

06
T78
ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ГЛАВНАЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ
имени А. И. ВОЕЙКОВА

ТРУДЫ

ВЫПУСК 187

204634
ФИЗИКА
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ
АТМОСФЕРЫ

Под редакцией
Д. Л. ЛАЙХТМАНА, Т. В. КИРИЛЛОВОЙ

БИБЛИОТЕКА
Ленинградского
Гидрометеорологического
Института



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД • 1966

АННОТАЦИЯ

Сборник посвящен различным вопросам физики пограничного слоя атмосферы.

Излагаются результаты исследований по теории трансформации воздушного потока под влиянием подстилающей поверхности и по турбулентности в пограничном слое при стационарных условиях. Некоторые результаты касаются исследования параметров облачности в нижних слоях атмосферы, а также количественных характеристик теплового баланса водной поверхности.

Сборник рассчитан на специалистов, работающих в области физики атмосферы, и работников смежных специальностей.

МЕТОД РАСЧЕТА ВЫСОТЫ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ОБЛАКОВ ПО ДАННЫМ ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

Делается попытка установить функциональную связь между высотой нижней границы облачности и параметрами, значения которых поддаются численному прогнозу. Результаты расчетов сопоставляются с данными эксперимента.

1. Введение

Современные методы прогноза погоды позволяют предвычислять на короткий срок характеристики барического поля, а также полей температуры и влажности в свободной атмосфере. Сравнивая рассчитанное для некоторого уровня значение влажности с ее максимальным значением при соответствующих температуре и давлении, очевидно, можно сделать определенные выводы о наличии или отсутствии облачности. Основанные на этих соображениях методы прогноза облачности были развиты в ряде работ [1—6].

Однако во многих случаях сведений о наличии или отсутствии облачности бывает недостаточно. В частности, с точки зрения метеорологического обслуживания авиации основной интерес представляет такая характеристика погоды, как высота нижней границы облаков h . Существующие численные методы прогноза облачности, как известно, не предусматривают возможности определения этой величины. Дело в том, что высота нижней границы облаков обычно существенно зависит не только от условий тепло- и влагообмена в свободной атмосфере, но также и от эффектов, обусловленных взаимодействием атмосферы с подстилающей поверхностью. Учет этих эффектов требует специального рассмотрения. В настоящей работе делается попытка подобного анализа с целью установления функциональной связи между величиной h и прогнозируемыми параметрами. По-видимому, отыскание подобного рода связи представляет наиболее реальный путь решения задачи о прогнозе высоты облачности.¹

¹ Известные в настоящее время формулы для определения h , например предложенные в работах [7—9], не могут быть в данном случае использованы, поскольку величины, стоящие в их правых частях, непосредственно не прогнозируются. Соответствующие вопросы динамики конвективной облачности, не рассматривающиеся в данной работе, опубликованы в [10].

2. Исходные уравнения

Предположим, что в результате соответствующего численного прогноза для интересующего нас момента времени получены значения давления, составляющих скорости ветра, температуры и полного влагосодержания на некотором уровне, высоту которого ($z=Z$) будем считать по порядку величины совпадающей с высотой планетарного пограничного слоя атмосферы. Кроме того, будем считать заданными относительную влажность воздуха вблизи подстилающей поверхности и температуру почвы на глубине теплового пограничного слоя (указанные две характеристики меняются сравнительно медленно, так что при краткосрочном прогнозе их значения приближенно можно считать закрепленными).

Ограничимся рассмотрением условий, когда в слое толщиной порядка 1000 м члены, содержащие производные по времени и горизонтальным координатам, в уравнениях притока тепла и переноса влаги играют сравнительно малую роль и могут быть отброшены.¹ Очевидно, для нас будет представлять интерес случай, когда на уровне $z=Z$ полное влагосодержание превосходит максимальную удельную влажность, т. е. имеется слой облачности. Учитывая эти обстоятельства, уравнения переноса тепла и влаги для нижнего слоя атмосферы запишем в следующем виде² (ср. [12]).

В подобном слое ($0 < z < h$):

$$\omega \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) = \frac{\partial}{\partial z} k \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right), \quad (1)$$

$$\omega \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (2)$$

В слое от нижней границы облаков до уровня Z ($h < z < Z$):

$$\omega \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) = \frac{\partial}{\partial z} k \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) + \frac{L}{c_p} m, \quad (3)$$

$$\omega \frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k \left(\frac{\partial q}{\partial z} + \beta \right) - m, \quad (4)$$

$$\omega \frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \beta \right) + m. \quad (5)$$

Здесь z — вертикальная координата, T — абсолютная температура, q — удельная влажность, b — удельная водность, m — скорость конденсации водяного пара, ω — вертикальная составляющая скорости ветра, k — коэффициент турбулентного обмена, γ_a и γ_b — сухо- и влажноадиабатический градиенты температуры, L — скрытая теплота парообразования, c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении,

¹ Случай резких изменений свойств воздушной массы в нижнем слое при наличии облачности, когда указанные производные играют существенную роль, рассмотрен в работе [11].

² В уравнениях (1) и (3) отсутствуют члены, описывающие радиационный теплообмен. Эффект этого явления будет грубо учтен путем соответствующего написания граничных условий для температуры подстилающей поверхности и нижней границы облачного слоя.

$\beta = \frac{c_p}{L} (\gamma_a - \gamma_v)$ — равновесный градиент влажности.

Поскольку внутри облака водяной пар находится в насыщенном состоянии, удельная влажность выражается через температуру и давление следующим образом:

$$q = \frac{R}{R_w} \frac{E(T)}{p}, \quad (6)$$

где R и R_w — газовые постоянные воздуха и водяного пара, p — давление, $E(T)$ — максимальная упругость водяного пара при температуре T .

Распределение температуры в деятельном слое почвы описывается уравнением теплопроводности, которое в рассматриваемом случае квазистационарного режима имеет вид (ср. [13])

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} = 0. \quad (7)$$

Здесь ξ — глубина, меняющаяся в интервале $0 < \xi < \Xi$. Толщина деятельного слоя почвы Ξ определяется соотношением

$$\Xi = \sqrt{k_n t^*}, \quad (8)$$

где k_n — коэффициент температуропроводности почвы, t^* — характерный период изменений температуры в верхнем слое почвы.

3. Граничные условия

В соответствии с принятой постановкой задачи температуру в почве на глубине $\xi = \Xi$, относительную влажность воздуха (r_0) вблизи подстилающей поверхности, а также температуру T_z и удельное влагосодержание (s_z) на уровне $z = Z$ считаем заданными. Кроме этих условий воспользуемся известными соотношениями для «склейки» решений на уровнях $z = 0$ и $z = h$. Учитывая сказанное, систему граничных условий запишем в следующем виде.

На нижней границе деятельного слоя почвы:

$$T|_{\xi=\Xi} = T_{\Xi}. \quad (9)$$

На уровне подстилающей поверхности:

$$T|_{z=0} = T|_{\xi=0}, \quad (10)$$

$$q|_{z=0} = r_0 \frac{R}{R_w} \frac{E(T|_{z=0})}{p|_{z=0}}, \quad (11)$$

$$(P + D + LQ)|_{z=0} = -\Pi|_{\xi=0},$$

где P и Q — вертикальные турбулентные потоки тепла и водяного пара, D — радиационный поток тепла, Π — поток тепла в почве.

На нижней границе облаков (согласно [12]):

$$T|_{z=h+0} = T|_{z=h-0}, \quad (12)$$

$$q|_{z=h+0} = q|_{z=h-0}, \quad b|_{z=h+0} = b|_{z=h-0} = 0,$$

$$(P + D - LB)|_{z=h+0} = (P + D)|_{z=h-0}, \quad (13)$$

$$(Q + B)|_{z=h+0} = Q|_{z=h-0},$$

где B — вертикальный турбулентный поток водности.

На уровне $z=Z$:

$$T_{z=Z} = T_Z, \quad (q+b)|_{z=Z} = s_Z. \quad (14)$$

Входящие в соотношения (11), (13) величины P , Q , B и Π определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} P &= \begin{cases} -c_p \rho k \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) & \text{вне облака} \\ -c_p \rho k \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_b \right) & \text{внутри облака} \end{cases} \\ Q &= \begin{cases} -\rho k \frac{\partial q}{\partial z} & \text{вне облака} \\ -\rho k \left(\frac{\partial q}{\partial z} + \beta \right) & \text{внутри облака} \end{cases} \\ B &= -\rho k \left(\frac{\partial b}{\partial z} - \beta \right) \\ \Pi &= -c_{\pi} \rho_{\pi} k_{\pi} \frac{\partial T}{\partial \xi} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В последнем равенстве c_{π} и ρ_{π} — теплоемкость и плотность почвы.

Для определения величин $D|_{z=0}$ и $(D|_{z=h+0} - D|_{z=h-0})$ предположим, что нижняя граница облака и поверхность земли излучают и поглощают радиацию как серые тела. Будем, кроме того, считать, что тепловой эффект коротковолнового компонента радиации в рассматриваемой области пренебрежимо мал (поскольку энергия этого компонента практически полностью поглощается и рассеивается верхней частью облачного слоя). Величину D , полагаемую постоянной в слое $0 < z < h$, представим в виде разности $D = D_{\uparrow} - D_{\downarrow}$, где $D_{\uparrow}$ и $D_{\downarrow}$ — потоки длинноволновой радиации, направленные соответственно вверх и вниз. Обозначим через a_b и a_w значения длинноволновых альбедо для подстилающей поверхности и нижней границы облаков соответственно. Учитывая принятые предположения, получаем:

$$\begin{aligned} D_{\uparrow} &= (1 - a_b) \sigma (T|_{z=0})^4 + a_b D_{\downarrow}; \\ D_{\downarrow} &= (1 - a_w) \sigma (T|_{z=h})^4 + a_w D_{\uparrow}, \end{aligned}$$

где σ — постоянная Стефана—Больцмана.

Линеаризируя эти уравнения относительно $\frac{T_h - T_0}{T_0}$, находим

$$D = -4a\sigma (T|_{z=0})^3 (T|_{z=h} - T|_{z=0}), \quad \text{где } a = \frac{(1 - a_b)(1 - a_w)}{1 - a_b a_w}. \quad (16)$$

Полагая радиационный поток тепла в облаке равным нулю и заменяя в полученном выражении для D величину $(T|_{z=0})^3$ на T_{Σ}^3 (что допустимо в рамках принятой линеаризации относительно разностей температур), получаем

$$D|_{z=0} = -(D|_{z=h+0} - D|_{z=h-0}) \approx -4a\sigma T_{\Sigma}^3 (T|_{z=h} - T|_{z=0}). \quad (17)$$

4. Интегрирование исходных уравнений

Принимая во внимание неизбежные большие погрешности в определении основных задаваемых параметров (например, r_0 , s_z , T_z), а также известные ограничения общности, уже имеющиеся в постановке задачи, детальный учет особенностей вертикального распределения коэффициента турбулентного обмена и упорядоченной вертикальной скорости в рамках этой постановки, по-видимому, следует считать нецелесообразным. Учитывая это обстоятельство, величины k и w , входящие в уравнения (1)–(5) и др., примем постоянными во всем рассматриваемом слое ($0 < z < Z$). Пренебрежем также в этом слое изменениями плотности воздуха с высотой.

Перейдем от переменных T , q , b к новым переменным ϑ , s :

$$\vartheta = T - \frac{L}{c_p} b, \quad s = q + b. \quad (18)$$

Здесь ϑ — температура, которую принял бы воздух, если бы вся имеющаяся в нем жидкая влага испарилась за счет изменения его теплосодержания; s — удельное влагосодержание.¹

Из уравнений (1)–(5), используя соотношения (12), (13), (15), (17), для высот $z \geq h$ находим:

$$\begin{aligned} \vartheta = T_0 - \frac{P_0}{c_p \rho w} \left\{ \left(e^{\frac{wz}{k}} - 1 \right) + \frac{4asT_{\Xi}^3}{c_p \rho w} \left[\frac{\gamma_a c_p \rho w h}{P_0} + \left(e^{\frac{wh}{k}} - 1 \right) \right] \right\} \times \\ \times \left[e^{\frac{w}{k}(z-h)} - 1 \right] - \gamma_a z, \end{aligned} \quad (19)$$

$$s = q_0 - \frac{Q_0}{\rho w} \left(e^{\frac{wz}{k}} - 1 \right). \quad (20)$$

Здесь через T_0 , q_0 , P_0 и Q_0 обозначены неизвестные нам значения переменных T , q , P и Q при $z=0$. Записывая равенства (19), (20) для уровня $z=Z$ и учитывая соотношения (6), (10), (14), (18), получим:

$$\begin{aligned} T_Z + \gamma_a Z - \frac{L}{c_p} \left[s_Z - \frac{R}{R_w} \frac{E(T_Z)}{p_Z} \right] = T_0 - \frac{P_0}{c_p \rho w} \left\{ \left(e^{\frac{wZ}{k}} - 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{4asT_{\Xi}^3}{c_p \rho w} \left[\frac{\gamma_a c_p \rho w h}{P_0} + \left(e^{\frac{wh}{k}} - 1 \right) \right] \left[e^{\frac{w}{k}(Z-h)} - 1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$s_Z = r_0 \frac{R}{R_w} \frac{E(T_0)}{p_0} - \frac{Q_0}{\rho w} \left(e^{\frac{wZ}{k}} - 1 \right), \quad (22)$$

где p_Z и p_0 — значения давления на уровнях $z=Z$ и $z=0$.

Вычислим поток тепла в почву $\Pi_0 = \Pi \Big|_{\xi=0}$. Используя (7), (8), (15), получаем

$$\Pi_0 = -c_{n\rho_n} k_n \frac{T_{\Xi} - T_0}{\Xi}, \quad \text{где } \Xi = \sqrt{k_n t^*}. \quad (23)$$

¹ Подстановки типа (18) предлагались в работах [14, 15] и др.

Перейдем теперь к соотношению (11). Учитывая (17), (19), преобразуем его к виду

$$P_0 + LQ_0 + 4asT_z^3 \left[\frac{P_0}{c_p \rho w} \left(e^{\frac{wh}{k}} - 1 \right) + \gamma_a h \right] = -\Pi_0. \quad (24)$$

Воспользуемся, наконец, последним из соотношений (12), выражающим тот факт, что на уровне $z=h$ удельное влагосодержание равно насыщающей влажности. Используя выражения (21), (22), из этого условия находим

$$\begin{aligned} \frac{R}{R_w} \frac{1}{p_h} E \left[T_0 - \frac{P_0}{c_p \rho w} \left(e^{\frac{wh}{k}} - 1 \right) - \gamma_a h \right] = \\ = r_0 \frac{R}{R_w} \frac{E(T_0)}{P_0} - \frac{Q_0}{\rho w} \left(e^{\frac{wh}{k}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (25)$$

Учитывая приближенный характер используемых соотношений, величину p_h , выражавшую атмосферное давление на высоте $z=h$, в формуле (25) без внесения сколько-нибудь заметных дополнительных погрешностей можно заменить на p_z .

5. Дополнительные упрощения

Воспользуемся тем, что при наличии низкой облачности в планетарном пограничном слое атмосферы температурная стратификация обычно близка к нейтральной, и запишем для среднего по слою значения коэффициента турбулентного обмена следующее приближенное выражение¹:

$$k = c \frac{G^2}{l} \quad (c \approx 0,7 \cdot 10^{-5}). \quad (26)$$

Здесь G — модуль скорости геострофического ветра, l — параметр Кориолиса ($l = 2 \omega \sin \varphi$, где ω — угловая скорость вращения Земли, φ — географическая широта).

Среднее значение вертикальной скорости w в рассматриваемом слое будем считать непосредственно заданным (его можно положить, например, равным определенной доле от прогнозируемого значения вертикальной скорости на уровне $z=Z$).

Для упрощения дальнейших выкладок воспользуемся следующей линейной аппроксимацией изменения функции $E(T)$ на небольшом интервале:

$$E(T) - E_z = E'_z (T - T_z), \quad (27)$$

где $E_z = E(T_z)$, $E'_z = E'(T_z)$. Функции $E(T)$ и $E'(T)$ затабулированы (см. [18]).

¹ Рассуждая более строго, для случаев нейтральной стратификации вместо (26) следовало бы писать $k = f(Ro) G^2 / l$, где $Ro = G / l z_0$ — число Россби, z_0 — параметр шероховатости, f — универсальная функция аргумента Ro . Однако, как показывают результаты соответствующей обработки экспериментальных данных, при $10^5 < Ro < 10^7$ (т. е. в интервале наиболее часто наблюдающихся значений Ro) универсальные характеристики турбулентности планетарного пограничного слоя атмосферы меняются сравнительно незначительно (ср. [16, 17]). В частности, интересующая нас функция $f(Ro)$, по данным, полученным Л. Р. Орленко, в рассматриваемом интервале может быть заменена постоянной $c \approx 0,7 \cdot 10^{-5}$.

6. Схема расчета

Введем безразмерные величины:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{RE_Z}{R_w p_Z s_Z}, \quad \gamma = \frac{\gamma_a Z}{T_Z} \\ \delta &= \frac{4asT_Z^3 Z}{c_p \rho k}, \quad \varepsilon = \frac{r_0 p_Z}{P_0} \\ \zeta &= \frac{w}{k} Z, \quad \eta = \frac{E'_Z T_Z}{E_Z} \\ \lambda &= \frac{Ls_Z}{c_p T_Z}, \quad \mu = \frac{c_{п\theta\eta} k_{пZ}}{c_p \rho k \Xi} \\ \tau &= \frac{T_{\Xi}}{T_Z} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0 &= \frac{T_0}{T_Z}, \quad \tilde{P}_0 = \frac{P_0 Z}{c_p \rho k T_Z}, \\ \tilde{Q}_0 &= \frac{Q_0 Z}{\rho k s_Z}, \quad \tilde{h} = \frac{h}{Z}, \end{aligned} \quad (29)$$

Систему уравнений (21) — (25) с учетом соотношений (27) — (29) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_0 - 1) - \left[\frac{e^{\zeta} - 1}{\zeta} + \delta \frac{e^{\zeta \tilde{h}} - 1}{\zeta} \frac{e^{\zeta(1-\tilde{h})} - 1}{\zeta} \right] \tilde{P}_0 = \\ = \gamma + \lambda(\alpha - 1) + \gamma \delta \tilde{h} \frac{e^{\zeta(1-\tilde{h})} - 1}{\zeta}, \end{aligned} \quad (30)$$

$$\alpha \eta \varepsilon (\tilde{T}_0 - 1) - \frac{e^{\zeta} - 1}{\zeta} \tilde{Q}_0 = 1 - \alpha \varepsilon, \quad (31)$$

$$\mu (\tilde{T}_0 - 1) + \left(1 + \delta \cdot \frac{e^{\zeta \tilde{h}} - 1}{\zeta} \right) \tilde{P}_0 + \lambda \tilde{Q}_0 = \mu (\tau - 1) - \gamma \delta \tilde{h}, \quad (32)$$

$$\left(\eta \tilde{P}_0 - \frac{1}{\alpha} \tilde{Q}_0 \right) \frac{e^{\zeta \tilde{h}} - 1}{\zeta} + \eta \gamma \tilde{h} = (1 - \varepsilon) [\eta (\tilde{T}_0 - 1) + 1]. \quad (33)$$

Неизвестными здесь являются параметры $\tilde{h}$, $\tilde{T}_0$, $\tilde{P}_0$, $\tilde{Q}_0$.

Решение системы (30) — (33) может быть получено итерационным методом по следующей схеме:

$$\left. \begin{aligned} (\tilde{T}_0^{(1)} - 1) - \frac{e^{\zeta} - 1}{\zeta} \tilde{P}_0^{(1)} &= \gamma + \lambda(\alpha - 1) \\ \alpha \eta \varepsilon (\tilde{T}_0^{(1)} - 1) - \frac{e^{\zeta} - 1}{\zeta} \tilde{Q}_0^{(1)} &= 1 - \alpha \varepsilon \\ \mu (\tilde{T}_0^{(1)} - 1) + \tilde{P}_0^{(1)} + \lambda \tilde{Q}_0^{(1)} &= \mu (\tau - 1) \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left(\eta \tilde{P}_0^{(1)} - \frac{1}{\alpha} \tilde{Q}_0^{(1)} \right) \frac{e^{\zeta \tilde{h}^{(1)}} - 1}{\zeta} + \eta \gamma \tilde{h}^{(1)} = (1 - \varepsilon) [\eta (\tilde{T}_0^{(1)} - 1) + 1], \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned}
& \left(\tilde{T}_0^{(n+1)} - 1 \right) - \left[\frac{e^\zeta - 1}{\zeta} + \delta \frac{e^{\zeta \tilde{h}^{(n)}} - 1}{\zeta} \cdot \frac{e^{\zeta (1 - \tilde{h}^{(n)})} - 1}{\zeta} \right] \tilde{P}_0^{(n+1)} = \\
& \quad = \gamma + \lambda (\alpha - 1) + \gamma \delta \tilde{h}^{(n)} \frac{e^{\zeta (1 - \tilde{h}^{(n)})} - 1}{\zeta} \\
& \quad \alpha \eta \varepsilon \left(\tilde{T}_0^{(n+1)} - 1 \right) - \frac{e^\zeta - 1}{\zeta} \tilde{Q}_0^{(n+1)} = 1 - \alpha \varepsilon \\
& \quad \mu \left(\tilde{T}_0^{(n+1)} - 1 \right) + \left(1 + \delta \frac{e^{\zeta \tilde{h}^{(n)}} - 1}{\zeta} \right) \tilde{P}_0^{(n+1)} + \lambda \tilde{Q}_0^{(n+1)} = \\
& \quad \quad = \mu (\tau - 1) - \gamma \delta \tilde{h}^{(n)} \\
& \quad \left(\eta \tilde{P}_0^{(n+1)} - \frac{1}{\alpha} \tilde{Q}_0^{(n+1)} \right) \frac{e^{\zeta \tilde{h}^{(n+1)}} - 1}{\zeta} + \eta \gamma \tilde{h}^{(n+1)} = \\
& \quad \quad = (1 - \varepsilon) \left[\eta \left(\tilde{T}_0^{(n+1)} - 1 \right) + 1 \right].
\end{aligned} \right\} \quad (36)$$

$$\quad \quad \quad (37)$$

Вычисления по формулам (34)–(37), очевидно, сводятся к элементарным операциям (уравнения (35), (37) решаются методом Ньютона). В настоящей работе соответствующие расчеты выполнялись с помощью ЭВМ М-20.

Для практических целей наряду с описанной относительно громоздкой схемой расчета высоты нижней границы облаков, требующей применения ЭВМ, удобно иметь также приближенную формулу, которая позволяла бы достаточно простым способом грубо оценивать эту величину. Имея ввиду получение подобной формулы, упростим систему (30)–(33), положив $\zeta=0$, $\delta=0$, что соответствует пренебрежению эффектами вертикальных токов и радиационного теплообмена. При этом в результате соответствующих преобразований получим:

$$\tilde{h} = \alpha (1 - \varepsilon) \frac{A_0 + \eta A_1}{\alpha \eta \gamma A_0 - A_2 + \alpha \eta A_3}, \quad (38)$$

$$\left. \begin{aligned}
A_0 &= 1 + \mu + \alpha \eta \varepsilon \lambda \\
A_1 &= \gamma + \mu (\tau - 1) + \alpha \lambda (1 - \varepsilon) \\
A_2 &= \alpha \eta \varepsilon [\gamma + \mu (\tau - 1) + \lambda (\alpha - 1)] - (1 - \alpha \varepsilon) (1 + \mu) \\
A_3 &= \mu (\tau - 1) + \lambda (1 - \alpha \varepsilon) - (\mu + \alpha \eta \varepsilon \lambda) [\gamma + \lambda (\alpha - 1)]
\end{aligned} \right\} \quad (39)$$

7. Примеры расчетов

С целью сравнения рассчитываемых значений величины h с наблюдаемыми было рассмотрено несколько конкретных примеров, исходным материалом для которых послужили экспериментальные данные, полученные в специальной экспедиции по исследованию нижней облачности осенью 1962 г. на экспериментальном метеорологическом полигоне ГУГМС (в районе Днепропетровска).

Значение параметров, использовавшихся при расчетах, даны в табл. 1. В табл. 2 приведены наблюдавшиеся значения величины h , а также значения этой величины, рассчитанные на ЭВМ М-20 по схеме (34)–(37)¹ и по формулам (38)–(39). Следует отметить, что высота

¹ В тех случаях, когда сведения о величине вертикальных токов отсутствовали, при расчетах по схеме (34)–(37) полагалось $w=0$ (т. е. $\zeta=0$).

Таблица 1

Переменные параметры

Дата	Часы	Z м	p _z мб	T _z °K	$s_z \cdot 10^3 \frac{r}{r}$	G м/сек.	w м/сек.	r ₀	T _з °K
Днепропетровск									
18/XI	15	587	953	273,7	4,2	8	8·10 ⁻⁴	0,86	276,7
19/XI	9	330	961	277,6	5,7	8	—5·10 ⁻⁵	0,99	275,4
23/XI	24	310	994	280,3	6,8	15	9·10 ⁻⁴	0,98	279,7
24/XI	6	356	981	286,4	9,9	13	1,6·10 ⁻³	0,98	279,6
	9	393	977	285,8	9,8	15	1,6·10 ⁻³	1,00	279,4
28/XI	15	744	937	270,7	4,0	4	1,5·10 ⁻³	0,96	278,1
	18	735	938	276,6	5,6	7	1,6·10 ⁻³	0,98	278,1
29/XI	12	521	945	275,0	4,6	11	—2·10 ⁻⁴	0,92	277,5
	15	992	902	267,7	2,9	14	—2·10 ⁻⁴	0,88	277,4
30/XI	6	1426	853	267,0	3,1	7	4·10 ⁻⁴	0,96	277,3
	24	553	932	275,2	4,9	8	8·10 ⁻⁴	0,91	277,4
Октябрьское									
28/XI	9	549	949	271,4	3,8	5	—	0,95	279
	12	422	963	272,9	4,1	10	2·10 ⁻⁴	0,92	279
	15	871	916	268,8	3,3	7	—	0,96	279
29/XI	12	901	901	272,0	4,2	11	—	0,98	278,7
	15	878	917	273,0	4,3	15	—	0,91	278,9
30/XI	3	1290	869	264,6	2,4	10	—	0,93	277,3
	18	1433	849	269,4	3,6	14	—	0,92	278
	21	793	906	272,1	4,1	12	—	0,95	277,8

Закрепленные параметры: $a_b = 0$; $a_w = 1,5\%$; $c_{np} k_{п} = 0,15 \frac{\text{кал}}{\text{м} \cdot \text{сек} \cdot \text{град}}$; $k_{п} = 0,36 \cdot 10^{-6} \frac{\text{м}^2}{\text{сек}}$;
 $p_0 = 1000$ мб; $\varphi = 48^\circ 25'$.

Таблица 2

Дата	Часы	h м			
		локатор	шар-пилот	(34) — (37)	(38) — (39)
Днепропетровск					
18/XI	15	—	378	585	584
19/XI	9	—	76	168	155
23/XI	24	—	117	58	57
24/XI	6	—	130	188	185
	9	170	172	98	97
28/XI	15	106	101	474	261
	18	103	228	394	308
29/XI	12	317	467	521	521
	15	308	502	921	897
30/XI	6	880	868	1350	1042
	24	391	—	499	478
Октябрьское					
28/XI	9	163	150	425	327
	12	221	222	342	328
	15	138	100	644	503
29/XI	12	—	295	658	577
	15	345	724	727	698
30/XI	3	—	85	1244	1185
	18	—	169	1333	1277
	21	—	722	594	550

нижней границы облаков в экспедиции измерялась двумя методами: локатором и с помощью шаров-пилотов, причем, как видно из табл. 2, соответствующие значения, вообще говоря, заметно различаются. Для рассматриваемой группы примеров их среднее квадратичное отклонение составляет 149 м. Эта величина должна служить определенным масштабом при оценке погрешностей расчета. Последние можно охарактеризовать, определив, например, средние квадратичные отклонения рассчитанного значения h от полусуммы двух имеющихся экспериментальных значений. По данным табл. 2, эти отклонения составляют 257 м в случае применения формул (34) — (37) и 225 м в случае вычисления по формулам (38) и (39)¹. Указанные отклонения, по-видимому, несколько завышены за счет очень больших погрешностей в определении h 30 XI в 3 и 18 час., очевидно, вызванных несогласованностью измерений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шве́ц М. Е. К вопросу о предвычислении поля относительной влажности. Тр. ГГО, вып. 81, 1959.
2. Арра́го Л. Р., Шве́ц М. Е. К теории образования и эволюции неконвективной облачности. Тр. ГГО, вып. 121, 1961.
3. Арра́го Л. Р. К вопросу об эволюции облачности. Тр. ГГО, вып. 124, 1962.
4. Мелешко В. П., Шве́ц М. Е. К вопросу о прогнозе дефицита влажности. Тр. ГГО, вып. 114, 1961.
5. Мелешко В. П. Численный прогноз дефицита точки росы. Тр. ГГО, вып. 124, 1962.
6. Мелешко В. П. К вопросу о численном прогнозе облачности и осадков с учетом трансформации воздушной массы. Тр. ГГО, вып. 151, 1964.
7. Шве́ц М. Е., Каменская О. А. О методе определения высоты нижней границы внутримассовых слоистых облаков. Тр. ЛГМИ, вып. 5—6, 1956.
8. Богданова Н. П., Шве́ц М. Е. Об определении нижней границы внутримассовых слоистых облаков. Тр. ГГО, вып. 81, 1959.
9. Матвеев Л. Т. Расчет высоты верхней границы и вертикальной мощности слоистообразных облаков. Метеорология и гидрология, № 8, 1962.
10. Шишкин Н. С. Облака, осадки и грозовое электричество. Гидрометеиздат, Л., 1964.
11. Лайхтман Д. Л., Надежина Е. Д., Симонов В. В. Влияние изменения внешних условий на трансформацию нижней облачности. Тр. ГГО, вып. 167, 1965.
12. Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. Теплопроводность и влагообмен в турбулентной атмосфере при наличии фазовых переходов влаги. ДАН, СССР, 156, № 5, 1964.
13. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеиздат, Л., 1961.
14. Матвеев Л. Т., Кожарин В. С. Роль турбулентного перемешивания в формировании слоистообразных облаков. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1956.
15. Соломатина И. И. К вопросу о конденсации при смешении двух воздушных масс. Тр. ГГО, вып. 69, 1957.
16. Lettau H. H. Wind profile, surface stress and geostrophic drag coefficients in the atmospheric surface layer. Atmospheric diffusion and air pollution. Ed. by F. N. Frenkel and P. A. Sheppard, New York, 1958.
17. Blackadar A. K. The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. J. Geophys. Research, 67, N 8, 1962.
18. Психрометрические таблицы. Под ред. В. А. Савича. Гидрометеиздат, Л., 1957.

¹ Тот факт, что расчеты по формулам (38) и (39) приводят к лучшим результатам, чем расчеты по более совершенным формулам (34) — (37), по-видимому, объясняется очень большими погрешностями в определении задаваемой величины вертикальной скорости.

Р. С. БОРТКОВСКИЙ, Л. Р. ОРЛЕНКО, Г. Х. ЦЕЙТИН

К РАСЧЕТУ ВЕТРА И КАСАТЕЛЬНОГО НАПРЯЖЕНИЯ НАД ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Рассматривается методика расчета ветра по заданному барическому полю и известной температурной стратификации над открытой частью моря. Для равновесных условий методика доведена до оперативного вида.

1. Состояние вопроса

Закономерности в распределении ветра как над сушей, так и над морем издавна привлекают внимание исследователей, что объясняется большим прикладным значением этой проблемы и, в частности, необходимостью расчета ветра и касательного напряжения при решении целого ряда задач в том числе и в задаче прогноза.

В литературе ветер и касательное напряжение часто исследуются раздельно. Для расчета ветра используется соотношение наземного (ветра над водой) и геострофического ветра, позволяющее по известному геострофическому ветру, т. е. по известному горизонтальному барическому градиенту, рассчитывать наземный ветер. Соотношение

наземного и геострофического ветра $\frac{C_z}{V_g}$ исследовалось как эмпирически, так и на основе решения уравнений движения при заданной скорости геострофического ветра. Путь эмпирических сопоставлений в этой задаче представляется нам малоперспективным.

Действительно, как следует из теоретических соображений, подтвержденных экспериментальными данными, $\frac{C_z}{V_g}$ даже для однородных условий зависит от целого ряда факторов: высоты, шероховатости подстилающей поверхности, скорости геострофического ветра, стратификации атмосферы и широты места, (а в прибрежной зоне еще и от расстояния от берега), поэтому практически невозможно по данным непосредственных наблюдений получить коэффициенты, учитывающие влияние всех этих факторов.

Преимущество теоретического пути — в возможности учета основных факторов и получения одновременно как скорости ветра, так и касательного напряжения. Что касается методов определения касательного напряжения τ , то следует все существующие методы прежде всего разделить на две группы в зависимости от того, используются ли для этой цели характеристики атмосферы или характеристики состояния поверхности моря. Анализ этих методов и их классификация сделаны в работах [1, 28, 30].

Методы первой группы, очевидно, пригодны как для моря, так и для суши. Методы второй группы учитывают отличительные свойства моря, как подвижной среды. В каждой из этих групп могут быть в свою очередь различные подходы. Не останавливаясь подробно на методах второй группы, следует отметить следующее. В этих методах используется связь между касательным напряжением, с одной стороны, и либо наклоном уровня моря, либо характеристиками волнения, с другой [22]. Безусловно, исследование связи касательного напряжения с характеристиками волнения имеет большое значение как теоретическое, так и прикладное. Действительно, зная такие связи и имея возможность прогнозировать касательное напряжение, можно таким образом прогнозировать и характеристики волнения. Но использование этой связи в прогнозе касательного напряжения неправомерно, так как характеристики волнения являются следствием взаимодействия моря и атмосферы.

Наиболее перспективным для расчета τ являются методы первой группы, в которых касательное напряжение определяется по данным в атмосфере. Их можно разделить на две подгруппы в зависимости от того, используются ли для этой цели данные о ветре или данные о барическом поле.

Если имеются данные о ветре, то расчет можно производить либо по приземному ветру с использованием тех или иных схем для распределения ветра или менее строго по эмпирической формуле типа $\tau_0 = \alpha v^2$, либо с использованием данных о распределении ветра во всем пограничном слое атмосферы. Формулы для τ_0 в последнем случае легко получить из уравнений движения. Можно говорить о меньших или больших недостатках этих методов; однако отметим, что ни один из этих методов для задачи прогноза не годится. В самом деле, для расчета τ_0 в этих методах используется распределение ветра, а оно как раз неизвестно нам и должно прогнозироваться. Поэтому наиболее правильный и наиболее перспективный путь — определить одновременно профиль скорости ветра и касательное напряжение теоретически по известному барическому полю, которое определяется процессами большого масштаба и легче прогнозируется. Решение уравнений в этом случае позволит на основе прогноза барического поля дать прогноз скорости ветра и касательного напряжения. При этом, поскольку речь идет о расчете ветра над морем, могут быть два подхода к решению задачи: 1) рассматривается система вода — атмосфера, 2) рассматривается только атмосфера, а водная поверхность рассматривается как шероховатая, причем параметр шероховатости считается заданным.

Учитывая сложность системы вода—атмосфера, а также недостаточную изученность этой проблемы в целом, на данном этапе целесообразнее выбрать второй подход, т. е. считать известной шероховатость морской поверхности. В этом случае привлекаются для решения задачи уравнения движения для пограничного слоя атмосферы.

Решение этих уравнений при стационарных условиях ранее использовалось для расчета ветра над морем. В 1954 г. была предложена методика расчета Дрогайцевым [5]. Решение Берлянда использовалось Соркиной для расчета ветра [14]. Эти решения в принципе позволяют по заданному барическому полю рассчитать скорость ветра у земли и касательное напряжение при известной шероховатости.

Однако используемые авторами для замыкания системы уравнений эмпирические соотношения получены лишь при определенных условиях, что ограничивает возможность применения указанных решений.

Для решения задачи расчета ветра и касательного напряжения над

водной поверхностью в работе были использованы выполненные в последние годы в отделе физики пограничного слоя Главной геофизической обсерватории теоретические исследования по строению пограничного слоя атмосферы [9, 10, 16, 17].

2. Постановка и общее решение задачи для горизонтально однородных условий

Если рассматривать водную поверхность как некоторую шероховатую поверхность, шероховатость которой известна, то задача определения ветра и касательного напряжения над водой аналогична такой же задаче над сушей, т. е. задача в этом случае сводится к решению обычных уравнений движения для воздуха при заданном значении горизонтального барического градиента. Отличие состоит лишь в том, что в этом случае подстилающая поверхность не является неподвижной. Это обстоятельство должно быть учтено в граничных условиях.

Если рассматривать горизонтально-однородные условия, то необходимая для решения задачи замкнутая система уравнений [10] может быть записана в виде:

$$-\frac{d}{dz} k \frac{du}{dz} + 2\omega_z v = 0, \quad (1)$$

$$-\frac{d}{dz} k \frac{dv}{dz} - 2\omega_z (u - V_g) = 0, \quad (2)$$

$$(1 - \delta) \int_{z_0}^H k \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dz - \int_{z_0}^H \frac{g}{T} k \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_p \right) dz = 0, \quad (3)$$

$$-\frac{d}{dz} k \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_p \right) - \frac{1}{c_p \rho} \frac{dF}{dz} = 0, \quad (4)$$

$$-\frac{d}{dz} [u^2 + v^2] \Big|_{z=H} = 0. \quad (5)$$

Здесь u и v — составляющие скорости ветра по осям x и y (ось x направлена по изобаре), k — коэффициент турбулентности, V_g — геострофический ветер, определяемый соотношением

$$V_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} \cdot \frac{\partial P}{\partial n},$$

T и P — температура и давление воздуха, H — высота пограничного слоя, δ — параметр диссипации, g — ускорение силы тяжести, γ_p — равновесный градиент, $\omega_z = \omega \sin \varphi$ — проекция угловой скорости вращения земли, ω — угловая скорость вращения земли, φ — широта места, F — лучистый приток тепла.

При выборе граничных условий принимались во внимание два обстоятельства: 1) наличие поверхностных течений воды, 2) стратификация в пограничном слое, наиболее полно характеризующая разностью температур $T_0 - T_H$, где T_0 — температура поверхности воды, T_H — температура воздуха на верхней границе пограничного слоя.

Учет стратификации через $T_0 - T_H$ удобен еще и потому, что температура воды является довольно консервативной характеристикой и может считаться известной и в задаче прогноза, если речь идет о прогнозе

$$v(z) \approx v_T + \left(\frac{z}{h}\right)^{1-n} m_z \frac{M(x_h, m_h)}{x_h^2} \{ (V_g - u_T) \sin \beta_h \times \\ \times [1 - \Delta_2(z)] - v_T \cos \beta_h [1 - \Delta_1(z)] \}, \quad (26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} m_z &= \frac{(z^{1-n} - z_0^{1-n})}{pz^{1-n}} = \frac{(2-n)}{(1-n)} \left[1 - \left(\frac{z_0}{z}\right)^{1-n} \right] \quad \text{для } n \neq 1 \\ m_z &= \ln \frac{z}{z_0} \quad \text{для } n = 1 \\ m_h &= m_z|_{z=h} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$M(x_h, m_h) = \frac{x_h^2}{\sqrt{[m_h + r_1(x_h)]^2 + r_2^2(x_h)}}, \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos \beta_h &= [m_h + r_1(x_h)] \frac{M(x_h, m_h)}{x_h^2} \\ \sin \beta_h &= r_2(x_h) \frac{M(x_h, m_h)}{x_h^2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$r_2(x_h) - ir_2(x_h) = 2 \left\{ \frac{K_1(x_h \sqrt{i}) - K_0(x_h \sqrt{i})}{I_1(x_h \sqrt{i}) + I_0(x_h \sqrt{i})} - C_0 - \ln \frac{x_h \sqrt{i}}{2} \right\} \quad (30)$$

где $C_0 = 0,5772$ — постоянная Эйлера.

Поправки $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$, вызванные наличием силы Кориолиса, вычисляются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_1(z) &\approx \frac{z}{h} \Delta_{1h} \\ \Delta_2(z) &\approx \frac{z}{h} \Delta_{2h} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{1h} &\approx \Delta_h \left\{ \frac{m_h - \frac{2(2-n)}{(3-2n)}}{m_h + r_1(x_h)} - \frac{\left(\frac{x_h}{2}\right)^2}{2(2-n)r_2(x_h)} \left[\frac{3}{2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(2-n)^2}{(3-n)} r_1(x_h) \right] \right\} \\ \Delta_{2h} &\approx \Delta_h \left\{ 1 + \frac{(m_h + r_1(x_h))}{r_2^2(x_h)} \left[r_1(x_h) + \frac{2(2-n)}{(3-2n)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\left(\frac{x_h}{2}\right)^2}{2(2-n)r_2(x_h)} \left[\frac{(2-n)^2}{(3-n)} m_h - \frac{3}{2} \right] \right\} \\ \Delta_h &\approx \frac{(2-n)}{m_h} \left(\frac{x_h^2}{4} \right) r_2(x_h). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Таблицы функций $r_1(x_h)$ и $r_2(x_h)$ приводятся в работе [16]. Для расчета $\Delta_1(z)$ и $\Delta_2(z)$ в приложении 1 приводятся данные Δ_{1h} и Δ_{2h} для различных значений x_h и m_h при $n=0,85$. (Практически таблица может использоваться для $n \sim 0,8-0,9$).

Для расчетов $M(x_h, m_h)$, $\cos \beta_h$, $\sin \beta_h$ и m_z построены номограммы (см. рис. 1, 2 и 3). Расчеты составляющих скорости ветра для высот $z \geq h$ проводятся непосредственно по формулам (16).

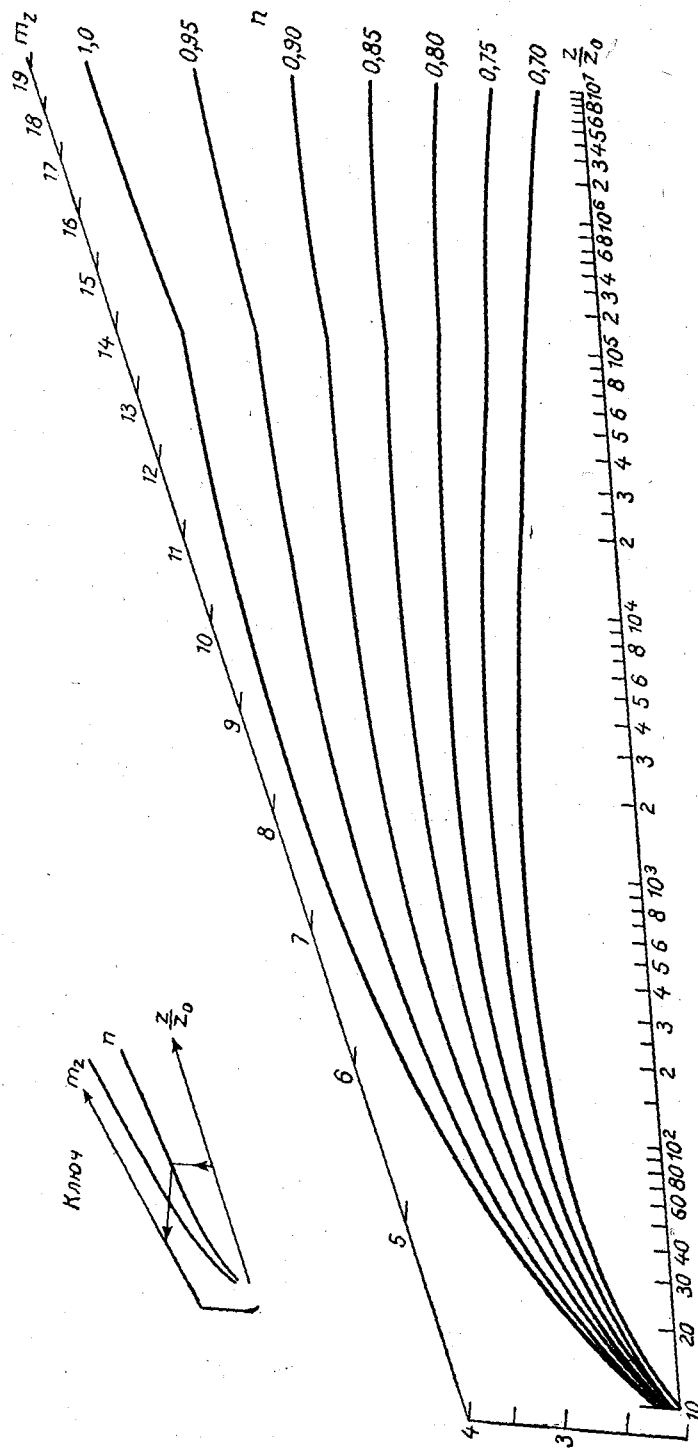


Рис. 1. Номограмма для определения величины m_z .

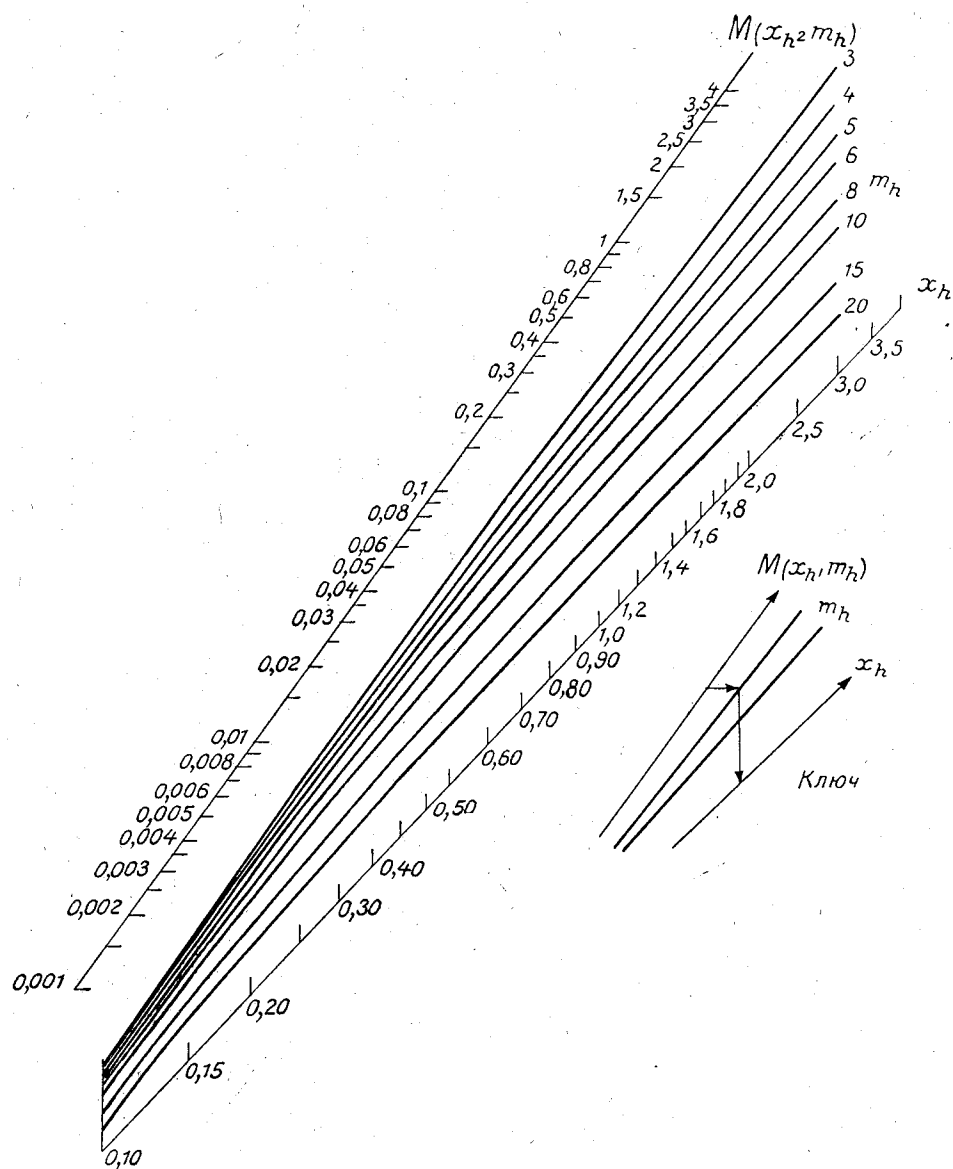


Рис. 2. Номограмма для определения величины x_h .

Формулы для составляющих касательного напряжения записываются в виде:

$$\frac{\tau_{0x}}{\rho} = k(z) \frac{du}{dz} \Big|_{z=z_0} \approx \frac{(2-n)k_h}{h} \times \\ \times \frac{M(x_h, m_h)}{x_h^2} [V_g - u_T] \cos \beta_h + v_T \sin \beta_h, \quad (34)$$

$$\frac{\tau_{0y}}{\rho} = k(z) \frac{dv}{dz} \Big|_{z=z_0} \approx \frac{(2-n)k_h}{h} \times \\ \times \frac{M(x_h, m_h)}{x_h^2} [V_g - u_T] \sin \beta_h - v_T \cos \beta_h. \quad (35)$$

Формула для температуры воздуха на основе решения уравнения притока тепла с учетом условий (8)–(10) получена в виде:

$$T(z) = T_0 - \gamma_p(z - z_0) + k_h \left[(\gamma_p - \gamma_H - \tilde{\gamma}) \psi_1(z) + \frac{\tilde{\gamma}}{H} \psi_2(z) \right], \quad (36)$$

где

$$\psi_1(z) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{k(z)} \approx \begin{cases} \frac{z}{k(z)} \cdot \frac{m_z}{(2-n)} & \text{при } z \leq h \\ \frac{z}{k_h} v_z & \text{при } z \geq h \end{cases} \quad (37)$$

$$\psi_2(z) = \int_{z_0}^z \frac{z dz}{k(z)} \approx \begin{cases} \frac{z^2}{(2-n)k(z)} & \text{при } z \leq h \\ \frac{z^2}{k_h} v_z^* & \text{при } z \geq h \end{cases} \quad (38)$$

$$\tilde{\gamma} = \frac{T_0 - T_H}{H} - \gamma_p + (\gamma_p - \gamma_H) v_H, \quad (39)$$

$$\left(v_H - \frac{1}{2} \right)$$

$$v_z = 1 - \frac{h}{z} + \frac{h}{(2-n)z} m_h \quad (40)$$

$$v_H = v_z \Big|_{z=H}$$

$$v_z^* = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{n}{(2-n)} \left(\frac{h}{z} \right)^2 \right] \quad (41)$$

$$v_H^* = v_z^* \Big|_{z=H} \approx \frac{1}{2}$$

В формулы для скорости ветра и температуры, кроме исходных данных, входят H , h , k_1 и c_1 .

Для их определения используются уравнения баланса энергии турбулентности (4), условие для высоты пограничного слоя (5), связь k_1 и c_1 (12) и связь скорости ветра на фиксируемом уровне (c_1) с H , h и k_1 на основе решения уравнений движения.

На основе двух последних соотношений, следуя работе [16], получено одно соотношение

$$M(x_h, m_h) = N h^{3-2n}, \quad (42)$$

где

$$N = \frac{8\omega_z}{(2-n)^2 z_1^{1-2n} m_1 (V_g - u_T) f(z_0, z_1, \epsilon)} \quad (43)$$

есть функция исходных данных и входных параметров. Это соотношение позволяет свести число искомых параметров до трех (h , H и x_h).

На основе полученных решений для скорости ветра и температуры уравнение баланса энергии турбулентности и условие для высоты пограничного слоя при $z=H$ записываются в виде:

$$(V_g - u_T) \frac{\tau_{0x}}{\rho} - v_T \frac{\tau_{0y}}{\rho} - \frac{gHk_h}{(1-\delta)\bar{T}} \left[\gamma_p - \gamma_H - \frac{\tilde{\gamma}}{2} \right] = 0, \quad (44)$$

$$k_h = \frac{\omega_z}{a_H^2} (H - h)^2, \quad (45)$$

где $\bar{T}$ — средняя абсолютная температура в пограничном слое, $a_H = a_z|_{z=H}$ — наименьший корень трансцендентного уравнения

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{u_h}{V_g}\right) \sin\left(a_H + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{v_h}{V_g} \cos\left(a_H + \frac{\pi}{4}\right) &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-a_H} \left[\left(1 - \frac{u_h}{V_g}\right)^2 + \left(\frac{v_h}{V_g}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Для определения a_H над водной поверхностью рекомендуется номограмма на рис. 4.

3. Схема расчета

Составляющие скорости ветра u_1 и v_1 на некотором уровне z_1 вблизи водной поверхности (около 10 м) и составляющие касательного напряжения $\frac{\tau_{0x}}{\rho}$ и $\frac{\tau_{0y}}{\rho}$ вычисляются по формулам:

$$u_1 \approx u_T + \left(\frac{z_1}{h}\right)^{1-n} m_1 \frac{M(x_h, m_h)}{x_h^2} [(V_g - u_T) \cos \beta_h + v_T \sin \beta_h], \quad (47)$$

$$v_1 \approx v_T + \left(\frac{z_1}{h}\right)^{1-n} m_1 \frac{M(x_h, m_h)}{x_h^2} [(V_g - u_T) \sin \beta_h - v_T \cos \beta_h], \quad (48)$$

$$\frac{\tau_{0x}}{\rho} \approx \frac{(2-n)k_1}{z_1 m_1} (u_1 - u_T), \quad (49)$$

$$\frac{\tau_{0y}}{\rho} \approx \frac{(2-n)k_1}{z_1 m_1} (v_1 - v_T). \quad (50)$$

Здесь $m_1 = m_z|_{z=z_1}$.

Модуль скорости ветра c_1 и угол отклонения α_1 на той же высоте z_1 (α_1 — угол отклонения направления скорости ветра c_1 от направления геострофического ветра — угол «трения») вычисляются по формулам:

$$c_1 = \sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \quad (51)$$

$$\alpha_1 = \arctg \frac{v_1}{u_1}. \quad (52)$$

Значения входящих в формулы функций, а также все обозначения приведены выше.

Определение необходимых величин и функций, входящих в расчетные формулы, и непосредственное вычисление u_1 , v_1 , $\frac{\tau_{0x}}{\rho}$, $\frac{\tau_{0y}}{\rho}$, c_1 и α_1 проводится последовательными приближениями в следующем порядке:

1. Задаем ориентировочно некоторое значение высоты излома h в метрах (около 100—300 м).

2. Вычисляем $\frac{h}{z_0}$ и по этой величине и известному значению параметра n определяем по номограмме на рис. 1 величину m_h . Аналогично по $\frac{z_1}{z_0}$ и n определяем m_1 .

3. Определяем значение функции $f(z_0, z_1, \varepsilon)$ по формуле

$$f(z_0, z_1, \varepsilon) = \frac{0,144z_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}}$$

или

$$f(z_0, z_1, \varepsilon) = \frac{0,144\varepsilon z_1^{1-\varepsilon} z_0^{2\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^2 (z_1^\varepsilon - z_0^\varepsilon)}.$$

Функция f вычисляется по первой формуле, если предполагается выполнение логарифмического закона для скорости ветра вблизи подстилающей поверхности, а по второй формуле, если предполагается выполнение обобщенно-степенной модели Д. Л. Лайхтмана.

4. Вычисляем величину N

$$N = \frac{5,81 \cdot 10^{-4} \sin \varphi}{(2-n)^2 z_1^{1-2n} m_1 f(z_0, z_1, \varepsilon) (V_g - u_T)},$$

где m_1 и f найдены выше (п. 2, 3).

5. Находим функцию $M(x_h, m_h)$:

$$M(x_h, m_h) = N h^{3-2n}.$$

6. По рассчитанным значениям $M(x_h, m_h)$ и m_h , пользуясь номограммой на рис. 2, определяем величину параметра x_h .

7. По найденным значениям x_h и m_h находим по номограмме на рис. 3 величины $\cos \beta_h$ и $\sin \beta_h$.

8. По исходным данным и найденным в предыдущих пунктах величинам вычисляем по формулам (47), (48), (51) составляющие скорости ветра u_1 и v_1 и модуль скорости c_1 .

9. Вычисляем значение коэффициента турбулентности k_1 на уровне z_1

$$k_1 = f(z_1, z_0, \varepsilon) c_1.$$

10. Определяем составляющие касательного напряжения $\frac{\tau_{0x}}{\rho}$ и $\frac{\tau_{0y}}{\rho}$ по формулам (49) и (50).

11. По найденным выше значениям x_h и m_h находим по номограмме на рис. 4 параметр a_H и вычисляем высоту пограничного слоя H

$$H = h \left[1 + \frac{2,83a_H}{(2-n)x_h} \right]. \quad (53)$$

Формула (53) получена на основе (45) и (24).

12. Вычисляем значение коэффициента K_h

$$K_h = k_1 \left(\frac{h}{z_1} \right)^n.$$

13. Находим параметр v_H

$$v_H = 1 + \frac{h}{H} \left[\frac{m_h}{(2-n)} - 1 \right]$$

и величину $\tilde{\gamma}$

$$\tilde{\gamma} \approx \frac{\frac{T_0 - T_H}{H} - \gamma_p + \gamma_H (\gamma_p - \gamma_H)}{\gamma_H - \frac{1}{2}}.$$

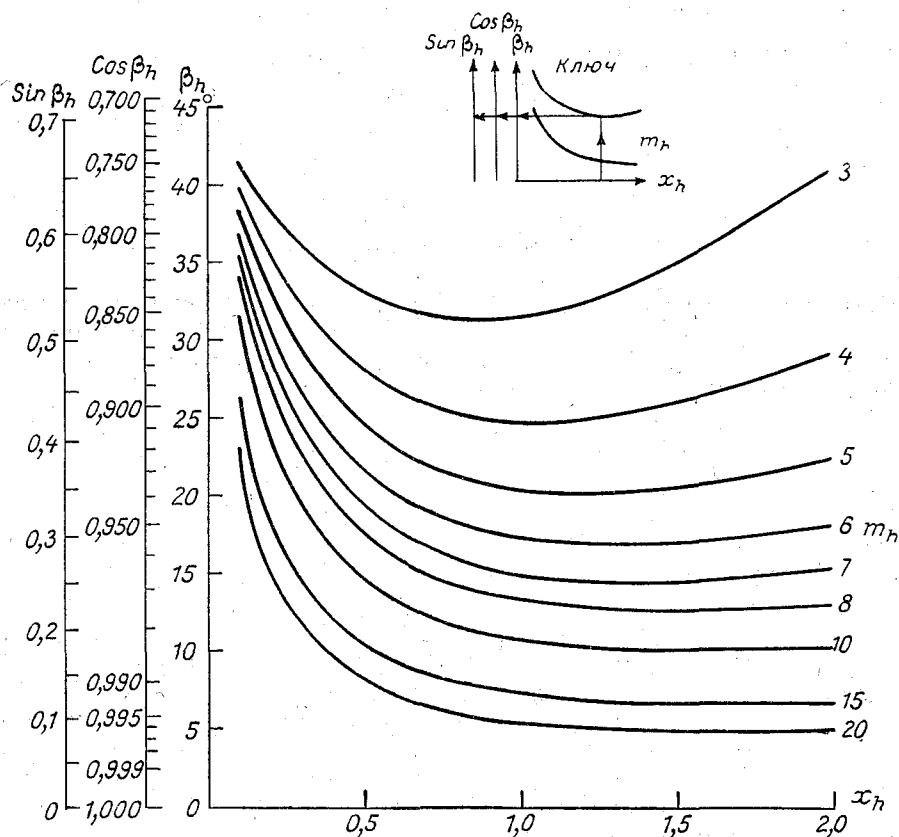


Рис. 3. Номограмма для определения величин $\cos \beta_h$ и $\sin \beta_h$.

14. По исходным и найденным в предыдущих пунктах данным определяем невязку δ_*

$$\delta_* = (V_g - u_T) \frac{\tau_{0x}}{\rho} - v_T \frac{\tau_{0y}}{\rho} - \frac{9,81 H k_h}{(1 - \delta) T} \left[\gamma_p - \gamma_H - \frac{\tilde{\gamma}}{2} \right].$$

Если (п. 1) высота h взята правильно, то невязка $\delta_* = 0$. На практике однако необходимо повторить или выполнить одновременно указанные в пп. 1—14 операции несколько раз для разных значений высоты излома h и путем подбора или другими способами (например, построением графика зависимости невязки δ_* от высоты h) найти то значение высоты излома h , при котором невязка с достаточной степенью точности обращается в нуль. Таким образом, в процессе последнего приближения (п. 8, 10) находятся искомые составляющие скорости u_1 и v_1 , модуль c_1 на уровне z_1 и составляющие касательного напряжения $\frac{\tau_{0x}}{\rho}$ и $\frac{\tau_{0y}}{\rho}$, а также другие характеристики пограничного слоя (k_1 , k_h , h , H).

Проверить правильность полученных в пп. 1—14 результатов можно, вычисляя величину k_h по формуле (45).

Значение k_h , вычисленное по этой формуле (по данным последнего приближения), должно с достаточной степенью точности совпасть с соответствующим значением, полученным в п. 12.

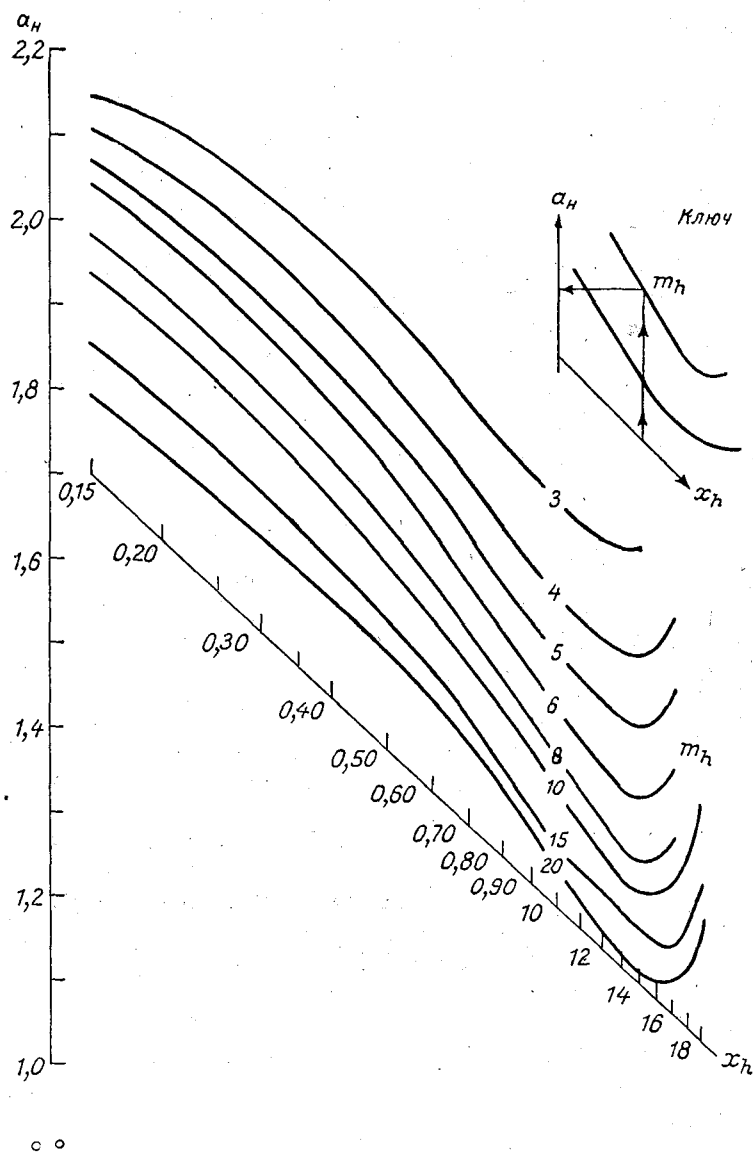


Рис. 4. Номограмма для определения величины a_h .

Определив таким образом основные характеристики пограничного слоя, можно вертикальные профили скорости ветра, температуры и коэффициента турбулентности вычислить по формулам (16), (25), (26), (36).

Пример расчета. Вычислим метеорологические характеристики пограничного слоя атмосферы на основе данных, приведенных в табл. 1.

$\bar{V}_g$ м/сек.	z_0 м	z_1 м	δ	γ_p град/м	γ_n град/м	n	φ°	u_T м/сек.	v_T м/сек.	T_0°	$\bar{T}^\circ$	T_{1000}°
20	0,001	10	0,6	0,008	0,006	0,85	60	0,7	0	10	280	8

Расчеты проводим в указанном выше порядке.

1. Задаем $h=100$ м.

2. По величине $\frac{h}{z_0} = \frac{100}{0,001} = 10^5$ и $n=0,85$ находим по номограмме на рис. 1 $m_h=6,30$. Аналогично находим $m_1=5,74$ (по величинам $\frac{z_1}{z_0} = 10^4$ и $n=0,85$).

3. Определяем функцию $f(\varepsilon, z_0, z_1)$, предполагая логарифмическое распределение скорости ветра

$$f = \frac{0,144 \cdot 10}{\ln \frac{10}{0,001}} = 0,1565.$$

4. Вычисляем N

$$N = \frac{5,81 \cdot 10^{-4} \cdot 0,866}{(1,15)^2 \cdot 10^{-0,30} \cdot 5,74 \cdot 0,1565 \cdot (20 - 0,7)}$$

или

$$N = 1,10 \cdot 10^{-4}.$$

5. Вычисляем $M(x_h, m_h)$

$$M(x_h, m_h) = 1,10 \cdot 10^{-4} \cdot 100^{1,30} = 0,0438.$$

6. По номограмме на рис. 2 находим, что при $M(x_h, m_h) = 0,0438$ и $m_h=6,30$ $x_h=0,59$.

7. По номограмме на рис. 3 находим, что при $m_h=6,30$ и $x_h=0,59$ $\cos \beta_h=0,941$, $\sin \beta_h=0,333$.

8. Определяем на высоте $z_1=10$ м составляющие скорости ветра u_1 и v_1 , а также модуль скорости c_1 по приведенным формулам:

$$u_1 = 0,70 + \left(\frac{10}{100}\right)^{0,15} \cdot 5,74 \cdot \frac{0,0438}{(0,590)^2} \cdot (20 - 0,7) \cdot 0,941 = 10,00 \text{ м/сек.},$$

$$v_1 = \left(\frac{10}{100}\right)^{0,15} \cdot 5,74 \cdot \frac{0,0438}{(0,590)^2} \cdot (20 - 0,7) \cdot 0,333 = 3,29 \text{ м/сек.},$$

$$c_1 = \sqrt{(10)^2 + (3,29)^2} = 10,55 \text{ м/сек.}$$

9. Вычисляем величину k_1

$$k_1 = 0,1565 \cdot 10,55 = 1,65 \text{ м}^2/\text{сек.}$$

10. По формулам (49), (50) находим составляющие касательного напряжения:

$$\frac{\tau_{0x}}{\rho} = \frac{1,15 \cdot 1,65}{10 \cdot 5,74} (10,00 - 0,70) = 0,307 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

$$\frac{\tau_{0y}}{\rho} = \frac{1,15 \cdot 1,65}{10 \cdot 5,74} \cdot 3,29 = 0,112 \text{ м}^2/\text{сек}^2.$$

11. По номограмме на рис. 4 при $x_h=0,590$ и $m_h=0,630$ находим $a_H=1,635$ и вычисляем высоту пограничного слоя H

$$H = 100 \left[1 + \frac{2,83 \cdot 1,635}{1,15 \cdot 0,590} \right] = 780 \text{ м.}$$

12. Определяем величину k_h

$$k_h = 1,65 \left(\frac{100}{10} \right)^{0,85} = 11,65 \text{ м}^2/\text{сек.}$$

13. Вычисляем параметр v_H

$$v_H = 1 + \frac{100}{780} \left(\frac{6,30}{1,15} - 1 \right) = 1,573,$$

затем находим $T_H = 8,00 - 0,006(780 - 1000) = 9,32^\circ$ и определяем величину $\tilde{\gamma}$

$$\tilde{\gamma} = \frac{\frac{10,00 - 9,32}{780} - 0,008 + 1,573 \cdot 0,002}{1,573 - 0,500} = -3,64 \cdot 10^{-3} \text{ град/м.}$$

14. Вычисляем невязку δ_*

$$\begin{aligned} \delta_* &= (20 - 0,7) 0,307 - \frac{9,81 \cdot 780 \cdot 11,65}{(1 - 0,60) 280} \left[0,008 - 0,006 + \frac{3,64 \cdot 10^{-3}}{2} \right] = \\ &= 5,93 - 3,06 \end{aligned}$$

или $\delta_* = 2,87$.

Полученная невязка $\delta_* = 2,87$ заметно отличается от нуля. Повторив указанные в пп. 1—14 операции (величины N , f и m_1 при этом пересчитывать не надо) для $h=200$ м и $h=270$ м получим $\delta_* = 0,96$ и $\delta_* = -0,75$ соответственно. Следовательно, искомое значение находится в интервале 200—270 м. Построив график зависимости δ_* от взятых значений h найдем, что δ_* , равное нулю, соответствует примерно $h=250$ м. Повторив с этим значением h все выкладки, получим $\delta_* = -0,09$.

В процессе последнего приближения находятся искомые составляющие скорости ветра u_1 , v_1 , составляющие касательного напряжения $\frac{\tau_{0x}}{\rho}$, $\frac{\tau_{0y}}{\rho}$ и другие метеорологические характеристики, необходимые для расчета вертикальных профилей скорости ветра, температуры и т. п. при заданных исходных данных. Результаты расчетов приведены в табл. 2.

Таблица 2

Результаты расчетов						
h м	H м	u_1 м/сек.	v_1 м/сек.	c_1 м/сек.	α_1°	
250	1125	10,46	2,78	10,82	14,8	
k_1 м ² /сек.	k_h м ² /сек.	$\frac{\tau_{0x}}{\rho}$ м ² /сек. ²	$\frac{\tau_{0y}}{\rho}$ м ² /сек. ²	m_h	a_h	$\frac{T_0 - T_H}{H}$
1,70	25,5	0,330	0,093	6,47	1,40	0,00244

Проверить правильность результатов можно, вычисляя k_h по формуле (45).

$$k_h = \frac{7,27 \cdot 10^{-5} \cdot 0,866}{(1,40)^2} (1125 - 250)^2,$$

или $k_h = 24,6$ м²/сек., что сравнительно мало отличается от значения, приведенного в таблице.

4. Исходные данные; выбор параметров расчетной схемы

Полученное выше решение позволяет рассчитать скорость ветра и касательное напряжение (одновременно с другими характеристиками) при различной стратификации в пограничном слое. Для этого нужно знать следующие величины: скорость геострофического ветра (V_g) и температуру воды (T_0), температуру воздуха (T_H) и вертикальный температурный градиент (γ_H) на верхней границе пограничного слоя.

Для расчета V_g используется наземная синоптическая карта, T_0 , T_H , γ_H берутся из наблюдений. Кроме того, для определения T_H можно также использовать карту AT_{850} , а для γ_H можно задавать среднее значение $\gamma_H = 0,6^\circ/100$ м.

Кроме указанных величин, нужно знать численное значение равновесного градиента γ_p , параметра шероховатости z_0 , скоростей течения u_T и v_T , параметра диссипации δ и параметра, характеризующего изменение коэффициента турбулентности с высотой n .

Возможность использования полученного решения существенно зависит от правильного выбора входных параметров. Ниже дается обоснование и рекомендации по выбору параметров для расчетной схемы.

Равновесный градиент. Для γ_p обычно используется либо $\gamma_p = \gamma_a = 0,98^\circ/100$ м, либо $\gamma_p = 0,6^\circ/100$ м.

Величина равновесного градиента оценивается по действительному распределению температуры в условиях, когда турбулентный поток мал и может приниматься равным нулю. В этом случае $\gamma_p = -\frac{dT}{dz}$. Численные оценки γ_p по наблюдениям в приземном слое приведены в работе [3].

Среднее значение равновесного градиента по наблюдениям в 87-метровом слое составило $0,6^\circ/100$ м. Такое же значение γ_p (среднее для всего пограничного слоя) получено нами по распределению температуры при равновесных условиях по наблюдениям на ст. Воейково.

Для оценки γ_p использовались также действительные градиенты температуры на высоте распространения суточных колебаний температуры, где турбулентный поток тепла можно положить равным нулю. Для определения γ_p в этом случае фактически использовались γ_H . Полученные значения также оказались близкими. Проведенные нами оценки дают основание положить для суши $\gamma_p = 0,6^\circ/100$ м. Однако более строго, по-видимому, не задавать численное значение γ_p (над морем оно может быть существенно отличным), а положить его равным γ_H .

Определение параметра шероховатости морской поверхности и скорости ветрового течения на поверхности моря. При решении задачи об определении скорости ветра и касательного напряжения над морем по заданной скорости геострофического ветра величины скорости течения на поверхности моря и параметр шероховатости считаются известными.

Физический смысл гидродинамической шероховатости в применении к морской поверхности неясен, и в принципе следует искать совместное решение системы уравнений гидротермодинамики для атмосферы и гидросферы. Однако в практических расчетах удобно использовать эту величину, зависимость которой от скорости ветра и элементов волнения изучалась экспериментально рядом исследователей.

В ходе исследований были высказаны два противоположных мнения о характере этой зависимости:

1) параметр шероховатости убывает с увеличением скорости ветра (вследствие лучшей обтекаемости крупных волн) [27].

2) параметр шероховатости определяется наиболее крутыми мелкими волнами, или среднеквадратичным уклоном поверхности и увеличивается при усилении ветра [26, 4].

Работы последних лет подтверждают вторую точку зрения. Они, помимо чисто экспериментальных результатов определяют зависимость z_0 от ряда факторов на основе анализа размерностей [7, 21]. В докладе Д. Л. Лайхтмана, Б. А. Кагана и Р. С. Бортковского на Всесоюзном совещании по морской метеорологии было введено понятие переходного слоя, определяемого как слой, в пределах которого при волнении перемещается граница раздела — поверхность моря. Выбирая в качестве факторов, определяющих элементы переходного слоя (при равновесной стратификации), значение динамической скорости v_* , ускорение силы тяжести g , плотность воздуха ρ и воды ρ_w с помощью анализа размерностей можно найти выражение для коэффициента турбулентности на границе переходного слоя

$$k_0 = \frac{v_*^3}{g} f\left(\frac{\rho}{\rho_w}\right). \quad (54)$$

С другой стороны, формально можно написать

$$k_0 = \kappa v_* z_0. \quad (55)$$

Из (54) и (55) получается

$$z_0 \sim \frac{v_*^2}{g}, \quad (56)$$

что совпадает с результатом Эллисона [21].

При логарифмическом законе распределения скорости ветра над морем на основании (56) получаем

$$z_0 = a \frac{c^2(z)}{\left(\ln \frac{z}{z_0}\right)^2}, \quad (56')$$

где $c(z)$ — скорость ветра, измеренная на высоте z , a — коэффициент пропорциональности, подлежащий опытному определению.

Чтобы получить зависимость z_0 от измеренной скорости ветра, нужно разрешить (56') относительно z_0 , как неизвестной. Такое решение может быть получено лишь приближенно (например, способом итераций). Можно поступить иначе: задавая значения z_0 в некотором диапазоне и вычисляя величину $\frac{z_0}{\left(\ln \frac{z}{z_0}\right)^2}$ находим, что зависимость между

z_0 и $\frac{z_0}{\left(\ln \frac{z}{z_0}\right)^2}$ весьма близка к линейной. Следовательно, с достаточной точностью можно переписать (56') в форме

$$z_0 = a(z) c^2(z). \quad (57)$$

Полученную зависимость (57) можно проверить, привлекая не только непосредственно определенные при профильных измерениях ветра значения z_0 , но и более многочисленные данные о касательном напряжении, полученные различными способами [20, 28]. Полагая, что

профиль ветра над морем обычно близок к логарифмическому, находим, что

$$\ln \frac{z_0}{z} = -\kappa \frac{c(z)}{v_*}, \quad (58)$$

где z — высота наблюдения, $c(z)$ — скорость ветра на этой высоте, $\kappa=0,38$; v_* — динамическая скорость.

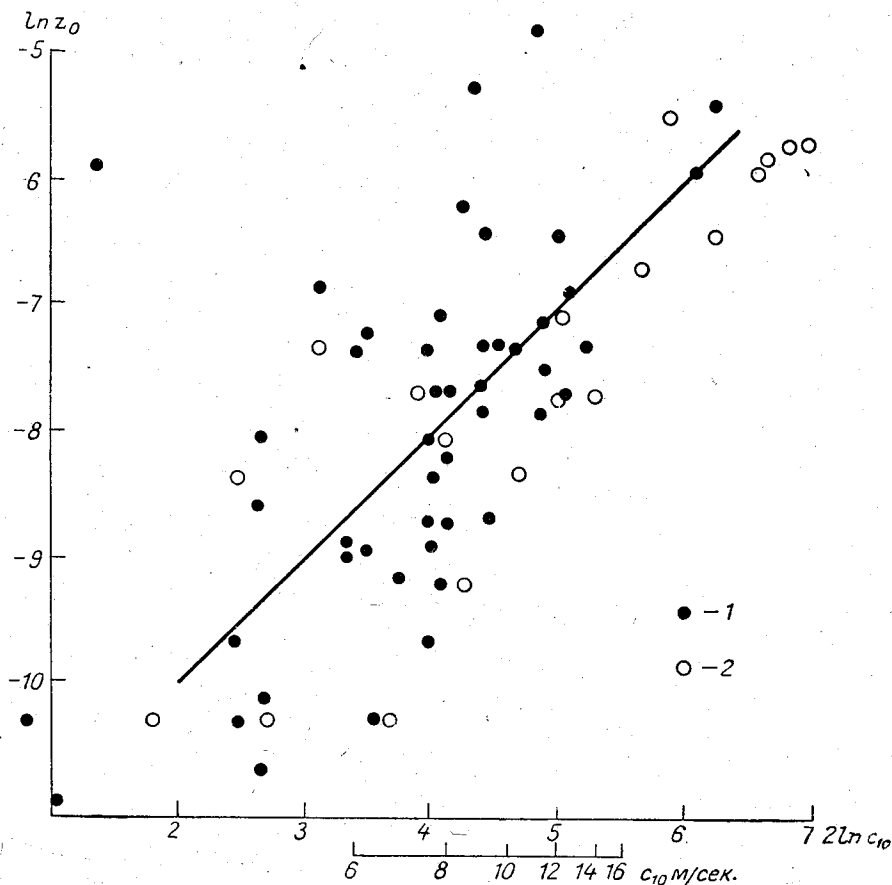


Рис. 5. Зависимость параметра шероховатости z_0 от скорости ветра на высоте 10 м над морем.

а) По данным о касательном напряжении, собранным Броксом [20]: по профильным измерениям (1), по денивелиции уровня (2); б) прямая $z_0 = 0,65 \cdot 10^{-5} c_{10}^2$.

Сопоставление $\ln z_0$, вычисленного по (58) с использованием данных $\tau = \rho v_*^2$ с величиной $2 \ln c_{10}$ подтверждает удовлетворительное выполнение зависимости (57), т. е. угловой коэффициент регрессии близок к единице (рис. 5).

На рис. 6 показана принятая для расчетов зависимость $z_0 = 0,65 \cdot 10^{-5} c_{10}^2$ м, построенная по данным рис. 5; и нанесены значения z_0 , определенные некоторыми исследователями по измерениям профилей ветра. Для определения z_0 по заданному значению скорости геострофического ветра, следует воспользоваться приведенной ниже зависимостью $\frac{c_{10}}{V_g}$ от V_g (см. рис. 5).

Изложенные результаты получены для случаев логарифмического распределения скорости ветра. Однако в ряде случаев, в том числе и в наших наблюдениях [2, 8], отмечались заметные отклонения профиля от логарифмического распределения. Эти отклонения могут объясняться воздействием динамических и термических факторов. Как правило, термическая стратификация над морем, особенно осенью и при штормовых ветрах, пренебрежимо мала, поэтому влиянием ее можно пренебречь.

Нетрудно показать, что роль динамических факторов, отмеченная в [2], довольно велика вблизи поверхности моря при волнении, но с высотой быстро убывает и профиль скорости асимптотически стремиться к логарифмическому распределению. Можно полагать, что

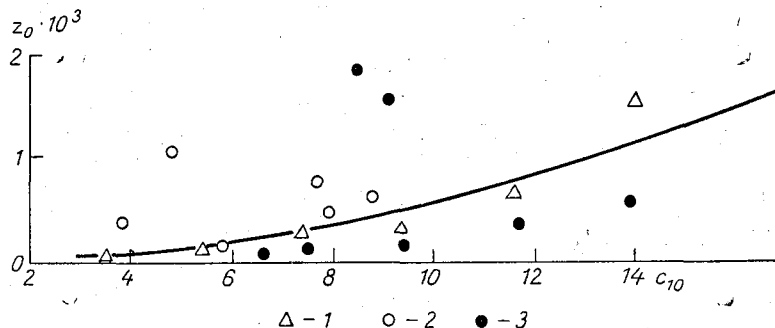


Рис. 6. Принятая зависимость параметра z_0 от скорости ветра на высоте 10 м и данные профильных измерений $z_0 = 0,65 \cdot 10^{-5} c_{10}^2$.
1 — Ролл (1954), 2 — Виноградова (1956), 3 — Дикон (1959).

толщина слоя воздуха, охваченного волновыми движениями, значительно меньше толщины приземного подслоя, в котором касательное напряжение не меняется; в этом случае можно использовать все закономерности логарифмического профиля.

