зимнего и летнего сезонов не превышает 10%. Сравнительно невелико и завышение корреляционных функций.

Для переходных сезонов дисперсия температуры оказывается завышенной примерно на 50%. Этим и объясняется, что максимальные значения дисперсии отмечались в [1] не зимой, а весной и осенью. Корреляционные функции, полученные в результате такого расчета, также окажутся завышенными, особенно для больших расстояний. Так, для расстояний, при которых фактический коэффициент корреляции  $r(\rho)$  обращается в нуль, получаем  $r'(\rho) = 0,35$  для весеннего сезона и  $r'(\rho) = 0,28$  для осеннего. Если исходить из этих оценок, то окажется, что фактическая корреляционная функция значений температуры за отдельные сроки для весны и осени также переходит через нуль при расстояниях порядка 2000—2500 км.

Таким образом, корреляционные функции средних месячных значений геопотенциала и температуры для изобарической поверхности 500 мб практически не отличаются от корреляционных функций значений этих элементов за отдельные сроки. Это позволяет использовать при объективном анализе карт аномалий почти без изменений программы, разработанные для объективного анализа данных за отдельные сроки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болтенков В. П. Исследование статистической макроструктуры температуры воздуха. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
2. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеиздат, Л., 1963.
3. Гандин Л. С., Багрова Е. И. О структуре поля высот поверхности 500 мб. Труды ГГО, вып. 99, 1959.
4. Гандин Л. С., Каган Р. Л. О точности определения средней высоты снежного покрова по дискретным данным. Труды ГГО, вып. 130, 1962.
5. Гандин Л. С., Кузнецова Т. И. О структуре полей давления и ветра в средней тропосфере при разных формах циркуляции. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
6. Каган Р. Л. О точности определения средней по площади по данным точечных измерений. Труды ГГО, вып. 175, 1965.
7. Марченко А. С. Устойчивость оценок математического ожидания и дисперсии для связанных метеорологических рядов. Изв. АН СССР, Физика атмосф. и океана, т. 1, № 9, 1965.
8. Олевская С. М. Пространственно-временная структура поля геопотенциала  $H_{500}$ . Изв. АН СССР, Физика атмосф. и океана, т. 2, № 12, 1966.
9. Фортус М. И. Трехмерная пространственная структура поля геопотенциала. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
10. Ханевская И. В., Пашкова З. Д. Сравнительные характеристики полей средней температуры в свободной атмосфере за семилетний и четырнадцатилетний периоды. Труды НИИАК, вып. 35, 1966.
11. Monthly climatic data for the world U. S. Weather Bureau., vol. 9—18, 1956—1965.

## Список станций, использованных для расчета корреляционной функции

| № станции | Станция                     | Координаты   |               | Высота над уровнем моря, м |
|-----------|-----------------------------|--------------|---------------|----------------------------|
|           |                             | широта       | долгота       |                            |
| 1         | Барроу . . . . .            | 71°18' с. ш. | 156°47' з. д. | 4                          |
| 2         | Коцебу . . . . .            | 66 52        | 162 38        | 5                          |
| 3         | Ном . . . . .               | 64 30        | 165 26        | 7                          |
| 4         | Бетел . . . . .             | 60 47        | 161 48        | 46                         |
| 5         | Мак-Грат . . . . .          | 62 58        | 155 37        | 103                        |
| 6         | Фэрбенкс . . . . .          | 64 49        | 147 52        | 138                        |
| 7         | Анкоридж . . . . .          | 61 10        | 149 59        | 40                         |
| 8         | Сакс-Харбор . . . . .       | 71 57        | 124 44        | 84                         |
| 9         | Клайд . . . . .             | 70 27        | 68 33         | 0                          |
| 10        | Якутат . . . . .            | 59 31        | 139 40        | 9                          |
| 11        | Уайтхорс . . . . .          | 60 43        | 135 04        | 698                        |
| 12        | Норман-Уэлс . . . . .       | 65 17        | 126 48        | 64                         |
| 13        | Коппермайн . . . . .        | 67 49        | 115 15        | 9                          |
| 14        | Аннет, остров . . . . .     | 55 02        | 131 34        | 34                         |
| 15        | Форт-Нельсон . . . . .      | 58 50        | 122 35        | 375                        |
| 16        | Форт-Смит . . . . .         | 60 01        | 111 58        | 203                        |
| 17        | Бэкер-Лейк . . . . .        | 64 18        | 96 00         | 9                          |
| 18        | Корал-Харбор . . . . .      | 64 12        | 83 22         | 59                         |
| 19        | Фробишер . . . . .          | 63 45        | 68 33         | 21                         |
| 20        | Порт-Харди . . . . .        | 50 41        | 127 22        | 23                         |
| 21        | Принс-Джордж . . . . .      | 53 53        | 122 41        | 676                        |
| 22        | Эдмонтон . . . . .          | 53 34        | 113 31        | 676                        |
| 23        | Те-Пас . . . . .            | 53 58        | 101 06        | 272                        |
| 24        | Черчилл . . . . .           | 58 45        | 94 04         | 35                         |
| 25        | Траут-Лейк . . . . .        | 53 50        | 89 52         | 219                        |
| 26        | Форт-Гаррисон . . . . .     | 58 27        | 78 08         | 20                         |
| 27        | Форт-Чимо . . . . .         | 68 26        | 58 06         | 36                         |
| 28        | Татуш, остров . . . . .     | 48 23        | 124 44        | 26                         |
| 29        | Грейт-Фолс . . . . .        | 47 30        | 111 21        | 1115                       |
| 30        | Бисмарк . . . . .           | 46 46        | 100 45        | 506                        |
| 31        | Интернашенал-Фолс . . . . . | 48 34        | 93 23         | 361                        |
| 32        | Мусони . . . . .            | 51 16        | 80 39         | 10                         |
| 33        | Нитчекуон . . . . .         | 53 12        | 70 54         | 539                        |
| 34        | Медфорт . . . . .           | 42 22        | 122 52        | 405                        |
| 35        | Бойси . . . . .             | 43 34        | 116 13        | 871                        |
| 36        | Рапид-Сити . . . . .        | 44 03        | 103 04        | 966                        |
| 37        | Со-Сент-Мари . . . . .      | 46 28        | 84 22         | 221                        |
| 38        | Манивоки . . . . .          | 46 22        | 75 59         | 170                        |
| 39        | Карибу . . . . .            | 46 52        | 68 01         | 191                        |
| 40        | Сейбл, остров . . . . .     | 43 56        | 60 02         | 9                          |
| 41        | Гранд-Джанкшен . . . . .    | 39 07        | 108 32        | 1475                       |
| 42        | Норт-Платт . . . . .        | 41 08        | 100 41        | 849                        |
| 43        | Колумбия . . . . .          | 38 58        | 92 22         | 239                        |
| 44        | Нантакет . . . . .          | 41 15        | 70 04         | 4                          |
| 45        | Оклахома . . . . .          | 35 24        | 97 36         | 397                        |
| 46        | Нашвилл . . . . .           | 36 07        | 86 41         | 184                        |
| 47        | Вашингтон . . . . .         | 38 51        | 77 02         | 20                         |
| 48        | Чарлстон . . . . .          | 32 54        | 80 02         | 15                         |

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Таблица 1

Средние значения геопотенциала изобарической поверхности 500 мб (дкм) за период 1956—1965 гг.

| № стан-<br>ции | I     | II    | III   | IV    | V     | VI    | VII   | VIII  | IX    | X     | XI    | XII   | Зима  | Весна | Лето  | Осень |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1              | 523,2 | 519,6 | 519,8 | 526,0 | 540,8 | 551,0 | 554,0 | 550,3 | 539,9 | 523,2 | 520,2 | 519,1 | 520,6 | 528,9 | 551,8 | 527,8 |
| 2              | 526,8 | 522,7 | 523,0 | 528,0 | 541,6 | 552,3 | 558,5 | 553,0 | 541,8 | 526,8 | 521,3 | 521,1 | 523,5 | 530,9 | 554,6 | 530,0 |
| 3              | 527,5 | 524,2 | 524,4 | 529,3 | 541,8 | 552,2 | 560,2 | 553,9 | 543,2 | 528,2 | 521,8 | 522,2 | 524,6 | 531,8 | 555,4 | 531,1 |
| 4              | 529,4 | 526,1 | 526,4 | 531,9 | 541,8 | 552,7 | 561,0 | 556,4 | 546,5 | 530,5 | 523,0 | 523,1 | 526,2 | 533,4 | 556,7 | 533,3 |
| 5              | 529,4 | 526,1 | 526,4 | 531,9 | 541,8 | 552,7 | 561,0 | 556,4 | 546,5 | 530,5 | 523,0 | 523,1 | 526,2 | 533,4 | 556,7 | 533,3 |
| 6              | 529,0 | 525,3 | 525,5 | 532,5 | 544,1 | 554,3 | 561,2 | 557,0 | 546,6 | 530,7 | 524,2 | 522,3 | 525,6 | 534,2 | 557,5 | 533,8 |
| 7              | 530,7 | 527,9 | 527,5 | 534,2 | 545,1 | 555,4 | 561,4 | 557,8 | 547,2 | 531,5 | 524,3 | 521,2 | 525,2 | 534,4 | 558,2 | 534,3 |
| 8              | 515,3 | 511,2 | 515,9 | 523,8 | 538,6 | 551,8 | 561,7 | 559,1 | 549,8 | 532,6 | 526,0 | 523,4 | 527,3 | 535,6 | 558,4 | 536,1 |
| 9              | 506,2 | 507,8 | 511,2 | 522,8 | 533,2 | 544,0 | 551,5 | 547,9 | 533,5 | 521,4 | 514,8 | 510,5 | 508,2 | 522,4 | 547,8 | 527,2 |
| 10             | 534,6 | 532,5 | 531,7 | 538,0 | 548,1 | 556,0 | 563,9 | 562,7 | 554,8 | 537,8 | 531,4 | 528,6 | 531,3 | 538,9 | 560,8 | 541,3 |
| 11             | 533,8 | 531,5 | 530,3 | 538,2 | 548,1 | 557,0 | 564,6 | 562,7 | 554,3 | 536,7 | 530,8 | 528,6 | 531,3 | 538,9 | 561,4 | 540,6 |
| 12             | 524,5 | 523,0 | 525,8 | 534,4 | 546,6 | 557,2 | 563,9 | 561,4 | 549,0 | 535,8 | 527,6 | 524,0 | 523,8 | 535,6 | 560,8 | 537,5 |
| 13             | 515,1 | 512,4 | 518,4 | 529,0 | 540,6 | 553,4 | 556,7 | 555,3 | 542,2 | 530,2 | 517,5 | 515,2 | 514,2 | 529,3 | 555,1 | 530,0 |
| 14             | 540,1 | 540,0 | 538,3 | 544,1 | 553,1 | 559,7 | 567,1 | 565,4 | 556,2 | 545,5 | 535,8 | 532,2 | 532,1 | 542,2 | 564,7 | 550,4 |
| 15             | 532,3 | 531,7 | 533,1 | 541,1 | 552,3 | 559,7 | 567,9 | 567,4 | 562,2 | 547,7 | 541,3 | 538,5 | 539,5 | 545,2 | 564,1 | 545,8 |
| 16             | 524,8 | 523,2 | 528,0 | 537,7 | 549,2 | 558,1 | 564,9 | 562,2 | 551,1 | 542,4 | 530,3 | 526,9 | 525,0 | 538,3 | 561,7 | 541,3 |
| 17             | 509,0 | 519,4 | 518,0 | 528,4 | 538,6 | 550,4 | 557,8 | 549,5 | 539,8 | 529,5 | 519,3 | 513,9 | 511,1 | 528,3 | 554,0 | 531,0 |
| 18             | 505,9 | 505,9 | 516,7 | 526,7 | 534,7 | 544,5 | 553,9 | 547,7 | 536,5 | 525,2 | 518,1 | 511,1 | 509,0 | 526,5 | 550,3 | 529,1 |
| 19             | 506,8 | 509,0 | 516,7 | 526,7 | 534,7 | 544,5 | 553,9 | 547,7 | 536,5 | 525,2 | 518,1 | 511,1 | 509,0 | 526,5 | 550,3 | 529,1 |
| 20             | 557,0 | 545,8 | 544,0 | 550,1 | 556,1 | 563,6 | 572,5 | 571,5 | 568,5 | 557,7 | 551,2 | 548,3 | 550,4 | 560,1 | 548,7 | 530,8 |
| 21             | 541,5 | 540,1 | 540,4 | 547,3 | 556,4 | 562,5 | 570,0 | 569,1 | 563,5 | 554,5 | 545,6 | 542,9 | 541,5 | 548,0 | 567,2 | 559,1 |
| 22             | 537,9 | 537,2 | 538,9 | 547,2 | 557,4 | 564,0 | 571,5 | 569,9 | 561,8 | 560,0 | 544,1 | 540,9 | 538,7 | 547,8 | 568,5 | 554,0 |
| 23             | 525,6 | 527,6 | 532,6 | 542,1 | 553,8 | 564,4 | 569,2 | 567,9 | 556,2 | 551,8 | 536,9 | 530,3 | 527,8 | 542,8 | 567,2 | 548,3 |
| 24             | 514,1 | 514,9 | 524,9 | 534,5 | 544,8 | 555,0 | 561,8 | 558,4 | 547,4 | 540,9 | 525,7 | 519,8 | 516,3 | 534,7 | 558,4 | 538,0 |
| 25             | —     | 521,2 | 530,5 | 539,7 | 551,4 | 560,9 | 566,1 | 563,5 | 555,6 | 547,0 | 532,0 | 524,7 | 523,0 | 540,5 | 563,5 | 544,9 |
| 26             | 510,7 | 510,8 | 523,8 | 532,6 | 542,6 | 549,0 | 558,0 | 551,0 | 545,0 | 536,3 | 524,1 | 515,3 | 512,3 | 533,0 | 553,0 | 535,1 |
| 27             | 512,0 | 508,8 | 521,2 | 532,3 | 539,7 | 547,6 | 556,9 | 552,5 | 544,6 | 534,1 | 526,3 | 515,8 | 512,5 | 531,1 | 552,3 | 535,0 |
| 28             | 549,5 | 549,6 | 547,7 | 552,4 | 558,6 | 565,8 | 573,8 | 572,2 | 570,5 | 562,6 | 554,9 | 553,2 | 550,8 | 552,9 | 570,6 | 562,7 |

| № стан-ции | I     | II    | III   | IV    | V     | VI    | VII   | VIII  | IX    | X     | XI    | XII   | Зима  | Весна | Лето  | Осень |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 29         | 548,0 | 547,0 | 547,1 | 554,8 | 563,5 | 571,4 | 579,3 | 578,0 | 570,5 | 567,0 | 555,3 | 552,4 | 549,1 | 555,1 | 576,2 | 564,3 |
| 30         | 541,5 | 540,9 | 543,4 | 552,2 | 564,2 | 573,3 | 579,7 | 579,2 | 570,4 | 565,4 | 550,8 | 545,5 | 542,6 | 553,3 | 577,4 | 562,2 |
| 31         | 531,7 | 532,4 | 537,7 | 547,3 | 560,1 | 569,0 | 574,1 | 573,9 | 564,8 | 559,4 | 543,5 | 535,4 | 533,2 | 548,4 | 572,3 | 555,9 |
| 32         | 521,3 | 522,2 | 531,4 | 541,6 | 553,2 | 561,1 | 565,6 | 564,1 | 558,5 | 551,0 | 536,5 | 525,7 | 523,1 | 542,1 | 563,6 | 548,7 |
| 33         | 516,3 | 513,8 | 526,8 | 535,6 | 548,4 | 553,9 | 560,0 | 556,9 | 552,3 | 543,5 | 531,9 | 519,4 | 516,5 | 536,9 | 556,9 | 542,8 |
| 34         | 559,9 | 558,7 | 556,2 | 561,0 | 565,0 | 574,6 | 581,6 | 580,8 | —     | 573,3 | 566,9 | 565,5 | 561,4 | 560,7 | 579,0 | 570,1 |
| 35         | 556,5 | 555,0 | 553,4 | 559,0 | 565,6 | 574,8 | 583,4 | 581,7 | 576,3 | 572,6 | 564,0 | 562,0 | 557,8 | 559,3 | 580,0 | 571,0 |
| 36         | 548,6 | 547,4 | 548,4 | 556,6 | 567,6 | 576,4 | 583,6 | 583,0 | 574,5 | 569,9 | 557,2 | 552,5 | 549,5 | 557,5 | 581,0 | 567,2 |
| 37         | 531,8 | 532,4 | 538,3 | 548,6 | 562,2 | 570,5 | 574,1 | 574,2 | 569,3 | 560,5 | 545,9 | 535,0 | 533,4 | 549,7 | 572,9 | 558,6 |
| 38         | 530,6 | 530,2 | 537,0 | 547,3 | 559,6 | 567,7 | 570,5 | 571,0 | 568,1 | 557,6 | 546,8 | 534,0 | 531,6 | 547,9 | 569,4 | 557,5 |
| 39         | 529,4 | 528,7 | 534,6 | 544,6 | 557,4 | 565,5 | 570,0 | 570,0 | 568,5 | 557,4 | 547,4 | 533,7 | 530,6 | 545,5 | 568,5 | 557,8 |
| 40         | 540,4 | 538,0 | 540,3 | 550,0 | 563,0 | 571,3 | 577,4 | 578,9 | 575,8 | 566,9 | 558,0 | 545,9 | 541,4 | 551,1 | 575,9 | 566,9 |
| 41         | 559,8 | 557,5 | 557,1 | 563,5 | 571,9 | 581,3 | 588,9 | 587,9 | 581,6 | 576,6 | 567,2 | 564,3 | 560,5 | 564,2 | 586,0 | 575,1 |
| 42         | 552,2 | 550,6 | 551,1 | 559,5 | 570,5 | 579,6 | 586,0 | 585,4 | 578,9 | 573,0 | 561,0 | 555,9 | 552,9 | 560,4 | 583,7 | 571,0 |
| 43         | 553,2 | 552,1 | 552,7 | 562,7 | 575,1 | 581,6 | 586,0 | 586,1 | 581,9 | 573,9 | 563,0 | 556,0 | 553,4 | 563,5 | 584,6 | 572,9 |
| 44         | 544,4 | 543,7 | 545,9 | 555,9 | 568,6 | 576,4 | 580,2 | 580,2 | 579,7 | 569,3 | 561,0 | 549,7 | 545,9 | 556,8 | 578,9 | 570,0 |
| 45         | 562,5 | 560,0 | 570,7 | 569,4 | 578,6 | 584,8 | 589,6 | 589,1 | 585,1 | 578,9 | 570,9 | 565,6 | 562,7 | 572,9 | 587,8 | 578,3 |
| 46         | 558,5 | 558,0 | 558,7 | 568,0 | 578,3 | 583,3 | 587,1 | 587,1 | 584,5 | 576,1 | 568,9 | 561,2 | 559,2 | 568,3 | 585,8 | 576,8 |
| 47         | 550,7 | 550,8 | 552,2 | 561,7 | 574,0 | 580,2 | 583,4 | 583,9 | 582,6 | 572,3 | 561,2 | 554,9 | 552,1 | 562,8 | 583,5 | 572,0 |
| 48         | 567,9 | 567,6 | 567,9 | 574,7 | 582,0 | 586,0 | 589,0 | 589,2 | 587,9 | 581,2 | 577,0 | 571,3 | 565,9 | 574,8 | 588,1 | 582,0 |



Таблица 2

Средние значения температуры (град.) на изобарической поверхности 500 мб за период 1956—1965 гг.

| № стан-ции | I     | II    | III   | IV    | V     | VI    | VII   | VIII  | IX    | X     | XI    | XII   | Зима  | Весна | Лето  | Осень |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 1          | -35,5 | -36,9 | -37,2 | -34,1 | -28,5 | -23,5 | -21,0 | -22,2 | -27,5 | -33,1 | -35,8 | -36,9 | -36,4 | -33,3 | -22,2 | -32,1 |
| 2          | -32,7 | -33,6 | -33,2 | -32,5 | -27,3 | -22,8 | -19,5 | -21,0 | -24,0 | -31,3 | -34,0 | -35,1 | -34,1 | -31,7 | -21,1 | -30,4 |
| 3          | -31,8 | -33,1 | -34,1 | -31,2 | -26,4 | -22,3 | -18,6 | -19,8 | -24,7 | -30,3 | -33,4 | -34,1 | -33,0 | -30,6 | -20,3 | -29,4 |
| 4          | -30,0 | -31,5 | -32,5 | -29,8 | -25,8 | -22,5 | -18,5 | -18,8 | -22,8 | -28,8 | -31,8 | -32,6 | -31,4 | -29,4 | -19,9 | -27,8 |
| 5          | -29,7 | -32,2 | -33,2 | -30,5 | -26,3 | -22,2 | -19,2 | -19,6 | -23,7 | -29,1 | -32,0 | -33,2 | -31,7 | -30,0 | -20,4 | -28,3 |
| 6          | -31,8 | -33,4 | -34,1 | -31,4 | -26,8 | -22,1 | -19,4 | -19,9 | -24,1 | -29,2 | -32,6 | -34,2 | -33,1 | -30,8 | -20,4 | -28,6 |
| 7          | -30,0 | -31,2 | -31,9 | -30,0 | -26,0 | -22,0 | -19,0 | -19,1 | -22,3 | -28,0 | -30,8 | -32,1 | -31,1 | -29,3 | -20,0 | -27,0 |
| 8          | -38,2 | -39,1 | -38,8 | -34,6 | -29,4 | -23,5 | -20,8 | -22,3 | -27,3 | -32,2 | -36,6 | -37,7 | -38,3 | -34,3 | -22,2 | -32,0 |
| 9          | -39,1 | -38,6 | -38,8 | -35,5 | -30,3 | -25,0 | -21,8 | -23,1 | -28,0 | -32,6 | -37,0 | -37,9 | -38,6 | -34,9 | -23,3 | -32,8 |
| 10         | -29,8 | -30,2 | -31,2 | -29,4 | -25,8 | -22,0 | -19,0 | -18,2 | -21,3 | -27,2 | -30,1 | -31,2 | -30,3 | -28,8 | -19,7 | -26,2 |
| 11         | -30,2 | -30,5 | -31,4 | -29,3 | -25,2 | -20,9 | -18,1 | -17,8 | -21,3 | -27,3 | -30,2 | -31,4 | -30,7 | -28,6 | -18,9 | -26,3 |
| 12         | -34,0 | -34,5 | -34,7 | -31,4 | -26,8 | -21,3 | -18,4 | -18,3 | -24,2 | -27,8 | -32,6 | -34,2 | -34,2 | -31,0 | -19,3 | -28,2 |
| 13         | -37,6 | -39,0 | -37,3 | -32,8 | -28,0 | -22,1 | -19,7 | -20,6 | -26,6 | -29,6 | -35,9 | -37,0 | -37,9 | -32,7 | -20,8 | -30,7 |
| 14         | -28,3 | -27,8 | -29,4 | -27,5 | -24,2 | -21,2 | -17,6 | -16,9 | -18,7 | -24,2 | -27,5 | -27,9 | -28,0 | -27,0 | -18,6 | -23,5 |
| 15         | -30,8 | -31,1 | -31,7 | -28,8 | -23,9 | -19,5 | -16,7 | -16,7 | -21,7 | -24,5 | -29,1 | -30,6 | -30,8 | -28,1 | -17,6 | -25,1 |
| 16         | -33,7 | -34,3 | -33,7 | -29,9 | -25,0 | -19,8 | -17,1 | -17,8 | -22,5 | -25,4 | -30,8 | -32,6 | -33,5 | -29,5 | -18,2 | -26,3 |
| 17         | -38,1 | -39,4 | -37,5 | -33,3 | -28,5 | -22,8 | -19,5 | -20,8 | -25,8 | -29,0 | -35,1 | -37,1 | -38,2 | -33,1 | -21,0 | -30,0 |
| 18         | -38,7 | -39,2 | -38,0 | -33,0 | -28,7 | -24,4 | -20,2 | -21,5 | -25,9 | -30,3 | -35,5 | -37,2 | -38,4 | -33,3 | -22,0 | -30,6 |
| 19         | -37,9 | -37,6 | -36,9 | -33,0 | -28,6 | -24,1 | -20,2 | -22,6 | -26,0 | -30,6 | -34,7 | -36,6 | -37,4 | -32,8 | -22,4 | -30,4 |
| 20         | -25,8 | -25,2 | -26,9 | -24,7 | -22,5 | -18,4 | -15,4 | -15,7 | -15,7 | -19,8 | -23,8 | -24,6 | -25,2 | -24,7 | -16,4 | -19,8 |
| 21         | -28,3 | -28,0 | -29,4 | -26,6 | -22,8 | -19,2 | -16,3 | -16,1 | -18,3 | -22,9 | -26,6 | -28,5 | -28,3 | -26,3 | -17,3 | -22,6 |
| 22         | -29,5 | -29,6 | -29,9 | -26,5 | -21,7 | -17,6 | -15,0 | -14,9 | -18,7 | -20,7 | -26,8 | -27,8 | -29,0 | -26,0 | -15,8 | -22,1 |
| 23         | -33,0 | -32,4 | -31,4 | -27,6 | -22,0 | -17,4 | -14,8 | -15,2 | -19,9 | -21,8 | -28,4 | -31,0 | -32,2 | -27,0 | -15,5 | -23,4 |
| 24         | -36,8 | -37,0 | -34,7 | -30,5 | -25,9 | -20,9 | -17,4 | -18,8 | -23,3 | -25,9 | -32,3 | -35,1 | -36,3 | -30,4 | -19,0 | -27,2 |
| 25         | -34,8 | -34,6 | -32,7 | -28,1 | -22,8 | -18,1 | -16,2 | -16,8 | -20,1 | -23,1 | -29,2 | -33,0 | -34,2 | -27,9 | -17,2 | -24,1 |
| 26         | -37,3 | -36,8 | -35,2 | -30,4 | -25,4 | -22,4 | -18,6 | -20,0 | -23,3 | -27,0 | -32,3 | -35,4 | -36,6 | -30,3 | -20,3 | -27,5 |
| 27         | -36,2 | -36,4 | -34,8 | -30,4 | -26,2 | -22,6 | -18,8 | -20,1 | -23,4 | -27,3 | -31,0 | -35,0 | -35,9 | -30,5 | -20,4 | -27,2 |
| 28         | -25,0 | -25,0 | -26,3 | -24,0 | -21,3 | -17,5 | -14,5 | -14,7 | -14,8 | -18,6 | -22,4 | -23,3 | -24,5 | -23,9 | -16,6 | -18,6 |
| 29         | -26,6 | -27,0 | -27,3 | -23,4 | -18,9 | -14,5 | -12,4 | -12,5 | -15,4 | -17,0 | -22,6 | -24,5 | -26,1 | -23,2 | -13,2 | -18,3 |

