ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ГЛАВНАЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ
имени А. И. ВОЕЙКОВА

ТРУДЫ

ВЫПУСК 183

ИССЛЕДОВАНИЕ РАДИАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В АТМОСФЕРЕ

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук К. С. ШИФРИНА
и канд. геогр. наук В. Л. ГАЕВСКОГО

ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД • 1966

УДК 551.501.721

Сборник содержит работы, выполненные в 1963—1964 гг. в ГГО, по исследованию радиационных и оптических характеристик атмосферы, облаков и подстилающей поверхности.

Сборник рассчитан на специалистов в области метеорологии и смежных наук.

СОДЕРЖАНИЕ

ТРУДЫ ГГО, ВЫП. 183

Редактор *Е. И. Ильиных*
Техн. редактор *Г. В. Ивкова*
Корректор *М. А. Гальперина*

Сдано в набор 20/XII 1965 г. Подписано к печати 16/V 1966 г.
Бумага 70×108 1/16 Бум. л. 3,25 Печ. л. 9,10 Уч.-изд. л. 8,85
Тираж 710 экз. М-20784 Индекс МЛ-132
Гидрометеорологическое издательство. Ленинград. В-53, 2-я линия, д. № 23.
Заказ № 15 Цена 59 коп.

Ленинградская типография № 8 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Ленинград, Прачечный пер., д. 6

2-9-7
107-66

К. С. ШИФРИН, А. Я. ПЕРЕЛЬМАН, В. А. ПУНИНА

СТРУКТУРА СВЕТОВОГО ПОЛЯ ПОД МАЛЫМИ УГЛАМИ

Дано выражение малоугольной полидисперсной индикатрисы для гамма-структур. Определение индикатрисы сводится к вычислению интеграла, содержащего квадрат бесселевой функции. Описан способ приближенного вычисления этого интеграла с помощью квадратур наивысшей алгебраической степени точности, рассмотрен вопрос о точности такого приближения. Приведена асимптотическая формула для расчета индикатрисы в случае узких распределений. Исследована область применимости полученных таблиц и формул.

§ 1. Постановка задачи. Малоугольная индикатриса для гамма-структур

В [1], исходя из общего решения задачи о дифракции плоской волны на шаре, получено выражение для углового распределения силы света, рассеянного предельно большой частицей. Оказывается, что почти весь

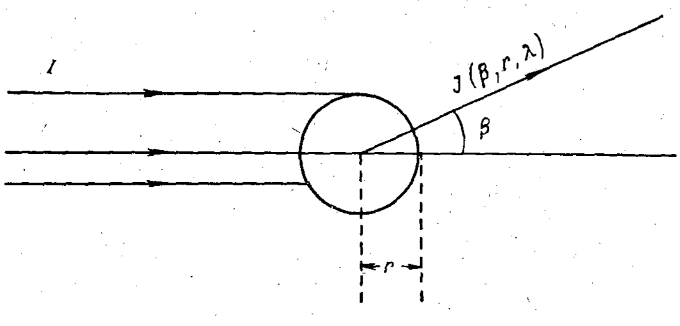

Рис. 1. Смысл основных обозначений.

дифрагированный свет заключен внутри некоторого очень узкого конуса, описанного вокруг направления вперед.

Пусть β — угол рассеяния, r — радиус частицы, λ — длина волны,

$$\rho = \frac{2\pi r}{\lambda}, \tag{1.1}$$

I — интенсивность падающего параллельного пучка света, $J = J(\beta, r, \lambda)$ — сила света[1], рассеянного под углом β (рис. 1), $F(\beta, \rho)$ — оптический поперечник рассеяния.

[1] Напомним, что интенсивность света $I(\beta, r, \lambda)$ и сила света $J(\beta, r, \lambda)$ связаны зависимостью $I(\beta, R, \lambda) = R^2 I(\beta, r, \lambda)$, где R — рассеяние от центра рассеивающей частицы до точки наблюдения.

В [1] при предположениях

$$\rho \gg 1, \quad \beta \ll 1, \quad \beta \sim \frac{1}{\rho} \tag{1.2}$$

выведена приближенная формула для силы света

$$J(\beta, r, \lambda) = I_0 \pi r^2 F(\beta, \rho), \quad F(\beta, \rho) = \frac{1}{\pi\beta^2} J_1^2(\rho\beta), \tag{1.3}$$

где $J_1(x)$ — функция Бесселя 1-го рода и 1-го порядка.

Выражения (1.3) соответствуют теории дифракции Кирхгофа на диске, они не учитывают свойств вещества частицы. Из проведенных в [1] расчетов следует, что почти весь дифрагированный свет заключен в конусе с малым углом раствора

$$\beta^* = \frac{6}{\rho} \simeq \frac{\lambda}{r}, \tag{1.4}$$

сила света, рассеянного предельно большой частицей, велика $\left(\sim \frac{r^4}{\lambda^2}\right)$, а полное количество света, рассеянного внутри этого узкого конуса, будет πr^2.

Величина $J(\beta, \lambda, r)$ из (1.3) представляет собой индикатрису света, рассеянного отдельной частицей радиусом r (монодисперсная индикатриса).

Определим индикатрису полидисперсных систем (полидисперсную индикатрису). Пусть спектр частиц задается функцией распределения $f^*(r)$, нормированной к числу частиц в единице объема N,

$$\int_0^\infty f^*(r)\,dr = N: \tag{1.5}$$

Тогда средняя по спектру $f^*(r)$ сила света $\bar{J}(\beta, \lambda)$ под углом рассеяния β для длины волны λ (λ здесь играет роль параметра) будет равна

$$\bar{J}(\beta, \lambda) = \int_0^\infty J(\beta, \lambda, r) f^*(r)\,dr. \tag{1.6}$$

Формулу (1.6) удобно записывать в виде

$$\bar{J}(\beta, \lambda) = \bar{J}(0, \lambda)\,\Phi(\beta) \tag{1.7}$$

где $\Phi(\beta)$ — отношение силы света, рассеянного под углом β, к силе света, рассеянного прямо вперед. Функция $\Phi(\beta)$ называется нормированной полидисперсной индикатрисой. Изучение этой функции и составляет основное содержание данной работы.

При соблюдении условий (1.2) полидисперсная индикатриса $\bar{J}(\beta, \lambda)$, согласно (1.3), задается формулой

$$\bar{J}(\beta, \lambda) = \frac{I_0}{\beta^2} \int_0^\infty r^2 J_1^2(\rho\beta) f^*(r)\,dr. \tag{1.8}$$

Интеграл в (1.8) определяет силу света, рассеянного полидисперсной системой под малыми углами β к направлению распространения. В связи с этим полидисперсную индикатрису будем называть малоугольной.

Отметим, что при переходе от формулы (1.6) к формуле (1.8) допущена неточность. Дело в том, что соотношения (1.3) определяют рассеяние света только на крупных частицах [см. условия (1.2)]. Вместе с тем интегрирование в (1.8) ведется от значения $r=0$. Далее будем предполагать, что относительная доля мелких частиц невелика, тогда указанное обстоятельство не приведет к существенным ошибкам.

Вычислим силу света, рассеянного прямо вперед. Используя соотношение

$$J_1^2(x)=\frac{x^2}{4}+0(x^4)\quad(x\to 0), \tag{1.9}$$

из формулы (1.8) находим

$$\bar{J}(0,\lambda)=I_0\int\limits_0^\infty r^2\left\{\lim_{\beta\to 0}\frac{J_1^2(\rho\beta)}{\beta^2}\right\}f^*(r)\,dr=\frac{\pi^2 I_0}{\lambda^2}\int\limits_0^\infty r^4 f^*(r)\,dr=\frac{\pi^2 I_0 N}{\lambda^2}\bar{r}_4^4. \tag{1.10}$$

Значит, для любых полидисперсных моделей с одинаковыми средними биквадратическими радиусами $\bar{r}_4$ сила света, рассеянного прямо вперед, будет одинакова, если фиксировано произведение $NI_0\lambda^{-2}$. В методе прозрачности и в методе индикатрисы мягких частиц аналогичную роль играл средний квадратический радиус $\bar{r}_2$ [2, 3, 10].

В рассматриваемой задаче в качестве линейного масштаба удобнее использовать не $\bar{r}_4$, а $\bar{r}_2$ или моду r_M.

Пусть r_0 — линейный масштаб задачи. Переход к величинам a, $f(a)$, ρ_0, $h(\beta,\rho_0)$, или $g(\beta\rho_0)$ — безразмерным аналогам r, $f^*(r)$, λ и $\bar{J}(\beta,\lambda)$ — осуществляется по формулам

$$\left\{\begin{aligned} &r=ar_0,\quad f^*(r)=f(a)r_0^{-4},\\ &\rho_0=\frac{2\pi r_0}{\lambda},\quad h(\beta,\rho_0)=\frac{\bar{J}(\beta,\lambda)r_0}{I_0}\ \text{или}\ g(\beta\rho_0)=\frac{\bar{J}(\beta,\lambda)r_0\beta^2}{I_0}. \end{aligned}\right. \tag{1.11}$$

Учитывая (1.1), отсюда получаем

$$\rho=a\rho_0. \tag{1.12}$$

Таким образом, формулу (1.8) в безразмерных переменных можно переписать в одной из следующих форм:

$$h(\beta,\rho_0)=\frac{1}{\beta^2}\int\limits_0^\infty a^2 f(a)J_1^2(a\rho_0\beta)\,da\ \text{или}\ g(\beta\rho_0)=$$

$$=\int\limits_0^\infty a^2 f(a)J_1^2(a\rho_0\beta)\,da. \tag{1.13}$$

Правые части этих формул определяют характер зависимости левых частей от аргументов β и ρ_0.

В качестве примера полидисперсной среды рассмотрим систему с гамма-распределением частиц (гамма-структуру). В силу нормировки (1.5) имеем

$$f_\mu^*(r)=N\frac{\xi^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)}r^\mu e^{-\xi r}. \tag{1.14}$$

Распределение (1.14) в безразмерных переменных (1.11) принимает вид

$$f_\mu(a)=Nr_0^3\frac{\Delta^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)}a^\mu e^{-\Delta a},\quad \xi r_0=\Delta. \tag{1.15}$$

Согласно формулам (1.9), (1.11), (1.13) и (1.15), находим

$$\bar{J}(0,\lambda)=\frac{\pi^2 I_0 N\Gamma(\mu+5)}{\lambda^2\xi^4\Gamma(\mu+1)}=\frac{\pi^2 I_0 N r_0^4\Gamma(\mu+5)}{\lambda^2\Delta^4\Gamma(\mu+1)}. \tag{1.16}$$

Формула (1.16) при $r_0 = \bar{r}_4$ переходит в (1.10), так как для распределения (1.14)

$$\bar{r}_4 = \frac{\sqrt[4]{(\mu+4)(\mu+3)(\mu+2)(\mu+1)}}{\xi}, \quad \Delta = \xi \bar{r}_4. \tag{1.17}$$

Если в качестве r_0 принять естественный масштаб $\bar{r}_2$ (средний квадратический радиус), то в случае распределения (1.14)

$$\bar{r}_2 = \frac{\sqrt{(\mu+2)(\mu+1)}}{\xi}, \quad \Delta = \xi \bar{r}_2 \tag{1.18}$$

и формула (1.16) принимает вид

$$\bar{J}(0, \lambda) = c \sqrt[4]{\frac{(\mu+4)(\mu+3)}{(\mu+2)(\mu+1)}}, \quad c = \pi^2 I_0 N \lambda^{-2} \bar{r}_2^4. \tag{1.16'}$$

Таблица 1

μ	0	2	6	10	20	∞
$\frac{\bar{J}(0,\lambda)}{c}$	1,57	1,26	1,13	1,08	1,04	1,00

В табл. 1 приведены (с точностью до величины множителя c) значения силы света $\bar{J}(0, \lambda)$, рассеянного прямо вперед, для различных гамма-структур; $\mu = \infty$ соответствует случаю монодисперсной системы.

Получим теперь общее выражение для силы света $\bar{J}(\beta, \lambda)$, рассеянного микроструктурой (1.14) под произвольным малым углом β. Для этого подставим (1.15) в (1.13) и произведем там замену

$$z = \rho\beta. \tag{1.19}$$

Учитывая (1.11) и (1.12), получаем

$$\bar{J}(\beta, \lambda) = \frac{I_0 N \lambda^2}{4\pi^2 \beta^2 \nu^{\mu+1} \Gamma(\mu+1)} \int_0^\infty z^{\mu+2} e^{-\frac{z}{\nu}} J_1^2(z)\, dz. \tag{1.20}$$

Здесь положено

$$\nu = \frac{\rho_0}{\Delta} \beta. \tag{1.21}$$

Величина ν представляет собой угол рассеяния, измеренный в некотором масштабе, естественном для рассматриваемой дифракционной задачи (дифракционный угол рассеяния). Напомним, что

$$\rho_0 = \frac{2\pi r_0}{\lambda}, \quad \Delta = \xi r_0. \tag{1.22}$$

и, значит, дифракционный угол рассеяния ν равен

$$\nu = \frac{2\pi}{\xi\lambda} \beta. \tag{1.23}$$

Параметр Δ зависит только от выбора масштаба r_0. Так, для распределения (1.14) $\Delta = \mu$, если $r_0 = r_м$, $\Delta = \mu + 1$, если $r_0 = \bar{r}$ ($\bar{r}$ — средний радиус), $\Delta = \sqrt{(\mu+1)(\mu+2)}$, если $r_0 = \bar{r}_2$ и т. д.

Вычислим для изучаемого распределения (1.14) нормированную индикатрису $\Phi(\beta) = \Phi_{\mu,\xi}(\beta)$ из (1.7). Используя формулы (1.16) и (1.20), получаем, что функция $\Phi_{\mu,\xi}(\beta)$ фактически зависит только от параметра μ и дифракционного угла рассеяния ν, определяемого соотношением (1.23). Значит, вместо функции $\Phi_{\mu,\xi}(\beta)$ можно писать $\Phi(\mu, \nu)$, причем

$$\Phi(\mu, \nu)=\frac{4}{\nu^{\mu+5}\Gamma(\mu+5)}\varphi(\mu+2, \nu), \quad \Phi(\mu, \nu)=\frac{\overline{J}(\beta, \lambda)}{\overline{J}(0, \lambda)}, \tag{1.24}$$

где

$$\varphi(\mu, \nu)=\int_0^\infty z^{\mu}e^{-\frac{z}{\nu}}J_1^2(z)\,dz. \tag{1.25}$$

Отсюда следует, что в данной задаче удобнее использовать дифракционный угол рассеяния ν вместо геометрического β. Параметры μ и ξ распределения (1.14) играют здесь разные роли. Параметр μ произволен и независим, а параметр ξ связан с аргументом (геометрическим углом рассеяния β), длиной волны λ и дифракционным углом рассеяния ν формулой (1.23). Нормированная индикатриса (1.24) зависит только от μ и ν, т. е. величины ξ, β, λ взаимозаменяемы, причем ξ и λ входят в $\Phi(\mu, \nu)$ совершенно симметрично. Эта симметрия нарушается при вычислении индикатрисы $\overline{J}(\beta, \lambda)$, так как, согласно (1.16), сила света, рассеянного прямо вперед, зависит от величины $\lambda^2\xi^4$.

Итак, полидисперсная индикатриса $\overline{J}(\beta, \lambda)$, характеризующая структуру светового поля под малыми углами для дисперсной системы с распределением (1.14), определяется формулой (1.7), причем $\overline{J}(0, \lambda)$ вычисляется по (1.16), $\Phi(\mu, \nu)$ — по (1.24) и (1.25), а ν — по (1.23).

Описание строения светового поля под малыми углами, т. е. описание поведения функции $\overline{J}(\beta, \lambda)$, представляет собой исходный материал для оценок перепада интенсивностей в поле, для различных методов обращения с помощью подбора параметров распределения, а также служит основой для конструирования счетно-решающей приставки, использующей поиски гамма-структур для быстрого решения задачи обращения.

Определение $\overline{J}(\beta, \lambda)$ сводится к вычислению интеграла из (1.25). Имеющиеся таблицы в [4, 5] для $\varphi(\mu, \nu)$ не обеспечивают удовлетворительную интерполяцию этой функции по обеим переменным μ и ν. В § 2 дается обоснование схемы расчета функции $\varphi(\mu, \nu)$ и произведены некоторые прикидки. В § 3 описана опубликованная в [12] подробная таблица функции $\varphi(\mu, \nu)$ и дана оценка точности данных этой таблицы. Функции $\varphi(\mu, \nu)$ сосчитаны там для большего набора значений μ и ν [см. формулу (3.2)]. Выбор значений μ и ν определялся наличием асимптотических разложений, пригодных для вычисления $\varphi(\mu, \nu)$ [5—6][1]. В § 4 приведена приближенная формула расчета функции $\varphi(\mu, \nu)$ в случае почти монодисперсных систем, указана область применимости этой формулы. В § 5 изучается совокупность распределений из множества (1.14), для которой можно вычислять малоугольную полидисперсную индикатрису по полученным в работе таблицам и формулам.

§ 2. Использование квадратурной формулы наивысшей точности при расчете малоугольной индикатрисы

В § 1 было показано, что строение поля рассеяния под малыми углами зависит от характера функций $\varphi(\mu, \nu)$ из (1.25). В § 2 и 3 рассматриваются вопросы, связанные с табулированием функции $\varphi(\mu, \nu)$

[1] Вопросы, рассмотренные в § 2 и 3, более подробно изложены в [6, гл. 2].

с помощью квадратур наивысшей алгебраической степени точности (кнаст). Напомним основные положения, касающиеся кнаст [7].

Квадратурная формула

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R_n(f) \tag{2.1}$$

при фиксированной функции $p(x) \geqslant 0$ будет кнаст, если ее остаточный член

$$R_n(f) = 0 \tag{2.2}$$

для всех многочленов степени $\leqslant 2n-1$.

Сумма в правой части выражения (2.1) принимается в качестве приближенного значения интеграла, а $R_n(f)$ составляет абсолютную погрешность такого приближения.

Формула (2.1) будет кнаст, если узлы x_k есть корни многочлена

$$\omega_n(x) = (x - x_1)\,\ldots\,(x - x_n), \tag{2.3}$$

ортогонального по весу $p(x)$ ко всем многочленам степени $\leqslant n-1$. Коэффициенты кнаст определяются, так же как и для интерполяционной квадратуры, по формуле

$$A_k = \int_a^b p(x)\,\frac{\omega_n(x)\,dx}{(x - x_k)\,\omega_n'(x)}. \tag{2.4}$$

Как известно, в случае интерполяционной квадратуры узлы x_k в (2.1) произвольны, а формула (2.2) верна для многочленов степени $\leqslant n-1$.

Для кнаст справедливо равенство

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n)}(\eta)}{(2n)!}\int_a^b p(x)\,\omega_n^2(x)\,dx \quad (a \leqslant \eta \leqslant b), \tag{2.5}$$

позволяющее оценивать величину остаточного члена в (2.1).

Обратимся теперь к формулам (1.24) и (1.25). Положим в (1.25) $z = x\nu$ (т. е. $x = r\xi$). Тогда

$$\Phi(\mu, \nu) = \frac{4}{\nu^2\Gamma(\mu+5)}\,\psi(\mu+2, \nu), \quad \Phi(\mu, \nu) = \frac{\bar{J}(\beta, \lambda)}{\bar{J}(0, \lambda)}, \tag{2.6}$$

где

$$\psi(\mu, \nu) = \int_0^\infty x^{\mu} e^{-x} J_1^2(\nu x)\,dx, \quad \varphi(\mu, \nu) = \nu^{\mu+1}\,\psi(\mu, \nu). \tag{2.7}$$

При вычислении функции $\psi(\mu, \nu)$ в (2.1) естественно принять

$$p(x) = x^{\mu} e^{-x}; \quad a = 0, \quad b = \infty. \tag{2.8}$$

Тогда

$$\int_0^\infty x^{\mu} e^{-x} f(x)\,dx \simeq \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \quad \omega_n(x) = L_n^{(\mu)}(x), \tag{2.9}$$

где $L_n^{(\mu)}(x)$ — многочлены Лагерра,

$$L_n^{(\mu)}(x) = x^n - \frac{n}{1!}(n+\mu)\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}(n+\mu)(n+\mu-1)\,x^{n-2} - \ldots \tag{2.10}$$

В кнаст (2.9) за x_k следует применять корни многочлена (2.10), а A_k вычислять по формуле

$$A_k = \frac{n!\,\Gamma(n+\mu+1)}{x_k\left[L_n^{(\mu)'}(x_k)\right]^2}. \tag{2.11}$$

Оценка (2.5) для кнаст (2.9) имеет вид

$$R_n(f) = f^{(2n)}(\eta)\frac{n!\,\Gamma(n+\mu+1)}{(2n)!} \quad (0 \leqslant \eta < \infty). \tag{2.12}$$

Рассмотрим функцию $\psi(\mu, \nu)$ из (2.7). В этом случае кнаст (2.9) дает

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-x} J_1^2(\nu x)\,dx \simeq \sum_{k=1}^n A_k J_1^2(\nu x_k), \quad f(x) = J_1^2(\nu x). \tag{2.13}$$

Оценим точность кнаст (2.13), используя формулу (2.12). В первую очередь необходимо оценить $f^{(2n)}(x)$ для $f(x)$ из (2.13). Согласно [8, стр. 43], можно записать

$$J_1^2(x) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_0(2x\cos\theta)\cos 2\theta\,d\theta. \tag{2.14}$$

Учитывая известное представление

$$J_n(z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi \quad (n \geqslant 0,\ \text{целое}) \tag{2.15}$$

при $n=0$, по формуле (2.14) получаем

$$J_1^2(\nu x) = -\frac{4}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\theta \left\{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x\nu\cos\theta\sin\varphi)\,d\varphi\right\} d\theta. \tag{2.16}$$

Используя теорему о среднем и соотношения

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi\,d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}\varphi\,d\varphi = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}, \quad \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \simeq \frac{1}{\sqrt{\pi n}}, \tag{2.17}$$

находим

$$\left|\frac{d^{2n}J_1^2(\nu x)}{dx^{2n}}\right| < \frac{(2\nu)^{2n}}{\pi n}, \quad 0 \leqslant x < \infty. \tag{2.18}$$

Согласно (2.12), (2.13) и (2.18), учитывая формулу Стирлинга, получаем

$$|R_n(f)| < \frac{(2\nu)^{2n} n!\,\Gamma(n+\mu+1)}{\pi n\,(2n)!} \simeq \frac{(n+\mu)^{\mu+\frac{1}{2}}\nu^{2n}}{\sqrt{\pi}\,n}. \tag{2.19}$$

В частности,

$$|R_n(f)| < \frac{\nu^{2n}}{\sqrt{\pi n}} \quad (\mu = 0). \tag{2.20}$$

З а м е ч а н и е. Оценку (2.18) можно уточнить. Для этого следует разложить $\cos(2x\nu\cos\theta\sin\varphi)$ в ряд Тэйлора, затем провести почленное интегрирование в (2.16), использовать соотношения (2.17) и равенство

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!\,(k+n)} = \frac{2}{y^{2n}} \int_0^y x^{2n-1} \cos 2x\, dx\,. \tag{2.21}$$

Таким образом, формула (2.19) дает оценку $R_n(f)$ — абсолютной погрешности кнаст (2.13). Относительная ошибка приближенной формулы (2.13) может быть найдена после проведения расчетов по этой формуле.

В случае $n=2$ значения узлов x_k и коэффициентов A_k в кнаст (2.9) легко вычисляются. Положим

$$\alpha = \mu + 2\,. \tag{2.22}$$

Используя формулы (2.9)—(2.11), находим

$$L_2^{(\mu)}(x) = x^2 - 2\alpha x + \alpha(\alpha - 1)\,; \tag{2.23}$$

$$x_1 = \alpha - \sqrt{\alpha}, \quad x_2 = \alpha + \sqrt{\alpha}; \quad A_1 = \frac{\Gamma(\alpha)}{2(\alpha - \sqrt{\alpha})}, \quad A_2 = \frac{\Gamma(\alpha)}{2(\alpha + \sqrt{\alpha})}. \tag{2.24}$$

Значит, кнаст (2.9) при $n=2$ имеет вид

$$\int_0^{\infty} x^{\mu} e^{-x} f(x)\, dx \simeq \frac{\Gamma(\alpha)}{2} \left\{ \frac{f(\alpha - \sqrt{\alpha})}{\alpha - \sqrt{\alpha}} + \frac{f(\alpha + \sqrt{\alpha})}{\alpha + \sqrt{\alpha}} \right\}, \tag{2.25}$$

где α определяется формулой (2.22). По формуле (2.13), представляющей частный случай кнаст (2.9), можно приближенно вычислить $\psi(\mu, \nu)$ из (2.7), а затем определить нормированную индикатрису $\Phi(\beta) \equiv \Phi(\mu, \nu)$ по (2.6). Согласно (1.24) и (1.25), эту функцию можно вычислять и с помощью $\varphi(\mu, \nu)$. Хотя первый способ определения $\Phi(\mu, \nu)$ естественнее, остановимся на втором. Дело в том, что в ряде работ (например, [4, 5]) рассматривалась функция

$$\varphi_k(\mu) = \int_0^{\infty} z^k e^{-\mu z} J_1^2(z)\, dz\,, \tag{2.26}$$

которая связана с $\varphi(\mu, \nu)$ из (1.25) соотношением

$$\varphi_k(\mu) \equiv \varphi\left(k, \frac{1}{\mu}\right) \quad (k \to \mu, \ \mu \to \nu^{-1})\,. \tag{2.27}$$

Кроме того, функции $\varphi(\mu, \nu)$ удобнее функции $\psi(\mu, \nu)$ при проведении некоторых преобразований и оценок (например, при переходе к малоугольной индикатрисе для почти монодисперсных систем).

Используя формулы (2.7) и (2.25), получаем:

$$\varphi(\mu, \nu) \simeq \frac{\Gamma(\alpha)\, \nu^{\alpha-1}}{2} \left\{ \frac{J_1^2\left[\nu(\alpha - \sqrt{\alpha})\right]}{\alpha - \sqrt{\alpha}} + \frac{J_1^2\left[\nu(\alpha + \sqrt{\alpha})\right]}{\alpha + \sqrt{\alpha}} \right\}, \tag{2.28}$$

где $\varphi(\mu, \nu)$ определено в (1.25), а α — в (2.22).

В табл. 2 приведены значения $\varphi(\mu, \nu)$, заимствованные из [5], с учетом соотношения (2.27) (первая строка) и вычисленные по кнаст (2.28) (вторая строка). Из табл. 2 видно, что с ростом произведения $\mu\nu$ точность кнаст (2.28) ухудшается, причем при $\nu \geqslant 1$ формула (2.28) становится неудовлетворительной. Такое же заключение вытекает и из общей ооценки формулы (2.28) [см. (2.19) при $n=2$].

Таблица 2

Функции $\varphi(\mu, \nu)$

ν	μ = 0	1	2	3	4	5	6	7
0,20	2,9 (—3)	2,1 (—3)	1,5 (—3)	1,3 (—3)	1,4 (—3)	1,7 (—3)	2,3 (—3)	3,4 (—3)
	3,6 (—3)	2,0 (—3)	1,5 (—3)	1,3 (—3)	1,3 (—3)	1,6 (—3)	2,2 (—3)	3,3 (—3)
	3,5 (—3)	2,0 (—3)	1,5 (—3)	1,3 (—3)	1,4 (—3)	1,7 (—3)	2,3 (—3)	3,5 (—3)
0,25	8,5 (—3)	4,0 (—3)	3,9 (—3)	4,1 (—3)	5,1 (—3)	7,2 (—3)	1,1 (—2)	1,9 (—2)
	6,7 (—3)	4,4 (—3)	3,8 (—3)	4,0 (—3)	5,1 (—3)	6,8 (—3)	1,0 (—2)	2,0 (—2)
	6,6 (—3)	4,5 (—3)	3,9 (—3)	4,2 (—3)	5,2 (—3)	7,4 (—3)	1,2 (—2)	2,1 (—2)
0,40	2,3 (—2)	2,0 (—2)	2,4 (—2)	3,5 (—2)	5,7 (—2)	1,1 (—1)	2,1 (—1)	4,8 (—1)
	2,1 (—2)	1,9 (—2)	2,2 (—2)	3,1 (—2)	5,4 (—2)	1,1 (—1)	2,7 (—1)	6,9 (—1)
	2,2 (—2)	2,1 (—2)	2,6 (—2)	3,8 (—2)	6,1 (—2)	1,1 (—1)	1,9 (—1)	3,0 (—1)
0,50	3,7 (—2)	3,8 (—2)	5,2 (—2)	8,3 (—2)	1,5 (—1)	3,1 (—1)	7,3 (—1)	2,0 (0)
	3,4 (—2)	3,2 (—2)	4,3 (—2)	7,9 (—2)	1,8 (—1)	4,2 (—1)	1,1 (0)	2,0 (0)
	3,7 (—2)	4,1 (—2)	5,7 (—2)	8,7 (—2)	1,4 (—1)	1,9 (—1)	1,4 (—1)	4,6 (—3)
1,00	1,3 (—1)	1,8 (—1)	3,3 (—1)	7,9 (—1)	2,1 (0)	8,0 (0)	3,8 (+1)	2,3 (+2)
	7,2 (—2)	2,3 (—1)	5,4 (—1)	7,8 (—1)	7,5 (—1)	3,5 (0)	6,2 (+1)	3,4 (+2)
	1,3 (—1)	1,0 (—1)	2,5 (—1)	1,6 (—1)	2,2 (0)	7,8 (0)	1,7 (+1)	1,5 (+2)
1,25	1,7 (—1)	2,7 (—1)	5,3 (—1)	1,4 (0)	5,0 (0)	2,4 (+1)	1,5 (+2)	1,1 (+3)
	1,3 (—1)	4,2 (—1)	7,4 (—1)	4,8 (—1)	2,5 (0)	4,4 (+1)	6,6 (+1)	7,8 (+2)
	1,2 (—1)	2,9 (—2)	1,2 (—1)	1,3 (0)	1,5 (0)	8,3 (+1)	2,0 (+2)	6,1 (+2)

Примечание. В табл. 2—5 числа приведены в «нормальной» форме. Имеем, например: $1{,}25(-2) = 1{,}25 \cdot 10^{-2}$; $3{,}17(+3) = 3{,}17 \cdot 10^{3}$, $2{,}2(0) = 2{,}2$. Символ (0) часто опускается в записи.

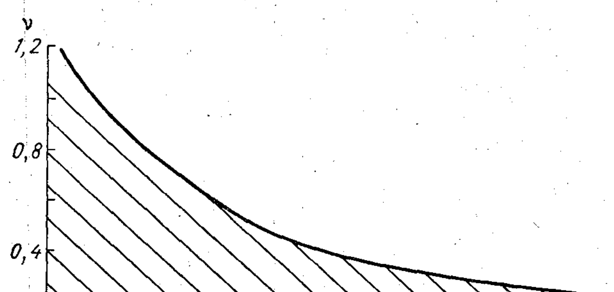

Рис. 2. Область значений μ, ν, для которых годны формулы (2.28) и (2.30).

В [9] рекомендуется при использовании кнаст вида (2.1) функцию $f(x)$ выбирать так, чтобы $f(0) \neq 0$. С этой целью, учитывая (1.9), положим в (2.25)

$$f(x) = x^{-2} J_1^2(\nu x). \tag{2.29}$$

Имеем

$$\varphi(\mu, \nu) \simeq \frac{\Gamma(\gamma)\,\nu^{\gamma-3}}{2} \left\{ \frac{J_1^2[\nu(\gamma - \sqrt{\gamma})]}{(\gamma - \sqrt{\gamma})^3} + \frac{J_1^2[\nu(\gamma + \sqrt{\gamma})]}{(\gamma + \sqrt{\gamma})^3} \right\}, \quad \gamma = \mu + 4. \tag{2.30}$$

Значения $\varphi(\mu, \nu)$, найденные по формуле (2.30), также приведены в табл. 2 (третья строка). Таблица 2 показывает, что в рассматриваемом случае при $n=2$ формулы (2.28) и (2.30) дают примерно одинаковую точность. На рис. 2 заштрихована область плоскости μ, ν, в которой правые части формул (2.28) и (2.30) можно рассматривать как первое приближение к функции $\varphi(\mu, \nu)$.

В [9] приведены таблицы значений узлов x_k и коэффициентов A_k (при различных n) кнаст (2.9) для большего набора μ. К сожалению, в [9] не охвачен интересующий нас диапазон значений μ. Поэтому приходится использовать (2.9) при $\mu=0$, т. е. производить вычисления по кнаст вида

$$\int_0^\infty e^{-x} f(x)\, dx \simeq \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{2.31}$$

полагая здесь

$$f(x) = x^\mu J_1^2(\nu x). \tag{2.32}$$

§ 3. Таблицы малоугольной индикатрисы для гамма-структур

В [7] приведены таблицы узлов x_k и коэффициентов A_k кнаст (2.31) для $n=1(1)15$. Используя эти данные при $n=15$, на М-20 были проведены расчеты функции

$$\varphi(\mu, \nu) = \int_0^\infty x^\mu e^{-\frac{x}{\nu}} J_1^2(x)\, dx = \nu^{\mu+1} \int_0^\infty x^\mu e^{-x} J_1^2(\nu x)\, dx \simeq$$
$$\simeq \nu^{\mu+1} \sum_{k=1}^{15} A_k x_k^\mu J_1^2(\nu x_k). \tag{3.1}$$

Здесь использованы формулы (1.25), (2.7), (2.31) и (2.32). Расчеты $\varphi(\mu, \nu)$ производились для значений параметров

$$\mu = 0\,(0{,}2)\,13, \quad \nu = 0\,(0{,}05)\,1. \tag{3.2}$$

Результаты вычислений приведены в таблицах работы [12]. Для контроля точности этих таблиц были (численным интегрированием с большим количеством ординат) вычислены значения функции $\varphi(12, \nu)$ при $\nu=0{,}20$, $0{,}35$, $0{,}50$ и $0{,}70$. В табл. 3 сопоставлены значения $\varphi(12, \nu)$, найденные по таблицам работы [12] (столбец I) и численным интегрированием (столбец II). Совпадение получается удовлетворительным.

Таблица 3

Функции φ (12, ν)

ν	I	II
0,20	8,10 (—2)	8,08 (—2)
0,35	3,98 (+1)	3,96 (+1)
0,50	3,17 (+3)	3,15 (+3)
0,70	1,94 (+5)	1,93 (+5)

Кроме того, в табл. 4 выполнено сравнение значений $\varphi_k(\mu)$, вычисленных в [5] (первая строка), со значениями $\varphi(\mu, \nu)$ из таблиц [12] (вторая строка). Напомним, что $\varphi_k(\mu)$ и $\varphi(\mu, \nu)$ связаны соотношениями (2.27). И здесь совпадение обеих групп данных следует признать удовлетворительным.

Таблица 4

Функции φ (μ, ν)

ν	μ = 0	1	2	3	4	5	6	7
0,20	2,94 (—3) 3,57 (—3)	2,12 (—3) 1,99 (—3)	1,45 (—3) 1,46 (—3)	1,30 (—3) 1,31 (—3)	1,40 (—3) 1,38 (—3)	1,67 (—3) 1,67 (—3)	2,27 (—3) 2,28 (—3)	3,42 (—3) 3,43 (—3)
0,25	8,54 (—3) 6,59 (—3)	4,04 (—3) 4,42 (—3)	3,87 (—3) 3,86 (—3)	4,12 (—3) 4,11 (—3)	5,11 (—3) 5,12 (—3)	7,25 (—3) 7,25 (—3)	1,14 (—2) 1,14 (—2)	1,94 (—2) 1,98 (—2)
0,40	2,30 (—2) 2,17 (—2)	2,00 (—2) 2,05 (—2)	2,42 (—2) 2,46 (—2)	3,50 (—2) 3,50 (—2)	5,73 (—2) 5,74 (—2)	1,05 (—1) 1,05 (—1)	2,13 (—1) 2,14 (—1)	4,80 (—1) 4,82 (—1)
0,50	3,66 (—2) 3,59 (—2)	3,84 (—2) 3,87 (—2)	5,21 (—2) 5,22 (—2)	8,29 (—2) 8,31 (—2)	1,52 (—1) 1,51 (—1)	3,12 (—1) 3,12 (—1)	7,29 (—1) 7,30 (—1)	2,00 (0) 1,98 (0)
1,00	1,26 (—1) 1,25 (—1)	1,82 (—1) 1,82 (—1)	3,30 (—1) 3,30 (—1)	7,90 (—1) 7,44 (—1)	2,11 (0) 2,15 (0)	7,95 (0) 8,04 (0)	3,84 (+1) 3,70 (+1)	2,26 (+2) 1,95 (+2)

Кнаст (3.1) позволяет вычислять функцию $\varphi(\mu, \nu)$ в полосе

$$0<\nu<1. \tag{3.3}$$

Таблица в работе [12], составленная по формуле (3.1), обеспечивает удовлетворительную интерполяцию функции $\varphi(\mu, \nu)$ по обеим переменным μ и ν в области

$$0\leqslant\mu\leqslant 13, \quad 0\leqslant\nu\leqslant 1, \tag{3.4}$$

определяемой набором значений (3.2) (см. § 4 настоящей статьи).

Для иллюстрации получающихся здесь результатов приведена табл. 5. В ней содержатся отдельные значения $\Phi(\beta)$ для трех типов

Таблица 5

Функции Φ (μ, ν)

ν	Φ (2, ν)	Φ (5, ν)	Φ (10, ν)
0,00	1,00	1,00	1,00
1,25 (—2)	9,99 (—1)	9,96 (—1)	9,91 (—1)
2,00 (—2)	9,95 (—1)	9,89 (—1)	9,76 (—1)
2,50 (—2)	9,92 (—1)	9,83 (—1)	9,63 (—1)
5,00 (—2)	9,66 (—1)	9,34 (—1)	8,62 (—1)
1,00 (—1)	8,73 (—1)	7,68 (—1)	5,54 (—1)
1,25 (—1)	8,13 (—1)	6,79 (—1)	3,94 (—1)
2,00 (—1)	5,99 (—1)	3,68 (—1)	1,13 (—1)
2,50 (—1)	4,65 (—1)	2,24 (—1)	5,80 (—2)
5,00 (—1)	1,08 (—1)	2,26 (—2)	4,72 (—3)
1,00	1,17 (—2)	2,49 (—3)	5,83 (—4)
1,25	5,83 (—3)	1,27 (—3)	3,00 (—4)

гамма-структур: $\mu=2$, $\mu=5$ и $\mu=10$. Переход от нормированной индикатрисы $\Phi(\beta)$ к размерной полидисперсной индикатрисе $\bar{I}(\beta, \lambda)$ для распределения (1.14) производится по формулам (1.7) и (1.16).

§ 4. Случай почти монодисперсных систем

Используя результаты [3], можно (при $\mu > 1$) разложить интеграл

$$\int_0^\infty a^{\mu+2} e^{-\tau a} J_1^2(ya)\, da, \quad \tau = \sqrt{(\mu+1)(\mu+2)} \tag{4.1}$$

в ряд по степеням $\frac{1}{\mu}$. Нетрудно доказать, что это разложение представляет собой абсолютно сходящийся ряд в области

$$y < \frac{\tau}{2}. \tag{4.2}$$

Ограничиваясь двумя первыми членами разложения, получаем

$$\int_0^\infty a^{\mu+2} e^{-\tau a} J_1^2(ay)\, da = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\tau^{\mu+1}} \left\{ J_1^2(y) + \frac{y^2 \left[J_0^2(y) - J_1^2(y)\right]}{\mu} + 0\left(\frac{1}{\mu^2}\right)\right\}. \tag{4.3}$$

Перейдем в формуле (4.3) к функции $\varphi(\mu, \nu)$ из (1.25). Для этого положим $z = ay$ (z — новая переменная интегрирования), заменим $\mu+2$ на μ и введем обозначение

$$\nu = \frac{y}{\tau}. \tag{4.4}$$

Имеем

$$\varphi(\mu, \nu) \simeq (\mu-2)!\, \nu^{\mu-1} u^4 \left\{ \frac{J_1^2(u)}{u^2} + \frac{J_0^2(u) - J_1^2(u)}{\mu-2} \right\}, \quad \mu \gg 1. \tag{4.5}$$

Здесь положено

$$u = \sqrt{(\mu-1)\mu}\, \nu. \tag{4.6}$$

Условие $\mu \gg 1$ определяет близость соответствующего спектра (1.14) к монодисперсному. Формула (4.5) представляет собой отрезок степенного ряда по $(\mu-2)^{-1}$, который заведомо абсолютно сходится, если

$$\mu > 3, \quad 0 \leqslant \nu < 0{,}5. \tag{4.7}$$

Расчеты показывают, что формула (4.5) дает ошибку порядка 10—15% в области

$$\mu \geqslant 5, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant 0{,}10 \div 0{,}20. \tag{4.8}$$

Конкретное значение верхней границы ν в (4.8) зависит от μ. Существенно, что уже $\mu = 5$ является достаточно большим для формулы (4.5).

§ 5. Область применимости полученных результатов

Полученные выше таблицы и формулы для вычисления малоугольной индикатрисы работают при определенных ограничениях [см., например, (3.3) и (4.8)]. Существенно выяснить, позволяют ли указанные ограничения определять силу света, рассеянного под такими углами β, которые охватывают основную часть области дифракции.

Поток энергии частиц с распределением $f^*(r)$, содержащийся внутри конуса с углом раствора β^* (см. рис. 3), определяется, согласно равенству (1.8), формулой

$$G(\beta^*) = I_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\beta^*} \frac{\sin\beta}{\beta}\, d\beta \int_0^\infty r^2 J_1^2(\rho\beta)\, f^*(r)\, dr. \tag{5.1}$$

Почти весь дифрагированный свет сосредоточен в малом угле β^* [1]. Полагая

$$\sin\beta \simeq \beta \quad (0 \leqslant \beta \leqslant \beta^*), \tag{5.2}$$

находим

$$G(\beta^*) = 2\pi I_0 \int_0^\infty r^2 f^*(r)\, dr \int_0^{\beta^*} J_1^2(\rho\beta) \frac{d\beta}{\beta}. \tag{5.3}$$

Внутренний интеграл в (5.3) берется непосредственно. Имеем из [1]

$$2\int_0^{\beta^*} J_1^2(\rho\beta)\frac{d\beta}{\beta} = \psi(\rho\beta^*), \tag{5.4}$$

где

$$\psi(z) = 1 - J_0^2(z) - J_1^2(z). \tag{5.5}$$

Используя (1.5) и определение $\bar{r}_2$, имеем

$$\int_0^\infty r^2 f^*(r)\, dr = \bar{r}_2^2 N \tag{5.6}$$

Из (5.3)—(5.6) получаем

$$G(\beta^*) = N I_0 \pi \bar{r}_2^2 \Bigg\{1 - \frac{1}{N\bar{r}_2^2}\int_0^\infty r^2 f^*(r)\left[J_0^2(\rho\beta^*) + J_1^2(\rho\beta^*)\right] dr\Bigg\}. \tag{5.7}$$

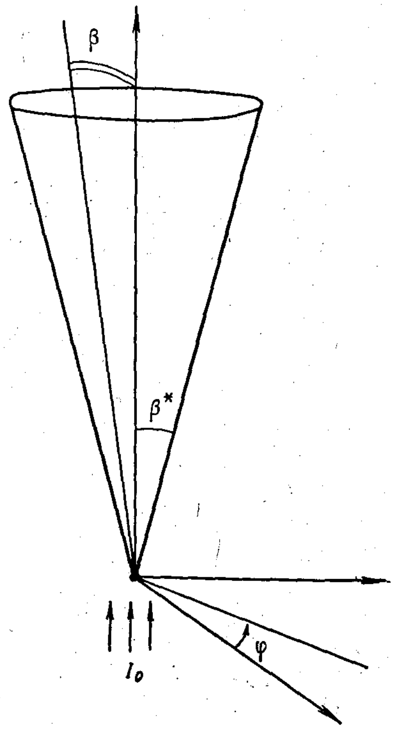

Рис. 3. Поток энергии внутри конуса с углом раствора β^*.

Для монодисперсного случая с $r = \bar{r}_2$ функция $f^*(r)$ вырождается в $N\delta(r - \bar{r}_2)$, и формула (5.7) в соответствии с [1] имеет вид

$$G_\mu(\beta^*) = N I_0 \pi \bar{r}_2^2 \psi(\bar{\rho}_2\beta^*), \quad \bar{\rho}_2 = \frac{2\pi\bar{r}_2}{\lambda}. \tag{5.8}$$

Пусть распределение частиц задано гамма-структурой (1.14). Подставим (1.14) в (5.7) и перейдем к безразмерной переменной

$$a = \frac{r}{\bar{r}_2}. \tag{5.9}$$

Имеем

$$G_\mu(\beta^*) = N I_0 \pi \bar{r}_2^2 \left\{1 - \frac{\tau^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)}\int_0^\infty a^{\mu+2} e^{-\tau a}\left[J_0^2(\rho\beta^*) + J_1^2(\rho\beta^*)\right] da\right\}, \tag{5.10}$$

где

$$\tau = \sqrt{(\mu+1)(\mu+2)}. \tag{5.11}$$

Перейдем к дифракционному углу рассеяния ν. Согласно (1.18) и (1.23),

$$\nu = \frac{\bar{\rho}_2 \beta}{\tau} \tag{5.12}$$

где $\bar{\rho}_2$ дается формулой (5.8), а τ — (5.11). Заметим, что величина $\bar{\rho}_2$ характеризует дифракционный характер задачи, а τ — степень полидисперсности системы; величина ν для полидисперсной системы играет ту же роль, что и величина z для монодисперсной [1].