Определим теперь скорость течения на поверхности. Д. Л. Лайхтман и др. в упомянутом докладе на Всесоюзном совещании по морской метеорологии нашли, что

$$\frac{c_T}{V_g} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_w}} \simeq \frac{1}{30}, \quad (59)$$

где c_T — скорость течения, V_g — скорость геострофического ветра. Полученное соотношение значительно больше, чем ранние, хорошо известные значения ветрового коэффициента (0,0140), но удовлетворительно согласуется с данными последних лет: 0,0221 [25] и 0,0294 [29]. Это объясняется тем, что в старых исследованиях скорость течения, измерявшаяся в навигационном слое (толщиной до 10 м), отождествлялась со скоростью на поверхности; методика более поздних измерений, где определялась скорость очень тонкого слоя, значительно корректнее. Поэтому для расчета принимается соотношение (59). Направление поверхностного течения считается совпадающим с направлением геострофического ветра на основании выводов экспериментальных исследований [25].

Выбор параметра δ . Как уже указывалось выше, параметр δ введен для учета в уравнении баланса энергии турбулентности диссипации энергии турбулентности в тепло. В тех случаях, когда существенна диффузия энергии турбулентности, параметр δ будет характеризовать

вклад в баланс энергии турбулентности как диссипации, так и диффузии.

При расчетах скорости ветра для различных условий требуется знание зависимости δ от внешних факторов. Такую зависимость можно получить по экспериментальным данным. Методика определения δ по экспериментальным данным разработана в [12]. Были проведены расчеты δ для суши и построен график зависимости δ от безразмерного параметра $\mu = \frac{g}{T} \frac{T_0 - T_H - \gamma_p H}{V_{ge}}$ (рис. 7). О существовании такой

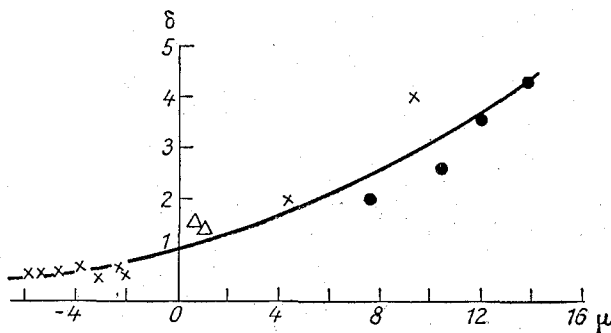


Рис. 7. Зависимость параметра диссипации δ от

$$\mu = \frac{g}{T} \frac{T_0 - T_H - \gamma_p H}{V_{ge}}$$

зависимости можно судить из анализа размерностей. Действительно, если в качестве определяющих параметров выбрать такие характеристики, как V_g , e , z_0 , $\frac{g}{T}$, $T_0 - T_H$ или $T_0 - T_H - \gamma_p H$, то из анализа размерностей получаем

$$\delta = f \left(\frac{g}{T} \cdot \frac{T_0 - T_H - \gamma_p H}{V_{ge} l}; \frac{V_{ge}}{l z_0} \right).$$

Расчеты показывают, что для суши δ мало зависит от шероховатости подстилающей поверхности, т. е. можно считать, что $\delta = f(\mu)$.

Для практических расчетов удобнее использовать не T_H , а температуру на некотором фиксированном уровне. При использовании уровня $z = 1000$ м δ снимается по кривой 2.

Из-за отсутствия данных, необходимых для расчета δ , возможность использования полученной зависимости для моря не обосновывается, однако нет оснований считать, что результаты для моря будут существенно отличными.

Определение параметра n . Показатель степени n , характеризующий характер изменения коэффициента турбулентности с высотой, является функцией стратификации в пограничном слое. До последнего времени принималось $n = 1 - \varepsilon$, т. е. $n = 1$ при равновесных условиях ($\varepsilon = 0$), $n > 1$ при неустойчивой ($\varepsilon < 0$), $n < 1$ при устойчивой стратификации ($\varepsilon > 0$) т. е. наблюдаемые у земли закономерности изменения коэффициента турбулентности распространялись до больших высот.

При задании модели коэффициента турбулентности мы исходили из того, что с высотой рост коэффициента турбулентности замедляется.

Поэтому если, например, при равновесных условиях и наблюдается у земли линейный рост k с высотой ($k \sim z$), то при описании характера изменения k до больших высот нужно считать, что $k \sim z^n$, где $n < j$. Ниже будет показано, насколько это существенно при описании распределения ветра во всем пограничном слое.

Значение параметра n можно оценить, исходя из следующих соображений.

Следуя работе [9], можно коэффициент турбулентности $k(z)$ в пограничном слое атмосферы аппроксимировать формулой

$$k(z) = k_* \left(\frac{z}{z_*} \right)^{1-\varepsilon} e^{-\frac{1-\varepsilon}{h}(z-z_*)}, \quad (60)$$

где h — некоторая высота, на которой $k(z)$ достигает своего максимального значения и которую мы отождествляем с высотой излома для принятой у нас модели $k(z)$, ε — параметр стратификации по Д. Л. Лайхтману, k_* — значение $k(z)$ на некоторой высоте z_* .

Вблизи от подстилающей поверхности такая аппроксимация достаточно близка к степенной зависимости $k(z)$ от высоты, которая хорошо подтверждается экспериментальными материалами. В то же время на более высоких уровнях z (но $z < h$), модель (60) дает более замедленный рост $k(z)$ с высотой по сравнению со степенной или линейной ($\varepsilon = 0$) моделью, что также подтверждается экспериментальными материалами и согласуется с физическими соображениями. По-видимому, модель (60) наиболее правильно описывает изменения $k(z)$ с высотой для различных состояний устойчивости, характеризуемых параметром ε .

Предположим теперь, что значения $k(z)$ на некотором малом уровне z_* ($z_* \sim 1$ м) совпадают по модели (60) и для принятой у нас степенной модели, т. е.

$$k(z) = k_* \left(\frac{z}{z_*} \right)^n \quad \text{при } z \leq h. \quad (61)$$

Для определения параметра n предположим, что средние интегральные значения $k(z)$ в слое $(z_0 - h)$ по моделям (60) и (61) равны, т. е.

$$\int_{z_0}^h k_* \left(\frac{z}{z_*} \right)^{1-\varepsilon} e^{-\frac{1-\varepsilon}{h}(z-z_*)} dz = \int_{z_0}^h k_* \left(\frac{z}{z_*} \right)^n dz.$$

Тогда, пренебрегая некоторыми малыми членами, получим для определения параметра n следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{1}{(1+n)} \left(\frac{h}{z_*} \right)^{n+\varepsilon-1} = \frac{1}{(1-\varepsilon)^{2-\varepsilon}} e^{(1-\varepsilon)\frac{z_*}{h}} \int_0^{1-\varepsilon} t^{1-\varepsilon} e^{-t} dt. \quad (62)$$

Таким образом, при заданном параметре устойчивости ε , параметр n есть функция отношения $\frac{h}{z_*}$. В табл. 3 представлены значения n , вычисленные для равновесных условий ($\varepsilon = 0$) по формуле (62).

Таблица 3

Зависимость параметра n от $\frac{h}{z_*}$ для равновесных условий							
$\frac{h}{z_*}$	20	50	100	200	300	500	1000
n	0,76	0,82	0,85	0,87	0,88	0,89	0,90

Как видно из таблицы 3, в равновесных условиях при $z_* \approx 1$ и $h \approx 100$ м, значение $n \approx 0,80 \div 0,90$.

Величина n , так же как и величина h , может быть получена последовательными приближениями. Учитывая однако, что высота h лежит, как правило, в пределах 100—400 м можно рекомендовать для равновесных условий для всех скоростей геострофического ветра $n=0,87$.

5. Методика расчета ветра и касательного напряжения при равновесных условиях

Равновесными условиями обычно называют состояние атмосферы, находящейся в безразличном равновесии. В приземном слое это примерно соответствует моментам, когда турбулентный поток тепла равен

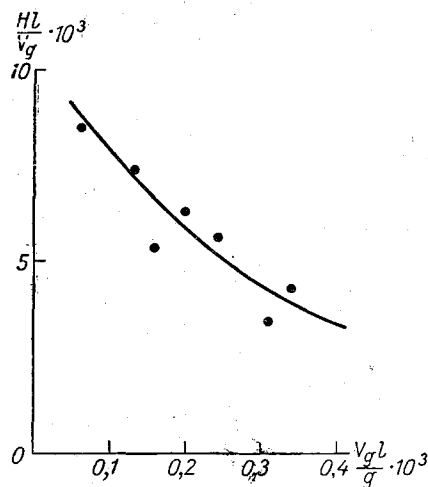


Рис. 8. Зависимость $\frac{Hl}{Vg}$ от $\frac{Vgl}{g}$ по экспериментальным данным.

нулю. Однако при этом в пограничном слое в целом состояние может быть как устойчивым, так и неустойчивым. Под равновесными условиями следует понимать состояние атмосферы, при котором работа архимедовых сил равна нулю во всем пограничном слое. Это примерно соответствует (что следует и из анализа уравнения баланса энергии турбулентности) состоянию, когда средний температурный градиент в пограничном слое близок к γ_p . Для таких условий методика расчета ветра может быть значительно упрощена.

Как уже было указано выше, характеристикой состояния атмосферы может служить параметр $\mu = \frac{g}{T} \frac{T_0 - T_H - \gamma_p H}{V_{gl}}$ или $\mu_1 =$

$$= \frac{g}{T} \frac{T_0 - T_1 - \gamma_p z_1}{V_{gl}}, \text{ где } z_1 \text{ — некоторый фиксированный уровень, на-}$$

пример 1000 м, или высота изобарической поверхности. Из определения равновесности следует, что для равновесных условий $\mu \approx 0$. Такое условие имеет место либо при $\frac{T_0 - T_H}{H} \approx \gamma_p$, либо при больших скоростях ветра. Если работа против архимедовых сил равна нулю, то из уравнения баланса энергии турбулентности следует, что $\delta=1$ и, следовательно, для определения H из уравнения баланса энергии турбулентности нужно раскрыть неопределенность. Поскольку зависимость

входящих в уравнение параметров от μ изучена недостаточно, целесообразнее получить соотношение между H и V_g из анализа размерностей.

В качестве определяющих параметров для H могут быть выбраны уже введенные ранее V_g , l , $T_0 - T_H - \gamma_p H$, z_0 . В таком случае для H получаем

$$H = \frac{V_g}{l} f\left(\mu, \frac{V_g}{l z_0}\right).$$

При равновесных условиях ($\mu=0$)

$$H = \frac{V_g}{l} f\left(\frac{V_g}{l z_0}\right).$$

Вид функции $f\left(\frac{V_g}{l z_0}\right)$ можно получить на основе обработки экспериментальных данных. Для определения $z_0 = \varphi(V_g)$, воспользуемся приведенным для z_0 соотношением (56)

$$z_0 = a \frac{V_g^2}{g}.$$

Если учесть [11], что $\frac{V_g^*}{V_g} = \varphi_1\left(\frac{V_g}{l z_0}\right)$, то из анализа размерностей можно получить

$$\frac{z_0 l}{V_g} = \varphi\left(\frac{V_g l}{g}\right)$$

и, следовательно,

$$\frac{H l}{V_g} = \Phi\left(\frac{V_g l}{g}\right).$$

Полученная по наблюдениям за ветром на научно-исследовательском судне «Шокальский» функция $\Phi\left(\frac{V_g l}{g}\right)$ представлена на рис. 8.

Поскольку функция $\Phi\left(\frac{V_g l}{g}\right)$ получена по небольшому числу случаев, необходимо ее уточнить. Однако можно и в таком виде использовать ее в расчетах.

При использовании указанной зависимости H от V_g методика расчета ветра может быть значительно упрощена.

Действительно, если имеется однозначная связь с V_g входных параметров z_0 , u_r , H , то на основе полученного решения можно получить однозначную связь с V_g таких характеристик, как $\frac{c_{10}}{V_g}$, α , $\frac{\tau_0}{\rho}$.

На рис. 9 приводится зависимость указанных характеристик от скорости геострофического ветра для $\varphi=60^\circ$. На практике задача расчета ветра и касательного напряжения при равновесных условиях сводится к определению геострофического ветра по полю давления и c_{10} , α , $\frac{\tau_0}{\rho}$ по графику рис. 9. Формулы для расчета всего профиля ветра (16), (25), (26) приведены выше.

Для расчета ветра на высотах в слое толщиной около 15 м приводится $\frac{c_z}{c_{10}}$ (табл. 4).

Таблица 4

Отношение c_z/c_{10} для разных z						
z	3	5	8	10	12	15
c_z/c_{10}	0,88	0,93	0,98	1,0	1,02	1,04

6. Проверка методики на экспериментальном материале

Данные наблюдений над водной поверхностью немногочисленны. Особенно мало наблюдений над открытой частью моря. Для проверки методики расчета скорости ветра использовались данные о соотношении ветра над водой и геострофического ветра из работ [6, 13, 14, 24],

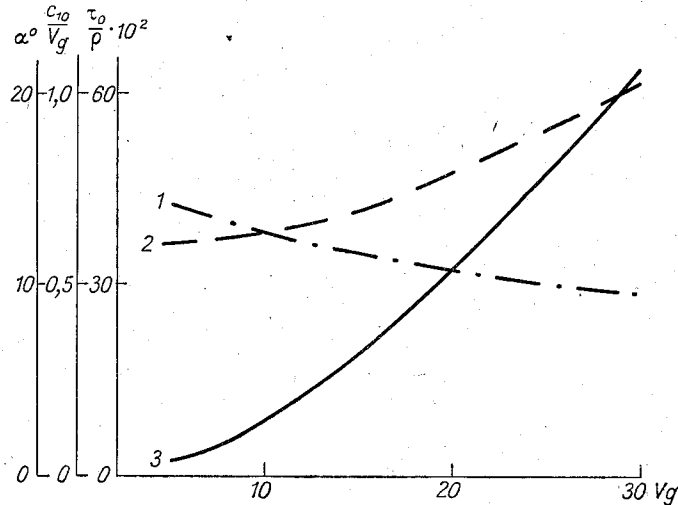


Рис. 9. Зависимость $\frac{c_{10}}{V_g}$ (1), α (2), $\frac{\tau_0}{\rho}$ (3) от скорости геострофического ветра при равновесных условиях ($\varphi=60^\circ$).

а также данные радиопилотных наблюдений на экспедиционных судах «Шокальский» и «Океанограф».

Кратко приведем основные результаты анализа экспериментальных данных.

Отношение $\frac{c_z}{V_g}$ над водной поверхностью существенно зависит от стратификации в приводном слое и скорости геострофического ветра. Для иллюстрации этой зависимости приведем данные Гордона, полученные на основе обработки многочисленного материала (710 случаев). Согласно Гордону, при изменении скорости ветра на $z=600$ м от 5—10 м/сек. до 10—15 м/сек. отношение $\frac{c_{15}}{c_{600}}$ (c_{15} — скорость ветра на $z=15$ м) уменьшается от 0,75 до 0,68. При скоростях ветра больших 15 м/сек. на $z=600$ м отношение $\frac{c_{15}}{c_{600}}$ практически не меняется.

В зависимости от стратификации в пограничном слое соотношение ветра на указанных высотах меняется от 0,55 до 0,75.

Существенная зависимость отношения $\frac{c_z}{V_g}$ от стратификации и ско-

рости геострофического ветра (отмечаемая также и другими авторами) подтверждает необходимость одновременного определения профилей ветра и температуры.

Сопоставить результаты наших расчетов с данными расчетов других авторов довольно трудно, поскольку у последних информация об исходных данных неполная. В частности, если анализируется зависимость от стратификации, то не принимается во внимание скорость геострофического ветра и, наоборот, зависимость от скорости геострофического ветра анализируется без учета стратификации. Исключением является работа Рудовой и Хондожко [13]. Однако данные, приведенные в этой

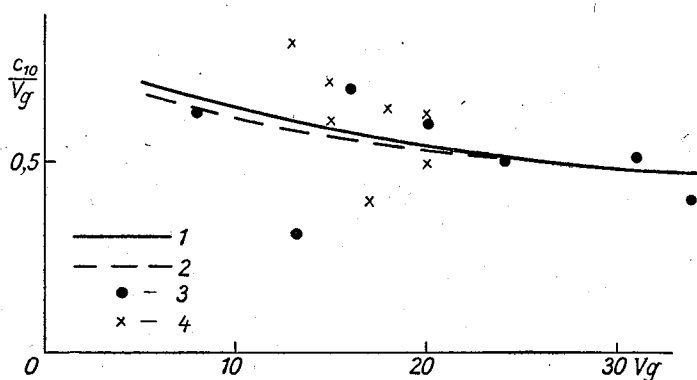


Рис. 10. Сопоставление рассчитанных и наблюдаемых значений c_{10}/V_g .

1 — рассчитанная зависимость при $\varphi=60^\circ$, 2 — то же при $\varphi=42^\circ$, 3 — данные наблюдений на экспедиционном судне «Шокальский» ($\varphi=42^\circ$), 4 — то же «Океанограф» ($\varphi=60^\circ$).

работе, вызывают сомнения. Действительно, данные наблюдений как на суше, так и на море показывают уменьшение отношения с ростом V_g и с ростом устойчивости. Данные Рудовой и Хондожко совершенно не отражают этого, да и приведенные значения $\frac{c_z}{V_g}$ нам кажутся завышенными. По-видимому, использованные авторами наблюдения на о. Мошном нельзя распространить на водную поверхность. Это подтверждается и данными Зубовой, согласно которым для Балтийского моря $\frac{c_z}{V_g}$ колеблется в пределах 0,60—0,75 (в зависимости от стратификации), для Финского залива при западных направлениях ветра — 0,60÷0,70.

Ниже приводится сводка экспериментальных данных о соотношении ветра над морем ($z=6$ м) и скорости геострофического ветра (табл. 5), заимствованная из работы А. И. Соркиной [14].

Поскольку нигде не указывается для каких скоростей V_g получены данные, следует предположить, что приведенные данные относятся к некоторой средней скорости геострофического ветра, равной 8—12 м/сек.

Полученные нами расчетные величины $\frac{c_{10}}{V_g}$ для таких значений V_g лежат в пределах 0,65—0,55 соответственно, что удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. На рис. 10 приводится сопоставление $\frac{c_{10}}{V_g}$, рассчитанных и наблюдаемых на экспедиционных

судах «Шокальский» и «Океанограф». Для иллюстрации согласования профиля скорости ветра приведен рис. 11, на котором сплошная кривая характеризует рассчитанный профиль ветра, точки — экспериментальные данные.

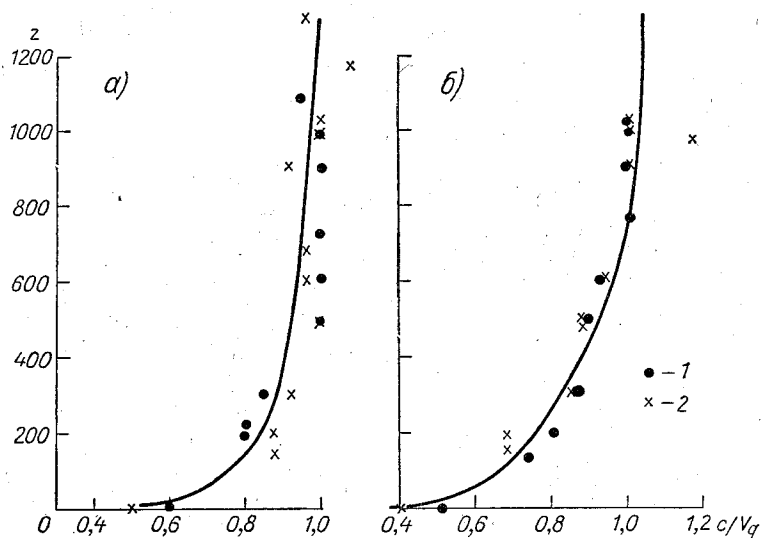


Рис. 11. Сопоставление рассчитанных и наблюдаемых профилей скорости ветра.

а — расчетная кривая при $V_g = 22$ м/сек. и данные наблюдений: 1 — $V_g = 20$ м/сек., 2 — $V_g = 24$ м/сек., б — расчетная кривая при $V_g = 35$ м/сек. и данные наблюдений: 1 — $V_g = 31$ м/сек., 2 — $V_g = 35$ м/сек.

Сведения об угле между ветром в приводном слое и геострофическим ветром также немногочисленны. Для равновесных условий можно привести данные Гордона [24] и данные Джефриса и Леттау [19].

Таблица 5

Отношение скорости ветра на уровне 6 м над морем к скорости геострофического ветра в зависимости от стратификации атмосферы

Данные	Инверсия	Равновесное и слабо неустойчивое состояние атмосферы	Неустойчивое состояние атмосферы
Гордона	0,46	0,60—0,65	0,78
Гидрографической службы США	0,55	0,65	0,80
Гоптарева	0,40	0,55—0,60	0,75
Дарста	0,58		0,78

По данным Гордона вращение ветра в слое 15—600 м составляет 12° , а по данным Джефриса и Леттау α колеблется в пределах $9—17^\circ$. Полученные нами расчетные величины α в зависимости от скорости геострофического ветра колеблются в пределах $12—21^\circ$ и, следовательно, соответствуют наблюдаемым величинам.

7. Применимость метода; оценка погрешностей

Ошибки в величинах скорости ветра и касательного напряжения, рассчитываемых по предлагаемой методике, могут быть из-за:

- а) неточностей в постановке задачи,
- б) ошибок в исходных данных,
- в) неправильного выбора входных параметров.

Из ошибок в исходных данных при расчетах скорости ветра наиболее существенны ошибки в скорости геострофического ветра. Следует отметить, что ошибки в V_g практически не сказываются на отношении $\frac{c_z}{V_g}$ и поэтому относительная ошибка в скорости ветра из-за ошибок

в V_g определяется относительной ошибкой геострофического ветра. Это обстоятельство должно приниматься во внимание при определении геострофического ветра по полю давления.

К неточностям в постановке задачи следует отнести пренебрежение ускорением и адвекцией в уравнениях движения.

Относительную ошибку из-за пренебрежения ускорением в уравнениях движения можно оценить, решая нестационарную задачу при $k = \text{const}$ [18].

В указанной работе получено общее решение задачи и проведены численные оценки для одного частного случая: до начального момента имеет место стационарное распределение ветра, в момент $t=0$ скорость геострофического ветра изменяется скачком и далее остается постоянной. Полученное решение позволяет ответить на вопрос, через какое время после скачка процесс можно считать стационарным и каковы будут ошибки в скорости ветра и в касательном напряжении, если использовать для их расчета решение стационарной задачи.

В реальных условиях имеет место не скачкообразное, а монотонное изменение горизонтального барического градиента.

Можно, однако, монотонное изменение аппроксимировать ломаной кривой. Оценим ошибку, которая допускается, если при расчетах скорости ветра и касательного напряжения для середины отрезка использовать решение стационарной задачи. Как следует из полученного решения, относительная ошибка будет тем меньше, чем меньше высота, чем больше время, прошедшее от начала скачка, чем меньше величина скачка и чем больше скорость геострофического ветра. Кроме того, при прочих равных условиях относительная ошибка в скорости ветра меньше ошибки в касательном напряжении.

Пусть шаг по времени составляет 2 часа. Если расчеты проводить для середины отрезка, т. е. через час после скачка, то при $V_g = 15$ м/сек. и скачке $\Delta V_g = 5$ м/сек. ошибка в τ_{0x} составит 8%, при $\Delta V_g = 10$ м/сек. — 12%, а ошибки в τ_{0y} составляют 12% и 20% соответственно. Как уже указывалось выше, ошибка в скорости ветра еще меньше. Для оценок использовались очень большие скачки V_g . В реальных условиях изменение V_g на порядок в течение 2 час. если и имеет место, то по-видимому, очень редко.

Таким образом, приведенные на основе указанного решения оценки показывают, что при изменении горизонтального барического градиента перестройка профиля ветра происходит довольно быстро и что с достаточной точностью задачу о распределении ветра в пограничном слое можно рассматривать как квазистационарную. Время будет входить в решение параметрически (через V_g).

Погрешность из-за неучета адвекции, по-видимому, будет очень существенной при горизонтально-неоднородной подстилающей поверхно-

сти, т. е. при переходе воздушной массы с суши на воду. Расчет ветра в таком случае является предметом специальных исследований.

Над открытой частью моря, где влияние берега не сказывается, адвекция обусловлена процессами большого масштаба. В этом случае горизонтальные градиенты, как правило, невелики и могут не приниматься во внимание при расчетах ветра в пограничном слое и тем более при расчетах ветра в самых нижних слоях. Влияние адвекции на скорость ветра на малых высотах оценено в работе З. М. Утиной [15]. Согласно

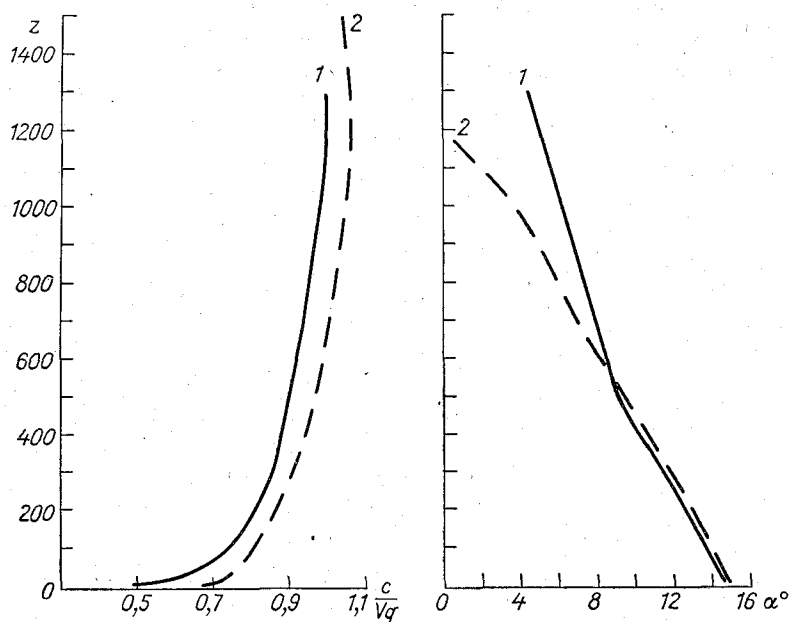


Рис. 12. Влияние параметра n на профиль ветра.

1 — $n=1,0$, 2 — $n=0,85$.

ее расчетам, даже для случаев с резко выраженной адвекцией ошибка в скорости ветра невелика и составляет 10—15%. Если известен горизонтальный градиент температуры, влияние адвекции может быть учтено.

Как уже отмечалось выше, при расчетах скорости ветра возможны также ошибки из-за неправильного выбора входных параметров c_T , z_0 , H , n .

При расчетах ветра принималось, что скорость течения воды совпадает по направлению со скоростью геострофического ветра и составляет $\frac{1}{30}$ часть модуля геострофического ветра. Поскольку скорость течения воды невелика, ошибки в c_T (как по величине, так и по направлению) практически не сказываются на c_1 и τ_0 . В связи с тем что в решение z_0 входит в малой степени, ошибки в выборе z_0 оказываются практически несущественными (ошибки в z_0 оценивались по разбросу точек на рис. 6).

Используемый график зависимости $\frac{Hl}{V_g}$ от $\frac{V_g l}{g}$ получен по малому числу случаев и поэтому возможны ошибки в H . Результаты рас-

четов показали, что ошибки в H существенны на больших высотах, на малых высотах относительная ошибка в скорости ветра невелика.

О влиянии параметра n можно судить по рис. 12, на котором приводятся расчеты для $n=1$ и $n=0,85$ при прочих равных условиях.

Как показывают результаты расчетов при рассмотрении профиля ветра во всем пограничном слое, довольно существенно, каким образом аппроксимировать профиль коэффициента турбулентности. Хорошее же согласование рассчитанных и наблюдаемых профилей ветра подтверждает правильность выбора параметра n .

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляева И. П. О характере изменения коэффициента трения ветра. Тр. ЛГМИ, вып. 16, 1962.
2. Бортковский Р. С., Преображенский Л. Ю. О некоторых результатах градиентных наблюдений в море. Тр. ГГО, вып. 167, 1965.
3. Будыко М. И. Юдин М. И. Тепловой обмен поверхности земли с атмосферой и равновесный градиент. Метеорология и гидрология, № 1, 1948.
4. Виноградова О. П. Тангенциальное напряжение ветра над взволнованной морской поверхностью. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1959.
5. Дрогайцев Д. А. Построение поля ветра над морем. Тр. ИОАН, т. IX, 1954.
6. Зубова М. М. Зависимости скорости ветра от градиента атмосферного давления для Балтийского моря. Тр. ГОИН, вып. 70, 1962.
7. Каган Б. А. К вопросу о параметре шероховатости морской поверхности. Тр. ЛГМИ, вып. 16, 1962.
8. Клеванцова В. А., Бортковский Р. С., Преображенский Л. Ю. О методах градиентных наблюдений в море. Тр. ГГО, вып. 150, 1964.
9. Ключникова Л. А., Лайхтман Д. Л., Цейтин Г. Х. К вопросу о расчете вертикального профиля ветра в пограничном слое атмосферы. Тр. ГГО, вып. 167, 1965.
10. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеиздат, Л., 1961.
11. Леттау Х. Профиль ветра, напряжение трения и геострофический коэффициент трения в приземном слое атмосферы. Сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха», М., 1962.
12. Орленко Л. Р. О расчете составляющих баланса энергии турбулентности по экспериментальным данным. Тр. ГГО, вып. 167, 1965.
13. Рудова Т. Г., Хандожко Л. А. Зависимость скорости ветра над водоемом от барического градиента и стратификации приводного слоя воздуха. Сборник работ по региональной синоптике, № 6, 1962.
14. Соркина А. И. Построение карт ветровых полей для морей и океанов. Тр. ГОИН, вып. 44, 1958.
15. Утина З. М. Строение пограничного слоя горизонтально-неоднородной атмосферы. Тр. ГГО, вып. 167, 1965.
16. Цейтин Г. Х. К вопросу о строении пограничного слоя при нестационарных условиях (вторая часть). Тр. ГГО и УкрНИГМИ, вып. 144/40, 1963.
17. Цейтин Г. Х. К вопросу о строении пограничного слоя при нестационарных условиях. Тр. ГГО, вып. 107, 1961.
18. Цейтин Г. Х. О теоретическом профиле скорости ветра при нестационарных условиях. См. наст. сборник.
19. Blackadar A. K. The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. J. Geophys. Res., vol. 67, No 5, 1962.
20. Brocks K. Probleme der maritimen Grenzschicht der Atmosphäre, Berichte der Deutsche wetterdienst, Bd. 91, H 12, 1963.
21. Ellison T. H. Atmospheric turbulence. Surveys in Mechanics, Cambr. Univ. Press, 1956.
22. Gerritsen F. Surface wind stress over water as related to wave action. Ingenieur (Nederl), 75, N 31, 1963.
23. Gordon A. H. Angle of deviation between the winds at 50 ft and 2000 ft over the North Atlantic ocean. Meteorol. Magaz., No 81, No 956, 1952.
24. Gordon A. H. The ratio between observed velocities of the wind at 50 feet and 2000 feet over the North Atlantic ocean Quart J. Roy. met. soc., vol. 76, p. 344, 1950.
25. Hughes P. A determination of the relation between wind and sea — surface drift Quart. J. Roy. met. soc., vol. 82, No 354, 1956.

26. Munk W. Wind stress on a water surface; an Hypothesis. Quart. j. Roy. met. soc., vol. 81, No 349, 1955.
27. Neumann G. Wind stress on a water surface. Bull. Amer. met. soc., vol. 37, N 5, 1956
28. Schmitz H. P. Kritische Betrachtungen zu gebräuchlichen Methoden der Ermittlung des Windschubs auf dem Meere. Deutsche Hydrogr. Zeitschr. Bd 14, H. 5, 1961.
29. Tomczak I. Neue Untersuchungen mit Treibkörpern zur Bestimmung des Windeinflusses auf Oberflächenströmungen in Meer. Berichte Deutsch. Wetterdienst, Bd. 91, H. 2, 1963.
30. Wilson B. W. Note on surface wind stress over water at low and high wind speeds. J. Geophys. Res, vol. 65, No 10, 1960.

x_h	Δ_{1h}									Δ_{2h}						
	m_h									m_h						
	3	4	5	6	8	10	15	20	3	4	5	6	8	10	15	20
0,15	0,00117	0,00273	0,00294	0,00300	0,00291	0,00274	0,00231	0,00198	0,0467	0,0368	0,0307	0,0266	0,0219	0,0188	0,0148	0,0129
0,20	0,00366	0,00452	0,00477	0,00479	0,00455	0,00420	0,00344	0,00287	0,0650	0,0518	0,0438	0,0373	0,0322	0,0282	0,0230	0,0203
0,30	0,00745	0,00891	0,00919	0,00900	0,00825	0,00747	0,00586	0,00477	0,106	0,0863	0,0748	0,0671	0,0575	0,0519	0,0443	0,0404
0,40	0,0121	0,0142	0,0143	0,0139	0,0124	0,0111	0,00843	0,00800	0,150	0,125	0,112	0,101	0,0887	0,0817	0,0716	0,0669
0,60	0,0236	0,0270	0,0265	0,0251	0,0218	0,0190	0,0141	0,0112	0,249	0,217	0,197	0,183	0,168	0,157	0,144	0,137
0,80	0,0382	0,0428	0,0413	0,0386	0,0328	0,0282	0,0207	0,0161	0,352	0,315	0,292	0,278	0,258	0,247	0,232	0,225
1	0,0563	0,0620	0,0587	0,0543	0,0457	0,0389	0,0270	0,0218	0,462	0,420	0,396	0,380	0,360	0,348	0,331	0,323
1,2	0,0785	0,0846	0,0798	0,0732	0,0606	0,0512	0,0365	0,0283	0,562	0,521	0,496	0,482	0,459	0,446	0,430	0,420
1,4	0,108	0,114	0,105	0,0950	0,0784	0,0661	0,0466	0,0361	0,654	0,616	0,589	0,571	0,549	0,539	0,523	0,515
1,6	0,148	0,151	0,138	0,124	0,100	0,0833	0,0584	0,0448	0,742	0,701	0,678	0,661	0,640	0,625	0,611	0,603
1,8	0,202	0,198	0,177	0,157	0,126	0,104	0,0722	0,0551	0,825	0,782	0,755	0,742	0,722	0,707	0,691	0,682
2	0,277	0,258	0,226	0,198	0,156	0,129	0,0885	0,0671	0,908	0,864	0,839	0,821	0,801	0,786	0,771	0,762

К ВОПРОСУ О СТРОЕНИИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ В СТАЦИОНАРНЫХ УСЛОВИЯХ (НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА)

Приводится принципиальная схема расчета некоторых метеорологических характеристик пограничного слоя атмосферы в стационарных условиях при различных состояниях термической устойчивости атмосферы. Для случая нейтральной стратификации, когда допустимо пренебрежение диффузией энергии турбулентности, подробно разработана численная схема расчета.

В работе С. С. Зилитинкевича и Д. Л. Лайхтмана [1] предложено новое выражение для масштаба турбулентности, являющееся обобщением известной формулы Кармана. Это позволило замкнуть систему уравнений, описывающую метеорологический режим пограничного слоя атмосферы в стационарных условиях. (Для описания турбулентного режима использована теория Колмогорова — Обухова — Монина). Применительно к приземному подслою авторам удалось разработать теоретическую модель для различных состояний термической устойчивости, которая включает как частные случаи почти все известные до этого модели турбулентного режима приземного подслоя и которая довольно хорошо подтверждается экспериментальными материалами.

Новая модель содержит также минимальное количество эмпирических параметров. В работе [1] на основе той же замкнутой системы уравнений сформулирована задача о распределении характеристик турбулентности и составляющих скоростей ветра для стационарного пограничного слоя атмосферы при нейтральной стратификации.

В настоящей работе разрабатывается принципиальная схема расчета характеристик пограничного слоя атмосферы для различных состояний термической устойчивости с учетом диффузии энергии турбулентности.

В частном случае при нейтральной стратификации, когда, по-видимому, допустимо пренебрежение диффузией энергии турбулентности (ср. [1]), указанная методика доведена до численной схемы расчета.

1. Постановка задачи

Задача сводится к решению следующей системы уравнений: уравнения движения для горизонтальных однородных условий

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} k(z) \frac{du}{dz} + 2\omega_z v(z) &= 0 \\ \frac{d}{dz} k(z) \frac{dv}{dz} - 2\omega_z [u(z) - V_g] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

уравнения притока тепла

$$\alpha k(z) \left[\frac{dT}{dz} + \gamma_p \right] = - \frac{P_0}{c_p \rho} - \frac{R(z) - R(0)}{c_p \rho}, \quad (2)$$

уравнения баланса энергии турбулентности

$$k(z) \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right] - \frac{g}{T} \alpha k(z) \left[\frac{dT}{dz} + \gamma_p \right] - c_0 \frac{b^2(z)}{k(z)} + \\ + \alpha_1 \frac{d}{dz} k(z) \frac{db(z)}{dz} = 0, \quad (3)$$

$$k(z) = l(z) \sqrt{b(z)}. \quad (4)$$

Выражение для масштаба турбулентности $l(z)$ (по Д. Л. Лайхтману и С. С. Зилитинкевичу) следующее:

$$l(z) = - 2c_0^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{F(z)}{\frac{dF(z)}{dz}}, \quad (5)$$

$$F(z) = \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 - \frac{\alpha g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_p \right). \quad (6)$$

В формулах (1) — (6) приняты следующие обозначения:

$u(z)$, $v(z)$ — горизонтальные составляющие скорости ветра (ось x направлена по изобаре), $k(z)$ — коэффициент турбулентности, V_g — скорость геострофического ветра, $T(z)$ — абсолютная температура воздуха, γ_p — равновесный градиент температуры, P_0 — значение турбулентного потока тепла у земли, $R(z)$ — лучистый приток тепла, $b(z)$ — энергия турбулентных пульсаций, α — отношение коэффициента турбулентности для тепла к коэффициенту турбулентности для количества движения, c_0 и α_1 — некоторые постоянные. Остальные обозначения общепринятые. В нашей постановке задачи считаем заданными значения лучистого потока $R(z)$ и турбулентного потока у земли P_0 . Таким образом, схема является замкнутой, ибо для шести неизвестных: $u(z)$, $v(z)$, $k(z)$, $l(z)$, $b(z)$, $T(z)$ — имеем шесть уравнений (1—5)

Граничные условия задачи следующие:

$$u(z) = v(z) = 0 \quad \text{при} \quad z = z_0 \quad (7)$$

$$u(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} V_g, \quad v(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0, \quad (8)$$

$$k(z) \Big|_{z=z_0} = \kappa v_* z_0, \quad (9)$$

где v_* — динамическая скорость, причем:

$$v_*^2 = k(z) \left[\left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dz} \right)^2 \right] \Big|_{z=z_0}, \quad (10)$$

$$k(z) \frac{db(z)}{dz} \Big|_{z=z_0} = 0, \quad (11)$$

$$b(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0, \quad (12)$$

z_0 — параметр шероховатости.

Граничное условие (11) означает, что турбулентная энергия не проникает через подстилающую поверхность.

2. Схема решения в общем случае

Введем безразмерные высоту и искомые функции по формулам:

$$\eta = V_g \int_{z_0}^z \frac{dz}{k(z)} = \frac{2\omega_z}{V_g} \int_{z_0}^z \frac{dz}{\beta(z)}, \quad (13)$$

$$\beta(z) = \frac{2\omega_z}{V_g^2} k(z), \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} u_0(\eta) &= \frac{u(\eta)}{V_g} \\ v_0(\eta) &= \frac{v(\eta)}{V_g} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\Phi(\eta) = \frac{c_0^2}{V_g^2} b(\eta) \quad (16)$$

Тогда вместо уравнений (1), (3) и граничных условий (7), (8), (11), (12) получим:

$$\frac{d^2 G(\eta)}{d\eta^2} - i\beta(\eta) G(\eta) = 0, \quad (17)$$

$$\frac{s d^2 \Phi(\eta)}{d\eta^2} - \Phi^2(\eta) + E(\eta) = 0, \quad (18)$$

$$G(\eta)|_{\eta=0} = 1, \quad (19)$$

$$G(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \quad (20)$$

$$\Phi(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} 0, \quad (21)$$

$$\left. \frac{d\Phi(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0, \quad (22)$$

где

$$G(\eta) = 1 - u_0(\eta) - i v_0(\eta), \quad (23)$$

$$\begin{aligned} E(\eta) &= \left(\frac{du_0}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dv_0}{d\eta} \right)^2 - s_1 \beta^2(\eta) \left[\frac{dT}{dz} + \gamma_p \right] = \\ &= \left(\frac{du_0}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dv_0}{d\eta} \right)^2 + s_2 \beta(\eta) P(z), \end{aligned} \quad (24)$$

$$P(z) = -\alpha c_{p0} k(z) \left[\frac{dT}{dz} + \gamma_p \right], \quad (25)$$

$$s = \frac{\alpha_1}{V c_0}, \quad (26)$$

$$s_1 = \frac{\alpha g}{4\omega_z^2 T}, \quad (27)$$

$$s_2 = \frac{g}{2\omega_z c_{p0} T V_g^2}. \quad (28)$$

На основании (4), (5) и (9), (10) найдем

$$\beta(\eta) = m_0 \sqrt{E(\eta)} e^{\frac{\eta}{\alpha} \int_0^\eta \sqrt{\Phi(\eta)} d\eta}, \quad (29)$$

где

$$m_0 = \frac{2\omega_z \kappa z_0}{v_* \sqrt{1 + \frac{\kappa z_0}{L}}}, \quad m_0 \approx \frac{2\omega_z \kappa z_0}{v_*}, \quad (30)$$

ибо $z_0 \ll L$, где $L = \frac{v_*}{\frac{g}{T} \cdot \frac{P_0}{c_p \rho}}$ — высота приземного подслоя, по Обу-

хovu и Монину. (При нейтральной стратификации, когда $L = \infty$, соотношение (30) становится точным.) Из (18), (24) и (29) следует, что при задании $\frac{dT}{dz}$ или $P(z)$ для случая неравновесного состояния атмос-

феры система уравнений в безразмерном виде содержит только два параметра: m_0 и s_1 (или s_2) — и универсальные постоянные.

В случае нейтрального состояния атмосферы ($P(z) \equiv 0$) система зависит только от одного параметра m_0 , который однозначно может быть выражен через параметр Россби

$$Ro = \frac{V_g}{2\omega_z z_0} \quad (31)$$

Таким образом, схему решения системы в общем случае можно проводить в следующем порядке:

- 1) задаем приближенный профиль коэффициента турбулентности $\beta(\eta)$ (на выборе начального профиля мы остановимся ниже),
- 2) по выбранному $\beta(\eta)$ решаем уравнение движения (17) при граничных условиях (19—(20),
- 3) по заданным s_1 (или s_2) и профилю $\frac{dT}{dz}$ (или $P(z)$ вычисляем по формуле (24) профиль $E(\eta)$,
- 4) по найденному $E(\eta)$ определяем из уравнения (18) при граничных условиях (21)—(22) профиль $\Phi(\eta)$,
- 5) по заданному параметру m_0 и найденным профилям $\Phi(\eta)$ и $E(\eta)$ вычисляем по формуле (29) новый профиль $\beta(\eta)$.

Если найденный профиль заметно отличается от предыдущего, то повторяем с новым профилем все расчеты, начиная с пункта 2. В случае медленной сходимости или расходимости процесса необходимо определенным образом изменить процесс приближения.

3. Численный метод расчета при нейтральной стратификации (без учета диффузии энергии турбулентности)

В этом случае уравнение (18) примет вид

$$E(\eta) - \Phi^2(\eta) = 0, \quad (32)$$

где

$$E(\eta) = \left(\frac{du_0}{d\eta} \right)^2 + \left(\frac{dv_0}{d\eta} \right)^2. \quad (33)$$

Таким образом, вместо уравнения (29) получим

$$\beta(\eta) = m_0 \sqrt{E(\eta)} e^{\kappa \int_0^\eta E(\eta)^{\frac{1}{4}} d\eta}. \quad (34)$$

Схема расчета значительно упрощается, ибо отпадает необходимость интегрирования нелинейного дифференциального уравнения (18), и практически задача сводится к численному интегрированию уравнения движения (17), т. е. к решению краевой задачи (17), (19), (20). Применяя метод сведения линейной краевой задачи к задачам Коши, можно искомую функцию $G(\eta)$ искать в виде

$$G(\eta) = G_1(\eta) - \frac{G_1(\eta_H)}{G_2(\eta_H)} G_2(\eta), \quad (35)$$

где $G_1(\eta)$ и $G_2(\eta)$ — решения уравнения (17) при граничных условиях:

$$G_1(\eta)|_{\eta=0} = 1, \quad \frac{dG_1(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = 0; \quad (36)$$

$$G_2(\eta)|_{\eta=0} = 0, \quad \frac{dG_2(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = 1; \quad (37)$$

а η_H — достаточно большая высота. Положим:

$$\left. \begin{aligned} G_1(\eta) &= A(\eta) + iB(\eta) \\ G_2(\eta) &= C(\eta) + iD(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Тогда вместо (17), (36), (37) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 A(\eta)}{d\eta^2} &= -\beta(\eta) B(\eta) \\ \frac{d^2 B(\eta)}{d\eta^2} &= \beta(\eta) A(\eta) \\ \frac{d^2 C(\eta)}{d\eta^2} &= -\beta(\eta) D(\eta) \\ \frac{d^2 D(\eta)}{d\eta^2} &= \beta(\eta) C(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

$$\left. \begin{aligned} A(\eta)|_{\eta=0} &= 1, \quad B(\eta)|_{\eta=0} = 0 \\ \frac{dA(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} &= 0, \quad \frac{dB(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \\ C(\eta)|_{\eta=0} &= 0, \quad D(\eta)|_{\eta=0} = 0 \\ \frac{dC(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} &= 1, \quad \frac{dD(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Составляющие скорости ветра $u_0(\eta)$ и $v_0(\eta)$ выразятся формулами:

$$\left. \begin{aligned} u_0(\eta) &= 1 - A(\eta) + L(\eta_H) C(\eta) - \bar{L}(\eta_H) D(\eta) \\ v_0(\eta) &= -B(\eta) + L(\eta_H) D(\eta) + \bar{L}(\eta_H) C(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L(\eta_H) &= \frac{A(\eta_H) C(\eta_H) + B(\eta_H) D(\eta_H)}{C(\eta_H)^2 + D(\eta_H)^2} \\ \bar{L}(\eta_H) &= \frac{B(\eta_H) C(\eta_H) - A(\eta_H) D(\eta_H)}{C(\eta_H)^2 + D(\eta_H)^2} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Для численного интегрирования системы (39)–(40) применялся метод Адамса из [2] с модифицированными коэффициентами, в котором учитывались разности до 6-го порядка включительно. Это позволило при сравнительно небольшом количестве шагов (порядка нескольких десятков) получить достаточно высокую точность вычислений не только составляющих скоростей, но и их производных, которые определяют вертикальные профили характеристик турбулентного режима

$k(z)$, $b(z)$ и $l(z)$. Применяя метод Адамса к системе (39), получим:

$$\left. \begin{aligned} A'_{j+1} &= A'_j - hW_1(\beta_j A_j) \\ B'_{j+1} &= B'_j + hW_1(\beta_j A_j) \\ A_{j+1} &= A_j + hA'_j - h^2W_2(\beta_j B_j) \\ B_{j+1} &= B_j + hB'_j + h^2W_2(\beta_j A_j) \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

и аналогичные формулы для C , D , C' и D' . Здесь обозначено:

$$h = \eta_{j+1} - \eta_j - \text{шаг по } \eta, \text{ где } \eta_j = jh \ (j=0, 1, \dots); \beta_j = \beta(\eta_j); A_j = A(\eta_j); A'_j = \left. \frac{dA(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_j};$$

$$\left. \begin{aligned} W_1(f_j) &= \frac{1}{60480} [198721f_j - 447288f_{j-1} + 705549f_{j-2} - \\ &\quad - 688256f_{j-3} + 407139f_{j-4} - 134472f_{j-5} + 19087f_{j-6}] \\ W_2(f_j) &= \frac{1}{120960} [139849f_j - 243594f_{j-1} + 369399f_{j-2} - \\ &\quad - 354188f_{j-3} + 207495f_{j-4} - 68106f_{j-5} + 9625f_{j-6}] \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Для определения начальных шести значений искомых функций воспользуемся тем, что в приземном подслое силы турбулентного трения заметно перекрывают влияние сил Кориолиса и, исходя из этого, последние в слое $0 \leq \eta \leq 6h$ можно учесть приближенно и на основе (17), (36) — (37) получить:

$$\left. \begin{aligned} G_1(\eta) &\approx 1 + i \int_0^\eta \beta(\xi)(\eta - \xi) d\xi \\ G_2(\eta) &\approx \eta + i \int_0^\eta \beta(\xi)(\eta - \xi) \xi d\xi \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Представляя функцию $\beta(\eta)$ интерполяционной формулой Лагранжа для j ($j \leq 6$) равностоящих узлов, получим из (45) следующие формулы расчета первых семи ($j=0, 1, \dots, 6$) начальных точек:

$$\left. \begin{aligned} A_j &= 1, \quad A'_j = 0 \\ B_j &= h^2(\bar{\beta} \bar{b}_j), \quad B'_j = h(\bar{\beta} \bar{b}'_j) \\ C_j &= hj, \quad C'_j = 1 \\ D_j &= h^3(\bar{\beta} \bar{d}_j), \quad D'_j = h^2(\bar{\beta} \bar{d}'_j) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

где $\bar{\beta}$ — вектор-столбец

$$\bar{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{bmatrix},$$

а $\bar{b}_j, \bar{b}'_j, \bar{d}_j, \bar{d}'_j$ — j -тые строчки матриц $\bar{B}, \bar{B}', \bar{D}, \bar{D}'$.

Вычислив по формулам (46) первые семь точек, дальнейшие расчеты ($j \geq 7$) проводим по формулам (43). Прodelав достаточное количество шагов и вычислив для последнего шага $j=N$ ($\eta_N=Nh$) значения функций L и $\bar{L}$ по формулам (42), находим значения скоростей $u_0(\eta)$, $v_0(\eta)$ и их производных в точках η_j ($j=0, 1, \dots, N$) по формулам (41).

$$\bar{B} = \begin{array}{c|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 6 & & & & & \\ \hline 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 3 & & & & & \\ \hline 39 & 27 & 27 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 40 & 10 & 40 & 20 & & & \\ \hline 56 & 64 & 16 & 64 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 45 & 15 & 15 & 45 & & & \\ \hline 1525 & 11\,875 & 625 & 3125 & 625 & 275 & 0 \\ \hline 1008 & 2016 & 504 & 1008 & 1008 & 2016 & \\ \hline 123 & 54 & 27 & 204 & 27 & 54 & 0 \\ \hline 70 & 7 & 35 & 35 & 40 & 35 & \end{array}$$

$$\bar{B}' = \begin{array}{c|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2 & 2 & & & & & \\ \hline 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 3 & 3 & & & & \\ \hline 3 & 9 & 9 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 8 & 8 & 8 & 8 & & & \\ \hline 14 & 64 & 8 & 64 & 14 & 0 & 0 \\ \hline 45 & 45 & 15 & 45 & 45 & & \\ \hline 95 & 125 & 125 & 125 & 125 & 95 & 0 \\ \hline 288 & 96 & 144 & 144 & 96 & 288 & \\ \hline 41 & 54 & 27 & 68 & 27 & 54 & 41 \\ \hline 140 & 35 & 140 & 35 & 140 & 35 & 140 \end{array}$$

$$\bar{D} = \begin{array}{c|cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 12 & 12 & & & & & \\ \hline 2 & 16 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 15 & 15 & 15 & & & & \\ \hline 9 & 81 & 81 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 40 & 40 & 40 & 40 & & & \\ \hline 16 & 1024 & 144 & 1024 & 16 & 0 & 0 \\ \hline 63 & 315 & 35 & 315 & 63 & & \\ \hline 1375 & 15 & 95 & 95 & 15 & 1375 & 0 \\ \hline 4032 & 448 & 2016 & 2016 & 448 & 4032 & \\ \hline 9 & 972 & 243 & 72 & 243 & 972 & 9 \\ \hline 25 & 175 & 35 & 7 & 35 & 175 & 25 \end{array}$$

	0	0	0	0	0	0	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	0	0
	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	0	0	0
$\overline{D}'$	$\frac{3}{20}$	$\frac{27}{40}$	$\frac{27}{10}$	$\frac{39}{40}$	0	0	0
	$\frac{64}{45}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{64}{15}$	$\frac{56}{45}$	0	0	0
	$\frac{275}{2016}$	$\frac{625}{1008}$	$\frac{3125}{1008}$	$\frac{625}{504}$	$\frac{11875}{2016}$	$\frac{1525}{1008}$	0
	$\frac{54}{35}$	$\frac{27}{70}$	$\frac{204}{35}$	$\frac{27}{35}$	$\frac{54}{7}$	$\frac{123}{70}$	0

При достаточно большом N числа L_N и $\overline{L}_N$ практически мало меняются, что и может служить критерием для выбора количества шагов N .

Остановимся на выборе нулевого приближения для коэффициента турбулентности и шага h . Для начального профиля предполагаем, что $k(z)$ — линейная функция высоты во всем пограничном слое

$$k(z) = \kappa v_* z. \quad (47)$$

Тогда для β_j получим следующее выражение:

$$\beta_j = \frac{\kappa^2}{m_0 \text{Ro}^2} e^{\frac{\kappa^2}{m_0 \text{Ro}} j h}. \quad (48)$$

Для определения параметра Россби, входящего в формулу (48), воспользуемся точным решением уравнения движения (17) при условиях (19), (20), где коэффициент турбулентности задан по формуле (47), а именно:

$$G(\eta) = 1 - u_0(\eta) - i v_0(\eta) = \frac{K_0 \left(\frac{2}{\kappa} \sqrt{m_0 i} e^{\frac{\kappa^2}{2 m_0 \text{Ro}} \eta} \right)}{K_0 \left(\frac{2}{\kappa} \sqrt{m_0 i} \right)}. \quad (49)$$

Исходя из (49) и воспользовавшись выражением K_0 при малых значениях аргумента, получим, что параметры Ro и m_0 связаны формулой

$$\text{Ro} \approx \frac{\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + \left(2c + \ln \frac{m_0}{\kappa^2} \right)^2}}{m_0}, \quad (50)$$

где $c = 0,5772$ — постоянная Эйлера.

При выборе шага h исходим из предположения, что поправка на силы Кориолиса в слое $0 \leq \eta \leq 6h$ очень мала.

Исходя из (45), положим

$$\delta = \int_0^{6h} \beta(\xi) \xi d\xi, \quad (51)$$

где δ — малое число порядка 10^{-2} — 10^{-7} . Выбор конкретного значения δ будет зависеть от требуемой точности. Исходя из (51) и (48), получим для определения h трансцендентное уравнение

$$e^{\frac{6\kappa^2 h}{m_0 \text{Ro}}} \left[\frac{6\kappa^2 h}{m_0 \text{Ro}} - 1 \right] = \frac{\kappa^2 \delta}{m_0} - 1. \quad (52)$$

Таким образом, порядок расчета следующий:

- 1) по заданному значению параметра m_0 определяем величину Ro по формуле (50), а затем по (52) — шаг h ,
- 2) вычисляем нулевой профиль β_j по формуле (48),
- 3) определяем первые семь значений A_j , A'_j и т. д. по формулам (46),

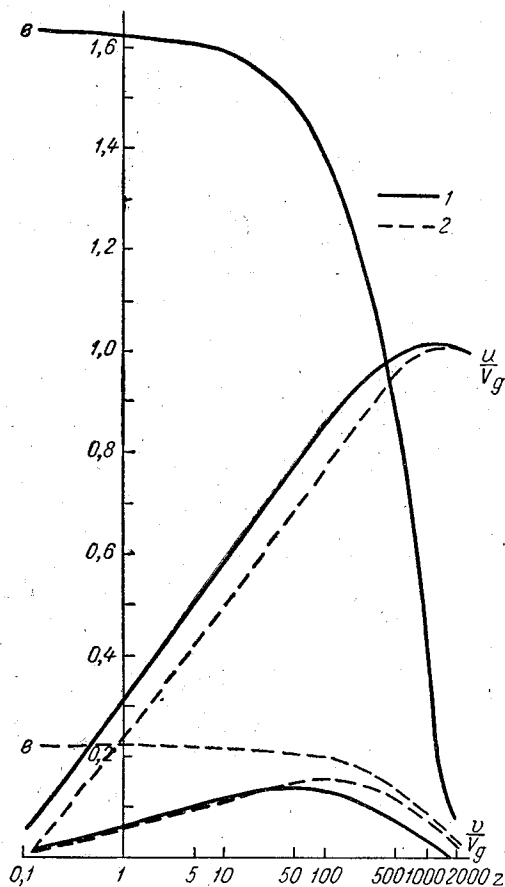


Рис. 1. Вертикальные профили составляющих скорости ветра $\frac{u}{V_g}$, $\frac{v}{V_g}$ и турбулентной энергии $b(z)$. 1) $\log Ro=6,1$; 2) $\log Ro=5,6$.

4) остальные значения для A при $j=7, \dots, N$ находим по формулам (43),

5) вычисляем по формулам (41) значения скоростей $u_0(\eta)$, $v_0(\eta)$ и их производных во всех точках η_j , а затем по (33) функцию $\varepsilon(\eta)$,

6) определяем новый профиль коэффициента турбулентности $\beta(\eta)$ по формуле (34). Если последний заметно отличается от предыдущего, то повторяем все операции, начиная с пункта 3.

После того как определен окончательно профиль $\beta(\eta)$, можно по приведенным выше формулам вычислить и другие характеристики пограничного слоя как функции безразмерной высоты η . Для того чтобы

получить их зависимость от действительной высоты z , необходимо воспользоваться формулой, вытекающей из (13),

$$z = z_0 \left[1 + Ro \int_0^{\eta} \beta(\eta) d\eta \right]. \quad (53)$$

На основе предлагаемого метода была составлена программа для ЭВМ М-20 и проведены расчеты для различных значений параметра

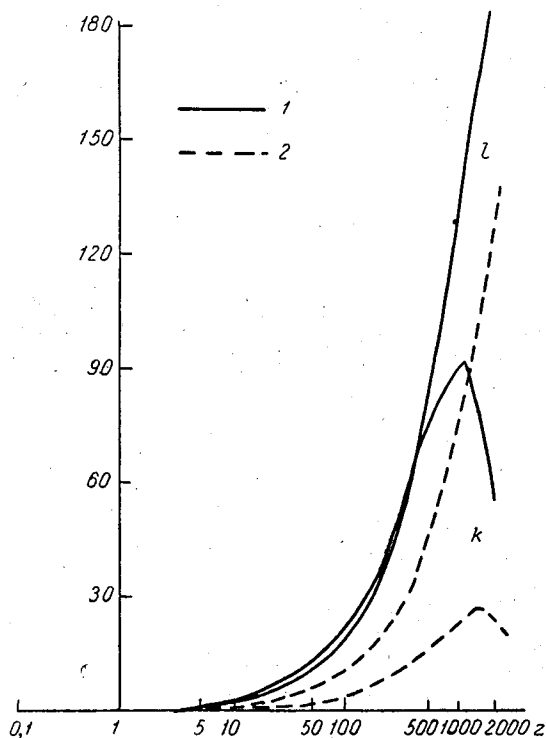


Рис. 2. Вертикальные профили коэффициента турбулентности $k(z)$ и масштаба турбулентности $l(z)$. 1) $\log Ro = 6.1$; 2) $\log Ro = 5.6$.

Росси Ro . При этом для сходимости $\beta(\eta)$ с точностью до нескольких процентов потребовалось 5—7 приближений.

Результаты вычислений приведены на рис. 1 и 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. Турбулентный режим в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, т. 1 и 2, 1965.
2. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. ИЛ., М., 1953.

О ТЕОРЕТИЧЕСКОМ ПРОФИЛЕ СКОРОСТИ ВЕТРА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УСЛОВИЯХ

Получено решение для скорости ветра в пограничном слое атмосферы при нестационарных условиях и при сравнительно общих предположениях об исходных факторах и рассмотрены некоторые его частные случаи. Конечным формулам придан удобный для расчета вид и приложены таблицы, укоряющие вычисления

Теоретическим исследованиям поля ветра при нестационарных условиях в атмосфере уделяется в последние десятилетия значительное внимание. Кроме работы Б. И. Извекова [1], где впервые делается попытка теоретически обосновать суточный ход ветра, этим вопросам посвящены работы [2—5, 11] и др. В последние годы выполнено также значительное количество работ по трансформации воздушных масс, по исследованию строения пограничного слоя атмосферы и по некоторым другим вопросам метеорологии, в которых теоретическая схема, с целью упрощения математической части решения, строится частично или целиком на так называемой квазистационарной основе, т. е. пренебрегая локальными производными метеозлементов по времени. К ним можно отнести работы [6—9] и др. Как правило, в большинстве из них области применения квазистационарных схем для описания нестационарных процессов и возникающие при этом погрешности оцениваются весьма ориентировочно.

В принципе для более точных оценок влияния нестационарности на поле ветра можно было бы использовать результаты некоторых из упомянутых выше работ. Однако по различным причинам, к которым относятся недостаточная строгость постановки задачи (например [1]) или значительная трудоемкость расчетов, и по ряду других причин трудно на основе этих работ построить достаточно физически обоснованные и в то же время сравнительно простые критерии влияния нестационарности на скорость ветра. Наиболее подходящей для этих целей могла бы служить, по нашему мнению, работа [4], однако определенная незавершенность ее затрудняет использование этой работы.

Предлагаемая работа преследует цель получить решение для скорости ветра в пограничном слое атмосферы при нестационарных условиях, на основе которого можно было бы дать сравнительно несложные методику расчета и критерии оценки влияния нестационарности на поле ветра.

1. Постановка задачи

Задача решается при следующих предположениях:

а) условия в атмосфере горизонтально-однородные, следовательно, градиенты давления не зависят ни от горизонтальных координат, ни от высоты (вследствии отсутствия горизонтальных градиентов температуры), но могут произвольным образом зависеть от времени;

б) коэффициент вертикальной турбулентной диффузии также не зависит от горизонтальных координат и задается в виде

$$k(z, t) = \varphi(t) \cdot \mu(z), \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ и $\mu(z)$ — произвольные функции.

Таким образом, упрощающие предположения почти не затрагивают основных факторов, определяющих нестационарность поля ветра, каким являются изменения во времени коэффициента турбулентности и градиентов давления.

Исходя из этого, определение вертикального профиля ветра при нестационарных условиях сводится к интегрированию уравнений движения в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u(z, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial x} + 2\omega_z v(z, t) + \varphi(t) \frac{\partial}{\partial z} \mu(z) \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v(z, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial y} - 2\omega_z u(z, t) + \varphi(t) \frac{\partial}{\partial z} \mu(z) \frac{\partial v}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

при начальном условии:

$$\left. \begin{aligned} u(z, t)|_{t=0} &= u_0(z) \\ v(z, t)|_{t=0} &= v_0(z) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и граничных условиях:

$$u(z, t) = v(z, t) = 0 \quad \text{при } z = z_0 \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &\rightarrow U_g(t) \\ v(z, t) &\rightarrow V_g(t) \end{aligned} \right\} \quad \text{при } z \rightarrow \infty \quad (5)$$

Здесь t — время, z — высота (z_0 — уровень шероховатости), x и y — горизонтальные координаты, причем ось x направлена вдоль начальной (при $t=0$) изобаре, $u(z, t)$ и $v(z, t)$ — горизонтальные составляющие скорости ветра, $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial v}{\partial t}$ — их локальные производные, ω_z — вертикальная составляющая угловой скорости вращения земли, ρ — плотность воздуха, $U_g(t)$ и $V_g(t)$ — составляющие скорости геострофического ветра, $p(t, x, y, z)$ — давление воздуха (по условиям задачи давление — линейная функция координат x и y , но может быть задано произвольной функцией времени).

Предположим, что начальный профиль ветра удовлетворяет стационарным уравнениям движения, отнесенным к начальному моменту.

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} k_0(z) \frac{du_0(z)}{dz} + 2\omega_z v_0(z) &= 0 \\ \frac{d}{dz} k_0(z) \frac{dv_0(z)}{dz} - 2\omega_z [u_0(z) - V_g] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и граничным условиям

$$u_0(z) = v_0(z) = 0 \quad \text{при } z = z_0 \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} u_0(z) &\rightarrow V_g = -\frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{t=0} \\ v_0(z) &\rightarrow 0 = \frac{1}{2\omega_z \rho} \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{t=0} \end{aligned} \right\} \text{ при } z \rightarrow \infty. \quad (8)$$

где $k_0(z) = \varphi(0) \cdot \mu(z)$ — начальный профиль коэффициента турбулентности.

Из определения геострофического ветра следует, что его составляющие $U_g(t)$ и $V_g(t)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_g(t)}{dt} &= 2\omega_z V_g(t) + g_x(t) \\ \frac{dV_g(t)}{dt} &= -2\omega_z U_g(t) + g_y(t) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

при начальном условии

$$\left. \begin{aligned} U_g(0) &= V_g \\ V_g(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} g_x(t) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial x} \\ g_y(t) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p(t, x, y)}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

причем по условиям задачи g_x и g_y являются произвольными функциями времени и не зависят от координат.

Заметим, что впервые во многом аналогичная постановка задачи была приведена в работе [4]; там же намечен общий путь решения.

При решении нашей задачи использовались некоторые приемы из работы [4] (при выводе общего решения).

2. Решение задачи для общего случая

Обозначим:

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) + iv(z, t) &= w(z, t) \\ u_0(z) + iv_0(z) &= w_0(z) \\ u_g(t) + iv_g(t) &= W_g(t) \\ g_x(t) + ig_y(t) &= G(t) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

тогда функции $w(z, t)$, $w_0(z)$ и $W_g(t)$ будут удовлетворять уравнениям:

$$\frac{\partial w(z, t)}{\partial t} = G(t) - 2\omega_z i w(z, t) + \varphi(t) \frac{\partial}{\partial z} \mu(z) \frac{\partial w(z, t)}{\partial z}, \quad (13)$$

$$\frac{d}{dz} k_0(z) \frac{dw_0(z)}{dz} - 2\omega_z i [w_0(z) - V_g] = 0, \quad (14)$$

$$\frac{dW_g(t)}{dt} = G(t) - 2\omega_z i W_g(t). \quad (15)$$

при условиях:

$$w(z, t) = w_0(z) \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (16)$$

$$w(z, t) = 0 \quad \text{при} \quad z = z_0, \quad (17)$$

$$w(z, t) \rightarrow W_g(t) \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty, \quad (18)$$

$$w_0(z) = 0 \quad \text{при} \quad z = z_0, \quad (19)$$

$$w_0(z) \rightarrow V_g \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty, \quad (20)$$

$$W_g(t) = V_g \quad \text{при} \quad t = 0; \quad (21)$$

причем, исходя из (15) и (21), получим для функции $W_g(t)$ решение в виде

$$W_g(t) = e^{-2\omega_z i t} \left[V_g + \int_0^t G(\bar{t}) e^{2\omega_z i \bar{t}} d\bar{t} \right], \quad (22)$$

где

$$G(t) = 2\omega_z i V_g \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (23)$$

Введем безразмерное время θ по формуле

$$\theta = \theta(t) = \int_0^t \frac{\varphi(t)}{\varphi(0)} dt \quad (24)$$

и положим

$$P(z, \theta) = e^{2\omega_z i t} [w(z, t) - W_g(t) - w_0(z) + V_g] \quad (25)$$

Исходя из (13)–(20) и (24), получим для определения функции $P(z, \theta)$ уравнение

$$\frac{\partial P(z, \theta)}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial z} k_0(z) \frac{\partial P(z, \theta)}{\partial z} + 2\omega_z i e^{2\omega_z i t} \left[1 - \frac{\varphi(0)}{\varphi(t)} \right] [w_0(z) - V_g] \quad (26)$$

при условиях:

$$P(z, \theta) = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad (27)$$

$$P(z, \theta)|_{z=z_0} = e^{2\omega_z i t} [V_g - W_g(t)], \quad (28)$$

$$P(z, \theta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty. \quad (29)$$

Решая (27) методами операционного исчисления, можно получить

$$P(z, \theta) = [w_0(z) - V_g] (e^{2\omega_z i \theta} - e^{2\omega_z i t}) + \int_0^\theta [V_g e^{2\omega_z i \bar{\theta}} - W_g(\bar{t}) e^{2\omega_z i \bar{t}}] E(z, \theta - \bar{\theta}) d\bar{\theta}, \quad (30)$$

где функция $E(z, \theta)$ выражается контурным интегралом

$$E(z, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{p\theta} \frac{P_0(z, p)}{P_0(z, p)|_{z=z_0}} dp \quad (31)$$

и где $P_0(z, p)$ есть то решение линейного однородного уравнения

$$\frac{d}{dz} k_0(z) \frac{dP_0(z, p)}{dz} = pP_0(z, p), \quad (32)$$

которое ограничено при $z \rightarrow \infty$ и $\operatorname{Re} \sqrt{p} > 0$.

Исходя из (25) и учитывая (24), получим искомое общее решение для профиля скорости ветра в виде

$$\begin{aligned} w(z, t) = & W_g(t) + e^{-2\omega_z t(t-\theta)} [w_0(z) - V_g] + \\ & + \frac{1}{\varphi(0)} e^{-2\omega_z it} \int_0^t [V_g e^{2\omega_z i\theta(\bar{t})} - W_g(\bar{t}) e^{2\omega_z i\bar{t}}] E[z; \theta(t) - \theta(\bar{t})] \varphi(\bar{t}) d\bar{t}, \end{aligned} \quad (33)$$

где скорость геострофического ветра $W_g(t)$ определяется формулой (22) и где начальный профиль $w_0(z)$ находится из уравнения (14) при условиях (16) и (17).

На определении вертикального профиля ветра мы здесь не останавливаемся, ибо задача о вычислении его в стационарных условиях представляет самостоятельный интерес и рассматривается во многих исследованиях (например, [5, 7, 9] и др.).

Из формулы (33) можно заключить, что в нашей постановке задачи нестационарность поля ветра обусловлена только изменениями во времени градиентов давления и коэффициента турбулентности, хотя характер влияния нестационарности будет определяться конкретной формой зависимости коэффициента турбулентности от высоты.

Действительно, в случае независимости градиентов давления и коэффициента турбулентности от времени, получим, учитывая (1), (22) и (24), что $W_g(t) = V_g = \text{const}$; $\theta(t) = t$ и формула (33) даст $w(z, t) = w_0(z)$.

На основе общего решения (33) можно получить формулы для расчета профиля скорости ветра в зависимости от конкретного вида заданных исходных данных и функций.

Учитывая, что нашей задачей является также дать сравнительно несложные критерии оценки влияния нестационарности на поле ветра, обусловленного в основном изменениями во времени градиентов давления и коэффициента турбулентности. Ограничимся при дальнейшем рассмотрении только случаем, когда коэффициент турбулентности не меняется с высотой. С этой целью положим $\mu(z) = 1$, тогда, согласно (1) имеем

$$\left. \begin{aligned} k(z, t) &= \varphi(t) \\ k_0(z) &= \varphi(0) = \varphi_0 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Учитывая (31), (32), а также то, что при этом можно положить $z_0 = 0$, можно, исходя из (33), получить следующую формулу для расчета скорости ветра

$$\begin{aligned} u(z, t) + iv(z, t) = & U_g(t) + iV_g(t) - \\ & - \frac{z}{2\varphi_0 \sqrt{\pi\varphi_0}} \int_0^t [U_g(\bar{t}) + iV_g(\bar{t})] e^{-2\omega_z t(t-\bar{t})} \cdot e^{-\frac{z^2}{4\varphi_0 [\theta(t) - \theta(\bar{t})]}} \times \\ & \times \frac{\varphi(\bar{t}) d\bar{t}}{[\theta(t) - \theta(\bar{t})]^{\frac{3}{2}}} - V_g e^{-2\omega_z t(t-\theta)} M(z, \theta), \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$M(z, \theta) = \frac{1}{2} e^{-z \sqrt{\frac{2\omega_z i}{\varphi_0}}} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{2\omega_z i \theta} - \frac{z}{2\sqrt{\varphi_0 \theta}} \right) \right] - \frac{1}{2} e^{z \sqrt{\frac{2\omega_z i}{\varphi_0}}} \left[1 - \Phi \left(\sqrt{2\omega_z i \theta} + \frac{z}{2\sqrt{\varphi_0 \theta}} \right) \right]. \quad (36)$$

Для величины касательного напряжения

$$\frac{\tau_x(t)}{\rho} + i \frac{\tau_y(t)}{\rho} = \varphi(t) \left[\frac{\partial u}{\partial z} + i \frac{\partial v}{\partial z} \right] \Big|_{z=z_0} \quad (37)$$

получим формулу

$$\begin{aligned} & \frac{\tau_x(t)}{\rho} + i \frac{\tau_y(t)}{\rho} = \\ & = e^{-2\omega_z i t} \frac{\varphi(t)}{V \varphi_0} \left\{ V_g \sqrt{2\omega_z i} e^{2\omega_z i \theta} [1 - \Phi(\sqrt{2\omega_z i \theta})] - \frac{V_g}{V \pi \theta} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\varphi(t) V \pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t e^{2\omega_z i \bar{t}} [U_g(\bar{t}) + i V_g(\bar{t})] \frac{\varphi(\bar{t}) d\bar{t}}{V \theta(t) - \theta(\bar{t})} \right\}. \quad (38) \end{aligned}$$

Здесь через Φ обозначена функция Крампа.

3. Частные случаи решения

Случай 1. За последнее время исследованиями [5] установлено, что средний по высоте коэффициент турбулентности в пограничном слое атмосферы приблизительно пропорционален квадрату скорости геострофического ветра. С этой точки зрения интересно рассмотреть влияние нестационарности на профиль скорости ветра при совместном изменении во времени коэффициента турбулентности и градиента давления. С целью упрощения задачи предположим, что в начальный момент $t=0$ коэффициент турбулентности получает конечный скачок $\varphi_1 - \varphi_0$ и в дальнейшем не меняется. Тогда, согласно (34), имеем

$$k(z, t) = \varphi(t) = \begin{cases} \varphi_0 & \text{при } t=0 \\ \varphi_1 & \text{при } t>0 \end{cases} \quad (39)$$

Предположим далее, что в этот же момент $t=+0$ градиент давления мгновенно возрастает до большой величины и затем мгновенно принимает первоначальную величину, т. е. его изменение, которое носит характер «вспышки», можно представить в виде:

$$G(t) = \begin{cases} 2\omega_z i V_g & \text{при } t=0 \\ 2\omega_z i V_g + (V'_g - V_g) \delta(t) & \text{при } t>0 \end{cases} \quad (40)$$

где $\delta(t)$ — единичная «дельта»-функция, а $V'_g - V_g$ — характеризует мощность мгновенного скачка.

Подставляя (40) в (22), получим для скорости геострофического ветра формулу

$$W_g(t) = V_g + (V'_g - V_g) e^{-2\omega_z i t}, \quad (41)$$

т. е. геострофический ветер получает в начальный момент $t=+0$ конечный скачок $V'_g - V_g$, а затем продолжает со временем периодически меняться с периодом $\frac{12}{\sin \varphi}$ час. и амплитудой, равной скачку.

Подставляя (39) и (41) в (35) и (38) и учитывая, что в этом случае $\theta(t)=t$ (для $t>0$), получим для скорости и для касательного напряжения формулы:

$$w(z, t) = V_g \left(1 - e^{-\eta_1 \sqrt{2i}} \right) + (V'_g - V_g) e^{-2i\chi^2} \Phi \left(\frac{\eta_1}{2\chi} \right) + \\ + V_g \left\{ M(\chi; \eta_1) - e^{2i(\chi_1^2 - \chi^2)} M(\chi_1; \eta) \right\}, \quad (42)$$

$$\frac{\tau_x(t)}{\rho} + i \frac{\tau_y(t)}{\rho} + V_g \sqrt{2\omega_z i \varphi_1} + (V'_g - V_g) \frac{1}{\chi \sqrt{\pi}} \sqrt{\omega_z \varphi_1} e^{-2i\chi^2} - \\ - V_g \sqrt{2\omega_z i \varphi_1} \left\{ M_0(\chi) + \sqrt{\frac{\varphi_1}{\varphi_0}} e^{2i(\chi_1^2 - \chi^2)} M_0(\chi_1) \right\}, \quad (43)$$

где введены безразмерные время χ , χ_1 и высоты η , η_1 по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= \sqrt{\omega_z t} \\ \chi &= \sqrt{\omega_z t \frac{\varphi_1}{\varphi_0}} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_z &= z \sqrt{\frac{\omega_z}{\varphi_0}} \\ \eta_1 &= z \sqrt{\frac{\omega_z}{\varphi_1}} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

и где обозначено:

$$M_0(\chi) = 1 - \Phi(\chi \sqrt{2i}) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\chi \sqrt{2i}} e^{-2i\chi^2}, \quad (46)$$

$$M(\chi, \eta) = M(z, t) = \frac{1}{2} \left\{ e^{-\eta \sqrt{2i}} \left[1 - \Phi \left(\chi \sqrt{2i} - \frac{\eta}{2\chi} \right) \right] - \right. \\ \left. - e^{\eta \sqrt{2i}} \left[1 - \Phi \left(\chi \sqrt{2i} + \frac{\eta}{2\chi} \right) \right] \right\} \quad (47)$$

Воспользовавшись соотношением

$$1 - \Phi(\xi) = e^{-\xi^2} \omega(i\xi), \quad (48)$$

где

$$\omega(x + iy) = u^*(x, y) + iv^*(x, y) \quad (49)$$

есть функции, введенные и затабулированные в [10]. Можно исходя из (42) и (43) получить для расчета составляющих скорости и касательного напряжения формулы:

$$u(z, t) = V_g (1 - e^{-\eta_1 \cos \eta_1}) + V_g \left\{ M_1(\chi; \eta_1) - \cos 2(\chi_1^2 - \chi^2) \times \right. \\ \times M_1(\chi_1; \eta) - \sin 2(\chi_1^2 - \chi^2) M_2(\chi_1; \eta) + \\ \left. + \frac{(V'_g - V_g)}{V_g} \cos 2\chi^2 \Phi \left(\frac{\eta_1}{2\chi} \right) \right\}, \quad (50)$$

$$v(z, t) = V_g e^{-\eta} \sin \eta_1 - V_g \left\{ M_2(\chi_1 \eta_1) - \cos 2(\chi_1^2 - \chi^2) M_2(\chi_1, \eta) + \right. \\ \left. + \sin 2(\chi_1^2 - \chi^2) M_1(\chi_1; \eta) - \frac{(V'_g - V_g)}{V_g} \sin 2\chi^2 \Phi\left(\frac{\eta_1}{2\chi}\right) \right\}, \quad (51)$$

$$\frac{\tau_x(t)}{\rho} = V_g \sqrt{\omega_z \varphi_1} - V_g \sqrt{\omega_z \varphi_1} \left\{ S_1(\chi) - \frac{\chi_1}{\chi} \left[\cos 2(\chi_1^2 - \chi^2) S_1(\chi_1) - \right. \right. \\ \left. \left. - \sin 2(\chi_1^2 - \chi^2) S_2(\chi_1) \right] - \frac{(V'_g - V_g)}{V_g} \frac{\cos 2\chi^2}{\chi \sqrt{\pi}} \right\}, \quad (52)$$

$$\frac{\tau_y(t)}{\rho} = V_g \sqrt{\omega_z \varphi_1} - V_g \sqrt{\omega_z \varphi_1} \left\{ S_2(\chi) - \frac{\chi_1}{\chi} \left[\cos 2(\chi_1^2 - \chi^2) S_2(\chi_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin 2(\chi_1^2 - \chi^2) S_1(\chi_1) \right] + \frac{(V'_g - V_g)}{V_g} \frac{\sin 2\chi^2}{\chi \sqrt{\pi}} \right\}, \quad (53)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} M(\chi, \eta) &= M_1(\chi, \eta) - i M_2(\chi, \eta) \\ \sqrt{2i} M_0(\chi) &= S_1(\chi) + i S_2(\chi) \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

$$M_1(\chi, \eta) = \begin{cases} e^{-\eta} \cos \eta - \frac{1}{2} e^{-\frac{\eta^2}{4\chi^2}} \left\{ \cos 2\chi^2 \left[u^*\left(\chi; \frac{\eta}{2\chi} - \chi\right) + u^*\left(\chi; \frac{\eta}{2\chi} + \chi\right) \right] + \right. \\ \left. + \sin 2\chi^2 \left[v^*\left(\chi; \frac{\eta}{2\chi} - \chi\right) - v^*\left(\chi; \frac{\eta}{2\chi} + \chi\right) \right] \right\} \text{ при } \chi \leq \sqrt{\frac{\eta}{2}} \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{\eta^2}{4\chi^2}} \left\{ \cos 2\chi^2 \left[u^*\left(\chi; \chi - \frac{\eta}{2\chi}\right) - u^*\left(\chi; \chi + \frac{\eta}{2\chi}\right) \right] - \right. \\ \left. - \sin 2\chi^2 \left[v^*\left(\chi; \chi - \frac{\eta}{2\chi}\right) - v^*\left(\chi; \chi + \frac{\eta}{2\chi}\right) \right] \right\} \text{ при } \chi \geq \sqrt{\frac{\eta}{2}} \end{cases} \quad (55)$$

$$M_2(\chi, \eta) = \begin{cases} e^{-\eta} \sin \eta + \frac{1}{2} e^{-\frac{\eta^2}{4\chi^2}} \left\{ \cos 2\chi^2 \left[v^*\left(\chi; \frac{\eta}{2\chi} - \chi\right) - v^*\left(\chi; \frac{\eta}{2\chi} + \chi\right) \right] - \right. \\ \left. - \sin 2\chi^2 \left[u^*\left(\chi; \frac{\eta}{2\chi} - \chi\right) + u^*\left(\chi; \frac{\eta}{2\chi} + \chi\right) \right] \right\} \text{ при } \chi \leq \sqrt{\frac{\eta}{2}} \\ \frac{1}{2} e^{-\frac{\eta^2}{4\chi^2}} \left\{ \cos 2\chi^2 \left[v^*\left(\chi; \chi - \frac{\eta}{2\chi}\right) - v^*\left(\chi; \chi + \frac{\eta}{2\chi}\right) \right] + \right. \\ \left. + \sin 2\chi^2 \left[u^*\left(\chi; \chi - \frac{\eta}{2\chi}\right) - u^*\left(\chi; \chi + \frac{\eta}{2\chi}\right) \right] \right\} \text{ при } \chi \geq \sqrt{\frac{\eta}{2}} \end{cases} \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned} S_1(\chi) &= \cos 2\chi^2 \left[u^*(\chi; \chi) + v^*(\chi; \chi) - \frac{1}{\chi \sqrt{\pi}} \right] + \\ &\quad + \sin 2\chi^2 [u^*(\chi; \chi) - v^*(\chi; \chi)] \\ S_2(\chi) &= \cos 2\chi^2 [u^*(\chi; \chi) - v^*(\chi; \chi)] - \\ &\quad - \sin 2\chi^2 \left[u^*(\chi; \chi) + v^*(\chi; \chi) - \frac{1}{\chi \sqrt{\pi}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

В формулах (50) — (53) вторые слагаемые, заключенные в фигурных скобках, характеризуют влияние нестационарности на скорость ветра. Они обусловлены наличием в начальный момент $t = +0$ скачка в

градиенте давления (члены, имеющие множителем $\frac{V_g' - V_g}{V_g}$) и скачка $\varphi_1 - \varphi_0$ в коэффициенте турбулентности (остальные члены в фигурных скобках), ибо, как нетрудно убедиться, при отсутствии скачков ($V_g' - V_g = 0$; $\varphi_1 - \varphi_0 = 0$) указанные члены исчезают и скорость ветра будет описываться спиралью Экмана:

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= V_g (1 - e^{-\eta} \cos \eta) \\ v(z, t) &= V_g e^{-\eta} \sin \eta \\ \frac{\tau_x}{\rho} &= \frac{\tau_y}{\rho} = V_g \sqrt{\omega_z \varphi_0} \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Для ускорения расчетов в табл. 1 и 2 приведены значения функций $S_1(\chi)$, $S_2(\chi)$, $M_1(\chi, \eta)$ и $M_2(\chi, \eta)$, вычисленные по формулам (55) — (57).