| № стан-<br>ции | I     | II    | III   | IV    | V     | VI    | VII   | VIII  | IX    | X     | XI    | XII   | Зима  | Весна | Лето  | Осень |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 30             | -27,9 | -28,0 | -27,7 | -23,4 | -17,6 | -13,3 | -11,3 | -11,6 | -14,9 | -17,1 | -23,4 | -26,0 | -27,4 | -22,9 | -12,1 | -18,8 |
| 31             | -30,6 | -30,3 | -29,3 | -24,5 | -18,8 | -14,7 | -12,8 | -12,9 | -16,2 | -19,1 | -25,0 | -28,9 | -30,0 | -24,3 | -13,5 | -20,1 |
| 32             | -33,3 | -33,0 | -31,5 | -26,5 | -22,4 | -18,1 | -15,9 | -16,6 | -18,8 | -22,5 | -27,2 | -33,6 | -33,3 | -26,8 | -16,7 | -22,8 |
| 33             | -34,7 | -34,6 | -32,1 | -28,2 | -23,6 | -19,5 | -17,1 | -18,1 | -20,5 | -24,1 | -28,1 | -33,5 | -34,2 | -28,0 | -18,3 | -24,2 |
| 34             | -21,7 | -22,3 | -23,3 | -20,8 | -19,0 | -13,8 | -11,1 | -11,2 | -11,7 | -14,4 | -18,5 | -19,6 | -21,3 | -21,0 | -12,0 | -14,9 |
| 35             | -23,8 | -24,7 | -25,0 | -22,2 | -18,7 | -14,1 | -11,1 | -11,4 | -13,2 | -15,4 | -20,0 | -21,5 | -23,4 | -22,0 | -12,2 | -16,2 |
| 36             | -26,0 | -26,2 | -26,2 | -21,9 | -16,7 | -12,4 | -10,3 | -10,4 | -13,6 | -15,7 | -21,4 | -24,1 | -25,5 | -21,6 | -11,1 | -16,9 |
| 37             | -30,0 | -28,8 | -28,8 | -23,9 | -18,4 | -14,4 | -12,9 | -12,7 | -15,1 | -19,0 | -24,3 | -29,1 | -29,6 | -23,7 | -13,3 | -19,5 |
| 38             | -30,1 | -29,9 | -28,2 | -24,0 | -19,6 | -15,3 | -13,8 | -13,8 | -15,0 | -19,3 | -23,6 | -29,2 | -29,8 | -23,9 | -14,2 | -19,3 |
| 39             | -29,7 | -30,0 | -28,4 | -24,4 | -19,9 | -15,7 | -14,0 | -14,0 | -15,0 | -19,4 | -23,0 | -28,8 | -29,5 | -24,2 | -14,6 | -19,1 |
| 40             | -25,3 | -26,2 | -25,5 | -22,0 | -17,5 | -13,4 | -11,3 | -10,9 | -12,9 | -15,2 | -19,3 | -24,0 | -23,2 | -21,5 | -11,9 | -15,8 |
| 41             | -22,2 | -23,3 | -23,4 | -20,2 | -16,3 | -11,4 | -8,6  | -8,6  | -11,2 | -13,5 | -18,4 | -20,4 | -22,0 | -20,0 | -9,6  | -17,4 |
| 42             | -23,7 | -24,4 | -24,2 | -20,0 | -15,2 | -10,9 | -8,8  | -8,9  | -11,5 | -14,2 | -19,3 | -22,2 | -23,4 | -19,8 | -9,6  | -15,0 |
| 43             | -22,5 | -22,8 | -22,8 | -18,5 | -13,5 | -10,1 | -8,2  | -8,3  | -10,2 | -14,1 | -18,0 | -21,3 | -22,2 | -18,3 | -8,9  | -14,1 |
| 44             | -24,3 | -24,4 | -24,4 | -20,8 | -15,9 | -11,9 | -10,4 | -10,2 | -10,9 | -15,2 | -18,4 | -22,9 | -23,9 | -20,4 | -10,8 | -14,8 |
| 45             | -19,2 | -20,3 | -20,2 | -16,5 | -12,6 | -9,0  | -7,2  | -7,2  | -8,7  | -12,2 | -15,4 | -18,0 | -19,3 | -16,4 | -7,8  | -12,1 |
| 46             | -20,1 | -20,3 | -20,4 | -16,8 | -12,9 | -9,6  | -7,9  | -8,0  | -9,1  | -13,3 | -15,9 | -19,3 | -19,8 | -16,7 | -8,5  | -12,8 |
| 47             | -22,9 | -22,3 | -22,9 | -19,1 | -14,3 | -10,6 | -9,2  | -8,9  | -10,0 | -14,6 | -17,6 | -21,5 | -22,3 | -18,8 | -9,6  | -14,1 |
| 48             | -16,5 | -16,4 | -16,7 | -14,4 | -11,3 | -8,6  | -7,4  | -7,0  | -7,5  | -11,0 | -12,7 | -15,6 | -16,2 | -14,1 | -7,7  | -10,4 |

Таблица 3

Осредняя квадратическая изменчивость геопотенциала изобарической поверхности 500 мб (джм)

| № станции | I    | II   | III  | IV  | V   | VI  | VII | VIII | IX  | X   | XI  | XII | Зима | Весна | Лето | Осень |
|-----------|------|------|------|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|------|-------|------|-------|
| 1         | 8,1  | 7,2  | 6,6  | 4,8 | 5,6 | 4,3 | 4,1 | 3,4  | 4,4 | 3,8 | 5,2 | 8,2 | 7,8  | 5,7   | 3,9  | 4,5   |
| 2         | 9,3  | 7,3  | 7,3  | 3,9 | 5,2 | 4,9 | 4,1 | 3,0  | 4,0 | 5,6 | 4,4 | 7,3 | 7,8  | 5,5   | 4,0  | 4,7   |
| 3         | 10,0 | 7,4  | 6,8  | 4,6 | 5,0 | 5,3 | 4,3 | 2,7  | 4,0 | 5,5 | 3,7 | 7,4 | 8,3  | 5,5   | 4,2  | 4,4   |
| 4         | 10,3 | 7,6  | 7,4  | 4,3 | 5,0 | 5,3 | 4,3 | 3,5  | 3,4 | 5,5 | 3,4 | 7,8 | 8,6  | 5,5   | 4,4  | 4,1   |
| 5         | 9,8  | 7,8  | 7,3  | 4,3 | 4,2 | 5,0 | 4,1 | 3,4  | 4,5 | 5,9 | 3,6 | 7,6 | 8,4  | 5,3   | 4,2  | 4,7   |
| 6         | 8,4  | 7,7  | 7,3  | 4,0 | 4,4 | 4,6 | 3,7 | 3,2  | 4,2 | 6,0 | 3,8 | 8,0 | 8,0  | 5,2   | 3,4  | 4,7   |
| 7         | 10,3 | 8,0  | 8,5  | 3,5 | 3,6 | 4,3 | 3,5 | 4,1  | 5,0 | 6,2 | 3,7 | 7,6 | 8,6  | 5,2   | 3,6  | 5,0   |
| 8         | 5,8  | 6,7  | 6,3  | 5,2 | 3,9 | 4,5 | 3,0 | 3,2  | 3,0 | 4,6 | 2,9 | 8,2 | 6,9  | 5,1   | 3,6  | 3,5   |
| 9         | 9,0  | 10,9 | 15,0 | 7,2 | 7,2 | 4,5 | 4,9 | 5,1  | 4,1 | 4,7 | 6,1 | 7,0 | 9,0  | 9,8   | 4,8  | 5,0   |
| 10        | 9,6  | 6,6  | 8,0  | 3,1 | 2,7 | 4,8 | 3,2 | 4,2  | 5,2 | 3,2 | 5,4 | 7,7 | 8,0  | 4,6   | 4,1  | 5,3   |
| 11        | 7,7  | 6,6  | 7,2  | 3,2 | 4,6 | 5,3 | 3,5 | 5,0  | 4,8 | 6,4 | 5,5 | 7,2 | 7,3  | 5,0   | 4,6  | 4,5   |
| 12        | 5,6  | 6,7  | 6,7  | 4,6 | 3,3 | 3,2 | 4,1 | 4,6  | 3,4 | 6,1 | 4,1 | 7,7 | 6,4  | 4,5   | 4,1  | 5,8   |
| 13        | 5,4  | 6,7  | 6,5  | 6,5 | 3,6 | 4,2 | 3,2 | 4,6  | 2,2 | 5,0 | 3,4 | 7,8 | 6,6  | 4,4   | 4,0  | 3,8   |
| 14        | 8,4  | 5,1  | 2,9  | 2,9 | 4,2 | 4,6 | 4,6 | 4,1  | 5,6 | 5,1 | 7,4 | 7,6 | 7,1  | 4,4   | 4,1  | 6,0   |
| 15        | 4,6  | 5,8  | 6,1  | 2,5 | 3,8 | 4,0 | 3,2 | 5,0  | 3,6 | 5,1 | 5,1 | 6,1 | 6,0  | 3,6   | 3,0  | 4,6   |
| 16        | 6,1  | 5,7  | 4,9  | 3,2 | 2,4 | 3,6 | 1,7 | 3,7  | 3,8 | 5,5 | 3,7 | 6,1 | 7,4  | 3,5   | 4,9  | 4,3   |
| 17        | 8,8  | 7,4  | 10,8 | 3,5 | 5,0 | 6,1 | 4,9 | 3,7  | 4,4 | 5,1 | 3,1 | 8,2 | 9,0  | 6,4   | 5,1  | 5,4   |
| 18        | 9,8  | 9,0  | 12,5 | 4,5 | 7,0 | 5,8 | 4,4 | 5,7  | 5,0 | 7,5 | 3,7 | 9,2 | 10,0 | 8,0   | 5,3  | 4,7   |
| 19        | 10,1 | 10,6 | 12,7 | 6,1 | 5,9 | 4,1 | 4,6 | 5,6  | 4,9 | 4,5 | —   | 9,2 | 10,0 | 8,2   | 4,7  | 4,7   |
| 20        | 7,0  | 5,9  | 4,8  | 3,6 | 5,1 | 4,1 | 4,7 | 4,2  | 4,7 | 3,8 | 8,2 | 7,5 | 6,8  | 4,5   | 4,3  | 5,6   |
| 21        | 5,6  | 6,7  | 3,4  | 2,5 | 5,3 | 4,1 | 3,4 | 4,7  | 4,4 | 3,6 | 6,7 | 7,4 | 6,6  | 3,8   | 4,1  | 4,9   |
| 22        | 5,2  | 4,8  | 3,5  | 2,6 | 4,5 | 3,1 | 2,4 | 4,1  | 4,7 | 3,6 | 5,1 | 6,4 | 5,5  | 3,5   | 3,2  | 4,5   |
| 23        | 6,8  | 6,4  | 5,2  | 3,1 | 2,6 | 5,9 | 2,2 | 3,0  | 4,8 | 4,9 | 3,6 | 3,6 | 5,6  | 3,6   | 3,8  | 4,4   |
| 24        | 9,1  | 6,1  | 7,9  | 3,8 | 3,4 | 6,8 | 4,1 | 2,7  | 3,2 | 4,9 | 2,5 | 6,0 | 7,1  | 4,7   | 3,7  | 4,4   |
| 25        | 10,1 | 5,9  | 6,7  | 3,4 | 3,3 | 5,1 | 3,6 | 3,8  | 4,5 | 7,9 | 4,0 | 4,3 | 6,8  | 4,5   | 3,8  | 5,0   |
| 26        | 10,6 | 9,3  | 12,3 | 4,4 | 5,8 | 4,3 | 4,1 | 3,8  | 4,0 | 4,6 | 3,9 | 7,5 | 9,1  | 7,5   | 4,1  | 4,2   |
| 27        | 11,2 | 7,5  | 9,2  | 4,8 | 5,8 | 3,6 | 2,7 | 4,2  | 3,5 | 4,2 | 3,2 | 7,0 | 8,6  | 6,6   | 3,5  | 3,6   |
| 28        | 7,1  | 5,0  | 4,2  | 3,6 | 4,7 | 3,2 | 4,2 | 3,6  | 3,5 | 4,2 | 6,4 | 7,2 | 6,4  | 2,9   | 2,8  | 4,7   |
| 29        | 4,9  | 4,5  | 2,4  | 2,4 | 3,9 | 2,8 | 2,4 | 3,2  | 5,0 | 3,6 | 3,1 | 6,6 | 5,3  | 4,2   | 3,9  | 3,9   |

| № станции | I    | II  | III | IV  | V   | VI  | VII | VIII | IX  | X   | XI  | XII | Зима | Весна | Лето | Осень |
|-----------|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|------|-------|------|-------|
| 30        | 5,0  | 3,7 | 3,4 | 2,6 | 2,1 | 2,9 | 2,6 | 2,6  | 4,2 | 3,2 | 3,1 | 4,3 | 4,3  | 2,7   | 2,7  | 3,5   |
| 31        | 6,2  | 4,0 | 4,6 | 2,9 | 1,6 | 4,5 | 2,6 | 3,3  | 4,1 | 4,0 | 4,2 | 3,6 | 4,6  | 3,0   | 3,5  | 4,1   |
| 32        | 8,9  | 6,2 | 7,1 | 3,9 | 4,8 | 4,5 | 4,0 | 4,5  | 2,1 | 5,3 | 4,5 | 5,0 | 6,7  | 5,3   | 4,3  | 4,0   |
| 33        | 11,5 | 6,3 | 8,2 | 3,2 | 6,8 | 4,1 | 3,6 | —    | 2,5 | 4,3 | 4,5 | 5,7 | 7,8  | 6,1   | 3,8  | 3,8   |
| 34        | 5,4  | 4,9 | 5,0 | 4,5 | 2,8 | 3,5 | 2,7 | 2,4  | —   | 4,4 | 5,6 | 5,5 | 5,2  | 4,1   | 2,9  | 5,0   |
| 35        | 5,1  | 4,4 | 3,6 | 3,5 | 3,5 | 3,4 | 2,6 | 2,6  | 4,1 | 4,1 | 4,0 | 5,8 | 5,1  | 3,5   | 2,9  | 4,1   |
| 36        | 4,4  | 3,7 | 2,9 | 2,2 | 2,2 | 2,7 | 2,2 | 2,7  | 4,4 | 3,0 | 2,4 | 4,7 | 4,3  | 2,4   | 2,5  | 3,3   |
| 37        | 5,9  | 4,7 | 4,2 | 3,6 | 3,2 | 3,4 | 2,5 | 3,7  | 3,3 | 5,4 | 4,0 | 3,8 | 4,8  | 3,7   | 3,2  | 4,2   |
| 38        | 5,7  | 5,3 | 4,4 | 4,1 | 4,0 | 3,0 | 4,1 | 4,0  | 4,1 | 5,6 | 3,2 | 4,8 | 5,3  | 4,2   | 3,7  | 4,3   |
| 39        | 6,2  | 4,8 | 4,1 | 3,6 | 4,0 | 3,2 | 3,5 | 3,8  | 3,9 | 4,8 | 3,1 | 5,7 | 5,8  | 3,9   | 3,5  | 3,9   |
| 40        | 5,6  | 9,4 | 6,5 | 5,4 | 2,6 | 2,9 | 3,9 | 4,7  | 3,5 | 4,6 | 3,8 | 6,2 | 7,1  | 4,8   | 3,8  | 4,0   |
| 41        | 3,2  | 4,5 | 3,4 | 2,8 | 3,1 | 3,1 | 1,4 | 1,6  | 3,8 | 3,1 | 3,1 | 4,1 | 3,9  | 3,1   | 2,0  | 3,3   |
| 42        | 3,4  | 4,5 | 3,1 | 2,6 | 2,6 | 2,7 | 1,8 | 3,6  | 3,7 | 2,7 | 2,4 | 4,3 | 4,1  | 2,8   | 2,7  | 2,9   |
| 43        | 2,8  | 5,3 | 2,4 | 3,5 | 2,9 | 1,6 | 1,6 | 1,9  | 1,5 | 2,9 | 2,3 | 3,2 | 3,8  | 2,9   | 1,7  | 2,2   |
| 44        | 2,5  | 6,4 | 3,9 | 5,5 | 2,0 | 2,5 | 3,4 | 3,2  | 3,2 | 3,6 | 2,0 | 5,4 | 4,8  | 3,8   | 3,0  | 2,9   |
| 45        | 3,0  | 5,3 | 2,9 | 2,6 | 2,7 | 1,7 | 1,3 | 1,3  | 1,6 | 2,2 | 2,3 | 2,3 | 3,5  | 2,7   | 1,4  | 2,1   |
| 46        | 3,0  | 6,5 | 3,3 | 4,0 | 3,3 | 1,4 | 1,5 | 1,5  | 1,4 | 2,6 | 2,7 | 3,7 | 4,4  | 3,5   | 1,5  | 2,2   |
| 47        | 4,7  | 6,8 | 4,1 | 5,2 | 3,6 | 1,9 | 2,3 | 2,1  | 2,9 | 3,4 | 2,4 | 5,0 | 5,5  | 4,3   | 2,1  | 2,9   |
| 48        | 4,8  | 6,5 | 3,9 | 3,3 | 2,6 | 1,0 | 1,6 | 1,1  | 0,9 | 2,6 | 3,0 | 3,2 | 4,8  | 3,3   | 3,2  | 2,2   |
| Среднее   | 6,9  | 6,4 | 6,1 | 3,8 | 4,0 | 3,9 | 3,2 | 3,5  | 3,7 | 4,5 | 4,0 | 6,1 | 6,5  | 4,6   | 3,5  | 4,1   |

Таблица 4

Средняя квадратическая изменчивость температуры (град.) на изобарической поверхности 500 мб

| № станции | I   | II  | III | IV  | V   | VI  | VII | VIII | IX  | X   | XI  | XII | Зима | Весна | Лето | Осень |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|------|-------|------|-------|
| 1         | 1,9 | 2,3 | 2,5 | 2,1 | 2,4 | 1,5 | 1,2 | 1,2  | 1,7 | 2,3 | 1,7 | 2,8 | 2,3  | 2,3   | 1,3  | 1,9   |
| 2         | 2,7 | 2,2 | 3,0 | 1,7 | 1,9 | 2,0 | 1,5 | 1,1  | 1,8 | 2,3 | 1,9 | 2,9 | 2,5  | 2,2   | 1,6  | 2,0   |
| 3         | 2,5 | 1,9 | 2,8 | 1,6 | 1,4 | 1,9 | 1,6 | 1,2  | 1,6 | 2,1 | 1,6 | 2,6 | 2,4  | 1,9   | 1,6  | 1,9   |
| 4         | 2,6 | 2,1 | 2,7 | 1,4 | 1,7 | 2,1 | 1,1 | 1,2  | 2,0 | 2,0 | 1,4 | 2,4 | 2,3  | 2,9   | 1,6  | 1,7   |
| 5         | 2,1 | 2,3 | 2,5 | 1,4 | 1,6 | 1,9 | 0,8 | 1,1  | 1,7 | 2,0 | 1,3 | 2,7 | 2,5  | 1,9   | 1,5  | 1,9   |
| 6         | 2,7 | 2,0 | 2,7 | 1,1 | 2,1 | 2,0 | 1,0 | 1,4  | 1,9 | 1,9 | 1,0 | 2,4 | 2,4  | 2,0   | 1,3  | 1,7   |
| 7         | 1,6 | 1,7 | 1,7 | 1,9 | 1,6 | 1,7 | 0,9 | 1,1  | 1,2 | 1,7 | 0,9 | 2,4 | 1,9  | 1,7   | 1,2  | 1,6   |
| 8         | 2,4 | 4,4 | 3,8 | 2,3 | 2,4 | 1,8 | 1,0 | 1,4  | 1,6 | 1,3 | 2,8 | 1,9 | 2,9  | 1,7   | 1,4  | 1,3   |
| 9         | 2,7 | 2,0 | 2,5 | 1,1 | 1,5 | 2,0 | 1,0 | 1,4  | 2,0 | 1,8 | 1,7 | 2,4 | 2,4  | 2,7   | 1,5  | 1,8   |
| 10        | 2,2 | 2,3 | 2,2 | 1,2 | 1,6 | 1,9 | 1,1 | 2,0  | 2,2 | 1,2 | 2,1 | 2,6 | 2,4  | 1,7   | 1,7  | 1,8   |
| 11        | 1,2 | 2,0 | 2,1 | 1,6 | 1,5 | 1,6 | 0,9 | 1,1  | 0,9 | 1,9 | 1,4 | 2,4 | 1,7  | 1,7   | 1,1  | 1,6   |
| 12        | 2,4 | 2,0 | 2,1 | 1,5 | 2,2 | 1,6 | 0,7 | 1,8  | 1,6 | 1,7 | 1,1 | 2,5 | 1,7  | 2,2   | 1,4  | 1,0   |
| 13        | 2,5 | 1,6 | 2,0 | 1,2 | 2,4 | 2,0 | 1,8 | 1,5  | 1,9 | 1,7 | 1,6 | 2,4 | 2,4  | 1,8   | 1,8  | 2,1   |
| 14        | 2,0 | 2,5 | 1,3 | 0,9 | 1,9 | 1,8 | 1,2 | 2,1  | 2,1 | 2,0 | 2,2 | 2,7 | 2,4  | 1,4   | 1,4  | 2,1   |
| 15        | 2,2 | 2,4 | 1,4 | 1,6 | 1,0 | 2,0 | 1,0 | 1,4  | 2,0 | 2,5 | 1,7 | 2,4 | 2,3  | 1,3   | 1,5  | 2,1   |
| 16        | 2,7 | 2,2 | 2,6 | 0,9 | 2,0 | 2,2 | 1,3 | 1,4  | 2,0 | 2,0 | 1,3 | 2,3 | 2,4  | 1,8   | 1,6  | 1,8   |
| 17        | 3,8 | 3,9 | 3,4 | 1,4 | 2,5 | 2,0 | 1,0 | 2,3  | 1,7 | 1,6 | 1,6 | 2,5 | 3,4  | 2,4   | 1,8  | 1,5   |
| 18        | 2,4 | 4,0 | 3,5 | 1,8 | 2,0 | 1,7 | 1,2 | 2,6  | 1,6 | 1,4 | 1,6 | 2,6 | 3,0  | 2,4   | 1,8  | 2,2   |
| 19        | 2,4 | 4,0 | 3,5 | 1,8 | 2,0 | 1,9 | 1,8 | 1,4  | 1,7 | 2,2 | 2,8 | 2,5 | 2,1  | 1,9   | 1,7  | 2,0   |
| 20        | 2,2 | 4,4 | 1,6 | 1,6 | 2,6 | 1,8 | 1,2 | 1,8  | 1,3 | 2,4 | 2,3 | 2,7 | 2,4  | 1,6   | 1,6  | 2,2   |
| 21        | 2,3 | 2,2 | 1,4 | 1,3 | 2,0 | 1,3 | 0,8 | 1,9  | 2,2 | 1,3 | 1,9 | 2,3 | 2,3  | 1,6   | 1,3  | 1,7   |
| 22        | 2,8 | 2,2 | 2,6 | 1,5 | 0,9 | 1,8 | 1,1 | 0,7  | 2,2 | 1,6 | 1,8 | 1,5 | 2,2  | 1,7   | 1,2  | 1,9   |
| 23        | 3,1 | 1,9 | 2,4 | 1,0 | 1,4 | 2,6 | 1,8 | 1,2  | 2,0 | 2,1 | 1,4 | 1,8 | 2,3  | 1,6   | 1,9  | 1,8   |
| 24        | 2,9 | 3,2 | 2,3 | 1,5 | 1,6 | 2,1 | 1,8 | 0,9  | 2,3 | 1,6 | 1,8 | 1,4 | 2,1  | 1,8   | 1,6  | 1,9   |
| 25        | 2,9 | 1,9 | 2,4 | 1,5 | 1,6 | 2,1 | 1,8 | 0,9  | 2,3 | 1,6 | 1,8 | 1,4 | 2,9  | 2,6   | 1,4  | 1,7   |
| 26        | 4,0 | 3,2 | 4,1 | 1,5 | 2,5 | 1,1 | 0,8 | 1,4  | 1,9 | 1,4 | 1,7 | 2,2 | 2,7  | 2,3   | 1,2  | 1,3   |
| 27        | 2,5 | 1,8 | 3,0 | 1,6 | 2,3 | 1,1 | 1,6 | 1,7  | 1,5 | 1,9 | 1,0 | 2,3 | 2,2  | 2,3   | 1,6  | 1,8   |
| 28        | 2,5 | 1,9 | 1,5 | 1,2 | 2,3 | 1,4 | 1,8 | 1,7  | 1,3 | 1,4 | 2,2 | 2,3 | 2,7  | 1,8   | 1,2  | 1,8   |
| 29        | 2,0 | 1,9 | 1,4 | 1,2 | 1,8 | 0,9 | 0,9 | 1,0  | 2,2 | 1,4 | 1,0 | 2,5 | 2,1  | 1,5   | 0,9  | 1,5   |