Пусть $\nu = \nu^*$ соответствует $\beta = \beta^*$. Тогда

$$\rho\beta^* = \nu^* \tau a . \tag{5.13}$$

Используя (5.13), перепишем (5.10) и (5.8) в виде (смысл измененных обозначений очевиден)

$$G_\mu(\nu^*) = N I_0 \pi \bar{r}_2^2 \left\{ 1 - \frac{\tau^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)} \int\limits_0^\infty a^{\mu+2} e^{-\tau a} \left[J_0^2(a\tau\nu^*) + J_1^2(a\tau\nu^*) \right] da \right\}; \tag{5.14^1}$$

$$G_\infty(\nu^*) = N I_0 \pi \bar{r}_2^2 \psi(\tau\nu^*) . \tag{5.15}$$

Отношение потоков энергии в дифракционном угле ν^* для структуры (1.14) и соответствующей монодисперсной системы ($r = \bar{r}_2$, N — общее) в силу (5.4), (5.5), (5.14) и (5.15) описывается формулой

$$\frac{G_\mu(\nu^*)}{G_\infty(\nu^*)} = \frac{1 - \dfrac{\tau^{\mu+1}}{\Gamma(\mu+1)} \displaystyle\int\limits_0^\infty a^{\mu+2} e^{-\tau a} \left[J_0^2(a\tau\nu^*) + J_1^2(a\tau\nu^*) \right] da}{1 - J_0^2(\tau\nu^*) - J_1^2(\tau\nu^*)} . \tag{5.16}$$

В первом приближении долю дифрагированного света, соответствующую неравенству

$$\nu \leqslant \nu_0 , \tag{5.17}$$

можно определить исходя из функции $\psi(z)$ (5.5), описывающей монодисперсный случай.

Будем для определенности рассматривать гамма-структуры (1.14). Согласно (5.12), (1.19), (5.9), (5.11) и (5.17), находим

$$z \leqslant a \sqrt{(\mu+1)(\mu+2)}\, \nu_0 . \tag{5.18}$$

В случае полидисперсной системы величина a (5.9) может принимать произвольные значения. При переходе от формулы (1.6) к (1.8) было указано, что развитая теория применима в предположении пренебрежимости относительной доли мелких частиц. Будем предполагать, что $a \geqslant a_\mu$. Это означает, что интегрирование в (1.8) фактически ведется от

$$r_\mu = a_\mu \bar{r}_2 , \tag{5.19}$$

т. е. участок мелких частиц $(0, r_\mu)$ при вычислении интеграла (1.8) дает пренебрежимо малый вклад.

Из (1.8) и (1.14) следует

$$\frac{da_\mu}{d\mu} > 0 , \quad \lim_{\mu \to \infty} a_\mu = 1 . \tag{5.20}$$

[1] Формулу (5.14) можно упростить с помощью замены $x = a\tau$.

С помощью формулы для ширины гамма-спектров [11] можно обосновать приближенную оценку для a_μ снизу:

$$a_\mu \geqslant 0{,}5 \quad (\mu \geqslant 0). \tag{5.21}$$

Из формул (5.18) и (5.19) следует, что наибольшее возможное $z=z_0$ для структур (1.14), при условии $\nu \leqslant \nu_0$ определяется равенством

$$z_0 = a_\mu \nu_0 \sqrt{(\mu+1)(\mu+2)} \simeq (\mu+1{,}5)\, a_\mu \nu_0 . \tag{5.22}$$

В соответствии с (1.19) введем угол β_0

$$z_0 = \frac{2\pi r_\mu}{\lambda} \beta_0 . \tag{5.23}$$

Величины r_μ и a_μ связаны равенством (5.19), причем a_μ описывается соотношениями (5.20) и (5.21).

Функция $\psi(z)$ для $z=z_0$ из (5.22) определяет учитываемую долю (относительно единицы) дифрагированного света, соответствующую условию (5.17). Аналитическое выражение $\psi(z)$ дается формулой (5.5), отдельные значения этой функции приведены в табл. 6, заимствованной из [1].

Таблица 6

z	0	3,832	5,136	7,016	8,417	10,17	11,62	13,32
$\psi(z)$	0	0,838	0,867	0,910	0,923	0,938	0,945	0,952

При использовании таблиц работы [12], согласно (3.3), (5.21) и (5.22), имеем

$$z_0 \simeq 0{,}5\,(\mu+1{,}5). \tag{5.24}$$

Из табл. 6 и формулы (5.24) видно, что при $\mu \geqslant 4$ таблица работы [12] охватывает почти весь существенный набор углов рассеяния β. Таким образом, при $\mu \geqslant 4$ таблица [12] позволяет вычислять силу рассеянного света во всех тех направлениях, где дифракцией пренебречь нельзя.

Ограничение на μ сверху (3.4) исключает только весьма узкие распределения, для которых удобнее использовать результаты § 4. В этом случае $\nu_0 \simeq 0{,}15$ и формула (5.22) дает

$$z_0 \simeq 0{,}15\,(\mu+1{,}5)\, a_\mu . \tag{5.25}$$

Если принять $a_\mu \simeq 0{,}5$ (5.21), то в силу (5.25) формулы § 4 описывают весь существенный набор углов рассеяния β, начиная лишь с $\mu \simeq 40$. Однако уже при $\mu \simeq 15$ можно считать $a_\mu \simeq 0{,}8$. Соответствующим образом уточненная оценка показывает, что формулы § 4 практически полностью описывают дифракционные явления при $\mu \geqslant 20$.

В заключение подчеркнем, что выводы, полученные в статье, позволяют вычислять силу рассеянного света под углами $\beta \leqslant \beta_0$ для произвольных μ, если β_0 определять из формул (5.22) и (5.23). Приведенные выше рассуждения были посвящены вопросу полного описания картины дифракции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде. Гостехиздат, 1951.
2. Шифрин К. С., Перельман А. Я. Определение спектра частиц дисперсной системы по данным о ее прозрачности. Проверка метода на теоретических моделях. Случай почти монодисперсных систем. Опт. и спектр., т. 20, вып. 1, 1966.
3. Шифрин К. С., Перельман А. Я. Спектральная прозрачность почти монодисперсных систем. Труды ГГО, вып. 170, 1965.

4. Шифрин К. С. Вычисление некоторого класса определенных интегралов, содержащих квадрат бесселевой функции первого порядка. Труды ВЗЛТИ, № 2, 1956.
5. Шифрин К. С., Новосельцев Е. П. Исследование некоторого класса определенных интегралов, содержащих квадрат бесселевой функции первого порядка Труды ГГО, вып. 100, 1960.
6. Шифрин К. С., Айвазян Г. М. Влияние индикатрисы на прозрачность. Труды ГГО, вып. 153, 1963.
7. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз, М., 1959.
8. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. ИЛ, 1949.
9. Айзенштат В. С., Крылов В. И., Метельский А. С. Таблицы для численного преобразования Лапласа и вычисления интегралов вида $\int\limits_0^\infty x^s e^{-x} f(x)\,dx$. Изд. АН БССР, Минск, 1962.
10. Шифрин К. С., Перельман А. Я. Обращение индикатрисы для мягких частиц. ДАН, 158, № 3, 1964.
11. Шифрин К. С. О расчете микроструктуры. Труды ГГО, вып. 109, 1961.
12. Шифрин К. С., Перельман А. Я., Пунина В. А. Таблицы для вычисления малоугольной индикатрисы. См. наст. сб.

К. С. ШИФРИН, А. Я. ПЕРЕЛЬМАН, В. А. ПУНИНА

ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ МАЛОУГОЛЬНОЙ ИНДИКАТРИСЫ

Дана формула, к которой сводится вычисление малоугольной индикатрисы. Указан метод расчета индикатрисы и приведена соответствующая таблица.

В работе [1] показано, что структура светового поля под малыми углами полностью описывается с помощью функции

$$\varphi(\mu, \nu) = \int_0^\infty z^\mu e^{-\frac{z}{\nu}} J_1^2(z)\, dz\,. \tag{1}$$

В приложении приведены таблицы $\varphi(\mu, \nu)$, сосчитанные по квадратуре наивысшей алгебраической степени точности для следующих значений μ и ν:

$$\mu = 0\,(0{,}2)\,13, \quad \nu = 0\,(0{,}05)\,1\,. \tag{2}$$

Расчеты производились на М-20 по формуле из [1]

$$\varphi(\mu, \nu) \simeq \nu^{\mu+1} \sum_{k=1}^{15} A_k x_k^\mu J_1^2(\nu x_k)\,. \tag{3}$$

Значения узлов x_k и коэффициентов A_k ($k=1, \ldots, 15$) были заимствованы из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин К. С., Перельман А. Я., Пунина В. А. Структура светового поля под малыми углами. См. наст. сб.
2. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз., М., 1959.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица функции φ (μ, ν)

μ	ν = 0	0,05	0,10	0,15	0,20
0	0	6,204 (−5)	4,854 (−4)	1,581 (−3)	3,573 (−3)
0,2	0	4,126 (−5)	3,699 (−4)	1,301 (−3)	3,097 (−3)
0,4	0	2,785 (−5)	2,860 (−4)	1,086 (−3)	2,722 (−3)
0,6	0	1,914 (−5)	2,241 (−4)	9,186 (−4)	2,424 (−3)
0,8	0	1,326 (−5)	1,778 (−4)	7,867 (−4)	2,185 (−3)
1,0	0	9,240 (−6)	1,428 (−4)	6,816 (−4)	1,992 (−3)
1,2	0	6,596 (−6)	1,160 (−4)	5,971 (−4)	1,835 (−3)
1,4	0	5,430 (−6)	9,517 (−5)	5,284 (−4)	1,708 (−3)
1,6	0	3,932 (−6)	7,889 (−5)	4,723 (−4)	1,605 (−3)
1,8	0	2,505 (−6)	6,602 (−5)	4,260 (−4)	1,522 (−3)
2,0	0	1,848 (−6)	5,575 (−5)	3,878 (−4)	1,459 (−3)
2,2	0	1,376 (−6)	4,749 (−5)	3,559 (−4)	1,403 (−3)
2,4	0	1,053 (−6)	4,079 (−5)	3,293 (−4)	1,363 (−3)
2,6	0	7,822 (−7)	3,531 (−5)	3,070 (−4)	1,334 (−3)
2,8	0	5,969 (−7)	3,081 (−5)	2,884 (−4)	1,315 (−3)
3,0	0	4,588 (−7)	2,707 (−5)	2,729 (−4)	1,305 (−3)
3,2	0	3,552 (−7)	2,396 (−5)	2,599 (−4)	1,304 (−3)
3,4	0	2,769 (−7)	2,144 (−5)	2,492 (−4)	1,311 (−3)
3,6	0	2,173 (−7)	1,925 (−5)	2,405 (−4)	1,326 (−3)
3,8	0	1,716 (−7)	1,736 (−5)	2,335 (−4)	1,350 (−3)

μ	ν = 0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0	6,586 (−3)	1,065 (−2)	1,572 (−2)	2,170 (−2)	2,849 (−2)
0,2	5,929 (−3)	9,870 (−3)	1,491 (−2)	2,096 (−2)	2,793 (−2)
0,4	5,412 (−3)	9,270 (−3)	1,432 (−2)	2,050 (−2)	2,772 (−2)
0,6	5,002 (−3)	8,815 (−3)	1,392 (−2)	2,028 (−2)	2,782 (−2)
0,8	4,679 (−3)	8,478 (−3)	1,368 (−2)	2,029 (−2)	2,822 (−2)
1,0	4,425 (−3)	8,242 (−3)	1,359 (−2)	2,050 (−2)	2,890 (−2)
1,2	4,228 (−3)	8,093 (−3)	1,363 (−2)	2,090 (−2)	2,987 (−2)
1,4	4,079 (−3)	8,022 (−3)	1,379 (−2)	2,150 (−2)	3,114 (−2)
1,6	3,972 (−3)	8,022 (−3)	1,408 (−2)	2,230 (−2)	3,272 (−2)
1,8	3,901 (−3)	8,090 (−3)	1,448 (−2)	2,331 (−2)	3,464 (−2)
2,0	3,864 (−3)	8,228 (−3)	1,502 (−2)	2,455 (−2)	3,694 (−2)
2,2	3,857 (−3)	8,422 (−3)	1,568 (−2)	2,603 (−2)	3,965 (−2)
2,4	3,879 (−3)	8,687 (−3)	1,649 (−2)	2,778 (−2)	4,284 (−2)
2,6	3,929 (−3)	9,022 (−3)	1,745 (−2)	2,984 (−2)	4,656 (−2)
2,8	4,006 (−3)	9,430 (−3)	1,859 (−2)	3,225 (−2)	5,091 (−2)
3,0	4,112 (−3)	9,919 (−3)	1,991 (−2)	3,505 (−2)	5,597 (−2)
3,2	4,248 (−3)	1,050 (−2)	2,146 (−2)	3,830 (−2)	6,187 (−2)
3,4	4,414 (−3)	1,117 (−2)	2,324 (−2)	4,207 (−2)	6,874 (−2)
3,6	4,613 (−3)	1,195 (−2)	2,531 (−2)	4,644 (−2)	7,675 (−2)
3,8	4,847 (−3)	1,285 (−2)	2,770 (−2)	5,152 (−2)	8,611 (−2)

μ	ν 0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
0	3,593 (−2)	4,392 (−2)	5,233 (−2)	6,106 (−2)	7,002 (−2)
0,2	3,567 (−2)	4,406 (−2)	5,297 (−2)	6,228 (−2)	7,191 (−2)
0,4	3,583 (−2)	4,472 (−2)	5,423 (−2)	6,425 (−2)	7,467 (−2)
0,6	3,640 (−2)	4,587 (−2)	5,611 (−2)	6,697 (−2)	7,834 (−2)
0,8	3,735 (−2)	4,753 (−2)	5,863 (−2)	7,048 (−2)	8,297 (−2)
1,0	3,869 (−2)	4,971 (−2)	6,182 (−2)	7,485 (−2)	8,866 (−2)
1,2	4,044 (−2)	5,244 (−2)	6,574 (−2)	8,015 (−2)	9,553 (−2)
1,4	4,261 (−2)	5,578 (−2)	7,047 (−2)	8,651 (−2)	1,037 (−1)
1,6	4,526 (−2)	5,978 (−2)	7,610 (−2)	9,407 (−2)	1,135 (−1)
1,8	4,842 (−2)	6,452 (−2)	8,278 (−2)	1,030 (−1)	1,251 (−1)
2,0	5,216 (−2)	7,012 (−2)	9,066 (−2)	1,136 (−1)	1,388 (−1)
2,2	5,657 (−2)	7,671 (−2)	9,992 (−2)	1,261 (−1)	1,550 (−1)
2,4	6,173 (−2)	8,443 (−2)	1,108 (−1)	1,408 (−1)	1,742 (−1)
2,6	6,777 (−2)	9,349 (−2)	1,237 (−1)	1,582 (−1)	1,971 (−1)
2,8	7,483 (−2)	1,041 (−1)	1,388 (−1)	1,789 (−1)	2,244 (−1)
3,0	8,308 (−2)	1,166 (−1)	1,567 (−1)	2,035 (−1)	2,572 (−1)
3,2	9,280 (−2)	1,313 (−1)	1,779 (−1)	2,328 (−1)	2,966 (−1)
3,4	1,040 (−1)	1,149 (−1)	2,031 (−1)	2,680 (−1)	3,442 (−1)
3,6	1,173 (−1)	1,692 (−1)	2,332 (−1)	3,104 (−1)	4,022 (−1)
3,8	1,330 (−1)	1,935 (−1)	2,692 (−1)	3,617 (−1)	4,731 (−1)

μ	ν 0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,0
0	7,913 (−2)	8,833 (−2)	9,758 (−2)	1,068 (−1)	1,160 (−1)	1,252 (−1)
0,2	8,175 (−2)	9,175 (−2)	1,018 (−1)	1,120 (−1)	1,221 (−1)	1,322 (−1)
0,4	8,539 (−2)	9,634 (−2)	1,074 (−1)	1,186 (−1)	1,299 (−1)	1,412 (−1)
0,6	9,010 (−2)	1,022 (−1)	1,145 (−1)	1,270 (−1)	1,396 (−1)	1,522 (−1)
0,8	9,597 (−2)	1,094 (−1)	1,231 (−1)	1,371 (−1)	1,514 (−1)	1,657 (−1)
1,0	1,031 (−1)	1,181 (−1)	1,336 (−1)	1,494 (−1)	1,656 (−1)	1,820 (−1)
1,2	1,117 (−1)	1,286 (−1)	1,462 (−1)	1,642 (−1)	1,827 (−1)	2,016 (−1)
1,4	1,220 (−1)	1,412 (−1)	1,612 (−1)	1,819 (−1)	2,033 (−1)	2,253 (−1)
1,6	1,342 (−1)	1,562 (−1)	1,792 (−1)	2,032 (−1)	2,281 (−1)	2,538 (−1)
1,8	1,488 (−1)	1,740 (−1)	2,006 (−1)	2,286 (−1)	2,579 (−1)	2,883 (−1)
2,0	1,660 (−1)	1,952 (−1)	2,263 (−1)	2,592 (−1)	2,939 (−1)	3,303 (−1)
2,2	1,866 (−1)	2,206 (−1)	2,571 (−1)	2,961 (−1)	3,376 (−1)	3,817 (−1)
2,4	2,110 (−1)	2,511 (−1)	2,943 (−1)	3,409 (−1)	3,910 (−1)	4,448 (−1)
2,6	2,403 (−1)	2,877 (−1)	3,393 (−1)	3,955 (−1)	4,566 (−1)	5,232 (−1)
2,8	2,755 (−1)	3,320 (−1)	3,942 (−1)	4,625 (−1)	5,378 (−1)	6,210 (−1)
3,0	3,180 (−1)	3,860 (−1)	4,615 (−1)	5,452 (−1)	6,390 (−1)	7,444 (−1)
3,2	3,695 (−1)	4,521 (−1)	5,445 (−1)	6,482 (−1)	7,661 (−1)	9,012 (−1)
3,4	4,325 (−1)	5,335 (−1)	6,478 (−1)	7,773 (−1)	9,269 (−1)	1,102 (0)
3,6	5,099 (−1)	6,346 (−1)	7,772 (−1)	9,404 (−1)	1,132 (0)	1,362 (0)
3,8	6,056 (−1)	7,612 (−1)	9,408 (−1)	1,148 (0)	1,396 (0)	1,702 (0)

μ	ν = 0	0,05	0,10	0,15	0,20
4,0	0	1,364 (−7)	1,585 (−5)	2,280 (−4)	1,381 (−3)
4,2	0	1,091 (−7)	1,441 (−5)	2,240 (−4)	1,421 (−3)
4,4	0	8,780 (−8)	1,324 (−5)	2,212 (−4)	1,469 (−3)
4,6	0	7,105 (−8)	1,223 (−5)	2,197 (−4)	1,528 (−3)
4,8	0	5,781 (−8)	1,137 (−5)	2,193 (−4)	1,596 (−3)
5,0	0	4,729 (−8)	1,062 (−5)	2,200 (−4)	1,675 (−3)
5,2	0	3,890 (−8)	9,967 (−6)	2,218 (−4)	1,766 (−3)
5,4	0	3,216 (−8)	9,404 (−6)	2,247 (−4)	1,870 (−3)
5,6	0	2,671 (−8)	8,917 (−6)	2,287 (−4)	1,990 (−3)
5,8	0	2,230 (−8)	8,495 (−6)	2,338 (−4)	2,126 (−3)
6,0	0	1,871 (−8)	8,129 (−6)	2,400 (−4)	2,280 (−3)
6,2	0	1,577 (−8)	7,815 (−6)	2,475 (−4)	2,455 (−3)
6,4	0	1,335 (−8)	7,546 (−6)	2,563 (−4)	2,654 (−3)
6,6	0	1,135 (−8)	7,218 (−6)	2,664 (−4)	2,881 (−3)
6,8	0	9,697 (−9)	7,126 (−6)	2,781 (−4)	3,137 (−3)
7,0	0	8,315 (−9)	6,968 (−6)	2,914 (−4)	3,429 (−3)
7,2	0	7,162 (−9)	6,841 (−6)	3,065 (−4)	3,761 (−3)
7,4	0	6,193 (−9)	6,742 (−6)	3,235 (−4)	4,139 (−3)
7,6	0	5,377 (−9)	6,671 (−6)	3,428 (−4)	4,570 (−3)
7,8	0	4,677 (−9)	6,625 (−6)	3,644 (−4)	5,062 (−3)

μ	ν = 0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
4,0	5,121 (−3)	1,389 (−2)	3,046 (−2)	5,742 (−2)	9,707 (−2)
4,2	5,438 (−3)	1,509 (−2)	3,365 (−2)	6,429 (−2)	1,099 (−1)
4,4	5,804 (−3)	1,647 (−2)	3,734 (−2)	7,230 (−2)	1,250 (−1)
4,6	6,223 (−3)	1,805 (−2)	4,161 (−2)	8,165 (−2)	1,429 (−1)
4,8	6,704 (−3)	1,988 (−2)	4,657 (−2)	9,260 (−2)	1,640 (−1)
5,0	7,254 (−3)	2,198 (−2)	5,233 (−2)	1,055 (−1)	1,890 (−1)
5,2	7,883 (−3)	2,439 (−2)	5,903 (−2)	1,206 (−1)	2,189 (−1)
5,4	8,603 (−3)	2,719 (−2)	6,685 (−2)	1,384 (−1)	2,546 (−1)
5,6	9,496 (−3)	3,041 (−2)	7,599 (−2)	1,595 (−1)	2,974 (−1)
5,8	1,037 (−2)	3,415 (−2)	8,669 (−2)	1,846 (−1)	3,490 (−1)
6,0	1,145 (−2)	3,848 (−2)	9,926 (−2)	2,144 (−1)	4,116 (−1)
6,2	1,269 (−2)	4,352 (−2)	1,141 (−1)	2,501 (−1)	4,877 (−1)
6,4	1,411 (−2)	4,938 (−2)	1,315 (−1)	2,929 (−1)	5,807 (−1)
6,6	1,575 (−2)	5,622 (−2)	1,522 (−1)	3,445 (−1)	6,951 (−1)
6,8	1,764 (−2)	6,422 (−2)	1,768 (−1)	4,068 (−1)	8,365 (−1)
7,0	1,981 (−2)	7,359 (−2)	2,060 (−1)	4,825 (−1)	1,012 (0)
7,2	2,233 (−2)	8,459 (−2)	2,409 (−1)	5,749 (−1)	1,232 (0)
7,4	2,525 (−2)	9,753 (−2)	2,828 (−1)	6,881 (−1)	1,508 (0)
7,6	2,864 (−2)	1,128 (−1)	3,331 (−1)	8,276 (−1)	1,858 (0)
7,8	3,257 (−2)	1,309 (−1)	3,939 (−1)	1,000 (0)	2,304 (0)

μ	ν 0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
4,0	1,514 (−1)	2,226 (−1)	3,126 (−1)	4,242 (−1)	5,605 (−1)
4,2	1,733 (−1)	2,573 (−1)	3,651 (−1)	5,007 (−1)	6,688 (−1)
4,4	1,993 (−1)	2,990 (−1)	4,290 (−1)	5,950 (−1)	8,041 (−1)
4,6	2,302 (−1)	3,494 (−1)	5,072 (−1)	7,120 (−1)	9,743 (−1)
4,8	2,673 (−1)	4,106 (−1)	6,034 (−1)	8,581 (−1)	1,190 (0)
5,0	3,119 (−1)	4,852 (−1)	7,227 (−1)	1,042 (0)	1,466 (0)
5,2	3,658 (−1)	5,767 (−1)	8,714 (−1)	1,275 (0)	1,820 (0)
5,4	4,313 (−1)	6,898 (−1)	1,058 (0)	1,573 (0)	2,281 (0)
5,6	5,111 (−1)	8,302 (−1)	1,294 (0)	1,956 (0)	2,883 (0)
5,8	6,091 (−1)	1,006 (0)	1,596 (0)	2,453 (0)	3,676 (0)
6,0	7,230 (−1)	1,227 (0)	1,982 (0)	3,102 (0)	4,728 (0)
6,2	8,801 (−1)	1,507 (0)	2,482 (0)	3,956 (0)	6,134 (0)
6,4	1,068 (0)	1,864 (0)	3,133 (0)	5,090 (0)	8,026 (0)
6,6	1,303 (0)	2,324 (0)	3,988 (0)	6,604 (0)	1,059 (+1)
6,8	1,601 (0)	2,918 (0)	5,117 (0)	8,642 (0)	1,408 (+1)
7,0	1,981 (0)	3,694 (0)	6,620 (0)	1,140 (+1)	1,888 (+1)
7,2	2,468 (0)	4,711 (0)	8,633 (0)	1,516 (+1)	2,549 (+1)
7,4	3,097 (0)	6,054 (0)	1,135 (+1)	2,032 (+1)	3,466 (+1)
7,6	3,913 (0)	7,840 (0)	1,503 (+1)	2,744 (+1)	4,746 (+1)
7,8	4,981 (0)	1,023 (+1)	2,005 (+1)	3,732 (+1)	6,539 (+1)

μ	ν 0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1
4,0	7,250 (−1)	9,208 (−1)	1,149 (0)	1,415 (0)	1,739 (0)	2,149 (0)
4,2	8,750 (−1)	1,124 (0)	1,417 (0)	1,761 (0)	2,186 (0)	2,743 (0)
4,4	1,065 (0)	1,385 (0)	1,765 (0)	2,214 (0)	2,776 (0)	3,537 (0)
4,6	1,307 (0)	1,722 (0)	2,220 (0)	2,810 (0)	3,558 (0)	4,606 (0)
4,8	1,619 (0)	2,163 (0)	2,822 (0)	3,602 (0)	4,603 (0)	6,058 (0)
5,0	2,024 (0)	2,744 (0)	3,625 (0)	4,664 (0)	6,009 (0)	8,038 (0)
5,2	2,553 (0)	3,517 (0)	4,706 (0)	6,101 (0)	7,913 (0)	1,076 (+1)
5,4	3,251 (0)	4,553 (0)	6,175 (0)	8,060 (0)	1,051 (+1)	1,451 (+1)
5,6	4,178 (0)	5,954 (0)	8,188 (0)	1,075 (+1)	1,406 (+1)	1,970 (+1)
5,8	5,420 (0)	7,863 (0)	1,097 (+1)	1,449 (+1)	1,897 (+1)	2,694 (+1)
6,0	7,093 (0)	1,048 (+1)	1,485 (+1)	1,970 (+1)	2,577 (+1)	3,704 (+1)
6,2	9,365 (0)	1,411 (+1)	2,030 (+1)	2,705 (+1)	3,524 (+1)	5,119 (+1)
6,4	1,247 (+1)	1,916 (+1)	2,803 (+1)	3,749 (+1)	4,853 (+1)	7,109 (+1)
6,6	1,673 (+1)	2,623 (+1)	3,905 (+1)	5,242 (+1)	6,726 (+1)	9,914 (+1)
6,8	2,262 (+1)	3,620 (+1)	5,488 (+1)	7,396 (+1)	9,379 (+1)	1,388 (+2)
7,0	3,079 (+1)	5,032 (+1)	7,778 (+1)	1,052 (+2)	1,316 (+2)	1,949 (+2)
7,2	4,219 (+1)	7,042 (+1)	1,111 (+2)	1,511 (+2)	1,858 (+2)	2,747 (+2)
7,4	5,816 (+1)	9,916 (+1)	1,599 (+2)	2,186 (+2)	2,640 (+2)	3,881 (+2)
7,6	8,064 (+1)	1,404 (+2)	2,318 (+2)	3,190 (+2)	3,775 (+2)	5,499 (+2)
7,8	1,124 (+2)	2,000 (+2)	3,382 (+2)	4,690 (+2)	5,432 (+2)	7,810 (+2)

μ	ν				
	0	0,05	0,10	0,15	0,20
8,0	0	4,092 (−9)	6,604 (−6)	3,888 (−4)	5,625 (−3)
8,2	0	3,594 (−9)	6,606 (−6)	4,161 (−4)	6,269 (−3)
8,4	0	3,169 (−9)	6,632 (−6)	4,469 (−4)	7,008 (−3)
8,6	0	2,803 (−9)	6,661 (−6)	4,815 (−4)	7,857 (−3)
8,8	0	2,495 (−9)	6,753 (−6)	5,204 (−4)	8,834 (−3)
9,0	0	2,223 (−9)	6,849 (−6)	5,641 (−4)	9,960 (−3)
9,2	0	1,987 (−9)	6,969 (−6)	6,134 (−4)	1,126 (−2)
9,4	0	1,783 (−9)	7,114 (−6)	6,690 (−4)	1,276 (−2)
9,6	0	1,604 (−9)	7,285 (−6)	7,317 (−4)	1,450 (−2)
9,8	0	1,449 (−9)	7,483 (−6)	8,026 (−4)	1,652 (−2)
10,0	0	1,312 (−9)	7,710 (−6)	8,828 (−4)	1,888 (−2)
10,2	0	1,192 (−9)	7,968 (−6)	9,336 (−4)	2,161 (−2)
10,4	0	1,087 (−9)	8,258 (−6)	1,077 (−3)	2,480 (−2)
10,6	0	9,935 (−10)	8,584 (−6)	1,194 (−3)	2,853 (−2)
10,8	0	9,110 (−10)	9,038 (−6)	1,327 (−3)	3,290 (−2)
11,0	0	8,380 (−10)	9,354 (−6)	1,479 (−3)	3,802 (−2)
11,2	0	7,730 (−10)	9,804 (−6)	1,652 (−3)	4,403 (−2)
11,4	0	7,151 (−10)	1,030 (−5)	1,850 (−3)	5,111 (−2)
11,6	0	6,633 (−10)	1,086 (−5)	2,077 (−3)	5,946 (−2)
11,8	0	6,174 (−10)	1,147 (−5)	2,336 (−3)	6,931 (−2)

μ	ν				
	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
8,0	3,716 (−2)	1,523 (−1)	4,675 (−1)	1,215 (0)	2,876 (0)
8,2	4,251 (−2)	1,778 (−1)	5,570 (−1)	1,485 (0)	3,613 (0)
8,4	4,876 (−2)	2,081 (−1)	6,664 (−1)	1,824 (0)	4,570 (0)
8,6	5,809 (−2)	2,444 (−1)	8,007 (−1)	2,253 (0)	5,820 (0)
8,8	6,470 (−2)	2,879 (−1)	9,662 (−1)	2,800 (0)	7,462 (0)
9,0	7,482 (−2)	3,402 (−1)	1,171 (0)	3,501 (0)	9,633 (0)
9,2	8,676 (−2)	4,033 (−1)	1,426 (0)	4,405 (0)	1,252 (+1)
9,4	1,009 (−1)	4,796 (−1)	1,745 (0)	5,577 (0)	1,638 (+1)
9,6	1,176 (−1)	5,724 (−1)	2,147 (0)	7,106 (0)	2,156 (+1)
9,8	1,374 (−1)	6,854 (−1)	2,654 (0)	9,112 (0)	2,856 (+1)
10,0	1,609 (−1)	8,238 (−1)	3,300 (0)	1,176 (+1)	3,806 (+1)
10,2	1,890 (−1)	9,937 (−1)	4,124 (0)	1,527 (+1)	5,101 (+1)
10,4	2,225 (−1)	1,203 (0)	5,185 (0)	1,994 (+1)	6,872 (+1)
10,6	2,626 (−1)	1,463 (0)	6,556 (0)	2,621 (+1)	9,307 (+1)
10,8	3,108 (−1)	1,786 (0)	8,337 (0)	3,464 (+1)	1,266 (+2)
11,0	3,688 (−1)	2,190 (0)	1,067 (+1)	4,604 (+1)	1,731 (+2)
11,2	4,388 (−1)	2,698 (0)	1,372 (+1)	6,152 (+1)	2,376 (+2)
11,4	5,234 (−1)	3,338 (0)	1,776 (+1)	8,262 (+1)	3,275 (+2)
11,6	6,262 (−1)	4,151 (0)	2,312 (+1)	1,115 (+2)	4,531 (+2)
11,8	7,513 (−1)	5,187 (0)	3,026 (+1)	1,511 (+2)	6,290 (+2)

μ	ν 0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
8,0	6,387 (0)	1,344 (+1)	2,694 (+1)	5,112 (+1)	9,067 (+1)
8,2	8,249 (0)	1,780 (+1)	3,645 (+1)	7,047 (+1)	1,265 (+2)
8,4	1,073 (+1)	2,371 (+1)	4,962 (+1)	9,776 (+1)	1,774 (+2)
8,6	1,406 (+1)	3,181 (+1)	6,796 (+1)	1,364 (+2)	2,503 (+2)
8,8	1,854 (+1)	4,293 (+1)	9,361 (+1)	1,915 (+2)	3,550 (+2)
9,0	2,461 (+1)	5,828 (+1)	1,296 (+2)	2,703 (+2)	5,064 (+2)
9,2	3,287 (+1)	7,956 (+1)	1,803 (+2)	3,834 (+2)	7,260 (+2)
9,4	4,418 (+1)	1,092 (+2)	2,521 (+2)	5,467 (+2)	1,046 (+3)
9,6	5,972 (+1)	1,506 (+2)	3,540 (+2)	7,832 (+2)	1,516 (+3)
9,8	8,117 (+1)	2,086 (+2)	4,990 (+2)	1,127 (+3)	2,208 (+3)
10,0	1,109 (+2)	2,903 (+2)	7,061 (+2)	1,630 (+3)	3,234 (+3)
10,2	1,523 (+2)	4,057 (+2)	1,003 (+3)	2,366 (+3)	4,759 (+3)
10,4	2,100 (+2)	5,693 (+2)	1,429 (+3)	3,448 (+3)	7,042 (+3)
10,6	2,910 (+2)	8,020 (+2)	2,043 (+3)	5,045 (+3)	1,047 (+4)
10,8	4,048 (+2)	1,134 (+3)	2,930 (+3)	7,410 (+3)	1,566 (+4)
11,0	5,654 (+2)	1,609 (+3)	4,215 (+3)	1,092 (+4)	2,353 (+4)
11,2	7,927 (+2)	2,292 (+3)	6,080 (+3)	1,616 (+4)	3,553 (+4)
11,4	1,115 (+3)	3,277 (+3)	8,794 (+3)	2,397 (+4)	5,392 (+4)
11,6	1,575 (+3)	4,700 (+3)	1,276 (+4)	3,569 (+4)	8,223 (+4)
11,8	2,231 (+3)	6,767 (+3)	1,855 (+4)	5,328 (+4)	1,260 (+5)

μ	ν 0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1
8,0	1,574 (+2)	2,861 (+2)	4,966 (+2)	6,948 (+2)	7,867 (+2)	1,112 (+3)
8,2	2,214 (+2)	4,111 (+2)	7,333 (+2)	1,037 (+3)	1,147 (+3)	1,587 (+3)
8,4	3,127 (+2)	5,931 (+2)	1,089 (+3)	1,558 (+3)	1,683 (+3)	2,270 (+3)
8,6	4,435 (+2)	8,589 (+2)	1,625 (+3)	2,357 (+3)	2,488 (+3)	3,255 (+3)
8,8	6,313 (+2)	1,248 (+3)	2,437 (+3)	3,587 (+3)	3,702 (+3)	4,678 (+3)
9,0	9,020 (+2)	1,819 (+3)	3,670 (+3)	5,494 (+3)	5,548 (+3)	6,741 (+3)
9,2	1,293 (+3)	2,659 (+3)	5,552 (+3)	8,460 (+3)	8,371 (+3)	9,740 (+3)
9,4	1,860 (+3)	3,898 (+3)	8,432 (+3)	1,310 (+4)	1,272 (+4)	1,411 (+4)
9,6	2,686 (+3)	5,728 (+3)	1,286 (+4)	2,038 (+4)	1,946 (+4)	2,052 (+4)
9,8	3,891 (+3)	8,436 (+3)	1,967 (+4)	3,185 (+4)	2,996 (+4)	2,993 (+4)
10,0	5,656 (+3)	1,245 (+4)	3,019 (+4)	5,001 (+4)	4,644 (+4)	4,383 (+4)
10,2	8,252 (+3)	1,842 (+4)	4,651 (+4)	7,883 (+4)	7,241 (+4)	6,447 (+4)
10,4	1,208 (+4)	2,729 (+4)	7,186 (+4)	1,248 (+5)	1,136 (+5)	9,529 (+4)
10,6	1,776 (+4)	4,052 (+4)	1,114 (+5)	1,981 (+5)	1,791 (+5)	1,416 (+5)
10,8	2,620 (+4)	6,027 (+4)	1,731 (+5)	3,157 (+5)	2,840 (+5)	2,118 (+5)
11,0	3,882 (+4)	8,979 (+4)	2,698 (+5)	5,046 (+5)	4,524 (+5)	3,188 (+5)
11,2	5,775 (+4)	1,340 (+5)	4,218 (+5)	8,091 (+5)	7,240 (+5)	4,837 (+5)
11,4	8,630 (+4)	2,003 (+5)	6,610 (+5)	1,301 (+6)	1,164 (+6)	7,400 (+5)
11,6	1,296 (+5)	2,998 (+5)	1,039 (+6)	2,097 (+6)	1,878 (+6)	1,142 (+6)
11,8	1,954 (+5)	4,495 (+5)	1,637 (+6)	3,390 (+6)	3,040 (+6)	1,781 (+6)

μ	ν				
	0	0,05	0,10	0,15	0,20
12,0	0	5,760 (−10)	1,216 (−5)	2,635 (−3)	8,096 (−2)
12,2	0	5,387 (−10)	1,291 (−5)	2,978 (−3)	9,478 (−2)
12,4	0	5,053 (−10)	1,374 (−5)	3,374 (−3)	1,112 (−1)
12,6	0	4,751 (−10)	1,467 (−5)	3,830 (−3)	1,307 (−1)
12,8	0	4,480 (−10)	1,570 (−5)	4,357 (−3)	1,539 (−1)
13,0	0	4,234 (−10)	1,683 (−5)	4,967 (−3)	1,816 (−1)

μ	ν				
	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
12,0	9,040 (−1)	6,514 (0)	3,982 (+1)	2,057 (+2)	8,762 (+2)
12,2	1,091 (0)	8,223 (0)	5,268 (+1)	2,812 (+2)	1,224 (+3)
12,4	1,321 (0)	1,044 (+1)	7,005 (+1)	3,858 (+2)	1,716 (+3)
12,6	1,605 (0)	1,332 (+1)	9,359 (+1)	5,312 (+2)	2,412 (+3)
12,8	1,956 (0)	1,708 (+1)	1,256 (+2)	7,338 (+2)	3,401 (+3)
13,0	2,393 (0)	2,202 (+1)	1,693 (+2)	1,017 (+3)	4,806 (+3)

μ	ν				
	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70
12,0	3,171 (+2)	9,776 (+3)	2,705 (+4)	7,978 (+4)	1,939 (+5)
12,2	4,522 (+3)	1,417 (+4)	3,954 (+4)	1,198 (+5)	2,997 (+5)
12,4	6,467 (+3)	2,062 (+4)	5,795 (+4)	1,803 (+5)	4,652 (+5)
12,6	9,277 (+3)	3,012 (+4)	8,515 (+4)	2,721 (+5)	7,249 (+5)
12,8	1,335 (+4)	4,415 (+4)	1,254 (+5)	4,115 (+5)	1,134 (+6)
13,0	1,926 (+4)	6,495 (+4)	1,853 (+5)	6,238 (+5)	1,780 (+6)

μ	ν					
	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1
12,0	2,961 (+5)	6,750 (+5)	2,587 (+6)	5,493 (+6)	4,941 (+6)	2,806 (+6)
12,2	4,509 (+5)	1,015 (+6)	4,098 (+6)	8,921 (+6)	8,054 (+6)	4,470 (+6)
12,4	6,902 (+5)	1,529 (+6)	6,510 (+6)	1,452 (+7)	1,317 (+7)	7,200 (+6)
12,6	1,062 (+6)	2,306 (+6)	1,037 (+7)	2,369 (+7)	2,159 (+7)	1,173 (+7)
12,8	1,642 (+6)	3,484 (+6)	1,656 (+7)	3,874 (+7)	3,549 (+7)	1,932 (+7)
13,0	2,552 (+6)	5,273 (+6)	2,651 (+7)	6,347 (+7)	5,848 (+7)	3,218 (+7)

В. И. КОРЗОВ, Л. Б. КРАСИЛЬЩИКОВ

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗМЕРЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЯРКОСТИ В ОБЛАСТИ 0,7—2,5 мк

Приводятся результаты измерений спектральных коэффициентов отражения некоторых типов растительности, строительных материалов и снега в спектральной области 0,7—2,5 мк.

Изучение литературы, посвященной спектральному отражению диффузно-рассеивающих поверхностей, убеждает в крайней ограниченности сведений по спектрам отражения в спектральной области, начинающейся приблизительно с 1 мк. Между тем знание спектров и пространственного распределения отражения необходимо во всей области коротковолновой радиации, т. е. в области до 2,5—3 мк. Такие данные представляют интерес для расчетов восходящих потоков радиации, для рациональной разработки актинометрических приборов, оценки их точности и для ряда смежных задач.

С целью получения спектральных коэффициентов яркости был разработан регистрирующий спектрогониофотометр, служащий для измерения индикатрис спектральных коэффициентов яркости в спектральной области 0,6—2,5 мк [1].

Модернизированная оптическая схема гониофотометра, использующего в качестве монохроматического осветителя спектрометр ИКС-12 и предназначенного для работы с неподвижным охлаждаемым фотосопротивлением, описана в работе [2].

В последние годы существенной переработке подверглась также и электрическая схема. Линейный усилитель заменен компенсационной схемой, позволяющей получать надежную воспроизводимость получаемых регистрограмм при колебаниях питающего напряжения и изменениях параметров электронных ламп. Принципиальная электрическая схема прибора изображена на рис. 1. Отличительной особенностью этой электрической схемы является то, что переменный входной сигнал, образующийся благодаря модуляции на нагрузке сернисто-свинцового фотосопротивления, сравнивается с напряжением той же частоты, находящимся в противофазе и снимаемым с реохорда электронного потенциометра. При достижении в процессе движения реохорда и каретки потенциометра равенства входного сигнала и сигнала сравнения напряжение, действующее на входе основного усилителя, становится близким к нулю, благодаря чему отрабатывающий мотор потенциометра останавливается.

Осуществление такой системы потребовало изменения схемы электронного потенциометра, мост которого переведен на питание переменным

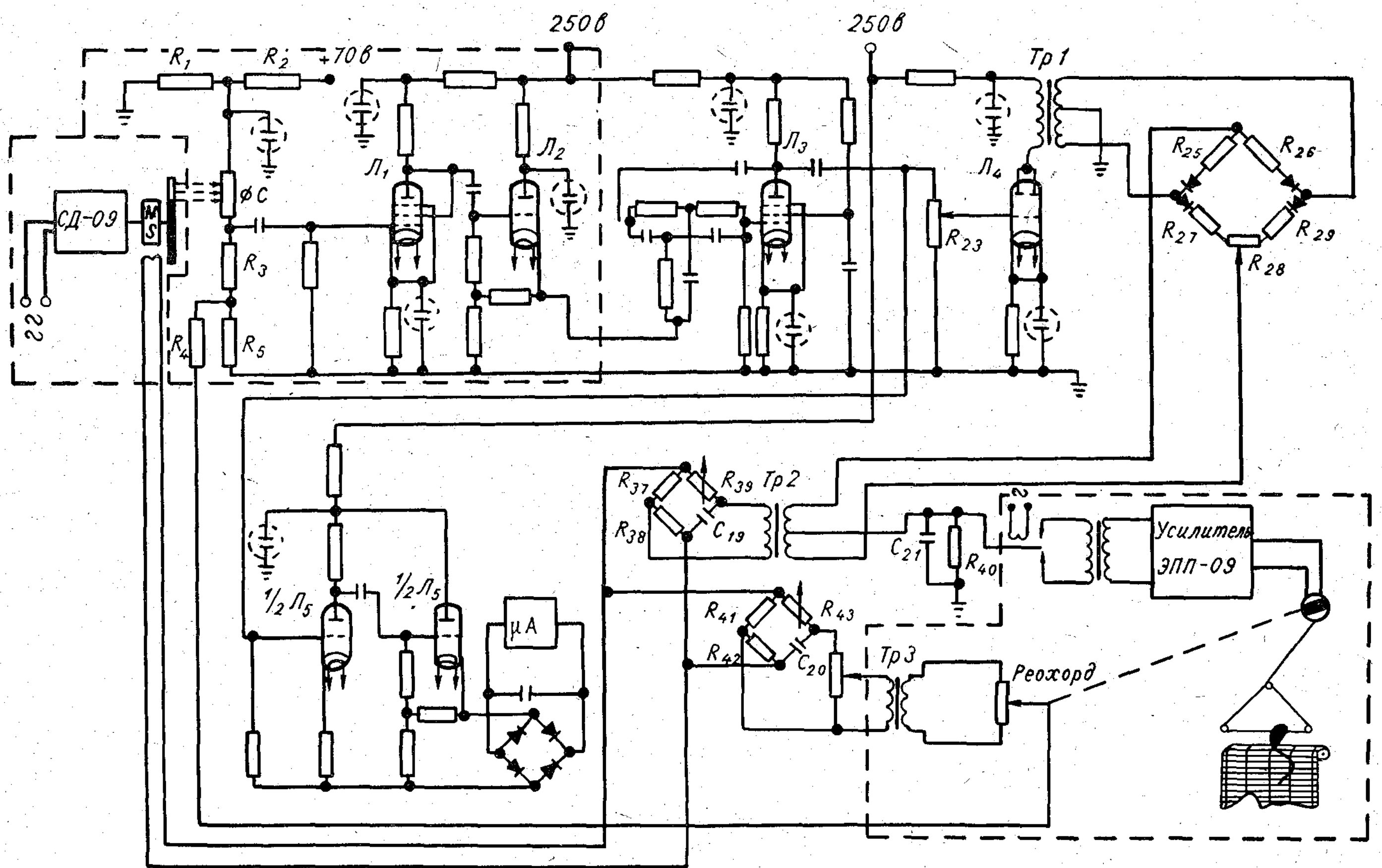

Рис. 1. Принципиальная электрическая схема прибора.