Анализ расчетных формул (50) — (53) показывает, что изменения скорости ветра и касательного напряжения в первые часы после скачков ($t < t_0 \sim \frac{12}{\pi \sin \varphi}$ час.) носят резко нестационарный характер, а затем влияние нестационарности постепенно затухает. Изменение ветра и касательного напряжения носит осциллирующий характер с убывающей по времени амплитудой, причем затухание нестационарности,

Значения функции $S_1(\chi)$

	0	0,10	0,20	0,50	0,80	1,0	1,2	1,4	1,5
$S_1(\alpha) \dots$	$-\infty$	-4,645	-1,823	-0,174	0,113	0,109	0,0418	-0,0206	-0,0337
$S_2(\alpha) \dots$	1	0,887	0,777	0,440	0,145	0,0067	-0,0550	-0,0412	-0,0183

Значения функции $M_1(\chi, \eta)$

η	0	0,10	0,20	0,50	0,80	1,0	1,2	1,4	1,5
--------	---	------	------	------	------	-----	-----	-----	-----

$M_1(\chi, \eta)$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,802	0,645	0,323	0,0336	-0,0224	-0,0216	-0,0084	0,0042	0,0066
0,5	0,532	0,486	0,418	0,0612	-0,0609	-0,0628	-0,0203	-0,0103	0,0165
1,0	0,198	0,198	0,198	0,0495	-0,0838	-0,0920	-0,0347	0,0191	0,0308
1,5	0,0160	0,0160	0,0160	-0,0150	-0,1090	-0,1040	-0,0408	0,0262	0,0411
2,0	-0,0562	-0,0567	-0,0572	-0,0600	-0,1024	-0,0970	-0,0258	0,0304	0,0450

$M_2(\chi, \eta)$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,2	0,163	0,161	0,147	0,0861	0,0284	0,0012	-0,0110	-0,0082	-0,0036
0,5	0,290	0,278	0,275	0,191	0,0648	0,0024	-0,0320	-0,0198	-0,0083
1,0	0,310	0,310	0,310	0,261	0,1060	0,0005	-0,0488	-0,0363	-0,0160
1,5	0,222	0,222	0,222	0,209	0,0950	-0,0054	-0,0076	-0,0468	-0,0202
2,0	0,123	0,123	0,122	0,121	0,0637	-0,0150	-0,0064	-0,0500	-0,0206

вызванной скачком в градиенте давления, происходит медленнее (со скоростью $\frac{1}{\sqrt{t}}$), нежели нестационарности, обусловленной скачком в коэффициенте турбулентности (со скоростью $\frac{1}{t}$ и больше). Последнее обстоятельство, очевидно, вызвано тем, что начальный скачок в градиенте давления вызывает незатухающие со временем колебания скорости геострофического ветра с периодом $\frac{12}{\sin \varphi}$ час., что является неисчезающим со временем источником нестационарности [см. формулу (41)], в то время как источник нестационарности при скачке в коэффициенте турбулентности действует только в начальный момент. Анализ формул показывает, в согласии с физическими соображениями, что влияние нестационарности тем больше, чем больше скачок $\varphi_1 - \varphi_0$ в коэффициенте турбулентности и чем больше скачок в градиенте давления, характеризуемый относительным скачком $\frac{V'_g - V_g}{V_g}$ скорости геострофического ветра в начальный момент. Колебания скорости и касательного напряжения со временем, вызванные скачком в градиенте давления, носят довольно правильный характер, ибо содержат колебания только одного периода порядка $\frac{12}{\sin \varphi}$ час. Колебания, вызванные скачком

и $S_2(\chi)$ при различных значениях χ Таблица 1

1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
-0,0315 0,0049	-0,0181 0,0201	-0,0004 0,0220	0,0136 0,0144	0,0170 0,0004	0,0102 -0,0108	-0,0014 -0,0128	-0,0097 -0,0059	-0,0091 0,0043	-0,0010 0,0088

и $M_2(\chi, \eta)$ при различных значениях χ Таблица 2

1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
0 0,0063 0,0154	0 0,0053 0,0088	0 0 0	0 -0,0027 -0,0068	0 -0,0035 -0,0084	0 -0,0021 -0,0051	0 0,0002 0,0007	0 0,0028 0,0048	0 0,0018 0,0045	0 0,0003 0,0007
0,0289 0,0386 0,0437	0,0162 0,0219 0,0250	0,0001 -0,0002 -0,0008	-0,0126 -0,0177 -0,0217	-0,0161 -0,0221 -0,0268	-0,0097 -0,0134 -0,0163	0,0014 0,0020 0,0026	0,0093 0,0132 0,0161	0,0088 0,0126 0,0154	0,0015 0,0021 0,0028
0 0,0010 0,0028	0 0,0040 0,0099	0 0,0047 0,0115	0 0,0029 0,0072	0 0 0,0001	0 -0,0022 -0,0054	0 -0,0026 -0,0065	0 -0,0012 -0,0029	0 0,0008 0,0020	0 0,0018 0,0042
0,0049 0,0070 0,0091	0,0187 0,0256 0,0305	0,0213 0,0293 0,0340	0,0136 0,0184 0,0220	0,0004 0,0004 0,0001	-0,0101 -0,0142 -0,0177	-0,0122 -0,0172 -0,0205	-0,0055 -0,0079 -0,0095	0,0040 0,0054 0,0074	0,0086 0,0120 0,0143

в коэффициенте турбулентности, носят более сложный характер, ибо складываются из колебаний трех периодов порядка $\frac{12}{\sin \varphi}$, $\frac{12}{\sin \varphi} \cdot \frac{\varphi_0}{\varphi_1}$ и $\frac{12}{\sin \varphi} \cdot \frac{\varphi_0}{|\varphi_1 - \varphi_0|}$ час. Следовательно, чем больше скачок в начальный момент, тем более короткопериодические колебания будут испытывать скорость ветра и касательное напряжение. По истечении достаточно большого времени, указанные колебания практически исчезают и профиль скорости ветра будет определяться спиралью Экмана типа (58) с коэффициентом турбулентности φ_1 и скоростью геострофического ветра V_g .

Случай 2. Рассмотрим теперь другой частный случай решения (35) и (38), на основе которого будет дан простой критерий оценки влияния нестационарности на скорость ветра и касательное напряжение, обусловленное изменением во времени скорости геострофического ветра.

Предположим, что коэффициент турбулентности не меняется со временем, т. е. $\varphi(t) = \varphi_0$, а скорость геострофического ветра получает в начальный момент $t=0$ конечный скачок и в дальнейшем уже не меняется, т. е.

$$W_g(t) = \begin{cases} V_g & \text{при } t=0 \\ V'_g & \text{при } t>0 \end{cases} \quad (59)$$

Исходя из (22) и (23), можно установить, что такой скачок в геострофическом ветре так же вызывается мгновенным скачком в градиент давления в начальный момент $t=0$, но в отличие от предыдущего случая величина градиента давления не возвращается к начальному значению, а отличается от него постоянной величиной

$$G(t) = \begin{cases} 2\omega_z i V_g & \text{при } t=0 \\ 2\omega_z i V'_g + (V'_g - V_g) \delta(t) & \text{при } t>0 \end{cases} \quad (60)$$

Подставляя (59) в (35) и (38), получим для этого случая следующие формулы для скорости ветра и касательного напряжения:

$$\left. \begin{aligned} u(z, t) &= V'_g (1 - e^{-\eta} \cos \eta) \left[1 + \frac{(V'_g - V_g)}{V'_g} A_1(\chi, \eta) \right] \\ v(z, t) &= V'_g e^{-\eta} \sin \eta \left[1 - \frac{(V'_g - V_g)}{V'_g} A_2(\chi, \eta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (61)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\tau_x(t)}{\rho} &= V'_g \sqrt{\omega_z \varphi_0} \left[1 - \frac{(V'_g - V_g)}{V'_g} S_1(\chi) \right] \\ \frac{\tau_y(t)}{\rho} &= V'_g \sqrt{\omega_z \varphi_0} \left[1 - \frac{(V'_g - V_g)}{V'_g} S_2(\chi) \right] \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_1(\chi, \eta) &= \frac{M_1(\chi, \eta)}{(1 - e^{-\eta} \cos \eta)} \\ A_2(\chi, \eta) &= \frac{M_2(\chi, \eta)}{e^{-\eta} \sin \eta} \end{aligned} \right\} \quad (63)$$

а остальные обозначения прежние.

Вторые слагаемые в формулах (61) и (62), очевидно, представляют

относительную величину нестационарной части составляющих скорости ветра и касательного напряжения, которые пропорциональны относи-

тельному скачку в геострофическом ветре $\frac{V'_g - V_g}{V'_g}$. В табл. 3 приведены значения функций $A_1(\chi, \eta)$ и $A_2(\chi, \eta)$, вычисленные по (63). На-

Таблица 3

Значения функций $A_1(\chi, \eta)$ и $A_2(\chi, \eta)$ при различных значениях χ

η	χ										
	0	0,10	0,20	0,50	0,80	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
$A_1(\chi, \eta)$											
0		4,64	1,82	0,174	-0,113	-0,109	-0,042	0,021	0,032	0,000	-0,017
0,5	1,130	1,038	0,894	0,131	-0,130	-0,134	-0,043	0,022	0,033	0,000	-0,018
1,0	0,247	0,247	0,247	0,062	-0,104	-0,115	-0,043	0,024	0,036	0,000	-0,020
2,0	-0,053	-0,053	-0,054	-0,057	-0,098	-0,092	-0,024	0,029	0,041	-0,001	-0,025
$A_2(\chi, \eta)$											
0	1,000	0,887	0,777	0,440	0,145	0,007	-0,055	-0,041	0,005	0,022	0,000
0,5	1,000	0,960	0,950	0,660	0,236	0,008	-0,110	-0,068	0,010	0,040	0,000
1,0	1,000	1,000	1,000	0,842	0,342	0,002	-0,157	-0,117	0,016	0,069	0,001
2,0	1,000	1,000	1,000	0,982	0,517	-0,122	-0,052	-0,406	0,074	0,274	0,001

личие этой таблицы, а также табл. 1 позволяет весьма просто оценить относительное влияние нестационарности на составляющие скорости ветра и касательного напряжения, обусловленное влиянием начального скачка в скорости геострофического ветра. Исходя из формул (50) — (53) и табл. 1 и 2, можно получить аналогичный критерий для оценки нестационарности, вызванной скачком в коэффициенте турбулентности, если положить в этих формулах $V'_g = V_g$. Однако по указанным выше причинам этот критерий будет носить несколько более сложный характер. Поскольку любое изменение коэффициента турбулентности и скорости геострофического ветра во времени можно приближенно разложить на отдельные конечные скачки, полученные критерии позволяют в принципе оценить влияние нестационарности на скорость ветра и касательное напряжение при произвольном изменении во времени скорости геострофического ветра и коэффициента турбулентности.

В заключение приведем несколько численных примеров.

Пример 1. Пользуясь формулами (61) и (62) и табл. 1 и 3, найдем влияние нестационарности на скорость ветра и на касательное напряжение, вызванное скачком в геострофическом ветре $V'_g - V_g = 5$ м/сек. (при начальной скорости $V_g = 10$ м/сек.) в различные моменты времени. Остальные исходные данные такие: $\varphi_0 = 4$ м²/сек.; $\varphi = 60^\circ$, $z = 10$ м и $z = 500$ м.

Приведем расчет для случая $z = 10$ м и $t = 1$ час. Из (44) и (45) имеем $\chi = \sqrt{7,27 \cdot 10^{-5} \cdot 0,866 \cdot 3,6 \cdot 10^3} = 0,48$ и $\eta = 10 \sqrt{\frac{7,27 \cdot 10^{-5} \cdot 0,866}{4}} = 0,04$. Далее из табл. 1 и 3 найдем: $S_1(\chi) = -0,300$, $S_2(\chi) = 0,462$, $A_1(\chi, \eta) = 0,170$, $A_2(\chi, \eta) = 0,450$. Подставляя

эти величины в (61) и (62), получим относительные влияния нестационарности при $t=1$ час:

$$\bar{\tau}_x(t) = \frac{\frac{\tau_x(t)}{\rho} - \frac{\tau_x}{\rho} \Big|_{\text{ст}}}{\frac{\tau_x}{\rho} \Big|_{\text{ст}}} = - \frac{(V'_g - V_g)}{V'_g} S_1(\chi) = \frac{1}{3} \cdot 0,300 = 0,100,$$

$$\bar{\tau}_y(t) = \frac{\frac{\tau_y(t)}{\rho} - \frac{\tau_y}{\rho} \Big|_{\text{ст}}}{\frac{\tau_y}{\rho} \Big|_{\text{ст}}} = -0,154,$$

$$\bar{u}(z, t) = \frac{u(z, t) - u(z) \Big|_{\text{ст}}}{u(z) \Big|_{\text{ст}}} = 0,057,$$

$$\bar{v}(z, t) = \frac{v(z, t) - v(z) \Big|_{\text{ст}}}{v(z) \Big|_{\text{ст}}} = -0,150,$$

где $\frac{\tau_x}{\rho} \Big|_{\text{ст}}$, $\frac{\tau_y}{\rho} \Big|_{\text{ст}}$ и т. п. — соответствующие стационарные (при $t \rightarrow \infty$) величины. Аналогично были вычислены эти же величины в другие моменты времени. Результаты расчетов приведены в табл. 4.

Таблица 4

t час.	0,5	1	3	10
$\bar{\tau}_x(t)$. . .	0,297	0,100	-0,037	0,011
$\bar{\tau}_y(t)$. . .	-0,207	-0,154	-0,041	0,004
$z = 10$ м $\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(z, t) \dots \\ \bar{v}(z, t) \dots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,337 \\ -0,212 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,057 \\ -0,150 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -0,038 \\ -0,043 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,009 \\ 0,006 \end{array} \right.$
$z = 500$ м $\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(z, t) \dots \\ \bar{v}(z, t) \dots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -0,018 \\ -0,331 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -0,019 \\ -0,328 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -0,032 \\ -0,137 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,012 \\ 0,040 \end{array} \right.$

Как видно из табл. 4, влияние нестационарности при сравнительно большом скачке $V'_g - V_g = 5$ м/сек. даже через 3 часа после скачка невелико (примерно нескольких процентов). С высотой, как и следует ожидать, это влияние на скорость ветра заметно увеличивается.

Пример 2. Вычислим по формулам (51), (52), табл. 1 и 2 и по тем же исходным данным влияние нестационарности на скорость ветра и касательное напряжение в случае, когда скачок $\varphi_1 - \varphi_0 = 5$ м²/сек. наблюдается в коэффициенте турбулентности и при постоянной скорости геострофического ветра $V_g = 10$ м/сек. Результаты расчетов приведены в табл. 5.

Таблица 5

t час.	0,5	1	3	10
$\bar{\tau}_x(t)$. . .	0,473	0,309	-0,043	0,018
$\bar{\tau}_y(t)$. . .	-0,070	-0,185	-0,071	0,011
$z = 10$ м $\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(z, t) \dots \\ \bar{v}(z, t) \dots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,477 \\ -0,067 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,292 \\ -0,184 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -0,041 \\ -0,075 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,033 \\ 0,011 \end{array} \right.$
$z = 500$ м $\left\{ \begin{array}{l} \bar{u}(z, t) \dots \\ \bar{v}(z, t) \dots \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,072 \\ -0,0427 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,046 \\ -0,438 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} -0,094 \\ -0,270 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} 0,019 \\ 0,047 \end{array} \right.$

Как видно из табл. 5, характер и величина (ее порядок) влияния нестационарности, вызванной скачком в коэффициенте турбулентности, примерно такие же, как в предыдущем случае.

Пример 3. В этом примере вычислены скорость ветра и касательное напряжение в различные моменты времени на высотах $z=50$ м и $z=500$ м в случае, когда в начальный момент $t=0$ одновременно имеет место скачок в градиенте давления типа (40) и скачок в коэффициенте турбулентности типа (39). Решение для этого случая представлено формулами (51), (52), по которым проводились расчеты. Исходные данные такие: $V_g=15$ м/сек.; $V'_g=20$ м/сек.; $\varphi_0=4$ м²/сек.; $\varphi_1=9$ м²/сек.; $\varphi=60^\circ$.

Результаты расчетов помещены на рис. 1 и 2, где приведены графики-годографы изменения во времени относительных (по отношению

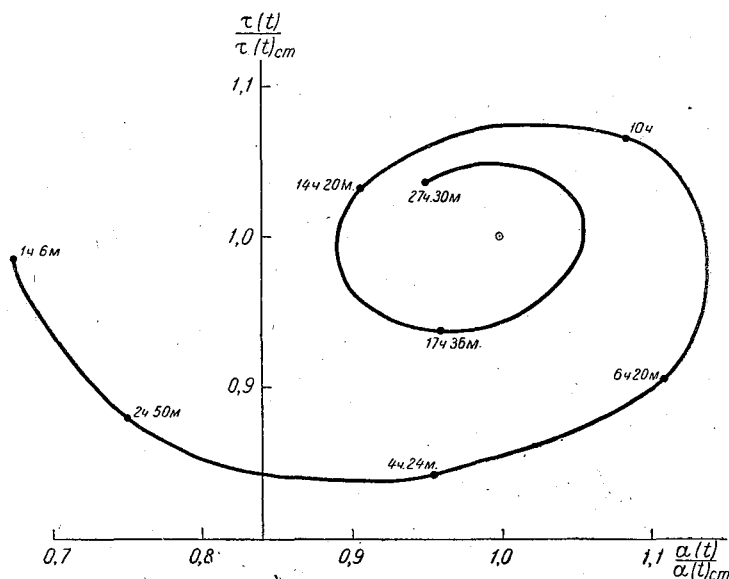


Рис. 1. Изменение со временем модуля и направления касательного напряжения.

к соответствующим стационарным решениям) величин модулей касательного напряжения $\frac{\tau(t)}{\rho}$ и скорости ветра $c(t)$ и их углов отклонений $\alpha(t)$ от направления геострофического ветра в начальный (до скачков) момент.

Поскольку здесь имеет место совместное влияние скачков в коэффициенте турбулентности и в градиенте давления типа (40), которое влечет за собой начальный скачок и незатухающие со временем колебания скорости геострофического ветра типа (41), то влияние нестационарности здесь несколько больше и оно затухает со временем медленнее, нежели в предыдущих примерах.

Выводы

Полученное в работе общее решение, его частные случаи и примеры расчета позволяют сделать выводы, что в пределах тех изменений во времени скорости геострофического ветра и коэффициентов турбулентности, которые обычно могут иметь место в реальных условиях, влияние нестационарности на скорость ветра практически исчезает через несколько часов после того, как имели место указанные изменения во времени. Из анализа полученных решений нетрудно установить, что

влияние нестационарности сравнительно мало зависит от высоты вблизи подстилающей поверхности (в приземном подслое примерно 10—50 метров), а выше это влияние, как подтверждают примеры, заметно увеличивается.

Результаты работы позволяют, по нашему мнению, сделать вывод о применимости квазистационарных схем при решении различных метеорологических задач, если только придерживаться указанных выше ограничений. В отношении профиля ветра полученные нами решения и приведенные таблицы позволяют более детально оценить пределы применения квазистационарных решений для описания поля ветра.

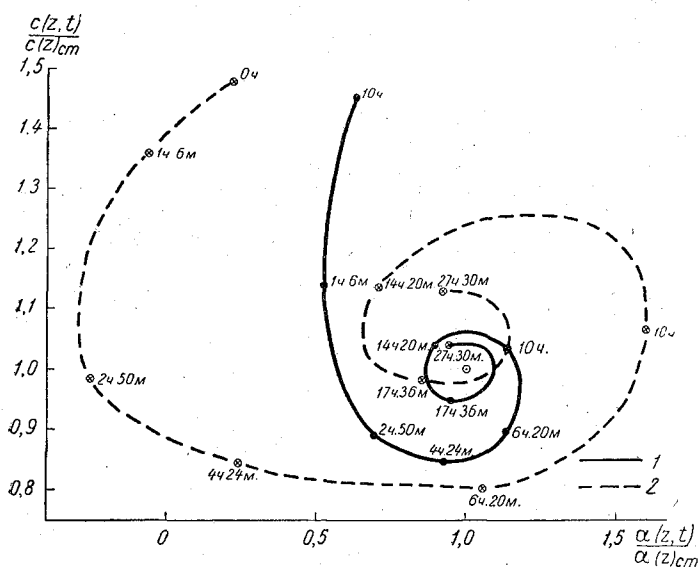


Рис. 2. Изменение со временем модуля скорости и направления ветра.

1 — высота $z=50$ м, 2 — высота $z=500$ м.

В заключение автор выражает благодарность проф. Д. Л. Лайхтману за некоторые советы, данные им при выполнении работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Извеков Б. И. *Met. Zeit.* № 46, 1929, 1.
2. Jeon-Jang Jaw. *Met. Nat. Res. Inst. Meter. Acad. Sinica.* V. 13, № 4, 1943.
3. Швеи М. Е. *Изв. АН СССР, сер. геоф.*, № 2, 1943.
4. Берлянд М. Е. К теории изменения ветра в приземном слое атмосферы. *Тр. ГГО*, вып. 23, 1950.
5. Лайхтман Д. Л. *Физика пограничного слоя атмосферы*. Гидрометеиздат, 1961.
6. Берлянд М. Е. *Предсказание и регулирование теплового режима приземного слоя атмосферы*. Гидрометеиздат, 1956.
7. Цейтин Г. Х. К вопросу о строении пограничного слоя атмосферы при нестационарных условиях (первая часть). *Тр. ГГО*, вып. 107, 1961.
8. Цейтин Г. Х. К вопросу о строении пограничного слоя атмосферы при нестационарных условиях (вторая часть). *Тр. ГГО*, вып. 144, 1963.
9. Mariano A. *Egtoque. A Numerical model of the Atmospheric Boundary Layer.* *J. Geophys.*, vol. 68, No 4, 1963.
10. Фаддеева В. Н. и Терентьев Н. М. *Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента*. Гостехиздат, М. 1954.
11. Матвеев Л. Т. Суточный ход скорости ветра и характеристик турбулентного обмена в пограничном слое атмосферы. *Тр. ГГО*, вып. 1, 1947.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА ЭНЕРГИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЗАДАЧЕ О ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЗДУШНОЙ МАССЫ

Для получения характеристик трансформирующейся воздушной массы решается совместная система уравнений движения, притока тепла и баланса энергии турбулентности. Метод иллюстрирован решением простого примера, доведенным до расчетных формул.

Изучению процесса трансформации воздушной массы посвящены многочисленные работы советских и зарубежных ученых.

Явления, наблюдающиеся при трансформации воздушной массы, аналогичны явлениям, происходящим при обтекании пластинки турбулентным потоком жидкости или газа, и описываются теми же уравнениями: уравнениями движения и уравнением притока тепла.

Интегрирование уравнений движения вязкой жидкости в большинстве случаев не может быть выполнено точно. Развитие получили главным образом приближенные методы решения этих уравнений. Особенно плодотворным оказалось использование Прандлевской теории пограничного слоя, позволяющей значительно упростить уравнения Новье—Стокса.

В задаче о турбулентном пограничном слое имеется известная трудность, состоящая в необходимости иметь дополнительные сведения о коэффициенте турбулентного обмена. При отсутствии информации о коэффициенте обмена система уравнений, описывающих явление, оказывается незамкнутой. В последнее время во многих работах [2, 4, 5] в качестве дополнительного уравнения используется уравнение баланса энергии турбулентности. Если воспользоваться известными соотношениями Колмогорова [1, 4], выражающими коэффициент обмена k , диссипацию D и диффузию F энергии турбулентности через среднюю энергию турбулентности b и масштаб турбулентности l , то система уравнений окажется замкнутой после того, как будет определена функция l .

Наиболее современными по этому поводу являются соображения, изложенные в статье Д. Л. Лайхтмана и С. С. Зилитинкевича [6]. В этой работе для l принято выражение

$$l = - \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T_0} \frac{\partial T}{\partial z}}{2 \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{g}{T_0} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}} \quad (1)$$

В задачах о трансформации до настоящего времени коэффициент турбулентного обмена считался известной функцией высоты, не изменяющейся при переходе воздушной массы на новую поверхность.

В работах [3, 10] было указано на несоответствие такой постановки задачи физическим представлениям и была сделана попытка учесть изменения коэффициента турбулентности.

Присоединение уравнения баланса энергии турбулентности к системе исходных уравнений позволит нам корректно поставить «совместную» задачу о трансформации температуры, ветра и коэффициента обмена.

Система уравнений, соответствующим образом упрощенная применительно к процессам в пограничном слое малой толщины [2], записывается в виде:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (3)$$

$$u \frac{\partial b}{\partial x} - k \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T_0} \frac{\partial T}{\partial z} \right] = -D, \quad (4)$$

где (2) — уравнение движения, (3) — уравнение притока тепла, (4) — уравнение баланса энергии турбулентности.

Здесь и ниже используются следующие обозначения:

u — скорость ветра, T — температура, D — диссипация энергии турбулентности, b — средняя энергия турбулентности, z — вертикальная координата, x — горизонтальная координата, k — коэффициент турбулентности.

Существенным ограничением этой постановки задачи остается пренебрежение вертикальной диффузией энергии турбулентности.

Как было сказано выше, для решения задачи должны быть привлечены соотношения Колмогорова

$$k = l \sqrt{b}; \quad D = c \frac{k^3}{l^4}. \quad (5)$$

Для того чтобы не усложнять изложение громоздкими формулами, мы ограничимся в этой статье рассмотрением допущения $l = \gamma x z$ [5]. Это допущение оказывается в некоторых случаях оправданным численными оценками.

Алгоритм решения получен, однако, и при использовании более общего соотношения (1).

Граничные условия, необходимые для решения системы (2)–(4), совпадают с обычно принимаемыми условиями для задач такого рода:

1) соблюдается условие прилипания потока на уровне шероховатости

$$u(x, z)|_{z=z_0} = 0, \quad (6)$$

2) задается температура (в более общем случае — радиационный баланс) на уровне подстилающей поверхности

$$T(x, z)|_{z=z_0} = T_0(x), \quad (7)$$

3) считается, что влияние подстилающей поверхности распространяется до верхней границы пограничного слоя δ

$$\left. \begin{aligned} T(x, z)|_{z=\delta_T} &= T'(\delta_T) \\ u(x, z)|_{z=\delta_u} &= u'(\delta_u) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\delta_u} &= k' \frac{\partial u'}{\partial z} \Big|_{z=\delta_u} \\ k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=\delta_T} &= k' \frac{\partial T'}{\partial z} \Big|_{z=\delta_T} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

4) коэффициент обмена на уровне подстилающей поверхности принимается пренебрежимо малым

$$k(x, z)|_{z=z_0} = 0. \quad (10)$$

Здесь все величины со штрихами являются характеристиками невозмущенного потока, δ_u — граница динамического пограничного слоя, δ_T — граница термического пограничного слоя.

Решение системы уравнений отыскивается с помощью метода Швеца [7, 8], все искомые величины будут определены рядами:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \mu u_1 + \mu^2 u_2 + \dots \\ T &= T_0 + \mu T_1 + \mu^2 T_2 + \dots \\ k &= k_0 + \mu k_1 + \mu^2 k_2 + \dots, \end{aligned}$$

где u_0, T_0, k_0 — нулевое приближение, u_1, T_1, k_1 — первое приближение и т. д., μ — параметр, введенный в уравнения при адвективных членах.

Так как полученное этим методом решение, по-видимому, лучше сходится для линейных уравнений, проведем обычно используемую в этих случаях линеаризацию [9]. Представим $u = u' + \bar{u}$ ($\bar{u}$ — отклонение ветра от его значения в невозмущенном потоке) и предположим (там, где это допустимо), что $\bar{u} \ll u'$, тогда наши уравнения примут вид:

$$u' \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (11)$$

$$u' \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (12)$$

$$u' \frac{\partial b}{\partial x} - k \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \frac{g}{T_0} \frac{\partial T}{\partial z} \right] = - \frac{ck^3}{l^4}. \quad (13)$$

Отметим, однако, что решение может быть легко обобщено и на случай нелинейных уравнений.

Введем масштабы для всех величин и приведем уравнения и граничные условия к безразмерному виду. Если допустить, что в натекающей воздушной массе выполняются квазистационарные условия $\left(k' \frac{\partial u'}{\partial z} = v'^2; k' \frac{\partial T'}{\partial z} = P' \right)$, то безразмерные уравнения и граничные условия могут быть записаны таким образом:

$$\mu \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tilde{k} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}}, \quad (14)$$

$$\mu \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \tilde{k} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{z}}, \quad (15)$$

$$\mu \tilde{u}' \frac{\partial \tilde{b}}{\partial \tilde{x}} - \tilde{k} \left[\left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right)^2 - \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{z}} \right] = - \frac{\tilde{k}^3}{\tilde{z}^4}, \quad (16)$$

$$\tilde{\eta} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_0} = 0, \quad (17)$$

$$\tilde{\eta} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{\delta}_T} = \tilde{\eta}'(\tilde{\delta}_T), \quad (18)$$

$$\tilde{u} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{z}_0} = 0, \quad (19)$$

$$\tilde{u} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{\delta}_u} = \tilde{u}'(\tilde{\delta}_u), \quad (20)$$

$$\tilde{k} \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{\delta}_T} = 1, \quad \tilde{k} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \Big|_{\tilde{z}=\tilde{\delta}_u} = 1, \quad (21)$$

где

$$\tilde{\eta} = \frac{T - T_0(x)}{T_0}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{u_0}, \quad \tilde{z} = \frac{z}{z_0} = \frac{z}{L},$$

$$\tilde{k} = \frac{k}{k_0}, \quad \tilde{x} = \frac{x}{x_0}, \quad \tilde{\delta} = \frac{\delta}{z_0}.$$

В дальнейшем значок ($\sim$) для простоты опущен.

Отыщем последовательные приближения интересующего нас решения. Существенно отметить, что, как уже указывалось в работе [9], возможность получения решения, поддающегося численному счету, в значительной мере зависит от порядка и способа использования граничных условий. Нам пришлось вместо условий (18) и (20) ввести условия:

$$k \frac{\partial \eta}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = P_0 + \mu P_1 + \mu^2 P_2 + \dots,$$

$$k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = v_{*0}^2 + \mu v_{*1}^2 + \dots,$$

где $R_0, P_1, \dots$ и $v_{*0}^2, v_{*1}^2, \dots$ — неизвестные функции; они считались заданными на промежуточном этапе решения.

Нулевое приближение:

$$\frac{\partial}{\partial z} k_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} k_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial z} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial \eta_0}{\partial z} = \frac{k_0^2}{z^4}.$$

Граничные условия:

$$k_0 \frac{\partial u_0}{\partial z} = v_{*0}^2, \quad k_0 \frac{\partial \eta_0}{\partial z} = P_0,$$

$$u_0 \Big|_{z=z_0} = \eta_0 \Big|_{z=z_0} = 0, \quad k_0 \Big|_{z=z_0} = 0.$$

Решение:

$$u_0 = v_{*0}^2 \int_{z_0}^z \frac{dz}{k_0}, \quad \eta_0 = P_0 \int_{z_0}^z \frac{dz}{k_0}, \quad (22)$$

$$\frac{k_0}{\sqrt[4]{1-ak_0}} = v_{*0} z, \quad a = \frac{P_0}{v_{*0}^4}. \quad (23)$$

Из условий (18) и (20) находим

$$v_{*0}^2 = \frac{u'(\delta_u)}{\int_{z_0}^u \frac{dz}{k_0}}, \quad P_0 = \frac{\eta'(\delta_T)}{\int_{z_0}^{\delta_T} \frac{dz}{k_0}}. \quad (24)$$

Первое приближение:

$$\begin{aligned} u' \frac{\partial u_0}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} k_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} k_1 \frac{\partial u_0}{\partial z}, \\ u' \frac{\partial \eta_0}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial z} k_0 \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} k_1 \frac{\partial \eta_0}{\partial z}, \\ u' \frac{\partial b_0}{\partial x} - k_0 \left[2 \frac{\partial u_1}{\partial z} \frac{\partial u_0}{\partial z} - \frac{\partial \eta_1}{\partial z} \right] - k_1 \left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \right)^2 - \frac{\partial \eta_0}{\partial z} \right] &= - \frac{3k_0^2 k_1}{z^4}. \end{aligned}$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned} \left(k_0 \frac{\partial u_1}{\partial z} + k_1 \frac{\partial u_0}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} &= v_{*1}^2(x), \\ \left(k_0 \frac{\partial \eta_1}{\partial z} + k_1 \frac{\partial \eta_0}{\partial z} \right) \Big|_{z=z_0} &= P_1(x), \\ u_1 \Big|_{z=z_0} = \eta_1 \Big|_{z=z_0} &= 0, \quad u_1 \Big|_{z=\delta_u} = \eta_1 \Big|_{z=\delta_T} = 0. \end{aligned}$$

Решение:

$$u_1 = \int_{z_0}^z \frac{J_1}{k_0} dz - \int_{z_0}^z \frac{k_1}{k_0} \frac{\partial u_0}{\partial z} dz + v_{*1}^2(x) \int_{z_0}^z \frac{dz}{k_0}, \quad (25)$$

$$\eta_1 = \int_{z_0}^z \frac{J_2}{k_0} dz - \int_{z_0}^z \frac{k_1}{k_0} \frac{\partial \eta_0}{\partial z} dz + P_1(x) \int_{z_0}^z \frac{dz}{k_0}, \quad (26)$$

$$k_1 = \frac{k_0^2}{v_{*0}^4 (4 - 3ak_0)} \left[2 \frac{v_{*0}^2}{k_0} J_1 - \frac{2v_{*0}^2}{k_0} v_{*1}^2 - J_2 - P_1(x) - u' \frac{\partial b_0}{\partial x} \right], \quad (27)$$

$$v_{*1}^2(x) = \frac{1}{\psi(\delta_u; z_0)} \left[v_{*0}^2 \int_{z_0}^{\delta_u} \frac{k_1}{k_0^2} dz - \int_{z_0}^{\delta_u} \frac{J_1}{k_0} dz \right], \quad (28)$$

$$P_1(x) = \frac{1}{\psi(\delta_T; z_0)} \left[P_0 \int_{z_0}^{\delta_T} \frac{k_1}{k_0^2} dz - \int_{z_0}^{\delta_T} \frac{J_2}{k_0} dz \right], \quad (29)$$

где

$$J_1 = \int_{z_0}^z u' \frac{\partial u_0}{\partial x} dz, \quad J_2 = \int_{z_0}^z u' \frac{\partial \eta_0}{\partial x} dz, \quad \psi(z, z_0) = \int_{z_0}^z \frac{dz}{k_0}.$$

Все последующие приближения могут быть вычислены аналогичным способом.

В этом решении неопределенными остаются величины δ_u и δ_T . Воспользуемся условием (21), причем для вычисления δ_u и δ_T ограни-

чимся использованием только первых двух приближений величин u и T , что соответствует в уравнении для δ пренебрежению членами порядка $O\left(\frac{\delta}{x^2}\right)$.

Получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial u_1}{\partial z} \Big|_{z=\delta_u} &= \frac{1}{k'(\delta_u)}, \\ \frac{\partial T_0}{\partial z} + \frac{\partial T_1}{\partial z} \Big|_{z=\delta_T} &= \frac{1}{k'(\delta_T)}.\end{aligned}$$

Иначе:

$$\begin{aligned}v_{*0}^2 + J_1 - \frac{k_1(\delta_u) v_{*0}^2}{k_0(\delta_u)} + v_{*1}^2(x) &= \frac{k_0(\delta_u)}{k'(\delta_u)}, \\ P_0 + J_2 - \frac{k_1(\delta_T) P_0}{k_0(\delta_T)} + P_1(x) &= \frac{k_0(\delta_T)}{k_1(\delta_T)}.\end{aligned}$$

После соответствующих преобразований эти выражения приводятся к уравнениям для δ_u и δ_T вида

$$\left. \begin{aligned}\frac{d\delta_u}{dx} f_1(\delta_u; \delta_T) &= 1 \\ \frac{d\delta_T}{dx} f_2(\delta_u; \delta_T) &= 1\end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Так как функции f_1 и f_2 довольно сложны, эти уравнения решаются численно или графически.

Для оценки практических возможностей применения полученного общего решения можно рассмотреть некоторые частные задачи, решения которых достаточно просто получаются на основании приведенной схемы.

Одна из таких задач — об обтекании нагретой (или охлажденной) пластинки однородным потоком — может иметь применение в некоторых специальных задачах метеорологии, например в теории метеорологических приборов. Решение этой задачи сравнительно не сложно, удобно для оценок и сравнений с гидродинамическим экспериментом.

Для этого случая граничные условия упрощаются следующим образом:

$$u|_{z=z_0} = \eta|_{z=z_0} = 0, \quad (31)$$

$$u|_{z=\delta_u} = 1, \quad \eta|_{z=\delta_T} = 1, \quad (32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\delta_u} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} \Big|_{z=\delta_T} = 0. \quad (33)$$

Так как уравнения и граничные условия для u и η одинаковы, очевидно, что $\delta_u = \delta_T$.

Решение в первом приближении имеет вид:

$$\left. \begin{aligned}v_{*0}^2 = P_0 \quad u_0 = \eta_0 = P_0 \int_{z_0}^z \frac{dz}{k_0} \\ \frac{k_0}{\sqrt[4]{1 - ak_0}} = v_{*0} z\end{aligned} \right\} \quad (33a)$$

Решение во втором приближении таково:

$$v_{*1}^2(x) = P_1(x), \quad J_1 = J_2 = J, \\ k_1 = \frac{k_0^2}{v_{*0}^4(4-3ak_0)} \left[\frac{v_{*0}^2}{k_0} (2-ak_0) J + \frac{v_{*0}^2}{k_0} (2-ak_0) v_{*1}^2 - \right. \\ \left. - \frac{4u_1 v_{*0} (2-ak_0)}{4-3ak_0} (1-ak_0)^{\frac{1}{2}} \frac{dv_{*0}}{dx} \right], \quad (34)$$

$$J = 4v_{*0} \frac{dv_{*0}}{dx} I(z), \quad \frac{dv_{*0}}{dx} = - \frac{v_{*0}}{4k_0(\delta) \varphi(\delta, z_0)} \frac{d\delta}{dx},$$

$$v_{*1}^2(x) = - \frac{1}{\varphi(\delta, z_0)} \left[4v_{*0} \frac{dv_{*0}}{dx} Y + \frac{2}{v_{*0}} \frac{dv_{*0}}{dx} Y_1 \right], \quad (35)$$

где

$$\varphi(z, z_0) = \int_{z_0}^z \frac{(1-ak_0) dz}{k_0(4-3ak_0)},$$

$$I(z, z_0) = \int_{z_0}^z u' \varphi(z, z_0) dz,$$

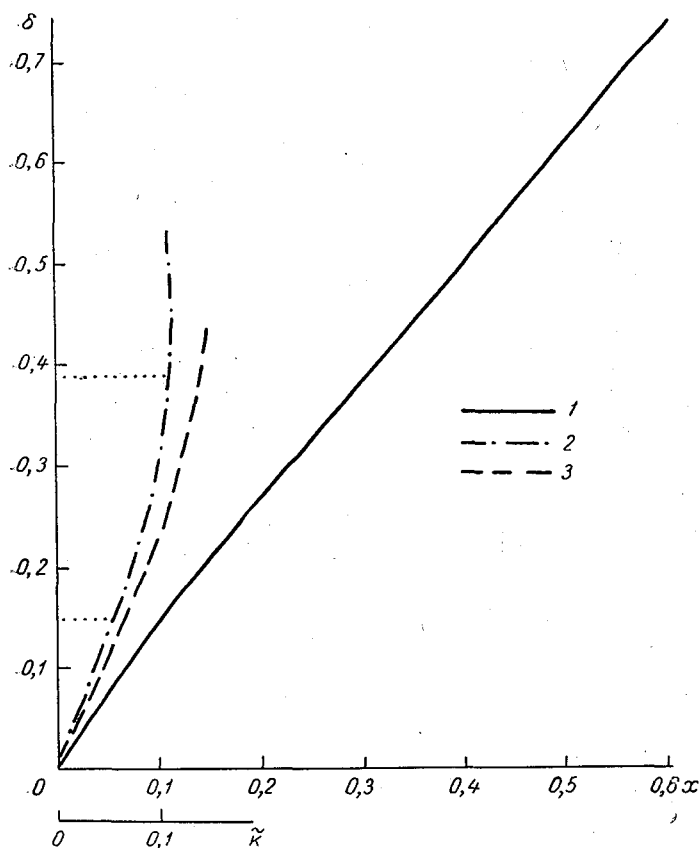


Рис. 1. Изменение верхней границы пограничного слоя и коэффициента турбулентности при удалении от границы $x=0$.

1 — граница пограничного слоя δ , 2 — профиль $k_0(z)$ на расстоянии $x=0,3x^2$, 3 — профиль $k_0(z)$ на расстоянии $x=0,1x^2$.

$$Y = \int_{z_0}^z \frac{I(1 - ak_0) dz}{k_0(4 - 3ak_0)},$$

$$Y_1 = \int_{z_0}^z \frac{u'(2 - ak_0)(1 - ak_0)^{\frac{1}{2}}}{(4 - 3ak_0)^2} dz.$$

Уравнение, определяющее δ , приводится к виду:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dx} f(\delta) &= 1, \\ f(\delta) &= \frac{2y^4}{(1 + 3y^4) \varphi(\delta, z_0) k_0(\delta)} \left[I(\delta, z_0) - \frac{Y}{\varphi} - \frac{Y_1}{\varphi} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u'(1 + y^4)(1 - y^4)}{1 + 3y^4} \right], \\ y &= (1 - ak_0)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Все приведенные интегралы вычисляются в квадратурах.

В качестве примера расчета по полученным формулам приведен рис. 1, на котором показано изменение границы δ и профилей коэффициента обмена по мере удаления от края пластинки. Полученный результат согласуется с физическими представлениями. Несовпадение значений $k_0(\delta)$ со значениями коэффициента обмена в невозмущенном потоке объясняется тем, что диффузия энергии турбулентности не учитывалась.

Изложенный метод позволяет без особых затрат труда обобщить полученное решение на случай температурно-влажностной трансформации и учесть вертикальные токи, возникающие в пограничном слое.

Необходимо продолжить исследования и выполнить расчеты для более общих метеорологических задач. Применение в дальнейшем машинной техники позволит сделать эти расчеты оперативными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колмогоров А. Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. ДАН СССР, т. 30, № 4, 1941.
2. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеиздат, Л., 1961.
3. Лайхтман Д. Л. Некоторые вопросы теории микроклимата. Тр. ВНМС, т. VII, 1963.
4. Обухов А. М. К теории атмосферной турбулентности. Изд. АН, сер. физ. т. VI, № 1—2, 1942.
5. Монин А. С. Турбулентный режим в приземном слое воздуха. Информационный сборник ГУГМС, № 1, 1951.
6. Зилитинкевич С. С. и Лайхтман Д. Л. Турбулентный режим в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. Физика атмосферы и океана, т. 1 и 2, 1965.
7. Шве́ц М. Е. О приближенном решении некоторых задач гидродинамики пограничного слоя. ПММ, т. XIII, в. 3, 1949.
8. Гандин Л. С. О сходимости метода Швеца. ПММ, т. XIV, № 4, 1950.
9. Гандин Л. С. К вопросу о трансформации профиля ветра Тр. ГГО, вып. 33, 1952.
10. Надежина Е. Д. Об изменении полей метеорологических элементов, происходящих при трансформации воздушной массы. Тр. ГГО, вып. 50, 1963.

О ВЛИЯНИИ РАДИАЦИИ НА ТРАНСФОРМАЦИЮ НИЖНЕЙ ОБЛАЧНОСТИ

Рассматривается влияние лучистого притока тепла на трансформацию нижней облачности. Получена расчетная формула, позволяющая практически для любого реального случая рассчитать количественные характеристики изменения облачности под влиянием радиации. Приведены примеры некоторых расчетов.

1. Одним из важных элементов погоды является облачность. С ней связаны ухудшение видимости, обледенение, грозовые явления и т. п. Правильный прогноз формы, количества и особенно высоты верхней и нижней границ облачности необходим для решения многих прикладных задач и в первую очередь для обеспечения успешной работы авиации.

Прогноз нижней границы облачности в синоптической практике основывается на использовании эмпирических связей, недостатком которых является малая точность и ограниченность применения по территории. Для более точного прогноза характеристик облачности необходимо решить задачу, основанную на физической теории.

Из физических соображений ясно, что изменение характеристик облачности зависит от начального состояния облака, от свойств подстилающей поверхности и от притока радиации.

Целью данной работы было изучение влияния радиации на изменение границ облачности.

2. Воспользуемся формулой, полученной в работе [3], которая описывает трансформацию облачности

$$\begin{aligned} \widetilde{\Pi}(\xi, \zeta) = & \frac{\zeta^p}{2\xi} \int_0^\infty \mu^{1-p} \exp\left(-\frac{\mu^2 + \zeta^2}{4\xi}\right) I_p\left(\frac{\mu\zeta}{2\xi}\right) [\Pi^0(\mu) - \Pi_1^0(\mu)] d\mu + \\ & + \frac{\zeta^{2p}}{2^{2p}\Gamma(p)} \int_0^\xi \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\xi - 4\nu}\right) [\Pi_0(\nu) - \Pi_1^0(0)] \frac{d\nu}{(\xi - \nu)^{1+p}} + \\ & + \frac{z_1 p \zeta^p}{k_1 \varepsilon c \rho^p} \int_0^\infty \sigma^p \frac{\partial R}{\partial \sigma} d\sigma \int_0^\xi \exp\left(-\frac{\zeta^2 + \sigma^2}{4\xi - 4\nu}\right) I_p\left(\frac{\zeta\sigma}{2\xi - 2\nu}\right) \frac{d\nu}{\xi - \nu}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\xi, \zeta) = & \frac{\zeta^p}{2\xi} \int_0^\infty \mu^{1-p} \exp\left(-\frac{\mu^2 + \zeta^2}{4\xi}\right) I_p\left(\frac{\mu\zeta}{2\xi}\right) [Q^0(\mu) - Q^0_1(\mu)] d\mu + \\ & + \frac{\zeta^{2p}}{2^{2p}\Gamma(p)} \int_0^\xi \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4\xi - 4\nu}\right) [Q_0(\nu) - Q^0_1(0)] \frac{d\nu}{(\xi - \nu)^{1+p}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь:

$$\Pi = T + \frac{L}{c_p} q + \gamma_a z,$$

$$Q = \begin{cases} q + \delta & \text{для облака} \\ q & \text{вне облака} \end{cases}$$

T — температура; q — удельная влажность; δ — водность; γ_a — сухо-адиабатический градиент; L — скрытая теплота конденсации; ρc_p — объемная теплоемкость воздуха; $\xi = \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{1+n+\varepsilon}{2}}$, $\xi = \frac{\varepsilon^2 k_1 x}{4\rho^2 u_1 z_1^2}$, где

$\rho = \frac{\varepsilon}{1+n+\varepsilon}$; R — радиационный баланс; x — горизонтальная координата, направленная по потоку; z — вертикальная координата, отсчитываемая от поверхности земли; z_1 — высота, на которой $k = k_1$; u — скорость ветра; k — коэффициент турбулентности.

Физический смысл отдельных слагаемых формулы (1) следующий. Первый член — влияние начального состояния воздушной массы.

Второй член отражает влияние неоднородности подстилающей поверхности, над которой движется воздушная масса.

Третий член учитывает влияние радиации на облачность.

В этой же работе [3] предложен метод расчета верхней и нижней границ облачности и водности по значениям Π и Q .

3. Рассмотрим третий член формулы (1).

Чтобы получить возможность рассчитывать по этой формуле, необходимо задать вид функции $\frac{\partial R}{\partial \sigma}$.

Любая достаточно гладкая функция может быть представлена с необходимой точностью в виде суммы экспонент. Таким образом, указанное представление может описать практически любое реальное распределение $\frac{\partial R}{\partial \sigma}$.

В частности, следуя работам Шифрина [7, 8], вид этой функции можно задать следующим образом:

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = A\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2h^2}} + B\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2H^2}}. \quad (3)$$

Это значит, что в случае оптически плотных облаков, максимальное изменение радиационного баланса происходит на границах облака. В середине облака изменение радиационного баланса близко к нулю.

В случае тонких и не очень плотных облаков можно записать

$$\frac{\partial R}{\partial \sigma} = C\sigma e^{-\frac{\sigma^2}{2\sigma_m^2}}, \quad C = \frac{N}{\sigma_m^2}, \quad (4)$$

где N — количество радиации, поглощенной во всем слое; σ_m — высота середины облака.

Чтобы не усложнять расчета, в данной работе функция $\frac{\partial R}{\partial \sigma}$ задавалась формулой (4). Никаких принципиальных затруднений не возникает, если задавать $\frac{\partial R}{\partial \sigma}$ суммой нескольких экспонент.

После некоторых преобразований последний член формулы (1) примет вид

$$\Pi_3 = \frac{Az_1}{4k_1 \varepsilon c_p \rho \alpha^{\frac{3}{2}}} \left[\int_0^{\xi^2 \alpha} e^{-y} y^{p-1} dy - \int_0^{\frac{\xi^2 \alpha}{1+4\alpha\xi}} e^{-y} y^{p-1} dy \right], \quad (5)$$

где

$$\alpha = 1 - 2p.$$

4. По полученной формуле был проведен ряд расчетов, позволяющий выявить некоторые физические закономерности трансформации облачности под влиянием притока радиации.

Были рассмотрены три случая:

- 1) задан приток радиации к верхней и к нижней границам облака;
- 2) задан приток радиации только к верхней или только к нижней границе;
- 3) облако теряет радиацию.

Расчеты проводились при следующих начальных условиях. Границы облака: нижняя — 200 м, верхняя — 400 м;

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \begin{cases} 1 \text{ град/100 м} & z < 200 \text{ м} \\ -0,6 \text{ град/100 м} & z > 200 \text{ м} \end{cases}$$

Температура у земли 15°;

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \begin{cases} 0,2 \text{ г/кг/100 м} & z < 400 \text{ м} \\ 0,65 \text{ г/кг/100 м} & z > 400 \text{ м} \end{cases}$$

$q_0 = 9,8$ г/кг — удельная влажность у земной поверхности. Максимальная водность 0,5 г/кг на высоте 300 м.

На основании выполненных расчетов построены графики изменения границ облака и распределения водности в зависимости от притока радиации.

1. На рис. 1 представлены результаты расчета для случаев отсутствия (1) и наличия (2) притока радиации к облаку. Видно, что в случае наличия притока радиации к облаку оно рассеивается быстрее: на расстоянии $\xi = 20$ ($x = 20$ км при $u_1 = 2$ м/сек., $k_1 = 2$ м²/сек.) оно уже не прослеживается. Значение водности для $\xi = 20$ ($x = 20$ км при тех же u_1 и k_1) равно 0.

В случае отсутствия притока радиации облако сохраняется до $\xi = 25$ ($x = 25$ км, при тех же u_1 и k_1).

2. В случае когда имеет место приток радиации только к верхней или только к нижней границе облака, весь процесс протекает аналогично, но более медленно: на расстоянии $\xi = 20$ ($x = 20$ км при тех же u_1 и k_1) облако еще прослеживается. Водность на $\xi = 20$ ($x = 20$ км при тех же u_1 и k_1) равна 0,1 г/кг.

3. Случай потери радиации облаком представлен на рис. 2.

Размеры облака в этом случае увеличиваются, и с расстоянием оно разбухает. Водность увеличивается, ее значение на $\xi = 20$ ($x = 20$ км при $u_1 = 2$ м/сек., $k_1 = 2$ м²/сек.) равняется 0,6 г/кг.

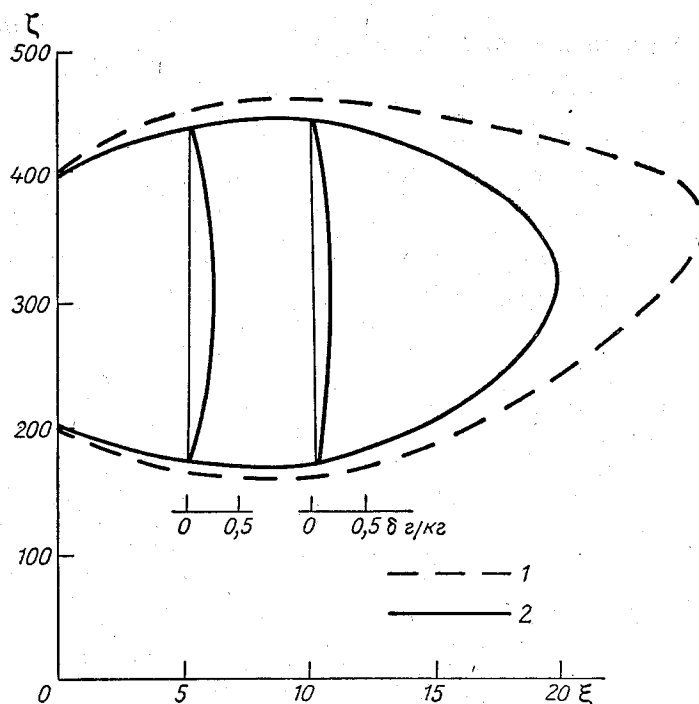


Рис. 1. Изменение границ облачности и влажности при положительном притоке радиации.

1 — приток радиации к облаку равен нулю, 2 — наблюдается приток радиации к облаку.

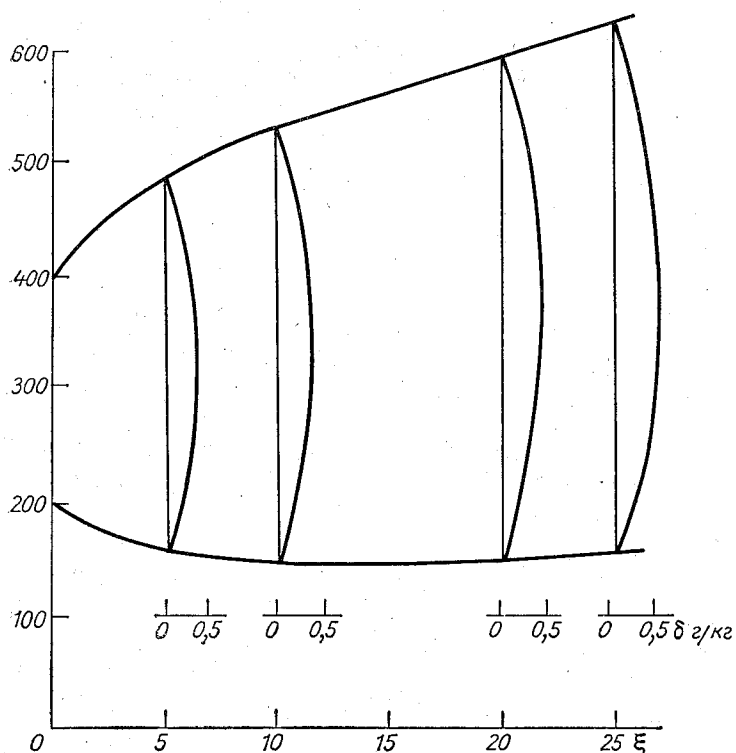


Рис. 2. Изменение границ облачности и влажности при отрицательном притоке радиации.

Таким образом, проведенный расчет подтверждает качественные представления об изменении границ облачности под влиянием притока радиации: при притоке радиации к облаку температура его возрастает, уменьшается водность и облако начинает рассеиваться; в случае потери радиации облаком оно охлаждается, увеличивается конденсация водяного пара и водность — облако растет.

Выводы

1. Получена расчетная формула, позволяющая определить практически для любого реального случая количественные характеристики изменения облачности под влиянием радиации. Формулы легко обобщаются,

если $\frac{\partial R}{\partial z}$ представить рядом Фурье.

2. Полученные результаты указывают на существенное влияние радиации на трансформацию облачности.

3. Расчеты оперативно выполняются на электронных вычислительных машинах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кожарин В. С., Матвеев Л. Т. Роль турбулентного перемешивания в формировании структуры слоистообразных облаков. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1956.
2. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеиздат. Л., 1961.
3. Лайхтман Д. Л., Надежина Е. Д., Симонов В. В. Влияние изменения внешних условий на трансформацию нижней облачности. Тр. ГГО, вып. 165, 1965.
4. Матвеев Л. Т. Некоторые вопросы теории образования и эволюции слоистообразной облачности. Тр. ААНИИ, т. 228, вып. 1, 1959.
5. Матвеев Л. Т. Условия образования и эволюции облаков под влиянием вертикальных токов и турбулентного обмена. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 1, 1961.
6. Шифрин К. С. Влияние тумана на радиационный баланс. Тр. ГГО, вып. 27, 1951.
7. Шифрин К. С. О вычислении свойств облаков. Тр. ГГО, вып. 46, 1955.
8. Шифрин К. С. Перенос тепловой радиации. Тр. ГГО, вып. 46, 1955.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА В ОБЛАЧНОЙ АТМОСФЕРЕ

Выведены формулы для расчета эффективного излучения границ облачного слоя. Получены выражения для интегрального альбеда облаков и обобщенной функции пропускания облачным слоем длинноволновой радиации атмосферы.

В задачах теории климата, прогноза погоды и в особенности прогноза облачности важное значение имеет взаимодействие свободной атмосферы и облаков. Значительная роль в этой взаимосвязи принадлежит лучистому теплообмену между облаком и свободной атмосферой, обусловленному длинноволновой радиацией. Рассмотрение этого вопроса и составляет цель настоящей работы. При этом облачная атмосфера предполагается состоящей из плоско-параллельных слоев бесконечной протяженности.

1. Перенос радиации в подоблачной и надоблачной атмосфере

Если пренебречь рассеянием радиации на молекулах, то уравнения переноса имеют следующий вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_{\lambda, \theta}^{\uparrow}}{dm} \cos \theta &= k (\varepsilon_{\lambda} - J_{\lambda, \theta}^{\uparrow}) \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad dm &= \rho_w f(p) dz, \\ \frac{dJ_{\lambda, \theta}^{\downarrow}}{dm} \cos \theta &= k (J_{\lambda, \theta}^{\downarrow} - \varepsilon_{\lambda}), \end{aligned} \quad (1)$$

где $J_{\lambda}^{\uparrow}$, $J_{\lambda}^{\downarrow}$ — интенсивность радиации, распространяющейся вверх и вниз соответственно, ε_{λ} — интенсивность излучения абсолютно черного тела, ρ_w — плотность водяного пара, $f(p)$ — функция, учитывающая влияние давления на поглощение радиации, p — давление, m — эффективная поглощающая масса, θ — угол между вертикальной осью z и направлением распространения луча, k_{λ} — массовый коэффициент поглощения.

Обычно при наличии облака система (1) решается при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} J_{\lambda, \theta}^{\uparrow}(0) &= \delta_{\lambda} \varepsilon_{\lambda}(T_0) + (1 - \delta_{\lambda}) J_{\lambda, \theta}^{\downarrow}(0) \quad \text{при } z=0; \quad m=0, \\ J_{\lambda, \theta}^{\downarrow}(m) &= J_{\lambda, \theta}^{\downarrow}(h) + \gamma_{\lambda} J_{\lambda, \theta}^{\uparrow}(m_h) \quad \text{при } z=h; \quad m=m_h, \end{aligned} \quad (2)$$

где h — высота нижней границы облака, $I_{\lambda,0}$ — интенсивность радиации, выходящей из облака, δ_λ — излучательная способность земли, γ_λ — альбеда облака для луча с длиной волны λ .

Условия (2) означают, что земная поверхность и облако отражают радиацию зеркально, что в общем случае не имеет места. Более правильно ставить граничные условия для потоков:

$$\begin{aligned} B(0) &= \delta_0 E(T_0) + \gamma_0 A(0) \quad \text{при } z=0, \quad m=0, \\ A(h) &= \tilde{F}(h) + \gamma_1 B(h) \quad \text{при } z=h, \quad m=m_h. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь:

$$\begin{aligned} B &= 2\pi \int_0^\infty d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\lambda,0}^\uparrow \cos \theta \sin \theta d\theta = \int_0^\infty B_\lambda d\lambda, \\ A &= 2\pi \int_0^\infty d\lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\lambda,0}^\downarrow \cos \theta \sin \theta d\theta = \int_0^\infty A_\lambda d\lambda, \\ E(T) &= \int_0^\infty E_\lambda d\lambda = \int_0^\infty \pi \varepsilon_\lambda d\lambda = \sigma T^4, \end{aligned} \quad (4)$$

$\tilde{F}(h)$ — поток радиации с нижней границы облака, δ_0 — показатель «серости» земной поверхности, $\gamma_0(\gamma_1)$ — альбеда земной поверхности (облака) по отношению к атмосферной радиации.

Так как интегральное альбеда определяется соотношением

$$\gamma = \frac{\int_0^\infty \gamma_\lambda F_\lambda d\lambda}{\int_0^\infty F_\lambda d\lambda}, \quad \text{то оно зависит не только от свойств отражающей по-}$$

верхности, но и от спектрального состава падающего излучения и, следовательно, разное для черного излучения и атмосферного.

При решении уравнения (1) с граничными условиями (3) возникают трудности в определении постоянных интегрирования, поскольку последние зависят от λ и θ . Воспользовавшись тем, что диффузность излучения можно приближенно учесть простым увеличением пути в $\beta = 1,66$ раз [3], вместо (1) можно рассматривать следующую систему:

$$\begin{aligned} \frac{dB_\lambda}{dm} &= \beta k_\lambda (E_\lambda - B_\lambda), \\ \frac{dA_\lambda}{dm} &= \beta k_\lambda (A_\lambda - E_\lambda). \end{aligned} \quad (5)$$

Решение уравнений (5) известно:

$$\begin{aligned} B_\lambda(m) &= c_\lambda e^{-k_\lambda \beta m} + \int_0^m \beta k_\lambda E_\lambda(x) e^{-k_\lambda \beta(m-x)} dx, \\ A_\lambda(m) &= \tilde{c}_\lambda e^{-k_\lambda \beta(m_h-m)} + \int_m^{m_h} \beta k_\lambda E_\lambda(x) e^{-k_\lambda \beta(x-m)} dx. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя (6) в (4) получим:

$$B(m) = \int_0^{\infty} c_{\lambda} e^{-k_{\lambda} \beta m} d\lambda + \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^m \beta k_{\lambda} E_{\lambda}(x) e^{-k_{\lambda} \beta (m-x)} dx,$$

$$A(m) = \int_0^{\infty} \tilde{c}_{\lambda} e^{-k_{\lambda} \beta (m_h - m)} d\lambda + \int_0^{\infty} d\lambda \int_m^{m_h} \beta k_{\lambda} E_{\lambda}(x) e^{-k_{\lambda} \beta (x-m)} dx. \quad (7)$$

Переменные λ и m независимы друг от друга и, следовательно, порядок интегрирования произвольный. Постоянные интегрирования c_{λ} и $\tilde{c}_{\lambda}$ определим из граничных условий (3). Не останавливаясь на простых выкладках, напомним сразу результат:

$$c_{\lambda} = \frac{\delta_0 E_{\lambda}(T_0) + \gamma_0 \tilde{F}_{\lambda}(m_h) e^{-k_{\lambda} \beta m_h} + \gamma_0 \int_0^{m_h} \beta k_{\lambda} E_{\lambda}(x) e^{-k_{\lambda} \beta x} dx + \gamma_0 \gamma_1 \int_0^{m_h} \beta k_{\lambda} E_{\lambda}(x) e^{-k_{\lambda} \beta (2m_h - x)} dx}{1 - \gamma_0 \gamma_1 e^{-2k_{\lambda} \beta m_h}},$$

$$\tilde{c}_{\lambda} = \frac{\tilde{F}_{\lambda}(m_h) + \delta_0 \gamma_1 E_{\lambda}(T_0) e^{-k_{\lambda} \beta m_h} + \gamma_1 \int_0^{m_h} \beta k_{\lambda} E_{\lambda}(x) e^{-k_{\lambda} \beta (m_h - x)} dx + \gamma_0 \gamma_1 \int_0^{m_h} \beta k_{\lambda} E_{\lambda}(x) e^{-k_{\lambda} \beta (x + m_h)} dx}{1 - \gamma_0 \gamma_1 e^{-2k_{\lambda} \beta m_h}}. \quad (8)$$

В знаменатель формул (8) входит член $\gamma_0 \gamma_1 e^{-2k_{\lambda} \beta m_h} \ll 1$. Следовательно, мы можем его отбросить. Физически это означает пренебрежение дважды отраженной радиацией земли и облака, а также отражениями более высоких порядков. В числителе формул (8) также можно отбросить последние члены, так как они много меньше первых, что означает пренебрежение дважды отраженной (от земли и облака) радиацией атмосферы. Подставляя c_{λ} и $\tilde{c}_{\lambda}$ после указанных упрощений в (7), получим следующие выражения для потоков радиации:

$$B(m) = \delta_0 \int_0^{\infty} E_{\lambda}(T_0) e^{-k_{\lambda} \beta m} d\lambda + \gamma_0 \int_0^{\infty} \tilde{F}_{\lambda}(m_h) e^{-k_{\lambda} \beta (m_h + m)} d\lambda +$$

$$+ \gamma_0 \int_0^{m_h} dx \int_0^{\infty} \beta k_{\lambda} E_{\lambda}(x) e^{-k_{\lambda} \beta (x+m)} d\lambda + \int_0^m dx \int_0^{\infty} \beta k_{\lambda} E_{\lambda}(x) e^{-k_{\lambda} \beta (m-x)} d\lambda,$$

$$A(m) = \int_0^{\infty} F_{\lambda}(m_h) e^{-k_{\lambda} \beta (m_h - m)} d\lambda + \delta_0 \gamma_1 \int_0^{\infty} E_{\lambda}(T_0) e^{-k_{\lambda} \beta (2m_h - m)} d\lambda +$$

$$+ \gamma_1 \int_0^{m_h} dx \int_0^{\infty} \beta k_{\lambda} E_{\lambda}(x) e^{-k_{\lambda} \beta [(m_h - x) + (m_h - m)]} d\lambda +$$

$$+ \int_m^{m_h} dx \int_0^{\infty} \beta k_{\lambda} E_{\lambda}(x) e^{-k_{\lambda} \beta (x-m)} d\lambda. \quad (9)$$

По определению [1] функция пропускания для монохроматической направленной радиации $\bar{D}_\lambda(y) = e^{-k_\lambda y}$. Учитывая эффект диффузности увеличением пути, проходимого радиацией, в β раз, получим функцию пропускания для монохроматического потока в таком виде:

$$D_\lambda(y) \approx e^{-k_\lambda \beta y}. \quad (10)$$

Функция пропускания для интегрального потока радиации определяется как

$$D(y) = \int_0^\infty \frac{E_\lambda}{E} D_\lambda(y) d\lambda. \quad (11)$$

Принимая во внимание формулы (10) и (11), получим из (9) выражения для интегральных потоков радиации в подоблачной атмосфере:

$$B(m) = \delta_0 E(T_0) D(m) - \int_0^m E(x) D'(m-x) dx + \\ + \gamma_0 \left\{ \tilde{F}(h) D_h(m_h + m) - \int_0^{m_h} E(x) D'(m+x) dx \right\}, \quad (12)$$

$$A(m) = \tilde{F}(h) D_h(m_h - m) - \int_m^{m_h} E(x) D'(x-m) dx + \\ + \gamma_1 \left\{ \delta_0 E(T_0) D[m_h + (m_h - m)] - \int_0^{m_h} E(x) D'[(m_h - x) + \right. \\ \left. + (m_h - m)] dx \right\}, \quad (13)$$

$$F(m) = B(m) - A(m) = \delta_0 E(T_0) \{ D(m) - \gamma_1 D[m_h + (m_h - m)] \} - \\ - \tilde{F}(h) \{ D_h(m_h - m) - \gamma_0 D_h(m_h + m) \} + \int_0^{m_h} E(x) D_x'(|m-x|) dx + \\ + \int_0^{m_h} E(x) \{ \gamma_1 D'[2m_h - (m+x)] - \gamma_0 D'(m+x) \} dx. \quad (14)$$

Здесь

$$D_h(y) = \int_0^\infty \frac{\tilde{F}_\lambda(h)}{\tilde{F}(h)} D_h(y) d\lambda \quad (15)$$

есть интегральная функция пропускания для облачного излучения.

Для получения потоков радиации в атмосфере над облаком надо систему (5) решать при следующих граничных условиях:

$$B(0) = \tilde{F}(H) + \gamma_2 A(0) \quad \text{при } z = H, \quad u = 0, \\ A(U) = 0 \quad \text{при } z = \infty, \quad u = U, \quad (3a)$$

где H — высота верхней границы облака, $\tilde{F}(H)$ — поток радиации с верхней границы облака, γ_2 — альбедо облака ($\gamma_2 \neq \gamma_1$, так как различен спектральный состав радиации, приходящей к нижней и верхней границам облака).

Отсчет поглощающих масс следует начинать от верхней границы облака, т. е.

$$u = \int_H^z \rho_w f(p) dz, \quad U = \int_H^\infty \rho_w f(p) dz.$$

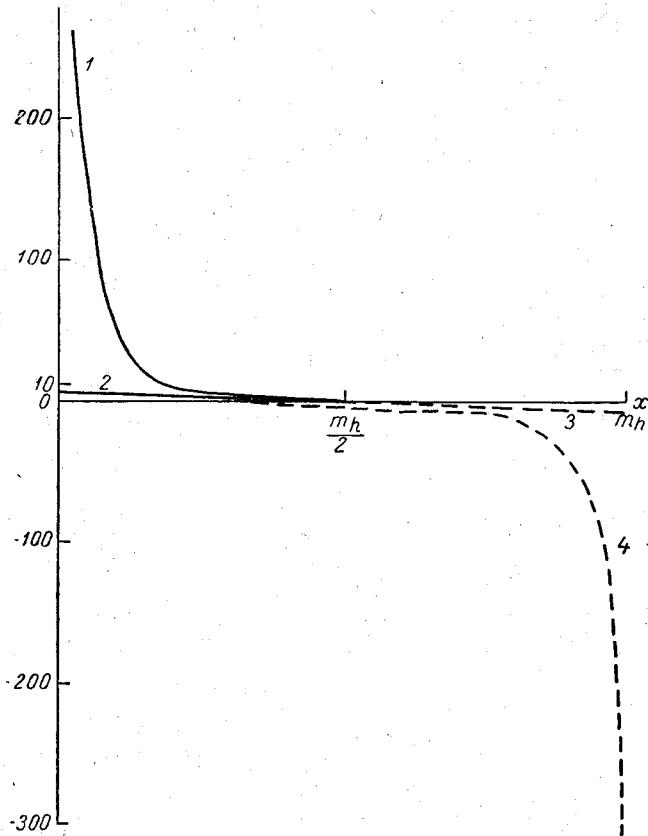


Рис. 1. Поведение ядра интеграла в последнем члене формулы (14).

1) $m=0$; 2) $m=\frac{m_h}{4}$; 3) $m=\frac{3}{4} m_h$; 4) $m=m_h$; (значения производной от функции пропускания брались из [10]).

Решение системы (5) с условиями (3а) дает следующие выражения для потоков радиации, распространяющихся в надоблачной атмосфере:

$$B(u) = \tilde{F}(H) D_h(u) - \int_0^u E(x) D'(u-x) dx - \gamma_2 \int_0^u E(x) D'(u+x) dx, \quad (12a)$$

$$A(u) = - \int_u^U E(x) D'(x-u) dx \quad (13a)$$

$$F(u) = \tilde{F}(H) D_h(u) + \int_0^u E(x) D'_x(|u-x|) dx - \gamma_2 \int_0^u E(x) D'(u+x) dx. \quad (14a)$$

Рассмотрим подробнее последний член формулы (14). На рис. 1

представлен вид ядра при $\gamma_1 = \gamma_0$. Это предположение не умаляет общности выводов, так как и при $\gamma_1 \neq \gamma_0$ вид кривых сохранится. Видим, что значения последнего члена очень быстро уменьшаются с удалением от границ слоя, а при $m=0$ и m_h ядро интеграла имеет ярко выраженный экстремум. Эти свойства последнего члена объясняются тем, что основной вклад в излучение атмосферы составляют длины волн, хорошо поглощаемые в атмосфере, и поэтому отраженная радиация затухает на значительно более коротком расстоянии, чем излучение «серого» или «черного» тела. Учитывать член

$$\Delta F = \int_0^{m_h} E(x) \{ \gamma_1 D' [2m_h - (m+x)] - \gamma_0 D' (m+x) \} dx$$

имеет смысл лишь непосредственно вблизи границ, а внутри слоя им можно пренебречь.

Расчет по формулам (12—14) и (12а—14а) можно производить с помощью обычных радиационных диаграмм или вычислительных машин. Необходимо помнить, что, если облако излучает не как «серое» или «черное» тело, то $D_h(u) \neq D(u)$ и $D_h(u)$ надо вычислять по формуле (15).

Дифференцируя (14) и (14а) по массе, получим формулы для притока тепла в подоблачной атмосфере

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dm} = & \delta_0 E(T_0) \{ D'(m) + \gamma_1 D' [m_h + (m_h - m)] \} + \tilde{F}(h) \{ D_h'(m_h - m) + \\ & + \gamma_0 D_h'(m_h + m) \} - 2E(T_m) D'(0) - \int_0^{m_h} E(x) D''(|m-x|) dx - \\ & - \int_0^{m_h} E(x) \{ \gamma_1 D'' [2m_h - (m+x)] + \gamma_0 D'' (m+x) \} dx = \\ & = E(T_0) \{ (1 - \delta_0 - \gamma_0) D'(m) - \gamma_1 (1 - \delta_0) D'(2m_h - m) \} - \\ & - E(T_h) \{ (1 - \gamma_1) D'(m_h - m) + \gamma_0 D'(m_h + m) \} + \tilde{F}(h) \{ D_h'(m_h - m) + \\ & + \gamma_0 D_h'(m_h + m) \} + \int_0^{m_h} E'(x) D_x'(|m-x|) dx + \\ & + \int_0^{m_h} E'(x) \{ \gamma_1 D' [2m_h - (m+x)] - \gamma_0 D' (m+x) \} dx \end{aligned} \quad (16)$$

и в надоблачной

$$\frac{dF}{du} = \tilde{F}(H) D_h'(u) - \int_0^u E(x) D''(|u-x|) dx - \gamma_2 \int_0^u E(x) D''(u+x) dx. \quad (16a)$$

Если земля и облако излучают как черные тела, то $\delta=1$, $\gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=0$

$$\tilde{F}(h) = E(T_h), \quad \tilde{F}(H) = E(T_H), \quad D_h(y) = D(y).$$

В этом случае выражения в фигурных скобках в формулах (12, 13)

и последний член формул (12а, 14а, 16а) равны нулю, а (14) и (16) принимают следующий простой вид:

$$F(m) = E(T_0) D(m) - E(T_h) D(m_h - m) + \int_0^{m_h} E(x) D'_x(|m - x|) dx,$$

$$\frac{dF}{dm} = E(T_0) D'(m) + E(T_h) D'(m_h - m) - 2E(T_m) D'(0) -$$

$$- \int_0^{m_h} E(x) D''(m - x) dx = \int_0^{m_h} \frac{dE}{dx} D'_x(|m - x|) dx. \quad (17)$$

В некоторых случаях бывает удобно иметь выражение для потока радиации не в интегральной, а в дифференциальной форме, в частности при отсутствии достаточной информации о распределении температуры по высоте или для приближенных оценок.

Используя то обстоятельство, что в полученных выше формулах подынтегральные выражения, точнее — множители при $E(x)$, имеют резкий экстремум на некотором уровне, мы можем получить приближенные формулы, подставляя в интегралы разложение $E(x)$ в ряд Тейлора в окрестности этого уровня и обрывая затем получившийся ряд на некотором члене. Чем более оптически плотна атмосфера, тем меньше членов ряда надо оставить. Прделав описанную процедуру, получим, например, следующие выражения для потока радиации на земной поверхности, на нижней и верхней границах облака:

$$F(z=0) = E(T_0) f_0(m_h) - \left. \frac{dE}{dm} \right|_{m=0} f_1(m_h) - \left. \frac{d^2E}{dm^2} \right|_{m=0} f_2(m_h) - \dots$$

$$\dots - (1 - \gamma_0) D_h(m_h) \tilde{F}(h), \quad (18)$$

$$F(z=h) = \delta_0(1 - \gamma_1) D(m_h) E(T_0) - \tilde{F}(h) [1 - \gamma_0 D_h(2m_h)] +$$

$$+ E(T_h) \tilde{f}_0(m_h) - E'(T_h) \tilde{f}(m_h) - E''(T_h) \tilde{f}_2(m_h), \quad (19)$$

$$F(z=H) = \tilde{F}(H) - (1 - \gamma_2) \left\{ E(T_H) [1 - D(U)] + \right.$$

$$\left. + \left. \frac{dE}{du} \right|_{u=0} N_1(U) + \left. \frac{d^2E}{du^2} \right|_{u=0} N_2(U) + \dots \right\}. \quad (20)$$

Здесь

$$f_i(m_h) = (1 - \gamma_0) N_i(m_h) + \gamma_1 \chi_i(m_h) \quad i \geq 1,$$

$$f_0 = [1 - (\gamma_0 + \gamma_1)] D(m_h) + \gamma_1 (1 - \delta_0) D(2m_h) - [1 - (\delta_0 + \gamma_0)],$$

$$\tilde{f}_i(m_h) = (-1)^{i+1} [(1 - \gamma_1) N_i + \gamma_0 \chi_i(m_h)] \quad i \geq 1,$$

$$\tilde{f}_0 = (1 - \gamma_1) - [1 - (\gamma_0 + \gamma_1)] D(m_h) - \gamma_0 D(2m_h) \quad (21)$$

$$N_i(m_h) = -\frac{1}{i!} \int_0^{m_h} y^i D'(y) dy, \quad (22)$$

$$\chi_i(m_h) = -\frac{1}{i!} \int_0^{m_h} y^i D'(2m_h - y) dy.$$

В случае «черных» границ:

$$F(z=0) = [E(T_0) - E(T_h)] D(m_h) - E'(T_0) N_1(m_h) -$$

$$- E''(T_0) N_2(m_h) - \dots, \quad (18a)$$

$$F(z=h) = [E(T_0) - E(T_h)] D(m_h) - \\ - E'(T_h) N_1(m_h) + E''(T_h) N_2(m_h) - \dots, \quad (19a)$$

$$F(z=H) = E(T_H) D(U) - \\ - [E'(T_H) N_1(U) + E''(T_H) N_2(U) + \dots], \quad (20a)$$

Коэффициенты при производных от $E = \sigma T^4$ по поглощающей массе в формулах (18—20) и (18a—20a) быстро убывают с ростом номера производной. В качестве примера на рис. 2 приведен ход коэффициентов $N_i(m_h)$. Оценки показали, что в нижнем слое, толщиной 1—2 км, уже член со второй производной играет роль малой поправки. Для больших высот оценки не производились, но ясно, что роль второй и последующих производных будет возрастать с уменьшением оптической плотности атмосферы. Для вычисления коэффициентов f_i и $\tilde{f}_i$ надо знать альбедо земной поверхности и облака.