| № станции | I   | II  | III | IV  | V   | VI  | VII | VIII | IX  | X   | XI  | XII | Зима | Весна | Лето | Осень |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|------|-------|------|-------|
| 30        | 2,1 | 1,8 | 1,6 | 1,5 | 0,6 | 1,1 | 1,2 | 0,5  | 1,6 | 0,9 | 1,3 | 1,9 | 1,9  | 1,2   | 0,9  | 1,3   |
| 31        | 2,3 | 1,2 | 2,2 | 1,3 | 1,1 | 1,6 | 1,1 | 0,9  | 1,4 | 1,0 | 1,7 | 1,4 | 1,6  | 1,5   | 1,2  | 1,4   |
| 32        | 2,8 | 2,3 | 2,6 | 1,2 | 2,9 | 2,2 | 1,8 | 1,6  | 1,5 | 1,7 | 1,7 | 1,9 | 2,3  | 2,2   | 1,9  | 1,6   |
| 33        | 4,1 | 2,3 | 2,7 | 1,3 | 2,4 | 1,3 | 1,5 | 1,3  | 1,8 | 1,6 | 1,4 | 2,0 | 2,8  | 2,1   | 1,4  | 1,6   |
| 34        | 2,1 | 1,6 | 2,0 | 2,1 | 2,2 | 1,5 | 1,1 | 1,1  | 0,5 | 1,9 | 1,8 | 1,9 | 1,9  | 2,1   | 1,2  | 1,4   |
| 35        | 2,0 | 1,8 | 1,5 | 1,6 | 1,6 | 1,2 | 0,8 | 1,0  | 1,7 | 1,7 | 1,5 | 2,0 | 1,9  | 1,6   | 1,0  | 1,6   |
| 36        | 2,0 | 1,8 | 1,5 | 1,0 | 0,6 | 0,9 | 1,0 | 0,6  | 1,5 | 1,1 | 1,4 | 2,2 | 2,0  | 1,0   | 0,8  | 1,3   |
| 37        | 2,3 | 1,4 | 1,9 | 1,4 | 1,6 | 1,2 | 1,1 | 1,4  | 1,6 | 1,3 | 1,7 | 1,8 | 1,8  | 1,6   | 1,2  | 1,5   |
| 38        | 2,6 | 1,2 | 2,4 | 1,1 | 1,8 | 1,2 | 1,1 | 1,6  | 2,0 | 1,5 | 1,0 | 2,1 | 2,0  | 1,8   | 1,3  | 1,5   |
| 39        | 2,6 | 1,5 | 1,8 | 1,2 | 1,7 | 1,2 | 1,5 | 1,6  | 1,6 | 1,6 | 0,9 | 2,2 | 2,1  | 1,6   | 1,4  | 1,4   |
| 40        | 2,3 | 1,1 | 1,4 | 1,4 | 0,8 | 1,0 | 1,4 | 1,4  | 1,6 | 1,6 | 1,2 | 1,8 | 1,7  | 1,2   | 1,3  | 1,5   |
| 41        | 1,5 | 2,1 | 1,3 | 1,0 | 1,0 | 1,3 | 0,8 | 0,8  | 1,4 | 1,2 | 1,7 | 1,9 | 1,8  | 1,1   | 1,0  | 1,4   |
| 42        | 1,5 | 2,0 | 1,4 | 0,9 | 0,9 | 1,0 | 0,9 | 0,8  | 1,4 | 0,8 | 1,6 | 1,9 | 1,8  | 1,1   | 0,9  | 1,3   |
| 43        | 0,9 | 2,1 | 1,1 | 1,2 | 0,6 | 0,6 | 0,7 | 0,8  | 0,8 | 0,8 | 1,2 | 1,2 | 1,4  | 1,0   | 0,7  | 0,9   |
| 44        | 1,1 | 1,4 | 1,7 | 1,6 | 0,9 | 0,8 | 1,2 | 1,3  | 1,4 | 1,2 | 0,7 | 1,9 | 1,5  | 1,4   | 1,1  | 1,1   |
| 45        | 1,6 | 2,2 | 1,0 | 1,0 | 1,0 | 0,9 | 0,6 | 0,9  | 1,0 | 1,0 | 0,9 | 0,9 | 1,6  | 1,0   | 0,8  | 1,0   |
| 46        | 1,3 | 2,4 | 1,2 | 1,3 | 1,0 | 0,7 | 0,6 | 0,8  | 0,8 | 1,1 | 1,2 | 1,3 | 1,7  | 1,2   | 0,7  | 1,0   |
| 47        | 1,2 | 2,0 | 1,6 | 1,4 | 1,1 | 0,7 | 0,7 | 0,7  | 1,2 | 1,2 | 1,1 | 1,7 | 1,6  | 1,4   | 0,7  | 1,2   |
| 48        | 1,5 | 1,9 | 1,2 | 0,9 | 0,9 | 0,6 | 0,5 | 0,3  | 0,5 | 0,8 | 1,2 | 1,1 | 1,5  | 1,3   | 0,5  | 0,8   |
| Среднее   | 2,3 | 2,1 | 2,1 | 1,4 | 1,7 | 1,5 | 1,1 | 1,3  | 1,6 | 1,6 | 1,6 | 2,1 | 2,2  | 1,7   | 1,3  | 1,6   |

Таблица 1  
Нормированные корреляционные функции аномалий геопотенциала

| Середина<br>градации,<br>км | Число<br>пар | I    | II   | III  | IV   | V    | VI   | VII  | VIII | IX   | X    | XI   | XII  | Зима | Весна | Лето | Осень |
|-----------------------------|--------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|------|-------|
| 300                         | 11           | 0,97 | 0,96 | 0,92 | 0,87 | 0,74 | 0,90 | 0,88 | 0,87 | 0,92 | 0,86 | 0,89 | 0,94 | 0,95 | 0,84  | 0,88 | 0,89  |
| 500                         | 32           | 0,82 | 0,80 | 0,82 | 0,79 | 0,76 | 0,79 | 0,76 | 0,79 | 0,77 | 0,80 | 0,74 | 0,90 | 0,84 | 0,79  | 0,78 | 0,77  |
| 700                         | 41           | 0,78 | 0,82 | 0,82 | 0,77 | 0,66 | 0,72 | 0,69 | 0,69 | 0,71 | 0,77 | 0,64 | 0,88 | 0,83 | 0,75  | 0,70 | 0,71  |
| 900                         | 51           | 0,64 | 0,66 | 0,66 | 0,58 | 0,50 | 0,53 | 0,54 | 0,64 | 0,60 | 0,68 | 0,53 | 0,78 | 0,70 | 0,58  | 0,57 | 0,60  |
| 1100                        | 35           | 0,59 | 0,56 | 0,57 | 0,41 | 0,59 | 0,48 | 0,47 | 0,46 | 0,54 | 0,55 | 0,50 | 0,75 | 0,58 | 0,52  | 0,47 | 0,53  |
| 1300                        | 70           | 0,42 | 0,49 | 0,52 | 0,37 | 0,33 | 0,35 | 0,24 | 0,40 | 0,35 | 0,48 | 0,28 | 0,61 | 0,51 | 0,41  | 0,33 | 0,37  |
| 1500                        | 75           | 0,38 | 0,34 | 0,43 | 0,23 | 0,17 | 0,25 | 0,23 | 0,23 | 0,33 | 0,43 | 0,18 | 0,49 | 0,41 | 0,28  | 0,27 | 0,32  |
| 1700                        | 43           | 0,25 | 0,16 | 0,26 | 0,12 | 0,16 | 0,11 | 0,06 | 0,21 | 0,16 | 0,26 | 0,02 | 0,37 | 0,26 | 0,18  | 0,09 | 0,15  |
| 1900                        | 66           | 0,15 | 0,20 | 0,28 | 0,05 | 0,08 | 0,11 | 0,04 | 0,16 | 0,04 | 0,27 | 0,01 | 0,31 | 0,22 | 0,14  | 0,08 | 0,10  |
| 2200                        | 128          | 0,05 | 0,01 | 0,08 | 0,03 | 0,05 | 0,03 | 0,15 | 0,01 | 0,03 | 0,07 | 0,10 | 0,15 | 0,07 | 0,00  | 0,04 | 0,02  |
| 2600                        | 120          | 0,07 | 0,05 | 0,03 | 0,10 | 0,12 | 0,07 | 0,14 | 0,11 | 0,18 | 0,08 | 0,17 | 0,06 | 0,06 | 0,06  | 0,11 | 0,15  |
| 3000                        | 110          | 0,17 | 0,08 | 0,08 | 0,06 | 0,13 | 0,11 | 0,12 | 0,08 | 0,20 | 0,16 | 0,22 | 0,20 | 0,15 | 0,09  | 0,10 | 0,20  |
| 3400                        | 112          | 0,28 | 0,08 | 0,10 | 0,02 | 0,15 | 0,08 | 0,02 | 0,06 | 0,29 | 0,31 | 0,23 | 0,32 | 0,23 | 0,09  | 0,05 | 0,27  |
| 3800                        | 70           | 0,36 | 0,05 | 0,12 | 0,03 | 0,12 | 0,17 | 0,04 | 0,08 | 0,24 | 0,36 | 0,21 | 0,48 | 0,30 | 0,09  | 0,10 | 0,27  |
| 4300                        | 85           | 0,26 | 0,02 | 0,17 | 0,00 | 0,04 | 0,08 | 0,03 | 0,07 | 0,17 | 0,33 | 0,08 | 0,50 | 0,26 | 0,07  | 0,01 | 0,19  |
| 4900                        | 43           | 0,09 | 0,09 | 0,26 | 0,03 | 0,13 | 0,02 | 0,13 | 0,17 | 0,03 | 0,21 | 0,03 | 0,48 | 0,16 | 0,15  | 0,01 | 0,07  |
| 5500                        | 26           | 0,01 | 0,10 | 0,43 | 0,14 | 0,02 | 0,22 | 0,50 | 0,09 | 0,14 | 0,08 | 0,14 | 0,46 | 0,12 | 0,20  | 0,06 | 0,12  |
| 6100                        | 10           | 0,18 | 0,15 | 0,64 | 0,23 | 0,05 | 0,48 | 0,54 | 0,02 | 0,04 | 0,14 | 0,09 | 0,18 | 0,05 | 0,31  | 0,02 | 0,09  |

Таблица 2

## Нормированные корреляционные функции аномалий температуры

| Середина<br>градаций,<br>км | Число<br>пар | I     | II    | III   | IV    | V     | VI    | VII   | VIII  | IX    | X     | XI    | XII   | Зима  | Весна | Лето  | Осень |
|-----------------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 300                         | 11           | 0,76  | 0,91  | 0,91  | 0,86  | 0,83  | 0,84  | 0,87  | 0,78  | 0,93  | 0,85  | 0,85  | 0,93  | 0,86  | 0,86  | 0,83  | 0,88  |
| 500                         | 32           | 0,75  | 0,79  | 0,79  | 0,70  | 0,75  | 0,75  | 0,74  | 0,63  | 0,69  | 0,76  | 0,72  | 0,89  | 0,81  | 0,75  | 0,71  | 0,72  |
| 700                         | 41           | 0,76  | 0,80  | 0,78  | 0,69  | 0,71  | 0,73  | 0,66  | 0,63  | 0,67  | 0,72  | 0,67  | 0,84  | 0,80  | 0,72  | 0,68  | 0,69  |
| 900                         | 51           | 0,60  | 0,64  | 0,64  | 0,54  | 0,54  | 0,53  | 0,53  | 0,51  | 0,59  | 0,62  | 0,50  | 0,77  | 0,69  | 0,57  | 0,52  | 0,57  |
| 1100                        | 35           | 0,51  | 0,60  | 0,50  | 0,34  | 0,58  | 0,44  | 0,45  | 0,32  | 0,49  | 0,63  | 0,40  | 0,69  | 0,60  | 0,47  | 0,40  | 0,51  |
| 1300                        | 70           | 0,47  | 0,45  | 0,51  | 0,29  | 0,39  | 0,29  | 0,24  | 0,32  | 0,40  | 0,40  | 0,26  | 0,58  | 0,50  | 0,40  | 0,28  | 0,36  |
| 1500                        | 75           | 0,31  | 0,34  | 0,44  | 0,19  | 0,22  | 0,22  | 0,21  | 0,13  | 0,27  | 0,34  | 0,10  | 0,48  | 0,38  | 0,26  | 0,19  | 0,24  |
| 1700                        | 43           | 0,20  | 0,16  | 0,30  | 0,05  | 0,24  | 0,07  | -0,01 | 0,06  | 0,22  | 0,21  | 0,01  | 0,34  | 0,23  | 0,19  | 0,04  | 0,11  |
| 1900                        | 66           | 0,18  | 0,17  | 0,26  | -0,01 | 0,12  | 0,08  | -0,03 | 0,11  | 0,13  | 0,19  | -0,02 | 0,29  | 0,22  | 0,13  | 0,05  | 0,10  |
| 2200                        | 128          | 0,01  | 0,03  | 0,10  | -0,09 | 0,00  | -0,07 | -0,12 | -0,06 | -0,02 | 0,01  | -0,11 | 0,15  | 0,06  | 0,00  | -0,08 | -0,04 |
| 2600                        | 120          | -0,04 | -0,05 | 0,04  | -0,15 | -0,08 | -0,14 | -0,13 | -0,05 | -0,14 | -0,06 | -0,18 | -0,02 | -0,04 | -0,07 | -0,11 | -0,13 |
| 3000                        | 110          | -0,15 | -0,12 | -0,05 | -0,12 | -0,16 | -0,15 | -0,08 | -0,05 | -0,20 | -0,15 | -0,21 | -0,16 | -0,14 | -0,11 | -0,09 | -0,19 |
| 3400                        | 112          | -0,28 | -0,08 | -0,05 | -0,13 | -0,19 | -0,07 | -0,06 | -0,01 | -0,25 | -0,26 | -0,27 | -0,29 | -0,21 | -0,12 | -0,05 | -0,26 |
| 3800                        | 70           | -0,34 | -0,06 | -0,04 | -0,10 | -0,21 | -0,07 | 0,01  | -0,11 | -0,26 | -0,22 | -0,25 | -0,43 | -0,28 | -0,11 | -0,06 | -0,24 |
| 4300                        | 85           | -0,29 | -0,01 | -0,14 | -0,15 | -0,12 | 0,04  | 0,10  | 0,03  | -0,16 | -0,20 | -0,16 | -0,48 | -0,26 | -0,13 | 0,06  | -0,18 |
| 4900                        | 43           | -0,20 | 0,12  | -0,18 | -0,06 | -0,13 | 0,22  | 0,01  | 0,00  | -0,07 | -0,14 | -0,14 | -0,57 | -0,22 | -0,12 | 0,08  | -0,12 |
| 5500                        | 26           | -0,16 | 0,16  | -0,28 | -0,10 | -0,08 | 0,41  | -0,32 | -0,02 | 0,08  | 0,09  | 0,17  | -0,52 | -0,18 | -0,15 | 0,03  | 0,13  |
| 6100                        | 10           | -0,17 | 0,19  | -0,45 | -0,12 | -0,04 | 0,43  | -0,39 | 0,00  | 0,11  | 0,25  | 0,25  | -0,29 | -0,09 | -0,20 | 0,01  | 0,20  |



### О ВЛИЯНИИ ВРЕМЕНИ ОСРЕДНЕНИЯ НА ТОЧНОСТЬ ИНЕРЦИОННОГО ПРИБОРА

Метеорологические наблюдения производятся с помощью инерционных приборов, сглаживающих турбулентные пульсации измеряемых величин. В связи с этим встает вопрос о том, в каком соотношении находятся данные отсчетов по инерционному прибору с истинными значениями метеорологических элементов, осредненными за тот или иной период.

В статьях [1, 2] рассмотрена задача о точности замены осредненных за некоторый период времени значений метеорологических элементов мгновенными отсчетами по инерционным приборам. Из полученных результатов видно, что эта точность даже при наиболее благоприятном выборе соотношения периода осреднения и постоянной времени прибора не всегда достаточна для практических целей.

Можно попытаться уменьшить эту ошибку путем надлежащего осреднения показаний инерционного прибора. Этот вопрос затрагивался в статье [3], где показано, каким способом можно произвести такое осреднение.

В настоящей статье оценивается точность, с которой такие осредненные показания инерционного прибора характеризуют средние значения метеорологических элементов, если временная корреляционная функция измеряемого метеорологического элемента описывается экспоненциальной зависимостью.

Пусть производятся мгновенные отсчеты величины  $f$  по линейному прибору с постоянной времени  $T_0$ . В этом случае показания прибора  $f_1$  связаны с истинными значениями измеряемой величины  $f$  дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{df_1(t)}{dt} + \frac{1}{T_0} f_1(t) = \frac{1}{T_0} f(t). \quad (1)$$

Если прибор установлен достаточно давно, то влиянием начальных условий можно пренебречь и показания прибора в момент времени  $t$  определяются формулой

$$f_1(t) = \frac{1}{T_0} \int_{-\infty}^t f(t') e^{-\frac{t-t'}{T_0}} dt'. \quad (2)$$

Нас интересует среднее арифметическое значение величины  $f$  за период времени  $T$ ,

$$f_2(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t f(t') dt'. \quad (3)$$

Если в течение этого же периода времени производится осреднение показаний инерционного прибора  $f_1$ , получим

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t f_1(t') dt' = \frac{1}{TT_0} \int_{t-T}^t \int_{-\infty}^{t'} f(t'') e^{-\frac{t'-t''}{T_0}} dt'' dt' \quad (4)$$

или после некоторых преобразований

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{T} \left\{ \int_{t-T}^t f(t') dt' + \int_{-\infty}^{t-T} f(t') e^{-\frac{(t-T)-t'}{T_0}} dt' - \int_{-\infty}^t f(t') e^{-\frac{t-t'}{T_0}} dt' \right\}, \quad (5)$$

т. е. средняя из показаний линейного прибора определяется формулой

$$\tilde{f}(t) = f_2(t) + \frac{T_0}{T} [f_1(t-T) - f_1(t)]. \quad (6)$$

Так как в силу инерционности прибора он реагирует на турбулентные пульсации, происходящие в атмосфере, с запозданием, можно ожидать, что показания его ближе к значениям измеряемой величины в некоторый предшествующий момент, чем к синхронным значениям. Поэтому рассмотрим случай, когда период осреднения величины  $f$  смещен относительно периода осреднения по инерционному прибору. Тогда среднее арифметическое величины  $f$  за период  $T$

$$f_2(t-a) = \frac{1}{T} \int_{t-a-T}^{t-a} f(t') dt', \quad (7)$$

где  $a$  — отставание конца периода осреднения величины  $f$  относительно конца периода осреднения по прибору.

Мерой ошибки осредненных показаний инерционного прибора будет средний квадрат разности  $\tilde{f}(t)$  и  $f_2(t-a)$

$$\begin{aligned} E^2 &= [\tilde{f}(t) - f_2(t-a)]^2 = \\ &= \left[ \frac{1}{T} \left\{ \int_{t-T}^t f(t') dt' + \int_{-\infty}^{t-T} f(t') e^{-\frac{(t-T)-t'}{T_0}} dt' - \int_{-\infty}^t f(t') e^{-\frac{t-t'}{T_0}} dt' \right\} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{T} \int_{t-a-T}^{t-a} f(t') dt' \right]^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Черта сверху означает статистическое осреднение.

Введем временную корреляционную функцию метеорологического элемента  $f$  по формуле

$$R_f(|t' - t''|) = \overline{f(t') f(t'')} = \overline{f(t')} \cdot \overline{f(t'')}. \quad (9)$$

Ограничимся рассмотрением статистически стационарных измеряемых величин, тогда  $E^2$  не должна зависеть от времени. Достаточно оценить ее для момента времени  $t=0$ .

Возведя в квадрат (8) и учитывая (9), получим

$$\begin{aligned}
 E^2 = & \frac{2}{T^2} \int_{-T}^0 \int_{-T}^0 R_f(|t' - t''|) dt' dt'' + \frac{2}{T^2} \left[ \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 R_f(|t' - t''|) \times \right. \\
 & \times e^{\frac{t' - t''}{T_0}} dt' dt'' - \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^T R_f(|t' - t''|) e^{\frac{T - t' - t''}{T_0}} dt' dt'' \Big] + \\
 & + \frac{2}{T^2} \left[ \int_{-\infty}^0 \int_0^T R_f(|t'' - t'|) e^{\frac{t'}{T_0}} dt' dt'' - \int_{-\infty}^0 \int_{-T}^0 R_f(|t'' - t'|) e^{\frac{t'}{T_0}} dt' dt'' \right] - \\
 & - \frac{2}{T^2} \int_{-T}^0 \int_{a-T}^a R_f(|t' - t''|) dt' dt'' - \frac{2}{T^2} \int_{-\infty}^0 \int_{-a}^{T-a} R_f(|t'' - t'|) \times \\
 & \times e^{\frac{t'}{T_0}} dt' dt'' + \frac{2}{T^2} \int_{-\infty}^0 \int_{-a-T}^{-a} R_f(|t'' - t'|) e^{\frac{t'}{T_0}} dt' dt''. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Двойные интегралы в (10) могут быть сведены к простым, после чего получим

$$\begin{aligned}
 E^2 = & \frac{2}{T^2} \int_{-T}^T (T - |t|) R_f(|t|) dt + \frac{T_0}{T^2} \left[ \int_0^\infty R_f(|t|) e^{-\frac{t}{T_0}} dt + \right. \\
 & + \int_0^\infty R_f(|t|) e^{-\frac{t}{T_0}} dt - e^{-\frac{T}{T_0}} \int_0^\infty R_f(|t|) e^{-\frac{t}{T_0}} dt - \\
 & - e^{\frac{T}{T_0}} \int_T^\infty R_f(|t|) e^{-\frac{t}{T_0}} dt - e^{-\frac{T}{T_0}} \int_0^T R_f(|t|) e^{\frac{t}{T_0}} dt \Big] + \\
 & + \frac{2T_0}{T^2} \left[ \int_0^T R_f(|t|) dt - \int_0^T R_f(|t|) e^{-\frac{t}{T_0}} dt + \right. \\
 & + e^{\frac{T}{T_0}} \left( 1 - e^{-\frac{T}{T_0}} \right) \int_T^\infty R_f(|t|) e^{-\frac{t}{T_0}} dt - \int_{-T}^0 R_f(|t|) dt + \\
 & + e^{-\frac{T}{T_0}} \int_{-T}^0 R_f(|t|) e^{-\frac{t}{T_0}} dt - \left( 1 - e^{-\frac{T}{T_0}} \right) \int_0^\infty R_f(|t|) e^{-\frac{t}{T_0}} dt \Big] - \\
 & - \frac{2}{T^2} \int_{a-T}^{a+T} (T - |a - t|) R_f(|t|) dt - \frac{2T_0}{T^2} \left[ \int_{-a}^{T-a} R_f(|t|) dt - e^{-\frac{a}{T_0}} \times \right. \\
 & \times \int_{-a}^{T-a} R_f(|t|) e^{-\frac{t}{T_0}} dt + e^{\frac{T-a}{T_0}} \left( 1 - e^{-\frac{T}{T_0}} \right) \times \\
 & \times \int_{T-a}^\infty R_f(|t|) e^{-\frac{t}{T_0}} dt \Big] + \frac{2T_0}{T^2} \left[ \int_{-a-T}^{-a} R_f(|t|) dt - \right. \\
 & - e^{-\frac{-a-T}{T_0}} \int_{-a-T}^{-a} R_f(|t|) e^{-\frac{t}{T_0}} dt + e^{-\frac{a}{T_0}} \times \\
 & \times \left( 1 - e^{-\frac{T}{T_0}} \right) \int_{-a}^\infty R_f(|t|) e^{-\frac{t}{T_0}} dt \Big]. \quad (11)
 \end{aligned}$$

Для прибора с заданной постоянной времени погрешность в определении средней  $E^2$  зависит как от периода осреднения  $T$ , так и от его смещения  $a$ . Наибольший интерес представляет нахождение такого значения  $a$ , при котором погрешность будет минимальной.

При  $a=0$  период осреднения по прибору совпадает с периодом осреднения метеорологического элемента.

При  $T=0$  получаем оценку точности, с которой мгновенный отсчет по инерционному прибору характеризует мгновенные значения метеорологического элемента. Этот случай рассмотрен в работе [3].

После подстановки в (11) корреляционной функции метеорологического элемента и решения задачи на экстремум можно найти оптимальное смещение периода осреднения и соответствующую ему минимальную относительную ошибку. Будем считать, что временная корреляционная функция измеряемой величины имеет вид

$$R_f(\tau) = \sigma_f^2 e^{-\alpha|\tau|}, \quad (12)$$

где  $\sigma_f^2$  — дисперсия величины  $f$ .

Введем безразмерный период осреднения  $\tilde{T} = \frac{T}{T_0}$ , а также  $\tilde{a} = \frac{a}{T_0}$  и  $\beta = \alpha T_0$  — безразмерный параметр,  $\varepsilon^2 = \frac{E^2}{\sigma_f^2}$ .