током той же частоты и фазы, что и напряжение основного сигнала. Для получения этого напряжения служит специальный электромеханический генератор, ротор которого помещен на оси перфорированного диска, модулирующего световой поток, вступающий в монохроматор. Этот же генератор служит датчиком опорного напряжения, необходимого для детектирования сигнала в основном тракте схемы.

Настроенный на частоту модуляции усилитель основного тракта, усилитель электронного потенциометра и электродвигатель в совокупности представляют собой нуль-индикатор, указывающий равенство входного сигнала сигналу сравнения, поступающему из цепи обратной связи.

Как и во всякой нулевой системе, здесь не предъявляются высокие требования к линейности нуль-индикатора и постоянству его чувствительности, так как изменение последней не сказывается на величине

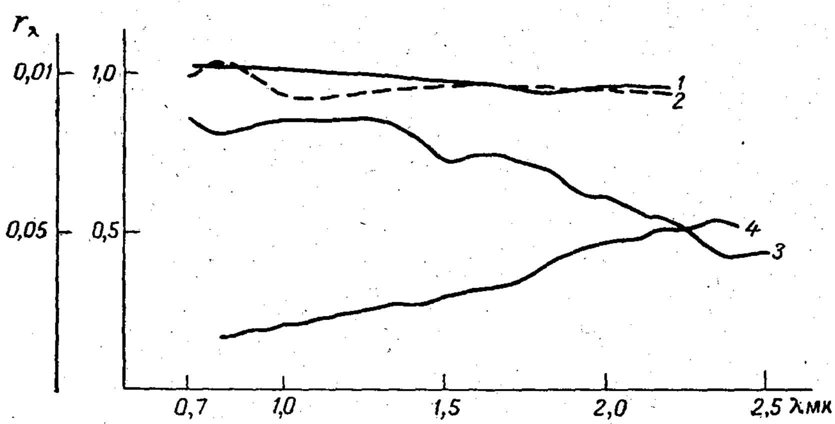

Рис. 2. Коэффициенты яркости эталонов и лака Парсонса.
1 — полированное стекло МС-14, $i=0$, $\theta=15°$; 2 — матированное стекло МС-14, $i=0$, $\theta=15°$; 3 — баритовая бумага, $i=5°$, $\theta=15°$; 4 — лак Парсонса, $i=0$, $\theta=15°$.

отклонения каретки потенциометра, а может лишь изменить порог нечувствительности, определяя этим точность отработки.

Спектральные коэффициенты яркости определялись сравнением отражения от образцов с отражением от эталона. В начале работы в качестве эталона использовалась баритовая бумага, спектральный ход отражения которой во всей рабочей области спектра от 0,7 до 2,5 мк тщательно изучался по обычной методике [3] на этой же установке. Привязка значений коэффициента яркости осуществлялась по эталону ВНИИМ в области 0,7 мк.

Спектральный ход отражения баритовой бумаги при падении света под углом $i=5°$ и отражении под углом $\theta=5°$ показан на рис. 2. Индикатриса яркости баритовой бумаги близка к ламбертовской, но наблюдается довольно быстрое уменьшение отраженного света с увеличением длины волны ($r=0{,}4$ при $\lambda=2{,}5$ мк). Кроме того, в области 1,45—1,5 мк наблюдается небольшой минимум, который обусловлен влагой абсорбированной баритовой бумаги. Глубина этого минимума может изменяться при изменении влажности.

В дальнейшем в качестве эталона использовалось молочное стекло МС-14, имеющее лучшую спектральную характеристику отражения. На рис. 2 представлены результаты измерений спектральных коэффициентов яркости эталонов из стекла МС-14 матированного и полированного [4].

Расхождение между кривыми 1 и 2 (рис. 2) в области 0,9—1,3 мк, достигающее 8%, может быть объяснено различной фактурой поверхности стекла и возможностью невидимых загрязнений матированной поверхности. Не исключено, впрочем, и влияние различий методик измерения.

Все измерения обрабатывались по эталонным данным ГГО (кривая 2, рис. 2).

В будущем предполагается тщательно сравнить оба эталона, используя единую методику измерений, и при необходимости внести поправки в результаты измерений коэффициентов яркости.

Индикатрисы яркости эталонов вне области зеркальных углов для полированного стекла идентичны и близки к ламбертовским. Матированное стекло является приблизительно ламбертовским отражателем и в области зеркального угла.

Измерения ГГО производились в диапазоне углов падения i и углов отражения θ в азимутах φ, равных 0 и 180° (табл. 1).

Таблица 1

Пределы изменения угла отражения от угла падения и азимута

$i°$	$\varphi°$	$\theta°$
0	0	15—80
0	180	15—80
10	0	5—70
10	180	25—85
20	0	0—60
20	180	0—5; 35—85
30	180	0—15; 45—85
30	0	0—50
40	0	0—40
40	180	0—25; 55—85

Основные результаты измерений приводятся в табл. 2, 3 и иллюстрируются рисунками 2—7.

На рис. 2 кривая 4 изображает спектральный ход яркости лака Парсона, образец покрытия которого на алюминиевой пластинке был изготовлен и предоставлен К. Д. Лебедевой. Масштаб по оси ординат для лака увеличен в 10 раз.

Измерения спектральной яркости растительности представлены на рис. 3 и 4. На рис. 3 показаны кривые спектральной яркости свежескошенной луговой травы при разных углах падения света и разных углах визирования. Для всех кривых на рисунках 3 и 4, снятых при спектральной ширине щели, равной приблизительно 70 ммк в средней части спектра, характерным является наличие полос поглощения жидкой воды. Глубина этих полос зависит от количества воды в тканях листьев, что иллюстрируется рис. 4. Для сухих листьев березы и сирени (естественная сушка в течение 18 дней) спектры отражения сглаживаются.

Кривые на рис. 3 и 4 показывают, что при неизменном характере кривых отражения для различных видов растительности величина коэффициентов яркости может быть существенно различной в инфракрасной области. Так отношение коэффициентов яркости при $\lambda=1,2$ мк для листьев березы и сирени составляет 1,1, а при $\lambda=2,15$ мк оно возрастает до 1,65.

Таблица 2

Коэффициенты яркости при $i=0°$, $\theta=15°$

λ мк	МС-14 (ГГО)	МС-14 (ГОИ)	Лак Парсонса	Свежевыпавший снег
0,70	0,99	1,02	—	—
0,75	1,01	1,01	—	—
0,80	1,03	1,01	0,017	—
0,85	1,01	1,01	0,016	—
0,90	0,98	1,00	0,018	0,57
0,95	0,95	1,00	0,018	0,55
1,00	0,92	1,00	0,020	0,53
1,05	0,91	0,99	0,020	0,52
1,10	0,91	0,99	0,022	0,53
1,15	0,91	0,98	0,022	0,49
1,20	0,92	0,98	0,023	0,42
1,25	0,93	0,98	0,024	0,41
1,30	0,93	0,98	0,025	0,40
1,35	0,94	0,97	0,027	0,40
1,40	0,94	0,97	0,026	0,38
1,45	0,95	0,96	0,026	0,11
1,50	0,95	0,96	0,029	0,05
1,55	0,95	0,96	0,030	0,08
1,60	0,95	0,96	0,031	0,11
1,65	0,95	0,95	0,032	0,13
1,70	0,95	0,95	0,033	0,16
1,75	0,95	0,94	0,034	0,18
1,80	0,95	0,94	0,038	0,20
1,85	0,95	0,94	0,040	0,18
1,90	0,95	0,95	0,042	0,06
1,95	0,95	0,95	0,044	0,01
2,00	0,94	0,95	0,046	0,01
2,05	0,94	0,95	0,047	0,02
2,10	0,94	0,95	0,047	0,04
2,15	0,94	0,94	0,050	0,05
2,20	0,94	0,94	0,051	0,06

Полосы воды можно наблюдать и в почвах. Спектральные кривые яркости влажного и сухого торфа при $i=5°$ и $\theta=5°$ приведены на рис. 5.

Для кривых на рис. 4 и 5 характерно также общее увеличение коэффициентов яркости по мере высушивания образца.

На рис. 6 приведены спектральные кривые некоторых строительных материалов и сухого мелкого песка, имеющие почти одинаковый ход в инфракрасной области спектра при существенно различном общем отражении.

Отсутствие надежных данных по спектральному отражению снега в области до 2,5 мк побудило предпринять измерения коэффициентов яркости образцов снега, хотя прибор ГГО предназначен главным образом для измерений непрозрачных объектов.

Снег закладывался в кювету глубиной 40 мм с площадью снеговой поверхности 30×40 мм. Кювета была зачернена и имела коэффициент яркости во всей спектральной области не более 0,05. Размер светового пятна на снегу составлял 10×10 мм. Экспериментальное исследование влияния дна и стенок кюветы показало, что заметное уменьшение отражения снега в спектральной области до 1,5 мк наблюдалось лишь при толщине слоя меньше 20 мм.

Для больших длин волн заметного уменьшения отражения при уменьшенной до 20 мм глубине кюветы не наблюдалось.

Температура помещения и прибора при измерениях находилась

Таблица 3

Коэффициент яркости при $i=5°$, $\theta=5°$

λ мк	Баритовая бумага	Красный кирпич	Силикатный кирпич	Песок	Бетонная плита	Бетонная крошка	Коричневый торф		Черный торф		Лист сирени		Лист березы	
							влажный	сухой	влажный	сухой	свежий	сухой	свежий	сухой
0,70	0,85	0,62	0,41	0,18	0,26	0,19	—	—	—	—	0,28	0,12	0,28	0,31
0,75	0,83	0,65	0,38	0,24	0,22	—	0,05	—	—	—	0,49	0,36	0,48	0,47
0,80	0,81	0,56	0,41	0,27	0,22	0,17	0,10	0,12	—	0,06	0,51	0,42	0,48	0,52
0,85	0,82	0,60	0,36	0,31	0,22	—	0,12	0,22	—	0,13	0,43	0,48	0,53	0,51
0,90	0,84	0,58	0,39	0,32	0,16	0,20	0,22	0,21	0,08	0,20	0,49	0,54	0,49	0,53
0,95	0,85	0,59	0,40	0,34	0,17	—	0,27	0,25	0,10	0,26	0,45	0,56	0,50	0,53
1,00	0,85	0,62	0,40	0,35	0,17	0,19	0,30	0,29	0,13	0,27	0,43	0,54	0,50	0,56
1,05	0,85	0,63	0,37	0,36	0,16	—	0,32	0,31	0,16	0,30	0,43	0,52	0,48	0,55
1,10	0,86	0,66	0,39	0,38	0,20	0,19	0,36	0,33	0,17	0,33	0,45	0,54	0,48	0,55
1,15	0,84	0,67	0,38	0,37	0,18	—	0,37	0,35	0,19	0,34	0,44	0,54	0,50	0,54
1,20	0,85	0,66	0,38	0,38	0,18	0,19	0,40	0,37	0,21	0,36	0,42	0,53	0,45	0,53
1,25	0,86	0,61	0,37	0,38	0,18	—	0,41	0,40	0,21	0,36	0,40	0,52	0,45	0,53
1,30	0,85	0,69	0,36	0,38	0,17	0,20	0,42	0,41	0,21	0,37	0,37	0,50	0,42	0,52
1,35	0,82	0,69	0,35	0,39	0,19	—	0,40	0,40	0,20	0,38	0,34	0,49	0,38	0,51
1,40	0,80	0,70	0,36	0,39	0,19	0,22	0,34	0,41	0,16	0,37	0,19	0,49	0,24	0,49
1,45	0,76	0,69	0,35	0,40	0,18	—	0,27	0,38	0,10	0,35	0,13	0,44	0,21	0,45
1,50	0,72	0,70	0,34	0,40	0,19	0,23	0,27	0,39	0,10	0,36	0,15	0,43	0,23	0,44
1,55	0,73	0,69	0,33	0,40	0,19	—	0,30	0,41	0,12	0,38	0,21	0,43	0,29	0,45
1,60	0,75	0,69	0,33	0,41	0,19	0,24	0,34	0,42	0,16	0,39	0,25	0,43	0,32	0,46
1,65	0,74	0,71	0,33	0,41	0,19	—	0,37	0,42	0,17	0,39	0,27	0,44	0,33	0,46
1,70	0,73	0,69	0,33	0,41	0,20	0,22	0,37	0,41	0,18	0,38	0,26	0,41	0,33	0,45
1,75	0,72	0,64	0,32	0,41	0,19	—	0,36	0,39	0,17	0,37	0,24	0,39	0,29	0,44
1,80	0,70	0,70	0,32	0,41	0,20	0,23	0,34	0,39	0,16	0,37	0,22	0,38	0,27	0,43
1,85	0,67	0,66	0,33	0,43	0,18	—	0,34	0,40	0,15	0,37	0,21	0,39	0,25	0,44
1,90	0,63	0,63	0,31	0,41	0,19	0,23	0,27	0,36	0,11	0,36	0,10	0,38	0,26	0,43
1,95	0,62	0,62	0,27	0,37	0,16	—	0,12	0,29	0,02	0,29	0,04	0,30	0,06	0,34
2,00	0,62	0,63	0,28	0,38	0,17	0,24	0,13	0,31	0,02	0,31	0,05	0,31	0,09	0,33
2,05	0,60	0,65	0,29	0,39	0,18	—	0,15	0,31	0,03	0,32	0,07	0,31	0,12	0,33
2,10	0,56	0,61	0,29	0,40	0,19	0,27	0,18	0,29	0,05	0,30	0,08	0,33	0,13	0,30
2,15	0,54	0,50	0,29	0,41	0,18	—	0,20	0,28	0,07	0,30	0,08	0,26	0,14	0,29
2,20	0,53	0,38	0,26	0,38	0,16	0,29	0,21	0,27	0,07	0,30	0,06	0,23	0,11	0,28
2,25	0,50	0,66	0,22	0,34	0,15	—	0,21	0,23	0,06	0,26	0,07	0,21	0,10	0,26
2,30	0,47	0,64	0,21	0,37	0,13	0,30	0,17	0,23	0,05	0,24	0,06	0,20	0,10	0,23

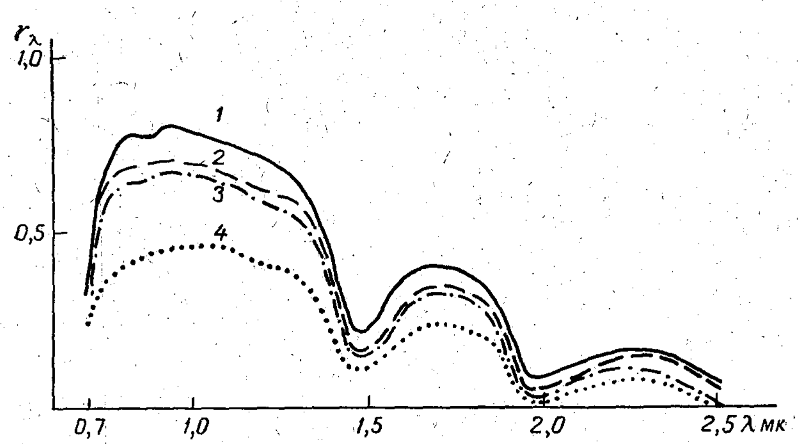

Рис. 3. Коэффициенты яркости травы луговой, свежескошенной.
1 — $i=0$, $\theta=0$; *2* — $i=40°$, $\theta=20°$; *3* — $i=40°$; $\theta=40°$; *4* — $i=40°$, $\theta=60°$.

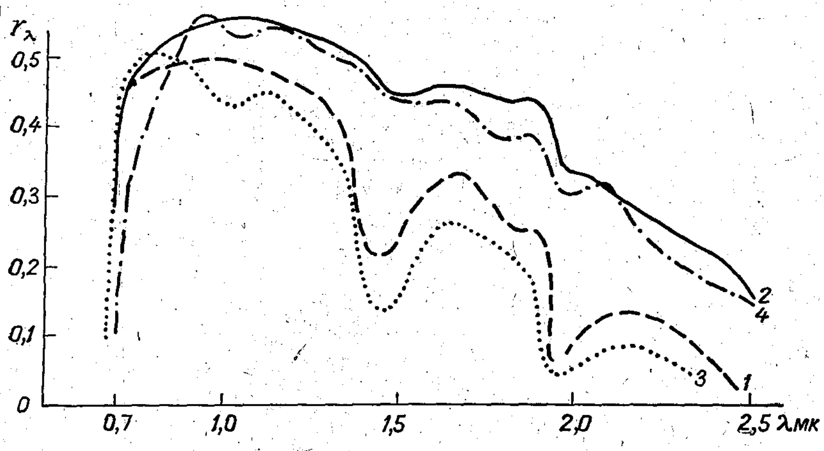

Рис. 4. Коэффициенты яркости листьев березы и сирени при $i=5°$, $\theta=5°$.
1 — лист березы свежесорванный, *2* — тот же лист сухой (после 18 дней сушки), *3* — лист сирени свежесорванный, *4* — тот же лист сухой (после 18 дней сушки).

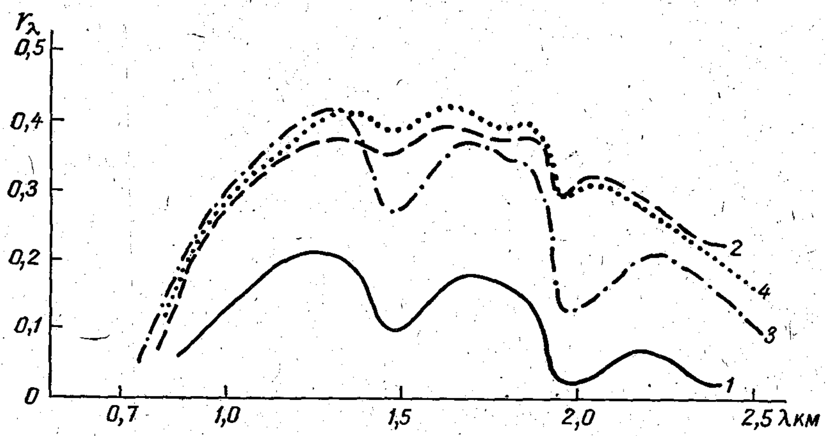

Рис. 5. Коэффициенты яркости черного и коричневого торфа при $i=5°$, $\theta=5°$.
1 — черный торф влажный, *2* — он же после двухдневной естественной сушки, *3* — коричневый торф влажный, *4* — он же после двухдневной естественной сушки.

в пределах -1, -2° С. Забор пробы и доставка ее в прибор также исключали возможность подтаивания поверхности снега.

Микроскопическое исследование снега показало, что он состоял из вытянутых иглообразных кристаллов. Плотность снега была $\rho = 0{,}17$ г/см³.

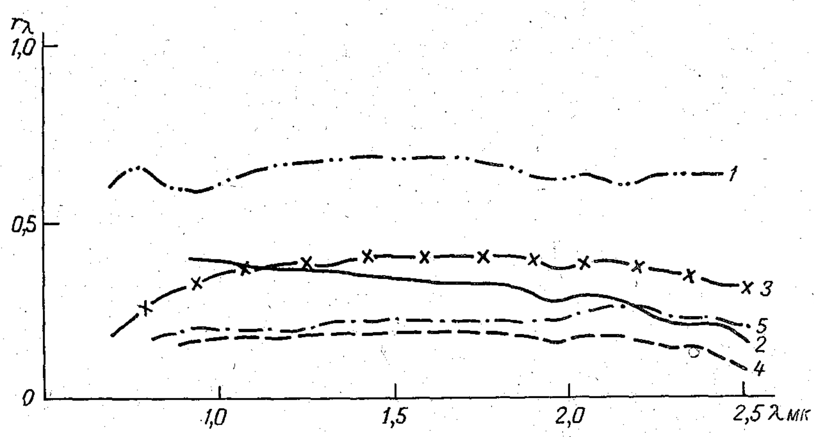

Рис. 6. Коэффициенты яркости некоторых строительных материалов.

1 — красный кирпич, $i=5^\circ$, $\theta=5^\circ$; 2 — силикатный кирпич, $i=5^\circ$, $\theta=5^\circ$; 3 — песок мелкий, $i=5^\circ$, $\theta=5^\circ$; 4 — бетонная плита, $i=5^\circ$, $\theta=5^\circ$; 5 — бетонная крошка $i=40^\circ$, $\theta=5^\circ$.

На рис. 7 приведена кривая спектральной яркости, осредненная по нескольким пробам свежевыпавшего снега. На этом же рисунке для сравнения приведены экспериментальные и расчетные данные различных авторов.

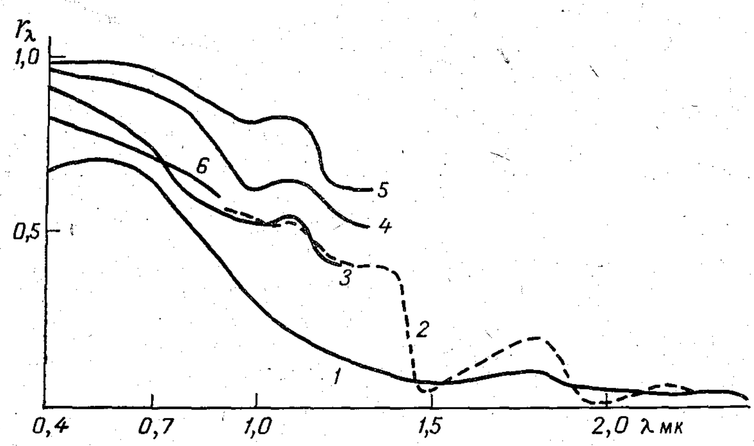

Рис. 7. Экспериментальные и расчетные спектральные кривые отражения снега по данным различных авторов.

1 — старый снег (по Дирмхирн); 2 — свежий снег (по измерениям ГГО); 3, 4, 5 — расчетные кривые Данкла и Беванса при размерах частиц соответственно 0,001; 0,01; 0,1 дюйма; 6 — свежий снег (по Кринову).

Полученные нами минимумы отражения около 1,0 и 1,3 мк можно наблюдать на кривых Данкла и Беванса [5], рассчитанных для моделей снежного покрова.

Отсутствие заметных полос в спектре отражения, полученном для снега в работе [6], можно объяснить использованием несовершенной методики снятия спектра по точкам, а также тем, что измерения производились на старом снеге.

На этом же рисунке представлены экспериментальные данные Кринова [7] в коротковолновой области для свежевыпавшего снега.

Индикатрисы яркости снега, полученные нами при $i=0\div40°$, не дают существенного отклонения от закона Ламберта во всем спектральном диапазоне.

В заключение нужно отметить, что исходные спектры, полученные для определения коэффициентов яркости, воспроизводятся с погрешностью не более 2% в спектральном интервале 1—2 мк.

При вычислении коэффициентов яркости используются спектры как исследуемого образца, так и эталона, вследствие чего результирующая погрешность удваивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщиков Л. Б., Царевская А. А. Установка для измерения индикатрис отражения в спектральной области 0,6—2,5 мк. Труды ГГО, вып. 100, 1960.
2. Красильщиков Л. Б. Современные методы изучения спектральной отражательной способности диффузно-рассеивающих поверхностей. Труды ВНМС, т. 5. Гидрометеоиздат, Л., 1963.
3. Красильщиков Л. Б., Новосельцев Е. П. Спектральная отражательная способность баритовой бумаги. Опт. и спектр. т. 2, вып. 3, 1957.
4. Топорец А. С. Приспособление к спектрофотометру СФ-4 с интегрирующим шаром для измерения коэффициентов диффузного отражения и пропускания. Опт. и спектр. т. 18, в. 4, 1961.
5. R. V. Dunkle, I. T. Bevans. An opproximate analysis of the solar reflectance and transmittance of a snow cover. I. of Meteorologie v 13, April, 1956.
6. Dirmhirn. Zur spectralen berteilung der Reflexion natürlichen Medun. Wetter und Leben, t. 9, 1957.
7. Кринов Е. Л. Спектральная отражательная способность природных образований. ИАН СССР, Л.—М., 1947.

Л. Б. КРАСИЛЬЩИКОВ

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ФОТОКОМПЕНСАЦИОННЫХ УСИЛИТЕЛЕЙ ДЛЯ АКТИНОМЕТРИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ НА САМОЛЕТЕ

Серийные фотокомпенсационные усилители Ф115 использовались на борту самолета для регистрации суммарной и отраженной радиации.

Показано, что приборы типа А-2 и В-2 эффективны в условиях вибраций при включении в качестве усилителя или преобразователя сопротивления между пиранометром и самописцем К4-51.

Применение на самолете стандартного актинометрического сочетания, состоящего из термоэлектрического прибора и гальванометра ГСА, является затруднительным как вследствие необходимости иметь регистрацию той или иной актинометрической величины, так и вследствие непригодности прибора ГСА к работе в условиях вибрации и наклонов.

Регистрация электрических, медленно изменяющихся величин на самолете производится обычно широко распространенным самописцем К4-51. Его гальванометры имеют пределы отклонения 1—0—1 ма при сопротивлении около 10 ом. Непосредственное включение актинометрического прибора, например пиранометра на гальванометр самописца, не позволяет получить удовлетворительные регистрограммы вследствие малости тока в цепях измерительного гальванометра. Действительно, обычно э. д. с. на зажимах пиранометра не превышает 10 мв при его сопротивлении 30 ом. Эти параметры таковы, что максимальный ток через измерительный гальванометр самописца не превосходит $\sim 0{,}25$ ма. При этом максимальное отклонение пятна на фотобумаге самописца составляет $^1/_8$ ее ширины, или 15 мм.

В последние годы все большее распространение в практике электрических измерений получают фотокомпенсационные гальванометрические усилители, в которых для увеличения отклонения стрелки или светового пятна прибора используются фотоэлементы, следящие за малыми перемещениями светового пятна первичного гальванометра.

Как правило, фотокомпенсационные усилители должны устанавливаться на неподвижных вертикальных щитах, однако вследствие применения в усилителях типа Ф115 сравнительно грубого гальванометра, имеющего хорошую балансировку, усилители Ф115/2 при хорошей амортизации могут быть с успехом использованы на самолете.

Усилители Ф115 выпускаются промышленностью двух типов: амперметры Ф115/А и вольтметры Ф115/В [1].

В табл. 1 приведены пределы измерений с гальванометрами К4-51 при использовании модификаций промышленных усилителей Ф115.

Приборы модификации А-1 и В-1 недостаточно устойчивы для их использования на самолете. Наиболее подходящими для самолетных актинометрических измерений являются приборы второй модификации.

Таблица 1

Пределы измерений и эффективное внутреннее сопротивление для разных модификаций усилителя Ф115

Модификация усилителя	Пределы измерений	Эффективное внутреннее сопротивление, ом
Ф115/А=1	50—0—50 мка	0,5
Ф115/А=2	200—0—200 мка	0,1
Ф115/А=3	1—0—1 ма	0,1
Ф115/В=1	2—0—2 мв	10^4
Ф115/В=2	10—0—10 мв	10^5
Ф115/В=3	50—0—50 мв	$5 \cdot 10^6$

При заданных выше параметрах актинометрического прибора $E_{max}=10$ мв, $R_n=30$ ом максимальное отклонение по шкале самописца К4-51 определяется простыми соотношениями.

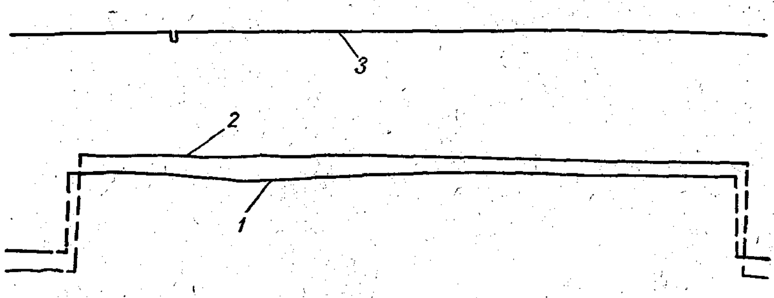

Рис. 1. Образец записи сигналов при измерении альбедо облаков. Высота полета 1300 м, высота верхней границы облаков 300 м.

1 — отраженная радиация, записанная при помощи усилителя Ф115 на обычном гальванометре К4-51; *2* — суммарная радиация, записанная без усилителя при помощи гальванометра повышенной чувствительности; *3* — код для расшифровки записи.

Для прибора Ф115/А-2 $I_{max}=\frac{10}{30,1}=0,333$ ма; такая сила тока соответствует отклонению пятна на 100 мм. Для прибора Ф115/В-2 максимальное отклонение будет 60 мм.

Для актинометрических измерений пригодны как приборы А-2, так и В-2, однако следует учитывать, что приборы серии В, обладая большим входным сопротивлением, по существу измеряют э. д. с. на зажимах актинометрического прибора, поэтому изменение сопротивлений подводящих проводов и введение сопротивлений в измерительную цепь никаких изменений показаний прибора не дают. Если требуется загрубить чувствительность актинометрического комплекса, то в указанном случае это можно сделать путем шунтирования выходного прибора.

При использовании приборов серии А возможны ошибки в измерениях вследствие изменения сопротивлений контактов и подводящих проводов. Подгонка чувствительности актинометрического комплекса в этом случае может быть осуществлена как шунтированием выходного прибора, так и введением добавочного сопротивления в цепь актинометрического датчика.

Для уменьшения ошибки, связанной с тем, что в ряде случаев актинометрические приборы будут градуироваться отдельно от усилителей, желательно определять переводный множитель прибора при помощи потенциометра, а не гальванометра ГСА. Для этой цели может быть использован переносный потенциометр ПП.

Градуировка при помощи потенциометра позволяет сразу получить значение электродвижущей силы E. При этом исключаются ошибки за счет неточности измерения сопротивлений элементов цепи.

На рис. 1 приведен образец записи отраженной и суммарной коротковолновой радиации при измерении альбедо облаков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович С. Г. Фотогальванометрические компенсационные приборы. Изд. «Энергия», М.—Л., 1964.

Н. П. ПЯТОВСКАЯ

УГЛОВАЯ СТРУКТУРА ПОЛЯ ОТРАЖЕННОЙ РАДИАЦИИ

Сообщаются результаты расчета угловой структуры поля отраженной радиации над типичными подстилающими поверхностями на разных высотах в атмосфере — от 0 до 10 км.

Методика расчета поля отраженной радиации, развитая в работе [1], позволяет рассчитать угловую структуру поля отраженной радиации. Это поле будем характеризовать двумя величинами — яркостью B (или интенсивностью) и потоком R. Связь между B и R определяется формулой

$$R = \int_{(2\pi)} B(\theta, \varphi) \cos\theta \, d\omega. \tag{1}$$

Расчеты по формуле (1) возможны только, если известна угловая структура энергетической яркости в реальных условиях. Например, если бы оказалось, что угловая структура поля отраженной радиации ламбертова, т. е. B не зависит от угла визирования θ и азимута φ, то

$$R = \pi B. \tag{2}$$

В реальных условиях эта простая зависимость не имеет места. Структура поля яркости $B(\theta)$ оказывается сложной, она зависит от соотношения между яркостью дымки $B_1(\theta)$ и яркостью земной поверхности $B_2(\theta)$. Мы изучили ее для типичных подстилающих поверхностей — воды, травы и снега. При этом мы считали атмосферу стандартной.

В [1] получены следующие формулы для расчетов величин $B_1(\theta)$, $B_2(\theta)$ и $B(\theta)$:

$$B(\theta) = B_1(\theta) + B_2(\theta), \tag{3}$$

$$B_1 = \frac{J_0(\lambda)}{\pi} D(\lambda), \quad B_2 = \frac{J_0(\lambda)}{\pi} B^*(\lambda) A(\lambda) T(\lambda), \tag{4}$$

$$B(\lambda) = \frac{J_0(\lambda)}{\pi} [D(\lambda) + B^*(\lambda) A(\lambda) T(\lambda)]. \tag{5}$$

Здесь $J_0(\lambda)$ — плотность потока солнечного излучения на верхней границе атмосферы; $D(\lambda)$ — яркость атмосферной дымки (осредненная по азимуту ϕ); $T(\lambda)$ — прозрачность атмосферы; $A(\lambda)$ — альбедо земной поверхности; $B^*(\lambda)$ — функция, характеризующая преобразование падающего потока $J_0(\lambda)$ в освещенность на Земле $E(\lambda)$. Значения всех этих величин рассчитаны в работах [6, 7].

Для интегральной дымки (по всему коротковолновому участку) в [1] получено выражение

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\,[0{,}863D\,(0{,}3) + 0{,}511D\,(0{,}2)]\ \text{кал/см}^2\,\text{мин. стер.}, \qquad (6)$$

а для яркости отраженного пучка

$$B_2 = \int\limits_{0{,}4\mu}^{2{,}5\mu} \frac{J_0\,(\lambda)}{\pi}\,A\,(\lambda)\,T\,(\lambda)\,B^*\,(\lambda)\,d\lambda\ \text{кал/см}^2\,\text{мин. стер.}, \qquad (7)$$

где D (0,3) и D (0,2) — яркости атмосферной дымки, осредненные по азимуту, соответственно при $\tau_0(\lambda_0)=0{,}3$ и $\tau_0\,(\lambda_0)=0{,}2$.

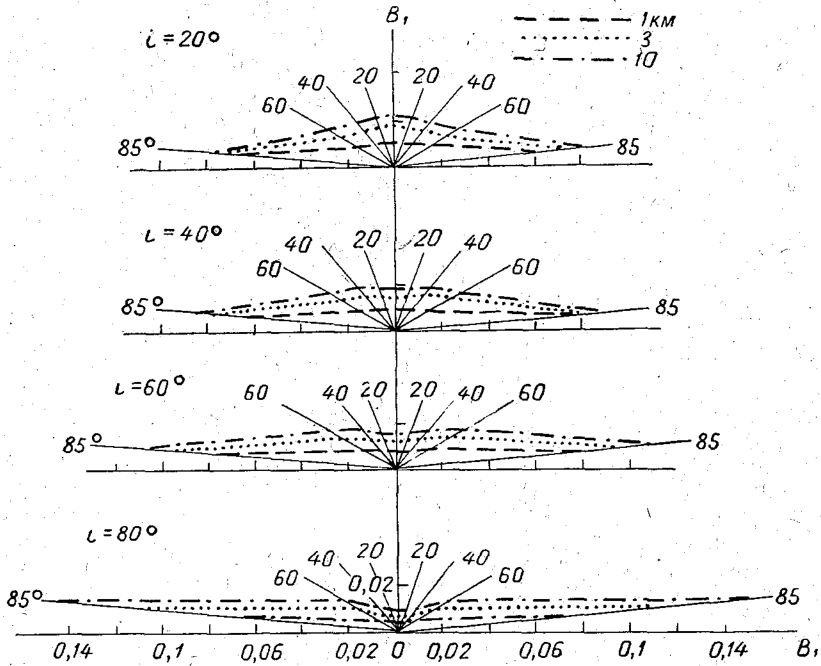

Рис. 1. Индикатрисы яркости атмосферной дымки над водой.

Проинтегрировав по λ данные о спектральной яркости, рассчитанной для трех изучаемых поверхностей по формулам (6) и (7), получим индикатрисы яркости.

Некоторые результаты таких расчетов проиллюстрируем рисунками. На рис. 1—3 даны индикатрисы яркости атмосферной дымки, осредненные по азимуту, для разных зенитных расстояний Солнца i, высот z и альбедо A. Мы видим, что яркость дымки $B_1(\theta)$ с увеличением высоты z и альбедо A поверхности растет. Отметим значительную анизотропию поля отраженной радиации, обусловленного только дымкой. Эта анизотропия отражает анизотропию атмосферной индикатрисы рассеяния.

С увеличением зенитного расстояния Солнца при больших θ яркость $B_1(\theta)$ растет над поверхностями с малым альбедо (вода и трава) и, наоборот, уменьшается над поверхностями с большим альбедо (снег).

На рис. 4—6 даны индикатрисы яркости $B_2(\theta)$, обусловленные отражением от земной поверхности, для тех же i, z и A, что и на рис. 1—3. Видим, что для всех изучаемых поверхностей с увеличением высоты z и

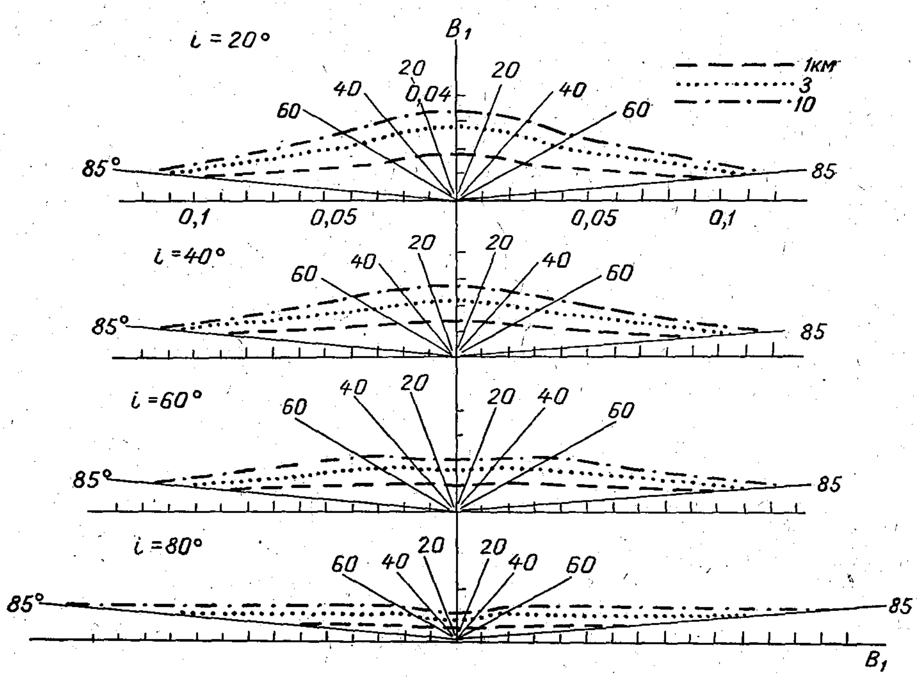

Рис. 2. Индикатрисы яркости атмосферной дымки над травой.

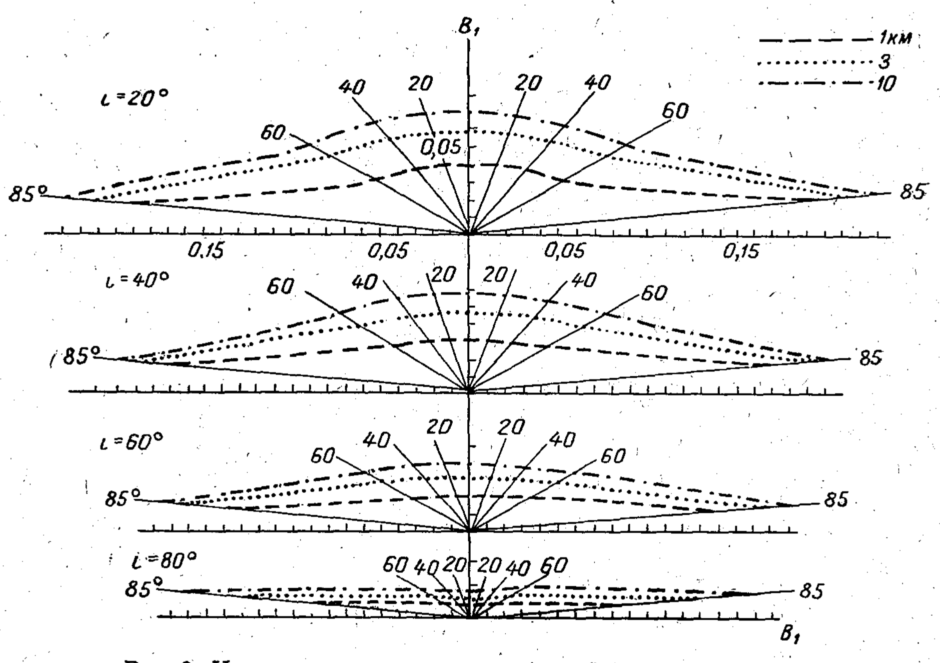

Рис. 3. Индикатрисы яркости атмосферной дымки над снегом.

угла θ яркость $B_2(\theta)$ убывает, т. е. величина $B_2(\theta)$ имеет ход, обратный ходу дымки. Яркость $B_2(\theta)$ над снегом и травой на всех уровнях убывает с ростом i. Для воды такая закономерность обнаружена только при малых i ($\leqslant 40°$). При $i > 40°$ $B_2(\theta)$, наоборот, несколько растет.

Полные индикатрисы яркости $B(\theta)$ над водой, травой и снегом представлены на рис. 7—9. Здесь связь B с θ зависит от соотношения яркости дымки и яркости отраженного пучка. С ростом i при малых альбедо увеличивается яркость дымки $B_1(\theta)$. При увеличении альбедо растет яркость отраженного пучка $B_2(\theta)$, особенно для малых i, поэтому характерная для дымки зависимость B от θ сглаживается.

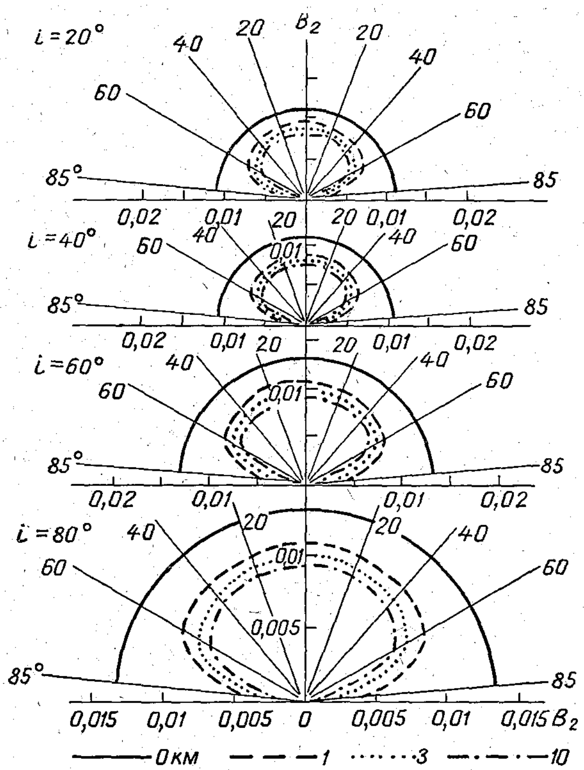

Рис. 4. Индикатрисы яркости, обусловленные отражением от воды.

Таким образом, основной вывод из анализа угловой структуры поля отраженной радиации состоит в том, что с изменением угла визирования θ каждая из функций (B_1 и B_2) меняется по-разному: с увеличением θ яркость дымки растет, а яркость отраженного от земной поверхности пучка, как правило, убывает. Поведение результирующей функции (индикатрисы яркости поля отраженной радиации) зависит от соотношения между абсолютными значениями этих яркостей. Причем основными факторами, влияющими на изменение угловой структуры поля отраженной радиации, являются изменение альбедо поверхности и характер индикатрисы отражения. Оптические же свойства атмосферы более или менее стандартны. Отметим, что поток R значительно меньше зависит от индикатрисы отражения, чем яркость B.

