

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

06  
T78

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГЛАВНАЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ  
им. А. И. ВОЕЙКОВА

ТРУДЫ  
ВЫПУСК 241

ФИЗИКА  
ПОГРАНИЧНОГО  
СЛОЯ

СССР

Под редакцией  
канд. физ.-мат. наук А. С. ДУБОВА,  
канд. физ.-мат. наук Л. Р. ОРЛЕНКО

**БИБЛИОТЕКА**  
Ленинградского  
Гидрометеорологического  
Института



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО  
ЛЕНИНГРАД • 1969

551.5/01.521

УДК 551.554

В сборнике публикуются работы, посвященные изучению связи структуры пограничного слоя с внешними параметрами, в частности, с радиационными процессами. Рассматриваются задачи трансформации воздушной массы при изменении характеристики подстилающей поверхности. Обсуждается методика пульсационных и градиентных измерений над морем, а также некоторые вопросы физики обледенения предметов. Статистические исследования представлены картами теплофизических характеристик почвы для ЕТС и режимными данными о сильных ветрах.

Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов, специализирующихся в области физики пограничного слоя атмосферы и океанологии.

## СОДЕРЖАНИЕ

Л. Р. Орленко, Г. Х. Цейтлин. Об исследованиях строения пограничного слоя атмосферы на основе «интегральной» схемы . . . . .	4
Ф. Н. Шехтер, Г. Х. Цейтлин. Дифференциальная схема строения стационарного пограничного слоя атмосферы с учетом лучистого теплообмена . . . . .	19
Г. Х. Цейтлин. К расчету характеристик турбулентного обмена термически-стратифицированного пограничного слоя атмосферы . . . . .	36
М. М. Сафронова. Геострофический коэффициент трения и угол отклонения наземного ветра от геострофического по экспериментальным данным . . . . .	50
Е. Д. Надеждина. Об изменениях характеристик турбулентного потока при переходе с твердой поверхности на водную . . . . .	56
В. В. Симонов. К вопросу о расчете характеристик турбулентного обмена в мелком водоеме . . . . .	63
Н. В. Кучеров. Определение потоков тепла и пара по градиентным измерениям с кораблей . . . . .	73
Б. М. Андреев, Н. З. Ариель, Л. Ю. Преображенский, М. М. Сафронова, С. И. Крылов. К методике морских метеорологических наблюдений в приводном слое атмосферы . . . . .	79
Н. З. Ариель, Р. С. Бортковский. О применении градиентного буя при исследованиях турбулентности над морем . . . . .	85
Т. В. Кириллова, И. И. Иванова. Оценка возможных изменений излучения атмосферы над неоднородными участками подстилающей поверхности . . . . .	91
Н. В. Серова. Распределение теплофизических характеристик почв по Европейской территории СССР . . . . .	95
М. М. Борисенко. Об особенностях вертикального профиля сильных ветров по данным измерений на высотных мачтах . . . . .	108
А. М. Данович. О распространении нагретой примеси в стратифицированной турбулентной среде . . . . .	116
Е. В. Романов. Применение сорбционных датчиков влажности для измерения турбулентного потока влаги . . . . .	122

## ОБ ИССЛЕДОВАНИЯХ СТРОЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ НА ОСНОВЕ «ИНТЕГРАЛЬНОЙ» СХЕМЫ

### 1. Введение

В течение ряда лет в ГГО проводились теоретические исследования строения пограничного слоя атмосферы. Значительная часть этих исследований основана на решении замкнутой системы уравнений для пограничного слоя с использованием уравнения баланса энергии турбулентности в интегральной форме.

Эти исследования развивались в двух направлениях. С одной стороны, уточнялась постановка задачи (рассматривались различные модели коэффициента турбулентности, различные способы учета лучистого теплообмена, адвекции, нестационарности и т. п.), с другой — проводились исследования различных параметров схемы с использованием экспериментальных данных.

В настоящее время возникла необходимость обобщения указанных исследований. Нами были введены некоторые изменения в постановке, направленные с одной стороны на уточнение, с другой — на некоторые упрощения задачи, не сказывающиеся на результатах расчетов.

### 2. Состояние вопроса

Взаимосвязь и взаимообусловленность распределения метеорологических элементов и характеристик турбулентности в пограничном слое требуют их совместного определения на основе решения замкнутой системы уравнений для пограничного слоя при заданных внешних факторах.

Задача совместного определения профилей метеорологических элементов и характеристик турбулентности рассматривается в ряде работ [1—4, 7—13]. Как известно, система уравнений для пограничного слоя включает два уравнения движения, уравнение неразрывности, уравнение притока тепла для воздуха и почвы и уравнение диффузии водяного пара. При стационарных и горизонтально однородных условиях и при отсутствии конденсации в пограничном слое указанная система может быть представлена в виде:

$$\frac{d}{dz} k \frac{du}{dz} + l v = 0; \quad (1)$$

$$\frac{d}{dz} k \frac{dv}{dz} - l(u - V_g) = 0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad (3)$$

$$-\frac{dP}{dz} - \frac{dP}{dz} = 0; \quad (4)$$

$$a_1^2 \frac{d^2 T'}{dz^2} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{d}{dz} k \frac{dq}{dz} = 0. \quad (6)$$

Здесь и далее приняты следующие обозначения:

$u, v, w$  — составляющие скорости ветра по осям  $x, y, z$  соответственно (ось  $x$  направлена по изобаре);

$T, p, q, \rho$  — температура, давление, удельная влажность и плотность воздуха;

$T'$  — температура почвы;

$k$  — коэффициент турбулентной диффузии;

$a_1^2$  — коэффициент температуропроводности почвы, принимаемый за постоянную величину;

$l = 2 \omega \sin \varphi = 2 \omega_z$  (параметр Кориолиса);

$g$  — ускорение силы тяжести;

$\omega$  — угловая скорость вращения Земли;

$\varphi$  — широта места;

$$V_g = \frac{1}{l \rho} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (\text{модуль геострофического ветра});$$

$c_z$  — модуль скорости ветра на уровне  $z$ ;

$H$  — высота пограничного слоя;

$T_0$  и  $T_H$  — температура воздуха на уровнях  $z=z_0$  и  $z=H$ ;

$z_0$  — параметр шероховатости подстилающей поверхности;

$$P = -\alpha_t k \rho c_p \left( \frac{dT}{dz} + \gamma_p \right) \quad (\text{турбулентный поток тепла по вертикали});$$

$\alpha_t$  — соотношение коэффициентов турбулентности для тепла и количества движения;

$$\alpha_t = \frac{k_t}{k}$$

$\gamma_p$  — равновесный градиент температуры;

$c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении;

$F$  — лучистый поток тепла, представляющий собой алгебраическую сумму потоков длинноволновой радиации, направленных снизу вверх ( $E_3$ ) и сверху вниз ( $E_a$ ), и потока коротковолновой радиации  $S$ ,  $F = E_3 - E_a - S$ .

Система уравнений (1) — (6) дополняется уравнением баланса энергии турбулентности

$$k \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] - \frac{g}{T} \frac{P}{\rho c_p} - D + M = 0,$$

где  $D$  и  $M$  — скорость диссипации и диффузия турбулентной энергии.

Учет этих слагаемых в исследованиях пограничного слоя осуществляется двумя способами. В зависимости от этого можно говорить о двух схемах строения пограничного слоя атмосферы. Условно принято называть их «дифференциальной» и «интегральной» схемами. В первой из названных схем система уравнений дополняется соотношением для

масштаба турбулентности, а диссипация, диффузия энергии турбулентности и коэффициент турбулентного обмена выражаются через масштаб турбулентности и среднее значение энергии пульсации скорости ветра [4].

В данной работе рассматривается интегральная схема строения пограничного слоя, в которой скорость диссипации принимается пропорциональной трансформации кинетической энергии среднего движения в энергию турбулентности. Уравнение баланса энергии турбулентности, если пренебречь диффузией на верхней границе пограничного слоя, записывается в интегральной форме [2, 3]

$$(1 - \delta) \int_0^H k \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dz - \int_0^H \frac{g}{T} \frac{P}{\rho c_p} dz = 0, \quad (7)$$

где  $\delta$  — так называемый параметр диссипации, определяемый экспериментальным путем [5, 6] из соотношения

$$\delta = 1 - \frac{\int_0^H \frac{g}{T} \frac{P}{\rho c_p} dz}{\int_0^H k \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] dz}.$$

При наличии диффузии параметр  $\delta$  фактически учитывает не только диссипацию энергии турбулентности в тепло, но и диффузию ее в пограничном слое. За высоту пограничного слоя принимается высота, на которой производная от модуля скорости обращается в нуль. Математически это условие записывается в виде

$$\frac{d}{dz} (u^2 + v^2) \Big|_{z=H} = 0. \quad (8)$$

При известных  $\delta$  и  $F(z)$  (об учете лучистого теплообмена будет сказано ниже) система уравнений (1) — (8) является замкнутой и позволяет определить скорость ветра (составляющие  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ), температуру и влажность воздуха, температуру почвы, коэффициент турбулентности и высоту пограничного слоя. Система уравнений (1) — (8) решается при заданных внешних параметрах скорости геострофического ветра, радиационного баланса (или коротковолновой радиации), температуры и влажности воздуха на верхней границе пограничного слоя и известных свойствах подстилающей поверхности. С учетом этого граничные условия могут быть записаны в виде:

$$z = z_0, \quad u = v = w = 0 \quad \text{для суши}; \quad (9)$$

$$u = u_\tau, \quad v = v_\tau \quad \text{для морской поверхности}; \quad (9')$$

$$P + LE + B = (1 - A)S + E_a - E_s; \quad (10)$$

$$T = T'; \quad (11)$$

$$q = r q_{\max}(T_0); \quad (12)$$

$$z = H, \quad u = V_g; \quad v = 0; \quad (13)$$

$$T = T_H; \quad (14)$$

$$q = q_H; \quad (15)$$

$$z = -H_1; \quad T' = T_{H_1}; \quad (16)$$

где  $u_T$  и  $v_T$  — составляющие скорости поверхностного течения,  $\sqrt{u_T^2 + v_T^2} = c_T$ ;  $A$  — альbedo подстилающей поверхности;  $r$  — относительная влажность у поверхности земли;

$$B = c_{п\rhoп} a_1^2 \frac{\partial T'}{\partial z} \quad (\text{поток тепла в почву});$$

$$LE = -L\rho k \frac{\partial q}{\partial z} \quad (\text{затраты тепла на испарение});$$

$c_{п\rhoп}$  — объемная теплоемкость почвы;  $T_{H_1}$  — температура почвы на глубине  $H$ , где отсутствуют суточные колебания температуры.

При решении системы уравнений (1) — (8) можно выделить два этапа.

1) Расчет всех характеристик пограничного слоя при известной стратификации. Характеристикой стратификации может служить параметр  $\mu$  [22]

$$\mu = \frac{g}{T} \frac{T_0 - T_H - \gamma_p H}{iV_g}. \quad (17)$$

2) Расчет  $\mu$  по известному радиационному балансу.

Первый этап представляет самостоятельный интерес тогда, когда известно распределение температуры и требуется определить другие характеристики пограничного слоя. В этом случае решается система уравнений (1) — (4), (8) при граничных условиях (9), (13), (14) и задании температуры подстилающей поверхности

$$T|_{z=z_0} = T_0. \quad (18)$$

В такой постановке задача рассматривается в работах [8, 13]. Решения системы уравнений (1) — (8), приводимые в других работах, помимо различий в граничных условиях для температуры, отличаются способами учета лучистого теплообмена и различным заданием профиля коэффициента турбулентности.

В указанных решениях коэффициент турбулентности задается некоторой моделью, параметры которой определяются на основе решения замкнутой системы уравнений.

В первых исследованиях решение системы уравнений (1) — (8) находилось при постоянном по высоте коэффициенте турбулентности [2, 7, 11]. В работах [8, 9] для коэффициента турбулентности используется модель с изломом в виде:

$$\begin{aligned} k &= k_1 \left( \frac{z}{z_1} \right)^{1-\varepsilon} \quad z \leq h; \\ k &= k_1 \left( \frac{h}{z_1} \right)^{1-\varepsilon} \quad z \geq h, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $k_1$  — коэффициент турбулентности на уровне  $z_1$ ;  $\varepsilon$  — параметр, характеризующий стратификацию атмосферы в обобщенно степенном законе.

Согласно (19), при нейтральной стратификации ( $\varepsilon=0$ ) в слое  $z_0-h$  задавался линейный рост коэффициента турбулентности с высотой,

Наряду с развитием теоретических работ по распределению ветра в пограничном слое при заданном коэффициенте турбулентности был выполнен ряд исследований, в которых ставилась обратная задача: по известному распределению ветра в пограничном слое получить коэффициент турбулентности и его профиль. Методика и результаты непосредственного определения профиля коэффициента турбулентности по шаропилотным данным приводятся в многочисленных работах, сводка которых дается в статье Л. А. Ключниковой [14]. Согласно этим исследованиям, коэффициент турбулентности растет до некоторой высоты, выше постепенно убывает. Высота, на которой отмечаются максимальные значения коэффициента турбулентности, колеблется в зависимости от метеорологических условий, в среднем она составляет  $\sim 250$  м. Скорость возрастания коэффициента турбулентности до высоты максимума существенно зависит от стратификации и высоты, что следует также и из физических соображений: с высотой возрастание замедляется. Указанные особенности в профиле коэффициента турбулентности были учтены в работе Л. А. Ключниковой, Д. Л. Лайхтмана и Г. Х. Цейтина [12], в которой дается решение уравнений движения при задании профиля коэффициента турбулентности моделью:

$$k = k_1 \left( \frac{z}{z_1} \right)^n \quad z \leq h;$$

$$k = k_h e^{-a \left( \frac{z}{h} - 1 \right)} \quad z \geq h, \quad (20)$$

где  $n$  и  $a$  — параметры, характеризующие изменение коэффициента турбулентности в слое  $z \leq h$  и  $z \geq h$  соответственно;

$$k_1 = \frac{\kappa^2 z_1}{\ln z_1/z_0} \quad \text{при } \varepsilon = 0;$$

$$k_1 = \frac{\kappa^2 \varepsilon z_0^{2\varepsilon} z_1^{1-\varepsilon}}{(1-\varepsilon)^2 (z_1^\varepsilon - z_0^\varepsilon)} \quad \text{при } \varepsilon \neq 0. \quad (21)$$

Оценка параметра  $n$  показала существенную зависимость его от стратификации. Для равновесных условий величина  $n$  составляет 0,8—0,9. Величина  $a$  составляет 0,2—0,5. Полученное при условии (20) решение является наиболее общим. Из него как частный случай при  $a=0$  может быть получено решение, рассмотренное в [13], при  $a=0$  и  $n=1-\varepsilon$  — решение, приведенное в работах [8, 9].

Строго говоря, система уравнений (1)—(8) является замкнутой только при известных  $F(z)$  и  $\delta$ . Для определения лучистых потоков систему уравнений (1)—(8) следует дополнить уравнениями переноса лучистой энергии. Ф. Н. Шехтер [15] предложена методика, позволяющая учитывать лучистый теплообмен последовательными приближениями при использовании полученных ею соотношений для потоков длинноволновой радиации. Однако в большинстве работ лучистый теплообмен учитывается приближенно либо введением некоторой средней характеристики лучистого притока тепла [10, 12]

$$\Gamma = \frac{1}{\rho c_p H} \int_0^H \frac{F(z) - F_0}{k(z)} dz, \quad (22)$$

либо с помощью интерполяционных формул [8, 13].

В цитируемых выше работах рассматривается строение пограничного слоя для стационарных и горизонтально однородных условий.

Влияние адвекции и нестационарности на строение пограничного слоя атмосферы рассматривается в работах [16—19]. Влияние указанных факторов может быть учтено введением некоторых поправок к решению, полученному на основании системы уравнений (1)—(8). Эти вопросы являются предметом специальных исследований и здесь не рассматриваются.

### 3. Анализ решений. Уточнение схемы

Как уже отмечалось выше, учет лучистого теплообмена можно произвести различными способами. Выполненный в [20] анализ лучистых потоков в пограничном слое показал существенную зависимость их от стратификации. Введение параметра  $\Gamma$  в схему приводит к дополнительному параметру, существенно зависящему от стратификации, но малоизученному.

В работе [13] приводится решение уравнения притока тепла, в котором лучистый поток аппроксимируется линейной функцией высоты, а параметр, характеризующий его изменение с высотой, определяется из условия на верхней границе пограничного слоя

$$-\left. \frac{dT}{dz} \right|_{z=H} = \gamma_n. \quad (23)$$

При закрепленных значениях температуры на верхней и нижней границах пограничного слоя ( $T_0$  и  $T_H$ ) и заданном градиенте температуры на  $z=H$  такая аппроксимация может обеспечить достаточную точность при расчетах характеристик самого нижнего слоя. При расчетах профиля ветра и температуры и характеристик турбулентности во всем пограничном слое необходим более точный учет лучистого теплообмена. Использование же для определения лучистых потоков точных соотношений значительно усложняет схему.

Сопоставление решений при различных моделях профиля коэффициента турбулентности позволило выявить параметры, влияние которых наиболее существенно на характеристики пограничного слоя.

При сопоставлении различных моделей мы исходили из того, что средний коэффициент турбулентности определяется внешними факторами и не должен зависеть от характера задания его профиля. Это означает, что между параметрами, характеризующими изменение коэффициента турбулентности, должна существовать определенная зависимость, т. е. параметры  $n$ ,  $h$  и  $a$  оказываются связанными. Анализ решений при различных моделях для коэффициента турбулентности показал, что очень важно правильное задание  $k$  в нижнем слое и менее важен учет убывания коэффициента турбулентности в слое выше  $h$ .

На рис. 1 а проводится сопоставление профилей ветра, рассчитанных при разных значениях параметра  $a$  и прочих равных условиях, на рис. 1 б приводятся соответствующие профили коэффициента турбулентности. Анализ приведенных данных показывает, что влияние параметра  $a$  невелико. По-видимому, это объясняется тем, что на больших высотах турбулентный обмен уже велик и, кроме того, высота максимума достаточно близко расположена к высоте пограничного слоя, где скорость ветра определена граничным условием:  $c \rightarrow V_g (c = \sqrt{u^2 + v^2})$ . На наземные характеристики  $c_1/V_g$  ( $c_1$  — скорость ветра на уровне  $z_1$ ),  $\alpha$  (угол отклонения наземного ветра от геострофического),  $k_1$ ,  $\tau/\rho$  влияние параметра  $a$  практически не сказывается, и поэтому с достаточной

точностью при аппроксимации профиля коэффициента турбулентности некоторой моделью можно полагать  $a$  равным нулю, т. е. выше слоя  $z=h$  коэффициент турбулентности задавать постоянной величиной, определяемой на основе решения замкнутой системы уравнений (1)–(8).

О влиянии параметра  $n$  можно судить на основании табл. 1. Как следует из приведенных данных, схема с коэффициентом турбулентности, описываемым соотношением (20), оказалась очень чувствительной к параметру  $n$ . По-видимому, это в значительной мере обусловлено

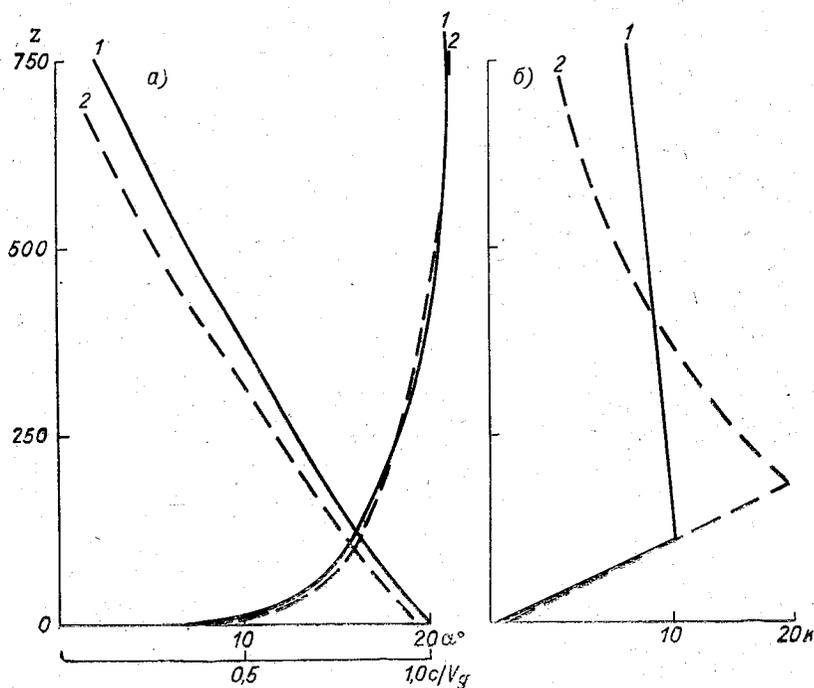


Рис. 1. Влияние параметра  $a$  на профиль ветра (а) и коэффициент турбулентности (б).  
1)  $a=0,05$ ; 2)  $a=0,5$

тем, что в данном случае распределение ветра описывается обобщенно степенным законом с показателем степени  $1-n$ . Параметр шероховатости  $z_0$  является здесь параметром схемы, зависящим от стратификации, что создает определенные трудности при практическом использовании схемы.

Таблица 1

Влияние параметра  $n$  на характеристики пограничного слоя ( $V_g = 25$  м/сек.,  $\mu = 0$ ,  $\varphi = 60^\circ$ , море)

$n$	$h$	$H$	$k_{10}$	$k_h$	$\frac{C_{10}}{V_g}$	$a_1$	$\frac{z_0}{\rho}$
0,85	199	826	2,08	26,4	0,53	0,3	0,520
1,0	151	811	2,70	40,9	0,69	0,259	0,485

Кроме того, как следует из теоретических соображений, подтверждаемых экспериментальными данными, в самом нижнем слое, толщина которого зависит от стратификации, профиль ветра описывается логарифмической. Для этого слоя  $n=1$ .

Была сделана попытка ввести уточнения в схему более точным заданием коэффициента турбулентности в приземном слое. При выборе модели учитывалось не только наличие логарифмического подслоя ( $h_1$ ), но и различие в скорости нарастания коэффициента турбулентности с высотой для различных условий стратификации в слое  $h_1-h$ . В связи с вышеизложенным уравнение движения решалось при задании коэффициента турбулентности трехслойной моделью:

$$\begin{aligned} k &= k_{h_1} \left( \frac{z}{h_1} \right) && \text{для } z_0 \leq z \leq h_1; \\ k &= k_{h_1} \left( \frac{z}{h_1} \right)^n && \text{для } h_1 \leq z \leq h; \\ k &= k_h = k_{h_1} \left( \frac{h}{h_1} \right)^n && \text{для } h \leq z \leq H, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$k_{h_1} = \frac{z^2 (c_{h_1} - c_\tau) h_1}{\ln h_1 / z_0}. \quad (25)$$

Далее во всех рассмотренных работах при решении уравнений движения для простоты решений скорость ветра принималась равной скорости геострофического ветра не на верхней границе пограничного слоя ( $z=H$ ), а на бесконечности. Такая математическая стилизация не должна приводить к существенным погрешностям при расчете характеристик нижнего слоя воздуха, но может заметно сказаться при расчете профиля ветра во всем пограничном слое, особенно при инверсионных условиях, когда высота пограничного слоя невелика [6]. Поэтому при решении уравнения движения в качестве граничного условия на верхней границе пограничного слоя нами в дальнейшем используется равенство расчетной скорости ветра скорости геострофического ветра, что отражено в условии [13]. Профиль ветра на основе полученного решения описывается формулами:

для  $z_0 \leq z \leq h_1$

$$u(z) = u_\tau + (u_{h_1} - u_\tau) \frac{\ln z/z_0}{\ln h_1/z_0}; \quad (26)$$

$$v(z) = v_\tau + (v_{h_1} - v_\tau) \frac{\ln z/z_0}{\ln h_1/z_0}; \quad (27)$$

для  $h_1 \leq z \leq h$

$$u(z) = u_{h_1} + (V_g - u_{h_1}) L(z) [1 - \Delta_1(z)] + v_{h_1} \bar{L}(z) [1 - \Delta_2(z)]; \quad (28)$$

$$v(z) = v_{h_1} + (V_g - u_{h_1}) \bar{L}(z) [1 - \Delta_2(z)] - v_{h_1} L(z) [1 - \Delta_1(z)]. \quad (29)$$

Значения  $L(z)$  и  $\bar{L}(z)$ ,  $\Delta_1(z)$  и  $\Delta_2(z)$  приводятся в работе [13] (соотношения (17) и (18); в которых вместо  $z_0$  нужно поставить  $h_1$ ). Некоторые отличия будут в  $\Delta_1(z)$  и  $\Delta_2(z)$  из-за введения граничного условия для скорости ветра на  $z=H$ , но это отличие незначительное. Следовательно, практически введение указанного условия очень слабо влияет

на профиль ветра в слое  $z_0 - h$ . Основные изменения будут в слое  $h - H$ . Это выражается в дополнительных слагаемых поправках к решению, полученному ранее [13] при условии

$$u = V_g \text{ и } v = 0 \text{ при } z \rightarrow \infty. \quad (30)$$

Для слоя  $h \leq z \leq H$  решение записывается в виде:

$$u(z) = u^{(0)}(z) + [V_g - u^{(0)}(z)] K^{(1)}(z) + v^{(0)}(z) K^{(2)}(z); \quad (31)$$

$$v(z) = v^{(0)}(z) + [V_g - u^{(0)}(z)] K^{(2)}(z) - v^{(0)}(z) K^{(1)}(z), \quad (32)$$

где  $u^{(0)}(z)$  и  $v^{(0)}(z)$  — решения уравнений (1), (2) для  $z > h$  при условии (30):

$$u^{(0)}(z) = e^{-a_z} [(V_g - u_h) \cos a_z - v_h \sin a_z]; \quad (33)$$

$$v^{(0)}(z) = e^{-a_z} [(V_g - u_h) \sin a_z + v_h \cos a_z]; \quad (34)$$

$$a_z = (z - h) \sqrt{\frac{\omega_z}{k_h}}. \quad (35)$$

Функции  $K^{(1)}(z)$  и  $K^{(2)}(z)$  могут быть представлены следующими соотношениями:

$$K^{(1)}(z) = R_h^{(1)} [e^{2a_z} \cos 2a_z - 1] - R_h^{(2)} e^{2a_z} \sin 2a_z; \quad (36)$$

$$K^{(2)}(z) = R_h^{(2)} [e^{2a_z} \cos 2a_z - 1] + R_h^{(1)} e^{2a_z} \sin 2a_z; \quad (37)$$

$$R_h^{(1)} = \frac{e^{-2a_H} (\cos 2a_H - e^{-2a_H})}{1 - 2e^{-2a_H} \cos 2a_H + e^{-4a_H}}; \quad (38)$$

$$R_h^{(2)} = -\frac{e^{-2a_H} \sin 2a_H}{1 - 2e^{-2a_H} \cos 2a_H + e^{-4a_H}}; \quad (39)$$

$$a_H = a_z|_{z=H}. \quad (40)$$

Для определения  $h$ ,  $H$ ,  $k_h$  используются соотношения (7), (8), (25), которые, если аппроксимировать лучистый поток линейной функцией высоты [13], могут быть представлены в виде:

$$h = -\frac{(1 - \delta)}{\mu} \frac{(2\nu - 1) (h/h_1)^{1-n} [(V_g - u_\tau)(u_{h_1} - u_\tau) - v_\tau(v_{h_1} - v_\tau)]}{2 \omega_z V_g \bar{\alpha}_\tau \ln h_1/z_0 \left[ 1 - \frac{g(\nu - 1)}{2 \omega_z T V_g \mu} H(\gamma_p - \gamma_H) \right]}; \quad (41)$$

$$(H - h) \sqrt{\frac{\omega_z}{k_h}} = 2,356 - \varphi_h - \beta_h; \quad (42)$$

$$k_h = \left( \frac{h_1}{h} \right)^{1-n} \frac{\alpha^2 (c_{h_1} - c_\tau) h}{\ln h_1/z_0}, \quad (43)$$

где  $\mu$  — параметр стратификации, определяемый соотношением (17),

$$\nu = 1 - \frac{h}{H} + \frac{h}{(2-n)H} \left[ m_h + \frac{(2-n) \ln h_1/z_0}{(h/h_1)^{1-n}} \right]; \quad (44)$$

$$m_h = \frac{(2-n)}{(1-n)} [1 - (h_1/h)^{1-n}]; \quad (45)$$

$$\varphi_{h_1} = \arctg \frac{u_{h_1}}{V_g - u_{h_1}} \quad (46)$$

$$\beta_{h_1} = \arctg \frac{R_{h_1}^{(2)}}{1 + R_{h_1}^{(1)}} \quad (47)$$

$c_{h_1}$  определяется из условия „склейки“ производных скорости ветра при  $z=h_1$ . Турбулентные потоки тепла и количества движения представляются соотношениями:

$$\frac{\tau_{0x}}{\rho} = \frac{z^2(u_{h_1} - u_T)(c_{h_1} - c_T)}{\ln^2 h_1/z_0}; \quad (48)$$

$$\frac{\tau_{0y}}{\rho} = \frac{z^2(v_{h_1} - v_T)(c_{h_1} - c_T)}{\ln^2 h_1/z_0}; \quad (49)$$

$$P_0 = \frac{2 \omega_z \rho c_p \bar{\alpha}_T V_g \bar{T}}{g} \frac{\mu k_h}{H \left( \nu - \frac{1}{2} \right)} \left[ 1 + \frac{gH(\gamma_p - \gamma_n)}{4 \omega_z \bar{T} V_g \mu} \right], \quad (50)$$

где  $\bar{\alpha}_T$  — среднее для слоя значение  $\alpha_T$ .

Решение полученной системы трансцендентных уравнений производилось последовательными приближениями и осуществлялось на ЭВМ-220 по программе, составленной В. Г. Вагером. Как показали расчеты, введение трехслойной модели для коэффициента турбулентности дает

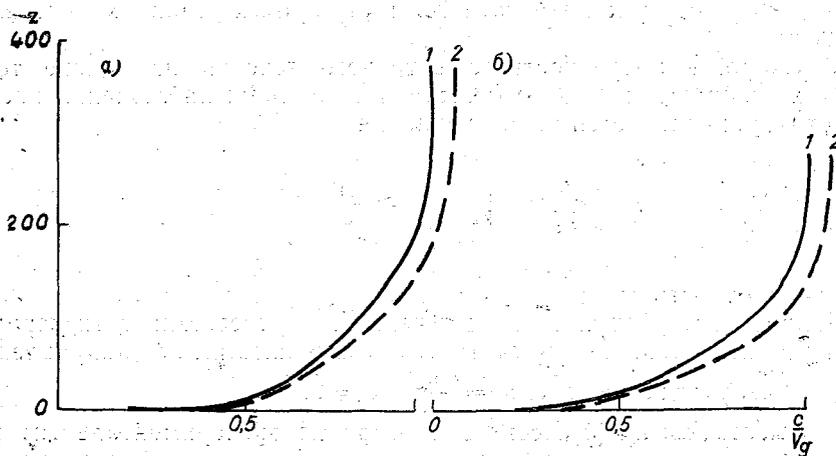


Рис. 2. Профили ветра при различных граничных условиях на верхней границе пограничного слоя.  $V_g=10$  м/сек.,  $z_0=0,02$  м.

*a* — равновесные условия, *b* — инверсионные условия;

1)  $u = V_g, v = 0$

2)  $u = V_g, v = 0$

при  $z = H$ ,

при  $z \rightarrow \infty$ .

небольшие изменения в профиле ветра при равновесных условиях и значительное для инверсионных условий. Это влияние будет тем больше, чем меньше  $h_1$  и чем больше  $n$  отличаются от единицы. Изменение граничного условия на верхней границе пограничного слоя практически не сказывается на характеристиках ветра и турбулентности в приземном слое. Для иллюстрации этого положения на рис. 2 представлены профили ветра для равновесных и инверсионных условий.

#### 4. Выбор параметров расчетной схемы. Некоторые результаты расчетов

Исходными данными для расчетов являются широта места  $\varphi$ , параметр шероховатости  $z_0$ , скорость геострофического ветра  $V_g$  и параметр стратификации  $\mu$ . В качестве  $V_g$  используется геострофический ветер, определенный по синоптической карте либо по данным радиозондирования. Параметр шероховатости определяется по данным измерений скорости ветра в приземном слое. При отсутствии таких данных может быть использована таблица характерных значений  $z_0$  для различных подстилающих поверхностей из [9, 21]. Для определения параметра шероховатости морской поверхности предлагается рекомендуемая в [13] зависимость  $z_0$  от скорости ветра на  $z = 10$  м.

Параметр  $\mu$ , определяемый соотношением (17), может быть найден по известному распределению температуры либо получен на основании связи этого параметра с некоторыми другими характеристиками стратификации, приведенными в [22].

Полученное решение содержит ряд параметров ( $\gamma_p$ ,  $\delta$ ,  $c_T$ ,  $h$ ,  $\alpha_T$ ,  $n$ ), от правильного выбора которых зависит возможность применения полученных формул при решении прикладных задач. Некоторые рекомендации по выбору указанных параметров даются в работе [13]. Приведем основные результаты, изложенные в ней, а также некоторые дополнительные соображения.

а) Равновесный градиент температуры  $\gamma_p$  в соответствии с исследованиями, выполненными в [23], с достаточной точностью можно принять равным градиенту температуры в свободной атмосфере  $\gamma_n$ . Среднее значение его, по данным расчетов в различных условиях, составляет  $0,6^\circ/100$  м.

б) Скорость поверхностного ветрового течения на основе теоретических соображений и в соответствии с данными наблюдений последних лет [13] определяется из соотношения

$$\frac{c_T}{V_g} = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_w}} \approx \frac{1}{30}, \quad (51)$$

где  $\rho_w$  — плотность воды.

Направление поверхностного течения в соответствии с экспериментальными исследованиями считается совпадающим с направлением геострофического ветра, т. е.  $u_T = \frac{V_g}{30}$ ,  $v_T = 0$ .

в) Высота логарифмического подслоя по экспериментальным данным, существенно зависит от стратификации. При неустойчивой и устойчивой стратификации толщина его составляет 1—2 м, при нейтральной  $\sim 10$  м. В наших расчетах для равновесных условий ( $-100 < \mu < 100$ ) принималось  $h_1 = 10$  м, для слабонеустойчивого ( $100 < \mu < 500$ ) и слабоустойчивого состояния ( $-500 < \mu < -100$ )  $h_1 = 2$  м, для сильнонеустойчивого ( $\mu > 500$ ) и сильноустойчивого состояния  $h_1 = 1$  м.

г) Некоторые оценки параметра  $n$  могут быть сделаны на основе физических соображений. При нейтральной и устойчивой стратификациях с удалением от подстилающей поверхности нарастание коэффициента турбулентности замедляется и, следовательно, для  $z > h$   $n < 1$ . При неустойчивой стратификации  $n > 1$ , а для условий свободной конвекции, как следует из теоретических соображений,  $n = 4/3$ . Численные оценки  $n$  могут быть сделаны на основе экспериментальных данных о профиле коэффициента турбулентности и профиле ветра. Для

определения  $n$  нами использовались значения  $k_h$  и  $k_1$ , полученные по профилю ветра на ст. Воейково [22]. Рассчитанные на основе соотношения (24) значения  $n$  в зависимости от  $\mu$  приведены ниже:

$\mu$ . . . . .	323	15	-226
$n$ . . . . .	1,2	0,85	0,7

Они могут быть рекомендованы для дальнейших расчетов. Для сильнонеустойчивого состояния  $n=1,3$ , а для сильноустойчивого, по-видимому, можно рекомендовать  $n=0,6$ .

д) Параметр диссипации  $\delta$  исследовался в работе [6]. Согласно этим исследованиям,  $\delta=1$  при  $\mu=0$  (равновесные условия) и сильно растет с увеличением неустойчивости ( $\mu > 0$  при неустойчивой стратификации,  $\mu < 0$  при устойчивой).

На рис. 3 воспроизведена зависимость  $\delta$  от  $\mu$ . Она получена для числа  $R_0 \sim 10^6 - 10^7$ . В расчетной схеме параметр  $\delta$  входит в множитель  $\frac{\mu}{1-\delta}$ , зависимость которого от  $\mu$  представлена кривой 2 на рис. 3. Заметим, что зависимость  $\delta$  от  $\mu$ , представленная кривой 1, справедлива только при точном учете лучистого теплообмена. При задании лучистого потока тепла линейной функцией высоты  $\delta$  приобретает роль параметра схемы ( $\delta_{cx}$ ). Следует также обратить внимание на возможное влияние параметра  $\alpha_T$ .

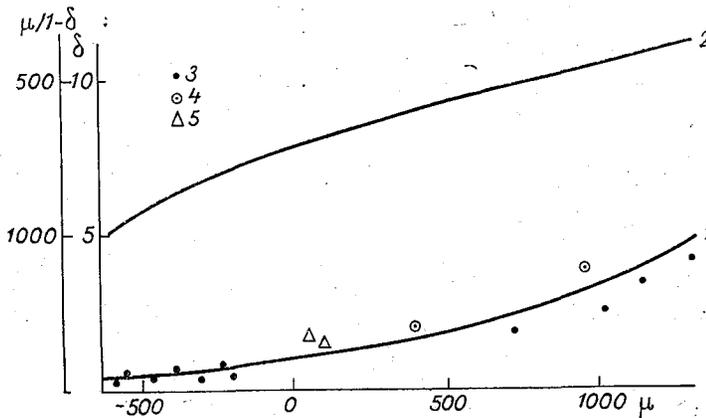


Рис. 3. Зависимость  $\delta$  (1) и  $\frac{\mu}{1-\delta}$  (2) от температурной стратификации.

Экспериментальные данные ст. Махталы (3), ст. Жовтневое (4), данные Леттау (5).

Вопрос о соотношении коэффициентов турбулентности для тепла и количества движения исследовался в ряде работ. Согласно этим исследованиям, величина  $\alpha_T$  существенно зависит от стратификации (числа  $Ri$ ). До сих пор во всех теоретических схемах  $\alpha_T$  полагалось равным единице. Если ввести для всего пограничного слоя некоторое среднее значение  $\alpha_T$ , то, как следует из (41), экспериментальному определению под- лежит параметр  $\frac{\alpha_T \mu}{1-\delta_{cx}}$ . Для проверки вышеприведенных формул необходимо иметь данные, полученные в стационарных условиях, при отсутствии адвекции и известных значениях скорости геострофического ветра, шероховатости подстилающей поверхности и стратификации атмосферы.

Подбор экспериментального материала с учетом указанных факторов не только трудоемкий процесс, он требует наличия достаточно надежных и многочисленных данных.

Из опубликованных данных наиболее многочисленны материалы о геострофическом коэффициенте трения  $\frac{v_*}{V_g}$ , угле отклонения наземного ветра от геострофического  $\alpha_0$  и данные о соотношении наземного (надводного) ветра и геострофического ветра. В последних, однако, как правило, анализируется зависимость от скорости геострофического ветра без учета стратификации или зависимость от стратификации без учета скорости ветра. Это обстоятельство затрудняет сопоставление теоретических и экспериментальных данных. Из экспериментальных работ, рассматривающих влияние внешних факторов на профиль ветра, можно указать немногие [22, 25, 26]. Чаще всего обобщения приводятся по сезонам и месяцам и в лучшем случае по срокам.

Для проверки теоретических схем могут быть использованы лишь данные, осредненные по срокам, если при этом есть какие-то данные, характеризующие температурную стратификацию (температурный градиент, турбулентный поток тепла и т. п.) и позволяющие определить параметр шероховатости. При достаточно большом осреднении влиянием адвекции, по-видимому, можно пренебречь, однако следует иметь в виду, что осенью и особенно зимой могут преобладать случаи с низкой облачностью, что скажется на профиле ветра. В этих случаях нарушается также монотонное изменение температуры с высотой. Для характеристики стационарного распределения метеоэлементов можно рекомендовать наблюдения в периоды экстремальных значений температуры [23].

При отсутствии данных о геострофическом ветре величина  $V_g$  может быть получена экстраполяцией данных наблюдений до  $V_g$  на основе теоретических соотношений. Это возможно, если рассматривать безразмерные характеристики скорости ветра ( $c_z/V_g$  или  $c_z/c_1$ , где  $c_1$  — скорость ветра на некоторой фиксированной высоте). Как показывают расчеты и экспериментальные данные [9, 13, 21], указанные величины зависят от  $V_g$  значительно меньше, чем абсолютные значения скорости ветра, что позволяет в теоретических расчетах задавать  $V_g$  с точностью до нескольких метров в секунду.

В ранее выполненных исследованиях было проведено сопоставление с экспериментальными данными в основном наземных характеристик. Последние определяются преимущественно свойствами подстилающей поверхности и, следовательно, точность расчета их в значительной мере зависит от точности задания параметра  $z_0$  и в меньшей степени — от точности задания параметров расчетной схемы. Если речь идет о расчете профиля ветра во всем пограничном слое, то в этом случае влияние последних может оказаться весьма существенным.