Подстановка (12) в (11) дает

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(a, T) = & \frac{2}{\tilde{T}^2} \left\{ \frac{2}{\beta^2} (\beta \tilde{T} + e^{-\beta \tilde{T}} - 1) - \frac{1}{\beta^2 - 1} (e^{-\beta \tilde{T}} - \beta e^{-\tilde{T}}) - \frac{1}{\beta + 1} \right\} - \\ & - 2F(T, a) \\ F(T, a) = & P(a) + \frac{1}{\tilde{T}} [Q(T - a) - L(-a)], \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$P(a) = \begin{cases} \text{при } \tilde{T} \geq |\tilde{a}| \\ \frac{1}{\tilde{T}^{2\beta^2}} [e^{-\beta(|\tilde{a}| + \tilde{T})} + e^{-\beta(\tilde{T} - |\tilde{a}|)} - 2e^{-\beta|\tilde{a}|} + 2\beta(\tilde{T} - |\tilde{a}|)] \\ \text{при } \tilde{T} \leq |\tilde{a}| \\ \frac{1}{\tilde{T}^{2\beta^2}} [(e^{\beta \tilde{T}} + e^{-\beta \tilde{T}} - 2)e^{-\beta|\tilde{a}|}] \end{cases}$$

$$Q(T - a) = \begin{cases} \text{при } a \geq 0, \quad T \geq a \\ \frac{1}{\tilde{T}} \left\{ \frac{2}{\beta} + e^{-\beta \tilde{a}} \frac{1}{\beta(\beta - 1)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\beta(\beta + 1)} e^{-\beta(\tilde{T} - \tilde{a})} - \frac{2\beta}{\beta^2 - 1} e^{-\tilde{a}} \right\} \\ \text{при } T \leq a \\ \frac{1}{\tilde{T}} \left\{ \frac{1}{\beta(\beta - 1)} [e^{-\beta \tilde{a}} - e^{\beta(\tilde{T} - \tilde{a})}] + \right. \\ \left. + \frac{2\beta}{\beta^2 - 1} (e^{\tilde{T} - \tilde{a}} - e^{-\tilde{a}}) \right\} \\ \text{при } a \leq 0 \\ \frac{1}{\tilde{T}^{\beta(\beta + 1)}} [e^{-\beta(\tilde{T} - \tilde{a})} - e^{\beta \tilde{a}}] \end{cases}$$

$$L(-a) = \begin{cases} \text{при } a \geq 0 \\ \frac{1}{\tilde{T}} \left\{ \frac{1}{\beta(\beta-1)} [e^{-\beta(\tilde{a}+\tilde{T})} - e^{-\beta\tilde{a}}] + \frac{2\beta}{\beta^2-1} [e^{-\tilde{a}} - e^{-(\tilde{a}+\tilde{T})}] \right\} \\ \\ \text{при } a \leq 0, \quad |a| \geq T \\ \frac{1}{\tilde{T}\beta(\beta+1)} [e^{\beta(\tilde{a}+\tilde{T})} - e^{\beta\tilde{a}}] \\ \\ \text{при } |a| \leq T \\ \frac{1}{\tilde{T}} \left\{ \frac{2}{\beta} + \frac{1}{\beta(\beta-1)} e^{-\beta(\tilde{a}+\tilde{T})} - \frac{1}{\beta(\beta+1)} e^{\beta\tilde{a}} - \right. \\ \left. - \frac{2\beta}{\beta^2-1} e^{-(\tilde{a}+\tilde{T})} \right\} \end{cases}$$

Варьируя смещение периода осреднения  $\tilde{a}$ , можно подобрать такое значение его  $\tilde{a}_{\text{опт}}$ , для которого  $\epsilon^2$  является минимальным. Практически нахождение минимума сводится к решению соответствующего трансцендентного уравнения. Это решение для различных значений интервала осреднения  $T$  и параметра  $\beta$  осуществлялось на ЭВМ «Урал-2».

Полученные оптимальные значения  $\tilde{a}_{\text{опт}}$  и соответствующая им минимальная относительная ошибка  $\epsilon^2_{\text{мин}}$  приведены в табл. 2, 3. Значения относительной ошибки для случая отсутствия сдвига ( $\tilde{a}=0$ ) приведены в табл. 1.

При  $\beta=1$  уравнение (13) может быть решено путем раскрытия неопределенности. Для этого случая формула (13) упрощается и имеет вид

$$\epsilon^2 = \frac{4\tilde{T} + (\tilde{T}+5)e^{-\tilde{T}} - 5}{\tilde{T}^2} - 2F(a, T),$$

где

$$F(a, T) = P(a) + \frac{1}{\tilde{T}} [Q(T-a) - L(-a)], \quad (14)$$

$$P(a) = \begin{cases} \text{при } T \geq |a| \\ \frac{1}{\tilde{T}^2} [e^{-(|\tilde{a}|+\tilde{T})} + e^{-(\tilde{T}-|\tilde{a}|)} - 2e^{-\tilde{a}} + 2(\tilde{T}-|\tilde{a}|)] \\ \\ \text{при } T \leq |a| \\ \frac{1}{\tilde{T}^2} [e^{\tilde{T}} + e^{-\tilde{T}} - 2]e^{-\tilde{a}} \end{cases}$$

$$L(-a) = \frac{e^{-\tilde{a}}(\tilde{2a}+3) - e^{-(\tilde{a}+\tilde{T})}(\tilde{2a}+2\tilde{T}+3)}{2\tilde{T}},$$

$$Q(T-a) = \begin{cases} \text{при } T \geq a \\ \frac{4 - 3e^{-\tilde{a}} - e^{(\tilde{a}-\tilde{T})} - 2\tilde{a}e^{-\tilde{a}}}{2\tilde{T}} \\ \text{при } T \leq a \\ \frac{e^{(\tilde{T}-\tilde{a})}(\tilde{2a}-2\tilde{T}+3) - e^{-\tilde{a}}(\tilde{2a}+3)}{2\tilde{T}} \end{cases}$$

Из табл. 2 видно, что оптимальное смещение периода осреднения  $\tilde{a}_{\text{опт}}$  для всех значений  $\beta$  положительно. Следовательно, показания прибора ближе к значениям измеряемой величины в некоторый предшествующий момент, чем к синхронным значениям. С ростом периода осреднения  $\tilde{a}_{\text{опт}}$  увеличивается и при  $\beta < 0,5$  близко к единице, т. е. близко к единице уже при  $T \approx 10T_0$ . Дальнейшее увеличение периода осреднения практически мало меняет  $\tilde{a}_{\text{опт}}$  во всем диапазоне значений параметра  $\beta$ . С ростом параметра  $\beta$  имеет место уменьшение величины  $\tilde{a}_{\text{опт}}$ , уменьшаются также предельные значения его при больших  $\tilde{T}$ .

Сравнение величины относительной ошибки, рассчитанной при  $\tilde{a}=0$  и  $\tilde{a}=\tilde{a}_{\text{опт}}$  показывает, что разница между ними существенна для небольших значений параметра  $\beta$  и увеличивается с ростом периода осреднения.

Увеличивая период осреднения до величин, превышающих постоянную времени прибора в два и более раз, можно добиться уменьшения относительной ошибки при  $a=a_{\text{опт}}$  по сравнению с  $a=0$  на порядок и больше. При значениях  $\beta > 2$  смещение периода осреднения приводит к значительному уменьшению относительной ошибки только при периоде осреднения большем постоянной времени прибора.

Представляет интерес сравнить погрешность осредненных показаний прибора с погрешностями, которые возникают при использовании мгновенных отсчетов. Для этой цели в табл. 4 приведены взятые из [2] величины относительной ошибки замены средней по периоду  $T$  мгновенным отсчетом по прибору, выполненным в конце периода. Из сопоставления данных табл. 4 с данными табл. 1 можно сказать, что при периодах осреднения  $T < 5T_0$  относительная ошибка осредненных показаний инерционного прибора больше, чем при мгновенном отсчете по инерционному прибору. При периодах осреднения, более чем в пять раз превышающих постоянную времени прибора, относительная ошибка осредненных показаний инерционного прибора в 4—6 раз меньше. В последней строке табл. 4 приведена для сравнения минимальная относительная ошибка при оптимальном периоде осреднения.

Таким образом, осреднение показаний инерционного прибора имеет смысл при периодах осреднения, в пять и более раз превышающих постоянную времени прибора.

При наличии осредненных показаний прибора можно, пользуясь табл. 1 и 3, оценить их точность.

При обработке записей интегратора полученные осредненные показания прибора целесообразно относить не к синхронным значениям измеряемой величины, а к значениям, сдвинутым на величину  $\tilde{a}_{\text{опт}}$ , которую можно получить из данных табл. 2.

Таблица I

Относительная ошибка осредненных показаний инерционного прибора при  $\alpha=0$ 

| $\tilde{T}$ | $\beta$ |        |        |        |        |        |        |        |                    |                    |                    |                    |                    |
|-------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
|             | 0,01    | 0,02   | 0,05   | 0,1    | 0,2    | 0,5    | 1,0    | 2,0    | 5,0                | 10,0               | 20,0               | 50,0               | 100,0              |
| 0           | 0,0099  | 0,0196 | 0,0476 | 0,0909 | 0,1667 | 0,3330 | 0,5000 | 0,6667 | 0,8333             | 0,9091             | 0,9524             | 0,9804             | 0,9909             |
| 0,01        | 0,0099  | 0,0195 | 0,0474 | 0,0906 | 0,1660 | 0,3316 | 0,4967 | 0,6600 | 0,8169             | 0,8766             | 0,8889             | 0,8325             | 0,7259             |
| 0,02        | 0,0099  | 0,0195 | 0,0473 | 0,0902 | 0,1653 | 0,3300 | 0,4934 | 0,6535 | 0,8008             | 0,8456             | 0,8314             | 0,7152             | 0,5578             |
| 0,05        | 0,0097  | 0,0193 | 0,0470 | 0,0893 | 0,1634 | 0,3251 | 0,4836 | 0,6343 | 0,7551             | 0,7615             | 0,6883             | 0,4868             | 0,3107             |
| 0,1         | 0,0096  | 0,0190 | 0,0460 | 0,0876 | 0,1602 | 0,3171 | 0,4678 | 0,6037 | 0,6862             | 0,6455             | 0,5206             | 0,3013             | 0,1703             |
| 0,2         | 0,0093  | 0,0183 | 0,0444 | 0,0846 | 0,1539 | 0,3019 | 0,4380 | 0,5476 | 0,5713             | 0,4788             | 0,3313             | 0,1513             | 0,0856             |
| 0,5         | 0,0084  | 0,0166 | 0,0402 | 0,0762 | 0,1372 | 0,2510 | 0,3686 | 0,4128 | 0,3498             | 0,2377             | 0,1377             | 0,0578             | 0,0307             |
| 1,0         | 0,0073  | 0,0143 | 0,0344 | 0,0645 | 0,1143 | 0,2064 | 0,2640 | 0,2664 | 0,1806             | 0,1075             | 0,0584             | 0,0245             | 0,0124             |
| 2,0         | 0,0056  | 0,0110 | 0,0260 | 0,0479 | 0,0816 | 0,1332 | 0,1485 | 0,1246 | 0,0692             | 0,0386             | 0,0204             | 0,0084             | 0,0043             |
| 5,0         | 0,0031  | 0,0060 | 0,0138 | 0,0238 | 0,0361 | 0,0449 | 0,0384 | 0,0263 | 0,0132             | 0,0072             | 0,0038             | 0,0016             | 0,0008             |
| 10,0        | 0,0017  | 0,0032 | 0,0069 | 0,0108 | 0,0138 | 0,0132 | 0,0100 | 0,0067 | 0,0033             | 0,0018             | 0,0010             | 0,0004             | 0,0002             |
| 20,0        | 0,0008  | 0,0015 | 0,0029 | 0,0039 | 0,0041 | 0,0033 | 0,0025 | 0,0017 | 0,0008             | 0,0004             | 0,0002             | 0,0001             | 5·10 <sup>-5</sup> |
| 50,0        | 0,0003  | 0,0005 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0007 | 0,0005 | 0,0004 | 0,0003 | 0,0001             | 0,0001             | 4·10 <sup>-5</sup> | 2·10 <sup>-5</sup> | 8·10 <sup>-5</sup> |
| 100,0       | 0,0001  | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0002 | 0,0001 | 0,0001 | 0,0001 | 3·10 <sup>-5</sup> | 1·10 <sup>-5</sup> | 1·10 <sup>-5</sup> | 4·10 <sup>-6</sup> | 2·10 <sup>-5</sup> |

Таблица 2

Оптимальное смещение периода осреднения величины  $f$  относительно кода периода осреднения по прибору

| $\tau$ | $\beta$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |       |
|--------|---------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-------|
|        | 0,01    | 0,02 | 0,05 | 0,1  | 0,2  | 0,5  | 1,0  | 2,0  | 5,0  | 10,0 | 20,0 | 50,0 | 100,0 |
| 0      | 0,69    | 0,69 | 0,68 | 0,66 | 0,64 | 0,58 | 0,50 | 0,41 | 0,28 | 0,19 | 0,12 | 0,07 | 0,04  |
| 0,01   | 0,70    | 0,69 | 0,68 | 0,67 | 0,64 | 0,58 | 0,50 | 0,41 | 0,28 | 0,19 | 0,12 | 0,07 | 0,04  |
| 0,02   | 0,70    | 0,70 | 0,68 | 0,67 | 0,64 | 0,58 | 0,50 | 0,41 | 0,28 | 0,19 | 0,12 | 0,07 | 0,04  |
| 0,05   | 0,70    | 0,70 | 0,69 | 0,67 | 0,64 | 0,58 | 0,50 | 0,41 | 0,28 | 0,19 | 0,13 | 0,08 | 0,06  |
| 0,1    | 0,71    | 0,71 | 0,70 | 0,68 | 0,64 | 0,58 | 0,50 | 0,41 | 0,28 | 0,20 | 0,14 | 0,10 | 0,09  |
| 0,2    | 0,72    | 0,72 | 0,70 | 0,69 | 0,65 | 0,58 | 0,51 | 0,42 | 0,29 | 0,23 | 0,18 | 0,17 | 0,17  |
| 0,5    | 0,72    | 0,72 | 0,70 | 0,70 | 0,66 | 0,61 | 0,53 | 0,47 | 0,38 | 0,35 | 0,34 | 0,33 | 0,33  |
| 1,0    | 0,80    | 0,83 | 0,80 | 0,74 | 0,73 | 0,68 | 0,63 | 0,58 | 0,52 | 0,50 | 0,49 | 0,49 | 0,49  |
| 2,0    | 0,90    | 0,90 | 0,87 | 0,84 | 0,82 | 0,79 | 0,74 | 0,70 | 0,65 | 0,63 | 0,63 | 0,62 | 0,62  |
| 5,0    | 0,95    | 0,95 | 0,93 | 0,93 | 0,92 | 0,89 | 0,81 | 0,79 | 0,72 | 0,70 | 0,69 | 0,69 | 0,69  |
| 10,0   | 1,00    | 0,99 | 0,98 | 0,96 | 0,95 | 0,91 | 0,83 | 0,79 | 0,73 | 0,70 | 0,70 | 0,69 | 0,69  |
| 20,0   | 1,00    | 1,00 | 0,98 | 0,98 | 0,98 | 0,91 | 0,83 | 0,79 | 0,73 | 0,70 | 0,70 | 0,69 | 0,69  |
| 50,0   | 1,00    | 1,00 | 0,99 | 0,99 | 0,99 | 0,91 | 0,83 | 0,79 | 0,73 | 0,70 | 0,70 | 0,69 | 0,69  |
| 100,0  | 1,00    | 1,00 | 1,00 | 0,99 | 0,99 | 0,91 | 0,83 | 0,79 | 0,73 | 0,70 | 0,70 | 0,69 | 0,69  |



Таблица 3

Относительная ошибка осредненных показаний инерционного прибора при  $\tilde{a} = \tilde{a}_{опт}$ 

| $\tilde{\tau}$ | $\beta$           |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
|----------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
|                | 0,01              | 0,02              | 0,05              | 0,1               | 0,2               | 0,5               | 1,0               | 2,0               | 5,0               | 10,0              | 20,0              |
| 0              | 0,0039            | 0,0076            | 0,0188            | 0,0361            | 0,0737            | 0,1667            | 0,2860            | 0,4454            | 0,6600            | 0,7906            | 0,8799            |
| 0,01           | 0,0038            | 0,0076            | 0,0187            | 0,0361            | 0,0728            | 0,1652            | 0,2824            | 0,4378            | 0,6437            | 0,7575            | 0,8159            |
| 0,02           | 0,0037            | 0,0074            | 0,0184            | 0,0360            | 0,0721            | 0,1634            | 0,2795            | 0,4313            | 0,6276            | 0,7266            | 0,7584            |
| 0,05           | 0,0036            | 0,0072            | 0,0182            | 0,0358            | 0,0701            | 0,1584            | 0,2780            | 0,4122            | 0,5821            | 0,6427            | 0,6156            |
| 0,1            | 0,0036            | 0,0072            | 0,0174            | 0,0344            | 0,0667            | 0,1506            | 0,2599            | 0,3819            | 0,5138            | 0,5276            | 0,4491            |
| 0,2            | 0,0034            | 0,0065            | 0,0159            | 0,0313            | 0,0606            | 0,1356            | 0,2232            | 0,3274            | 0,4019            | 0,3652            | 0,2646            |
| 0,5            | 0,0024            | 0,0048            | 0,0131            | 0,0233            | 0,0448            | 0,0978            | 0,1486            | 0,2055            | 0,2030            | 0,1482            | 0,0897            |
| 1,0            | 0,0015            | 0,0030            | 0,0074            | 0,0143            | 0,0272            | 0,0576            | 0,0802            | 0,1016            | 0,0809            | 0,0524            | 0,0301            |
| 2,0            | 0,0007            | 0,0014            | 0,0033            | 0,0064            | 0,0120            | 0,0241            | 0,0322            | 0,0331            | 0,0232            | 0,0147            | 0,0084            |
| 5,0            | 0,0002            | 0,0003            | 0,0007            | 0,0014            | 0,0024            | 0,0043            | 0,0048            | 0,0051            | 0,0037            | 0,0024            | 0,0014            |
| 10,0           | $4 \cdot 10^{-5}$ | 0,0001            | 0,0002            | 0,0003            | 0,0006            | 0,0010            | 0,0011            | 0,0013            | 0,0009            | 0,0006            | 0,0003            |
| 20,0           | $1 \cdot 10^{-5}$ | $2 \cdot 10^{-5}$ | $5 \cdot 10^{-5}$ | 0,0001            | 0,0001            | 0,0002            | 0,0002            | 0,0003            | 0,0002            | 0,0001            | 0,0001            |
| 50,0           | $2 \cdot 10^{-6}$ | $3 \cdot 10^{-6}$ | $7 \cdot 10^{-6}$ | $1 \cdot 10^{-5}$ | $2 \cdot 10^{-5}$ | $4 \cdot 10^{-5}$ | $4 \cdot 10^{-5}$ | $5 \cdot 10^{-5}$ | $4 \cdot 10^{-5}$ | $2 \cdot 10^{-5}$ | $1 \cdot 10^{-5}$ |
| 100,0          | $4 \cdot 10^{-7}$ | $8 \cdot 10^{-7}$ | $2 \cdot 10^{-6}$ | $3 \cdot 10^{-6}$ | $6 \cdot 10^{-6}$ | $1 \cdot 10^{-5}$ | $1 \cdot 10^{-5}$ | $1 \cdot 10^{-5}$ | $9 \cdot 10^{-6}$ | $6 \cdot 10^{-6}$ | $3 \cdot 10^{-6}$ |
|                |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   | $3 \cdot 10^{-6}$ |
|                |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   |                   | $7 \cdot 10^{-7}$ |

Таблица 4

## Относительная ошибка мгновенных отсчетов инерционного прибора

| $\tilde{T}$ | $\beta$ |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|-------------|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
|             | 0,01    | 0,05   | 0,1    | 0,2    | 1,0    | 2,0    | 5,0    | 10,0   | 20,0   | 50,0   | 100,0  |
| 0           | 0,0099  | 0,0476 | 0,0909 | 0,1667 | 0,5000 | 0,6667 | 0,8333 | 0,9091 | 0,9524 | 0,9804 | 0,9909 |
| 0,1         | 0,0087  | 0,0415 | 0,0713 | 0,1418 | 0,4206 | 0,5950 | 0,6195 | 0,5825 | 0,4701 | 0,2720 | 0,1538 |
| 0,2         | 0,0075  | 0,0360 | 0,0657 | 0,1250 | 0,3583 | 0,4441 | 0,4633 | 0,3885 | 0,2691 | 0,1311 | 0,0696 |
| 0,5         | 0,0048  | 0,0227 | 0,0436 | 0,0776 | 0,2045 | 0,2348 | 0,2008 | 0,1376 | 0,0804 | 0,0351 | 0,0180 |
| 1,0         | 0,0019  | 0,0092 | 0,0173 | 0,0308 | 0,0752 | 0,0800 | 0,0598 | 0,0377 | 0,0211 | 0,0090 | 0,0046 |
| 2,0         | 0,0006  | 0,0031 | 0,0062 | 0,0121 | 0,0413 | 0,0486 | 0,0364 | 0,0223 | 0,0123 | 0,0052 | 0,0027 |
| 5,0         | —       | —      | 0,0929 | 0,1543 | 0,2381 | 0,1836 | 0,0979 | 0,0543 | 0,0274 | 0,0118 | 0,0060 |
| 1,7         | 0,0006  | 0,0028 | 0,0055 | 0,0103 | 0,0339 | 0,0409 | 0,0325 | 0,0205 | 0,0114 | 0,0049 | 0,0025 |

## ЛИТЕРАТУРА

1. Каган Р. Л. К учету инерции прибора при метеорологических измерениях. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1964.
2. Брагинская Л. Л., Каган Р. Л. О точности определения средних величин по мгновенным отсчетам инерционных приборов. Труды ГГО, вып. 174, 1965.
3. Каган Р. Л. Об учете инерции прибора при метеорологических измерениях. Труды ГГО, вып. 174, 1965.

## О СРАВНЕНИИ ПОКАЗАНИЙ ИНЕРЦИОННЫХ ПРИБОРОВ

Одним из важных вопросов методики метеорологических измерений является вопрос о репрезентативности полученных данных. В частности, представляет интерес определение того интервала времени, к которому может быть отнесено наблюдение. Автором в работе [1] выполнены такие оценки для случая линейного прибора первого порядка. Показания такого прибора  $f_1$  связаны с истинными значениями измеряемой величины  $f$  дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{df_1(t)}{dt} + \frac{1}{T} f_1(t) = \frac{1}{T} f(t), \quad (1)$$

где  $T$  — постоянная времени прибора.

Если прибор установлен достаточно давно, то влиянием начальных условий можно пренебречь и показания прибора в момент времени  $t$  определяются формулой

$$f_1(t) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^t f(t') e^{-\frac{t-t'}{T}} dt'. \quad (2)$$

А. М. Яглом [2] показал, что, располагая данными о статистической структуре измеряемой величины, можно оценить возможные различия между показаниями прибора с заданной инерцией и показаниями безынерционного прибора. Некоторые оценки такого рода содержатся также в [1]. Может быть решена и обратная задача нахождения постоянной времени прибора по данным об отклонениях его показаний от показаний безынерционного прибора.

В действительности, однако, совершенно безынерционных приборов не существует. Любой прибор имеет некоторую инерцию, в связи с чем при подобного рода сравнениях всегда приходится иметь дело с разностями в отсчетах по двум инерционным приборам. В связи с этим возникает задача такого подбора инерции прибора, чтобы искажающее влияние ее оказалось мало. В тех случаях, когда этого добиться нельзя, необходимо осуществлять пересчет с учетом реальной инерции.

Пусть производятся измерения с помощью двух приборов, постоянные времени которых обозначим соответственно  $T_1$  и  $T_2$ . Согласно (2), их

показания связаны со значениями метеорологического элемента  $f$  следующими формулами:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{1}{T_1} \int_{-\infty}^t f(t') e^{\frac{t'-t}{T_1}} dt'; \\ f_2(t) &= \frac{1}{T_2} \int_{-\infty}^t f(t') e^{\frac{t'-t}{T_2}} dt'. \end{aligned} \quad (3)$$

Для статистически стационарной величины  $f$  средние арифметические значения  $f_1$  и  $f_2$  совпадают. Оценим среднее квадратическое различие между ними. При этом учтем, что при визуальном отсчете (и последующей записи) показаний моменты отсчетов по обоим приборам не совпадают.<sup>1</sup>

Будем считать, что измерение по второму прибору осуществляется через время  $\tau$  после измерения по первому прибору. Тогда

$$E(\tau) = \overline{[f_1(t) - f_2(t + \tau)]^2}. \quad (4)$$

Черта сверху означает осреднение по статистическому ансамблю. Подставим в (4) выражение (3) и введем временную корреляционную функцию измеряемой величины, тогда

$$R_f(\tau) = \overline{f(t)f(t+\tau)} - \overline{f(t)} \cdot \overline{f(t+\tau)}. \quad (5)$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} E(\tau) &= \frac{1}{T_1^2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 R_f(|t' - t''|) e^{\frac{t' + t''}{T_1}} dt' dt'' + \\ &+ \frac{1}{T_2^2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 R_f(|t' - t''|) e^{\frac{t' + t''}{T_2}} dt' dt'' - \\ &- \frac{2e^{-\frac{\tau}{T_2}}}{T_1 T_2} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{\tau} R_f(|t' - t''|) e^{\frac{t'}{T_1} + \frac{t''}{T_2}} dt' dt''. \end{aligned} \quad (6)$$

Двойные интегралы в формуле (6) могут быть сведены к простым. Например, для третьего интеграла это может быть сделано после замены переменных в нем

$$\frac{t'}{T_1} + \frac{t''}{T_2} = \xi; \quad t' - t'' = \eta. \quad (7)$$

При этом

$$dt' dt'' = \left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(t', t'')} \right| d\xi d\eta = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} d\xi d\eta. \quad (8)$$

Область интегрирования для рассматриваемого интеграла представлена на рис. 1.

<sup>1</sup> В действительности не совпадают также и точки, в которых размещены датчики приборов, что вызовет дополнительное различие между их показаниями. Будем, однако, пренебрегать этими различиями, полагая расстояние между датчиками малым по сравнению с масштабом пространственной неоднородности измеряемой величины.