В общем случае δ_0 и γ_0 зависят от подстилающей поверхности, кроме того, γ_0 зависит от спектрального состава падающей радиации. Следовательно, γ_0 будет разное в случаях облачной и безоблачной атмосферы и должно зависеть также от высоты облаков и распределения температуры. При низкой мощной облачности можно приближенно принять $\gamma_0 = 1 - \delta_0$. Альбедо облаков (γ_1, γ_2) зависит как от отражательных свойств облака, так и от спектрального состава падающей на него радиации. Этот вопрос будет подробно разобран ниже.

2. Перенос радиации в облаке

При наличии процессов поглощения и рассеяния радиации уравнение переноса может быть записано следующим образом [4]:

$$\frac{dJ_{\lambda, \theta}^{\uparrow}}{d\tau} \cos \theta = \alpha_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} - (\alpha_{\lambda} + \sigma_{\lambda}) J_{\lambda, \theta}^{\uparrow} + \int_{\Delta} J_{\lambda, \theta'}^{\uparrow} \gamma_{1, \lambda}(\theta', \theta) \frac{d\omega'}{4\pi} + \\ + \int_{\Delta} J_{\lambda, \theta'}^{\downarrow} \gamma_{2, \lambda}(\theta', \theta) \frac{d\omega'}{4\pi}, \\ - \frac{dJ_{\lambda, \theta}^{\downarrow}}{d\tau} \cos \theta = \alpha_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} - (\alpha_{\lambda} + \sigma_{\lambda}) J_{\lambda, \theta}^{\downarrow} + \int_{\Delta} J_{\lambda, \theta'}^{\downarrow} \gamma_{1, \lambda}(\theta', \theta) \frac{d\omega'}{4\pi} + \\ + \int_{\Delta} J_{\lambda, \theta'}^{\uparrow} \gamma_{2, \lambda}(\theta', \theta) \frac{d\omega'}{4\pi}. \quad (23)$$

Здесь $\tau = \int_h^z \delta(z) dz$, $\tau_H = \int_h^H \delta(z) dz$; а α_{λ} , σ_{λ} и γ_{λ} — коэффициенты поглощения, рассеяния и индикатриса, отнесенные к единице массы; $\gamma_{1, \lambda}$, $\gamma_{2, \lambda}$ — доля радиации, рассеянной в верхнюю полусферу из радиации того же и противоположного направления соответственно, h , H — высота нижней и верхней границ облака соответственно, δ — водность облака.

Поглощение и излучение радиации обусловлено водяным паром и каплями воды. Рассеяние радиации происходит на каплях воды.

Точное решение уравнений (23) — весьма трудная проблема из-за сложного вида индикатрис. Поэтому, как правило, их решают различными приближенными методами. Наиболее распространенный способ — введение средних по полусфере интенсивностей и индикатрис. Методике

и точности приближенных решений уравнений типа (23) посвящена обширная литература, и здесь мы этого вопроса касаться не будем.

В данной работе для решения уравнения (23) мы воспользуемся концепцией К. С. Шифрина, заключающейся в том, что при рассмотрении тепловых эффектов реальную индикатрису рассеяния облачной капли можно заменить линейной [5].

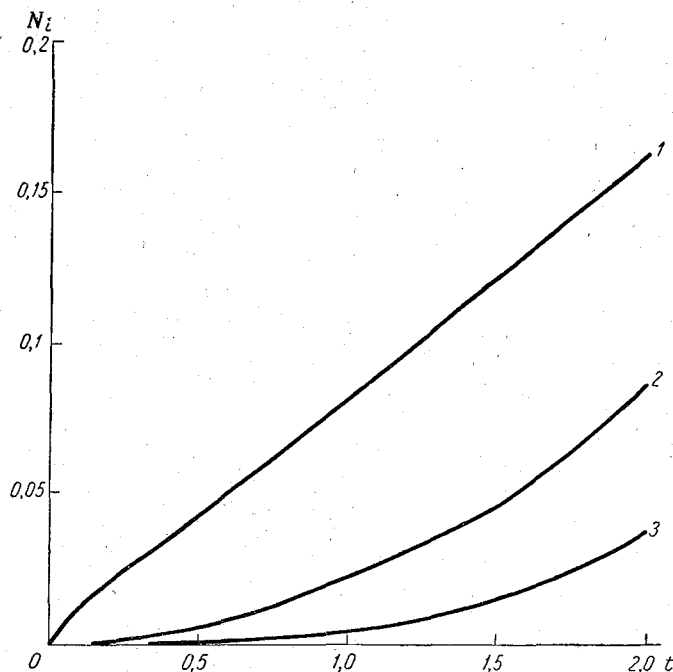


Рис. 2. Значения функций $N_i(t)$.

При линейной индикатрисе рассеяние происходит лишь вдоль луча. В этом случае $\sigma = \sigma_1 + \alpha'$,

$$\gamma_1(\theta', \theta) \frac{d\omega'}{4\pi} = \begin{cases} \sigma_1 & \text{при } \theta' = \theta \\ 0 & \text{при } \theta' \neq \theta \end{cases}$$

$$\gamma_2(\theta', \theta) \frac{d\omega'}{4\pi} = \begin{cases} \alpha' & \text{при } \theta' = 0 \\ 0 & \text{при } \theta' \neq 0 \end{cases}$$

где σ_1 — коэффициент рассеяния вперед, α' — коэффициент отражения.

Уравнения переноса радиации в мутной среде приобретают следующий простой вид:

$$\frac{dJ_{\lambda, \theta}^{\downarrow}}{d\tau} \cos \theta = \alpha_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} - (\alpha_{\lambda} + \alpha'_{\lambda}) J_{\lambda, \theta}^{\uparrow} + \alpha'_{\lambda} J_{\lambda, \theta}^{\downarrow}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{dJ_{\lambda, \theta}^{\uparrow}}{d\tau} \cos \theta = \alpha_{\lambda} \varepsilon_{\lambda} - (\alpha_{\lambda} + \alpha'_{\lambda}) J_{\lambda, \theta}^{\downarrow} + \alpha'_{\lambda} J_{\lambda, \theta}^{\uparrow} \quad (24)$$

Здесь встает тот же вопрос, что в § 1: решать уравнение для интенсивностей с приближенными граничными условиями или построить приближенное уравнение переноса радиации для потоков и решать его при точных граничных условиях. Выбираем второй путь, так как нас в основном интересуют процессы теплообмена вблизи границ.

Для того чтобы из (24) получить уравнения для потоков радиации, мы попытались учесть диффузность распространения радиации простым увеличением пути в β раз, как это обычно принято делать при наличии одного поглощения. Эта попытка оказалась весьма удачной. Подробно данный вопрос рассмотрен в конце § 3.

Исходя из вышеизложенного, мы будем решать следующие уравнения переноса радиации:

$$\begin{aligned}\frac{dF_{\lambda}^{\uparrow}}{\beta d\tau} &= \alpha_{\lambda} E_{\lambda} - (\alpha_{\lambda} + \alpha'_{\lambda}) F_{\lambda}^{\uparrow} + \alpha'_{\lambda} F_{\lambda}^{\downarrow}, \\ -\frac{dF_{\lambda}^{\downarrow}}{\beta d\tau} &= \alpha_{\lambda} E_{\lambda} - (\alpha_{\lambda} + \alpha'_{\lambda}) F_{\lambda}^{\downarrow} + \alpha'_{\lambda} F_{\lambda}^{\uparrow}\end{aligned}\quad (25)$$

с такими граничными условиями

$$\begin{aligned}F_{\lambda}^{\uparrow} &= B_{\lambda}(h) \quad \text{при } z=h, \quad \tau=0, \\ F_{\lambda}^{\downarrow} &= A_{\lambda}(H) \quad \text{при } z=H, \quad \tau=\tau_H,\end{aligned}\quad (26)$$

где $F_{\lambda}^{\uparrow}$, $F_{\lambda}^{\downarrow}$ — монохроматические потоки радиации, распространяющейся соответственно вверх и вниз внутри облака.

Решение уравнений (25) при $\beta=1$ и линейном ходе $E_{\lambda}(z)$ подробно изложено К. С. Шифриным [5]. Следует заметить, что β существенно отличается от единицы.

Поскольку методика решения системы (25) и при произвольной зависимости $E_{\lambda}(z)$ такая же, как в [5], то мы не будем на ней останавливаться и сразу напишем результат:

$$\begin{aligned}F_{\lambda}^{\uparrow}(\tau) &= \frac{\tau + \alpha}{2} \int_0^{\tau} \beta e^{-\alpha\beta(\tau-u)} E_{\lambda}(u) du + \\ &+ \frac{\tau - \alpha}{2} \int_{\tau}^{\tau_H} \beta e^{-\alpha\beta(u-\tau)} E_{\lambda}(u) du + \frac{\tau - \alpha}{2\Delta} \int_0^{\tau_H} \beta [\Gamma^2 e^{-\alpha\beta(2\tau_H - \tau + u)} - \\ &- \Gamma e^{-\alpha\beta(2\tau_H - \tau - u)} - e^{-\alpha\beta(\tau + u)} + \Gamma e^{-\alpha\beta(2\tau_H + \tau - u)}] \times \\ &\times E_{\lambda}(u) du + B_{\lambda}(h) P_{\lambda}(\tau) + A_{\lambda}(H) \gamma_{\lambda}(\tau),\end{aligned}\quad (27)$$

$$\begin{aligned}F_{\lambda}^{\downarrow}(\tau) &= \frac{\tau - \alpha}{2} \int_0^{\tau} \beta e^{-\alpha\beta(\tau-u)} E_{\lambda}(u) du + \frac{\tau + \alpha}{2} \int_{\tau}^{\tau_H} \beta e^{-\alpha\beta(u-\tau)} E_{\lambda}(u) du + \\ &+ \frac{\tau - \alpha}{2\Delta} \int_0^{\tau_H} \beta [\Gamma^2 e^{-\alpha\beta(2\tau_H + \tau - u)} + \Gamma e^{-\alpha\beta(2\tau_H - \tau + u)} - \Gamma e^{-\alpha\beta(\tau + u)} - \\ &- e^{-\alpha\beta(2\tau_H - \tau - u)}] E_{\lambda}(u) du + B_{\lambda}(h) \gamma_{\lambda}(\tau_H - \tau) + A_{\lambda}(H) P_{\lambda}(\tau_H - \tau).\end{aligned}\quad (28)$$

Из (27) и (28) для монохроматических потоков на верхней и нижней границах облака получим:

$$\begin{aligned}E_{\lambda}^{\uparrow}(\tau_H) &= \int_0^{\tau_H} \left[\frac{dP_{\lambda}(\tau_H - u)}{du} - \frac{d\gamma_{\lambda}(u)}{du} \right] E_{\lambda}(u) du + \\ &+ B_{\lambda}(h) P_{\lambda}(\tau_H) + A_{\lambda}(H) \gamma_{\lambda}(\tau_H),\end{aligned}\quad (29)$$

$$\begin{aligned}F_{\lambda}^{\downarrow}(0) &= \int_0^{\tau_H} \left[\frac{d\gamma_{\lambda}(\tau_H - u)}{du} - \frac{dP_{\lambda}(u)}{du} \right] E_{\lambda}(u) du + \\ &+ B_{\lambda}(h) \gamma_{\lambda}(\tau_H) + A_{\lambda}(H) P_{\lambda}(\tau_H).\end{aligned}\quad (30)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\gamma_{\lambda}(x) = \Gamma \frac{e^{-\kappa_{\lambda}(\tau_H - x)} - e^{-\kappa_{\lambda}(\tau_H + x)}}{1 - \Gamma^2 e^{-2\kappa_{\lambda}\tau_H}}, \quad (31)$$

$$P_{\lambda}(x) = \frac{e^{-\kappa_{\lambda}x} - \Gamma^2 e^{-\kappa_{\lambda}(2\tau_H - x)}}{1 - \Gamma^2 e^{-2\kappa_{\lambda}\tau_H}}, \quad (32)$$

$$\Gamma_{\lambda} = \frac{\kappa_{\lambda} - \alpha_{\lambda}}{\kappa_{\lambda} + \alpha_{\lambda}}, \quad \kappa_{\lambda}^2 = \alpha_{\lambda}(\alpha_{\lambda} + 2\alpha'_{\lambda}). \quad (33)$$

Согласно физическому смыслу целесообразно назвать $\gamma_{\lambda}(x)$ функцией отражения и $P_{\lambda}(x)$ — обобщенной функцией пропускания (этих названий в литературе не встречалось). При отсутствии отражения

$P_{\lambda}(x) = e^{-\alpha_{\lambda}x} = D_{\lambda}(x)$, т. е. обычной функции пропускания.

Если в (31) положить $x = \tau_H$, то получим формулу для альбедо облака

$$\gamma_{\lambda}(\tau_H) = \Gamma \frac{1 - e^{-2\kappa_{\lambda}\tau_H}}{1 - \Gamma^2 e^{-2\kappa_{\lambda}\tau_H}}. \quad (34)$$

В формулах (27) — (32) мы опустили значок λ при Γ , κ , α , чтобы не загромождать текст.

Если в (31) и (32) положить $\beta = 1$, то получим функции отражения и пропускания для направленной радиации.

Точное выражение для диффузной обобщенной функции пропускания будет

$$P_{\lambda}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\kappa_{\lambda} \frac{x}{\cos \theta}} - \Gamma^2 e^{-\kappa_{\lambda} \frac{2\tau_H - x}{\cos \theta}}}{1 - \Gamma^2 e^{-\frac{2\kappa_{\lambda}\tau_H}{\cos \theta}}} \sin 2\theta d\theta. \quad (35)$$

Аналогично

$$\gamma_{\lambda}(x) = \Gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\kappa_{\lambda} \frac{\tau_H - x}{\cos \theta}} - e^{-\kappa_{\lambda} \frac{\tau_H + x}{\cos \theta}}}{1 - \Gamma^2 e^{-\frac{2\kappa_{\lambda}\tau_H}{\cos \theta}}} \sin 2\theta d\theta.$$

Для получения интегральных потоков радиации, выходящих из облака, надо проинтегрировать по λ выражения (29) и (30), что даст:

$$F^{\uparrow}(\tau_H) = - \int_0^{\tau_H} [P'(\tau_H - u) + \gamma'(u)] E(u) du + A(H) \gamma_2(\tau_H) + B(h) P_1(\tau_H), \quad (36)$$

$$F^{\downarrow}(0) = - \int_0^{\tau} [P'(u) + \gamma'(\tau_H - u)] E(u) du + B(h) \gamma_1(\tau_H) + A(H) P_2(\tau_H). \quad (37)$$

В формулах (36) и (37) первый член — собственное излучение облака, второй — отраженная и третий — пропущенная облаком радиация.

Интегральные функции отражения и пропускания определены следующим образом:

$$P(x) = \int_0^{\infty} \frac{E_{\lambda}}{E} P_{\lambda}(x) d\lambda; \quad \gamma(x) = \int_0^{\infty} \frac{E_{\lambda}}{E} \gamma_{\lambda}(x) d\lambda. \quad (38)$$

$$P_1(x) = \int_0^{\infty} \frac{B_{\lambda}(h)}{B(h)} P_{\lambda}(x) d\lambda; \quad \gamma_1(x) = \int_0^{\infty} \frac{B_{\lambda}(h)}{B(h)} \gamma_{\lambda}(x) d\lambda. \quad (39)$$

$$P_2(x) = \int_0^{\infty} \frac{A_{\lambda}(H)}{A(H)} P_{\lambda}(x) d\lambda; \quad \gamma_2(x) = \int_0^{\infty} \frac{A_{\lambda}(H)}{A(H)} \gamma_{\lambda}(x) d\lambda. \quad (40)$$

Из формул (38)–(40) видно, что интегральное альbedo нижней и верхней границ облака различны. Различается также «свободный путь пробега» для интегральной радиации, поступающей в облако сверху и снизу.

Входящие в формулы (36) и (37) функции отражения и пропускания зависят как от методики решения уравнения (23), так и от поглощательных и рассеивающих свойств облака и от распределения капель по размерам. Поэтому лучше всего было бы использовать для практических расчетов экспериментально определенные функции отражения и пропускания. К сожалению, мы не имеем достаточного количества такого рода данных.

В формулах (36) и (37) можно избавиться от интеграла таким же путем, как в § 1, поскольку выражение в квадратных скобках под интегралом имеет резкий экстремум. Проведем соответствующие выкладки, получим:

$$F^{\dagger}(\tau_H) = E(T_H) \Phi_0(\tau_H) - E'(T_H) \Phi_1(\tau_H) + E''(T_H) \Phi_2(\tau_H) - E'''(T_H) \Phi_3(\tau_H) + \dots + B(h) P_1(\tau_H) + A(H) \gamma_2(\tau_H), \quad (41)$$

$$F^{\dagger}(0) = E(T_h) \Phi_0(\tau_H) + E'(T_h) \Phi_1(\tau_H) + E''(T_h) \Phi_2(\tau_H) + \dots + B(h) \gamma_1(\tau_H) + A(H) P_2(\tau_H), \quad (42)$$

где

$$\Phi_i(\tau_H) = -\frac{1}{i!} \int_0^{\tau_H} u^i [P'(u) + \gamma'(\tau_H - u)] du. \quad (43)$$

Так как облако оптически более плотная среда, чем свободная атмосфера, то в полученных формулах уже член с первой производной играет роль поправки.

Из формул (41), (42) легко получить оценку степени черноты облаков. Для этого в производных $\frac{d^i E}{d\tau^i}$ выделим E в виде множителя

$$\frac{dE}{d\tau} = \frac{4}{T} \frac{dT}{d\tau} E; \quad \frac{d^2 E}{d\tau^2} = \frac{4E}{T} \left[\frac{3}{T} \left(\frac{dT}{d\tau} \right)^2 + \frac{d^2 T}{d\tau^2} \right] \text{ и т. д.}$$

После такого преобразования формулы для потоков радиации, выходящей из облака, примут следующий вид:

$$E^{\dagger}(\tau_H) = \widetilde{\Phi} E(T_H) + A(H) \gamma_2(\tau_H) + B(h) P_1(\tau_H), \quad (41a)$$

$$F^\downarrow(0) = \tilde{\Phi} E(T_h) + B(h) \gamma_1(\tau_H) + A(H) P_2(\tau_H), \quad (42a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi} &= \Phi_0(\tau_H) - \frac{4\Phi_1}{T} \frac{dT}{d\tau} \Big|_{z=H-0} + \frac{4\Phi_2}{T} \left[\frac{3}{T} \left(\frac{dT}{d\tau} \right)^2 + \frac{d^2T}{d\tau^2} \right]_{z=H-0} + \dots \\ &\dots + \tilde{\Phi} = \Phi_0(\tau_H) + \frac{4\Phi_1}{T} \frac{dT}{d\tau} \Big|_{z=h+0} + \frac{4\Phi_2}{T} \left[\frac{3}{T} \left(\frac{dT}{d\tau} \right)^2 + \frac{d^2T}{d\tau^2} \right]_{z=h+0} + \dots \end{aligned} \quad (44)$$

Множители $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Phi}$, определяемые формулами (44), характеризуют степень «черноты» собственного излучения облака. Ясно видно, что она несколько отличается для нижней и верхней границ облака, причем верхняя граница может оказаться более «черной», чем нижняя. Численные оценки будут даны в § 4.

3. Вычисление функций отражения и пропускания

Чтобы сосчитать потоки радиации по полученным выше формулам, надо знать $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, P, P_1, P_2$. Для их расчета, как видно из формул (38)–(40), кроме спектральных функций отражения и пропускания, надо знать еще отношения $\frac{E_\lambda}{E}$, $\frac{B_\lambda}{B}$ и $\frac{A_\lambda}{A}$. Проще всего обстоит

дело с $\frac{E_\lambda}{E}$, так как эта величина зависит лишь от температуры, в то время как остальные два отношения зависят еще и от содержания поглощающих субстанций в подоблачной и надоблачной атмосфере.

Для приближенного вычисления последних отношений пренебрежем отраженной радиацией и изменением температуры с высотой. Тогда получим:

а) для радиации, приходящей к облаку сверху,

$$\frac{A_\lambda}{A} \approx \beta_\lambda(U) \frac{E_\lambda}{E}, \quad \text{где} \quad \beta_\lambda(U) = \frac{1 - D_\lambda(U)}{1 - D(U)}, \quad (45)$$

а U — эффективная поглощающая масса всего надоблачного слоя;

б) для радиации, приходящей к облаку снизу,

$$\frac{B_\lambda}{B} \approx \frac{E_\lambda}{E}; \quad (45a)$$

в) для облачного излучения в случае весьма плотного облака, когда

$$P_\lambda(\tau_H) = 0,$$

$$\frac{\tilde{F}_\lambda^{\uparrow, \downarrow}}{\tilde{F}^{\uparrow, \downarrow}} \approx \beta_\lambda^*(\tau_H) \frac{E_\lambda}{E}, \quad \text{где} \quad \beta_\lambda^*(\tau_H) = \frac{1 - \gamma_\lambda(\tau_H)}{1 - \gamma(\tau_H)},$$

если облако пропускает радиацию, то

$$\frac{\tilde{F}_\lambda^\downarrow(0)}{\tilde{F}^\downarrow(0)} \approx \frac{1 - \gamma_\lambda(\tau_H) - P_\lambda(\tau_H) D_\lambda(U)}{1 - \gamma(\tau_H) - P(\tau_H) D(U)} \frac{E_\lambda}{E},$$

$$\frac{\tilde{F}_\lambda^\uparrow(\tau_H)}{\tilde{F}^\uparrow(\tau_H)} \approx \frac{1 - \gamma_\lambda(\tau_H)}{1 - \gamma(\tau_H)} \frac{E_\lambda}{E}.$$

Чтобы вычислить $\beta_\lambda(U)$, надо знать спектральные и интегральную функции пропускания атмосферой «черного» излучения. Имеющиеся данные позволяют получить среднее $\bar{\beta}_{\Delta\lambda}(U)$ для отдельных спектральных участков. Мы воспользовались тем же материалом, который был использован нами для получения $D(U)$.

Поскольку формулы (45) приближенные, то имеет смысл осреднить $\bar{\beta}_{\Delta\lambda}$ по массе, чтобы получить некоторые средние постоянные $\bar{\beta}_{\Delta\lambda}$.

Значения $\bar{\beta}_{\Delta\lambda}$, осредненные по диапазону масс 0,1—3 см, даны в табл. 1, из которой видно, что для большинства участков $\bar{\beta}_{\Delta\lambda}$ заметно отличается от единицы.

Таблица 1

Значения $\bar{\beta}_{\Delta\lambda}$

$\Delta\lambda\mu$	$\bar{\beta}_{\Delta\lambda}$	$\Delta\lambda\mu$	$\bar{\beta}_{\Delta\lambda}$	$\Delta\lambda\mu$	$\bar{\beta}_{\Delta\lambda}$
3—4	0,85	11—12	0,30	24,4—27,0	1,5
4—5	1,15	12—13	0,45	27,0—30,5	1,5
5—6	1,10	13—17	1,20	30,3—34,5	1,5
6—7	1,40	17—18	0,9	34,5—40,0	1,5
7—8	1,30	18—19	1,0	40,0—44,5	1,5
8—9	0,80	19—20	1,1	44,5—50,0	1,5
9—10	0,20	20—22,2	1,3		
10—11	0,25	22,2—24,4	1,4		

Для расчета $\gamma_\lambda(u)$, $P_\lambda(u)$ надо знать коэффициенты отражения α'_λ и поглощения $\alpha_\lambda = k_\lambda^h + k_\lambda^w \frac{\rho_w}{\delta}$, где k_λ^w — коэффициент поглощения водяным паром, k_λ^h — каплями воды.

В практических расчетах мы всегда вынуждены пользоваться средними $k_{\Delta\lambda}$ для некоторого спектрального участка $\Delta\lambda$. При этом мы сталкиваемся с эффектом Форбса — постоянных $k_{\Delta\lambda}$ не существует даже для весьма узких $\Delta\lambda = 0,1 - 1\mu$ (1). В силу указанного обстоятельства встает вопрос об идентичности данных о k_λ^w и k_λ^h , используемых для расчета α_λ . Для капель воды имеются k_λ^h , рассчитанные по теоретическим формулам для данного λ .

Экспериментальных данных, по которым можно было бы оценить и как-то учесть эффект Форбса, нет. Однако так как линии поглощения в спектре воды шире, чем в спектре водяного пара, то эффект Форбса для воды выражен менее резко, чем для водяного пара. Для водяного пара имеется сравнительно большое количество опытных данных по функции пропускания. Теоретические же данные о k_λ^w ограничены и малонадежны. Желательно поэтому таким образом преобразовать полученные в предыдущем параграфе формулы для функций отражения и обобщенного пропускания, чтобы в них входили в явном виде спектральные функции пропускания для водяного пара, а не коэффициенты поглощения.

Используя тот факт, что в рассматриваемом диапазоне длин волн коэффициенты отражения капли значительно меньше коэффициентов поглощения, и пренебрегая членами с Γ_λ^2 в формулах (32) и (34), полу-

чим следующие приближенные формулы для расчета функции пропускания и альбедо облака:

$$P_{\Delta\lambda}(x) = e^{-(k_{\Delta\lambda}^k + \alpha'_{\Delta\lambda})x} D_{\Delta\lambda}(w),$$

$$\gamma_{\Delta\lambda}(x) = \Gamma_{\Delta\lambda} [1 - P_{\Delta\lambda}^2(x)], \quad (46)$$

где $D_{\Delta\lambda}(w)$ — функция пропускания для водяного пара, $w = \frac{\rho_w}{\delta} x$ — количество водяного пара (в см).

Обойтись совсем без коэффициентов поглощения для водяного пара не удалось — они нужны для вычисления $\Gamma_{\Delta\lambda} \approx \frac{\alpha'}{2\alpha + \alpha'}$. Но в этом случае дело облегчается тем, что из (46) можно определить массу водяного пара, для которой надо найти коэффициент поглощения. Так как $\Gamma_{\Delta\lambda} = \lim \gamma_{\Delta\lambda}(x)$ при $P_{\Delta\lambda}^2 \rightarrow 0$, поступили следующим образом: рассчитали $P_{\Delta\lambda}(x)$ по (46); определили то значение w , которое соответствует $P_{\Delta\lambda} = 0,01$; нашли соответствующее $D_{\Delta\lambda}(w)$ и вычислили $k_{\Delta\lambda}^w = -\frac{1}{w} \ln D_{\Delta\lambda}(w)$. Коэффициенты поглощения, округленные до целых чисел (за исключением участка непрерывного поглощения 9—12 μ) для трех значений отношения $\frac{\rho_w}{\delta}$ помещены в табл. 2.

Таблица 2

Эффективные сечения поглощения и отражения

$\Delta\lambda, \mu$	$k_{\Delta\lambda}^w \frac{\text{см}^2}{\text{г}}$			$K_{\Pi}(\rho)$	$K_p'(\rho)$
	4	32,3	200		
3—4	20	5	1	0,79	0,037
4—5	25	6	2	0,53	0,032
5—6	30	8	4	1,05	0,085
6—7	90	30	8	0,94	0,034
7—8	35	10	4	0,42	0,034
8—9	10	3	0,5	0,42	0,048
9—10	0,12	0,12	0,12	0,60	0,034
10—11	0,18	0,18	0,18	0,67	0,010
11—12	0,23	0,23	0,23	1,00	0,011
12—13	0,8	0,6	0,4	1,19	0,021
13—17	1	0,8	0,5	1,35	0,034
17—18	8	3	1	1,41	0,044
18—19	10	4	2	1,42	0,048
19—20	15	8	3	1,43	0,052
20,0—22,2	25	10	5	1,43	0,057
22,2—24,4	40	20	10	1,42	0,067
24,4—27,0	60	30	20	1,40	0,082
27,0—30,3	100	50	35	1,36	0,108
30,3—34,5	130	70	50	1,31	0,136
34,5—40,0	190	120	90	1,21	0,134
40,0—44,5	240	170	140	1,09	0,092
44,5—50,0	450	250	190	0,95	0,069

Коэффициенты поглощения и отражения для капли рассчитываются по следующим формулам: $k_{\lambda}^k = \frac{3}{4r} K_{\Pi}(\rho)$ — для монодисперсного об-

$$\text{лака, } k_{\lambda}^k = \frac{3}{4} \cdot \frac{\int_0^{\infty} f(r) K_{\pi}(\rho) r^2 dr}{\int_0^{\infty} f(r) r^3 dr} \text{ — для полидисперсного.}$$

Формулы для α'_{λ} имеют такой же вид, только вместо $K_{\pi}(\rho)$ надо поставить $K'_{\pi}(\rho)$ (r — радиус капли, $f(r)$ — функция распределения, $K_{\pi}(\rho)$ и $K'_{\pi}(\rho)$ — эффективные сечения поглощения и рассеяния). Значения эффективных сечений мы взяли из табл. 2 работы [8], дополнив участок 18—50 μ приближенными расчетами с использованием кривых $K_{\pi}(\rho)$, $K'_{\pi}(\rho)$, $\eta(\rho)$ из [8] и [7]. Осредненные по участкам K_{π} и K'_{π} для капли радиусом 6,265 μ помещены в табл. 2.

По данным из табл. 1, 2 и формулам (38) — (40), (45), (45а), (46), заменяя интегралы конечными суммами, рассчитали альbedo и обобщенную функцию пропускания для монодисперсного облака с $\frac{\rho_u}{\delta}$ равным 4; 32,3; 200, что соответствует относительному содержа-

нию воды $\frac{\delta}{\rho_u + \delta}$, равному 20; 3; 0,5%.

Распределение энергии в спектре абсолютно черного тела $\frac{E_{\Delta\lambda}}{E}$ взято для 273° К.

В табл. 3 помещены некоторые промежуточные величины, представляющие самостоятельный интерес. Они относятся к случаю с относи-

Таблица 3

Коэффициенты поглощения, отражения и спектральное альbedo для облака с относительным содержанием воды 3% (размерность коэффициентов м²/г)

$\Delta\lambda, \mu$	$\frac{E_{\Delta\lambda}}{E}$	$k_{\Delta\lambda}^k$	$\frac{\rho_w}{\delta} k_{\Delta\lambda}^w$	$\alpha'_{\Delta\lambda}$	$\Gamma_{\Delta\lambda}$
3—4	0,0013	0,0948	0,0162	0,0164	0,069
4—5	0,0053	0,0636	0,0194	0,0158	0,087
5—6	0,0168	0,1257	0,0258	0,0102	0,033
6—7	0,0313	0,1125	0,0969	0,0041	0,010
7—8	0,0466	0,0503	0,0323	0,0041	0,024
8—9	0,0569	0,0503	0,0097	0,0058	0,046
9—10	0,0625	0,0720	0,0003	0,0041	0,028
10—11	0,0644	0,0804	0,0006	0,0012	0,007
11—12	0,0630	0,1200	0,0007	0,0013	0,005
12—13	0,0604	0,1428	0,0019	0,0025	0,009
13—17	0,1992	0,1620	0,0026	0,0041	0,012
17—18	0,0388	0,1692	0,0097	0,0053	0,015
18—19	0,0348	0,1704	0,0129	0,0058	0,016
19—20	0,0313	0,1716	0,0258	0,0062	0,016
20,0—22,2	0,0573	0,1716	0,0323	0,0068	0,016
22,2—24,4	0,0457	0,1704	0,0646	0,0080	0,017
24,4—27,0	0,0424	0,1675	0,0969	0,0098	0,018
27,0—30,3	0,0395	0,1628	0,1615	0,0129	0,020
30,3—34,5	0,0355	0,1568	0,2261	0,0151	0,019
34,5—40,0	0,0304	0,1448	0,3876	0,0160	0,015
40,0—44,5	0,0164	0,1305	0,5491	0,0100	0,007
44,5—50,0	0,0138	0,1137	0,8075	0,0083	0,003

тельным содержанием воды 3% (по литературным источникам для St содержание воды в среднем равно 2,4%, а для Sc — 3,4%).

Полученная зависимость альбедо от массы облака представлена на рис. 3, из которого видно, что альбедо верхней границы облака больше, чем альбедо нижней в случае многоводных облаков; для облаков с малой водностью соотношение меняется — альбедо верхней границы становится меньше, чем альбедо нижней.

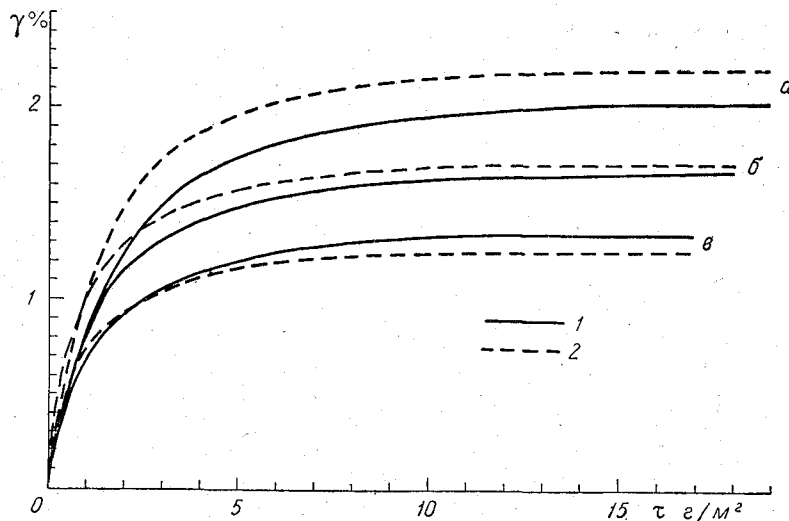


Рис. 3. Альбедо облачного слоя при различных соотношениях количеств воды и водяного пара.

1 — альбедо нижней границы, 2 — верхней. а — относительное содержание воды

$$\left(\frac{\delta}{\rho_w + \delta} \right) = 20\%; \text{ б} — 3\%; \text{ в} — 0,5\%.$$

Обобщенная функция пропускания, характеризующая проникновение радиации в облако, дана на рис. 4. Скорость затухания радиации, приходящей к верхней и нижней границам облака, несколько различна, причем это различие увеличивается с уменьшением относительного содержания воды. В любых облаках радиация, поступающая сверху, затухает быстрее, чем поступающая снизу. Это объясняется тем, что излучение атмосферы содержит лишь те длины волн, которые хорошо поглощаются водяным паром.

Рисунок 4 позволяет оценить свободный путь пробега тепловой радиации в облаке, если точно оговориться, что за него принимать. Например, для облака с относительным содержанием воды 3% и средней водностью 0,15 г/м³ на глубину 80 и 100 м проникает лишь 5% от радиации, вошедшей в облако сверху и снизу соответственно. (Если учесть зависимость водности от высоты, то это расстояние увеличится, так как вблизи границ водность облака весьма мала.)

Оптические свойства облаков обычно рассчитывают для разных наборов температур и водностей (см., например, [4, 7]). Такая дифференциация нам кажется излишней. Если за независимую переменную при-

нять массу $\tau = \int_0^z \delta dz$, то вид функций $\gamma(\tau)$ и $P(\tau)$ будет зависеть только от одного параметра $\frac{\rho_w}{\delta}$ (или $\frac{\delta}{\rho_w + \delta}$). Влиянием же эф-

фекта смещения в пределах температур, встречающихся для облаков нижнего и среднего ярусов, безусловно, можно пренебречь.

Из проведенных расчетов, результаты которых изображены на рис. 3 и 4, отчетливо видно, что ни в коем случае нельзя пренебрегать присутствием водяного пара в облаке.

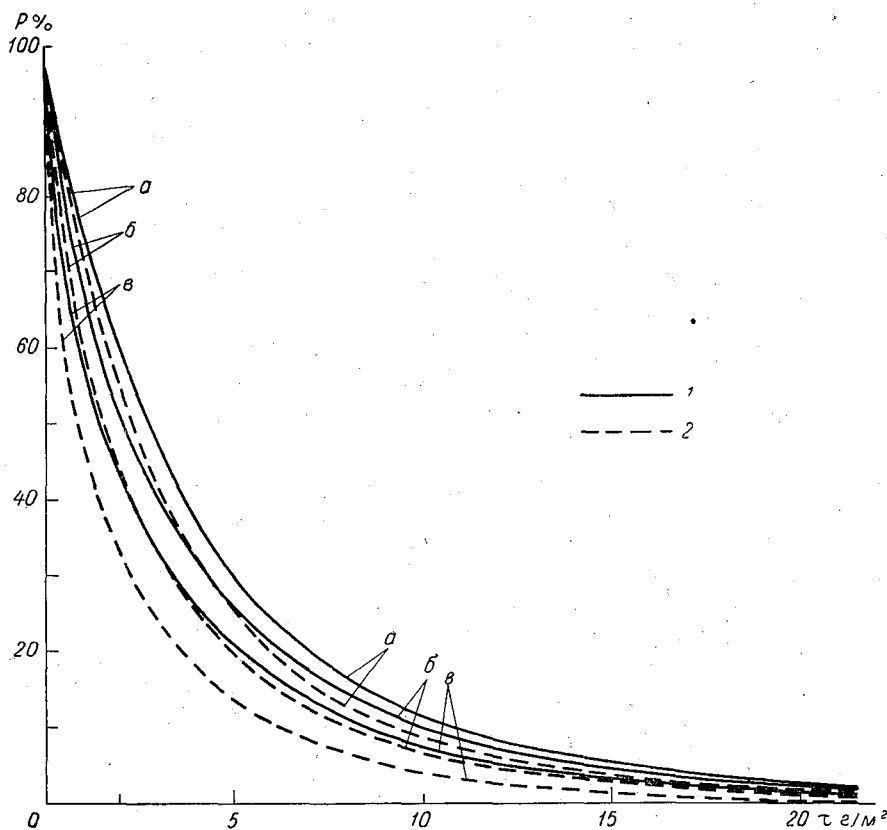


Рис. 4. Обобщенная функция пропускания при различных соотношениях количеств воды и водяного пара в облаке.

1 — для радиации, приходящей к нижней границе облака, 2 — к верхней. а — относительное содержание воды $\left(\frac{\delta}{\rho_w + \delta}\right) = 20\%$, б — 3%, в — 0,5%.

Из формулы (46) для $\gamma_{\Delta\lambda}$ можно сделать два интересных вывода. Во-первых, по отношению к отражению облако можно рассматривать как полубесконечный слой, даже если оно пропускает некоторое количество радиации. Во-вторых, отношение разности между значениями альбедо полубесконечного слоя и слоя конечной толщины к альбедо полубесконечного слоя равно квадрату обобщенной функции пропускания для слоя конечной толщины.

Остановимся коротко на вопросе о приближенном учете диффузности распространения радиации.

Отбрасывая члены с Γ_λ^2 в формулах (35), получим выражения для диффузной обобщенной функции пропускания $P_\lambda(x) = 2H_3(\kappa_\lambda x)$ и альбедо $\gamma_\lambda(x) = \Gamma_\lambda[1 - 2H_3(2\kappa_\lambda x)]$. Так как с большой точностью выполняется соотношение $2H_3(u) = e^{-1,66u}$ в тех диапазонах аргумента,

с которыми обычно приходится иметь дело [3], то этим самым доказана правомочность использования приближенных уравнений переноса для потока радиации в виде (25).

4. Эффективное излучение границ облака

Подставляя формулы (36), (37), или (41), (42), или (41а), (42а) в (14), (14а) или в (19), (20), получим выражения для расчета эффективного излучения нижней и верхней границ облаков.

Используя результаты § 3, проведем некоторые численные оценки, которые подтвердят высказанные выше предположения о возможности значительного упрощения формул.

Все приведенные ниже оценки будут относиться к облакам с относительным содержанием воды 3%.

Прежде всего вычислим по (43) коэффициенты $\Phi_i(\tau_h)$ и определим черноту облаков. При $\tau \geq 35$ г/м² получаем следующие значения: $\Phi_0 = 0,985$; $\Phi_1 = 0,35 \cdot 10^{-3}$ г/см²; $\Phi_2 = 0,27 \cdot 10^{-6}$ г²/см⁴. Если принять

$$T = 273^\circ \text{K}, \quad \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=h+0} = \left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=h-0} = -7 \cdot 10^{-5} \text{ град/см},$$

то по формулам (44) найдем, что

$\tilde{\Phi} = 0,98$; $\tilde{\tilde{\Phi}} = 0,99$ при $\delta = 0,15$ г/м³ и $\tilde{\Phi} = 0,96$; $\tilde{\tilde{\Phi}} = 1,02$ при $\delta = 0,015$ г/м³. Полученные оценки находятся в согласии с литературными данными [9].

С уменьшением водности степень черноты нижней границы облака уменьшается, а верхней — увеличивается и может стать больше единицы. Последний результат кажется парадоксальным, но его можно легко объяснить. Дело в том, что с уменьшением водности вблизи границы облака происходит как бы смещение уровня излучения вглубь облака и облако излучает как черное тело с температурой выше, чем на границе. Это явление приводит к возникновению инверсии в верхней части облака. Аналогичный процесс, происходящий в нижней части облака, приводит наоборот к градиентам температуры вблизи нижней границы большим, чем в его центральной части.

Итак, собственное излучение облака сосчитано; обобщенная функция пропускания для $\tau \geq 35$ г/м² равна нулю; альбеда примем одинаковым для обеих границ и равным 0,017.

Теперь мы можем сосчитать эффективное излучение по формулам (19) и (20). Так как излучение облака пропорционально излучению абсолютно черного тела, то $D_h(y) = D(y)$. Предположим, что «серость» земной поверхности составляет 95%, а ее альбеда $\gamma_0 = 5\%$. Проведем подробный расчет для нижней границы облака. Рассмотрим три случая ($h = 50, 100, 300$ м) и примем следующие средние значения в слое между землей и облаком: $T = 273^\circ \text{K}$, $\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=h-0} = -1$ град/100 м, $\rho_w = 6$ г/м³. Входные данные и коэффициенты $\tilde{f}_i(m_h)$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) помещены в табл. 4. Из этой таблицы видно, что без особого ущерба для точности можно отбросить члены с производными второго и выше порядков.

Подставляя (44), (41а), (42а) в (19) и учитывая все сказанное выше, получим следующую простую формулу для расчета эффективного излучения нижней границы облака:

$$F(h) = J_0(m_h) E(T_0) - J_1(m_h, \tau_h) E(T_h), \quad (47)$$

где

$$J_0(m_h) = \delta_0(1 - \gamma_1) D(m_h), \quad (48)$$

$$J_1(m_h, \tau_H) = \tilde{\Phi} [1 - \gamma_0 D(2m_h)] + b \tilde{f}_1(m_h) - \tilde{f}_0(m_h), \quad (49)$$

$$b = \left(\frac{4}{T_{pw}} \cdot \frac{dT}{dz} \right)_{z=h-0}. \quad (50)$$

Коэффициенты J_0 и J_1 при $\tilde{\Phi} = 0,960$ помещены в предпоследних двух строчках табл. 4.

Таблица 4

Расчет коэффициентов в формулах (19), (48), (51)

	h м				h м		
	50	100	300		50	100	300
m_h г/см ²	0,03	0,06	0,18	$\tilde{f}_0$	0,446	0,524	0,628
$D(m_h)$	0,551	0,472	0,365	$\tilde{f}_1$	0,004	0,007	0,018
$D(2m_h)$	0,472	0,402	0,313	$\tilde{f}_2$	0,0001	0,0003	0,0006
N_1	0,0035	0,0070	0,0180	J_0	0,516	0,442	0,342
χ_1	0,0012	0,0024	0,0047	J_1	0,491	0,415	0,313
N_2	0,0001	0,0003	0,0005	$\tilde{J}$	0,504	0,428	0,328
χ_2	0,0003	0,0006	0,0017				

Ясно видно, что ни в коем случае нельзя представлять эффективное излучение нижней границы облаков просто как разность излучений земли и облака. Однако полученная нами формула (47) позволяет считать эффективное излучение по температуре земли и облака. Так как коэффициенты J_0 и J_1 оказались близкими, то можно в случае необходимости формулу (47) записать в таком виде:

$$F(h) = \tilde{J} [E(T_0) - E(T_h)], \quad (51)$$

где

$$\tilde{J} = \frac{1}{2} \left\{ [(1 - \gamma_1)(1 + \delta_0) - \gamma_0] D(m_h) - (1 - \tilde{\Phi}) [1 - \gamma_0 D(2m_h) + b \tilde{f}_1(m_h)] \right\}. \quad (52)$$

Аналогично получим для верхней границы облака

$$F(H) = J_2(U, \tau_H) E(T_H), \quad (53)$$

где

$$J_2(U, \tau_H) = \tilde{\Phi} - (1 - \gamma_2) [1 - D(U) + a_1 N_1(U)], \quad (54)$$

$$a_1 = \frac{4}{T_{pw}} \frac{dT}{dz} \Big|_{z=H+0}. \quad (55)$$

В тех случаях, когда показатели серости и альбедо земли и облаков таковы, что мы можем рассматривать последние как «черные» тела, формулы для эффективного излучения границ облака принимают следующий простой вид:

$$F(h) = D(m_h) [E(T_0) - E(T_h)] - b N_1(m_h) E(T_h), \quad (47a)$$

$$F(H) = [D(U) - a_1 N_1(U)] E(T_H), \quad (53a)$$

где b , a_1 и N_1 даны формулами (50), (55) и (22).

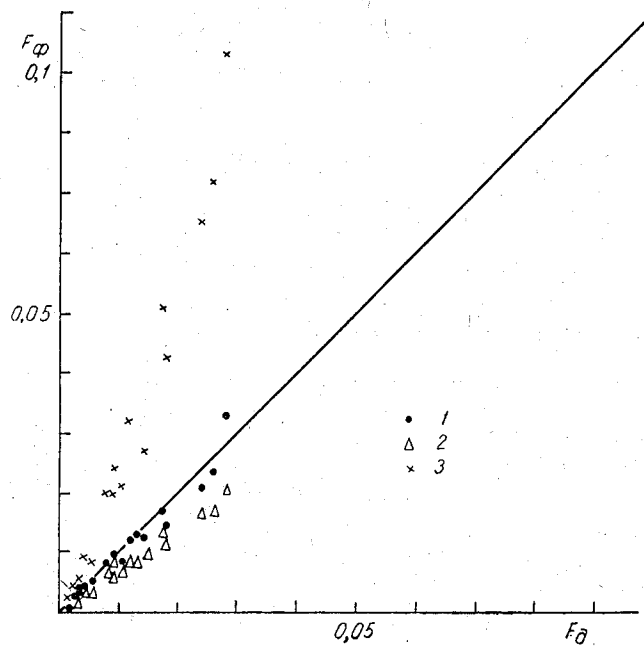


Рис. 5. Сравнение расчета эффективного излучения нижней границы облака по приближенным формулам (F_ϕ) с расчетом по диаграмме (F_π).

1 — по формуле (47a); 2 — по (47a) без последнего члена, т. е. $F = D(m_h) [E(T_0) - E(T_h)]$; 3 — $F = E(T_0) - E(T_h)$.

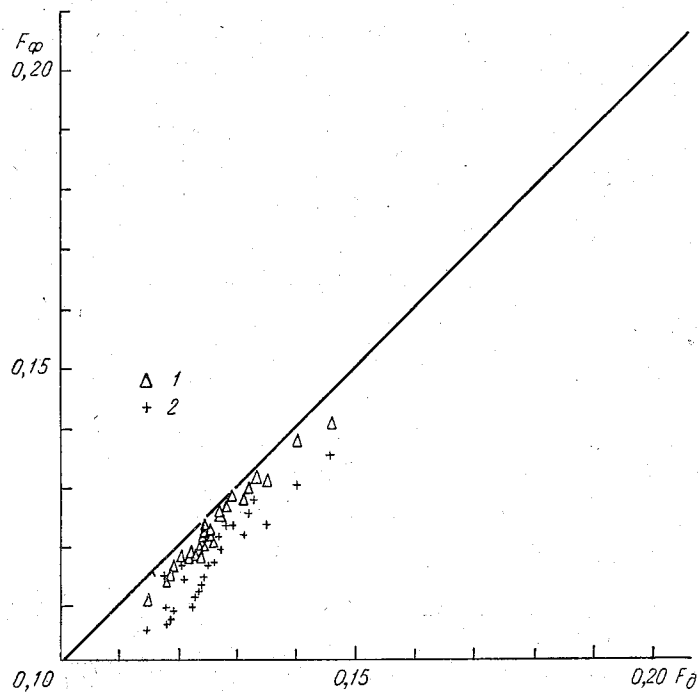


Рис. 6. Сравнение расчета эффективного излучения верхней границы облака по приближенным формулам (F_ϕ) с расчетом по диаграмме (F_π).

1 — по формуле (53a); 2 — по формуле (53a) без последнего члена.

Поскольку предположения, при которых получены формулы (47) и (47а), одни и те же, то и точность этих формул должна быть одинакова. На рис. 5 и 6 дано сравнение результатов расчета эффективного излучения по формулам (47а), (53а) с расчетами по радиационной диаграмме. Во всех расчетах и при построении радиационной диаграммы была использована функция пропускания

$$D(m) = 0,461e^{-0,674 \sqrt{m}} + 0,539e^{-7,75 \sqrt{m}}.$$

Расчет эффективного излучения проводился для нижней и верхней границ облака, расположенных от 50 до 2000 м и от 400 до 4000 м соответственно. Как видно из рис. 5 и 6, предложенные формулы дают вполне удовлетворительные результаты.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шехтер Ф. Н. К вычислению лучистых потоков тепла в атмосфере. Тр. ГГО, вып. 22, 1950.
2. Шехтер Ф. Н. Расчет лучистых потоков длинноволновой радиации из ограниченного телесного угла и полупространства. Тр. ГГО, вып. 39, 1953.
3. Кондратьев К. Я. Лучистый теплообмен в атмосфере. Гидрометеиздат, Л., 1956.
4. Фейгельсон Е. М. Радиационные процессы в слоистообразных облаках. Изд. «Наука», М., 1964.
5. Шифрин К. С. О вычислении радиационных свойств облаков. Тр. ГГО, вып. 46, 1955.
6. Дмитриев А. А. К вопросу о радиационном балансе в атмосфере. Метеорология и гидрология, № 11, 1940.
7. Шифрин К. С. Расчеты радиационных характеристик облаков. Тр. ГГО, вып. 109, 1961.
8. Шифрин К. С. Перенос тепловой радиации в облаках. Тр. ГГО, вып. 46, 1955.
9. Маршунова М. С. Основные закономерности радиационного баланса подстилающей поверхности и атмосферы в Арктике. Тр. ААНИИ, т. 229, 1961.
10. Шехтер Ф. Н. О методике определения лучистого притока тепла. Тр. ГГО, вып. 127, 1964.

Е. Д. КОВАЛЕВА, Ф. Н. ШЕХТЕР

ВЛИЯНИЕ СТРАТИФИКАЦИИ АТМОСФЕРЫ НА РАДИАЦИОННЫЙ ПРИТОК ТЕПЛА

Рассмотрены возможные значения радиационного притока тепла в пограничном слое атмосферы при различных стратификациях. Предлагается ряд эмпирических графиков для приближенной оценки величины притока тепла по разностям температур.

Лучистый теплообмен является существенным фактором в формировании температурной стратификации атмосферы.

Как известно, радиационное изменение температуры равно

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = - \frac{1}{\rho c_p} \frac{dF}{dz},$$

где T , ρ , c_p — температура, плотность и удельная теплоемкость воздуха на рассматриваемом уровне, τ — время, z — вертикальная координата, характеризующая высоту над земной поверхностью, F — результирующий поток радиации на высоте z .

В данной работе мы будем рассматривать только длинноволновое излучение, тогда $F=B-A$ (B и A — потоки длинноволнового излучения, приходящие на высоту z соответственно снизу и сверху).

Для вычисления радиационных потоков A и B с достаточной точностью надо иметь данные о температуре и влажности на различных уровнях и притом наиболее частые вблизи уровня, для которого рассчитываются потоки.

На практике часто приходится сталкиваться со случаями, когда этих данных или совсем нет, или, в лучшем случае, есть аэростатные зондирования, которые, как известно, не могут достигать большой высоты.

Расчет потоков необходимо проводить по радиационной диаграмме или на электронной вычислительной машине. Расчет этот довольно громоздкий и требует большой затраты времени.

Одной из задач настоящей работы и явилось выявление на основании имеющегося материала некоторых закономерностей, от которых зависит величина радиационного потока и притока тепла, и по возможности найти способ оценки этих величин при отсутствии достаточной информации о стратификации атмосферы, необходимой для расчета по диаграмме или на машине.

Расчет радиационных потоков проводился на электронной вычисли-

тельной машине «Урал-1». Была составлена программа, в основу которой положена следующая функция пропускания:

$$D(u) = 0,461e^{-0,674 \sqrt{u}} + 0,539e^{-7,76 \sqrt{u}},$$

где u — эффективная поглощающая масса.

Считалось целесообразным выбрать случаи, которые отличались бы друг от друга как по широте места, так и по времени наблюдения.

Были использованы данные Днепропетровской комплексной экспедиции, проведенной летом 1961 г., Махталинской экспедиции (сентябрь 1959 г.) и метстанции Колтуши за отдельные годы.

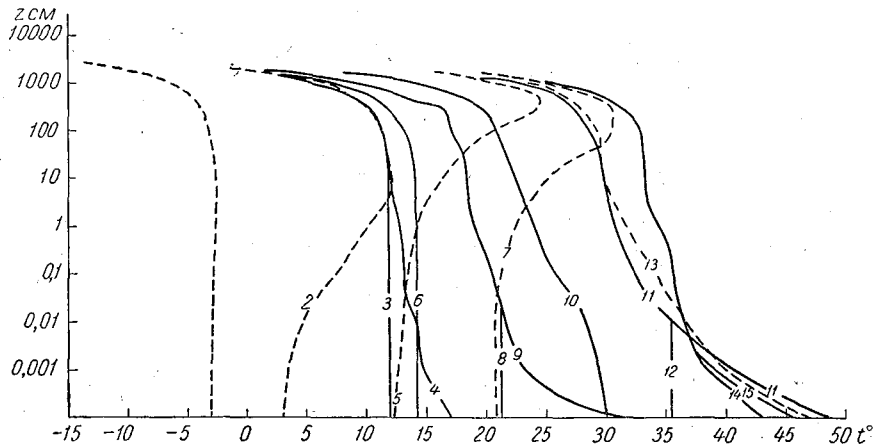


Рис. 1. Распределение температуры по высоте.

Расчеты проводились для случаев ясного неба с различной стратификацией атмосферы (инверсия, адиабатический и сверхадиабатический градиенты температуры).

Как в Махталах, так и в Днепропетровской экспедиции температура в слое 0—8 м измерялась различными приборами. Нередки случаи, когда в показаниях приборов не было согласованности, особенно это относится к температуре поверхности почвы. Поэтому оказалось необходимым выяснить, как влияют ошибки в определении температуры поверхности на приток тепла и до какой высоты распространяется это влияние. Так появилось для одного и того же срока два варианта, отличие которых состоит только в значении температуры земной поверхности, тогда как распределение температуры и влажности в атмосфере одинаковое. Для получения непрерывных профилей температуры и влажности от земной поверхности до высот 15—20 км пришлось провести большую работу по увязке показаний различных приборов.

На рис. 1 приводятся наиболее характерные профили; сюда включены случаи инверсий и профили с адиабатическими и сверхадиабатическими градиентами температуры. Как видно из рисунка, различие в ходе температур в основном в слое 0—500 м.

По полученным значениям радиационного потока на различных высотах были рассчитаны притоки тепла в слой от земной поверхности до соответствующего уровня

$$\Delta F(z) = F_z - F_0,$$

где F_z — эффективное излучение на высоте z , F_0 — эффективное излучение земной поверхности.

Результаты расчетов представлены табл. 1. Анализ таблицы позволяет отметить большой диапазон изменения величины $\Delta F(z)$, особенно для случаев сверхадиабатических градиентов у земной поверхности; для инверсии $\Delta F(z)$ всегда положительно, для сверхадиабатических градиентов в нижнем слое отрицательно и на некоторой высоте меняет знак на обратный.

Была сделана попытка найти зависимость величины $\Delta F(z)$ для неинверсионных состояний от разности температур $\Delta t = t_{з.п} - t_z$ ($t_{з.п}$ — температура земной поверхности, t_z — температура на соответствующей высоте z).

Такие зависимости были построены для слоев 0—10 м, 0—25 м, 0—50 м, 0—100 м, 0—200 м, 0—300 м, 0—400 м, 0—500 м и 0—1000 м по материалам табл. 1. Результат осреднения представлен на рис. 2, которым можно пользоваться для приближенных оценок.

Значения притока тепла

Пункт	Дата	Время, час. мин.	Вариант	Инверсии		№ профиля на рас. 1	0—10	0—25
				высота z м	мощность, град.			
Днепропетровск	2 VIII 1961	11 00	I			11	—0,0573	—0,0775
	2 VIII 1961	11 00	II			12	—0,0102	—0,0158
	1 VIII 1961	13 00					—0,0311	—0,0441
	12 VIII 1961	17 00					—0,0101	—0,0136
Махталы	22 IX 1959	13 00				13	—0,0358	—0,0526
	22 IX 1959	15 00	I			14	—0,0193	—0,0277
	22 IX 1959	15 00	II			15	—0,0245	—0,0351
	24 IX 1959	13 00	I				—0,0297	—0,0402
	24 IX 1959	13 00	II				—0,0234	—0,0318
Колтуши	16 VIII 1950	14 30				10	—0,0144	—0,0210
	18 VI 1958	13 00	I			9	—0,0276	—0,0374
	18 VI 1958	13 00	II			8	—0,0028	—0,0040
	Средние равновесные условия для лета					6	0,0006	+0,0012
Профиль N						3	0,0007	0,0013
Профиль 1						4	—0,0103	—0,0140
Днепропетровск	2 VIII 1961	21 00		50	7,1		0,0015	0,0033
	3 VIII 1961	5 00		200	10,9		0,0000	0,0018
Махталы	13 IX 1959	21 00		250	9,9	7	0,0036	0,0044
	IX 1959	3 00		400	12,1	5	0,0021	0,0035
	(средние)							
Колтуши	16 VIII 1950	2 30		200	7,3		0,0023	0,0045
	28 VIII 1953	4 00		300	2,6		0,0007	0,0012
	Средние равновесные условия для зимы			5	0,6	1	0,0016	0,0026
Профиль 4				10	9,1	2	0,0151	0,0200

Примечание. Описание температурных стратификаций профиля 1, профиля N,

Несколько иная картина наблюдается при инверсиях. Здесь величина притока тепла в слой $\Delta F(z)$ зависит в основном от мощности инверсии.

Эта зависимость была построена для тех же слоев, что и в случаях адиабатических и сверхадиабатических градиентов.

Осредненный график представлен в правом квадранте рис. 2. Следует отметить, что мощность инверсии оказывает влияние на величину притока тепла в слой 0—1000 м не в меньшей, если не в большей степени, чем в нижних слоях (для слоя 0—1000 м разброс точек меньше, чем для слоев 0—50 м, 0—300 м).

Анализ величин притоков тепла при инверсиях (см. табл. 1) позволяет выделить профиль 4. Этот случай характеризуется низкой инверсией $z=10$ м (под z подразумевается вершина инверсии). Мощность инверсии для него $9,1^\circ$, а $\Delta F(z)$ во всех слоях имеет значительно большую величину, чем в соответствующих слоях для других пунктов. Для сравнения можно взять данные в Махталах за 21 час 13/IX 1959 г.

Таблица 1

$\Delta F(z)$ кал/см² мин. в слой, м

0—50	0—100	0—200	0—300	0—400	0—500	0—1000	0—1500	0—2000
—0,0926	—0,1039	—0,1074	—0,1082	—0,1084	—0,1076	—0,0944	—0,0824	—0,0701
—0,0193	—0,0213	—0,0179	—0,0150	—0,0126	—0,0096	0,0093	0,0242	0,0383
—0,0547	—0,0629	—0,0699	—0,0724	—0,0735	—0,0740	—0,0682	—0,0624	—0,0560
—0,0159	—0,0184	—0,0181	—0,0179	—0,0170	—0,0153	—0,0090	—0,0047	0,0033
—0,0668	—0,0770	—0,0826	—0,0857	—0,0863	—0,0857	—0,0793	—0,0710	—0,0616
—0,0330	—0,0388	—0,0405	—0,0406	—0,0401	—0,0388	—0,0269	—0,0196	—0,0134
—0,0450	—0,0500	—0,0534	—0,0544	—0,0545	—0,0537	—0,0428	—0,0361	—0,0302
—0,0492	—0,0569	—0,0625	—0,0639	—0,0648	—0,0652	—0,0620	—0,0488	—0,0352
—0,0388	—0,0448	—0,0487	—0,0493	—0,0495	—0,0496	—0,0448	—0,0340	—0,0176
—0,0274	—0,0305	—0,0307	—0,0296	—0,0280	—0,0263	—0,0150	—0,0025	+0,0078
—0,0466	—0,0520	—0,0550	—0,0551	—0,0521	—0,0516	—0,0436	—0,033	
—0,0041	—0,0041	—0,016	+0,0016	+0,0067	+0,0087	+0,0203	+0,0328	
+0,0024	+0,0041	+0,0073	+0,0101	+0,0126	+0,0153	+0,0279	+0,0386	
0,0023	0,0041	0,0085	0,0131	0,0179	0,0226	0,0415		
—0,0152	—0,0169	—0,0176	—0,0166	—0,0154	—0,0141	—0,0029	0,0050	0,0106
0,0121	0,0228	0,0319	0,0372	0,0420	0,0461	0,0596	0,0724	0,0844
0,0018	0,0070	0,0236	0,0339	0,0403	0,0477	0,0691	0,0820	0,0933
0,0163	0,0262	0,0450	0,0452	0,0484	0,0547	0,0737		
0,0062	0,0110	0,0207	0,0307	0,0404	0,0508	0,0825		
0,0087	0,0147	0,0264	0,0290	0,0360	0,0430			
0,0022	0,0039	0,0068	0,0122	0,0176	0,0214	0,0372	0,0514	0,0631
0,0039	0,0068	0,0095	0,0119	0,0140	0,0210			
0,0254	0,0340	0,0466	0,0544	0,0602	0,0655	0,0868		

профиля 4 дано в работе [7].

Здесь мощность инверсии 9,9° (можно принять равной мощности инверсии профиля 4), тогда как высота ее 200 м. Приток же тепла во всех слоях значительно меньше того, какой дают соответствующие слои профиля 4. Это позволяет сделать заключение, что величина притока тепла в слой зависит не только от мощности инверсии, но и от высоты, и было бы лучше рассматривать отдельно друг от друга инверсии с расположением вершины до 100 м, в слое 100—500 м и выше 500 м. Нам такое раздельное рассмотрение провести не удалось из-за малого числа случаев. Рисунок 2 построен для инверсий, высота которых 100—500 м.

Имея подробные профили $\Delta F(z) = F_z - F_0$, можно вычислить приток тепла на каждом уровне $\frac{dF}{dz}$ путем графического дифференцирования. Результаты таких расчетов представлены в табл. 2. По знаку величины $\frac{dF}{dz}$ можно судить, что будет наблюдаться на данном уровне — нагревание или охлаждение воздуха.

Анализ результатов табл. 2 позволил сделать ряд заключений.

1. В атмосфере при инверсиях наблюдается охлаждение воздуха на всех высотах, причем самое значительное выхолаживание в нижнем

Пункт	Дата	Время, час. мин.	Вариант	$\frac{dF}{dz} = 0$		10	25	50
				z м	Δt			
Днепропетровск	1 VIII 1961	13 00	I	500	19,0°	—15,3	—5,68	—4,04
	2 VIII 1961	11 00		375	22,0°	—23,4	—8,60	—4,32
	2 VIII 1961	11 00	II	100	6,6°	—5,00	—2,00	—0,850
	12 VIII 1961	17 00		150	6,4°	—3,35	—1,70	—0,780
Махталы	22 IX 1959	13 00	I	400	20,1°	—17,2	—10,6	—2,850
	22 IX 1959	15 00		250	11,7°	—8,95	—3,60	—1,62
	22 IX 1959	15 00	II	350	14,8°	—11,6	—4,20	—2,12
	24 IX 1959	13 00		I	575	19,2°	—8,90	—5,20
	24 IX 1959	13 00	II	525	16,6°	—9,15	—4,4	—1,875
Колтуши	16 VIII 1950	14 30	I	150	9,5°	—5,40	—3,95	—1,305
	18 VI 1958	13 00		250	14,5°	—9,90	—4,90	—2,78
	18 VI 1958	13 00		II	75	3,5°	—1,50	—0,142
	Средние равновесные условия для лета					0,450	0,450	0,385
Профиль IV							0,41	0,385
Профиль 1				150	6,0°	—4,700	—1,450	—0,590
Днепропетровск	2 VIII 1961	21 00				1,390	1,500	3,200
	3 VIII 1961	5 00				1,380	0,452	0,000
Махталы	13 IX 1959	21 00				1,565	0,490	2,390
	Средние за 10 суток	3 00				0,950	0,950	0,950
Колтуши	16 VIII 1950	2 30				1,765	1,605	1,525
	28 VIII 1953	4 00				0,490	0,355	0,375
	Средние равновесные условия для зимы					0,680	0,465	0,345
Профиль 4						5,000	2,460	2,000

Примечание. $\Delta t = t_{3.п} - t_z$.

100-метровом слое. Его дают низкие инверсии (Днепропетровск, 2/VIII 1961 г., 21 час и профиль 4). Более высокие инверсии дают меньшую величину охлаждения в этом слое.

Для высот 200 м и более наблюдается несколько иная картина. Здесь большую величину $\frac{dF}{dz}$ дают более высокие инверсии. Так, для среднего ночного (10 суток) Махталинского профиля (самая высокая инверсия 400 м) величина охлаждения на высотах 300—500 м больше, чем для других случаев. Выше 500 м наблюдается заметное уменьшение величины $\frac{dF}{dz}$.

2. При равновесных (0,6 град./100 м) и близких к ним градиентах (профиль N, Колтуши — средние равновесные условия для лета) также наблюдается незначительное охлаждение воздуха во всей атмосфере.

3. При сверхадиабатических градиентах наблюдается нагревание воздуха в нижнем слое, в некоторых случаях оно распространяется до высоты 500—600 м (Махталы, 24/IX 1959 г., 13 час. 00 мин. I вариант).

Самое значительное нагревание на высотах 0—100 м. Здесь оно может доходить до 5 град./час (Днепропетровск, 2/VIII 1961 г.), а на вы-

Таблица 2

Приток тепла $\left(\frac{dF}{dz} \cdot 10^6 \text{ кал/см}^3 \text{ мин.}\right)$ на высоте, м									
100	150	200	300	400	500	600	800	1000	1500
—0,965	—0,690	—0,345	—0,185	—0,075	0,0	0,140	0,140	0,090	0,110
—0,880	—0,280	—0,137	—0,0528	+0,020	0,160	0,256	0,280	0,260	0,240
0,000	0,368	0,392	0,228	0,260	0,340	0,386	0,350	0,360	0,380
—0,180	0,000	0,055	0,060	0,130	0,155	0,130	0,120	0,135	0,060
—1,200	—0,360	—0,282	—0,187	0,000	0,080	0,126	0,140	0,140	0,174
—0,380	—0,160	—0,070	0,020	0,080	0,260	0,360	0,180	0,155	0,155
—0,56	—0,291	—0,164	—0,065	0,046	0,155	0,328	0,180	0,160	0,120
—1,00	—0,544	—0,212	—0,112	—0,060	—0,026	0,010	0,096	0,204	0,285
—0,650	—0,370	—0,163	—0,037	—0,016	—0,004	0,018	0,120	0,224	0,150
—0,235	0,00	0,080	0,140	0,165	0,200	0,225	0,225	0,235	0,260
—0,574	—0,257	—0,172	0,152	0,174	0,042	0,152	0,170	0,184	
0,075	0,155	0,308	0,416	0,290	0,206	0,234	0,230	0,227	
0,350	0,315	0,295	0,270	0,270	0,270	0,260	0,240	0,240	0,210
0,380	0,430	0,455	0,480	0,475	0,460	0,390	0,390	0,300	
—0,265	0,000	0,080	0,120	0,125	0,149	0,198	0,230	0,200	0,140
1,210	0,950	0,640	0,510	0,440	0,320	0,280	0,270	0,270	0,250
1,635	1,655	1,200	0,745	0,670	0,720	0,500	0,380	0,300	0,235
1,940	1,880	0,580	0,040	0,490	0,690	0,560	0,385		
1,000	0,890	1,025	0,990	0,995	1,000	0,780	0,580		
1,210	1,190	0,490	0,490	0,710					
0,300	0,300	0,360	0,570	0,450	0,350	0,315	0,310	0,310	0,250
0,245	0,280	0,285	0,255	0,220	0,210	0,180			
1,600	1,210	0,900	0,650	0,575	0,480	0,440	0,420		

сотах 0—10 м возможно и более 10 град/час. Это наблюдается там, где большая разность температур $\Delta t = t_{з.п} - t_{0,01}$.

Приведем два примера. Днепропетровск, 2/VIII 1961 г., 11 час. (I вариант) и Махталы, 24/IX 1959 г., 13 час. (II вариант). В первом случае $\Delta t = t_{з.п} - t_{0,01} = 13,7^\circ$ (наибольшая из всех разность температур), во втором $\Delta t = 8,2^\circ$. На высоте 50 м для Днепропетровска имеет место наибольшее нагревание воздуха (0,8 град/час), тогда как Махталы дают лишь 0,4 град/час.

Казалось бы, что и на других высотах должно наблюдаться подобное соотношение, и граница перехода к охлаждению в первом случае должна находиться выше, чем во втором.

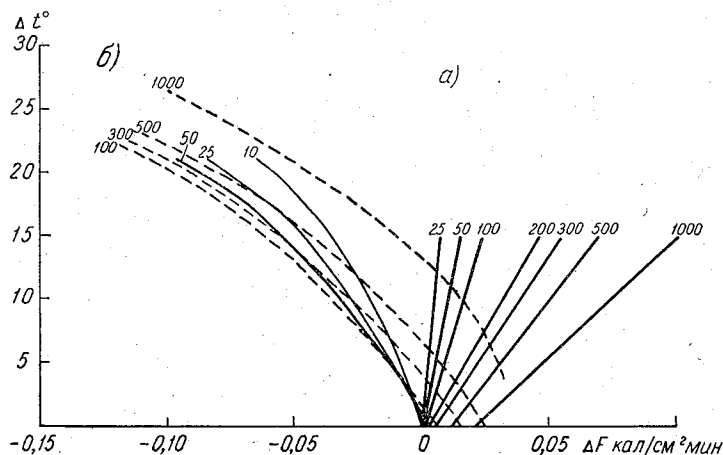


Рис. 2. График для оценки величины притока тепла в слой от земной поверхности до высоты z (цифры на кривых — высота слоя в метрах).

a — инверсия (Δt — мощность инверсии), b — падение температуры с высотой ($\Delta t = t_{з.п} - t_z$).

Однако данные не подтверждают этого. В Днепропетровске охлаждение начинается на высоте 350—400 м, в Махталах на высоте 525 м. Во всех рассмотренных случаях на высотах выше 600 м наблюдается охлаждение воздуха, величина его не превышает 0,05 град/час.

4. При инверсиях, адиабатических и сверхадиабатических градиентах на всех уровнях выше 1 км наблюдается незначительное охлаждение воздуха, при этом величина его не зависит от того, какой профиль внизу — инверсия или сверхадиабатический градиент.

Замечено также, что величина притока тепла на любой высоте в значительной степени зависит от разности температуры земной поверхности и температуры на соответствующем уровне. Такие зависимости были построены для высот 10, 25, 50, 100, 200, 300, 400, 500 и 1000 м и представлены на рис. 3.

Интересно отметить, что на высоту, с которой начинается переход от нагревания воздуха к охлаждению, накладывается некоторое условие разности температур. Это разность температур земной поверхности и уровня, где наблюдается этот переход (правый квадрант рис. 4). Рисунок 4 позволяет сделать заключение, что охлаждение слоев воздуха вблизи земной поверхности может наступить тогда, когда разность температур земной поверхности и прилегающего слоя будет не более 1° , при больших разностях будет иметь место нагревание. Подобное условие накладывается и на другие высоты. Например, можно сказать, что

на высоте 200 м при разностях температур не более 9° будет наблюдаться охлаждение воздуха, а при большей разности — нагревание воздуха.

Таким образом, разность между температурой земной поверхности и температурой на высоте z дает возможность определить знак и приближенную величину притока тепла на этой высоте (см. рис. 3). И если составить эти разности для ряда последовательно расположенных высот и нанести их на график (рис. 4, правый квадрант), то можно выделить области нагревания и охлаждения воздуха и определить высоту, где наблюдается смена знака. Пунктирная линия на графике иллюстрирует

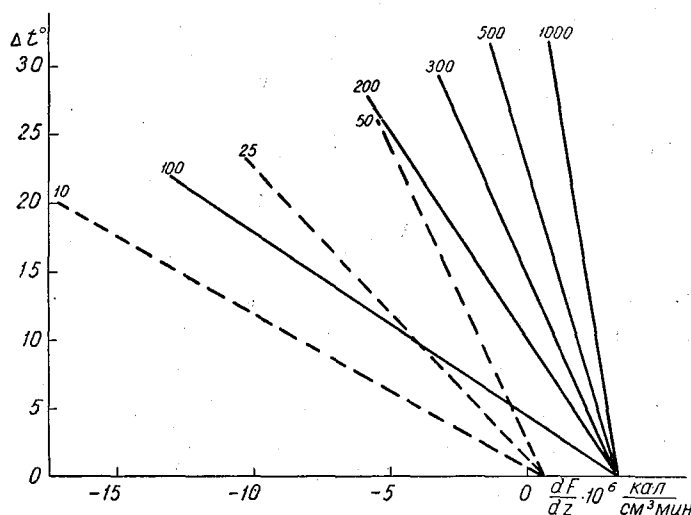


Рис. 3. График для оценки величины $\frac{dF}{dz}$ на высоте z ($\Delta t = t_{\text{з. п}} - t_z$).

Цифры на прямых — высота в метрах. Для высот 100 м и выше шкалу оси абсцисс надо уменьшить в 10 раз.

ход разностей температуры земной поверхности и температуры на соответствующих высотах для Днепропетровска 1/VIII 1961 г., 13 час. Линии пересекаются на высоте 440 м, значит до этой высоты происходит нагревание воздуха, выше — охлаждение.

Какую картину мы наблюдаем в действительности. Как можно видеть из табл. 2, до высоты 500 м величины притока тепла отрицательны (происходит нагревание воздуха), выше — положительны. Расхождение в высоте перемены знака $\frac{dF}{dz}$, определенной по графику на рис. 4 и вычисленной, составляет 60 м (12%).

Уже указывалось, что выше 1 км наблюдается незначительное и постоянное по величине охлаждение воздуха, поэтому высоту 1 км можно принять за некоторый показательный уровень.

На основании этого была построена зависимость величины $\frac{dF}{dz}$ от разности температур $\Delta t = t_{1,0} - t_z$ ($t_{1,0}$ — температура на высоте 1 км, t_z — температура на соответствующей высоте z). О характере этой связи можно судить по левому квадранту рис. 4.

Выясним, какое влияние оказывает температура земной поверхности на величину притока тепла. Для этого рассмотрим следующие случаи:

1) Колтуши 18/VI 1959 г., 13 час., I вариант ($t_{з.п}=31,4^\circ$) и Колтуши того же числа II вариант ($t_{з.п}=21,0^\circ$);

2) Днепропетровск 2/VIII 1961 г., 11 час., I вариант ($t_{з.п}=49,1^\circ$) и II вариант ($t_{з.п}=35,4^\circ$);

3) Махталы 22/IX 1959 г., 15 час., I вариант ($t_{з.п}=43,4^\circ$) и II вариант ($t_{з.п}=45,7^\circ$);

4) Махталы 24/IX 1959 г., 13 час., I вариант ($t_{з.п}=43,0^\circ$) и II вариант ($t_{з.п}=40,7^\circ$).

Температурные стратификации и распределение влажности в I и II вариантах всех случаев одно и то же.

Разность температур земной поверхности I и II вариантов для Колтуш $10,4^\circ$ (наибольшая из рассматриваемых разностей), в Махталах 24/IX 1959 г., 13 час. эта разность $2,3^\circ$. В обоих случаях влияние температуры земной поверхности прослеживается по всему пограничному слою, причем в Колтушах на всех высотах наблюдаются более значительные расхождения в величинах $\Delta F(z)$ для I и II вариантов, чем в Махталах.

Таблица 3

Оценка влияния температуры земной поверхности на величину притока тепла в слой

z м	Колтуши, 18/VI 1959 г. 13 час. 00 мин.					Днепропетровск, 2/VIII 1961 г., 11 час. 00 мин.				
	$(\sigma T_0^4)_I = 0,6991; (t_0)_I = 31,4^\circ$ $(\sigma T_0^4)_{II} = 0,6082; (t_0)_{II} = 21,0^\circ$					$(\sigma T_0^4)_I = 0,8765; (t_0)_I = 49,1^\circ$ $(\sigma T_0^4)_{II} = 0,7365; (t_0)_{II} = 35,4^\circ$				
	ΔF_I	ΔF_{II}	$\delta \Delta F = \Delta F_I - \Delta F_{II}$			ΔF_I	ΔF_{II}	$\delta \Delta F = \Delta F_I - \Delta F_{II}$		
			абс.	% (I)	% (II)			абс.	% (I)	% (II)
0			0,0909	13	15			0,0120	2	2
10	-0,0276	-0,0028	0,0248	90	888	-0,0032	0,0000	0,0032	100	
25	-0,0374	-0,0040	0,0334	89	836	-0,0031	0,0018	0,0049	158	272
50	-0,0466	-0,0041	0,0425	91	1036	-0,0041	0,0018	0,0059	144	328
100	-0,0520	-0,0041	0,0479	92	1169	0,0002	0,0070	0,0068	3400	97
150						0,0087	0,0160	0,0073	839	46
200						0,0161	0,0236	0,0075	47	32
300	-0,0551	0,0016	0,0567	103	3545	0,0260	0,0339	0,0079	30	23
400	-0,0521	0,0067	0,0588	113	878	0,0323	0,0403	0,0080	25	20
500	-0,0516	0,0087	0,0603	117	693	0,0394	0,0477	0,0083	21	17
600	-0,0508	0,0103	0,0611	120	593					
950	-0,0445	0,0192	0,0637	143	332					
1000						0,0603	0,0691	0,0088	15	13
1250	-0,0388	0,0262	0,0650	168	248					
1500						0,0729	0,0820	0,0091	12	11
2000						0,0841	0,0933	0,0092	11	10

Примечание. Для земной поверхности $|\delta \Delta F| = |(\sigma T_0^4)_I - (\sigma T_0^4)_{II}|$.

Из табл. 2 видно, что изменение температуры поверхности почвы вызывает значительные изменения притоков тепла на высотах. Высота перехода от нагрева к охлаждению воздуха также различна для I и II вариантов.

Так, например, для Днепропетровска получаем, что в I варианте на высоте 10 м воздух нагревается на 4 град/час, а во II варианте — на 1 град/час и, если в I варианте охлаждение начинается на высоте

≈ 375 м, то во II варианте на высоте 100 м. В Колтушах по I варианту нагревание воздуха может распространяться до высоты 250 м, по II варианту всего лишь до высоты 75 м.

Для Колтуш и Днепропетровска были определены разности притоков тепла в слой $\delta \Delta F(z) = \Delta F(z)_I - \Delta F(z)_{II}$ в абсолютных единицах и в процентах ($\Delta F(z)_I$ — приток тепла в слой для I варианта, $\Delta F(z)_{II}$ — приток тепла в соответствующий слой для II варианта).

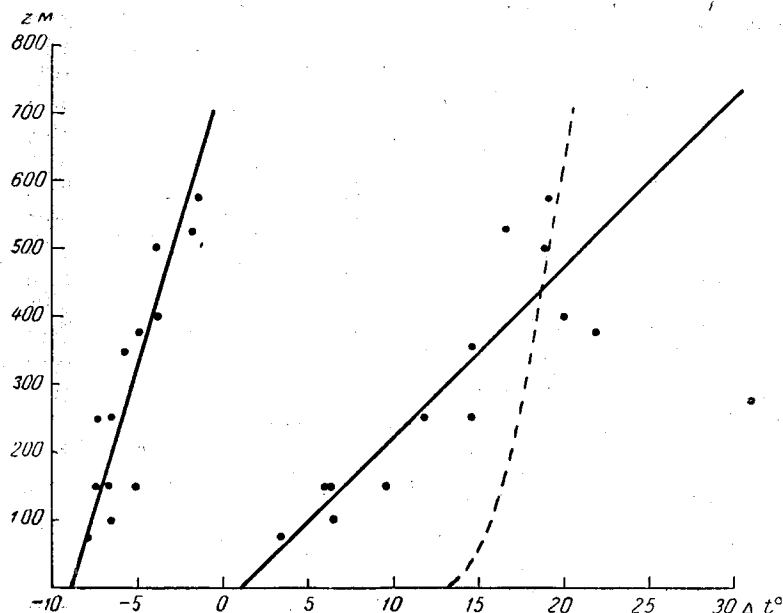


Рис. 4. Связь между высотой смены знака $\frac{dF}{dz}$ и разностью температур $\Delta t = t_{\text{сп}} - t_z$ (z — высота обращения в нуль $\frac{dF}{dz}$).