Полученные нами закономерности изменения угловой структуры поля отраженной радиации позволили разработать метод перехода от энергетической яркости, измеренной приборами с искусственных спутников Земли (ИСЗ), к потокам уходящей коротковолновой радиации (УКР) [8]. Знание же потока УКР позволяет решить задачу определения с помощью ИСЗ баланса коротковолновой радиации для системы Земля—атмосфера.

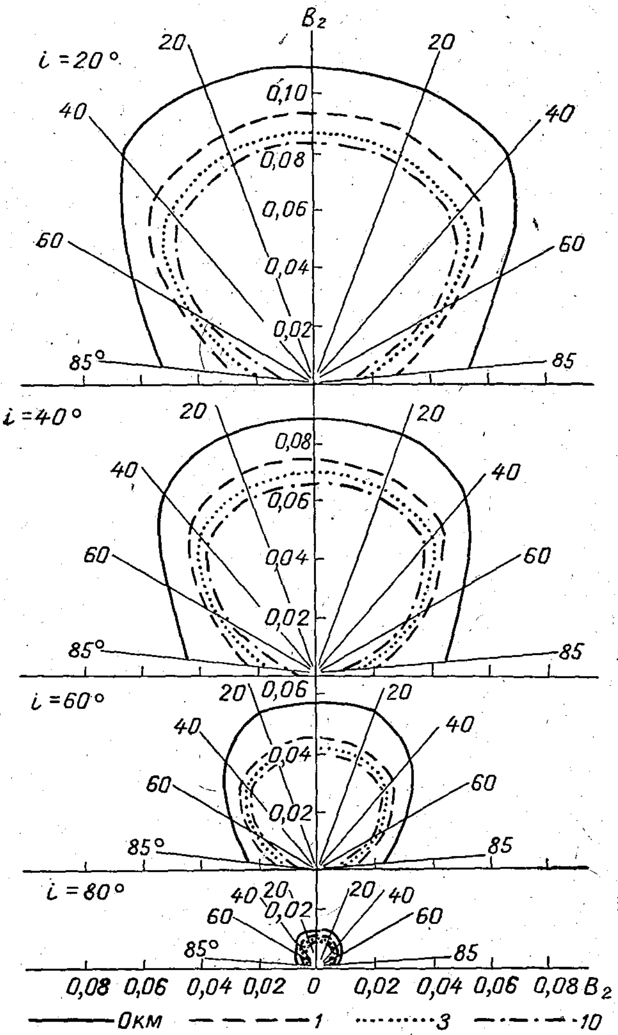

Рис. 5. Индикатрисы яркости, обусловленные отражением от травы.

Анализ связи между яркостью $B(\theta)$ и полным потоком R позволяет судить о степени ламбертовости системы Земля—атмосфера. На рис. 7—9 видно, что степень отклонения от ламбертовости слабо зависит от высоты Солнца для i, равных 20 и 40°. Отклонение мало́ для поверхностей с большим альбедо (рис. 4), потому что свет дымки играет малую роль по сравнению с отраженным потоком.

Для иллюстрации связи между потоком и яркостью приводим табл 1, где дано отношение $\eta = \frac{B(\theta)}{R}$ в 1/стер. для тех же случаев, что и на рис. 7—9.

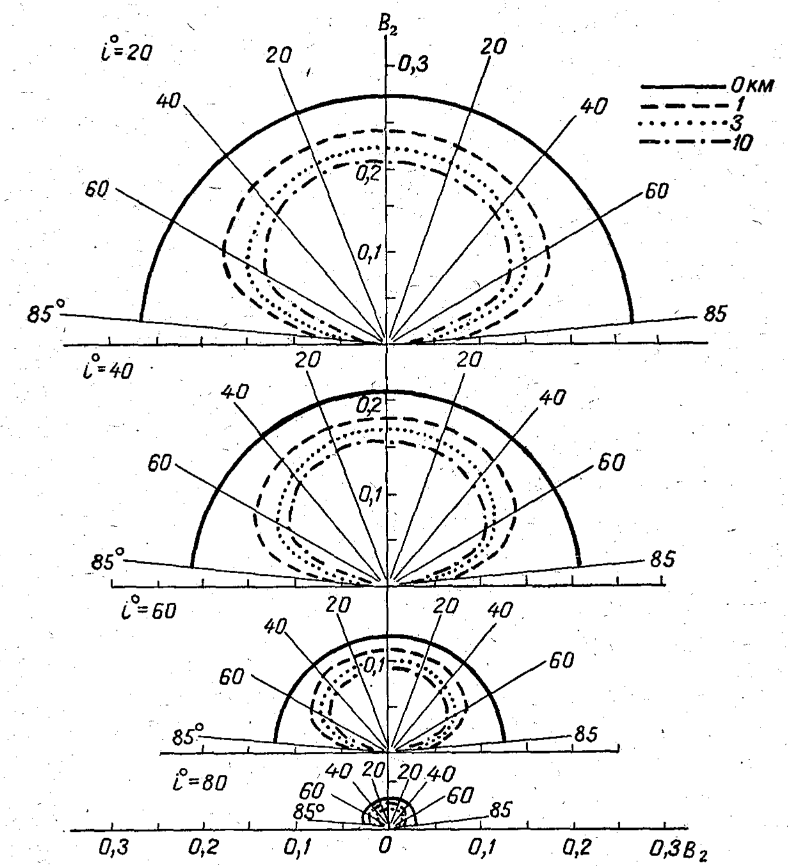

Рис. 6. Индикатрисы яркости, обусловленные отражением от снега.

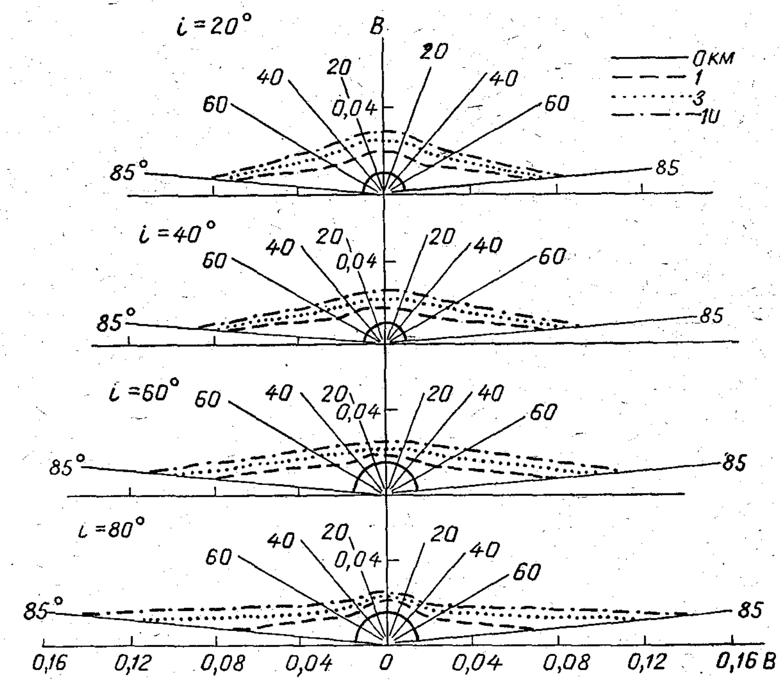

Рис. 7. Индикатрисы яркости поля отраженной радиации над водой.

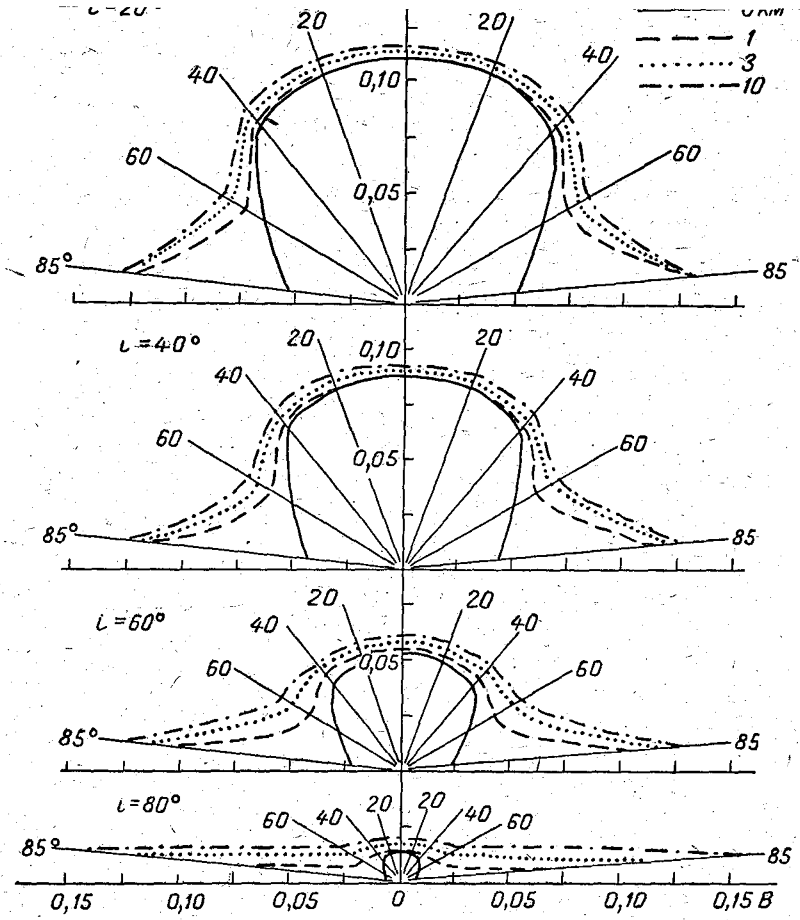

Рис. 8. Индикатрисы яркости поля отраженной радиации над травой.

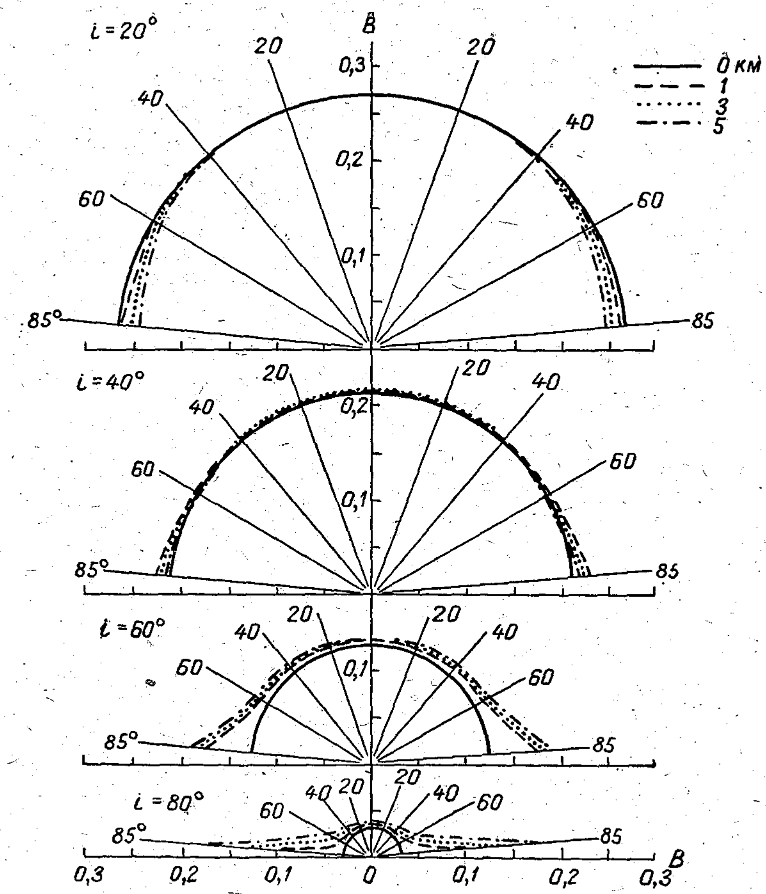

Рис. 9. Индикатрисы яркости поля отраженной радиации над снегом.

Таблица 1

$\frac{B(\theta)}{R}$ (1/стер.)

i°	Поверхность	z км	θ° 0	20	40	60	85
20	Вода	0	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34
		1	0,27	0,28	0,29	0,35	0,97
		3	0,27	0,28	0,29	0,36	0,86
		10	0,28	0,28	0,30	0,36	0,77
	Трава	0	0,40	0,40	0,37	0,27	0,27
		1	0,37	0,37	0,36	0,28	0,42
		3	0,36	0,37	0,35	0,29	0,41
		10	0,35	0,35	0,34	0,29	0,39
	Снег	0	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34
		1	0,34	0,34	0,34	0,33	0,34
		3	0,34	0,34	0,34	0,33	0,32
		10	0,34	0,34	0,34	0,33	0,32
40	Вода	0	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34
		1	0,25	0,26	0,29	0,35	1,08
		3	0,24	0,26	0,29	0,37	0,96
		10	0,24	0,26	0,29	0,37	0,89
	Трава	0	0,40	0,40	0,38	0,27	0,27
		1	0,36	0,36	0,35	0,29	0,48
		3	0,35	0,35	0,34	0,30	0,48
		10	0,33	0,34	0,33	0,30	0,45
	Снег	0	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34
		1	0,34	0,34	0,34	0,34	0,36
		3	0,34	0,34	0,34	0,33	0,35
		10	0,33	0,33	0,34	0,33	0,34
60	Вода	0	0,33	0,33	0,33	0,33	0,33
		1	0,24	0,25	0,28	0,36	1,08
		3	0,23	0,24	0,28	0,37	1,04
		10	0,23	0,24	0,27	0,38	1,02
	Трава	0	0,40	0,40	0,37	0,26	0,26
		1	0,34	0,34	0,34	0,30	0,64
		3	0,32	0,32	0,33	0,32	0,65
		10	0,30	0,30	0,30	0,31	0,62
	Снег	0	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34
		1	0,33	0,33	0,33	0,34	0,44
		3	0,32	0,32	0,33	0,34	0,45
		10	0,32	0,32	0,33	0,34	0,46
80	Вода	0	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34
		1	0,28	0,28	0,29	0,34	1,00
		3	0,25	0,26	0,27	0,35	1,31
		10	0,24	0,24	0,26	0,36	1,44
	Трава	0	0,39	0,39	0,37	0,26	0,26
		1	0,27	0,27	0,29	0,32	1,32
		3	0,24	0,24	0,26	0,34	1,55
		10	0,20	0,21	0,24	0,32	1,49
	Снег	0	0,34	0,34	0,34	0,34	0,34
		1	0,29	0,30	0,31	0,34	0,79
		3	0,27	0,28	0,29	0,34	1,00
		10	0,26	0,27	0,28	0,35	1,14

Видим, что наибольшие отклонения от значения $\eta=0{,}32$, соответствующего изотропному отражению от системы Земля-атмосфера, получены при $\theta=85°$ для низкого Солнца ($i=80°$). С уменьшением i отклонения от ламбертовости убывают. При малых i с увеличением высоты z отклонения от $\eta=0{,}32$ убывают, при больших — увеличиваются.

Следует заметить, что, если не осреднять величины $B(\theta)$ и R по азимуту визирования φ, отклонения от $\eta=0{,}32$ будут бо́льшими [2].

Полученные нами закономерности изменения угловой структуры поля отраженной радиации подтверждаются экспериментальными данными. В работе [3] нами предложен простой метод определения интегральных индикатрис яркости в области спектра 0,4—2,5 мк, в основе которого лежит применение обычных термоэлектрических пиранометров с насадками. Этот метод был применен для определения средних по азимуту яркостей различных снежных поверхностей с самолета, летящего на высоте 100 м. Во всех случаях индикатрисы яркости оказались сильно вытянутыми при больших углах раскрытия пиранометра, причем степень вытянутости значительно возрастает с уменьшением высоты Солнца над горизонтом, что подтверждает теоретические выводы о характере индикатрис яркости поля отраженной радиации над снегом.

Экспериментальные данные других авторов [4, 5] также подтверждают наши выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин К. С., Пятовская Н. П. Поле коротковолновой радиации над типичными подстилающими поверхностями. Труды ГГО, вып. 166, 1964.
2. Малкевич М. С. Угловое и спектральное распределение радиации, отраженной Землей в мировое пространство. Сб. «Искусственные спутники Земли», вып. 14, 1962.
3. Шифрин К. С., Пятовская Н. П. Об индикатрисах яркости естественных поверхностей. Труды ГГО, вып. 68, 1957.
4. Заводчикова В. Г., Кондратьев К. Я. О пространственном распределении рассеянной и отраженной радиации. Вестн. ЛГУ, сер. матем., физ. и хим., вып. 2, 1953.
5. Кондратьев К. Я., Манолова М. П. Угловое распределение интенсивности радиации, отраженной естественными подстилающими поверхностями. Вестн. ЛГУ, сер. физ. и хим., вып. 2, 1957.
6. Шифрин К. С., Пятовская Н. П. Таблицы наклонной дальности видимости и яркости дневного неба. Гидрометеоиздат Л., 1959.
7. Шифрин К. С., Авасте О. А. Потоки коротковолновой радиации в безоблачной атмосфере. Сб. «Исследования по физике атмосферы», вып. 2. Изд. Ин-та физики и астрономии АН ЭССР, Тарту, 1960.
8. Шифрин К. С., Коломийцов В. Ю., Пятовская Н. П. Определение потока уходящей коротковолновой радиации с помощью искусственного спутника Земли. Труды ГГО, вып. 166, 1964.

Н. П. ПЯТОВСКАЯ

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА РАСЧЕТА ПОТОКОВ КОРОТКОВОЛНОВОЙ РАДИАЦИИ В РЕАЛЬНОЙ АТМОСФЕРЕ

Приводятся результаты расчета потоков коротковолновой радиации на разных уровнях в атмосфере в спектральной области 0,4—2,5 мк и результаты сопоставления этих потоков с экспериментальными данными.

До недавнего времени расчеты потоков коротковолновой радиации выполнялись либо для релеевской, либо для сильно идеализированной модели атмосферы. Существовавшими немногочисленными экспериментальными данными об оптических свойствах реальной атмосферы пользовались очень мало; схемы расчета получались настолько сложными, что не могли быть использованы практически.

Развитие теоретических и экспериментальных исследований за последние годы позволило выполнять расчеты для реальной атмосферы и сравнивать их с экспериментальными данными. Подобное сравнение позволяет отобрать наилучшее приближенное решение, а также выяснить вопрос о необходимых перспективах дальнейшего развития теории переноса излучения.

Из существующих схем расчета потоков коротковолновой радиации наиболее простой является схема, предложенная в работах [1, 2, 4, 5]. Точность ее оказывается вполне удовлетворительной для большого круга различных практических задач, которые приходится решать в авиации, аэрофотосъемке и др.

Мы выполнили по этой схеме расчеты коротковолновых нисходящих и восходящих потоков радиации над типичными подстилающими поверхностями в спектральной области 0,4—2,5 мк для зенитных расстояний Солнца i, равных 20, 40, 60, 80°, различных высот z над поверхностью Земли ($0 \leqslant z \leqslant 10$ км). Рассматривались три типичные поверхности: водная, травяная и снежная.

Расчеты выполнены для стандартной радиационной модели атмосферы. Параметры этой модели, предложенные К. С. Шифриным, О. А. Авасте и др. [1, 2, 3], следующие: горизонтальная дальность видимости (у земной поверхности) для $\lambda=\lambda_0=0,55$ μ $S_0(\lambda_0)=20$ км, оптическая толщина всей атмосферы для этой же длины волны $\tau_0(\lambda_0)=0,3$, общее содержание водяного пара в вертикальном столбе атмосферы $W_{H_2O}=2,1$ г/см^2, содержание углекислого газа $W_{CO_2}=264$ см (толщина эквивалентного слоя углекислого газа при нормальном давлении и температуре). Стандартная радиационная модель удовлетворительно описывает средний радиационный режим реальной атмосферы, как это вытекает из целого ряда работ.

Некоторые данные по расчету коротковолновых нисходящих и восходящих потоков радиации приведены в работе [3]. Здесь мы подробнее остановимся на результатах расчетов нисходящих потоков радиации и сравним результаты расчетов нисходящих и восходящих потоков с результатами непосредственных измерений.

Потоки прямой радиации. Результаты расчетов интегральных потоков прямой радиации на горизонтальную $S_{гор}$ и перпендикулярную S_1 к лучам поверхность в зависимости от высоты Солнца ($h_\odot$) приведены на рис. 1, откуда видно, что при малых i (больших $h_\odot$) поток прямой радиации возрастает с высотой z медленнее, чем при больших i. Но абсолютные разности потоков прямой радиации на различных высотах в первом случае оказываются бо́льшими.

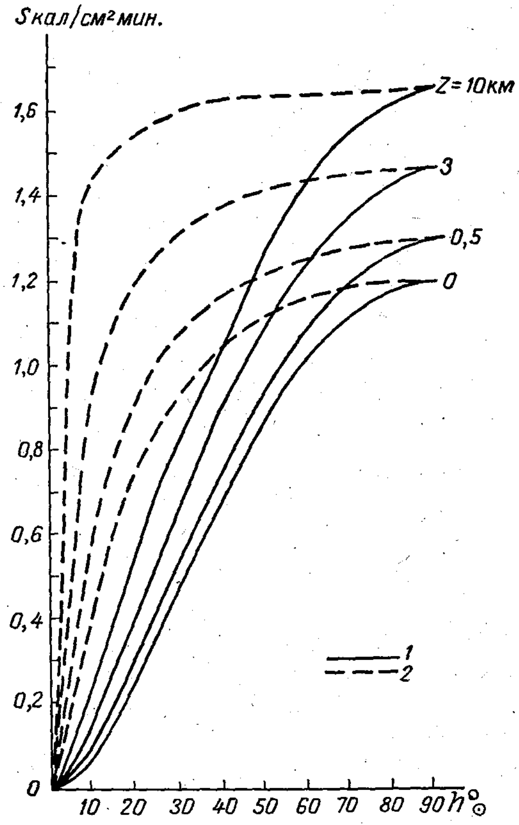

Рис 1. Изменение потока прямой радиации на горизонтальную (1) и перпендикулярную (2) к лучам поверхность в зависимости от высоты Солнца.

Поток рассеянной радиации. Наибольшие изменения потока рассеянной радиации происходят в слое атмосферы от 0 до 2—3 км при высоком Солнце (малых i). Для примера приводим рис. 2, где дано изменение потока рассеянной радиации над снегом в зависимости от высоты z для четырех значений i. Из рисунка видно, что начиная с высоты 4—5 км поток рассеянной радиации падает почти линейно.

При увеличении альбедо поток рассеянной радиации и его вертикальный градиент возрастают. Для поверхностей с большим альбедо поток рассеянной радиации возрастает с высотой Солнца значительно быстрее, чем для поверхностей с малым альбедо. Это иллюстрирует рис. 3, где дана зависимость потока рассеянной радиации от высоты Солнца на разных уровнях над снегом и травой.

Соотношение между потоками рассеянной и прямой радиации. Так как потоки рассеянной и прямой радиации зависят от высоты Солнца, то и соотношение между этими потоками сильно меняется с высотой Солнца. Поток рассеянной радиации зависит также и от альбедо, поэтому интересно исследовать соотношение между этими величинами на различных уровнях. Результаты таких расчетов приведены в табл. 1.

Во всех рассмотренных случаях отношение потока рассеянной радиации к потоку прямой уменьшается с высотой z. Так, на уровне $z=10$ км это отношение в 10 с лишним раз меньше, чем на уровне

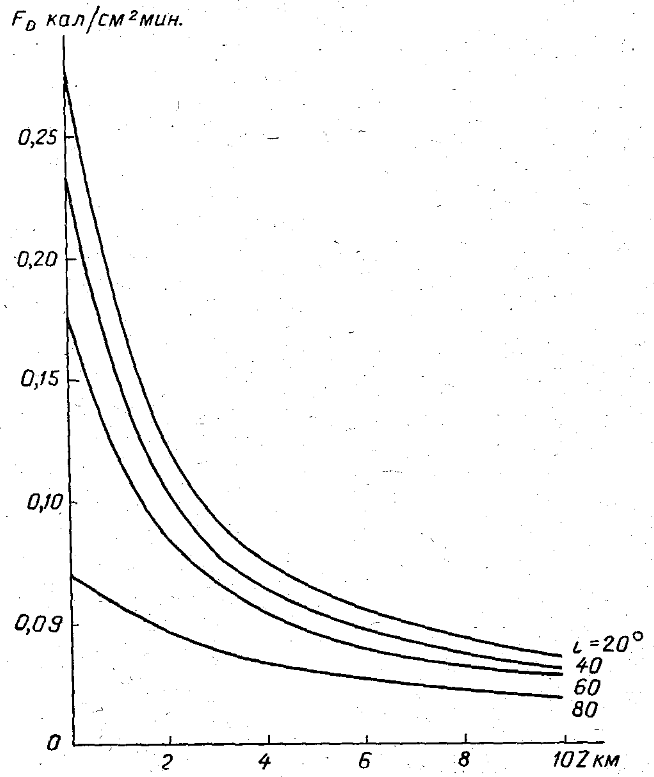

Рис. 2. Изменение потока рассеянной радиации над снегом в зависимости от высоты z.

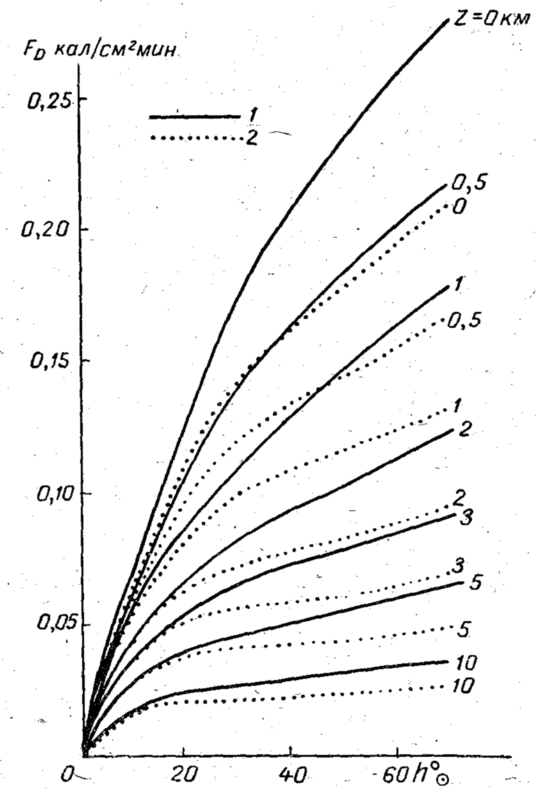

Рис. 3. Зависимость потока рассеянной радиации над снегом (*1*) и над траной (*2*) от высоты Солнца.

земной поверхности. По мере увеличения высоты Солнца поток прямой радиации возрастает значительно быстрее, чем поток рассеянной. Это показано на рис. 1—3. При увеличении $h_{\odot}$ от 10 до 70° поток прямой радиации на уровне земной поверхности увеличивается в 15 раз (от 0,074 до 1,116 кал/см²мин.), а поток рассеянной радиации над водой, травой и снегом — соответственно в 3, 3,3 и 4,1 раза (от 0,067 до 0,203, от 0,063 до 0,210 и от 0,069 до 0,282 кал/см²мин.).

На высоте 10 км при увеличении $h_{\odot}$ от 10 до 70° поток прямой радиации увеличивается в 6,2 раза (от 0,249 до 1,551 кал/см²мин.), поток рассеянной радиации над водой, травой и снегом — в 1,3, 1,4 и 1,9 раза соответственно (от 0,022 до 0,028, от 0,020 до 0,028 и от 0,019 до 0,036 кал/см²мин.) [3].

При малых i доля рассеянной радиации в общем потоке суммарной радиации незначительна. С увеличением i эта доля растет, и при очень низком Солнце (больших i) поток рассеянной радиации может даже превосходить поток прямой радиации. Так, из табл. 1 видно, что уже при $i=80°$ на земной поверхности отношение потока рассеянной радиации к потоку прямой радиации приближается к единице.

Таблица 1

Отношение потока рассеянной радиации к потоку прямой радиации над типичными подстилающими поверхностями ($F_D/S_{гор}$)

$z_{км}$	$i=20°$			$i=40°$		
	вода	трава	снег	вода	трава	снег
0,0	0,182	0,188	0,253	0,202	0,210	0,275
0,5	0,136	0,139	0,180	0,152	0,156	0,196
1,0	0,111	0,112	0,144	0,118	0,116	0,150
2,0	0,070	0,073	0,093	0,077	0,080	0,099
3,0	0,051	0,052	0,066	0,056	0,058	0,071
5,0	0,034	0,035	0,045	0,039	0,039	0,048
10,0	0,018	0,018	0,023	0,020	0,020	0,025

$z_{км}$	$i=60°$			$i=80°$		
	вода	трава	снег	вода	трава	снег
0,0	0,303	0,308	0,372	0,935	0,899	0,973
0,5	0,228	0,230	0,266	0,648	0,621	0,649
1,0	0,179	0,181	0,207	0,506	0,487	0,497
2,0	0,120	0,119	0,135	0,336	0,334	0,319
3,0	0,088	0,089	0,100	0,261	0,253	0,247
5,0	0,059	0,061	0,066	0,174	0,170	0,165
10,0	0,030	0,030	0,036	0,086	0,080	0,076

Для иллюстрации некоторых результатов приводим рис. 4, где дана зависимость отношения $\frac{F_D}{S_{гор}}$ от i для воды и снега на разных уровнях.

Поток суммарной радиации. Основные закономерности изменения потока суммарной радиации определяются теми же факторами, которые обусловливают изменения потоков прямой и рассеянной радиации (высота Солнца, альбедо подстилающей поверхности, высота над поверхностью Земли). Наглядное представление о закономерностях изменения потока суммарной радиации можно получить из рис. 5—7.

На рис. 5 дана зависимость потока суммарной радиации над травой от высоты Солнца на разных уровнях. Из рисунка видно, что эта зависимость нелинейна. Подобная зависимость получается и для других рассмотренных поверхностей (снега и воды).

На рис. 6 и 7 представлена зависимость потока суммарной радиации от высоты z над водой и снегом для разных зенитных расстояний Солнца i. На этих рисунках кривыми изображены вычисленные интегральные потоки суммарной радиации, значками — интегральные потоки, измеренные автором при разных τ_0 и i.

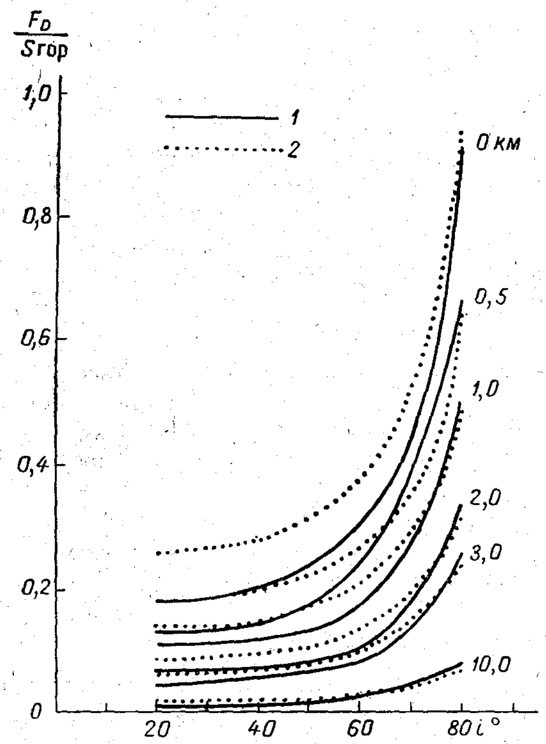

Рис. 4. Изменение отношения потока рассеянной радиации над водой (*1*) и снегом (*2*) к потоку прямой радиации в зависимости от зенитного расстояния Солнца.

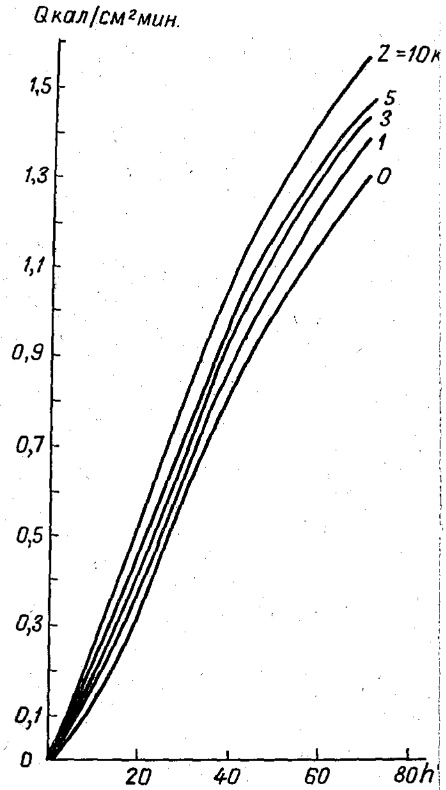

Рис. 5. Зависимость потока суммарной радиации над травой от высоты Солнца.

Из рис. 6 и 7 видно, что наибольшее увеличение потока суммарной радиации с высотой происходит в слое атмосферы от 0 до 2—3 км, выше этого слоя поток суммарной радиации растет медленнее, приблизительно линейно. С ростом альбедо поток суммарной радиации при i, равном 20, 40, 60°, на всех уровнях увеличивается, при i, равном 80°, он практически одинаков для всех поверхностей.

Сравнение результатов расчета нисходящих и восходящих потоков радиации с результатами непосредственных измерений. Сравнивать результаты расчета с результатами измерений можно только при идентичности всех предположений, заложенных в расчетной схеме. Однако точного совпадения всех условий добиться практически невозможно. Поэтому всякое сопоставление носит приближенный характер.

Мы провели сопоставление на отдельных примерах, выбрав те случаи измерений, при которых высота Солнца $h_{\odot}$ и альбедо подстилающей поверхности A совпадали с расчетными. Оптическая же толщина τ_0 при измерениях и расчетах была различной.

Результаты измерений [6, 7] показали, что величина τ_0 существенным образом влияет на распределение потока суммарной радиации по высоте, особенно в нижнем километровом слое атмосферы. Поэтому необходимо знать эту величину. Сравнение результатов расчета с результатами измерений при одинаковых значениях τ_0 дает возможность судить о пригодности принятого метода расчета для частных случаев, при разных τ_0 позволяет оценить стабильность оптического режима реальной атмосферы.

Обратимся к рис. 6, на нем точками нанесены измеренные потоки суммарной радиации. Они получены автором во время семи полетов над водой (Ладожское озеро) летом и осенью 1954 г. при различных значениях τ_0 и при зенитных расстояниях солнца i, равных 40, 60, 70°. Кривыми на рис. 6 изображены вычисленные потоки суммарной радиации для одного значения $\tau_0(\lambda_0)=0{,}3$ и тех же значений i, равных 40, 60, 70°.

На рис. 6 видно, что величины потоков суммарной радиации Q, измеренные при τ_0, равном 0,36, 0,42 и 0,43, больше рассчитанных величин Q (точки располагаются выше теоретических кривых), причем с ростом τ_0 эти расхождения увеличиваются. Так, при $\tau_0=0{,}43$ максимальное расхождение между вычисленной и измеренной величинами потоков суммарной радиации составляет 12,3%, а при $\tau_0=0{,}36$ оно равно 11,2%. С уменьшением высоты z эти расхождения убывают.

Потоки суммарной радиации, измеренные при τ_0, равном 0,24 и 0,20, меньше вычисленных потоков (точки располагаются ниже теоретических кривых). Максимальное расхождение между вычисленным потоком и измеренным в этих случаях равно соответственно 12,9 и 15,3%.

Потоки, измеренные при τ_0, равном 0,29 и 0,27, т. е. при значениях τ_0, близких к расчетным, практически совпадают с вычисленными. Максимальные расхождения здесь составляют соответственно 5,7 и 3,2%.

Рассмотрим рис. 7. Здесь точками нанесены измеренные потоки суммарной радиации, полученные автором во время восьми полетов над однородным снежным покровом (Ладожское озеро или ровное снежное поле) зимой и ранней весной 1954 г. Эти потоки получены при различных значениях τ_0 и при i, равных 48,4, 60 и 80°. Кривыми нанесены вычисленные потоки суммарной радиации для этих же значений i и одного значения $\tau_0(\lambda_0)=0{,}3$.

Здесь, как и в предыдущем случае, величины потоков суммарной радиации, измеренные при $\tau_0=0{,}36$, больше расчетных величин (точки располагаются выше кривых). Максимальное расхождение между вычисленными и измеренными величинами суммарной радиации в этом случае равно 11,5%.

При значении $\tau_0=0{,}27$, т. е. близком к расчетному, расхождение между вычисленным и измеренным потоками составляет 6,5%. При убывании τ_0 эти расхождения возрастают. Так, при $\tau_0=0{,}22$ максимальное расхождение составляет 16,4%. Наибольшие расхождения между вычисленными и измеренными потоками получаются при малых τ_0 и низком Солнце. Так, при $\tau_0=0{,}15$—$0{,}14$ для $i=80°$ они достигают 30—48%.

Таким образом, рассмотрев рис. 6 и 7, приходим к выводу, что зимой расхождения между вычисленными и измеренными потоками суммарной радиации больше, чем летом. При значениях τ_0, близких к расчетному, т. е. к $\tau_0(\lambda_0)=0{,}3$, расхождения даже зимой не превышают 6—7%.

Сопоставление вычисленных и измеренных восходящих потоков

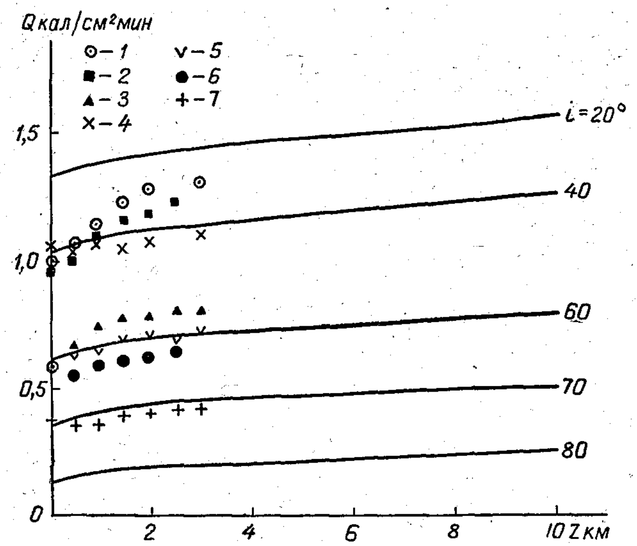

Рис. 6. Изменение потока суммарной радиации над водой в зависимости от высоты z.

Кривые — потоки, вычисленные при $\tau_0(\lambda_0)=0{,}3$; *1* — полет при $\tau_0=0{,}43$; *2* — $\tau_0=0{,}42$; *3* — $\tau_0=0{,}36$; *4* — $\tau_0=0{,}29$; *5* — $\tau_0=0{,}27$; *6* — $\tau_0=0{,}84$; *7* — $\tau_0=0{,}20$.

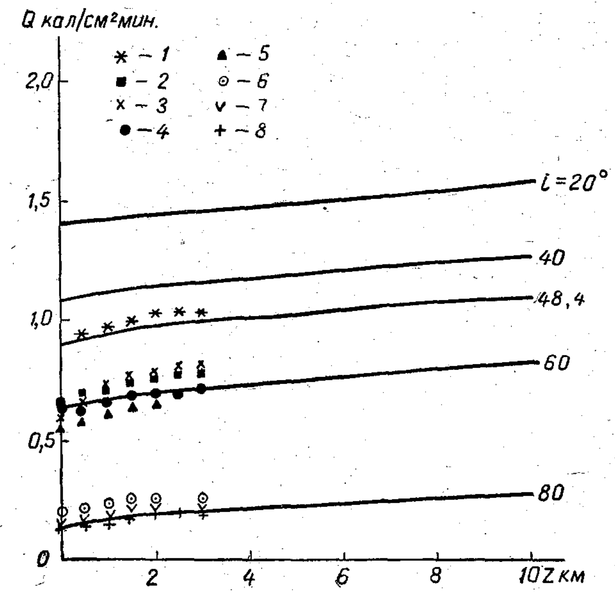

Рис. 7. Изменение потока суммарной радиации над снегом в зависимости от высоты z.

Кривые — потоки, вычисленные при $\tau_0(\lambda_0)=0{,}3$; *1*—*3* — полеты при $\tau_0=0{,}36$; *4* — $\tau_0=0{,}27$; *5* — $\tau_0=0{,}22$; *6*—*7* — $\tau_0=0{,}15$; *8* — $\tau_0=0{,}14$.

отраженной радиации показывает, что расхождения между ними получились несколько бо́льшими, чем для нисходящих потоков. Так, максимальные расхождения между измеренными потоками отраженной радиации, полученными во время полетов над Ладожским озером летом при i, равных 40 и 60°, и τ_0, равных 0,38, 0,40, 0,42 [6], и вычисленными потоками при $\tau_0(\lambda_0)=0{,}3$ и тех же значениях i составляют на высотах 0, 2, 3 км соответственно 37, 24, 15%. Для зимы эти расхождения увеличиваются.

Следует напомнить, что расчеты выполнены нами для стандартной радиационной модели атмосферы. В этой модели, как уже упоминалось выше, принято, что содержание водяного пара в вертикальном столбе атмосферы $W_{H_2O}=2{,}1$ г/см², а $\tau_0(\lambda_0)=0{,}3$. Однако наблюдения показывают, что для зимы эти величины несколько завышены, в среднем они составляют: $W_{H_2O}\leqslant 1$ г/см², $\tau_0(\lambda_0)\leqslant 0{,}2$ (см., например, [6], табл. 1). Этим можно объяснить, что расхождения между вычисленными и измеренными потоками суммарной радиации оказались для зимы значительно больше, чем для лета.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин К. С., Минин И. Н., Авасте О. А., Пятовская Н. П. Теория спектральных потоков коротковолновой радиации в реальной атмосфере. Труды ВНМС, т. 6. Гидрометеоиздат, Л., 1961.
2. Шифрин К. С., Авасте О. А. Потоки коротковолновой радиации в безоблачной атмосфере. Сб. «Исследования по физике атмосферы», вып. 2. Изд. Ин-та физики и астр. АН ЭССР. Тарту, 1960.
3. Шифрин К. С., Пятовская Н. П. Поле коротковолновой радиации над типичными подстилающими поверхностями. Труды ГГО, вып. 166, 1964.
4. Шифрин К. С., Пятовская Н. П. Таблицы наклонной дальности видимости и яркости дневного неба. Гидрометеоиздат, Л., 1959.
5. Шифрин К. С., Минин И. Н. К теории негоризонтальной видимости. Труды ГГО, вып. 68, 1957.
6. Пятовская Н. П. Потоки коротковолновой радиации в свободной атмосфере. Труды ГГО, вып. 109, 1961.
7. Пятовская Н. П. Измерения альбедо с самолета. Труды ГГО, вып. 109, 1961.

И. Л. ЗЕЛЬМАНОВИЧ, А. И. СЕРБИН, В. А. ЭЙДЕНКАЛЬДТ

РЕФРАКЦИЯ ВОЛН ДИАПАЗОНА 0,4÷13 мк В СУХОЙ АТМОСФЕРЕ

В статье рассматривается методика расчета рефракции. Приводятся в графической форме значения рефракции для сухой атмосферы, полученные по упрощенной схеме расчета.

Постановка задачи

Известно, что излучение распространяется в атмосфере, как правило, не по прямой, а по кривой линии. Это происходит из-за того, что показатель преломления воздуха изменяется с высотой и от места к месту.

Кривизна траектории луча в общем виде определяется с помощью вариационного исчисления. Если линия, соединяющая две точки A и B, задана уравнениями [1]

$$y = y(x); \quad z = z(x), \tag{1}$$

где x, y, z — текущие координаты, то время прохождения света вдоль нее будет равно

$$\int\limits_A^B \frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v(x, y, z)}\, dx. \tag{2}$$

Тогда система уравнений Эйлера, определяющих линии распространения, имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2} + \frac{d}{dx}\frac{y'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}{v^2} + \frac{d}{dx}\frac{z'}{v\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$y' = \frac{dy}{dx}; \quad z' = \frac{dz}{dx}; \quad v = \frac{c}{m(x, y, z, t)},$$

c — скорость распространения света в вакууме;
$m = n - i\varkappa$ — комплексный показатель преломления среды;
n — показатель преломления среды;
$\varkappa$ — показатель поглощения среды.