В результате получаем

$$\begin{aligned}
 & \int_{t'=-\infty}^0 \int_{t''=-\infty}^{\tau} R_f(|t' - t''|) e^{\frac{t'}{T_1} + \frac{t''}{T_2}} dt' dt'' = \\
 & = \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \left\{ e^{\frac{\tau}{T_1} + \frac{\tau}{T_2}} \int_{\tau}^{\infty} R_f(t) e^{-\frac{t}{T_1}} dt + \right. \\
 & \left. + \int_0^{\tau} R_f(t) e^{\frac{t}{T_2}} dt + \int_0^{\infty} R_f(t) e^{-\frac{t}{T_2}} dt \right\}. \quad (9)
 \end{aligned}$$

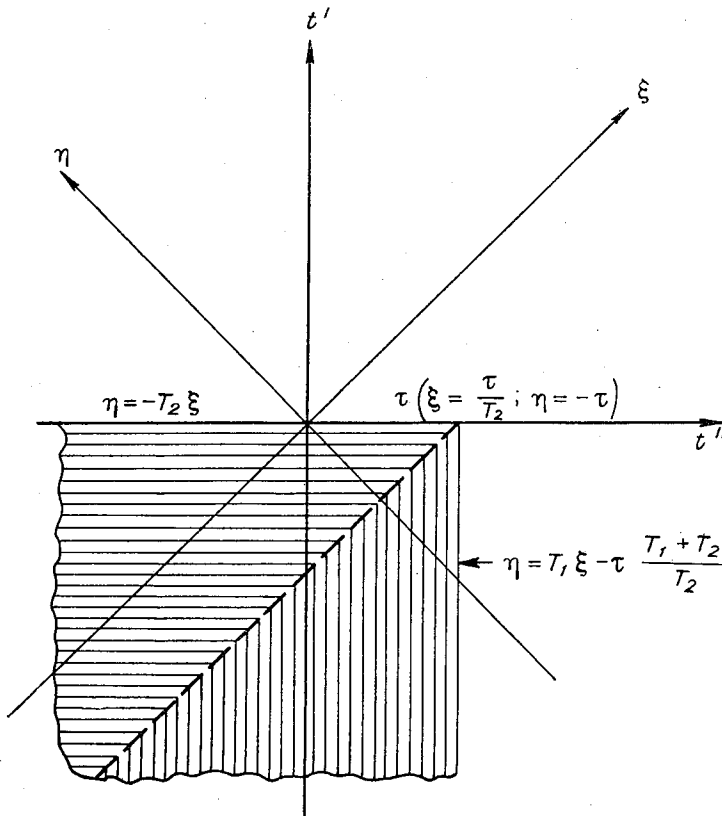


Рис. 1. Область интегрирования для двойного интеграла (9).

Подстановка (9) в формулу (6) дает

$$\begin{aligned}
 E(\tau) = & \left( \frac{1}{T_1} - \frac{2e^{-\frac{\tau}{T_1}}}{T_1 + T_2} \right) \int_0^{\infty} R_f(t) e^{-\frac{t}{T_1}} dt + \\
 & + \left( \frac{1}{T_2} - \frac{2e^{-\frac{\tau}{T_2}}}{T_1 + T_2} \right) \int_0^{\infty} R_f(t) e^{-\frac{t}{T_2}} dt - \\
 & - \frac{2}{T_1 + T_2} \int_0^{\tau} R_f(t) \left( e^{\frac{\tau-t}{T_1}} - e^{-\frac{\tau-t}{T_2}} \right) dt. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Промежуток времени  $\tau$  между отсчетами можно выбрать таким, чтобы различия были минимальными. В этом случае производная от  $E$  по  $\tau$  должна обращаться в нуль, что дает условие

$$\begin{aligned} & \frac{1}{T_1} e^{-\frac{\tau}{T_1}} \int_{\tau}^{\infty} R_f(t) e^{-\frac{t}{T_1}} dt = \\ & = \frac{1}{T_2} e^{-\frac{\tau}{T_2}} \left( \int_0^{\tau} R_f(t) e^{-\frac{t}{T_2}} dt + \int_0^{\infty} R_f(t) e^{-\frac{t}{T_2}} dt \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что оптимальное значение  $\tau$  должно быть положительным при  $T_1 < T_2$ , т. е. в том случае, если первый отсчет производится по менее инерционному прибору.

Если отсчеты производятся синхронно, то  $\tau=0$  и из (10) следует:

$$E = \frac{T_2 - T_1}{T_1 + T_2} \left\{ \frac{1}{T_1} \int_0^{\infty} R_f(t) e^{-\frac{t}{T_1}} dt - \frac{1}{T_2} \int_0^{\infty} R_f(t) e^{-\frac{t}{T_2}} dt \right\}. \quad (12)$$

Рассмотрим случай, когда временная структура измеряемой величины описывается экспоненциальной зависимостью

$$R_f(t) = \sigma_f^2 e^{-\frac{|t|}{t_0}}, \quad (13)$$

где  $\sigma_f^2$  — дисперсия величины  $f$ ,  $t_0$  — масштаб корреляции.

В этом случае для синхронных отсчетов получим

$$\varepsilon = \frac{E}{\sigma_f^2} = \frac{(\beta_1 - \beta_2)^2}{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)(\beta_1 + \beta_2)}, \quad (14)$$

где  $\beta_1 = \frac{T_1}{t_0}$ ,  $\beta_2 = \frac{T_2}{t_0}$ .

Если бы один из приборов был безынерционным (например,  $\beta_2=0$ ), мы получили бы

$$\varepsilon = \frac{\beta_1}{1 + \beta_1}. \quad (15)$$

Сравнивая (14) с (15), можно оценить, каково должно быть соотношение между  $\beta_1$  и  $\beta_2$  (а следовательно, и между  $T_1$  и  $T_2$ ), чтобы второй прибор можно было считать безынерционным. Полагая допустимой десятипроцентную ошибку в величине  $\varepsilon$ , получаем

$$\beta_2 < \frac{0,1 \beta_1}{3 + \beta_1}. \quad (16)$$

Из (16) следует, что при малых инерциях  $T_1$  исследуемого прибора второй прибор может приближенно рассматриваться как безынерционный лишь в том случае, если  $T_2 < \frac{1}{30} T_1$ .

При больших  $T_1$  допустимая инерция прибора увеличивается, однако при всех условиях постоянная времени его не должна превышать  $0,1 t_0$ . При  $T_2 > 0,1 t_0$  необходимо учитывать инерцию обоих приборов.

Значения величины  $\varepsilon$  для разных сочетаний параметров  $\beta_1$  и  $\beta_2$  приводятся в табл. 1 (ниже диагонали).

Таблица 1

Мера различий  $\varepsilon$  данных двух инерционных приборов

| $\beta_1$ | $\beta_2$ |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       |                   |
|-----------|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------|
|           | 0         | 0,001 | 0,005 | 0,01  | 0,05  | 0,1   | 0,5   | 1     | 5     | 10    | 50    | 100   | 1000  | $\infty$          |
| 0         | 0         | 0,009 | 0,026 | 0,042 | 0,122 | 0,194 | 0,448 | 0,700 | 0,929 | 0,961 | 0,992 | 0,996 | 1,000 | 1,000             |
| 0,001     | 0,001     | 0     | 0,012 | 0,027 | 0,109 | 0,182 | 0,437 | 0,689 | 0,920 | 0,952 | 0,983 | 0,987 | 0,991 | 0,991             |
| 0,005     | 0,005     | 0,003 | 0     | 0,005 | 0,079 | 0,152 | 0,413 | 0,667 | 0,901 | 0,934 | 0,965 | 0,969 | 0,973 | 0,974             |
| 0,01      | 0,010     | 0,007 | 0,002 | 0     | 0,054 | 0,125 | 0,390 | 0,645 | 0,884 | 0,918 | 0,980 | 0,954 | 0,957 | 0,958             |
| 0,05      | 0,048     | 0,045 | 0,035 | 0,025 | 0     | 0,024 | 0,266 | 0,522 | 0,791 | 0,830 | 0,868 | 0,878 | 0,877 | 0,878             |
| 0,1       | 0,091     | 0,088 | 0,081 | 0,066 | 0,014 | 0     | 0,169 | 0,414 | 0,706 | 0,752 | 0,794 | 0,800 | 0,805 | 0,806             |
| 0,5       | 0,333     | 0,331 | 0,322 | 0,311 | 0,234 | 0,162 | 0     | 0,084 | 0,394 | 0,474 | 0,537 | 0,543 | 0,551 | 0,552             |
| 1         | 0,500     | 0,498 | 0,490 | 0,480 | 0,409 | 0,335 | 0,056 | 0     | 0,153 | 0,214 | 0,281 | 0,290 | 0,299 | 0,300             |
| 5         | 0,833     | 0,832 | 0,827 | 0,820 | 0,770 | 0,713 | 0,409 | 0,222 | 0     | 0,011 | 0,051 | 0,060 | 0,070 | 0,071             |
| 10        | 0,909     | 0,908 | 0,909 | 0,897 | 0,853 | 0,802 | 0,521 | 0,335 | 0,025 | 0     | 0,020 | 0,029 | 0,060 | 0,039             |
| 50        | 0,980     | 0,979 | 0,975 | 0,970 | 0,931 | 0,886 | 0,634 | 0,462 | 0,120 | 0,048 | 0     | 0,001 | 0,007 | 0,008             |
| 100       | 0,989     | 0,988 | 0,984 | 0,979 | 0,942 | 0,897 | 0,650 | 0,480 | 0,142 | 0,066 | 0,003 | 0     | 0,003 | 0,004             |
| 1000      | 0,999     | 0,998 | 0,994 | 0,989 | 0,951 | 0,908 | 0,662 | 0,498 | 0,164 | 0,088 | 0,017 | 0,007 | 0     | $4 \cdot 10^{-4}$ |
| $\infty$  | 1,000     | 0,999 | 0,995 | 0,990 | 0,953 | 0,909 | 0,667 | 0,500 | 0,167 | 0,091 | 0,020 | 0,010 | 0,001 | 0                 |

Для случая степенной структуры

$$R_f(t) = \begin{cases} \sigma_f^2 \left[ 1 - \left| \frac{t}{t_0} \right|^n \right] & \text{при } t \leq t_0 \\ 0 & \text{при } t \geq t_0 \end{cases} \quad (17)$$

Различия между показаниями приборов характеризуются формулой

$$\epsilon = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 + \beta_2} \left[ e^{-\frac{1}{\beta_2}} - e^{-\frac{1}{\beta_1}} + \beta_2^n \gamma\left(\frac{1}{\beta_2}, n+1\right) - \beta_1^n \gamma\left(\frac{1}{\beta_1}, n+1\right) \right], \quad (18)$$

где

$$\gamma(x, n+1) = \int_0^x t^n e^{-t} dt \quad (19)$$

— неполная гамма-функция.

В случае когда постоянная времени приборов меньше масштаба корреляции  $t_0$  ( $\beta \leq 0,5$ ), можно исходить из чисто степенной структуры

$$R_f(t) = \sigma_f^2 \left[ 1 - \left| \frac{t}{t_0} \right|^n \right]. \quad (20)$$

При этом вместо формулы (18) получаем

$$\epsilon = \frac{\beta_2 - \beta_1}{\beta_1 + \beta_2} (\beta_2^n - \beta_1^n) \Gamma(n+1), \quad (21)$$

где  $\Gamma(n+1)$  — гамма-функция.

В табл. 1 (выше диагонали) приводятся значения  $\epsilon$ , полученные по формуле (18) для значения структурного параметра  $n=2/3$ . Оказывается, что для этого случая малоинерционным можно считать лишь такой прибор, постоянная времени которого по крайней мере в 30 раз меньше масштаба корреляции  $t_0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Каган Р. Л. Об учете инерции прибора при метеорологических измерениях. Труды ГГО, вып. 174, 1965.
2. Яглом А. М. Об учете инерции метеорологических приборов при измерениях в турбулентной атмосфере. Труды Геофиз. Ин-та АН СССР, № 24 (151), 1954.



**К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ  
УХОДЯЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ РАДИОМЕТРАМИ  
С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ПОЛЕМ ЗРЕНИЯ  
НА МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ СПУТНИКАХ ЗЕМЛИ<sup>1</sup>**

Обычно актинометрическая аппаратура на метеорологических спутниках включает в себя радиометры с различным пространственным разрешением. В принципе эти приборы должны решать разные задачи. Узкоугольные радиометры прежде всего предназначены для изучения статистической структуры и мелкомасштабных особенностей поля радиации, температурных профилей, расшифровки телевизионных снимков облачности и т. д. Данные узкоугольных приборов после осреднения должны давать энергетические характеристики, необходимые для учета начальных полей притока тепла при прогнозе погоды. Однако при измерениях узкоугольным сканирующим радиометром, как правило, радиация со значительной части излучающей поверхности не учитывается. При последующем осреднении получаются некоторые средневзвешенные значения потоков, точность которых необходимо оценить путем независимых измерений. Действительно, имеются основания предполагать, что узкоугольные приборы могут иметь систематические ошибки, которые, как известно, при осреднении не уничтожаются. Независимыми же измерениями могут явиться измерения, выполненные с помощью широкоугольных радиометров. Широугольные радиометры и особенно радиометры с неограниченным полем зрения предназначены для изучения крупномасштабных закономерностей пространственно-временного распределения составляющих радиационного баланса системы земля—атмосфера. С этой точки зрения полученные с помощью таких радиометров данные представляют особый интерес. Ниже мы рассмотрим некоторые аспекты проблемы интерпретации результатов измерений радиометров с неограниченным полем зрения.

Задача интерпретации результатов измерений приборов этого вида в первом приближении (пересчет измеряемых величин в потоки уходящей радиации) решена для коротковолновой части спектра в работе [12] и для длинноволновой части спектра в работах [10, 11]. Однако получаемые по данным измерений значения потоков уходящей радиации являются средними взвешенными по большой площади — в поле зрения радиометров одновременно находится около 7% всей поверхности земного шара. Причем вес, с которым входит излучение элементов системы

<sup>1</sup> Работа была доложена летом 1966 г. на VI Межведомственном совещании по актинометрии и атмосферной оптике. Тезисы доклада опубликованы в материалах совещания.

земля—атмосфера, находящихся на различных угловых расстояниях от подспутниковой точки, определяется, прежде всего, формой приемной поверхности чувствительного элемента радиометра, высотой спутника и угловым распределением уходящей радиации. При использовании имеющихся в литературе данных о среднем угловом распределении уходящей длинноволновой радиации [9], пространственной статистической структуре поля уходящего излучения [4], элементарных геометрических соображений [13] и некоторых методов теории случайных функций, приложение которых к задачам теории измерения характеристик метеорологических полей продемонстрировано в ряде работ Л. С. Гандина и Р. Л. Кагана [3, 5, 6, 7, 8], а также других авторов, ниже делается попытка выяснить физическое содержание величин уходящего излучения,

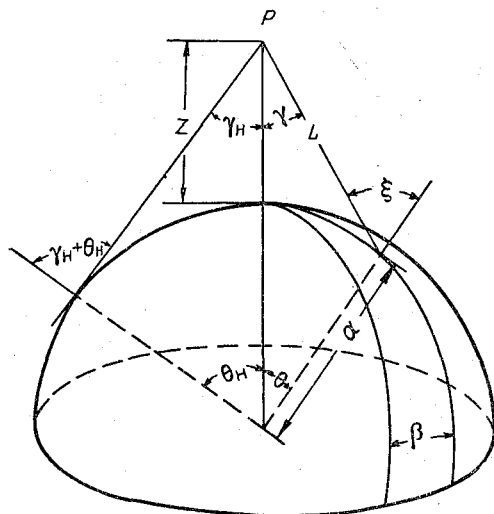


Рис. 1. Геометрия потоков излучения.

измеренных с помощью радиометров с неограниченным полем зрения и, в частности, определить масштаб осуществляемого этими приборами пространственного осреднения поля измеряемых величин. Из соображений полноты изложения задача интерпретации данных измерений радиометров с неограниченным полем зрения рассматривается в целом с единой точки зрения. Причем при получении выражения для потока излучения на уровне спутника будет следовать выводам и обозначениям работы [13].

Полагаем, что в точке  $P$  на высоте  $z$  над условной излучающей поверхностью планеты находится метеорологический спутник, оборудованный инфракрасным радиометром с неограниченным полем зрения, плоская приемная поверхность которого параллельна земной поверхности в подспутниковой точке (рис. 1). Энергия, получаемая радиометром, излучается сферической поверхностью условной верхней границы атмосферы под зенитным углом  $\xi$ .

Элементарная площадка излучающей поверхности равна

$$dA = a^2 \sin \theta d\beta d\theta, \quad (1)$$

где  $a$  — расстояние от центра планеты до верхней границы атмосферы.

Телесный угол  $d\omega$ , опирающийся на  $dA$  с вершиной в точке  $P$ , равен

$$d\omega = \frac{dA \cos \xi}{L^2}. \quad (2)$$

Поток  $d\omega$  через единичную горизонтальную площадку на  $P$ :

$$d\omega = \frac{I(\theta, \beta, \xi) \cos \alpha dA}{L^2}, \quad (3)$$

где  $I(\theta, \beta, \xi)$  — интенсивность излучения проходящего через условную верхнюю границу атмосферы под зенитным углом  $\xi$ .

Запишем вспомогательные выражения:

$$\cos \xi = \cos(\theta + \alpha) = \cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha, \quad (4)$$

$$L^2 = (a + z)^2 + a^2 - 2a(a + z) \cos \theta \quad (5)$$

( $z$  — высота спутника над уровнем верхней границы атмосферы)

$$\cos \alpha = \frac{z + a - a \cos \theta}{L}, \quad (6)$$

$$\sin \alpha = \frac{a \sin \theta}{L}, \quad (7)$$

$$\cos \theta_H = \frac{a}{a + z}, \quad (8)$$

Из (3) — (8) после упрощений следует

$$d\omega = I(\theta, \beta, \xi) \frac{(\cos \theta - \cos \theta_H)(1 - \cos \theta \cos \theta_H)}{\left(\cos \theta_H + \frac{1}{\cos \theta_H} - 2 \cos \theta\right)^2} \sin \theta d\theta d\beta. \quad (9)$$

Таким образом, поток излучения через приемную поверхность радиометра равен

$$\omega = \int_0^{2\pi} \int_0^{\theta_H} I(\theta, \beta, \xi) \frac{(\cos \theta - \cos \theta_H)(1 - \cos \theta \cos \theta_H)}{\left(\cos \theta_H + \frac{1}{\cos \theta_H} - 2 \cos \theta\right)^2} \sin \theta d\theta d\beta, \quad (10)$$

или, если ввести обозначения  $y = \cos \theta$  и  $y_H = \cos \theta_H$ ,

$$\omega = - \int_0^{2\pi} \int_1^{y_H} I(\theta, \beta, \xi) \frac{(y - y_H)(1 - yy_H)}{\left(y_H + \frac{1}{y_H} - 2y\right)^2} dy d\beta. \quad (11)$$

До настоящего времени экспериментальные данные по угловому распределению уходящей радиации оставляет желать много лучшего и наиболее надежным источником информации по этому вопросу следует считать теоретические исследования. Из подобных исследований наиболее тщательно выполнены модельные расчеты К. Я. Кондратьевым и К. Е. Якушевской [9], относящиеся к средним климатическим условиям различных сезонов умеренных и экваториальных широт.

Используя эти данные, Л. Р. Ракипова получила среднее относительное угловое распределение интенсивности уходящей радиации

$$\varphi(\xi) = \frac{I(\xi)}{I(0)}.$$

Среднее относительное угловое распределение интенсивности уходящей радиации на уровне условной верхней границы атмосферы  $\overline{\varphi}(\xi)$  представлено в табл. 1. Эти величины получены как среднее арифметическое по данным расчетов для семи выбранных в работе [10] стратификаций атмосферы.

Таблица 1

| $\xi$  | $\bar{\varphi}$ | $\xi$  | $\bar{\varphi}$ |
|--------|-----------------|--------|-----------------|
| 0      | 1               | 84°29' | 0,450           |
| 31°21' | 0,988           | 84 42  | 0,314           |
| 52 52  | 0,965           | 84 52  | 0,234           |
| 64 20  | 0,942           | 85 09  | 0,158           |
| 77 57  | 0,888           | 85 31  | 0,126           |
| 83 41  | 0,803           | 85 51  | 0,104           |
| 83 47  | 0,790           | 86 17  | 0,082           |
| 83 55  | 0,758           | 86 40  | 0,065           |
| 84 08  | 0,647           | 87 33  | 0,043           |
| 84 19  | 0,545           | 90     | 0               |

Далее предполагается, что в любой точке на условной излучающей поверхности приближенно выполняется условие

$$I(\theta, \beta, \xi) = I(\theta, \beta, 0) \bar{\varphi}(\xi) = I_0(\theta, \beta) \bar{\varphi}(\xi), \quad (12)$$

т. е. постулируем универсальность вида функции  $\bar{\varphi}(\xi)$  и независимость ее от каких-либо других параметров.

Под уходящим длинноволновым излучением системы земля—атмосфера будем подразумевать полусферической восходящий поток радиации на уровне ее условной верхней границы

$$F(\theta, \beta) = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(\theta, \beta, \xi) \cos \xi \sin \xi d\xi. \quad (13)$$

Воспользовавшись гипотезой (12), находим

$$F(\theta, \beta) = I_0(\theta, \beta) 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{\varphi}(\xi) \cos \xi \sin \xi d\xi \quad (14)$$

или

$$F(\theta, \beta) = I_0(\theta, \beta) \pi b = \frac{I(\theta, \beta, \xi) \pi b}{\bar{\varphi}(\xi)}, \quad (15)$$

где

$$b = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \bar{\varphi}(\xi) \cos \xi \sin \xi d\xi. \quad (16)$$

По данным расчетов Ракиповой [10, 11] коэффициент  $b$  имеет среднее значение 0,98.

Выражение (15) является основой для интерпретации данных измерений узкоугольных радиометров на спутнике. Действительно, узкоугольные радиометры измеряют интенсивность излучения планеты из района с координатами  $(\theta, \beta)$  под углом  $\xi$ . Имея средние значения коэффициента  $b$  и функции  $\bar{\varphi}(\xi)$  из (15), получаем  $F(\theta, \beta)$  — полусферический восходящий поток радиации над районами с координатами  $(\theta, \beta)$ . При этом

удобнее пользоваться функцией  $\overline{\varphi}(\gamma)$  вместо  $\overline{\varphi}(\xi)$ , где  $\gamma$  — углы визирования излучающей поверхности планеты радиометром, находящимся на высоте  $H$ ,

$$\gamma = \arcsin \left[ \sin \xi \frac{a_0 + H}{a} \right], \quad (17)$$

где  $a_0$  — радиус земли,  $H$  — высота спутника над поверхностью земли.

Ниже мы будем также использовать функции  $\overline{\varphi}(\theta)$  и  $\overline{\varphi}(y)$ , учитывая соотношение  $\theta = \xi - \gamma$  и принятое ранее обозначение  $y = \cos \theta$ . Теперь из (11) и (15) находим связь уходящего излучения  $F(\theta, \beta)$  с потоком радиации  $w$ , приходящим на приемную поверхность радиометра,

$$w = - \int_1^{y_H} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi b} F(y, \beta) \overline{\varphi}(y) \frac{(y - y_H)(1 - yy_H)}{\left(y_H + \frac{1}{y_H} - 2y\right)^2} d\beta dy. \quad (18)$$

Чтобы перейти от потоков излучения на уровне метеорологического спутника  $w$  к характеристикам уходящего излучения на уровне верхней границы атмосферы, нужно уточнить, какие характеристики поля уходящего излучения представляют интерес для метеорологов. По-видимому, это осредненные по различным территориям величины уходящего излучения.

Среднее уходящее излучение по площади боковой поверхности сегмента с вершиной в подспутниковой точке ограниченного значением  $\cos \theta_0 = y_0$  или соответствующим расстоянием  $\rho = a \cdot \arccos y_0$  определяется выражением:

$$F_{y_0} = \frac{1}{2\pi(y_0 - 1)} \int_1^{y_0} \int_0^{2\pi} F(y, \beta) d\beta dy. \quad (19)$$

Представим величины уходящего излучения в следующем виде:

$$F(y, \beta) = \overline{F} + F'(y, \beta), \quad (20)$$

где  $\overline{F}$  — норма (не зависит от координат внутри области находящейся в поле зрения радиометра), а  $F'(y, \beta)$  — отклонение от нормы.

Тогда

$$F_{y_0} = \overline{F} + F'_{y_0}, \quad (21)$$

где

$$F'_{y_0} = \frac{1}{2\pi(y_0 - 1)} \int_1^{y_0} \int_0^{2\pi} F'(y, \beta) d\beta dy.$$

Принятая гипотеза о малой изменчивости величин  $\overline{F}(y, \beta)$  по всему полю зрения радиометра по сравнению с величинами  $F'(y, \beta)$  подтверждается выполненными расчетами пространственного распределения средних многолетних величин уходящего излучения, показавшими существенную пространственную однородность полей норм в течение отдельных месяцев по всему земному шару.

Из анализа выражения (18) следует, что измеряемый поток излучения  $w$  пропорционален среднему взвешенному по области  $(0 \div \theta_H, \theta \div 2\pi)$  уходящему излучению системы земля—атмосфера (обозначим его через  $F_w$ )

$$F_w = kw. \quad (22)$$

Коэффициент пропорциональности  $k$  естественно определить из условия нормировки, т. е. из условия

$$\bar{F}_w = \bar{F}_{y_0} = \bar{F}, \quad \text{при } y_H \leq y \leq 1. \quad (23)$$

Черта сверху означает осреднение в статистическом смысле.