В связи с этим было проведено сравнение теоретического и действительного профилей ветра при нейтральной стратификации для различных  $z_0$ . Для этого использовались данные наблюдений на телевизионной башне в г. Новосибирске, приведенные в [21], данные наблюдений на метеорологической мачте в Обнинске, обобщенные в [27] (использовался профиль ветра за 13 час. в зимний период, когда распределение температуры было равновесным), и данные аэрологических наблюдений на ст. Воейково, обобщенные в работе [22]. Шероховатость подстилающей поверхности определялась по данным непосредственных наблюдений в нижнем 10—25 метровом слое. В качестве характеристики профиля ветра использовалось соотношение  $c_z/c_{10}$ , где  $c_{10}$  — скорость ветра на  $z=10$  м.

Для определения  $V_g$  данные, полученные в г. Новосибирске и Обнинске, экстраполировались до  $V_g$  на основе теоретических формул. Сопоставление рассчитанных и экспериментальных профилей ветра дается в табл. 2.

Таблица 2

Сопоставление рассчитанных значений  $c_2/c_{10}$  (верхняя строка) с наблюдаемыми (нижняя строка) для различных  $z_0$  при нейтральной стратификации

Исходные данные	z							
	20	50	100	150	180	200	300	500
Новосибирск								
$V_g = 30$ м/сек. . . . .	1,33	1,72	2,20	2,60	2,79	—	—	—
$z_0 = 1,0$ м . . . . .	1,28	1,73	2,11	2,47	2,69	—	—	—
Обнинск								
$V_g = 7$ м/сек. . . . .	1,09	1,23	1,41	1,52	1,57	1,62	1,67	—
$z_0 = 0,002$ м . . . . .	1,08	1,18	1,36	1,54	1,59	1,64	1,69	—
Ст. Воейково								
$V_g = 10$ м/сек. . . . .	1,09	1,31	1,58	1,78	1,84	1,88	1,94	1,96
$z_0 = 0,02$ м . . . . .	—	1,35	1,62	—	—	1,90	2,08	2,23

### 5. Заключение

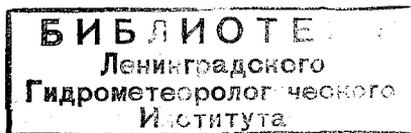
Анализ полученного решения и выполненные оценки показали, что рассмотренная схема может быть использована при решении ряда прикладных задач, а наличие программы на ЭВМ облегчает эту задачу.

Возможные приложения схемы кратко изложены в работе [30]. Наибольший практический интерес представляет расчет профиля сильного ветра по данным измерений в приземном слое, расчет ветра и касательного напряжения над водной поверхностью и расчет фрикционных вертикальных токов на верхней границе пограничного слоя. Эти вопросы рассматриваются в работах [2, 8, 13, 31]. Некоторые уточненные данные будут приведены дополнительно.

Авторы выражают свою признательность Б. Г. Вагнеру, составившему программу и выполнившему расчеты на ЭВМ.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С. Динамическая турбулентность в атмосфере Изв. АН СССР, сер. геогр. 4, геофиз. 14, № 3, 1950.
2. Лайхтман Д. Л. Постановка задачи о стационарном строении пограничного слоя атмосферы. Труды ГГО, вып. 94, 1960.
3. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеоиздат, Л., 1961.
4. Бобылева И. М., Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. Турбулентный режим в термически-стратифицированном планетарном пограничном слое атмосферы. В сб. «Атмосферная турбулентность и распространение радиоволн». «Наука», М., 1967.
5. Орленко Л. Р. О расчете составляющих баланса энергии турбулентности по экспериментальным данным. Труды ГГО, вып. 167, 1965.



234869

6. Лазарева Н. А., Орленко Л. Р. Анализ некоторых характеристик пограничного слоя по экспериментальным данным. Труды ГГО, вып. 205, 1967.
7. Лайхтман Д. Л. Закономерности физических процессов пограничного слоя атмосферы в Арктике. В сб. «Современные проблемы метеорологии приземного слоя воздуха». Гидрометеиздат, Л., 1958.
8. Цейтин Г. Х., Орленко Л. Р. Стационарное распределение ветра, температуры и турбулентного теплообмена в пограничном слое атмосферы при различных состояниях устойчивости. Труды ГГО, вып. 94, 1960.
9. Лайхтман Д. Л., Орленко Л. Р., Цейтин Г. Х. Методы оценки ветровых ресурсов по полю давления. В сб. «Методы разработки ветроэнергетического кадастра». Изд-во АН СССР, М., 1963.
10. Лайхтман Д. Л., Утина З. М. Влияние макрометеорологических условий на строение пограничного слоя в атмосфере. Труды ГГО, вып. 107, 1961.
11. Лайхтман Д. Л., Орленко Л. Р. Строение пограничного слоя атмосферы на разных широтах. Труды ГГО, вып. 150, 1964.
12. Ключникова Л. А., Лайхтман Д. Л., Цейтин Г. Х. К вопросу о расчете вертикального профиля ветра в пограничном слое атмосферы. Труды ГГО, вып. 167, 1965.
13. Бортковский Р. С., Орленко Л. Р., Цейтин Г. Х. К расчету ветра и касательного напряжения над водной поверхностью. Труды ГГО, вып. 187, 1966.
14. Ключникова Л. А., К вопросу о расчете коэффициента турбулентности в пограничном слое атмосферы. Труды ГГО, вып. 205, 1967.
15. Шехтер Ф. Н. Решение задачи о строении пограничного слоя атмосферы при учете радиационного теплообмена. Труды ГГО, вып. 167, 1965.
16. Утина З. М. О влиянии горизонтальной неоднородности температуры на строение пограничного слоя атмосферы. Труды ГГО, вып. 127, 1962.
17. Цейтин Г. Х. К вопросу о строении пограничного слоя атмосферы в нестационарных условиях. Труды ГГО, вып. 107, 1961.
18. Цейтин Г. Х. К вопросу о строении пограничного слоя атмосферы при нестационарных условиях (ч. II). Труды ГГО и УкрНИГМИ 144/40, 1963.
19. Цейтин Г. Х. О теоретическом профиле ветра при нестационарных условиях. Труды ГГО, вып. 187, 1966.
20. Ковалева Е. Д., Шехтер Ф. Н. Влияние стратификации атмосферы на радиационный приток тепла. Труды ГГО, вып. 187, 1966.
21. Ключникова Л. А., Честная И. И. Расчет профиля больших скоростей ветра в нижнем стометровом слое атмосферы по наземным данным. Труды ГГО, вып. 216, 1968.
22. Курпакова Т. А., Орленко Л. Р. О закономерностях в распределении температуры и ветра в пограничном слое. Труды ГГО, вып. 205, 1967.
23. Орленко Л. Р. О термическом равновесии в пограничном слое атмосферы. В сб. «Равновесный градиент температуры». Гидрометеиздат, Л., 1967.
24. Пристли С. Х. Б. Турбулентный перенос в приземном слое атмосферы. Гидрометеиздат, Л., 1964.
25. Машкова Г. Б. О профилях температуры воздуха и ветра в нижней части пограничного слоя атмосферы. В сб. «Пограничный слой атмосферы». Труды ИПГ, вып. 2, 1965.
26. Бызова Н. Л., Машкова Г. Б. Безразмерные характеристики профиля скорости ветра по измерениям в нижнем 300-метровом слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, т. 2, № 7, 1966.
27. Машкова Г. Б. Характеристики метеорологического режима нижнего 300-метрового слоя по двухлетним наблюдениям на высотной мачте. Труды ИПГ, вып. 10, 1967.
28. Blackadar A. K. The distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. J. Geophys. Res., vol. 67, No. 8, 1962.
29. Леттау X. Профиль ветра, напряжение трения и геострофический коэффициент трения в приземном слое атмосферы. В сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха». Изд-во иностр. лит., М., 1962.
30. Орленко Л. Р. Распределение метеорологических элементов в пограничном слое атмосферы. Труды ГГО, вып. 218, 1967.
31. Орленко Л. Р., Утина З. М. Об определении вертикальных токов на верхней границе пограничного слоя. Труды ГГО, вып. 205, 1967.

Ф. Н. ШЕХТЕР, Г. Х. ЦЕЙТИН

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СХЕМА СТРОЕНИЯ СТАЦИОНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ С УЧЕТОМ ЛУЧИСТОГО ТЕПЛООБМЕНА

Развиваемые в последние годы так называемые дифференциальные схемы строения пограничного слоя атмосферы по заданным внешним параметрам [1—6], наряду с другими упрощениями, не учитывают наличия лучистого теплообмена в атмосфере. Например, наиболее полная из таких схем [4], имеющаяся в настоящее время, получена в предположении, что турбулентный поток тепла считается заданным внешним параметром.

В настоящей работе приводятся постановка и схема решения замкнутой стационарной задачи для термически стратифицированного, горизонтально однородного пограничного слоя атмосферы с учетом лучистого теплообмена. Вертикальный профиль турбулентного потока тепла определяется так же, как и профили некоторых других метеозлементов, в результате решения системы уравнений термогидродинамики пограничного слоя атмосферы, включая уравнения переноса лучистой энергии.

В рамках так называемой «интегральной» схемы подобная задача уже решалась [7]. Однако принятое там и в аналогичных работах граничное условие — температура на верхней границе пограничного слоя считается заданной — не дает возможности решить вопрос о роли лучистого теплообмена в строении пограничного слоя. Мы можем получить ответ лишь на частный вопрос: какова будет ошибка из-за неучета лучистого теплообмена при заданной постановке задачи. Дело в том, что температура воздуха на верхней границе пограничного слоя формируется не только в результате процессов, происходящих в свободной атмосфере, но в значительной степени под влиянием процессов теплообмена внутри пограничного слоя. Более правильным является задание какого-либо энергетического соотношения, например, теплового баланса на верхней границе пограничного слоя или притока тепла в слой за счет лучистой энергии.

Решение поставленной задачи удобно разбить на две части, в первой из которых на основе уравнений движения, уравнения баланса энергии турбулентности и некоторых других соотношений определяется вертикальный профиль коэффициента турбулентной диффузии как функция внешних параметров и турбулентного потока тепла, считающегося временно заданным. Во второй части, используя найденный профиль коэффициента турбулентности, решается система уравнений, описывающих распространение тепла, влаги, лучистой энергии, и определяется профиль турбулентного потока тепла в пограничном слое атмосферы.

Полное решение поставленной задачи достигается объединением этих двух решений с помощью метода последовательных приближений.

Постановка первой части задачи почти ничем не отличается от приведенной в [8]. Постановка и решение аналогичных задач связаны с работами А. С. Мюнина [10], Д. Л. Лайхтмана и С. С. Зилигинкевича [1, 3, 4], М. И. Рузина [5] и других [2, 6]. Подробно все затронутые здесь вопросы рассматриваются в статьях [8, 9].

Предлагаемый метод решения первой части задачи значительно отличается от применявшихся до сих пор в [2—4] и преследует цель по возможности упростить и ускорить получение результатов. Он не содержит численных решений дифференциальных уравнений движения и нелинейного уравнения энергии турбулентной диффузии. Решение построено с таким расчетом, чтобы основные результаты содержались, по возможности, в первом приближении.

### § 1. Постановка задачи

Сформулированная выше задача сводится к совместному решению системы дифференциальных уравнений и соотношений.

а) Уравнения движения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} k(z) \frac{du}{dz} + 2\omega_z v(z) &= 0, \\ \frac{d}{dz} k(z) \frac{dv}{dz} - 2\omega_z [u(z) - V_g] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Граничные условия:

$$u(z) = v(z) = 0 \quad \text{при } z = z_0; \quad (2)$$

$$u(z) \rightarrow V_g, \quad v(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (3)$$

Здесь  $u(z)$  и  $v(z)$  — составляющие скорости ветра (ось  $x$  — направлена по изобаре);  $k(z)$  — коэффициент турбулентности для количества движения;  $V_g$  — скорость геострофического ветра;  $\omega_z$  — вертикальная составляющая вектора вращения Земли;  $z_0$  — уровень шероховатости.

б) Уравнение притока тепла.

$$\frac{d}{dz} [P(z) + F(z)] = 0. \quad (4)$$

Здесь:

$$P(z) = -c_p \rho n_2 k(z) \left[ \frac{dT}{dz} + \beta \right] \quad (\text{турбулентный поток тепла}); \quad (5)$$

$$F(z) = B(z) - A(z) - S(z) \quad (\text{радиационный поток тепла}); \quad (6)$$

где  $c_p \rho$  — объемная теплоемкость воздуха;  $n_2 k(z)$  — коэффициент турбулентности для тепла;  $T(z)$  — температура воздуха,  $\beta$  — равновесный градиент;  $B(z)$  и  $A(z)$  — потоки длинноволновой радиации, распространяющиеся вверх и вниз соответственно;  $S(z)$  — солнечная радиация.

В качестве граничного условия на подстилающей поверхности используем уравнение теплового баланса

$$P(z) + F(z) + И(z) + П(z) = 0 \quad \text{при } z = 0, \quad (7)$$

где  $И$  — турбулентный поток тепла за счет испарения;  $П$  — поток тепла из почвы.

На верхней границе пограничного слоя ( $H$ ) можно или задать температуру, т. е.

$$T(z) = T(H) \quad \text{при } z = H, \quad (8)$$

или считать известным приток лучистого тепла в пограничный слой:

$$F(z) - F(0) = \Delta F(H) \quad \text{при } z = H. \quad (9)$$

В дальнейшем будут рассмотрены оба эти условия.

в) Уравнение переноса тепла в почве. На его решении мы в настоящей работе останавливаться не будем, так как этот вопрос достаточно подробно исследован в [15].

г) Уравнения переноса радиации с соответствующими граничными условиями или формулы для расчета радиационных потоков.

д) Уравнение переноса влаги.

$$\frac{d}{dz} k(z) \frac{dq(z)}{dz} = 0. \quad (10)$$

Граничные условия:

$$q(z) = r q_{\max}(T_{\text{зн}}) \quad \text{при } z = 0; \quad (11)$$

$$q(z) = q(H) \quad \text{при } z = H, \quad (12)$$

где  $q(z)$  — удельная влажность,  $T_{\text{зн}}$  и  $r$  — соответственно, температура подстилающей поверхности и относительная влажность вблизи нее.

е) Уравнение баланса энергии турбулентности

$$k(z) \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right] + \frac{g}{c_p \rho \bar{T}} P(z) + n_1 \frac{d}{dz} k(z) \frac{db(z)}{dz} = c_0 \frac{b^2(z)}{k(z)}. \quad (13)$$

и соотношение, связывающее  $b(z)$ ,  $k(z)$  и  $l(z)$ ,

$$k(z) = c_0^{\frac{1}{4}} l(z) \sqrt{b(z)}, \quad (14)$$

где  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\bar{T}$  — средняя температура пограничного слоя;  $b(z)$  и  $n_1 k(z)$  — соответственно энергия турбулентности и коэффициент турбулентного обмена для этого вида субстанции;  $l(z)$  — масштаб турбулентных вихрей (путь смешения);  $c_0$  — параметр диссипации.

Согласно [8],  $n_1 \approx 0,73$ ;  $c_0 \approx 0,046$ .

ж) Гипотеза для пути смешения Д. Л. Лайхтмана и С. С. Зилитинкевича [1, 8], обобщающая известную формулу Кармана на случай неравновесной температурной стратификации

$$l(z) = -z \frac{F_1(z)}{dF_1(z)/dz}, \quad (15)$$

где

$$F_1(z) = \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 + \frac{g}{c_p \rho \bar{T} k(z)} P(z) + \frac{n_1}{k(z)} \frac{d}{dz} k(z) \frac{db}{dz} \right]^{\frac{1}{2}} = c_0^{\frac{1}{2}} \frac{b(z)}{k(z)}. \quad (16)$$

Здесь  $\kappa = 0,38$  — постоянная Кармана.

Близкая к (15) гипотеза для пути смещения была предложена М. И. Рузиным [5].

В качестве граничных условий для  $k(z)$  и  $l(z)$  вблизи подстилающей поверхности могут служить хорошо оправдывающиеся соотношения:

$$k(z) = \kappa v_* z; \quad (17)$$

$$l(z) = \kappa z, \quad (18)$$

выражающие известный факт слабого влияния термической стратификации вблизи подстилающей поверхности.

Здесь

$$v_*^2 = \left[ k(z) \sqrt{\left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2} \right]_{z_0} \quad (\text{квадрат динамической скорости}). \quad (19)$$

Подставляя (17) и (18) в (14), получим граничное условие у подстилающей поверхности для  $b(z)$

$$b(z) = c_0^{-\frac{1}{2}} v_*^2. \quad (20)$$

Из физических соображений должно выполняться условие

$$b(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (21)$$

## § 2. Определение профиля коэффициента турбулентного обмена

Прежде чем перейти к получению алгоритма решения, выведем некоторые важные для дальнейшего соотношения. Исходя из (14)–(16) можно получить

$$\frac{dk(z)}{dz} = \frac{k(z)}{b(z)} \frac{db(z)}{dz} + c_0^{\frac{1}{4}} \kappa \sqrt{b(z)}. \quad (22)$$

Привлекая далее условия (17), (18) и (20), получим на основе (22):

$$b(z) = \frac{4}{\kappa^2 c_0^{\frac{1}{2}}} \frac{k(z)}{\left[ \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{k(\zeta)}} \right]^2}; \quad (23)$$

$$k(z) = c_0^{\frac{1}{4}} \kappa b(z) \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{b(\zeta)}}. \quad (24)$$

Так как по (21) на больших высотах  $\frac{db}{dz} < 0$ , а второе слагаемое правой части (22) всегда положительное, то  $k(z)$  достигает максимума в своем росте на некоторой большой высоте, а затем непрерывно убывает. Учитывая это, а также (24), по которому всегда  $k(z) > 0$ , получим граничное условие для  $k(z)$  на больших высотах в виде

$$k(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Введем теперь безразмерные высоту  $\eta$  и искомые функции:

$$\eta = \frac{\kappa \omega_z}{2} \left[ \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{k(\zeta)}} \right]^2; \quad (26)$$

$$\Psi(\eta) = \frac{2 \omega_z}{v_*^2} k(z); \quad (27)$$

$$E(\eta) = \frac{1}{c_0^2} \frac{b(z)}{v_*^2}; \quad (28)$$

$$\tilde{u}(\eta) = \frac{u(z)}{v_*}; \quad \tilde{v}(\eta) = \frac{v(z)}{v_*}; \quad (29)$$

$$\tilde{P}(\eta) = \frac{P(z)}{P_0}; \quad (30)$$

где  $P_0$  — турбулентный поток тепла у поверхности.

Из (26) следует, что  $\frac{d\sqrt{\eta}}{dz} = \sqrt{\frac{\chi z}{2k(z)}} > 0$ , а из (25)  $-\frac{d\sqrt{\eta}}{dz} \rightarrow \infty$  при  $z \rightarrow \infty$ . Из этого вытекает, что безразмерная высота  $\eta$  монотонно увеличивается с ростом  $z$ , а при  $z \rightarrow \infty$  и  $\eta \rightarrow \infty$ .

Вблизи подстилающей поверхности, согласно (17) и (26),  $\eta$  пропорционально  $z$

$$\eta \approx \frac{2\omega_z}{v_*} z. \quad (31)$$

Соотношения (13), (23), (17), (19) и (25) примут вид:

$$\begin{aligned} & \kappa \eta \Psi(\eta) \left[ \left( \frac{d\tilde{u}}{d\eta} \right)^2 + \left( \frac{d\tilde{v}}{d\eta} \right)^2 \right] + \frac{s_1}{f^2} \Psi(\eta) \tilde{P}(\eta) + \\ & + \frac{s_0}{z} \sqrt{\eta} \Psi(\eta) \frac{d}{d\eta} \left[ \sqrt{\eta} \Psi(\eta) \frac{dE(\eta)}{d\eta} \right] = E^2(\eta); \end{aligned} \quad (32)$$

$$\kappa \eta \Psi(\eta) \left[ \left( \frac{d\tilde{u}}{d\eta} \right)^2 + \left( \frac{d\tilde{v}}{d\eta} \right)^2 \right] \rightarrow 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \eta_0; \quad (33)$$

$$E(\eta) = \frac{\Psi(\eta)}{\kappa \eta}; \quad (34)$$

$$\Psi(\eta) = \kappa \eta; \quad (35)$$

$$\Psi(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty, \quad (36)$$

причем условие (35) имеет место вблизи подстилающей поверхности.

Здесь  $\eta_0 = \eta|_{z_0}$  и согласно (31)

$$\eta_0 = \frac{2\omega_z z_0}{v_*} = \frac{1}{f \text{Ro}}; \quad (37)$$

$$f = \frac{v_*}{V_g}; \quad (38)$$

$$\text{Ro} = \frac{V_g}{2\omega_z z_0}; \quad (39)$$

$$s_1 = \frac{gP_0}{2c_p \rho T \omega_z V_g^2}; \quad (40)$$

$$s_0 = n_1 c_0^{-1/2} \kappa^2; \quad (41)$$

$f$  — наземное значение геострофического коэффициента трения;  $\text{Ro}$  — число Россби.

Уравнение баланса энергии турбулентности (32) есть нелинейное дифференциальное уравнение относительно  $E(\eta)$ . Однако с помощью (34) оно может быть приведено к виду:

$$\frac{d^2}{d\eta^2} \left[ \Psi^{\frac{3}{2}}(\eta) \right] - \frac{2}{\eta} \frac{d}{d\eta} \left[ \Psi^{\frac{3}{2}}(\eta) \right] + \left( \frac{9}{4} - \frac{3}{2s_0} \right) \frac{1}{\eta^2} \left[ \Psi^{\frac{3}{2}}(\eta) \right] = - \frac{3z^2}{2s_0} \frac{\tilde{A}(\eta)}{\sqrt{\Psi(\eta)}}, \quad (42)$$

где

$$\tilde{A}(\eta) = z\eta \Psi(\eta) \left[ \left( \frac{d\tilde{u}}{d\eta} \right)^2 + \left( \frac{d\tilde{v}}{d\eta} \right)^2 \right] + \frac{s_1}{f^2} \Psi(\eta) \tilde{P}(\eta). \quad (43)$$

Для удобства дальнейшего анализа придадим уравнению (42) другую форму. С этой целью будем формально рассматривать правую часть (42) не зависящей от  $\Psi(\eta)$ . Тогда решение линейного неоднородного уравнения (42) относительно  $\Psi^{\frac{3}{2}}(\eta)$ , удовлетворяющее условиям (35) и (36), может быть найдено известными методами, оно имеет вид

$$\Psi^{\frac{3}{2}}(\eta) = \frac{z^2 r_0}{2} \int_0^\infty \tilde{A}(\sigma) \tilde{L}\left(\frac{\sigma}{\eta}\right) \frac{\sigma d\sigma}{\sqrt{\Psi(\sigma)}}, \quad (44)$$

где

$$\tilde{L}\left(\frac{\sigma}{\eta}\right) = \begin{cases} \left(\frac{\sigma}{\eta}\right)^{r_0 - \frac{3}{2}} & \text{при } 0 \leq \sigma \leq \eta, \\ \left(\frac{\sigma}{\eta}\right)^{-r_0 - \frac{3}{2}} & \text{при } \eta \leq \sigma < \infty; \end{cases} \quad (45)$$

$$r_0 = \sqrt{\frac{3}{2s_0}}. \quad (46)$$

В целях удобства расчета и для более наглядного выявления роли диффузии энергии турбулентности преобразуем (44) путем введения новой переменной интегрирования

$$v = \frac{\int_0^\sigma \tilde{L}\left(\frac{\sigma}{\eta}\right) d\sigma}{\int_0^\infty \tilde{L}\left(\frac{\sigma}{\eta}\right) d\sigma}. \quad (47)$$

Из (47) и (45) можно заключить, что  $v$  меняется монотонно в интервале (0,1) при изменении  $\sigma$  от  $\sigma=0$  до  $\sigma=\infty$ . Вместо (44) тогда получим

$$\Psi^{\frac{3}{2}}(\eta) = z^2 \eta^2 \tilde{M}(\eta) \frac{\tilde{A}(\eta)}{\sqrt{\Psi(\eta)}}, \quad (48)$$

где

$$\tilde{M}(\eta) = \frac{1}{\left(1 - \frac{s_0}{6}\right)} \int_{v=0}^{v=1} \frac{\sigma}{\eta} \left[ \frac{\tilde{A}(\sigma)}{\tilde{A}(\eta)} \sqrt{\frac{\Psi(\eta)}{\Psi(\sigma)}} \right] d\sigma, \quad (49)$$

а переменные  $\nu$  и  $\sigma$  связаны соотношениями, вытекающими из (47):

$$\sigma = \begin{cases} \eta \left[ \frac{2\nu}{\left(1 + \frac{1}{2r_0}\right)} \right]^{\frac{1}{\left(r_0 - \frac{1}{2}\right)}} & \text{при } 0 \leq \nu \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2r_0}\right); \\ \eta \left[ \frac{\left(1 - \frac{1}{2r_0}\right)}{2(1-\nu)} \right]^{\frac{1}{\left(r_0 + \frac{1}{2}\right)}} & \text{при } \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2r_0}\right) \leq \nu \leq 1. \end{cases} \quad (50)$$

При пренебрежении диффузией энергии турбулентности ( $s_0 \rightarrow 0$  или  $r_0 \rightarrow \infty$ ) из (50) следует, что  $\sigma \rightarrow \eta$ , а из (49) тогда вытекает, что  $\tilde{M}(\eta) \rightarrow 1$ . Следовательно, чем больше отличие величины  $\tilde{M}(\eta)$  от единицы, тем сильнее влияние диффузии.

Остановимся на способе определения первого слагаемого из (43). Следуя [1, 10], введем в рассмотрение составляющие касательного напряжения, обозначив

$$\left. \begin{aligned} k(z) \frac{du(z)}{dz} &= \nu_*^2 G_1(\eta), \\ k(z) \frac{dv(z)}{dz} &= \nu_*^2 G_2(\eta). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Обозначим далее

$$G(\eta) = e^{-i\varphi} [G_1(\eta) + iG_2(\eta)], \quad (52)$$

где  $i$  — мнимая единица,  $\varphi$  — призмный угол трения.

$$\varphi = \arctg \frac{k \frac{dv}{dz} \Big|_{z_0}}{k \frac{du}{dz} \Big|_{z_0}}. \quad (53)$$

Опираясь на (1) и используя (26), (27), (29), получим для функции  $G(\eta)$  дифференциальное уравнение

$$\eta \frac{d^2 G(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\eta}{\Psi(\eta)} \frac{d\Psi(\eta)}{d\eta} \right] \frac{dG(\eta)}{d\eta} - \frac{i}{z} G(\eta) = 0. \quad (54)$$

Так как

$$\left. \begin{aligned} k(z) \frac{du}{dz} \Big|_{z_0} &= \nu_*^2 \cos \varphi, \\ k(z) \frac{dv}{dz} \Big|_{z_0} &= \nu_*^2 \sin \varphi, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

а из физических соображений следует, что

$$k(z) \frac{du}{dz} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad k(z) \frac{dv}{dz} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow \infty, \quad (56)$$

то граничными условиями для  $G(\eta)$  (с учетом (51) и (52)) будут

$$G(\eta) \Big|_{\eta_0} = 1; \quad (57)$$

$$G(\eta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty. \quad (58)$$

Вводя функцию  $\bar{G}(\eta)$ , сопряженную с  $G(\eta)$ ,

$$\bar{G}(\eta) = e^{i\varphi} [G_1(\eta) - iG_2(\eta)], \quad (59)$$

можно написать формулу для  $\tilde{A}(\eta)$  в виде

$$\tilde{A}(\eta) = G(\eta)\bar{G}(\eta) + \frac{s_1}{f^2} \Psi(\eta) \tilde{P}(\eta). \quad (60)$$

Вблизи подстилающей поверхности, где слабо сказывается стратификация, получим, учитывая (33),

$$\tilde{A}(\eta) \approx G(\eta)\bar{G}(\eta) \approx 1. \quad (61)$$

Так как там же слабо сказывается и диффузия [13], т. е.  $\tilde{M}(\eta) \approx 1$  (см. выше), то из (48) и (61) получим  $\Psi(\eta) \approx \kappa\eta$ , т. е. результат (35). Значение производной  $\left. \frac{dG}{d\eta} \right|_{\eta_0}$  может быть найдено, основываясь на (1), (2), (26), (29), (35), (37), (38), (51), (52) и (55), в виде

$$\left. \frac{dG(\eta)}{d\eta} \right|_{\eta_0} = -\frac{ie^{-i\varphi}}{f}, \quad (62)$$

где  $G(\eta)$  есть решение (54), удовлетворяющее граничным условиям (57) и (58). Соотношение (62) служит основой для определения геострофического коэффициента  $f$  и угла трения  $\varphi$ .

Чтобы избежать численного интегрирования дифференциального уравнения (54) и с целью лучшего выбора начального приближения для всей задачи в целом, несколько преобразуем соотношение (54). Следуя работе [11], сделаем в (54) подстановку

$$G(\eta) = z^{-\frac{1}{4}} \eta^{-\frac{1}{4}} [\Psi(\eta)]^{\frac{1}{4}} \omega(\eta). \quad (63)$$

Тогда, учитывая (57) и (58), получим для  $\omega(\eta)$  уравнение

$$\eta \frac{d^2\omega(\eta)}{d\eta^2} - \frac{i}{z} [i - \tilde{p}(\eta)] \omega(\eta) = 0 \quad (64)$$

при граничных условиях:

$$\omega(\eta)|_{\eta_0} = 1; \quad (65)$$

$$\omega(\eta) \neq \infty \quad \text{при} \quad \eta \rightarrow \infty, \quad (66)$$

где

$$\tilde{p}(\eta) = \frac{3z}{16\eta} - z\eta^{\frac{1}{2}} [\Psi(\eta)]^{\frac{1}{4}} \frac{d}{d\eta} \left\{ \eta^{\frac{1}{2}} \frac{d}{d\eta} [\Psi^{-\frac{1}{4}}(\eta)] \right\}. \quad (67)$$

Исследуем функцию  $\tilde{p}(\eta)$ . Вблизи подстилающей поверхности, где  $\Psi(\eta) = \kappa\eta$ ,  $\tilde{p}(\eta) = 0$ . На более высоких уровнях, где еще слабо сказывается сила Кориолиса, но нельзя пренебречь стратификацией,  $\Psi(\eta)$  может быть представлено в виде

$$\Psi(\eta) = z\eta(1 + \beta_1\eta + \text{члены высшего порядка}), \quad (68)$$

где  $\beta_1$  — параметр, зависящий в основном от стратификации. Это следует из качественного анализа задачи, а также из [12] и других работ. Подставляя (68) в (67) и сохраняя члены не выше порядка  $\eta^2$ , получим  $\tilde{p}(\eta) = 0$ . Следовательно, в пределах определенной толщины стратифицированного приземного слоя будет выполняться условие:

$$|\tilde{p}(\eta)| \ll |i| = 1. \quad (69)$$

Лишь на уровнях, достаточно удаленных от подстилающей поверхности (выше приземного подслоя), где влияние как силы Кориолиса, так и стратификации велико и где влияют отброшенные в (68) члены порядка  $\eta^2$  и выше, условие (69) может нарушаться.

Рассмотрим теперь поведение  $\tilde{p}(\eta)$  на достаточно больших уровнях порядка высоты пограничного слоя и выше. Покажем, что условие (69) выполняется с достаточной точностью и в этой области. Предположим, что это так. Тогда в указанных областях дифференциальное уравнение (64) может быть заменено уравнением типа Бесселя

$$\eta \frac{d^2 w(\eta)}{d\eta^2} - \frac{i}{z} w(\eta) = 0, \quad (70)$$

решение которого при условиях (65) и (66) есть

$$w(\eta) = \sqrt{\frac{\eta}{\eta_0}} \frac{K_1\left(2\sqrt{\frac{i\eta}{z}}\right)}{K_1\left(2\sqrt{\frac{i\eta_0}{z}}\right)}, \quad (71)$$

или учитывая малость  $\eta_0 = \frac{1}{fR_0}$  — ( $R_0 \sim 10^4 - 10^{10}$ ;  $f \sim 0,01 - 0,1$ ) и воспользовавшись выражением функции Бесселя  $K_1$  при малых аргументах, получим с весьма большой точностью:

$$w(\eta) = 2\sqrt{\frac{i\eta}{z}} K_1\left(2\sqrt{\frac{i\eta}{z}}\right). \quad (72)$$

Следовательно, по (63)

$$G(\eta) \approx 2z^{-\frac{3}{4}} \eta^{\frac{1}{4}} [\Psi(\eta)]^{\frac{1}{4}} \sqrt{i} K_1\left(2\sqrt{\frac{i\eta}{z}}\right). \quad (73)$$

Из способа получения решения (73) вытекает, что заметные отклонения его от точного, даваемого уравнением (64) при условиях (57) и (58), возможны в средних уровнях пограничного слоя. Учитывая однако непрерывность изменения с высотой силы турбулентного трения, характеризуемой  $G(\eta)$ , а также фиксированность последней на границах  $\eta = \eta_0$  и  $\eta = \infty$ , следует считать эти отклонения маловероятными.

Вернемся теперь к рассмотрению поведения  $\tilde{p}(\eta)$ . Воспользовавшись выражением функции  $K_1(\eta)$  для больших значений аргумента, можно на основании (60) и (73) получить применительно к высоким уровням пограничного слоя

$$\frac{\tilde{A}(\eta)}{\sqrt{\Psi(\eta)}} \approx \frac{\pi}{z} e^{-2\sqrt{\frac{2\eta}{z}}} + \frac{s_1}{f^2} \sqrt{\Psi(\eta)} \tilde{P}(\eta). \quad (74)$$

При любом изменении турбулентного потока  $\tilde{P}(\eta)$  на этих уровнях могут быть лишь следующие возможности:

а)  $\tilde{P}(\eta)$  меняется таким образом, что, начиная с некоторой большой высоты, второе слагаемое (74) одного порядка или сколь угодно меньше первого и тогда

$$\frac{\tilde{A}(\eta)}{\sqrt{\Psi(\eta)}} \sim e^{-2\sqrt{\frac{2\eta}{z}}}, \quad (75)$$

б) первое слагаемое сколь угодно меньше второго и тогда

$$\frac{\tilde{A}(\eta)}{\sqrt{\Psi(\eta)}} \sim \eta^{t_1} e^{-t_2 \eta^{\frac{1}{2}} - t_0}, \quad (76)$$

в случае когда слагаемые формулы (74) меняются не монотонно, или

$$\frac{\tilde{A}(\eta)}{\sqrt{\Psi(\eta)}} \sim \eta^{-t_3}, \quad (77)$$

когда изменяются монотонно. В (76) и (77)  $t_1, t_2, t_3$  — любые вещественные числа, а  $0 < t_0 < \frac{1}{2}$ .

Обратимся теперь к уравнению баланса энергии турбулентности в форме (42), из которого можно определить характер поведения функции  $\Psi(\eta)$  соответственно для случаев (75) — (77) в следующих видах:

$$\Psi(\eta) \sim \eta^{t_4} e^{-\frac{4}{3} \sqrt{\frac{2\eta}{\kappa}}}; \quad (78)$$

$$\Psi(\eta) \sim \eta^{t_5} e^{-\frac{2}{3} t_2 \eta^{\frac{1}{2}} - t_0}, \quad (79)$$

$$\Psi(\eta) \sim \eta^{-t_6}, \quad (80)$$

где  $t_4, t_5$  и  $t_6$  — некоторые числа, величины которых, как будет видно ниже, несущественны для наших оценок. Подставляя (78) — (80) в (67) и учитывая лишь главные члены, получим соответственно:

$$|\tilde{p}(\eta)| \rightarrow \frac{1}{18} \ll 1 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty; \quad (81)$$

$$|\tilde{p}(\eta)| \rightarrow \frac{\kappa t_2^2 \left(\frac{1}{2} - t_0\right)^2}{36 \eta^{2t_0}} \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty; \quad (82)$$

$$|\tilde{p}(\eta)| \rightarrow \frac{t_6}{16} (t_6 - 2) \frac{1}{\eta} \rightarrow 0 \quad \text{при } \eta \rightarrow \infty, \quad (83)$$

из чего следует, что условие (69) действительно выполняется на больших высотах (при больших значениях  $\eta$ ). Таким образом, формула (73) для  $G(\eta)$  с достаточной точностью представляет решение (64) при условиях (57), (58), и мы его выбираем в качестве первого основного приближения  $G^1(\eta)$ . Уточнение этого решения, например для средних высот  $\eta$  в пограничном слое, может быть проведено последовательными приближениями, основываясь на (63) — (66) и (72), (73).

Перейдем теперь к изложению способа получения искомого профиля  $\Psi(\eta)$ . Наиболее удобен метод последовательных приближений. За исходное нулевое приближение целесообразно взять  $\Psi(\eta)$ , получающееся в случае отсутствия диффузии при равновесной стратификации во всем пограничном слое ( $\tilde{P}(\eta) = 0, s_1 = 0$ ). Исходя из (48), (60), (63) и учитывая, что по (49)  $\tilde{M}(\eta) = 1$ , получим

$$\Psi^{(0)}(\eta) \approx 2^{\frac{4}{3}} \kappa^{\frac{1}{3}} \eta^{\frac{5}{3}} \left[ K_1 \left( 2 \sqrt{\frac{i\eta}{\kappa}} \right) K_1 \left( 2 \sqrt{-\frac{i\eta}{\kappa}} \right) \right]^{\frac{2}{3}}. \quad (84)$$

Профиль  $\Psi^{(0)}\eta$  не является точным, ибо получен на основе приближенного решения (73) дифференциального уравнения (64). На рис. 1 приведено сравнение этого профиля с точным решением  $\Psi(\eta)$ , полученным при аналогичных условиях в атмосфере в [3]. Как видно, оба решения практически совпадают до уровня  $\eta \approx 1$ . Выше этого уровня расхождения, по-видимому, связаны с не совсем точным выполнением условия (69), имеющего здесь форму (81), при котором получено решение уравнения (64).

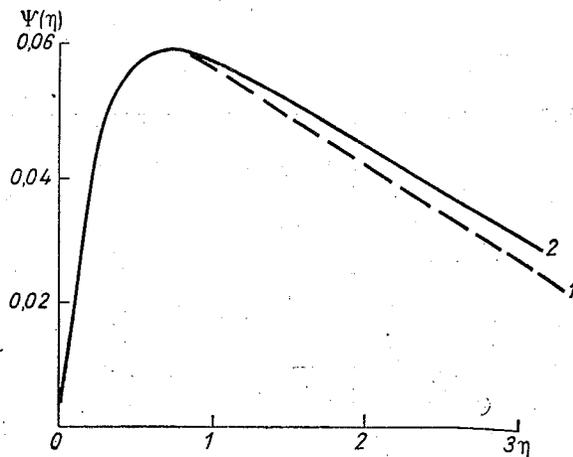


Рис. 1. Сравнение приближенного профиля коэффициента турбулентности с точным (нейтральная стратификация при отсутствии диффузии).  
1)  $\Psi^{(0)}(\eta)$  — приближенный профиль, рассчитанный по формуле (84); 2)  $\Psi(\eta)$  — точный, полученный в работе [3].

Используя (73) перепишем (60) в виде

$$\frac{\bar{A}(\eta)}{\sqrt{\Psi(\eta)}} = 4z^{-\frac{3}{2}}\eta^{\frac{1}{2}}K_1\left(2\sqrt{\frac{i\eta}{z}}\right)K_1\left(2\sqrt{-\frac{i\eta}{z}}\right)\tilde{R}(\eta) + \frac{s_1}{f^2}\sqrt{\Psi(\eta)}\tilde{P}(\eta), \quad (85)$$

где

$$\tilde{R}(\eta) = \frac{G(\eta)\bar{G}(\eta)}{G^{(1)}(\eta)\bar{G}^{(1)}(\eta)}, \quad (86)$$

причем  $\tilde{R}(\eta)$  близко к единице, что следует из указанного определения  $G^{(1)}(\eta)$ .

Обозначим

$$\tilde{Z} = \sqrt{\Psi(\eta)}, \quad (87)$$

тогда, на основании (48) и (85), величина  $\tilde{Z}$ , т. е. профиль  $\Psi(\eta)$ , может быть определена из решения кубического уравнения

$$\tilde{Z}^3 + 3\tilde{N}(\eta)\tilde{Z} + 2\tilde{Q}(\eta) = 0, \quad (88)$$

$$\tilde{N}(\eta) = -\frac{s_1}{3f^2} x^2 \eta^2 \tilde{M}(\eta) \tilde{P}(\eta); \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\eta) &= -2x^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{5}{2}} K_1\left(2\sqrt{\frac{i\eta}{z}}\right) K_1\left(2\sqrt{-\frac{i\eta}{z}}\right) \tilde{R}(\eta) \tilde{M}(\eta) = \\ &= -2x^{\frac{1}{2}} \eta^{\frac{5}{2}} \left\{ \left[ \ker' \left( 2\sqrt{\frac{\eta}{z}} \right) \right]^2 + \left[ \ker' \left( 2\sqrt{-\frac{\eta}{z}} \right) \right]^2 \right\} \tilde{R}(\eta) \tilde{M}(\eta). \end{aligned} \quad (90)$$

Здесь  $\ker' x + i \ker' = \sqrt{-i} K_1(x\sqrt{i})$  — производные функций Томсона  $\ker x$  и  $\ker i x$ .