В свою очередь показатель преломления любого небольшого объема атмосферы есть функция многих величин

$$m = m\,[\lambda,\ T,\ P,\ e,\ f(a)]\,.$$

Здесь λ — длина волны; T — температура среды в рассматриваемой точке пространства; P — давление в той же точке; e — парциальное давление водяного пара в той же точке; $f(a)$ — функция распределения

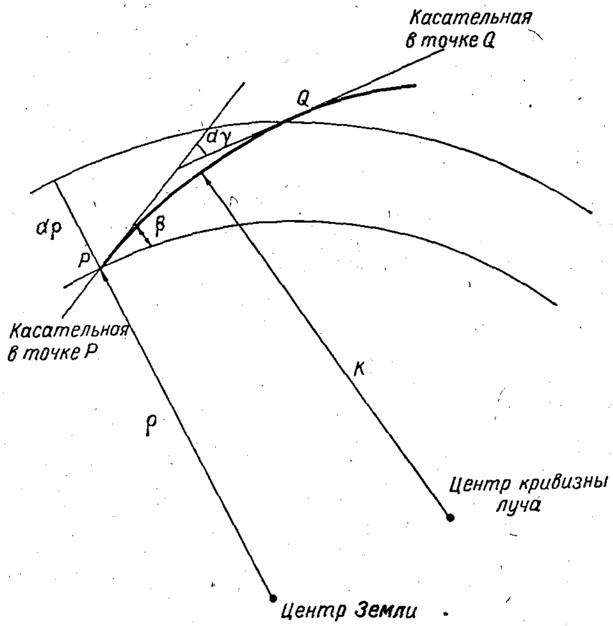

Рис. 1. Искривление луча в бесконечно тонком слое.

в элементарном объеме аэрозоля по размерам частиц (необходимо учитывать в случае $\lambda \gg d \gg a$, где d — расстояние между частицами, a — размеры частиц).

Величины T, P, e и $f(a)$ изменяются в пространстве и во времени. Таким образом, для решения системы уравнений (3) необходимо определить зависимость

$$m = m\,\{\lambda,\ T(x,\ y,\ z),\ \ P(x,\ y,\ z),\ \ e(x,\ y,\ z),\ \ f(a)\,[x,\ y,\ z]\}$$

в различные моменты времени.

Определение же зависимости m от перечисленных выше параметров в общем виде — задача очень сложная. Поэтому только для отдельных ситуаций могут быть получены зависимости $m = m\,(x,\ y,\ z,\ t)$, а следовательно, и определена рефракция.

При условии, что градиент показателя преломления имеет радиальное направление и профиль показателя преломления можно представить в виде ряда слоев с линейной зависимостью от высоты, эта задача рассмотрена Вейсбродом и Андерсеном [2].

Если соблюдаются указанные условия, то при скольжении луча под углом β в тонком слое атмосферы $d\rho$ (рис. 1) кривизна луча определяется выражением

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{|m|}\,\frac{d\,|m|}{d\rho}\cos\beta, \tag{4}$$

где $\frac{d|m|}{d\rho}$ — градиент m (отношение изменения $|m|$ к изменению ρ); $|m|$ — модуль комплексного показателя преломления; K — радиус кривизны траектории луча.

Длина пути луча в слое $d\rho$ будет (рис. 1)

$$K\,d\gamma = \operatorname{cosec}\beta\,d\rho\,. \tag{5}$$

Здесь $d\gamma$ — приращение угла, образованного касательными к траектории в точках входа и выхода луча из слоя.

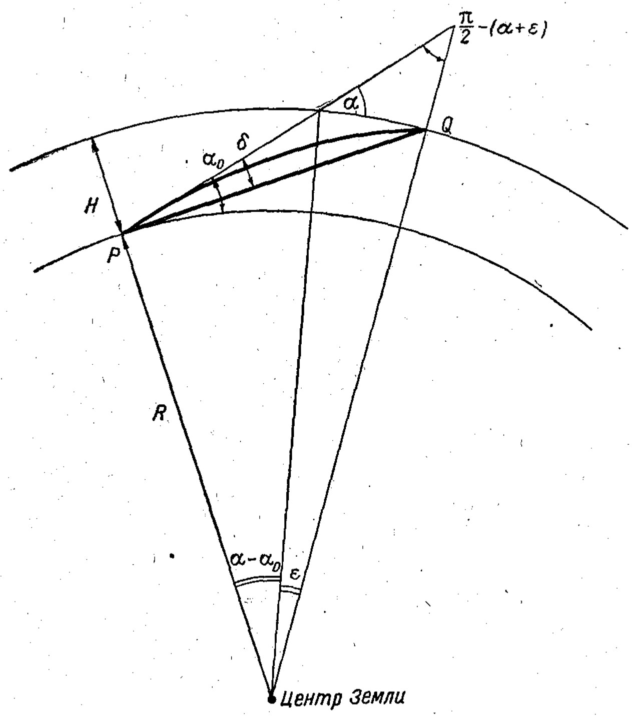

Рис. 2. Искривление луча в рассматриваемой толще атмосферы.

Из уравнений (4) и (5) следует

$$d\gamma = \frac{1}{|m|}\,\frac{d|m|}{d\rho}\,\operatorname{ctg}\beta\,d\rho\,. \tag{6}$$

Угол γ (угол полной рефракции), характеризующий искривление луча в слое, ограниченном высотами $\rho_i = R + H_i$ и $\rho_{i+1} = R + H_{i+1}$ (R — радиус Земли, H_i и H_{i+1} — высоты соответственно i-того и $i+1$-го слоев), определяется выражением

$$\gamma = \int\limits_{\rho_i}^{\rho_{i+1}} \frac{1}{|m|}\,\frac{d|m|}{d\rho}\,\operatorname{ctg}\beta\,d\rho\,. \tag{7}$$

Для сферических слоев (рис. 2) закон Снелля—Декарта [3] записывается в виде

$$|m_0|\,R\cos\alpha_0 = |m|\,\rho\cos\beta\,, \tag{8}$$

где $|m_0|$ — модуль комплексного показателя преломления атмосферы у поверхности Земли; α_0 — угол места (луч распространяется от земной поверхности).

Аналитическое выражение зависимости $\mathrm{grad}(\ln|m|)$ от высоты H неизвестно, поэтому для определения величины γ производится численное интегрирование выражения (7) при следующих условиях:

1) заданная толща атмосферы разбивается на l слоев таким образом, чтобы в элементарном слое можно было считать величину m постоянной;

2) в спектральных областях прозрачности атмосферы ($\varkappa=0$, $|m|=n$) влияние водяного пара и CO_2 на величину рефракции не учитывается;

3) так как $H \ll R$, в уравнении (8) принимается $R=\rho_i$. Это соответствует замене сферических слоев плоскопараллельными. Возникающая в результате этого ошибка не превыщает 0,15%.

Пользуясь выражением (8) и произведя замену $n_0=n_i$ и $\alpha_0=\beta_i$, можно получить выражение

$$\operatorname{ctg}\beta=\left[\left(\frac{n}{n_i}\right)^2-\cos^2\beta_i\right]^{-\frac{1}{2}}\cos\beta_i, \tag{9}$$

где n — значение показателя преломления для высоты H;

β — угол места для той же высоты.

Считая, что в элементарном i-том слое направление луча не меняется ($\beta_i=\mathrm{const}$), подставляя выражение (9) в (7) и беря соответствующие новые пределы интегрирования, можно получить

$$\gamma_i=\int\limits_{n_i}^{n_{i+1}}\frac{\cos\beta_i}{\sqrt{\left(\frac{n}{n_i}\right)^2-\cos^2\beta_i}}\,\frac{dn}{n}. \tag{10}$$

Принимая в подкоренном выражении $n=n_{i+1}$ и учитывая, что $\frac{n_{i+1}}{n_i}\simeq 1$, выражение (10) можно привести к виду

$$\gamma_i=\operatorname{ctg}\beta_i\ln\frac{n_{i+1}}{n_i}. \tag{11}$$

Так как переменная n мало отличается от единицы, формулу (11) можно переписать в виде

$$\gamma_i=\operatorname{ctg}\beta_i\Delta n_i, \tag{12}$$

где

$$\Delta n_i=n_{i+1}-n_i.$$

Поскольку величины углов γ_i всех элементарных слоев l_i складываются, общая рефракция γ определится по формуле

$$\gamma=\sum_{i=1}^{l}\operatorname{ctg}\beta_i\,\Delta n_i. \tag{13}$$

Для практических целей (в геодезии, навигации и др.) необходимо учитывать ошибку в измерении угла места. Величину этой ошибки (на рис. 2 она обозначена через δ) можно рассчитать с помощью теоремы синусов:

$$\begin{gathered}R\cos\alpha_0=\rho\cos\alpha,\\ R\cos(\alpha_0-\delta)=\rho\cos\left[(\alpha+\varepsilon)-\delta\right],\end{gathered} \tag{14}$$

где $\varepsilon=\gamma-(\alpha-\beta)$.

Величина ε — угол с вершиной в центре Земли, который характеризует ошибку, обусловленную рефракцией.

Из системы уравнений (13) и (14) получаем

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\sin \varepsilon \operatorname{tg} \alpha + (1 - \cos \varepsilon)}{\sin \varepsilon + \cos \varepsilon \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_0} \tag{15}$$

или ввиду малости δ

$$\delta = \frac{\varepsilon \operatorname{tg} \alpha + \frac{\varepsilon^2}{2}}{\varepsilon + \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha_0}. \tag{16}$$

Поскольку сферические слои заменены плоскопараллельными, $\alpha = \alpha_0$, предыдущее выражение приводится к виду

$$\delta = \operatorname{tg} \alpha + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{17}$$

Для i-того слоя, принимая $\alpha = \beta_i$, $\varepsilon = \varepsilon_i$, можно получить

$$\delta_i = \operatorname{tg} \beta_i + \frac{\varepsilon_i}{2}. \tag{18}$$

Общая ошибка в определении угла места вычисляется, суммированием величины δ_i для k слоев в пределах заданных высот

$$\delta = \sum_{i=1}^{k} \left(\operatorname{tg} \beta_i + \frac{\varepsilon_i}{2} \right). \tag{19}$$

Итак, задача сводится к вычислению γ и δ по углу скольжения β (рис. 1) методом суммирования значений γ_i и δ_i элементарных слоев. Предварительно необходимо определить значения n для каждого слоя.

Показатель преломления сухого воздуха

Для сухого воздуха показатель преломления в основном зависит от его плотности (соответственно от давления и температуры, причем зависимость от последней является определяющей).

Эта зависимость выражается в виде [4]

$$n = 1 + \eta\chi = 1 + A \frac{P}{T}, \tag{20}$$

где η — (соответственно A) — некоторая постоянная, различная для разных длин волн; $\chi = \frac{PT_0}{P_0 T}$ — относительная плотность воздуха.

Величина показателя преломления в какой-то мере зависит от влажности воздуха, но в окнах прозрачности атмосферы, для которых главным образом должна рассматриваться задача, ею можно пренебречь по сравнению с зависимостью от температуры.

В основу расчета были положены значения показателя преломления, рассчитанные для стандартного воздуха [5][1].

Показатель преломления стандартного воздуха n_s для различных длин волн вычислялся автором цитируемой работы по формуле Эдлена [6]

$$(n_s - 1) 10^8 = 6432{,}8 + \frac{2\,949\,810}{146 - \nu^2} + \frac{25\,540}{41 - \nu^2}, \tag{21}$$

где $\nu = \frac{1}{\lambda}$, λ — длина волны излучения в микронах.

[1] Стандартный воздух — это сухой воздух, содержащий 0,03% CO_2 по объему, при нормальном давлении 760 мм рт. ст. и температуре 288° K.

Для определения зависимости величины показателя преломления атмосферы от температуры и давления можно воспользоваться выражением из [5]

$$(n-1)=(n_s-1)\frac{T_s P}{T P_s}, \tag{22}$$

где $T_s=288^\circ$ K (температура стандартной атмосферы); T — температура воздуха в рассматриваемом слое (° K); P_s — 760 мм рт. ст. (давление стандартной атмосферы); P — давление в рассматриваемом слое (мм рт. ст.).

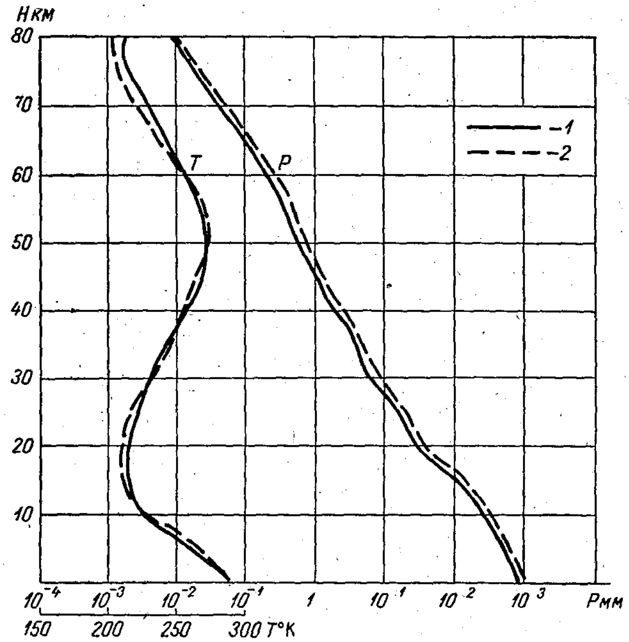

Рис. 3. Распределение по высоте давления (P) и температуры (T) по ракетным данным.
1 — данные ЦАО (СССР); 2 — данные США.

Как известно, температура и давление в атмосфере изменяются с высотой. Результаты их определения, полученные различными исследователями, до высоты 100 км достаточно хорошо совпадают между собой. Для больших высот вследствие различия в оценке исходных условий значения температуры и давления существенно расходятся. Например, значения температуры для одной и той же высоты (в пределах 300—500 км) могут отличаться на несколько сот градусов.

В табл. 1 приводятся данные о температуре и давлении для высот от 0 до 100 км (этих высот вполне достаточно при рассмотрении большинства практических задач).

В графическом виде данные табл. 1 представлены на рис. 3.

Приведенные данные вычислены с использованием одной из последних моделей строения атмосферы и уточнены на основании измерений, проводившихся с ракет в СССР и США [7].

Как следует из приведенных характеристик, особенно резко с высотой изменяется температура. Из рис. 3 видно, что до высоты 10—11 км она понижается примерно на 6° на каждый километр. Выше, в стратосфере, до высоты 35 км температура остается неизменной либо

Таблица 1

Температура и давление на разных высотах в атмосфере

H км	*T* °К	*P, мм*	*H км*	*T* °К	*P мм*
0	294	757	20	216	41,9
1	288	677	30	231	9,22
2	278	598	40	258	2,29
4	261	466	50	272	$6{,}38 \cdot 10^{-1}$
8	233	270	60	252	$1{,}71 \cdot 10^{-1}$
10	220	201	70	226	$3{,}74 \cdot 10^{-2}$
12	217	149	80	214	$7{,}5 \cdot 10^{-3}$
16	215	79	100	237	$4{,}3 \cdot 10^{-4}$

несколько повышается. За счет поглощения солнечной радиации озоном с высоты 35 км происходит значительный рост температуры. К высоте 50—55 км температура повышается почти до 0° С. Атмосфера выше 55 км характеризуется убыванием температуры, продолжающимся до высот 80—85 км; затем имеет место переход к следующему слою — термосфере, где происходит непрерывный рост температуры с высотой.

Можно считать, что зависимость температуры от высоты нельзя описать аналитическим выражением, ее необходимо задать в виде таблицы. Это накладывает ограничения на метод расчета.

Расчет рефракции

Для упрощенного расчета рефракции (как указывалось выше) атмосфера по высоте делилась на слои таким образом, чтобы внутри каждого слоя показатель преломления n можно было принять постоянным.

Разбиение на слои производится с учетом значений величин, приведенных в табл. 1; до высоты 12 км толщина слоев принималась рав-

Показатель преломления атмосферы $(n-1) \cdot 10^8$ на различных высотах (дл

λ мк	$(n_s-1) \cdot 10^8$	*H* км								
		0	1	2	4	8	10	12	16	20
0,4	28 276	27 582	25 188	23 054	19 136	12 407	9 772	7 360	3 940	$20\,746 \cdot 10^{-}$
0,8	27 503	26 828	24 499	22 424	18 613	12 068	9 505	7 159	3 833	$20\,160 \cdot 10^{-}$
1,0	27 415	26 742	24 421	22 353	18 553	12 029	9 474	7 136	3 821	$20\,114 \cdot 10^{-}$
1,2	27 367	26 696	24 378	22 313	18 521	12 008	9 457	7 123	3 814	$20\,079 \cdot 10^{-}$
2,0	27 298	26 628	24 317	22 257	18 474	11 978	9 434	7 105	3 804	$20\,028 \cdot 10^{-}$
3,7	27 271	26 602	24 293	22 235	18 455	11 966	9 424	7 098	3 800	$20\,009 \cdot 10^{-}$
4,5÷4,6	27 268	26 599	24 290	22 232	18 453	11 965	9 423	7 097	3 799	$20\,006 \cdot 10^{-}$
10,5÷13,0	27 261	26 592	24 284	22 226	18 449	11 961	9 421	7 096	3 799	$20\,001 \cdot 10^{-}$

ной 2 км, с высоты 12 км до 20 км атмосфера характеризовалась двумя слоями, каждый толщиной 4 км, и с 20 до 100 км атмосфера делилась на одинаковые слои толщиной 10 км.

Такое разбиение атмосферы на слои отражает изменение температуры с высотой: в нижних слоях градиент температуры большой, а выше он изменяется незначительно.

С использованием значений показателя преломления сухого стандартного воздуха n_s по формуле (22) рассчитывался показатель преломления n для каждого из выбранных слоев. В качестве примера в табл. 2 представлены значения n для различных длин волн.

При расчете переменными величинами являлись: а) высота над поверхностью земли точки, для которой рассчитывается рефракция; б) зенитный угол φ ($\varphi = 90 - \alpha$); в) дальность L (на рис. 4 линия AD); г) длина волны излучения.

На рис. 4 представлен вид траектории луча для трех слоев; δ — искомая поправка зенитного угла, обусловленная рефракцией.

Расчетная формула для определения угла рефракции δ выведена из простых геометрических соотношений (как тангенс угла между двумя прямыми) и для i слоев — от k-того до $k+i$-того — имеет вид

$$\delta = \operatorname{arctg} \frac{-h_k (h_k \operatorname{tg} \varphi_k + h_{k+1} \operatorname{tg} \varphi_{k+1} + \ldots + h_{k+i} \operatorname{tg} \varphi_{k+i}) + (h_k + h_{k+1} + \ldots + h_{k+i}) h_k \operatorname{tg} \varphi_k}{h_k (h_k + h_{k+1} + \ldots + h_{k+i}) + h_k \operatorname{tg} \varphi_k (h_k \operatorname{tg} \varphi_k + h_{k+1} \operatorname{tg} \varphi_{k+1} + \ldots + h_{k+i} \operatorname{tg} \varphi_{k+i})}. \quad (23)$$

Расчеты δ с использованием выражения (23) производились на ЭЦВМ М-20 для фиксированных значений дальности L, равных 10, 20, 30, 50, 100 км, и значений зенитного угла φ, равных 5, 30, 45, 60° для высот, указанных в табл. 1.

При данном методе расчета нельзя с достаточной точностью определить угол δ для зенитных углов $\varphi > 60°$ в силу того, что вся траектория луча в пределах дальностей до 100 км будет лежать в одном слое, для которого показатель преломления принимается постоянным.

Результаты расчета представлены на рис. 5, 6, 7 в виде зависимо-

Таблица 2

выбранных длин волн и заданной стратификации атмосферы)

H км						
30	40	50	60	70	80	100
$301 \cdot 10^{-2}$	$95\,290 \cdot 10^{-3}$	$25\,123 \cdot 10^{-3}$	$72\,720 \cdot 10^{-4}$	$17\,337 \cdot 10^{-4}$	$37\,560 \cdot 10^{-5}$	$19\,461 \cdot 10^{-6}$
$140 \cdot 10^{-2}$	$92\,680 \cdot 10^{-3}$	$24\,436 \cdot 10^{-3}$	$70\,741 \cdot 10^{-4}$	$17\,253 \cdot 10^{-4}$	$36\,521 \cdot 10^{-5}$	$18\,911 \cdot 10^{-6}$
$009 \cdot 10^{-2}$	$92\,390 \cdot 10^{-3}$	$24\,358 \cdot 10^{-3}$	$70\,509 \cdot 10^{-4}$	$17\,197 \cdot 10^{-4}$	$36\,431 \cdot 10^{-5}$	$18\,868 \cdot 10^{-6}$
$939 \cdot 10^{-2}$	$92\,230 \cdot 10^{-3}$	$24\,315 \cdot 10^{-3}$	$70\,391 \cdot 10^{-4}$	$17\,167 \cdot 10^{-4}$	$36\,369 \cdot 10^{-6}$	$18\,835 \cdot 10^{-6}$
$840 \cdot 10^{-2}$	$91\,991 \cdot 10^{-3}$	$24\,254 \cdot 10^{-3}$	$70\,210 \cdot 10^{-4}$	$17\,124 \cdot 10^{-4}$	$36\,279 \cdot 10^{-5}$	$18\,788 \cdot 10^{-6}$
$790 \cdot 10^{-2}$	$91\,901 \cdot 10^{-3}$	$24\,230 \cdot 10^{-3}$	$70\,140 \cdot 10^{-4}$	$17\,106 \cdot 10^{-4}$	$36\,241 \cdot 10^{-5}$	$18\,769 \cdot 10^{-6}$
$789 \cdot 10^{-2}$	$91\,890 \cdot 10^{-3}$	$24\,227 \cdot 10^{-3}$	$70\,131 \cdot 10^{-4}$	$17\,104 \cdot 10^{-4}$	$36\,240 \cdot 10^{-5}$	$18\,767 \cdot 10^{-6}$
$780 \cdot 10^{-2}$	$91\,870 \cdot 10^{-3}$	$24\,221 \cdot 10^{-3}$	$70\,120 \cdot 10^{-4}$	$17\,100 \cdot 10^{-4}$	$36\,230 \cdot 10^{-5}$	$18\,762 \cdot 10^{-6}$

стей угла δ от зенитного угла φ при различных дальностях для разных высот точки наблюдения H.

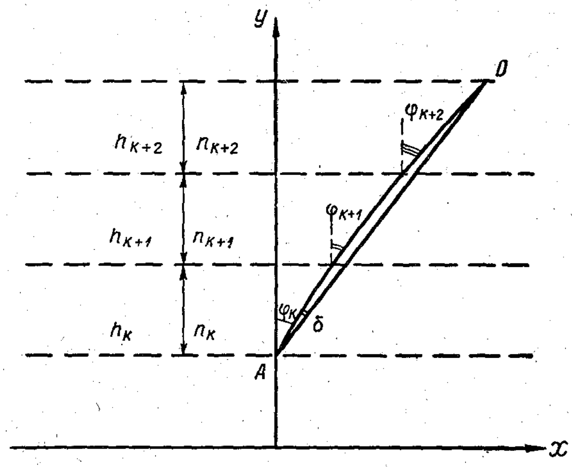

Рис. 4. Траектория распространения луча в преломляющих плоскопараллельных слоях.

Как и следовало ожидать, эти зависимости имеют монотонно возрастающий характер. При увеличении зенитного угла φ до 60°, при дальности 100 км и $H=0$ угол δ достигает 13 угловых минут.

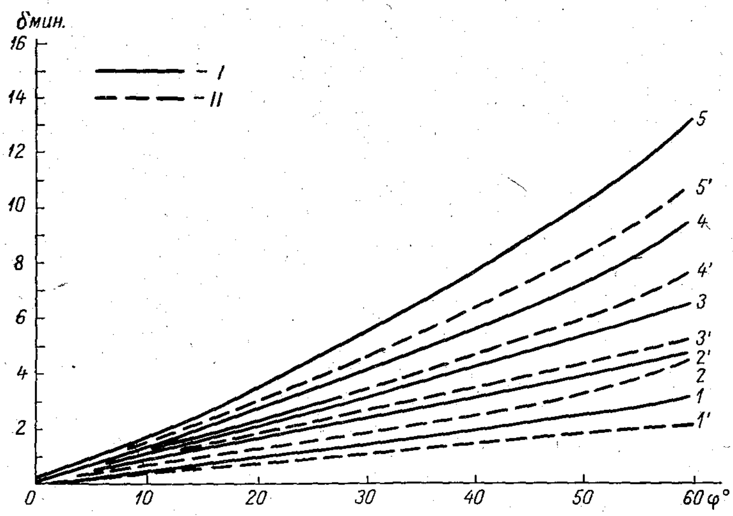

Рис. 5. Зависимость угла рефракции δ от зенитного угла φ при $H=0$ км (I) и $H=1$ км (II).
Значения L (км): 1 и 1' — 10, 2, 2' — 20, 3 и 3' — 30, 4 и 4' — 50, 5 и 5' — 100.

В силу того что в расчете принимается $\varkappa=0$, величина показателя преломления n очень мало изменяется в зависимости от длины волны излучения.

Для одной и той же высоты расхождение значений показателя преломления различных длин волн наблюдается лишь в 5-м знаке после запятой. Например, при $H=0$ для $\lambda=0{,}4$ мк значение n, определенное согласно (21) и (22), составляет 1,00027582, а для $\lambda=3{,}5$ мк $n=1{,}00026604$.

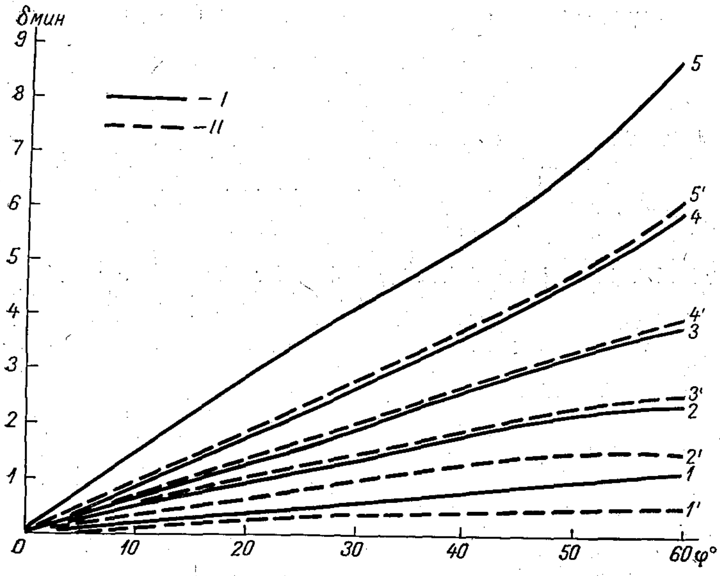

Рис. 6. Зависимость угла рефракции δ от зенитного угла φ при $H=2$ км (I) и $H=4$ км (II).

Усл. обозначения см. рис. 5.

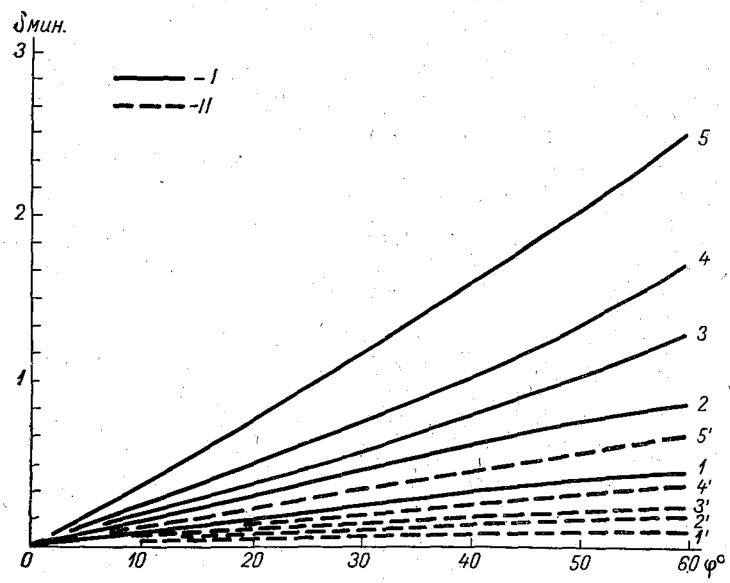

Рис. 7. Зависимость угла рефракции δ от зенитного угла φ при $H=10$ км (I) и $H=16$ км (II).

Усл. обозначения см. рис. 5.

Проведенные расчеты величины угла δ для длин волн λ, равных 0,4 и 3,5 мк, имеют разброс приблизительно 2 угловые секунды. Таким образом, спектральным ходом значений углов δ можно пренебречь.

Авторы признательны профессору К. С. Шифрину за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. Физматгиз, М., 1961.
2. Weisbrod S. a. Anderson L. I. Simple Methods for Computing Tropospheric and Ionospheric Refractive Effects Radio Waves. Proc. IRE, 1959, October, vol. 47, № 10, 1770—1777.
3. Слюсарев Г. Г. Геометрическая оптика. Изд. АН СССР, 1946.
4. Тверской П. Н. Курс метеорологии. Гидрометеоиздат, Л., 1962.
5. Penndorf R. Tables of the Refractive Indese for Standard Air and the Rayleigh Scattering coefficient for the Spectral Region between 0,2 and 20,0 mk and Their Application to Atmospheric Optics. JOSA, vol. 47, N 2, 176—182, 1957.
6. Edlen Bengt. „The dispersion of Standard Air.“ JOSA, vol. 43, N 5, 339—344, 1953.
7. Александров С. Г., Федоров Р. Е. Советские спутники и космическая ракета. Изд. АН СССР, М., 1959.

К. С. ШИФРИН, А. Я. ПЕРЕЛЬМАН, Л. И. ЗАГОРОВСКАЯ

ТАБЛИЦЫ ДЛЯ РАСЧЕТА СПЕКТРА МЯГКИХ ЧАСТИЦ ДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЫ ПО ЕЕ ИНДИКАТРИСЕ

Приведены формулы для расчета спектра частиц дисперсной системы по данным об ее индикатрисе и подробные таблицы специальных функций задачи.

Спектр мягких сферических частиц дисперсной системы $f^*(r)$ вычисляется по ее индикатрисе с помощью формул из [1]

$$f^*(r) = \frac{m(a)}{a^2 r_0^4}, \tag{1}$$

$$m(a) \simeq \widetilde{m}(a) = \frac{4}{\pi}\left\{\sum_{j=1}^{n} g\left(\frac{x_j}{2}\right)\varkappa(a\,x_j)\,\Delta x_j + d_0\tau\varkappa_0(a\tau) + d_2\frac{\varkappa_2(a\tau)}{\tau}\right\}. \tag{2}$$

Условия мягкости частиц сводятся к требованиям:

$$\rho(m-1) < 1, \quad \alpha = \frac{3}{4\pi}\,\frac{m^2-1}{m^2+2} \ll 1. \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения

1. r — радиус частицы, r_0 — масштаб длины, a — безразмерный радиус,

$$r = ar_0. \tag{4}$$

2. Безразмерные величины x и τ определяются по углу рассеяния β, длине волны λ и масштабу длины r_0,

$$\tau = \frac{8\pi r_0}{\lambda}, \tag{5}$$

$$x = \frac{8\pi r_0}{\lambda}\sin\frac{\beta}{2} \quad (0 \leqslant x \leqslant \tau). \tag{6}$$

3. m — коэффициент преломления,

$$\rho = \frac{2\pi r}{\lambda}; \tag{7}$$

если r в (7) берется с каким-либо индексом, то соответствующий индекс приписывается и ρ, например,

$$\tau = 4\rho_0, \quad \rho_0 = \frac{2\pi r_0}{\lambda}. \tag{8}$$

4. Безразмерная полидисперсная индикатриса $g\left(\frac{x}{2}\right)$ связана с экспериментальной полидисперсной индикатрисой $\bar{I}(\beta)$ и интенсивностью падающего параллельного пучка света I_0 соотношениями

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{r_0}{\psi(\beta)} \frac{\bar{I}(\beta)}{I_0}; \quad \psi(\beta) = 2\pi^2 |\alpha|^2 \frac{1+\cos^2\beta}{(1-\cos\beta)^2}. \tag{9}$$

5. Значения x_j берутся из промежутка $(x_j, x_j + \Delta x_j)$, причем

$$\sum_{j=1}^{n} \Delta x_j = \tau. \tag{10}$$

6. Числа d_0 и d_2 определяются с помощью асимптотики

$$g\left(\frac{x}{2}\right) \simeq d_0 + \frac{d_2}{x^2} \quad (x \geqslant \tau). \tag{11}$$

Возможность такого представления сводится к требованию: параметр τ должен быть достаточно велик. Во всяком случае, необходимо, чтобы

$$\bar{\rho} > \frac{1}{4} \quad (\tau > 1). \tag{12}$$

Если индикатриса $g\left(\frac{x}{2}\right)$ имеет один максимум при $x = x_{\text{М}}$, то метод практически применим при условии

$$\bar{\rho} \simeq (0{,}4 - 0{,}5)\, x_{\text{М}} \quad (\tau \simeq (1{,}6 - 2{,}0)\, x_{\text{М}}), \tag{13}$$

7. Функции $\varkappa(y)$, $\varkappa_0(y)$ и $\varkappa_2(y)$ определяются формулами:

$$\varkappa(y) = \left(1 - \frac{8}{y^2}\right)\cos y + \left(\frac{8}{y^2} - \frac{4}{y}\right)\sin y + \frac{1}{3}; \tag{14}$$

$$\varkappa_0(y) = \frac{\varkappa(y) - \omega_0(y)}{2}, \quad \varkappa_2(y) = \frac{\varkappa(y) - \omega_2(y)}{4}; \tag{15}$$

$$\omega_0(y) = 1 + \cos y - 2\frac{\sin y}{y}, \quad \omega_2(y) = \cos y - 1. \tag{16}$$

В приложениях приводятся таблицы функций $\varkappa(y)$, $\varkappa_0(y)$ и $\varkappa_2(y)$, существенно облегчающие расчеты по формуле (2).

Функции $\varkappa_0(y)$ и $\varkappa_2(y)$ протабулированы для значений y, равных 0(0,1)30, а функция $\varkappa(y)$ — для y, равных 0(0,01)30.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин К. С., Перельман А. Я. Обращение индикатрисы для мягких частиц. ДАН, т. 158, № 3, 1964.

Таблица функции $\varkappa$ (y)

y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$
0,01	−0,00008	0,60	−0,03372	1,19	−0,10793	1,78	−0,16059
0,02	−0,00006	0,61	−0,03478	1,20	−0,10921	1,79	−0,16087
0,03	−0,00009	0,62	−0,03584	1,21	−0,11048	1,80	−0,16111
0,04	−0,00016	0,63	−0,03692	1,22	−0,11175	1,81	−0,16134
0,05	−0,00025	0,64	−0,03802	1,23	−0,11301	1,82	−0,16153
0,06	−0,00036	0,65	−0,03912	1,24	−0,11426	1,83	−0,16169
0,07	−0,00049	0,66	−0,04023	1,25	−0,11551	1,84	−0,16183
0,08	−0,00064	0,67	−0,04136	1,26	−0,11674	1,85	−0,16194
0,09	−0,00081	0,68	−0,04250	1,27	−0,11797	1,86	−0,16201
0,10	−0,00100	0,69	−0,04364	1,28	−0,11919	1,87	−0,16206
0,11	−0,00121	0,70	−0,04480	1,29	−0,12040	1,88	−0,16208
0,12	−0,00144	0,71	−0,04597	1,30	−0,12160	1,89	−0,16206
0,13	−0,00169	0,72	−0,04715	1,31	−0,12279	1,90	−0,16202
0,14	−0,00195	0,73	−0,04833	1,32	−0,12397	1,91	−0,16194
0,15	−0,00224	0,74	−0,04953	1,33	−0,12513	1,92	−0,16184
0,16	−0,00255	0,75	−0,05074	1,34	−0,12629	1,93	−0,16170
0,17	−0,00288	0,76	−0,05195	1,35	−0,12744	1,94	−0,16153
0,18	−0,00322	0,77	−0,05317	1,36	−0,12857	1,95	−0,16132
0,19	−0,00359	0,78	−0,05440	1,37	−0,12969	1,96	−0,16109
0,20	−0,00397	0,79	−0,05564	1,38	−0,13080	1,97	−0,16082
0,21	−0,00438	0,80	−0,05689	1,39	−0,13190	1,98	−0,16052
0,22	−0,00480	0,81	−0,05814	1,40	−0,13298	1,99	−0,16019
0,23	−0,00524	0,82	−0,05940	1,41	−0,13405	2,00	−0,15982
0,24	−0,00570	0,83	−0,06066	1,42	−0,13511	2,01	−0,15942
0,25	−0,00618	0,84	−0,06194	1,43	−0,13615	2,02	−0,15898
0,26	−0,00668	0,85	−0,06322	1,44	−0,13717	2,03	−0,15851
0,27	−0,00720	0,86	−0,06450	1,45	−0,13818	2,04	−0,15800
0,28	−0,00773	0,87	−0,06579	1,46	−0,13918	2,05	−0,15746
0,29	−0,00828	0,88	−0,06708	1,47	−0,14016	2,06	−0,15689
0,30	−0,00886	0,89	−0,06838	1,48	−0,14112	2,07	−0,15628
0,31	−0,00945	0,90	−0,06969	1,49	−0,14207	2,08	−0,15563
0,32	−0,01005	0,91	−0,07100	1,50	−0,14299	2,09	−0,15495
0,33	−0,01068	0,92	−0,07231	1,51	−0,14391	2,10	−0,15423
0,34	−0,01132	0,93	−0,07362	1,52	−0,14480	2,11	−0,15347
0,35	−0,01198	0,94	−0,07494	1,53	−0,14567	2,12	−0,15268
0,36	−0,01266	0,95	−0,07626	1,54	−0,14653	2,13	−0,15185
0,37	−0,01336	0,96	−0,07759	1,55	−0,14737	2,14	−0,15099
0,38	−0,01407	0,97	−0,07891	1,56	−0,14819	2,15	−0,15008
0,39	−0,01480	0,98	−0,08024	1,57	−0,14899	2,16	−0,14914
0,40	−0,01555	0,99	−0,08157	1,58	−0,14976	2,17	−0,14816
0,41	−0,01631	1,00	−0,08290	1,59	−0,15052	2,18	−0,14715
0,42	−0,01709	1,01	−0,08423	1,60	−0,15126	2,19	−0,14609
0,43	−0,01788	1,02	−0,08556	1,61	−0,15198	2,20	−0,14500
0,44	−0,01870	1,03	−0,08689	1,62	−0,15267	2,21	−0,14387
0,45	−0,01952	1,04	−0,08822	1,63	−0,15334	2,22	−0,14269
0,46	−0,02037	1,05	−0,08956	1,64	−0,15400	2,23	−0,14148
0,47	−0,02123	1,06	−0,09089	1,65	−0,15462	2,24	−0,14024
0,48	−0,02210	1,07	−0,09221	1,66	−0,15523	2,25	−0,13895
0,49	−0,02299	1,08	−0,09354	1,67	−0,15581	2,26	−0,13762
0,50	−0,02390	1,09	−0,09487	1,68	−0,15637	2,27	−0,13625
0,51	−0,02482	1,10	−0,09619	1,69	−0,15691	2,28	−0,13484
0,52	−0,02575	1,11	−0,09751	1,70	−0,15742	2,29	−0,13340
0,53	−0,02670	1,12	−0,09883	1,71	−0,15790	2,30	−0,13191
0,54	−0,02766	1,13	−0,10014	1,72	−0,15836	2,31	−0,13038
0,55	−0,02864	1,14	−0,10145	1,73	−0,15880	2,32	−0,12881
0,56	−0,02963	1,15	−0,10276	1,74	−0,15921	2,33	−0,12720
0,57	−0,03063	1,16	−0,10406	1,75	−0,15959	2,34	−0,12555
0,58	−0,03165	1,17	−0,10535	1,76	−0,15995	2,35	−0,12386
0,59	−0,03268	1,18	−0,10664	1,77	−0,16028	2,36	−0,12213

y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$
2,37	−0,12035	3,00	0,07699	3,63	0,42496	4,26	0,84035
2,38	−0,11854	3,01	0,08146	3,64	0,43134	4,27	0,84679
2,39	−0,11668	3,02	0,08597	3,65	0,43773	4,28	0,85322
2,40	−0,11478	3,03	0,09052	3,66	0,44414	4,29	0,85962
2,41	−0,11284	3,04	0,09511	3,67	0,45057	4,30	0,86601
2,42	−0,11086	3,05	0,09974	3,68	0,45702	4,31	0,87238
2,43	−0,10884	3,06	0,10441	3,69	0,46348	4,32	0,87873
2,44	−0,10677	3,07	0,10911	3,70	0,46995	4,33	0,88505
2,45	−0,10466	3,08	0,11386	3,71	0,47644	4,34	0,89136
2,46	−0,10251	3,09	0,11864	3,72	0,48295	4,35	0,89764
2,47	−0,10032	3,10	0,12346	3,73	0,48946	4,36	0,90391
2,48	−0,09808	3,11	0,12832	3,74	0,49600	4,37	0,91015
2,49	−0,09580	3,12	0,13321	3,75	0,50254	4,38	0,91636
2,50	−0,09348	3,13	0,13814	3,76	0,50910	4,39	0,92255
2,51	−0,09112	3,14	0,14311	3,77	0,51566	4,40	0,92872
2,52	−0,08872	3,15	0,14811	3,78	0,52224	4,41	0,93486
2,53	−0,08627	3,16	0,15315	3,79	0,52883	4,42	0,94098
2,54	−0,08378	3,17	0,15823	3,80	0,53543	4,43	0,94707
2,55	−0,08124	3,18	0,16334	3,81	0,54204	4,44	0,95313
2,56	−0,07866	3,19	0,16849	3,82	0,54866	4,45	0,95917
2,57	−0,07604	3,20	0,17367	3,83	0,55529	4,46	0,96518
2,58	−0,07338	3,21	0,17889	3,84	0,56192	4,47	0,97116
2,59	−0,07068	3,22	0,18414	3,85	0,56856	4,48	0,97710
2,60	−0,06793	3,23	0,18943	3,86	0,57521	4,49	0,98302
2,61	−0,06513	3,24	0,19475	3,87	0,58187	4,50	0,98891
2,62	−0,06230	3,25	0,20010	3,88	0,58853	4,51	0,99477
2,63	−0,05942	3,26	0,20549	3,89	0,59520	4,52	1,00060
2,64	−0,05650	3,27	0,21091	3,90	0,60187	4,53	1,00639
2,65	−0,05353	3,28	0,21636	3,91	0,60854	4,54	1,01215
2,66	−0,05053	3,29	0,22185	3,92	0,61522	4,55	1,01788
2,67	−0,04748	3,30	0,22737	3,93	0,62190	4,56	1,02357
2,68	−0,04438	3,31	0,23292	3,94	0,62859	4,57	1,02923
2,69	−0,04125	3,32	0,23850	3,95	0,63527	4,58	1,03485
2,70	−0,03807	3,33	0,24411	3,96	0,64196	4,59	1,04044
2,71	−0,03484	3,34	0,24975	3,97	0,64865	4,60	1,04599
2,72	−0,03158	3,35	0,25542	3,98	0,65534	4,61	1,05151
2,73	−0,02827	3,36	0,26112	3,99	0,66203	4,62	1,05698
2,74	−0,02492	3,37	0,26685	4,00	0,66871	4,63	1,06242
2,75	−0,02152	3,38	0,27261	4,01	0,67540	4,64	1,06782
2,76	−0,01809	3,39	0,27841	4,02	0,68208	4,65	1,07318
2,77	−0,01461	3,40	0,28422	4,03	0,68877	4,66	1,07850
2,78	−0,01108	3,41	0,29007	4,04	0,69544	4,67	1,08379
2,79	−0,00752	3,42	0,29594	4,05	0,70212	4,68	1,08903
2,80	−0,00391	3,43	0,30184	4,06	0,70879	4,69	1,09422
2,81	−0,00026	3,44	0,30777	4,07	0,71545	4,70	1,09938
2,82	0,00343	3,45	0,31373	4,08	0,72211	4,71	1,10450
2,83	0,00716	3,46	0,31971	4,09	0,72876	4,72	1,10957
2,84	0,01094	3,47	0,32571	4,10	0,73541	4,73	1,11460
2,85	0,01476	3,48	0,33175	4,11	0,74205	4,74	1,11958
2,86	0,01862	3,49	0,33780	4,12	0,74868	4,75	1,12452
2,87	0,02252	3,50	0,34388	4,13	0,75530	4,76	1,12941
2,88	0,02646	3,51	0,34999	4,14	0,76192	4,77	1,13426
2,89	0,03045	3,52	0,35612	4,15	0,76852	4,78	1,13906
2,90	0,03448	3,53	0,36227	4,16	0,77511	4,79	1,14382
2,91	0,03854	3,54	0,36844	4,17	0,78170	4,80	1,14853
2,92	0,04265	3,55	0,37464	4,18	0,78827	4,81	1,15319
2,93	0,04680	3,56	0,38086	4,19	0,79483	4,82	1,15780
2,94	0,05099	3,57	0,38710	4,20	0,80137	4,83	1,16236
2,95	0,05523	3,58	0,39336	4,21	0,80791	4,84	1,16688
2,96	0,05950	3,59	0,39964	4,22	0,81443	4,85	1,17134
2,97	0,06381	3,60	0,40594	4,23	0,82093	4,86	1,17576
2,98	0,06816	3,61	0,41226	4,24	0,82742	4,87	1,18012
2,99	0,07256	3,62	0,41860	4,25	0,83389	4,88	1,18443