Из (18), (20) и (22) имеем

$$\begin{aligned} F_w = & -k \int_1^{y_H} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi b} \bar{F} \bar{\varphi}(y) \frac{(y-y_H)(1-y y_H)}{\left(y_H + \frac{1}{y_H} - 2y\right)^2} d\beta dy - \\ & -k \int_1^{y_H} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\pi b} F'(y, \beta) \bar{\varphi}(y) \frac{(y-y_H)(1-y y_H)}{\left(y_H + \frac{1}{y_H} - 2y\right)^2} d\beta dy = \bar{F}_w + F'_w. \end{aligned} \quad (24)$$

А поскольку  $\bar{F}'_w = 0$ , из (23) находим

$$k = \frac{-1}{\frac{2}{b} \int_1^{y_H} \bar{\varphi}(y) \frac{(y-y_H)(1-y y_H)}{\left(y_H + \frac{1}{y_H} - 2y\right)^2} dy} = \frac{1}{y_H^2}, \quad (25)$$

и тем самым обеспечиваем получение истинных значений норм уходящего излучения при осреднении данных достаточно большого числа измерений. При симметричном угловом распределении уходящей радиации  $\bar{\varphi}(\xi)$  коэффициент  $k$  зависит только от высоты спутника.

Из (24) — (25) находим выражение, раскрывающее связь между величиной  $F_w$  и полем уходящего излучения,

$$\begin{aligned} F_w = & \int_1^{y_H} \int_0^{2\pi} F(y, \beta) \psi(y) d\beta dy = \bar{F}_w + \int_1^{y_H} \int_0^{2\pi} F'(y, \beta) \psi(y) d\beta dy = \\ & = \bar{F} + F'_w, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\psi(y) = \frac{-\bar{\varphi}(y)}{\pi b y_H^2} \frac{(y-y_H)(1-y y_H)}{\left(y_H + \frac{1}{y_H} - 2y\right)^2}. \quad (27)$$

Функция  $\psi(y)$  определяет вес, с которым входит в величину  $F_w$  уходящее излучение с территорий, находящихся на различных расстояниях от подспутниковой точки.

Расчеты показывают, что ближайшие к подспутниковой точке 5% всей видимой площади дают не менее 50% измеренной величины, а 50% видимой площади 98—99%. Столь быстрое убывание весовой функции  $\psi(y)$  с увеличением расстояния от подспутниковой точки имеет своей причиной главным образом геометрические факторы, сводящие к минимальному влияние возможных погрешностей задания функции относительно углового распределения уходящей радиации  $\bar{\varphi}(\xi)$ .

Таким образом, первый этап интерпретации данных измерений широкосекторных приборов заключается в переходе от величин  $w$  — потоков излучения через приемную поверхность радиометра к величинам  $F_w$ , характеризующим поле уходящего излучения на уровне спутника. Коэффициенты  $k$  могут быть вычислены раз и навсегда, и далее задаваться таблично или с помощью какой-либо аппроксимационной формулы, например, так как это предложено в работе Л. Р. Ракиповой.

Второй этап интерпретации должен заключаться в выяснении физической сущности получаемых величин  $F_w$ , а также в оценке погрешностей первого этапа интерпретации. Сюда же относятся некоторые соображения относительно возможностей снижения этих погрешностей.

Выше указывалось, что  $F_w$  — это среднее взвешенное уходящее излучение по всей находящейся в поле зрения прибора части планеты. Чтобы определить заключающийся в значениях  $F_w$  масштаб осреднения, найдем средний квадрат разности величин  $F_{y_0}$  и  $F_w$ , т. е. средний квадрат ошибки, возникающей в том случае, когда вместо нужной величины  $F_{y_0}$  используем измеренную  $F_w$ ,

$$\delta(y_0)^2 = \overline{(F_{y_0} - F_w)^2}. \quad (28)$$

Используя (21), (26) и выполняя возведение в квадрат, имеем

$$\delta(y_0)^2 = \overline{(F'_{y_0} - F'_w)^2} = \overline{F'^2_{y_0}} - 2\overline{F'_{y_0} F'_w} + \overline{F'^2_w} \quad (29)$$

или

$$\begin{aligned} \delta(y_0)^2 &= \left[ \frac{1}{2\pi(y_0-1)} \int_1^{y_0} \int_0^{2\pi} F'(y, \beta) d\beta dy - \int_1^{y_H} \int_0^{2\pi} F'(y, \beta) \phi(y) d\beta dy \right]^2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2(y_0-1)^2} \int_1^{y_0} \int_1^{y_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{F'(y, \beta) F'(y', \beta')} d\beta d\beta' dy dy' - \\ &- \frac{1}{\pi(y_0-1)} \int_1^{y_0} \int_1^{y_H} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{F'(y, \beta) F'(y', \beta')} \phi(y) d\beta d\beta' dy dy' + \\ &+ \int_1^{y_H} \int_1^{y_H} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{F'(y, \beta) F'(y', \beta')} \phi(y) \phi(y') d\beta d\beta' dy dy'. \quad (30) \end{aligned}$$

Рассмотрим члены правой части выражения (29) или, что тоже самое, выражения (30). Первый член представляет собой дисперсию осредненных по площади  $S = a^2 2\pi(1 - y_0)$  величин уходящего излучения  $F_{y_0}$ . Обозначим ее  $\sigma_f^2(y_0)^2$ . Второй член — удвоенная ковариация величин  $F_{y_0}$  и  $F_w$ . Обозначим ее через  $A$ . Третий член представляет собой дисперсию измеренных величин  $F_w$ . Обозначим ее  $\sigma_{f_w}^2$ .

Из физических соображений ясно, что ошибка  $\delta(y_0)$  имеет минимум при некотором значении  $y_0$ , которое мы обозначим  $y_{\text{опт}}$ . Это значение  $y_{\text{опт}}$  или соответствующее ему расстояние от подспутниковой точки до границы области осреднения

$$\rho_{\text{опт}} = a \arccos y_{\text{опт}}$$

и определяет масштаб осреднения заключающийся в величинах  $F_w$ .

Выражение (30) упрощается, если предположить, что поле уходящего излучения однородно и изотропно по отношению к корреляционной функции

$$R_f(\rho) = \overline{F'(y, \beta) F'(y', \beta')}, \quad (31)$$

где

$$\rho = a \arccos \left[ y y' + \sqrt{(1 - y^2)(1 - y'^2)} \cos(\beta - \beta') \right]$$

— расстояние между точками с координатами  $(y, \beta)$  и  $(y', \beta')$  на сфере. При этом в правой части (30) можно выполнить одно интегрирование, поскольку подинтегральные функции не зависят от  $\beta$  и  $\beta'$  отдельно, а только от косинуса их разности. Действительно, введем новые переменные  $x' = \beta - \beta'$  и  $x'' = \beta + \beta'$ , тогда

$$\begin{aligned} B &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R_f[y, y', \cos(\beta - \beta')] d\beta d\beta' = \int_0^{2\pi} R_f(y, y', \cos x') \int_{x'}^{2\pi - x'} dx'' dx' = \\ &= 2 \int_0^{2\pi} (2\pi - x') R_f(y, y', \cos x') dx'. \end{aligned}$$

Обозначив далее  $x = 2\pi - x'$ , имеем

$$B = 2 \int_0^{2\pi} x R_f(y, y', x) dx. \quad (32)$$

Разделив все члены выражения (30) на  $\sigma_f^2$  — дисперсию уходящего излучения и используя (31) и (32), получаем

$$\begin{aligned} E(y_0)^2 &= \frac{\delta(y_0)^2}{\sigma_f^2} = \frac{1}{2\pi^2 (y_0 - 1)^2} \int_1^{y_0} \int_1^{y_0} \int_0^{2\pi} x r_f(y, y', x) dx dy dy' - \\ &- \frac{2}{\pi (y_0 - 1)} \int_1^{y_0} \int_1^{y_H} \int_0^{2\pi} x r_f(y, y', x) \phi(y) dx dy dy' + \\ &+ 2 \int_1^{y_H} \int_1^{y_H} \int_0^{2\pi} x r_f(y, y', x) \phi(y) \phi(y') dx dy dy', \end{aligned} \quad (33)$$

где  $E(y_0)$  — функция, характеризующая абсолютную ошибку замены средней величины  $F_{y_0}$  измеренной величиной  $F_w$ ;  $r_f(y, y', x) =$

$= \frac{R_f(y, y', x)}{\sigma_f^2}$  — нормированная автокорреляционная функция уходя-

щего излучения.

Оптимальное значение  $y_0 = y_{\text{опт}}$ , обеспечивающее минимум среднего квадрата ошибки  $\delta(y_0)^2$ , можно найти двумя способами. Из условия экстремума, решая уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dE(y_0)^2}{dy_0} &= \frac{1}{\pi (y_0 - 1)^2} \int_1^{y_0} \int_1^{y_0} \int_0^{2\pi} x r_f(y, y', x) dx dy dy' + \\ &+ \frac{1}{\pi (y_0 - 1)} \int_1^{y_0} \int_0^{2\pi} x r_f(y_0, y, x) dx dy - \frac{2}{y_0 - 1} \int_1^{y_0} \int_1^{y_H} \int_0^{2\pi} x r_f(y, y', x) \phi(y) \times \\ &\times dx dy dy' - 2 \int_1^{y_H} \int_0^{2\pi} x r_f(y_0, y, x) \phi(y) dx dy = 0, \end{aligned} \quad (34)$$



или графически, вычислив предварительно значения функции  $E(y_0)$  во всем диапазоне изменения величин  $y_0$  от 1 до  $y_H$ , так как  $y_H < y_{\text{опт}} < 1$ .

Причем первый путь не исключает необходимости вычислений ошибки  $E(y_0)$  по крайней мере для оптимального значения  $y_0 = y_{\text{опт}}$ . Ниже реализуется второй путь, при этом вычисления оказываются менее трудоемкими, а результаты содержат больше полезной информации, поскольку каждый член выражения (33) представляет самостоятельный интерес.

Преобразуем (33) к виду, удобному для вычислений. Для этого заменим интегрирование суммированием, используя кубатурную формулу прямоугольников.

$$\begin{aligned} E(y_N)^2 = & \frac{1}{\pi N^2 N_H} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^{N_H} x_k r_f(\rho_{i,j,k}) - \\ & - \frac{4(1-y_H)}{N N_H^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{N_H} \sum_{k=1}^{N_H} x_k r_f(\rho_{i,j,k}) \psi(y_j) + \\ & + \frac{4\pi(1-y_H)^2}{N_H^3} \sum_{i=1}^{N_H} \sum_{j=1}^{N_H} \sum_{k=1}^{N_H} x_k r_f(\rho_{i,j,k}) \psi(y_i) \psi(y_j). \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь  $i, j, k = 1, 2, 3, \dots, N, \dots, N_H$ ;

$$y_{i=j} = 1 - \frac{1-y_H}{N_H} (i - 0.5);$$

$$y_N = 1 - \frac{1-y_H}{N_H} N;$$

$$x_k = \frac{2\pi}{N_H} (i - 0.5);$$

$$\rho_{i,j,k} = a_0 \arccos \left( y_i y_j + \sqrt{(1-y_i^2)(1-y_j^2)} \cos x_k \right).$$

При определении весовой функции  $\psi(y_{i=j})$  внутри каждого единичного интервала используем теорему о среднем

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(y_i) \frac{1}{y_{i+1}^* - y_i^*} \int_{y_i^*}^{y_{i+1}^*} \frac{(y-y_H)(1-y y_H)}{\left(y_H + \frac{1}{y_H} - 2y\right)^2} dy \\ \psi(y_{i=j}) = \frac{\bar{\varphi}(y_i) \frac{1}{y_{i+1}^* - y_i^*} \int_{y_i^*}^{y_{i+1}^*} \frac{(y-y_H)(1-y y_H)}{\left(y_H + \frac{1}{y_H} - 2y\right)^2} dy}{2\pi \sum_{i=1}^{N_H} \bar{\varphi}(y_i) \int_{y_i^*}^{y_{i+1}^*} \frac{(y-y_H)(1-y y_H)}{\left(y_H + \frac{1}{y_H} - 2y\right)^2} dy} = \\ = \frac{\frac{N_H}{1-y_H} \bar{\varphi}(y_i) [\Phi(y_{i+1}^*) - \Phi(y_i^*)]}{2 \sum_{i=1}^{N_H} \bar{\varphi}(y_i) [\Phi(y_{i+1}^*) - \Phi(y_i^*)]}, \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$y_i^* = 1 - \frac{1 - y_H}{N_H} (i - 1),$$

$$\Phi(y_i^*) = \frac{(1 - y_H^2)^2}{8y_H \left( y_H + \frac{1}{y_H} - 2y_i^* \right)} - \frac{y_H}{4} y_i^*.$$

Тем самым несколько уменьшена погрешность формулы прямоугольников при вычислении второго и третьего членов правой части выражения (30).

Сведения о статистической структуре поля уходящего длинноволнового излучения можно найти в работах [1, 2, 4]. Поскольку в основе этих сведений лежат одни и те же не очень надежные данные измерений спутника «Тайрос-II», предпочтение отдано результатам расчетов Л. С. Гандина и В. П. Болтенкова, сумевших наилучшим образом исключить влияние погрешностей определения координат точек на значения корреляционных функций. Нормированную автокорреляционную функцию уходящего излучения оказалось возможным достаточно хорошо аппроксимировать линейной зависимостью с радиусом корреляции  $\rho_{00} = 3000$  км. Для расстояний, больших  $\rho_{00}$ , предполагалось равенство ее нулю

$$r(\rho) = \begin{cases} 1 - \frac{\rho}{\rho_{00}} & \text{при } 0 \leq \rho \leq \rho_{00} \\ 0 & \text{при } \rho \geq \rho_{00} \end{cases}$$

Величины  $E(y_0)$ , а также отдельно все члены правой части выражения (35) были вычислены с помощью ЭВМ «Урал-4» для трех высот метеорологического спутника (500, 800 и 1000 км).

Рассмотрим некоторые результаты расчетов. Из рис. 2 (кривые 1) видно, с какой погрешностью при данной высоте метеорологического спутника измеренные значения  $F_w$  можно считать равными уходящему излучению, осредненному по площади  $S = 2\pi a(1 - y_0)$ . (Площадь осреднения приближенно равна площади круга радиуса  $\rho_0$ , где  $\rho_0 = a \arccos y_0$ , поэтому величина  $\rho_0$  принята за масштаб осреднения.)

Величина  $E(\rho_0)$  характеризует среднюю квадратическую ошибку интерпретации. Сама ошибка может быть найдена по формуле

$$\delta(y_0) = \sigma_f E(y_0).$$

Для всех трех высот метеорологического спутника кривые  $E(\rho_0)$  имеют минимумы. Снятые с графиков оптимальные значения  $\rho_{\text{опт}}$  и соответствующие им величины  $E_{\text{мин}}$  сведены в табл. 2. Данные измерений уходящего излучения радиометров с неограниченным полем зрения ближе всего к величинам уходящего излучения, осредненным по площади круга радиуса  $\rho_{\text{опт}}$ , т. е.  $\rho_{\text{опт}}$  характеризует масштаб осреднения заключенный в измеряемых величинах  $F_w$ . Так, при высоте спутника 800 км величины  $F_w$  отличаются от средних по площади круга радиуса 1100 км величин уходящего излучения в среднем на  $0,052\sigma_f$ . В то же время величины  $F_w$  отличаются от средних по всей видимой части планеты в среднем на  $0,46\sigma_f$ . Пусть, например, стандартная изменчивость величин уходящего излучения равна  $\sigma_f = 0,03$  кал/см<sup>2</sup> мин. в соответствии с оценками Л. Р. Ракиповой [10]. Соответствующие этому значению  $\sigma_f$  средние квадратические ошибки интерпретации данных широкосекторного прибора при условии оптимума ( $\delta_{\text{мин}}$ ) приведены в табл. 2. Полагая нормальный закон распределения для ошибок интерпретации, можно

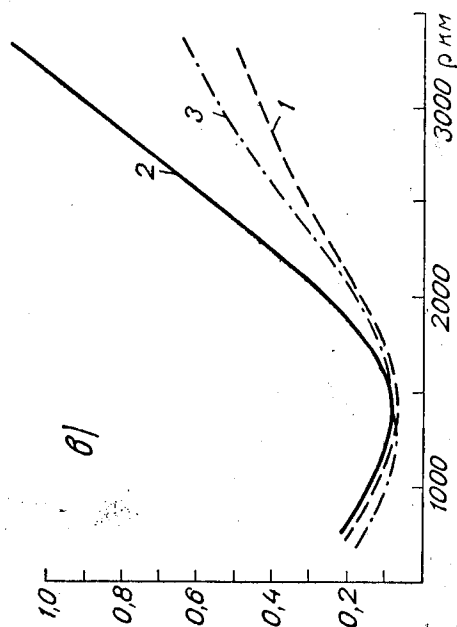
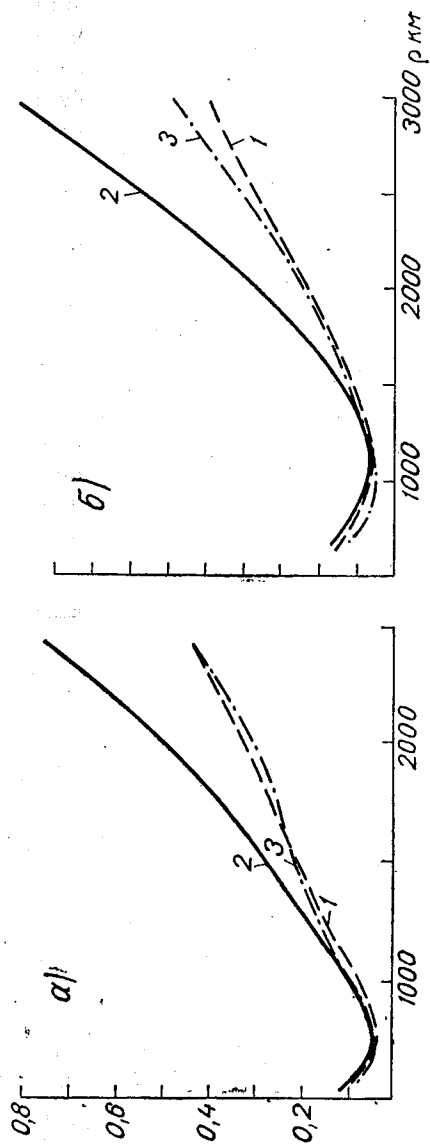


Рис. 2. Относительные ошибки интерпретации данных измерений радиометров с неограниченным полем зрения для высот метеорологического спутника 500 км (а), 800 км (б) и 1000 км (в).

1)  $E(\rho)$ , 2)  $E^*(\rho)$ , 3)  $\tilde{E}^*(\rho)$ .

сделать вывод, что в 95% случаев ошибки интерпретации не превысят  $\pm 0,004$  кал/см<sup>2</sup> мин. при высотах спутника до 1000 км.

Существенным является вывод, что если относить данные измерений  $F_w$  к площади  $S(\rho_{\text{опт}})$ , то ошибки интерпретации оказываются не только минимальными, но и небольшими по абсолютной величине по сравнению со средним квадратическим отклонением  $\sigma_f$  элемента.

Таблица 2

| Высота,<br>км | $\rho_{\text{опт}}$ | $E_{\text{мин}}$ | $E_{\text{мин}}^*$ | $\rho_{\text{опт}}$ | $\delta_{\text{мин}}$<br>[кал/см <sup>2</sup> мин.] |
|---------------|---------------------|------------------|--------------------|---------------------|-----------------------------------------------------|
| 500           | 750                 | 0,03             | 0,04               | 850                 | 0,0009                                              |
| 800           | 1100                | 0,05             | 0,06               | 1200                | 0,0015                                              |
| 1000          | 1400                | 0,06             | 0,08               | 1500                | 0,0018                                              |

Имеет смысл сравнивать абсолютные ошибки определения средних значений уходящего излучения по данным измерений со средней квадратической изменчивостью  $\sigma_f(\rho_0)$  самих средних величин  $F(\rho_0)$ . На рис. 3

представлена зависимость меры дисперсии среднего  $\frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2} = D^2$  от масштаба осреднения  $\rho_0$ . Рисунок показывает, что до масштаба осреднения порядка половины радиуса корреляции  $\rho_{00}$  дисперсия уходящего излучения линейно убывает с ростом  $\rho_0$  почти до половины своего первоначального значения,

$$\sigma_f^2 \Big|_{\rho=0,5\rho_{00}} = 0,55\sigma_f^2.$$

При большем осреднении дисперсия убывает медленнее и при  $\rho=\rho_{00}$  составляет около 23% от  $\sigma_f^2$ .

Отношение  $\frac{\delta(\rho_0)^2}{\sigma_f(\rho_0)^2} = \frac{E(\rho_0)^2}{D(\rho_0)^2} = E^*(\rho_0)^2$  представляет собой меру

ошибки определения средней,  $E^*(\rho_0)$  — относительная ошибка определяется средней  $F(\rho_0)$  при предположении, что  $F(\rho_0) = F_w$ .

Зависимость относительных ошибок  $E^*$  от масштаба осреднения  $\rho_0$  нанесена на рис. 2 а, б, в (кривые 2). Естественно, обнаруживается, что относительные ошибки определения средних  $E^*(\rho_0)$  всюду больше величин  $E(\rho_0)$ . Оптимальные значения  $\rho_{\text{опт}}^*$  практически остаются равными величинам  $\rho_{\text{опт}}$ . Соответствующие им значения  $E_{\text{мин}}^*$  помещены в табл. 2.

Можно сделать вывод, что величины  $F_w$  не характеризуют средних по всей находящейся в поле зрения прибора части планеты величин уходящего излучения. Действительно, как показывают кривые 2 (рис. 2), относительные ошибки определения таких средних мало отличаются от единицы, а для высоты спутника 1000 км дисперсия средней по всей видимой площади  $\sigma_f^2(\rho_H)$  оказывается даже несколько меньше среднего квадрата абсолютной величины ошибки  $\delta^2(\rho_H)$ .

Итак, кривые 2 на рис. 2 дают информацию о том, с какими относительными ошибками измеренные величины  $F_w$  характеризуют средние величины уходящего излучения с различным масштабом осреднения.

Нетрудно выяснить, как соотносятся дисперсии измеряемых величин и дисперсии средних значений  $F(\rho_0)$ . Мера дисперсии измеряемых величин

$\frac{\sigma_{fw}^2}{\sigma_f^2}$  была определена в процессе предыдущих вычислений. Результаты расчетов дали следующие значения для трех высот спутника:

|                                    |     |      |      |      |
|------------------------------------|-----|------|------|------|
| $H$ км                             | ... | 500  | 800  | 1000 |
| $\frac{\sigma_{fw}^2}{\sigma_f^2}$ | ... | 0,74 | 0,63 | 0,55 |

Эти величины необходимо включать в число характеристик результатов измерений радиометров, так как они показывают, какую долю дисперсии уходящего излучения приборы улавливают.

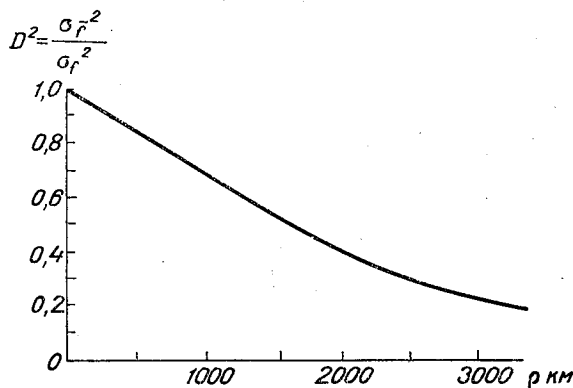


Рис. 3. Мера дисперсии поля уходящего излучения как функция масштаба осреднения.

Еще одной характеристикой является  $\rho'_{\text{опт}}$  масштаб осреднения, определенный из условия

$$\sigma_f^2(\rho'_{\text{опт}}) = \sigma_{fw}^2. \quad (37)$$

Величины  $\rho'_{\text{опт}}$  отвечают на вопрос, какие средние имеют такую же дисперсию, что и измеряемая величина  $F_w$ . Значение  $\rho'_{\text{опт}}$ , полученные из решения уравнения (37), также помещены в табл. 2. Значения  $\rho'_{\text{опт}}$  для всех высот спутника примерно на 100 км больше, чем найденные из условия минимума ошибки  $\delta(\rho)$  величины  $\rho_{\text{опт}}$ . Однако соответствующие им ошибки интерпретации  $\rho'_{\text{опт}}$  лишь незначительно отличаются от минимальных.

Выше был рассмотрен случай, когда для характеристики средних величин  $F(\rho_0)$  использовались непосредственно значения  $F_w$ . Но можно, реализуя идею Р. Л. Кагана [8], поставить вопрос о расчете величин  $F(\rho_0)$  по величинам  $F_w$ , если нужно получить уходящее излучение, осредненное по площади отличающейся от оптимальной. Для этой цели составим уравнение регрессии. Будем отмечать рассчитанные значения волной сверху. Тогда для отклонений от нормы уравнение регрессии имеет вид

$$\tilde{F}'(\rho_0) = X(\rho_0) F'_w. \quad (38)$$

Однако поскольку измеряются сами величины, а не отклонения, существенным для данной постановки задачи является знание поля норм.

Для самих величин уравнение регрессии имеет вид

$$\tilde{F}(\rho_0) = [1 - X(\rho_0)] \bar{F} + X(\rho_0) F_w. \quad (39)$$

Коэффициенты редукции (так, следуя Кагану, назовем  $X(\rho_0)$ ) рассчитываются по формуле

$$X(\rho_0) = \frac{A(\rho_0)}{2\sigma_{fN}^2}, \quad (40)$$

где  $A(\rho_0)$  уже вычисленные ранее (при расчете  $E(\rho_0)$ ) величины, представляющие собой удвоенные ковариации  $F(\rho_0)$  и  $F_w$ .