Коэффициенты  $\tilde{N}(\eta)$  и  $\tilde{Q}(\eta)$  зависят от искомого профиля  $\Psi(\eta)$  главным образом через множитель  $\tilde{M}(\eta)$ , учитывающий диффузию. Однако ввиду недостаточности сильного, вообще говоря, влияния последней [8, 13] есть основание считать указанную зависимость не очень существенной. Это позволяет использовать для вычисления коэффициентов  $\tilde{N}$  и  $\tilde{Q}$  по (89), (90) приближенный начальный профиль  $\Psi(\eta)$ , например (84) или даже (35).

Из изложенного следует, что безразмерный профиль коэффициента турбулентности  $\Psi(\eta)$  при неравновесной стратификации будет определяться заданным безразмерным турбулентным потоком тепла  $\tilde{P}(\eta)$  и параметром  $\frac{s_1}{f^2}$  (см. (85) и (89)). Величина  $s_1$  есть комбинация внешних параметров и  $P_0$ ; коэффициент  $f$  есть функция числа Россби  $Ro$  и параметра термической устойчивости  $s_1$  или аналогичных ему параметров [4, 5, 14]. Для определения  $f$  можно использовать соотношение (62) или график из [4]. Таблица для определения  $f$  в зависимости от  $Ro$  и параметра стратификации имеется также в [14].

Остановимся вкратце на схеме последовательных приближений для определения профиля  $\Psi(\eta)$ : а) задаем начальный профиль  $\Psi^{(0)}(\eta)$ , например, по (84) и, полагая  $\tilde{R}(\eta) = 1$ , вычисляем по (85) профиль функции  $\frac{\tilde{A}(\eta)}{\sqrt{\Psi(\eta)}}$ ; б) вычисляем по (49)  $\tilde{M}(\eta)$ , а затем по (89), (90) — коэффициенты  $\tilde{N}(\eta)$  и  $\tilde{Q}(\eta)$ ; в) по (88) и (87) находим новый профиль  $\Psi^{(1)}(\eta)$  (первое приближение). Из сказанного выше вытекает, что дальнейшие приближения могут, вообще говоря, внести лишь небольшие поправки к первому  $\Psi^{(1)}(\eta)$ . Второе и следующие приближения можно проводить так: по профилю  $\Psi^{(1)}(\eta)$  уточняем параметр  $f$  и по (67) определяем  $\tilde{p}(\eta)$ . С использованием этой величины уточняем  $G(\eta)$ , а затем и  $\tilde{R}(\eta)$  по формуле (86). В остальном расчеты проводятся так же, как и в первом приближении.

Переход к размерным функциям  $k(z)$ ,  $b(z)$ ,  $l(z)$ ,  $P(z)$  может быть проведен по (27), (28), (14), (30). Переход от безразмерной высоты  $\eta$  к обычной высоте  $z$  может быть осуществлен по формуле

$$\frac{z}{z_0} = 1 + \frac{1}{\eta_0} \int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{\frac{\Psi(\sigma)}{z\sigma}} d\sigma, \quad (91)$$

которая получается из (26), (27), (37) — (39).

Вычисление составляющих скорости ветра  $\tilde{u}(\eta)$  и  $\tilde{v}(\eta)$  проводится по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{u}(\eta) &= \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{G_1(\sigma) d\sigma}{\sqrt{z\sigma\Psi(\sigma)}}, \\ \tilde{v}(\eta) &= \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{G_2(\sigma) d\sigma}{\sqrt{z\sigma\Psi(\sigma)}}. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Они получаются на основе (51), (52), (26), (27). Размерные составляющие  $u(z)$  и  $v(z)$  определяются исходя из (29) и (91).

### § 3. Определение профилей температуры и турбулентного потока тепла

Прежде всего остановимся на получении формул для потоков длинноволновой радиации. Будем рассматривать атмосферу со сплошной облачностью, расположенной над верхней границей пограничного слоя.

Облако стилизуется в виде «серого» тела, излучающая способность которого  $\epsilon_0$ , альbedo для радиации, дошедшей от земли, —  $\alpha_0$ , для атмосферной радиации —  $\alpha_0'$ .

Подстилающая поверхность также считается «серым» телом, излучающая способность которого  $\epsilon$ , альbedo для радиации, дошедшей от облака, —  $\alpha$ , для атмосферной радиации —  $\alpha'$ .

На верхней границе пограничного слоя предполагаем известным поток радиации, приходящей сверху. Эта величина является внешним параметром.

При такой постановке задачи уравнения переноса радиации в пограничном слое атмосферы нужно решать при следующих краевых условиях:

$$B(z) = \epsilon E(T_{\text{зн}}) + \alpha' \tilde{A}(0) + \alpha \epsilon_0 E(T_0) D(m_0) \quad \text{при } z=0; \quad (93)$$

$$A(z) = A(H) \quad \text{при } z=H \quad (94)$$

Здесь  $E = \sigma T^4$ ;  $T_{\text{зн}}(T_0)$  — температура подстилающей поверхности (облака) в абсолютной шкале;  $\tilde{A}(0)$  — излучение слоя атмосферы, заключенного между поверхностью земли и облаком, тогда  $\tilde{A}(m)$  — излучение слоя атмосферы, заключенного между уровнем  $m$  и облаком; поглощающая масса отсчитывается вверх от подстилающей поверхности, т. е.  $m = \int_0^z \rho_w dz$  ( $m = m_n$  при  $z=H$ ;  $m = m_0$  при  $z=Z$ , где  $Z$  — высота нижней границы облака);  $\rho_w$  — плотность водяного пара. Зависимость поглощения радиации от давления и температуры для высот 1—2 км и ниже можно не учитывать. Поглощение углекислым газом учитывается автоматически, использованием соответствующей функции пропускания [17, 19, 20].

В дальнейшем вертикальной координатой будет служить поглощающая масса. Задание краевого условия в виде (94) стало возможным лишь после того, как была получена функция пропускания для атмосферной радиации [16].

Функция пропускания для атмосферной радиации  $D^*$  выражается через функцию пропускания для радиации «абсолютно черного тела» следующим образом:

$$D^*(U, \zeta) = \frac{D(U) - D(U + \zeta)}{1 - D(\zeta)}, \quad (95)$$

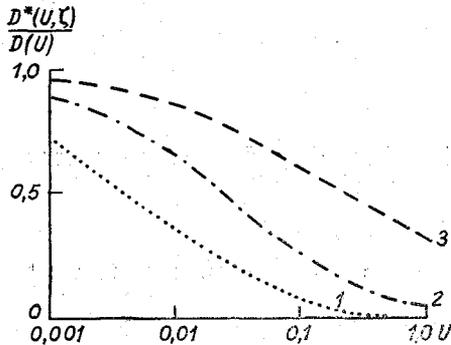


Рис. 2. Зависимость отношения функций  $D^*(U, \zeta)/D(U)$  от поглощающей массы  $U$  для различных масс излучающего слоя ( $\zeta$ ).

1)  $\zeta=1$ , 2)  $\zeta=0,1$ , 3)  $\zeta=0,01$  с осажденной воды.

токов радиации на любом уровне внутри пограничного слоя:

$$A(m) = - \int_m^{m_H} E(\tau) dD(\tau - m) + \tilde{A}(m_H) D^*(m_H - m, m_0 - m_H) + \\ + \varepsilon_0 E(T_0) D(m_0 - m) + \alpha_0 \varepsilon E(T_{3n}) D(2m_0 - m) - \\ - \alpha'_0 D^*(m_0 - m, m_0) \int_0^{m_0} E(\tau) dD(m_0 - \tau); \quad (96)$$

$$B(m) = \int_0^m E(\tau) dD(m - \tau) + \varepsilon E(T_{3n}) D(m) + \alpha \varepsilon_0 E(T_0) D(m_0 + m) - \\ - \alpha' D^*(m, m_H) \int_0^{m_H} E(\tau) dD(\tau) + \alpha' \tilde{A}(m_H) D^*(m_H + m, m_0 - m_H). \quad (97)$$

Полагая в (96)  $m=m_H$ , выразим  $\tilde{A}(m_H)$  через заданную величину  $A(H)$ . Подставляя затем  $\tilde{A}(m_H)$  в (96) и (97) и полученные формулы в (6), найдем следующее выражение для лучистого потока тепла:

$$F(m) = \int_0^m E(\tau) dD(m - \tau) + \int_m^{m_H} E(\tau) dD(\tau - m) - \\ - \alpha' D^*(m, m_H) \int_0^{m_H} E(\tau) dD(\tau) + \varepsilon E(T_{3n}) \{ D(m) - \alpha_0 [ D(2m_0 - m) - \\ - D(2m_0 - m_H) D^*(m_H - m, m_0 - m_H) ] \} - \varepsilon_0 E(T_0) \{ D(m_0 - m) - \\ - \alpha D(m_0 + m) - D(m_0 - m_H) [ D^*(m_H - m, m_0 - m_H) - \\ - \alpha' D^*(m_H + m, m_0 - m_H) ] \} - A(H) \{ D^*(m_H - m, m_0 - m_H) - \\ - \alpha' D^*(m_H + m, m_0 - m_H) \} - S(m). \quad (98)$$

где  $\zeta$  — поглощающая масса слоя воздуха, в котором формируется радиация;  $U$  — масса слоя, в котором радиация поглощается.

Из рис. 2 видно, что функция  $D^*(U, \zeta)$  убывает значительно быстрее соответствующей функции  $D(U)$ . Объясняется это тем, что атмосфера излучает лишь ту радиацию, которую сама хорошо поглощает.

В этой работе мы не будем заниматься решением уравнений переноса радиации, так как данный вопрос достаточно полно разработан в научной литературе. Используя результаты работ [16—18], напишем сразу выражения для потоков радиации на любом уровне внутри пограничного слоя:

При получении формулы (98) мы пренебрегли членами с произведениями коэффициентов отражения и последним членом в (96). Этот член представляет собой радиацию подоблачной атмосферы, дошедшую до уровня  $m$  после отражения от облака. Поскольку атмосферная радиация поглощается значительно интенсивнее «черной», то, будучи отраженной от облака, она в основном поглотится уже на пути от облака до высоты  $H$ . Приблизительно эта часть радиации все же учитывается, так как она входит в  $A(H)$ .

Рассмотрим теперь уравнение притока тепла. Условие (7) позволяет легко получить первый интеграл уравнения (4) в виде

$$P(m) + F(m) = -I(T_{3n}); \quad (99)$$

$$I(T_{3n}) = (И + П)|_{z=0}. \quad (100)$$

Перейдем к координате  $m$  в формуле для турбулентного потока тепла. Тогда вместо (5) будем иметь

$$P(m) = -\tilde{\Psi}(m) \frac{dE}{dm} - \chi(m), \quad (101)$$

где

$$\tilde{\Psi}(m) = \frac{c_p \rho \beta \omega n_2 k(m)}{4 \sigma T^3}; \quad \chi(m) = c_p \rho \beta n_2 k(m). \quad (102)$$

Подставляя (98) и (101) в (99), получим интегрально-дифференциальное уравнение относительно неизвестной  $E(m)$ .

Возьмем интегралы по частям. После некоторых преобразований с использованием формул (95) и (109) придем к интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода относительно  $\frac{dE}{dm}$

$$\tilde{\Psi}(m) \frac{dE}{dm} + \int_0^{m_H} K(\tau, m) \frac{dE}{d\tau} d\tau = \tilde{\varphi}(m), \quad (103)$$

где

$$K(\tau, m) = D(|m - \tau|) + \alpha' D^*(m, m_H) [1 - D(\tau)] - \tilde{f}(m); \quad (104)$$

$$\tilde{f}(m) = (1 - \varepsilon) D(m) - \varepsilon \alpha_0 [D(2m_0 - m) - D(2m_0 - m_H) D^*(m_H - m, m_0 - m_H)]; \quad (105)$$

$$\tilde{\varphi}(m) = I(T_{3n}) - \chi(m) + E(m_H) K(m_H, m) - \tilde{\varphi}(m); \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(m) = & S(m) + A(H) [D^*(m_H - m, m_0 - m_H) - \\ & - \alpha' D^*(m_H + m, m_0 - m_H)] + \varepsilon_0 E(T_0) [D(m_H - m) - \\ & - D^*(m_H - m, m_0 - m_H) - \alpha D(m_0 + m) + \\ & + \alpha' D(m_0 - m_H) D^*(m_H + m, m_0 - m_H)]. \end{aligned} \quad (107)$$

Свободный член уравнения (103), кроме внешних параметров, которые считаются известными, содержит члены, зависящие от температуры верхней границы пограничного слоя и подстилающей поверхности.

У нас осталось неиспользованным краевое условие при  $m = m_H$ . Если считать заданной температуру на верхней границе пограничного слоя,

т. е. воспользоваться условием (8), то в  $\tilde{\varphi}(m)$  останется зависимость лишь от одной неизвестной  $E(T_{3n})$ . В этом случае уравнение (103) придется решать последовательными приближениями, приняв за начальное какое-либо правдоподобное значение ( $T_{3n}$ ).

Если вместо (11) воспользоваться иным краевым условием для влажности, не зависящим от температуры подстилающей поверхности, то функция  $\tilde{\varphi}(m)$  будет определена на всех высотах.

Рассмотрим теперь случай, когда в качестве краевого условия задан приток лучистой энергии. Подставляя (98) в (9), получим после преобразований следующее соотношение для определения температуры на верхней границе пограничного слоя

$$E(m_H) [K(m_H, m_H) - K(m_H, 0)] = \\ = \Delta F(H) + \int_0^{m_H} [K(\tau, m_H - K(\tau, 0)) \frac{dE(\tau)}{d\tau} d\tau + [\tilde{\varphi}(m_H) - \tilde{\varphi}(0)]]. \quad (108)$$

Можно найти  $E(m_H)$  из (108) в общем виде и подставить его в (106). Для определения  $\frac{dE}{dm}$  получим снова интегральное уравнение типа (103), но с другим ядром и свободным членом. Можно поступить и иначе — решить систему из двух уравнений (103) и (108) последовательными приближениями по  $E(T_{\text{сп}})$  и  $E(m_H)$ . Задаем любые  $E(T_{\text{сп}})$  и  $E(m_H)$ , с ними решаем (103), по найденным  $\frac{dE}{dm}$  находим из (108)  $E(m_H)$  и из (109)  $E(T_{\text{сп}})$ . С полученными значениями снова входим в (103) и т. д.

Определив из (103)  $\frac{dE}{dm}$ , найдем

$$E(m) = - \int_m^{m_H} \frac{dE}{d\tau} d\tau + E(m_H) \quad (109)$$

и искомое распределение температуры из соотношения  $E(m) = \sigma T^4(z)$ , используя связь между  $m$  и  $z$ .

Турбулентный поток тепла проще всего сосчитать по (101). Значение  $P(z)$  при  $z=0$  можно также найти из уравнения теплового баланса

$$P(0) = -I(T_{\text{сп}}) - F(0). \quad (110)$$

Совпадение этих двух значений может служить контролем правильности вычислений.

Для расчета радиационного баланса подстилающей поверхности получим из (98) следующую формулу:

$$F(0) = - \int_0^{m_H} K(\tau, 0) \frac{dE}{d\tau} d\tau - \varphi_*(0), \quad (111)$$

где

$$\varphi_*(m) = \tilde{\varphi}(m) - E(m_H) K(m_H, m). \quad (112)$$

#### § 4. Общий ход решения полной задачи

Для получения связи между координатами  $m$  и  $z$  надо решить уравнение переноса влаги (10). При условии (11) на подстилающей поверхности профиль удельной влажности, а следовательно, и зависимость  $m(z)$  будут функциями от температуры подстилающей поверхности.

Таким образом, можно наметить следующий порядок решения: По данным внешним параметрам выбираем подходящие значения  $P^{(0)}(z)$ ,

$T_{\text{зп}}^{(0)}$ , а при краевом условии (9) и  $T_H^{(0)}$ . Затем определяем изложенным в § 2 способом профиль  $k^{(0)}(z)$ . По  $k^{(0)}(z)$  и  $T_{\text{зп}}^{(0)}$  находим  $q^{(0)}(z)$  и  $m^{(0)}(z)$ . Зная  $k^{(0)}(z)$ ,  $T_{\text{зп}}^{(0)}$ ,  $T_H^{(0)}$  и  $m^{(0)}(z)$ , по формулам § 3 вычисляем  $T^{(1)}(z)$  и  $P^{(1)}(z)$ . Далее повторяем весь цикл сначала, взяв за исходные величины  $P^{(1)}(z)$ ,  $T_{\text{зп}}^{(1)}$ ,  $T_H^{(1)}$ .

Указанный порядок не обязателен. Можно выбрать произвольным образом не  $P^{(0)}(z)$ , а  $k^{(0)}(z)$  и начать решение с формул § 3. Тогда изложенным в § 2 способом будет определяться уже  $k^{(1)}(z)$  по рассчитанному  $P^{(0)}(z)$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. Турбулентный режим в приземном слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, т. I, № 2, 1965.
2. Вагер Б. Г., Цейтин Г. Х. Схема расчета характеристик пограничного слоя атмосферы в стационарных условиях. Труды ГГО, вып. 187, 1966.
3. Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л., Цейтин Г. Х. Динамическая турбулентность в планетарном пограничном слое атмосферы. В сб. «Взаимодействие океана и атмосферы». Изд-во «Навукова думка», Киев, 1966.
4. Бобылева И. М., Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. Турбулентный режим в термически-стратифицированном планетарном пограничном слое атмосферы. Междунар. коллоквиум по микроструктуре атмосферы и влиянию турбулентности на распространение радиоволн. Москва, июнь, 1965. «Наука», М., 1967.
5. Рузин М. И. Влияние метеорологических условий на вертикальный профиль коэффициента турбулентности в пограничном слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, т. I, № 10, 1965.
6. Власкадаг А. К. The Vertical distribution of Wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. J. Geophys. Res., vol. 67, No. 8, 1962.
7. Шехтер Ф. Н. Решение задачи о строении пограничного слоя атмосферы при учете радиационного теплообмена. Труды ГГО, вып. 167, 1965.
8. Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л., Монин А. С. Динамика пограничного слоя атмосферы (обзор). Изв. СССР, сер. физика атмосферы и океана, т. III, № 3, 1967.
9. Орленко Л. Р. Распределение метеорологических элементов в пограничном слое атмосферы. В сб. «Главная геофизическая обсерватория им. А. В. Воейкова за 50 лет Советской власти». Гидрометеониздат, Л., 1967.
10. Монин А. С. Динамическая турбулентность в атмосфере. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., т. 14, № 3, 1950.
11. Лайхтман Д. Л., Чудновский А. Ф. Физика приземного слоя атмосферы. Гостехиздат, М.—Л., 1949.
12. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. I. «Наука», М., 1965.
13. Вагер Б. Г. Об учете диффузии турбулентной энергии в полуэмпирической модели приземного слоя атмосферы. Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, т. II, № 9, 1966.
14. Цейтин Г. Х. К расчету характеристик турбулентного обмена в термически-стратифицированном пограничном слое атмосферы. См. наст. сб.
15. Цейтин Г. Х. К вопросу о строении пограничного слоя атмосферы при нестационарных условиях, ч. II. Труды ГГО и УкрНИГМИ, вып. 144/40, 1963.
16. Шехтер Ф. Н. О расчете лучистого притока тепла. Труды VI Всесоюз. совещания по актинометрии и атмосферной оптике. Тарту, 1966. «Валгус», Таллин, 1968.
17. Шехтер Ф. Н. К вычислению лучистых потоков тепла в атмосфере. Труды ГГО, вып. 22, 1950.
18. Шехтер Ф. Н. Некоторые вопросы радиационного теплообмена в облачной атмосфере. Труды ГГО, вып. 187, 1966.
19. Шехтер Ф. Н. Спектральные и интегральные функции пропускания длинноволновой радиации. Труды ГГО, вып. 184, 1966.
20. Шехтер Ф. Н. Функция пропускания длинноволновой радиации и ее зависимость от температуры источника излучения. Труды ГГО, вып. 223, 1963.

## К РАСЧЕТУ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА ТЕРМИЧЕСКИ-СТРАТИФИЦИРОВАННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ

В настоящее время разрабатываются полуэмпирические методы расчета характеристик турбулентного обмена, основанные на решении совместной системы уравнений термогидродинамики пограничного слоя атмосферы. При некоторых упрощающих предположениях (неучет или приближенный учет нестационарности, горизонтальных неоднородностей, лучистого теплообмена и т. д.) характеристики термически-стратифицированного пограничного слоя атмосферы, включая и характеристики турбулентного обмена, находятся как функции внешних параметров. Подробный обзор этих исследований приведен, например, в [1—3].

Решение упомянутых выше задач связано с преодолением многих трудностей как физического, так и математического характера, вызванных необходимостью учета многочисленных взаимно связанных между собой факторов. Вследствие этого решения, как правило (особенно для стратифицированного пограничного слоя), являются сложными и малооперативными.

С точки зрения практического приложения наиболее разработаны «интегральные» модели пограничного слоя [4—9]. Однако несмотря на наличие в большинстве из них детальных расчетных схем, процесс получения конкретных численных результатов остается еще довольно трудоемким.

Что касается так называемых «дифференциальных» схем [10—16], для которых теоретическая схема еще сложнее, то они пока не получили широкого распространения, несмотря на то, что на их основе достигнуты важные и интересные результаты применительно как к нейтральному, так и термически-стратифицированному пограничному слою атмосферы. Это связано с тем, что выполнение расчетов по таким схемам, как правило, требует применения численных методов.

Хотя численные методы, безусловно, являются наиболее перспективными при решении упомянутых задач, нам кажется, что в настоящее время еще актуальна задача получения на основе дифференциальных схем решений, более доступных расчету и физическому анализу, если только это не связано с заметными огрублениями теоретической схемы. Одна из таких попыток сделана нами в работе [17]. Подобную же цель отчасти преследует и настоящая работа, в которой разработан приближенный метод расчета некоторых характеристик турбулентного обмена в термически-стратифицированном пограничном слое атмосферы. Последний предполагается стационарным и горизонтально однородным.

Существенным ограничением схем с априорным заданием зависимости коэффициента турбулентности от высоты является то, что параметры этой зависимости не связаны с распределением ветра и температуры. Вследствие этого полученные результаты для распределения ветра и температуры не всегда согласуются с принятой при решении моделью коэффициента турбулентности. В данной работе при априорном задании коэффициента турбулентности как функции высоты учтена и зависимость его от стратификации и динамической скорости вблизи земной поверхности, характеристики которых получаются также при решении общей задачи. Такая постановка упрощает физическую интерпретацию получаемых результатов и облегчает их анализ.

Метод основан на использовании отдельных общих положений дифференциальных моделей, а также на некоторых результатах интегральных схем. Как и в аналогичных работах [10, 15, 16], искомые характеристики выражаются через небольшое число безразмерных комбинаций внешних параметров (скорость геострофического ветра, шероховатость подстилающей поверхности и др.) и турбулентного потока тепла.

Работа состоит из двух частей, в первой из которых дается решение уравнений движения в предположении, что характеристики турбулентного обмена заданы, а затем на основе этого решения разрабатывается метод определения упомянутых характеристик.

1. Уравнение движения в пограничном слое атмосферы при перечисленных выше ограничениях может быть написано в следующем комплексном виде:

$$\frac{d}{dz} k(z) \frac{dW(z)}{dz} - 2\omega_z i W(z) = 0 \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$W(z) \rightarrow 1 \quad \text{при } z \rightarrow z_0; \quad (2)$$

$$W(z) \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где

$$W(z) = 1 - \frac{u(z)}{V_g} - i \frac{v(z)}{V_g}. \quad (4)$$

Здесь  $u(z)$  и  $v(z)$  — горизонтальные составляющие скорости ветра (ось  $x$  направлена вдоль изобары);  $z$  — вертикальная координата ( $z=0$  — поверхность земли);  $V_g$  — скорость геострофического ветра;  $z_0$  — шероховатость подстилающей поверхности;  $\omega_z$  — вертикальная составляющая угловой скорости земли.

Профиль коэффициента турбулентности  $k(z)$  в приземном слое атмосферы задаем в зависимости от термической стратификации следующей моделью:

$$k(z) = \kappa v_* z \left( 1 - \beta \frac{z}{L} \right), \quad (5)$$

где

$$v_* = \lim_{z \rightarrow z_0} \sqrt{k(z)} \left[ \left( \frac{du}{dz} \right)^2 + \left( \frac{dv}{dz} \right)^2 \right]^{\frac{1}{4}} \quad (\text{динамическая скорость}); \quad (6)$$

$\kappa = 0,38$  (постоянная Кармана);

$$L = - \frac{c_p \rho \bar{T} v_*^3}{g \kappa P_0} \quad (\text{масштаб приземного подслоя по А. М. Обухову и А. С. Монину}); \quad (7)$$

$P_0$  — турбулентный поток тепла у подстилающей поверхности.

В формуле (7)  $c_{pr}$  — объемная теплоемкость воздуха;  $\bar{T}$  — средняя абсолютная температура приземного слоя;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Поясним кратко выбор модели для  $k(z)$ . В приземном стратифицированном подслое ( $z < |L|$ ), где можно пренебречь влиянием сил Кориолиса; формула (5) совпадает с моделью для  $k(z)$ , предложенной А. С. Моининым и А. М. Обуховым,

$$k(z) = \frac{\alpha v_* z}{1 + \beta_1 \frac{z}{L}}, \quad (8)$$

полученной ими применительно к упомянутому подслою на основе теории подобия [18]. Параметр  $\beta_1$  в (8) — универсальная постоянная и по оценкам, приведенным в [18],  $\beta_1 \approx 0,6$ .

Позже были получены другие оценки, как подтверждающие эту, так и весьма расходящиеся с нею [19].

Предлагаемую модель (5) мы распространяем выше приземного подслоя  $h$ , на слой той же толщины, внутри которого уже нельзя пренебречь силами Кориолиса. В такой трактовке модель (5) может быть выведена из соотношений, на которых строятся дифференциальные схемы (см., например, соотношения (5), (13а), (14 и (20а) в [1]).

Одним из следствий упомянутых схем является то, что безразмерные характеристики турбулентности внутри указанного стратифицированного слоя могут быть представлены функциями безразмерной высоты  $\frac{z}{L}$ .

Например, можно получить

$$\frac{k(z)}{\alpha v_* L} = \frac{z}{L} \varphi_* \left( \frac{z}{L} \right). \quad (9)$$

Вид функций  $\varphi_* \left( \frac{z}{L} \right)$  определяется в основном способом замыкания системы и конкретной постановкой задачи в рамках дифференциальной схемы. Разлагая  $\varphi_* \left( \frac{z}{L} \right)$  в ряд и ограничиваясь первыми двумя членами, получают формулу типа (5). Параметр  $\beta$  в (5) уже не будет универсальной постоянной, а будет определяться упомянутыми факторами. Более подробно эти вопросы, в том числе и определение  $\beta$ , будут нами рассмотрены в отдельной статье.

Отметим следующие особенности модели (5).

а) В неустойчивых стратификациях ( $P_0 > 0$ ;  $L < 0$ ) значения  $k(z)$  всегда положительны и формула (5) может быть распространена на уровни  $z > \frac{|L|}{\beta}$ .

б) В устойчивых стратификациях — инверсиях ( $P_0 < 0$ ;  $L > 0$ ) формула (5) может быть применена лишь в слое ( $z_0, 2z_m$ ), где  $z_m = \frac{L}{2\beta}$ , ибо при  $z > 2z_m = \frac{L}{\beta}$  величина  $k(z)$  принимает физически бессмысленные отрицательные значения.

Внутри упомянутого слоя  $k(z)$  в своем изменении с высотой достигает максимума  $k_m = \frac{\alpha v_* z_m}{2}$  на уровне  $z_m$ . Так как  $L \sim 10-100$  м [18],  $v_* \sim 0,1-0,5$  м/сек.,  $\beta \sim \beta_1 \sim 1$ , то  $z_m \sim 10-100$  м и  $k_m \sim 0,2-2$  м<sup>2</sup>/сек. Таким образом, порядки величин  $z_m$  и  $k_m$  примерно соответствуют расчетным данным (в рамках интегральных схем) о высоте «излома» и значении  $k(z)$  на этой высоте в инверсиях [5-7].

в) Модель  $k(z)$ , согласно (5), как будет видно из дальнейшего, позволяет получить аналитическое решение уравнения движения. Насколько нам известно, решение для такой модели  $k(z)$  получено впервые.

Выше уровня  $h$  по аналогии с [8] и учетом [3] задаем профиль  $k(z)$  экспоненциальной моделью:

$$k(z) = k_h e^{-b_0 \left( \frac{z}{h} - 1 \right)} \quad (\text{при } z \geq h); \quad (10)$$

$$k_h = \alpha v_* h \left( 1 - \beta \frac{h}{L} \right). \quad (11)$$

Здесь  $b_0$  — положительный параметр, на выборе которого остановимся ниже. Профиль для  $k(z)$  (10) в отличие от (5) не связан непосредственно с дифференциальной схемой, но его параметры  $k_h$ ,  $b_0$  и  $h$ , как будет видно ниже, имеют с нею косвенную связь.

Из физических соображений необходимо удовлетворить условиям «склейки» на высоте «излома»  $h$ :

$$\left. \begin{aligned} W(z)|_{h-0} &= W(z)|_{h+0}, \\ k(z) \frac{dW(z)}{dz} \Big|_{h-0} &= k(z) \frac{dW(z)}{dz} \Big|_{h+0}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

2. Не останавливаясь на подробностях хода решения (эти и некоторые другие вопросы будут рассмотрены нами в отдельной статье), укажем, что в нижнем слое  $z_0 \leq z \leq h$  введением безразмерной высоты

$$\eta = 1 - \frac{2\beta z}{L} = 1 + \frac{8t_0}{\alpha N_0} \frac{z}{z_0} \quad (13)$$

уравнение (1) переводится в дифференциальное уравнение Лежандра [20]

$$(1 - \eta^2) \frac{d^2 W(\eta)}{d\eta^2} - 2\eta \frac{dW(\eta)}{d\eta} + \nu(\nu + 1) W(\eta) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) имеет два линейно независимых решения [20] функции Лежандра 1-го и 2-го рода соответственно:

$$W_1(\eta) = P_\nu(\eta) = F\left(-\nu; 1 + \nu; 1; \frac{1 - \eta}{2}\right); \quad (15)$$

$$W_2(\eta) = Q_\nu(\eta) = \frac{\Gamma(1 + \nu) \sqrt{\pi}}{(2\eta)^{1+\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)} F\left(\frac{1 + \nu}{2}; \frac{\nu}{2} + 1; \nu + \frac{3}{2}; \frac{1}{\eta^2}\right), \quad (16)$$

где  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  — гипергеометрический ряд [20];  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Другие обозначения следующие:

$$N_0 = \frac{\alpha v_*}{2 \omega_z z_0}; \quad (17)$$

$$t_0 = -\frac{\beta \alpha v_*}{8 \omega_z L} = -\frac{\beta \alpha^2 g P_0}{8 \omega_z c_p \rho \bar{T} v_*^2}, \quad (18)$$

$$\nu = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{i}{t_0}} - \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Здесь  $t_0$  — параметр термической устойчивости, причем  $t_0 > 0$  при неустойчивой ( $P_0 > 0$ ;  $L < 0$ ) стратификации и  $t_0 < 0$  при устойчивой ( $P_0 < 0$ ;  $L > 0$ ). Заметим, что  $t_0$  пропорционально параметру устойчивости  $\mu = -\frac{\alpha^2 g \beta_0}{2 \omega_z c_p \rho \bar{T} v_*^2}$ , введенному А. Б. Казанским и А. С. Мониным [21].

Учитывая, что  $\omega_z \sim 10^{-4}$  сек. $^{-1}$ ;  $|P_0| \sim 0-0,5 \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин}}$  и приведенные выше оценки величин  $L$ ,  $v_{*}$ ,  $\beta$ , получим  $(-10, 10)$  как ориентировочный интервал изменения  $t_0$ . На основании (13) найдем

$$k(z) = \frac{\alpha v_* L}{4 \beta} (1 - \eta^2) = \frac{\alpha^2 v_* z_0}{16} \frac{N_0}{t_0} (\eta^2 - 1). \quad (20)$$

Что касается решения уравнения (1) для верхнего слоя  $h \leq z < \infty$  при задании  $k(z)$  формулой (10), то оно было рассмотрено в [8].

Опираясь на некоторые результаты работы [8], а также используя известные свойства функций  $P_v$  и  $Q_v$  (см. [20]), можно, исходя из (10), (11), (13), (15) и (16), граничных условий (2) и (3) и условий склейки (12), получить следующие решения для вертикального профиля скорости ветра:

а) для нижних уровней  $z_0 \leq z \leq h$

$$W(z) = \frac{Q_v(\eta) - D_v(\eta_h) P_v(\eta)}{Q_v(\eta_0) - D_v(\eta_h) P_v(\eta_0)}, \quad (21)$$

б) для верхнего слоя  $h \leq z < \infty$

$$W(z) = \frac{e^{\frac{b_0}{2} \left( \frac{z}{h} - 1 \right)} K_1 \left( m_h \sqrt{i} e^{\frac{b_0}{2} \left( \frac{z}{h} - 1 \right)} \right)}{L_v(\eta_h) [Q_v(\eta_0) - D_v(\eta_h) P_v(\eta_0)] K_1(m_h \sqrt{i})}, \quad (22)$$

где

$$L_v(\eta_h) = (\eta^2 - 1) \frac{dP_v(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta_h} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{i(\eta_h^2 - 1)}{t_0}} \frac{K_0(m_h \sqrt{i})}{K_1(m_h \sqrt{i})} P_v(\eta_h); \quad (23)$$

$$D_v(\eta_h) = \frac{(\eta^2 - 1) \frac{dQ_v(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta_h} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{i(\eta_h^2 - 1)}{t_0}} \frac{K_0(m_h \sqrt{i})}{K_1(m_h \sqrt{i})} Q_v(\eta_h)}{L_v(\eta_h)}; \quad (24)$$

$$m_h = \frac{1}{b_0} \sqrt{\frac{(\eta_h - 1)}{t_0(\eta_h + 1)}}; \quad (25)$$

$$\eta_0 = \eta|_{z=z_0} = 1 - 2\beta \frac{z_0}{L} = 1 + \frac{8t_0}{N_0}; \quad (26)$$

$$\eta_h = \eta|_{z=h} = 1 - 2\beta \frac{h}{L} = 1 + \frac{8t_0}{N_0} \frac{h}{z_0}; \quad (27)$$

$K_0$  и  $K_1$  — функции Бесселя чисто мнимого аргумента [20].

Дальнейшее рассмотрение проводили в зависимости от условий стратификации.

3. При неустойчивой стратификации ( $P_0 > 0$ ;  $L < 0$ )  $t_0 > 0$  и, согласно (13),  $\eta > 1$  и  $\eta_0 < \eta \leq \eta_h$ . В настоящей работе нас больше всего будут интересовать уровни вблизи подстилающей поверхности, где  $\eta \sim 1 + 0$ . В этой области решение (16) в отличие от (15) (если их представить рядами) сходится медленно. Воспользовавшись, однако, известными из теории гипергеометрических и гамма-функций формулами преобразования [20], получим

$$Q_v(\eta) = \frac{1}{\eta^{1+v}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+v+2j)}{\Gamma(1+v)(j!)^2} \left\{ \psi(1+j) - \psi(1+v+2j) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \ln \left[ \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) \right] \right\} \left[ \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{\eta^2} \right) \right]^j, \quad (28)$$

где  $\psi$  — логарифмическая производная гамма-функции.

Ряд (28) уже сходится быстро в указанной области.

4. При устойчивой стратификации — инверсии ( $P_0 < 0$ ;  $L > 0$ ),  $t_0 < 0$  и, согласно (13),  $\eta < 1$ . С другой стороны, поскольку по (20)  $k(z) < 0$  при  $\eta < -1$ , то  $|\eta| < \eta < 1$ . Общее решение (21), (22) неприменимо, ибо функция  $Q_\nu(\eta)$  определена формулами (16) и (28) лишь для  $\eta > 1$ . Можно показать, что решение (21), (22) сохраняет силу, если  $Q_\nu(\eta)$  и ее производную заменить соответственно на функцию  $E_\nu(\eta)$  и ее производную, причём

$$E_\nu(\eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right) F\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}; -\frac{\nu}{2}; \frac{1}{2}; \eta^2\right) \quad (29)$$

есть одно из линейно независимых решений уравнения Лежандра (14) в области  $|\eta| < 1$  [20].

Вблизи подстилающей поверхности, т. е. при  $\eta \sim 1 - 0$ , функцию (29) можно преобразовать в быстросходящийся ряд

$$E_\nu(\eta) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} + j\right) \Gamma\left(j - \frac{\nu}{2}\right)}{(j!)^2 \Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} \times \\ \times \left[ 2\psi(1+j) - \psi\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2} + j\right) - \psi\left(j - \frac{\nu}{2}\right) - \ln(1-\eta^2) \right] (1-\eta^2)^j. \quad (30)$$

5. При равновесной стратификации ( $|P_0| \rightarrow 0$ ;  $|L| \rightarrow \infty$ ;  $|t_0| \rightarrow 0$ )  $k(z)$ , согласно (5), вырождается в линейную функцию высоты  $z$ . Уравнение движения (1) решается в функциях Бесселя  $I_0\left(2\sqrt{\frac{iz}{zN_0z_0}}\right)$  и  $K_0\left(2\sqrt{\frac{iz_0}{zN_0z_0}}\right)$ . Можно показать, что при  $|t_0| \rightarrow 0$  решение  $P_\nu(\eta)$  переходит в  $I_0$ , а  $Q_\nu(\eta)$  и  $E_\nu(\eta)$  — в  $K_0$ , т. е. обобщением решения на случаи неравновесной стратификации является функция  $P_\nu(\eta)$ , а обобщением  $K_0$  — соответственно  $Q_\nu(\eta)$  (для неустойчивых стратификаций) и  $E_\nu(\eta)$  (для устойчивых).

Покажем это вкратце для решения  $P_\nu(\eta)$ , которое, согласно (15) (см. [20]), есть

$$P_\nu(\eta) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-\nu) \Gamma(j+1+\nu)}{(j!)^2 \Gamma(-\nu) \Gamma(1+\nu)} \left(\frac{1-\eta}{2}\right)^j. \quad (15')$$

Пусть  $k$  и  $y$  — два числа, причём  $y \gg k$ , тогда, согласно формуле Стирлинга для гамма-функций [20], можно получить

$$\Gamma(y+k) \sim \sqrt{2\pi} y^{y+k-\frac{1}{2}} e^{-y}; \quad \psi(y+k) \sim \ln y. \quad (31)$$

Используя далее (19), найдем, что при  $t_0 \rightarrow 0$   $\nu \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{i}{t_0}}$  и/или  $|\nu| \rightarrow \infty$ . На основе (31) тогда получим

$$\frac{\Gamma(j-\nu) \Gamma(j+1+\nu)}{\Gamma(-\nu) \Gamma(1+\nu)} \sim (-1)^j \nu^{2j} \sim (-1)^j \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{i}{t_0}}\right)^{2j}. \quad (32)$$

Из (13) имеем

$$\left(\frac{1-\eta}{2}\right)^j = (-1)^j \left(2\sqrt{\frac{t_0}{zN_0} \frac{z}{z_0}}\right)^{2j}. \quad (33)$$

Подставляя (32) и (33) в (15), найдем при  $t_0 \rightarrow 0$

$$P_v(\eta) \rightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(j!)^2} \left( \sqrt{\frac{zi}{\alpha N_0 z_0}} \right)^{2j} = I_0 \left( 2 \sqrt{\frac{zi}{\alpha N_0 z_0}} \right).$$

Аналогично, используя (13), (19), (31), можно на основе представлений (28) и (30) показать, что при  $|t_0| \sim 0$  функции  $Q_v(\eta)$  и  $E_v(\eta)$  имеют своим пределом  $K_0 \left( 2 \sqrt{\frac{zi}{\alpha N_0 z_0}} \right)$ .

Таким образом, общее решение (21), (22) сохраняет силу и при равновесной стратификации, если произвести все замены, вытекающие из предельного перехода  $|P_0| \rightarrow 0$  или  $|t_0| \rightarrow 0$ .

6. Остановимся теперь на выборе высоты излома  $h$  и параметра  $b_0$ , характеризующих, согласно (10), изменение  $k(z)$  выше уровня  $h$ . Исходя из физических соображений, можно предположить, что режим турбулентности выше приземного подслоя не должен сильно сказываться на характеристиках поля ветра вблизи подстилающей поверхности, хотя относительное влияние может увеличиваться с ростом термической устойчивости. Это подтверждается и некоторыми численными оценками, приведенными в [3]. Исходя из этих соображений, ограничимся заданием  $h$  и  $b_0$  приближенными зависимостями от термических и динамических факторов.