При определении относительных ошибок за истинное значение в одном случае принималась величина $\Delta F(z)_I$, в другом — $\Delta F(z)_{II}$. Результаты представлены в табл. 3. В некоторых слоях величина притока тепла может измениться на сотню процентов (там, где абсолютные величины притока невелики) и нередко случаи, когда эта цифра во много раз больше. Таким образом, оценка влияния температуры земной поверхности на величину притока тепла позволяет указать на необходимость точного измерения температуры земной поверхности.

Полученные в работе средние зависимости (см. рис. 2—4) могут быть использованы для приближенных оценок величин $\Delta F(z)$, $\frac{dF}{dz}$ и высоты перехода от нагревания к охлаждению воздуха.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронцов П. А., Огнева Т. А., Серова Н. В. Формирование температурного режима почвы и воздуха. Тр. ГГО, вып. 107, 1961.
2. Панин Б. Д. Особенности температурного режима воздуха в непосредственной близости от деятельной поверхности. Тр. ГГО, вып. 107, 1961.

3. Воронцов П. А. Некоторые особенности строения пограничного слоя атмосферы над пос. Махталы в сентябре 1959 г. Тр. ГГО, вып. 107, 1961.
4. Лайхтман Д. Л., Орленко Л. Р. Программа и методика экспедиционных наблюдений. Тр. ГГО, вып. 144/40, 1963.
5. Воронцов П. А. Строение нижнего слоя атмосферы (0—0,5 км) в период Днепропетровской экспедиции. Тр. ГГО, вып. 144/40, 1963.
6. Шехтер Ф. Н. О методике определения лучистого притока тепла. Тр. ГГО, вып. 127, 1962.
7. Шехтер Ф. Н., Каждан Р. М. Некоторые результаты расчета радиационного изменения температуры в пограничном слое атмосферы. Тр. ГГО, вып. 127, 1962.

Д. Л. ЛАЙХТМАН

ВОЗДЕЙСТВИЯ НА РАДИАЦИЮ КАК МЕТОД ИЗМЕНЕНИЯ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО РЕЖИМА НИЖНИХ СЛОЕВ АТМОСФЕРЫ

Дается оценка ресурсов радиации, которые могут быть реализованы при искусственных воздействиях на альбедо поверхности и на режим облачности. Вычисляются изменения метеоэлементов и компонент теплового баланса при приращении радиационного баланса на каждую $0,1 \text{ кал/см}^2 \text{ мин.}$

1. Солнечная радиация, поступающая в атмосферу, включает в себе значительные ресурсы энергии. Элементарные оценки показывают, что радиация, отраженная атмосферой и облаками (около 40%), равна $70 \cdot 10^6$ млн. квт. Для того чтобы представить себе, насколько значительна эта величина, можно, например, указать, что электрическая мощность, затраченная на обслуживание всех производственных процессов в СССР в 1955 г., равнялась 55,5 млн. квт. Таким образом, одной двухсоттысячной части солнечной радиации, уходящей из земной атмосферы, хватило бы на питание электроэнергией всех производственных процессов. Это показывает, насколько велика энергия, которая может в принципе быть получена за счет радиации.

Энергетическое обоснование возможности использовать солнечную энергию для эффективного воздействия на метеорологические процессы должно базироваться на сравнении потоков радиаций с работой, совершаемой атмосферными процессами. Достаточно указать, что 2% солнечной радиации достаточно для того, чтобы компенсировать потерю кинетической энергии атмосферных движений на работу против турбулентного трения.

По-видимому, целесообразность изменения метеорологических условий путем искусственных воздействий на радиацию связана, однако, не только со значительными энергетическими ресурсами, но и с определенной гибкостью метода. Известно, что в зависимости от обстоятельств может возникнуть потребность как в увеличении потоков радиации, так и в их уменьшении, что вполне осуществимо на современном уровне техники.

Следует также отметить, что часто регулирование радиационного баланса является единственным методом борьбы с неблагоприятными атмосферными условиями. Так, например, при сильных суховеях гибель растений или заметное снижение урожая может произойти даже на сравнительно увлажненной почве. Это обусловлено тем, что из-за внеш-

них условий потеря воды растениями превосходит максимальную транспортирующую способность воды к поверхности растения, вследствие чего отдельные части растения теряют тургор и начинают сохнуть. В этом случае снижение радиационного баланса является единственным, практически осуществимым способом ослабления эффекта.

Крайне перспективными, уже частично используемыми на практике являются методы борьбы с заморозками путем уменьшения эффективного излучения задымлением.

Практическое значение может иметь способ интенсификации весеннего таяния льдов путем уменьшения альбедо или ослабления процесса нарастания льда путем уменьшения эффективного излучения.

По-видимому, изменением радиационного баланса можно воздействовать на туманы и нижнюю облачность. Не исключена возможность воздействий на метеорологические процессы большого масштаба, если соответствующим образом изменить радиационный баланс обширных территорий.

При современном развитии авиации совершенно реальным является создание специальных авиационных средств, которые могли бы оперативно, по заданию соответствующей службы задымлять определенные районы: ночью — для борьбы с заморозками, днем — для борьбы с суховеями. Кстати сказать, задымление не у самой поверхности земли, а на некоторой высоте в ночное время может оказаться более эффективным способом воздействия на радиационный баланс.

2. Оценки показывают, что существенных изменений радиационного баланса можно достигнуть тремя способами:

- а) изменением альбедо деятельной поверхности,
- б) искусственным задымлением нижних или верхних слоев атмосферы,
- в) искусственным рассеиванием облаков.

Очевидно, наибольших радиационных эффектов при изменениях альбедо можно достигнуть в районах и в периоды с большими суммами коротковолновой радиации. Поскольку режим коротковолновой радиации достаточно подробно исследован, то расчеты приращений радиации легко выполнимы.

Что касается радиационных эффектов, связанных с задымлением или искусственным рассеиванием облаков, то здесь расчет радиационного эффекта является значительно более «тонким делом». Это связано с тем, что при изменениях облачности или задымлении балансы длинноволновой и коротковолновой радиации изменяются таким образом, что компенсируют друг друга.

В зависимости от начальных значений потоков коротковолновой и длинноволновой радиации полный баланс радиации, вообще говоря, может и увеличиваться, и уменьшаться, и даже оставаться неизменным. Для простейших оценок можно пользоваться средними соотношениями, из которых следует, что при изменении облачности на 1 балл поток коротковолновой радиации на поверхности земли изменяется на 6%, а эффективное излучение на 7,5%, причем с уменьшением облачности поступление коротковолновой радиации увеличивается, а длинноволновой убывает, и наоборот.

При оценке средних радиационных эффектов, которые могут быть достигнуты при рассеивании облаков, следует иметь в виду определенное естественное ограничение. Дело в том, что если в данных условиях рассеивание облачности приводит, например, к увеличению радиационного баланса, то можно получить этим путем лишь весьма ограниченное увеличение радиационного баланса в районах с небольшим средним бал-

лом облачности, а если достижение нужного эффекта связано с увеличением облачности, то можно надеяться получить необходимые результаты в малооблачных районах. Таким образом, каждый климатический район обладает определенными ресурсами, которые нетрудно оценить.

Если

$$\begin{aligned} r_n &= r_0 \left[1 - \frac{1-k}{10} n \right], \\ E_n &= E_0 \left[1 - \frac{cn}{10} \right], \end{aligned} \quad (1)$$

где r_n — коротковолновый баланс на деятельной поверхности при n баллах облачности, E_n — эффективное излучение при той же облачности, то радиационный баланс

$$R = r_n - E_n = r_0 \left(1 - \frac{1-k}{10} n \right) - E_0 \left(1 - \frac{cn}{10} \right). \quad (2)$$

Предельное увеличение радиационного баланса при средних условиях в умеренных широтах может быть достигнуто, если днем облачность полностью рассеивать и тем самым увеличивать приток коротковолновой радиации, а ночью увеличивать количество облачности до 10 баллов, благодаря чему уменьшится эффективное излучение. Предельное же уменьшение радиационного баланса может быть достигнуто при увеличении облачности до 10 баллов днем и уменьшении до нуля ночью. В таком случае приращения коротковолнового баланса будут:

$$\begin{aligned} \Delta r_+ &= r_0 - r, \\ \Delta r_- &= r_0 k - r. \end{aligned} \quad (3)$$

Изменения эффективного излучения при увеличении облачности до 10 баллов в одну половину суток и уменьшении до нуля во вторую приведет к следующему приращению эффективного излучения:

$$\Delta E = E_0 \left(1 - \frac{c}{2} \right) - E = \frac{E_{\max} + E_{\min}}{2} - E. \quad (4)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \Delta R_{\text{пред}+} &= \Delta r_+ - \Delta E, \\ \Delta R_{\text{пред}-} &= \Delta r_- - \Delta E. \end{aligned} \quad (5)$$

На рис. 1 приводятся оценки возможных предельных приращений радиационного баланса для разных широт. Расчет проводился по формулам (1) и (5) на основании экспериментальных данных по широтному распределению суммарной радиации и облачности; альbedo деятельной поверхности принималось всюду равным 25%. Интересно отметить, что из (5) и (3) следует соотношение

$$\Delta R_{\text{пред}+} - \Delta R_{\text{пред}-} = r_0(1-k), \quad (6)$$

т. е. разность предельных приращений радиационного баланса, которые могут быть вызваны искусственным путем, определяется исключительно напряжением коротковолновой радиации при безоблачном небе и составляет примерно 40%.

3. Из предыдущих расчетов, выполненных для разных широт, следует, что 0,1 кал/см² мин. дает порядок величины изменения радиационного баланса, которое может быть достигнуто при искусственных воздействиях. Крайне важно оценить изменения метеорологических характеристик, которые при этом возникают. Следует иметь в виду, что расчеты эффективности активных воздействий являются задачей той же трудно-

сти, что и предвычисление погоды, но, пожалуй, более ответственной, в связи с возможными вредными последствиями в тех случаях, когда расчеты, на которых основаны воздействия, оказываются некорректными.

Мы ограничимся ниже оценкой изменений метеорологических условий, которые возникнут при воздействиях на радиационный режим сравнительно малой территории, когда нарушения ограничены пограничным слоем и не влияют существенно на метеорологические процессы большого масштаба.

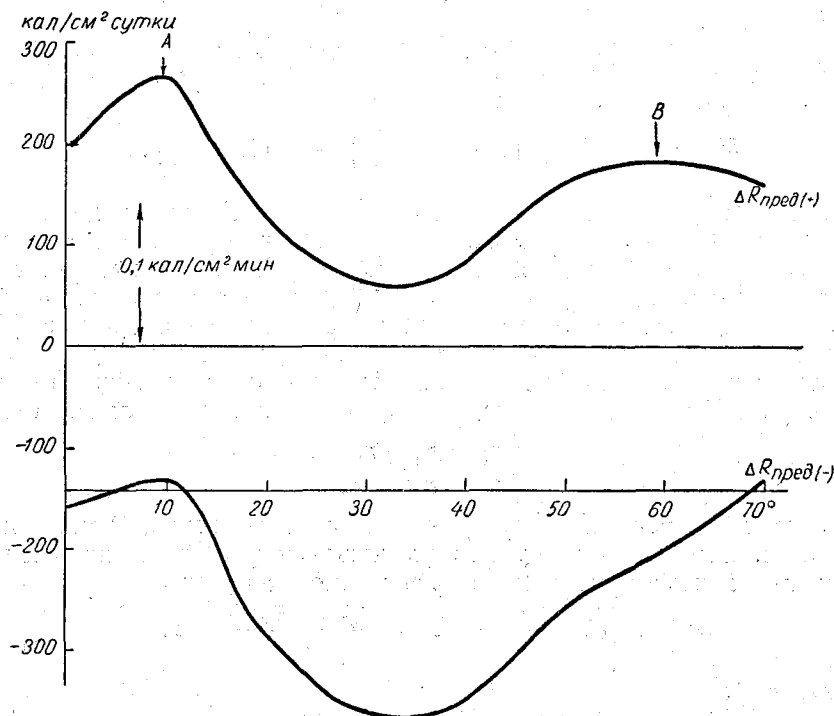


Рис. 1. Предельные приращения радиационного баланса для разных широт.

Однако территория, подвергшаяся воздействию, должна быть достаточно велика, чтобы краевой эффект был мал. 100 км является подходящим характерным размером такой территории. Необходимые оценки можно получить, если воспользоваться однопараметрической моделью пограничного слоя.

В этом случае из системы уравнений гидротермодинамики и уравнения баланса энергии турбулентности вытекают следующие соотношения:

$$P = k \rho c_p \frac{T_0 - T_H}{H}, \quad (7)$$

$$E = k \rho \frac{q_0 - q_H}{H}, \quad (8)$$

$$\frac{T_0 - T_H}{\gamma_a} = H - \frac{2,3 (1 - \delta) \bar{T} V_g^2}{g \gamma_a} \cdot \frac{1}{H}, \quad (9)$$

$$k = 0,2 \omega_2 H^2. \quad (10)$$

Если к этим соотношениям присоединить уравнение теплового баланса

$$P + LE = R - B \quad (11)$$

и воспользоваться соотношением Боуэна взамен граничного условия для влажности

$$\frac{LE}{P} = \frac{L}{c_p} \frac{q_0 - q_H}{T_0 - T_H} = \frac{L}{c_p} B, \quad (12)$$

то шесть искомых функций (испарение E , турбулентный поток тепла P , температуру T_0 и влажность деятельной поверхности q_0 , коэффициент турбулентности k и высоту пограничного слоя H) можно связать с радиационным балансом и, следовательно, рассчитать их изменения при воздействиях на радиационный баланс.

В выписанных соотношениях приняты следующие обозначения: T_H , q_H — температура и влажность на верхней границе пограничного слоя, $\bar{T}$ — средняя температура пограничного слоя, g — ускорение силы тяжести, γ_a — сухоадиабатический градиент, $\omega_z = \omega \sin \varphi$ — проекция угловой скорости вращения Земли, V_g — геострофический ветер, δ — отношение кинетической энергии, диссипирующей в тепло, к энергии среднего движения, превращающейся в энергию турбулентности за определенный промежуток времени, B — поток тепла от поверхности к внутренним слоям почвы. Из решения выписанной системы следует:

$$P = \frac{5}{8} (R - B), \quad \Delta P = \frac{5}{8} \Delta (R - B); \quad (13)$$

$$E = 9 (R - B), \quad \Delta E = 9 \Delta (R - B); \quad (14)$$

$$H = 100 \sqrt{0,45V_g^2 + 250(R - B)}; \quad \Delta H = \frac{25 \cdot 10^5 \Delta (R - B)}{2H}; \quad (15)$$

$$k = 2 \cdot 10^3 \omega_z [0,45V_g^2 + 250(R - B)]; \quad \Delta k = 5 \cdot 10^5 \omega_z \Delta (R - B); \quad (16)$$

$$T_0 - T_H = \frac{25 \cdot 10^3 (R - B)}{H};$$

$$\Delta T_0 = \frac{25 \cdot 10^3 \Delta (R - B)}{H} - \frac{25 \cdot 10^3 (R - B)}{H^2} \Delta H - \gamma_H \Delta H. \quad (17)$$

В выписанных формулах приняты следующие размерности: $|E| = \text{мм/сутки}$, $|V_g| = \text{м/сек.}$; $|R - B| = \text{кал/см}^2 \text{ мин.}$; $|\omega_z| = \text{сек.}^{-1}$; $|H| = \text{м}$, $|k| = \text{м}^2/\text{сек.}$, $|p| = |R - B|$. Поток тепла в почву для простоты не отделяется от радиационного баланса, хотя изменения радиационного баланса меняют температуру поверхности почвы, а следовательно, и поток тепла. При заданных теплофизических характеристиках почвы легко определить изменение потока тепла в почву по заданному изменению радиационного баланса. Мы не будем этого, однако, делать из-за его малости по сравнению с радиационным балансом; учет приращений потока в почву при сравнительно грубых оценках вряд ли целесообразен, и с достаточной точностью $\Delta(R - B) = \Delta R\%$.

Из анализа формул (13) — (17) вытекают некоторые следствия, на которые необходимо обратить внимание. Так, например, из (13) и (14) видно, что приращения потока тепла и испарения пропорциональны

приращению радиационного баланса и не зависят от самой величины радиационного баланса. Этот довольно естественный результат означает, что дополнительный приток (или потеря) лучистой энергии на деятельной поверхности распределяется между турбулентной теплоотдачей и потерей тепла на испарение. Совершенно иначе происходят изменения температуры и высоты пограничного слоя. Изменения этих характеристик при заданных приращениях радиационного баланса зависят от начального значения радиационного баланса.

Это связано с тем, что вертикальная мощность слоя, на который распространяются изменения температуры при изменениях радиационного баланса, велика при большом положительном радиационном балансе и мала при малом или отрицательном начальном радиационном балансе. Таким образом, приращения температуры вблизи земной поверхности при фиксированном приращении радиационного баланса убывают с ростом начальной величины радиационного баланса. По этой же причине изменения температурного градиента в пограничном слое малы при большом начальном радиационном балансе и монотонно возрастают по мере убывания радиационного баланса. В табл. 1 приводятся изменения метеорологических характеристик пограничного слоя при изменении радиационного баланса на $0,1 \text{ кал/см}^2 \text{ мин.}$

Таблица 1

$R - B$	P	LE	H м	$T_0 - T_H$ град.	$\Delta (R - B) =$ $= 0,1$ кал/см ² мин.			
	кал/см ² мин.				ΔP кал/см ² мин.	ΔE мм/сутки	ΔH м	ΔT_0 град.
0,5	0,31	0,19	1310	9,5	0,06	0,9	95	0,7
0,3	0,19	0,11	1100	6,8	0,06	0,9	115	1,0
0,0	0,0	0,0	670	0,0	0,06	0,9	185	2,8
-0,1	-0,06	-0,04	440	-5,7	0,06	0,9	285	7,8

Как следует из таблицы, при отрицательном радиационном балансе изменения температуры могут достигать $7-10^\circ$ на каждую десятую калории приращения радиационного баланса.

Расчеты показывают, что изменение радиационного баланса может оказаться довольно эффективным средством регулирования испарения, если иметь в виду, что летом при суховеях в районах Средней Азии дымлением можно в самые жаркие часы снизить радиационный баланс хлопкового поля на $0,5-0,7 \text{ кал/см}^2 \text{ мин.}$ Это приведет к уменьшению испарения на $4,5-6,0 \text{ мм/сутки.}$

Приведем, наконец, некоторые оценки, указывающие на крайнюю эффективность рассеяния радиационных туманов посредством воздействий на радиационный баланс. Как известно, радиационные туманы возникают в ясные ночи при сравнительно слабых скоростях ветра. При стационарном радиационном тумане, который обычно формируется через $2-3$ часа после заката солнца, потеря жидкой воды на верхней границе тумана компенсируется конденсацией, поскольку происходит непрерывная потеря тепла излучением на верхней границе тумана.

Предположим, что при высоте тумана 20 м его водность $0,2 \text{ г/м}^3$, в таком случае столб с поперечным сечением 1 см^2 содержит $4 \cdot 10^{-4} \text{ г}$ воды, что составляет $4 \cdot 10^{-3} \text{ мм}$ жидкой воды.

Поскольку полное задымление небосвода на высоте в несколько сот метров эквивалентно повышению радиационного баланса на $0,1 \text{ кал/см}^2 \text{ мин.}$, то за 1 мин., как следует из табл. 1, испарится $0,9/1440 \text{ мм/мин.}$ жидкой воды и, стало быть, весь туман исчезнет за время $\frac{4 \cdot 10^{-3} \cdot 1440}{0,9} = \frac{4}{9} 14,4 = 7 \text{ мин.}$

Разумеется, что, изменяя радиационный баланс, можно рассеивать и адвективные туманы, если они существуют при безоблачной погоде.

В. В. СИМОНОВ

ПЕРЕСТРОЙКА СПЕКТРА КАПЕЛЬ В ОБЛАЧНОСТИ И ТУМАНЕ ПОД ВЛИЯНИЕМ ВНЕШНИХ УСЛОВИЙ

Рассматривается задача о вычислении спектра капель по первоначальной функции распределения и изменению водности, которая определяется по известным формулам, полученным при решении задачи для динамики облаков. Дается связь трансформации спектра капель с такими параметрами, как температура и влажность воздуха у подстилающей поверхности, коэффициент турбулентности и скорость ветра. Приведены некоторые примеры расчетов.

Введение

Имеется большое количество работ [1 — 7, 16—19], посвященных вопросам испарения и конденсации капель воды, кристаллизации переохлажденного облака. При этом во многих из них рассматривается перераспределение капель воды по размерам. Но в большинстве этих работ основной причиной изменения спектра капель является различие в упругости насыщения водяного пара либо над каплями разных размеров, либо над каплями и кристаллами. И такая характеристика микроструктуры облачности как, например, изменение водности определяется через «внутренние» процессы и рассчитывается по суммарному испарению за определенный промежуток времени всех капель единичного объема воздуха. Опираясь на результаты этих работ, трудно получить, например, связь между изменением спектра капель воды и изменением характеристик подстилающей поверхности, над которой движется воздушная масса, содержащая облачность или туман. Большой интерес, однако, представляют случаи, когда микроструктура облачности или тумана трансформируется не только под действием внутренних причин, а связана с процессами «большого» масштаба. Например, ночью летом при переходе воздушной массы с влажного, теплого моря на более холодную и сухую сушу облачность будет рассеиваться.

Совершенно ясно, что воздействие внешних факторов значительно перекроет эффект внутренней трансформации. И главной причиной перестройки всей микрофизики будет, конечно, изменение температуры и влажности подстилающей поверхности, изменение тепло- и влагообмена облака с окружающей средой. Чтобы определить интенсивность этой перестройки, следует решить задачу о трансформации воздушной массы и как следствие этой трансформации найти изменение микрофизических характеристик облачности, в частности, изменение спектра капель. При этом, следуя идеям вышеназванных работ, пришлось бы

решать сложную систему уравнений тепло- и влагообмена системы капль с окружающим воздухом, а в качестве граничных условий использовать результаты, полученные при решении макромасштабной задачи. Значения водности, полученные из решения макро- и микромасштабных задач, должны при этом, конечно, совпадать. Но такая задача содержит в себе как значительные математические трудности, так и трудности, связанные с выбором корректных граничных условий.

В данной работе делается попытка найти изменение спектра капль только по изменению водности, полученному из решения макромасштабной задачи, т. е. связать перераспределение капль по размерам с такими «внешними» параметрами, как коэффициент турбулентности, скорость ветра, температура и влажность воздушной массы, теплофизические характеристики, радиационный баланс подстилающей поверхности и др. Короче говоря, используя законы испарения капль, найти изменение их спектра при трансформации воздушной массы под влиянием тех или иных факторов.

Постановка задачи

Сразу укажем, что: 1) решение применимо как для облачности, так и для тумана; 2) совершенно несущественно направление процесса, т. е. изменение спектра капль можно рассчитать как при уплотнении (конденсации), так и при рассеянии (испарении) облачности;¹ 3) под временем в дальнейшем понимается либо само время (нестационарная трансформация), либо расстояние (стационарная трансформация), которое воздушная масса пройдет за данный промежуток времени.

Решение задачи получено при следующих допущениях:

- 1) не учитывают влияние радиуса кривизны на упругость насыщенного пара над каплей;
- 2) капли шарообразны;
- 3) скорость падения капль равна нулю;
- 4) пренебрегают влиянием изменения концентрации веществ, растворенных в капле;
- 5) электрические заряды не влияют на упругость насыщенного пара;
- 6) не учитывают влияние стефановского течения на скорость испарения;
- 7) пренебрегают скачком концентрации пара у поверхности испаряющейся капли;
- 8) процесс испарения или конденсации стационарен;
- 9) пренебрегают эффектом коагуляции;
- 10) капельки полностью участвуют в турбулентных движениях воздушных частиц.

В целом ряде работ [4, 8—10, 16, 20] и др. выполнен анализ ошибок, вызванных вышеперечисленными допущениями. Авторы работ приходят к выводу, что все эти ошибки для сравнительно мелкокапельных облаков не превышают нескольких процентов. Необходимо только учитывать изменение температуры капль и среды при фазовых переходах влаги. А это делается в расчете водности при решении макромасштабной задачи.

Таким образом, испарение капль описывается хорошо известной формулой Максвелла

$$r \frac{dr}{dt} = \frac{D}{\rho} (q_{\infty} - q_k),$$

¹ При процессе уплотнения облачности считается, что новые капли не образуются, а растут уже имеющиеся.

из которой следует, что

$$r^2 - r_0^2 = \frac{D}{\rho}(q_\infty - q_k)t. \quad (1)$$

Здесь r — радиус капли в момент времени t , r_0 — в начальный момент ($t=0$), D — коэффициент диффузии водяного пара, ρ — плотность капли, q_∞ — концентрация пара в окружающей каплю среде, q_k — концентрация пара у поверхности капли, t — время.

Считается, что в любой момент времени распределение капель по размерам описывается формулой, предложенной А. Х. Хргианом и И. П. Мазиным [11]

$$n(r, t) = a(t)r^2 e^{-b(t)r}. \quad (2)$$

В работах [12, 13] указывается, что во всех исследованных случаях формула (2) хорошо описывает реальное распределение и, следовательно, пока нет причин считать ее неудовлетворительной. Вообще говоря, вместо (2) можно использовать любую двухпараметрическую формулу распределения капель по размерам.

При сделанных выше допущениях испарение (рост) капель происходит таким образом, что капли, имевшие разные размеры в начальный момент времени, не могут догнать или перегнать друг друга. Таким образом, можно утверждать, если в начальный момент времени число капель в каком-то интервале от r_{i0} до $r_{i0} + \Delta r_{i0}$ было β_i , то в момент времени t_1 , когда радиус r_{i0} станет равным r_{i1} , а радиус $r_{i0} + \Delta r_{i0}$ станет $r_{i1} + \Delta r_{i1}$, число капель в этом интервале снова будет β_i .

Таким образом, можно написать

$$\int_{r_{i0}}^{r_{i0} + \Delta r_{i0}} n_0(r) dr = \int_{r_{i1}}^{r_{i1} + \Delta r_{i1}} n(r, t) dr = \beta_i,$$

откуда следует, что

$$\bar{n}_{i1} = \bar{n}_{i0} \frac{\Delta r_{i0}}{\Delta r_{i1}}. \quad (3)$$

Величины $\bar{n}_{i0}$ и Δr_{i0} известны. И если удастся определить Δr_{i1} , т. е. найти, какими стали радиусы капель, разность которых первоначально равнялась Δr_{i0} , то по формуле (3) можно рассчитать спектр капель в интересующий нас момент времени.

Рассмотрим какое-нибудь конкретное направление процесса, например рассеяние облачности, т. е. испарение капель. Сначала самые мелкие, потом более крупные капли будут достигать нулевого радиуса и выбывать из рассмотрения. Значит, число капель в единице объема, а следовательно, и параметры a и b в формуле (2) будут функциями времени. Пусть через время t после начала процесса нулевой радиус стал иметь капли, первоначально имевшие радиус $r_{кр}$. Тогда формулу (1) можно переписать в следующем виде:

$$r_{кр}^2(t) = r_{i0}^2 - r_i^2(t). \quad (4)$$

Таким образом, зная $r_{кр}$, можно рассчитать любые интересующие нас $\Delta r_i(t)$ и по формуле (3) определить спектр капель.

Совершенно ясно, что в момент времени t , когда $r_{кр}$ стал равным нулю, должны выполняться следующие два условия:

$$\int_{r_{кр}(t)}^{\infty} n_0(r) dr = \int_0^{\infty} n(r, t) dr, \quad \tilde{\delta} = \int_0^{\infty} n(r, t) r^3 dr,$$

где $\tilde{\delta} = \frac{\delta}{4/3\pi\rho}$, δ — водность облака.

Учитывая (2), эти формулы переписутся:

$$\frac{a_0}{b_0^3} P(3; b_0 r_{кр}) = \frac{a}{b^3}, \quad (5)$$

$$\tilde{\delta} = \frac{120a}{b^6}. \quad (6)$$

Здесь и в дальнейшем величины с ноликами относятся к начальному моменту времени; P — функция Пирсона. Следовательно, имеется три неизвестных: a , b и $r_{кр}$ и три уравнения: (3) совместно с (4), (5) и (6), что позволяет по изменению водности и начальному распределению капель по размерам найти их спектр в любой момент времени.

Но при таком подходе получается трансцендентная система двух уравнений и интересующие нас величины придется определять методом итераций. Расчеты значительно упрощаются, если решать обратную задачу: задавать $r_{кр}$ и находить соответствующую ему водность. В данной работе все расчеты проведены именно таким образом.

Методика расчета

Схема, по которой велись расчеты, сводится к следующему. Сначала нужно перейти от непрерывного спектра капель $n_0(r)$ к дискретному и определить величины $\bar{n}_{i0}$ и Δr_{i0} . Для этого диапазон изменения радиусов капель ограничивается величиной R_0 , которую можно определить, например, как

$$\frac{n_0(R_0)}{n_0(r_0^*)} = 0,01 \quad (7)$$

или

$$\frac{\int_0^{R_0} n_0(r) dr}{\int_0^{\infty} n_0(r) dr} = 0,99, \quad (8)$$

где r_0^* — модальный радиус в начальном распределении капель по размерам, т. е. радиус капель, повторяемость которых наибольшая. Вообще для определения R_0 можно использовать самые разнообразные критерии.

Полученный таким образом конечный участок непрерывного спектра $0 \leq r \leq R_0$ разбивается на M равных частей, после чего находим

$$\Delta r_{i0} = \Delta r_0 = \frac{R_0}{M}. \quad (9)$$

Для определения $\bar{n}_{i0}$ воспользуемся соотношением

$$\int_{r_{i0}}^{r_{i0} + \Delta r_0} n_0(r) dr = \bar{n}_{i0} \Delta r_0,$$

откуда

$$\bar{n}_{i0} = \frac{1}{\Delta r_0} \int_{r_{i0}}^{r_{i0} + \Delta r_0} n_0(r) dr. \quad (10)$$

Относительно числа разбиений M можно сказать следующее. В работе [4] рассматривается влияние величины M на ход перегонки водяного пара с капель на кристаллы при кристаллизации переохлажденного облака. Из анализа расчетов автор делает вывод, что при $M > 6$ ход перегонки слабо зависит от числа разбиений. Причины изменения спектра капель в данной работе и в [4] различные, но используется одна и та же функция распределения капель по размерам. Это позволяет предполагать, что выводы, сделанные в работе [4], применимы для этой задачи. Однако в данной работе по полученному распределению капель находится величина b , для определения которой с точностью в несколько процентов 6—8 разбиений при значительных $r_{кр}$ может оказаться недостаточным. Но чтобы получить аналитическую формулу для функции распределения, нет необходимости рассчитывать весь спектр капель. Достаточно определить лишь ту его часть, которая будет содержать $n(r^*)$. Для этого практически оказывается достаточным рассмотреть 5—6 интервалов, начиная от r_0^* в сторону больших радиусов. Ширина рациональных интервалов зависит от b_0 и при значениях $b_0 = 0,2—0,6$ величину Δr_0 следует брать равной 1—2 мк. Таким образом, отпадает необходимость в определении R_0 .

Определив величины Δr_0 и n_{i0} , по формулам (3) и (4) рассчитывают $\bar{n}_i(r)$ для заданного $r_{кр}$. Затем методом графической интерполяции полученный участок дискретного спектра аппроксимируется непрерывной кривой, с которой снимается значение r^* , т. е. определяется величина b . Исключая из уравнений (5) и (6) параметр a находим

$$\frac{a_0}{b_0^3} P(3; b_0 r_{кр}) = \frac{\tilde{\delta} b^3}{120}. \quad (11)$$

Подставив найденное значение b в это соотношение, рассчитывают водность $\tilde{\delta}$, после чего по формуле (6) находят значение параметра a , а по формуле

$$N(t) = 2 \frac{a(t)}{b^3(t)} \quad (12)$$

число неиспарившихся капель. Чтобы найти перераспределение капель по размерам в процессе трансформации облачности под действием, например, изменяющихся свойств подстилающей поверхности, рассчитываются значения водности для нескольких $r_{кр}$. Затем по формулам, предложенным в работах [14—15], определяются моменты времени, в которые водность примет эти значения. Меняя внешние параметры, можно найти влияние каждого из них на интенсивность перестройки микроструктуры облачности.

Примеры расчета и анализ полученных результатов

По формулам данной работы были проведены некоторые расчеты. Принято, что: 1) трансформация облачности вызвана изменением свойств подстилающей поверхности, 2) свойства эти при $x=0$ меняются скачком, 3) скорость ветра $u(z)$ и коэффициент турбулентности $k(z)$ — степенные функции высоты

$$u(z) = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^\varepsilon, \quad k(z) = k_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{1-\varepsilon}, \quad (13)$$

где u_1 и k_1 — скорость ветра и коэффициент турбулентности на высоте z_1 , которые принимались равными $2,5 \text{ м сек.}^{-1}$ и $0,5 \text{ м}^2 \text{ сек.}^{-1}$ соответственно. Начальные распределения температуры, удельной и относительной влажности и водности представлены в табл. 1. Начальное распределение капель по размерам изображено кривой 1 на рис. 2 ($a_0 = 8,16 \cdot 10^{-12} \text{ мк}^{-6}$; $b_0 = 0,4 \text{ мк}^{-1}$; $N_0 = 255 \text{ см}^{-3}$).

Таблица 1

Начальное распределение метеозадающих элементов									
$z \text{ м}$	0	50	100	200	300	400	500	550	600
T°	10,0	9,5	9,0	8,5	8,0	7,5	7,0	7,0	7,0
$q \text{ г/кг}$	7,25	7,24	7,14	6,90	6,67	6,45	6,24	6,10	5,92
$f \%$	95	98	100	100	100	100	100	98	95
$\delta \text{ г/кг}$			0	0,39	0,78	0,39	0		

Расчеты проведены для высоты 300 м, где водность достигает своего максимального значения, равного $0,78 \text{ г/кг}$. Примеры рассчитаны для случая стационарной трансформации. Облачность натекает на более теплую или более сухую подстилающую поверхность, что приводит к ее рассеянию и испарению капель.

На небольших расстояниях от границы раздела двух поверхностей изменение температуры, влажности, а следовательно, и водности облака будут небольшими. Эти небольшие изменения водности приведут к испарению лишь самых мелких капель, количество которых также невелико. Поэтому на малых расстояниях не только водность, но и число капель в единице объема воздуха меняются незначительно. По мере продвижения воздушной массы над новой подстилающей поверхностью изменения температуры и влажности увеличиваются, что вызывает существенное уменьшение водности. Начинают испаряться частицы, размеры которых близки к модальному радиусу, и число неиспарившихся капель резко убывает. Этим и объясняется изменение наклона кривых 3 на рис. 1 в районе 80 км. На кривых 1 и 2 такое изменение наклона тоже будет иметь место, но на больших расстояниях. Чем сильнее турбулентность, тем меньшее расстояние необходимо пройти воздушной массе, чтобы под влиянием новой подстилающей поверхности начались интенсивные изменения температуры и влажности в облаке и как следствие этого значительные изменения водности и числа частиц. Это хорошо видно из сравнения кривых на рис. 1, которые рассчитаны при $\Delta T = 5^\circ$, $\Delta q = 0$ (ΔT и Δq — скачки температуры и влажности воздуха у поверхности земли). Наибольшие изменения δ и N наблюдаются при $\epsilon = 0,1$, т. е., как следует из формулы (13), при наибольших значениях коэффициента турбулентности.

На рис. 2 приведены функции распределения капель по размерам для нескольких расстояний при $\Delta T = 5^\circ$, $\Delta q = 0$, $\epsilon = 0,10$. Примерно до 80—100 км функция распределения меняется сравнительно мало, мода ее устойчива. При дальнейшем увеличении расстояния величина $n(r^*)$ резко уменьшается, что соответствует характеру изменения водности и числа частиц. Модальный радиус r^* при этом смещается вправо. Если в начальном распределении капель по размерам модальный радиус будет больше, чем в данном примере, то он начнет смещаться вправо при меньших значениях x .

На рис. 3 представлены функции распределения при различных изменениях коэффициента турбулентности с высотой ($\Delta T = 10^\circ$; $x = 90 \text{ км}$), а на рис. 4 — при различных изменениях свойств подстилающей

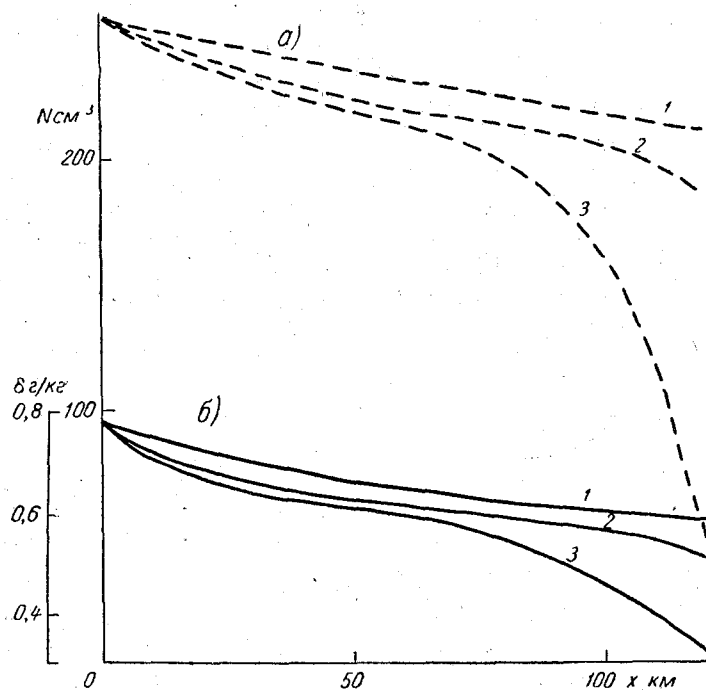


Рис. 1. Изменение концентрации (а) и влажности (б) частиц с расстоянием при $\Delta T=5^\circ$, $\Delta q=0$.
1) $\varepsilon=0,33$; 2) $\varepsilon=0,21$; 3) $\varepsilon=0,10$.

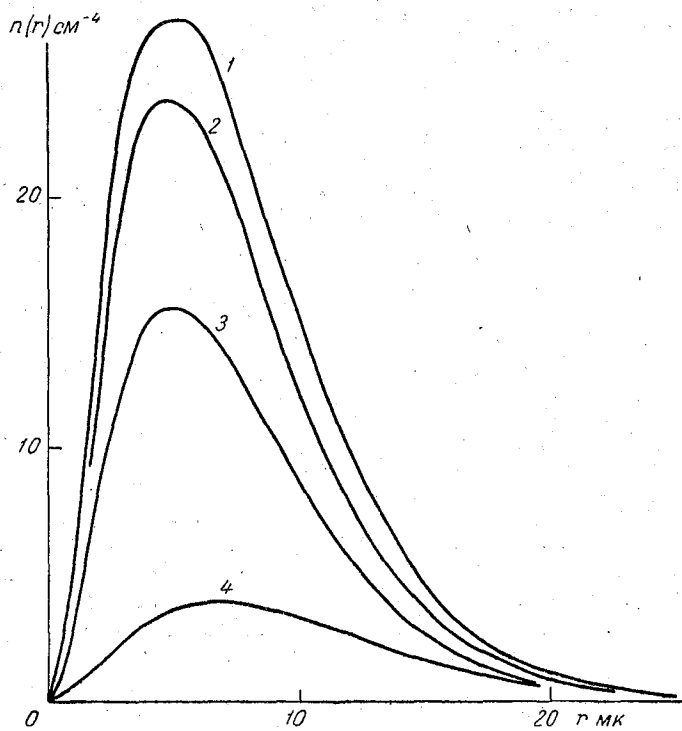


Рис. 2. Спектры капель для различных расстояний x при $\Delta T=5^\circ$, $\Delta q=0$, $\varepsilon=0,10$.
1) $x=0$; 2) $x=6$ км; 3) $x=100$ км; 4) $x=120$ км.

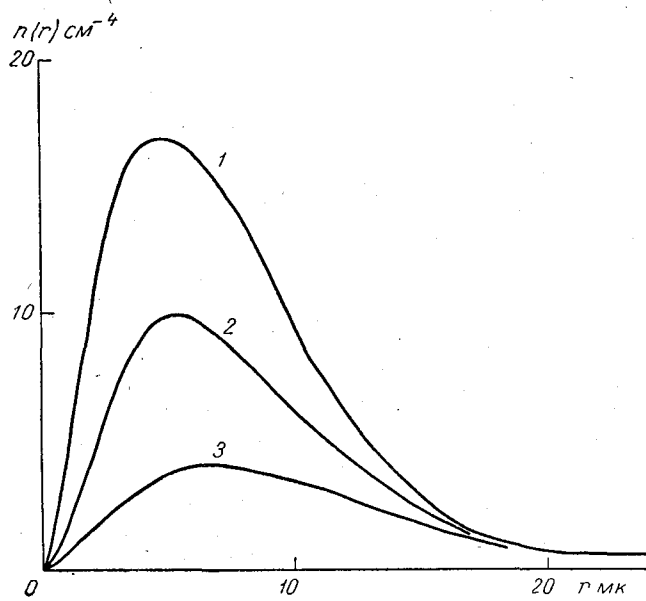


Рис. 3. Спектры капель для различных изменений коэффициента турбулентности с высотой при $\Delta T=10^\circ$, $x=90$ км.
1) $\epsilon=0,33$; 2) $\epsilon=0,21$; 3) $\epsilon=0,10$.

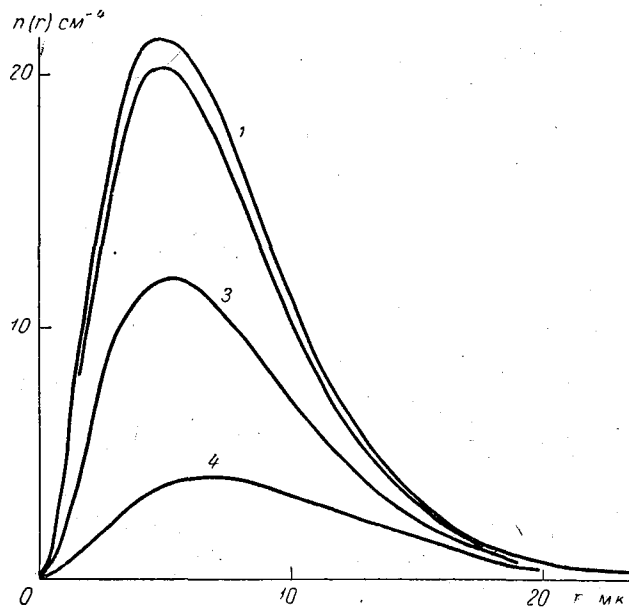


Рис. 4. Спектры капель для различных изменений свойств подстилающей поверхности при $\epsilon=0,10$; $x=90$ км.
1) $\Delta T=-5^\circ$, $\Delta q=-2$ г/кг; 2) $\Delta T=5^\circ$, $\Delta q=0$; 3) $\Delta T=3,75$, $\Delta q=-1,5$ г/кг; 4) $\Delta T=10^\circ$, $\Delta q=0$.

поверхности ($\varepsilon=0,10$; $x=90$ км). Чем сильнее перемешивание и изменение свойств подстилающей поверхности, тем больше, при прочих равных условиях, меняются температура, влажность и водность облака, а следовательно, и распределение капель по размерам.

К сожалению, нет систематических наблюдений за изменением микрофизических характеристик облачности при ее трансформации. Поэтому не удалось провести сравнение рассчитанных примеров с результатами эксперимента.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев М. П., Швец М. Е. Испарение мелких капель воды. Метеорология и гидрология № 2, 1948.
2. Швец М. Е. Об испарении капель в потоке. Информ. сб. ГУГМС, № 1, 1951.
3. Шишкин Н. С. Приближенное решение задачи о конденсационном росте капель при учете кривизны их поверхности и концентрации примесей. Тр. ГГО, вып. 31 (93), 1951.
4. Перельман А. Я. Кинетика перегонки водяного пара в смешанных облаках. Автореф. дисс., 1960.
5. Буйков М. В. Кинетика перегонки в полидисперсном облаке. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 7, 1961.
6. Качурин Л. Г., Алантьева Л. Е., Ся Юй-Жень. Концентрация пара и скорость роста капель конденсата в водных аэрозолях. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 9, 1961.
7. Беляев В. И. Метод Лагранжа в кинетике облачных процессов. Гидрометеоздат, Л., 1964.
8. Фукс Н. А. Испарение и рост капель в газообразной среде. Изд. АН СССР, М., 1958.
9. Мейсон Б. Дж. Физика облаков. Гидрометеоздат, Л., 1961.
10. Матвеев Л. Т. Условия образования и эволюции облаков. Сб. ст. «Исследование облаков, осадков и грозового электричества». Под ред. Н. И. Вульфсона и Л. М. Левина. Изд. АН СССР, М., 1961.
11. Хргиан А. Х. и Мазин И. П. О распределении капель по размерам в облаках. Тр. ЦАО, вып. 7, 1952.
12. Хргиан А. Х. и Мазин И. П. Анализ способов характеристики спектров распределения облачных капель. Тр. ЦАО, вып. 17, 1959.
13. Левин Л. М. О функции распределения облачных и дождевых капель по размерам. ДАН СССР, т. 94, № 6, 1954.
14. Лайхтман Д. Л., Надёжина Е. Д., Симонов В. В. Влияние изменения внешних условий на трансформацию нижней облачности. Тр. ГГО, вып. 167, 1964.
15. Надёжина Е. Д., Симонов В. В. Образование и трансформация адвективных туманов. Тр. ГГО, вып. 167, 1964.
16. Gilbert D. Kinzer, Ross Gunn. The evaporation, temperature and thermal relaxation-time of freely falling waterdrops. J. Meteor., vol. 8, No 2, 1951.
17. Reiss H. The growth of uniform colloidal dispersions. J. Chem. Phys., vol. 19, No 4, 1951.
18. Best A. Effect of turbulence and condensation on drop-size distribution in cloud. Q. J. R. M. S., vol. 78, No 335, 1952.
19. Mason B. J., Chien C. W. Clouddroplet growth by condensation in cumulus. Q. J. R. M. S., vol. 88, No 376, 1962.
20. Neiburger M. and Chien C. W. Computation of the growth of cloud drops by condensation using an electronic digital computer. Physics of precipitation. Geophys. Monogr., No 5, 1960.

О РЕГУЛИРОВАНИИ ИНТЕНСИВНОСТИ ЗИМНИХ ТУМАНОВ ИСПАРЕНИЯ

Анализируются свойства зимних туманов испарения и, в частности, рассматривается вопрос о факторах, определяющих устойчивость указанных туманов. Выясняется зависимость некоторых характеристик туманов от изменчивости параметров, определяющих образование туманов. Оценивается возможность изменения интенсивности туманов за счет регулирования начальной температуры воздуха с помощью тепловых источников и уменьшения испарения с помощью ПАВ.

Образование туманов над открытыми водоемами связано с изменением метеорологических характеристик воздуха, перемещающегося над водоемом. Именно, изменения влажности и температуры приводного слоя воздуха являются главными процессами туманообразования (или туманорассеяния). При этом, если изменение температуры воздуха является главным процессом, то обычно над водоемами наблюдаются туманы охлаждения, что характерно для весеннего периода в течение года или дневного времени в течение суток. В этом случае изменение (увеличение) влажности движущегося над водоемом воздуха незначительно благодаря малой величине испарения с водной поверхности, поэтому изменение (понижение) температуры определяет образование тумана. В осенне-зимний период при холодной адвекции воздуха с окружающей водоем суши над открытым водоемом могут наблюдаться туманы, образование которых связано с увеличением влажности воздуха за счет интенсивного испарения с водной поверхности. В этом случае происходит не только увеличение влажности, но и повышение температуры, поэтому образование тумана возможно только при определенных соотношениях между начальными характеристиками натекающего на водоем воздуха (температура, влажность) и характеристиками водоема (размер, температура поверхности и др.). Поскольку главным процессом, определяющим образование тумана, является увеличение влажности воздуха за счет испарения, то такие туманы обычно называют туманами испарения. Рассмотрим условия образования и некоторые свойства туманов испарения с целью выяснения возможностей регулирования их интенсивности, включая и вопрос о рассеянии таких туманов.

1. Условия образования и свойства туманов испарения

Если начальные температура и влажность воздуха, натекающего на открытый водоем, равны T_1 и q_1 , то значение этих величин над водоемом (T, q) можно описать следующими соотношениями [1]:

$$\left. \begin{aligned} T &= T_1 + (T_n - T_1) F\left(\frac{1}{L}, 2n\right) \\ q &= q_1 + (q_n - q_1) F_1\left(\frac{1}{L}, 2n\right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где T_n , q_n — средняя температура поверхности водоема и насыщающая влажность, соответствующая этой температуре; F , F_1 — функции, описывающие интенсивность тепло- и влагообмена между водной поверхностью и приводным слоем атмосферы. При приближенных расчетах можно пользоваться условием $F = F_1$. Аргумент функций F , F_1 при использовании степенных формул для вертикальных профилей ветра и коэффициента турбулентности имеет следующее значение:

$$L = \frac{k_1 x}{2(1-2n)^2 u_1 z_1^{\frac{1-4n}{1-2n}} z^{\frac{1}{1-2n}}}, \quad (2)$$

где k_1 , u_1 — коэффициент турбулентности и скорость ветра на высоте z_1 ; x — горизонтальная координата (размер водоема), отсчитываемая от уреза водоема по направлению ветра; z — высота над водной поверхностью.

Функция F обладает следующими свойствами:

при $L \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) $F \rightarrow 0$, а при $L \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow \infty$) $F \rightarrow 1$. Образование тумана возможно в том случае, если общее влагосодержание воздуха, определяемое уравнением (1), будет больше насыщающей влажности при температуре T . Если обозначить водность тумана через w (г/м³), тогда условие образования тумана указанной водности можно записать в следующем виде:

$$w = q - q_n = q_1 + (q_n - q_1) F - q_0 e^{\frac{17,1T}{235+T}}. \quad (3)$$

Если для значения насыщающей влажности воспользоваться формулой Магнуса, то последняя формула более подробно может быть переписана

$$\frac{w}{q_0} = \left[(1-F)r_1 + e^{\frac{17,1(T_n - T_1)}{235+T_1}} \left\{ F - e^{\frac{-17,1(T_n - T_1)(1-F)}{235+T_1}} \right\} \right] e^{\frac{17,1T_1}{235+T_1}}, \quad (4)$$

где q_0 — насыщающая влажность при 0°; r_1 — начальная относительная влажность воздуха.

Проанализируем некоторые свойства тумана, используя для этого формулу (4).

Главной характеристикой тумана является водность w , которая определяет его интенсивность. Она зависит от следующих величин: начальных температуры T_1 и влажности воздуха r_1 , температуры водоема T_n и значения функции F , которая определяется размером водоема x , скоростью ветра u_1 и коэффициентом турбулентности k_1 .

Предельные значения w в зависимости от значения F следующие.

Во-первых, если $F \rightarrow 0$, то $w \rightarrow q_0(r_1 - 1)l^{\frac{17,1T_1}{235+T_1}}$, т. е. образование тумана возможно над сушей. Значение же $F = 0$ имеет место при $L \rightarrow 0$, что возможно при $x \rightarrow 0$, $\frac{k_1}{u_1} \rightarrow 0$, т. е. при отсутствии ветра образование тумана затруднено. Следует отметить, что при больших скоростях ветра (u_1) аргумент функции L уменьшается, что создает неблагоприят-

ные условия для образования тумана. Таким образом, для образования тумана испарения необходимы некоторые оптимальные размеры водоема и скорости ветра.

Второй предельный случай $F \rightarrow 1$ имеет место для больших расстояний от уреза водоема ($x \rightarrow \infty$). В этом случае, как показывает формула (4), $w \rightarrow 0$. Таким образом, образовавшийся при определенных T_1 , r_1 , u_1 туман испарения на больших расстояниях от края может рассеиваться в силу естественного процесса прогрева приводного слоя воздуха. Приведенный теоретический анализ подтверждается имеющимися материалами наблюдений за туманами испарения (Кольский залив,

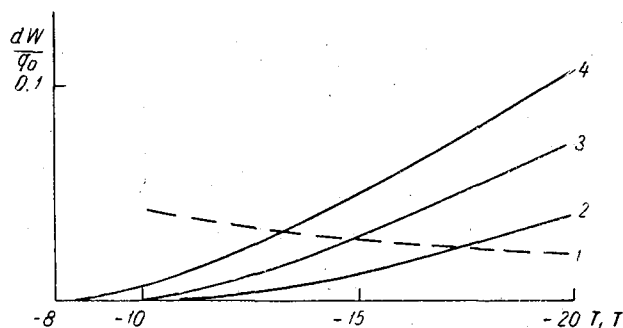


Рис. 1. Уменьшение водности тумана $\frac{dw}{dT_1}$ при повышении температуры на 1° при разных температурах воздуха (1) $r_1=70\%$; 2) $r_1=80\%$; 3) $r_1=80\%$; 4) $r_1=90\%$.

Балтийское и Черное моря). Характерные значения водности тумана испарения показаны на рис. 1, где приведены значения водности для начальной влажности r_1 , равной 70, 80, 90% при различной начальной температуре T_1 ; вычисления произведены по формуле (3) при $F=0,3$. Эти вычисления характеризуют условия образования зимнего тумана испарения в Кольском заливе. Рассмотрим зависимость w от определяющих его факторов. Изменение w в зависимости от изменения начальной температуры T_1 можно приближенно вычислить по формуле

$$dw = q_0 f(r_1, T_1, T_n, F) dT_1,$$

при этом значение функции $f(r_1, T_1, T_n, F)$ при $r_1=80\%$, $T_n=0^\circ$, $F=0,3$ равно примерно $-0,01$ г/м³ град. Поэтому можно принять $dw = -0,04 dT_1$. Отсюда следует, что изменение температуры T_1 на несколько градусов значительно изменяет водность тумана, т. е. условия образования тумана испарения. Изменение начальной влажности r_1 приводит к изменению водности тумана dw , что может быть описано с помощью следующего соотношения:

$$dw = (1 - F) q_0 e^{\frac{17,1T_1}{235 + T_1}} dr_1.$$

Это уравнение для интервала температур от -5° до -15° можно переписать

$$dw \approx dr_1,$$

т. е. изменение начальной влажности на 5—10% заметно изменяет водность тумана. Приведенный выше анализ некоторых свойств туманов испарения показывает определенную неустойчивость этого типа

туманов в зависимости от изменения начальных температуры T_1 , влажности r_1 , скорости ветра u_1 , размеров водоемов x . Следует к этому добавить изменение водности тумана $d\omega$ в зависимости от изменения температуры воздуха T , движущегося над водоемом

$$d\omega = - \frac{17,1r_1^{\frac{17,1T}{235+T}}}{235 \left(1 + \frac{T}{235}\right)^2} q_0 dT = - \alpha(T) dT.$$

Значение величины $\frac{d\omega}{q_0}$ при $dT=1^\circ$ изображено (пунктирной линией) на рис. 1 для разных T . Из этого рисунка можно заключить, что неустойчивость тумана испарения в отношении повышения температуры воздуха имеет относительный характер. Так, при температурах воздуха $-10, -13^\circ$ для предотвращения (или рассеяния) тумана необходимо повышение температуры на 1° . В области же более низких температур этот эффект может быть достигнут при повышении температуры на 5° и более. Таким образом, изменяя температуру воздуха и начальную влажность (например, за счет изменения начальной температуры), можно регулировать интенсивность образовавшегося тумана или исключать возможность его образования, если возможно с помощью современных технических средств достичь необходимого повышения температуры воздуха. Кроме того, поскольку образование тумана испарения обуславливается увеличением влажности воздуха за счет испарения с водной поверхности водоема, то регулирование величины испарения может также оказаться эффективным методом воздействия на указанные туманы. Связь между водностью тумана и величиной испарения E имеет следующий вид:

$$\omega = q_1 + F_2 E - q_H, \quad (5)$$

где $F_2 = \frac{E}{a_x u_1}$; a_x — коэффициент формулы для расчета испарения

$$E = a_x u_1 (q_H - q_1).$$

Величина ω есть разность двух больших величин $(q_1 + F_2 E)$ и q_H . Последние примерно на порядок больше величины ω . Поэтому можно ожидать, что даже небольшие изменения величины испарения могут привести к значительным изменениям величины ω . Основываясь на предыдущем анализе, рассмотрим возможные способы регулирования туманов испарения с помощью тепловых воздействий (тепловых источников) и изменения интенсивности испарения с водной поверхности.

2. Использование тепловых источников

Количество тепла, которое необходимо для повышения температуры воздуха объема, ограниченного по высоте h и ширине l при средней скорости ветра в слое u , может быть оценено по следующей приближенной формуле:

$$Q = \rho c_p u l h \tau, \quad (6)$$

где Q — расход тепла в единицу времени (кал/сек.), τ — повышение температуры воздуха выбранного объема воздуха.

Если принять $h=50$ м и $u=3$ м/сек., $l=100$ м, то $Q \approx 4 \cdot 10^6$ кал/сек. при $\tau=1^\circ$. Такое количество тепла выделяется при сгорании 2 т угля в течение часа. Для рассеяния существующего тумана, кроме повыше-

ния температуры воздуха на несколько градусов, необходимо затратить некоторое тепло на испарение капелек тумана. Однако это тепло примерно на порядок меньше, чем величина Q . Это заключение следует из выполнения неравенства $\rho c_p \tau \gg L w^1$, справедливого для туманов испарения. Приведенная выше величина Q не является слишком большой, если учесть, что τ равно нескольким градусам.

Поэтому вопрос состоит главным образом в том, каким путем можно повысить температуру рассматриваемого объема воздуха на величину τ . Для выяснения этого вопроса рассмотрим действие тепловых источников в условиях приземного слоя атмосферы. Изменение температуры воздуха τ под действием точечного источника мощности (кал/сек.), находящегося на высоте H , на основании теории атмосферной турбулентности [2, 3], можно выразить следующим уравнением:

$$\tau = \frac{Q z_1 \left(\frac{H z}{z_1^2} \right)^{\frac{m}{2}}}{2 \rho c_p (1 + 2m) k_1 \sqrt{\pi k_0 x^3}} \exp \left[-\frac{y^2}{4 k_0 x} - \frac{u_1 z_1^{1-2m} (z^{1+2m} + H^{1+2m})}{k_1 (1 + 2m)^2 x} \right] I_{-p} \left[\frac{2 u_1 z_1^{1-2m} (z H)^{\frac{1+2m}{2}}}{(1 + 2m)^{2k_1 x}} \right]. \quad (7)$$

Последняя формула является решением уравнения турбулентной теплопроводности

$$u \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \tau}{\partial z} + k_y \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}$$

при использовании степенных формул для скорости ветра и коэффициента турбулентности

$$u = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m; \quad k = k_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{1-m};$$

$$k_y = k_0 u = k_0 u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^m;$$

$$p = \frac{m}{1 + 2m}.$$

Значение τ для небольших расстояний от источника, т. е. при больших значениях аргумента функции Бесселя I_{-p} для случая, когда $y=0$ и $z=H$, на основании формулы (7), можно выразить с помощью простого соотношения

$$\tau = \frac{Q}{4 \pi \rho c_p \sqrt{\frac{k_1}{u_1}} \sqrt{k_0 \frac{H}{z}} u_1 x}. \quad (8)$$

Таким образом, в рассматриваемом случае величина τ зависит, кроме мощности источника Q , от характеристик вертикальной k_1 и горизонтальной k_0 турбулентности, скорости ветра u_1 , удаления от источника x и высоты источника H (которая с учетом эффекта нагрева мо-

¹ Общее количество тепла, необходимое для испарения тумана водности w и повышения температуры, равно

$$Q_{\Pi} = Q + L m = \rho c_p u l h \tau + L w u l h = (\rho c_p \tau + L w) u l h.$$

Для туманов испарения $\rho c_p \tau \gg L w$, где L — теплота испарения.

жет отличаться от геометрической высоты). Если принять $k_0 = 10 \frac{k_1}{u_1}$, то для равновесных условий в приводном слое ($\frac{k_1}{u_1} = 0,0175$ м) с учетом значений постоянных величин последняя формула может быть переписана

$$\tau u_1 = 4,6 \cdot 10^{-3} \frac{Q}{\sqrt{H} x}. \quad (9)$$

В этой формуле H и x выражены в м, Q — в кал/сек., u_1 — в м/сек., τ° . Для точечного источника мощности $Q = 8 \cdot 10^3$ кал/сек. ($H = 1$ м) значения τu_1 при различных состояниях устойчивости оказываются следующими:

x м	10	20	50
Равновесные условия	3,8	1,8	0,8
Неустойчивые условия	1,9	0,8	0,4

Приведенные расчеты показывают, что при слабом ветре повышение температуры воздуха на $1-2^\circ$ распространяется (вдоль ветра) на расстояние в несколько десятков метров. Следует отметить, что эта оценка относится к высоте источника 1 м и при $y = 0$. Тепловой эффект довольно быстро убывает с высотой и с удалением от оси источника ($y > 0$). Чтобы получить указанный эффект для полосы шириной 100 м, необходимо установить около 30—50 источников указанной мощности. Для такого количества источников потребуется сжигать более 60 т угля в час. Тепловой эффект линейного источника (длина $2l$) может быть выражен с помощью следующей формулы:

$$\tau_{2l} = \tau_\infty \left[\Phi \left(\frac{y+l}{2\sqrt{k_0 x}} \right) - \Phi \left(\frac{y-l}{2\sqrt{k_0 x}} \right) \right], \quad (10)$$

где τ_∞ — тепловой эффект линейного источника большой длины ($l \rightarrow \infty$), Φ — функция Крампа.

Для малых x величина τ_∞ равна

$$\tau_\infty = \frac{Q_1}{2\sqrt{2\pi} \epsilon_p \rho \sqrt{\frac{k_1}{u_1} \left(\frac{xH}{z_1} \right)^{\frac{1}{2}} u_1}}, \quad (11)$$

где Q_1 — мощность линейного источника (кал/сек. см).

Рассмотрим тепловой эффект при $y = \pm l$, тогда $\tau_{2l} = \tau_\infty \Phi \left(\frac{l}{\sqrt{k_0 x}} \right)$,

так как при $\frac{1}{\sqrt{k_0 x}} > 3$ $\Phi \approx 1$, то $\tau_\infty \approx \tau_{2l}$. Если $l = 5-10$ м, то это условие выполняется для $x < 100$ м. Значение $u_1 \tau_\infty$ в этом случае (при

$Q_1 = \frac{Q}{l}$ и $l = 5$ м) оказывается равным:

x м	10	20	50
$u_1 \tau_\infty$	3,6	1,7	1,1

Эти данные показывают, что около 10 линейных источников указанной мощности могут обеспечить повышение температуры воздуха на 1—2° полосы шириной 100 метров и длиной в несколько десятков метров. Таким образом, использование тепловых источников, по-видимому, целесообразно для регулирования условий образования туманов испарения за счет повышения начальной температуры (T_1) в соответствии с указанными выше оценками. Но тепловые источники с мощностями, рассмотренными выше (и легко осуществимыми практически), не являются эффективными для рассеяния образовавшегося тумана испарения. Кроме того, если при сгорании используемого топлива (например, нефти) выделяется дополнительная вода, то эффективность источников понижается. Для туманов испарения дополнительная влага при сгорании топлива оказывается сравнимой с водностью туманов.

3. Использование монопленок ПАВ для регулирования туманов испарения

Как известно, монопленки поверхностно-активных веществ (ПАВ) изменяют (обычно уменьшают) величину испарения с водной поверхности. Хотя в настоящее время существуют различные точки зрения на механизм действия монопленок ПАВ, [1, 4], однако, величина испарения E_{π} при наличии пленки может быть определена из уравнения

$$E_{\pi} = a_x u_1 (q_s - q_1), \quad (12)$$

где q_s влажность, отличная от q_{π} .

Последняя формула показывает, что влияние пленки на величину испарения выражается через изменение равновесной влажности у водной поверхности.

Если ввести параметр $\beta = \frac{E_{\pi}}{E}$, т. е. отношение величин испарения при наличии пленки и со свободной водной поверхности, тогда между q_s и q_{π} приближенно имеет место зависимость

$$q_s = \left[\beta + (1 - \beta) \frac{q}{q_{\pi}} \right] q_{\pi} = \gamma q_{\pi}. \quad (13)$$

Величина $\gamma = \beta + (1 - \beta) \frac{q}{q_{\pi}}$ в общем случае переменная и зависит от свойств пленки β и метеорологических условий $\frac{q}{q_{\pi}}$. Характерное значение величины $\frac{q}{q_{\pi}}$ для туманов испарения можно принять равным 0,4.

Тогда значения γ в зависимости от β будут равны:

β	0,95	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50
γ	0,97	0,94	0,88	0,82	0,76	0,70

Имея в виду, что водность тумана при наличии пленки (w_{π}) приближенно равна

$$w_{\pi} \approx q_1 + (q_s - q_1)F - q_H = q_1 + (\gamma q_{\pi} - q_1)F - q_H,$$

изменение ее за счет пленки ($w - w_{\pi}$) можно выразить следующим образом:

$$\Delta w - w_{\pi} = (1 - \gamma)Fq_{\pi}.$$

Для туманов испарения характерное значение F равно $0,2 \div 0,3$. Поэтому, если параметр γ имеет величину $0,9 \div 0,8$ (т. е. $\beta = 0,8 \div 0,7$), то изменение водности за счет уменьшения испарения монопленкой будет иметь порядок

$$\Delta w = (0,03 - 0,06) q_{\pi}.$$

Эта величина Δw приблизительно совпадает с характерной величиной водности туманов испарения ($T_{\pi} \approx 0^\circ$).

Приведенный приближенный расчет показывает, что при существовании пленки, уменьшающей испарение с водной поверхности водоема на 20—30%, можно существенно изменить условия образования тумана испарения. Опыты, проведенные в лабораторных и естественных условиях, подтверждают возможность уменьшения испарения на указанную величину с помощью некоторых ПАВ (например, цетилового спирта). Поэтому в настоящее время существуют достаточные основания для проведения опытов по воздействию на туманы испарения с помощью монопленок ПАВ и тепловых источников.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев М. П. Метеорологический режим водоемов. Гидрометеиздат, 1963.
2. Берлянд М. Е. К теории турбулентной диффузии. Тр. ГГО, вып. 138, 1963.
3. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеиздат, 1961 г.
4. Алцыбаева А. И., Голубев В. В., Марачевский В. Г. К вопросу о равновесной упругости над растворами поверхностно-активных веществ. Сб. Проблемы физики атмосферы № 2, ЛГУ, 1963.

ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ НА ПОЛЕ ВЕТРА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Рассматривается распределение скорости и направления ветра в пограничном слое при наличии горизонтального градиента температуры, вызванного влиянием водоема. Дан анализ расчетов профиля ветра над водоемом.

Наличие горизонтальной неоднородности температуры существенно меняет распределение скорости ветра в пограничном слое.

При натекании воздушного потока на водоем вследствие различий в термических и динамических характеристиках суши и водной поверхности (альбедо, шероховатости, теплофизических характеристиках и др.) образуется «внутренний пограничный слой», в котором происходят изменения метеорологических элементов и характеристик турбулентности, вызванные сменой подстилающей поверхности.

В поставленной задаче решается вопрос об изменении скорости и направления ветра вследствие наличия горизонтального градиента температуры, при этом изменения температуры над водоемом считаются известными из решения задачи трансформации температуры воздуха [1, 2]. Если рассматривать расстояние от берега порядка 10^4 м, то задача сводится к решению уравнений движения в следующем виде.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial u}{\partial z} + l v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial v}{\partial z} - l u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\quad (1)$$

где u и v — составляющие скорости ветра по осям x и y ; $k(x)$ — коэффициент турбулентности, ρ и p — плотность и давление воздуха.

Граничные условия задачи:

$$\begin{aligned}u|_{z=0} &= v|_{z=0} = 0, \\ u|_{z=\delta} &= U_g(\delta) \quad v|_{z=\delta} = V_g(\delta).\end{aligned}\quad (2)$$

Второе условие отражает тот факт, что на высоте внутреннего пограничного слоя δ скорость ветра известна и определяется строением пограничного слоя над сушей в условиях однородного по горизонтали потока. Высота внутреннего пограничного слоя δ определяется из трансформации температуры воздуха. Из уравнений статики и состоя-

ния для горизонтального градиента давления получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{z=\delta} + gT \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\delta} \frac{dz}{T(x, y, z)}, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{z=\delta} + gT \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\delta} \frac{dz}{T(x, y, z)},\end{aligned}\quad (3)$$

где

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{z=\delta} = lV_g(\delta), \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{z=\delta} = -lU_g(\delta). \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в исходную систему уравнений, после некоторых преобразований получаем уравнение для комплексной скорости $W(x, y, z)$

$$\frac{d}{dz} k(z) \frac{dW}{dz} - liW = \frac{d}{dz} k(z) \frac{d\Phi}{dz}, \quad (5)$$

где

$$W = u + iv - [U_g(\delta) + iV_g(\delta)] + \Phi(x, y, z), \quad (6)$$

$$\Phi(x, y, z) = -\frac{gT}{l} \left[i \frac{\partial}{\partial x} \int_z^{\delta} \frac{dz}{T(x, y, z)} - \frac{\partial}{\partial y} \int_z^{\delta} \frac{dz}{T(x, y, z)} \right]. \quad (7)$$

Граничные условия для W :

$$\begin{aligned}W &= -[U_g(\delta) + iV_g(\delta)] + \Phi(x, y, 0) = M(x, y) \quad \text{при } z=0, \\ W &= 0 \quad \text{при } z=\delta.\end{aligned}\quad (8)$$

Таким образом, задача свелась к решению уравнения (5) при граничных условиях (8). Умножим уравнение (5) на неизвестную пока функцию $F(\lambda, z)$ и проинтегрируем его по z от 0 до δ

$$\begin{aligned}\int_0^{\delta} F(\lambda, z) \frac{d}{dz} k(z) \frac{dW}{dz} dz - li \int_0^{\delta} W F(\lambda, z) dz &= \\ &= \int_0^{\delta} F(\lambda, z) \frac{d}{dz} k(z) \frac{d\Phi}{dz} dz.\end{aligned}\quad (9)$$

Подчиним неизвестную функцию $F(\lambda, z)$ следующим условиям:

$$\frac{d}{dz} k(z) \frac{dF(\lambda, z)}{dz} = -\lambda^2 F(\lambda, z) \quad (10)$$

и

$$F(\lambda, z)|_{z=0} = 0, \quad F(\lambda, z)|_{z=\delta} = 0. \quad (11)$$

Тогда, интегрируя первый член левой части в (9) по частям дважды и учитывая (8), (10) и (11), после несложных преобразований получаем

$$\begin{aligned}M(x, y) k(z) \frac{\partial F}{\partial z} \Big|_{z=0} - (\lambda^2 + li) \int_0^{\delta} W F(\lambda, z) dz &= \\ &= \int_0^{\delta} F(\lambda, z) \frac{d}{dz} k(z) \frac{d\Phi}{dz} dz,\end{aligned}\quad (12)$$

т. е. решение свелось к обращению интеграла

$$\int_0^{\delta} W F(\lambda, z) dz = \theta(\lambda, x, y), \quad (13)$$

где

$$\theta(\lambda, x, y) = \frac{M(x, y) k \frac{dF}{dz} \Big|_{z=0} - \int_0^{\delta} F(\lambda, z) \frac{d}{dz} k \frac{d\Phi}{dz} dz}{\lambda^2 + li}. \quad (14)$$

Будем искать решение в виде ряда

$$W(x, y, z) = \sum_{\lambda} \theta(\lambda, x, y) F(\lambda, z) P(\lambda). \quad (15)$$

Из уравнения (10), принимая степенной профиль для коэффициента турбулентности $k(z) = k_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{1-\varepsilon}$ и используя условие $z=0$, получаем

$$F(\lambda, z) = c_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{\frac{\varepsilon}{2}} J_{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(\frac{2\lambda z^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1+\varepsilon) \sqrt{k_1 z_1^{\varepsilon-1}}} \right), \quad (16)$$

где $J_p(x)$ — функция Бесселя первого рода.

Произвольную постоянную c_1 включим в неизвестную пока функцию $P(\lambda)$ (15), а условие $z=\delta$ используем для нахождения корней функции $F(\lambda, z)$, т. е.

$$J_{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left[\frac{2\lambda_j \delta^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1+\varepsilon) \sqrt{k_1 z_1^{\varepsilon-1}}} \right] = 0 \quad j=1, 2, 3 \dots \quad (17)$$

Далее умножим (15) на $F(\lambda_k, z)$ и проинтегрируем от 0 до δ

$$\int_0^{\delta} W(x, y, z) F(\lambda_k, z) dz = \sum_{j=1}^{\infty} \theta(\lambda_j, x, y) P(\lambda_j) \times \\ \times \int_0^{\delta} F(\lambda_j, z) F(\lambda_k, z) dz. \quad (18)$$

Из условия ортогональности функций $F(\lambda_j, z)$ и $F(\lambda_k, z)$, доказательство которого здесь из-за громоздкости не приводится, следует, что

$$\int_0^{\delta} F(\lambda_j, z) F(\lambda_k, z) dz = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k \\ A_k & \text{при } j = k \end{cases} \quad (19)$$

и

$$A_k = \frac{k(\delta)}{2\lambda_k} \frac{dF(\lambda_k, z)}{dz} \Big|_{z=\delta} \frac{dF(\lambda, \delta)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_k}. \quad (20)$$

Из (18) получаем, учитывая (19), что

$$P(\lambda_k) = \frac{1}{A_k}. \quad (21)$$

Тогда выражение для искомой функции окончательно будет

$$W(z, x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \theta(\lambda_j, x, y) F(\lambda_j, z) \times \\ \times \frac{2\lambda_j}{k(\delta) \left. \frac{dF(\lambda_j, z)}{dz} \right|_{z=\delta} - \left. \frac{dF(\lambda, \delta)}{d\lambda} \right|_{\lambda=\lambda_j}}. \quad (22)$$

Таким образом, полученные формулы позволяют рассчитать изменения скорости и направления ветра, если известны изменения температуры над водоемом. Воспользуемся известными [1, 2] формулами трансформации температуры воздуха. При этом, для количественной оценки влияния местного температурного градиента на ветер над водоемом удобнее проводить расчеты по наиболее простой формуле, однако не возникает никаких принципиальных трудностей для использования решений трансформации температуры воздуха в самом общем виде.

Направим ось x перпендикулярно береговой линии и воспользуемся следующей формулой трансформации температуры [1]:

$$T(x, z) = T_0(z) + \Delta T_0 \left[1 - \frac{\Gamma\left(n, \frac{\zeta^2}{4\xi}\right)}{\Gamma(n)} \right], \quad (23)$$

где

$$\Gamma\left(n, \frac{\zeta^2}{4\xi}\right) = \int_0^{\frac{\zeta^2}{4\xi}} e^{-\sigma} \sigma^{n-1} d\sigma, \\ \zeta^2 = \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}, \quad 4\xi = \frac{\varepsilon^2 k_1 x}{n^2 u_1 z_1^2}, \quad n = \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}. \quad (24)$$

Для $\Phi(z, x)$ получаем следующее выражение:

$$\Phi(z, x) = \frac{gi}{Tl} \int_z^{\delta} \frac{dT}{dx} dz = \frac{g}{T} \frac{i}{l} \frac{\Delta T_0 n z_1 (4\xi)^{\frac{n}{\varepsilon}}}{\Gamma(n) x \varepsilon} \times \\ \times \left[\Gamma\left(n + \frac{n}{\varepsilon}, \frac{\zeta_{\delta}^2}{4\xi}\right) - \Gamma\left(n + \frac{n}{\varepsilon}, \frac{\zeta^2}{4\xi}\right) \right]. \quad (25)$$

Здесь принято $\delta = \text{const}$, поскольку рассматриваются расстояния в десятках километров от берега. После несложных, но громоздких преобразований получаем для $\theta(\lambda_j, x)$ и $P(\lambda_j)$:

$$\theta(\lambda_j x) = \frac{1}{(\lambda_j^2 + li)} \left\{ - [U_g(\delta) + iV_g(\delta)] \lambda_j^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} (1+\varepsilon)^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \times \right. \\ \times \frac{\sqrt{k_1 z_1^{\varepsilon-1}}^{\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}}}{z_1^{\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)} + \frac{\lambda_j^2 gi}{lT} \frac{\Delta T_0 n z_1 (4\xi)^{\frac{n}{\varepsilon}}}{\Gamma(n) x \varepsilon z_1^{\frac{\varepsilon}{2}}} \times \\ \times \int_0^{\delta} z^{\frac{\varepsilon}{2}} J_{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(\frac{2\lambda_j z^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1+\varepsilon) \sqrt{k_1 z_1^{\varepsilon-1}}} \right) \times \\ \left. \times \left[\Gamma\left(n + \frac{n}{\varepsilon}, \frac{\zeta_{\delta}^2}{4\xi}\right) - \Gamma\left(n + \frac{n}{\varepsilon}, \frac{\zeta^2}{4\xi}\right) \right] dz \right\}, \quad (26)$$

$$P(\lambda_j) = \frac{(1+\varepsilon)z_1^\varepsilon}{\delta^{1+\varepsilon}} \frac{1}{\left[J_{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}-1} \left(\frac{2\lambda_j \delta^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1+\varepsilon) \sqrt{k_1 z_1^{\varepsilon-1}}} \right) \right]^2}. \quad (27)$$

Подставим (26) и (27) в выражение для функции $W(x, z)$. Разделив вещественную и мнимую части в левой и правой частях равенства (22), решение можно привести к следующему виду, более удобному для расчетов:

$$u(x, z) = U_g(\delta) + \sum_{j=1}^{\infty} O(\lambda_j, z) \times \\ \times \{ -[\lambda_j^2 U_g(\delta) + i V_g(\delta)] \times C(\lambda_j) + B(\lambda_j, \xi) \Delta T_0 \}, \quad (28)$$

$$v(x, z) = V_g(\delta) - \frac{g}{Tl} \frac{\Delta T_0 z_1 (4\xi)^{\frac{1}{1+2\varepsilon}}}{\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right) x (1+2\varepsilon)} \times \\ \times \left[\Gamma\left(\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}, \frac{\xi_0^2}{4\xi}\right) - \Gamma\left(\frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}, \frac{\xi^2}{4\xi}\right) \right] + \\ + \sum_{j=1}^{\infty} O(\lambda_j, z) \left\{ [U_g(\delta) - \lambda_j^2 V_g(\delta)] C(\lambda_j) + \frac{\lambda_j^2}{l} B(\lambda_j, \xi) \Delta T_0 \right\}, \quad (29)$$

где

$$O(\lambda_j, z) = \frac{P(\lambda_j) \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} J_{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}} \left(\frac{2\lambda_j z^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1+\varepsilon) \sqrt{k_1 z_1^{\varepsilon-1}}} \right)}{(\lambda_j^4 + l^2)}, \quad (30)$$

$$C(\lambda_j) = \frac{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{1+\varepsilon}} \sqrt{k_1 z_1^{\varepsilon-1}}^{\frac{2+\varepsilon}{1+\varepsilon}}}{z_1^{\frac{\varepsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)} \lambda_j^{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}, \quad (31)$$

$$B(\lambda_j, \xi) = \frac{\lambda_j^2 g}{T} \frac{z_1 (4\xi)^{\frac{1}{1+2\varepsilon}}}{\Gamma(n) x (1+2\varepsilon)} \int_0^\delta \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}} \times \\ \times J_{\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}} \left(\frac{2\lambda_j z^{\frac{1+\varepsilon}{2}}}{(1+\varepsilon) \sqrt{k_1 z_1^{\varepsilon-1}}} \right) \left[\Gamma\left(n + \frac{n}{\varepsilon}, \frac{\xi_0^2}{4\xi}\right) - \Gamma\left(n + \frac{n}{\varepsilon}, \frac{\xi^2}{4\xi}\right) \right] dz. \quad (32)$$

Таким образом, распределение ветра над водоемом определяется скоростью воздушного потока на высоте внутреннего пограничного слоя, условиями турбулентного обмена над водной поверхностью и горизонтальным градиентом температуры во внутреннем пограничном слое, обусловленным различием в температурах воды и окружающей водоем суши (ΔT_0). По полученным формулам были рассчитаны примеры, которые позволили численно оценить влияние изменения поля температуры над водоемом на профиль ветра. При расчетах принимались следующие величины параметров: $k_1 = 0,10$ м²/сек., $\varepsilon = 0,10$; $\Delta T_0 = 10^\circ$; $U_g(\delta) = 10$ м/сек.; $V_g(\delta) = 0,5$ м/сек.

Результаты расчетов представлены на рис. 1, где приведены профили скорости ветра и температурных изменений при $x=10$ км (кривые 2 и 3) и профиль скорости ветра при $x \rightarrow \infty$, т. е. в случае горизонтальной однородности над водной поверхностью (кривая 1), когда вид профиля определяется только условиями турбулентного обмена. Следует отметить, что изменения скорости ветра наиболее существенны в самом нижнем приводном слое. Величины этих изменений достигают максимума

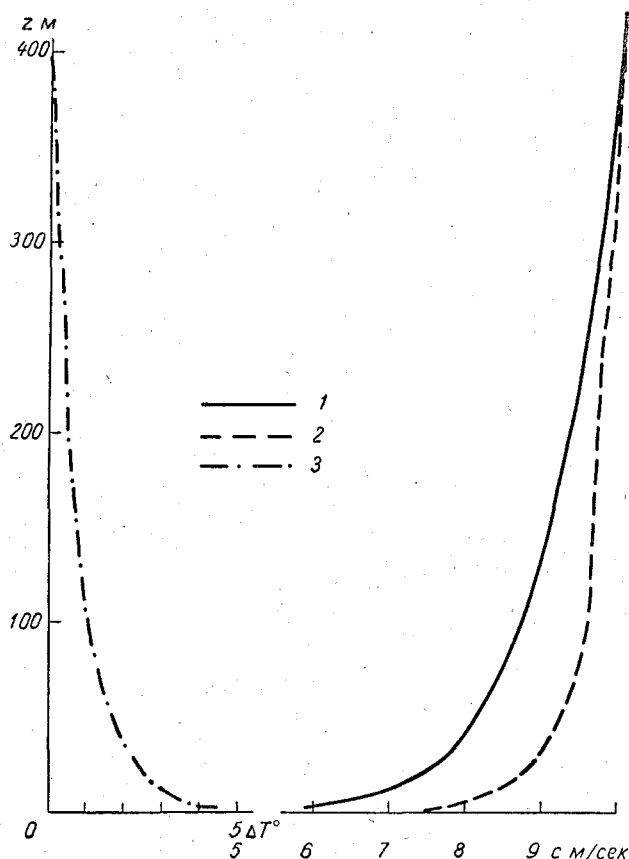


Рис. 1. Профили скорости ветра и температурных изменений.