y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$
4,89	1,18869	5,52	1,33425	6,15	1,19664	6,78	0,79048
4,90	1,19290	5,53	1,33438	6,16	1,19211	6,79	0,78238
4,91	1,19705	5,54	1,33443	6,17	1,18751	6,80	0,77423
4,92	1,20115	5,55	1,33441	6,18	1,18284	6,81	0,76605
4,93	1,20520	5,56	1,33432	6,19	1,17810	6,82	0,75783
4,94	1,20919	5,57	1,33415	6,20	1,17330	6,83	0,74957
4,95	1,21313	5,58	1,33391	6,21	1,16842	6,84	0,74127
4,96	1,21702	5,59	1,33359	6,22	1,16348	6,85	0,73294
4,97	1,22085	5,60	1,33320	6,23	1,15847	6,86	0,72457
4,98	1,22462	5,61	1,33273	6,24	1,15339	6,87	0,71616
4,99	1,22833	5,62	1,33219	6,25	1,14824	6,88	0,70773
5,00	1,23199	5,63	1,33158	6,26	1,14303	6,89	0,69925
5,01	1,23559	5,64	1,33089	6,27	1,13775	6,90	0,69075
5,02	1,23914	5,65	1,33012	6,28	1,13241	6,91	0,68221
5,03	1,24262	5,66	1,32928	6,29	1,12700	6,92	0,67365
5,04	1,24605	5,67	1,32837	6,30	1,12152	6,93	0,66505
5,05	1,24942	5,68	1,32738	6,31	1,11598	6,94	0,65642
5,06	1,25272	5,69	1,32631	6,32	1,11037	6,95	0,64776
5,07	1,25597	5,70	1,32517	6,33	1,10470	6,96	0,63907
5,08	1,25916	5,71	1,32396	6,34	1,09897	6,97	0,63036
5,09	1,26228	5,72	1,32267	6,35	1,09317	6,98	0,62162
5,10	1,26535	5,73	1,32130	6,36	1,08731	6,99	0,61285
5,11	1,26835	5,74	1,31986	6,37	1,08139	7,00	0,60405
5,12	1,27129	5,75	1,31834	6,38	1,07541	7,01	0,59523
5,13	1,27417	5,76	1,31675	6,39	1,06936	7,02	0,58639
5,14	1,27699	5,77	1,31508	6,40	1,06325	7,03	0,57752
5,15	1,27974	5,78	1,31334	6,41	1,05708	7,04	0,56863
5,16	1,28243	5,79	1,31152	6,42	1,05085	7,05	0,55972
5,17	1,28506	5,80	1,30963	6,43	1,04456	7,06	0,55079
5,18	1,28762	5,81	1,30766	6,44	1,03821	7,07	0,54183
5,19	1,29012	5,82	1,30562	6,45	1,03180	7,08	0,53286
5,20	1,29255	5,83	1,30350	6,46	1,02534	7,09	0,52386
5,21	1,29492	5,84	1,30131	6,47	1,01881	7,10	0,51485
5,22	1,29722	5,85	1,29904	6,48	1,01223	7,11	0,50582
5,23	1,29945	5,86	1,29670	6,49	1,00559	7,12	0,49678
5,24	1,30162	5,87	1,29428	6,50	0,99889	7,13	0,48771
5,25	1,30373	5,88	1,29178	6,51	0,99214	7,14	0,47863
5,26	1,30576	5,89	1,28921	6,52	0,98533	7,15	0,46954
5,27	1,30773	5,90	1,28657	6,53	0,97846	7,16	0,46044
5,28	1,30963	5,91	1,28385	6,54	0,97154	7,17	0,45132
5,29	1,31146	5,92	1,28106	6,55	0,96457	7,18	0,44219
5,30	1,31323	5,93	1,27820	6,56	0,95754	7,19	0,43304
5,31	1,31492	5,94	1,27526	6,57	0,95046	7,20	0,42389
5,32	1,31655	5,95	1,27224	6,58	0,94333	7,21	0,41472
5,33	1,31811	5,96	1,26915	6,59	0,93614	7,22	0,40555
5,34	1,31960	5,97	1,26599	6,60	0,92891	7,23	0,39637
5,35	1,32101	5,98	1,26275	6,61	0,92162	7,24	0,38718
5,36	1,32236	5,99	1,25944	6,62	0,91428	7,25	0,37799
5,37	1,32364	6,00	1,25606	6,63	0,90689	7,26	0,36878
5,38	1,32485	6,01	1,25260	6,64	0,89946	7,27	0,35958
5,39	1,32599	6,02	1,24907	6,65	0,89197	7,28	0,35037
5,40	1,32706	6,03	1,24547	6,66	0,88444	7,29	0,34115
5,41	1,32805	6,04	1,24180	6,67	0,87685	7,30	0,33193
5,42	1,32898	6,05	1,23805	6,68	0,86923	7,31	0,32271
5,43	1,32983	6,06	1,23423	6,69	0,86155	7,32	0,31349
5,44	1,33061	6,07	1,23034	6,70	0,85383	7,33	0,30427
5,45	1,33132	6,08	1,22638	6,71	0,84606	7,34	0,29505
5,46	1,33196	6,09	1,22234	6,72	0,83825	7,35	0,28583
5,47	1,33252	6,10	1,21823	6,73	0,83040	7,36	0,27661
5,48	1,33302	6,11	1,21406	6,74	0,82250	7,37	0,26739
5,49	1,33343	6,12	1,20981	6,75	0,81456	7,38	0,25818
5,50	1,33378	6,13	1,20549	6,76	0,80657	7,39	0,24897
5,51	1,33405	6,14	1,20110	6,77	0,79855	7,40	0,23977

y	ϰ (y)	y	ϰ (y)	y	ϰ (y)	y	ϰ (y)
7,41	0,23057	8,04	−0,30253	8,67	−0,62525	9,30	−0,61941
7,42	0,22138	8,05	−0,30973	8,68	−0,62790	9,31	−0,61647
7,43	0,21220	8,06	−0,31687	8,69	−0,63047	9,32	−0,61344
7,44	0,20302	8,07	−0,32395	8,70	−0,63295	9,33	−0,61033
7,45	0,19386	8,08	−0,33098	8,71	−0,63534	9,34	−0,60713
7,46	1,18470	8,09	−0,33796	8,72	−0,63765	9,35	−0,60385
7,47	0,17555	8,10	−0,34487	8,73	−0,63987	9,36	−0,60048
7,48	0,16642	8,11	−0,35173	8,74	−0,64200	9,37	−0,59702
7,49	0,15730	8,12	−0,35853	8,75	−0,64405	9,38	−0,59349
7,50	0,14819	8,13	−0,36527	8,76	−0,64601	9,39	−0,58986
7,51	0,13910	8,14	−0,37194	8,77	−0,64788	9,40	−0,58615
7,52	0,13002	8,15	−0,37856	8,78	−0,64967	9,41	−0,58236
7,53	0,12095	8,16	−0,38512	8,79	−0,65137	9,42	−0,57849
7,54	0,11190	8,17	−0,39161	8,80	−0,65297	9,43	−0,57453
7,55	0,10287	8,18	−0,39804	8,81	−0,65450	9,44	−0,57048
7,56	0,09396	8,19	−0,40441	8,82	−0,65593	9,45	−0,56636
7,57	0,08486	8,20	−0,41071	8,83	−0,65727	9,46	−0,56215
7,58	0,07589	8,21	−0,41695	8,84	−0,65853	9,47	−0,55786
7,59	0,06693	8,22	−0,42313	8,85	−0,65969	9,49	−0,54904
7,60	0,05800	8,23	−0,42924	8,86	−0,66077	9,50	−0,54451
7,61	0,04909	8,24	−0,43528	8,87	−0,66176	9,50	−0,55451
7,62	0,04020	8,25	−0,44125	8,88	−0,66266	9,51	−0,53989
7,63	0,03133	8,26	−0,44716	8,89	−0,66347	9,52	−0,53520
7,64	0,02249	8,27	−0,45300	8,90	−0,66419	9,53	−0,53043
7,65	0,01368	8,28	−0,45877	8,91	−0,66482	9,54	−0,52557
7,66	0,00488	8,29	−0,46448	8,92	−0,66536	9,55	−0,52064
7,67	−0,00388	8,30	−0,47011	8,93	−0,66581	9,56	−0,51563
7,68	−0,01262	8,31	−0,47567	8,94	−0,66617	9,57	−0,51054
7,69	−0,02133	8,32	−0,48116	8,95	−0,66644	9,58	−0,50538
7,70	−0,03001	8,33	−0,48658	8,96	−0,66662	9,59	−0,50014
7,71	−0,03866	8,34	−0,49193	8,97	−0,66672	9,60	−0,49482
7,72	−0,04728	8,35	−0,49721	8,98	−0,66672	9,61	−0,48942
7,73	−0,05586	8,36	−0,50242	8,99	−0,66663	9,62	−0,48395
7,74	−0,06442	8,37	−0,50755	9,00	−0,66645	9,63	−0,47841
7,75	−0,07294	8,38	−0,51260	9,01	−0,66618	9,64	−0,47279
7,76	−0,08144	8,39	−0,51759	9,02	−0,66582	9,65	−0,46709
7,77	−0,08989	8,40	−0,52250	9,03	−0,66537	9,66	−0,46132
7,78	−0,09831	8,41	−0,52733	9,04	−0,66483	9,67	−0,45548
7,79	−0,10670	8,42	−0,53209	9,05	−0,66420	9,68	−0,44957
7,80	−0,11505	8,43	−0,53677	9,06	−0,66349	9,69	−0,44358
7,81	−0,12336	8,44	−0,54138	9,07	−0,66268	9,70	−0,43752
7,82	−0,13163	8,45	−0,54590	9,08	−0,66178	9,71	−0,43139
7,83	−0,13987	8,46	−0,55036	9,09	−0,66079	9,72	−0,42519
7,84	−0,14806	8,47	−0,55473	9,10	−0,65971	9,73	−0,41892
7,85	−0,15621	8,48	−0,55902	9,11	−0,65854	9,74	−0,41258
7,86	−0,16433	8,49	−0,56324	9,12	−0,65728	9,75	−0,40618
7,87	−0,17240	8,50	−0,56738	9,13	−0,65593	9,76	−0,39970
7,88	−0,18043	8,51	−0,57144	9,14	−0,65449	9,77	−0,39316
7,89	−0,18841	8,52	−0,57541	9,15	−0,65297	9,78	−0,38654
7,90	−0,19636	8,53	−0,57931	9,16	−0,65135	9,79	−0,37987
7,91	−0,20425	8,54	−0,58313	9,17	−0,64964	9,80	−0,37312
7,92	−0,21211	8,55	−0,58686	9,18	−0,64785	9,81	−0,36631
7,93	−0,21991	8,56	−0,59052	9,19	−0,64596	9,82	−0,35944
7,94	−0,22767	8,57	−0,59409	9,20	−0,64399	9,83	−0,35250
7,95	−0,23538	8,58	−0,59758	9,21	−0,64193	9,84	−0,34550
7,96	−0,24304	8,59	−0,60099	9,22	−0,63978	9,85	−0,33843
7,97	−0,25066	8,60	−0,60432	9,23	−0,63754	9,86	−0,33131
7,98	−0,25822	8,61	−0,60756	9,24	−0,63521	9,87	−0,32412
7,99	−0,26574	8,62	−0,61072	9,25	−0,63280	9,88	−0,31687
8,00	−0,27320	8,63	**−0,61379**	9,26	−0,63029	9,89	−0,30956
8,01	−0,28061	8,64	−0,61678	9,27	−0,62770	9,90	−0,30219
8,02	−0,28797	8,65	−0,61969	9,28	−0,62502	9,91	−0,29476
8,03	−0,29528	8,66	−0,62251	9,29	−0,62226	9,92	−0,28727

y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$
9,93	−0,27973	10,56	0,27893	11,19	0,85932	11,82	1,25194
9,94	−0,27213	10,57	0,28856	11,20	0,86752	11,83	1,25573
9,95	−0,26447	10,58	0,29818	11,21	0,87568	11,84	1,25944
9,96	−0,25675	10,59	0,30782	11,22	0,88378	11,85	1,26306
9,97	−0,24899	10,60	0,31745	11,23	0,89184	11,86	1,26659
9,98	−0,24116	10,61	0,32709	11,24	0,89984	11,87	1,27003
9,99	−0,23329	10,62	0,33673	11,25	0,90779	11,88	1,27339
10,00	−0,22536	10,63	0,34636	11,26	0,91568	11,89	1,27666
10,01	−0,21738	10,64	0,35600	11,27	0,92352	11,90	1,27984
10,02	−0,20934	10,65	0,36564	11,28	0,93131	11,91	1,28293
10,03	−0,20126	10,66	0,37527	11,29	0,93904	11,92	1,28593
10,04	−0,19313	10,67	0,38491	11,30	0,94672	11,93	1,28884
10,05	−0,18494	10,68	0,39453	11,31	0,95433	11,94	1,29166
10,06	−0,17671	10,69	0,40416	11,32	0,96189	11,95	1,29439
10,07	−0,16843	10,70	0,41377	11,33	0,96940	11,96	1,29703
10,08	−0,16011	10,71	0,42338	11,34	0,97684	11,97	1,29958
10,09	−0,15174	10,72	0,43298	11,35	0,98422	11,98	1,30204
10,10	−0,14332	10,73	0,44258	11,36	0,99154	11,99	1,30440
10,11	−0,13486	10,74	0,45216	11,37	0,99880	12,00	1,30668
10,12	−0,12635	10,75	0,46173	11,38	1,00600	12,01	1,30886
10,13	−0,11781	10,76	0,47130	11,39	1,01314	12,02	1,31095
10,14	−0,10921	10,77	0,48085	11,40	1,02021	12,03	1,31295
10,15	−0,10058	10,78	0,49038	11,41	1,02722	12,04	1,31486
10,16	−0,09191	10,79	0,49990	11,42	1,03416	12,05	1,31667
10,17	−0,08320	10,80	0,50941	11,43	1,04104	12,06	1,31839
10,18	−0,07444	10,81	0,51890	11,44	1,04785	12,07	1,32002
10,19	−0,06565	10,82	0,52838	11,45	1,05460	12,08	1,32156
10,20	−0,05683	10,83	0,53784	11,46	1,06128	12,09	1,32300
10,21	−0,04796	10,84	0,54728	11,47	1,06789	12,10	1,32435
10,22	−0,03906	10,85	0,55670	11,48	1,07443	12,11	1,32560
10,23	−0,03012	10,86	0,56610	11,49	1,08090	12,12	1,32676
10,24	−0,02115	10,87	0,57548	11,50	1,08730	12,13	1,32783
10,25	−0,01215	10,88	0,58483	11,51	1,09363	12,14	1,32880
10,26	−0,00311	10,89	0,59417	11,52	1,09990	12,15	1,32968
10,27	0,00595	10,90	0,60348	11,53	1,10608	12,16	1,33046
10,28	0,01505	10,91	0,61277	11,54	1,11220	12,17	1,33115
10,29	0,02418	10,92	0,62203	11,55	1,11825	12,18	1,33175
10,30	0,03334	10,93	0,63126	11,56	1,12422	12,19	1,33225
10,31	0,04253	10,94	0,64047	11,57	1,13011	12,20	1,33266
10,32	0,05174	10,95	0,64965	11,58	1,13594	12,21	1,33297
10,33	0,06098	10,96	0,65880	11,59	1,14168	12,22	1,33319
10,34	0,07025	10,97	0,66792	11,60	1,14735	12,23	1,33331
10,35	0,07954	10,98	0,67701	11,61	1,15295	12,24	1,33334
10,36	0,08886	10,99	0,68606	11,62	1,15847	12,25	1,33327
10,37	0,09820	11,00	0,69509	11,63	1,16391	12,26	1,33311
10,38	0,10756	11,01	0,70408	11,64	1,16927	12,27	1,33286
10,39	0,11695	11,02	0,71304	11,65	1,17455	12,28	1,33251
10,40	0,12635	11,03	0,72196	11,66	1,17976	12,29	1,33206
10,41	0,13577	11,04	0,73085	11,67	1,18489	12,30	1,33152
10,42	0,14522	11,05	0,73970	11,68	1,18993	12,31	1,33089
10,43	0,15468	11,06	0,74852	11,69	1,19490	12,32	1,33016
10,44	0,16416	11,07	0,75729	11,70	1,19978	12,33	1,32934
10,45	0,17365	11,08	0,76603	11,71	1,20459	12,34	1,32842
10,46	0,18316	11,09	0,77473	11,72	1,20931	12,35	1,32741
10,47	0,19269	11,10	0,78338	11,73	1,21395	12,36	1,32630
10,48	0,20223	11,11	0,79200	11,74	1,21851	12,37	1,32510
10,49	0,21178	11,12	0,80057	11,75	1,22298	12,38	1,32381
10,50	0,22135	11,13	0,80910	11,76	1,22737	12,39	1,32242
10,51	0,23092	11,14	0,81758	11,77	1,23168	12,40	1,32094
10,52	0,24051	11,15	0,82602	11,78	1,23590	12,41	1,31937
10,53	0,25010	11,16	0,83442	11,79	1,24004	12,42	1,31770
10,54	0,25970	11,17	0,84276	11,80	1,24409	12,43	1,31593
10,55	0,26932	11,18	0,85107	11,81	1,24806	12,44	1,31408

y	ϰ (y)	y	ϰ (y)	y	ϰ (y)	y	ϰ (y)
12,45	1,31213	13,08	1,01507	13,71	0,46728	14,34	−0,13084
12,46	1,31009	13,09	1,00790	13,72	0,45758	14,35	−0,13950
12,47	1,30795	13,10	1,00066	13,73	0,44786	14,36	−0,14812
12,48	1,30573	13,11	0,99335	13,74	0,43813	14,37	−0,15669
12,49	1,30341	13,12	0,98599	13,75	0,42840	14,38	−0,16521
12,50	1,30100	13,13	0,97865	13,76	0,41865	14,39	−0,17368
12,51	1,29849	13,14	0,97107	13,77	0,40890	14,40	−0,18211
12,52	1,29590	13,15	0,96351	13,78	0,39913	14,41	−0,19049
12,53	1,29321	13,16	0,95590	13,79	0,38936	14,42	−0,19882
12,54	1,29043	13,17	0,94823	13,80	0,37959	14,43	−0,20709
12,55	1,28756	13,18	0,94050	13,81	0,36981	14,44	−0,21532
12,56	1,28461	13,19	0,93271	13,82	0,36003	14,45	−0,22349
12,57	1,28156	13,20	0,92486	13,83	0,35024	14,46	−0,23161
12,58	1,27842	13,21	0,91696	13,84	0,34045	14,47	−0,23967
12,59	1,27519	13,22	0,90900	13,85	0,33066	14,48	−0,24768
12,60	1,27187	13,23	0,90098	13,86	0,32087	14,49	−0,25564
12,61	1,26846	13,24	0,89291	13,87	0,31109	14,50	−0,26354
12,62	1,26496	13,25	0,88479	13,88	0,30130	14,51	−0,27138
12,63	1,26137	13,26	0,87661	13,89	0,29152	14,52	−0,27916
12,64	1,25770	13,27	0,86838	13,90	0,28174	14,53	−0,28688
12,65	1,25394	13,28	0,86010	13,91	0,27196	14,54	−0,29455
12,66	1,25009	13,29	0,85177	13,92	0,26219	14,55	−0,30215
12,67	1,24615	13,30	0,84339	13,93	0,25243	14,56	−0,30969
12,68	1,24213	13,31	0,83496	13,94	0,24267	14,57	−0,31718
12,69	1,23801	13,32	0,82649	13,95	0,23293	14,58	−0,32460
12,70	1,23382	13,33	0,81796	13,96	0,22319	14,59	−0,33195
12,71	1,22954	13,34	0,80939	13,97	0,21346	14,60	−0,33924
12,72	1,22517	13,35	0,80077	13,98	0,20374	14,61	−0,34647
12,73	1,22071	13,36	0,79211	13,99	0,19404	14,62	−0,35363
12,74	1,21618	13,37	0,78341	14,00	0,18435	14,63	−0,36073
12,75	1,21156	13,38	0,77466	14,01	0,17467	14,64	−0,36776
12,76	1,20685	13,39	0,76587	14,02	0,16501	14,65	−0,37472
12,77	1,20206	13,40	0,75703	14,03	0,15536	14,66	−0,38162
12,78	1,19719	13,41	0,74816	14,04	0,14573	14,67	−0,38844
12,79	0,19224	13,42	0,73924	14,05	0,13612	14,68	−0,39520
12,80	1,18720	13,43	0,73029	14,06	0,12653	14,69	−0,40189
12,81	1,18208	13,44	0,72130	14,07	0,11695	14,70	−0,40850
12,82	1,17689	13,45	0,71227	14,08	0,10740	14,71	−0,41505
12,83	1,17161	13,46	0,70320	14,09	0,09787	14,72	−0,42152
12,84	1,16625	13,47	0,69410	14,10	0,08836	14,73	−0,42792
12,85	1,16081	13,48	0,68497	14,11	0,07887	14,74	−0,43425
12,86	1,15529	13,49	0,67580	14,12	0,06941	14,75	−0,44050
12,87	1,14970	13,50	0,66660	14,13	0,05997	14,76	−0,44668
12,88	1,14403	13,51	0,65736	14,14	0,05056	14,77	−0,45278
12,89	1,13828	13,52	0,64809	14,15	0,04117	14,78	−0,45881
12,90	1,13245	13,53	0,63880	14,16	0,03182	14,79	−0,46477
12,91	1,12654	13,54	0,62947	14,17	0,02249	14,80	−0,47064
12,92	1,12056	13,55	0,62012	14,18	0,01319	14,81	−0,47644
12,93	1,11451	13,56	0,61073	14,19	0,00392	14,82	−0,48216
12,94	1,10838	13,57	0,60132	14,20	−0,00531	14,83	−0,48780
12,95	1,10218	13,58	0,59189	14,21	−0,01452	14,84	−0,49336
12,96	1,09590	13,59	0,58243	14,22	−0,02369	14,85	−0,49885
12,97	1,08955	13,60	0,57294	14,23	−0,03283	14,86	−0,50425
12,98	1,08313	13,61	0,56344	14,24	−0,04193	14,87	−0,50957
12,99	1,07664	13,62	0,55390	14,25	−0,05099	14,88	−0,51482
13,00	1,07007	13,63	0,54435	14,26	−0,06002	14,89	−0,51998
13,01	1,06344	13,64	0,53478	14,27	−0,06902	14,90	−0,52505
13,02	1,05673	13,65	0,52519	14,28	−0,07797	14,91	−0,53005
13,03	1,04996	13,66	0,51558	14,29	−0,08688	14,92	−0,53496
13,04	1,04312	13,67	0,50595	14,30	−0,09576	14,93	−0,53979
13,05	1,03621	13,68	0,49631	14,31	−0,10459	14,94	−0,54454
13,06	1,02923	13,69	0,48664	14,32	−0,11339	14,95	−0,54920
13,07	1,02218	13,70	0,47697	14,33	−0,12213	14,96	−0,55377

y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$
14,97	−0,55826	15,60	−0,65557	16,23	−0,38519	16,86	0,15337
14,98	−0,56266	15,61	−0,65406	16,24	−0,37830	16,87	0,16308
14,99	−0,56698	15,62	−0,65245	16,25	−0,37135	16,88	0,17280
15,00	−0,57121	15,63	−0,65075	16,26	−0,36433	16,89	0,18254
15,01	−0,57536	15,64	−0,64896	16,27	−0,35724	16,90	0,19229
15,02	−0,57941	15,65	−0,64706	16,28	−0,35008	16,91	0,20206
15,03	−0,58338	15,66	−0,64508	16,29	−0,34286	16,92	0,21184
15,04	−0,58726	15,67	−0,64300	16,30	−0,33557	16,93	0,22163
15,05	−0,59105	15,68	−0,64082	16,31	−0,32822	16,94	0,23144
15,06	−0,59475	15,69	−0,63856	16,32	−0,32080	16,95	0,24125
15,07	−0,59837	15,70	−0,63619	16,33	−0,31332	16,96	0,25107
15,08	−0,60189	15,71	−0,63374	16,34	−0,30578	16,97	0,26090
15,09	−0,60532	15,72	−0,63119	16,35	−0,29817	16,98	0,27074
15,10	−0,60866	15,73	−0,62854	16,36	−0,29050	16,99	0,28058
15,11	−0,61192	15,74	−0,62581	16,37	−0,28278	17,00	0,29043
15,12	−0,61508	15,75	−0,62298	16,38	−0,27499	17,01	0,30029
15,13	−0,61814	15,76	−0,62005	16,39	−0,26714	17,02	0,31014
15,14	−0,62112	15,77	−0,61704	16,40	−0,25924	17,03	0,32000
15,15	−0,62401	15,78	−0,61393	16,41	−0,25127	17,04	0,32986
15,16	−0,62680	15,79	−0,61073	16,42	−0,24325	17,05	0,33973
15,17	−0,62950	15,80	−0,60744	16,43	−0,23518	17,06	0,34959
15,18	−0,63211	15,81	−0,60406	16,44	−0,22704	17,07	0,35945
15,19	−0,63462	15,82	−0,60059	16,45	−0,21886	17,08	0,36930
15,20	−0,63704	15,83	−0,59703	16,46	−0,21062	17,09	0,37916
15,21	−0,63937	15,84	−0,59338	16,47	−0,20233	17,10	0,38901
15,22	−0,64160	15,85	−0,58963	16,48	−0,19398	17,11	0,39885
15,23	−0,64374	15,86	−0,58580	16,49	−0,18558	17,12	0,40869
15,24	−0,64579	15,87	−0,58188	16,50	−0,17714	17,13	0,41852
15,25	−0,64774	15,88	−0,57787	16,51	−0,16864	17,14	0,42834
15,26	−0,64959	15,89	−0,57377	16,52	−0,16010	17,15	0,43815
15,27	−0,65135	15,90	−0,56959	16,53	−0,15150	17,16	0,44796
15,28	−0,65302	15,91	−0,56531	16,54	−0,14286	17,17	0,45775
15,29	−0,65459	15,92	−0,56095	16,55	−0,13418	17,18	0,46753
15,30	−0,65606	15,93	−0,55651	16,56	−0,12544	17,19	0,47730
15,31	−0,65744	15,94	−0,55197	16,57	−0,11667	17,20	0,48705
15,32	−0,65873	15,95	−0,54735	16,58	−0,10784	17,21	0,49679
15,33	−0,65992	15,96	−0,54265	16,59	−0,09898	17,22	0,50652
15,34	−0,66101	15,97	−0,53786	16,60	−0,09007	17,23	0,51622
15,35	−0,66201	15,98	−0,53299	16,61	−0,08113	17,24	0,52591
15,36	−0,66291	15,99	−0,52803	16,62	−0,07214	17,25	0,53558
15,37	−0,66371	16,00	−0,52299	16,63	−0,06311	17,26	0,54523
15,38	−0,66442	16,01	−0,51786	16,64	−0,05405	17,27	0,55486
15,39	−0,66503	16,02	−0,51265	16,65	−0,04494	17,28	0,56447
15,40	−0,66554	16,03	−0,50737	16,66	−0,03580	17,29	0,57406
15,41	−0,66596	16,04	−0,50199	16,67	−0,02662	17,30	0,58362
15,42	−0,66628	16,05	−0,49654	16,68	−0,01741	17,31	0,59316
15,43	−0,66651	16,06	−0,49101	16,69	−0,00817	17,32	0,60268
15,44	−0,66664	16,07	−0,48540	16,70	0,00111	17,33	0,61216
15,45	−0,66667	16,08	−0,47971	16,71	0,01042	17,34	0,62162
15,46	−0,66660	16,09	−0,47394	16,72	0,01977	17,35	0,63106
15,47	−0,66644	16,10	−0,46809	16,73	0,02914	17,36	0,64046
15,48	−0,66618	16,11	−0,46216	16,74	0,03855	17,37	0,64984
15,49	−0,66583	16,12	−0,45616	16,75	0,04798	17,38	0,65918
15,50	−0,66538	16,13	−0,45007	16,76	0,05744	17,39	0,66849
15,51	−0,66483	16,14	−0,44392	16,77	0,06693	17,40	0,67777
15,52	−0,66419	16,15	−0,43769	16,78	0,07644	17,41	0,68702
15,53	−0,66344	16,16	−0,43138	16,79	0,08598	17,42	0,69623
15,54	−0,66261	16,17	−0,42500	16,80	0,09554	17,43	0,70541
15,55	−0,66167	16,18	−0,41854	16,81	0,10513	17,44	0,71455
15,56	−0,66064	16,19	−0,41201	16,82	0,11474	17,45	0,72365
15,57	−0,65952	16,20	−0,40541	16,83	0,12437	17,46	0,73272
15,58	−0,65830	16,21	−0,39874	16,84	0,13402	17,47	0,74174
15,59	−0,65698	16,22	−0,39200	16,85	0,14369	17,48	0,75073

y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$
17,49	0,75968	18,12	1,20688	18,75	1,32682	19,38	1,07368
17,50	0,76859	18,13	1,21164	18,76	1,32565	19,39	1,06699
17,51	0,77745	18,14	1,21633	18,77	1,32437	19,40	1,06023
17,52	0,78627	18,15	1,22092	18,78	1,32301	19,41	1,05340
17,53	0,79505	18,16	1,22543	18,79	1,32154	19,42	1,04650
17,54	0,80378	18,17	1,22985	18,80	1,31998	19,43	1,03953
17,55	0,81246	18,18	1,23418	18,81	1,31832	19,44	1,03249
17,56	0,82110	18,19	1,23842	18,82	1,31657	19,45	1,02539
17,57	0,82969	18,20	1,24258	18,83	1,31471	19,46	1,01821
17,58	0,83824	18,21	1,24665	18,84	1,31277	19,47	1,01097
17,59	0,84673	18,22	1,25063	18,85	1,31072	19,48	1,00366
17,60	0,85518	18,23	1,25452	18,86	1,30859	19,49	0,99629
17,61	0,86357	18,24	1,25831	18,87	1,30635	19,50	0,98885
17,62	0,87191	18,25	1,26202	18,88	1,30402	19,51	0,98134
17,63	0,88020	18,26	1,26564	18,89	1,30160	19,52	0,97377
17,64	0,88844	18,27	1,26917	18,90	1,29908	19,53	0,96614
17,65	0,89662	18,28	1,27261	18,91	1,29647	19,54	0,95845
17,66	0,90475	18,29	1,27595	18,92	1,29376	19,55	0,95070
17,67	0,91283	18,30	1,27920	18,93	1,29096	19,56	0,94288
17,68	0,92084	18,31	1,28236	18,94	1,28807	19,57	0,93501
17,69	0,92880	18,32	1,28543	18,95	1,28508	19,58	0,92708
17,70	0,93670	18,33	1,28841	18,96	1,28200	19,59	0,91909
17,71	0,94454	18,34	1,29129	18,97	1,27882	19,60	0,91104
17,72	0,95233	18,35	1,29408	18,98	1,27556	19,61	0,90293
17,73	0,96005	18,36	1,29677	18,99	1,27220	19,62	0,89477
17,74	0,96771	18,37	1,29937	19,00	1,26875	19,63	0,88655
17,75	0,97531	18,38	1,30188	19,01	1,26521	19,64	0,87828
17,76	0,98285	18,39	1,30429	19,02	1,26157	19,65	0,86996
17,77	0,99033	18,40	1,30660	19,03	1,25785	19,66	0,86158
17,78	0,99774	18,41	1,30883	19,04	1,25404	19,67	0,85316
17,79	1,00508	18,42	1,31095	19,05	1,25013	19,68	0,84468
17,80	1,01236	18,43	1,31298	19,06	1,24614	19,69	0,83615
17,81	1,01958	18,44	1,31492	19,07	1,24205	19,70	0,82757
17,82	1,02673	18,45	1,31676	19,08	1,23788	19,71	0,81894
17,83	1,03381	18,46	1,31850	19,09	1,23362	19,72	0,81027
17,84	1,04082	18,47	1,32015	19,10	1,22927	19,73	0,80154
17,85	1,04776	18,48	1,32170	19,11	1,22484	19,74	0,79278
17,86	1,05464	18,49	1,32316	19,12	1,22031	19,75	0,78396
17,87	1,06144	18,50	1,32451	19,13	1,21570	19,76	0,77511
17,88	1,06817	18,51	1,32578	19,14	1,21100	19,77	0,76621
17,89	1,07483	18,52	1,32694	19,15	1,20622	19,78	0,75726
17,90	1,08142	18,53	1,32801	19,16	1,20135	19,79	0,74828
17,91	1,08794	18,54	1,32898	19,17	1,19640	19,80	0,73925
17,92	1,09438	18,55	1,32985	19,18	1,19136	19,81	0,73019
17,93	1,10075	18,56	1,33063	19,19	1,18624	19,82	0,72108
17,94	1,10704	18,57	1,33130	19,20	1,18104	19,83	0,71194
17,95	1,11326	18,58	1,33188	19,21	1,17575	19,84	0,70276
17,96	1,11940	18,59	1,33237	19,22	1,17038	19,85	0,69355
17,97	1,12547	18,60	1,33275	19,23	1,16492	19,86	0,68430
17,98	1,13146	18,61	1,33304	19,24	1,15939	19,87	0,67501
17,99	1,13737	18,62	1,33323	19,25	1,15377	19,88	0,66569
18,00	1,14320	18,63	1,33332	19,26	1,14808	19,89	0,65634
18,01	1,14896	18,64	1,33332	19,27	1,14230	19,90	0,64696
18,02	1,15463	18,65	1,33322	19,28	1,13645	19,91	0,63754
18,03	1,16022	18,66	1,33302	19,29	1,13052	19,92	0,62810
18,04	1,16574	18,67	1,33272	19,30	1,12451	19,93	0,61862
18,05	1,17117	18,68	1,33232	19,31	1,11842	19,94	0,60912
18,06	1,17652	18,69	1,33183	19,32	1,11225	19,95	0,59959
18,07	1,18179	18,70	1,33124	19,33	1,10601	19,96	0,59004
18,08	1,18698	18,71	1,33055	19,34	1,09969	19,97	0,58046
18,09	1,19208	18,72	1,32976	19,35	1,09330	19,98	0,57086
18,10	1,19710	18,73	1,32888	19,36	1,08683	19,99	0,56123
18,11	1,20203	18,74	1,32790	19,37	1,08029	20,00	0,55158

y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$
20,01	0,54191	20,64	−0,06872	21,27	−0,52805	21,90	−0,66246
20,02	0,53221	20,65	−0,07777	21,28	−0,53304	21,91	−0,66150
20,03	0,52250	20,66	−0,08677	21,29	−0,53795	21,92	−0,66045
20,04	0,51277	20,67	−0,09574	21,30	−0,54277	21,93	−0,65929
20,05	0,50303	20,68	−0,10467	21,31	−0,54751	21,94	−0,65804
20,06	0,49326	20,69	−0,11355	21,32	−0,55216	21,95	−0,65670
20,07	0,48348	20,70	−0,12239	21,33	−0,55672	21,96	−0,65525
20,08	0,47368	20,71	−0,13119	21,34	−0,56119	21,97	−0,65371
20,09	0,46388	20,72	−0,13994	21,35	−0,56557	21,98	−0,65207
20,10	0,45405	20,73	−0,14864	21,36	−0,56988	21,99	−0,65033
20,11	0,44422	20,74	−0,15730	21,37	−0,57409	22,00	−0,64850
20,12	0,43438	20,75	−0,16591	21,38	−0,57821	22,01	−0,64657
20,13	0,42452	20,76	−0,17447	21,39	−0,58224	22,02	−0,64454
20,14	0,41466	20,77	−0,18298	21,40	−0,58618	22,03	−0,64242
20,15	0,40478	20,78	−0,19143	21,41	−0,59003	22,04	−0,64020
20,16	0,39491	20,79	−0,19984	21,42	−0,59379	22,05	−0,63788
20,17	0,38502	20,80	−0,20820	21,43	−0,59746	22,06	−0,63547
20,18	0,37513	20,81	−0,21650	21,44	−0,60104	22,07	−0,63297
20,19	0,36524	20,82	−0,22475	21,45	−0,60452	22,08	−0,63037
20,20	0,35534	20,83	−0,23294	21,46	−0,60792	22,09	−0,62767
20,21	0,34544	20,84	−0,24108	21,47	−0,61122	22,10	−0,62488
20,22	0,33554	20,85	−0,24916	21,48	−0,61443	22,11	−0,62200
20,23	0,32563	20,86	−0,25718	21,49	−0,61754	22,12	−0,61902
20,24	0,31573	20,87	−0,26515	21,50	−0,62057	22,13	−0,61595
20,25	0,30583	20,88	−0,27306	21,51	−0,62349	22,14	−0,61278
20,26	0,29594	20,89	−0,28091	21,52	−0,62633	22,15	−0,60953
20,27	0,28604	20,90	−0,28870	21,53	−0,62907	22,16	−0,60618
20,28	0,27616	20,91	−0,29642	21,54	−0,63171	22,17	−0,60273
20,29	0,26627	20,92	−0,30409	21,55	−0,63426	22,18	−0,59920
20,30	0,25640	20,93	−0,31169	21,56	−0,63672	22,19	−0,59557
20,31	0,24653	20,94	−0,31923	21,57	−0,63908	22,20	−0,59185
20,32	0,23667	20,95	−0,32671	21,58	−0,64134	22,21	−0,58804
20,33	0,22681	20,96	−0,33412	21,59	−0,64351	22,22	−0,58414
20,34	0,21697	20,97	−0,34146	21,60	−0,64559	22,23	−0,58015
20,35	0,20714	20,98	−0,34874	21,61	−0,64756	22,24	−0,57607
20,36	0,19733	20,99	−0,35596	21,62	−0,64944	22,25	−0,57190
20,37	0,18752	21,00	−0,36310	21,63	−0,65123	22,26	−0,56764
20,38	0,17773	21,01	−0,37018	21,64	−0,65291	22,27	−0,56329
20,39	0,16796	21,02	−0,37718	21,65	−0,65450	22,28	−0,55886
20,40	0,15820	21,03	−0,38412	21,66	−0,65600	22,29	−0,55433
20,41	0,14846	21,04	−0,39099	21,67	−0,65739	22,30	−0,54972
20,42	0,13873	21,05	−0,39779	21,68	−0,65869	22,31	−0,54502
20,43	0,12903	21,06	−0,40451	21,69	−0,65989	22,32	−0,54024
20,44	0,11934	21,07	−0,41116	21,70	−0,66100	22,33	−0,53537
20,45	0,10968	21,08	−0,41774	21,71	−0,66200	22,34	−0,53041
20,46	0,10004	21,09	−0,42425	21,72	−0,66291	22,35	−0,52537
20,47	0,09042	21,10	−0,43068	21,73	−0,66372	22,36	−0,52024
20,48	0,08082	21,11	−0,43704	21,74	−0,66443	22,37	−0,51503
20,49	0,07125	21,12	−0,44332	21,75	−0,66504	22,38	−0,50974
20,50	0,06171	21,13	−0,44952	21,76	−0,66556	22,39	−0,50437
20,51	0,05219	21,14	−0,45565	21,77	−0,66598	22,40	−0,49891
20,52	0,04270	21,15	−0,46170	21,78	−0,66630	22,41	−0,49337
20,53	0,03323	21,16	−0,46767	21,79	−0,66652	22,42	−0,48774
20,54	0,02380	21,17	−0,47356	21,80	−0,66664	22,43	−0,48204
20,55	0,01440	21,18	−0,47938	21,81	−0,66666	22,44	−0,47626
20,56	0,00503	21,19	−0,48511	21,82	−0,66659	22,45	−0,47039
20,57	−0,00431	21,20	−0,49077	21,83	−0,66642	22,46	−0,46445
20,58	−0,01362	21,21	−0,49634	21,84	−0,66615	22,47	−0,45843
20,59	−0,02289	21,22	−0,50183	21,85	−0,66578	22,48	−0,45233
20,60	−0,03213	21,23	−0,50724	21,86	−0,66531	22,49	−0,44616
20,61	−0,04133	21,24	−0,51257	21,87	−0,66475	22,50	−0,43990
20,62	−0,05050	21,25	−0,51781	21,88	−0,66408	22,51	−0,43358
20,63	−0,05963	21,26	−0,52297	21,89	−0,66332	22,52	−0,42717

y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$
22,53	−0,42069	23,16	−0,10631	23,79	−0,71943	24,42	1,18651
22,54	−0,41414	23,17	−0,11599	23,80	0,72857	24,43	1,19165
22,55	−0,40751	23,18	−0,12569	23,81	0,73767	24,44	1,19670
22,56	−0,40081	23,19	−0,13541	23,82	0,74673	24,45	1,20167
22,57	−0,39404	23,20	−0,14515	23,83	0,75575	24,46	1,20655
22,58	−0,38720	23,21	−0,15490	23,84	0,76473	24,47	1,21135
22,59	−0,38028	23,22	−0,16468	23,85	0,77367	24,48	1,21606
22,60	−0,37329	23,23	−0,17447	23,86	0,78256	24,49	1,22069
22,61	−0,36624	23,24	−0,18428	23,87	0,79141	24,50	1,22522
22,62	−0,35912	23,25	−0,19410	23,88	0,80021	24,51	1,22967
22,63	−0,35192	23,26	−0,20394	23,89	0,80897	24,52	1,23403
22,64	−0,34466	23,27	−0,21378	23,90	0,81768	24,53	1,23830
22,65	−0,33734	23,28	−0,22364	23,91	0,82634	24,54	1,24248
22,66	−0,32995	23,29	−0,23352	23,92	0,83496	24,55	1,24657
22,67	−0,32249	23,30	−0,24340	23,93	0,84352	24,56	1,25058
22,68	−0,31497	23,31	−0,25329	23,94	0,85204	24,57	1,25449
22,69	−0,30738	23,32	−0,26319	23,95	0,86050	24,58	1,25831
22,70	−0,29973	23,33	−0,27309	23,96	0,86891	24,59	1,26204
22,71	−0,29202	23,34	−0,28300	23,97	0,87727	24,60	1,26568
22,72	−0,28425	23,35	−0,29292	23,98	0,88558	24,61	1,26922
22,73	−0,27641	23,36	−0,30284	23,99	0,89383	24,62	1,27267
22,74	−0,26852	23,37	−0,31276	24,00	0,90203	24,63	1,27604
22,75	−0,26056	23,38	−0,32269	24,01	0,91017	24,64	1,27930
22,76	−0,25255	23,39	−0,33261	24,02	0,91825	24,65	1,28248
22,77	−0,24448	23,40	−0,34254	24,03	0,92628	24,66	1,28556
22,78	−0,23635	23,41	−0,35246	24,04	0,93424	24,67	1,28855
22,79	−0,22817	23,42	−0,36239	24,05	0,94215	24,68	1,29144
22,80	−0,21993	23,43	−0,37231	24,06	0,95000	24,69	1,29424
22,81	−0,21164	23,44	−0,38223	24,07	0,95779	24,70	1,29694
22,82	−0,20329	23,45	−0,39214	24,08	0,96551	24,71	1,29955
22,83	−0,19489	23,46	−0,40205	24,09	0,97317	24,72	1,30206
22,84	−0,18644	23,47	−0,41195	24,10	0,98078	24,73	1,30448
22,85	−0,17794	23,48	−0,42184	24,11	0,98831	24,74	1,30680
22,86	−0,16939	23,49	−0,43172	24,12	0,99578	24,75	1,30902
22,87	−0,16078	23,50	−0,44160	24,13	1,00319	24,76	1,31115
22,88	−0,15213	23,51	−0,45146	24,14	1,01053	24,77	1,31318
22,89	−0,14343	23,52	−0,46131	24,15	1,01780	24,78	1,31512
22,90	−0,13469	23,53	−0,47115	24,16	1,02501	24,79	1,31696
22,91	−0,12589	23,54	−0,48098	24,17	1,03215	24,80	1,31870
22,92	−0,11706	23,55	−0,49079	24,18	1,03922	24,81	1,32035
22,93	−0,10817	23,56	−0,50058	24,19	1,04622	24,82	1,32189
22,94	−0,09925	23,57	−0,51036	24,20	1,05315	24,83	1,32334
22,95	−0,09028	23,58	−0,52013	24,21	1,06001	24,84	1,32470
22,96	−0,08127	23,59	−0,52987	24,22	1,06679	24,85	1,32595
22,97	−0,07222	23,60	−0,53959	24,23	1,07351	24,86	1,32711
22,98	−0,06313	23,61	−0,54930	24,24	1,08015	24,87	−1,32816
22,99	−0,05400	23,62	−0,55898	24,25	1,08672	24,88	−1,32912
23,00	−0,04483	23,63	−0,56864	24,26	1,09321	24,89	1,32998
23,01	−0,03562	23,64	−0,57828	24,27	1,09963	24,90	1,33075
23,02	−0,02638	23,65	−0,58789	24,28	1,10597	24,91	1,33141
23,03	−0,01710	23,66	−0,59748	24,29	1,11224	24,92	1,33198
23,04	−0,00779	23,67	−0,60704	24,30	1,11843	24,93	1,33245
23,05	−0,00155	23,68	0,61658	24,31	1,12454	24,94	1,33282
23,06	−0,01093	23,69	0,62609	24,32	1,13058	24,95	1,33309
23,07	−0,02034	23,70	0,63557	24,33	1,13653	24,96	1,33326
23,08	−0,02978	23,71	0,64502	24,34	1,14241	24,97	1,33333
23,09	−0,03925	23,72	0,65443	24,35	1,14821	24,98	1,33330
23,10	−0,04875	23,73	0,66382	24,36	1,15392	24,99	1,33318
23,11	−0,05828	23,74	0,67317	24,37	1,15956	25,00	1,33296
23,12	−0,06784	23,75	0,68250	24,38	1,16511	25,01	1,33264
23,13	−0,07742	23,76	0,69178	24,39	1,17059	25,02	1,33221
23,14	−0,08703	23,77	0,70103	24,40	1,17598	25,03	1,33170
23,15	−0,09666	23,78	0,71025	24,41	1,18128	25,04	1,33108