а) При равновесной стратификации ( $t_0 = 0$ ) высота  $h$  будет определяться величинами  $v_*$ ,  $z_0$  и  $\omega_z$ . Используя соображения теории размерности и учитывая (17), получим

$$\frac{h}{z_0} = A N_0. \quad (34)$$

Постоянную  $A$  определим на основе расчетных данных из работ [8, 22, 23], где используется профиль  $k(z)$  типа (10). Вычислив по этим данным  $v_*$  по формуле  $\frac{\alpha c_1}{\ln z_1 z_0}$ , где  $c_1$  — скорость ветра на высоте  $z_1$ , можно исходя из (17) и (34) получить в среднем  $A \approx 0,06$ . С ростом неустойчивости высота  $h$  при тех же динамических факторах будет увеличиваться. Согласно расчетным данным из [5, 6], эта высота для условий умеренной неустойчивости ( $t_0 \sim 4-5$ ) примерно в два раза больше, чем при равновесной стратификации ( $t_0 \approx 0$ ). Учитывая это, а также (34), положим для условий равновесной и неустойчивой стратификации

$$\frac{h}{z_0} = 0,06 N_0 \left( 1 + \frac{1}{4} t_0 \right). \quad (35)$$

Безразмерную высоту излома  $\eta_h$  найдем, согласно (27) и (35), в виде

$$\eta_h = 1 + \frac{5}{4} t_0 \left( 1 + \frac{1}{4} t_0 \right). \quad (36)$$

В инверсиях ( $t_0 \leq 0$ ) полагаем, что высота  $h$  не может превысить уровень, где, согласно (5) и (20),  $k(z)$  достигает своего максимума. Следовательно, по (11) и (27) безразмерная высота  $\eta_h$  будет по мере роста устойчивости монотонно убывать от  $\eta_h = 1$  до  $\eta_h = 0$ . Такому изменению удовлетворим, полагая

$$\eta_h = e^{\beta t_0} \quad \text{для } t_0 \leq 0. \quad (37)$$

Подставив (37) в (27), получим

$$\frac{h}{z_0} = \frac{\alpha N_0}{8 t_0} (e^{\beta t_0} - 1) \quad \text{для } t_0 \leq 0. \quad (38)$$

При  $t_0 \rightarrow -0 \frac{h}{z_0} \rightarrow \frac{\bar{\beta} \times N_0}{8}$  и, следовательно, по (35) найдем  $\beta = 1,25$ .

б) Для определения параметра  $b_0$  получим теоретическую связь последнего с высотой пограничного слоя атмосферы  $H$ , которую, согласно [24, 25], считаем заданной функцией термических и динамических факторов. Высоту  $H$  определяем как уровень, где касательное напряжение составляет малую долю (например,  $\sim 0,1$ ) от его наземного, или приближенно от его значения на высоте приземного подслоя  $h$ , т. е.

$$\frac{k(z) \sqrt{\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2} \Big|_{z=H}}{k(z) \sqrt{\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2} \Big|_{z=h}} = \frac{1}{10} \quad (39)$$

или, исходя из (4), (10) и (22),

$$\begin{aligned} \sqrt{\left[ \operatorname{ker} \left( m_h e^{\frac{b_0}{2} \left( \frac{H}{h} - 1 \right)} \right) \right]^2 + \left[ \operatorname{kei} \left( m_h e^{\frac{b_0}{2} \left( \frac{H}{h} - 1 \right)} \right) \right]^2} = \\ = \frac{1}{10} \sqrt{\operatorname{ker}^2 m_h + \operatorname{kei}^2 m_h}, \end{aligned} \quad (40)$$

где  $\operatorname{ker} x + i \operatorname{kei} x = K_0(x\sqrt{i})$  — функции Томсона.

Соотношение (39) примерно соответствует определению высоты пограничного слоя, принятого в интегральных схемах [2—9]. Так, при

$$k(z) = \text{const по (39) получим } e^{-H \sqrt{\frac{\omega_z}{k}}} = 0,1 \text{ или } H \approx 2,3 \sqrt{\frac{k}{\omega_z}}.$$

Высоту  $H$  представим для различных условий стратификаций формулами типа (35) и (38):

$$\frac{H}{z_0} = \begin{cases} \frac{1,78}{t_0} N_0 (e^{0,112t_0} - 1) & \text{при } t_0 \leq 0, \\ 0,20 N_0 (1 + 0,22t_0) & \text{при } t_0 \geq 0. \end{cases} \quad (41)$$

При определении коэффициентов в (41) мы использовали значения высоты  $H$  для различных условий стратификации и другие данные, полученные Л. Р. Орленко, Т. А. Курпаковой и Н. А. Лазаревой путем обработки экспериментального материала [24, 25].

Из (35), (38), (41) следует, что отношение  $\frac{H}{h}$ , входящее в (40), зависит только от параметра  $t_0$ . Другой параметр  $m_h$ , входящий в (40), зависит как это следует из (25), (36) и (37), от  $b_0$  и  $t_0$ . Следовательно, соотношение (40) позволяет выразить искомый параметр  $b_0$  функцией одного параметра устойчивости  $t_0$  (табл. 1).

Таблица I

Величина  $b_0$  в зависимости от параметра устойчивости  $t_0$

$t_0$ . . .	$\leq -4$	$-3$	$-2$	$-1$	$-0,5$	$0$	$0,5$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$8$	$10$	$15$	$20$
$b_0$ . . .	$0$	$0,04$	$0,12$	$0,38$	$0,67$	$1,36$	$1,45$	$1,54$	$1,79$	$1,94$	$2,10$	$2,22$	$2,27$	$2,47$	$2,58$	$2,82$	$2,97$

Геострофический коэффициент трения  $f$ , приземный угол трения  $\varphi_0$  в градусах

$e_0$	Характеристики турбулентного обмена	Ro							
		$10^4$	$2 \cdot 10^4$	$5 \cdot 10^4$	$10^5$	$2 \cdot 10^5$	$5 \cdot 10^5$	$10^6$	$5 \cdot 10^6$
-0,008	$f$	0,0455	0,0362	0,0288	0,0236	0,0203	0,0171	0,0155	
	$\varphi_0$	44,3	43,8	43,2	42,7	42,3	42,0	41,9	
	$m_0$	-0,0895	-0,0878	-0,0700	-0,0640	-0,0482	-0,0333	-0,0224	
-0,006	$f$	0,0583	0,0503	0,0415	0,0367	0,0323	0,0281	0,0257	0,0201
	$\varphi_0$	41,2	40,0	38,5	37,6	36,9	36,6	36,4	36,2
	$m_0$	-0,0317	-0,0240	-0,0168	-0,0127	-0,0111	-0,00550	-0,00385	-0,0150
-0,004	$f$	0,0662	0,0594	0,0515	0,0456	0,0408	0,0357	0,0324	0,0269
	$\varphi_0$	39,0	37,0	34,4	32,6	31,1	30,0	29,8	29,6
	$m_0$	-0,0145	-0,0102	-0,00612	-0,00444	-0,00310	-0,00184	-0,00120	$-4,42 \cdot 10^{-4}$
-0,002	$f$	0,0717	0,0652	0,0580	0,0531	0,0483	0,0431	0,0395	0,0340
	$\varphi_0$	36,8	34,3	30,9	28,5	26,9	25,2	24,0	22,5
	$m_0$	-0,00568	-0,00375	-0,00214	-0,00141	$-9,20 \cdot 10^{-4}$	$-5,60 \cdot 10^{-4}$	$-3,41 \cdot 10^{-4}$	$-1,07 \cdot 10^{-4}$
0	$f$	0,0787	0,0718	0,0634	0,0583	0,0536	0,0488	0,0452	0,0389
	$\varphi_0$	34,4	31,7	28,5	26,2	23,9	21,5	19,6	16,8
	$m_0$	0	0	0	0	0	0	0	0
0,002	$f$	0,0815	0,0743	0,0657	0,0600	0,0560	0,0512	0,0474	0,0408
	$\varphi_0$	32,0	28,9	25,1	22,3	20,3	17,7	16,0	13,0
	$m_0$	0,00389	0,00256	0,00147	$9,73 \cdot 10^{-4}$	$5,98 \cdot 10^{-4}$	$3,16 \cdot 10^{-4}$	$1,94 \cdot 10^{-4}$	$6,02 \cdot 10^{-5}$
0,005	$f$	0,0841	0,0767	0,0687	0,0634	0,0587	0,0536	0,0495	0,0427
	$\varphi_0$	29,6	26,5	22,5	19,7	17,6	15,0	13,2	10,6
	$m_0$	0,00882	0,00570	0,00316	0,00205	0,00129	$6,87 \cdot 10^{-4}$	$4,30 \cdot 10^{-4}$	$1,32 \cdot 10^{-4}$
0,010	$f$	0,0888	0,0815	0,0727	0,0667	0,0621	0,0565	0,0523	0,0451
	$\varphi_0$	28,1	23,7	19,3	16,5	14,6	12,2	10,8	8,3
	$m_0$	0,0150	0,00972	0,00546	0,00352	0,00217	0,00115	$7,28 \cdot 10^{-4}$	$2,24 \cdot 10^{-4}$
0,020	$f$	0,0960	0,0878	0,0776	0,0711	0,0663	0,0605	0,0561	0,0483
	$\varphi_0$	25,7	21,7	17,2	14,1	12,6	9,6	8,2	6,1
	$m_0$	0,0238	0,0156	0,00890	0,00582	0,00361	0,00191	0,00119	$3,71 \cdot 10^{-4}$
0,050	$f$	0,1115	0,1000	0,0892	0,0823	0,0757	0,0683	0,0629	0,0531
	$\varphi_0$	22,2	18,2	13,8	11,2	9,3	7,0	5,6	3,9
	$m_0$	0,0378	0,0198	0,0142	0,00938	0,00598	0,00327	0,00239	$6,92 \cdot 10^{-4}$
0,010	$f$	0,1208	0,1081	0,0971	0,0893	0,0821	0,0723	0,0665	0,0557
	$\varphi_0$	18,5	14,6	10,7	8,4	6,8	4,7	3,6	2,0
	$m_0$	0,0594	0,0391	0,0224	0,0148	0,00950	0,00546	0,00357	0,00120
0,020	$f$	0,1368	0,1225	0,1075	0,0971	0,0890	0,0787	0,0715	
	$\varphi_0$	15,3	11,7	7,8	5,6	4,0	2,7	2,0	
	$m_0$	0,0820	0,0568	0,0335	0,0228	0,0150	0,00884	0,00570	

Таблица 2

и величина  $m_0$  в зависимости от параметра устойчивости  $e_0$  и числа Россби  $R_0$ 

Ro								
$10^7$	$5 \cdot 10^7$	$10^8$	$5 \cdot 10^8$	$10^9$	$5 \cdot 10^9$	$10^{10}$	$5 \cdot 10^{10}$	$10^{11}$
0,0184 35,9 -0,001	0,0151 36,0 $-3,63 \cdot 10^{-4}$	0,0139 36,0 $-2,35 \cdot 10^{-4}$						
0,0248 29,6 $-2,75 \cdot 10^{-4}$	0,0213 29,2 $-1,10 \cdot 10^{-4}$	0,0200 29,0 $-5,28 \cdot 10^{-5}$	0,0174 29,2 $-1,59 \cdot 10^{-5}$	0,0164 29,2 $-9,5 \cdot 10^{-6}$	0,0145 29,2 $-2,79 \cdot 10^{-6}$	0,0137 29,2 $-1,64 \cdot 10^{-6}$		
0,0318 22,0 $-6,53 \cdot 10^{-5}$	0,0269 21,4 $-2,12 \cdot 10^{-5}$	0,0252 21,1 $-1,31 \cdot 10^{-5}$	0,0224 20,7 $-3,47 \cdot 10^{-6}$	0,0212 20,5 $-2,20 \cdot 10^{-6}$	0,0190 20,2 $-6,13 \cdot 10^{-7}$	0,0181 20,0 $-3,53 \cdot 10^{-7}$	0,0164 19,9 $-9,55 \cdot 10^{-8}$	0,0157 19,8 $-5,45 \cdot 10^{-8}$
0,0365 15,8 0	0,0320 14,1 0	0,0304 13,3 0	0,0272 11,8 0	0,0260 11,2 0	0,0236 10,2 0	0,0227 9,7 0	0,0207 9,0 0	0,0199 8,6 0
0,0387 11,9 $3,61 \cdot 10^{-5}$	0,0341 9,9 $1,05 \cdot 10^{-5}$	0,0323 9,1 $6,18 \cdot 10^{-6}$	0,0289 7,3 $1,72 \cdot 10^{-6}$	0,0275 6,5 $1,00 \cdot 10^{-6}$	0,0251 5,4 $2,59 \cdot 10^{-7}$	0,0243 4,8 $1,46 \cdot 10^{-7}$	0,0223 3,8 $3,67 \cdot 10^{-8}$	0,0216 3,3 $2,05 \cdot 10^{-8}$
0,0403 9,5 $7,95 \cdot 10^{-5}$	0,0358 7,7 $2,29 \cdot 10^{-5}$	0,0340 6,8 $1,33 \cdot 10^{-5}$	0,0305 5,3 $3,67 \cdot 10^{-6}$	0,0291 4,5 $2,11 \cdot 10^{-6}$	0,0264 3,5 $5,68 \cdot 10^{-7}$	0,0253 3,0 $3,23 \cdot 10^{-7}$	0,0234 2,5 $8,32 \cdot 10^{-8}$	0,0223 2,0 $4,68 \cdot 10^{-8}$
0,0423 7,3 $1,38 \cdot 10^{-4}$	0,0374 5,6 $3,98 \cdot 10^{-5}$	0,0354 4,8 $2,35 \cdot 10^{-5}$	0,0318 3,6 $6,48 \cdot 10^{-6}$	0,0303 3,0 $3,74 \cdot 10^{-6}$	0,0274 2,2 $9,90 \cdot 10^{-7}$	0,0262 1,9 $5,81 \cdot 10^{-7}$	0,0240 1,5 $1,50 \cdot 10^{-7}$	0,0231 1,4 $8,48 \cdot 10^{-8}$
0,0453 5,2 $2,25 \cdot 10^{-4}$	0,0394 3,8 $6,83 \cdot 10^{-5}$	0,0371 3,3 $4,10 \cdot 10^{-5}$	0,0333 3,3 $1,12 \cdot 10^{-5}$	0,0318 1,9 $6,43 \cdot 10^{-6}$	0,0287 1,4 $1,74 \cdot 10^{-6}$	0,0275 1,2 $1,00 \cdot 10^{-6}$		
0,0495 3,2 $4,31 \cdot 10^{-4}$	0,0433 2,2 $1,26 \cdot 10^{-4}$	0,0412 1,7 $7,45 \cdot 10^{-5}$						
0,0518 1,7 $7,50 \cdot 10^{-4}$								

7. Применим теперь полученное решение (21), (22) для определения характеристик турбулентного обмена.

Обозначим

$$e_0 = t_0 f^2 = \frac{\beta \kappa^2 g P_0}{8 \omega_z c_p \rho T V_g^2} = \frac{4,68 \beta P_0}{\sin \varphi V_g^2}, \quad (42)$$

где

$$f = \frac{v_*}{V_g} \quad (43)$$

есть геострофический коэффициент трения,  $\varphi$  — геострофическая широта места.

(В (42), в третьем варианте  $e_0$ , принято:  $T=280^\circ$ ,  $V_g$  в м/сек.,  $P_0$  в  $\frac{\text{кал.}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин.}}$ )

Тогда на основе (7) и (18) формула (5) примет вид:

$$k(z) = \kappa v_* z \left( 1 + m_0 \frac{z}{z_0} \right); \quad (44)$$

$$m_0 = \frac{4e_0}{\kappa f^3 R_0} = - \frac{\beta z_0}{L}, \quad (45)$$

причем

$$R_0 = \frac{V_g}{2 \omega_z z_0} = \frac{N_0}{f} \quad (46)$$

есть число Россби.

Исходя далее из (4), (6), (13), (17), (21) и (43) можно применительно к неустойчивым стратификациям ( $t_0 > 0$ ), получить соотношение

$$R_0 = \frac{\frac{2}{\kappa} N_0}{\sqrt{(\text{Re } B)^2 + (\text{Im } B)^2}}, \quad (47)$$

где  $\text{Re}$  и  $\text{Im}$  — вещественная и мнимая части функции:

$$B = \frac{(\eta^2 - 1) \frac{dQ_v(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta_0} - D_v(\eta_h) (\eta^2 - 1) \frac{dP_v(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta_0}}{Q_v(\eta_0) - D_v(\eta_h) P_v(\eta_0)}. \quad (48)$$

В инверсиях ( $t_0 \leq 0$ ) функция Лежандра  $Q_v(\eta)$ , как указывалось выше, должна быть заменена функцией  $E_v(\eta)$ .

Опираясь на (19), (24) — (27), (36), (37), (40), (42) и (48), можно установить, что функция  $B$  зависит только от параметров  $t_0$  и  $N_0$ . Следовательно, соотношение (47) позволяет вычислить число Россби  $R_0$  в зависимости от этих параметров, затем найти  $f = \frac{N_0}{R_0}$  и  $e_0 = t_0 f^2$ .

Таким образом, геострофический коэффициент трения  $f$  будет найден как функция числа Россби  $R_0$  и параметра устойчивости  $t_0$ . (При безразличной стратификации  $e_0 = 0$  и  $f$  — функция одного параметра  $R_0$ ).

При заданном турбулентном потоке тепла  $P_0$  входные параметры  $e_0$  и  $R_0$  зависят только от внешних параметров и констант ( $\omega_z$ ,  $V_g$ ,  $z_0$ ,  $T$ ,  $\kappa$  и др.).

Призмный угол трения  $\varphi_0$  находится как функция тех же параметров  $e_0$  и  $Ro$  в виде

$$\varphi_0 = \arctg \frac{k \frac{dv}{dz} \Big|_{z_0}}{k \frac{du}{dz} \Big|_{z_0}} = \arctg \frac{\text{Im } B}{\text{Re } B}. \quad (49)$$

В табл. 2 приведены величины  $f$ ,  $\varphi_0$  и  $m_0$  в зависимости от  $e_0$  и  $Ro$ . В ней заключены основные численные результаты излагаемой здесь работы. По поводу этих результатов заметим следующее. Выше указывалось, что различные способы замыкания системы и некоторые другие изменения в постановке задачи в рамках дифференциальной схемы отразятся на виде функции  $\varphi_* \left( \frac{z}{L} \right)$  и, следовательно, на величине  $\beta$  в (5).

Поскольку последний является множителем во входной параметр устойчивости  $e_0$  по (42), то численные результаты, представленные в табл. 2, будут обладать известной инвариантностью к указанным изменениям. Разумеется, что эти изменения в постановке задачи не должны заметно затрагивать основные предпосылки излагаемой работы, а именно: представление  $k(z)$  моделью типа (5) и описание поля скорости ветра уравнением (1).

Что касается практического выбора параметра  $\beta$ , то при стратификациях, не очень сильно отклоняющихся от нейтральной ( $|t_0| < 4-5$ ), можно приближенно положить  $\beta = \beta_1$ , взяв  $\beta_1$  из [1, 18, 19] (полагая, например,  $\beta \sim 0,6-1$ ). Более подробно определение параметра  $\beta$  будет рассмотрено в отдельной статье.

Таблица 3

Геострофический коэффициент трения  $f$ , вычисленный по предлагаемой методике (верхняя строка) и полученный в [15] (нижняя строка)

$\mu$	$Ro$							
	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^7$	$10^8$	$10^9$	$10^{10}$	$10^{11}$
-100		0,096	0,066	0,048	0,038	0,032	0,027	0,023
		0,100	0,070	0,052	0,041	0,034	0,028	0,024
-10	0,096	0,066	0,050	0,040	0,032	0,027	0,024	0,021
	0,100	0,067	0,052	0,040	0,033	0,028	0,025	0,021
0	0,079	0,058	0,045	0,036	0,030	0,026	0,023	0,020
	0,082	0,058	0,046	0,037	0,031	0,027	0,023	0,021
10	0,056	0,045	0,037	0,032	0,027	0,024	0,021	0,019
	0,046	0,040	0,035	0,030	0,026	0,023	0,021	0,019
100	0,022	0,020	0,019	0,018	0,016	0,015	0,014	0,013
	0,018	0,017	0,016	0,016	0,016	0,015	0,015	0,014

В заключение в табл. 3 приведено сравнение величин  $f = \frac{v_*}{V_g}$ , вычисленных при различных значениях параметра термической устойчивости  $\mu = \frac{4}{\beta} t_0$  по предлагаемой методике и полученных в работе И. М. Бобылевой, С. С. Зилитинкевича и Д. Л. Лайхмана [15].

При расчетах  $f$  для  $\mu \neq 0$  было положено  $\beta = 0,8$ . Как видно, сходимость величин, рассчитанных по предлагаемой методике и полученных в [15], вполне удовлетворительная.

## Выводы

При задании турбулентного потока тепла  $P_0$ , внешних параметров и констант ( $V_g, z_0, \omega_z, \kappa, T, \beta$ ) полученное решение позволяет сравнительно просто вычислить следующие характеристики пограничного слоя атмосферы (при состояниях устойчивости, не сильно отклоняющихся от равновесного):

а) вертикальный профиль коэффициента турбулентности в приземном слое толщиной  $h$  и выше его. Это может быть выполнено соответственно по формулам (45) и (10) с помощью табл. 1 и 2. Сама высота  $h$ , как и масштаб приземного подслоя  $L$  по Обухову — Монину, могут быть вычислены по (35), (38) и (45) и данным табл. 2.

б) приземный угол трения (по табл. 2);

в) высоту пограничного слоя атмосферы  $H$  при различных термических и динамических факторах (по формулам (41), (42) и табл. 2);

г) вертикальные профили составляющих скорости ветра  $u(z)$  и  $v(z)$  (по формулам (21) и (22), представляющих общее решение; более подробно расчет  $u(z)$  и  $v(z)$  в данной работе не рассматривается).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л., Монин А. С. Динамика пограничного слоя атмосферы (обзор). Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, т. III, № 3, 1967.
2. Орленко Л. Р. Распределение метеорологических элементов в пограничном слое атмосферы. В сб. «Главная геофизическая обсерватория им. А. И. Воейкова за 50 лет Советской власти». Гидрометеиздат, Л., 1967.
3. Ключникова Л. А. К вопросу о расчете коэффициента турбулентности в пограничном слое атмосферы. Труды ГГО, вып. 205, 1967.
4. Лайхтман Д. Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Гидрометеиздат, Л., 1961.
5. Цейтин Г. Х., Орленко Л. Р. Стационарное распределение ветра, температуры и турбулентного обмена в пограничном слое при различных условиях устойчивости. Труды ГГО, вып. 94, 1960.
6. Цейтин Г. Х. К вопросу о строении пограничного слоя при нестационарных условиях, ч. II, Труды ГГО и УкрНИГМИ, вып. 144/40, 1963.
7. Лайхтман Д. Л., Утина З. М. Влияние макрометеорологических условий на строение пограничного слоя атмосферы. Труды ГГО, вып. 107, 1961.
8. Ключникова Л. А., Лайхтман Д. Л., Цейтин Г. Х. К вопросу о расчете вертикального профиля ветра в пограничном слое атмосферы. Труды ГГО, вып. 167, 1965.
9. Бортковский Р. С., Орленко Л. Р., Цейтин Г. Х. К расчету ветра и касательного напряжения над водной поверхностью. Труды ГГО, вып. 187, 1966.
10. Монин А. С. Динамическая турбулентность в атмосфере. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геоф., т. 14, № 3, 1950.
11. Blackadar A. K. The Vertical distribution of Wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. J. Geophys. Res., vol. 67, No. 8, 1962.
12. Lettau H. H. Theoretical Wind spirals in the boundary layer of a barotropic atmosphere. Beitr. Phys. Atmos., 35, No. 3—4, 1962.
13. Вагер Б. Г., Цейтин Г. Х. Схема расчета характеристик пограничного слоя атмосферы в стационарных условиях. Труды ГГО, вып. 187, 1966.
14. Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л., Цейтин Г. Х. Динамическая турбулентность в планетарном пограничном слое атмосферы. В сб. «Взаимодействие океана и атмосферы». Изд-во «Наукова думка», Киев, 1966.
15. Бобылева И. М., Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. Турбулентный режим в термически-стратифицированном планетарном пограничном слое атмосферы. Междунар. colloquium по микроструктуре атмосферы и влиянию турбулентности на распространение радиоволн. Москва, июнь, 1965. «Наука», М., 1967.
16. Рузин М. И. Влияние метеорологических условий на вертикальный профиль коэффициента турбулентности в пограничном слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, т. I, № 10, 1965.

17. Шехтер Ф. Н., Цейтин Г. Х. Дифференциальная схема строения стационарного пограничного слоя атмосферы с учетом лучистого теплообмена. См. в наст. сб.
18. Монин А. С., Обухов А. М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы. Труды Геофиз. ин-та АН СССР, № 24 (151), 1954.
19. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. I, «Наука», М., 1965.
20. Лебедев Н. И. Специальные функции и их приложение. Гостехиздат, М., 1953.
21. Казанский А. Б., Монин А. С. О турбулентном режиме выше приземного слоя воздуха. Изд. АН СССР, сер. геофиз. № 1, 1960.
22. Утина З. М. Строение пограничного слоя горизонтально-неоднородной атмосферы. Труды ГГО, вып. 167, 1965.
23. Шехтер Ф. Н. Решение задачи о строении пограничного слоя атмосферы при учете радиационного теплообмена. Труды ГГО, вып. 167, 1965.
24. Курпакова Т. А., Орленко Л. Р. О закономерностях распределения температуры и ветра в пограничном слое. Труды ГГО, вып. 205, 1967.
25. Лазарева Н. А., Орленко Л. Р. Анализ некоторых характеристик пограничного слоя по экспериментальным данным. Труды ГГО, вып. 205, 1967.

## ГЕОСТРОФИЧЕСКИЙ КОЭФФИЦИЕНТ ТРЕНИЯ И УГОЛ ОТКЛОНЕНИЯ НАЗЕМНОГО ВЕТРА ОТ ГЕОСТРОФИЧЕСКОГО ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Изучение характеристик турбулентного трения в пограничном слое атмосферы на основе экспериментальных данных дает представление о фактическом распределении этих характеристик и тем самым представляет возможность проверки некоторых результатов, полученных при теоретическом изучении процессов в пограничном слое.

Данная работа посвящается изучению геострофического коэффициента трения  $\frac{v_*}{V_g}$  и угла отклонения наземного ветра от геострофического ( $\alpha$ ) на основе анализа эмпирических данных. Следует отметить, что обобщение эмпирических материалов связано с большими трудностями из-за отсутствия надежных и точных данных.

При равновесной стратификации, как показано в ряде работ [1—3],  $\frac{v_*}{V_g}$  и  $\alpha$  определяются числом Россби  $Ro$

$$Ro = \frac{V_g}{lz_0},$$

где  $V_g$  — геострофический ветер;  $l$  — параметр Кориолиса;  $z_0$  — шероховатость подстилающей поверхности.

Зависимость приведенных характеристик от  $Ro$  можно отождествлять с зависимостью от  $z_0$ , так как вариации  $z_0$  в рассматриваемом материале на несколько порядков превышают вариации  $V_g$ . В стратифицированной атмосфере  $\frac{v_*}{V_g}$  и  $\alpha$  являются функцией двух параметров:

$$\frac{v_*}{V_g} = f_1(Ro, \mu); \quad (1)$$

$$\alpha = f_2(Ro, \mu), \quad (2)$$

где  $\mu$  — безразмерный параметр стратификации.

В качестве параметра  $\mu$  нами использовался предложенный в [5] параметр

$$\mu = \frac{g}{T} \frac{T_2 - T_H - \gamma_H H}{lV_g},$$

где  $H$  — высота пограничного слоя;  $\gamma_H$  — фактический градиент температуры на высоте  $H$ ;  $T_2$  — температура воздуха на высоте 2 м.

Зависимость  $\frac{v_{*}}{V_g}$  и  $\alpha$  от  $R_0$  и  $\mu$  изучалась на основе экспериментальных данных, полученных на метеостанциях Колтуши и Воейково за 1961—1965 гг., кроме того для исследования  $\frac{v_{*}}{V_g}$  дополнительно привлекались данные Махталинской, Днепропетровской, Цимлянкой и Пахта-Аральской экспедиций отдела физики пограничного слоя ГГО за 1953—1963 гг. [8, 9, 10]. Анализировались только безадвективные случаи, т. е. случаи, когда по данным радиозондирования в пограничном слое атмосферы наблюдался правый поворот ветра с высотой, а выше пограничного слоя на высоте 1—2 км скорость ветра менялась не больше чем на  $\pm 2$  м/сек. и направление не больше чем на  $\pm 10^\circ$ . Температура в пограничном слое принималась монотонно измеряющейся по высоте. Для этих случаев геострофический ветер определялся тремя способами:

- 1) на основании фактического ветра по данным радиозондирования —  $V_{gI}$ ,
- 2) по картам  $AT_{850}$  (с шагом  $6 \cdot 10^7$  км) —  $V_{gII}$
- 3) по картам  $AT_{850}$  (с шагом  $3 \cdot 10^7$  км) —  $V_{gIII}$ .

Сравнение этих данных привело к следующим соотношениям:

$$\left(\frac{V_{gII}}{V_{gI}}\right)_{\text{ср}} = 0,78 \text{ (по 63 случаям); } \left(\frac{V_{gIII}}{V_{gI}}\right)_{\text{ср}} = 0,9 \text{ (по 25 случаям).}$$

Рисунок 1, где дана связь между  $V_{gI}$  и  $V_{gII}$ , дополнен также данными А. П. Кухто [6] и данными В. В. Симонова [7]. Анализ этих

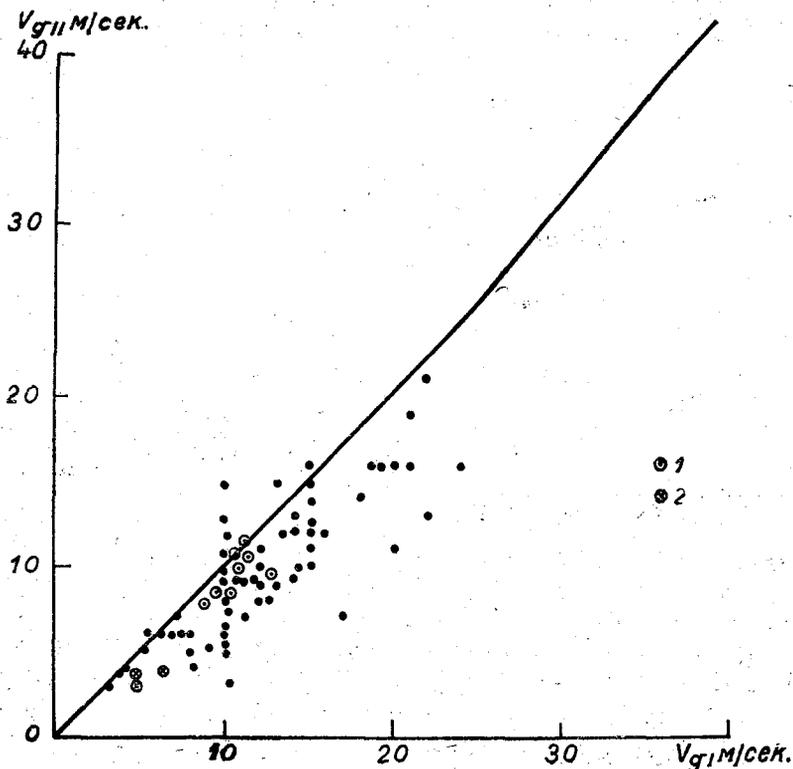


Рис. 1. Связь между геострофическим ветром, измеренным радиозондом ( $V_{gI}$ ), и геострофическим ветром, рассчитанным по картам  $AT_{850}$  ( $V_{gII}$ ).

1 — данные А. П. Кухто [6], 2 — данные В. В. Симонова [7].

данных показывает, что фактическая скорость геострофического ветра на 10—20% превышает скорость геострофического ветра, рассчитанного по картам АТ<sub>850</sub>. В дальнейшей работе в качестве  $V_g$  использовался только ветер, полученный по данным радиозондирования.

Таблица 1  
Коэффициент шероховатости  $z_0$  на ст. Колтуши

Сезон	$z_0$ см	$n$
Лето . . . . .	2,0	47
Весна—осень (без снега) . . . . .	1,0	24
Зима (высота снежного покрова 5—7 см) . . . . .	0,3	13
Зима (высота снежного покрова >7 см) . . . . .	0,02	31

Величина шероховатости подстилающей поверхности для каждого из рассмотренных случаев определялась по данным наблюдений за распределением скорости ветра в приземном слое. Результаты  $z_0$ , осредненные по числу случаев  $n$  за сезон на ст. Колтуши, приведены в табл. 1.

Приведенные данные в среднем согласуются с данными Т. А. Огневой [5].

Для определения угла  $\alpha$  в 1963—1965 гг. на ст. Колтуши были проведены детальные наблюдения за направлением ветра на высоте 10 м от поверхности земли по прибору М-63 (в течение часа производилось 30 отсчетов по прибору. Точность определения направления ветра по этому прибору составляет  $\pm 5^\circ$ . Угол  $\alpha$  определялся

как разность направлений ветра на уровне 10 м и на высоте пограничного слоя. Зависимость угла  $\alpha$  от  $Ro$  и от  $\mu$  приведена в табл. 2.

По данным таблицы были определены значения угла  $\alpha$  для  $\mu = -20$  и  $-150$ , которые приведены на рис. 2 вместе с данными об угле  $\alpha$  из [1, 3]. К сожалению, материалы наблюдений получены в основном при

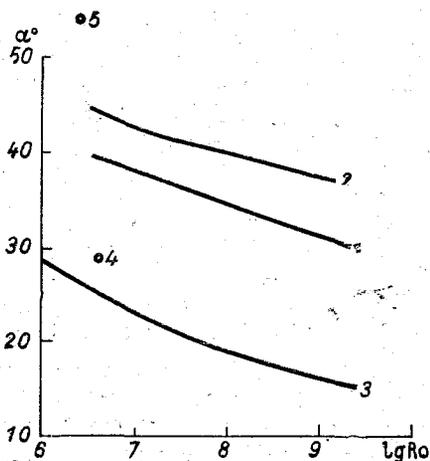


Рис. 2. Зависимость угла  $\alpha$  от числа Россби. 1 —  $\mu = -20$ , 2 —  $\mu = -150$ , 3 — данные Блэкдара [3] при равновесной стратификации, 4, 5 — данные Т. А. Курпаковой и Л. Р. Орленко [1] при  $\mu = 6$  и  $\mu = -170$  соответственно.

устойчивом состоянии атмосферы, но все же из анализа этих данных можно сказать, что увеличение устойчивости от  $\mu = -20$  до  $-150$  приводит к увеличению угла  $\alpha$  примерно на  $5^\circ$ , а увеличение числа Россби на два порядка (от  $10^7$  до  $10^9$ ) дает уменьшение угла примерно на  $8^\circ$ . В табл. 3 приведена зависимость геострофического коэффициента трения  $\frac{v_*}{V_g}$  от числа  $Ro$  и от стратификации атмосферы. Динамическая скорость  $v_*$  определялась по формуле

$$v_* = \kappa z \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (3)$$

так как по данным наблюдений за распределением скорости ветра

Таблица 2

Зависимость  $\alpha$  от  $R_0$  и  $\mu$ 

Экспериментальные наблюдения по М-63										Данные Т. А. Курлаковой, Л. Р. Орленко [1]				Данные Блюкара [3] при равновесной стратификации				
слабая устойчивость					устойчивая стратификация					равновесная стратификация				устойчивая стратификация				
$lg R_0$	$\mu$	$\alpha^\circ$	$n$	$lg R_0$	$\mu$	$\alpha^\circ$	$n$	$lg R_0$	$\mu$	$\alpha^\circ$	$n$	$lg R_0$	$\mu$	$\alpha^\circ$	$n$	$lg R_0$	$\mu$	$\alpha^\circ$
9,3	-8	30	9	9,2	-180	39	14									9,0		16
7,7	-20	34	9	8,3	-145	39	20									8,0		19
6,8	-6	39	8	6,8	-110	41	12	6,6	6	29	4	6,4	-170	54	10	7,0		23

Таблица 3

Зависимость  $v_*/V_g$  от  $R_0$  и стратификации атмосферы

Сильная устойчивость				Устойчивое состояние				Слабая устойчивость				Неустойчивость				Сильная неустойчивость			
$lg R_0$	$\mu$	$\frac{v_*}{V_g}$	$n$	$lg R_0$	$\mu$	$\frac{v_*}{V_g}$	$n$	$lg R_0$	$\mu$	$\frac{v_*}{V_g}$	$n$	$lg R_0$	$\mu$	$\frac{v_*}{V_g}$	$n$	$lg R_0$	$\mu$	$\frac{v_*}{V_g}$	$n$
6,6	0,0155	-437	7	6,7	0,021	-110	11	6,8	0,028	-9	14	7,0	0,0335	108	16	6,8	0,0468	250	12
9,0	0,010	-400	4	8,0	0,018	-110	11	7,85	0,021	-15	17								
				9,1	0,010	-150	13	9,3	0,012	-17	11								

в приземном слое на ст. Колтуши можно сказать, что до высоты 2 м преобладает логарифмический профиль ветра.

На рис. 3 дана зависимость  $\frac{v_*}{V_g}$  от  $Ro$  при равновесной стратификации, полученная по данным табл. 3. На этом же графике для сравнения приведены расчетная кривая, взятая из работы И. М. Бобылевой,

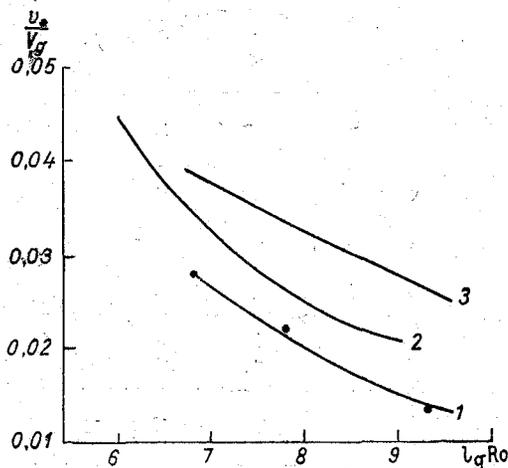


Рис. 3. Зависимость геострофического коэффициента трения  $\frac{v_*}{V_g}$  от числа Россби при равновесной стратификации.

1 — экспериментальные данные, 2 — экспериментальные данные Х. Леттау [2], 3 — данные расчета И. М. Бобылевой, С. С. Зилитинкевича, Д. Л. Лайхтмана [4].

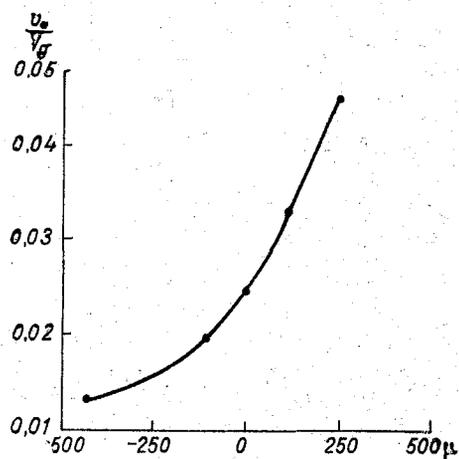


Рис. 4. Зависимость геострофического коэффициента трения  $\frac{v_*}{V_g}$  от стратификации при  $\lg Ro = 7$ .

С. С. Зилитинкевича, Д. Л. Лайхтмана [4], при  $\mu = 0$  и экспериментальная кривая по данным Леттау [2]. Все три кривые дают уменьшение  $\frac{v_*}{V_g}$  с увеличением  $Ro$ . Зависимость  $\frac{v_*}{V_g}$  от параметра стратификации  $\mu$  при  $\lg Ro$ , равном 7, приводится на рис. 4.

Таким образом, анализ эмпирического материала подтверждает значительное уменьшение геострофического коэффициента трения и увеличение угла  $\alpha$  с ростом устойчивости атмосферы. При равновесной стратификации наблюдается уменьшение угла  $\alpha$  и геострофического коэффициента трения с уменьшением шероховатости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Курпакова Т. А., Орленко Л. Р. О закономерностях распределения температуры и ветра в пограничном слое. Труды ГГО, вып. 205, 1967.
2. Леттау Х. Профиль ветра, направление трения и геострофический коэффициент трения в приземном слое атмосферы. В сб. «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха». Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Власкадар А. К. The vertical Distribution of Wind und turbulent exchange in a neutral atmosphere J. Geophys. Res., vol. 67, No. 8, 1962.

4. Бобылева И. М., Зилитинкевич С. С., Лайхтман Д. Л. Турбулентный режим в термически стратифицированном планетарно-пограничном слое атмосферы. Междунар. коллоквиум по микроструктуре атмосферы и влиянию турбулентности на распространение радиоволн. Москва, июнь, 1965. «Наука», М., 1967.
5. Огнева Т. А. Некоторые особенности теплового баланса деятельности поверхности. Гидрометеоздат, Л., 1955.
6. Кухто А. П. К вопросу об отклонении фактического ветра от геострофического. Метеорология и гидрология, № 2, 1956.
7. Симонов В. В. Сравнение реального ветра с геострофическим по данным экспедиции. Труды ГГО, вып. 144, 1963.
8. Материалы Махталинской экспедиции. Труды ГГО, вып. 107, 1961.
9. Материалы Днепропетровской экспедиции. Труды ГГО, вып. 144, 1963.
10. Материалы Пахта-Аральской экспедиции. Труды ин-та математики и механики АН УзССР, вып. 19. Ташкент, 1957.