1 — профиль скорости ветра при $x \rightarrow \infty$, 2 — профиль скорости ветра при $x=10$ км, 3 — профиль температурных изменений.

на высоте 2—10 м, что связано с максимальным влиянием турбулентного обмена и изменений температуры на самые нижние слои воздушного потока. С высотой величина температурных изменений резко уменьшается и в связи с этим резко уменьшаются и изменения в профиле ветра.

На основании полученных формул была проведена оценка величин нелинейных членов в уравнениях движения, которые не учитывались в данной задаче. Расчеты скорости ветра для x , равного 10 км и 20 км, показали, что величина нелинейных членов на порядок меньше остальных членов в исходных уравнениях.

Данное решение следует рассматривать как первое приближение и далее решать задачу методом последовательных приближений, учитывая во втором приближении нелинейные члены в исходной системе

уравнений. Однако уже первое приближение позволяет сделать определенные выводы о влиянии горизонтальной неоднородности в поле температуры на скорость ветра в пограничном слое. Так, оказалось возможным количественно показать, что при достаточно больших контрастах температуры ($\Delta T = 20^\circ$) скорость ветра на высотах 2—10 м над водоемом может быть больше скорости геострофического ветра.

Полученные формулы могут быть номографированы и тогда расчеты существенно упрощаются и решение может применяться в практике расчетов и прогноза скорости ветра над водоемами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеиздат, Л., 1961.
2. Тимофеев М. П. Метеорологический режим водоемов. Гидрометеиздат, Л., 1963.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ВЕТРА В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

Приводятся осредненные экспериментальные данные о распределении ветра в пограничном слое при наличии адвекции.

Наличие адвекции существенно сказывается на распределении ветра в пограничном слое и в свободной атмосфере. Однако в настоящее время очень мало работ, посвященных анализу экспериментальных данных о профилях ветра в пограничном слое при существенной горизонтальной неоднородности температуры.

В настоящей работе анализировалось распределение ветра в трехкилометровом слое по шаропилотным данным ст. Воейково под Ленинградом. Для анализа выбирались случаи ярко выраженной адвекции, т. е. случаи, когда были велики горизонтальные градиенты температуры и сильно сказывалось их влияние на профиль ветра.

Для таких условий распределение ветра можно рассматривать как функцию следующих безразмерных параметров:

$$\frac{lz}{V_{0g}}; \quad \frac{g}{lT} \frac{(T_0 - T_H)}{V_{0g}}; \quad \frac{lz_0}{V_{0g}}; \quad \frac{\alpha_x}{l}; \quad \frac{\alpha_y}{l}.$$

Здесь $V_{0g} = -\frac{1}{\rho l} \frac{\partial P_0}{\partial n}$ — геострофический ветер, определяемый по полю наземных изобар; $(T_0 - T_H)$ — перепад температур в пограничном слое;

$$\alpha_x = -\frac{g}{lT} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial y}, \quad \alpha_y = -\frac{g}{lT} \cdot \frac{\partial \bar{T}}{\partial x},$$

где $\frac{\partial \bar{T}}{\partial x}$, $\frac{\partial \bar{T}}{\partial y}$ — средние по высоте горизонтальные градиенты температуры $l = 2\omega \sin \varphi$ — параметр Кориолиса; z_0 — шероховатость.

В соответствии с этим рассматривались отношения $\frac{U(z)}{V_{0g}}; \frac{V(z)}{V_{0g}}$ как функции безразмерной высоты $\frac{lz}{V_{0g}}$ для данной шероховатости и

для определенной температурной стратификации [2]. При этом фиксировались значения $\frac{\alpha_x}{l}$; $\frac{\alpha_y}{l}$.

Для анализа подбирались случаи больших значений горизонтального температурного градиента, поэтому не удалось обнаружить заметной связи между $\frac{V(z)}{V_{0g}}$ и степенью устойчивости атмосферы $\frac{g}{lT} \frac{(T_0 - T_H)}{V_{0g}}$. Точно также нет заметной зависимости $\frac{V(z)}{V_{0g}}$ от изменения шероховатости от зимы к лету.

Подбор случаев проводился следующим образом. По наземным изобарам и изогипсам карт АТ₈₅₀ и АТ₇₀₀ определялись значения геострофического ветра и рассчитывались параметры

$$\frac{\alpha_x}{l} = -\frac{g}{l^2 T} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{U_H - V_{0g}}{Hl};$$

$$\frac{\alpha_y}{l} = \frac{g}{l^2 T} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{V_H}{Hl}.$$

Здесь U_H, V_H — составляющие геострофического ветра, определенные по картам АТ, H — высота изобарической поверхности. За ось x при этом принималось направление V_{0g} .

В соответствии со значением $\frac{\alpha_x}{l}$; $\frac{\alpha_y}{l}$ все случаи объединялись в четыре группы.

$$\text{I } \frac{\alpha_x}{l} > 10, \quad -10 < \frac{\alpha_y}{l} < 10.$$

$$\text{II } \frac{\alpha_x}{l} < -10, \quad -10 < \frac{\alpha_y}{l} < 10.$$

$$\text{III } \frac{\alpha_y}{l} < -10, \quad -10 < \frac{\alpha_x}{l} < 10.$$

$$\text{IV } \frac{\alpha_y}{l} > 10, \quad -10 < \frac{\alpha_x}{l} < 10.$$

Группы I, II соответствуют таким условиям, когда изотермы и изобары параллельны друг другу и геострофический ветер, не меняя направления, усиливается или уменьшается с высотой. Изменение температуры при этом, определенное по данным радиозондирования до и после данного срока, составляло менее 3° за сутки.

В группы III, IV объединены случаи, когда изотермы и изобары перпендикулярны друг другу и геострофический ветер при постоянстве составляющей $u(z)$ резко меняет направление. Резкая адвекция тепла или холода в этом случае меняет температуру воздуха: $\frac{\Delta T}{\Delta t} > 3$ град/сутки.

Всего по этим признакам было подобрано для первой группы 10 случаев, для второй 8, для третьей 7 и для четвертой 4.

Случаи каждой группы были осреднены, и результаты представлены на рис. 1. На этом рисунке кривые соответствуют группам I—IV, точки

соответствуют безразмерному соотношению $\frac{z_l}{V_{og}}$, равному 0,75; 0,3; 0,7; 1,2; 1,5; 2,0; 2,5; 3,0; 4,0. Пунктиром соединены точки, которые содержат меньшее число случаев, так как анализ проводился до высоты 3 км.

Годографы, приведенные на этом рисунке, подтверждают большое влияние горизонтального градиента температуры на распределение ветра.

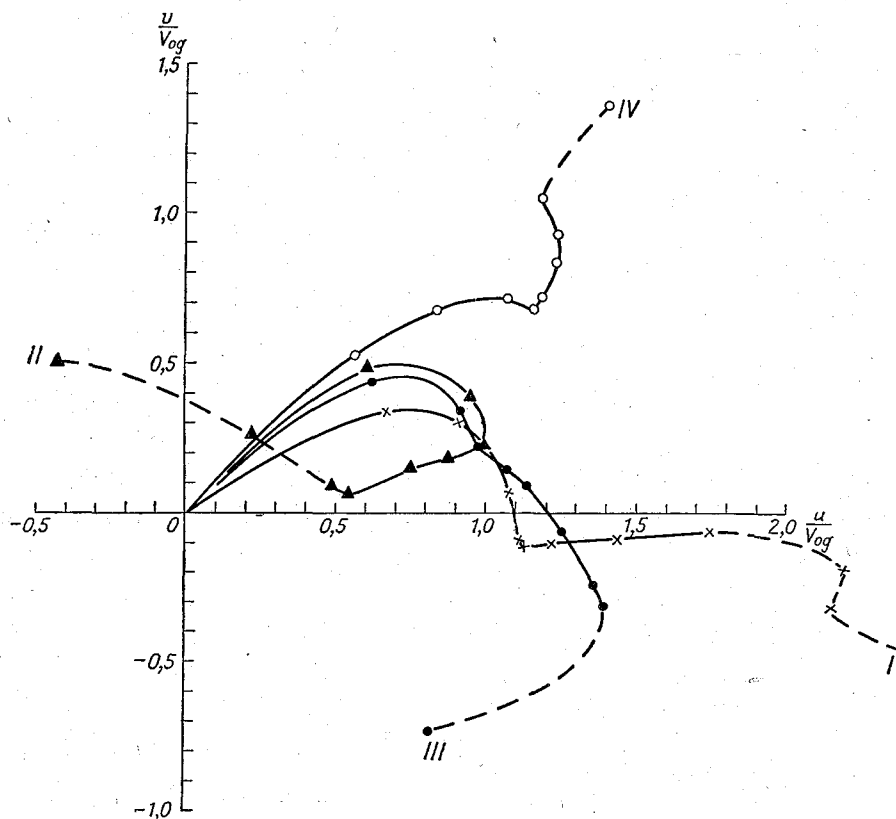


Рис. 1. Распределение составляющих скорости ветра при термическом ветре.
I, II — градиент температуры параллелен барическому градиенту, III, IV — градиент температуры перпендикулярен барическому градиенту.

ЛИТЕРАТУРА

1. Утина З. М. О влиянии горизонтальной неоднородности температуры на строение пограничного слоя атмосферы. Тр. ГГО, вып. 127.
2. Зилитинкевич С. С. К методике обработки результатов экспериментальных исследований планетарного пограничного слоя атмосферы. Взаимодействие атмосферы и океана. Материалы севастопольского симпозиума 1964 г. Наукова думка, Киев, 1965.

НЕКОТОРЫЕ ДАННЫЕ ПО ГОРИЗОНТАЛЬНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ МЕТЕОЭЛЕМЕНТОВ НАД ВОЛГОГРАДСКИМ ВОДОХРАНИЛИЩЕМ

Приводятся результаты наблюдений за горизонтальным распределением температуры, влажности воздуха и скорости ветра, полученные на Волгоградском водохранилище в период 1961—1963 гг. Анализируется изменение указанных элементов в зависимости от стратификации атмосферы и высоты берегов.

В настоящее время вопросы о влиянии водоемов на распределение метеорологических элементов над ними исследованы довольно подробно, дано теоретическое обоснование и решение уравнений тепло- и влагообмена и обмена количеством движения в воздушном потоке, переходящем с суши на водную поверхность [1, 3, 9, 10, 12]. Экспериментальные данные имеются для Рыбинского и Цимлянского водохранилищ [7, 8, 11], оз. Валдай [4, 5], оз. Севан [6].

Для практических целей — при прогнозировании погоды по акватории водоема в навигационный период, при определении условий движения водного транспорта по водоему (особенно при плотовождении) — необходимо выделение характерных особенностей данного водоема, благодаря которым происходят отклонения от полученных закономерностей в распределении метеоэлементов над ним.

В предлагаемой статье по наблюдениям, проведенным в навигационный период 1961—1963 гг. на Волгоградском водохранилище, рассматривается распределение температуры, влажности воздуха и скорости ветра и некоторые его особенности, связанные со своеобразием данного водоема.

Краткие сведения о водохранилище

Волгоградское водохранилище расположено в лесостепной (северная часть) и степной (центральная и южная части) ландшафтных зонах. Оно имеет вытянутую форму, довольно большую протяженность (около 680 км) и небольшую ширину (средняя ширина 10 км, максимальная — 14 км). Глубина водохранилища в среднем составляет 17,5 м, наибольшая глубина (41 м) отмечается в приплотинной части.

Берега как по конфигурации, так и по высоте резко различны: правый, высокий, — до 20 м, в отдельных местах до 40—45 м над уровнем воды; левый — пологий, ровный почти на всем протяжении.

Методика наблюдений

Для наблюдений за горизонтальным распределением температуры, влажности воздуха и скорости ветра над водохранилищем был применен метод синхронных измерений этих элементов, которые проводились один-два раза в месяц в течение навигационного периода в нескольких точках между берегами (поперечные разрезы) в направлении движения воздушного потока. Как правило, выбирались две-три точки на водоеме и по одной точке на каждом берегу вблизи уреза воды.

Над водной поверхностью наблюдения проводились с лодок, катеров и на специальной плавучей установке (плавучей станции — ПГМС), находившейся на водохранилище стационарно в течение навигационного периода [2].

В основном пункты наблюдений на водохранилище располагались на расстоянии 0,2; 1,0; 2—2,5; 4—5 км от подветренного берега. Каждый разрез представлял собой серию наблюдений продолжительностью 1,5—3 часа. Приборы (аспирационные психрометры и ручные анемометры) устанавливались на высоте 2 м над земной или водной поверхностью.

Поперечные разрезы проводились на участках: Дубовка—Рахинка (расстояние между берегами 9 км), Пичуга—лесоперевалочная база (расстояние между берегами 8 км) и Камышин—Николаевка (расстояние между берегами 5 км).

Результаты наблюдений

В течение теплого времени года в районе Волгоградского водохранилища и окружающей суши формируются следующие характерные условия.

Весной, когда происходит интенсивный прогрев поверхности суши и воздуха над ней, температура воды еще низкая, и над водохранилищем образуется хорошо выраженная инверсия. Летом над водохранилищем в дневное время сохраняется инверсия с небольшими градиентами температуры; часто также наблюдаются условия, близкие к равновесным. Над сушей в это время преобладают сверхadiaбатические градиенты. Осенью, когда температура воды превышает температуру поступающего с суши воздуха, характерным для водохранилища является наличие в нижнем слое воздуха в течение суток сверхadiaбатических градиентов. Над сушей в конце осени чаще наблюдаются условия равновесия.

С изменением условий стратификации воздуха над водохранилищем и сушей характер распределения метеорологических элементов над водной поверхностью не остается постоянным, что подтверждается наблюдениями, представленными в табл. 1. В таблице помещены данные, полученные на разрезах при ветрах, дующих с суши на водоем (ветры западной и восточной четвертей), на трех участках водохранилища.

Условия стратификации в приводном слое воздуха оценивались как $\frac{\Delta T}{u^2}$, где $\Delta T = T_{\text{п}} - T_2$ ($T_{\text{п}}$ — температура поверхности воды, T_2 — температура воздуха в середине данного участка наблюдений), u — скорость ветра на высоте 2 м над водой в середине данного участка наблюдений.

Кроме того, в качестве характеристики влагонасыщенности подходящего с суши воздуха приводится величина относительной влажности воздуха, измеренной над сушей на первой береговой точке.

Как видно из табл. 1, большинство наблюдений за горизонтальным распределением метеорологических элементов над водохранилищем

Таблица 1

Горизонтальное распределение метеорологических элементов
над Волгоградским водохранилищем

Дата, время час. мин. (от — до)	Направление ветра	Расстояние от начального пункта, км	Температура воздуха	Абсолютная влажность, мб	Скорость ветра, м/сек.	Начальная от- носительная влажность, %	$\frac{\Delta T}{u^2}$
1961 год							
Дубовка							
13 V 16 00—18 45	ЗСЗ	Правый берег, урез	23,1	12,6	4,8	47	—0,40
		0,2	21,1	11,9	4,4		
		1,0	18,8	12,0	4,2		
		5,0	16,4	12,6	3,2 ¹ (3,9)		
		Левый берег, урез	17,4	12,8	3,5		
22 VII 9 30—12 00	З	Правый берег, урез	28,7	19,2	3,6	49	—0,04
		0,2	25,7	19,7	5,2		
		2,0	24,4	20,3	5,4		
		5,0	24,8	20,4	3,5 ¹ (4,5)		
		Левый берег, урез	25,1	20,1	4,3		
8 VIII 11 45—13 15	ССЗ	Правый берег, урез	26,2	14,9	1,7	44	—0,38
		0,2	25,3	19,2	2,7		
		1,0	24,4	18,0	2,5		
		5,0	24,5	18,7	1,8 ¹		
		Левый берег, урез	25,6	19,5	2,9		
26 VIII 14 00—15 45	З	Правый берег, урез	23,7	8,2	4,8	26	—0,01
		0,1			5,8		
		0,3	23,0	11,7	5,9		
		1,0	22,7	12,1	6,6		
		5,0	22,4	12,8	4,5 ¹ (5,5)		
14 IX 14 45—16 00	ЗСЗ	Правый берег, урез	16,3	12,0	3,1	65	0,18
		0,03			2,8		
		0,08	16,1	13,1	3,6		
		1,0	15,7	14,0	3,9		
		5,0	15,4	13,4	2,6 ¹		
		Левый берег, урез	15,4	13,8	3,5		

Рахинка

13 X 13 15—15 00	В	Левый берег, урез	19,4	4,5	2,6	21	—0,35
		0,2	17,7	6,5	4,6		
		1,0	16,6	6,2	4,0		
		4,0	16,7	7,4	3,2		
		Правый берег, урез	17,5	7,9	2,6		

Дата, время час. мин. (от — до)	Направление ветра	Расстояние от начального пункта, км	Температура воздуха	Абсолютная влажность, мб	Скорость ветра, м/сек.	Начальная от- носительная влажность, %	$\frac{\Delta T}{u^2}$
--	----------------------	--	------------------------	-----------------------------	------------------------------	--	------------------------

Дубовка

17 XI 12 15—13 45	ЗЮЗ	Правый берег, урез, 0,5	2,0 2,7	5,8 6,2	5,7 7,3	83	0,06
		Левый берег, урез 0,1 (суша)	3,1 2,9	6,4 5,9	8,0 6,8		

1962 год

Пичуга

25 VI 12 50—14 10	ЗСЗ	Правый берег, урез 0,5	24,0 22,2	9,2 10,6	8,6 7,8	31	—0,02
		Левый берег, урез 1,2	21,7 22,7	11,2 13,0	6,9 5,0		

Дубовка

26 VII 12 30—15 25	З	Правый берег, урез 0,1	25,2	11,4	7,5	36	—0,02
		0,2			6,6		
		0,4	24,0	12,3	7,6		
		1,2	23,9	12,7	8,8		
		6,0	23,6	14,6	9,2		

Рахинка

26 IX 14 30—16 25	В	Левый берег, урез 0,2	24,5 22,6	5,9 6,6	5,5 6,1	19	—0,09
		1,0	22,0	8,7	7,0		
		3,0	21,5	8,9	7,8		
		Правый берег, урез 3,0	21,4	9,5	5,9		
14 XI 12 30—13 50	ВСВ	Левый берег, урез 1,0	0,2 0,4	4,2 4,7	2,8 4,1	68	0,34
		3,0	0,9	5,1	2,6 ¹ (3,9)		
		Правый берег, урез 1,0	1,0	4,8	4,6		

1963 год

Николаевка

17 VII 10 00—11 45	ВСВ	Левый берег, урез 0,2	26,2 25,5	21,3 22,4		68	—0,22
		1,0	24,4	22,5	4,1		
		2,5	24,2	22,7	3,9		
		Правый берег, урез 1,0	24,3	21,9	3,2		
					2,7		

Дата, время час. мин. (от — до)	Направление ветра	Расстояние от начального пункта, км	Температура воздуха	Абсолютная влажность, мб	Скорость ветра, м/сек.	Начальная от- носительная влажность, %	$\frac{\Delta T}{u^2}$
П и ч у г а							
19 VIII 11 30—12 15	СЗ	Правый берег, урез 1,0 4,0 Левый берег, урез	25,0 23,8 22,5 24,6	10,4 11,0 13,6 12,0	2,3 3,3 2,7 2,4	33	—0,16
Л П Б							
19 VIII 12 30—13 30	В	Левый берег, урез 4,0 7,0 Правый берег, урез	24,1 22,9 22,3 23,5	12,0 13,0 14,3 14,4	1,1 2,3 3,3 3,9	40	—0,30
24 VIII 11 00—13 00	В	Левый берег, урез 1,0 4,0 Правый берег, урез	28,9 25,7 26,0 26,3	12,9 16,4 16,4 16,9	6,0 5,5 6,8 8,0	33	—0,11
14 IX 11 00—12 30	ВЮВ	Левый берег, урез 1,0 4,0 Правый берег, урез	24,4 22,4 22,3 23,0	13,8 15,1 16,7 16,1	4,9 5,6 5,0 6,4	46	—0,13
П и ч у г а							
17 IX 14 45—16 00	З	Правый берег, урез 1,0 4,0 Левый берег, урез	25,0 23,4 23,0 22,6	7,4 10,6 11,2 11,5	6,6 8,8 9,2 9,6	23	—0,04
23 IX 11 45—13 30	ЗСЗ	Правый берег, урез 1,0 4,0 Левый берег, урез	16,6 15,8 15,5 15,2	8,1 8,8 9,1 9,3	4,2 5,0 4,7 6,1	42	0,00
К а м ы ш и н							
11 X 10 45—12 30	ЗЮЗ	Правый берег, урез 0,2 1,0 2,5 Левый берег, урез	14,6 14,8 14,6 14,5 14,3	12,2 11,6 12,2 13,6 —	5,1 6,7 6,7 5,2 5,5	74	—0,02
30 X 10 00—11 30	З	Правый берег, урез 1,0 2,5 Левый берег, урез	7,8 7,7 7,5 7,3	8,3 8,6 8,8 7,1	5,5 7,1 5,5 ¹ 6,2	78	—0,04

Дата, время час. мин. (от — до)	Направление ветра	Расстояние от начального пункта, км	Температура воздуха	Абсолютная влажность, мб	Скорость ветра, м/сек.	Начальная от- носительная влажность, %	$\frac{\Delta T}{u^2}$
П и ч у г а							
24 XI 13 00—14 00	З	Правый берег, урез	4,9	6,6	4,5	76	0,00
		0,2	4,9	6,6	6,2		
		0,4	4,8	7,0	6,4		
К а м ы ш и н							
26 XI 11 30—13 15	ЗСЗ	Правый берег, урез	—4,3	3,6	4,2	81	0,19
		0,2	—3,7	3,8	5,3		
		1,0	—3,6	3,8	5,9		
		1,5	—3,0	4,1	6,2		
		2,5	—3,0	3,7	5,2		
		Левый берег, урез	—3,8	3,9	5,4		

Примечание. ¹ Скорость ветра занижена за счет неудачного расположения анемометра, в скобках приведены величины, полученные путем пересчета с высоты 10 м.

относилось к инверсионным и равновесным условиям стратификации воздуха.

По данным табл. 1 построены графики связи температурной стратификации с горизонтальным изменением температуры (a), абсолютной влажности воздуха (b) и скорости ветра (c) (рис. 1). Величина изменения указанных метеозадач вычислялась как разность между значениями их в середине участка наблюдений, т. е. на расстоянии 3—5 км от берега (T_2, l_2, u_2) и начальными значениями на берегу (T_1, l_1, u_1).

Из рис. 1 видно, что изменение рассматриваемых элементов над водохранилищем по сравнению с начальными значениями на суше имеет довольно хорошо выраженную связь со стратификацией воздуха в нижнем двухметровом слое.

Весной и в первую половину лета (период инверсий) наблюдались значительные изменения метеозадач: так, уменьшение температуры воздуха над водохранилищем достигало 5—6°.

При наличии инверсии над водохранилищем и низких температур воды весной испарение водяных паров было ослаблено, и прирост влажности над водой был незначительным, а иногда отсутствовал.

С переходом к равновесным и близким к ним условиям на водохранилище (конец лета — начало осени) изменения температуры воздуха были незначительны. При наличии же довольно больших положительных градиентов над водой осенью ($\frac{\Delta T}{u^2}$ около 0,3) температура воздуха повышалась на 1—1,5° от начальной величины.

Абсолютная влажность воздуха при равновесных условиях над водохранилищем увеличивалась на 4—4,5 мб по сравнению с начальным значением, а при неустойчивой стратификации изменения ее не превышали 2 мб (прямая II, рис. 2 б).

Эти данные подтверждаются также изменением абсолютной влажности воздуха в зависимости от влагонасыщенности подходящего воз-

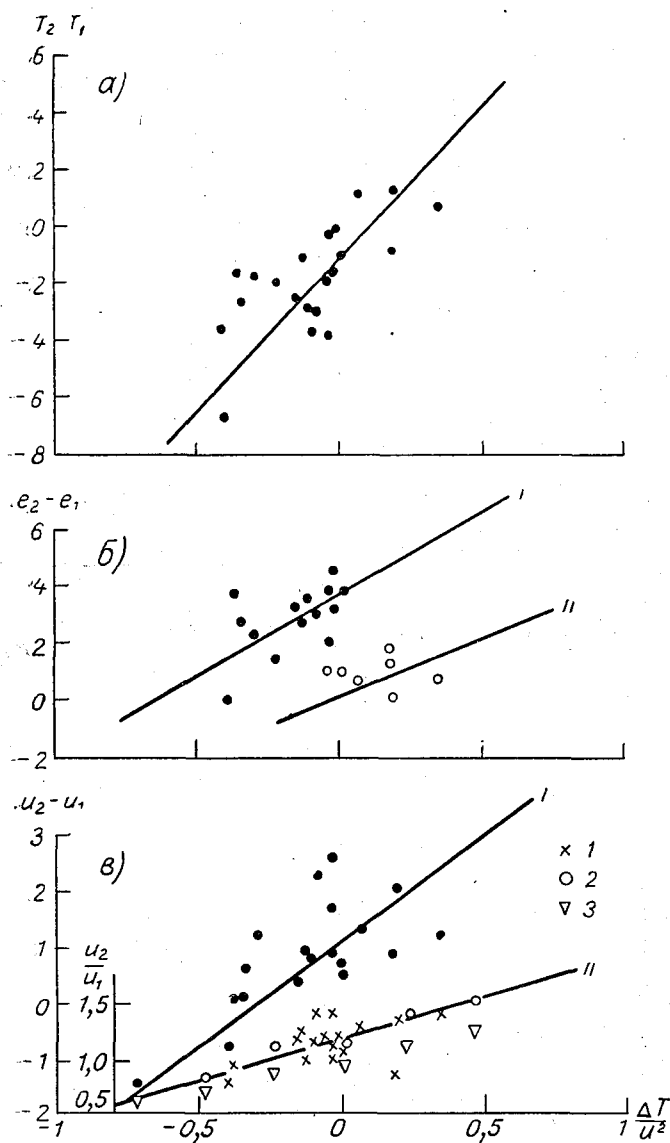


Рис. 1. Зависимость изменения метеозаментов над водохранилищем от стратификации воздуха.

а — температура воздуха; б — влажность воздуха $I - \frac{\Delta T}{u^2} < 0$,

$II - \frac{\Delta T}{u^2} > 0$; в — скорость ветра $I - u_2 - u_1$ $II - \frac{u_2}{u_1}$.

1 — Волгоградское водохранилище, 2 — Рыбинское водохранилище.
3 — Цимлянское водохранилище.

духа, представленной на рис. 2. При малой влагонасыщенности подходящего воздуха, характеризующейся относительной влажностью r , наблюдается больший прирост влажности над водохранилищем, при большой влагонасыщенности — малый прирост.

Зависимость распределения температуры и влажности воздуха от его стратификации на Волгоградском водохранилище согласуется с аналогичными зависимостями, полученными для Цимлянского водохранилища [11] и для оз. Валдай [4].

Величина изменения скорости ветра над водохранилищем в зависимости от стратификации воздуха была следующей: при инверсиях происходило уменьшение скорости ветра примерно на 20%, когда начальная скорость ветра над сушей составляла около 5 м/сек. (рис. 2 в).

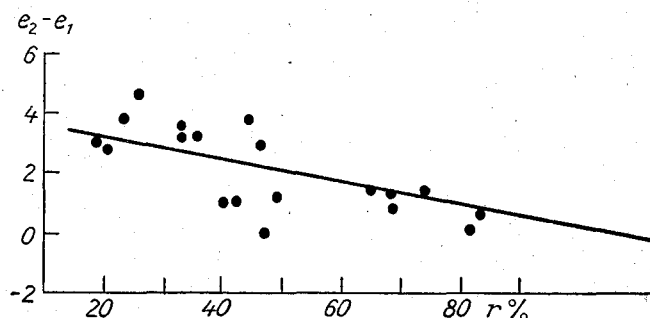


Рис. 2. Зависимость изменения абсолютной влажности воздуха над водохранилищем от влагонасыщенности подходящего воздуха.

При $\frac{\Delta T}{u_2} \geq 0$ скорость ветра над водохранилищем увеличивалась до 40—45% от начальной скорости 3—4 м/сек.

Величины относительного изменения скорости ветра над Волгоградским водохранилищем $\left(\frac{u_2}{u_1}\right)$ в зависимости от стратификации воздуха близки к тем, которые получены по наблюдениям на Рыбинском и Цимлянском водохранилищах. Это видно на рис. 1 в, прямая II, где данные, соответствующие последним двум водохранилищам, заимствованы из работы Г. Г. Тараканова [7].

В горизонтальном распределении метеозлементов при переходе воздушного потока с суши на водоем имеется довольно четкая закономерность: наиболее интенсивное изменение происходит на начальном участке движения воздуха над водоемом (1—2 км).

По наблюдениям на Волгоградском водохранилище выявлены некоторые особенности распределения метеозлементов в зависимости от направления воздушного потока при переходе с суши на водную поверхность. Эти особенности связаны с различием берегов водохранилища: воздушный поток западной четверти переходит на водоем через высокий правый берег, восточной четверти — через пологий левый берег.

На рис. 3 представлен ряд горизонтальных профилей температуры, влажности воздуха и скорости ветра при западных и восточных потоках в условиях, сходных по стратификации воздуха. Во всех случаях вблизи правого берега наблюдалось уменьшение скорости ветра. Оно было незначительным при инверсиях и довольно существенно при равновесной и устойчивой стратификации, когда скорость ветра над водохранилищем уменьшалась примерно на 20% по сравнению со скоростью ветра на

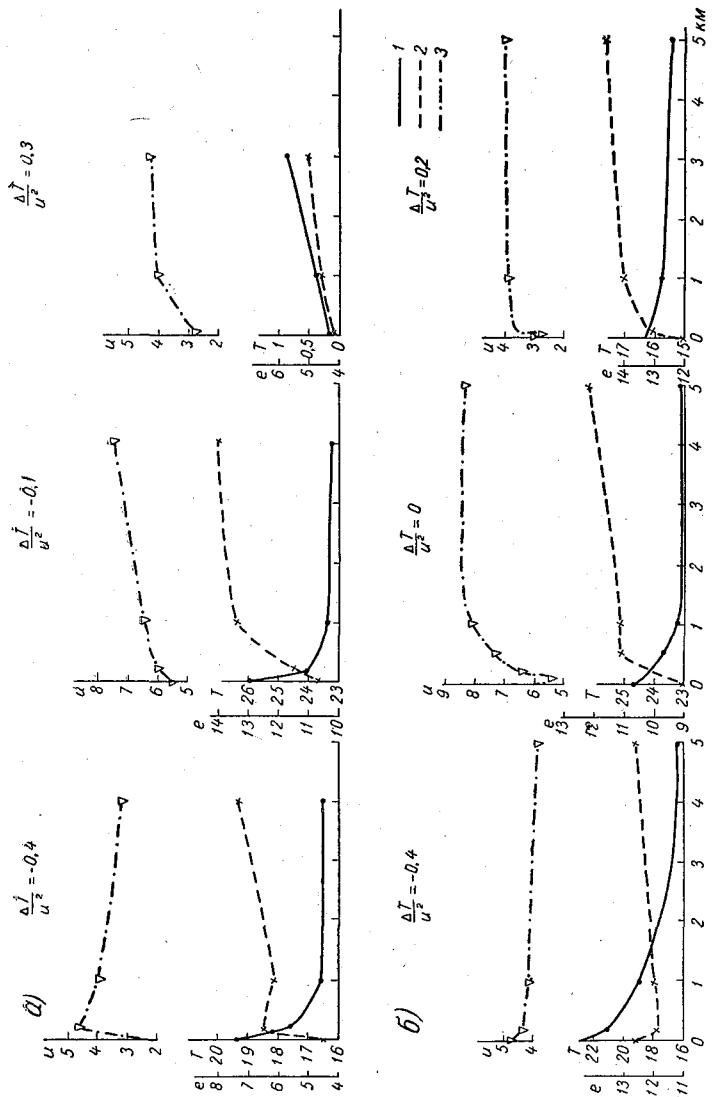


Рис. 3. Горизонтальные профили метеорологических элементов над водохранилищем.
 а — при восточных ветрах, б — при западных ветрах (1 — температура воздуха, 2 — влажность воздуха, 3 — скорость ветра).

правом берегу. Зона пониженных скоростей ветра на водохранилище не превышала 200 м от уреза воды.

При ветре, дующем с востока, уменьшения скорости ветра над водохранилищем не наблюдалось.

На горизонтальном распределении температуры и влажности воздуха различия в высоте берегов водохранилища заметно не сказались.

Из изложенного следует, что при определении значений температуры, влажности воздуха и скорости ветра над водохранилищем по данным береговых станций необходимо учитывать условия стратификации воздуха, а для скорости ветра также и направление, при котором происходит переход воздушного потока на водохранилище: при западном направлении около высокой части правого берега образуется зона пониженных скоростей ветра примерно на расстоянии менее 200 м.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. К вопросу о трансформации профиля ветра. Тр. ГГО, вып. 33, 1952.
2. Дворкина М. Д., Малевский-Малевич С. П. Из опыта эксплуатации плавучей установки Волгоградской гидрометеорологической обсерватории. Тр. ГГО, вып. 95, 1963.
3. Зайцев А. С. Трансформация поля ветра при изменении турбулентного обмена. Тр. ГГО, вып. 95, 1963.
4. Зайцев А. С., Серова Н. В. Некоторые результаты метеорологических наблюдений на Валдайском озере с помощью специально оборудованной лодки. Тр. ГГО, вып. 150, 1964.
5. Константинов А. Р., Голубев В. С., Покудов В. В. Исследование характеристик воздушного потока, определяющих изменение испарения с поверхности водоема. Тр. ГГИ, вып. 81, 1960.
6. Метеорологический режим оз. Севан. Под ред. М. П. Тимофеева. Гидрометиздат, 1960.
7. Тараканов Г. Г. К вопросу об изменении скорости ветра при переходе с суши на водную поверхность. Тр. ЛГМИ, вып. 8, 1958.
8. Тервинский В. Н. Формирование ветрового режима над Цимлянским водохранилищем. Тр. ГГО, вып. 95, 1963.
9. Тимофеев М. П. Об изменении скорости ветра под влиянием водоемов. Тр. ГГО, вып. 95, 1963.
10. Тимофеев М. П. Метеорологический режим водоемов. Гидрометеиздат, 1963.
11. Шлак И. С. Изменение метеорологических элементов при натекании воздушного потока на водоем. Сб. работ Цимлянской ГМО, 1958.
12. Яковлева Н. И. О трансформации воздуха над водоемами. Тр. ГГО, вып. 41 (103), 1953.

Н. В. СЕРОВА, Г. З. ЗИНЧЕНКО, Е. Ф. СЕМЕНОВ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ВЕЛИЧИН ТЕПЛООБМЕНА В ГРУНТЕ ВОДОЕМА

Приводятся результаты экспериментальных наблюдений за теплообменом в грунте водоема и дается оценка роли этой составляющей в общем тепловом балансе водоема в различные периоды года.

Вопрос о необходимости учета теплообмена в грунте при расчете составляющих теплового баланса водоема является до настоящего времени недостаточно ясным. Поэтому экспериментальные наблюдения, позволяющие оценить величину тепловых потоков в грунте (ложе) водоема, представляют как научный, так и практический интерес.

Для вычисления величины потоков тепла в грунте необходимо знать ход температуры в верхнем слое грунта по глубине и по времени, а также теплофизические характеристики данного грунта.

Для измерения температуры в грунте под водой в Главной геофизической обсерватории им. Воейкова была разработана конструкция штанги с вмонтированными в нее термометрами сопротивления. Штанга вбивается в грунт с таким расчетом, что верхний термометр располагается на границе грунт—вода. Следующие термометры находятся на глубинах 10 и 50 см от поверхности грунта. Подробное описание установки и некоторые результаты наблюдений по ней на оз. Севан даны в монографии [1].

В настоящей статье приводятся результаты наблюдений, проведенных ГГО и ЦГМО с помощью такой установки, на Цимлянском водохранилище в его приплотинной части в течение нескольких периодов: зима 1961-62 г., зима 1962-63 г. и непрерывные наблюдения с октября 1963 г. по ноябрь 1964 г. Слой воды над штангой составлял 15 м, что соответствует средней глубине приплотинного участка Цимлянского водохранилища. Расстояние от ближайшего берега около 200 м. Установка штанг и измерения по ним проводились сотрудниками Цимлянской ГМО. Измерения производились один раз в сутки.

На рис. 1 дан годовой ход температуры в грунте под водой и температура поверхности воды за 1963—1964 гг.

Зимние наблюдения (с октября по апрель) в 1961-62 г. и 1962-63 г. дают ход температуры, аналогичный представленному на рис. 1. Минимум температуры на поверхности грунта наблюдается в декабре—январе. Дальнейшее небольшое повышение температуры в феврале—марте при неизменной нулевой температуре поверхности воды объясняется, по-видимому, притоком тепла из нижних слоев грунта.

Максимум температуры в верхних слоях грунта наступает в августе—сентябре, т. е. на 1—2 месяца позже максимума на поверхности воды.

Объемная теплоемкость грунта рассчитана по плотности и влажности грунта в месте установки штанги. Пробы грунта были взяты стратометром на глубинах 10 и 15—20 см. Средний объемный вес грунта равен $1,16 \text{ г/см}^3$, влажность 35%. Принимая удельную теплоемкость скелета грунта равной $0,20 \text{ кал/г}$, получаем величину объемной теплоемкости

$$c_p = \rho(c + W) = 0,64 \text{ кал/см}^3 \text{ град.}$$

Эта величина хорошо согласуется с данными [1], где объемная теплоемкость была получена путем непосредственных измерений и равна

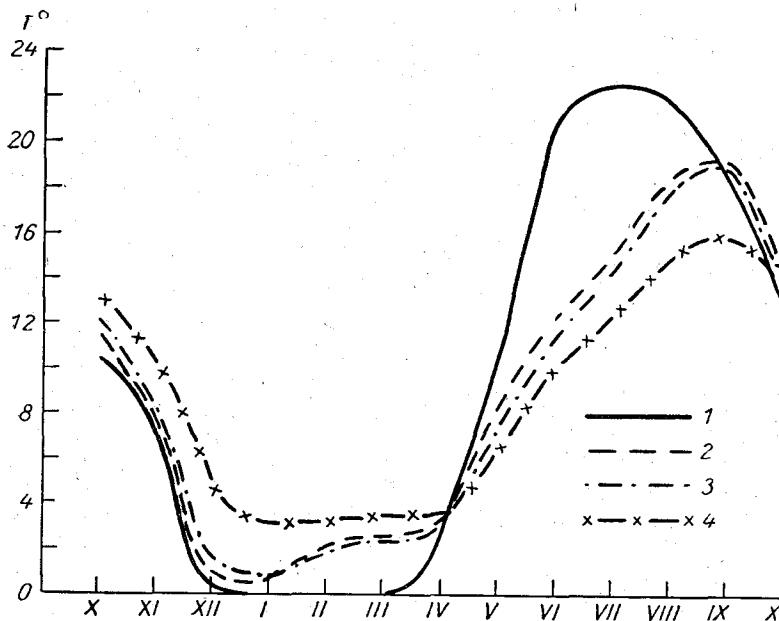


Рис. 1. Годовой ход температуры воды и грунта под водой. Цимлянское водохранилище, 1963—1964 гг.

1 — температура поверхности воды, 2 — температура поверхности грунта, 3 — температура в грунте на глубине 10 см, 4 — температура в грунте на глубине 50 см.

$0,66 \text{ кал/см}^3\text{град.}$ Величина температуропроводности K взята по тем же наблюдениям [1] равной $0,0035 \text{ см}^2/\text{сек.}$

Потоки тепла в грунте рассчитывались по формулам, предложенным Г. Х. Цейтиным [2]. Для более простых расчетов по изменению теплоемкости необходимо иметь данные по температуре в грунте до уровня неизменной годовой или хотя бы месячной температуры. На глубине 50 см (максимальная глубина в наших наблюдениях) постоянства температуры в течение этих периодов не наблюдается.

Величины потоков тепла в грунте под водой B_r в $\text{кал/см}^2\text{сутки}$ представлены на рис. 2.

Наблюдения 1963—1964 гг. позволили получить годовой ход тепловых потоков в грунте. В течение полугодия (с октября по апрель) происходит отдача тепла грунтом, в другую половину года грунт получает тепло. Максимум отдачи тепла в 1963—1964 гг. приходится на ноябрь—декабрь, максимум притока тепла в грунт — на август. Переход значений потока через нуль — в октябре и в апреле. Наблюдения в зимний

период 1961-62 г. и 1962-63 г. дают тот же порядок величины потоков тепла с некоторым смещением во времени вследствие различий в погодных условиях.

На этот же график нанесена кривая годового хода теплообмена с грунтом дна водоема, построенная по расчетным данным А. П. Браславского и З. А. Викулиной для данной широты места и средней глубины водоема.

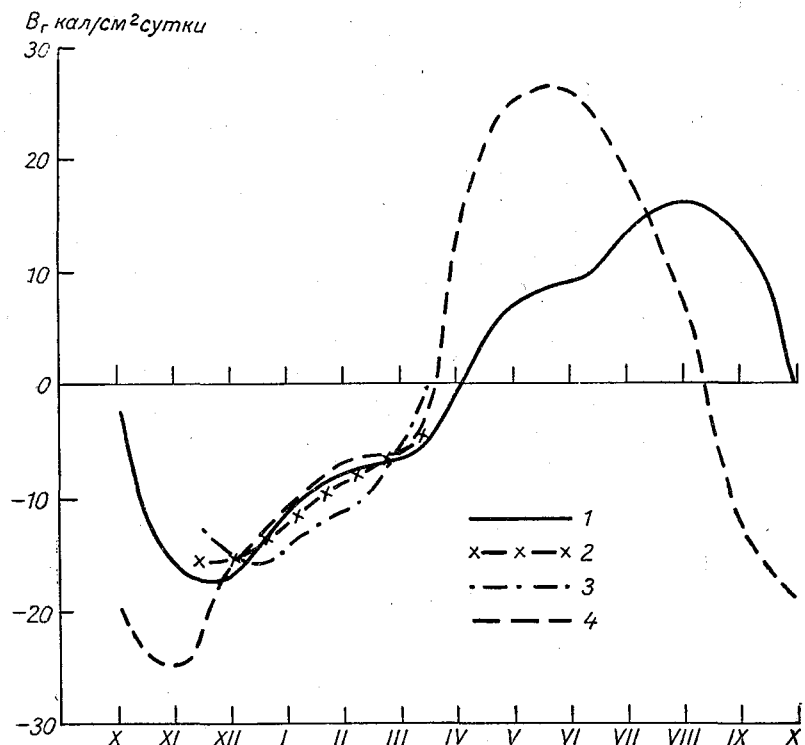


Рис. 2. Потоки тепла в грунте под водой.

1 — Цимлянское водохранилище 1963-64 г., 2 — Цимлянское водохранилище 1962-63 г., 3 — Цимлянское водохранилище 1961-62 г., 4 — по формуле Браславского и Вокульской.

Как видно из рис. 2, эти значения хорошо согласуются с экспериментальными данными по Цимлянскому водохранилищу для зимнего периода (декабрь—март). В остальные месяцы года имеются иногда значительные различия в величинах потоков. Максимум притока тепла в грунт в летнее время по расчетам Браславского и Викулиной наступает на 2—3 месяца раньше, чем это получено из наблюдений 1964 г. Суммарные величины как отдачи тепла за зимний период, так и его притока летом, полученные по расчетам, отличаются от наблюдаемых не более, чем на 25—30%.

Эти расхождения могут объясняться не только различиями в методике расчета, но и отличием метеорологических условий конкретного года, для которого производится расчет, от средних климатических данных.

Абсолютные значения тепловых потоков в грунте очень малы и не превышают в рассмотренных случаях 20 кал/см²сутки.

Соотношение величин тепловых потоков в грунте и в воде показано в табл. 1.

Таблица 1

Тепловые потоки в воде B и в грунте B_r Цимлянского водохранилища, кал/см² сутки

Тепловой поток	Год	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
B	1960—1961	—186	—184				152	148	227	222	—80	—114	—216
	1961—1962	—183	—204	—93	20	25	60	204	193	172	30	—78	—155
	1962—1963	—234	—204		9	15	39	179	210	123	149	—103	—161
B_r	1960—1961			—15									
	1961—1962			—15	—14	—11	—5						
	1962—1963	—1	—16	—17	—12	—9	—6						
	1963—1964				—11	—8	—6	—1	7	9	13	16	13

В этой таблице приводятся данные теплообмена в воде B и грунте B_r для Цимлянского водохранилища. Приведенные величины показывают, что в большую часть года теплообмен в грунте является очень незначительной величиной по сравнению с теплообменом в водной массе. Однако на небольших отрезках времени — в периоды изменений направления тепловых потоков в воде, т. е. переходов теплотока B через нуль, — значения B становятся сравнимыми с B_r .

Во время летнего перехода B через нуль (июль) велики другие составляющие теплового баланса (так радиационный баланс Цимлянского водохранилища в июле составляет около 400 кал/см² сутки) и величина B_r пренебрежимо мала по сравнению с ними. В зимние месяцы величина B_r может играть заметную роль в общем тепловом балансе водоема. Как показывает табл. 1, тепловые потоки в грунте в январе и феврале примерно равны потокам в воде. Различие знаков потоков B и B_r свидетельствует о том, что основное тепло вода в эти месяцы получает от грунта. Теплообмен воды с атмосферой из-за наличия ледяного и снежного покрова, почти отсутствует.

На основании проведенных наблюдений и расчетов можно сделать следующие выводы.

1. В летний период тепловой поток в грунте водоема является, по сравнению с другими составляющими теплового баланса, очень малой величиной. Таким образом, при расчете составляющих теплового баланса водоема для этого периода его можно не учитывать.

2. В зимнее время величина теплообмена в грунте сравнима с другими составляющими теплового баланса, в частности, с теплообменом в водной массе, и может играть довольно существенную роль при рассмотрении теплового баланса применительно к процессам образования, нарастания и таяния льда.

ЛИТЕРАТУРА

1. Метеорологический режим озера Севан. Под ред. М. П. Тимофеева. Гидрометеиздат, Л., 1960.
2. Цейтин Г. Х. К вопросу об определении некоторых тепловых свойств почвы. Тр. ГГО, вып. 39, 1953.

К ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЯ СКОРОСТИ ВЕТРА АНЕОМЕТРОМ, УСТАНОВЛЕННЫМ НА БУЕ

Рассматривается погрешность определения средней скорости ветра, возникающая в результате вертикальных колебаний анемометра в потоке логарифмического профиля.

При измерениях скорости ветра над морем с использованием градиентного буя были обнаружены существенные отклонения профилей от логарифмического закона [1, 4], которые не удалось связать с температурной стратификацией приподнятого слоя. Было высказано предположение о динамическом взаимодействии волн на поверхности моря с потоком воздуха, формирующем нелогарифмический профиль ветра.

Н. П. Гоптарев [2] считает, что основной причиной искажения логарифмических профилей над морем является вертикальная качка буя, несущего анемометры: очевидно, что колебания анемометров в потоке нелинейного профиля должны занижать среднюю скорость, причем в большей степени для анемометров, установленных на меньших высотах.

Нетрудно выполнить количественную оценку эффекта вертикальных колебаний анемометра. Это позволит выяснить реальность градиентных измерений, проведенных в конкретных условиях и дать некоторые рекомендации по методике таких измерений.

Пусть анемометры установлены на бую, совершающем вертикальные гармонические колебания

$$\zeta = a \cos \omega t, \quad (1)$$

где a — амплитуда колебаний, ω — частота, t — время, а профиль скорости ветра — логарифмический, и не зависит от прохождения волн по поверхности моря

$$u(z) = u_1 \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{z_1}{z_0}}. \quad (2)$$

Здесь $u(z)$ — скорость ветра на высоте z , отсчитываемой от среднего уровня моря, u_1 — скорость на высоте z_1 , z_0 — параметр шероховатости.

Высота анемометра, установленного на расстоянии $\bar{z}$ от ватерлинии буя, определяется в каждый момент с учетом (1) выражением

$$z = \bar{z} + \zeta(t). \quad (3)$$

Предположим, что анемометр не обладает инерционностью и фиксирует мгновенную скорость, тогда эта скорость определяется из (1)–(3)

$$u_a(\bar{z}) = \frac{u_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}} \ln \left[\frac{\bar{z} + \zeta(t)}{z_0} \right]. \quad (4)$$

Средняя скорость, регистрируемая анемометром в течение периода T будет

$$\begin{aligned} \bar{u}_a(\bar{z}) &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{u_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}} \ln \left[\frac{\bar{z}}{z_0} \left(1 + \frac{a \cos \omega t}{\bar{z}} \right) \right] dt = \\ &= \frac{u_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}} \ln \frac{\bar{z} + \sqrt{\bar{z}^2 - a^2}}{2z_0}. \end{aligned} \quad (5)$$

Результат интегрирования (5) является точным [3]. Для дальнейшего рассматривания полезно получить выражение средней скорости, измеряемой анемометром, в виде ряда. Такое выражение можно найти либо разложив в ряд Тейлора подынтегральную функцию $\ln \left(1 + \frac{a \cos \omega t}{\bar{z}} \right)$, либо разложив в ряд уже результат интегрирования (5); в обоих случаях получается

$$\bar{u}_a = \frac{u_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}} \left[\ln \frac{\bar{z}}{z_0} - \frac{a^2}{4\bar{z}^2} - \frac{3a^4}{32\bar{z}^4} - \dots - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) a^{2n}}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n \cdot 2^n \bar{z}^{2n}} \right]. \quad (5')$$

Выражения (5) и (5') показывают, что скорость, измеряемая анемометром $\bar{u}_a$, занижена по сравнению с действительной средней скоростью на уровне средней высоты анемометра

$$u(\bar{z}) = u_1 \frac{\ln \frac{\bar{z}}{z_0}}{\ln \frac{z_1}{z_0}}.$$

Занижение это тем больше, чем ниже при данной амплитуде колебаний буя расположен анемометр, т. е. чем больше отношение $\frac{a}{\bar{z}}$, и не зависит от частоты колебаний.

Проанализируем теперь роль инерционности анемометра, которую до сих пор мы не учитывали. Для инерционного анемометра регистрируемая скорость (мгновенная) связана со скоростью потока уравнением

$$\frac{du_a}{dt} = \frac{1}{T_0} (u - u_a), \quad (6)$$

где T_0 — постоянная времени датчика (крыльчатки).

Решение (6) имеет вид:

$$u_a = e^{-\frac{t}{T_0}} \left(c + \int u(t) l^{\frac{t}{T_0}} dt \right). \quad (7)$$

Полагая, как и раньше, что условия стационарны, а анемометр установлен достаточно давно, можно пренебречь влиянием начальных условий и записать решение в виде:

$$u_a = e^{-\frac{t}{T_0}} \int u(t) e^{\frac{t}{T_0}} dt. \quad (8)$$

Представив мгновенную скорость потока, обтекающего анемометр, описываемую выражением (4), в виде ряда Тейлора, находим

$$u_a = \frac{u_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}} \left\{ \ln \frac{\bar{z}}{z_0} + \frac{a \cos(\omega t - \varphi_1)}{\bar{z} \sqrt{1 + \omega^2 T_0^2}} - \frac{a^2}{2 \bar{z}^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega t - \varphi_2)}{\sqrt{1 + 4\omega^2 T_0^2}} \right] + \dots \right\}, \quad (9)$$

где

$$\varphi_n = \arctg n\omega T_0.$$

Найдем среднее значение u_a

$$\bar{u}_a = \frac{1}{T} \int_0^T u_a(t) dt = \frac{u_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}} \left(\ln \frac{\bar{z}}{z_0} - \frac{a^2}{4 \bar{z}^2} - \frac{3a^4}{32 \bar{z}^4} - \dots \right). \quad (10)$$

Убеждаемся, что выражения (10) и (5') совпадают, т. е., что регистрируемое среднее значение скорости не зависит от инерции прибора. Следовательно, для анализа погрешности реального анемометра можно использовать точную формулу (5).

Найдем относительную ошибку измерений на основе формул (2) и (5)

$$\delta = \frac{\bar{u}_a(\bar{z}) - u(\bar{z})}{u(\bar{z})} = \frac{\ln \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{\bar{z}^2}}}{2}}{\ln \frac{\bar{z}}{z_0}}. \quad (11)$$

Формула (11), как и все остальные, применима при $\frac{a}{z} \leq 1$. Это условие, однако, не ограничивает их применимости на практике, так как при $\frac{a}{z} > 1$ анемометр в крайнем нижнем положении оказывается ниже среднего уровня моря $z=0$. Результаты расчета по (11) сведены в табл. 1.

Таблица 1
Относительная ошибка δ (%) при измерении анемометром, колеблющимся в потоке логарифмического профиля

$\bar{z}/z_0$	$a/\bar{z}$			
	0,8	0,6	0,4	0,2
10^2	-4,6	-2,3	-0,9	-0,2
$5 \cdot 10^2$	-3,4	-1,7	-0,7	-0,1
10^3	-3,1	-1,5	-0,6	-0,1
$5 \cdot 10^3$	-2,5	-1,2	-0,5	-0,1

Заметим, что амплитуда колебаний буя a , как правило, много меньше амплитуды волн $\frac{h}{2}$. Отношение величин $\frac{2a}{h}$, называемое в теории колебаний коэффициентом динамичности, у буюв для градиентных наблюдений стараются уменьшить путем подбора формы поплавка, сведения запаса плавучести к минимуму и демпфирования. Лишь у специально построенных буюв (например, — буй волнографа ГМ-16), коэффициент динамичности близок к единице.

С помощью табл. 1 рассчитан пример искажения логарифмического профиля (табл. 2). При этом выбраны следующие условия: на высоте 1 м скорость ветра $u_1=8$ м/сек., параметр шероховатости $z_0=0,5 \cdot 10^{-2}$ м, $a=0,75$ м, что соответствует высоте волн $h=1,5$ м при $\frac{2a}{h}=1$.

Таблица 2

Относительная (δ %) и абсолютная ($100 \delta u$) погрешности измерений

$\bar{z}$ м	1,0	2,0	3,5	5,0
$\bar{z}/z_0$	$2 \cdot 10^2$	$4 \cdot 10^2$	$7,0 \cdot 10^2$	10^3
h/z_0	1,5	0,75	0,43	0,30
δ %	—3,6	—0,7	—0,2	—0,1
$100 \delta u$ ($\bar{z}$) м/сек.	—0,29	—0,06	—0,03	—0,01

Расчет показывает, что отклонение от действительной скорости ($100 \delta u$) заметно лишь у нижнего анемометра; у расположенных выше эта погрешность меньше градуировочной точности контактного анемометра (0,1 м/сек.). Принятые в примере размахи колебаний буя $2a=1,5$ м, сознательно завышены. Если положить $\frac{2a}{h}=0,5$, (что, по-видимому, ближе к наблюдаемым характеристикам качки буюв и вех для градиентных наблюдений, хотя и кажется еще завышенным), то погрешность для анемометра на $z=1$ м уменьшится до 1%, или до 0,08 м/сек.

Следовательно, вертикальные колебания буя для градиентных наблюдений не могут внести существенных искажений в профиль средней скорости. Качка буя может сказаться лишь на показаниях анемометра, установленного очень близко к поверхности воды и заливаемого при сильном волнении.

Реальность отклонений от логарифмического профиля скорости над морем и связь их с элементами волнения подтверждаются наблюдениями, проведенными с мачты, неподвижно закрепленной на дне моря [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бортковский Р. С., Орленко Л. Р., Цейтин Г. Х. К расчету скорости ветра и касательного напряжения над водной поверхностью. (См. наст. сборник).
2. Гоптарев Н. П. Вертикальное распределение скорости ветра в нижнем слое воздуха у поверхности океана. Тр. ГОИН, вып. 72, 1964.
3. И. С. Градштейн и И. М. Рыжик. — Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат. М., 1962.
4. Клеванцова В. А., Бортковский Р. С., Преображенский Л. Ю. — О методах градиентных наблюдений в море. Тр. ГГО, вып. 150, 1964.
5. Take da A. Wind profiles over sea waves. J. Oceanogr. Soc. Jap., vol. 19, No 3, 1963

ОБ ОШИБКЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ ПО МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИМ ДАННЫМ

Рассматриваются ошибки, возникающие при определении температуры поверхности воды по метеорологическим данным за счет погрешностей в величинах радиационного баланса, скорости ветра, глубины деятельного слоя водоема и коэффициента b , зависящего от термодинамических характеристик водоема.

В работе [1] предлагается метод определения температуры поверхности водоемов по наблюдениям над метеорологическими характеристиками на суше. А именно:

$$T_{\pi} = (1 - \alpha)(T + M) + \alpha T_{\pi 0}, \quad (1)$$

где

$$\alpha = \frac{1 - l^{-D}}{D}; \quad D = \frac{bc'_p u_1 + 4\sigma T_0^3}{c_1 \rho_1 \mu H} \tau;$$

$$M = \frac{R'_0 + S(A' - A) - 0,622bP_a^{-1}Lu_1 d}{bc'_p u_1 + 4\sigma T_0^3};$$

$$c'_p = c_p + 0,622P_a^{-1}Ln.$$

В этих формулах R'_0 , A' — радиационный баланс в предположении равенства температуры воздуха и температуры поверхности и альбедо поверхности суши, S — суммарная радиация, приходящая на поверхность, A — альбедо воды, b — коэффициент, зависящий от термодинамических характеристик водоема, u_1 — скорость ветра, d — дефицит влажности, c_p — теплоемкость воздуха, $c_1 \rho_1$ — объемная теплоемкость воды, μH — глубина деятельного слоя водоема, τ — расчетный период, n — функция, зависящая от температуры воздуха. Преимущество указанного метода заключается в том, что определение T_{π} основывается на наблюдениях над метеорологическими элементами на широкой сети гидрометеорологических станций. С целью практического применения данного метода рассмотрим, какие погрешности имеют место при определении T_{π} в тех или иных условиях по формуле (1). Формирование температуры поверхности водоема происходит под влиянием большого комплекса метеорологических и гидрологических факторов. Нет возможности рассмотреть влияние на точность определения T_{π} каждого фактора в отдельности, кроме того, влияние не всех характеристик одинаково важно. Помимо этого, влияние одних факторов можно выразить

через влияние других. Опыт показывает, что наибольшие ошибки в расчете $T_{\text{п}}$ возникают из-за погрешностей в определении радиационного баланса $R = R'_0 + S(A' - A)$, скорости ветра, а также величин b и μH . Поэтому в первую очередь следует оценить, какие ошибки возникают при расчете $T_{\text{п}}$ из-за погрешностей в определении именно этих величин. На основании сделанного предположения можно считать, что $T_{\text{п}}$ является функцией R , bu_1 и μH и абсолютная ошибка при определении $T_{\text{п}}$ может быть выражена следующим образом:

$$\Delta T_{\text{п}} = \left. \frac{\partial f}{\partial R} \right|_{\substack{R=R_0 \\ bu_1=(bu_1)_0 \\ \mu H=(\mu H)_0}} \Delta R + \left. \frac{\partial f}{\partial bu_1} \right|_{\substack{R=R_0 \\ bu_1=(bu_1)_0 \\ \mu H=(\mu H)_0}} \Delta bu_1 + \left. \frac{\partial f}{\partial \mu H} \right|_{\substack{R=R_0 \\ bu_1=(bu_1)_0 \\ \mu H=(\mu H)_0}} \Delta \mu H. \quad (2)$$

После определения частных производных по R , bu_1 и μH на основании формулы (1) формула (2) будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta T_{\text{п}} = & \left[\frac{1}{c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3} - \frac{c_1 \rho_1 \mu H (1 - e^{-D})}{\tau (c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3)^2} \right] \Delta R + \\ & + \left[\left(-\frac{c_p e^{-D}}{c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3} + \frac{c'_p c_1 \rho_1 \mu H (1 - e^{-D})}{\tau (c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3)^2} \right) (T' - T_{\text{п}0} + \right. \\ & + \frac{R - 0,37 b u_1 d}{c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3}) + \left(1 - \frac{c_1 \rho_1 \mu H (1 - e^{-D})}{\tau (c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3)} \right) \left(-\frac{0,37 d}{c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{c'_p (R - 0,37 b u_1 d)}{(c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3)^2} \right) \right] \Delta bu_1 + \left[\left(T' - T_{\text{п}0} + \frac{R - 0,37 b u_1 d}{c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3} \right) \times \right. \\ & \left. \times \left(\frac{c_1 \rho_1 e^{-D} + \frac{\tau (c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3)}{\mu H} e^{-D} - c_1 \rho_1}{\tau (c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3)} \right) \right] \Delta \mu H \quad (3) \end{aligned}$$

или

$$\Delta T = k_R \Delta R + k_{bu_1} \Delta bu_1 + k_{\mu H} \Delta \mu H.$$

Для определения $\Delta T_{\text{п}}$ по формуле (3) за начальные значения R , bu_1 , μH могут быть приняты величины R , bu_1 и μH , использованные при расчете $T_{\text{п}}$, а за ΔR , Δbu_1 и $\Delta \mu H$ некоторые отклонения от них. При расчете величин $\Delta T_{\text{п}}$, которые приводятся ниже, отклонения составляют 20% величин R , bu_1 и μH , принятых за начальные. Поскольку характеристики, определяющие температуру поверхности воды, имеют тесную взаимосвязь, то погрешность определения $T_{\text{п}}$ по формуле (1) будет также зависеть от входных параметров. Это означает, что различия в метеорологических условиях и геометрических размерах водоемов будут влиять на величину погрешности определения $T_{\text{п}}$. Чтобы показать, как велико влияние метеорологических характеристик на значение $\Delta T_{\text{п}}$, мы рассчитали величины $\Delta T_{\text{п}}$ в сезонном ходе для двух водоемов, расположенных в существенно различных климатических условиях. Влияние изменений глубины и размеров водоема на $\Delta T_{\text{п}}$ подробно рассматривается в работе [1].

Пункт	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Джусалы	1,5	1,8	1,8	1,6	1,5	2,1	1,9	2,0	2,0
Белозерск		1,6	1,4	1,2	0,8	1,3	1,4	1,1	

В табл. 1 приводятся ΔT_n , рассчитанные по формуле (3) для двух водоемов со средним размером, равным 10 км и глубиной 10 м. Один

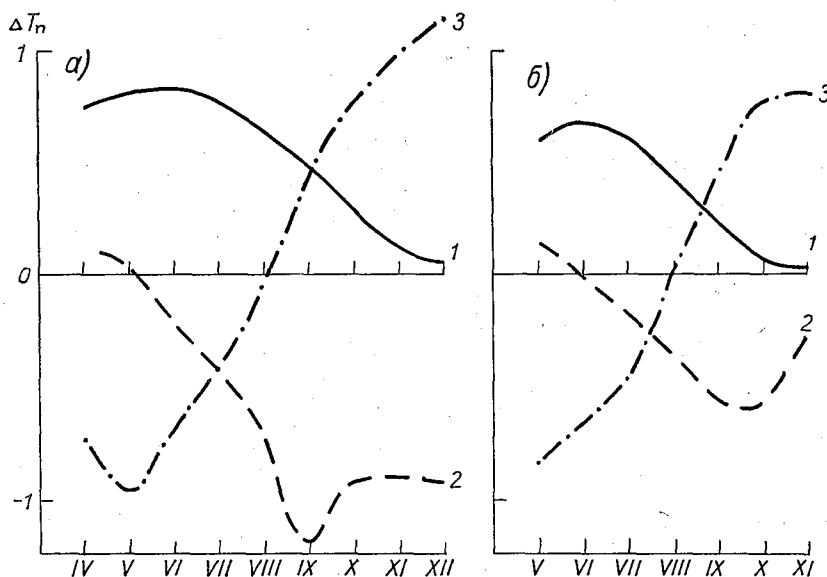


Рис. 1. Изменение погрешности расчета температуры поверхности воды в течение безледоставного периода за счет ошибок в величинах R — (1), bu_1 — (2) и μH — (3).
а — в условиях Казахстана (ст. Джусалы), б — в условиях Вологодской обл. (ст. Белозерск).

из водоемов находится в условиях Казахстана (Джусалы), а другой в условиях средней полосы (ст. Белозерск, Вологодская обл.). Из таблицы видно, что, несмотря на существенно различные климатические условия, ошибки расчета T_n для обоих водоемов мало отличаются. В таблице представлены предельные абсолютные ошибки, возникающие при расчете температуры поверхности воды по среднемесячным данным. Если учесть, что ошибки, возникающие за счет различных факторов, входят в расчет T_n , как правило, с разными знаками, то можно ожидать взаимной компенсации погрешностей за счет различных факторов, а следовательно, меньшей ошибки в расчете T_n . Действительно, сравнение рассчитанных T_n по наблюдениям на ст. Белозерск с измеренными показало, что различия, как правило, находятся в пределах $0,3^\circ$.

На рис. 1 представлено изменение в течение безледоставного периода членов правой части формулы (3) для примеров расчета ΔT_n , приведенных выше. Значения слагаемых правой части формулы (3) нанесены с учетом знака. Поэтому рис. 1 наглядно иллюстрирует, каким образом погрешности того или иного знака в величинах R , bu_1 и μH будут влиять на значения ΔT_n . Рис. 1 показывает также, что даже в том случае, когда в течение всего безледоставного периода величины R , bu_1 и

μH определяются с одинаковой погрешностью, ошибка расчета T_{Π} будет разной в различные месяцы.

Представляет интерес относительная ошибка при определении T_{Π} . Для этого рассмотрим относительные ошибки при определении параметров D и M в формуле (1), поскольку T_{Π} зависит от указанных величин

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{c'_p \Delta bu_1}{c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3} - \frac{\Delta \mu H}{\mu H}, \quad (4)$$

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\Delta R}{R - 0,37 bu_1 d} - \frac{0,37 d \Delta bu_1}{R - 0,37 bu_1 d} - \frac{c'_p \Delta bu_1}{c'_p bu_1 + 4\sigma T_0^3}. \quad (5)$$

Рассчитанная нами предельная относительная ошибка при определении параметра D для рассмотренных ниже случаев постоянна для всего безледоставного периода и составляет 35% искомой величины. Однако, как уже отмечалось выше, редки случаи, когда все факторы, определяющие искомую величину, вносят погрешности одного и того же знака. Поэтому ошибка при определении указанных нами величин будет значительно меньше. То же самое можно сказать об относительной погрешности параметра M . Здесь следует отметить тот факт, что погрешность определяет в основном структура формул для M , поскольку в числителе стоит разность двух сравнимых величин $R - 0,37 bu_1 d$. Это означает, что погрешность в R может привести к значительной погрешности в определении M . Поэтому необходимо тщательно вычислять величину радиационного баланса особенно в летние месяцы, когда велик дефицит влажности и, следовательно, разность $R - 0,37 bu_1 d$ мала.

Таким образом, если величины R , bu_1 и μH определяются с погрешностью 20% самой величины, то предельная абсолютная погрешность при расчете T_{Π} может достичь 1—2°. Однако таким образом ошибки в расчете T_{Π} возникают лишь в том случае, когда ошибки в значениях всех параметров, входящих в расчетную формулу, усиливают друг друга. Сравнение рассчитанных и измеренных температур поверхности воды [2] показало, что погрешности, возникающие при расчете T_{Π} по формуле (1) меньше 1°.

По изменению во времени коэффициентов k_R , k_{bu} и $k_{\mu H}$ можно судить, какая ошибка возникает при расчете T_{Π} в различные месяцы безледоставного периода, если в значениях R , bu_1 и μH содержится определенная погрешность.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. П. Тимофеев. Метеорологический режим водоемов. Гидрометеиздат, Л., 1963.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЭФФЕКТИВНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ МОРЯ В СВЕТОЕ ВРЕМЯ СУТОК

Рассматривается зависимость результатов измерений отраженной радиации и радиационного баланса поверхности моря от расстояния до борта судна, а также репрезентативность наблюдений в различных точках судна. Оцениваются возможные ошибки в определении эффективного излучения в морских условиях.

Эффективное излучение подстилающей поверхности в светлое время суток определяется по измеренным значениям суммарной солнечной радиации, отраженной радиации и радиационного баланса, как остаточный член уравнения радиационного баланса [6]:

$$E_{\text{эф}} = Q - R_k - B, \quad (1)$$

где $E_{\text{эф}}$ — эффективное излучение, Q — суммарная солнечная радиация, R_k — отраженная радиация, B — радиационный баланс.

Следовательно, точность определения величины эффективного излучения зависит от точности измерений суммарной и отраженной радиации и радиационного баланса. В условиях стационарных актиметрических наблюдений на метеорологических станциях погрешность определения эффективного излучения в светлое время суток значительна и вследствие низкой точности отдельных значений обычно рассматриваются средние величины $E_{\text{эф}}$. В морских условиях при измерениях составляющих радиационного баланса поверхности моря с судна эта погрешность вызвана также дополнительным влиянием на результаты измерений борта и надстроек судна и некоторыми особенностями методики производства морских актиметрических наблюдений. Для характеристики точности определения эффективного излучения поверхности моря в светлое время суток следует провести анализ точности измерений суммарной и отраженной радиации и радиационного баланса в морских условиях.

По данным специальных измерений на экспедиционных судах «Севастополь» и «Полярник» был проведен предварительный качественный анализ надежности измерений отраженной радиации и радиационного баланса поверхности моря [2]. В дальнейшем эта работа была продолжена на судах «Айсберг», «Восход», «Печенга» и «Северодвинск».

Экспедиционные суда «Айсберг», «Восход» и «Полярник» имеют водоизмещение 400 т, длину 38 м, ширину 7—8 м. Наиболее рациональным местом для производства наблюдений составляющих радиационного баланса поверхности моря оказалось крыло верхнего мостика, на

котором установлен кронштейн с 5—6-метровой металлической стрелой диаметром около 35 мм. Для измерений отраженной и суммарной радиации и радиационного баланса на конце стрелы крепится походный альбедометр и в полуметре от него — термоэлектрический балансомер. Высота актинометрических приборов над поверхностью воды составляет 4 м. Гальванометр ГСА-1 устанавливается в штурманской рубке с использованием кардана и резиновых прокладок.

Экспедиционное судно «Севастополь» имеет водоизмещение 2800 т, длину 74 м и ширину 12 м. Для измерений отраженной радиации и радиационного баланса поверхности моря используется стрела длиной 6—7 м. Стрела с укрепленными на ней альбедометром и балансомером установлена в носовой части судна над форштевнем, являясь непосредственным продолжением осевой линии судна. Удаление приборов от поверхности воды составляет около 4 м. Для измерений суммарной радиации походный альбедометр устанавливается на полубаке судна на высоте 1,5—2,0 м над палубой (5,5—6,0 м над поверхностью воды).

Водоизмещение судов-плавбаз «Печенга» и «Северодвинск» составляет 17 000—18 000 т, длина около 160 м, ширина 21 м. Наблюдения проводятся в кормовой части судов. Стрела с приборами располагается под углом 45—90° к осевой линии судна. Удаление приборов от борта судна составляет 5—7 м и от поверхности воды около 10 м. Гальванометр ГСА-1 на экспериментальном судне «Севастополь» и судах-плавбазах устанавливается в районе осевой линии судна с таким расчетом, чтобы влияние качки судна было наименьшим. Корпус всех кораблей имеет шаровую окраску.¹

В связи с тем, что стрелка гальванометра оказывается подверженной некоторому влиянию качки судна при волнении моря даже при использовании кардана и различного рода виброгасителей, по гальванометру ГСА-1 берутся парные крайние положения стрелки. Количество отсчетов неодинаково для различных видов радиации, при различных условиях облачности, при различном состоянии диска Солнца, волнении и т. п. Минимальное количество отсчетов для суммарной радиации 4—6, для отраженной радиации 6—8 и для радиационного баланса 8—10.

Зависимость чувствительности приемных поверхностей актинометрических приборов (и главным образом балансомеров) от различных факторов и точность измерений радиационных потоков исследовались рядом авторов. В работах [4, 5 и др.] исследованы погрешности в измерениях радиационного баланса, возникающие вследствие зависимости чувствительности балансомера от длины волны измеряемой радиации, различия переводных множителей для верхней и нижней сторон балансомера, зависимости чувствительности от температуры, влияния ветра, интенсивности измеряемой радиации и ряда других факторов. За счет этих погрешностей, точность измерений балансомером составляет около 10% только в тех случаях, когда приемные поверхности прибора плоские и покрыты ровным плотным слоем матовой черной краски.

Проверка актинометрических приборов, использовавшихся на судах Мурманского УГМС, регулярно производилась в ЦБП ГГО им. А. И. Воейкова и в БП Мурманского УГМС. Для измерений использовались альбедометры и балансомеры, переводный множитель у которых с течением времени изменялся не более 5% и соответственно 10%. При изменении переводного множителя больше указанных допу-

¹ В 1964 г. актинометрические наблюдения на судах-плавбазах прекращены.

сков и ухудшении состояния приемных поверхностей приборы снимались с установки и отправлялись в ремонт и поверку. Можно считать, что относительная погрешность за счет точности переводных множителей альбедометра и балансомера в определении суммарной и отраженной радиации составляет $\pm 5\%$ и в определении радиационного баланса $\pm 10\%$.

Одним из основных факторов, вносящих погрешности в результаты измерений составляющих радиационного баланса, является влияние борта судна. Можно ожидать, что при постепенном удалении приборов от борта судна результат измерений будет соответственно изменяться и, начиная с какого-то расстояния, когда борт судна уже не будет оказывать своего влияния, результат измерений будет оставаться постоянным.

В 1959—1961 гг. на всех судах были проведены серии измерений отраженной радиации и радиационного баланса на различных расстояниях от борта судна (до 5—7 м). В целях сопоставления результатов наблюдений на всех судах, величины, измеренные на удалении 5 м от борта судна, условно приняты за 100%. Выразив затем в процентах все остальные величины на удалениях 0, 1, 2, 3, 4, 6 и 7 м получили их относительные значения, характеризующие степень влияния борта судна (табл. 1). Результаты измерений отраженной радиации и радиационного баланса на однотипных судах объединены.

Таблица 1

Зависимость результатов измерений отраженной радиации и радиационного баланса поверхности моря от расстояния до борта судна

Судно	Расстояние до борта судна, м								К-во серий измерений	Время измерения
	0	1	2	3	4	5	6	7		

Отраженная радиация										
„Айсберг“									12	V—VI — 1959
„Восход“	—	126	121	103	100	100	—	—	—	—
„Полярник“									67	III—V — 1959
„Севастополь“	131	117	113	109	103	100	98	—	16	III—V — 1959
„Печенга“	140	121	115	110	104	100	96		22	III—IV — 1961
„Северодвинск“									203	III—IV — 1961

Радиационный баланс										
„Айсберг“									15	I—VI — 1959
„Восход“	—	80	86	88	96	100	—	—	—	—
„Полярник“									22	III—V — 1959
„Севастополь“	84	91	93	95	98	100	108	—	12	III—V — 1959
„Печенга“	87	91	93	96	99	100	103	107	18	III—IV — 1961
„Северодвинск“									164	III—IV — 1961

Анализ табл. 1 показывает, что с приближением к борту судна значения отраженной радиации увеличиваются, а значения радиационного баланса уменьшаются, при измерениях непосредственно у борта судна отраженная радиация оказывается завышенной в среднем на 30—40%, а радиационный баланс — заниженным в среднем на 15—20% по сравнению с измерениями на удалении 5—6 м от борта судна. При этом следует отметить, что измерения радиационного баланса и отраженной радиации производились в тех случаях, когда стрела с приборами была направлена в сторону Солнца или с отклонением от этого

направления не больше, чем на 45°. Из табл. 1 также следует, что принятая максимальная длина выноса в 7 м не гарантирует полного исключения влияния борта на судах «Печенга» и «Северодвинск» и в 5 м — на судах «Айсберг», «Восход» и «Полярник». Это подтверждается результатами сравнительных измерений со шлюпки и судов «Восход» и «Полярник», проведенных в 1962 и 1963 гг. в Кандалакшском заливе Белого моря. Наблюдения со шлюпки дают еще большие величины радиационного баланса, чем измеренные с судов при предельных удалениях приборов от борта судна.

На экспедиционном судне «Полярник» в 1959 г. было проведено несколько серий одновременных измерений отраженной радиации с борта судна (высота альбедометра над поверхностью воды 1—2 м) и с крыла верхнего мостика при высоте приборов над поверхностью воды 4 м (табл. 2).

Таблица 2.

Результаты одновременных измерений отраженной радиации на экспедиционном судне «Полярник» с крыла верхнего мостика (верхняя строка) и с борта судна (нижняя строка)

Дата	Время, час. мин.	Облачность	Диск Солнца	Расстояние до борта судна, м				
				1	2	3	4	5
28/IV	10 52	6/0	☉ ²	0,13	0,12	0,09	0,10	—
				0,12	0,12	0,09	0,09	—
14/V	12 10	5/0	☉ ²	0,13	0,12	0,12	0,12	—
				0,14	0,13	0,12	0,12	—
	11 51	8/0	☉ ⁰	0,02	0,02	0,02	0,02	0,02
				0,02	0,03	0,03	0,02	0,02
	12 03	10/0	☉ ⁰	0,05	0,04	0,05	0,04	0,04
				0,05	0,04	0,04	0,04	0,04
	12 13	10/0	☉ ⁰	0,05	0,04	0,04	0,04	0,04
				0,05	0,05	0,04	0,04	0,04
	15 18	10/0	☉ ⁰	0,05	0,04	0,04	0,04	0,04
				0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
	15 32	10/0	☉ ⁰	0,05	0,05	0,04	0,04	0,04
				0,05	0,05	0,05	0,05	0,04
	15 46	9/0	☉ ²	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08
				0,08	0,08	0,08	0,08	0,09
	16 00	8/0	☉	0,05	0,05	0,05	0,04	0,04
				0,05	0,05	0,05	0,04	0,04

Таблица 2 показывает, что существенных различий в величинах отраженной радиации, измеренных с борта судна и с крыла верхнего мостика, не наблюдается и подтверждает проведенный выше анализ; при приближении альбедометра к борту судна значение отраженной радиации, в общем, увеличивается. По-видимому, можно считать, что максимальная погрешность в измерениях отраженной радиации на экспедиционном судне «Севастополь» за счет влияния борта судна при удалении альбедометра на 6—7 м составляет не больше 5—10%. Эта погрешность значительно увеличивается при измерениях на судах «Печенга» и «Северодвинск».

Наблюдения на исследовательском судне «Гидрозонд» [7] также показывают, что борт судна завышает результаты измерений отраженной радиации (и альбеда), при этом ошибка в измерениях значительно увеличивается с приближением к борту судна. В тех случаях, когда аль-

бедометр находится в тени корпуса судна (солнце освещает противоположный борт судна), величины отраженной радиации оказываются заниженными.

Суммарная радиация на крупных судах («Севастополь», «Печенга» и «Северодвинск»), согласно [6], определяется по результатам измерений прямой солнечной радиации S' , полученным термоэлектрическим актинометром, и рассеянной радиации D — по затененному пиранометру (или альбедометру).

$$Q = S' + D. \quad (2)$$

Прямая солнечная радиация измеряется на судах с большой степенью точности. При точной наводке трубки актинометра на солнце (что очень хорошо «чувствуется» гальванометром) стрелка гальванометра ГСА-1 занимает довольно устойчивое положение, при этом устойчивость стрелки значительно выше, чем при измерениях других составляющих радиационного баланса поверхности моря.

Пиранометр для измерений рассеянной радиации обычно устанавливается на значительном удалении от ближайших мачт и надстроек судна (10—12 м на экспедиционном судне «Севастополь» и около 40 м на судах «Печенга» и «Северодвинск»). Наряду с вычислением суммарной радиации по формуле (2) в целях контроля переводного множителя пиранометра (альбедометра) при безоблачной и малооблачной погоде на судах «Севастополь», «Печенга» и «Северодвинск» производятся непосредственные измерения суммарной радиации незатененным пиранометром. Материалы наблюдений показывают, что точность измерений суммарной радиации на крупных судах характеризуется в основном точностью определения переводных множителей приборов; надстройки и мачты судна существенного влияния не оказывают. В работе [3] показана возможность измерений суммарной радиации на судах незатененным пиранометром с достаточной степенью точности. В табл. 3 представлены результаты измерений суммарной радиации актинометром и затененным пиранометром ($S' + D$) и незатененным пиранометром (Q) на судне «Северодвинск» в марте—апреле 1964 года.