y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$	y	$\varkappa(y)$
25,05	1,33036	25,68	1,09612	26,31	0,57235	26,94	−0,04230
25,06	1,32955	25,69	1,08966	26,32	0,56269	26,95	−0,05150
25,07	1,32863	25,70	1,08312	26,33	0,55300	26,96	−0,06066
25,08	1,32762	25,71	1,07651	26,34	0,54329	26,97	−0,06978
25,09	1,32651	25,72	1,06982	26,35	0,53356	26,98	−0,07886
25,10	1,32531	25,73	1,06306	26,36	0,52381	26,99	−0,08790
25,11	1,32400	25,74	1,05623	26,37	0,51404	27,00	−0,09690
25,12	1,32260	25,75	1,04932	26,38	0,50425	27,01	−0,10585
25,13	1,32110	25,76	1,04235	26,39	0,49445	27,02	−0,11477
25,14	1,31950	25,77	1,03530	26,40	0,48463	27,03	−0,12363
25,15	1,31780	25,78	1,02819	26,41	0,47479	27,04	−0,13246
25,16	1,31601	25,79	1,02101	26,42	0,46494	27,05	−0,14123
25,17	1,31412	25,80	1,01376	26,43	0,45508	27,06	−0,14996
25,18	1,31213	25,81	1,00644	26,44	0,44521	27,07	−0,15865
25,19	1,31005	25,82	0,99906	26,45	0,43532	27,08	−0,16728
25,20	1,30787	25,83	0,99161	26,46	0,42542	27,09	−0,17587
25,21	1,30559	25,84	0,98409	26,47	0,41552	27,10	−0,18440
25,22	1,30322	25,85	0,97651	26,48	0,40561	27,11	−0,19288
25,23	1,30075	25,86	0,96887	26,49	0,39569	27,12	−0,20131
25,24	1,29819	25,87	0,96116	26,50	0,38576	27,13	−0,20969
25,25	1,29553	25,88	0,95340	26,51	0,37583	27,14	−0,21802
25,26	1,29278	25,89	0,94557	26,52	0,36589	27,15	−0,22629
25,27	1,28993	25,90	0,93768	26,53	0,35595	27,16	−0,23450
25,28	1,28698	25,91	0,92973	26,54	0,34601	27,17	−0,24266
25,29	1,28395	25,92	0,92172	26,55	0,33607	27,18	−0,25076
25,30	1,28082	25,93	0,91365	26,56	0,32613	27,19	−0,25880
25,31	1,27759	25,94	0,90553	26,57	0,31618	27,20	−0,26679
25,32	1,27427	25,95	0,89735	26,58	0,30624	27,21	−0,27472
25,33	1,27086	25,96	0,88911	26,59	0,29630	27,22	−0,28258
25,34	1,26736	25,97	0,88082	26,60	0,28637	27,23	−0,29039
25,35	1,26376	25,98	0,87248	26,61	0,27644	27,24	−0,29813
25,36	1,26007	25,99	0,86408	26,62	0,26652	27,25	−0,30581
25,37	1,25630	26,00	0,85563	26,63	0,25660	27,26	−0,31343
25,38	1,25243	26,01	0,84713	26,64	0,24669	27,27	−0,32098
25,39	1,24846	26,02	0,83857	26,65	0,23679	27,28	−0,32847
25,40	1,24441	26,03	0,82997	26,66	0,22689	27,29	−0,33589
25,41	1,24027	26,04	0,82132	26,67	0,21701	27,30	−0,34325
25,42	1,23604	26,05	0,81261	26,68	0,20714	27,31	−0,35054
25,43	1,23172	26,06	0,80387	26,69	0,19728	27,32	−0,35776
25,44	1,22731	26,07	0,79507	26,70	0,18744	27,33	−0,36492
25,45	1,22281	26,08	0,78623	26,71	0,17761	27,34	−0,37200
25,46	1,21823	26,09	0,77735	26,72	0,16780	27,35	−0,37902
25,47	1,21355	26,10	0,76842	26,73	0,15800	27,36	−0,38597
25,48	1,20879	26,11	0,75944	26,74	0,14822	27,37	−0,39284
25,49	1,20395	26,12	0,75043	26,75	0,13845	27,38	−0,39964
25,50	1,19902	26,13	0,74137	26,76	0,12871	27,39	−0,40637
25,51	1,19400	26,14	0,73228	26,77	0,11899	27,40	−0,41303
25,52	1,18890	26,15	0,72314	26,78	0,10928	27,41	−0,41961
25,53	1,18371	26,16	0,71397	26,79	0,09960	27,42	−0,42612
25,54	1,17844	26,17	0,70476	26,80	0,08995	27,43	−0,43255
25,55	1,17308	26,18	0,69551	26,81	0,08031	27,44	−0,43891
25,56	1,16764	26,19	0,69622	26,82	0,07071	27,45	−0,44519
25,57	1,16212	26,20	0,67690	26,83	0,06112	27,46	−0,45140
25,58	1,15652	26,21	0,66755	26,84	0,05157	27,47	−0,45752
25,59	1,15084	26,22	0,65817	26,85	0,04204	27,48	−0,46357
25,60	1,14507	26,23	0,64875	26,86	0,03254	27,49	−0,46954
25,61	1,13923	26,24	0,63930	26,87	0,02307	27,50	−0,47543
25,62	1,13331	26,25	0,62982	26,88	0,01364	27,51	−0,48124
25,63	1,12730	26,26	0,62031	26,89	0,00423	27,52	−0,48697
25,64	1,12122	26,27	0,61076	26,90	−0,00514	27,53	−0,49262
25,65	1,11506	26,28	0,60121	26,91	−0,01449	27,54	−0,49818
25,66	1,10883	26,29	0,59161	26,92	−0,02379	27,55	−0,50367
25,67	1,10251	26,30	0,58200	26,93	−0,03306	27,56	−0,50907

y	ϰ (y)	y	ϰ (y)	y	ϰ (y)	y	ϰ (y)
27,57	−0,51439	28,18	−0,66553	28,78	−0,46591	29,39	0,01979
27,58	−0,51962	28,19	−0,66500	28,79	−0,45989	29,40	0,02926
27,59	−0,52477	28,20	−0,66438	28,80	−0,45379	29,41	0,04828
27,60	−0,52984	28,21	−0,66366	28,81	−0,44761	29,43	0,05783
27,61	−0,53482	28,22	−0,66284	28,82	−0,44136	29,44	0,06742
27,62	−0,53971	28,23	−0,66192	28,83	−0,43503	29,45	0,07702
27,63	−0,54452	28,24	−0,66090	28,84	−0,42862	29,46	0,08666
27,64	−0,54924	28,25	−0,65979	28,85	−0,42214	29,47	0,09632
27,65	−0,55387	28,26	−0,65857	28,86	−0,41558	29,48	0,10600
27,66	−0,55842	28,27	−0,65726	28,87	−0,40895	29,49	0,11570
27,67	−0,56288	28,28	−0,65585	28,88	−0,40224	29,50	0,12543
27,68	−0,56725	28,29	−0,65434	28,89	−0,39546	29,51	0,13518
27,69	−0,57152	28,30	−0,65273	28,90	−0,38861	29,52	0,14494
27,70	−0,57571	28,31	−0,65103	28,91	−0,38169	29,53	0,15473
27,71	−0,57981	28,32	−0,64923	28,92	−0,37470	29,54	0,16453
27,72	−0,58382	28,33	−0,64733	28,93	−0,36764	29,55	0,17435
27,73	−0,58774	28,34	−0,64533	28,94	−0,36050	29,56	0,18418
27,74	−0,59157	28,35	−0,64324	28,95	−0,35330	29,57	0,19403
27,75	−0,59531	28,36	−0,64105	28,96	−0,34603	29,58	0,20390
27,76	−0,59895	28,37	−0,63877	28,97	−0,33870	29,59	0,21377
27,77	−0,60250	28,38	−0,63638	28,98	−0,33129	29,60	0,22366
27,78	−0,60596	28,39	−0,63391	28,99	−0,32382	29,61	0,23356
27,79	−0,60933	28,40	−0,63133	29,00	−0,31629	29,62	0,24347
27,80	−0,61260	28,41	−0,62866	29,01	−0,30869	29,63	0,25339
27,81	−0,61578	28,42	−0,62590	29,03	−0,29331	29,64	0,26332
27,82	−0,61887	28,43	−0,62304	29,04	−0,28552	29,65	0,27325
27,83	−0,62186	28,44	−0,62008	29,05	−0,27767	29,66	0,28319
27,84	−0,62476	28,45	−0,61704	29,06	−0,26976	29,67	0,29313
27,85	−0,62756	28,46	−0,61389	29,07	−0,26179	29,68	0,30308
27,86	−0,63027	28,47	−0,61066	29,08	−0,25377	29,69	0,31303
27,87	−0,63288	28,48	−0,60733	29,09	−0,24568	29,70	0,32299
27,88	−0,63540	28,49	−0,60390	29,10	−0,23754	29,71	0,33294
27,89	−0,63782	28,50	−0,60039	29,11	−0,22934	29,72	0,34289
27,90	−0,64014	28,51	−0,59678	29,12	−0,22108	29,73	0,35285
27,91	−0,64237	28,52	−0,59308	29,13	−0,21277	29,74	0,36280
27,92	−0,64450	28,53	−0,58928	29,14	−0,20441	29,75	0,37275
27,93	−0,64654	28,54	−0,58540	29,15	−0,19599	29,76	0,38269
27,94	−0,64847	28,55	−0,58143	29,16	−0,18752	29,77	0,39263
27,95	−0,65031	28,56	−0,57736	29,17	−0,17900	29,78	0,40257
27,96	−0,65206	28,57	−0,57320	29,18	−0,17042	29,79	0,41250
27,97	−0,65370	28,58	−0,56896	29,19	−0,16180	29,80	0,42241
27,98	−0,65525	28,59	−0,56462	29,20	−0,15313	29,82	0,44228
27,99	−0,65670	28,60	−0,56020	29,21	−0,14441	29,83	0,45212
28,00	−0,65805	28,61	−0,55569	29,22	−0,13564	29,84	0,46199
28,01	−0,65931	28,62	−0,55109	29,23	−0,12683	29,85	0,47186
28,02	−0,66046	28,63	−0,54640	29,24	−0,11797	29,86	0,48171
28,03	−0,66152	28,64	−0,54163	29,25	−0,10907	29,87	0,49155
28,04	−0,62248	28,65	−0,53676	29,26	−0,10012	29,88	0,50137
28,05	−0,66334	28,66	−0,53182	29,27	−0,09113	29,89	0,51118
28,06	−0,66410	28,67	−0,52678	29,28	−0,08209	29,90	0,52096
28,07	−0,66476	28,68	−0,52167	29,29	−0,07302	29,91	0,53073
28,08	−0,66533	28,69	−0,51646	29,30	−0,06390	29,92	0,54048
28,09	−0,66579	28,70	−0,51117	29,31	−0,05475	29,93	0,55021
28,10	−0,66616	28,71	−0,50580	29,32	−0,04556	29,94	0,55992
28,11	−0,66643	28,72	−0,50035	29,33	−0,03633	29,95	0,56960
28,12	−0,66660	28,73	−0,49481	29,34	−0,02706	29,96	0,57927
28,13	−0,66667	28,74	−0,48919	29,35	−0,01776	29,97	0,58890
28,14	−0,66664	28,75	−0,48349	29,36	−0,00842	29,98	0,59851
28,15	−0,66651	28,76	−0,47771	29,37	0,00095	29,99	0,60810
28,16	−0,66628	28,77	−0,47185	29,38	0,01035	30,00	0,61766
28,17	−0,66595						

Таблица функции $\varkappa_0$ (y)

y	$\varkappa_0(y)$	y	$\varkappa_0(y)$	y	$\varkappa_0(y)$	y	$\varkappa_0(y)$
0,1	0,00033	6,1	−0,41238	12,1	−0,32159	18,1	−0,30509
0,2	0,00133	6,2	−0,42503	12,2	−0,32985	18,2	−0,31012
0,3	0,00297	6,3	−0,43650	12,3	−0,33801	18,3	−0,31532
0,4	0,00524	6,4	−0,44676	12,4	−0,34598	18,4	−0,32064
0,5	0,00811	6,5	−0,45575	12,5	−0,35371	18,5	−0,32602
0,6	0,01154	6,6	−0,46346	12,6	−0,36112	18,6	−0,33141
0,7	0,01549	6,7	−0,46985	12,7	−0,36814	18,7	−0,33677
0,8	0,01990	6,8	−0,47492	12,8	−0,37473	18,8	−0,34203
0,9	0,02471	6,9	−0,47866	12,9	−0,38082	18,9	−0,34716
1,0	0,02987	7,0	−0,48107	13,0	−0,38637	19,0	−0,35209
1,1	0,03530	7,1	−0,48218	13,1	−0,39133	19,1	−0,35679
1,2	0,04092	7,2	−0,48200	13,2	−0,39566	19,2	−0,36121
1,3	0,04665	7,3	−0,48058	13,3	−0,39933	19,3	−0,36532
1,4	0,05242	7,4	−0,47794	13,4	−0,40233	19,4	−0,36907
1,5	0,05813	7,5	−0,47416	13,5	−0,40462	19,5	−0,37243
1,6	0,06370	7,6	−0,46927	13,6	−0,40621	19,6	−0,37538
1,7	0,06904	7,7	−0,46336	13,7	−0,40708	19,7	−0,37789
1,8	0,07407	7,8	−0,45648	13,8	−0,40723	19,8	−0,37994
1,9	0,07869	7,9	−0,44873	13,9	−0,40668	19,9	−0,38152
2,0	0,08281	8,0	−0,44018	14,0	−0,40544	20,0	−0,38261
2,1	0,08636	8,1	−0,43093	14,1	−0,40353	20,1	−0,38320
2,2	0,08925	8,2	−0,42106	14,2	−0,40098	20,2	−0,38331
2,3	0,09140	8,3	−0,41067	14,3	−0,39782	20,3	−0,38293
2,4	0,09275	8,4	−0,39987	14,4	−0,39409	20,4	−0,38207
2,5	0,09322	8,5	−0,38874	14,5	−0,38983	20,5	−0,38074
2,6	0,09275	8,6	−0,37740	14,6	−0,38509	20,6	−0,37896
2,7	0,09129	8,7	−0,36595	14,7	−0,37993	20,7	−0,37676
2,8	0,08879	8,8	−0,35447	14,8	−0,37438	20,8	−0,37415
2,9	0,08522	8,9	−0,34308	14,9	−0,36853	20,9	−0,37117
3,0	0,08053	9,0	−0,33187	15,0	−0,36241	21,0	−0,36785
3,1	0,07471	9,1	−0,32093	15,1	−0,35610	21,1	−0,36422
3,2	0,06774	9,2	−0,31035	15,2	−0,34965	21,2	−0,36032
3,3	0,05962	9,3	−0,30021	15,3	−0,34314	21,3	−0,35620
3,4	0,05035	9,4	−0,29059	15,4	−0,33661	21,4	−0,35190
3,5	0,03995	9,5	−0,28158	15,5	−0,33014	21,5	−0,34745
3,6	0,02843	9,6	−0,27322	15,6	−0,32379	21,6	−0,34291
3,7	0,01583	9,7	−0,26560	15,7	−0,31761	21,7	−0,33831
3,8	0,00218	9,8	−0,25874	15,8	−0,31165	21,8	−0,33371
3,9	−0,01245	9,9	−0,25271	15,9	−0,30599	21,9	−0,32915
4,0	−0,02802	10,0	−0,24754	16,0	−0,30066	22,0	−0,32467
4,1	−0,04446	10,1	−0,24326	16,1	−0,29571	22,1	−0,32032
4,2	−0,06170	10,2	−0,23990	16,2	−0,29118	22,2	−0,31613
4,3	−0,07966	10,3	−0,23745	16,3	−0,28712	22,3	−0,31215
4,4	−0,09825	10,4	−0,23593	16,4	−0,28355	22,4	−0,30841
4,5	−0,11738	10,5	−0,23534	16,5	−0,28051	22,5	−0,30495
4,6	−0,13695	10,6	−0,23566	16,6	−0,27801	22,6	−0,30180
4,7	−0,15687	10,7	−0,23688	16,7	−0,27608	22,7	−0,29899
4,8	−0,17702	10,8	−0,23896	16,8	−0,27472	22,8	−0,29653
4,9	−0,19731	10,9	−0,24187	16,9	−0,27395	22,9	−0,29446
5,0	−0,21762	11,0	−0,24558	17,0	−0,27376	23,0	−0,29279
5,1	−0,23785	11,1	−0,25003	17,0	−0,27414	23,1	−0,29153
5,2	−0,25788	11,2	−0,25517	17,2	−0,27509	23,2	−0,29069
5,3	−0,27761	11,3	−0,26094	17,3	−0,27660	23,3	−0,29028
5,4	−0,29692	11,4	−0,26728	17,4	−0,27864	23,4	−0,29029
5,5	−0,31572	11,5	−0,27413	17,5	−0,28118	23,5	−0,29072
5,6	−0,33391	11,6	−0,28140	17,6	−0,28420	23,6	−0,29157
5,7	−0,35138	11,7	−0,28903	17,7	−0,28765	23,7	−0,29282
5,8	−0,36805	11,8	−0,29695	17,8	−0,29152	23,8	−0,29446
5,9	−0,38382	11,9	−0,30506	17,9	−0,29574	23,9	−0,29646
6,0	−0,39862	12,0	−0,31330	18,0	−0,30028	24,0	−0,29881

y	$\varkappa_0(y)$	y	$\varkappa_0(y)$	y	$\varkappa_0(y)$	y	$\varkappa_0(y)$
24,1	−0,30148	25,6	−0,35627	27,1	−0,36508	28,6	−0,31757
24,2	−0,30444	25,7	−0,35922	27,2	−0,36291	28,7	−0,31459
24,3	−0,30765	25,8	−0,36190	27,3	−0,36046	28,8	−0,31182
24,4	−0,31110	25,9	−0,36427	27,4	−0,35776	28,9	−0,30928
24,5	−0,31473	26,0	−0,36632	27,5	−0,35485	29,0	−0,30700
24,6	−0,31852	26,1	−0,36803	27,6	−0,35174	29,1	−0,30499
24,7	−0,32242	26,2	−0,36938	27,7	−0,34847	29,2	−0,30328
24,8	−0,32640	26,3	−0,37037	27,8	−0,34507	29,3	−0,30187
24,9	−0,33041	26,4	−0,37099	27,9	−0,34159	29,4	−0,30078
25,0	−0,33442	26,5	−0,37123	28,0	−0,33805	29,5	−0,30003
25,1	−0,33838	26,6	−0,37110	28,1	−0,33449	29,6	−0,29960
25,2	−0,34227	26,7	−0,37060	28,2	−0,33094	29,7	−0,29951
25,3	−0,34603	26,8	−0,36973	28,3	−0,32744	29,8	−0,29976
25,4	−0,34965	26,9	−0,36851	28,4	−0,32402	29,9	−0,30033
25,5	−0,35307	27,0	−0,36696	28,5	−0,32072	30,0	−0,30123

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Таблица функции $\varkappa_2$ (y)

y	$\varkappa_2(y)$	y	$\varkappa_2(y)$	y	$\varkappa_2(y)$	y	$\varkappa_2(y)$
0,1	0,00100	3,8	0,58160	7,4	0,20031	11,0	0,42267
0,2	0,00399	3,9	0,58195	7,5	0,20039	11,1	0,41979
0,3	0,00895	4,0	0,58059	7,6	0,20169	11,2	0,41613
0,4	0,01585	4,1	0,57756	7,7	0,20416	11,3	0,41174
0,5	0,02463	4,2	0,57291	7,8	0,20775	11,4	0,40668
0,6	0,03524	4,2	0,56670	7,9	0,21241	11,5	0,40100
0,7	0,04759	4,4	0,55901	8,0	0,21808	11,6	0,39477
0,8	0,06160	4,5	0,54993	8,1	0,22467	11,7	0,38805
0,9	0,07718	4,6	0,53954	8,2	0,23211	11,8	0,38091
1,0	0,09420	4,7	0,52794	8,3	0,24032	11,9	0,37344
1,1	0,11255	4,8	0,51526	8,4	0,24920	12,0	0,36571
1,2	0,15273	4,9	0,50160	8,5	0,25866	12,1	0,35779
1,4	0,17426	5,0	0,48708	8,6	0,26860	12,2	0,34976
1,5	0,19657	5,1	0,47184	8,7	0,27893	12,3	0,34170
1,6	0,21949	5,2	0,45601	8,8	0,28953	12,4	0,33369
1,7	0,24286	5,3	0,43971	8,9	0,30031	12,5	0,32580
1,8	0,26652	5,4	0,42309	9,0	0,31117	12,6	0,31811
1,9	0,29032	5,5	0,40628	9,1	0,32200	12,7	0,31068
2,0	0,31408	5,6	0,38941	9,2	0,33271	12,8	0,30359
2,1	0,33766	5,7	0,37262	9,3	0,34321	12,9	0,29690
2,2	0,36088	5,8	0,35603	9,4	0,35339	13,0	0,29066
2,3	0,38359	5,9	0,33977	9,5	0,36317	13,1	0,28492
2,4	0,40565	6,0	0,32397	9,4	0,37247	13,2	0,27974
2,5	0,42692	6,1	0,30874	9,7	0,38121	13,3	0,27516
2,6	0,44724	6,2	0,29419	9,8	0,38933	13,4	0,27121
2,7	0,46650	6,3	0,28042	9,9	0,39675	13,5	0,26792
2,8	0,48458	6,4	0,26752	10,0	0,40343	13,6	0,26531
2,9	0,50136	6,5	0,25558	10,1	0,40931	13,7	0,26340
3,0	0,51675	6,6	0,24467	10,2	0,41436	13,8	0,26219
3,1	0,53065	6,7	0,23486	10,3	0,41854	13,9	0,26170
3,2	0,54299	6,8	0,22621	10,4	0,42183	14,0	0,26190
3,3	0,55371	6,9	0,21876	10,5	0,42422	14,1	0,26280
3,4	0,56276	7,0	0,21254	10,6	0,42570	14,2	0,26437
3,5	0,57009	7,1	0,20758	10,7	0,42627	14,3	0,26659
3,6	0,57568	7,2	0,20388	10,8	0,42594	14,4	0,26943
3,7	0,57951	7,3	0,20146	10,9	0,42473	14,5	0,27285

y	$\varkappa_2(y)$	y	$\varkappa_2(y)$	y	$\varkappa_2(y)$	y	$\varkappa_2(y)$
14,6	0,27681	18,5	0,34625	22,4	0,35467	26,3	0,29733
14,7	0,28127	18,6	0,34093	22,5	0,35835	26,4	0,29643
14,8	0,28618	18,7	0,33560	22,6	0,36175	26,5	0,29591
14,9	0,29148	18,8	0,33030	22,7	0,36485	26,6	0,29575
15,0	0,29712	18,9	0,32509	22,8	0,36760	26,7	0,29598
15,1	0,30304	19,0	0,32001	22,9	0,36999	26,8	0,29657
15,2	0,30917	19,1	0,31512	23,0	0,37200	26,9	0,29751
15,3	0,31547	19,2	0,31045	23,1	0,37361	27,0	0,29881
15,4	0,32185	19,3	0,30606	23,2	0,37481	27,1	0,30044
15,5	0,32827	19,4	0,30199	23,3	0,37559	27,2	0,30238
15,6	0,33465	19,5	0,29826	23,4	0,37594	27,3	0,30462
15,7	0,34094	19,6	0,29491	23,5	0,37588	27,4	0,30712
15,8	0,34708	19,7	0,29198	23,6	0,37539	27,5	0,30986
15,9	0,35301	19,8	0,28948	23,7	0,37449	27,6	0,31282
16,0	0,35867	19,9	0,28744	23,8	0,37319	27,7	0,31596
16,1	0,36401	20,0	0,28587	23,9	0,37151	27,8	0,31925
16,2	0,36899	20,1	0,28479	24,0	0,36946	27,9	0,32265
16,3	0,37356	20,2	0,28419	24,1	0,36708	28,0	0,32614
16,4	0,37768	20,3	0,28408	24,2	0,36438	28,1	0,32967
16,5	0,38132	20,4	0,28446	24,3	0,36140	28,2	0,33321
16,6	0,38444	20,5	0,28532	24,4	0,35816	28,3	0,33673
16,7	0,38703	20,6	0,28664	24,5	0,35470	28,4	0,34020
16,8	0,38906	20,7	0,28841	24,6	0,35106	28,5	0,34357
16,9	0,39052	20,8	0,29060	24,7	0,34728	28,6	0,34681
17,0	0,39140	20,9	0,29319	24,8	0,34339	28,7	0,34990
17,1	0,39170	21,0	0,29616	24,9	0,33943	28,8	0,35280
17,2	0,39143	21,1	0,29946	25,0	0,33544	28,9	0,35549
17,3	0,39060	21,2	0,30307	25,1	0,33146	29,0	0,35794
17,4	0,38921	21,3	0,30694	25,2	0,32753	29,1	0,36013
17,5	0,38729	21,4	0,31103	25,3	0,32369	29,2	0,36204
17,6	0,38486	21,5	0,31531	25,4	0,31998	29,3	0,36366
17,7	0,38195	21,6	0,31972	25,5	0,31643	29,4	0,36496
17,8	0,37860	21,7	0,32423	25,6	0,31307	29,5	0,36594
17,9	0,37484	21,8	0,32879	25,7	0,30994	29,6	0,36659
18,0	0,37072	21,9	0,33335	25,8	0,30706	29,7	0,36690
18,1	0,36628	22,0	0,33787	25,9	0,30447	29,8	0,36688
18,2	0,36156	22,1	0,34230	26,0	0,30218	29,9	0,36653
18,3	0,35661	22,2	0,34661	26,1	0,30021	30,0	0,36585
18,4	0,35149	22,3	0,35074	26,2	0,29859		

В. Г. БАХТИЯРОВ

РЕЗУЛЬТАТЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ ПРОВЕРКИ МЕТОДА ПРОЗРАЧНОСТИ

Рассматриваются трудности, возникающие при экспериментальной проверке метода прозрачности, развитого в [4—8]. Описываются опыты по проверке метода, выполненные на плоских моделях мутных сред, и приводятся их результаты.

В атмосфере Земли постоянно присутствуют твердые и жидкие частицы аэрозоля. Жидкие аэрозоли возникают при конденсационных процессах. Твердые частицы попадают в атмосферу в основном с поверхности Земли в результате распыления почв, а также с водных поверхностей в виде кристаллов солей, образующихся при высыхании брызг. Твердые частицы носят название естественного аэрозоля. Они играют важную роль в ряде атмосферных процессов (поглощение и рассеяние света и т. д.). Наличие аэрозоля оказывает большое влияние на прозрачность воздуха, придает белесоватый цвет безоблачному небу и сказывается на видимости далеких предметов. Частицы аэрозоля также участвуют в радиационных процессах, оценка которых требует сведений о величинах концентрации частиц естественного аэрозоля различных размеров. Поэтому измерение размеров частиц играет важную роль в физике атмосферы.

Определение функции распределения частиц естественного аэрозоля радиусом 0,1 мк $< \bar{r} < 5$ мк в основном производится путем осаждения частиц из потока на препятствие с последующим подсчетом и измерением частиц под микроскопом [1, 2]. Эти и подобные им методы измерения обладают рядом существенных недостатков.

1. Осаждение частиц происходит на различного рода препятствия, в связи с чем приходится учитывать коэффициент захвата, определение которого затруднительно.

2. Препятствие для осаждения частиц выставляется в поток, и тем самым нарушается структура потока.

3. Осажденные частицы измеряются под микроскопом. Использование оптических микроскопов для измерения размеров частиц радиусом $r \leqslant 0{,}5$ мк нецелесообразно. Возникающая при этом дифракционная картина искажает истинный размер частиц. Применение электронного микроскопа для этих целей весьма сложно, а порой даже и невозможно, например при полевых работах.

В связи с этим важно разработать новый метод измерения размеров частиц, который был бы свободен от указанных выше недостатков.

Определение спектра частиц дисперсной системы по светорассеянию является в настоящее время одной из самых актуальных задач оптики мутных сред. Речь идет о разработке метода анализа информаций о спектре частиц системы, которую содержит рассеянный свет.

В [4—8] разработан метод определения спектра частиц дисперсной системы по ее спектральной прозрачности (метод прозрачности) и выведены соответствующие оценки. В [3] дается краткое описание экспериментальной проверки метода.

В этих работах рассмотрен случай «разбавленных» систем, когда можно ограничиться рассмотрением однократного рассеяния. Задача сводится к обращению интегрального уравнения первого рода

$$\varphi(y) = \int_0^\infty F(x, y) f(x) dx. \tag{1}$$

Здесь $f(x)$ искомая функция распределения частиц по размерам; $F(x, y)$ — ядро уравнения, известное из теории рассеяния света на отдельной частице; $\varphi(y)$ — экспериментально определяемая функция.

Ядро $F(x, y)$ может быть, например, индикатрисой рассеяния монодисперсной системы с частицами радиусом $r = x$; в этом случае $\varphi(y)$ — полидисперсная индикатриса, описывающая рассеяние под углом $y = \beta$. На основании этого разработан метод измерения размеров частиц 2 мк $< r <$ 30 мк по рассеянию света под малыми углами [9].

Далее, ядро $F(x, y)$ может быть коэффициентом рассеяния и соответственно $\varphi(y)$ — экспериментальной кривой прозрачности полидисперсной системы и т. д.

Во всех случаях задача теории обращения состоит в том, чтобы указать метод расчета неизвестной функции распределения $f(x)$ по $F(x, y)$ и $\varphi(y)$.

При разработке метода, описанного в [4—8], был сделан ряд допущений физического характера:

1) частицы должны быть сферическими;

2) рассеяние однократное и некогерентное;

3) в точках, где измеряется прозрачность, коэффициент преломления должен быть вещественным, близким к единице и мало зависящим от длины падающей волны λ.

В работах [5—8] приведены результаты проверки формулы обращения на теоретических моделях. Эта проверка подтвердила правильность расчетной схемы и ее устойчивость относительно мелких ошибок вычислений и измерений. Однако эта проверка ничего не говорит о главном — в какой мере предложенная теория применима к реальным системам, так как аналитическое исследование описанных выше ограничений в настоящее время невыполнимо.

Данная работа посвящена описанию результатов экспериментальной проверки метода определения спектра частиц дисперсной системы по данным о ее прозрачности.

§ 1. Вычисление спектра частиц дисперсной системы по прозрачности

Напомним кратко методику определения микроструктуры дисперсной системы по данным о ее спектральной прозрачности, приведенную в [4—8].

Для коэффициента рассеяния света частицами, оптические свойства которых не очень сильно отличаются от свойств окружающей среды, имеет место следующая приближенная формула из [10]

$$k(r, \lambda) = 2\pi r^2 \left(1 - \frac{\sin 2\delta}{\delta} + \frac{1 - \cos 2\delta}{2\delta^2}\right) = 2\pi r^2 K(\delta), \tag{2}$$

где

$$\delta = 2\pi (m - 1) \frac{r}{\lambda} = \beta r \nu^*, \quad \beta = 2\pi (m - 1), \quad \nu^* = \frac{1}{\lambda}. \tag{3}$$

В рассматриваемой задаче интегральное уравнение (1) примет вид

$$g^*(\nu^*) = \int_0^\infty 2\pi r^2 K(\delta) f^*(r)\, dr, \tag{4}$$

где $g^*(\nu^*)$ — полидисперсный коэффициент рассеяния для волнового числа ν^*; $f^*(r)$ — функция распределения частиц; r — радиус частиц; λ — длина волны; m — коэффициент преломления.

Переходя к безразмерным переменным (r_0 — масштаб длины), получим

$$a = r r_0^{-1}, \quad \nu = \nu^* r_0, \quad f(a) = f^*(r) r_0^4, \quad g(\nu\beta) = g^*(\nu^*). \tag{5}$$

Здесь a — радиус, ν — волновое число, $f(a)$ — функция распределения, $g(\nu\beta)$ — полидисперсный коэффициент рассеяния.

Уравнение (4) в безразмерных переменных примет вид

$$g(\nu\beta) = \int_0^\infty K(\nu\beta a)\, m(a)\, da, \tag{6}$$

где

$$m(a) = 2\pi a^2 f(a). \tag{7}$$

Из уравнения (7) с учетом (5) получим связь $m(a)$ с размерной кривой распределения $f^*(r)$ и связь $g(\nu\beta)$ с размерным полидисперсным коэффициентом рассеяния $g^*(\nu^*)$

$$f^*(r) = \frac{m(a)}{2\pi a^2 r_0^4}, \quad g\left(\frac{x}{2}\right) = r_0 g^*(\nu^*), \tag{8}$$

где $x = 2\beta\nu$, причем r_0 (линейный масштаб задачи) определяется по формуле

$$r_0 = \frac{2}{\beta\tau^*}. \tag{9}$$

Здесь τ^* — верхняя граница волновых чисел ν^*, для которых измеряется прозрачность $g^*(\nu^*)$.

Формула (6) описывает интегральное преобразование спектра частиц $m(a)$ в кривую прозрачности $g^*(\nu^*)$.

В работе [4] было показано, что интеграл (6) можно точно обернуть. Это означает, что по данным $g(\nu\beta)$ определяется кривая распределения размеров частиц, т. е. решается обратная задача теории рассеяния.

Расчет спектра частиц $m(a)$ будем производить по схеме, приведенной в [8, § 4]. Согласно формуле (42) из [8], имеем

$$m(a) \simeq \widetilde{m}(a) = -\frac{1}{\pi}\left\{0{,}2 \sum_{j=1}^{20} g(y_j)\, \omega(2ay_j) + 4C_0\omega_0(4a) + \frac{1}{4} C_2\omega_2(4a)\right\}, \tag{10}$$

причем функции $\omega(y)$, $\omega_0(y)$, $\omega_2(y)$ определяются формулами (8.40); эти функции подробно затабулированы в [11].

Таким образом, для определения спектра размеров аэрозолей необходимо измерить спектральную прозрачность исследуемой дисперсной системы и произвести соответствующие расчеты по формуле (10) для интересующих нас значений a. При этом расчет спектра $m(a)$ сводится к следующим операциям:

а) измерение спектральной прозрачности в необходимом диапазоне длин волн (см. ниже) и вычерчивание графика $g^*(\nu^*)$;

б) снятие с графика значений $g^*(\nu^*)$ и расчет y_j по формулам:

$$g(y_j)=g^*(\nu^*), \quad y_j=\frac{2\nu_j^*}{\tau^*}=0{,}1j-0{,}05 \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ 20); \qquad (11)$$

в) отыскание с помощью графика спектральной прозрачности $g^*(\nu^*)$ величины C_0, определяемой формулой

$$C_0=\lim_{\nu^*\to\infty} g^*(\nu^*)=\lim_{y\to\infty} g(y); \qquad (12)$$

г) определение C_2 из соотношения

$$kC_0+\frac{C_2}{4}\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{y_l^2}=\sum_{l=1}^{k} g(y_l) \quad (k\simeq 4-6), \qquad (13)$$

где y_l, $g(y_l)$ — точки, снятые с графика $g(y)$ при возможно больших y.

Проведя последовательно все указанные операции и используя затабулированные значения специальных функций задачи $\omega(y)$, $\omega_0(y)$ и $\omega_2(y)$ из [11], мы сможем рассчитать $m(a)$ и соответственно $f^*(r)$.

§ 2. Модель для исследования. Существенный диапазон длин волн

Модель мутной среды, на которой целесообразно производить измерения спектральной прозрачности $g^*(\nu^*)$, должна удовлетворять ряду требований, связанных с гипотезами, лежащими в основе метода. Кроме того, размеры частиц модели должны удовлетворять определенным условиям. Как следует из [7], волновой промежуток $\lambda_{min}\leqslant\lambda\leqslant\lambda_{max}$, для которого необходимы данные о прозрачности, должен соответствовать возможностям исследуемой спектральной аппаратуры. Промежуток $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ будем называть существенным диапазоном длин волн. Его удобно представлять в виде

$$\lambda_{min}=\frac{2\beta\bar{r}}{\tau}, \quad \lambda_{max}=\frac{2\beta\bar{r}}{\sigma}, \qquad (14)$$

где $\beta=2\pi(m-1)$, $\bar{r}$ — средний размер частиц. В [7], исходя из нескольких примеров теоретического характера, были получены ориентировочные оценки для величины τ и σ. На основании проведенных экспериментов будем принимать далее $\tau\simeq 8$ и $\sigma\simeq 0{,}5$.

Границы существенного диапазона длин волн резко изменяются с ростом m и $\bar{r}$. В табл. 1 приведены значения этих границ (в микронах), рассчитанные по формулам (14) при $\tau=8$ и $\sigma\simeq 0{,}5$ для различных m и $\bar{r}$.

Исходя из существенного диапазона длин волн, определяемого условием (14), измерения спектральной прозрачности должны были проводиться в сравнительно большом интервале длин волн.

Для этих целей были использованы имеющиеся в распоряжении стандартные спектрофотометры.

Таблица 1

Зависимость существенного диапазона длин волн от m и r

$\overline{r}$	$m=1,10$		$m=1,20$		$m=1,33$		$m=1,50$	
	λ_{min}	λ_{max}	λ_{min}	λ_{max}	λ_{min}	λ_{max}	λ_{min}	λ_{max}
0,1	0,016	0,252	0,032	0,502	0,052	0,828	0,080	1,260
0,2	0,032	0,504	0,064	1,008	0,104	1,656	0,160	2,520
0,5	0,080	1,260	0,160	2,520	0,260	4,140	0,400	6,300
1,0	0,160	2,520	0,320	5,040	0,520	8,280	0,800	12,600
2,0	0,320	5,040	0,640	10,080	1,040	10,560	1,600	25,200
5,0	0,800	12,600	1,600	25,200	2,600	41,400	4,000	63,000

Измерения спектральной прозрачности проводились в диапазонах 0,24—1,1 мк и 2—25 мк. Таким образом, был охвачен почти весь спектральный интервал 0,24—25 мк. Средние размеры частиц используемых ниже моделей подбирались в соответствии с этим интервалом и условием (14).

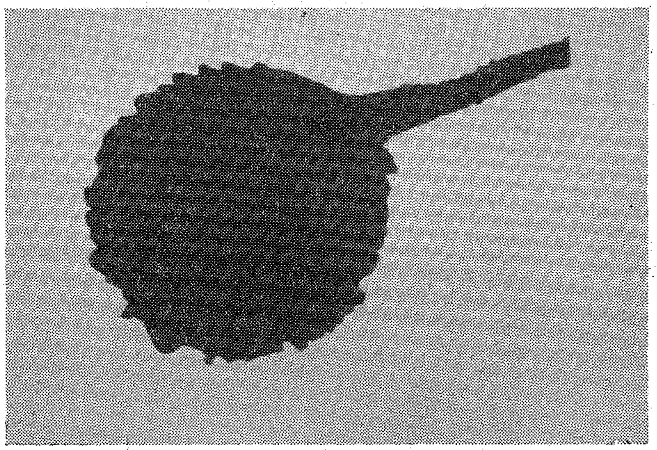

Рис. 1. Фотография типичной частицы *Calvatia*.

Точки для измерения прозрачности внутри существенного диапазона длин волн должны выбираться так, чтобы были исключены участки сильного поглощения и коэффициент преломления m был по возможности одинаков. Что касается близости m к единице, то это требование должно удовлетворяться в последнюю очередь (при $m \leqslant 1{,}5$). Последнее обстоятельство подтверждается как нашими экспериментами, так и теоретическими расчетами Пендорфа, который показал, что формула Ван де Хюлста (2) применима до $m=1{,}5$ [10].

Экспериментальная проверка метода выполнялась на плоских моделях мутной среды. Были использованы такие модели, которые позволяют иметь уверенные данные о спектре частиц. Плоские модели неизменны, легко воспроизводимы и поэтому представляют удобный объект для исследования.

Нами рассматривались модели двух видов.

1. Споры грибов Calvatia, нанесенные на пластинку (подложку) из KRS-5. Они представляют собой почти сферы с маленькими отростками, причем площадь проекции сферы и площадь отростка относятся

друг к другу примерно как 10 : 1. Фотография типичной частицы приведена на рис. 1. Споры хорошо держатся на пластинке, и удается получить большой диапазон концентраций частиц. Радиусы спор лежат в интервале 1—4 мк. Толщина пластинки (подложки) 2,5 мм.

2. Диспергированные микрокристаллы бромистого серебра в желатине (относительный коэффициент преломления которых $m=1{,}5$) были расположены на кварцевой пластинке. Эти кристаллы (рис. 2) по форме приближаются к кубу или октаэдру с округлыми вершинами, т. е. представляют собой частицы, равномерно развитые по трем

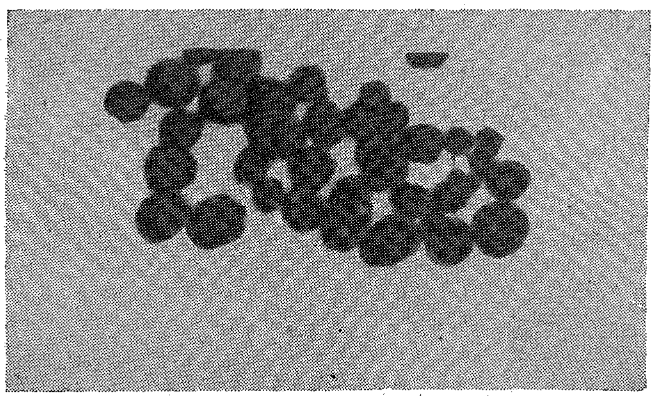

Рис. 2. Фотография типичных частиц AgBr.

направлениям. Они эквивалентны сферическим частицам радиусом $r=\sqrt{\frac{x}{\pi}}$, где x — площадь проекции кристаллов [12]. Радиусы рассмотренных кристаллов лежали в интервале 0,1—1 мк, толщина слоя желатина составляла 15—25 мк, толщина кварцевой пластинки 1 мм. Частицы обоих видов наносились на подложку в виде монослоя. Устойчивость построенных моделей неоднократно проверялась. На рис. 9 приведены графики спектральной прозрачности для одной и той же модели с интервалом времени в один месяц. Как видно из этого рисунка, устойчивость модели вполне удовлетворительная. Небольшие отклонения можно объяснить наличием неизбежных ошибок измерения.

Дополнительные трудности при эксперименте неизбежно возникают в связи с не учтенными теоретически явлениями многократного рассеяния и интерференции света.

Роль многократного рассеяния в значительной степени снижается благодаря использованию плоской модели.

Интерференция света, рассеянного отдельными частицами радиуса r, может иметь существенное значение, если средние расстояния l между центрами частиц малы по сравнению с длиной рассматриваемой волны λ. При этом интерференционная часть в рассеянном пучке при достаточно малом $\frac{l}{\lambda}$ может стать значительно больше неинтерференционной. Чтобы избежать влияния рассматриваемого эффекта, необходимо выполнить следующие условия [13]

$$l \geqslant 4r, \quad l > \lambda. \tag{15}$$

Согласно (14), для частиц первого вида (споры грибов с 1 мк<

$< r < 4$ мк) $\lambda_{max} \simeq 24$ мк, а для частиц второго вида (кристаллы AgBr с 0,1 мк $< r < 1$ мк) $\lambda_{max} \simeq 4$ мк. Поэтому из условия (15) для частиц первого вида $l \simeq 25$ мк, а для частиц второго вида $l \simeq 4$ мк.

Необходимо отметить, что выполнение условий (15) приводит одновременно и к ослаблению многократного рассеяния.

§ 3. Определение микрофотографического спектра частиц плоской модели

Обычные оптические микроскопы не годятся для измерения микрокристаллов AgBr, так как вокруг этих частиц создается диффракционная картина, искажающая их истиные размеры (линейные размеры микрокристаллов AgBr соизмеримы с длиной волны приходящего света). Для спор грибов оптические микроскопы не дают достаточного разрешения, но все же позволяют оценить размеры частиц с точностью до 0,4—0,5 мк.

Поэтому для определения микрофотографического спектра частиц плоской модели нами был использован электронный микроскоп. С его помощью удалось определить размеры кристаллов AgBr с точностью до 0,02 мк, а размеры спор грибов — с точностью до 0,1 мк.