## ОБ ИЗМЕНЕНИЯХ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ПРИ ПЕРЕХОДЕ С ТВЕРДОЙ ПОВЕРХНОСТИ НА ВОДНУЮ

Из обширной литературы, посвященной вопросам трансформации воздушных масс, лишь в немногих работах исследуется изменение средней скорости потока и уровня турбулентности в нем, вызванное изменением свойств подстилающей поверхности. Между тем эта задача представляет не меньший прикладной и познавательный интерес, чем изучение трансформации температуры и влажности в турбулентном потоке.

Этот интерес усиливается в связи с развивающимися исследованиями по взаимодействию моря и атмосферы. В прибрежной зоне строение пограничного слоя над морем не может быть описано без учета горизонтальной неоднородности, в создании которой большую роль играет изменение шероховатости, так как при переходе с суши на море шероховатость поверхности меняется на 2 порядка. Численные оценки показывают [7], что только изменение шероховатости может в некоторых случаях изменить скорость потока на 50—60%.

Схема изучаемого явления такова. Существует стационарный, температурно однородный турбулентный пограничный слой с логарифмическим распределением скорости по высоте. Изменение шероховатости вызывает образование внутреннего пограничного слоя толщиной  $\delta$ . Распределение скорости и характеристик турбулентности в этом слое отличается от их распределения в набегающем потоке.

Задача состоит в определении профилей горизонтальной  $u$  и вертикальной  $w$  составляющих скорости потока, коэффициента турбулентного обмена  $k$ , скорости трения  $v_*$ , толщины слоя  $\delta$  по заданным характеристикам внешнего потока и заданному изменению шероховатости от  $z_{01}$  к  $z_{02}$ .

Процесс описывается традиционной системой уравнений.

1. Уравнение движения (координатная ось  $x$  направлена вдоль потока, ось  $z$  — перпендикулярно потоку)

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial u}{\partial z}. \quad (1)$$

2. Уравнение баланса энергии турбулентности для условий нейтральной стратификации

$$u \frac{\partial b}{\partial x} - k \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 = Ds + Df, \quad (2)$$

где  $b$  — кинетическая энергия турбулентности;  $Ds$  — диссипация энергии турбулентности в тепло;  $Df$  — диффузия энергии турбулентности.

### 3. Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Обычно используются следующие граничные условия:

$$\text{при } z = z_{02} \quad u = w = 0; \quad (4)$$

$$\text{при } z \rightarrow \delta \quad w \rightarrow 0; \quad u \rightarrow u'(\delta); \quad (5)$$

$$\text{при } x = 0; \quad w = 0; \quad u = u'(z). \quad (6)$$

Через  $z_{02}$  и  $z_{01}$  выражается шероховатость поверхности при  $x > 0$  и  $x < 0$  соответственно,  $u'(z)$  — средняя скорость набегающего потока.

Наличие горизонтальной неоднородности (члены  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  и  $u \frac{\partial b}{\partial x}$  в уравнениях (1) и (2) значительно усложняет задачу как с точки зрения математической (нелинейность уравнений), так и в смысле выбора физически оправданных зависимостей для  $Df$ ,  $Ds$  и масштаба турбулентности  $l$ .

Одно из первых решений уравнений (1) и (3) при заданных профилях  $k(z)$  и значениях  $v_*$  на поверхности получено Л. С. Гандиным [1].

В последующих метеорологических работах по трансформации ветра ставилось целью уточнение задания коэффициента обмена в уравнении (1) [2], уточнение граничных условий [3], учет влияния температурных контрастов на поле ветра [4], построение моделей, учитывающих физическую взаимосвязанность процессов в пограничном слое [5, 6] (совместные задачи).

В последние годы (1964—1967) появилась целая серия работ, в которых развивается направление, основоположником которого был Эллиотт [7—10]. Во всех этих работах принята одинаковая модель:

- 1) шероховатость поверхности меняется скачком;
- 2) во внутреннем пограничном слое задается форма профиля скорости, что исключает необходимость задания функции  $k(z)$ ;
- 3) параметры заданного профиля и высота пограничного слоя отыскиваются в процессе решения задачи.

Одно из полученных Таунсендом решений было использовано в недавно опубликованной работе [9] для сравнения лабораторного эксперимента с теоретической моделью.

Эксперимент состоял в следующем. Турбулентный поток перемещался с гладкой пластины на воду, налитую в лоток. Под влиянием движущегося воздуха на поверхности воды образовывались волны, высота которых увеличивалась по мере увеличения разгона, до тех пор пока не создавался установившийся режим. Измерялись профили скорости и высота волн на нескольких расстояниях от границы раздела поверхностей.

Авторы эксперимента [9] добились удовлетворительного согласия результатов своих измерений с расчетной схемой Таунсенда после введения в эту схему ряда уточнений.

Однако при сравнении результатов эксперимента с теорией Таунсенда для достижения лучшего согласования (помимо других уточнений) в расчет была введена заданная зависимость  $v_*(x)$ . Это нарушило физическую общность постановки задачи. Ниже будет показано, что использование схемы с заданным  $z_{02} = \text{const}$  заметно искажает реальный процесс.

Представляет интерес сравнить результаты тщательного эксперимента, изложенного в [9], с результатами модели, существенно отличающейся от модели Таунсенда.

Будем считать, что после принятия колмогоровских соотношений для  $b$  и  $Ds$  ( $b = \frac{k^2}{l^2}$ ;  $Ds = \frac{ck^3}{l^4}$ ;  $c = \text{const}$ ) и подходящей модели для масштаба турбулентности  $l$  процесс полностью описывается уравнениями (1)–(3).

Простейший вариант приближенного решения этих уравнений может быть получен, если в уравнении баланса энергии турбулентности пренебречь членами, описывающими адвекцию и диффузию, и положить  $l = \gamma \kappa z$ , где  $\gamma = \text{const}$ ,  $\kappa$  — постоянная Кармана.

При указанных допущениях уравнение (1), в которое подставлено  $\omega$  из (3), записанное в безразмерных переменных, принимает вид

$$\frac{\tilde{z}_{02}}{2} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}} \left[ \tilde{u} l \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}} \int_0^{\tilde{\eta}} l \tilde{\eta} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} d \tilde{\eta} \right] = \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}^2}, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{u}{u_M}; & u_M &= \frac{v_*'}{\kappa}; & x &= \frac{\tilde{x}}{x_M}; \\ x_M &= \frac{u_M L^2}{k_M}; & k_M &= \kappa v_*' L; & L &= z_{01}; \\ \tilde{\eta} &= \ln \frac{z}{z_{02}}; & \tilde{v}_* &= \frac{v_*}{v_*'}; & \tilde{z} &= \frac{z}{L}; \end{aligned}$$

$v_*'$  — скорость трения в набегающем потоке.

Уравнение (3) сводится к выражению

$$\tilde{k} = \tilde{z}^2 \left( \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right) = \frac{1}{\tilde{z}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}}. \quad (8)$$

Здесь  $\tilde{k} = \frac{k}{k_M}$ .

Граничные условия, необходимые для решения уравнения (7) таковы:

$$\tilde{u}|_{\tilde{\eta}=0} = 0; \quad \tilde{u}|_{\tilde{\eta}=\varepsilon} = \ln \left( \frac{\delta}{z_{01}} - \frac{z_{02}}{z_{01}} + 1 \right); \quad (9)$$

$$\varepsilon = \ln \frac{\delta}{z_{02}}.$$

Последнее условие — условие равенства потоков на границе  $z = \delta$  — приводится к виду

$$\left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{\eta}} \right|_{\tilde{\eta}=\varepsilon} = 1. \quad (10)$$

Условие (10) определяет высоту пограничного слоя  $\delta$ .

Решение уравнения (7) находится последовательными приближениями [1, 5].

В дальнейшей работе будут использованы только безразмерные величины и значок  $\sim$  для простоты опущен.

Если считать, что необходимая точность достигается уже после нахождения двух приближений, то решение имеет вид:

$$u = v_{*0} \eta + u_1; \quad v_* = v_{*0} + v_{*1}; \quad (11)$$

$$v_{*0} = \frac{\ln \left( \frac{\delta}{z_{01}} - \frac{z_{02}}{z_{01}} + 1 \right)}{\ln \frac{\delta}{z_{02}}}; \quad (12)$$

$$u_1 = \frac{z_{02}}{2} \frac{dv_{*0}}{dx} \int_0^\eta \left[ \int_0^\eta \Phi_1(z) dz \right] d\eta - \\ - \frac{v_{*0}}{2} \frac{dz_{02}}{dx} \int_0^\eta \left[ \int_0^\eta \Phi_2 dz \right] d\eta + v_{*1}^2 \eta; \quad (13)$$

$$v_{*1}^2 = - \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{z_{02}}{2} \frac{dv_{*0}}{dx} \right] \int_0^\varepsilon \left[ \int_0^\eta \Phi_1 dz \right] d\eta - \\ - \frac{v_{*0}}{2} \frac{dz_{02}}{dx} \int_0^\varepsilon \left[ \int_0^\eta \Phi_2 dz \right] d\eta. \quad (14)$$

Толщина пограничного слоя  $\delta$  находится из уравнения (10), приведенного к виду:

$$\frac{d\delta}{dx} F(\delta) = 1; \quad (15)$$

$$F(\delta) = \frac{z_{02} \left( I_1 - I_2 - \frac{Y_1 - Y_2}{\varepsilon} \right) (1 - v_{*0})}{2 \ln \left( \frac{\delta}{z_{02}} \right) \delta (\eta - 1)}. \quad (16)$$

Здесь

$$I_1 = \eta^2 e^\eta - 2\eta e^\eta + 2(e^\eta - 1) - I_2; \quad (17)$$

$$I_2 = \eta e^\eta - 2(e^\eta - 1) + \eta; \quad (18)$$

$$Y_1 = \eta^2 e^\eta - 4\eta e^\eta + 6(e^\eta - 1) - 2\eta - Y_2; \quad (19)$$

$$Y_2 = \eta e^\eta - 3(e^\eta - 1) + 2\eta + \frac{\eta^2}{2}; \quad (20)$$

$$\Phi_1 = \eta^2 e^\eta - \Phi_2; \quad (21)$$

$$\Phi_2 = \eta e^\eta - e^\eta + 1. \quad (22)$$

Приведем экспериментальные (эксп.) и теоретические (теор.) значения  $v_*$  на уровне  $z_{02}$  при

$$z_{01} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ см}; \quad v_* = 37 \text{ см/сек}; \quad \frac{dz_{02}}{dx} = 0,61 \cdot 10^{-4} \\ x = 0,41; \quad \gamma = c^{1/4}; \quad c = 0,046^{3/4}$$

x см	16	47	109	169
$v_*$ (эксп.)	1,49	1,65	1,63	1,87
$v_*$ (теор.)	1,80	1,77	1,72	1,67

Из приведенных данных видно, что расчет дает обратную зависимость  $v_*$  от  $x$ . Этот результат не является неожиданным. Он получается как следствие математической стилизации процесса, не учитывающей горизонтальную изменчивость шероховатости. Задание скачка шероховатости на границе  $x=0$  искусственно преувеличивает роль горизонтальной диффузии. До некоторой степени этот эффект может быть ослаблен учетом вытеснения линий тока в турбулентном потоке. Но и при этом оказывается, что при  $x \rightarrow 0 \frac{v_{*2}}{v_{*1}} \rightarrow \frac{z_{02}}{z_{01}}$ . Здесь  $v_{*2}$  и  $z_{02}$  — скорость трения и шероховатость при  $x > 0$ ,  $v_{*1}$  и  $z_{01}$  — те же характеристики при  $x < 0$ .

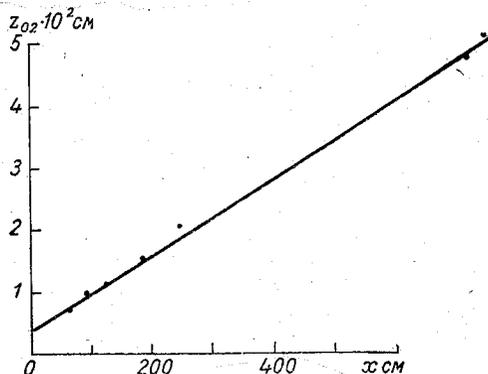


Рис. 1. Изменение шероховатости водной поверхности в зависимости от расстояния до границы  $x=0$  (по данным [10]).

Таким образом, модель течения с постоянным скачком шероховатости не отражает реального процесса. При использовании тех или иных схем, по-видимому, следует принимать во внимание существование непостоянной функции  $z_{02}(x)$ , ясно видное из рис. 1, построенного по данным статьи [9].

Эта экспериментальная зависимость была использована для проведения дальнейших расчетов.

На рис. 2 показана теоретическая зависимость  $v_{*2}$ , полученная из решения (11) — (22) с учетом переменной шероховатости, и экспериментальные значения  $v_*$ . Очевидно, в этом случае до-

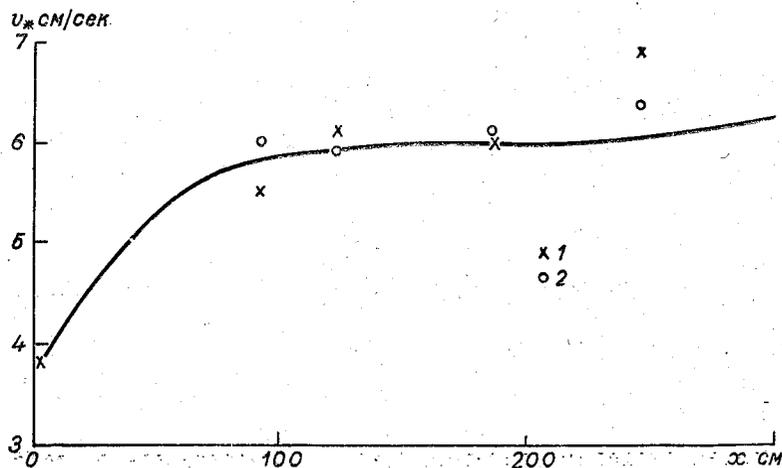


Рис. 2. Изменение скорости трения  $v_*$  при удалении от границы  $x=0$ . 1 — экспериментальные точки, 2 — значения  $v_*$ , использованные в теоретических расчетах [9].

стигается удовлетворительное согласование расчета с экспериментом. Полученное решение, по-видимому, правильно отражает известную особенность водной поверхности, состоящую в увеличении шероховатости с увеличением высоты ветровых волн.

Как было сказано выше, приведенное решение получено без учета адвекции и диффузии энергии турбулентности. Однако наличие или отсутствие этого эффекта заметно сказывается на высоте пограничного слоя  $\delta$ . Так, учет члена  $u \frac{\partial b}{\partial x}$  в уравнении (3) дает следующее значение функции  $F(\delta)$  в уравнении (15), служащем для определения  $\delta$ :

$$F(\delta) = \frac{1}{2(1-v_{*0})} \left[ P(\delta)I - \frac{P(\delta)Y_1 + Q(\delta)Y_2}{\varepsilon} + 2\delta Q(\delta)\varepsilon \right], \quad (23)$$

где

$$P(\delta) = Q(\delta) - \frac{v_{*0}}{z_{02}} \frac{dz_{02}}{dx}; \quad (24)$$

$$Q(\delta) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{1-v_{*0}}{\delta} + \frac{v_{*0}}{z_{02}} \frac{dz_{02}}{dx} \right); \quad (25)$$

$$Y_1 = \delta \varepsilon^2 - 5\delta \varepsilon + 9(\delta - z_{02}) - 4z_{02}\varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2}, \quad (26)$$

$$Y_2 = \varepsilon \delta - (\delta - z_{02}); \quad (27)$$

$$I = \delta \varepsilon^2 - 3\delta \varepsilon + 4(\delta - z_{02}) - z_{02}\varepsilon. \quad (28)$$

Расчет  $\delta$  по формулам (15—23) дает результат, показанный на рис. 3.

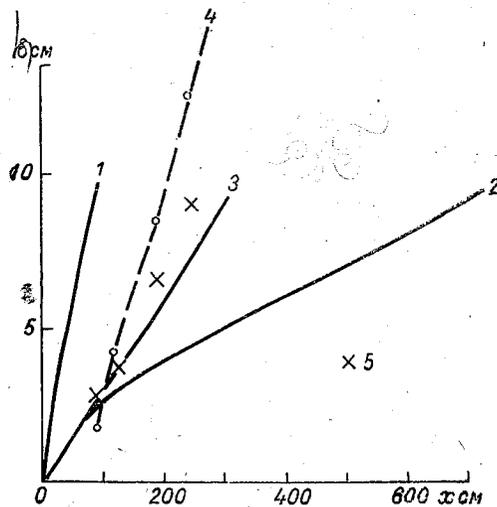


Рис. 3. Изменение толщины пограничного слоя  $\delta(x)$  в зависимости от учета в решении адвективного и диффузионного членов уравнения (3).

1 — без учета адвекции и диффузии энергии турбулентности; 2 — с учетом адвекции, но без учета диффузии энергии турбулентности; 3 — с учетом адвекции и диффузии энергии турбулентности; 4 — зависимость  $\delta(x)$ , вычисленная по модели Таунсенда; 5 — экспериментальные точки.

Из рисунка видно, что, не учитывая адвекцию и диффузию, мы сильно завышаем высоту пограничного слоя (кривая 1).

Расчеты, проведенные с учетом адвективного члена в уравнении (2), дают заниженные значения  $\delta$  (кривая 2).

Помимо адвекции существенно влияние диффузии энергии турбулентности. Для учета этого влияния можно использовать некоторые физические соображения о соотношении порядков величин составляющих баланса энергии турбулентности и тем самым уточнить условия для определения  $\delta$ .

Известно, что приток энергии турбулентности от среднего движения и диссипация энергии в тепло максимальны вблизи поверхности и убывают с увеличением высоты  $z$ . Наоборот, адвекция и диффузия энергии

турбулентности максимальны вблизи границы внутреннего пограничного слоя. Следовательно, можно предположить, что использование приближенного соотношения

$$\left(u \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial b}{\partial z}\right)_{z=\delta} \quad (29)$$

вместо равенства (10) дает возможность более точно описать изучаемый процесс.

Из соотношения (29) получаем функцию вида

$$F(\delta) = \frac{1}{2v_{*0} \delta \rho} \left[ z_{02} \frac{\rho}{\varepsilon} \Phi_1 - v_{*0} \frac{dz_{02}}{dx} \Phi_2 \right]^2, \quad (30)$$

где  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  определяются равенствами (21) и (22),  $\frac{dz_{02}}{dx}$  — задается из эксперимента и

$$\rho = \frac{1 - v_{*0}}{\delta} + \frac{v_{*0}}{z_{02}} \frac{dz_{02}}{dx}. \quad (31)$$

На рис. 3 показаны рассчитанные с использованием (30) значения величин  $\delta(x)$ . На этом же рисунке приведены экспериментально полученные точки зависимости  $\delta(x)$ . Значительно лучшее совпадение кривой 3 с экспериментальными данными свидетельствует о возможности использования условия (29), принятого для определения  $\delta$ . Численные значения  $v_*$  в зависимости от использования условий (29) или (10) меняются в пределах экспериментального разброса точек.

Решение (11) — (14) с учетом равенства (29) вполне удовлетворительно описывает строение турбулентного пограничного слоя при наличии горизонтальной неоднородности шероховатости.

Рассмотренная модель может быть применена к описанию процессов над водной поверхностью в случае учета реального изменения шероховатости этой поверхности.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. К вопросу о трансформации профиля ветра. Труды ГГО, вып. 33, 1952.
2. Дмитриев А. А., Соколова И. Н. Схема оценки изменений скорости и профиля ветра при переходе с суши на море. Труды Гидрофиз. ин-та, вып. 4, 1954.
3. Петросян Н. А. К вопросу о трансформации профиля ветра под влиянием подстилающей поверхности. Изв. АН АрмССР, сер. ФМ, т. 16, № 3, 1963.
4. Зайцев А. С. Изменение ветра над ограниченными водоемами. Автореферат диссертации. УзбГУ, Ташкент, 1966.
5. Надежина Е. Д. Об использовании уравнения баланса энергии турбулентности в задаче о трансформации воздушной массы. Труды ГГО, вып. 187, 1966.
6. Тимофеев М. П. Метеорологический режим водоемов. Гидрометеонздат, Л., 1963.
7. Panofsky H. A., Townsend A. A. A change of terrain roughness and the wind profile. Quart. J. Roy. Met. Soc., vol. 90, No. 384, 1964.
8. Townsend A. A. Self-preserving flow inside a turbulent boundary layer. J. Fl. Mech., vol. 22, p. 4, 1965.
9. Plate E. J., Hidy G. M. Laboratory study of air flowing over a smooth surface onto small water waves. J. Geophys. Res., vol. 72, No. 18, 1967.
10. Elliott W. P. The growth of the atmospheric internal boundary layer. Trans. Am. Geophys. Union, 39, 1958.

## К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ХАРАКТЕРИСТИК ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА В МЕЛКОМ ВОДОЕМЕ

Для решения целого ряда задач теоретического и прикладного характера требуется знание составляющих теплового баланса на поверхности ограниченных водоемов, в том числе теплообмена в воде. Наиболее полное освещение этот вопрос получил в работах М. П. Тимофеева, Л. В. Несиной и др., результаты которых обобщены в монографии [1]. В этих работах для расчета потока тепла в воздух и затрат тепла на испарение решалась задача о трансформации воздушной массы при переходе ее с суши на водоем. Для определения потока тепла в воде использовалась связь между потоком тепла, изменением теплосодержания и величиной поглощенной радиации в воде. При решении задачи вводился в рассмотрение эмпирический параметр  $\mu$ , равный отношению средней по глубине температуры к ее значению на поверхности водоема. Такой подход не требовал сведений о характеристиках турбулентности воды, а сам «внутренний» параметр схемы  $\mu$  определялся не из решения задачи, а считался заданным. Расчеты по этой схеме дают удовлетворительные результаты только для осредненных за длительный промежуток времени величин. Для выявления особенностей теплообмена за более короткий промежуток времени, или расчета профиля температуры, требуется решить уравнение теплопроводности для воды. При этом появляется необходимость в привлечении каких-либо гипотез о характеристиках турбулентности.

Такая задача рассматривалась, например, в работе Н. С. Орловского [2], в которой задавалось линейное изменение коэффициента турбулентности с глубиной. Полагая известным касательное напряжение в воздухе, параметры этой зависимости определялись из условия склейки потоков количества движения на границе раздела вода — воздух. При этом удалось ответить на целый ряд интересных вопросов. Рассчитан, в частности, суточный ход теплообмена водной поверхности с нижележащими слоями. Такое детальное изучение теплообмена может оказаться необходимым при расчете метеорологических характеристик над водоемом в переходные сезоны, которые продолжаются относительно короткий промежуток времени и характеризуются весьма резким изменением условий теплообмена в воде.

В работе Н. С. Орловского, как и в работе Б. Г. Вагера, В. И. Воробьева и Д. Л. Лайхтмана [3], коэффициент турбулентности непрерывно растет от дна водоема к его поверхности. В то же время существует мнение [4—6], согласно которому, по мере приближения к поверхности раздела следует ожидать уменьшения интенсивности турбулентного перемешивания.

Так, например, измеренные в ветровых каналах профили средней скорости дрейфового течения [7] свидетельствуют о том, что максимум коэффициента обмена расположен где-то под поверхностью раздела.

На основании анализа результатов измерения вертикального градиента температуры в очень тонком поверхностном слое воды и использования теплосбалансовых соотношений было установлено, что коэффициент турбулентности непосредственно у поверхности весьма близок к молекулярному [8].

Опираясь на экспериментально полученные особенности термического режима поверхностного слоя моря, Е. В. Борисов [6] считает, что уменьшение интенсивности турбулентности у поверхности является необходимым условием удовлетворительного совпадения теории с опытными данными. Уменьшение коэффициента турбулентности вблизи поверхности он объясняет тем, что энергия турбулентных пульсаций на поверхности моря идет в основном на генерацию волн в высокочастотной части спектра.

В. Г. Левич и С. А. Китайгородский [4, 5] связывают уменьшение коэффициента турбулентности со стабилизирующим действием свободной поверхности, т. е. с силой поверхностного натяжения.

Можно предположить, что данный эффект обусловлен несколькими причинами. Например, для достигших поверхности вихрей, размеры которых  $\lambda$  значительно меньше высоты волны  $h$ , основное значение имеет сила поверхностного натяжения. Чтобы крупные турбулентные образования ( $\lambda \gg h$ ) могли изменить геометрию поверхности раздела, их энергосодержание должно быть соизмеримо с той работой, которую вихри должны совершить против «архимедовых» сил, пропорциональных разности плотностей вода — воздух. Последнее обстоятельство приводит к постепенному дроблению вихрей по мере их приближения к водной поверхности. В этом случае сила поверхностного натяжения будет играть, видимо, второстепенную роль.

Учитывая вышесказанное, в данной работе принимается, что масштаб турбулентности  $l$  по мере приближения ко дну водоема и к физической поверхности воды стремится к нулю, а при  $z=0$  и при наличии волнения имеет какое-то конечное значение  $l_0$ . Ось  $z$  направлена вниз, а за начало отсчета принять уровень водоема при полном отсутствии ветрового волнения. В этом случае в качестве одной из простейших гипотез об изменении  $l$  с глубиной можно принять следующую:

$$l = (l_0 + \alpha_1 z) \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^\beta. \quad (1)$$

Здесь  $l_0$  — средний масштаб турбулентности при  $z=0$  для данного типа волнения;  $\delta$  — глубина водоема;  $\alpha_1$  и  $\beta$  — безразмерные постоянные.

Примем, что  $l_0$  пропорционально средней высоте волны

$$l_0 = \alpha \times h, \quad (2)$$

где  $h$  — средняя высота волны;  $\alpha$  — постоянная Кармана;  $\alpha$  — положительная величина, зависящая от типа волнения.

Так как данные о распределении характеристик турбулентности в ограниченных водоемах практически отсутствуют, в дальнейшем  $\beta$  принимается равным единице.

Рассмотрим однородный по горизонтали непроточный мелкий водоем такой глубины  $\delta$ , что ветровое перемешивание распространяется до дна, а влиянием силы Кориолиса на процессы в воде в первом при-

ближении можно пренебречь. Тогда в стационарном случае задача сводится к решению следующей системы уравнений:

$$a \frac{du}{dz} = -v_*^2; \quad (3)$$

$$\alpha_p a \frac{d\rho}{dz} = -F;$$

$$-v_*^2 \frac{du}{dz} + \frac{g}{\rho} F = \varepsilon + D, \quad (4)$$

где  $a$  — коэффициент турбулентного обмена для количества движения в воде;  $\alpha_p$  — отношение коэффициентов турбулентности для плотности и количества движения;  $u$  — скорость дрейфового течения;  $\rho$  — плотность воды;  $v_*$  — динамическая скорость;  $F$  — поток плотности;  $\varepsilon$  — скорость диссипации турбулентной энергии в тепло;  $D$  — диффузионный приток турбулентной энергии.

Для определения термических характеристик следует привлечь зависимость плотности от температуры, которая в общем случае является нелинейной. Но в первом приближении для отдельных интервалов изменения температуры эту зависимость для средних величин можно аппроксимировать линейной функцией вида

$$\rho = A - A_1 \Theta. \quad (5)$$

Воспользовавшись приведенной в [11] таблицей значений плотности воды в зависимости от ее температуры, например, для интервала изменения температуры от 8—10 до 22—24° приближенно можно принять

$$A = 1,00134; \quad A_1 = 1,54 \cdot 10^{-4};$$

где  $\Theta$  в градусах Цельсия;  $\rho$  в г/см<sup>3</sup>.

Таким образом, в уравнении баланса турбулентной энергии член, учитывающий влияние сил плавучести на турбулентный обмен, с учетом (5) можно записать в виде

$$F = -A_1 \frac{\alpha_p}{\alpha_\Theta} \frac{B}{\rho c}.$$

Здесь  $B$  — поток тепла в воде, который выражается формулой

$$B = -\alpha_\Theta a \rho c \frac{d\Theta}{dz}; \quad (6)$$

$c$  — удельная теплоемкость воды.

Примем, что диффузия энергии турбулентности пропорциональна потоку плотности, т. е.  $D = A_2 \frac{g}{\rho} F$ , где  $A_2$  — коэффициент пропорциональности.

Используя гипотезу приближенного подобия А. Н. Колмогорова, согласно которой

$$a = l\sqrt{b}; \quad \varepsilon = c_* \frac{b^{\frac{3}{2}}}{l}$$

( $c$  — универсальная постоянная), и обозначая

$$\beta = A_1 \frac{\alpha_p}{\alpha_\Theta} (1 - A_2),$$

уравнение баланса турбулентной энергии (4) запишем в виде

$$v_*^2 \frac{du}{dz} + \beta \frac{g}{\rho} \frac{B}{\rho c} + c_* \frac{a^3}{l} = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим случай нейтральной стратификации, для которого уравнение (7) упростится следующим образом:

$$v_*^2 \frac{du}{dz} + c_* \frac{a^3}{l^4} = 0.$$

Решая это уравнение совместно с (1) и (3), получаем:

$$a = \frac{x_1}{\sqrt[4]{c_*}} v_* \left( \frac{xh}{4x_1} + z \right) \left( 1 - \frac{z}{\delta} \right);$$

$$\frac{du}{dz} = - \frac{v_*}{\frac{x_1}{\sqrt[4]{c_*}} \left( \frac{xh}{4x_1} + z \right) \left( 1 - \frac{z}{\delta} \right)};$$

$$u(z) = - \frac{v_*}{\frac{x_1}{\sqrt[4]{c_*}} \left( 1 + \frac{xh}{4x_1\delta} \right)} \ln \frac{z - \delta}{z + \frac{xh}{4x_1\delta}} + \text{const.} \quad (8)$$

В случае отсутствия волнения ( $h=0$ ) при  $z \rightarrow \delta$  получим

$$\frac{du}{dz} = \frac{\sqrt[4]{c_*}}{x_1} \cdot \frac{v_*}{z - \delta}.$$

Принимая, что вблизи стенки выполняется соотношение

$$\frac{du}{dz} = \frac{v_*}{x(z - \delta)},$$

имеем

$$\frac{x_1}{\sqrt[4]{c_*}} = x.$$

Рассмотрим стратифицированный по вертикали водоем. Наличие фиксированного масштаба длины делает малоэффективными методы, разработанные, например, для учета влияния стратификации на турбулентный обмен в приземном слое атмосферы и базирующиеся на принципах теории подобия. Поэтому воспользуемся методом, предложенным в работе Суинбенка [9]. Как показывает анализ экспериментального материала, во всяком случае, при стратификации, не очень сильно отличающейся от безразличной, этот метод дает вполне удовлетворительные результаты [10].

Применительно к нашему случаю идея Суинбенка сводится к следующему. Вводится новая переменная глубина  $x$  такая, что при любых условиях стратификации выполняется зависимость

$$\frac{du}{dx} = - \frac{v_*}{x_1^2 \left( \frac{l_0}{x_1} + x \right) \left( 1 - \frac{x}{H} \right)}. \quad (9)$$

Так как в новых переменных соотношение между градиентом дрейфового течения и глубиной сохраняется, предполагается, что суммарный приток турбулентной энергии за счет касательного напряжения и сил плавучести можно выразить одним членом — «псевдокасательным» напряжением  $v_*^2 \frac{du}{dx}$ , т. е.

$$v_*^2 \frac{du}{dz} + \beta \frac{g}{\rho} \frac{B}{\rho c} = v_*^2 \frac{du}{dx}. \quad (10)$$

В этом и заключается гипотеза, использованная Суинбенком при учете влияния стратификации на турбулентный обмен.

В формуле (9)  $H$  — глубина водоема в новых переменных. Формально вместо  $l_0$  нужно было бы также писать некоторую новую длину. Но так как в большинстве случаев эта величина сама по себе мала и, как показывают расчеты, различие в высотах воли в новых и старых переменных невелико, принимается, что при любой стратификации оценку  $l_0$  можно проводить по формуле (2).

Из уравнения (10) получаем

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dx} + \frac{v_*}{\alpha L}, \quad (11)$$

где

$$L = \frac{v_*^3}{\alpha \beta \frac{g}{\rho} \frac{B}{\rho c}},$$

откуда

$$\frac{dx}{dz} = 1 + \frac{v_*}{\alpha L} \frac{du}{dx}. \quad (12)$$

Таким образом, считая распределение  $\frac{du}{dx}$  заданным по формуле (9), величины  $a(z)$ ,  $\Theta(z)$  и  $u(z)$  можно вычислить соответственно по (3), (6) и (11).

Перейдем к безразмерным переменным по формулам:  $u = u_0 \tilde{u}$ ;  $x = x_0 \tilde{x}$  и т. д., введя следующие характерные масштабы:

$$u_0 = \frac{v_*}{\alpha}; \quad a_0 = \alpha v_* \delta;$$

$$z_0 = x_0 = \delta; \quad \Theta_0 = \frac{B}{\alpha \theta \alpha \rho c v_*}$$

и обозначения:

$$\zeta = \frac{H}{\delta}; \quad \tilde{L} = \frac{\delta}{L}; \quad \tilde{h} = \frac{\alpha h}{4 \alpha_1 \delta}.$$

Тогда система уравнений в безразмерной форме после некоторых преобразований примет вид:

$$\tilde{a} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} = -1; \quad (13)$$

$$\tilde{a} \frac{d\tilde{\Theta}}{d\tilde{z}} = -1; \quad (14)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{z}} = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} + \tilde{L}, \quad (15)$$

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} = \frac{1}{\frac{\tilde{x}^2}{\zeta} - \left(1 - \frac{\tilde{h}}{\zeta}\right) \tilde{x} - \tilde{h}},$$

а  $\tilde{x}$  и  $\tilde{z}$  связаны соотношением

$$d\tilde{z} = \frac{d\tilde{x}}{\frac{\tilde{L}}{\zeta} \tilde{x}^2 - \tilde{L} \left(1 - \frac{\tilde{h}}{\zeta}\right) \tilde{x} + (1 - \tilde{h}\tilde{L})} \quad (16)$$

Величину и связь  $\zeta$  с параметром  $\tilde{L}$ , характеризующим стратификацию, дает решение последнего уравнения при условии

$$\tilde{x} \Big|_{\tilde{z}=1} = \zeta.$$

Решение уравнения (16) зависит от величины  $\Delta$ , знак которой обуславливает вид зависимости  $\tilde{x}$  от  $\tilde{z}$ ,

$$\Delta = \frac{4\tilde{L}}{\zeta} - \left(\tilde{L} + \frac{\tilde{L}\tilde{h}}{\zeta}\right)^2.$$

В случае устойчивого состояния водной массы ( $\tilde{L} < 0$  и  $\Delta < 0$ ) решение уравнения (16) при граничном условии  $\tilde{z}|_{\tilde{x}=0} = 0$  имеет вид

$$\tilde{x} = \frac{\zeta(\mu + n) (1 - e^{\tilde{z}\sqrt{-\Delta}})}{2 \left[ 1 - \frac{\mu + n}{\mu - n} e^{\tilde{z}\sqrt{-\Delta}} \right]},$$

где

$$\mu = 1 - \frac{\tilde{h}}{\zeta}; \quad n = \frac{\sqrt{-\Delta}}{\tilde{L}}.$$

Величина  $\zeta$  определяется из уравнения

$$e^{\sqrt{-\Delta}} = \frac{(\mu + n - 2)(\mu - n)}{(\mu - n - 2)(\mu + n)},$$

где  $n$  и  $\Delta$  являются функциями  $\zeta$ .

Решая (15), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{u}(y) = & \frac{\tilde{L}}{\sqrt{-\Delta}} (M - 1) \ln \frac{1 - \gamma y}{1 - y} + \\ & + \frac{M}{2 - \mu} \ln \frac{\mu y - r}{\mu y + r(1 - \mu)} + \text{const.} \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} y = & \frac{1 - e^{\tilde{z}\sqrt{-\Delta}}}{1 - \gamma e^{\tilde{z}\sqrt{-\Delta}}}; \quad M = \frac{1 - n^2}{\mu^2 - n^2 + 4(1 - \mu)}; \\ r = & \frac{2\mu}{\mu + n}; \quad \gamma = \frac{\mu + n}{\mu - n}. \end{aligned}$$

Из (13) находим

$$\tilde{a}(y) = -\frac{y^2 - ry - a\tilde{h}}{a + \tilde{L}(y^2 - ry - a\tilde{h})},$$

где

$$\alpha = \frac{4}{\zeta(1+n)^2}.$$

При неустойчивом состоянии водной массы  $\tilde{L} > 0$ . При этом  $\Delta$  будет положительным только при  $0 < \tilde{L} < \frac{4}{\zeta\left(1 + \frac{\tilde{h}}{\zeta}\right)^2}$ . Но характер зависимости

$\zeta$  от  $\tilde{L}$  обеспечивает безграничный диапазон изменения  $\tilde{L}$  в области положительных его значений. В этом случае

$$\tilde{x} = \frac{\zeta}{2} \left[ \mu + n_1 \operatorname{tg} \left( \frac{z\sqrt{\Delta}}{2} + s \right) \right],$$

где

$$n_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{\tilde{L}}; \quad s = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left( -\frac{\mu}{n_1} \right).$$

Величина  $\zeta$  определяется из уравнения

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2n_1}{n_1^2 - \mu(2 - \mu)}.$$

Для скорости дрейфового течения и коэффициента турбулентности получаем:

$$\tilde{u}(y) = \frac{2}{n_1} (1 - N) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\mu(y-1)}{n_1} + \frac{N}{2-\mu} \ln \frac{\mu y - 2}{\mu y + 2(1-\mu)} + \operatorname{const}; \quad (18)$$

$$\tilde{a}(y) = -\frac{y^2 - 2y - m\tilde{h}}{m + \tilde{L}(y^2 - 2y - m\tilde{h})},$$

где

$$y = 1 + \frac{n_1}{\mu} \operatorname{tg} \left( \frac{z\sqrt{\Delta}}{2} + s \right);$$

$$N = \frac{1 + n_1^2}{\mu^2 + n_1^2 + 4(1-\mu)}; \quad m = \frac{4}{\mu^2 \zeta}.$$

Экспериментальные данные, удовлетворяющие условиям поставленной задачи, практически отсутствуют. Сравнение результатов расчета по полученным формулам проводилось с результатами расчетов, получающимися при использовании линейной зависимости коэффициента турбулентности в воде от глубины, что привело к необходимости принять  $\tilde{h} = 0$ , т. е. рассматривался случай полного отсутствия волнения. Тогда формулы (8), (17) и (18) упрощаются и принимают вид:

при устойчивой стратификации ( $\tilde{L} < 0$ )

$$\tilde{a}(y) = \frac{r_1 y - y^2}{a_1 + \tilde{L}(y^2 - r_1 y)}; \quad (19)$$

$$\tilde{u}(y) = \ln\left(1 - \frac{r_1}{y}\right) + \text{const}; \quad (20)$$

$$r_1 = \frac{2}{1+n}; \quad \alpha_1 = \frac{\tilde{L}(1-n)}{1+n}; \quad \gamma = \frac{1+n}{1-n};$$

при нейтральной стратификации ( $\tilde{L}=0; L=\infty$ )

$$\tilde{a}(\tilde{z}) = \tilde{z}(1-\tilde{z}); \quad (21)$$

$$\tilde{u}(\tilde{z}) = \ln\left(1 - \frac{1}{\tilde{z}}\right) + \text{const}; \quad (22)$$

при неустойчивости стратификации ( $\tilde{L}>0$ )

$$\tilde{a}(y) = \frac{2v - v^2}{\frac{4}{\epsilon} + \tilde{L}(v^2 - 2v)}; \quad (23)$$

$$\tilde{u}(y) = \ln\left(1 - \frac{2}{v}\right) + \text{const}; \quad (24)$$

$$v = 1 + n_1 \operatorname{tg}\left(\frac{\tilde{z}\sqrt{\Delta}}{2} + s\right);$$

$$s = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{n_1}\right).$$

При линейном законе изменения коэффициента обмена с глубиной

$$\tilde{a}(\tilde{z}) = 1 - \tilde{z} \quad (25)$$

для вертикального распределения скорости получаем формулу

$$\tilde{u}(\tilde{z}) = \ln(\tilde{z} - 1) + \text{const}. \quad (26)$$

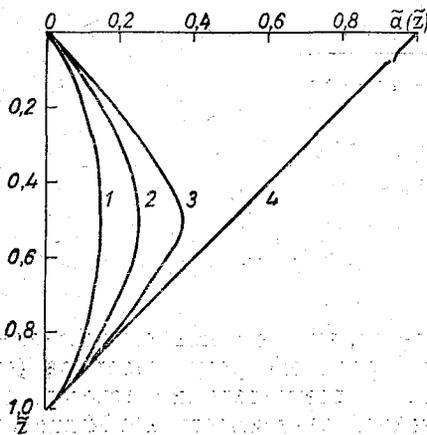


Рис. 1. Зависимость коэффициента турбулентности от глубины при различных стратификациях.