Таблица 3

Зависимость суммарной радиации, измеренной актинометром и затененным пиранометром ($S' + D$) и незатененным пиранометром (Q), от высоты солнца при малооблачной погоде (средние величины)

Высота Солнца	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
$S' + D$	—	—	0,10	—	0,32	0,52	—	0,71	0,92	1,04
Q	—	—	0,10	—	0,33	0,53	—	0,73	0,90	1,05
Число случаев . .	—	—	2	—	4	10	—	4	11	7

В феврале—апреле 1963 г. на судне «Печенга» были проведены измерения рассеянной и суммарной радиации в трех точках на кормовой площадке судна. Приборы располагались по осевой линии судна на расстоянии друг от друга 6—7 м: в точке № 1 — непосредственно у борта судна, в точке № 2 — в центральной части кормовой площадки и в точке № 3 — у внутреннего края кормовой площадки на расстоянии около 20 м от ближайших мачт и надстроек судна. Результаты проведенных измерений (всего 40 серий измерений) показывают, что при различном положении Солнца относительно судна существенных разли-

чий в величинах коротковолновой радиации не наблюдается. Отдельные расхождения могут быть объяснены точностью отсчетов по гальванометру ГСА-1.

Методика измерений потоков коротковолновой радиации на судах «Айсберг», «Восход» и «Полярник» несколько отличается. На этих судах не имеется достаточно открытого места для измерений рассеянной и суммарной радиации на борту судна. Вследствие этого суммарная радиация измеряется альбедометром, расположенным на конце стрелы. Рассеянная радиация в этом случае определяется как разность

$$D = Q - S'. \quad (3)$$

Здесь могут возникать ошибки до 10% в результатах измерений суммарной радиации вследствие дополнительного отражения и рассеяния радиации надстройками и мачтами судна (если стрела с прибором направлена в сторону солнца) и вследствие затенения (если стрела с прибором направлена в противоположную солнцу сторону).

Проведенный краткий анализ точности измерений суммарной и отраженной радиации и радиационного баланса поверхности моря на судах показывает, что точность определения эффективного излучения поверхности моря по формуле (1) определяется в основном точностью измерений радиационного баланса. Измеренная величина радиационного баланса поверхности моря оказывается заниженной не только за счет влияния борта судна, но и вследствие зависимости чувствительности балансомера от угла падения солнечной радиации [4, 5, 8]. Как было показано выше, борт судна завышает результаты измерений отраженной радиации. Следовательно, при вычислении эффективного излучения по формуле (1) погрешности, вносимые бортом судна, в какой-то мере взаимно компенсируются. Однако специфика морских наблюдений вносит дополнительные погрешности, возникающие за счет негоризонтальности приборов и забрызгивания их приемных поверхностей морской водой, трудности отсчетов по гальванометру ГСА-1, вертикального обдувания приемных поверхностей приборов при качке судна и т. п., которые, естественно, увеличивают ошибку. Поэтому для определения эффективного излучения в светлое время суток и, особенно, в морских условиях несомненный интерес представляют непосредственные измерения потоков длинноволновой радиации с помощью специальной аппаратуры (напр. [1]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гаевский В. Л. Исследование длинноволнового излучения атмосферы. Тр. ГГО, вып. 100, 1960.
2. Гирдюк Г. В. К методике измерений радиационного баланса и отраженной радиации в морских условиях. Метеорология и гидрология, № 3, 1961.
3. Грищенко Д. Л., Новосельцев Е. П., Тер-Маркарянц Н. Е. О методике актинометрических наблюдений в море. Тр. ГГО, вып. 152, 1964.
4. Лебедева К. Д., Сивков С. И. О точности измерений радиационного баланса термозлектрическими балансомерами. Тр. ГГО, вып. 129, 1962.
5. Лебедева К. Д., Сивков С. И., Ястребова Т. К. О повышении точности измерений радиационного баланса на сети станций. Тр. ГГО, вып. 160, 1964.
6. Пивоварова З. И., Лебедева К. Д. Руководство гидрометеорологическим станциям по актинометрическим наблюдениям. Гидрометеониздат, Л., 1957.
7. Преображенский Л. Ю. Об измерении альбеда моря. Тр. ГГО, вып. 150, 1964.
8. Тер-Маркарянц Н. Е., Грищенко Д. Л. Об измерении радиационного баланса в морских условиях. Тр. ГГО, вып. 152, 1964.

ИСКАЖЕНИЯ И ПОГРЕШНОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ РАСЧЕТАХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

ЧАСТЬ I. СТРУКТУРНЫЕ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

При расчетах дисперсий структурных и корреляционных функций по непрерывным записям конечной длины и по конечному набору точек возникают искажения и погрешности. В настоящей статье обобщаются результаты ряда работ, в которых производились вычисления этих искажений и оценки погрешностей за счет конечности полного интервала записи T и конечности числа отсчета n .

1. Введение

Простейшими и наиболее распространенными характеристиками метеорологических полей являются их вторые моменты, т. е. дисперсии, структурные и корреляционные функции.

По определению, дисперсия стационарной случайной функции $u(t)$ есть квадрат среднего квадратичного отклонения мгновенных значений от среднего

$$\langle \sigma^2 \rangle = \langle [u(t) - \langle u \rangle]^2 \rangle. \quad (1)$$

Структурная функция $D(\tau)$ есть величина среднего квадрата разности значений функции u в моменты t и $(t+\tau)$

$$D(\tau) = \langle [u(t+\tau) - u(t)]^2 \rangle. \quad (2)$$

Наконец, корреляционная функция $R(\tau)$ представляет собой среднюю величину в моменты t и $(t+\tau)$

$$R(\tau) = \langle [u(t) - \langle u \rangle] [u(t+\tau) - \langle u \rangle] \rangle. \quad (3)$$

В определениях (1), (2) и (3) скобки $\langle \rangle$ означают осреднение по статистическому ансамблю. Однако на практике для расчета σ^2 , $D(\tau)$ и $R(\tau)$ приходится пользоваться записями случайных функций $u(t)$, каждая из которых длится в течение сравнительно небольшого промежутка времени T .

Полученные по таким записям значения вторых моментов σ_T^2 , $D_T(\tau)$ и $R_T(\tau)$ даже при строго одинаковых внешних условиях различаются между собой. Поэтому для того, чтобы получить значения вторых моментов, характерные для заданных внешних условий, обычно

проводится осреднение по целому набору N записей, проведенных при одинаковых внешних условиях.

В результате получаются:

$$\overline{\sigma_T^2} = \frac{1}{T} \int_0^T \left[u(\xi) - \frac{1}{T} \int_0^T u(\eta) d\eta \right]^2 d\xi, \quad (1a)$$

$$\overline{D_T(\tau)} = \frac{1}{T} \int_0^T [u(\xi + \tau) - u(\xi)]^2 d\xi, \quad (2a)$$

$$\begin{aligned} \overline{R_T(\tau)} = & \frac{1}{T} \int_0^T \left[u(\xi) u(\xi + \tau) - \frac{1}{T} \int_0^T u(\xi + \tau) u(\eta) d\eta - \right. \\ & \left. - \frac{1}{T} \int_0^T u(\xi) u(\eta) d\eta + \frac{1}{T^2} \int_0^T d\eta \int_0^T d\gamma u(\eta) u(\gamma) \right] d\xi \end{aligned} \quad (3a)$$

(черта сверху означает осреднение по целому набору записей).

Значения $\overline{\sigma_T^2}$, $\overline{D_T(\tau)}$ и $\overline{R_T(\tau)}$, вообще говоря, должны отличаться от истинных значений вторых моментов, определенных по формулам (1), (2) и (3).

Можно показать, что, вычисляя структурную функцию по каждой отдельной записи и затем проводя осреднение по большому набору записей (в пределе при неограниченном увеличении числа записей), можно получить величину $\overline{D_T(\tau)}$, стремящуюся к истинному значению структурной функции $D(\tau)$, которое определяется формулой (2).

В то же время величина корреляционной функции $\overline{R_T(\tau)}$, полученная определением даже бесконечно большого набора $R_T(\tau)$, вычисленных по записям длины T , останется функцией длины интервала T и будет отличаться от истинного значения корреляционной функции $R(\tau)$, определенного по (3). Это показано в работах [1] и [2].

Величина дисперсии $\overline{\sigma_T^2}$, вычисленной при помощи (1a), также не совпадает с истинным значением дисперсии (1) и зависит от длины интервала каждой записи T .

Значения $\overline{\sigma_T^2}$, $\overline{D_T(\tau)}$ и $\overline{R_T(\tau)}$, вычисленные по отдельной записи длины T , получаются с определенной погрешностью за счет конечности T . Знание этих погрешностей позволит ответить на вопрос, сколько записей длины T при одинаковых внешних условиях нужно обработать, чтобы получить средние значения вторых моментов с заданной степенью точности.

Кроме того, при расчетах статистических характеристик на цифровых электронных вычислительных машинах с непрерывных записей всегда производится снятие равноотстоящих ординат через интервал Δ .

Так как такая съемка является наиболее трудоемким этапом обработки экспериментальных результатов, необходимо определить минимальное число ординат n , которое можно снять с записи данной длины, чтобы погрешность получаемых результатов не превысила заданную величину. Иногда в метеорологии, особенно при расчетах крупномасштабных статистических характеристик, не существует непрерывной записи данных и число n является заданным. Тогда необходимо знать погрешности и искажения, вносимые в результаты этим конечным числом n .

Целью настоящей работы является сведение вместе имеющихся результатов расчета искажений и погрешностей вторых моментов стационарной случайной функции [1, 2, 3], возникающих за счет конечности интервала записи T и конечности числа ординат n , снятых с записи длиной T .

Отличия дисперсии $\overline{\sigma}_T^2$ и корреляционной функции $R_T(\tau)$ от σ^2 и $R(\tau)$ получаются зависящими от истинной корреляционной функции изучаемого процесса $R(\tau)$. В выражения для определения погрешностей всех вторых моментов входят четвертые моменты стационарной случайной функции $u(t)$ (см. [2, 3]). В настоящей работе всюду, где приводятся выражения для погрешностей, четвертые моменты заменены вторыми согласно гипотезе М. Д. Миллионщикова [4]:

$$u(\xi)u(\eta)u(\gamma)u(\delta) = R(\xi - \eta)R(\gamma - \delta) + R(\xi - \gamma)R(\eta - \delta) + R(\xi - \delta)R(\eta - \gamma). \quad (4)$$

Это соотношение предполагает, что совместное распределение значений $u(\xi)$, $u(\eta)$, $u(\gamma)$ и $u(\delta)$ является нормальным, поэтому оно не должно точно выполняться в турбулентном поле; однако вряд ли это обстоятельство может существенно изменить величину оцениваемых погрешностей.

После использования гипотезы (4) погрешности всех вторых моментов также выражаются через истинную корреляционную функцию изучаемого процесса $R(\tau)$. Следовательно, для проведения конкретных численных оценок нужно задать функцию $R(\tau)$. Все численные результаты, приводимые в настоящей работе, получены для корреляционной функции вида $e^{-\alpha|\tau|}$. При этом все результаты (как искажения, так и погрешности) оказываются функциями трех безразмерных параметров:

$\alpha\Delta$, $\alpha\tau$ и αT ($\Delta = \frac{T}{n}$ — интервал между ординатами случайной

функции). Так как практически любой случайный процесс можно грубо охарактеризовать временным масштабом корреляции $\frac{1}{\alpha}$, то, имея оценку этого масштаба, можно по приводимым в работе графикам оценить величину искажений и погрешностей при расчетах вторых моментов по экспериментальным данным при разных значениях T и Δ .

Разумный выбор T и Δ для процесса с заданным характерным временным масштабом $\frac{1}{\alpha}$ может намного уменьшить время, затрачиваемое на обработку результатов структурных наблюдений и сделать его вполне сравнимым со временем, затрачиваемым на обработку любых других экспериментальных данных.

2. Искажения и погрешности дисперсии

Прежде всего определим искажения и погрешности, возникающие при расчете дисперсий по непрерывной записи конечной длины.

Дисперсия $\sigma_{0,T}^2$ стационарной случайной функции, вычисленная по ограниченной записи, связана с истинным значением дисперсии $\sigma_{0,\infty}^2$ хорошо известным [1] соотношением

$$\sigma_{0,T}^2 = \sigma_{0,\infty}^2 \left[1 - 2 \int_0^T (T-y) R(y) dy \right]. \quad (5)$$

Погрешность дисперсии будет определяться разностью среднего квадрата дисперсии $\overline{\sigma_{0,T}^4}$ и квадрата средней дисперсии $\overline{\sigma_{0,T}^2}^2$ [2]:

$$\overline{\sigma_{0,T}^4} - \overline{\sigma_{0,T}^2}^2 = 4 \left\{ \frac{1}{T^2} \int_0^T (T-y) R^2(y) dy - \frac{1}{T^3} \int_0^T \int_0^T dx dy \times \right. \\ \left. \times R(y-x) \int_0^T d\xi R(x-\xi) + \frac{2}{T^4} \left[\int_0^T (T-y) R(y) dy \right]^2 \right\}. \quad (6)$$

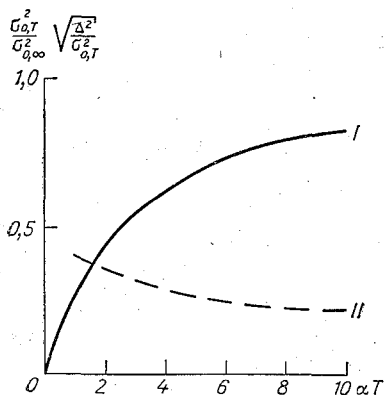


Рис. 1. Средняя дисперсия (I) и ее относительная погрешность (II) в зависимости от интервала осреднения T .

Для получения конкретных результатов по формулам (5) и (6) нужно знать $R(\tau)$ — корреляционную функцию изучаемого процесса. Для оценок искажений и погрешностей можно воспользоваться простой аппроксимацией $R(\tau)$ в виде экспоненциальной функции

$$R(\tau) = e^{-\alpha\tau}, \quad (7)$$

где $\frac{1}{\alpha}$ — характерный временной масштаб корреляции.

При подстановке (7) в (5) и (6) дисперсия и ее погрешность получают соответственно следующими:

$$\overline{\sigma_{0,T}^2} = \sigma_{0,\infty}^2 \left[1 - \frac{2}{\alpha T} + \frac{2}{(\alpha T)^2} - \frac{2}{(\alpha T)^2} e^{-\alpha T} \right], \quad (8)$$

$$\Delta^2 = \overline{\sigma_{0,T}^4} - [\overline{\sigma_{0,T}^2}]^2 = \frac{1}{2\alpha T} - \frac{9}{4(\alpha T)^2} + \frac{3}{(\alpha T)^3} + \frac{2}{(\alpha T)^4} + \\ + e^{-\alpha T} \left[-\frac{2}{(\alpha T)^2} - \frac{4}{(\alpha T)^3} - \frac{4}{(\alpha T)^4} \right] + e^{-2\alpha T} \left[\frac{1}{(\alpha T)^3} + \right. \\ \left. + \frac{2}{(\alpha T)^4} + \frac{1}{4(\alpha T)^2} \right], \quad (9)$$

где αT — отношение длины записи к характерному масштабу корреляции, или безразмерная длина записи.

Относительная погрешность A величины дисперсии, вычисленной по отдельной записи, равна

$$A = \sqrt{\frac{\overline{\sigma_{0,T}^4} - [\overline{\sigma_{0,T}^2}]^2}{[\overline{\sigma_{0,T}^2}]^2}}. \quad (10)$$

На рис. 1 (кривая II) приведены значения относительной погрешности A в зависимости от безразмерной длины интервала записи αT . На этом же рисунке (кривая I) приведена величина отношения

$\frac{\overline{\sigma_{0,T}^2}}{\sigma_{0,\infty}^2}$. Как и следовало ожидать, величина $\frac{\overline{\sigma_{0,T}^2}}{\sigma_{0,\infty}^2}$ с ростом αT стремится к единице, а погрешность расчета дисперсии уменьшается.

На практике расчет дисперсии производится по конечному числу ординат, снятых с записи случайной стационарной величины через равные промежутки времени Δ . В этом случае искажение дисперсии будет зависеть как от Δ , так и от T .

Для экспоненциальной корреляционной функции выражение для дисперсии получается следующим:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{\Delta, T}^2} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[u(i\Delta) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u(k\Delta) \right]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u^2(i\Delta) \times \\ &\times \left\{ 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n R[(i-k)\Delta] \right\} = \sigma_{0, \infty}^2 \left\{ 1 - \frac{\alpha\Delta}{\alpha T} - \right. \\ &\left. - \frac{2\alpha\Delta e^{-\alpha\Delta}}{\alpha T (1 - e^{-\alpha\Delta})} \left[1 + \frac{\alpha\Delta (e^{-\alpha T} - 1)}{\alpha T (1 - e^{-\alpha\Delta})} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $\sigma_{0, \infty}^2$ — истинная дисперсия, $\alpha\Delta$ — безразмерный интервал между снятыми с записи точками.

Таблица 1

$\alpha\Delta$	αT					
	2	4	6	8	10	40
0	(∞) 0,43	(∞) 0,62	(∞) 0,72	(∞) 0,78	(∞) 0,82	(∞) 0,95
0,05	(40) 0,50	(80) 0,62	(120) 0,72	(160) 0,78	(200) 0,82	(800) 0,95
0,2	(10) 0,50	(20) 0,62	(30) 0,72	(40) 0,78	(50) 0,82	(200) 0,95
1	—	—	—	—	—	(40) 0,95

В качестве примера в табл. 1 приводим оценки искажения дисперсии по формулам (8) и (11). В круглых скобках приведено полное число точек, снятых с записи данной длины ($n = \frac{\alpha T}{\alpha\Delta}$).

Из табл. 1, так же как из рис. 1, следует, что среднее значение дисперсии, полученное по большому числу записей, каждая из которых имеет длину T , всегда меньше истинной дисперсии. Например, при T , превышающем характерное время корреляции в 10 раз, величина $\sigma_{\Delta, T}^2$ составляет еще около 80% $\sigma_{0, \infty}^2$. Изменение параметра Δ , т. е. полного числа снятых с записи ординат, очень мало сказывается на результате. Нам неизвестны работы, в которых оценивалась бы величина погрешности дисперсии в зависимости от числа снятых с записи точек n .

Сами мы производили такой расчет только для случая структурной функции $D(\tau)$ [3]. Оценки, проведенные для $D(\tau)$ (см. ниже), позволяют утверждать, что если полное число снятых с записи ординат не меньше 50—100, то погрешность расчета $\frac{2}{T}$ из-за конечности полного интервала записи αT намного превышает ту дополнительную погрешность, которую при этом вносит конечность числа n . Поэтому увеличение числа точек снятия ординат не приведет в этом случае к существенному уточнению дисперсии.

3. Погрешности вычисления структурной функции

Как уже говорилось выше, среднее значение структурной функции, вычисленное по большому набору записей конечной длины, получается неискаженным, т. е. $\overline{D_T(\tau)}$ из (2а) совпадает с $D(\tau)$ из (2). Однако для того, чтобы определить число записей, необходимых для более или менее точного расчета структурной функции, нужно знать погрешность значений структурной функции $D_T(\tau)$, получаемой с одной отдельной записи длины T .

Приведем сначала результаты оценки этой погрешности как функции длины интервала T при $n = \infty$.

Дисперсия структурной функции получается как разность среднего квадрата структурной функции и квадрата средней структурной функции. Как следует из [3], она равна

$$\begin{aligned} \overline{D_T^2(\tau)} - \overline{D_T(\tau)}^2 = & \frac{1}{T^2} \int_0^T dt \int_0^T d\xi \{ 8R^2(t-\xi) - 8R(t-\xi) \times \\ & \times R(t+\tau-\xi) - 8R(t-\xi)R(t-\xi-\tau) + 2R^2(t+\tau-\xi) + \\ & + 4R(t+\tau-\xi)R(t-\xi-\tau) + 2R^2(t-\xi-\tau) \}. \end{aligned} \quad (12)$$

Для экспоненциальной корреляционной функции абсолютная погрешность структурной функции определяется следующим выражением:

$$\begin{aligned} \overline{D_T^2(\tau)} - \overline{D(\tau)}^2 = & \frac{12}{\alpha T} - \frac{4\alpha\tau}{(\alpha T)^2} - \frac{4}{(\alpha T)^2} - e^{-\alpha\tau} \left[\frac{16\alpha\tau}{\alpha T} - \frac{8(\alpha\tau)^2}{(\alpha T)^2} + \right. \\ & + \frac{16}{\alpha T} - \frac{8\alpha\tau}{(\alpha T)^2} - \frac{8}{(\alpha T)^2} \left. \right] + e^{-2\alpha\tau} \left[\frac{4}{\alpha T} - \frac{4}{(\alpha T)^2} - \frac{4\alpha\tau}{(\alpha T)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{8\alpha\tau}{\alpha T} - \frac{4(\alpha\tau)^2}{(\alpha T)^2} \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Относительная погрешность B структурной функции за счет конечности интервала измерения, получаемая делением (13) на $\overline{D(\tau)}^2$ и извлечением корня

$$B = \sqrt{\frac{\overline{D_T^2(\tau)} - \overline{D(\tau)}^2}{\overline{D(\tau)}^2}}, \quad (14)$$

представлена на рис. 2.

Естественно, что по мере уменьшения интервала записи погрешность увеличивается. Кроме того, погрешность довольно сильно возрастает с ростом аргумента структурной функции τ . Оказывается, что если построить зависимость относительной ошибки $D(\tau)$ от безразмерного аргумента $\frac{\tau}{T}$, то все кривые сближаются. Это указывает на то, что

погрешность является гораздо более сильной функцией аргумента $\frac{\tau}{T}$, чем характерного масштаба измеряемой величины α .

На рис. 3 приведена относительная погрешность структурной функции за счет конечности интервала записи в зависимости от аргумента $\frac{\tau}{T}$. Из этого графика следует такой вывод: по отдельной записи имеет смысл считать структурную функцию до аргументов, не превы-

шающих $\frac{\tau}{4}$, так как при больших аргументах относительная погрешность становится больше 50%.

Для того чтобы погрешность расчета по отдельной записи была порядка 20%, нужно (как видно из рис. 3), чтобы τ были меньше $0,1T$.

Сходные результаты получаются при расчете погрешностей спектров [5].

При наличии N записей, по каждой из которых вычисляется структурная функция, а затем берется среднее, ошибка уменьшается в $\sqrt{N}$ раз при всех значениях τ . Формула (14) дает величину погрешности $D_T(\tau)$, вычисленной путем интегрирования по непрерывной записи конечной длины.

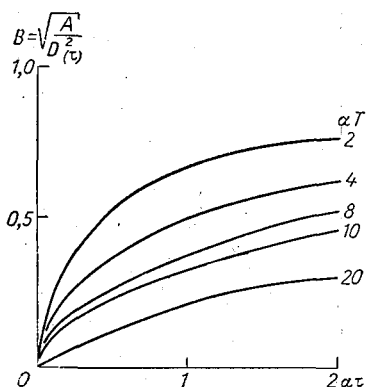


Рис. 2. Относительная погрешность $D_T(\tau)$ за счет конечности интервала записи в зависимости от аргумента $\alpha\tau$ при разных αT .

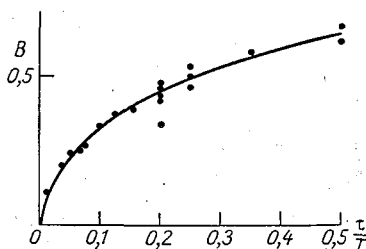


Рис. 3. Относительная погрешность структурной функции за счет конечности интервала записи в зависимости от отношения $\frac{\tau}{T}$.

Теперь оценим погрешность, вносимую в результаты расчетов за счет конечности интервала Δ . Определим ее как средний квадрат разности структурной функции, вычисленной по дискретному набору точек, и функции $D_{T,\Delta}(\tau)$, полученной путем непрерывного интегрирования по записи длиной T :

$$\begin{aligned} \overline{\delta^2(\tau, \Delta)} = & \frac{1}{n^2} \sum_{i,k=1}^n \overline{[u_k(k\Delta + \tau) - u_k(k\Delta)]^2 [u_i(i\Delta + \tau) - u_i(i\Delta)]^2} - \\ & - \frac{2}{nT} \sum_{k=1}^n \int_0^T \overline{[u_k(k\Delta + \tau) - u_k(k\Delta)]^2 [u(t + \tau) - u(t)]^2} dt + \\ & + \frac{1}{T^2} \int_0^T dt \int_0^T d\xi \overline{[u(t + \tau) - u(t)]^2 [u(\xi + \tau) - u(\xi)]^2}. \end{aligned} \quad (15)$$

При предположении, что $R(\tau) = e^{-\alpha\tau}$ и $\alpha\Delta \ll 1$, после разложения в ряд по $\alpha\Delta$ это соотношение принимает следующий вид [3]:

$$\begin{aligned} \overline{\delta^2(\tau, \Delta)} = & 4(\alpha\Delta)^2 \left\{ \frac{1}{\alpha T} - \frac{\alpha\tau}{3(\alpha T)^2} + \frac{1}{(\alpha T)^2} + e^{-\alpha\tau} \left[-\frac{4}{3\alpha T} - \frac{2}{(\alpha T)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2\alpha\tau}{3(\alpha T)^2} \right] + e^{-2\alpha\tau} \left[\frac{1}{3\alpha T} + \frac{1}{(\alpha T)^2} - \frac{\alpha\tau}{3(\alpha T)^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

При фиксированном $\alpha\Delta$ эта погрешность увеличивается при уменьшении αT (рис. 4). При фиксированном αT наибольшую погрешность

имеет первая точка структурной функции $D_{T,\Delta}(\tau)$ при $\tau=\Delta$. На рис. 5 приведена погрешность расчета первой точки $D_{T,\Delta}(\tau)$ для достаточно длинной записи $\alpha T=10$ при разных $\alpha\tau=\alpha\Delta$. Отношение $\alpha T/\alpha\Delta$ определяет полное число точек n , снятых с записи.

Из рис. 5 видно, что при расчете по 200 и по 50 точкам погрешность первого значения структурной функции увеличивается всего с 6 до 13%. С ростом аргумента эта погрешность еще уменьшается (рис. 4). И если при $n=200$ погрешность расчета первой точки структурной функции за счет конечности Δ сравнима с погрешностью за счет конечности полного интервала записи T (около 8% при $\alpha\tau=\alpha\Delta=0,05$ и $\alpha T=10$ по рис. 2), то при больших значениях аргумента $\alpha\tau$ ею просто можно пренебречь. Например, при том же αT ,

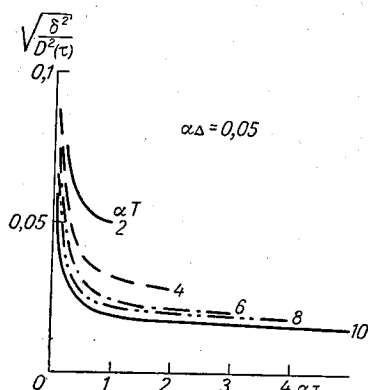


Рис. 4. Относительная погрешность структурной функции в зависимости от интервала $\alpha\Delta$ при разных значениях $\alpha\tau$ и αT .

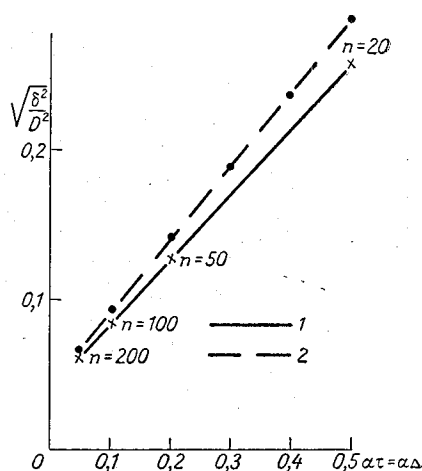


Рис. 5. Погрешность расчета первой точки $D_{T,\Delta}(\tau)$ для $\alpha T=10$.
1 — $\alpha T=10$, 2 — $\alpha T=8$.

равном 10, погрешность за счет конечности числа точек для $\alpha\tau=2\alpha\Delta=0,1$ ($n=200$) составляет по рис. 4 около 5%, а за счет конечности T она (см. рис. 2) уже вдвое больше — около 11%.

Таким образом, не всегда увеличение числа точек снятия намного улучшает результат. Поэтому в каждом конкретном случае необходимо выбирать $\alpha\Delta$, т. е. n , так, чтобы не увеличивать время для обработки, не получая при этом существенного выигрыша в точности. Если при достаточно длинной записи ($\alpha T \approx 10$) выбрать минимально возможное значение $\alpha\Delta$ (равное приблизительно удвоенной инерции записывающего прибора), то число точек n может достигнуть несуразно большой величины (порядка 1000 и больше), тогда как для расчета структурной функции достаточно 200 точек, снятых через $\alpha\Delta=0,05$. В том случае, когда нужно получить значение структурной функции в интервале значений аргумента $\alpha\tau$ между нулем и значением $\alpha\tau=\alpha\Delta$, можно более часто снять ординаты, например через $\alpha\Delta=0,01$, с более короткого участка записи.

Во всех случаях следует иметь в виду, что погрешности, о которых говорилось выше, имеют место при расчете структурных функций по одной отдельной записи; если же полученные таким образом отдельные структурные функции осреднить, погрешность полученной средней $\overline{D_T(\tau)}$ будет меньше в $\sqrt{N}$ раз, где N — число осредняемых структурных функций.

4. Оценка искажений корреляционной функции, полученной по конечному интервалу

Как уже упоминалось в начале статьи, средние значения структурных функций, получаемых по набору записей конечной длины в пределе при $N \rightarrow \infty$, стремятся к истинным средним, т. е. $\overline{D_T(\tau)}$ равно $D(\tau)$.

Что касается корреляционной функции, то $\overline{R_T(\tau)}$ остается искаженным;

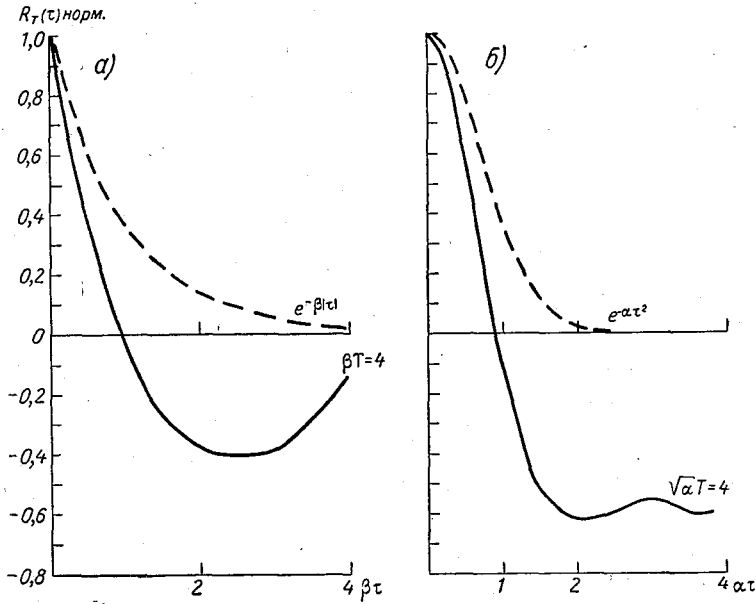


Рис. 6. Искажение корреляционной функции за счет конечности интервала записи.

а — для $R(\tau) = e^{-\beta|\tau|}$, б — для $R(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$ при $\alpha T = 4$.

как показано в [1], величина $\overline{R_T(\tau)}$ связана с $R(\tau)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{R_T(\tau)} = R(\tau) + \frac{1}{T^2} \int_0^T d\eta \int_0^T R(\eta - \gamma) d\gamma - \frac{1}{T^2} \int_0^T d\xi \int_0^T R(\xi - \eta) d\eta - \\ - \frac{1}{T^2} \int_0^T d\xi \int_0^T R(\eta - \xi - \tau) d\eta. \end{aligned} \quad (17)$$

Для иллюстрации на рис. 6 приведены значения $\overline{R_T(\tau)}$ при $R(\tau) = e^{-\beta|\tau|}$ и $R(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$ для $\alpha T = 4$. Из рис. 6 видно, что ограниченность записи всегда приводит к кажущемуся уменьшению характерного масштаба метеорологической величины. Например, когда длина записи только в 4 раза превышает величину характерного масштаба $\beta T = 4$, кажущийся масштаб получается примерно вдвое меньше истинного. Это обстоятельство нужно учитывать при расчете корреляционных функций по коротким записям.

Из-за сложности связи $\overline{R_T(\tau)}$ с $R(\tau)$ практически гораздо удобнее

вычислять по экспериментальным данным структурные, а не корреляционные функции.

Значения корреляционных функций можно получить, воспользовавшись хорошо известной связью

$$R(\tau) = \sigma^2 - \frac{1}{2} D(\tau). \quad (18)$$

Полученные по экспериментальным данным $\overline{D_T(\tau)}$ в пределе совпадают с $D(\tau)$; дисперсия $\overline{\sigma_T^2}$, разумеется, искажена, но ее искажение гораздо легче учесть по формулам (8) или (11), имея оценку характерного масштаба $\frac{1}{\alpha}$.

Для более полного изложения приведем общий вид выражения для погрешности корреляционной функции за счет конечности интервала T при $n = \infty$.

Дисперсия корреляционной функции представляет собой разность $\overline{R_T^2(\tau)} - \overline{R_T(\tau)}^2$. Эта разность, полученная с использованием гипотезы Миллионщикова, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \overline{R_T^2(\tau)} - \overline{R_T(\tau)}^2 = & \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T d\xi dx R(\xi - x)^2 + \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T d\xi dx R(\xi - x - \tau) \times \\ & \times R(\xi - x + \tau) - \frac{2}{T^3} \int_0^T \int_0^T \int_0^T d\xi dx dy [R(\xi + \tau - x) R(x + \tau - y) + \\ & + R(\xi - x) R(x - y)] + \frac{1}{T^4} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T d\xi dx dy dz R(\xi - x) R(y - z) + \\ & + \frac{2}{T^4} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T d\xi dx dy dz R(x + \tau - y) R(\xi - z + \tau) - \\ & - \frac{1}{T^4} \int_0^T \int_0^T \int_0^T \int_0^T d\xi dx dy dz R(\xi + \tau - x) R(y + \tau - z). \end{aligned} \quad (19)$$

В пределе при $\tau \rightarrow 0$ (из 19) получается приведенная выше формула (6) для расчета погрешностей дисперсии метеорологической величины.

Как видно из (19), зная вид корреляционной функции, можно получить дисперсию, а затем и погрешность определения корреляционной функции за счет конечности интервала записи.

5. Оценка влияния неточности снятия ординат

До сих пор речь шла о погрешностях коррелируемых, связанных с тем, что расчет статистических характеристик производится по конечному числу ординат, снятых с ограниченной по времени записи. При этом подразумевалось, что ординаты с записи снимаются точно. Можно оценить влияние случайных ошибок, имеющих место при снятии ординат с записи.

Подставив в выражения (1а) и (2а) вместо $u(\xi)$ [$u(\xi) + u'(\xi)$] (где $u'(\xi)$ — некоррелированная случайная ошибка), получим выраже-

ния для $\overline{\sigma_{0,T}^2}$ и $\overline{D_T(\tau)}$ с учетом ошибки снятия ординат. Оказывается, что $\overline{\sigma_{0,T}^2}$ увеличивается на дисперсию ошибок $\frac{1}{T} \int_0^T [u'(\xi)]^2 d\xi$, а $\overline{D_T(\tau)}$ увеличивается на удвоенную дисперсию ошибок при всех значениях аргумента:

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_{0,T}^2} &= \frac{1}{T} \int_0^T \left\{ u(\xi) + u'(\xi) - \frac{1}{T} \int_0^T [u(\eta) + u'(\eta)] d\eta \right\}^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[u(\xi) - \frac{1}{T} \int_0^T u(\eta) d\eta \right]^2 d\xi + \frac{1}{T} \int_0^T [u'(\xi)]^2 d\xi; \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \overline{D_T(\tau)} &= \frac{1}{T} \int_0^T [u(\xi + \tau) + u'(\xi + \tau) - u(\xi) - u'(\xi)]^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T [u(\xi + \tau) - u(\xi)]^2 d\xi + \frac{2}{T} \int_0^T [u'(\xi)]^2 d\xi. \end{aligned} \quad (21)$$

Очевидно, что чувствительность записывающей аппаратуры должна быть такой, чтобы дисперсия случайных ошибок при снятии ординат была значительно меньше дисперсии самой измеряемой величины. Из (21) следует, что при $\tau \rightarrow 0$ величина структурной функции, вычисляемой по экспериментальным данным, стремится не к нулю, а к удвоенной дисперсии случайных ошибок. Это обстоятельство нужно учитывать при построении графиков $\overline{D_T(\tau)}$.

Из всего вышеизложенного можно сделать следующие основные выводы.

1. Средняя структурная функция, полученная по достаточно большому набору записей конечной длины, совпадает со значением истинной структурной функции. Поэтому при наличии набора непрерывных записей при одинаковых внешних условиях следует сначала произвести расчет структурных функций по отдельным записям, затем получить среднее значение по всему набору структурных записей и по этому среднему значению и средней дисперсии рассчитать корреляционную функцию.

2. Среднее значение дисперсии, полученное по большому числу записей, каждая из которых имеет длину T , всегда меньше истинного значения дисперсии.

В случае расчета дисперсии по достаточно длинной записи основной погрешностью является погрешность за счет конечности интервала записи.

3. Расчет структурной функции по отдельной записи имеет смысл проводить до аргументов порядка $0,1 T$.

4. Необходимо в каждом конкретном случае разумно выбирать интервал снятия точек с записи, а именно: при наличии достаточно длинной записи для получения $D_T(\tau)$ для аргументов $\alpha\tau > \alpha\Delta$ нужно снять около 200 точек со всей записи; если же необходимо получить $D_T(\tau)$ для малых аргументов, нужно снять ординаты чаще, но с более короткого участка записи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Огура И. Описание диффузии от непрерывного источника при конечном времени наблюдений. Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха. ИЛ, М., 1962.
2. Бютнер Э. К. О вычислении структурных и корреляционных функций по конечному интервалу наблюдений. Тр. ГГО, вып. 144, 1963.
3. Ариель Н. З. О погрешностях расчета структурных характеристик по экспериментальным данным. Тр. ГГО, вып. 150, 1964.
4. Миллионщиков М. Д. К теории однородной изотропной турбулентности. ДАН СССР, вып. 32, 1941.
5. Blackman R. B. and Tukey J. W. The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communications Engineering. The Bell System Technical Journal devoted to the Scientific and Engineering Aspects of Electrical Communication, vol. XXXVII, 1958.

ИСКАЖЕНИЯ И ПОГРЕШНОСТИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ РАСЧЕТАХ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

ЧАСТЬ II. О ВЫЧИСЛЕНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Изложены основные результаты, относящиеся к вычислению спектральных плотностей по конечному ряду значений случайной функции. Приведены формулы, связывающие значения спектральных плотностей, полученных по экспериментальным данным, с истинным спектром стационарного случайного процесса.

Введение

В части I (см. предыдущую статью настоящего сборника) подробно разбирался вопрос о том, как связаны дисперсии, структурные и корреляционные функции, получаемые по отдельным записям конечной длины T , с истинными характеристиками случайного процесса $u(t)$.

Одной из существенных физических характеристик случайного процесса $u(t)$ является его энергетический спектр.

В настоящее время имеется большое количество методов определения спектров по записям флуктуаций метеорологических величин (скорости потока, температуры и т. д.). Некоторые из них заимствованы из радиотехники, ряд методов разработан непосредственно в метеорологии. Описание целого ряда таких методов содержится в монографиях [2, 3] и в статьях [4, 5].

Авторы настоящей статьи не ставят своей целью дать сколько-нибудь полное описание этих методов и практические рекомендации к их использованию. Их задачей является расчет искажений и погрешностей, возникающих при расчете спектров по записям конечной длины T и по конечному числу ординат, снятых с записи через интервал Δt .

Эти искажения и погрешности имеют место при расчетах спектров любым методом, хотя в определенных пределах их величина может изменяться от метода к методу.

Однако прежде чем описывать искажения и погрешности, возникающие при расчетах спектров по записям конечной длины и конечному числу ординат записи, нужно пояснить, что понимается под энергетическим спектром стационарного случайного процесса $u(t)$.

1. Энергетический спектр $P(\omega)$ стационарного случайного процесса $u(t)$

Разложение функций, удовлетворяющих определенным условиям (условиям Дирихле), в ряды и интегралы Фурье известно уже около 200 лет и широко используется в самых разнообразных физических задачах.

Функция $f(t)$, отличная от нуля на отрезке $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ и равная нулю вне этого отрезка, может быть разложена в ряд Фурье, который на отрезке $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$ представляет собой функцию $f(t)$ и является, кроме того, периодической функцией периода T :

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{i\omega_k t} \quad \text{при } |t| \leq \frac{T}{2},$$

где

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T}.$$

Коэффициенты ряда

$$A_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-i\omega_k t} dt.$$

Если длина отрезка T неограниченно возрастает, ряд Фурье в пределе переходит в интеграл, причем такой предельный переход возможен

при условии, если $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$.

При выполнении этого условия можно записать

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{при } |t| \leq \frac{T}{2},$$

где

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Функция $A(\omega)$ называется обращением Фурье функции $f(t)$.

При предельном переходе от ряда к интегралу Фурье каждый из коэффициентов ряда A_k стремится к нулю, но число их на каждом интервале частот бесконечно возрастает. В пределе

$$A_k \rightarrow A(\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

и сумма по k заменяется интегралом по $d\omega$.

Если имеется отдельная реализация $u_T(t)$ стандартного случайного процесса на отрезке $-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$, такую реализацию можно разложить в ряд Фурье, если предположить, что при значениях $|t| > \frac{T}{2}$ функция $u_T(t)$ тождественно равна нулю. Следовательно, можно записать

$$u_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_T(\omega_n) e^{i\omega_n t}, \quad (1)$$

где

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T}. \quad (2)$$

Коэффициенты разложения $a_T(\omega_n)$ определяются обычным способом через функцию $u_T(t)$:

$$a_T(\omega_n) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u_T(t) e^{-i\omega_n t} dt. \quad (3)$$

Так как $u_T(t)$ является случайной функцией, очевидно, что коэффициенты ряда $a_T(\omega_n)$ должны быть случайными величинами. Это означает, что, если имеется целый набор отдельных реализаций $u_T(t)$ при одинаковых внешних условиях, разложения разных реализаций в ряд Фурье приведут к совершенно различным значениям коэффициентов $a_T(\omega_n)$ в каждом разложении.

Однако отдельная реализация $u_T(t)$, известная на отрезке конечной длины T , не является полным описанием стационарного случайного процесса $u(t)$. Полное описание стационарного случайного процесса $u(t)$ можно получить только в пределе при $T \rightarrow \infty$. Но если стационарная случайная функция $u(t)$ известна во всем интервале значений t от $-\infty$ до $+\infty$, то ее невозможно разложить в обычный интеграл Фурье, так как она не удовлетворяет условию абсолютной сходимости

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t)| dt \cong \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{u^2(t)} dt \rightarrow \infty$$

(дисперсия стационарной случайной функции не убывает при $t \rightarrow \infty$).

Однако как было показано уже в 30-е годы [6, 7], стационарный случайный процесс $u(t)$ можно представить в виде разложения по гармоникам $e^{i\omega t}$, при этом аналогом обращения Фурье $A(\omega)$ аналитической функции $f(t)$ будет случайная функция $a(\omega)$.

Оказывается, что в предельном случае, когда интервал измерения стремится к бесконечности и $u_T(t) \rightarrow u(t)$, разложение (1) переходит в интеграл

$$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} a(\omega) d\omega, \quad (1a)$$

при этом совокупность случайных величин — коэффициентов ряда $a_T(\omega_n)$ — переходит в приращения случайной функции $a(\omega)$. Функция $a(\omega)$ обладает целым рядом специальных свойств.

Действительно, составим, пользуясь (1a), выражение для корреляционной функции стационарного случайного процесса

$$R(\tau) = \langle u(t) u(t') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle a(\omega) a^*(\omega') \rangle d\omega d\omega' e^{i\omega t - i\omega' t'}, \quad (4)$$

где скобки $\langle \rangle$, как и в части I, означают осреднение по статистическому ансамблю, * — комплексно-сопряженную величину.

Левая часть этого равенства должна зависеть только от разности аргументов $t - t' = \tau$. Для того чтобы это условие было выполнено и в правой части, все средние значения произведения $\langle a(\omega) a^*(\omega') \rangle$ при $\omega \neq \omega'$ должны обратиться в нуль. Чтобы после интегрирования по

ω' в правой части (4) осталось обычное обращение Фурье функции $R(\tau)$, величина $\langle a(\omega) a^*(\omega') \rangle$ должна иметь следующий вид:

$$\langle a(\omega) a^*(\omega') \rangle = P(\omega) \delta(\omega - \omega'). \quad (5)$$

Входящая в правую часть (5) δ -функция обладает следующими свойствами:

$$1) \quad \delta(\omega - \omega') = \begin{cases} \infty & \text{при } \omega = \omega' \\ 0 & \text{при } \omega \neq \omega' \end{cases}$$

2) интеграл от произведения любой функции $\varphi(\omega')$ на δ -функцию равен значению функции φ в точке $\omega = \omega'$,

$$\int \varphi(\omega') \delta(\omega - \omega') d\omega' = \varphi(\omega). \quad (6)$$

Если подставить (5) в (4) и произвести интегрирование по ω' , воспользовавшись свойством δ -функции (6), получится следующее равенство:

$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega P(\omega) e^{i\omega\tau}. \quad (7)$$

Формулу (5) можно рассматривать как выражение для корреляционной функции случайного процесса $a(\omega)$. Из (5) следует, что значения функции $a(\omega)$ и $a(\omega')$ даже при очень близких значениях аргументов ω и ω' некоррелированы между собой.

Дисперсия случайной функции — среднее значение $\langle |a(\omega)|^2 \rangle$ — в каждой точке ω равна бесконечности. Но среднее значение дисперсии по любому конечному интервалу частот $\Delta\omega$ является конечным и равно среднему значению функции $P(\omega)$ на этом интервале частот.

Действительно,

$$\frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega + \frac{\Delta\omega}{2}} d\omega \int_{\omega - \alpha}^{\omega + \alpha} \langle a(\omega) a^*(\omega') \rangle d\omega' = \frac{1}{\Delta\omega} \int_{\omega - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega + \frac{\Delta\omega}{2}} P(\omega) d\omega \quad (8)$$

(выбор интервала α во внутреннем интеграле из-за первого свойства δ -функции совершенно не существен, можно просто взять пределы от $-\infty$ до $+\infty$).

Случайная функция $a(\omega)$, имеющая корреляционную функцию вида (5) и, следовательно, обладающая всеми указанными выше свойствами, называется белым шумом. Функция $P(\omega)$ называется интенсивностью белого шума. Именно эта функция $P(\omega)$ и является энергетическим спектром, или спектральной плотностью¹, стационарного случайного процесса $u(t)$.

Из (8) следует, что среднее по интервалу $\Delta\omega$ значение дисперсии белого шума, соответствующего процессу $u(t)$, равно среднему по $\Delta\omega$ значению спектральной плотности.

Из (7) следует, что $P(\omega)$ является обычным обращением Фурье кор-

¹ Строго говоря, под энергетическим спектром понимается $\int_{-\infty}^{\omega} P(\omega') d\omega'$, однако, следуя укоренившимся в метеорологии терминам, мы называем энергетическим спектром функцию $P(\omega)$, которая на самом деле является спектральной плотностью.

реляционной функции $R(\tau)$. Если в (7) положить τ равным нулю, получится связь между дисперсией процесса $u(t)$ и $P(\omega)$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} P(\omega) d\omega. \quad (9)$$

На основании этого последнего равенства функцию $P(\omega)$ и называют энергетическим спектром стационарного случайного процесса $u(t)$.

Каждому процессу $u(t)$ соответствует белый шум со своей интенсивностью $P(\omega)$. Знание функции $P(\omega)$ позволяет судить о том, какой вклад вносят колебания различных частот во флуктуации метеорологических величин. Это очень важно, так как такие данные позволяют судить об источниках этих флуктуаций.

2. Расчет спектров по непрерывной записи случайной функции ограниченной длины T

В эксперименте мы всегда имеем дело с отдельными реализациями случайного процесса $u(t)$, т. е. с записями флуктуаций физической величины (скорости потока, температуры, волнения) в течение конечного отрезка времени T . Для получения надежных значений спектральной плотности, так же как и для получения надежных средних значений структурных и корреляционных функций, нужно иметь целый набор записей длины T при одинаковых внешних условиях.

Даже при наличии достаточно большого набора записей значения $P_T(\omega)$, получаемые с этих записей, отличаются от истинного спектра $P(\omega)$. Спектральная плотность $P_T(\omega)$, получаемая с одной отдельной записи длиной T , имеет определенную погрешность. Знание этой погрешности позволяет оценить число записей, нужное для получения средних значений $\overline{P_T(\omega)}$ с заданной степенью точности.

Расчет значений $P_T(\omega)$ по отдельной реализации $u_T(t)$ длиной T можно производить двумя способами. Первый способ связан с определением спектральной плотности как интенсивности белого шума. В основе этого способа лежит формула (8). Реализацию $u_T(t)$ можно разложить в ряд Фурье (1) и получить набор случайных величин — коэффициентов Фурье $a_T(\omega_n)$ (n равно $0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Реально верхний предел частот, для которого можно определять коэффициенты $a_T(\omega_n)$, ограничен при непрерывном интегрировании по записи инерции измерительного прибора, при расчетах на ЭВМ — величиной $\omega_N = \frac{\pi}{\Delta\tau}$, где $\Delta\tau$ — интервал между последовательными значениями ординат, снятых с записи $u_T(t)$ (см. следующий раздел).

Таким образом, совокупность $\frac{T}{\Delta\tau} + 1$ ординат случайной функции $u_T(t)$ позволяет сосчитать точно такое же число случайных величин — коэффициентов $a_T(\omega_n)$ (n равно $0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \frac{T}{2\Delta\tau}$).

Затем можно вычислить средние значения дисперсий $|a_T|^2$ ряда соседних значений коэффициентов, например, от $a_T(\omega_{n-m})$ до $a_T(\omega_{n+m})$, и, основываясь на формуле (8), считать полученную величину средним значением $P_T(\omega)$ во всем интервале частот от ω_{n-m} до ω_{n+m} . Значения $a_T(\omega_n)$ можно приближенно считать независимыми случайными величинами, поэтому относительная погрешность такого вычисления значений

$P_T(\omega)$ будет просто равна $\frac{1}{\sqrt{2m+1}}$, где $2m+1$ — число использованных для осреднения коэффициентов $a_T(\omega_k)$.

Очевидно, что, чем больше число m , тем точнее результат. Но при этом будут получаться средние значения $P_T(\omega)$, сглаженные по все большему интервалу частот.

В пределе при увеличении длины записи $T \rightarrow \infty$ мы получили бы точное среднее значение $P(\omega)$ для любого малого интервала $\Delta\omega$, так как при $T \rightarrow \infty$ на любом малом интервале $\Delta\omega$ уместилось бы сколь угодно большое число независимых коэффициентов $a(\omega)$. Реально число используемых для осреднения точек должно быть не меньше 10, тогда погрешность определения $P_T(\omega)$ будет составлять около 30%, а сами значения спектральной плотности будут получаться средними по интервалу частот $\Delta\omega$, равному

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} 10.$$

Если имеется целый набор N записей случайной функции $u_T(t)$, то значения спектральной плотности $P_T(\omega)$, осредненные по всему набору, будут иметь погрешность в $\sqrt{N}$ раз меньшую.

Второй способ расчета спектральных плотностей основан на том обстоятельстве, что спектральная плотность является обращением Фурье корреляционной функции изучаемого процесса $u(t)$ [формула (7)]. Если при наличии набора реализаций $u_T(t)$ составить выражение для корреляционной функции $R_T(\tau)$, средней по всему набору реализаций, через разложения Фурье (1), получится следующее:

$$\begin{aligned} \overline{R_T(\tau)} &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_T(\omega_n) e^{i\omega_n t} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_T^*(\omega_m) e^{-i\omega_m (t-\tau)} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \overline{a_T(\omega_n) a_T^*(\omega_m)} e^{i\omega_n t - i\omega_m (t-\tau)}. \end{aligned} \quad (10)$$

Если считать, что среднее значение $\overline{R_T(\tau)}$ зависит только от τ и не зависит от t , то все средние значения произведений $a_T(\omega_n) a_T^*(\omega_m)$ при $n \neq m$ должны обратиться в нуль, и в результате получится

$$\overline{R_T(\tau)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{|a_T(\omega_n)|^2} e^{i\omega_n \tau}. \quad (11)$$

Выражение (11) представляет собой разложение в ряд Фурье функции $\overline{R_T(\tau)}$, известной при $\tau \leq T$ и тождественно равной нулю при $\tau > T$. Коэффициентами ряда Фурье оказались средние по большому набору записей значения дисперсии коэффициентов Фурье $a_T(\omega_n)$.

Следовательно, коэффициенты разложения средней по большому набору записей корреляционной функции $\overline{R_T(\tau)}$ в ряд Фурье являются значениями спектральной плотности $P_T(\omega_n)$.

По отдельной реализации $u_T(t)$ можно в принципе вычислять значения корреляционной функции $R_T(\tau)$ при значениях аргумента τ от 0 до T и получить значения $P_T(\omega)$ путем разложения в ряд Фурье этой функции. Однако значения $R_T(\tau)$ при τ большем 0,1 T получаются с очень

большими погрешностями, причем эти погрешности возрастают с ростом аргумента τ .

Как показано в работе [2], расчет коэффициентов Фурье функции $R_T(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq T$, полученной по отдельной записи длиной T , эквивалентен расчету квадратов всех коэффициентов Фурье самой реализации $u_T(t)$ без всякого осреднения. Это означает, что расчет энергетического спектра нельзя проводить как обращение Фурье корреляционной функции, полученной по отдельной реализации $u_T(t)$ во всем возможном интервале значений аргумента $0 \leq \tau \leq T$.

Для проведения такого обращения можно брать значения корреляционной функции $R_T(\tau)$ только в пределах $0 \leq \tau \leq T_m$, где $T_m < T$. Очевидно, что, чем меньше отношение T_m/T , тем меньше будет погрешность расчета $P_T(\omega)$. Но при этом значения $P_T(\omega)$ будут сильнее отличаться от истинного спектра $P(\omega)$, который определяется как обращение Фурье корреляционной функции, известной во всем интервале значений аргумента τ от $-\infty$ до $+\infty$:

$$P(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (12)$$

Связь значений $\overline{P_T(\omega)}$ и $P(\omega)$, а также погрешности определения $P_T(\omega)$ по отдельной записи в зависимости от соотношения T_m и T получены в [1]. Вкратце приведем основные результаты, относящиеся к связи $P_T(\omega)$ и $P(\omega)$ для непрерывных записей длины T . Вопрос о расчете спектральной плотности $P_{T,\Delta}(\omega)$ по дискретным данным подробно рассмотрен в разделе 3.

Как показано в части I, по набору записей длиной T можно вычислить в среднем без искажений значения структурной функции $\overline{D_T(\tau)}$ до значений $\tau = T_m < T$ и, зная дисперсию, получить неискаженные значения корреляционной функции $\overline{R_T(\tau)}$ также при значениях аргумента $\tau \leq T_m$. Будем считать, что при $\tau < T_m$ значения $\overline{R_T(\tau)}$ совпадают с истинными значениями корреляционной функции процесса $R(\tau)$, а при $\tau > T_m$ $\overline{R_T(\tau)} = 0$.

Проведение обращения Фурье такой функции можно представить в виде обращения Фурье произведения двух функций: $D_0(\tau)$ и истинной корреляционной функции $R(\tau)$, где

$$D_0(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\tau| \leq T_m \\ 0 & \text{при } |\tau| > T_m. \end{cases} \quad (13)$$

Произведение $D_0(\tau)R(\tau)$ является функцией, которая, в отличие от $R_T(\tau)$, известна во всем интервале значений τ от $-\infty$ до $+\infty$ и поэтому может быть представлена в виде интеграла Фурье

$$D_0(\tau) R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{P_T(\omega)} e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (14)$$

$$\overline{P_T(\omega)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} D_0(\tau) R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (15)$$

Для того чтобы найти связь между получаемыми значениями спектральной плотности $\overline{P_T(\omega)}$ и истинным спектром $P(\omega)$ (12), достаточно знать спектр $Q_0(\omega)$ функции $D_0(\tau)$:

$$Q_0(\omega) = 2T_m \frac{\sin \omega T_m}{\omega T_m}. \quad (16)$$

Тогда, используя теорему о свертке¹, из (15) можно получить связь $\overline{P_T(\omega)}$ и $P(\omega)$:

$$\overline{P_T(\omega_1)} = \int_{-\infty}^{+\infty} Q_0(\omega_1 - \omega) P(\omega) d\omega. \quad (17)$$

Из (17) следует, что $\overline{P_T(\omega_1)}$ не есть нечто близкое именно к значению $P(\omega_1)$. $P_T(\omega_1)$ представляет собой величину истинного спектра $P(\omega)$, осредненную по всему интервалу частот с весовой функцией $Q_0(\omega_1 - \omega)$. Это означает, что при использовании в расчете спектров значений корреляционной функции до аргумента $\tau = T_m$ получаются значения спектральной плотности, осредненные по интервалу частот $\Delta\omega$ порядка $2\pi/T_m$ (первый нуль функции $Q_0(\omega)$ находится на $\omega = \pi/T_m$).

Совершенно очевидно, что такой метод расчета $P_T(\omega)$ можно обобщить, используя в качестве сглаживающей функции вместо прямоугольника $D_0(\tau)$ самые разнообразные функции $D_i(\tau)$, обладающие тем свойством, что

$$D_i(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{при } \tau = 0 \\ 0 & \text{при } |\tau| > T_m. \end{cases} \quad (13a)$$

Такого рода сглаживающих функций придумано довольно много. В табл. 1 работы [1] приведено несколько наиболее распространенных функций и соответствующие им спектры $Q_i(\omega)$. На рис. 1 изображены функции D_0 и D_2 и соответствующие им спектры. Для практического употребления наиболее удобны функции типа D_2 или D_3 . В [1] показано, что использование функций этого типа при расчете спектров по дискретному набору ординат приводит к дополнительному сглаживанию спектра [см. формулы (28), (29) в разделе 3].

Использование различных сглаживающих функций $D_i(\tau)$ при расчете спектров приводит к тому, что спектры оказываются осредненными по интервалам частот несколько различной ширины [1]. Это приводит к несколько различным значениям погрешностей расчета $P_T(\omega)$ по отдельной записи.

Оценки погрешностей расчета $P_T(\omega)$ в том случае, когда расчет ведется по функции $R_T(\tau)$ ($\tau \leq T_m$), полученной по отдельной записи длиной T , проведены в [1]. Получаются следующие результаты. Относительная погрешность $B(\omega)$ определения $P_T(\omega)$ равна

$$B(\omega_1) = \sqrt{\frac{1}{TW_i(\omega_1)}}, \quad (18)$$

¹ Обращение Фурье $P_c(\omega)$ произведения $c(\tau)$ функций $A(\tau)$ и $B(\tau)$ выражается следующим образом через обращения Фурье сомножителей:

$$P_c(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_A(\omega' - \omega) P_B(\omega') d\omega'.$$

где

$$W_i(\omega_1) = \frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} Q_i(\omega_1 - \omega) P(\omega) d\omega \right]^2}{2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [Q_i(\omega_1 - \omega) P(\omega)]^2 d\omega}, \quad (19)$$

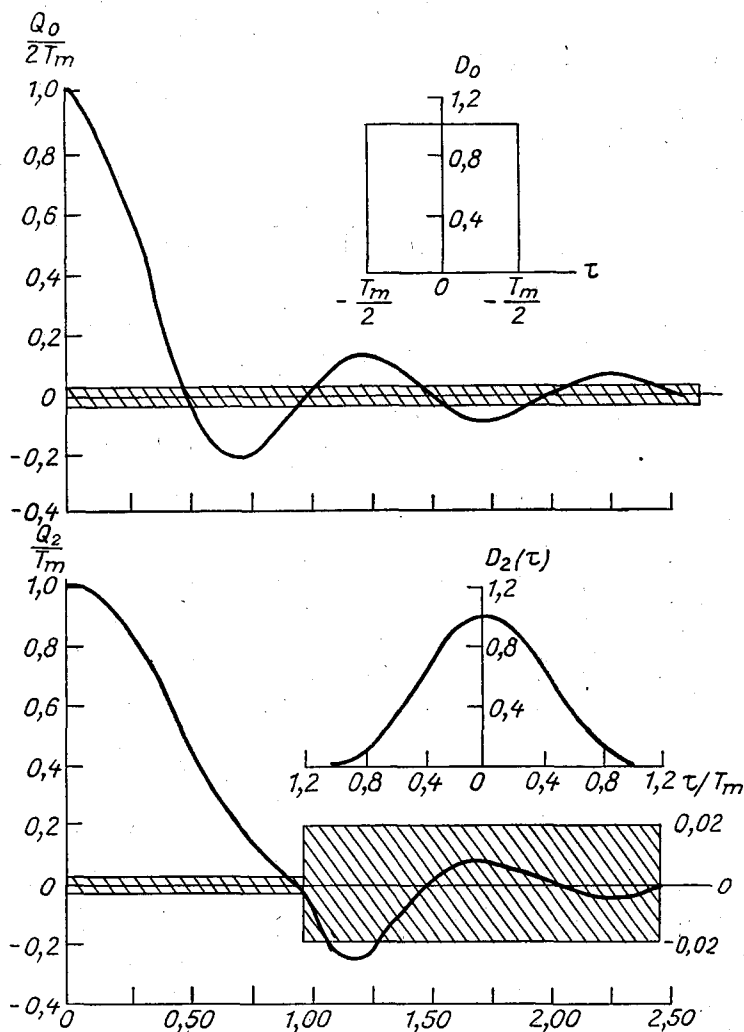


Рис. 1. Сглаживающие функции D_0 и D_2 и соответствующие им спектры.

T — интервал записи, величина W_i имеет вид отношения

$$\frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(x) dx}.$$

Можно показать, что отношение такого вида может служить мерой эффективной ширины функции $f(x)$. Поэтому W_i является мерой эффек-

тивной ширины подынтегральной функции $Q_i(\omega_1 - \omega)P(\omega)$. Эта ширина зависит от вида истинного спектра $P(\omega)$, спектра сглаживающей функции Q_i и от частоты ω_1 . Но по порядку величины $W_i \approx 1/T_m$, поэтому из (18) можно получить в качестве грубой оценки относительной погрешности определения значений $P_T(\omega)$, средних по интервалам частот порядка $1/T_m$,

$$B \approx \sqrt{\frac{T_m}{T}}.$$

Отметим, что точно такая же оценка погрешностей расчета $P_T(\omega)$ по отдельной записи длины T получается при расчете спектральных плотностей первым способом, если в качестве $P_T(\omega)$ брать дисперсии коэффициентов Фурье, средние по интервалам частот порядка $2\pi/T_m$, так как отношение $\frac{2\pi}{T_m}$ к $\frac{2\pi}{T}$ равно числу использованных для осреднения коэффициентов Фурье.

3. Расчет спектров по дискретному ряду точек

Как правило, расчеты корреляционных функций и энергетических спектров на цифровых электронных вычислительных машинах ведутся по дискретному ряду значений случайной функции $u_T(t_i)$, снятых с записи $u_T(t)$. Иногда в самом эксперименте получается не непрерывная запись, а дискретные значения измеряемой флуктуирующей величины через интервал $\Delta\tau$.

По таким данным можно вычислить значения корреляционной функции только для дискретного набора значений аргумента τ : τ равно 0, $\pm\Delta\tau$, $\pm 2\Delta\tau$, ...

Обозначим величину получаемого по таким дискретным данным энергетического спектра через $P_{T,\Delta}(\omega)$. Если истинный спектр $P(\omega)$ представляет собой интеграл от непрерывной функции $R(\tau)$:

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{R(\tau)} \cos \omega\tau d\tau, \quad (20)$$

то значения $\overline{P_{T,\Delta}(\omega)}$ можно получить только в том случае, если как-то аппроксимировать $R_{T,\Delta}(\tau)$ между каждыми двумя соседними значениями. Так, например, можно представить $R_{T,\Delta}(\tau)$ как сумму прямоугольников с высотой R_1, R_2, R_3 и т. д. и шириной $\Delta\tau$. Тогда для случая ограниченной записи выражение для расчета спектра будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} P_{T,\Delta}(\omega) &= \sum_{i=1}^m R_i \int_0^{T_m} \cos \omega\tau d\tau = \\ &= \frac{\Delta\tau}{2} \frac{\sin \frac{\omega \Delta\tau}{2}}{\frac{\omega \Delta\tau}{2}} \left\{ R_0 + R_m \cos m\omega \Delta\tau + 2 \sum_{q=1}^{m-1} R_q \cos q\omega \Delta\tau \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

Если же площадь под кривой $R_{T,\Delta}(\tau)$ аппроксимировать суммой трапеций (рис. 2), то расчет спектра будет производиться по такой фор-

муле:

$$P_{T,\Delta}(\omega) = \Delta\tau \frac{\sin \frac{\omega \Delta\tau}{2}}{\frac{\omega \Delta\tau}{2}} \left\{ \frac{R_0 - R_1}{\omega \Delta\tau} \sin \frac{\omega \Delta\tau}{2} + \frac{R_1 - R_2}{\omega \Delta\tau} \sin \frac{3\omega \Delta\tau}{2} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{R_{m-1} - R_m}{\omega \Delta\tau} \sin \frac{(2m-1)\omega \Delta\tau}{2} + R_1 \cos \frac{\omega \Delta\tau}{2} + R_1 \cos \frac{3\omega \Delta\tau}{2} + \right. \\ \left. + R_2 \cos \frac{5\omega \Delta\tau}{2} + \dots + R_{m-1} \cos \frac{(2m-1)\omega \Delta\tau}{2} \right\}. \quad (22)$$

По-видимому, чем ближе к истинному виду корреляционной функции аппроксимированное $R_{T,\Delta}(\tau)$, тем более близкое к истине получится значение $P_{T,\Delta}(\omega)$. Однако нужно как-то оценить, насколько искажается величина $P(\omega)$ при расчете по дискретным точкам. Такую оценку можно сделать для случая, когда спектр рассчитывается по методу, предложенному Блекманом и Тьюки [1]. В этом случае $P_{T,\Delta}(\omega)$ представляется суммой прямоугольников с ординатами R_i и абсциссой $\Delta\tau$, умноженных не на $\int \cos \omega\tau d\tau$, а просто на саму величину $\cos \omega\tau$ при τ , равном абсциссе основания каждого прямоугольника $q\Delta\tau$. Тогда получается выражение для расчета спектра, очень похожее на (21),

$$P_{T,\Delta}(\omega) = \Delta\tau \left\{ R_0 + R_m \cos m\omega \Delta\tau + 2 \int_{q=1}^{m-1} R_q \cos \omega q \Delta\tau \right\}. \quad (23)$$

Выражение (21) отличается от (23) только множителем $\frac{\sin \frac{\omega \Delta\tau}{2}}{\frac{\omega \Delta\tau}{2}}$.

В работе [1] показано, что (23) можно получить и другим путем. Если ввести вспомогательную функцию $z(\tau; \Delta\tau) = \Delta\tau \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - q\Delta\tau)$ для случая, когда q меняется от 0 до ∞ (корреляционная функция известна при всех значениях аргумента τ), и $z_m(\tau, \Delta\tau) = \Delta\tau \sum_{q=-(m-1)}^{m-1} \delta(\tau - q\Delta\tau) + \frac{\Delta\tau}{2} \left\{ \delta(\tau - m\Delta\tau) + \delta(\tau + m\Delta\tau) \right\}$ для случая, когда q меняется от 0 до m , то обращение Фурье от произведения вспомогательной функции на $R(\tau)$ дает нам искомый спектр:

$$\overline{P_{\Delta}(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau; \Delta\tau) R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (24)$$

$$\overline{P_{T,\Delta}(\omega)} = \int_{-\infty}^{\infty} z_m(\tau; \Delta\tau) R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (25)$$

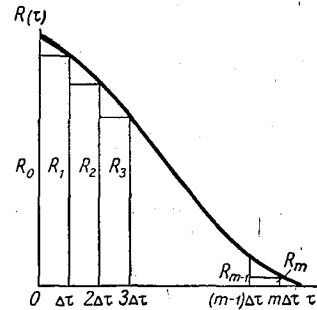


Рис. 2. Представление корреляционной функции суммой прямоугольников или трапеций.

Подставив в эти выражения z и z_m и проинтегрировав, можно получить формулы для расчета спектра. При этом из (25) получится (23) (см. [1]).

Для выяснения физического смысла формул, предлагаемых для расчета спектров и оценки искажений, получающихся при таком расчете, Блекман и Тьюки в [1] находят $P_{T,\Delta}(\omega)$ из (24) и (25) еще одним способом.

Формулы (24) и (25) показывают, что величину $P_{T,\Delta}(\omega)$ можно рассматривать как обращение Фурье произведения функции z или z_m на $R(\tau)$. Поэтому, так же как из формулы (15) § 2 получается формула для спектра произведения через спектры сомножителей, здесь можно получить $\overline{P_{T,\Delta}(\omega)}$ через спектры функций z и $R(\tau)$ из (24) или z_m и $R(\tau)$ из (25). Спектры функций z и z_m вычислены в [1], и в результате получаются следующие выражения:

$$\overline{P_{\Delta}(\omega)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta\tau}\right), \quad (26)$$

$$\overline{P_{T,\Delta}(\omega)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{P(\omega - \omega')} Q_0\left(\omega' - \frac{2\pi k}{\Delta\tau}\right) d\omega', \quad (27)$$

при этом (26) относится к бесконечному дискретному ряду значений $R_{\Delta}(\tau)$, а (27) — к конечному.

Физический смысл выражений (26) и (27) в сущности один и тот же. Разница лишь в том, что в (26) искомый спектр представляет собой сумму значений истинного спектра в точках, сдвинутых на $\frac{2\pi k}{\Delta\tau}$ от исследуемой, а в (27) такую же сумму, но значений сглаженного спектра. Это значит, что вместо ординат истинного спектра $P\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta\tau}\right)$ в (27) входят ординаты сглаженного спектра с весовой функцией Q_0 при тех же значениях аргумента $\omega - \frac{2\pi k}{\Delta\tau}$. Такое сглаживание, как показано выше [формула (15)] является следствием конечности интервала измерения. Таким образом, все выводы, относящиеся к (26), могут в равной мере относиться и к (27), но с учетом того, что в данном случае эта сумма осредненных значений спектра.

Как показано в [1], использование при сглаживании весовых функций Q_2 или Q_3 , вместо использованной здесь Q_0 , при расчете по дискретным точкам сводится просто к составлению следующих линейных комбинаций из соседних значений спектральной плотности $P_{T,\Delta}(\omega)$:

$$\overline{P_{T,\Delta}^{Q_2}(\omega)} = 0,5P_{T,\Delta}^{Q_0}(\omega_1) + 0,25\left[P_{T,\Delta}^{Q_0}\left(\omega_1 - \frac{\pi}{T_m}\right) + P_{T,\Delta}^{Q_0}\left(\omega_1 + \frac{\pi}{T_m}\right)\right], \quad (28)$$

$$\overline{P_{T,\Delta}^{Q_3}(\omega)} = 0,54P_{T,\Delta}^{Q_0}(\omega_1) + 0,23\left[P_{T,\Delta}^{Q_0}\left(\omega_1 - \frac{\pi}{T_m}\right) + P_{T,\Delta}^{Q_0}\left(\omega_1 + \frac{\pi}{T_m}\right)\right]. \quad (29)$$

Итак, что мы можем сказать о величине спектральной плотности, рассчитанной по дискретному ряду чисел? Независимо от того, по какой формуле рассчитывается спектр, на основании теоремы отсчетов во временном представлении [8] можно утверждать следующее: если спектр исследуемой функции не содержит составляющих с частотой выше какой-то частоты f_N , то функция полностью определяется последователь-

ностью ее значений в точках, отстоящих на расстоянии $1/2f_N$ сек. друг от друга:

$$R(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R\left(\frac{n}{2f}\right) \frac{\sin(2\pi f\tau - n\pi)}{2\pi f\tau - n\pi}, \quad (30)$$

где $f = \frac{\omega}{2\pi}$ в герцах, или обратных секундах.

Исходя из этой же теоремы отсчетов во временном представлении, совокупность значений $R\left(\frac{n}{2f}\right)$ при всех $\pm n$ определяет и спектральную функцию $P(\omega)$ при $-2\pi f < \omega < 2\pi f$:

$$P(\omega) = \frac{1}{2f} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R\left(\frac{n}{2f}\right) e^{-i\omega \frac{n}{2f}} \quad (31)$$

(практически то же самое имеет место при конечном $\tau \leq T_m$, если отношение $\frac{T_m}{\Delta\tau} \gg 1$).

Так как исследуемые нами энергетические спектры метеорологических величин практически всегда убывают с ростом частоты, то на основании вышеупомянутой теоремы можно считать, что в интервале низких частот, далеких от f_N , рассчитанный спектр будет практически не искажен. Это позволяет, как будет показано ниже, рассчитать спектр по отдельным участкам. В случае расчета по (26) или (27) полученный спектр является периодической функцией с периодом $2\omega_N$, где

$\omega_N = \frac{\pi}{\Delta\tau}$. Кроме того, так как $P(\omega)$ есть четная функция, то $P_{T,\Delta}(\omega)$ также является четной. Это значит, что расчет $P_{T,\Delta}(\omega)$ имеет смысл проводить только в интервале частот от 0 до ω_N , так как дальше получается просто повторение (рис. 3), причем даже в пределах частот $0 < \omega < \omega_N$ спектр получается искаженным, так как каждое значение $P_{T,\Delta}(\omega_1)$ будет представлять собой сумму значений истинного спектра в точках $\omega_1 \pm \frac{2\pi k}{\Delta\tau}$. Спектр будет тем сильнее искажен, чем ближе к ω_N исследуемая частота, а в самой точке ω_N спектр будет завышен не менее чем вдвое. Даже если истинный спектр равен нулю при $\omega > \omega_N$, в (26) при $\omega = \omega_N$ остается два члена $-P(+\omega_N) + P(-\omega_N)$.

Очевидно, что все вышеизложенное остается в силе, если расчет спектров ведется не как обращение Фурье корреляционной функции, а непосредственно как средняя дисперсия коэффициентов Фурье $a_{T,\Delta}(\omega_n)$, вычисленных по дискретному числу ординат, снятых с записи $u_T(t)$ через интервал $\Delta\tau$.

Легко показать, что и в этом случае значения спектральной плотности $P_{T,\Delta}(\omega)$, получаемые при расчете, должны быть суммой значений истинного спектра $P\left(\omega - \frac{2\pi k}{\Delta\tau}\right)$, т. е. что должна иметь место формула (26) или (27). Действительно, все рассуждения, проведенные выше для функции $P_{T,\Delta}(\omega)$, получаемой при обращении Фурье дискретного набора значений функции $R_{T,\Delta}(\tau)$, сохраняют свою силу для функции $a_{T,\Delta}(\omega_n)$, получаемой как обращение Фурье от дискретного набора зна-

чений функции $u_T(t)$ (t равно $0, \pm\Delta\tau, \pm2\Delta\tau, \dots$). Следовательно, по аналогии с формулой (26) можно записать

$$a_{T,\Delta}(\omega_n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_T\left(\omega_n - \frac{2\pi k}{\Delta\tau}\right). \quad (26a)$$

Если составить из (26a) величину средней дисперсии коэффициентов $a_{T,\Delta}(\omega_n)$ по интервалу частот от ω_{n-m} до ω_{n+m} , то вследствие независимости друг от друга коэффициентов $a_T(\omega)$ при разных значениях аргумента все произведения $a_T\left(\omega_n - \frac{2\pi k_1}{\Delta\tau}\right) a_T^*\left(\omega_n - \frac{2\pi k_2}{\Delta\tau}\right)$ при $k_1 \neq k_2$ обратятся в нуль и в результате получится

$$|a_{T,\Delta}(\omega_n)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| a_T\left(\omega_n - \frac{2\pi k}{\Delta\tau}\right) \right|^2, \quad (32)$$

т. е. тот же результат, что и для расчетов $P_{T,\Delta}(\omega)$ с помощью корреляционной функции.

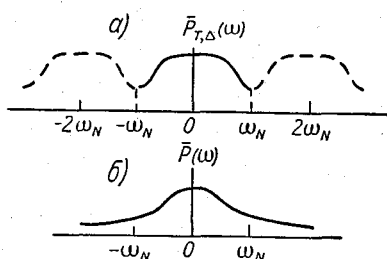


Рис. 3. Значения спектральной плотности.

a — рассчитанные по дискретному ряду точек, b — истинные.

Из всего вышеизложенного можно сделать следующие выводы.

1. Если расчет спектра $P(\omega)$ ведется по записи длины T , то по такой записи можно получить значения спектральной плотности, сглаженные по интервалу частот $\Delta\omega \simeq \frac{2\pi}{T} 10$. Даже такие сглаженные значения получатся с точностью в среднем около 30%. Большей точности можно добиться, только сглаживая спектр по большему интервалу частот или вычисляя средние по целому набору N записей значения спектральной плотности. Тогда точность расчета увеличится в $\sqrt{N}$ раз.

2. Если расчет спектральной плотности проводится по дискретному набору ординат, снятых с записи через интервал $\Delta\tau$, то можно получить значения спектра только в интервале частот $0 \leq \omega \leq \omega_N$, где $\omega_N = \frac{\pi}{\Delta\tau}$, причем при значениях ω , близких к ω_N , спектр получается искаженным. Величина искажения спектра зависит от поведения истинной спектральной плотности $P(\omega)$ при $\omega > \omega_N$. Если $P(\omega)$ достаточно быстро убывает при $\omega > \omega_N$, то эти искажения невелики.

4. Пример расчета спектральной плотности

При наличии достаточно длинной записи какой-то реализации, по которой нужно рассчитать спектр, правильнее всего было бы снимать точки с записи через интервал $\Delta\tau$, близкий к инерции записывающей и измеряющей аппаратуры, и затем по этим точкам рассчитать $R_{T,\Delta}(\tau)$ и $P_{T,\Delta}(f)$. Тогда $P_{T,\Delta}(f)$ было бы близко к истинному спектру на всем интервале частот, за исключением частот, близких к критической частоте прибора, уже искаженных инерцией датчика. Однако это означает, что с записи пришлось бы снимать очень большое количество точек, а это довольно трудоемко. По-видимому, разумнее производить расчет

спектра по отдельным участкам, т. е. со всей записи снять 200—300 точек через интервал $\Delta\tau_1$ и рассчитать значения $P_{T,\Delta}(f)$, средние по интервалу частот $\frac{1}{T_{m_1}}$, так, чтобы отношение $\frac{T_{m_1}}{T_1}$ (T_1 — длина всей записи) было не больше 0,1. Тогда величины спектральной плотности получаются с погрешностью меньше 30%. Расчет значений $P_{T,\Delta}(f)$ можно при этом производить до частоты $f_{N_1} = \frac{1}{2\Delta\tau_1}$. Значения спектра получаются сглаженными по интервалу частот $\frac{1}{T_{m_1}}$ и искаженными за счет дискретности числа ординат, участвующих в расчете. Эти искажения особенно велики при частотах f , близких к f_{N_1} .

Для исправления значений спектра на частотах, близких к f_{N_1} , и для получения информации о спектре в интервале частот $f_{N_1} - f_{N_2}$ (где $f_{N_2} = \frac{1}{2\Delta\tau_2}$, а $\Delta\tau_2$ близко к инерции прибора) следует с более короткого участка T_2 длинной записи T_1 снять точки через интервал $\Delta\tau_2$ и вычислить по ним значения спектра, средние по интервалам частот $\frac{1}{T_{m_2}}$. При этом нужно, чтобы отношение $\frac{T_{m_2}}{T_2}$ было опять-таки порядка 0,1, тогда погрешность обоих участков спектра будет одинаковой (как указывалось выше, погрешность определения спектра пропорциональна $\sqrt{\frac{T_m}{T}}$). Полученные величины спектра будут средними значе-

ниями спектра по полосе частот $\frac{1}{T_{m_2}}$, в отличие от первого участка, где осреднение было по полосе частот $\frac{1}{T_{m_1}}$. Так как $f_{N_1} \ll f_{N_2}$, спектральные оплотности второго участка в области частот, близких к f_{N_1} , будут практически не искажены [8], и это позволит исправить высокочастотный конец первого участка.

Значения спектра на частотах, близких к f_{N_2} , сильно завышены (не менее чем вдвое). Однако эта область частот уже сама по себе искажена из-за инерции прибора. Таким образом, имея длинную запись малоинерционного прибора, можно считать спектр с меньшей затратой труда (т. е. не снимая очень большого количества точек со всей записи) и не увеличивая при этом погрешности расчета.