Согласно методике расчета, на электронном микроскопе определение размеров частиц необходимо было вести выборочным методом, так как изучаемая плоская модель не размещалась целиком в поле зрения электронного микроскопа.

Из теории вероятностей и литературных данных по микроструктуре аэрозолей, например [14], следует, что для статистического определения спектра необходимо рассматривать не менее 1500—3000 частиц. В этом случае можно гарантировать, что измеренный спектр распределения частиц не является спектром случайной выборки (пробы), а относится ко всей исследуемой полидисперсной системе.

Для определения размеров частиц и для плоской модели использовались различные выборки, что обеспечивает воспроизводимость измерения прозрачности на нашей модели. Выборка, используемая для определения размеров частиц, содержала 3000—6000 частиц, а выборка, используемая для измерения прозрачности, —10^4 — 10^5 частиц. Случайность состава обеих выборок обеспечивалась постановкой эксперимента. Количество разрядов принималось равным 28. По закону больших чисел можно считать, что разрядные частости выборок близки к соответствующим вероятностям, которые характеризуют распределение общей совокупности частиц. Поэтому эмпирические распределения обеих выборок и теоретическое распределение общей совокупности близки в смысле сходимости по вероятности. Следовательно, можно считать, что распределение частиц в этих выборках практически одинаково и совпадает с распределением общей совокупности.

Это заключение подтвердилось на частицах первого вида: спектр частиц модели, определенный с помощью оптического микроскопа в пределах точности измерений, совпал со спектром, полученным на электронном микроскопе.

Полученные описанным способом спектры, нормированные к площади, изображены пунктирными линиями на рис. 5 и 6.

§ 4. Измерение спектральной прозрачности

Примерные границы интервалов, в которых необходимо производить измерения спектральной прозрачности, согласно соотношениям (14) равны 1,5—24 мк для частиц первого вида и 0,24—3,80 мк для частиц второго вида. Используемые стандартные приборы позволяют измерять прозрачность в этих спектральных интервалах.

В качестве подложки для интервала 1,5—24 мк, как было уже сказано выше, использовалась пластинка толщиной 2,5 мм, изготовленная из кристалла KRS-5. Соответствующая спектральная кривая пропускания изображена на рис. 3 (кривая J_0).

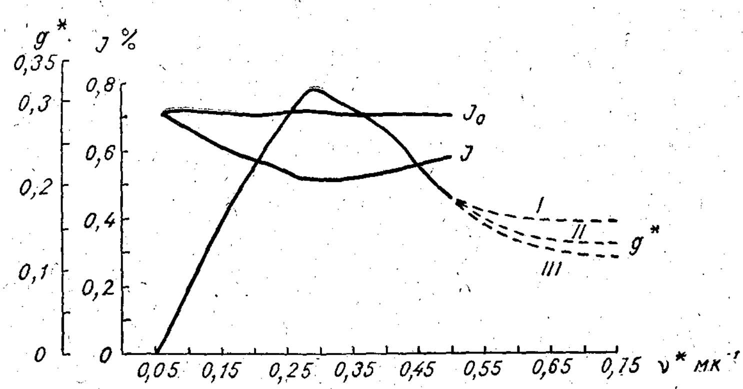

Рис. 3. Кривые пропускания и прозрачность модели из частиц *Calvatia*.

В спектральном интервале 0,24—3,80 мк в качестве подложки использовалась кварцевая пластинка толщиной 1 мм. В этом интервале производятся измерения прозрачности для микрокристаллов AgBr, находящихся в слое желатина толщиной 15—25 мк. Таким образом, для частиц второго вида подложка фактически представляет собой слой желатина, нанесенный на кварцевую пластинку. Спектральная кривая пропускания такой сложной подложки изображена на рис. 4 (кривая J_0).

Очевидно, что построенные кривые пропускания подложек представляют собой интенсивность света J, непосредственно падающего на частицы.

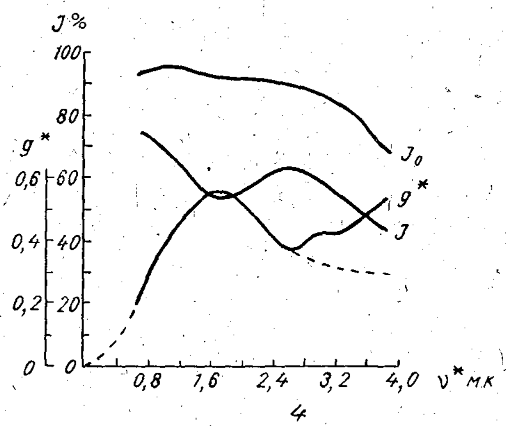

Рис. 4. Кривые пропускания и празрачность модели из частиц AgBr.

Определив J_0, измеряем интенсивность света J, прошедшего через мутную дисперсную среду. По закону Бугера — Ламберта для плоского слоя имеем

$$J = J_0 e^{-g^*(\nu^*)}, \quad \nu^* = \lambda^{-1}, \tag{16}$$

где $g^*(\nu^*)$ — прозрачность (полидисперсный коэффициент рассеяния); ν^* — волновое число. В случае плоского слоя мутной среды $g^*(\nu^*)$ — безразмерная величина. Графики измеренных интенсивностей прошедшего света (кривые J), а также графики прозрачностей

$$g^*(\nu^*) = \ln \frac{J_0}{J}, \tag{17}$$

вычисленных по измеренным интенсивностям J_0 и J (сплошные участки кривых $g^*(\nu^*)$, приведены на рис. 3 (для первой модели) и рис. 4 (для второй модели).

Из [15] следует, что при измерении прозрачности часть света, рассеянная под малыми углами, попадает в приемник и тем самым регистрируется завышенная интенсивность. При построении теории предполагалось, что весь рассеянный свет уходит и в этом смысле приемник учитывает паразитную интенсивность. Согласно результатам работы [15], паразитной интенсивностью можно пренебречь, если выполняется неравенство

$$\varepsilon < \frac{\lambda}{2\pi r}\rho, \tag{18}$$

где ε — радиус приемника; ρ — расстояние от плоской модели мутной среды.

В наших экспериментах условие (18) было выполнено.

§ 5. Вычисление спектра частиц по прозрачности

Опишем теперь вычисление спектра $m(a)$ по формуле (10) и на примерах изучаемых моделей рассмотрим способы преодоления специфических трудностей, возникающих при обработке информации о спектральной прозрачности реальных объектов, представляющих собой мутную среду.

Экспериментальные прозрачности наших моделей на графике представляют собой одномодальные кривые (рис. 3 и 4) с максимумом в $\nu^* = \overset{*}{\nu}_M$, причем имело место $2\overset{*}{\nu}_M \simeq \tau^*$. Это означает, что практически выполнено основное условие (29) из [8] корректности решения задачи об определении спектра частиц; иначе говоря, прозрачность $g^*(\nu^*)$ измерена почти во всем существенном диапазоне длин волн. Выбранное значение $\lambda_{\min}$ из (14) позволяет оценить величину C_0, определяемую формулой (12), т. е. указать примерное положение асимптоты кривой прозрачности $g^*(\nu^*)$. Заметим, что выбор величины τ^* по (29) из [8] как раз и диктовался условием достаточно надежного определения из экспериментальных данных о прозрачности, причем практически $\tau^* \simeq \lambda_{\min}^{-1}$.

Вместе с тем ясно, что, исходя из опытных данных, точное значение C_0 определить нельзя и кривую $g(y)$ приходится экстраполировать. Кроме того, часто и значение y_l, входящее в формулу (13), приходится брать с проэкстраполированной части кривой $g(y)$ (т. е. при $y>2$). Однако ошибки в определении C_0 и C_2, неизбежно возникающие при экстраполяции, не снижают существенно точность результата, если соблюдено условие (29) из [8]. Это объясняется устойчивостью метода решения задачи относительно мелких экспериментальных и вычислительных ошибок [7].

Проиллюстрируем последнее утверждение на примере вычисления спектра частиц первого вида. На рис. 3 пунктирными линиями обозначены три продолжения кривой $g(y)$, практически охватывающие всю область возможных экстраполяций. На рис. 7 представлены кривые $m(a)$, вычисленные по формуле (10) для трех продолжений кривой $g(y)$. Соответствующие размерные спектры, приведенные на рис. 5, сравнительно близки друг к другу и к точной (непосредственно измеренной) кривой распределения частиц $f^*(r)$.

Отметим, что иногда приходится экстраполировать кривую $g(y)$ до $y=0$. Так, при определении спектра частиц второго вида не удалось измерить прозрачность до достаточно малых значений ν^*. В этом случае используем способ экстраполяции $g^*(\nu^*)$ на $\nu^* \to 0$, предложенный в [7]. Соответствующий участок кривой прозрачности изображен левой пунктирной линией на рис. 4.

Напомним, что ошибка, связанная с экстраполяцией $g(y)$ налево, существенно меньше соответствующей ошибки при экстраполяции направо.

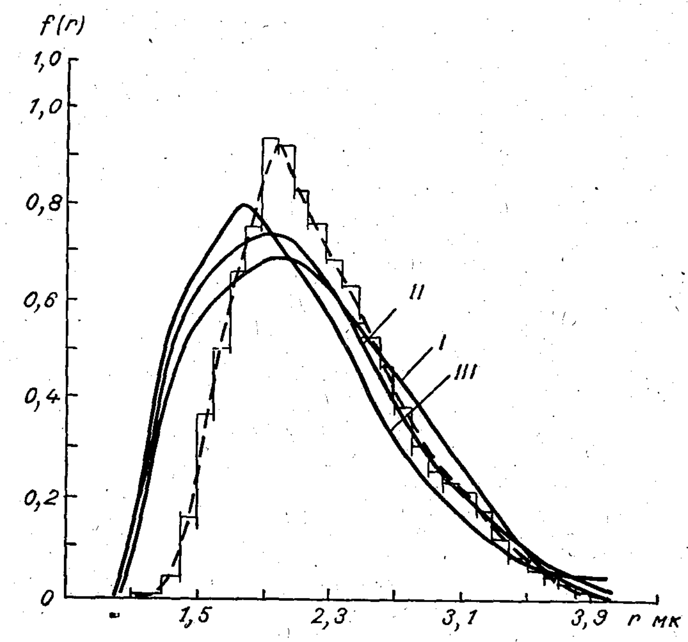

Рис. 5. Спектр размеров частиц *Calvatia*. Ступенчатая кривая получена микрофотографическим методом, сплошные — рассчитаны методом прозрачности для различных C_0.

На рис. 6 приведен расчетный спектр $\tilde{f}^*(r)$ и точная кривая распределения $f^*(r)$ для частиц AgBr. В данном случае в соответствии с экспериментальными данными о прозрачности (см. рис. 4) и формулами (9), (12) и (13) принято $r^*=3{,}4^{-1}$ мк, $C_0=0{,}300$, $C_2=0{,}336$, $r_0=$ $=0{,}170$ мк (напомним, что здесь $m \simeq 1{,}5$).

На рис. 5 приведен расчетный спектр $\tilde{f}^*(r)$ и точная кривая распределения $f^*(r)$ для спор грибов. В этом случае в соответствии с экспериментальными данными (рис. 3) и формулами (12) и (13) принято $\tau^*=0{,}7^{-1}$ мк, $C_0=0{,}165$, $C_2=0{,}092$. Для спор грибов возникает дополнительная трудность — значение коэффициента преломления m нам неизвестно. Поэтому r_0 нельзя определить по формуле (9), а при неизвестном r_0 спектр частиц $\tilde{f}^*(r)$ определяется только с точностью до вертикального и горизонтального масштабов (см. [8], замечание 2). Этот спектр можно определить полностью, если, например, известна мода распределения частиц. В самом деле, пусть $\tilde{f}^*(r)$ имеет моду $r_М$, тогда r_0 можно определить из соотношения [8]

$$r_М = a_М r_0\,, \tag{19}$$

где $a_М$ — безразмерная мода кривой $a^{-2}\tilde{m}(a)$, приведенной для спор грибов на рис. 8. Эти соображения были использованы при построении $\tilde{f}^*(r)$ на рис. 5.

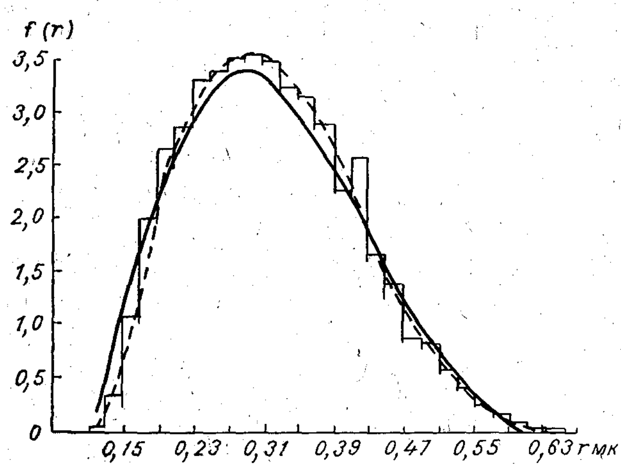

Рис. 6. Спектры размеров частиц AgBr. Ступенчатая кривая получена микрофотографическим методом, сплошная — рассчитана методом прозрачности.

Формулы (9) и (19) позволяют определить β и тем самым m

$$m = 1 + \frac{a_М}{\pi\tau^* r_М}\,. \tag{20}$$

В случае спор грибов при $r_М = 1{,}9$, $a_М = 1{,}8$ получено $m = 1{,}436$.

Микрофотографический спектр и спектр, рассчитанный по прозрачности, согласно нашим построениям совпадают лишь с точностью до постоянного множителя (вертикального масштаба). Этот множитель можно определить, если известна объемная концентрация частиц N. Если величина N неизвестна, то для сравнения спектров их надо одинаково нормировать. Мы будем использовать наиболее естественный способ — нормировку по площади [17]. В этом случае площади под всеми кривыми распределения будут равны единице (рис. 5 и 6).

§ 6. Границы применимости метода и его точность

Напомним, что метод прозрачности применим только к «разбавленным» дисперсным системам, для которых можно пренебречь эффектом вторичного рассеяния. Это означает, что оптическая толщина освещаемого объекта должна быть значительно меньше единицы. Далее, для использования метода прозрачности необходимо, чтобы показатель преломления m не испытывал резких изменений и не превышал 1,5.

Если вещество, составляющее дисперсную систему, имеет полосы поглощения в интервале измерения прозрачности, то использование рассматриваемого метода определения спектра частиц усложняется, а в некоторых случаях становится невозможным. Остановимся на этом вопросе подробнее.

При наличии узких полос поглощения кривая прозрачности может быть естественным образом сглажена. Кроме того, эти полосы могут вообще не приниматься во внимание, если соответствующим образом модифицировать расчетную формулу для спектра частиц [6]. Для вещества с широкими полосами поглощения метод применим лишь при условии, что они не совпадают с участками экстремумов кривой прозрачности. Иначе говоря, спектр частиц вещества с широкими полосами поглощения может быть вычислен с известной степенью точности лишь при определенных средних размерах частиц этого вещества.

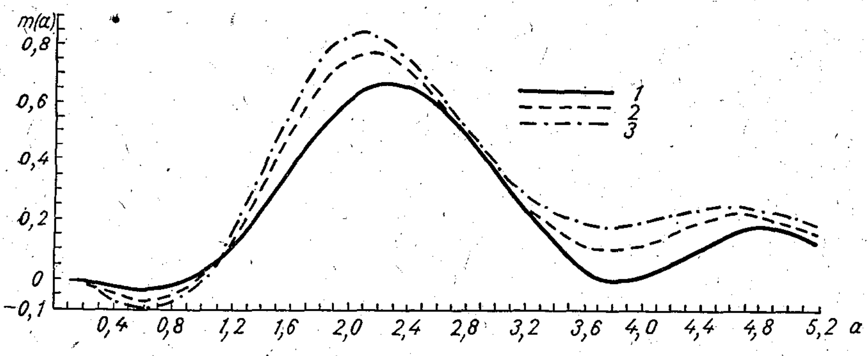

Рис. 7. Зависимость $m(a)$ от значений C_0.
1 — $C_0=0{,}165$; 2 — $C_0=0{,}141$; 3 — $C_0=0{,}126$.

Например, для частиц AgBr с $r<0{,}1$ мк максимум кривой прозрачности совпадает с полосами поглощения и используемый метод определения спектра не годится. В нашем случае при $r_{\text{м}}\simeq 0{,}29$ мк сглаживание кривой прозрачности дало удовлетворительный результат, несмотря на наличие широких полос поглощения AgBr [16].

Границы применимости метода для дисперсных систем с различными коэффициентами преломления m определяются наличием соответствующей аппаратуры для измерения спектральной прозрачности во всем существенном интервале длин волн (табл. 1).

Аппаратура, которая находилась в нашем распоряжении, давала возможность измерять спектральную прозрачность полидисперсной среды для 0,2 мк $< r_{\text{м}} <$ 4 мк при $m \geqslant 1{,}33$.

При наличии соответствующей аппаратуры этот интервал может быть расширен.

Точность метода прозрачности определяется степенью применимости исходных дифракционных формул, точностью измерения спектральной прозрачности и точностью последующих расчетов.

Оценка точности метода и расчетных формул произведена в [7, 8]. В этих работах был проведен численный расчет прямой и обратной задачи теории рассеяния для случая, когда прозрачность задается в табличной форме. Точность измерения спектральной прозрачности ограничивается неизбежными ошибками измерений, которые проиллюстрированы на рис. 9. Как указано в § 5, ошибки в определении C_0, неизбежно возникающие при экстраполяции, существенно не снижают

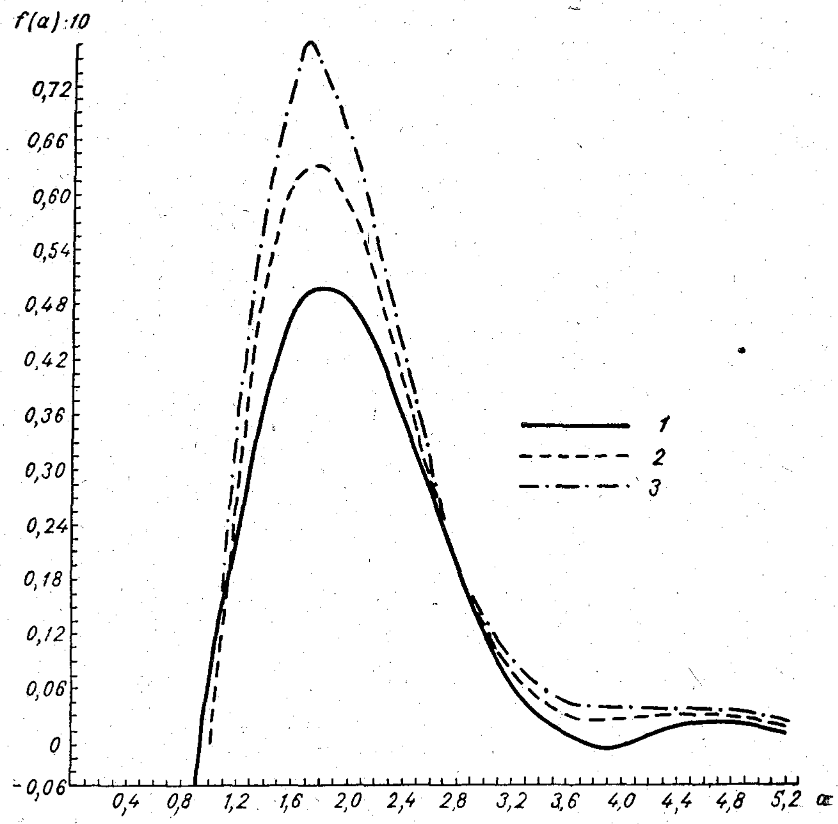

Рис. 8. Зависимость $f(a)$ от значений C_0.
Усл. обозн. см. рис. 7.

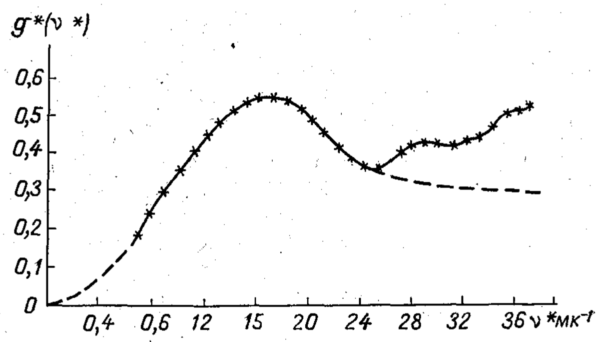

Рис. 9. Воспроизводимость $g^*(\nu^*)$ для одной и той же плоской модели при повторных измерениях прозрачности.

точности результата. На рис. 7 и 8 приведены значения $m(a)$, рассчитанные по формуле (10), и $f(a)$ для трех значений C_0. Для этих же C_0, размерные кривые распределения частиц, рассчитанные по данному методу, приведены на рис. 5.

Заключение

Результаты проведенных расчетов функций распределения частиц по экспериментально определенной прозрачности показывают, что метод прозрачности дает удовлетворительный результат и для реальных мутных сред.

Например, в основе проверяемого метода лежало положение, что все преобразования и конечные формулы получены при условии, что $m \simeq 1{,}00$. Однако оказывается, что метод дает вполне удовлетворительные результаты и при m, отличном от единицы, в частности при 1,5.

Если известна какая-либо линейная характеристика распределения частиц дисперсной системы (мода, среднее значение и т. д.), с помощью метода спектральной прозрачности можно определить коэффициент преломления рассматриваемого вещества, из которого состоят частицы дисперсной системы.

При разработке метода прозрачности не делалось никаких предположений относительно спектра распределения частиц, поэтому он может быть применим к определению функции распределения частиц любой дисперсной системы.

Измерение кривой распределения частиц естественного аэрозоля при $0{,}2$ мк $< \tilde{r} <$ 4 мк общепринятыми методами затруднительно. Спектральная аппаратура, которая имеется в настоящее время, дает возможность на основании метода прозрачности определить кривую распределения аэрозоля указанного размера.

Автор выражает глубокую благодарность проф. К. С. Шифрину и доц. А. Я. Перельману за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мау К. R. The cascade impactor. I. Scient. instr. 22, N 10, 1954.
2. Txamey S. and Severynse G. T. Measurement of size distributions Natural Aerosols. I. Atmosph. science 20, N 3, 1963.
3. Шифрин К. С., Перельман А. Я., Бахтияров В. Г. Экспериментальная проверка метода на моделях. Опт. и спектр., т. 20, вып. 4, 1965.
4. Шифрин К. С., Перельман А. Я. Определение спектра частиц дисперсной системы по данным о ее прозрачности. Опт. и спектр., т. 15, вып. 4, 1963.
5. Шифрин К. С., Перельман А. Я. Опт. и спектр., т. 15, вып. 5, 1963.
6. Шифрин К. С., Перельман А. Я. Опт. и спектр., т. 15, вып. 6, 1963.
7. Шифрин К. С., Перельман А. Я. Опт. и спектр., т. 16, вып. 1, 1964.
8. Шифрин К. С., Перельман А. Я. Опт. и спектр., т. 20, вып. 1, 1966.
9. Шифрин К. С., Голиков В. И. Измерение микроструктуры методом малых углов. Труды ГГО, вып. 152, 1964.
10. Г. Ван де Хюлст. Рассеяние света малыми частицами. ИЛ, М., 1961.
11. Шифрин К. С., Перельман А. Я., Потехина Л. К. Таблицы для расчета спектра частиц дисперсной системы по ее прозрачности. Труды ГГО, вып. 152, 1964.
12. Прусс П. Х. Экспериментальное рассеяние света на малых частицах несферической формы. Труды ВНМС, т. 6, 1963.
13. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде. Гостехиздат, 1951.
14. Дьяченко П. В. Опыт применения методов математической статистики к изучению микроструктуры туманов и облаков. Труды ГГО, вып. 101, 1959.
15. Шифрин К. С., Айвазян Г. М. Учет индикатрисы рассеяния при измерениях прозрачности. Труды ГГО, вып. 153, 1964,
16. Савостьянова М. В. Мельчайшие частицы металла внутри кристаллической решетки. УФН, 22.1, 1939.
17. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. Физматгиз, Л., 1962.

П. В. АТРАШЕНОК, В. А. ПУНИНА

ТОЧНОСТЬ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ДЛЯ УГЛОВЫХ ФУНКЦИЙ

В статье приведены асимптотические формулы для угловых функций, используемых при решении задачи дифракции на шаре. Оценена точность этих формул в области углов рассеяния, близких к направлению вперед.

В связи с развитием оптики почти параллельных пучков важное значение имеет исследование рассеяния света под малыми углами. С этой задачей, в частности, связан учет ореольного эффекта при измерениях коэффициента ослабления.

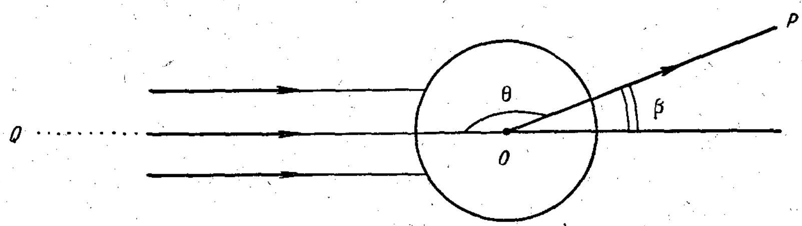

Рис. 1. Углы рассеяния θ и β.

В настоящей работе мы рассмотрим рассеяние света под малыми углами на основе строгой теории дифракций плоской волны на сфере, данной Ми [1].

Угловая структура парциальных волн, бесконечная сумма полей которых определяет точное решение рассматриваемой задачи, определяется некоторыми специальными функциями $Q_l(\cos\theta)$ и $S_l(\cos\theta)$. Здесь θ — угол между направлениями из центра O рассеивающей частицы на бесконечно удаленный источник света Q и на точку наблюдения P (рис. 1), а угловые функции $Q_l(\cos\theta$, $S_l(\cos\theta)$ имеют вид

$$Q_l(\cos\theta) = \frac{dP_l(\cos\theta)}{d\cos\theta}, \quad S_l(\cos\theta) = -\frac{d^2P_l(\cos\theta)}{d\theta^2}, \qquad (1)$$

где $P_l(\cos\theta)$ — полиномы Лежандра степени l.

Обычно при вычислении угловых функций используются асимптотические представления $P_l(\cos\theta)$, однако степень точности результатов, полученных с помощью этих представлений, насколько нам известно, не исследовалась.

Целью авторов является исследование точности асимптотических формул для угловых функций в области малых углов рассеяния. Мы несколько видоизменили асимптотические формулы для Q_l, S_l и сравнили результаты вычислений по ним с точными значениями Q_l, S_l, вычисленными на М-20 с помощью реккуретных соотношений, связывающих эти функции.

1. При расчете дифрагированных полей с помощью суммирования парциальных волн в случае $\rho \gg 1$

$$\rho = \frac{2\pi r}{\lambda} \tag{2}$$

(r — радиус частицы, λ — длина волны падающего света) приходится рассматривать угловые функции (1) до порядка $l = l_0$.

$$l_0 = 1{,}2\rho\,. \tag{3}$$

При больших l для Q_l, S_l можно найти асимптотические формулы, используя обычные асимптотические представления полиномов Лежандра. Известно, однако, что эти представления теряют смысл при $\theta = 0$ или $\theta = \pi$. При $\theta \simeq \theta$ их точность (она определяется величиной θ_l) невелика даже для значительных l. Удобнее использовать формулу, полученную В. А. Фоком [2] с помощью метода учета особых точек дифференциального уравнения. Эта формула имеет вид

$$P_l(\cos\theta) = \sqrt{\frac{\theta}{\sin\theta}}\, J_0(\alpha_l\theta) \tag{4}$$

и пригодна при $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$, причем в [2] принято

$$\alpha_l = l + \frac{1}{2}\,. \tag{5}$$

2. При исследовании ореольных эффектов особый интерес представляет рассеяние в направлениях, близких к направлению вперед, т. е. для углов $\theta \simeq \pi$. Непосредственно формула (4) здесь неприменима.

Введем угол рассеяния β (рис. 1).

$$\beta = \pi - \theta\,. \tag{6}$$

Для целых l имеем

$$P_l(\cos\theta) = (-1)^l P_l(\cos\beta)\,. \tag{7}$$

В силу (1) и (7) получаем

$$Q_l(\cos\theta) = \frac{(-1)^l\, dP_l(\cos\beta)}{d(-\cos\beta)} = (-1)^{l+1} Q_l(\cos\beta)\,; \tag{8}$$

$$S_l(\cos\theta) = -\frac{(-1)^l\, d^2P_l(\cos\beta)}{d(\pi-\beta)^2} = (-1)^l S_l(\cos\beta)\,. \tag{9}$$

К правым частям формул (8) и (9) асимптотическое представление (4) при $\theta \simeq \pi$ (т. е. $\beta \simeq 0$) уже применимо.

3. Выражение для угловых функций (1) получается непосредственным дифференцированием формулы (4) с использованием равенств (8) и (9).

Имеем

$$Q_l(\cos\beta) = \left(\frac{\beta}{\sin^3\beta}\right)^{\frac{1}{2}} \alpha_l J_1(\alpha_l\beta) - \frac{J_0(\alpha_l\beta)}{\sin\beta}\left(\sqrt{\frac{\beta}{\sin\beta}}\right)'; \tag{10}$$

$$S_l(\cos\beta) = J_0''(\alpha_l\beta)\,\alpha_l^2 \sqrt{\frac{\beta}{\sin\beta}} + 2J_0'(\alpha_l\beta)\,\alpha_l\left(\sqrt{\frac{\beta}{\sin\beta}}\right)' + J_0(\alpha_l\beta)\left(\sqrt{\frac{\beta}{\sin\beta}}\right)''. \tag{11}$$

Главными членами в формулах (10) и (11) являются первые слагаемые, содержащие α_l в высшей степени[1]. В соответствии с [1] получаем

$$Q_l(\cos\theta)=(-1)^{l+1}\left(\frac{\beta}{\sin^3\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha_l J_1(\alpha_l\beta); \tag{12}$$

$$S_l(\cos\theta)=(-1)^{l}\left(\frac{\beta}{\sin\beta}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha_l^2\left\{J_0(\alpha_l\beta)-\frac{J_1(\alpha_l\beta)}{\alpha_l\beta}\right\}. \tag{13}$$

Углы β и θ связаны соотношением (6); при выводе формул (12) и (13) были использованы известные равенства

$$J_0'(x)=-J_1(x);\quad J_0''(x)+\frac{1}{x}J_0'(x)+J_0(x)=0. \tag{14}$$

4. Функции $u=P_l(\cos\theta)$ и $v=J_0(\alpha_l\theta)$ удовлетворяют соответственно уравнениям [3]

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}\frac{du}{d\theta}+l(l+1)u=0. \tag{15}$$

$$\frac{d^2v}{d\theta^2}+\frac{1}{\theta}\frac{dv}{d\theta}+\alpha_l^2 v=0. \tag{16}$$

При $\theta\simeq 0$ имеем $\operatorname{tg}\theta\simeq\theta$ и, значит, уравнения (15) и (16) будут почти одинаковы, если

$$\alpha_l=\sqrt{l(l+1)}. \tag{17}$$

Поэтому в асимптотической формуле (4) в качестве α_l предпочтительнее использовать выражение (17) вместо (5) (во всяком случае, в области малых углов θ). Заметим, что при $\theta=0$ точный результат формулы (4), (12), (13) дают только для α_l из (17).

5. По формулам (12) и (13) были сосчитаны Q_l, S_l для следующего набора параметров l, β:

$$l=1,\ 2,\ 5,\ 10(10)50(50)400;$$
$$\beta=0^\circ(0{,}1^\circ)0{,}3^\circ(0{,}3^\circ)3^\circ(1^\circ)6^\circ(2^\circ)10^\circ. \tag{18}$$

Результаты вычислений при α_l из (17) лишь для нескольких точек из рассмотренных нами 540 случаев дали отклонения от точного результата больше чем 2%. При этом весьма существенно, что уже для $l=1$ формулы (12) и (13) вполне удовлетворительны. Указанное обстоятельство, по-видимому, связано с тем, что функция

$$\varphi(\beta)=\sqrt{\frac{\beta}{\sin\beta}},\quad 0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2} \tag{19}$$

меняется весьма слабо [см. формулы (10) и (11)].

Расчеты при α_l из (5) в соответствии с приведенными выше рассуждениями дают заметно худший результат. Так, при $l=1$ расхождение достигает 12—13%; при других l относительная погрешность при α_l из (5) в среднем в 2—4 раза больше, чем при α_l из (17).

В заключение считаем своим приятным долгом поблагодарить проф. К. С. Шифрина за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шифрин К. С. Рассеяние света в мутной среде. Гостехиздат, 1951.
2. Фок В. А. Новые асимптотические выражения для функций Бесселя. ДАН, 1, 97, 1934.
3. Лебедев Н. Н. Специальные функции и их приложения. Физматгиз, Л.—М., 1963.

[1] Это верно повсюду, кроме участков угла, лежащих вблизи нулей первых слагаемых.

И. Б. КОЛМАКОВ

УСКОРЕННЫЙ МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ ПАРАМЕТРОВ СПЕКТРА РАЗМЕРОВ АЭРОЗОЛЯ

В статье рассматривается обращение интегрального уравнения первого рода для индикатрисы полидисперсной среды. Предлагается способ ускоренного определения эффективных параметров спектра распределения частиц по размерам при использовании априорных данных о характере распределения.

Для определения спектра размеров частиц полидисперсной системы разработано несколько оптических методов, основанных на анализе информации, которую содержит рассеянный свет. Оптические методы обладают известными преимуществами перед методами непосредственного подсчета, а в некоторых случаях являются единственно возможными [1].

При использовании оптических методов полагают [2], что среда содержит сферические частицы, и рассматривают «разбавленную» систему, ограничиваясь рассмотрением однократного рассеяния. Эти предположения позволяют свести задачу определения спектра размеров к обращению интегрального уравнения первого рода

$$u(x)=\int_0^\infty K(x,\ s)\,f(s)\,ds\,. \tag{1}$$

Здесь $f(s)$ — кривая распределения частицы по размерам; $K(x,s)$ — ядро уравнения, известное из теории рассеяния света на отдельной частице; $u(x)$ — экспериментально определяемая функция.

Известны, например, обращения, когда ядро $K(x,\ s)$ является индикатрисой рассеяния монодисперсной системы с частицами, радиус которых $r=s$. В этом случае $u(x)$ — полидисперсная индикатриса, описывающая рассеяние под углом $\beta=x$. Ядро $K(x,\ s)$ может быть коэффициентом рассеяния и соответственно $u(x)$ — экспериментальной кривой прозрачности полидисперсной системы [2]. В этих случаях задача теории обращения состоит в том, чтобы дать метод расчета неизвестной функции распределения $f(x)$ по $K(x,\ s)$ и $u(x)$. Такая задача выполнена в работе [3].

Рассмотрим интегральное уравнение для полидисперсной индикатрисы.

$$I(\beta)=\frac{c_1}{\beta^2}\int_0^\infty f(\rho)\,\rho^2 J_1^2(\rho\beta)\,d\rho\,, \tag{2}$$

где $I(\beta)$ — полидисперсная индикатриса рассеяния; $f(\rho)$ — функция распределения частиц по размерам, ρ — относительный радиус частицы $\rho = \frac{2\pi a}{\lambda}$, a — радиус частицы в мк, λ — длина волны света в мк.

Использование свойств, обобщенных трансформаций Фурье, позволило в [3] получить решение уравнения (2) для $f(\rho)$

$$f(\rho) = -\frac{c_2}{\rho^2}\int\limits_0^\infty \frac{d}{d\beta}\left[I(\beta)\beta^3\right]F(\rho\beta)\,d\beta\,. \tag{3}$$

Здесь

$$F(\rho\beta) = \rho\beta J_1(\rho\beta)\,Y_1(\rho\beta)\,,$$

J_1 — бесселева функция первого порядка первого рода; Y_1 — бесселева функция первого порядка второго рода.

Формула (3) по существу является алгоритмом для построения спектра размеров частиц по известной из эксперимента функции $I(\beta)$. Для этого необходимо, задавая шаг по ρ, произвести вычисление интеграла (3), найдя единственное значение функции распределения. Изменяя величину ρ с заданным шагом, вычисляются остальные значения этой функции. Таким образом, процесс вычисления займет время, пропорциональное времени одного вычисления и пропорциональное количеству вычислений. Если шаг по ρ достаточно мал, то время, затрачиваемое на вычисления, значительно возрастет.

Использование априорных данных о характере кривой распределения позволяет существенно сократить время вычисления, пользуясь ограниченным числом измерений, что особенно существенно при исследовании динамических процессов, протекающих в аэрозольных средах. Следуя большинству авторов, принимаем, что функция распределения частиц по размерам имеет вид двух- или трехпараметрического гамма-распределения

$$f(\rho) = A\rho^\nu e^{-\eta\rho^\gamma} = N\,\frac{\gamma\eta^{\frac{\nu+1}{\gamma}}}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{\gamma}\right)}\,\rho^\nu e^{-\eta\rho^\gamma}\,. \tag{4}$$

Д в у х п а р а м е т р и ч е с к и й   м е т о д. Рассмотрим первоначально ускоренный метод расчета двухпараметрического гамма-распределения, которое получается из трехпараметрического при $\gamma=1$ и имеет вид

$$f_2(\rho) = A\rho^\nu e^{-\eta\rho}\,. \tag{5}$$

Здесь A — параметр нормировки.

Свойства этого распределения таковы, что всегда отыщутся такие ρ_1 и ρ_2, для которых

$$f_2(\rho_1) = f_2(\rho_2)\,. \tag{6}$$

Эти соотношения позволяют определить аргумент максимальной ординаты ρ_m. Действительно,

$$\rho_1^{\nu_э} e^{-\eta_э\rho_1} = \rho_2^{\nu_э} e^{-\eta_э\rho_2}\,. \tag{6a}$$

Отсюда

$$\rho_m = \frac{\nu_э}{\eta_э} = \frac{\rho_1-\rho_2}{\ln\rho_1-\ln\rho_2}\,. \tag{7}$$

Так как заранее такие точки неизвестны, то проще отыскать значения $f_2(\rho)$ по (3) для таких ρ, чтобы $f_2(\rho_1)\neq f_2(\rho_2)$. Тогда значение параметров определится следующим образом.

Прологарифмировав вычисленные значения функций, будем иметь систему двух уравнений

$$\begin{cases} \ln f_2(\rho_1) = \ln A + \nu_э \ln \rho_1 - \eta_э \rho_1 \\ \ln f_2(\rho_2) = \ln A + \nu_э \ln \rho_2 - \eta_э \rho_2 \end{cases} \tag{8}$$

Всегда можно получить систему, определитель которой отличен от нуля. Параметры распределения при этом легко отыщутся из системы (8)

$$\eta_э = \frac{\ln A^{-1} f_2(\rho_2) \ln \rho_1 - \ln A^{-1} f_2(\rho_1) \ln \rho_2}{\rho_1 \ln \rho_2 - \rho_2 \ln \rho_1}, \tag{9}$$

$$\nu_э = \frac{\rho_1 \ln A^{-1} f_2(\rho_2) - \rho_2 \ln A^{-1} f_2(\rho_1)}{\rho_1 \ln \rho_2 - \rho_2 \ln \rho_1}. \tag{10}$$

Найденные таким образом параметры будем считать эффективными. Значение ρ_{max}, при котором функция $f(\rho)$ имеет максимум,

$$\rho_{max} = \frac{\nu_э}{\eta_э} = \frac{\rho_1 \ln A^{-1} f_2(\rho_2) - \rho_2 \ln A^{-1} f_2(\rho_1)}{\ln \rho_1 \ln A^{-1} f_2(\rho_2) - \ln \rho_2 \ln A^{-1} f_2(\rho_1)}. \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что для $f_2(\rho_1) = f_2(\rho_2)$ как частный случай (11) имеет место (7).

Для нескольких пар точек вычисляются $\rho_{m_1}, \rho_{m_2}, \ldots, \rho_{m_n}$ и находится $\rho_{max\ ср}$

$$\rho_{max\ ср} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \rho_{i\ max}. \tag{12}$$

Проверка правильности производится непосредственной подстановкой

$$\left| f(\rho_{max\ ср}) - \left(\frac{\rho_{max\ ср}}{e}\right)^{\nu_э} \right| < \delta_{доп}. \tag{13}$$

Если ошибка превышает допустимую, то пользуются схемой трехотсчетного метода.

Трехпараметрический метод. Когда $\gamma \neq 1$ и зависимость между ν, η и γ неизвестна, то для отыскания этих параметров достаточно, очевидно, трех уравнений. В общем случае система таких трансцендентных уравнений неразрешима и имеет вид

$$\begin{cases} f_3(\rho_1) = A\rho_1^{\nu} e^{-\eta \rho_1^{\gamma}} \\ f_3(\rho_2) = A\rho_2^{\nu} e^{-\eta \rho_2^{\gamma}} \\ f_3(\rho_3) = A\rho_3^{\nu} e^{-\eta \rho_3^{\gamma}} \end{cases} \tag{14}$$

Так как диапазон изменения ρ ограничен, $20 \leqslant \rho \leqslant 500$, то удобно для решения выражать $\rho_i = e^j$, где $j \in [3; 6,25]$. Если при этом для вычисления по (14) взять значения $\rho_1 = e^{k+0}$, $\rho_2 = e^{k+1}$, $\rho_3 = e^{k+2}$, где $k \in [3; 4,25]$ и k известно, то можно отыскать параметры ν, η и γ для системы (14), уравнения которой с учетом принятой подстановки можно записать:

$$\begin{cases} f_3(\rho_1) = Ae^{k\nu - \eta e^{k\gamma}} \\ f_3(\rho_2) = Ae^{k\nu + \nu - \eta e^{k\gamma + \gamma}} \\ f_3(\rho_3) = Ae^{k\nu + 2\nu - \eta e^{k\gamma + 2\gamma}} \end{cases} \tag{15}$$

Несложные преобразования позволяют получить новую запись системы уравнений (15)

$$\begin{cases} \ln\left[k\nu - \ln A^{-1} f_3(\rho_1)\right] = \ln \eta + k\gamma \\ \ln\left[k\nu + \nu - \ln A^{-1} f_3(\rho_2)\right] = \ln \eta + k\gamma + \gamma \\ \ln\left[k\nu + 2\nu - \ln A^{-1} f_3(\rho_3)\right] = \ln \eta + k\gamma + 2\gamma \end{cases} \tag{16}$$

Решая совместно любые две пары уравнений из полученных трех относительно γ, получаем для ν уравнение второй степени

$$\nu_э^2 + \alpha\nu_э + \beta = 0\,, \tag{17}$$

где

$$\alpha = k \ln A^{-1} f_3(\rho_3) + (k+2) \ln A^{-1} f_3(\rho_1) - 2(k+1) \ln A^{-1} f_3(\rho_2)\,,$$
$$\beta = \ln^2 A^{-1} f_3(\rho_2) + \ln A^{-1} f_3(\rho_1) \ln A^{-1} f_3(\rho_3)\,.$$

Зная ν, из любой пары уравнений (16) вычисляем γ

$$\gamma = \ln \frac{(k+2)\,\nu - \ln A^{-1} f_3(\rho_3)}{(k+1)\,\nu - \ln A^{-1} f_3(\rho_2)} = \ln \frac{(k+1)\,\nu - \ln A^{-1} f_3(\rho_2)}{k\nu - \ln A^{-1} f_3(\rho_1)}\,. \tag{18}$$

Параметр η при известных ν и γ находится из любого уравнения системы (16)

$$\eta = e^{-k\gamma}\left[k\nu - \ln A^{-1} f_3(\rho_1)\right]. \tag{19}$$

Критерием достоверности такой аппроксимации спектра частиц является непосредственная проверка результата по формуле (4) с учетом допустимого расхождения $\delta_{доп}$

$$\left| f(\rho_i) - A\rho_i^{\nu} e^{-\eta\rho_i^{\gamma}} \right| < \delta_{доп}\,. \tag{20}$$

Таким образом, полученные здесь формулы (9), (10) и (17), (18) и (19) позволяют значительно ускорить процесс вычисления эффективных параметров спектра размеров аэрозоля по сравнению с применяемым в настоящее время экспериментальным определением спектра аэрозоля согласно (3).

Если же ни один из критериев достоверности аппроксимации (13) или (20) не выполняется, то, так же как и ранее, производится полный экспериментальный расчет функции распределения по формуле (3).

При использовании метода спектральной прозрачности [2], если допустима аппроксимация спектра размеров гамма-распределением, предлагаемый ускоренный метод также может найти применение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Розенберг Г. В. Сумерки. ФМ, М., 1961.
2. Шифрин К. С. и Перельман А. Я. Опт. и спектр., т. 15, вып. 4, 1963.
3. Шифрин К. С. Вычисление некоторого класса определенных интегралов, содержащих квадрат бесселевой функции первого порядка. Труды ВЗЛТИ, № 2, 1956.