1)  $\tilde{L} = -6$ , 2)  $\tilde{L} = 0$ , 3)  $\tilde{L} = 6$ ; 4)  $\tilde{a} = 1 - \tilde{z}$

По этим формулам были проведены некоторые расчеты. Постоянные интегрирования в уравнениях (20), (22), (24) и (26) находились из условия равенства нулю средней скорости течения на уровне шероховатости дна.

На рис. 1 в качестве иллюстрации приведены безразмерные профили коэффициента обмена, рассчитанные по формулам (19), (21), (23), (25) для одних и тех же условий. Полученные зависимости удовлетворяют общепринятым физическим представлениям и указывают на рост коэффициента обмена с увеличением неустойчивости.

Изменение профилей дрейфового течения при изменении стратификации в водоеме можно проследить на рис. 2. Там же нанесен профиль, рассчитанный при использовании линейной зависимости коэффициента обмена от глубины. При рас-

четах величина безразмерной шероховатости дна  $\tilde{z}_*$  и поверхности воды  $\tilde{z}_{0*}$  были приняты одинаковыми и равными 0,001. Из графика (см. рис. 2) видно, что линейный и параболический законы изменения коэффициента обмена с глубиной (кривые 4 и 2) дают в скорости заметные расхождения, увеличивающиеся с приближением к поверхности. Аналогичный эффект будет наблюдаться и при решении уравнения теплопроводности (14), что в некоторых случаях может привести к существенным отклонениям результатов расчета по схеме с линейным коэффициентом турбулентности от реальной картины теплового взаимодействия водоема с атмосферой. Сравнение кривых 1—3 на рис. 2 показывает, что с увеличением неустойчивости скорость на всех уровнях уменьшается.

Объяснить это можно следующим. Рост неустойчивости вызывает увеличение вертикального перемешивания, что при постоянном значении касательного напряжения увеличивает тормозящее влияние дна.

На рис. 3 приведены зависимости безразмерной скорости поверхностного течения

$\tilde{u}_n$  от глубины водоема, рассчитанные при шероховатости дна и поверхности воды 0,01 м. Кривые 1—3 получены для различных условий стратификации при параболическом законе изменения коэффициента турбулентности с глубиной, кривая 4 — при линейном. Так как при малых глубинах водоема относительное влияние сил плавучести на интенсивность турбулентного перемешивания невелико, наблюдается увеличение различий

в значениях  $\tilde{u}_n$  с ростом  $\delta$ . Во всех рассмотренных случаях происходит монотонное увеличение скорости поверхностного течения с ростом глубины водоема. Наибольшие изменения в скорости поверхностного течения наблюдаются при устойчивой стратификации (кривая 1), что объясняется меньшими изменениями коэффициента обмена. Наиболее интенсивный рост коэффициента турбулентности с увеличением глубины происходит при линейном законе его изменения, что и приводит к значительно меньшим изменениям в поверхностной скорости (кривая 4).

Таким образом, результаты расчетов показывают существенное влияние стратификации и профиля коэффициента турбулентности на распределение скорости дрейфового течения и температуры по глубине водоема.

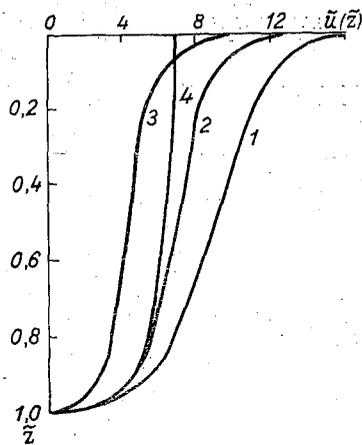


Рис. 2. Зависимость скорости дрейфового течения от глубины при различных стратификациях.

Усл. обозначения см. рис. 1.

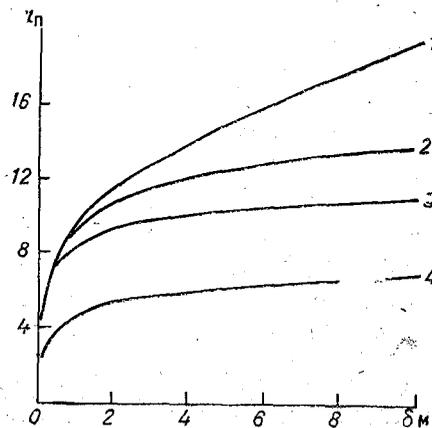


Рис. 3. Зависимость скорости поверхностного течения от глубины водоема при различных стратификациях.

1)  $L = -1,0$ , 2)  $L = \infty$ , 3)  $L = 1,0$ , 4)  $\tilde{a} = 1 - z$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тимофеев М. П. Метеорологический режим водоемов. Гидрометеиздат, Л., 1963.
2. Орловский Н. С. Теплообмен водной поверхности с нижележащими слоями воды в мелких водоемах. Проблемы освоения пустынь, № 1, 1968.
3. Вагер Б. Г., Воробьев В. И., Лайхтман Д. Л. Турбулентный режим мелкого водоема. Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, т. IV, № 9, 1968.
4. Левич В. Г. Физико-химическая гидромеханика. Физматгиз, М., 1959.
5. Китайгородский С. А. О возможности теоретического расчета вертикального профиля температуры в верхнем слое моря. Изв. АН СССР, сер. геофиз. № 3, 1961.
6. Борисов Е. В. Влияние развитого ветрового волнения на вертикальный профиль температуры в глубоком море. Труды ГОИН, вып. 93, 1968.
7. V a i n e s W. D., K n a p p D. J. Wind driven water currents. J. of the Hydraulics Divis. Proc. of the Amer. Soc. of Civil Engin. vol. 91, No. H42, 1965.
8. Mc. Alister E. Measurement of total heat flow from the sea surface. Appl. Optics. vol. 3, No. 5, 1964.
9. Swinbank W. C. The exponential wind profile. Quart. J. Roy. Met. Soc., vol. 90, No. 384, 1964.
10. Swinbank W. C. The exponential wind profile. Discussion. Quart. J. Roy. Met. Soc., vol. 92, No. 393, 1966.
11. Справочник химика, т. I. Под ред. Б. П. Никольского. М.—Л., 1966.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТОКОВ ТЕПЛА И ПАРА ПО ГРАДИЕНТНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ С КОРАБЛЕЙ

Известно, что определение потоков тепла и пара в приводном слое встречает большие трудности. Они обусловлены взволнованностью поверхности моря, тепловым и аэродинамическим искажениями потоков корпусом судна и колебанием приборов, установленных на судне.

Целью нашего исследования являлась разработка удобного и в достаточной мере точного способа расчета указанных потоков. В ранее выполненных работах [1, 2] были выбраны репрезентативные точки расположения приборов. Дистанционные анемометры и психрометры устанавливались на высотах 26, 15, 10, 7 м над поверхностью воды. Эпизодически добавлялись уровни 1, 3 и 5 м. Измерялась температура поверхности воды. В этой работе использованы материалы наблюдений по температуре и влажности воздуха и скорости ветра на указанных уровнях. Потоки рассчитывались по методу, предложенному Тимофеевым [3, 4], который на основании большого экспериментального материала градиентных наблюдений над сушей и водоемами вывел следующие соотношения:

$$P = 0,163 k_1 \Delta T_{0-2} \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин.}};$$

$$LE = 0,215 k_1 \Delta e_{0-2} \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин.}},$$

где  $P$ ,  $LE$ ,  $k_1$ ,  $\Delta T_{0-2}$  и  $e_{0-2}$  — соответственно турбулентный поток тепла, затраты тепла на испарение, коэффициент турбулентности на высоте 1 м в м<sup>2</sup>/сек., разность температур между поверхностью воды и воздуха на высоте 2 м в градусах и разность упругостей пара воды, выраженная в миллибарах, между теми же уровнями. Коэффициент турбулентности  $k_1$  определяется по формуле

$$k_1 = \frac{z^2 U_1}{\ln \frac{z_1}{z_0}} \left( 1 + 7,5 \frac{\Delta T_{0-2}}{U_1^2} \right). \quad (1)$$

Применение этих расчетных формул для условий суши и небольших водоемов не встречает особых затруднений, однако использование их для взволнованной поверхности моря затруднено вследствие того, что измерения на высотах 2—5 м в условиях моря часто бывают невозможными.

На кораблях погоды производились надежные измерения скорости ветра, температуры и влажности воздуха на высоте 10 м, поэтому при-

менение вышеуказанных формул Тимофеева потребовало расчета их коэффициентов для данной высоты. С этой целью нами подбирались профили скорости ветра, температуры и влажности воздуха при идентичных условиях, по 5—20 случаев, которые затем осреднялись.

В результате обработки материалов были получены такие соотношения:

$$\Delta T_{0-2} = 0,87 \Delta T_{0-10};$$

$$\Delta e_{0-2} = 0,87 \Delta e_{0-10}.$$

Соотношение  $U_1/U_{10}$  оказалось зависящим от скорости ветра  $U_{10}$ . Графическое изображение этой зависимости представлено на рис. 1. На основании вышеприведенных соотношений равенство (1) можно переписать в следующем виде:

$$k_1 = \frac{aU_{10}}{\ln \frac{z_1}{z_0}} \left( 1 + b \frac{\Delta T_{0-10}}{U_{10}^2} \right), \quad (2)$$

где  $a = \kappa \frac{U_1}{U_{10}}$ ;  $b = \frac{7,5 \cdot 0,87}{\left(\frac{U_1}{U_{10}}\right)^2}$ ;  $\kappa = 0,38$  — постоянная Кармана.

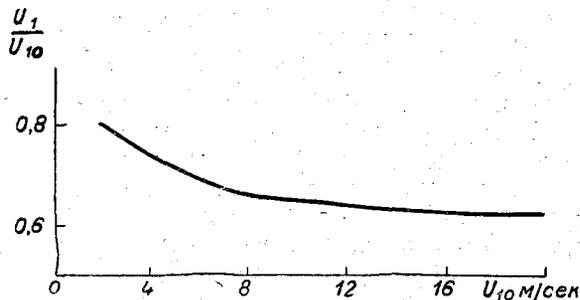


Рис. 1. Зависимость  $\frac{U_1}{U_{10}}$  от скорости ветра  $U_{10}$  на высоте 10 м.

Таким образом, по формуле (2), в которую подставлены коэффициенты  $a$  и  $b$  и  $U_{10}$  вместо  $U_1$  и  $\Delta T_{0-10}$  вместо  $\Delta T_{0-2}$ , можно вычислять коэффициент турбулентности на высоте  $z_1 = 1$  м.

Ниже показана зависимость коэффициентов  $a$  и  $b$  от скорости ветра на высоте 10 м ( $U_{10}$ ):

$U_{10}$ м/сек. . . . .	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
$a$ . . . . .	0,0160	1,1090	0,1085	0,1082	0,1070	0,1058	0,1045	0,1032	0,1020	0,1010
$b$ . . . . .	8,20	8,35	8,50	8,60	8,70	8,80	8,90	9,00	9,10	9,20

Теперь остается найти способ оценки величины параметра шероховатости морской поверхности. Нередко для расчета  $k_1$  над водной поверхностью принимается величина  $z_0$ , близкая, с точки зрения авторов, к средней величине, но едва ли такой способ оценки величины  $z_0$  являет-

ся оправданным, так как величина шероховатости над поверхностью моря изменяется в больших пределах.

Для расчета параметра шероховатости нами использовалось выражение, в которое входит коэффициент сопротивления  $c_{10}$ ,

$$z_0 = 10^3 e^{-\frac{z}{\sqrt{c_{10}}}}, \quad (3)$$

Это выражение получено из закономерности логарифмического распределения скорости ветра.

Динамическая скорость определяется по известному соотношению

$$v_* = \frac{z_2(U_{z_2} - U_{z_1})}{\ln \frac{z_2}{z_1}},$$

где  $z_1 = 10$  м.

После несложных преобразований формулы (3) получим

$$z_0 = 10^3 e^{-(\ln z_2 - \ln z_1) \frac{U_{10}}{U_{z_2} - U_{z_1}}}$$

Следовательно, расчет параметра  $z_0$  сводится к нахождению величины  $\frac{U_{10}}{\Delta U}$ , т. е. к нахождению отношения скорости ветра на высоте 10 м к разности скоростей между высотами 26 и 10 м.

Ниже приводятся значения параметра  $z_0$ , рассчитанные в зависимости от величины отношения  $\frac{U_{10}}{\Delta U}$ :

$U_{10}/\Delta U$ . . . 4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$z_0$ см . . . 22	8,5	3,3	1,3	0,5	0,19	0,072	0,028	0,011	0,0043	0,016	0,0006

После подстановки значений  $a$ ,  $b$ , и  $z_0$  в формулу (2) находится величина  $k_1$ . Тогда потоки тепла и пара вычисляются по формулам:

$$P = 0,163 \cdot 0,87 k_1 \Delta T_{0-10} = 0,145 \cdot k_1 \Delta T_{0-10} \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин.}},$$

$$EL = 0,315 \cdot 0,87 k_1 \Delta e_{0-10} = 0,274 k_1 \Delta e_{0-10} \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин.}}.$$

Э. К. Бютнер и Р. С. Бортковский [5] предложили расчетную формулу для оценки величины турбулентного потока тепла над поверхностью моря

$$P = 2,23 \cdot 10^3 U_{10} \Delta T_{0-10} \frac{\text{кал}}{\text{см}^2 \cdot \text{мин.}},$$

где  $U_{10}$  — скорость ветра в м/сек.;  $\Delta T_{0-10}$  — разность температур воздуха на высоте 10 м и поверхности воды. В соответствии с формулами Тимофеева и Бютнер — Бортковского [4] были вычислены величины турбулентного потока тепла для устойчивой, неустойчивой и близкой к равновесной температурной стратификации приподнятого слоя атмосферы, которые приведены в табл. 1 и на рис. 2.

Таблица 1

Значения потоков тепла в кал/см<sup>2</sup>·мин., вычисленных по формулам Тимофеева ( $P_T$ ) и Бютнер—Бортковского ( $P_B$ )

Инверсия			Нейтральная стратификация			Неустойчивая стратификация		
$\Delta T$	$P_T$	$P_B$	$\Delta T$	$P_T$	$P_B$	$\Delta T$	$P_T$	$P_B$
-0,7	-0,005	-0,007	-0,2	-0,0011	-0,0018	0,6	0,002	0,004
-0,7	-0,007	-0,008	-0,2	-0,0019	-0,0024	0,7	0,015	0,017
-0,7	-0,008	-0,010	0,2	0,003	0,003	0,8	0,021	0,018
-0,7	-0,012	-0,012	0,3	0,009	0,006	0,8	0,007	0,009
-0,8	-0,002	-0,007*	0,4	0,006	0,007	0,8	0,009	0,011
-1,0	-0,021	-0,019	0,5	0,008	0,009	0,8	0,020	0,018
-1,5	-0,040	-0,030	0,5	0,011	0,011	0,9	0,017	0,017
-1,5	-0,051	-0,030	0,5	0,012	0,012	0,9	0,019	0,018
-1,5	-0,015	-0,025	0,5	0,009	0,009	1,0	0,009	0,015
			0,5	0,009	0,009	1,0	0,010	0,014
						1,1	0,015	0,018
						1,2	0,014	0,016
						1,3	0,521	0,022
						1,3	0,025	0,0043*
						1,3	0,016	0,0063*
						1,5	0,021	0,011
						1,6	0,020	0,015
						2,1	0,022	0,025
						3,0	0,062	0,054
						3,1	0,066	0,050

Из табл. 1 и рис. 2 следует, что средняя величина отношения  $\frac{P_T}{P_B}$  близка к единице, однако в некоторых случаях отклонения достигают больших величин.

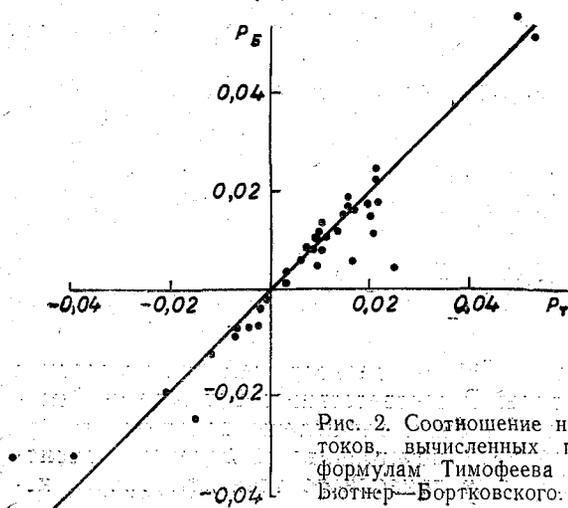


Рис. 2. Соотношение потоков, вычисленных по формулам Тимофеева и Бютнер—Бортковского.

При инверсиях среднее отклонение равно 28%, а максимальное 65%, при нейтральной стратификации соответственно — 15 и 60% и при неустойчивой стратификации — 24 и 100%.

В табл. 1 случаи, отмеченные звездочкой, исключены из подсчета средних величин, так как они наблюдались при малых скоростях ветра, что и вызвало большую относительную ошибку. Такие величины отклонений естественны, так как коэффициент формулы Бют-

нер — Бортковского выведен для некоторого среднего состояния приводного слоя атмосферы, не учитывающего вариаций параметра шероховатости.

Для кораблей, сперва находящихся в дрейфе, а затем в движении, были рассчитаны величины турбулентных потоков. Оказалось, что при неизменной метеорологической ситуации существенной разницы в величине потоков не наблюдалось. Это дает основание пользоваться изложенной выше методикой расчета потоков как для дрейфующих кораблей, так и для движущихся.

### Изменение коэффициента сопротивления $c_{10}$ со скоростью ветра

Коэффициент сопротивления  $c_{10} = \frac{v^2}{U_{10}^*}$ , вычисленный по судовым градиентным наблюдениям, имеет величины несколько большие, чем приведенные Диконом и Веббом [6]. С ростом скорости ветра коэффициент сопротивления увеличивается сильнее и обнаруживается его зависимость от температурной стратификации.

В качестве примера на рис. 3 показаны кривые изменения  $c_{10}$  в зависимости от  $U_{10}$  для различных стратификаций.

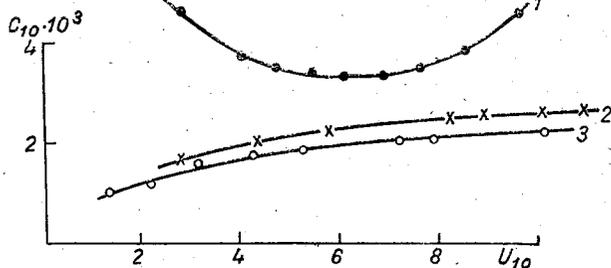


Рис. 3. Зависимость коэффициента сопротивления  $c_{10}$  от скорости ветра на высоте 10 м.  
1 — инверсия, 2 — изотермия, 3 — сверхадиабатические условия.

По материалам наблюдений с кораблей, при инверсиях коэффициент сопротивления всегда значительно больше, чем при сверхадиабатических градиентах и изотермии.

При инверсиях  $c_{10}$  сначала убывает до скоростей ветра 5—6 м/сек., а дальше с возрастанием скорости ветра либо остается постоянным, либо увеличивается.

Большие значения  $c_{10}$  можно объяснить тем, что в инверсионных условиях верхний 26-метровый уровень, по-видимому, лежит несколько выше приземного слоя атмосферы, вследствие чего разности  $U_{26} - U_{10}$  имеют большие величины.

### Выводы

1. Расчеты потоков тепла и водяного пара в судовых условиях возможны при условии, если градиентные измерения ведутся достаточно строго приборами, установленными в репрезентативных точках судна.

2. Методы расчета потоков сведены к простым операциям, выполняемым любым сотрудником судовой метеорологической станции.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кучеров Н. В. О градиентных измерениях в открытом море. *Океанология*, № 1, 1963.
2. Кучеров Н. В. Результаты экспериментальных исследований теплового баланса моря. Межведомственный геофиз. комитет при президиуме АН СССР. *Метеорологические исследования*, № 9. «Наука», М., 1964.
3. Тимофеев М. П. Метеорологический режим озера Севан. *Гидрометеоздат*, Л., 1960.
4. Тимофеев М. П. О методах определения компонент теплового баланса подстилающей поверхности. *Труды ГГО*, вып. 27, 1951.
5. Бортковский Р. С., Бютнер Э. К. О методах определения турбулентных потоков количества движения и тепла над морем. *Труды ГГО*, вып. 226, 1968.
6. Deacon E. L., Sheppard P. A., Webb E. K. Wind profiles over the sea and drag at the sea surface. *Austr. J. Phys.*, vol. 9, No. 4, 1956.

*Б. М. АНДРЕЕВ, Н. З. АРИЕЛЬ, Л. Ю. ПРЕОБРАЖЕНСКИЙ,  
М. М. САФРОНОВА, С. И. КРЫЛОВ*

## **К МЕТОДИКЕ МОРСКИХ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ НАБЛЮДЕНИЙ В ПРИВОДНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ**

Экспериментальное изучение приводного слоя атмосферы в значительной степени осложняется трудностями, связанными с фиксацией уровня наблюдений. Отсутствие в морских условиях неподвижного основания для установки приборов сделало необходимым использование свободно плавающих по поверхности буев [1] или буйев типа вежи Фруда. В последние годы было экспериментально установлено, что в воздушном потоке вблизи водной поверхности существуют упорядоченные периодические колебания, вызванные волновыми движениями [1—4]. Однако этот результат может вызвать сомнение, в связи с тем что плавучая основа, несущая прибор, может колебаться под воздействием волнения [5]. В этом случае малоинерционный датчик скорости регистрирует не только мгновенные значения измеряемой величины в некотором слое, равном по толщине средней амплитуде вертикальных перемещений прибора, но и скорость перемещения самого прибора в этом слое, что вносит существенную погрешность. Указанные погрешности особенно велики при установке приборов на свободно плавающих буйях. Широко используемые в настоящее время буйи типа вежи Фруда, дающие возможность свести к минимуму вертикальные перемещения и качку прибора, представляются перспективными с методической точки зрения. Однако и в этом случае не удается полностью устранить погрешности измерений, связанные с подвижностью основания, несущего приборы. Пример оценки колебаний буйа такого типа и погрешностей, связанных с этими колебаниями, приведен в статье Н. З. Ариель и Р. С. Бортковского [6].

Целью наших работ было исследование слоя воздуха, непосредственно прилегающего к поверхности, и подповерхностного слоя воды, а также определение степени волнового влияния на воздушный поток. Учитывая недостатки использования плавучих устройств в качестве основы для установки приборов, наблюдения проводились с неподвижного основания, причем были приняты меры к устранению искажающего влияния самого основания.

Экспериментальные работы выполнялись в августе и октябре 1967 г. в одном из заливов Балтийского моря. Наблюдения проводились в 300 м от берега. Глубина в месте измерений была 6 м. Здесь прямо на грунт устанавливалась ажурная металлическая конструкция высотой около 2,5 м, несущая мачту диаметром 5 см с кронштейнами длиной 1 м для установки приборов. Регистрирующая аппаратура размещалась на небольшом катере, становившемся на якорь в 30—40 м от мачты

с приборами с подветренной стороны. При такой постановке наблюдений удается полностью исключить колебания приборов, а также воздействие конструкции, несущей мачту, на поле волнения и ветра.

В программу наблюдений входили измерения средних профилей ветра, температуры и влажности воздуха, пульсационные измерения скорости ветра, волновые измерения, а также измерения пульсаций скорости течения в поверхностном слое моря. Для измерения средних скоростей ветра использовались контактные анемометры, установленные на кронштейнах, прикрепленных к мачте на четырех уровнях: 0,6; 2; 4 и 5 м.

Температура и влажность воздуха измерялись на катере психрометрами Ассмана, установленными на выстрелах в носовой части (высота от среднего уровня моря 2,1 м) и на ходовой рубке (высота 3,7 м), на расстоянии около 2 м от борта катера.

Температура поверхности моря измерялась с помощью родникового термометра.

Для измерения пульсаций скорости ветра использовались термоанемометры и специально сконструированные индукционные анемометры. Индукционные анемометры изготовлены на базе электромоторов ДИ-6 и ИДР. Вращение легкой чашечной вертушки передается через редуктор (для уменьшения инерции прибора) на ось электродвигателя, работающего в данном случае как генератор постоянного тока. В качестве регистраторов использованы одноточечные ЭПП-09. Приборы хорошо зарекомендовали себя в работе. Коэффициент инерции индукционных анемометров составляет 0,6 сек. Приборы устанавливались на мачте на уровнях 1 и 5 м.

Для измерения высокочастотных пульсаций скорости ветра и пульсаций поверхностного течения использовались термоанемометры. В первом случае датчиком служила платиновая нить диаметром 20 мк, во втором — термистор МТ-54. Инерция приборов была соответственно около 0,01 сек. и 0,1 сек.

Регистрация показаний термоанемометров производилась синхронно шлейфовым осциллографом Н-700.

Волнение измерялось с помощью реостатного струнного волнографа, разработанного в ЛОГОИН. Датчиком прибора служит проволока из сплава высокого сопротивления, регистрирующая изменение сопротивления части струны, выступающей над водой. Блок питания струны состоит из генератора — автоколебательного мультивибратора с частотой следования импульсов 4 кГц и усилителя. Измерительная схема состоит из усилителя и выпрямителя по мостовой схеме. В схеме применялись 4 транзистора П-26А и 4 диода Д-2Е. Линейность масштаба записи достигается посредством изменения сопротивления в цепи базы и контролируется непосредственной тарировкой. Для изменения масштаба записи служит потенциометр на выходе выпрямителя. Контроль напряжения питания осуществляется подключением постоянного сопротивления вместо струны. Для уменьшения высокочастотных наводок применялась двухпроводная струна, а для уменьшения низкочастотных — измерительная схема подключалась через разделительные емкости. Чувствительность прибора при записи шлейфовым осциллографом составляла 0,04 см шкалы на 1 см смещения водной поверхности.

Для установки термоанемометров (уровни 2 и 0,5 м) и волнографа использовалась легкая мачта длиной 3,5 м, крепившаяся на двух кронштейнах длиной 1,5 м к основной мачте. Такая установка позволяла разворачивать приборы против ветра, избегать затенения датчиков другими

приборами и самой мачтой, легко снимать приборы в случае повреждений и перемещать их по мере усиления или ослабления, чтобы как можно ближе «подобраться» к волновой поверхности.

Работы проводились при скоростях ветра на высоте 5 м от 1 до 6 м/сек., температуре воздуха 15—17° и температуре воды 15,6—16,6°.

В октябре в связи с наступлением осенних штормов работа на рейле была прекращена и место наблюдений перебазировано на пирс высотой около 2 м, вдающийся в залив на расстояние около 50 м. С торцевой части пирса был вынесен выстрел длиной 5 м, на конце которого подвешивалась легкая трехметровая мачта для установки волнографа, датчиков пульсаций скорости ветра (уровни 2 и 0,5 м) и пульсаций скорости поверхностного течения (глубина 0,5 м). Высоты установки приборов менялись в зависимости от степени развития волнения. Анемометры и психрометры устанавливались на мачте, стоявшей на пирсе и на выстрелах, укрепленных в торцевой части пирса. Средняя скорость ветра измерялась на уровнях 1, 2, 4 и 6 м, температура воздуха на уровнях 1 и 3 м.

При постановке морских метеорологических измерений большое значение имеет точность фиксации уровней измерений, так как небольшая ошибка в оценке среднего уровня может вызвать значительные ошибки в определении параметра шероховатости. Контроль за колебаниями уровня, достигавшими довольно больших значений (до 70 см) при сильных нагонных ветрах, проводился с помощью сетевого мареографа, установленного на пирсе. При обработке наблюдений в высоты приборов вводилась соответствующая поправка на этот эффект.

Работы проводились при скоростях ветра 5—11 м/сек., причем скорость ветра 5 м/сек. наблюдалась только в двух случаях. Температура воздуха менялась от 7 до 11°, а температура воды от 9 до 9,5°.

Всего за период наблюдений проведено 43 получасовых и часовых серий измерений, из них 20 в августе и 23 в октябре. Из анализа результатов измерений видно, что подавляющее большинство (90% в августе) профилей ветра подчиняется логарифмическому закону и отклонений от логарифмики даже в нижних частях профиля не наблюдается. В некоторых случаях при слабом волнении удалось измерить профили ветра до высот 5—25 см (рис. 1). Эти данные получены посредством термоанемометра, установленного в непосредственной близости к гребням волн. Наблюдения проводились, как правило, при безразличной термической

стратификации. Аналог числа Ричардсона  $r_i = \frac{g}{T} \frac{\Delta T}{u^2}$ , где  $\Delta T$  — раз-

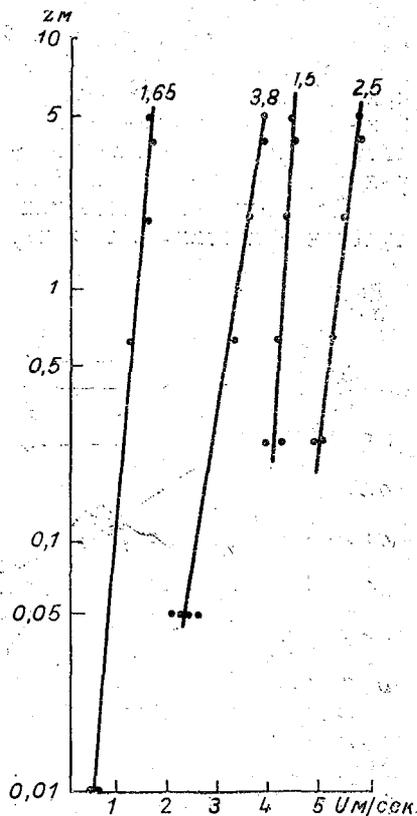


Рис. 1. Примеры профилей скорости ветра при малых скоростях.

ность температуры воздуха на уровне 2 м и температуры поверхности моря;  $u_2$ — скорость ветра на уровне 2 м, менялся в диапазоне  $\pm 0,001$ .

Значения скорости трения  $v_*$ , вычисленные по данным августовских измерений, меняются от 0,08—0,09 м/сек. при скорости ветра 2 м/сек. до 0,12 м/сек. при скорости 4 м/сек. и до 0,15—0,16 м/сек. при скорости 5—6 м/сек. Эти данные хорошо согласуются с данными других авторов [4, 7, 8]. То же можно сказать и о коэффициенте сопротивления  $c_D = \left(\frac{v_*}{u_{10}}\right)^2$ ,

где  $u_{10}$ — скорость ветра, экстраполированная на уровень 10 м по логарифмике.  $c_D$  оказывается близким к  $0,8 \cdot 10^{-3}$  при скорости ветра 4 м/сек. При уменьшении скорости до 2 м/сек. он увеличивается до  $1,2 \cdot 10^{-3}$ .

Такое поведение коэффициента сопротивления говорит о том, что при малых скоростях ветра режим обтекания водной поверхности приближается к аэродинамически гладкому. Это подтверждается и малостью средней взвешенной величины параметра шероховатости, которая имеет значение  $1 \cdot 10^{-3}$  см при скоростях ветра 2—5 м/сек.

По данным августовских измерений сделана попытка оценить турбулентные потоки тепла и пара. Они оказались чрезвычайно малы. Так, поток тепла, рассчитанный по формуле

$$P = -\rho c_p k \frac{\partial T}{\partial z}$$

(обозначения обычные), оказался близким к  $0,01$  кал/см<sup>2</sup>·мин. и меньшим при скорости ветра 4 м/сек., а испарение

$$LE = -\rho k \frac{\partial q}{\partial z}$$

составляет примерно  $0,02$ — $0,03$  кал/см<sup>2</sup>·мин. при тех же условиях. Коэффициент турбулентности  $k$  определялся из логарифмических профилей скорости ветра и составил в среднем  $0,03$ — $0,04$  м/сек.

Относительно результатов градиентных измерений, проводившихся в октябре, заметим, что  $v_*$  получаются довольно завышенными (в 2—3 раза) по сравнению с данными, известными для открытого моря. Это следует объяснить прежде всего искажающим влиянием пирса на воздушный поток и особенно на поле волн, а также изменением характера подстилающей поверхности в прибрежной зоне вследствие заострения и разрушения волн, отражения их от берега и т. п.

Результаты структурных измерений полностью подтверждают результаты, полученные в условиях

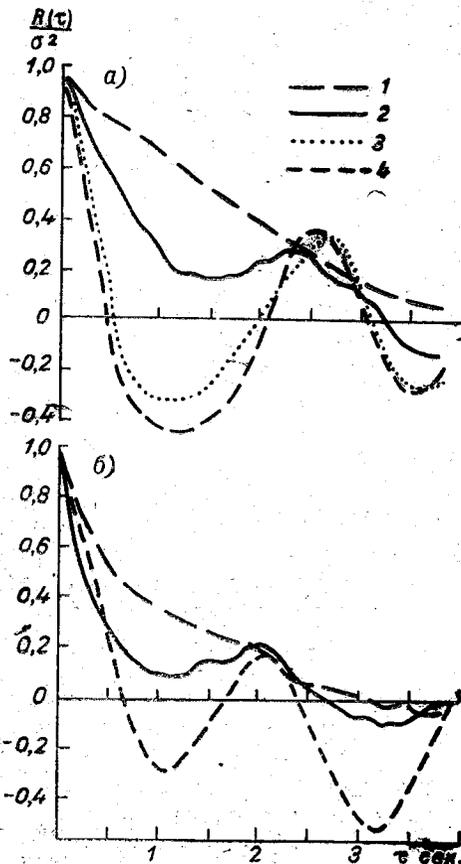


Рис. 2. Типичные нормированные корреляционные функции пульсаций продольной составляющей скорости ветра на верхнем (1) и на нижнем (2) уровнях, пульсаций скорости поверхностного течения (3), волнения (4).

измерений полностью подтверждают результаты, полученные в условиях

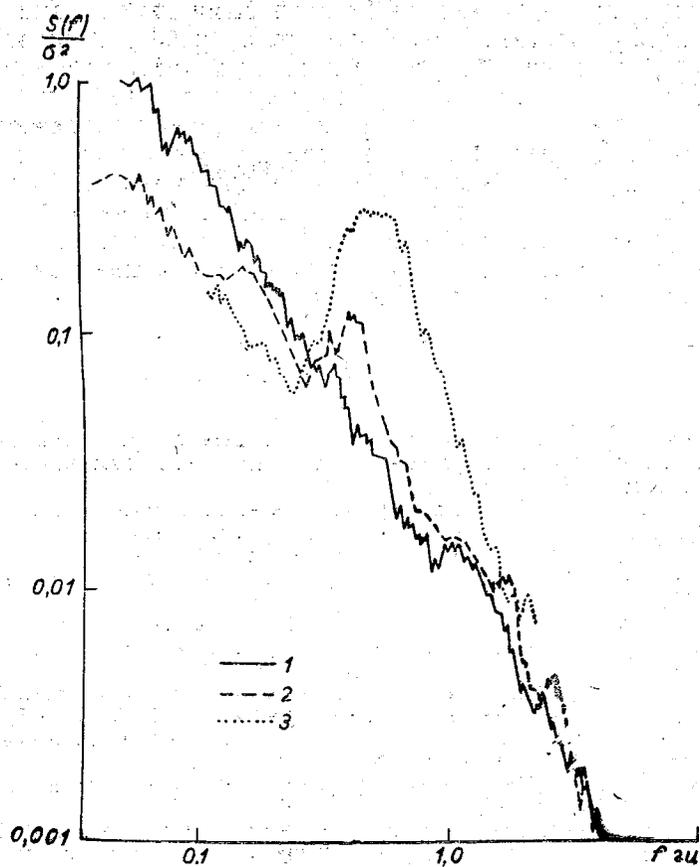


Рис. 3. Нормированные спектры пульсаций продольной составляющей скорости ветра на уровнях 2 м (1) и 0,5 м (2), пульсаций поверхностного течения (3), измеренных на глубине 50 см.

открытого моря [2, 3, 4]. Это видно из рис. 2, где представлены типичные корреляционные функции  $R(\tau)$  продольной составляющей скорости ветра на двух уровнях, волнения и пульсаций поверхностного течения, записанных синхронно. В обоих случаях на нижнем уровне отчетливо проявляются упорядоченные колебания скорости ветра, близкие по периоду к волновым. Рисунок 2 а соответствует случаю, когда пульсации скорости ветра измерялись на уровнях 2 м (1) и 0,5 м (2), а пульсации поверхностного течения — на глубине 40 см (3) при средней высоте волн 0,5 м. Рисунок 2 б иллюстрирует случай, когда высота волн близка к 1 м, а нижний датчик располагается на уровне 86 см над средним уровнем моря. Вид корреляционных функций поверхностного течения говорит о связи пульсаций скорости в воде и волнения на поверхности. Такого же типа корреляционные функции пульсаций течения получены Н. В. Контобойцевой [9].

Из рис. 3, где представлены спектры пульсаций скорости ветра и течения, видно, что относительный вклад колебаний, вызванных волнением, в воде больше, чем в воздухе, т. е. верхний слой моря находится под большим влиянием волнения, чем нижние слои атмосферы.

Таким образом, с обеих сторон от границы раздела вода — воздух существуют слои, где наблюдаются периодические (орбитальные) дви-

жения частиц жидкости, вызванные волновыми движениями на поверхности раздела. Естественно ожидать, что по мере удаления от поверхности эти возмущения будут затухать под действием сил вязкости и выше или ниже некоторого уровня не будут оказывать влияния на структуру потока. Глубина затухания периодических движений в воде, как известно [10], близка к глубине, равной длине волны на поверхности. Из рис. 2 видно, что периодические колебания в воздухе затухают значительно быстрее. Действительно в большинстве случаев даже при волнении в 1,5 м на уровне 2 м периодическая составляющая не проявляется. Можно полагать, что высота затухания, отсчитываемая от среднего уровня, близка к 1—1,5 высоты волны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов О. А., Фнлиппов И. А. Градиентная установка для измерения скорости ветра в нижней части приземного слоя воздуха над поверхностью моря. Океанология, № 1, 1965.
2. Макова В. И. Связь спектров турбулентности в приводном слое атмосферы со спектром поверхностного волнения. Океанология, № 5, 4, 1964.
3. Бортковский Р. С., Бютнер Э. К., Преображенский Л. Ю. Экспериментальные исследования структуры приводного слоя воздуха над океаном. Труды ГГО, вып. 205, 1967.
4. Преображенский Л. Ю. Некоторые характеристики воздушного потока в нижнем слое атмосферы над морем. Изв. АН, сер. физика атмосферы и океана, т. IV, № 9, 1968.
5. Понд С. Влияние движения буя на измерения напряжения трения и скорости ветра. Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, т. III, № 12, 1967.
6. Ариель Н. З., Бортковский Р. С. О применении градиентного буя при исследованиях турбулентности над морем. См. наст. сб.
7. Takahashi T. Micro-meteorological observations and studies over the Sea. Mem. Fac. Fish. Kagoshima Univ., vol. 6, 1958.
8. Море. Пер. с англ. под ред. В. В. Тимонова. Гидрометеоиздат, М., 1965.
9. Контобойцева Н. В. Статистические характеристики пульсаций температуры, модуля скорости и волнового давления в приповерхностном слое моря. Изв. АН, сер. физика атмосферы и океана, т. III, № 11, 1967.
10. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, М., 1959.

## О ПРИМЕНЕНИИ ГРАДИЕНТНОГО БУЯ ПРИ ИССЛЕДОВАНИЯХ ТУРБУЛЕНТНОСТИ НАД МОРЕМ

Измерения пульсаций скорости ветра над морем позволили обнаружить некоторые особенности структуры турбулентности в приводном слое воздуха. Они проявляются в первую очередь в том, что в спектрах пульсации горизонтальной компоненты  $u'$  и вертикальной  $w'$  на частоте, близкой к основной энергонесущей частоте морского волнения, наблюдается более или менее отчетливо выраженный максимум [1—5]. Искажение обычного спектра, подчиняющегося закону  $-5/3$ , можно объяснить влиянием на структуру приводного слоя волновых движений, накладывающихся на чисто турбулентные пульсации. Можно, однако, предположить, что этот эффект связан исключительно с искажающим влиянием качки буя, несущего датчик [6], в частности, вертикальной качки. Во время 4-й Атлантической экспедиции ГУГМС 1967 г. на ни/с «Океанограф» были проведены одновременные измерения элементов качки буя, пульсаций составляющих скорости ветра  $u'$  и  $w'$  и профиля средней скорости  $\bar{u}(z)$ . Полученные данные позволяют оценить погрешности, вносимые вертикальной качкой в измерения спектральных характеристик турбулентности в приводном слое.