Для иллюстрации возможностей такого рода расчетов спектра в микрометеорологии разберем пример, в котором истинный спектр процесса подчиняется закону « $5/3$ » при значениях частот $f \geq f_0$, где f_0 — граница инерционной подобласти спектра со стороны низких частот:

$$P(f) = C \left(\frac{f}{f_0} \right)^{-\frac{5}{3}} \quad \text{при} \quad f \geq f_0. \quad (33)$$

Пусть у нас имеется реализация случайной функции $u_T(t)$ длиной $T_1 = \frac{20}{f_0}$ и мы хотим сосчитать спектр в интервале частот, ограничен-

ном со стороны высоких частот частотой $f_N = \frac{1}{2\Delta\tau}$, а со стороны низких частот частотой f_0 . Для определенности зададим f_0 равным 0,01 гц. Тогда длина записи будет $T_1 = 2000$ сек. Это означает, что, снимая точки со всей записи, мы получим значения спектральной плотности, осредненные по интервалам частот шириной $\frac{1}{T_1} 10 = \frac{1}{200}$ гц. Если снять со всей записи 200 точек через интервал $\Delta\tau_1 = 10$ сек., то можно сосчитать $P_{T,\Delta}(f)$ до значений $f_{N_1} = \frac{1}{2\Delta\tau_1} = \frac{1}{20}$ гц. Эти значения будут на самом деле представлять собой сумму значений $P(f)$, отстоящих на интервал $\frac{k}{\Delta\tau}$ друг от друга, т. е., используя формулу (26) и пренебрегая отличием сглаженных значений спектра от несглаженных, получим

$$\frac{P_{T,\Delta}(f)}{P(f)} = 1 + \frac{P\left(f - \frac{1}{\Delta\tau_1}\right)}{P(f)} + \frac{P\left(f + \frac{2}{\Delta\tau_1}\right)}{P(f)} + \frac{P\left(f + \frac{2}{\Delta\tau_1}\right)}{P(f)} + \dots \quad (34)$$

Подставляя в формулу (34) последовательно значения f , равные f_0 , $2f_0$, $3f_0$, $4f_0$ и $5f_0$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{P_{T,\Delta}(f_0)}{P(f_0)} &= 1 + (9)^{-\frac{5}{3}} + (11)^{-\frac{5}{3}} + (21)^{-\frac{5}{3}} + \dots \simeq 1,057 \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{P_{T,\Delta}(5f_0)}{P(f_0)} &= \frac{1}{(5)^{-\frac{5}{3}}} \left\{ (5)^{-\frac{5}{3}} + (5)^{-\frac{5}{3}} + (15)^{-\frac{5}{3}} + (15)^{-\frac{5}{3}} + \right. \\ &\quad \left. + (25)^{-\frac{5}{3}} + \dots \right\} \simeq 2,39. \end{aligned}$$

В табл. 1 приведены значения относительного искажения спектра и сами величины $P_{T,\Delta}(f)$, искаженного из-за дискретности значений ординат для частот в интервале от 0,01 до 0,05 гц.

Таблица 1

	f				
	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
$\frac{P_{T,\Delta}(f)}{C(f/f_0)^{-5/3}}$	1,057	1,19	1,42	1,78	2,39
$P_{T,\Delta}(f)$	1,057	0,375	0,229	0,177	0,165

Как видно из табл. 1, значения спектра при f , близких к f_{N_1} , довольно сильно искажены. Следует иметь в виду, что $P_{T,\Delta}(f)$ получены в этом случае как сумма сглаженных, а не истинных спектральных плотностей, так как дискретный ряд ординат $u_T(t)$ был конечным. Поэтому каждое значение $P_{T,\Delta}(f)$ является средним по полосе частот шириной $\frac{1}{T_{m_1}} = 0,005$ гц.

Для исправления этих данных и получения информации о спектре на частотах, больших 0,05 гц, проведем расчет спектра по более частым

значениям ординат $u_T(t)$, но с более короткой записи. Пусть $\Delta\tau_2=1$ сек. и число точек по-прежнему равно 200. Тогда $T_2=200$ сек. и $T_{m_2}=20$ сек. В этом случае расчет спектра может проводиться в интервале частот от $f_0=0,01$ гц до $f_{N_2}=\frac{1}{2\Delta\tau_2}=0,5$ гц, причем значения спектра будут сглажены по интервалам частот, равным $\frac{1}{T_{m_2}}=0,05$ гц.

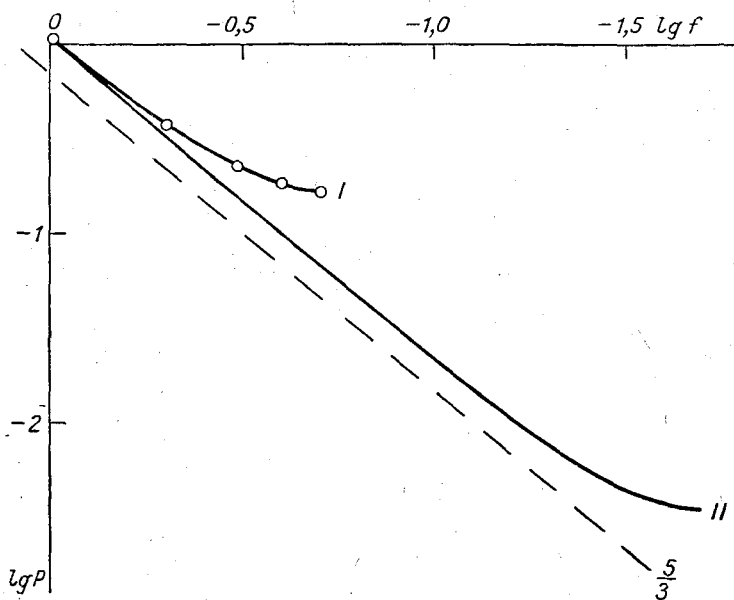


Рис. 4. Значения спектральной плотности, рассчитанные по двум участкам записи $u_T(t)$.
I — $\Delta\tau_1=10$ сек., II — $\Delta\tau_2=1$ сек.

Пользуясь выражением (34), вычислим значения $P_{T,\Delta}(f)$ для f , равного f_0 , $5f_0$, $10f_0$, $20f_0$, $30f_0$, $40f_0$ и $50f_0$:

$$P_{T,\Delta}(f_0) = 1 + (99)^{-\frac{5}{3}} + (101)^{-\frac{5}{3}} + \dots = 1$$

$$\frac{P_{T,\Delta}(50f_0)}{C(50)^{-\frac{5}{3}}} = 1 + 1 + (3)^{-\frac{5}{3}} + (3)^{-\frac{5}{3}} + (5)^{-\frac{5}{3}} + \dots \simeq 2,39.$$

В табл. 2 приведены относительные искажения и величины искаженного спектра, полученные в этом случае.

Таблица 2

	f						
	0,01	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\frac{P_{T,\Delta}(f)}{C(f/f_0)^{-5/3}}$	1,0	1,017	1,057	1,195	1,42	1,78	2,39
$P_{T,\Delta}(f)$	1,0	0,07	0,023	0,0080	0,0049	0,0038	0,00035

В этом случае, так же как и в предыдущем, каждое значение $P_{T,\Delta}(f)$ есть сглаженное значение спектра. Однако здесь осреднение происходит по полосе частот шириной $\frac{1}{T_{m_2}} = 0,05$ гц. Из этой таблицы следует,

что полученные спектры довольно надежны до значений $f=0,2$ гц, при $f=0,4$ гц и $f=0,5$ гц они сильно искажены.

На рис. 4 приведены спектры, полученные по двум участкам дискретного ряда значений $u_T(t)$. Можно было бы исправить $P_{T,\Delta}(f)$ при f , близких к f_{N_2} , рассчитав спектры по еще более частым значениям, снятым с более короткой записи $u_T(t)$, но при этом следует иметь в виду, что Δt не может быть меньше инерции записывающей аппаратуры и что даже при Δt , близких к инерции прибора, данные будут уже сами по себе несколько искажены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blackman R. B., Tukey J. W. The Measurement of Power Spectra from the point of View of Communications Engineering. The Bell System Techn. Journ., 37, 1958.
2. Пугачев В. С. Теория случайных функций. Физматгиз, М. 1962.
3. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Судпромгиз, 1961.
4. Иванов В. Н., Клепикова Н. В. Спектры и корреляционные функции в инфракрасном диапазоне частот. Сб. «Земная атмосфера до высоты 300 м». М., 1964.
5. Озмидов Р. В. Некоторые данные о крупномасштабных характеристиках поля горизонтальных компонент скорости в океане. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1964.
6. Wiener N. Generalized harmonic analysis. Acta Math., vol. 55, 1930.
7. Хинчин А. Я. Теория корреляции стационарных стохастических процессов. Успехи матем. наук, вып. V, 1938, стр. 42.
8. Голдман С. Теория информации, § 2.1. ИЛ, М., 1957.

О ФОРМУЛАХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОСТИ ПО ДАННЫМ О СТРУКТУРЕ ПОТОКА

Дается обзор приближенных формул, используемых для определения коэффициента турбулентности по данным о флуктуациях в турбулентном потоке. Вычислена погрешность определения k в зависимости от интервала времени опыта. Предлагается провести сравнение результатов расчета k по приближенным формулам с его точными значениями для приземного слоя атмосферы и по полученным результатам судить о пригодности тех или иных приближенных формул для расчетов k в свободной атмосфере.

1. Введение

Как известно, уравнения Навье Стокса

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla) u_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} \tau_{ik} \quad (1)$$

и уравнения переноса пассивной примеси в вязкой сплошной среде

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial t} + u_i \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} J_{\Gamma} \quad (2)$$

можно решать только в том случае, когда из дополнительных физических соображений будут получены выражения для потоков количества движения τ_{ik} и примеси J_{Γ} . Из простейших представлений кинетической теории газов следует, что τ_{ik} и J_{Γ} пропорциональны соответствующим градиентам:

$$\tau_{ik} = \rho \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (3)$$

$$J_{\Gamma} = D_{\Gamma} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}. \quad (4)$$

Коэффициенты пропорциональности ν и D_{Γ} здесь являются константами, характеризующими среду и равными между собой. Для земной атмосферы до высот порядка 100 км эти соотношения выполняются с хорошей точностью.

В случае турбулентного течения среды главную роль играет не молекулярный, а турбулентный перенос. При разделении функций u_i , ρ и Γ на регулярную и флуктуационную части

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i + u'_i, \\ \rho &= \bar{\rho} + \rho', \\ \Gamma &= \bar{\Gamma} + \Gamma' \end{aligned} \quad (5)$$

(черта сверху означает осреднение по статистическому ансамблю) в правой части уравнений (1) и (2) появляются дополнительные потоки:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + (\vec{u}, \nabla) \bar{u}_i = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_k} [\tau_{ik} + \bar{p} \delta_{ik} - \rho \overline{u'_i u'_k}], \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} [\bar{J}_\Gamma - \overline{u'_i \Gamma'}], \quad (2a)$$

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$

Для решения (1a) и (2a) нужны дополнительные сведения о механизме турбулентного переноса, которые позволили бы связать турбулентный поток количества движения $-\overline{u'_i u'_k}$ и примеси $-\overline{u'_i \Gamma'}$ со средними характеристиками турбулентного поля.

По аналогии с молекулярным переносом обычно считается, что турбулентные потоки также пропорциональны соответствующим средним градиентам:

$$-\overline{u'_i u'_k} = k_u \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}, \quad (3a)$$

$$-\overline{u'_i \Gamma'} = k_\Gamma \frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial x_i}. \quad (4a)$$

Очевидно, что в случае турбулентного переноса k_u и k_Γ , вообще говоря, не являются константами, характеризующими среду, они должны зависеть от распределения $\bar{u}_i$ и $\bar{\Gamma}$, так как интенсивность турбулентности зависит от этого распределения.

Наиболее прямым способом определения значений k_u и k_Γ и их зависимости от высоты и состояния атмосферы является одновременное измерение турбулентных потоков и средних градиентов соответствующих величин и вычисление коэффициентов k_u и k_Γ непосредственно из их определений (3a) и (4a). Однако в настоящее время такой прямой способ вычисления k_u и k_Γ возможен только в приземном слое, где измерения градиентов скорости $\bar{u}$ и примеси $\bar{\Gamma}$ могут проводиться с достаточной точностью. Вычисление k_u и k_Γ таким способом производилось в целом ряде работ, например в [1, 2, 3, 11, 12]. Эти результаты позволили установить как порядок величины k_u и k_Γ , так и характер их изменения с высотой и со стратификацией. Погрешность вычисления k таким способом зависит от погрешностей измерения величины потоков и средних градиентов.

Из-за трудностей измерения средних градиентов для определения k_u и k_Γ в свободной атмосфере приходится использовать косвенные методы, основанные на дополнительных к (3a) и (4a) гипотезах о механизме переноса. Все имеющиеся в настоящее время методы косвенного определения k_u и k_Γ можно разбить на две группы.

Первая группа основана на гипотезах, связывающих значения k_u и k_Γ со средними характеристиками потока. Поэтому все методы этой группы сводятся к вычислению k_u и k_Γ по данным о распределении $\bar{u}$ и $\bar{\Gamma}$ с высотой и, следовательно, пригодны главным образом для приземного слоя атмосферы. Изложение этих способов имеется в ряде моно-

графий [4, 5, 20], некоторые новые идеи в этой области содержатся в работе [6].

В настоящей статье остановимся только на второй группе способов определения k_u и k_T — по структурным измерениям в турбулентном потоке. Такие измерения являются в настоящее время единственным источником, позволяющим оценить значения коэффициентов переноса в свободной атмосфере.

2. Основная модель механизма переноса

Физическая модель, на которой основаны все употребляемые в настоящее время формулы [7, 8, 9] для определения коэффициентов k_u и k_T по структурным измерениям, очень проста. Она заключается в следующем.

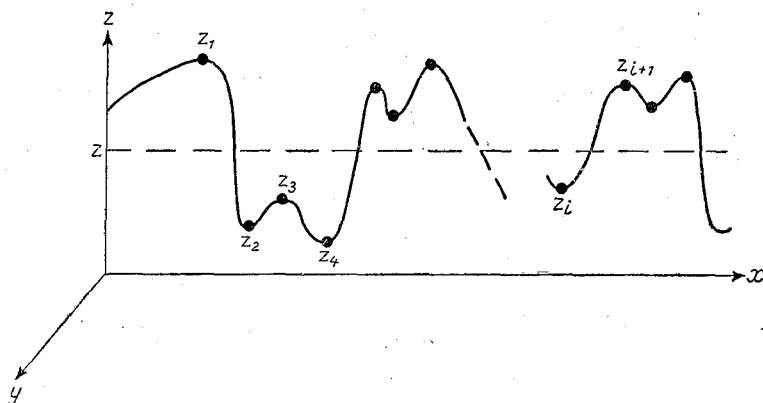


Рис. 1.

Пусть пространство однородно по горизонтали (в направлениях $x_1=x$ и $x_2=y$) и только в вертикальном направлении ($x_3=z$) изменяются функции $\Gamma(z)$ и $u_i(z)$. Все пространство разбивается на моли — объемы равной величины, малые по сравнению с расстоянием, на котором заметно изменяются флуктуационные значения u'_i и Γ' , но большие по сравнению с молекулярным масштабом. Среднее по объему моля значение $u_i(z, t)$ и $\Gamma(z, t)$ и является тем, что обычно называется мгновенным значением скорости u_i и концентрации Γ :

$$u_i(z, t) = \bar{u}_i(z, t) + u'_i(z, t),$$

$$\Gamma(z, t) = \bar{\Gamma}(z, t) + \Gamma'(z, t).$$

В каждой конкретной задаче величина моля, значения u_i и Γ которого считаются мгновенными, определяется инерцией и размерами измерительного прибора. Если инерция прибора τ_0 , сечение датчика S , а скорость воздушного потока относительно прибора $\bar{u}$, то объем моля по порядку величины будет равняться $\tau_0 S \bar{u}$.

Если средний поток в направлении z отсутствует ($\bar{u}_z = \bar{W} = 0$), траектория моля представляет собой примерно следующую картину (рис. 1).

Одновременные значения W всех молей в пространстве характеризуются определенной функцией распределения. Считается, что временная функция распределения последовательных значений W движущегося моля совпадает с этой пространственной функцией распределения.

Траектория моля делится на отдельные участки точками, в которых W обращается в нуль. Предполагается, что моль движется на каждом участке адиабатически, а в точках, где $W=0$, происходит мгновенное полное перемещение моля с окружающей средой. В точке поворота z_i моль приобретает от окружающей среды свойство $\bar{\Gamma}(z_i)$, несет его без изменений до точки z_{i+1} , где величина Γ в моле скачком меняется от $\bar{\Gamma}(z_i)$ до $\bar{\Gamma}(z_{i+1})$ и т. д.

Если точки z_i и z_{i+1} находятся достаточно близко для того, чтобы можно было считать

$$\bar{\Gamma}(z_{i+1}) - \bar{\Gamma}(z_i) = (z_{i+1} - z_i) \frac{d\bar{\Gamma}}{dz}, \quad (6)$$

то турбулентный поток свойства Γ , так же как и молекулярный, оказывается пропорциональным градиенту средней концентрации Γ . Действительно, поток через уровень z можно записать

$$J_{\Gamma} = -\rho \overline{W_i(z)(z_i - z)} \frac{d\bar{\Gamma}}{dz}, \quad (7)$$

где черта сверху означает осреднение либо по траектории отдельного моля, либо по всем молям, пересекающим в данный момент поверхность z . И в том и в другом случае осредняемые величины $\overline{W_i(z)(z_i - z)}$ являются лагранжевыми характеристиками движения отдельных молей.

Величина $\overline{W_i(z)(z_i - z)}$ и представляет собой коэффициент k_u или k_{Γ} , так как в такой модели, когда не учитывается влияние самого свойства Γ на скорость обмена этим свойством с окружающей средой,

$$k_u = k_{\Gamma} = k = \overline{W_i(z)(z_i - z)}. \quad (8)$$

3. Различные расчетные формулы для определения k

Формула (8) для определения коэффициента турбулентности k , к которой приводит изложенная выше простая модель, еще не дает возможности вычислять k по измерениям флуктуаций W или Γ , которые производит прибор в фиксированной точке пространства. Для этого придется делать еще целый ряд дополнительных допущений, кроме тех, которые уже содержатся в (8).

В 1929 г. Хессельберг [10] предположил, что

$$z_i - z = W_i(z) \frac{\tau_i}{2}, \quad (9)$$

где τ_i — время движения моля от точки z_i до точки z_{i+1} .

Если считать, что распределения значений W_i и τ_i в моле не зависят друг от друга, то из (8) и (9) получается

$$k = \frac{\overline{W^2 \tau}}{2}. \quad (10)$$

В формулу Хессельберга (10) входит чисто лагранжева характеристика τ — среднее время сохранения знака W в движущемся моле. Поэтому для того чтобы применить формулу (10) к определению k по записям флуктуаций W или Γ в фиксированной точке, она была впоследствии модифицирована.

Одна из модификаций, позволяющая определять k по записям флуктуаций W , принадлежит Е. С. Ляпину [7]¹.

Вкратце она сводится к следующему: чтобы связать $\bar{\tau}$ со средним значением времени сохранения знака W в фиксированной точке τ_m , представим себе мгновенную фотографию распределения значений W в атмосфере. Вся атмосфера разделится поверхностями Q на объемы, содержащие моли с одним знаком W . Значения W на самих поверхностях Q обращаются в нуль. Такое разделение, очевидно, возможно из-за непрерывного, вообще говоря, пространственного изменения значений W от моля к молю. Изменения W со временем, в фиксированной точке, в которой находится прибор, обусловлены двумя причинами: во-первых, вся система поверхностей Q перемещается вместе со средним потоком, во-вторых, поверхности раздела Q деформируются за счет того, что моли пересекают поверхность Q , когда в них происходит смена знака W .

Обозначим через u параллельную среднему потоку компоненту скорости перемещения молей в системе координат, связанной с измерительным прибором, через $u^{(Q)}$ — соответствующую компоненту скорости перемещения самой поверхности Q в этой же системе координат. Если прибор непрерывно записывает значения W воздушных частиц, пронесимых через него потоком, то величина времени сохранения W одного знака на записи τ_m дает возможность определить размеры области, заключенной между парой поверхностей Q :

$$l = \tau_m u^{(Q)}.$$

Собственная скорость пересечения молями поверхностей Q определится как абсолютная величина разности $|u - u^{(Q)}|$.

Следовательно, среднее время сохранения W одного знака в движущемся моле $\bar{\tau}$ будет равно

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_m u^{(Q)}}{|u - u^{(Q)}|}. \quad (11)$$

Подставив это значение $\bar{\tau}$ в формулу (10), получим

$$k = \frac{\overline{W^2}}{2} \frac{\tau_m u^{(Q)}}{|u - u^{(Q)}|}. \quad (12)$$

Если считать теперь, что $u^{(Q)}$ — скорость движения потока, разность $|u - u^{(Q)}|$ представляет собой отклонения скоростей частиц в неподвижной системе координат от скорости среднего потока $u^{(Q)}$, т. е. величину пульсаций средней скорости потока $|u'|$.

Следовательно, (12) можно представить в виде

$$k = \frac{\overline{W^2}}{2} \frac{\tau_m u}{|u'|}. \quad (13)$$

Эта формула для k содержит в себе только характеристики, измеряемые неподвижным прибором.

¹ В работе Е. С. Ляпина формула (10) получена при сопоставлении гиперболического и параболического уравнений диффузии. Однако нетрудно показать, что предположения, на основе которых в [7] получена формула (10) для k , в точности совпадают с предположениями Хессельберга. Действительно, считается, что вероятность смены знака скорости частицей не зависит от величины этой скорости. Это предположение позволяет Ляпину заменить распределение скоростей двумя равными по знаку и противоположными по величине средними значениями скоростей и получить гиперболическое уравнение диффузии, которое пригодно только для такой упрощенной модели распределения частиц по скоростям [16, 17, 19]. В более общем случае диффузия частиц в турбулентном потоке должна описываться уравнением Фоккера—Планда [13, 18].

А. С. Дубов [8] обобщил (13) для случая прибора, помещенного на движущемся со скоростью U самолете. Отметим, что переход от формулы Хессельберга (10) к (13) произведен без каких-либо дополнительных допущений. Правда, при практическом использовании (13) для определения k в свободной атмосфере обычно полагают, что $\frac{W'}{u'} \simeq 1$, тогда

$$k = \frac{|W| \tau_m \bar{u}}{2}. \quad (13a)$$

Другой модификацией формулы (10), позволяющей определять k по записям флуктуаций свойства Γ , является формула Эртеля [9]. У Эртеля величина τ из (10) находится следующим путем. Равенство

$$\Gamma = \bar{\Gamma} = -W\tau \frac{\partial \Gamma}{\partial z}$$

возводится в квадрат, и, так как распределения W и τ считаются независимыми, после осреднения

$$\sqrt{\tau^2} = \sqrt{\frac{(\Gamma - \bar{\Gamma})^2}{W^2 \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right)^2}}. \quad (14)$$

Подстановка (14) в (10) дает возможность определять k по показаниям неподвижных приборов, записывающих флуктуации W и Γ , и, кроме того, $\frac{\partial \Gamma}{\partial z}$:

$$k = \frac{\bar{W}^2}{2} \sqrt{\tau^2} = \frac{\sqrt{\bar{W}^2}}{2} \frac{\sqrt{\overline{\Delta \Gamma^2}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right)^2}}. \quad (15)$$

Очевидно, что $\overline{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right)^2}$ можно заменить квадратом среднего градиента $\left(\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial z}\right)^2$, но даже при этом условии определение k по формуле (15) требует очень много информации.

Действительно, имея одновременные записи W и Γ и средний градиент $\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial z}$, можно (при условии синхронизированных записей флуктуаций) вычислить k , пользуясь просто его определением (4a)

$$k = -\frac{\overline{W\Gamma}}{\frac{\partial \bar{\Gamma}}{\partial z}}$$

без дополнительных гипотез.

Поэтому Эртель не остановился на формуле (15), а сделал попытку привести ее к такому виду, при котором для определения k достаточно было бы иметь записи только одной флуктуирующей величины Γ .

Для этого он воспользовался условием, что на пути от z_i до z_{i+1} отсутствуют индивидуальные изменения Γ в движущемся моле, следовательно,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Gamma}{\partial t} = -W \frac{\partial \Gamma}{\partial z},$$

откуда

$$\overline{W^2} = \frac{\overline{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right)^2}}{\overline{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right)^2}}. \quad (16)$$

Подставив это в формулу (15), получаем

$$k = \frac{1}{2} \frac{V_{\Delta \Gamma^2} \cdot \sqrt{\overline{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right)^2}}}{\overline{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right)^2}}. \quad (17)$$

Если заменить $\overline{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right)^2}$ на $\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right)^2$, то для определения k по формуле Эртеля достаточно измерения флуктуаций Γ и среднего градиента Γ .

Величину $\overline{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right)^2}$ можно получить по записи Γ , вычислив первую точку временной структурной функции $D_{\Gamma}(\xi)$:

$$\overline{\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right)^2} \cong \frac{D_{\Gamma}(\xi)}{\xi}.$$

Формула (17) требует знания $\frac{\partial \Gamma}{\partial z}$ и поэтому пригодна только для определения k в приземном слое, где измерения $\frac{\partial \Gamma}{\partial t}$ довольно точны.

4. Современное состояние вопроса

Развитие современной измерительной техники позволяет в настоящее время получать k_u и k_{Γ} в приземном слое, пользуясь их определением из формул (3а) и (4а).

Полученные таким способом значения k_u и k_{Γ} позволят, вероятно, в ближайшем будущем оценить реальность различных приближенных формул для определения k .

Проведение такого сравнения приближенных формул для расчета k со значениями k , получаемыми непосредственно из (3а) и (4а), будет очень полезно.

Для этого нужно иметь синхронные записи пульсаций продольной u и вертикальной W составляющих скорости потока, а также средний градиент $\frac{\bar{du}}{dz}$ в приземном слое при различных условиях стратификации и разных скоростях потока. На основе такого сравнения, проведенного для приземного слоя, можно будет судить о достоверности значений k , получаемых на основе структурных измерений поля W в свободной атмосфере. Таких формул в настоящее время можно привести несколько:

1) формула Дубова

$$k = \frac{\sqrt{\overline{W^2}} \tau_m U}{2}, \quad (18)$$

где τ_m — среднее время сохранения W одного знака на записи прибором, движущимся со скоростью U относительно потока;

2) формула

$$k = \frac{\overline{W^2}^2}{\varepsilon}, \quad (19)$$

где ε — величина диссипации энергии турбулентности, определяемая по значениям структурной функции W в инерционном интервале масштабов.

Такую формулу для k нетрудно получить из соображений размерности; кроме того, она получается при переходе от уравнения Фоккер—Планка к диффузионному уравнению в турбулентной атмосфере (см., например, [21]);

3) известная формула из [4], основанная на идеях Тейлора [14] в предположении идентичности лагранжева и эйлерова характерных масштабов,

$$k = \overline{W^2} L_W, \quad (20)$$

где L_W — эйлеров временной масштаб пульсаций W ;

4) если прибор, измеряющий флуктуации W , находится на самолете, движущемся со скоростью U , намного превышающей скорость воздушного потока, то по записи прибора определяются пространственные структурные характеристики флуктуаций W . Поэтому временной масштаб L_W в формуле (20) удобнее заменить пространственным масштабом λ_W и записать

$$k = \overline{W^2} \frac{\lambda_W}{U}. \quad (20a)$$

Каждая из приведенных формул имеет свои преимущества и недостатки, например, формула Дубова удобна для оценки значений k по записям W , проведенным малочувствительными приборами: наличие только линейных характеристик ($\sqrt{\overline{W^2}}$ заменяется обычно абсолютным средним $|W|$) сильно уменьшает погрешности расчета. Однако оценка погрешностей и искажений получаемых значений за счет конечности интервала записи по этой формуле затруднительна. Формула Тейлора $K = \overline{W^2} L_W$ удобна тем, что содержит в себе только стандартные структурные характеристики — дисперсию $\overline{W^2}$ и характерный масштаб

Таблица 1

	T/L_W			
	4	8	10	20
$\frac{k(T/L_W)}{k_\infty}$	0,62	0,78	0,82	0,90
$\frac{\Delta L_W}{L_W} \%$	70	45	40	25
$\frac{\Delta k}{k} \%$	100	70	60	40

$$L_W = \int_0^{\infty} R_W(\xi) d\xi, \text{ где } R_W(\xi) \text{ — эйлеров временной коэффициент корреляции флуктуаций } W.$$

Замена лагранжева масштаба эйлеровым в приближенной формуле нам кажется несущественной. Зато в формулу входят величины, легко вычисляемые по готовым программам на ЭВМ. Пользуясь этой формулой, легко оценить зависимость среднего по целому ряду записей значения k от длины интервала записи T , а также погрешность, возникающую при вычислении k по отдельной записи длиной T . Для этого можно воспользоваться результатами, изложенными в [15].

Как следует из [15], зависимость k от длины интервала записи T должна быть такой же, как зависимость дисперсии $\overline{W^2}$ от длины интервала (табл. 1), так как величину L_W можно получить без искажений даже по записи конечной длины. Эта зависимость k от безразмерного интервала T/L_W , где L_W — характерный временной масштаб пульсаций W , верна лишь в ограниченном интервале масштабов, так как получена в предположении стационарности процесса и для корреляционной функции вида $R_W(\xi) = e^{-\xi/L_W}$.

Погрешность расчета k по отдельной записи длиной T складывается из погрешности расчета дисперсии $\overline{W^2}$ за счет конечности записи (см. рис. 1 из [15]) и из погрешности определения L_W по отдельной структурной функции. Последнюю погрешность можно оценить, используя вычисленные в [15] значения погрешности расчета структурных функций при разных значениях T/L_W (см. значения $\Delta L_W/L_W$ в табл. 1). При оценках этой погрешности считалось, что расчет структурных функций ведется до таких значений аргумента, что $\xi/T \leq 0,1$.

В последней строке таблицы приведена полная погрешность расчета k по отдельной записи длиной T ; она получена просто как сумма погрешностей расчета L_W и $\overline{W^2}$ (последняя взята из [15]).

Таким образом, очевидно, что для получения надежных значений k по формуле $k = \overline{W^2} L_W$ нужно иметь несколько записей пульсаций W длиной $T/L_W \geq 10$ при одинаковых внешних условиях. Тогда точность определения k увеличится в $\sqrt{n}$ раз, где n — число записей.

Отметим, что в табл. 1 приведены значения погрешностей, возникающих за счет конечности длины интервала записи флуктуаций. На самом деле к погрешностям, приведенным в табл. 1, должны добавиться еще погрешности за счет неточности съемки ординат. При расчетах k по формулам типа (20) или (20а) к погрешностям табл. 1 добавится относительная погрешность, равная отношению дисперсии случайных ошибок отсчета к величине k . Если расчет ведется по формуле (18) с заменой $\sqrt{\overline{W^2}}$ на $|W|$, то ошибки отдельных отсчетов практически не сказываются на результатах.

В заключение автор приносит глубокую благодарность проф. Д. Л. Лайхтману и ст. науч. сотр. А. С. Дубову за обсуждение настоящей работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Swinbank W. C. The measurement of vertical transfer of heat and water vapour by eddies in the lower atmosphere. Journ. of Meteor., 8, 135, 1951.
2. Cramer H. E., Record F. A. The variation with height of the vertical flux of heat and momentum. Journ. of Meteor., 10, 219, 1953.

3. Дикон Е. Измерение характеристик турбулентного обмена в нижней атмосфере. Сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха», ИЛ, 1962, стр. 236.
4. Сэттон. Микрометеорология. Гидрометеиздат, Л., 1958.
5. Хинце. Турбулентность. ИЛ, 1963.
6. Лайхтман Д. Л., Зилитинкевич С. С. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11, 1964.
7. Ляпин Е. С. О турбулентном перемешивании воздуха в атмосфере. Метеорология и гидрология, № 5, 1948.
8. Дубов А. С. Определение коэффициента турбулентного обмена по ускорению самолета. Тр. ГГО, вып. 98, 1959, стр. 54.
9. Ertel H. Eine Methode zur Berechnung des Austauschoeffizienten. Gerl. Beitr. z. Geophysik, Bd. 25, 1930.
10. Hesselberg. Ein neuer Ausdruck für Austauschoeffizient. Ann. der Hydrogr., Bd. 57, 1929.
11. Тимофеев М. П. О методике определения компонент теплового баланса подстилающей поверхности. Тр. ГГО, вып. 27, 1951.
12. Будыко М. И. Испарение в естественных условиях. Гидрометеиздат, Л., 1948.
13. Монин А. С. О диффузии с конечной скоростью. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1955.
14. Taylor G. I. Diffusion by continuons movements. Proc. Math. Soc., 20, 196, 1921.
15. Ариель Н. З., Бютнер Э. К. Искажения и погрешности, возникающие при расчетах статистических характеристик по экспериментальным данным. См. настоящий сборник.
16. Давыдов Б. И. Уравнение диффузии с учетом молекулярной скорости. ДАН СССР, 2, № 7, 1935.
17. Coldstein. Quart. Journ. of Mech. and Appl. Math., 4(2), 129, 1951.
18. Турбович Л. Т. ЖЭТФ, 17, 366, 1947.
19. Монин А. С. О диффузии с конечной скоростью. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1955.
20. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеиздат, Л., 1961.
21. Чандрасекар. Стохастические проблемы в физике и астрономии. ИЛ, М., 1953.

ЭФФЕКТ РАССЕЯНИЯ ТУМАНА ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Предлагается метод рассеяния туманов над ограниченной территорией с помощью системы воздуходувных устройств, расположенных вдоль границ территории и выкачивающих из нее воздух в горизонтальных направлениях. Ожидаемый эффект оценивается теоретически.

Целью локального рассеяния тумана является улучшение видимости над аэродромом для обеспечения нормальных условий взлета и посадки самолетов. Как известно, разработанные в настоящее время методы активного воздействия приводят к положительным результатам в основном в случае переохлажденных туманов. В связи с этим особый интерес представляет развитие методов рассеяния, которые пригодны как для холодных, так и для теплых туманов. В настоящей работе предлагается подобный метод, основанный на динамическом и тепловом эффекте локального поля скоростей, создаваемого специальной установкой, выкачивающей в горизонтальных направлениях воздух из рассматриваемой области. Основными факторами рассеяния тумана при этом являются механическое удаление жидкой влаги из области воздействия (на смену выкачиваемому влажному воздуху сверху будет поступать сухой), и испарение капель, обусловленное нагреванием воздуха, сжимающегося при опускании.

Для расчета ожидаемых эффектов обратимся к теории тепло- и влагообмена в облаках и туманах. Ограничимся рассмотрением случая, когда вода в атмосфере имеется лишь в газообразной и жидкой фазах.

Пренебрежем горизонтальной диффузией тепла и влаги и горизонтальным переносом радиации. При этом в результате тождественных преобразований уравнений тепло- и влагообмена для области Ω , содержащей водяной пар и жидкую воду (в виде капель), получаем

$$\frac{db}{dt} - \beta w = \frac{1}{1+c} \left[\frac{\partial}{\partial z} \frac{\frac{1}{L}(P+D) - B}{\rho} - c \frac{\partial}{\partial z} \frac{Q+B}{\rho} \right]. \quad (1)$$

Здесь $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$; t — время; x, y, z — декартовы координаты (z — вертикальная); u, v, w — соответствующие скорости движения воздуха; b — удельная водность, представляющая собой массу жидкой воды, приходящуюся на единицу массы воздуха; D — вертикальный поток радиации; P, Q, B — вертикальные турбулентные потоки тепла, водяного пара и водности; β — равновесный градиент

влажности, равный $\beta = \frac{c_p}{L} (\gamma_a - \gamma_v)$, где c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении, L — скрытая теплота парообразования, γ_a и γ_v — сухо- и влажноадиабатический градиенты температуры; ρ — плотность воздуха; $c = \frac{R_w c_p \rho}{RL \frac{dE(T)}{dT}}$, где R и R_w — газовые постоянные воз-

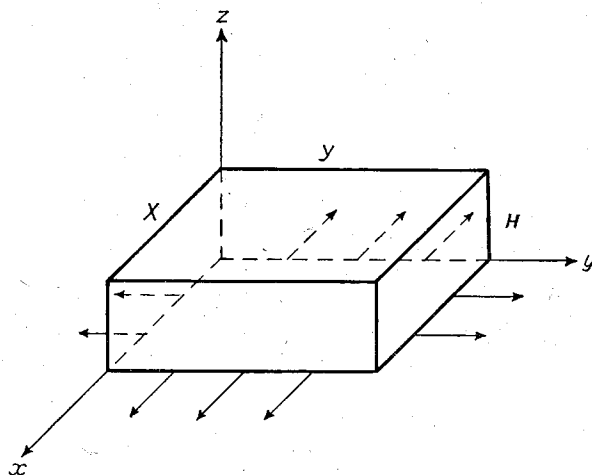


Рис. 1. Схематическое изображение области Ω , подверженной воздействию (стрелками указаны направления искусственно создаваемых скоростей по границе Ω).

духа и водяного пара, p — давление, $E(T)$ — максимальная упругость водяного пара при температуре T . Уравнение типа (1) в интегральной форме было получено в работе [1].

Область Ω , занимаемую туманом над взлетно-посадочной полосой (или аэродромом) будем рассматривать как параллелепипед с высотой H и сторонами X, Y . Воздуходувные устройства (вентиляторы), выкачивающие в горизонтальных направлениях воздух из Ω , будем считать симметрично расположенными у самой земли (рис. 1). Тогда поле скоростей на боковой границе Ω приближенно можно описать следующими формулами:

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = u|_{x=X} &= \sum_{i=1}^{n_y} N \cdot \delta(z) \cdot \delta(y_i); \\ v|_{y=0} = v|_{y=Y} &= \sum_{i=1}^{n_x} N \cdot \delta(z) \cdot \delta(x_i), \end{aligned} \quad (2)$$

где символом δ обозначена дельта-функция Дирака; n_x и n_y — число вентиляторов, расположенных вдоль соответствующих граней; N — производительность одного вентилятора, равная объему воздуха, выкачиваемого им за единицу времени; x_i и y_i — соответствующие координаты точек, в которых расположены вентиляторы.

Будем считать, что искусственно создаваемые скорости движения воздуха в окрестности Ω превосходят скорость естественного ветра, и пренебрежём последней. Задача теоретического анализа — оценить зна-

чения параметров выкачивающей установки, при которых рассеяние тумана происходит в течение заданного промежутка времени τ . Практический интерес представляет случай, когда интервал рассеяния τ значительно меньше масштаба времени, характеризующего скорость естественного развития тумана. Поскольку последний обычно измеряется часами, можно удовлетворить указанному условию, положив τ равным, например, 30 мин. Очевидно, при расчете эффекта рассеяния в этом случае можно пренебречь естественными факторами эволюции тумана, что позволяет правую часть (1) положить равной нулю. Проинтегрируем упрощенное таким образом уравнение (1) по объему

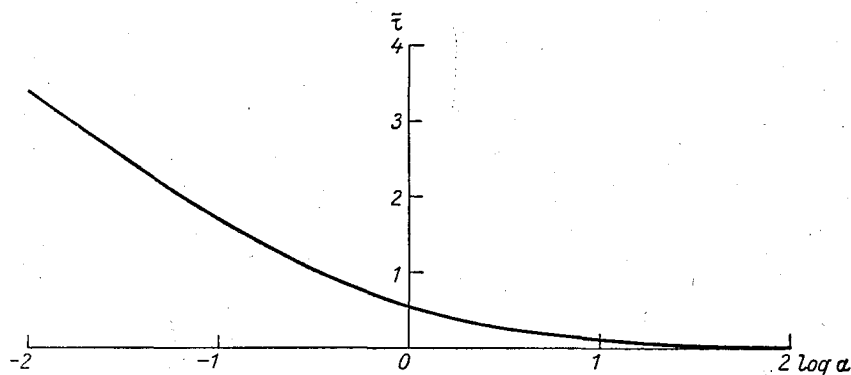


Рис. 2. График универсальной функции $\bar{\tau}(\alpha)$.

$\Omega = \{0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y, 0 \leq z \leq H\}$. Учитывая (1) и заменяя локальные значения водности в Ω средним значением $\bar{b}$, получаем¹

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{b}H = - \frac{M}{XY} (\bar{b} + \beta H). \quad (3)$$

В начальный момент времени высота тумана и его средняя водность известны:

$$H|_{t=0} = H_0; \quad \bar{b}|_{t=0} = b_0. \quad (4)$$

Характерные значения метеорологических параметров правой части (4) составляют $\bar{b} \approx 0,5$ г/кг, $\beta \approx 0,2$ г/кг/100 м, $H \approx 100$ м. Таким образом, в обычных условиях $\bar{b} > \beta H$. Отсюда следует, что при замене уравнения (3) на

$$\frac{\partial \bar{b}H}{\partial t} = - \frac{M}{XY} \left(\frac{\bar{b}H}{H_0} + \beta H_0 \right) \quad (3a)$$

погрешности за счет неточного определения первого и второго членов правой части будут частично компенсироваться и в большинстве случаев приведут к незначительному занижению рассчитываемой скорости рассеяния тумана.

¹ При выводе (3) использовано равенство $\int_{\Omega} w \, dx \, dy \, dz = -MN$, являющееся приближенным следствием уравнения неразрывности. Здесь $M = 2(n_x + n_y)$, N — основной параметр установки, определяющий объем воздуха, выкачиваемого из Ω за единицу времени.

Введем безразмерные переменные:

$$t = \frac{XYH_0}{M} \tilde{t}; \quad H = H_0 \tilde{H}; \quad \bar{b} = b_0 \tilde{b}; \quad \alpha = \frac{\beta H_0}{b_0}. \quad (5)$$

Результат интегрирования уравнения (3а) при условиях (4) при этом запишется в следующем виде:

$$e^{-\tilde{\tau}} - \alpha \tilde{\tau} = 0, \quad (6)$$

где $\tilde{\tau} = \frac{M\tau}{XYH_0}$, τ — время рассеяния тумана.

Зависимость между $\tilde{\tau}$ и α , представленная в виде графика на рис. 2, позволяет оценивать при заданном τ значения параметра M , характеризующего режим работы рассеивающей установки.

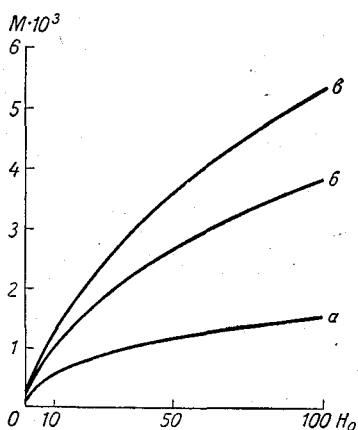


Рис. 3. Зависимость величины M м³/сек от начальной высоты тумана H_0 м и начальной влажности b_0 г/кг.

а) $b_0 = 0,1$ г/кг, б) $b_0 = 0,5$ г/кг, в) $b_0 = 1$ г/кг.

На рис. 3 приведены примеры расчетов величины M для различных высот тумана при $\tau = 30$ мин. и начальной влажности b_0 для взлетно-посадочной полосы с размерами $X = 2500$ м, $Y = 30$ м при температуре воздуха 10° и давлении 1000 мб.

Значение $M = 2,7 \cdot 10^3$ м³/сек., требуемое для рассеивания тумана средней мощности ($b_0 = 0,5$ г/кг, $H_0 = 50$ м), можно получить, например, расставив вдоль длинных сторон полосы по 49, а на коротких по одному вентилятору с производительностью $N = 27$ м³/сек. каждый.

Для сравнения заметим, что двигатель мощного реактивного самолета обладает в отношении скорости выбрасывания газов производительностью, равной примерно $3 \cdot 10^3$ м³/сек. Расход горючего за 30 мин. при этом составляет около 1000 кг. Очевидно, примерно такой же цифрой можно в среднем оценить работу по рассеянию тумана предлагаемым методом.

Для предотвращения естественного восстановления тумана после его локального рассеяния воздуходушная установка должна работать в относительно ослабленном режиме (M уменьшается в несколько раз) в течение всего времени существования естественного тумана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. Теплопроводность и влагообмен в турбулентной атмосфере при наличии фазовых переходов влаги. ДАН СССР, 156, № 5, 1964.

М. А. ГЕРМАН, В. П. ТАРАКАНОВА

РЕЗУЛЬТАТЫ СРАВНЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК УСТАНОВИВШЕЙСЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СТРУИНЫХ ТЕЧЕНИЯХ, РАССЧИТАННЫХ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Рассматривается метод оценки характеристик турбулентности в струйных течениях, основанный на теоретических исследованиях Д. Л. Лайхтмана — В. А. Шнайдемана. Выполняется расчет вертикальной компоненты пульсации скорости ветра по материалам температурно-ветрового зондирования для случаев, когда проводились научно-исследовательские полеты на самолете. Дается сравнение значений величины вертикальной компоненты пульсации скорости ветра в струйных течениях.

Развитие современной авиации, ракетостроения и приборостроения расширили возможности исследования свободной атмосферы. Значительное место в проводимых исследованиях занял самолет, оснащенный различными современными приборами, необходимыми для изучения тех или иных свойств и особенностей атмосферы. Благодаря самолетным исследованиям в настоящее время получены данные о распределении турбулентности в свободной атмосфере и облачных слоях [2, 3], микро-структуре облаков и т. п. Наряду с самолетными исследованиями свободной атмосферы все большее развитие получают методы, основанные на использовании результатов радиозондирования, и радиолокационные методы. Теоретической основой для изучения турбулентного режима струйных течений по материалам температурно-ветрового зондирования, явились исследования, выполненные Д. Л. Лайхтманом и В. А. Шнайдемано. Известно, что турбулентность в свободной атмосфере возникает в тех слоях, где велики горизонтальные и вертикальные градиенты скорости ветра и температуры, поэтому естественно связать характеристики турбулентности с вертикальными профилями температуры и ветра.

Особенно велики градиенты температуры и ветра в зоне струйных течений, и турбулентность здесь может достигать больших значений. Благодаря турбулентности профиль геострофического ветра сглаживается до реально наблюдаемого. Чем больше сглаживание вертикального профиля ветра, тем выше степень турбулизации струйного течения.

Именно такой подход к решению задачи о турбулентности в струйных течениях принят в работах [4, 5]. Для определения характеристик турбулентности авторы использовали систему уравнений движения и уравнения баланса турбулентной энергии. В результате интегрирования замкнутой системы уравнений для струйного течения

были получены формулы среднего коэффициента турбулентности k , толщины турбулизированного слоя H и порывистости ветра w'_0 .

При построении номограммы для широкой струи учтено вращение геострофического ветра с высотой. Основными параметрами для определения характеристик турбулентности являются средний градиент потенциальной температуры в струе $\bar{\beta}$ и разность скоростей ветра на оси и вне струи c_0 .

В качестве дополнительной характеристики для построения номограмм использовалась площадь S .

Для определения коэффициента турбулентности k для верхней половины струи получена следующая формула [4]:

$$\frac{g\bar{\beta}}{c_0^2} = \frac{0,75\alpha}{H_2} \frac{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2a} + \frac{\alpha^2}{2a^2} \frac{v_1}{u_0} + \frac{v_1^2}{u_0^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha^3}{4a^3} \right)}{1 + \frac{\alpha^2}{2a^2} - \frac{\alpha}{a} - \frac{v_1}{u_0} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\alpha^3}{2a^3} \right) + \frac{v_1^2}{u_0^2} \left(1 + \frac{\alpha^4}{4a^4} \right)} - \frac{\frac{\alpha}{a \left[1 + \left(1 + \frac{\alpha}{a} \right)^2 \right]} \left[2 \left(1 + \frac{\alpha}{a} \right) + \frac{2v_1}{u_0} \left(1 - \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha^2}{2a^2} \right) + \frac{\alpha^2}{a^2} \frac{v_1^2}{u_0^2} \right]}{1 + \frac{\alpha^2}{2a^2} - \frac{\alpha}{a} - \frac{v_1}{u_0} \left(\frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\alpha^3}{2a^3} \right) + \frac{v_1^2}{u_0^2} \left(1 + \frac{\alpha^4}{4a^4} \right)}, \quad (1)$$

где H_2 определяется из соотношения:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{a} \left(1 - \frac{v_1}{u_0} \frac{\alpha}{a} + \frac{v_1^2}{u_0^2} \frac{\alpha^2}{2a^2} \right) + \left(\frac{v_1^2}{u_0^2} + 1 \right) - \frac{2\alpha}{a} \frac{1}{\left[1 + \left(1 + \frac{\alpha}{a} \right)^2 \right]} \times \\ & \times \left[2 \left(1 + \frac{\alpha}{a} \right) + 2 \frac{v_1}{u_0} \left(1 - \frac{\alpha}{a} - \frac{\alpha^2}{2a^2} \right) + \frac{v_1^2}{u_0^2} \frac{\alpha^2}{a^2} \right] = \\ & = e^{-2aH_2} \left\{ \frac{4\alpha}{a} \left(1 - \frac{v_1}{u_0} \frac{\alpha}{a} + \frac{v_1^2}{u_0^2} \frac{\alpha^2}{2a^2} \right) + 4e^{2aH_2} \left(1 - \frac{\alpha}{a} \right) \left(1 + \frac{v_1^2}{u_0^2} \right) - \right. \\ & - \frac{8\alpha}{a} \frac{1}{\left[1 + \left(1 + \frac{\alpha}{a} \right)^2 \right]} e^{aH_2} \left(1 - \frac{\alpha}{a} \right) \times \left[\sin aH_2 \left(2 \frac{v_1}{u_0} \left(1 + \frac{\alpha}{a} \right) - \right. \right. \\ & - \frac{v_1^2}{u_0^2} \frac{\alpha}{a} \left(2 + \frac{\alpha}{a} \right) - \frac{v_1}{u_0} \frac{\alpha^2}{a^2} + 2 \Big) + \cos aH_2 \left(2 \frac{v_1}{u_0} \left(1 - \frac{\alpha}{a} \right) + \right. \\ & \left. \left. + 2 \left(1 + \frac{\alpha}{a} \right) - \frac{v_1}{u_0} \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{v_1^2}{u_0^2} \frac{\alpha^2}{a^2} \right) \right] \Big\}. \quad (2) \end{aligned}$$

Здесь $a = \sqrt{\frac{\omega_z}{k}}$; α — показатель размытости струи, u и v — составляющие скорости ветра по осям x и y соответственно. Индексы «0» относятся к скоростям ветра на оси струи, индексы «1» — вне струи, g — ускорение силы тяжести.

Для нижней половины струи знак v_1 в формулах для определения k и H меняется на обратный.

Номограммы, построенные для различных значений $\frac{v_1}{u_0}$, представлены на рис. 1 и 2.

Порывистость ветра определяется из соотношения

$$\overline{w_0'^2} = k \sqrt{\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2} = k \sqrt{g\beta}. \quad (3)$$

Номограмма для определения w_0' представлена на рис. 3.

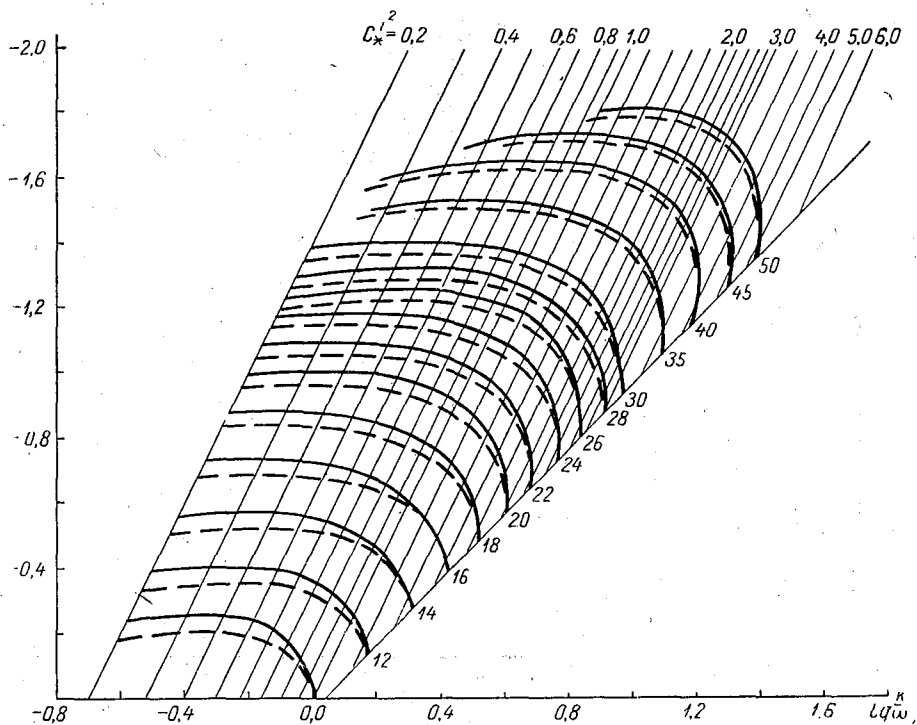


Рис. 1. Номограмма для определения коэффициента турбулентности

$$\frac{v_1}{u_0} = 0 \div (-0,1). \quad \text{---} \frac{v_1}{u_0} = 0; \quad \text{—} \frac{v_1}{u_0} = -0,1.$$

Для вычисления характеристик турбулентности необходимо по данным температурно-ветрового зондирования найти следующие величины:

- 1) значение скорости ветра на оси струи c_m ;
- 2) значение скорости ветра на границах струи c_1 ;
- 3) разность скоростей ветра $c_0 = c_m - c_1$;
- 4) средний вертикальный градиент температуры $\overline{\gamma}$, равный $\overline{\gamma} = \frac{T_1 - T_2}{2\Delta z}$, где T_1 — температура воздуха на расстоянии $2\Delta z = 2(z_0 - z_1)$ от оси струи, T_2 — температура на оси струи;
- 5) среднее значение абсолютной температуры $\overline{T}$, которое берется на высоте z_1 , где скорость ветра равна $c_1 + \frac{c_m - c_1}{2} = c_1 + \frac{c_0}{2}$;

6) величину площади S , заключенной между осью струи и кривой профиля ветра;

7) значение $\frac{v_1}{u_0}$.

Здесь

$$c_0^2 = \begin{cases} (u - u_1)_{z=0}^2 + (v - v_1)_{z=0}^2 & \text{для верхней части струи} \\ (u - u_1)_{z=0}^2 + (v + v_1)_{z=0}^2 & \text{для нижней части струи} \end{cases} \quad (4)$$

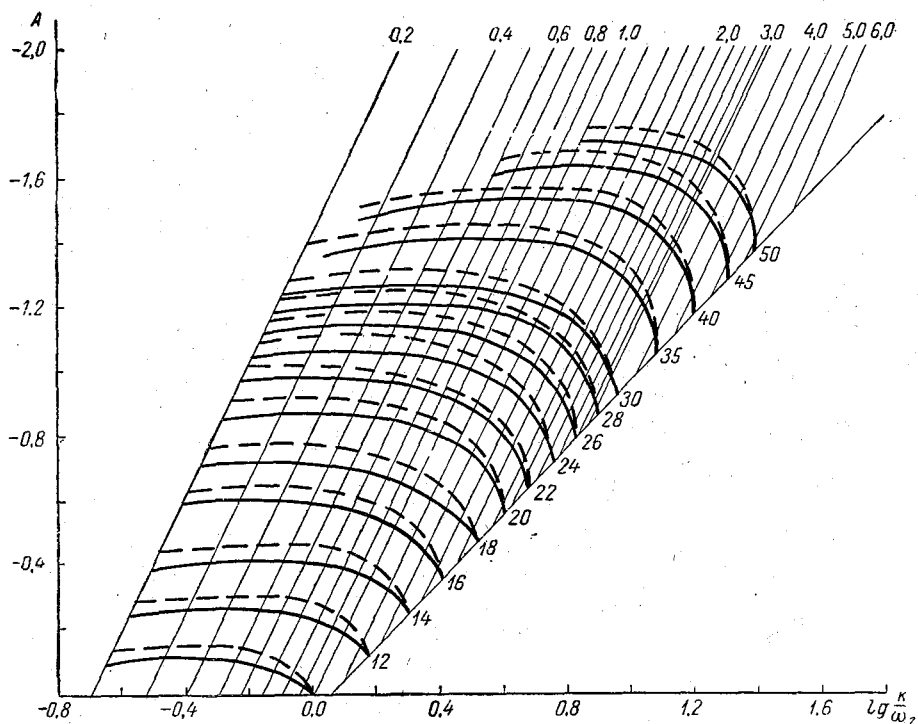


Рис. 2. Номограмма для определения коэффициента турбулентности

$\frac{v_1}{u_0} = 0,1 \div 0,2$. — — — $\frac{v_1}{u_0} = 0,1$; — $\frac{v_1}{u_0} = 0,2$.

Таблица 1

Значения величины $g\beta \cdot 10^3$

$\bar{\gamma}$	$\bar{T}$					
	210	220	230	240	250	260
-0,1	0,514	0,491	0,469	0,450	0,431	0,416
0	0,468	0,446	0,426	0,409	0,392	0,378
0,1	0,421	0,401	0,384	0,368	0,352	0,339
0,2	0,373	0,357	0,341	0,328	0,314	0,302
0,3	0,326	0,312	0,298	0,286	0,275	0,264
0,4	0,281	0,268	0,256	0,245	0,235	0,226
0,5	0,233	0,222	0,213	0,204	0,196	0,188
0,6	0,186	0,178	0,171	0,164	0,157	0,151
0,7	0,140	0,133	0,127	0,123	0,118	0,113
0,8	0,093	0,089	0,085	0,081	0,079	0,076
0,9	0,047	0,045	0,043	0,041	0,039	0,038

По известным значениям $\overline{T}$ и $\overline{\gamma}$ в табл. 1 находят значение $g\beta \cdot 10^3$. По найденному значению $g\beta$ и c_0 в табл. 2 находят значение вспомогательного параметра A .

Площадь S определяется в см^2 и умножается на 10^3 (если масштаб для скорости ветра 2 м/сек. в 1 см и для высоты 0,5 км в 1 см) или на 10^4 (если масштаб для скорости ветра 5 м/сек. в 1 см и для высоты 2 км в 1 см). После этого определяется величина вспомогательного па-

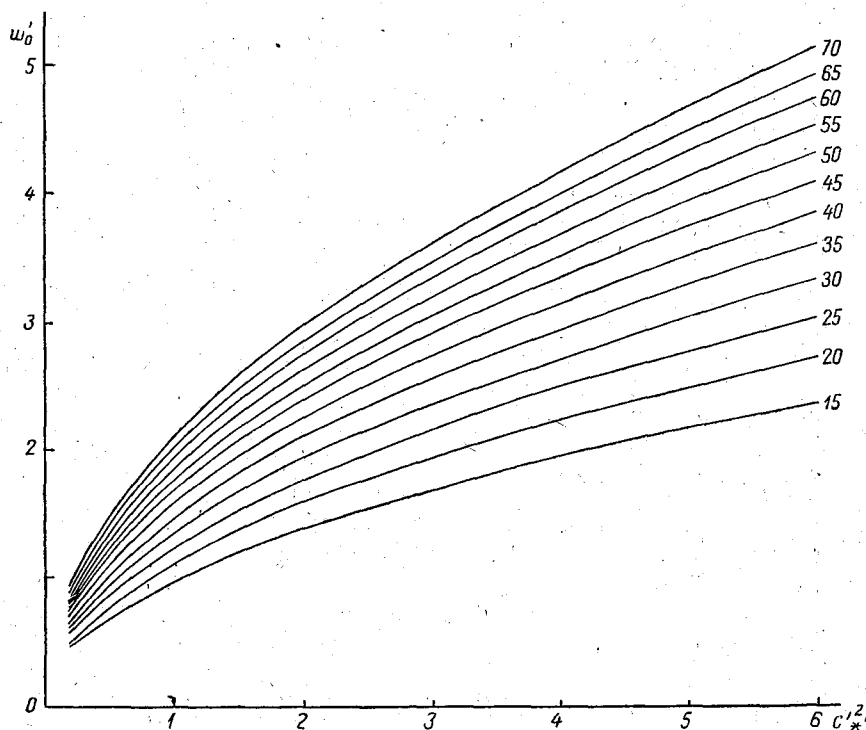


Рис. 3. Номограмма для определения порывистости ветра.

раметра $B = \frac{S}{c_0}$. Зная $\frac{v_1}{u_0}$, A и B по соответствующей номограмме (см. рис. 1 и 2) определяют значение $\lg\left(\frac{k}{\omega_z} \cdot 10^6\right)$ и вычисляют значение k для данной широты места. В точке пересечения A и B находят величину $c_*'^2$, пропорциональную пульсации скорости ветра. По значениям $c_*'^2$ и c_0 снимают с номограммы (см. рис. 3) величину ω'_0 . В тех случаях, когда A и B не имеют точки пересечения, $c_*'^2$ и $\lg \frac{k}{\omega_z}$ нужно брать в точке пересечения A с прямой, ограничивающей номограмму справа. Если A и B имеют две точки пересечения, нужно брать значение $c_*'^2$ и $\lg \frac{k}{\omega_z}$ в левой точке, если угол поворота вектора скорости ветра меньше 10° и в правой, если больше 10° .

Для выполнения настоящей работы были использованы материалы

Значения величины A

Таблица 2

C_0	$g^3 \cdot 10^3$							
	0,04	0,1	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50
16	-0,807	-0,408	-0,232	-0,107	-0,010	-0,069	0,193	0,291
18	-0,907	-0,510	-0,334	-0,209	-0,112	-0,033	0,092	0,189
20	-1,0	-0,602	-0,426	-0,301	-0,204	-0,125	0,0	0,097
22	-1,082	-0,684	-0,509	-0,383	-0,286	-0,208	-0,082	0,014
24	-1,158	-0,760	-0,583	-0,458	-0,362	-0,282	-0,157	-0,060
26	-1,228	-0,830	-0,648	-0,529	-0,428	-0,347	-0,228	-0,127
28	-1,292	-0,893	-0,719	-0,592	-0,490	-0,418	-0,291	-0,195
30	-1,352	-0,955	-0,777	-0,654	-0,556	-0,476	-0,353	-0,225
32	-1,408	-1,010	-0,836	-0,709	-0,613	-0,535	-0,408	-0,303
34	-1,461	-1,062	-0,886	-0,762	-0,664	-0,585	-0,460	-0,363
36	-1,510	-1,112	-0,936	-0,811	-0,714	-0,634	-0,510	-0,413
38	-1,558	-1,159	-0,893	-0,858	-0,762	-0,682	-0,557	-0,460
40	-1,602	-1,204	-1,028	-0,903	-0,806	-0,727	-0,602	-0,505
42	-1,644	-1,246	-1,070	-0,945	-0,848	-0,769	-0,644	-0,547
44	-1,684	-1,286	-1,111	-0,986	-0,889	-0,810	-0,684	-0,588
46	-1,724	-1,325	-1,149	-1,024	-0,927	-0,848	-0,723	-0,627
48	-1,760	-1,362	-1,186	-1,060	-0,964	-0,885	-0,760	-0,663
50	-1,796	-1,398	-1,222	-1,097	-1,000	-0,921	-0,796	-0,699
52	-1,830	-1,432	-1,256	-1,131	-1,034	-0,955	-0,830	-0,733
54	-1,863	-1,465	-1,289	-1,164	-1,067	-0,988	-0,863	-0,766
56	-1,893	-1,496	-1,321	-1,195	-1,098	-1,020	-0,894	-0,797
58	-1,924	-1,527	-1,351	-1,226	-1,129	-1,050	-0,925	-0,828
60	-1,955	-1,556	-1,380	-1,255	-1,158	-1,079	-0,954	-0,857
65	-2,022	-1,623	-1,450	-1,324	-1,228	-1,149	-1,023	-0,921
70	-2,086	-1,688	-1,513	-1,387	-1,291	-1,212	-1,086	-0,990
75	-2,149	-1,750	-1,574	-1,449	-1,352	-1,272	-1,148	-1,051

специальных научно-исследовательских полетов на скоростных самолетах. Исходные данные научно-исследовательских полетов приведены в табл. 3.

Исходные данные исследования

Таблица 3

№ пп.	Дата	Время зондирования, час. мин.	Время полета, час. мин. (от — до)	Высота полета, м	V м/сек.	$ \Delta n $	$ \Delta n _{\max}$	Район исследований
1	16.07.54	16 30	17 33—17 42	8 460	226,9	10,14	0,29	Московск.
2	19.07.54	10 20	11 25—12 15	9 430	234,7	0,15	0,30	область
3	21.07.54	10 30	10 38—11 34	10 510	218,0	0,12	0,24	То же
				5 990	229,7	0,19	0,37	"
				8 170	226,4	0,13	0,26	"
				10 280	220,1	0,21	0,42	"
4	21.07.54	16 30	13 02—14 02	7 980	226,4	0,19	0,38	"
5	21.07.54	16 30	13 02—14 02	10 870	207,8	0,11	0,22	"
6	15.08.54	04 30	02 25—03 36	12 330	201,1	0,06	0,11	"
7	16.08.54	22 30	22 45—23 30	8 930	234,7	0,07	0,14	"
				11 330	204,0	0,07	0,13	"
8	16.11.57	14 00	14 30—15 10	4 000	316,0	0,18	0,30	Лен. обл.
9	19.11.57	13 50	13 30—15 00	7 000	297,0	0,12	0,13	То же
				10 000	278,0	0,20	0,35	"
10	27.11.57	13 55	13 41—14 30	4 000	317,0	0,02	0,05	"
11	3.12.57	14 00	14 10—16 00	7 000	295,0	0,40	0,60	"
				10 000	280,0	0,10	0,12	"
12	6.12.57	14 00	15 00—16 15	4 000	317,0	0,15	0,30	"
				7 000	296,0	0,25	0,35	"

Исходные материалы по району исследования турбулентности практически однородны и характеризуют примерно одни и те же слои атмосферы. Однако полеты в районе Московской области проводились летом, а в Ленинградской области — зимой.

Во всех полетах производилась регистрация вертикальных ускорений центра тяжести самолета, вызванных турбулентным состоянием атмосферы, с помощью специального акселерографа. Перегрузки самолетов, снятые с акселерографических записей, указывают, что почти во всех полетах наблюдалась болтанка.

Перегрузки самолета не превышают 0,50g, за исключением одного случая 3/12 1957, когда максимальное значение Δn достигло 0,60g. Средние значения величины перегрузки, в использованных полетах невелики и соответствуют условиям, которые летный состав оценивает как слабую болтанку.

К исходным материалам исследовательских полетов были подобраны данные температурно-ветрового зондирования, соответствующие району исследования.

При подборе материалов температурно-ветрового зондирования особое внимание обращалось на время полетов и время выпуска радиозондов. В этом случае привлекались только синхронные данные, с условием, что радиозонд достигал высоты полета. В результате просмотра многочисленных материалов удалось отобрать только 12 случаев (см. табл. 3).

Используя ранее рассмотренные теоретические формулы (1)—(3) и номограммы на рис. 1, 2, 3, по материалам температурно-ветрового зондирования был выполнен расчет вертикальной компоненты порыва скорости ветра для всех рассмотренных случаев. Результаты вычисления приведены в табл. 4. Данные табл. 4 показывают, что величины w' , рассчитанные по теоретическим формулам Лайхтмана—Шнайдмана, изменяются в пределах от 0,60 м/сек. до 2,90 м/сек., что удовлетворительно согласуется с существующими представлениями об интенсивности порывов ветра вблизи тропопаузы.

Таблица 4

Результаты расчета вертикальной компоненты пульсации скорости ветра

№ п/п	Высота полета, м	$w'_{\text{ср.}}$, м/сек.	$w'_{\text{макс.}}$, м/сек.	Толщина слоя	$w'_{\text{о.}}$, м/сек.	Высота тропопаузы
1	8 640	1,29	2,68	7 700—9 000	1,35	11 500
2	10 510	1,48	2,97	10 500—12 000	0,92	10 500
3	8 170	1,17	2,35	7 800—10 000	1,95	10 400
4	7 980	1,67	3,34	7 400—8 800	2,90	10 700
5	10 870	1,51	3,02	9 700—11 300	2,55	10 700
6	12 330	1,06	1,94	10 700—13 200	1,58	10 400
7	11 330	1,04	1,94	10 400—12 000	1,30	13 000
8	4 000	0,72	1,20	2 800—5 100	1,72	9 800
9	7 000	0,71	0,77	5 000—9 500	1,52	11 000
10	4 000	0,06	0,15	2 000—7 000	0,60	10 000
11	7 000	2,36	3,54	7 500—9 500	2,40	10 400
12	7 000	1,47	2,06	6 000—9 600	1,50	10 600

Вертикальные пульсации скорости ветра по материалам акселерографических записей, рассчитывались с помощью соотношения:

$$|w'| = \frac{b_{\infty} |\Delta n|}{\Delta \cdot V}, \quad (5)$$

где b_{∞} — коэффициент, характеризующий аэродинамические данные самолета; рассчитан для условий уровня земли, Δn — перегрузка в долях g , $\Delta = \frac{\rho}{\rho_0}$ — относительная плотность, ρ_0 — стандартная плотность воздуха у поверхности земли, V — воздушная скорость полета самолета.

Материалы акселерографических записей болтанки самолета (см. табл. 3) позволили произвести расчет средних и максимальных значений величины w' , которые приведены в табл. 4. Пределы изменения средних величин вертикальных пульсаций, как это и следовало ожидать,

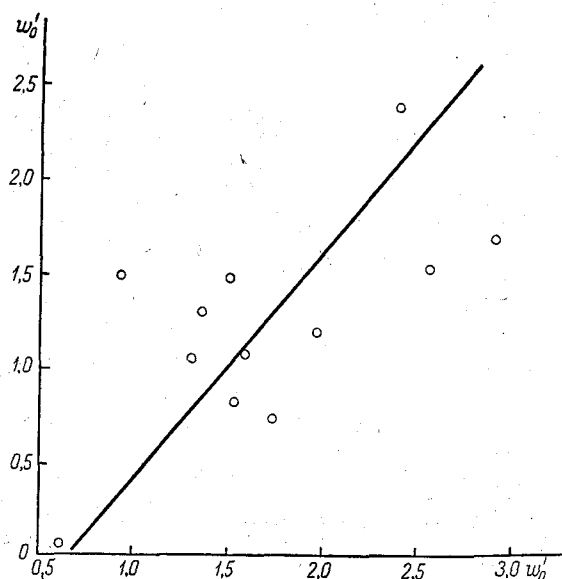


Рис. 4. Корреляционное поле величин w'_0 и w' .

близки к значениям, которые вычислялись по формуле (3) и изменяются от 0,06 м/сек. до 2,52 м/сек. Величины максимальных вертикальных пульсаций ветра изменяются в более широких пределах от 0,15 м/сек. до 5,04 м/сек. Такое соотношение между значениями w' для средних и экстремальных условий является реальным и нашло свое подтверждение в ряде экспериментальных исследований [2, 3].

Для установления связи между вертикальными пульсациями скорости ветра, рассчитанными различными методами, было построено корреляционное поле (рис. 4).

Как видно из рис. 4 точки, соответствующие определенным значениям w' имеют некоторый разброс, но в тоже время между ними можно провести линию связи, так как намечается определенная тенденция группирования экспериментальных данных около прямой. Исходя из этих соображений, была исследована коррелятивная связь между рассматриваемыми значениями w' . Результаты исследования представлены в табл. 5.

Коэффициент корреляции между величинами w' , рассчитанными по различным методам, оказался достаточно высоким, около 0,72 с вероятной ошибкой $\pm 0,07$, что свидетельствует об определенной связи между исследуемыми величинами.

Таблица 5

Коррелятивная связь между значениями w' , рассчитанными по формулам (3) и (5)

	W'_{cp}	$\Sigma \Delta w' \Delta w'_0$	$\Sigma \Delta w'^2$	Среднее квадратич- ное откло- нение σ	Коэффи- циент корреля- ции r	Вероятная ошибка коэффи- циента корреляции E_r	Коэффи- циент регрес- сии R
w'_0	1,690	3,360	4,902	0,667	0,725	$\pm 0,073$	0,840
w'	1,210		3,634	0,574			

По данным табл. 5 было составлено уравнение прямой регрессии, которое может быть представлено в виде:

$$w'_0 = 0,84w' + 0,68. \quad (6)$$

Используя соотношение (6), на корреляционном поле (см. рис. 4) была проведена прямая которая полно отражает исследуемую связь.

Таким образом, полученные результаты позволяют считать, что существует определенное согласование между величинами вертикальной пульсации скорости ветра, рассчитанными по формулам (3) и (5). Однако следует заметить, что метод Лайхтмана—Шнайдмана обеспечивает получение w' для некоторого слоя, вертикальная протяженность которого зависит от профиля ветра (от распределения ветра с высотой). В то же время метод определения вертикальной пульсации скорости ветра по материалам акселерографических записей болтанки самолета дает возможность получить w' на фиксированной высоте, т. е. высоте, на которой происходил исследовательский полет. Все эти соображения позволяют ожидать определенных отклонения между величинами w' , полученными различными методами. Отклонения, очевидно, будут меньшими, если выполнить специальные исследовательские полеты с учетом уже имеющихся данных о вертикальном профиле ветра. В работе была сделана попытка приблизить значения w' , полученные на определенных высотах, к высотам средин слоев, для которых рассчитаны w' по данным температурно-ветрового зондирования. Здесь была принята гипотеза линейного изменения w' с высотой между уровнями исследований. Это позволило определить величину вертикальной пульсации скорости ветра для середины слоя. Полученные величины не оправдали ожидаемых результатов, в частности, при оценке коэффициента корреляции, последний оказался равным 0,70, т. е. на 0,02 меньше, чем в первом случае. Возможно, что уменьшение коэффициента корреляции в этом случае связано с качеством использованного в работе исходного материала.

В настоящее время в специальной литературе широко обсуждается вопрос о применении числа Ri для диагноза слоев свободной атмосферы с наличием турбулентности, причем различными авторами очень часто излагаются противоречивые мнения по поводу использования параметра Ri . Так, некоторые из них на основе экспериментальных исследований совсем не получают связи между числом Ri и интенсивностью турбулентности в свободной атмосфере. С другой стороны, известны исследования, в частности работы [8, 9, 11], которые указывают на удовлетворительную связь между отдельными параметрами атмо-

сферы, а также Ri со степенью интенсивности турбулентности. Надо заметить, что последние в основном проводились в приземном слое атмосферы. Таким образом, резюмируя последние работы напрашивается вывод, что удовлетворительная связь между турбулентностью и Ri наблюдается обычно в нижних слоях тропосферы, в то же время в относительно высоких слоях такая связь отсутствует. Возможно, что связь существует в более сложном виде с учетом некоторых термодинамических характеристик, например, диссипации и диффузии турбулентной энергии. Вместе с этим немаловажным фактором в исследовании связи между характеристиками турбулентности и параметром Ричардсона является методика получения исходных данных и расчета для вычисления числа Ri .

Использованные в работе данные могут быть также использованы для оценки связи между вертикальной компонентой пульсации скорости ветра и отдельными величинами, характеризующими термодинамические условия развития турбулентности в том или ином слое свободной атмосферы. Очевидно, для изучения связи с интенсивностью турбулентности следует воспользоваться более универсальным параметром (возможно, что в него и войдет число Ri). Для выполнения этого исследования в работе используются следующие характеристики: 1) параметр Вейсала

(частота Вейсала) $\lambda = \sqrt{\frac{g}{T}} (\gamma_a - \gamma)$ для связи между w' и степенью

устойчивости атмосферы; 2) вертикальный градиент вектора скорости ветра для связи между w' и динамическим фактором; 3) число Ричардсона в качестве параметра, учитывающего термодинамические условия развития турбулентности.

Результаты исследования коррелятивной связи между указанными характеристиками представлены в табл. 6.

Таблица 6

Коррелятивная связь между значениями w' и некоторыми характеристиками турбулентного состояния атмосферы

	Среднее	$\Sigma \Delta w' \Delta n^1$	$\Sigma \Delta w'^2 \Delta n^2$	Среднее квадратичное отклонение σ	Коэффициент корреляции r	Вероятная ошибка коэффициента корреляции E_r	Коэффициент регрессии R
w'	1,210	-0,652	3,634	0,574	-0,028	$\pm 0,195$	-4,36
λ	0,014		$1,510 \cdot 10^{-4}$	0,004			
w'	1,210	0,008	3,634	0,574	0,236	$\pm 0,183$	24,60
β	0,009		$3,4 \cdot 10^{-4}$	0,006			
w'	1,210	-2,350	3,634	0,574	-0,059	$\pm 0,194$	-0,06
Ri	5,220		$4,3 \cdot 10^2$	6,250			

¹ n равно λ , β , Ri .

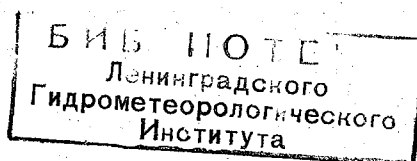
Анализ полученных величин показывает на отсутствие надежной связи между исследуемыми характеристиками. В этом случае следует указать, что ряд наблюдений является недостаточным для полных ут-

верждений. Вместе с этим, полученные данные в какой-то мере подтверждают результаты исследований авторов [7, 10 и др.].

Таким образом, при исследовании связи между характеристиками турбулентности и термодинамическим состоянием свободной атмосферы, вероятно, следует идти по пути введения более универсального параметра, чем число Ричардсона.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ариель Н. З., Бютнер Э. К. Методика определения характеристик турбулентности в струйных течениях. Метеорология и гидрология № 11, 1962.
2. Герман М. А. О турбулентном обмене в облаках. Метеорология и гидрология № 10, 1963.
3. Дубов А. С. К вопросу определения вертикальных скоростей ветра по данным самолетного акселерографа. Тр. ГГО, вып. 81, 1959.
4. Лайхтман Д. Л., Бютнер Э. К. Турбулентность в струйных течениях при наличии поворота геострофического ветра. Тр. ГГО, вып. 150, 1964.
5. Лайхтман Д. Л., Шнайдман В. А. Критерий установившейся турбулентности в струйных течениях. Метеорология и гидрология № 12, 1960.
6. Методические указания по диагнозу и прогнозу болтанки самолетов на высотах 6—12 км. Гидрометеоиздат, Л., 1961.
7. Голубов Р. С., Есеркепова Т. А. Условия возникновения турбулентности в верхней половине тропосферы. Тр. КазНИГМИ, вып. 20, 1963.
8. Гурвич А. С. Экспериментальное исследование частотных спектров и распределений вероятностей пульсаций вертикальной составляющей скорости ветра в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. геофиз. № 7, 1960.
9. Гурвич А. С. Турбулентный поток количества движения при неустойчивой стратификации и условиях, близких к безразличному равновесию. Тр. ИФА АН СССР № 4, 1962.
10. Меджитов Р. М. Применение критерия Ричардсона к прогнозу болтанки самолетов. Сб. работ Минской Гидрометобсерватории, вып. 2, 1959.
11. Цванг Л. Р. Измерения частотных спектров температурных пульсаций в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. геофиз. № 8, 1960.
12. Цванг Л. Р. Измерения спектров температурных пульсаций в свободной атмосфере. Изв. АН СССР, сер. геофиз. № 11, 1960.



СОДЕРЖАНИЕ

Б. Г. Вагер, С. С. Зилитинкевич. Метод расчета высоты нижней границы облаков по данным численного прогноза погоды	3
Р. С. Бортковский, Л. Р. Орленко, Г. Х. Цейтин. К расчету ветра и касательного напряжения над водной поверхностью	13
Б. Г. Вагер, Г. Х. Цейтин. Схема расчета характеристик погранслоя атмосферы в стационарных условиях (нелинейная задача)	44
Г. Х. Цейтин. О теоретическом профиле скорости ветра при нестационарных условиях	54
Е. Д. Надежина. Об использовании уравнения баланса энергии турбулентности в задаче о трансформации воздушной массы	69
Л. А. Грошева. О влиянии радиации на трансформацию нижней облачности	77
Ф. Н. Шехтер. Некоторые вопросы радиационного теплообмена в облачной атмосфере	82
Е. Д. Ковалева, Ф. Н. Шехтер. Влияние стратификации атмосферы на радиационный приток тепла	104
Д. Л. Лайхтман. Воздействия на радиацию, как метод изменения метеорологического режима нижних слоев атмосферы	115
В. В. Симонов. Перестройка спектра капель в облачности и тумане под влиянием внешних условий	122
М. П. Тимофеев . О регулировании интенсивности зимних туманов испарения	131
А. С. Зайцев. Влияние температурной неоднородности на поле ветра в пограничном слое	139
З. М. Утина. О распределении ветра в пограничном слое	146
М. Д. Дворкина. Некоторые данные по горизонтальному распределению метеорологических элементов над Волгоградским водохранилищем	149
Н. В. Серова, Г. З. Зинченко, Е. Ф. Семенов. Экспериментальная оценка величин теплообмена в грунте водоема	159
Р. С. Бортковский. К оценке погрешностей измерения скорости ветра анемометром, установленным на буре	163
Л. В. Несина. Об ошибке определения температуры поверхности воды по метеорологическим данным	167
Г. В. Гирдюк. О точности определения эффективного излучения поверхности моря в светлое время суток	171
Н. З. Ариель, Э. К. Бютнер. О вычислении спектральных плотностей по метеорологическим данным	177
Н. З. Ариель, Э. К. Бютнер. Искажения и погрешности, возникающие при расчетах статистических характеристик по экспериментальным данным	189
Э. К. Бютнер. О формулах для определения коэффициента турбулентности по данным структурных изменений	207
С. С. Зилитинкевич. Эффект рассеяния тумана при динамическом воздействии	217
М. А. Герман, В. П. Тараканова. Результаты сравнения характеристик установившейся турбулентности в струйных течениях, рассчитанных различными методами	221

ТРУДЫ ГГО, ВЫП. 187

Редакторы *Л. В. Царькова, Е. И. Ильиных.*
Техн. редактор *Г. В. Ивова*
Корректор *Т. Н. Черненко*

Сдано в набор 19/X 1965 г.	Подписано к печати 15/III 1966 г.	
Бумага 70×108 ¹ / ₁₆ .	Бум. л. 7,25.	Печ. л. 20,3.
М-20684	Тираж 750 экз.	Уч.-изд. л. 19,17.
		Индекс МЛ-79
Гидрометеорологическое издательство. Ленинград В-53, 2-я линия, д. № 23.		
Заказ № 598	Цена 1 руб. 28 коп.	
Темплан 1966 г. № 111		

Ленинградская типография № 8 Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР. Ленинград, Прачечный пер., д. 6.