Значения коэффициентов редукции  $X(\rho_0)$  для трех высот спутника представлены на рис. 4. Рисунок показывает, что коэффициенты редукции несколько превышают единицу при значениях  $\rho_0$ , меньших  $\rho'_{\text{опт}}$ . При  $\rho_0 = \rho'_{\text{опт}}$   $X=1$ , а затем постепенно уменьшается до значений порядка 0,5.

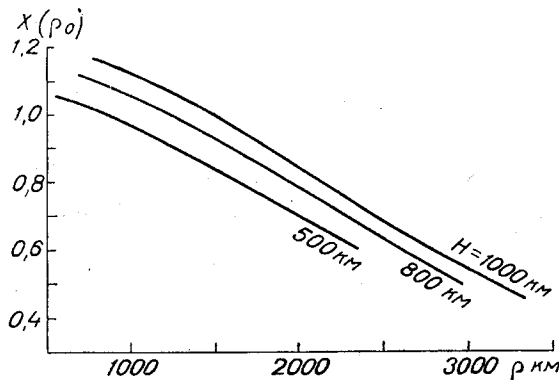


Рис. 4. Коэффициенты редукции.

Естественно ожидать, что редукция снижает ошибки определения средних величин уходящего излучения в тех случаях, когда масштаб осреднения отличается от оптимального. Относительные ошибки уравнения регрессии оценивались по известной формуле

$$\tilde{E}^*(\rho_0) = \sqrt{1 - r_{f, f_w}^2}, \quad (41)$$

где  $r_{f, f_w}$  — коэффициент корреляции между величинами  $F(\rho_0)$  и  $F_w$ .

Величины  $\tilde{E}^*(\rho_0)$  нанесены на рис. 2 (кривые 3). Действительно, значения  $\tilde{E}^*(\rho_0)$  оказались существенно меньше значений  $E^*(\rho_0)$ . Они совпадают только в точках, соответствующих значениям  $X=1$ . Чем сильнее масштаб осреднения отличается от оптимального, тем больший выигрыш в точности дает использование уравнения регрессии. Так, например, для средних по всему полю зрения процедура редукции снижает относительные ошибки интерпретации почти в 2 раза.

Дисперсию редуцированных величин нетрудно оценить по формуле

$$\tilde{\sigma}_f^2 = [\tilde{F}'(\rho_0)]^2 = [X(\rho_0) F'_w]^2 = X(\rho_0)^2 \sigma_{f_w}^2. \quad (42)$$

Величины меры дисперсии  $\left(\frac{\tilde{\sigma}_f^2}{\sigma_f^2}\right)$  редуцированных величин были

вычислены для трех высот спутника. Оказывается, что дисперсия вычисленных средних  $\tilde{F}(\rho_0)$  всюду меньше дисперсии самих средних  $F(\rho_0)$ . Но это просто отражает смысл уравнения регрессии. Однако дисперсии редуцированных величин близки дисперсиям истинным, что является следствием тесной корреляционной связи. Можно редукцию производить таким образом, чтобы дисперсия редуцированных величин точно равнялась дисперсии истинных средних значений. Для этого коэффициент редукции должен быть определен из соотношения

$$\tilde{\sigma}_f^2 = \sigma_f^2,$$

т. е.

$$X^* = \sqrt{\frac{\sigma_{fw}^2}{\sigma_f^2}}. \quad (43)$$

В этом случае в результате редукции будем получать величины, имеющие истинные значения дисперсии. Ошибки уже не будут минимальными, но отличаться от последних будут незначительно. Для ряда задач такая редукция может оказаться целесообразной.

Пусть, например, метеорологический спутник выведен на орбиту, сильно отличающуюся от круговой. Пространственное осреднение, осуществляемое радиометрами с неограниченным полем зрения, и улавливаемая доля дисперсии уходящего излучения весьма существенно зависят от высоты спутника, что следует из выполненных оценок. Следовательно, процедура редукции одним из указанных способов необходима для того, чтобы получить данные, имеющие над различными частями земного шара одинаковое пространственное осреднение, т. е. чтобы данные были сопоставимыми.

Выше рассмотрены радиометры с неограниченным полем зрения. Используя ту же методику, аналогичные оценки можно выполнить и для широкоугольных радиометров с ограниченным полем зрения. Для примера приведем данные расчетов для радиометра, поле зрения которого ограничено оптимальным для радиометра с неограниченным полем зрения значением  $\rho_{\text{опт}}$  при высоте спутника, равной 800 км (табл. 3 и рис. 5). Выясняется, что для такого прибора площадь оптимального (в смысле минимума ошибки интерпретации) осреднения уменьшилась примерно в 2 раза по сравнению с радиометром неограниченного поля зрения. Минимальные ошибки интерпретации также существенно снизились. Кроме того, новый прибор улавливает уже не 64, а 74% дисперсии поля уходящего излучения.

Таблица 3

| $H$ км | $\rho_{\text{опт}}$ | $E_{\text{мин}}$ | $E_{\text{мин}}^*$ | $\frac{\sigma_{fw}^2}{\sigma_f^2}$ | $\rho_{\text{опт}}$ км |
|--------|---------------------|------------------|--------------------|------------------------------------|------------------------|
| 800    | 800                 | 0,028            | 0,030              | 0,744                              | 830                    |

Сравнение рассчитанных характеристик данных измерений обоих приборов показывает, что вплоть до некоторого критического значения масштаба осреднения  $\rho_{\text{кр}}$  описанный радиометр с ограниченным полем зрения характеризует средние величины уходящего излучения точнее,

чем радиометр с неограниченным полем зрения. Для излучения, осредненного по площади большей, чем критическая, преимущество в точности принадлежит радиометру с неограниченным полем зрения. Критическое значение  $\rho_{кр}$  находится в рассмотренном случае примерно посередине между оптимальными значениями масштаба осреднения  $\rho_{опт}$  для обоих радиометров.

На основании выполненных оценок можно сделать вывод, что процедура редукиции позволяет получать в результате измерений радиометрами с неограниченным полем зрения величины уходящего излучения с масштабом осреднения, отличающимся от оптимального в ту или иную сторону, с минимальными потерями в точности. Если целью измерений должны быть данные с осреднением, меньшим оптимального, а потери

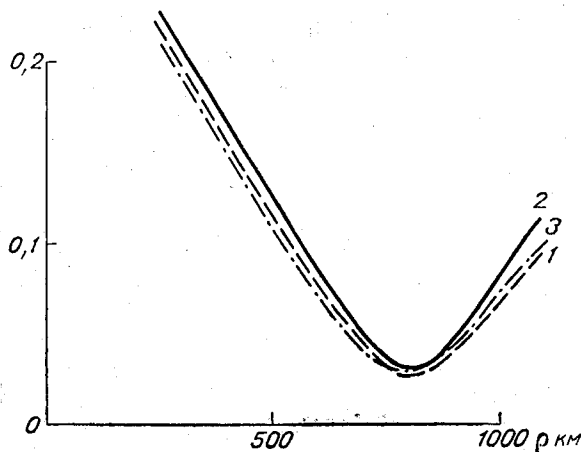


Рис. 5. Относительные ошибки интерпретации данных измерений широкосекторного радиометра с ограниченным полем зрения.  $H=800$  км.

1)  $E(\rho)$ , 2)  $E^*(\rho)$ , 3)  $\tilde{E}^*(\rho)$ .

в точности недопустимы, целесообразно использовать широкоугольный радиометр с неограниченным полем зрения, желательно такой, для которого собственный оптимальный масштаб осреднения близок или совпадает с требуемым.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Борисенков Е. П., Доронин Ю. П., Кондратьев К. Я. Структурные характеристики поля излучения Земли как планеты. Косм. исслед., т. 1, вып. 1, 1962.
2. Борисенков Е. П., Доронин Ю. П., Кондратьев К. Я. Структурные характеристики полей уходящей радиации по данным ИСЗ «Тайрос-П» и «Тайрос-III» и их интерпретация. Косм. исслед., т. 3, вып. 3, 1965.
3. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеониздат, Л., 1963.
4. Гандин Л. С., Болтенков В. П. К методике объективного анализа актиметрической информации с метеорологических спутников Земли. Труды ГГО, вып. 166, 1964.
5. Гандин Л. С., Каган Р. Л. О точности определения средней высоты снежного покрова по дискретным данным. Труды ГГО, вып. 130, 1962.
6. Гандин Л. С., Каган Р. Л. К точности определения средней величины по дискретным данным. Труды ГГО, вып. 112, 1963.



7. Каган Р. Л. К учету инерции прибора при метеорологических измерениях. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1964.
8. Каган Р. Л. О редукации метеорологических элементов на площади. Труды ГГО, вып. 191, 1966.
9. Кондратьев К. Я., Якушевская К. Е. Угловое распределение тепловой радиации системы земля—атмосфера в различных областях спектра. Труды ГГО, вып. 166, 1964.
10. Ракипова Л. Р. Расчет потоков уходящего излучения системы земля—атмосфера с помощью измерений длинноволновой радиации на искусственных спутниках Земли. Труды ГГО, вып. 166, 1964.
11. Ракипова Л. Р. О расчете уходящего излучения земли по измерениям с искусственных спутников Земли. Космич. исслед., т. 3, вып. 4, 1965.
12. Шифрин К. С., Коломийцев В. Ю., Пятовская Н. П. Определение потока уходящей радиации с помощью искусственного спутника Земли. Труды ГГО, вып. 166, 1964.
13. Hales J. V., Williams T. L., Henderson D. Calculation of infrared radiative flux emission of the earth plus atmosphere at various levels high above the earth. Final Rep. Contr. AF 19(604)—2418, August 1960.

### СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБЪЕКТИВНОГО АНАЛИЗА КАРТ БАРИЧЕСКОЙ ТОПОГРАФИИ, ПОЛУЧЕННЫХ В ОПЕРАТИВНОЙ ПРАКТИКЕ РАЗЛИЧНЫХ СТРАН

1. Под объективным анализом карт погоды принято понимать процесс получения значений метеорологических элементов в узлах некоторой регулярной сетки и построения изолиний поля данного элемента по результатам метеорологических наблюдений на станциях.

Составной частью объективного анализа является согласование различных метеорологических полей между собой или согласование поля одного и того же элемента на разных уровнях и в разные моменты времени, а также выявление и устранение грубых ошибок наблюдений [1]. Перечисленные части объективного анализа, как правило, тесно связаны между собой и часто выполняются на ЭВМ по единой программе.

Вопрос о точности объективного анализа синоптических и аэрологических карт представляет в настоящее время большой интерес, так как успешность численного прогноза существенно зависит от качества анализа [6]. Объективный анализ в разных странах проводится существенно различными методами, при этом и объем и характер используемых данных также неодинаков.

Коротко остановимся на принципиальных основах различных методов объективного анализа.

Метод оптимальной интерполяции, разработанный Л. С. Гандиным [1], применяется в Советском Союзе и некоторых странах Восточной Европы.

В соответствии с методом оптимальной интерполяции значение отклонения метеорологического элемента от нормы  $f'_0$  в некотором узле  $i=0$  можно определить по формуле

$$f'_0 = \sum_{i=1}^n p_i f'_i, \quad (1)$$

где  $f'_i$  — значение отклонения метеорологического элемента от нормы в точке  $i$  ( $i=1, 2, 3, \dots, n$ ),  $p_i$  — интерполяционные веса.

Для нахождения весов необходимо решить систему линейных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^n \mu_{ij} p_j + \eta_i p_i = \mu_{0i}, \quad (2)$$

где  $\mu_{ij}$  — автокорреляционные моменты,  $\eta_i$  — отношение квадрата средней ошибки наблюдения в точке  $i$  к квадрату средней изменчивости элемента.

В оперативной практике Мирового метеорологического центра в Москве расчеты с использованием данной методики ведутся на ЭВМ М-20 по программе, составленной И. А. Четвериковым [4] и усовершенствованной С. Л. Белоусовым. Производятся также анализы для северного полушария по программе, разработанной С. А. Машковичем [2].

В Объединенном метеорологическом центре США, в Департаменте метеорологии Финляндии, а также в Службе погоды Швеции используется метод коррекции, предложенный Бергторссоном и Дёёсом [5] и несколько измененный Крессманом. Согласно этому методу, в анализе участвуют как данные о геопотенциале, так и данные о ветре. Метод объективного анализа предусматривает исправление некоторого предварительного поля  $H_n$ , которое представляет собой взвешенное среднее из прогностических значений геопотенциала  $H_f$  и месячных норм  $H_n$ ,

$$H_n = \frac{\mu_f H_f + \mu_n H_n}{\mu_f + \mu_n}, \quad (3)$$

где  $\mu_f$  и  $\mu_n$  — соответствующие веса прогностических значений геопотенциала и норм.

В случае отсутствия прогноза в качестве предварительного поля могут приниматься значения климатологических норм.

По мере поступления текущих данных о геопотенциале и ветре на изобарической поверхности эта информация используется для исправления предварительного поля. В тех случаях, когда на станции наблюдается только значение геопотенциала, исправления вносятся по формуле

$$H_h = H_{nc} + H_{nc} - H_{ny}, \quad (4)$$

где  $H_h$  — исправленное значение изобарической поверхности в узле сетки,  $H_{nc}$  — наблюдаемое значение на станции,  $H_{nc}$  — предварительное значение на станции,  $H_{ny}$  — предварительное значение в узле сетки.

В том случае, если по станции имеются данные об обоих элементах, в предварительное поле вносятся два исправления.

Данные о геопотенциале используются таким же образом, как описано выше

$$H_1 = H_{nc} + H_{nc} + H_{ny}. \quad (4a)$$

Исходя из предположения, что наблюдаемые значения ветра совпадают с геострофическими, можно оценить градиент поля геопотенциала  $r$ . Тогда для значения геопотенциала в узле сетки получается следующее выражение:

$$H_r = H_{nc} + \left( \frac{\partial H}{\partial r} \right)_{nc} r. \quad (5)$$

Учитывая приведенные выше формулы для расчета геопотенциала в узле сетки  $H_y$  с учетом  $N_1$  станций, сообщающих только данные о геопотенциале, и  $N_2$  станций, сообщающих данные о геопотенциале и ветре, можно получить следующее выражение:

$$H_y = \frac{\mu_f H_f + \mu_n H_n + \sum_{i=1}^{N_1} [f(\rho) \mu_h H_h]_i + \sum_{i=1}^{N_2} [f(\rho) (\mu_1 H_1 + \mu_2 H_2)]_i}{\mu_f + \mu_n + \sum_{i=1}^{N_1} [f(\rho) \mu_h]_i + \sum_{i=1}^{N_2} [f(\rho) (\mu_1 + \mu_2)]_i}, \quad (6)$$

где  $\rho$  — плотность станций, которая определяется как число станций в радиусе 375 км вокруг данной станции;  $\mu_f$ ,  $\mu_n$ ,  $\mu_h$ ,  $\mu_1$  и  $\mu_2$  — весовые множители, для вычисления которых получены эмпирические зависимости вида

$$\mu = \frac{a}{b + r^4} + C, \quad (7)$$

где  $r$  — расстояние в шагах сетки ( $d=300$  км на широте  $60^\circ N$ ),  $a, b, C$  — некоторые константы.

В Норвегии для оперативного анализа высотных карт применяется метод последовательных приближений, предложенный Хаугом [9], который сходен с только что описанным методом.

Предполагая, что наблюдения дают значения ветра и геопотенциала, значение геопотенциала в узле сетки аппроксимируется следующим образом:

$$H_y = H_{nc} + \frac{(\delta_x H)_{nc}}{2d} \delta_x + \frac{(\delta_y H)_{nc}}{2d} \delta_y, \quad (8)$$

где  $H_y$  — значение геопотенциала в узле сетки,  $H_{nc}$  — значение геопотенциала на станции,  $(\delta_x H)_{nc}$  и  $(\delta_y H)_{nc}$  — разности значений геопотенциала на расстоянии шага сетки  $d$ , которые определяются по данным о наблюдаемом ветре при помощи геострофических соотношений.

Таким образом, получают первое приближение значений геопотенциала для всех узлов сетки. Следующее приближение в узле сетки теперь получают, используя градиент, который можно рассчитать из первого приближения в окружающих узлах сетки. В тех случаях, когда наблюдается и геопотенциал и ветер, используют среднее арифметическое из значений градиента, полученных из наблюдений над ветром и из ранее рассчитанного поля геопотенциала. Этот процесс затем повторяется. Для получения хорошего анализа требуется приблизительно пять итераций. Соответствующие формулы для  $k$ -той итерации имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_y^k = H_{nc} + \frac{1}{2} \left[ \frac{(\delta_x H)_{nc}}{2d} \delta_x + \frac{(\delta_y H)_{nc}}{2d} \delta_y \right] + \\ \quad + \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta_x H^{k-1}}{2d} \delta_x + \frac{\delta_y H^{k-1}}{2d} \delta_y \right] \\ H_y^k = H_{nc} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta_x H^{k-1}}{2d} \delta_x + \frac{\delta_y H^{k-1}}{2d} \delta_y \right] \end{array} \right. \quad (9)$$

Поле геопотенциала, получающееся в результате этого процесса, содержит мелкомасштабные особенности, обусловленные ошибками наблюдений. Для исключения этих особенностей необходимо применять дополнительное сглаживание.

В Бельгии для объективного анализа карт барической топографии используется метод полиномиальной аппроксимации барического поля [10]. Основным принцип этого метода заключается в отыскании полинома для представления данных наблюдений ветра и геопотенциала над территорией, окружающей узел сетки, в которой требуется знать значения геопотенциала. В каждом узле сетки определяется полином второй или третьей степени так, чтобы он лучше всего удовлетворял данным наблюдений.

Полином может быть записан в следующем виде:

$$H = \sum_{i=1}^k a_{ij} x^i y^j; \quad j, i \geq 0; \quad j+i \leq k. \quad (10)$$

Коэффициенты  $a_{ij}$  определяются с помощью имеющейся информации методом наименьших квадратов.

Как сообщил Дади на Московском международном учебном семинаре по численным методам прогноза погоды, французская служба прогнозов использует для оперативного анализа поля геопотенциала метод разложения поля по сферическим функциям.

К сожалению, подробными публикациями о французском и бельгийском методах анализа мы не располагаем.

2. Учитывая такое разнообразие применяемых в оперативной практике методов объективного анализа, а также зависимость качества прогноза погоды в точности анализа, представляло интерес выяснить, насколько отличаются данные объективного анализа, полученные в различных странах. До недавнего времени такое сопоставление было невозможным из-за отсутствия данных по различным анализам. В настоящее время налажен международный обмен результатами оперативного объективного анализа и прогноза за 15-ое число каждого месяца. В результате представилась возможность использовать карты  $AT_{500}$  за 00 часов 15-го числа каждого месяца 1964 и 1965 гг., проанализированные в разных странах.

Количество карт, использованных для сравнения анализов по каждой стране, представлено в табл. 1, где знак плюс указывает на наличие данных анализа. Территория, для которой производится анализ в различных странах, приведена на рис. 1. При этом только на некоторых из карт одновременно приводятся и значения в узлах сетки. На большинстве находящихся в нашем распоряжении карт нанесены только изолинии геопотенциала. Для сравнения использованы данные по 370 аэрологическим станциям, расположенным в северном полушарии. Истинные значения геопотенциала  $AT_{500}$  были взяты для этих же станций с карт ААНИИ и частично дополнены из аэрологических сводок США и карт ГМЦ СССР.

Таблица 1  
Количество карт, использованных для сравнения по каждой стране

| Дата            | СССР | Бельгия | Франция | Финляндия | Норвегия |
|-----------------|------|---------|---------|-----------|----------|
| I 1964 г.       | +    | —       | —       | —         | —        |
| II              | +    | —       | —       | —         | —        |
| III             | —    | —       | —       | —         | —        |
| IV              | +    | +       | —       | +         | —        |
| V               | —    | +       | +       | +         | —        |
| VI              | +    | —       | +       | +         | —        |
| VII             | +    | +       | +       | —         | —        |
| VIII            | +    | —       | +       | —         | —        |
| IX              | —    | —       | +       | +         | —        |
| X               | +    | —       | —       | +         | —        |
| XI              | +    | +       | +       | +         | —        |
| XII             | —    | +       | +       | —         | +        |
| I 1965 г.       | +    | +       | +       | +         | +        |
| II              | +    | +       | +       | +         | +        |
| III             | —    | +       | +       | +         | +        |
| IV              | +    | +       | +       | +         | +        |
| V               | +    | +       | +       | —         | +        |
| VI              | —    | +       | +       | —         | —        |
| VII             | +    | +       | —       | —         | +        |
| VIII            | +    | —       | +       | —         | +        |
| IX              | —    | +       | —       | —         | +        |
| X               | —    | +       | +       | —         | +        |
| XI              | —    | —       | —       | —         | —        |
| XII             | —    | +       | +       | —         | —        |
| Всего . . . . . | 14   | 15      | 16      | 10        | 10       |

Получить «истинные» значения геопотенциала в узлах регулярной сетки, очевидно, не представляется возможным, поэтому пришлось использовать значения геопотенциала, наблюдаемые на станциях. Эти значения сравнивались со значениями геопотенциала на станции, полученными с карт объективного анализа путем интерполяции.

Такой способ оценки вносит значительную долю субъективизма, и точность ее зависит от масштаба используемых карт. Кроме того, он заведомо занижает ошибку для тех методов, которые могут давать достаточно точные значения на станциях и значительно менее точные в узлах регулярной сетки (например, для методов полиномиальной аппроксимации). В более выгодном положении оказываются также методы, использующие больший объем исходной информации.

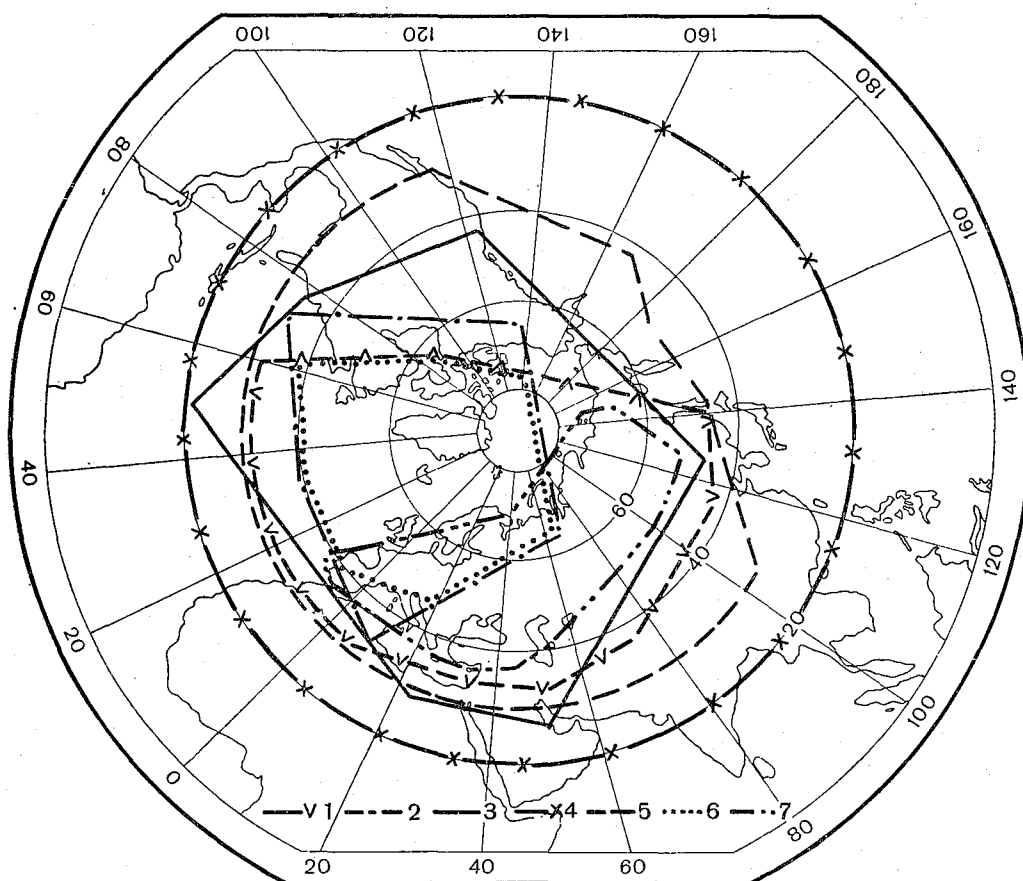


Рис. 1. Территория, для которой проводятся объективные анализы в Советском Союзе (1), Норвегии (2), Финляндии (3), Франции (4) и Бельгии (5) и участки территории 6 и 7, использованные для сравнения анализов.

Для исключения субъективизма подобных оценок было бы полезно одновременно с получением карт производить интерполяцию на некоторое количество станций, данные которых в процессе анализа не участвуют. Сопоставление этих данных с проинтерполированными значениями могло бы служить объективным способом оценки качества анализов. В этом случае данные анализа было бы удобно представлять в виде таблиц. Поскольку такими данными мы не располагали, принятая методика сравнения, несмотря на указанные выше недостатки, представлялась нам наиболее целесообразной. С каждой карты путем интерполяции между узлами регулярной сетки или изолиниями снимались данные в тех станциях, которые располагаются на территории, для которой производится объективный анализ.

В табл. 2 приведено количество станций, по которым проводилось сравнение для каждой страны.

Таблица 2  
Количество станций в различных  
странах, по которым производилось  
сравнение

| Страна              | Количество станций |
|---------------------|--------------------|
| СССР . . . . .      | 188                |
| Бельгия . . . . .   | 365                |
| Франция . . . . .   | 370                |
| Финляндия . . . . . | 181                |
| Норвегия . . . . .  | 91                 |

Сравнение анализов проводилось путем сопоставления коэффициентов корреляции и средних квадратических отклонений между интерполированными и истинными значениями геопотенциала или между интерполированными значениями двух различных анализов.