Конструкция буя, описанная ранее [2], обеспечивала минимальность его вертикальной качки; углы наклона мачты, определенные по измерениям на фотографиях, также оказались малыми — они не превышали  $4-5^\circ$ , при среднем размахе  $1-2^\circ$ . Пульсации горизонтальной компоненты скорости ветра измерялись малоинерционным индукционным анемометром, установленным на высоте  $z=6$  м от средней ватерлинии буя. Конструкция этого анемометра аналогична описанной в [7]. Вертикальные смещения буя  $\zeta(t)$  измерялись датчиком волнографа ГМ-16, подвешенным к нему на тросе длиной около 40 м. Вдоль цилиндрического корпуса буя был вертикально натянут провод, датчик емкостного струнного волнографа, сконструированного и изготовленного сотрудниками ГМС ни/с «Океанограф» А. В. Чирейкиным и Г. Г. Альтшуллером. Этот прибор, обладающий высокой чувствительностью и очень малой инерцией, регистрировал ординаты волновой поверхности  $y(t)$  относительно средней ватерлинии буя. Абсолютные ординаты волновой поверхности  $\eta(t)$  измерялись стандартным волнографом ГМ-16, поплавков которого находился в 50—100 м от буя. Запись одновременно измерявшихся величин  $u'(t)$ ,  $\zeta(t)$ ,  $y(t)$ ,  $\eta(t)$  велась одноточечными электронными потенциометрами ЭПП-09; продолжительность каждой записи около часа. Инерция ЭПП-09 такова, что в записи отфильтровываются все пульсации с частотой, превышающей примерно  $1 \text{ сек}^{-1}$ .

Для обработки выбиралось два участка часовой записи, на каждом из которых определялось по 240 значений ординат. Интервал съемки изменялся в различных случаях от 1 до 4 сек. Расчет дисперсий, структурных, корреляционных и спектральных функций для обоих участков проводился с помощью ЭВЦМ «Урал-4» по методике, изложенной в [8]. Для различных расчетов и оценок использовались спектральные плотности, полученные как среднее из двух вычисленных на ЭВЦМ значений.

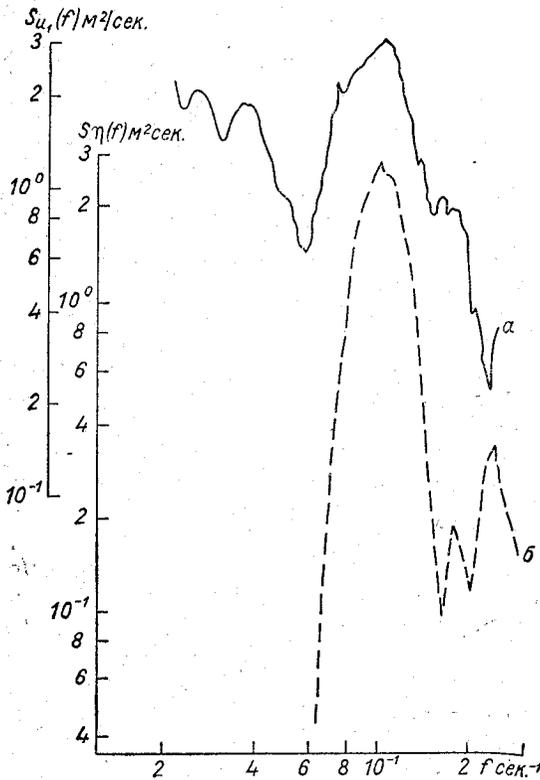


Рис. 1. Спектр горизонтальной составляющей скорости ветра  $S_{u_1}(f)$  (а) и ветрового волнения  $S_{\eta}(f)$  (б), по данным измерений 17/VIII 1967 г.

Максимум на частоте 0,1 гц (зыбь) и менее высокий подъем около частоты 0,2 гц (ветровое волнение). Хотя спектр колебаний буя  $S_{\zeta}(f)$  для того же интервала времени и имеет максимум в области частот, близких к частоте зыби (0,09 гц,  $T=11,5$  сек.), энергия здесь почти на 2 порядка меньше энергии волнения в максимуме; по мере увеличения частоты спектральная энергия крайне быстро убывает и колебания буя с частотой  $f$ , превышающей 0,12 гц ( $T=8,5$  сек.), практически отсутствуют.

Передаточная функция  $P(f) = \frac{S_{\zeta}(f)}{S_{\eta}(f)}$ , характеризующая реакцию буя на волнение различных частот, была получена по пяти спектрам волнения  $S_{\eta}(f)$  и соответствующим им спектрам качки буя  $S_{\zeta}(f)$ . Вид осредненной функции (рис. 2) позволяет сделать вывод о почти полном отсутствии качки буя с периодом меньше 10 сек. и, следовательно, об отсутствии заметных искажений в соответствующих участках спектров турбулентных пульсаций. Если допустить, что вертикальная качка буя

Для спектров горизонтальной компоненты скорости  $S_{u_1}(f)$  (рис. 1, кривая а) характерны спад в области частот 0,01—0,1 гц (период  $T=10 \div 100$  сек.), приблизительно соответствующий закону  $-5/3$ , и появление двух максимумов на частотах около 0,1 гц ( $T=10$  сек.) и 0,2 гц ( $T=5$  сек.) либо одного из них. В области более высоких частот снова прослеживается уменьшение  $S_{u_1}(f)$  примерно по закону  $-5/3$ ; однако сравнительно большая инерционность датчика и регистратора не позволяют определить  $S_{u_1}(f)$  для частот, больших 0,25 гц ( $T=4$  сек.). По-видимому, один из максимумов ( $T=10$  сек.) связан с наличием зыби, второй ( $T=5$  сек.) — ветровых волн.

На этом же графике (рис. 1, кривая б) приведен спектр волнения  $S_{\eta}(f)$ , рассчитанный для того же интервала времени (9 час. 15 мин.—9 час. 41 мин. 17/VIII 1967 г.). Здесь также хорошо выделяется мак-

может быть описана уравнением вынужденных колебаний со случайной вынуждающей силой, то передаточная функция буя должна [9] определяться выражением

$$P(f) = \frac{\left(\frac{\alpha}{m}\right)^2}{\left(4\pi^2 f^2 - \frac{\alpha}{m}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{m}\right)^2 4\pi^2 f^2}, \quad (1)$$

где  $\alpha$  — водонзмещающая сила, приходящаяся на единицу длины корпуса буя;  $\beta^2$  — сопротивление воды при единичной скорости  $\frac{d\zeta}{dt} = 1$ ;  $m$  — эффективная масса буя.

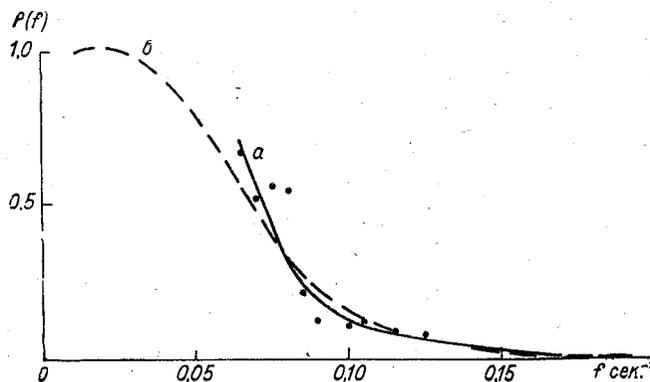


Рис. 2. Передаточная функция буя.  
а — по экспериментальным точкам, б — по формуле (2).

Аппроксимация экспериментально найденной функции  $P(f)$  выражением вида (1) приводит к формуле

$$P(f) = \frac{(0,168)^2}{(4\pi^2 f^2 - 0,168)^2 + 0,312 \cdot 4\pi^2 f^2}. \quad (2)$$

Резонансная частота  $f_0$ , соответствующая (2), очень низка ( $0,017 \text{ сек.}^{-1}$ ): в области этой частоты спектральная энергия ветрового волнения, как правило, равна нулю.

Спектр колебаний буя можно, таким образом, более или менее точно определить либо по непосредственным измерениям  $\zeta(t)$ , либо по спектру волнения  $S_\zeta(f) = P(f)S_\eta(f)$ . Последний в свою очередь можно найти по наблюдениям или по одной из эмпирических формул вида  $S_\eta = S_\eta(f, u_z)$ . Зная спектр колебаний буя, можно оценить их вклад в спектр измеренных пульсаций компонент скорости ветра. Полагая, что пульсации компонент не коррелированы с колебаниями буя (если эти процессы и коррелированы, то очень слабо), для спектра вертикальных пульсаций находим

$$S_{w_1}(f) = S_w(f) + 4\pi^2 f^2 S_\zeta(f), \quad (3)$$

где  $S_{w_1}$  — спектр измеренных с буя пульсаций  $w_1$ ;  $S_w$  — неискаженный истинный спектр  $w$ ;  $4\pi^2 f^2 S_\zeta(f) = S_{d\zeta/dt}(f)$  — спектр вертикальной скорости буя.

При условии исключения из записи горизонтальной компоненты скорости всех пульсаций с частотой, большей чем

$$f_1 = \frac{\bar{u}(z)}{\sqrt{\zeta^2}}, \quad (4)$$

возможно [10] разложение функции  $u(z \pm \zeta, t)$  в ряд по  $z$ . Пользуясь этим разложением и полагая, что корреляция между  $u'(t)$  и  $\zeta(t)$  отсутствует, находим

$$S_{u_1}(f) = S_u(f) + S_\zeta(f) \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2, \quad (5)$$

где  $S_{u_1}(f)$  — спектр измеренных пульсаций  $u'$ ;  $S_u(f)$  — неискаженный спектр  $u'$ ;  $S_\zeta(f) \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2$  — вклад вертикальных колебаний буя (погрешность).

Вычисления, выполненные по данным пульсационных и градиентных измерений скорости ветра в экспедиции 1967 г., показывают, что во всем диапазоне энергонесущих частот (0,05—0,20 гц) погрешность  $S_\zeta(f) \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2$  на 2—3 порядка меньше величины  $S_{u_1}(f)$ , т. е. пренебрежимо мала. Результаты одного из расчетов приведены на рис. 3.

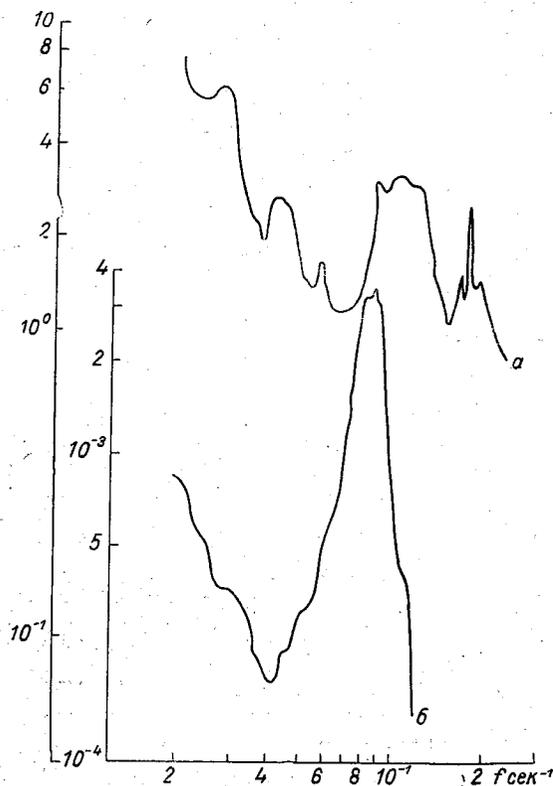


Рис. 3. Спектр горизонтальной составляющей скорости ветра  $S_u(f)$  (а) и величина

$$S_\zeta(f) \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 \text{ (б)}.$$

Интегрирование выражений (3) и (5) по частоте  $f$  приводит к соотношениям для дисперсий:

$$\sigma_{w_1}^2 = \sigma_w^2 + \sigma_{\zeta'}^2; \quad (6)$$

$$\sigma_{u_1}^2 = \sigma_u^2 + \sigma_{\zeta}^2 \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2. \quad (7)$$

Средние квадратичные отклонения  $\sigma_{\zeta} = \sqrt{\bar{\zeta}^2}$  и  $\sigma_{\zeta'} = \sqrt{\left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2}$  были вычислены на основе передаточной функции (2) и эмпирической формулы Пирсона — Московитца [11] для спектра волнения

$$S_{\eta}(f) = 8,1 \cdot 10^{-3} \frac{g^2}{\omega^5} e^{-0,74 \left( \frac{g}{\omega \bar{u}_{10}} \right)^4}, \quad (8)$$

где  $\omega = 2\pi f$  — круговая частота;  $g = 9,8$  м/сек.<sup>2</sup>;  $\bar{u}_{10}$  — средняя скорость ветра на высоте 19 м над водой.

Численное интегрирование выполнялось в пределах от  $f = 0,016$  гц до  $f = 0,207$  гц; на более низких частотах равна нулю энергия волнения, на более высоких — передаточная функция.

Результаты вычислений для различных скоростей ветра приведены в табл. 1. Средние квадратичные пульсации компонент скорости  $\sigma_{\zeta}$  и  $\sigma_{\zeta'} \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right)_{z=2M}$ , связанные с качкой бую, отнесены к динамической скорости  $v_*$ , вычисленной с использованием эмпирической зависимости [12]

$$\left( \frac{v_*}{u_{10}} \right)^2 = (0,70 + 0,12 \bar{u}_{10}) \cdot 10^{-3}. \quad (9)$$

Таблица 1

$\bar{u}_{10}$ м/сек. . . . .	7,5	10,0	12,5	15,0
$v_*$ м/сек. . . . .	0,30	0,44	0,59	0,75
$\sigma_{\zeta'}/v_*$ . . . . .	0,10	0,18	0,29	0,36
$\sigma_{\zeta} \frac{d\bar{u}}{dz}/v_*$ . . . . .	0,04	0,12	0,30	0,55
$f_1 = \frac{u}{\sigma_{\zeta}}$ сек. <sup>-1</sup> . . . . .	250	100	52	34

Известно, что в приземном слое при нейтральной стратификации отношения  $\frac{\sigma_u}{v_*}$  и  $\frac{\sigma_w}{v_*}$  не зависят от высоты и от скорости ветра и примерно равны 2,3 и 0,8 соответственно [13]. Измерения, выполненные над морской поверхностью при стратификации, близкой к нейтральной, подтверждают порядок величин, но дают несколько отличные значения. Согласно [2],  $\sigma_u/v_*$  меняется от 2,6 до 5,0, а  $\sigma_w/v_*$  — от 0,9 до 1,5 при росте скорости от 1,5 до 4—5 м/сек. и несколько убывают при дальнейшем увеличении скорости ветра. Сопоставление данных табл. 1 с этими значениями показывает, что величина  $\sigma_{\zeta'}/\sigma_w$  меняется приблизительно от 10 до 40% при росте скорости ветра от 7,5 до 15 м/сек.; а  $\sigma_{\zeta} \left( \frac{d\bar{u}}{dz} \right) / \sigma_u$  — от 1 до 10%. Эти величины характеризуют возможности пульсационных измерений с использованием бую при различных практически встречающихся условиях.

Вычисленные значения  $\sigma_\epsilon$  позволяют определить по формуле (4) минимальную подлежащую отфильтровыванию частоту  $f_1$ . Она оказывается заведомо больше энергонесущих частот спектра атмосферной турбулентности.

В табл. 2 приведены значения  $\sigma_u$  и  $\sigma_\epsilon \frac{d\bar{u}}{dz}$ , определенные для некоторых конкретных случаев измерений 1967 г.

Таблица 2

$\bar{u}_{10}$ м/сек.	$\sigma_\epsilon \frac{d\bar{u}}{dz}$ м/сек.	$\sigma_u$ м/сек.	$\frac{\sigma_\epsilon \frac{d\bar{u}}{dz}}{\sigma_u}$ %
6,7	0,015	0,89	1,9
6,0	0,012	0,69	1,7
8,0	0,014	1,16	1,2
7,5	0,010	1,13	0,9

Во всех случаях величина  $\sigma_\epsilon \frac{d\bar{u}}{dz} / \sigma_u$  оказалась меньше 2%, что согласуется с оценками, приведенными в табл. 1 для скорости ветра 7,5 м/сек., близкой к действительно наблюдавшейся во время измерений 1967 г.

Таким образом, анализ данных о вертикальных колебаниях буя показывает, что эти колебания не могут внести существенных искажений в спектры атмосферной турбулентности. Особенности вида спектров пульсаций скорости над взволнованной поверхностью моря вполне реальны, они отражают характерные черты динамического взаимодействия океана и атмосферы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Макова В. И. Связь спектров турбулентности в приводном слое атмосферы со спектром поверхностного волнения. *Океанология*, № 5, вып. 4, 1964.
2. Бортковский Р. С., Бютнер Э. К., Преображенский Л. Ю. Экспериментальные исследования структуры приводного слоя воздуха над океаном. *Труды ГГО*, вып. 205, 1967.
3. Преображенский Л. Ю. Некоторые характеристики воздушного потока в нижнем слое атмосферы над морем. *Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана*, т. IV, № 9, 1968.
4. Pond S., Stewart R. W., Burling R. W. Turbulence Spectra in the Wind over water. *J. Atmosph. Sci.*, 20, No. 4, 1963.
5. Burling R. W., Stewart R. W. Observation in the atmospheric boundary layer and relations with water surface parameters. *Proc. of the First Canad. Confer. on Micrometeor.*, pt. I, Toronto — Ontario, 1967.
6. Понд С. Влияние движения буя на измерения напряжения трения и скорости ветра. *Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана*, т. III, № 12, 1967.
7. Кузнецов О. А., Филиппов И. А. Градиентная установка для измерения скорости ветра в нижней части приземного слоя воздуха над поверхностью моря. *Океанология*, № 1, 1965.
8. Ариель Н. З. О расчете энергетических спектров по экспериментальным данным. *Метеорология и гидрология*, № 10, 1967.
9. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Судпромгиз, М., 1961.
10. Китайгородский С. А. К анализу пульсационных наблюдений в приводном слое атмосферы. *Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана*, т. III, № 12, 1967.
11. Pirson W. J. Sr., Moskowitz L. A proposed spectral form for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii. *J. Geophys. Res.*, vol. 69, No. 24, 1964.
12. Зубковский С. Л., Кравченко Т. К. Прямые измерения некоторых характеристик атмосферной турбулентности в приводном слое. *Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана*, т. III, № 2, 1967.
13. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. I. «Наука», М., 1965.

Т. В. КИРИЛЛОВА, И. И. ИВАНОВА

## ОЦЕНКА ВОЗМОЖНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ИЗЛУЧЕНИЯ АТМОСФЕРЫ НАД НЕОДНОРОДНЫМИ УЧАСТКАМИ ПОДСТИЛАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Радиационный баланс подстилающей поверхности, помимо астрономических факторов, определяется свойствами подстилающей поверхности и метеорологическими условиями в атмосфере. Альbedo поверхности и ее температура определяют в первую очередь поглощенную коротковолновую радиацию и эффективное излучение поверхности. Предполагается [1, 2], что для небольших по размеру участков с отличными от соседних значениями альbedo и температуры поверхности направленное к поверхности излучение атмосферы не будет заметным образом отличаться от излучения атмосферы прилегающих участков. Однако оценка этого эффекта до настоящего времени не сделана, хотя и представляет определенный интерес. Естественно, что различия в излучении атмосферы будут тем больше, чем сильнее будет нарушен пограничный слой вследствие неоднородности подстилающей поверхности. Это в свою очередь зависит от размеров участков и от контрастов значений метеорологических элементов над соседними участками.

Нами произведена указанная оценка применительно к ограниченному водоемам с линейными размерами порядка 10 км и глубинами до 20 м. Наилучшим образом указанный вопрос может быть решен путем проведения специальных систематических измерений потоков длинноволновой радиации над водоемами и над окружающей водоемы сушей. Однако подобных измерений очень мало и они используются нами лишь для сопоставления рассчитанных и измеренных значений в тех случаях, когда это возможно.

Для расчетов потоков длинноволновой радиации необходимо знать профили температуры и влажности в пограничном слое. Данные радиозондирований для поставленной задачи использовать нельзя, поскольку влияние водоема на характеристики пограничного слоя распространяется до высоты нескольких сот метров [3] и наибольший интерес представляет нижний 100-метровый слой. Подробные профили температуры и влажности в пограничном слое можно получить на основании вертолетных или аэростатных зондирований. Однако систематические аэростатные зондирования проводились лишь над сушей. На основании этих данных с помощью теории трансформации можно рассчитать вертикальные профили температуры и влажности воздуха над водной поверхностью.

В ряде экспедиций ГГО на водоемах проводились вертолетные зондирования. Данные этих зондирований явились основой для проверки расчетных схем трансформации воздушной массы при переходе с суши на водоем [4]. Наиболее важной характеристикой, определяющей

процессы в приводном слое, является температура поверхности воды. Метод расчета температуры поверхности воды разработан М. П. Тимофеевым и Л. В. Несиной [4, 5] и использован нами в расчетах. Ими же разработана методика, позволяющая по данным наблюдений на суше рассчитать температуру и влажность воздуха над водоемами заданных размеров и глубин.

Имея данные вертикального распределения температуры и влажности воздуха на основании аэростатных зондирований, мы рассчитали метеорологические характеристики над водоемом, проектируемым

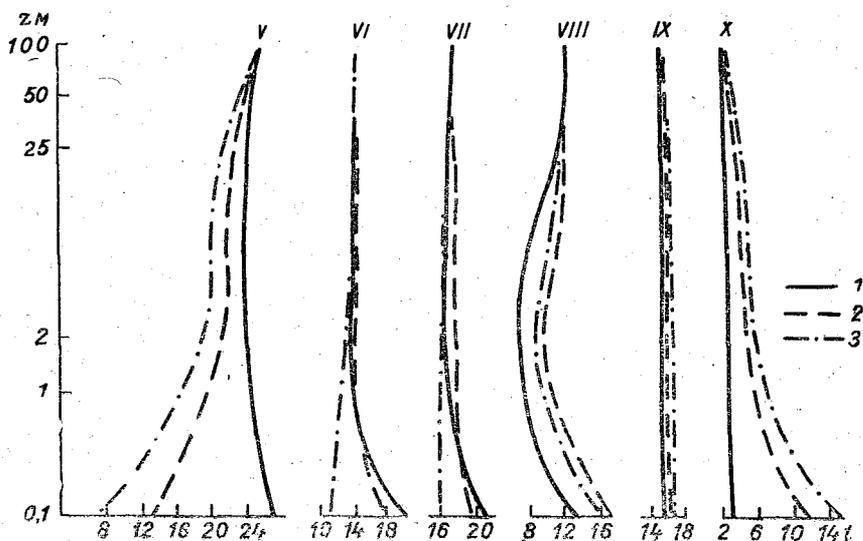


Рис. 1. Суточные профили температуры.  
1 — суша, 2 —  $H=5$  м, 3 —  $H=20$  м.

в этом районе. Полученные вертикальные профили температуры и влажности над водоемом используются для расчетов потоков длинноволновой радиации. В качестве исходных материалов использовались данные аэростатных подъемов в пос. Воейково. За период с мая по октябрь 1957, 1958 гг. в каждом месяце выбирались одни сутки с устойчивой антициклонической погодой, в течение которых были обеспечены зондирования через каждые 2 часа. На рис. 1 приведены вертикальные профили температуры (в полулогарифмических координатах) над сушей и над двумя проектируемыми водоемами размером в 10 км и глубинами в 5 и 20 м. Как и следовало ожидать, наибольшие различия отмечаются в самом нижнем слое. Максимальные различия и притом разного знака наблюдаются в мае и октябре. Обращает на себя внимание то, что глубина водоема существенно влияет как на температуру поверхности, так и на распределение температуры и влажности по высотам.

Излучение атмосферы  $E_a$  над сушей рассчитывалось по данным аэростатных зондирований, над водоемом — по рассчитанным профилям температуры и влажности. Расчеты производились по радиационной номограмме Шехтер. При этом выше уровня 1000 м (верхнего уровня измерений) распределение температуры задавалось градиентом.

—0,6°, а распределение влажности формулой  $q=q_0e^{-\beta z}$ , где  $q_0$  — влажность у земли;  $\beta=4,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^{-1}$ .

Поскольку основной целью расчетов является получение разности значений излучения атмосферы над сушей и водоемом, то возможные отклонения действительных профилей температуры и влажности от заданных выше уровня 1000 м не скажутся на величинах разностей  $\Delta E_a$ , так как высоты пограничного слоя над водоемом меньше 1000 м. На рис. 2 представлены полученные разности  $\Delta E_a = E_a^c - E_a^b$ , где  $E_a^c$  — излучение атмосферы над сушей;  $E_a^b$  — излучение атмосферы над водоемом глубиной 20 м. Выбором для характеристики каждого месяца одних суток, видимо, объясняется неплавный сезонный ход различий  $\Delta E_a$ .

Как следует из результатов расчета, различия в величинах излучения атмосферы над сушей и водоемом глубиной 20 м достигают в мае 0,04 кал/см<sup>2</sup>·мин., что составляет около 10% от величины излучения атмосферы. Характерной для летних месяцев можно считать величину 0,01 кал/см<sup>2</sup>·мин. или 2%. В эффективном же излучении последняя величина разности в 0,01 кал/см<sup>2</sup>·мин. дает относительную ошибку в 10%.

Для водоемов глубиной 5 м средние различия также имеют величину порядка 0,01 кал/см<sup>2</sup>·мин., в то время как значения  $E_a$  в мае и октябре меньше, чем для водоемов глубиной 20 м. Полученные результаты говорят о том, что предположение о равенстве излучения атмосферы над водоемом и над сушей в большом числе случаев не оправдывается, особенно для глубоких водоемов.

На рис. 3 представлен суточный ход излучения атмосферы за 18—19/VI 1958 г. В дневные часы  $E_a$  над сушей всегда выше, чем над водной поверхностью, независимо от глубины водоема. В остальные часы суток  $E_a$  над сушей выше, чем над водоемом глубиной 20 м, и ниже, чем над водоемом глубиной 5 м. Это обусловливается различиями температур поверхности суши и водоемов различной глубины и подтверждается суточным ходом температуры воздуха на различных высотах. Различия в излучении атмосферы в дневные часы больше, чем ночью. Это говорит о том, что эффект влияния большей температуры водяных паров на суше превышает эффект влияния большего содержания водяного пара над водоемом. Данные расчетов разности  $\Delta E_a$  за 10—11/X 1957 г. показывают, что излучение атмосферы над сушей в течение суток меньше, чем над водоемом. В это время года различия сохраняются почти неизменными в течение всех суток.

Сопоставление величин излучения атмосферы над водой и над сушей производилось также по данным специальных измерений в районе Цимлянского водохранилища с помощью радиометра с германиевым фильтром [6]. Весной (май, 1963 г.) излучение атмосферы над сушей

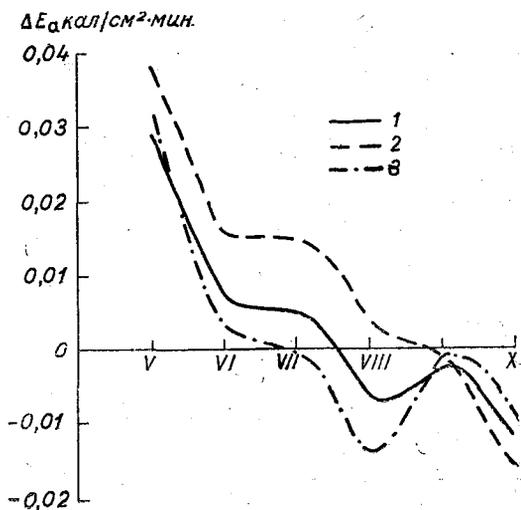


Рис. 2. Сезонный ход  $\Delta E_a$ .  
1 — среднее за сутки, 2—13 час., 3—1 час.

оказалось выше, чем над водохранилищем. В ясные дни в дневные часы различия составляют 0,03—0,04 кал/см<sup>2</sup>·мин., что согласуется с результатами вышеприведенных расчетов.

Различия в излучении атмосферы, обычно не принимаемые во внимание при расчетах радиационного баланса, могут оказывать существенное влияние на величины последнего. В табл. 1 приводятся относительные ошибки в величинах радиационного баланса, возникающие, если указанные различия не учитываются. Весной и осенью эти ошибки достигают 5—10%. Что касается отдельных сроков наблюдений (1 и 13 час.), то ошибки в этих случаях значительно возрастают и могут превышать 100%.

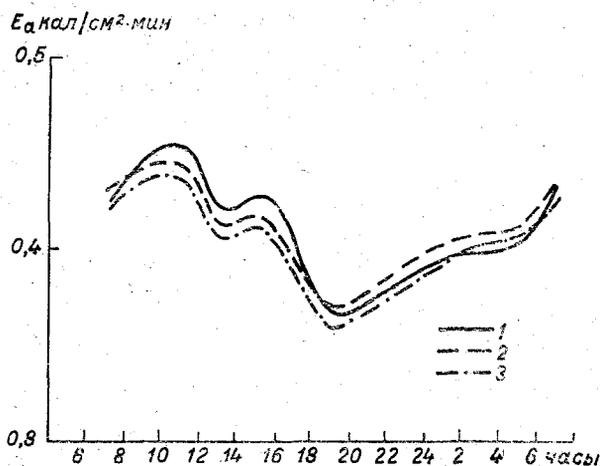


Рис. 3. Суточный ход  $E_a$ .  
1 — суша, 2 —  $H=5$  м, 3 —  $H=20$  м.

Таблица 1  
Относительные ошибки в величинах радиационного баланса за счет различий в излучении атмосферы (средние за сутки и в отдельные дни)

Месяц	Радиационный баланс			$\frac{\Delta E}{B}$ % при $H=5$ м			$\frac{\Delta E}{B}$ при $H=20$ м		
	среднее за сутки	13 час.	1 час	среднее за сутки	13 час.	1 час.	среднее за сутки	13 час.	1 час
V	0,26	0,72	-0,03	8	4	77	11	5	>100
VI	0,27	0,78	-0,08	0	1	12	3	2	4
VII	0,16	0,58	-0,06	0	2	12	3	3	2
VIII	0,08	0,37	-0,10	1	1	16	9	1	14
IX	0,06	0,20	-0,03	5	0	3	3	1	3
X	0,02	0,09	0,00	5	>100	—	1	20	—

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллова Т. В., Тимофеев М. П. О расчете радиационного баланса водоемов по радиационному балансу суши. Метеорология и гидрология, № 11, 1959.
2. Гандин Л. С., Калиновский А. Б., Лайхтман Д. Л., Сополько Е. А., Шленева М. В. О некоторых особенностях баланса длинноволновой радиации для Куйбышева. Труды ЛГМИ, вып. 4, 1956.
3. Воронцов П. А. О стратификации пограничного слоя в береговой зоне над Ладожским озером в осенний период. Труды ГГО, вып. 206, 1967.
4. Тимофеев М. П. Метеорологический режим водоемов. Гидрометеоздат, Л., 1963.
5. Несина Л. В. Изменение метеорологического режима при создании водоемов. Труды ГГО, вып. 167, 1965.
6. Малевский-Малевиц С. П., Серова Н. В. Некоторые результаты измерений радиационного баланса над водоемом в весенний период. Труды ГГО, вып. 167, 1965.

## РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЧВ ПО ЕВРОПЕЙСКОЙ ТЕРРИТОРИИ СССР

В связи с развитием работ по изучению макропроцессов в атмосфере возникают, в частности, задачи по определению теплообмена в почве для больших территорий.

Совместное изучение процессов теплообмена в почве и атмосфере приводит к необходимости использовать уравнение теплопроводности в почве

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2},$$

где  $T$  — температура,  $t$  — время,  $z$  — вертикальная координата,  $k$  — температуропроводность почвы.

Написанное соотношение является уравнением 2-го порядка. Для решения его на границе раздела атмосфера — почва задается условие отсутствия скачка температур и выполнения уравнения теплового баланса. Входящий в число компонент этого баланса поток тепла в почву выражается в виде

$$B = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z},$$

где  $B$  — поток тепла в почву,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности.

Тепловые свойства почвы в рамках упомянутой выше задачи характеризуются значениями двух параметров:  $\lambda$  и  $k$ . Эти величины не являются независимыми, а связаны соотношением

$$\lambda = c_p k,$$

где  $c_p$  — объемная теплоемкость почвы.

Таким образом, для того чтобы знать все три характеристики, достаточно иметь данные только по двум из них.

Для изучения процессов планетарного масштаба необходимо знать распределение теплофизических характеристик почвы по большим территориям масштаба материков. Построение карт различных физических параметров, необходимых для численного моделирования общей циркуляции, находит все более широкое использование в современной метеорологии. В качестве примера можно привести карты альбедо для обоих полушарий, построенные А. И. Федосеевой [1]. Пространственная изменчивость, пятнистость альбедо не меньше изменчивости теплофизических характеристик почвы, поэтому возможность построения таких карт представляется вполне естественной.

Теплофизические характеристики почвы зависят от нескольких факторов: химико-минералогической природы почвы, структуры почвы, ее

механического состава, влажности, объемного веса (или так называемой плотности скелета почвы) и температуры. Влияние этих факторов на величины теплофизических характеристик почвы неодинаково. Так, влияние температуры на характеристики незамерзшей почвы в естественных условиях значительно меньше, чем некоторых других факторов. Поэтому в дальнейших расчетах им можно пренебречь. Для выяснения роли остальных факторов необходимо рассмотреть некоторые физические свойства почвы.

Как показали исследования [2—6 и др.], все химические, физико-химические, физические и физико-механические свойства механических элементов почв закономерно изменяются в соответствии с их размером. Так, по мере уменьшения диаметра частиц увеличивается гигроскопичность, влагоемкость и капиллярность почвы (хотя быстрота движения воды по капиллярам замедляется в десятки и сотни раз). Общая порозность почвы (отношение суммарного объема пор в почве к объему почвы) складывается из пор различных размеров и форм, а от этого зависят водные, тепловые и другие свойства почвы.

В литературе имеется понятие об активных и неактивных порах в почве. Такое деление построено на различных категориях почвенной влаги: 1) свободная вода, передвигающаяся под влиянием силы тяжести; 2) капиллярная вода, передвигающаяся под влиянием в основном менисковых сил и 3) вода, адсорбированная почвой под действием поверхностной энергии (эта вода удерживается почвой давлением до сотен и тысяч атмосфер и не воспринимается растениями). По отношению к росту растений влага распределяется на две основные группы: 1) непродуктивную влагу и 2) продуктивную, нижним пределом которой служит влажность завядания (влажность, при которой растения обнаруживают признаки увядания от недостатка влаги).

По механическому составу почвы разделяются на глинистые, суглинистые, супесчаные и песчаные в порядке возрастания размера твердых частичек почвы и возрастания процентного содержания в ней более крупных фракций (при ситовом анализе).

Песчаная почва, состоящая из относительно крупных частиц, а по минералогическому составу из кварца, полевого шпата и др., очень слабо удерживает воду. По мере уменьшения диаметра частиц, сокращения в почве кварца и увеличения кислых пород адсорбционные свойства почвы возрастают.

Возвращаясь к вопросу о влиянии на теплофизические характеристики почвы указанных в начале статьи факторов, можно отметить, что химико-минералогический состав тесно связан с механическим составом почвы, а также косвенным образом влияет на ее влажность. Структуру почвы могут примерно характеризовать ее механический состав и плотность.

Таким образом, при определении теплофизических характеристик почвы мы сочли возможным ограничиться зависимостью их от трех факторов: 1) механического состава, 2) влажности и 3) объемного веса сухой почвы (плотности ее скелета).

Наиболее простая зависимость от указанных выше факторов существует для одной из трех теплофизических характеристик — для объемной теплоемкости  $c_p$ . Объемную теплоемкость почвы можно представить как сумму теплоемкостей, содержащихся в единице объема данной почвы твердых частиц и воды (теплоемкость воздуха ввиду ее малости можно не учитывать). Таким образом,

$$c_p = c_{п} \rho_{п} + c_{в} \rho_{в},$$

где  $c_{п}$  — удельная теплоемкость твердых частиц почвы;  $\rho_{п}$  — объемный вес сухой почвы;  $c_{в}$  — теплоемкость воды (принимается равной единице);  $\rho_{в}$  — вес воды, содержащейся в единице объема почвы. Величину  $\rho_{в}$  можно выразить через влажность почвы ( $W$ ) и  $\rho_{п}$  следующим образом:

$$W = \frac{\rho_{в}}{\rho_{п}} \quad \text{или} \quad \rho_{в} = W \rho_{п}.$$

Тогда

$$c_{р} = \rho_{п}(c_{п} + W),$$

где  $W$  — влажность почвы в долях единицы.

Удельная теплоемкость  $c_{п}$  почв разного механического состава измерялась рядом исследователей [4, 8—10]. По этим данным можно принять: для песка  $c_{п} = 0,18$  кал/г·град., для глины  $c_{п} = 0,21$  кал/г·град. Удельная теплоемкость промежуточных почв — супеси и суглинка равна соответственно 0,19 и 0,20 кал/г·град.

$\lambda \cdot 10^3$  кал/см·сек·град

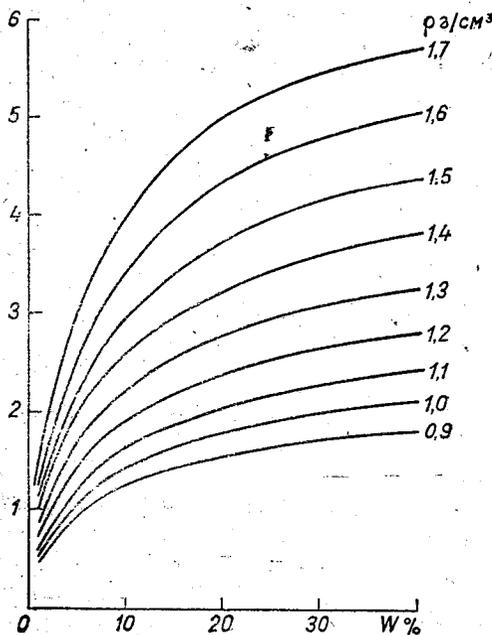


Рис. 2. Зависимость теплопроводности супесчаной почвы от влажности и объемного веса.

кал/см·сек·град

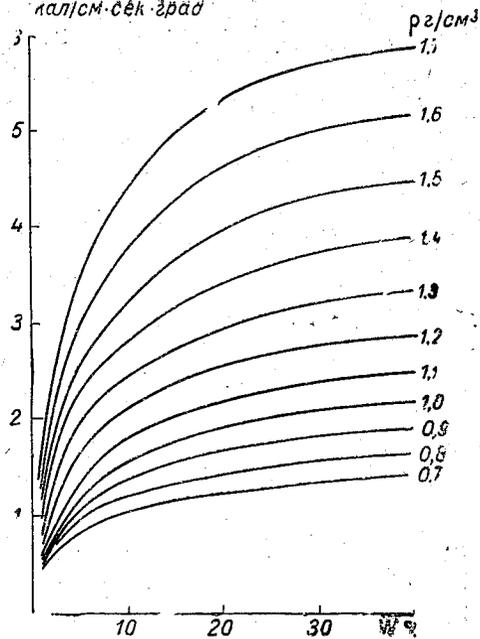


Рис. 1. Зависимость теплопроводности песчаной почвы от влажности и объемного веса.

Следовательно, зная механический состав почвы, а также ее объемный вес и влажность, можно легко рассчитать и ее объемную теплоемкость.

Получить таким же простым расчетом другие теплофизические характеристики — теплопроводность или температуропроводность — не представляется возможным. Их зависимости от механического состава, влажности и объемного веса гораздо более сложные.

Наиболее простым способом получения этих величин является нахождение их по эмпирическим графикам, построенным по данным непосредственных измерений теплопроводности или температуропроводности почвы.

В литературе имеется большое количество данных непосредственных измерений теплофизических характеристик

почвы. Однако далеко не все приведенные величины могут быть использованы для построения подобных графиков. В ряде случаев теплофизические характеристики почвы измерялись для каких-либо узких специальных задач. При этом не определялись либо механический состав почвы, либо ее плотность, либо влажность, а иногда и ни одна из этих физических характеристик. По тем данным, которые содержат полные сведения об исследуемой почве [3, 11—23 и др.], были построены семейства кривых, представленные на рис. 1, 2—4. Эти графики были построены для величины теплопроводности, так как для этой характеристики имелось больше исходных данных.

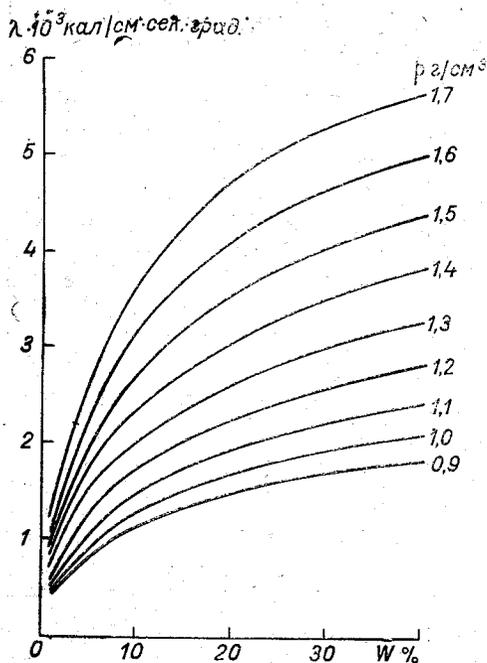


Рис. 3. Зависимость теплопроводности суглинистой почвы от влажности и объемного веса.