Расчеты производились по следующим формулам:

а) коэффициент корреляции,

$$r_{ik} = \frac{\overline{f_i f_k} - \bar{f}_i \bar{f}_k}{\sigma_i \sigma_k}, \quad (11)$$

где

$$\sigma_i^2 = \overline{(f_i - \bar{f}_i)^2}, \quad \sigma_k^2 = \overline{(f_k - \bar{f}_k)^2},$$

$f_i$  — значение геопотенциала на станции, относящееся к одному из анализов,  $f_k$  — значение геопотенциала на той же станции, фактически наблюдаемое или относящееся к другому анализу (черта сверху означает осреднение);

б) среднее квадратическое отклонение

$$S = \sqrt{\frac{\sum_1^n (f_i - f_k)^2}{n}}, \quad (12)$$

где  $n$  — число случаев.

Представляло интерес рассмотреть, как различается точность анализов в различных районах освещенной территории, а также при различных синоптических ситуациях. В связи с этим упомянутые характеристики рассчитывались как отдельно по каждой станции (осреднение производилось по всем имеющимся срокам анализа), так и по отдельным срокам (осреднение производилось по всем станциям).

Расчеты производились на ЭВМ «Урал-4» по специально составленной программе.

Поскольку, как указывалось выше, в различных странах анализ производится для различной территории, сравнение по ситуациям проводилось для двух ограниченных участков.

Так как норвежский анализ включает в себя наименьшую территорию, первое сравнение проведено для участка карты, перекрывающегося в норвежском, финском и советском анализах. Этот участок включает в себя 81 станцию, расположенную на территории Европы, Атлантики и северо-восточной части Северной Америки (участок 1 на рис. 1).

Из табл. 3 видно, что лучшие результаты сравнения с наблюдаемыми значениями дают советский и норвежский анализы и худшие — французский. Финский и бельгийский занимают промежуточное положение. При

Таблица 3  
Средние квадратические отклонения (числитель) и коэффициенты корреляции (знаменатель), полученные путем сравнения различных анализов друг с другом и путем сравнения анализов со значениями, наблюдаемыми на станциях

| Дата      | Анализ               |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                      |
|-----------|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
|           | Наблюдаемые значения |                     |                     |                     |                     | СССР                |                     |                     |                     |                      |
|           | СССР                 | Бельгия             | Франция             | Финляндия           | Норвегия            | Бельгия             | Франция             | Финляндия           | Норвегия            | Финский и норвежский |
| I 1964 г. | $\frac{2,7}{0,995}$  |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                      |
| II        | $\frac{2,2}{0,990}$  |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                      |
| III       | —                    |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                      |
| IV        | $\frac{2,9}{0,987}$  | $\frac{4,1}{0,974}$ |                     | $\frac{3,1}{0,975}$ |                     | $\frac{2,9}{0,989}$ |                     | $\frac{3,6}{0,971}$ |                     |                      |
| V         | —                    | $\frac{3,1}{0,988}$ | $\frac{5,7}{0,969}$ | $\frac{3,1}{0,984}$ |                     | $\frac{5,0}{0,976}$ |                     | $\frac{2,5}{0,990}$ |                     |                      |
| VI        | $\frac{2,0}{0,993}$  |                     | $\frac{4,7}{0,970}$ | $\frac{3,0}{0,984}$ |                     | $\frac{4,4}{0,975}$ |                     | $\frac{2,9}{0,984}$ | $\frac{5,8}{0,973}$ |                      |
| VII       | $\frac{1,8}{0,995}$  | $\frac{3,0}{0,992}$ | $\frac{6,6}{0,981}$ |                     |                     | $\frac{6,8}{0,981}$ |                     | $\frac{4,7}{0,990}$ | $\frac{4,6}{0,983}$ |                      |
| VIII      | $\frac{2,0}{0,985}$  |                     | $\frac{5,7}{0,937}$ |                     |                     | $\frac{5,4}{0,959}$ |                     |                     |                     |                      |
| IX        |                      |                     | $\frac{8,1}{0,954}$ | $\frac{3,2}{0,981}$ |                     |                     |                     |                     | $\frac{8,8}{0,940}$ |                      |
| X         | $\frac{3,7}{0,957}$  |                     |                     | $\frac{3,7}{0,950}$ |                     |                     |                     |                     |                     |                      |
| XI        | $\frac{3,1}{0,988}$  | $\frac{3,8}{0,983}$ | $\frac{5,7}{0,976}$ | $\frac{3,6}{0,984}$ |                     | $\frac{4,8}{0,984}$ | $\frac{5,5}{0,989}$ | $\frac{3,2}{0,989}$ | $\frac{6,2}{0,985}$ |                      |
| XII       |                      | $\frac{4,9}{0,973}$ | $\frac{4,8}{0,969}$ |                     | $\frac{3,3}{0,985}$ | $\frac{4,0}{0,983}$ | $\frac{3,0}{0,989}$ | $\frac{3,6}{0,985}$ | $\frac{3,6}{0,982}$ |                      |



| Дата                     | Наблюдаемые значения |              |              |              | Анализ       |              |              |              |              |              |              |              |              |                      |              |
|--------------------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|----------------------|--------------|
|                          | СССР                 | Бельгия      | Франция      | Финляндия    | Норвегия     | СССР         |              |              | Бельгийский  |              |              | Французский  |              | Финский и норвежский |              |
|                          |                      |              |              |              |              | Франция      | Финляндия    | Норвегия     | Франция      | Финляндия    | Норвегия     | Финляндия    | Норвегия     |                      |              |
| I 1965 г.                | 2,5<br>0,993         | 5,6<br>0,966 | 5,8<br>0,974 | 3,9<br>0,982 | 3,6<br>0,985 | 5,3<br>0,972 | 5,7<br>0,980 | 3,5<br>0,985 | 3,2<br>0,989 | 3,6<br>0,984 | 4,2<br>0,984 | 6,0<br>0,956 | 5,1<br>0,986 | 5,5<br>0,971         | 4,5<br>0,976 |
| II                       | 1,6<br>0,998         | 4,0<br>0,987 | 4,0<br>0,984 | 3,0<br>0,990 | 2,9<br>0,990 | 4,0<br>0,989 | 3,8<br>0,986 | 3,3<br>0,989 | 3,2<br>0,989 | 2,6<br>0,992 | 2,9<br>0,994 | 4,1<br>0,985 | 3,3<br>0,990 | 4,0<br>0,985         | 3,2<br>0,988 |
| III                      | —                    | 3,8<br>0,983 | 4,7<br>0,978 | 3,0<br>0,989 | 3,2<br>0,989 | 0,989        | 0,986        | 0,989        | 0,989        | 3,2<br>0,991 | 2,9<br>0,990 | 3,8<br>0,986 | 3,9<br>0,986 | 4,7<br>0,984         | 3,2<br>0,989 |
| IV                       | 1,9<br>0,995         | 3,6<br>0,983 | 3,7<br>0,986 | 2,9<br>0,989 | 2,7<br>0,990 | 3,4<br>0,984 | 3,2<br>0,989 | 2,4<br>0,992 | 2,1<br>0,994 | 2,5<br>0,991 | 2,7<br>0,990 | 3,2<br>0,986 | 2,6<br>0,994 | 3,0<br>0,991         | 1,9<br>0,994 |
| V                        | 2,9<br>0,980         | 4,0<br>0,965 | 4,4<br>0,956 | 0,989        | 2,8<br>0,980 | 3,1<br>0,979 | 3,8<br>0,968 | 2,2<br>0,988 | 2,2<br>0,988 | 2,2<br>0,989 | 0,990        | 3,1<br>0,978 | 0,994        | 3,7<br>0,968         | 0,994        |
| VI                       |                      | 3,4<br>0,954 | 4,3<br>0,933 |              |              | 0,979        | 0,968        |              |              | 2,8<br>0,972 |              |              |              |                      |              |
| VII                      | 2,5<br>0,982         | 3,1<br>0,975 |              |              | 2,3<br>0,985 | 3,2<br>0,969 |              | 2,2<br>0,985 | 2,2<br>0,985 |              |              | 2,8<br>0,978 |              |                      |              |
| VIII                     | 2,8<br>0,982         |              | 4,0<br>0,959 |              | 2,7<br>0,981 | 3,6<br>0,969 | 3,6<br>0,969 | 2,5<br>0,983 | 2,5<br>0,983 |              |              |              |              | 2,9<br>0,976         |              |
| IX                       |                      | 3,0<br>0,986 |              |              | 2,1<br>0,992 |              |              |              |              |              |              | 2,5<br>0,991 |              |                      |              |
| X                        |                      | 3,5<br>0,982 | 4,3<br>0,973 |              | 3,8<br>0,978 |              |              |              |              | 2,9<br>0,990 |              | 2,3<br>0,995 |              | 3,2<br>0,986         |              |
| XI                       |                      |              |              |              |              |              |              |              |              | 4,4<br>0,976 |              |              |              |                      |              |
| XII                      |                      | 5,0<br>0,973 | 5,8<br>0,958 |              |              |              |              |              |              |              |              |              |              |                      |              |
| Количество случаев . . . | 14                   | 15           | 16           | 10           | 10           | 8            | 9            | 7            | 6            | 12           | 7            | 9            | 8            | 8                    | 4            |
| Среднее . . .            | 2,5                  | 3,9          | 5,3          | 3,3          | 3,0          | 3,7          | 4,7          | 3,0          | 2,6          | 3,7          | 3,2          | 3,6          | 5,2          | 3,9                  | 3,3          |

этом норвежский и финский анализы дают наименьшие отклонения при сравнении с советским анализом и друг с другом. Таким образом, можно сделать вывод, что советский анализ дает наилучшие результаты, несмотря на то что используется гораздо меньше информации, чем в других методах.

Применение шведского (финского) метода также приводит к вполне удовлетворительным результатам. Использование полиномиальных методов вносит в анализируемое поле существенные погрешности. Причем бельгийский метод оказывается лучше метода, применяемого во Франции.

Анализ табл. 4, в которой приводятся результаты сравнения по другой территории, включающей 104 станции (участок 2 на рис. 1), подтверждает наши выводы.

Распределение ошибок интерполяции по площади для всех анализов существенно зависит от густоты сети станций. Ошибки интерполяции значительно возрастают в районах Атлантического и Тихого океанов, где сеть станций очень мала, а также для некоторых анализов на границах территории. Так, например, для советского анализа при средней квадратической ошибке 2,7 дкм для всего поля выделяются районы, для которых эта ошибка возрастает до 4—5 дкм. Отметим, что географическое распределение полученных эмпирических ошибок интерполяции хорошо согласуется с теоретическими значениями этих ошибок, приведенных в работах [1, 3].

Средняя по полю теоретическая ошибка по данным [3] составляет 2,2 дкм, что несколько меньше полученной нами эмпирической ошибки. Превышение эмпирической ошибки над теоретической является естественным, так как эмпирическая ошибка включает в себя дополнительную погрешность за счет ошибок измерений на станциях, а в нашем случае и точности снятия данных с карт.

Заметим, что приведенные в [3] оценки эмпирических ошибок очень близки к нашим. Действительно, согласно [3], среднее абсолютное значение ошибки для поверхности 500 мб составляет 2,1 дкм. Учитывая, что для нормального распределения средние абсолютные ошибки на 20% меньше средних квадратических ошибок, получаем для последней оценку 2,6 дкм, что практически совпадает с нашей.

В табл. 5 представлены средние квадратические ошибки интерполяции для всего района анализа в каждой стране.

Как видно из табл. 5, по точности методы анализа можно разделить на две группы. Первая группа хороших объективных анализов, в которую входят советский, норвежский и финский анализы. Различия, полученные для этих анализов в табл. 5, незначительны и могут быть связаны с различным масштабом использованных для сравнения карт. Однако совершенно очевидно, что точность анализа карт шведским (американским) и норвежским методами заведомо не выше точности советского анализа, несмотря на то что первые используют большие количества исходной информации. Ко второй группе анализов, дающих значительную погрешность, относятся бельгийский и французский. Эти ошибки нельзя отнести за счет неточной интерполяции с карт, так как масштаб французских карт мало отличается от масштаба норвежских и финских карт, а бельгийские карты представлены в масштабе 1 : 30 000 000 и являются по четкости одними из лучших.

Следует указать также в заключение, что для проведения подобных сравнений в будущем было бы полезно иметь более точные сведения об используемой при каждом анализе информации. При этом наиболее точное сравнение методов можно было бы провести при условии использования в каждом из анализов одной и той же исходной информации,

Таблица 4

Средние квадратические отклонения (числитель) и коэффициенты корреляции (знаменатель), полученные путем сравнения различных анализов друг с другом и путем сравнения анализов со значениями, наблюдаемыми на станциях

| Дата      | Наблюденные значения |                     |                     |                     |                     | Анализ              |                     |                     |                                   |
|-----------|----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|-----------------------------------|
|           |                      |                     |                     |                     |                     | СССР                |                     | бельгийский         |                                   |
|           | СССР                 | Бельгия             | Франция             | Финляндия           | Бельгия             | Франция             | Финляндия           | Франция             | Финляндия и французский и финский |
| I 1964 г. | $\frac{2,8}{0,993}$  |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                                   |
| II        | $\frac{2,3}{0,989}$  |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                                   |
| III       |                      |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                                   |
| IV        | $\frac{3,0}{0,984}$  | $\frac{3,7}{0,977}$ |                     | $\frac{3,6}{0,954}$ | $\frac{3,3}{0,984}$ |                     | $\frac{3,0}{0,968}$ | $\frac{4,2}{0,981}$ | $\frac{2,7}{0,971}$               |
| V         |                      | $\frac{2,9}{0,989}$ | $\frac{5,3}{0,973}$ | $\frac{2,4}{0,982}$ |                     |                     |                     |                     | $\frac{1,9}{0,992}$               |
| VI        | $\frac{2,0}{0,987}$  |                     | $\frac{4,3}{0,959}$ | $\frac{2,8}{0,976}$ |                     | $\frac{3,6}{0,970}$ | $\frac{2,7}{0,980}$ |                     | $\frac{5,5}{0,971}$               |
| VII       | $\frac{2,0}{0,987}$  | $\frac{3,6}{0,960}$ | $\frac{4,7}{0,953}$ |                     | $\frac{3,0}{0,976}$ | $\frac{4,4}{0,965}$ |                     | $\frac{3,2}{0,983}$ | $\frac{3,8}{0,977}$               |
| VIII      | $\frac{3,0}{0,970}$  |                     | $\frac{6,3}{0,934}$ |                     |                     | $\frac{6,1}{0,948}$ |                     |                     |                                   |
| IX        |                      |                     | $\frac{7,1}{0,954}$ | $\frac{3,1}{0,983}$ |                     |                     |                     |                     |                                   |
| X         | $\frac{3,2}{0,987}$  |                     |                     | $\frac{4,2}{0,968}$ |                     |                     | $\frac{2,7}{0,987}$ |                     | $\frac{8,9}{0,966}$               |
| XI        | $\frac{2,6}{0,994}$  | $\frac{3,3}{0,989}$ | $\frac{4,9}{0,982}$ | $\frac{4,6}{0,972}$ | $\frac{3,0}{0,993}$ | $\frac{3,4}{0,992}$ | $\frac{2,2}{0,996}$ | $\frac{4,1}{0,994}$ | $\frac{4,1}{0,989}$               |
| XII       |                      | $\frac{4,9}{0,976}$ | $\frac{4,5}{0,977}$ |                     |                     |                     |                     | $\frac{3,0}{0,988}$ | $\frac{3,7}{0,985}$               |

| Дата                        | Наблюдаемые значения |              |              |              |              | Анализ       |              |              |              |                          |
|-----------------------------|----------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------------------|
|                             | СССР                 |              |              | Франция      |              | Финляндия    |              | СССР         |              | бельгийский              |
|                             | Бельгия              | Франция      | Финляндия    | Бельгия      | Франция      | Финляндия    | Франция      | Финляндия    | Франция      |                          |
| I 1965 г.                   | 2,1<br>0,993         | 4,1<br>0,973 | 3,1<br>0,987 | 3,5<br>0,981 | 3,4<br>0,983 | 2,2<br>0,992 | 2,7<br>0,992 | 3,4<br>0,984 | 3,6<br>0,984 | французский<br>и финский |
| II                          | 1,9<br>0,992         | 4,2<br>0,958 | 3,6<br>0,974 | 3,7<br>0,970 | 3,2<br>0,978 | 3,0<br>0,981 | 2,6<br>0,983 | 3,2<br>0,974 | 2,7<br>0,981 |                          |
| III                         |                      | 3,4<br>0,990 | 2,9<br>0,992 |              |              |              | 3,3<br>0,990 | 3,0<br>0,994 | 4,4<br>0,986 |                          |
| IV                          | 2,2<br>0,994         | 3,5<br>0,986 | 2,9<br>0,989 | 2,9<br>0,991 | 3,4<br>0,987 | 2,3<br>0,993 | 2,6<br>0,990 | 2,6<br>0,993 | 3,4<br>0,988 |                          |
| V                           | 1,7<br>0,995         | 3,6<br>0,981 | 3,8<br>0,977 | 2,8<br>0,988 | 3,2<br>0,983 |              | 1,6<br>0,995 |              |              |                          |
| VI                          |                      | 3,7<br>0,970 | 4,1<br>0,962 |              |              |              | 2,2<br>0,989 |              |              |                          |
| VII                         | 2,1<br>0,975         | 2,8<br>0,952 |              | 2,5<br>0,962 |              |              |              |              |              |                          |
| VIII                        | 2,3<br>0,987         |              | 3,3<br>0,969 |              | 2,8<br>0,978 |              |              |              |              |                          |
| IX                          |                      | 2,9<br>0,983 |              |              |              |              |              |              |              |                          |
| X                           |                      | 2,8<br>0,992 | 4,0<br>0,984 |              |              |              | 3,1<br>0,992 |              |              |                          |
| XI                          |                      |              |              |              |              |              |              |              |              |                          |
| XII                         |                      | 4,3<br>0,977 | 4,0<br>0,980 |              |              |              | 3,9<br>0,979 |              |              |                          |
| Количество<br>случаев . . . | 14                   | 15           | 10           | 8            | 9            | 7            | 12           | 7            | 8            |                          |
| Среднее . . .               | 2,4                  | 3,6          | 3,3          | 3,1          | 3,8          | 2,6          | 3,1          | 3,0          | 4,5          |                          |

например, только данных о геопотенциале, не используя данных о ветре. Для исключения субъективизма при интерполяции на станции и облегчения задачи сравнения анализов имело бы смысл осуществлять интерполяцию на некоторое количество станций, в которых проводятся аэрологические наблюдения, но данные которых не используются для анализа, и представлять эти данные в виде таблиц.

Т а б л и ц а 5  
Средние квадратические ошибки анализов,  
проводимых в различных странах

| Страна              | Количество станций | Количество сроков | Ошибки |
|---------------------|--------------------|-------------------|--------|
| СССР . . . . .      | 188                | 14                | 2,5    |
| Норвегия . . . . .  | 91                 | 10                | 3,0    |
| Финляндия . . . . . | 181                | 10                | 3,3    |
| Франция . . . . .   | 366                | 16                | 4,7    |
| Бельгия . . . . .   | 370                | 15                | 4,6    |

Автор выражает признательность С. Л. Белоусову, любезно предоставившему материалы объективного анализа различных стран.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеониздат, Л., 1963.
2. Машкович С. А. Об объективном анализе карт барической топографии северного полушария. Труды ММЦ, вып. 4, 1964.
3. Машкович С. А., Губанова С. И. Опыт применения методики объективного анализа карт барической топографии северного полушария. Труды ММЦ, вып. 10, 1965.
4. Четвериков И. А. Схема объективного анализа карт барической топографии методом оптимальной интерполяции. Труды ЦИП, вып. 102, 1962.
5. Bergthorsson P., Döös B. R. Numerical weather map analysis. Tellus, 7, No 3, 1955.
6. Best W. H. Differences in numerical prognoses resulting from differences in analysis. Tellus, 8, No 3, 1956.
7. Cressman G. P. An operational objective analysis system. Month. Wea. Rev., No 10, 1959.
8. Hang O. On the optimum use of available observations in numerical weather map analysis. Proc. of the Int. Symp. NWP, Tokyo, 1960.
9. Hang O. A method for numerical weather map analysis. Det Norske Meteorol. Inst. Scientific Report, No 5, 1959.
10. Skoda M. Objective analysis by means of the optimum interpolation and automatic data processing of aerological reports. Studia Geophysica et Geodetica 11, No 1, 1967.
11. Söderman D. and Rinne I. Numerical weather prediction in Finland during 1966. Helsinki, January 1967.
12. U. S. Department of Commerce Weather Bureau. Daily series synoptic weather maps Part II, Daily Bulletin, 1964—1965.

## \* СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие . . . . .                                                                                                                                                                       | 3   |
| ④ Л. С. Г ан д и н. О планировании сети климатологических станций . . . . .                                                                                                                 | 5   |
| ⊗ Л. С. Г ан д и н, Р. Л. Ка га н, В. П. Та ра ка но ва. К вопросу о рациональ-<br>ном планировании сети наблюдений за температурой воздуха . . . . .                                       | 30  |
| Ю. М. Ли бе р ма н. О точности анализа поля геопотенциала над северным и<br>южным полушариями . . . . .                                                                                     | 41  |
| Р. Л. Ка га н, Г. Х. Ха та м ку л о в. О точности конечно-разностного представ-<br>ления производных . . . . .                                                                              | 49  |
| М. О. Кри ч а к. Некоторые вопросы объективного анализа поля ветра . . . . .                                                                                                                | 87  |
| Р. Л. Ка га н, К. М. Лу ги на. Статистическая структура аномалий аэрологи-<br>ческих полей над Североамериканским континентом . . . . .                                                     | 98  |
| Л. Л. Бра ги н с к а я. О влиянии времени осреднения на точность инерционного<br>прибора . . . . .                                                                                          | 121 |
| Р. Л. Ка га н. О сравнении показаний инерционных приборов . . . . .                                                                                                                         | 131 |
| К. Я. Вин ни ко в. К вопросу об интерпретации результатов измерений ухо-<br>дящего излучения радиометрами с неограниченным полем зрения на метео-<br>рологических спутниках Земли . . . . . | 137 |
| К. М. Лу ги на. Сравнение результатов объективного анализа карт барической<br>топографии, полученных в оперативной практике различных стран . . . . .                                       | 164 |

**ТРУДЫ ГГО, ВЫП. 228**

**Применение статистических методов в метеорологии**

Редактор *Л. И. Штанникова*

Техн. редактор *Г. В. Ивкова*

Корректор *К. И. Розина*

---

|                                                     |                                                 |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| Сдано в набор 17/X 1967 г.                          | Подписано к печати 11/VI 1968 г.                |
| Бум. тип. № I 70×108 <sup>1</sup> / <sub>16</sub> . | Бум. л. 5,375. Печ. л. 15,05. Уч.-изд. л. 11,5. |
| Тираж 720 экз. М-21893.                             | Индекс МЛ-208.                                  |
| Гидрометеорологическое издательство.                | Ленинград. В-53, 2-я линия, д. № 23.            |
| Заказ 676.                                          | Цена 96 коп.                                    |

---

Ленинградская типография № 8 Главполиграфпрома Комитета по печати  
при Совете Министров СССР Ленинград, Прачечный пер., 6

УДК 551.501

**О планировании сети климатологических станций.** Г ан д и н Л. С. Труды ГГО, 1968, вып. 228, стр. 5—29.

Статья представляет собой сокращенный вариант доклада, представленного Комиссии по климатологии Всемирной метеорологической организации. Другие материалы, содержащиеся в указанном докладе, отражены в работе автора, Р. Л. Кагана и В. П. Таракановой, опубликованной в том же сборнике.

Статья содержит детальное изложение теории различных методов оценки информационного значения сети станций, основанных на использовании сведений по статистической структуре метеорологических полей. Приводятся основные результаты, полученные с помощью этого метода в Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова. Рассматриваются также результаты недавних исследований по оценке точности величин, осредненных по площади. Высказаны рекомендации к постановке дальнейших исследований по рациональному планированию развития сети станций. Табл. 1. Илл. 5. Библ. 16.

УДК 551.501

**К вопросу о рациональном планировании сети наблюдений за температурой воздуха.** Г ан д и н Л. С., Каган Р. Л., Тараканова В. П. Труды ГГО, 1968, вып. 228, стр. 30—40.

С помощью электронной вычислительной машины исследована статистическая структура поля средней суточной температуры воздуха у земной поверхности для некоторых районов Азии. Показано, что ненормированная корреляционная (ковариационная) функция приземной температуры воздуха не может считаться однородной и изотропной, в то время как нормированная корреляционная функция хорошо удовлетворяет этим условиям. Корреляционные функции существенно различны в различных физико-географических районах и в разные сезоны.

Полученные данные использованы для вычисления густоты сети, обеспечивающей заданную точность интерполяции данных о температуре. Приведены поля изолиний рекомендуемых расстояний между станциями. Высказаны рекомендации о дальнейшем применении данной методики. Табл. 6. Илл. 5. Библ. 6.

УДК 551.509.317

**О точности анализа поля геопотенциала над северным и южным полушариями.** Л и б е р м а н Ю. М. Труды ГГО, 1968, вып. 228, стр. 41—48.

Кратко изложена теория и методика оценки точности анализа метеорологических полей и их конечных разностей. С помощью этой методики выполнены расчеты по оценке плана расширения существующей сети аэрологических станций, предложенного в 1966 г. Всемирной метеорологической организацией. Показано, что с точки зрения точности объективного анализа, а потому и численного прогноза метеорологических полей предложенный план не является оптимальным. Количественные оценки показывают, что при ином расположении дополнительных станций можно существенно снизить ошибки объективного анализа над северным полушарием.