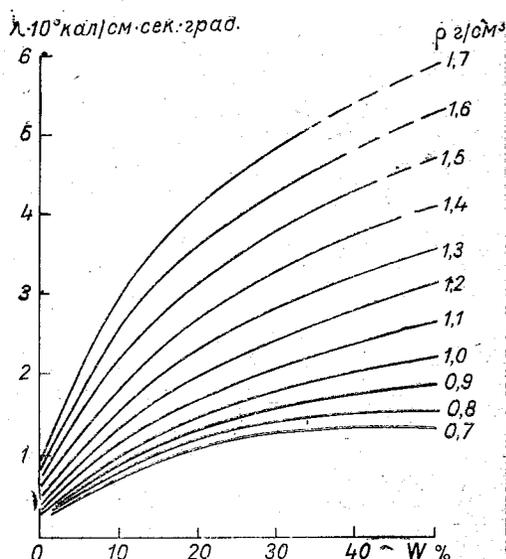


Рис. 4. Зависимость теплопроводности глинистой почвы от влажности и объемного веса.

### Условия получения теплофизических характеристик почв для территории Советского Союза

Для нахождения значений теплофизических характеристик почв необходимо, как уже указывалось, знать три фактора: механический состав, плотность (объемный вес) сухой почвы и ее влажность. Сведения о почвах имеются в агроклиматических справочниках, издаваемых гидрометеорологической службой различных областей и союзных и автономных республик. В них указывается механический состав и объемный вес почвы по каждой агрометстанции. Влажность почвы можно рассчитать по приводимым в них запасам продуктивной влаги и коэффициенту увядания (влажности завядания) по эмпирической формуле [24]

$$W = \frac{v + 0,1q\rho h}{0,1\rho h} \%,$$

где  $v$  — запасы продуктивной влаги в почве в миллиметрах;  $q$  — коэффициент увядания (влажность завядания) для данного слоя почвы

В процентах;  $\rho$  — объемный вес сухой почвы, г/см<sup>3</sup>;  $h$  — толщина слоя почвы в сантиметрах.

Запасы продуктивной влаги даются, как правило, средние за ряд лет для каждой декады теплого периода года.

В большинстве справочников имеется также почвенная карта данной области, на которой нанесены районы с почвами определенного механического состава.

Как уже отмечалось выше, почвы больших территорий представляют собой чрезвычайно пеструю картину как в отношении их механического состава, так и в отношении объемного веса и влажности. При этом, если механический состав почвы можно считать постоянным по времени для данной местности, то объемный вес верхнего слоя почвы может изменяться под влиянием обработки, а влажность может сильно варьировать от года к году и в зависимости от погодных условий.

Следует также отметить, что данные, приводимые в агроклиматических справочниках, относятся к почвам сельскохозяйственных полей. Для почв, не подвергающихся сельскохозяйственной обработке, т. е. для естественных почв, таких данных нет. Обычно обработке подвергается верхний слой почвы толщиной 20—30 см. Если мы хотим получить осредненные данные по достаточно глубокому (толстому) слою почвы, то погрешность распространения этих данных для естественной почвы уменьшится. Однако для слоя, например, 0—50 см различия в объемном весе обработанной и естественной почвы могут быть заметными.

Все эти обстоятельства требуют проведения анализа возможных погрешностей в определении теплофизических характеристик при определенных неточностях или отклонениях в исходных данных.

### Погрешности в определении теплофизических характеристик почвы при неточностях в исходных данных

#### а) Объемная теплоемкость почвы

Погрешности определения объемной теплоемкости при наличии ошибок в исходных данных легко установить при рассмотрении расчетной формулы

$$c_p = \rho(c_n + W).$$

Отклонения в объемном весе  $\rho$  вызовут те же отклонения в процентах в величине  $c_p$ .

Различия в удельной теплоемкости твердых частиц  $c_n$  почв разного состава невелики, и ошибки в определении механического состава сказываются на величине  $c_p$  по-разному в зависимости от влажности почвы. Так, различия в объемной теплоемкости глины и песка одной и той же плотности  $\rho=1,0$  г/см<sup>3</sup> для сухой почвы составляют 16% и уменьшаются при возрастании влажности. При  $W=40\%$  отношение  $c_{p\text{глины}}/c_{p\text{песка}}$  составляет 1,05.

Влияние отклонений во влажности почвы на  $\pm 5\%$  на величину объемной теплоемкости почвы для глинистой и песчаной почв иллюстрируется табл. 1. В ней представлены величины отношения  $c_{pW+5}/c_{pW-5}$  для разных значений влажности почвы.

Таблица 1

Отношение  $c_{\rho_{w+5}}/c_{\rho_{w-5}}$  для различных значений  $W$ 

Механический состав почвы	Влажность почвы, %					
	5	10	15	20	30	40
Глина	1,48	1,38	1,32	1,28	1,22	1,18
Песок	1,55	1,43	1,36	1,30	1,23	1,19

Таким образом, абсолютная ошибка в значениях влажности в 10%, естественно, сильно сказывается при малых влажностях, но ее влияние уменьшается с увеличением влажности.

### б) Теплопроводность почвы

Различия в механическом составе почвы оказывают разное влияние на величину теплопроводности почвы в зависимости от ее влажности. В табл. 2 дано отношение  $\lambda_{\text{песка}}/\lambda_{\text{глины}}$  для разных значений влажности почвы при двух величинах объемного веса<sup>1</sup>.

Таблица 2

Отношение  $\lambda_{\text{песка}}/\lambda_{\text{глины}}$  для различных значений  $W$ 

$\rho$ г/см <sup>3</sup>	Влажность почвы, %						
	2	5	10	15	20	30	40
1,0	1,24	1,77	1,54	1,41	1,30	1,15	1,05
1,5	1,48	1,73	1,45	1,33	1,24	1,12	1,02

Максимум отношения  $\lambda_{\text{песка}}/\lambda_{\text{глины}}$  оказывается при  $W \approx 5\%$ . При возрастании влажности почвы это отношение уменьшается и при больших влажностях, порядка 40%, механический состав уже почти не влияет на теплопроводность почвы. Различия в объемном весе почвы имеют в данном случае значительно меньшее значение, чем различия во влажности.

Влияние ошибки в определении объемного веса  $\rho$  почвы на величину ее теплопроводности можно проиллюстрировать табл. 3, в которой дано отношение  $\lambda_{\rho+0,1}/\lambda_{\rho-0,1}$  для различных значений объемного веса песка и глины при двух состояниях влажности — 5 и 20%.

Погрешность в определении теплопроводности почвы при ошибке в определении объемного веса, как видно из табл. 3, не зависит практически ни от механического состава почвы, ни от ее влажности. При погрешности в определении  $\rho$ , равной 0,2 г/см<sup>3</sup>, относительная ошибка в определении  $\lambda$  составляет 34—36%.

Для выяснения влияния погрешности в определении влажности почвы на величину ее теплопроводности в табл. 4 даны отношения  $\lambda_{w+5}/\lambda_{w-5}$  для разных значений влажности песка и глины при двух значениях плотности — 1,0 и 1,5 г/см<sup>3</sup>.

<sup>1</sup> Здесь и далее значения  $\lambda_{\text{песка}}$  и  $\lambda_{\text{глины}}$  сняты с номограмм рис. 1 и 4.

Таблица 3

Отношение  $\lambda_{\rho+0,1} / \lambda_{\rho-0,1}$  для различных значений  $\rho$ 

W %	Объемный вес сухой почвы, г/см <sup>3</sup>								
	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	средн.
Глина									
5	—	1,30	1,35	1,38	1,37	1,39	1,40	1,35	1,36
20	—	1,26	1,34	1,39	1,38	1,37	1,34	1,30	1,34
Песок									
5	1,22	1,26	1,38	1,47	1,40	1,30	1,30	1,36	1,34
20	1,34	1,32	1,33	1,35	1,35	1,35	1,35	1,34	1,34

Данные, приведенные в табл. 4, указывают на то, что погрешность в определении теплопроводности почвы при ошибке в определении влажности почти не зависит от плотности почвы.

Отсюда также видно, что если при больших влажностях почвы абсолютная ошибка в  $W$ , равная 10%, ведет к сравнительно небольшим погрешностям в величине  $\lambda$ , то при малых влажностях при такой ошибке значения теплопроводности могут отличаться в 3,5—4,5 раза. Однако в действительности такая ошибка вряд ли возможна. Для этого пришлось бы предположить, что, например, вместо влажности почвы

Таблица 4

Отношение  $\lambda_{w+5} / \lambda_{w-5}$  для различных значений  $W$ 

$\rho$ г/см <sup>3</sup>	Влажность почвы, %					
	5	10	15	20	30	40
Глина						
1,0	3,65	1,87	1,44	1,33	1,18	1,12
1,5	3,05	1,82	1,43	1,29	1,16	1,11
Песок						
1,0	4,62	1,48	1,22	1,14	1,07	1,03
1,5	4,21	1,42	1,22	1,14	1,05	1,02

$W=10\%$  принята влажность  $W=0\%$  (и наоборот.) Для малых значений влажности поэтому рассчитаны погрешности, вызываемые различными абсолютными ошибками во влажности ( $n$ ), начиная с 0,5%. Эти погрешности иллюстрирует табл. 5.

Данные табл. 5 показывают, что для получения, например, величины  $\lambda$  с относительной погрешностью не более 25% для глинистой почвы при влажности 2—4% нужно иметь данные влажности с абсолютной ошибкой не более 1%, для  $W \approx 5\%$  — с абсолютной ошибкой не более 2%, для  $W \approx 10\%$  — не более 4% и для  $W \approx 15\%$  — не более 6%.

Анализ величин погрешностей в табл. 1—5 приводит к следующему общему выводу: для областей с большой влажностью почвы погрешности в исходных данных сопровождаются сравнительно небольшими ошибками в определении теплопроводности и объемной теплоемкости, но для засушливых зон к исходным данным следует относиться более внимательно.

Отношение  $\lambda_{W+n}/\lambda_{W-n}$  для малых значений  $W$  при  $\rho=1,0$  г/см<sup>3</sup>

n	Влажность почвы, %				n	Влажность почвы, %			
	3	5	10	15		3	5	10	15
	Глина					Песок			
0,5	1,14	1,12	1,05	1,03	0,5	1,19	1,10	1,03	1,02
1	1,33	1,25	1,12	1,07	1	1,43	1,21	1,06	1,04
2	1,89	1,58	1,26	1,15	2	2,14	1,50	1,14	1,08
3	2,68	1,98	1,43	1,24	3	3,72	1,95	1,23	1,12
4	—	2,66	1,63	1,34	4	—	2,72	1,34	1,17

## Дополнительные сведения о теплофизических характеристиках

Как уже указывалось выше, между механическим составом почвы и влажностью завядания растений существует прямая связь.

Обработка материалов агроклиматических справочников по 528 пунктам на территории СССР позволила нам принять следующие градации влажности завядания почвы в зависимости от ее механического состава:

Механический состав почвы . . . . .	Песок	Супесь	Суглинок	Глина
Коэффициент увядания, % . . . . .	<2,5	2,5—6,0	6,0—12,0	>12,0

Объемный вес почвы уменьшается по мере уменьшения размеров частиц. Для расчета средних величин объемного веса для почв указанных выше четырех видов механического состава использованы данные 497 пунктов на территории СССР. Результаты расчета даны в табл. 6.

Таблица 6

Механический состав почвы . . . . .	Песок	Супесь	Суглинок	Глина
Средняя величина объемного веса $\rho_{ср}$ г/см <sup>3</sup> . . . . .	1,51	1,40	1,28	1,16
Средний коэффициент увядания, % . . . . .	1,8	4,15	9,2	15,0

Здесь же приведены средние значения коэффициента увядания ( $k_y$ ), вычисленные по данным тех же 497 пунктов. Зависимость объемного веса от коэффициента увядания графически изображена на рис. 5.

Влажность почвы также зависит от ее механического состава. Песчаная почва, как видно из изложенного выше, значительно слабее удерживает влагу, чем глинистая. Однако такое сравнение возможно лишь для почв одной климатической зоны. С изменением климатических условий влажность почвы, естественно, должна также измениться.

В табл. 7 приводится шкала классификации климата по условиям влагообеспеченности из [25].

Здесь  $P$  — годовое количество осадков в миллиметрах,  $f$  — годовая испаряемость в миллиметрах.

Для установления климатических зон на ЕТС и для определения влажности почвы в пределах этих зон необходимо было найти величины  $P$  и  $f$  для районов используемых нами агрометеорологических станций. Значения  $P$  были получены по данным «Справочников по климату СССР», (ч. IV, разд. II, табл. 1а) по всем вышедшим из печати к настоящему времени выпускам. Значения  $f$  сняты с карт испаряемости из [26].

Таких станций, где имелись данные по трем величинам ( $W$ ,  $P$  и  $f$ ) оказалось 250. По отношению  $P/f$  все эти пункты были разбиты на зоны в соответствии с табл. 8 и для всех зон были рассчитаны средние значения влажности с учетом механического состава почвы. Результаты расчета представлены в табл. 8.

Цифры в скобках в таблице соответствуют числу пунктов, по которым проведено осреднение.

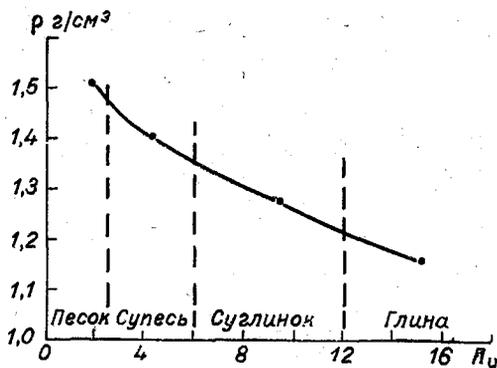


Рис. 5. Связь объемного веса почвы с коэффициентом увядания.

Таблица 7

$\frac{P}{f}$	Индекс	Зона увлажнения	Область
> 1,33	$B_n$	Избыточно влажная	Область достаточного увлажнения
1,33—1,00	$B$	Влажная	То же
1,00—0,77	$P_b$	Полувлажная	Область недостаточного увлажнения. Подобласть слабозасушливая
0,77—0,55	$P_3$	Полузасушливая	
0,55—0,44	$Z$	Засушливая	
0,44—0,33	$Z_0$	Очень засушливая	Засушливая
0,33—0,22	$C_n$	Полусухая	Область незначительного увлажнения (сухая)
0,22—0,12	$C$	Сухая	
< 0,12	$C_0$	Очень сухая	

Таблица 8

Влажность почвы по зонам (%)

Зона	Механический состав почвы			
	Песок	Супесь	Суглинок	Глина
$B_n$	10,6 (15)	17,8 (33)	21,8 (24)	31,7 (3)
$B$	8,7 (6)	13,6 (11)	20,3 (35)	24,5 (19)
$P_b$	—	9,0 (3)	18,3 (14)	23,0 (21)
$P_3$	—	9,5 (4)	14,6 (14)	19,5 (23)
$Z$	—	9,0 (4)	12,7 (11)	18,0 (1)
$C_n$	5,0 (1)	6,6 (5)	6,7 (3)	—

Полученные средние величины объемного веса и влажности почв, приведенные в табл. 6 и 8, позволили получить примерные значения теплофизических характеристик тех районов, по которым нет сведений, необходимых для расчета.

### Построение карт теплофизических характеристик почвы

Основой для карт теплофизических характеристик являлась почвенная карта масштаба 1:7 500 000, построенная нами по почвенной карте масштаба 1:2 500 000.

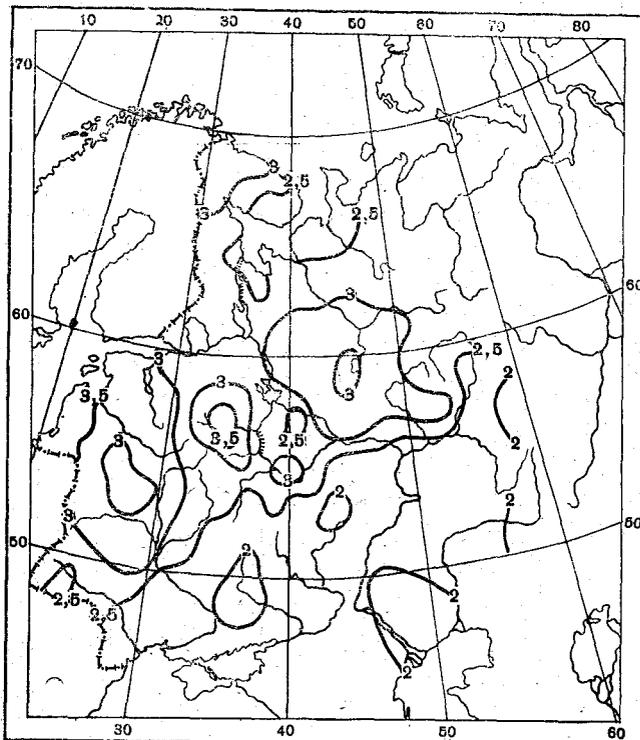


Рис. 6. Пространственное изменение теплопроводности почвы для равнинной территории Европейской части СССР.

Построены карты теплопроводности ( $\lambda$ ) и объемной теплоемкости почвы ( $c_p$ ) по значениям, осредненным по глубине (0—50 см) и по времени (июнь, июль и август). На карты были нанесены все пункты агрометеорологических станций с рассчитанными для них теплофизическими характеристиками. Были рассчитаны средние взвешенные величины теплофизических характеристик для двухградусных квадратов с учетом площади, занимаемой почвой определенного механического состава, и с использованием для этих почв данных табл. 6 и 8. Изолинии на карте теплопроводности почвы нанесены через  $0,5 \cdot 10^3$  кал/см · сек · град., на карте объемной теплоемкости — через  $0,05$  кал/см<sup>3</sup> · град. Карты составлены для равнинной территории (рис. 6 и 7).

Физические свойства почв различного механического состава в естественных условиях одной климатической зоны могут либо выравнять значения их теплофизических характеристик, либо усилить различия в них. Свойство глинистых, более легких, почв удерживать значительно

большее количество влаги по сравнению с песчаными сближает значения теплофизических характеристик этих почв. В зонах достаточного и избыточного увлажнения теплопроводность и объемная теплоемкость глинистых почв даже превышают значения этих характеристик песчаных почв, находящихся в таких же климатических условиях. В засушливых и сухих зонах, где различия во влажности сравнительно невелики, вступают в силу различия в плотности почв, и малая плотность глинистых почв по сравнению с песчаными приводит к обратному соотношению в их теплофизических характеристиках.

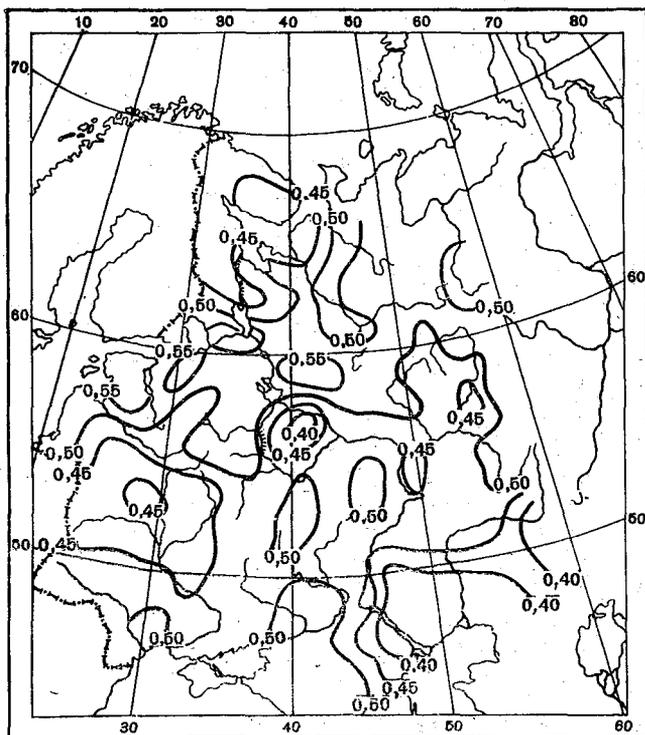


Рис. 7. Пространственное изменение объемной теплоемкости почвы для равнинной территории Европейской части СССР.

Различия в характере пространственного изменения теплопроводности (рис. 6) и объемной теплоемкости (рис. 7) объясняются различиями теплофизических характеристик почвы в зависимости от плотности и влажности. Кроме того, при равных значениях  $\rho$  и  $W$  теплопроводность песка больше, чем глины, объемная же теплоемкость песка (вследствие меньшей величины  $c_p$ ) меньше объемной теплоемкости глины.

Осреднение по площади двухградусного квадрата, естественно, сглаживает пространственные различия в теплофизических характеристиках почвы.

Теплопроводность почвы на Европейской территории СССР (рис. 6) изменяется в пределах от  $3,5 \cdot 10^{-3}$  до  $2,0 \cdot 10^{-3}$  кал/см·сек. × град. Лишь на сравнительно небольших участках величина  $\lambda$  превышает  $3,5 \cdot 10^{-3}$  кал/см·сек. град. (в районе Бологое) и составляет меньше  $2,0 \cdot 10^{-3}$  кал/см·сек. град. (в районах Пензы, Харькова —

Запорожья, Прикаспийской низменности и вблизи Уральского хребта). Изолиния  $\lambda = 2,5 \cdot 10^{-3}$  проходит в основном по полувлажной зоне ( $P_B$ ). К юго-востоку от нее расположены зоны  $P_3$ ,  $Z$ ,  $Z_0$  и  $C_{II}$ , к северо-западу — зоны  $B$  и  $B_{II}$ . В частности, минимум  $\lambda$  в районе Прикаспийской низменности обусловлен очень малой влажностью почв этой территории (зоны  $Z_0$  и  $C_{II}$ ).

Объемная теплоемкость (рис. 7) изменяется от 0,40 до 0,55 кал/см<sup>3</sup> × град. На карте объемной теплоемкости лишь в районе Прикаспийской низменности изолинии связаны с расположением зон увлажнения. Все остальные изолинии определяются комплексным влиянием на величину  $c_p$  трех факторов — механического состава, объемного веса и влажности — в различных сочетаниях. Так, минимумы ( $< 0,45$ ) в Белоруссии и северо-восточнее Москвы вызваны тем, что почва на этих территориях в основном песчаная и супесчаная и, как уже указывалось, в зонах достаточного увлажнения теплофизические характеристики ее меньше, чем окружающей территории, состоящей из глинистых и суглинистых почв. Максимумы ( $> 0,55$ ) в районах Ладожского и Онежского озер, восточнее Рыбинского водохранилища и в Эстонской ССР объясняются высокой влажностью глинистых и суглинистых почв этих районов. Для объемной теплоемкости эти минимумы и максимумы усиливаются еще тем, что удельная теплоемкость песка меньше, чем глины.

Сравнительно небольшие значения теплопроводности почвы в районах вблизи Белого моря объясняются наличием здесь значительного количества болот. Теплофизические характеристики болотных почв колеблются в очень широких пределах. Мы приняли для болота ориентировочно 80%-ного насыщения  $\lambda = 1,3 \cdot 10^{-3}$  кал/см · сек · град.,  $c_p = 0,58$  кал/см<sup>3</sup> · град. [27]. Район северо-востока ЕТС (севернее  $\varphi = 66^\circ$  и восточнее  $\lambda = 44^\circ$ ) нами пока не рассмотрен ввиду отсутствия данных по почве в этом районе и трудностей по выяснению значений теплофизических характеристик почв, главным образом болот, для районов вечной мерзлоты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Федосеева А. И. Альbedo системы земля — атмосфера и его распределение по земному шару. Труды ГГО, вып. 41 (103), 1953.
2. Калесник С. В. Краткий курс общего землеведения. Географгиз, М., 1957.
3. Нерпин С. В., Чудновский А. Ф. Физика почвы. «Наука», М., 1967.
4. Чудновский А. Ф. Теплофизические характеристики дисперсных материалов. Физматгиз, М., 1962.
5. Качинский Н. А. Физика почв. «Высшая школа», М., 1965.
6. Роде А. А. Почвенная влага. Изд-во АН СССР, М., 1952.
7. Шульгин А. М. Климат почвы и его регулирование. Гидрометеониздат, Л., 1967.
8. Димо В. Н. Основные тепловые свойства некоторых почв террас Кутулука. Труды Почв. ин-та им. Докучаева, т. XXXVII, 1952.
9. Коннова О. С. К методике определения теплоемкости мерзлых грунтов. Материалы по лабораторным исследованиям мерзлых грунтов. Сб. I, Изд-во АН СССР, 1953.
10. Сборник физических констант. Под ред. Я. Г. Дорфмана. Л.—М., 1937.
11. Антонова Л. В. Результаты исследований тепловых свойств горных пород Якутии: Тепло- и массообмен в мерзлых почвах и горных породах. Изд-во АН СССР, М., 1961.
12. Гупало А. И. Тепловые свойства почвы в зависимости от ее влажности и плотности. Почвоведение, № 4, 1957.
13. Горбунова И. Г., Серова Н. В. Теплофизические характеристики и влажность почвы. Труды ГГО, вып. 107, 1961.
14. Горбунова И. Г., Дьячкова Т. В., Серова Н. В. Некоторые результаты измерения теплофизических характеристик почвы в естественных условиях. Труды ГГО, вып. 77, 1958.

15. Дерябин В. П. Опыт применения шарового источника тепла постоянной мощности для определения теплопроводности почвы в естественных условиях. Вестник МГУ, сер. мат., мех., астр., вып. 5, 1957.
16. Кин Б. А. Физические свойства почвы. Гостехиздат, М., 1933.
17. Kersten M. S. Thermal properties of soil. Univ. Minnesota, Inst. Technology. Bull. No. 28, vol. 7, 1949.
18. Кондратьев Г. М. О влиянии влажности на теплопроводность некоторых теплоизоляторов и грунтов. Исследования в области тепловых измерений. Сб. работ ЛИТМО, вып. 12, 1954.
19. Покровский Г. И., Булычев В. Г. О теплопроводности грунтов. Ж. техн. физики, т. VIII, вып. 17, 1938.
20. Ушкалов В. П. Метод определения теплофизических коэффициентов грунтов по принципам теплового импульса. Отчетное совещание по науч.-исслед. работам 1954 г. ВНИИ оснований и фундаментов, 1956.
21. Франчук А. У. Теплопроводность строительных материалов в зависимости от влажности. Госстройиздат, М.—Л., 1941.
22. Франчук А. У. Таблицы теплотехнических показателей строительных материалов. Промстройиздат, М.—Л., 1949.
23. Инструкция по определению расчетной глубины оттаивания мерзлых грунтов в основании сооружений и по определению расчетных теплофизических коэффициентов грунтов. Изд. Академии, стронт. и архитект. СССР, 1958.
24. Березин Г. С. Руководство по определению агрогидрологических свойств почвы на гидрометстанциях. Гидрометеиздат, Л., 1956.
25. Почвенно-географическое районирование СССР. Изд-во АН СССР, М., 1962.
26. Климатический атлас СССР, т. I. ГУГМС, М., 1960.
27. Романов В. В. Гидродинамика болот. Гидрометеиздат, Л., 1961.

## ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ВЕРТИКАЛЬНОГО ПРОФИЛЯ СИЛЬНЫХ ВЕТРОВ ПО ДАННЫМ ИЗМЕРЕНИЙ НА ВЫСОТНЫХ МАЧТАХ

Для решения ряда научных и практических вопросов требуются сведения об изменении ветра с высотой при больших скоростях в слое атмосферы до нескольких сотен метров.

Интерес представляют, с одной стороны, такие профили, когда большие скорости ветра наблюдаются в нижней части слоя, с другой — когда сильный ветер отмечается на верхней границе слоя.

Наиболее надежные данные о распределении сильных ветров с высотой можно получить из наблюдений на высотных мачтах. Используемые нами данные включали в себя ежечасные измерения скорости и направления ветра, производившиеся в период с января 1964 г. по сентябрь 1968 г. на метеорологической мачте в Обнинске на двух высотах (8 и 301 м), и измерения температуры воздуха на высотах 2 и 301 м. Измерения ветра производились с помощью дистанционной метеорологической станции. Интервал осреднения скорости и направления ветра составлял 2 мин. Использовались измерения ветра и температуры только в тех случаях, когда скорость ветра на высоте 301 м превышала 15 м/сек.

На телевизионной мачте в Новосибирске измерения скорости ветра велись в течение 1966 г. в сроки 1, 4, 7, 10, 11, 13, 19 и 22 часа на четырех высотах. В настоящей работе использованы измерения на уровнях 8 и 180 м.

На телевизионной мачте в Киеве ежечасные измерения скорости и направления ветра регулярно проводятся с помощью анеморумбографов М-12 на четырех высотах. Использовались наблюдения на нижнем (32 м) и верхнем (180 м) уровнях за период 1962—1965 гг. при скоростях ветра  $u_{180}$  не менее 12 м/сек.

Для расчета прочности высоких опор особый интерес представляют такие профили ветра, когда сдвиг скорости в слое атмосферы между нижним и верхним уровнями опоры максимален.

Рассмотрим вопрос о том, как меняется сдвиг скорости ветра в 300-метровом слое при усилении ветра на верхней границе его. В качестве характеристики вертикального сдвига ветра использовалась величина показателя степени  $m$  в степенной формуле

$$\frac{u_2}{u_1} = \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^m \quad (1)$$

Здесь  $u_2$  и  $u_1$  — скорости ветра на высотах  $z_2$  и  $z_1$ . Показатель степени вычислялся из наблюдений скорости ветра на верхнем и нижнем

уровнях рассматриваемого слоя. Увеличение  $m$  характеризует возрастание вертикального сдвига скорости ветра в этом слое.

В табл. 1 приводятся значения показателя степени при разных скоростях на верхнем уровне слоя по трем пунктам. Приведенные значения  $m$  являются осредненными по градациям скорости на верхнем уровне слоя. Число измерений  $n$  для каждой градации указано в таблице.

Таблица 1

Показатель степени  $m$  при различных скоростях ветра на верхнем уровне атмосферного слоя

Обнинск			Новосибирск			Киев		
$u_{301}$	$m_{8-301}$	$n$	$u_{180}$	$m_{8-180}$	$n$	$u_{180}$	$m_{32-180}$	$n$
16—18	0,40	811	0,0—3,0	0,02	265	12	0,59	754
19—21	0,43	337	3,1—6,0	0,28	654	16	0,56	103
22—24	0,45	109	6,1—9,0	0,35	542	17	0,60	35
25—27	0,47	41	9,1—12,0	0,36	296	19	0,55	26
>27	0,56	23	12,1—15,0	0,36	104			
			> 15,0(16,0)	0,35	37			

Из таблицы видно, что сдвиг скорости в слое атмосферы 8—301 м возрастает с усилением ветра на верхнем уровне этого слоя при скоростях 16—18 м/сек. и выше.

Сдвиг скорости ветра в нижнем 180-метровом слое атмосферы увеличивается с ростом скорости на верхней границе этого слоя только до 6—9 м/сек. При дальнейшем усилении  $u_{180}$  показатель степени  $m$  практически не меняется.

Перейдем теперь к вопросу, насколько показательны осредненные сдвиги ветра по отношению ко всей совокупности индивидуальных сдвигов, вычисленных из единичных измерений. Рассмотрим распределения индивидуальных сдвигов ветра при больших скоростях на нижнем и на верхнем уровнях 300-метрового слоя по данным измерений на мачте в Обнинске.

На рис. 1 показана связь между скоростями ветра на высотах 8 и 301 м. Скорости на высоте 8 м, превышающие 9 м/сек., отмечались за период 1964—1968 гг. 50 раз, они менялись в пределах 10—18 м/сек. Соответствующие им скорости ветра на высоте 301 м составляли от 10 до 27 м/сек. Максимум скорости на высоте 8 м за весь период наблюдений составлял 18 м/сек., на уровне 301 м в этот момент была зафиксирована скорость 17 м/сек. За тот же пятилетний период на уровне 301 м скорости, превышающие 27 м/сек., были отмечены 23 раза. В эти 23 срока на высоте 8 м отмечались небольшие скорости, от 2 до 7 м/сек. В тот момент, когда на высоте 301 м был максимум скорости (32 м/сек.), на уровне 8 м скорость составляла лишь 2,5 м/сек.

При скоростях свыше 9 м/сек. на высоте 8 м в слое 2—301 м преобладала неустойчивая стратификация. Из 47 случаев, когда  $u_8 \geq 10$  м/сек., лишь в 6 случаях вертикальный градиент температуры был менее  $0,5^\circ/100$  м, в 13 случаях он находился в пределах от 0,6 до  $1,0^\circ/100$  м и в 28 случаях превышал адиабатический. Показатель степени  $m$  при  $\gamma \leq 0,5^\circ/100$  м составлял от 0,13 до 0,26 (в среднем 0,18); при  $0,6 < \gamma < 1,0^\circ/100$  м он менялся в пределах от  $-0,02$  до 0,22 (в среднем 0,10); при  $1,1 < \gamma < 1,6^\circ/100$  м показатель степени  $m$  менялся от 0,05

до  $0,27$  (в среднем  $0,12$ ). Поворот ветра в  $300$ -метровом слое составлял от  $-30$  до  $+30^\circ$  при скоростях  $u_8 \geq 10$  м/сек., причем зависимости поворота от температурного градиента  $\gamma$  не обнаружено. Показатель степени  $m$  при  $u_8 \geq 10$  м/сек. в среднем равен  $0,12$ .

При скоростях  $u_{301} \geq 28$  м/сек. диапазон изменения индивидуальных значений  $m$  велик ( $0,39 < m < 0,73$ ). Вертикальный градиент температуры  $\gamma$  варьирует в широких пределах, от  $-3,5$  до  $+1,1^\circ/100$  м, причем прева-

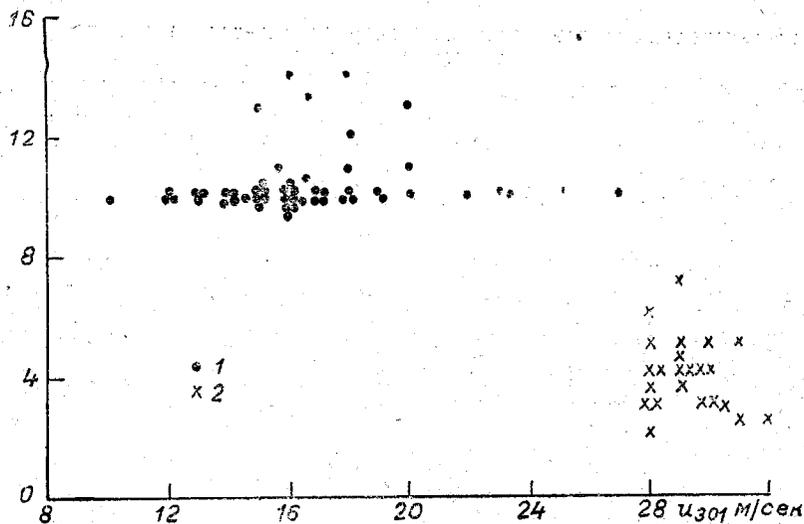


Рис. 1. Соотношение между скоростями ветра на высотах  $8$  и  $301$  м.  
1)  $u_8 > 9$  м/сек., 2)  $u_{301} > 27$  м/сек.

лирует устойчивая стратификация. Из  $22$  случаев, когда при  $u_{301} \geq 28$  м/сек. была измерена температура воздуха на двух высотах, в  $17$  вертикальный температурный градиент был менее  $0,5^\circ/100$  м. Характерной особенностью являются большие значения поворота ветра с высотой, причем преобладает правое вращение. Величина вращения при  $u_{103} \geq 28$  м/сек. менялась от  $-40$  до  $+50^\circ$ , в среднем составляя  $+16^\circ$ . Вращение ветра в большой степени зависит от вертикального градиента температуры в слое. Коэффициент корреляции между величиной вращения и температурным градиентом составляет  $-0,74 \pm 0,10$ .

Остановимся подробнее на расчете изменения профиля ветра при изменении скорости на заданном уровне. Целью рассмотрения этого вопроса является получение профиля ветра при так называемой расчетной (максимальной) скорости на заданном уровне, возможной  $1$  раз в определенное число лет. Дело в том, что ряды надежных аэрологических наблюдений, как и наблюдений на высотных мачтах, недостаточно продолжительны. Из таких рядов, как правило, нельзя выбрать профили ветра при расчетных скоростях, возможных, например,  $1$  раз в  $10$  или  $20$  лет. Поэтому для получения сведений о профиле ветра при расчетной скорости необходимо прибегать к использованию косвенных методов, основанных на экстраполяции характеристик профиля, вычисленных из измеренных значений при меньших скоростях. Очевидно, установив зависимость характеристик профиля ветра в рассматриваемом слое от скорости на заданном уровне, мы тем самым найдем как бы тенденцию к изменению этого профиля при скоростях, больших чем наблюдаемые. Тогда путем экстраполяции характеристик профиля

в сторону ненаблюдаемых скоростей можно будет получить сведения о профилях при расчетной скорости.

Для ряда практических задач наибольшую ценность представляют данные не об осредненных, а об индивидуальных профилях ветра. Применительно к запросам высотного строительства вызывает интерес распределение повторяемостей различных скоростей ветра на высотах при расчетной скорости на заданном уровне.

В табл. 2 приведены дифференциальные повторяемости  $f(u)$  скоростей ветра на нижних уровнях слоев атмосферы при разных градациях скорости на их верхних уровнях по трем пунктам. Распределения для каждой градации скорости на верхнем уровне даны в числе случаев с данной скоростью на нижнем уровне (верхняя строка), а повторяемость в процентах (нижняя строка). В таблице указано также число измерений  $n$  и средние скорости на нижнем уровне для всех градаций скорости ветра на верхней границе рассматриваемого слоя.

Из табл. 2 видно, что с ростом скорости на высоте 180 м увеличиваются скорости на высотах 8 и 32 м. С увеличением скорости на высоте 301 м до 27 м/сек. ветер на уровне 8 м также усиливается, но при дальнейшем усилении  $u_{301}$  происходит некоторое ослабление ветра у земли. Последнее обстоятельство можно объяснить преобладанием устойчивой стратификации атмосферы при больших скоростях в верхней части 300-метрового слоя.

По дифференциальным повторяемостям  $f(u)$ , приводимым в табл. 2, вычислялись интегральные повторяемости скоростей  $F(u)$ , больших  $u$ .

С целью выяснения возможности аппроксимации интегральных повторяемостей  $F(u)$  экспоненциальной функцией высоты значения последних наносились на вероятностную номограмму. На этой номограмме по оси ординат отложены в логарифмическом масштабе значения скорости  $u$ , а по оси абсцисс в билогарифмическом масштабе — интегральные повторяемости  $F(u)$  скоростей ветра, больших  $u$ . Такая номограмма использовалась в [1, 2] для спрямления эмпирических кривых распределения скоростей ветра. Графики интегральных повторяемостей скоростей на нижнем уровне слоя наносились на номограмму для каждой градации скорости на верхнем уровне. По степени спрямления графиков на номограмме можно судить о точности аппроксимации этих повторяемостей соответствующей функцией скорости, в данном случае двухпараметрической экспоненциальной функцией скорости ветра

$$F(u) = e^{-\left(\frac{u}{\beta}\right)^\alpha} \quad (2)$$

Прологарифмировав дважды формулу (2), можно убедиться, что  $\alpha$  численно равно тангенсу угла наклона прямой, отображающей на номограмме интегральное распределение скоростей ветра. Величина  $\beta$  равна скорости ветра, интегральная повторяемость которой составляет 0,368.

Найдя зависимости обоих этих параметров от скорости ветра на верхнем уровне слоя, можно проэкстраполировать полученные зависимости в сторону увеличения скорости и тем самым найти значения  $\beta$  и  $\alpha$  при расчетной скорости на верхнем уровне слоя. Таким образом, задача сводится к нахождению зависимостей параметров  $\beta$  и  $\alpha$  от скорости ветра.

На рис. 2 приводятся нанесенные на номограмму распределения повторяемостей  $F(u)$  скоростей ветра на высоте 8 м для различных

Таблица 2

Повторяемость скоростей ветра на нижнем уровне атмосферного слоя  
при различных градациях скорости на его верхней границе

Обнинск

$u_{201}$ м/сек.	$u_8$ м/сек.										$n$	$\bar{u}_8$ м/сек.
	0-1	2-3	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	14-15	16-17	18-19		
16-18	70	284	263	134	38	18	2	1	0	1	811	
	8,6	35,1	32,5	16,5	4,7	2,2	0,2	0,1	0,0	0,1	100,0	4,1
19-21	13	118	127	57	19	3	0	0	0	0	337	
	3,8	34,9	37,9	16,9	5,6	0,9	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	4,2
22-24	2	42	38	14	10	3	0	0	0	0	109	
	1,8	38,7	34,9	12,8	9,1	2,7	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	4,5
25-27	0	10	19	6	3	2	0	1	0	0	41	
	0,0	24,6	41,3	14,7	7,2	4,8	0,0	2,4	0,0	0,0	100,0	4,9
>27	0	7	14	2	0	0	0	0	0	0	23	
	0,0	30,4	61,0	8,6	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	4,0

Новосибирск

$u_{160}$ м/сек.	$u_8$ м/сек.										$n$	$\bar{u}_8$ м/сек.
	0,0-1,0	1,1-2,0	2,1-3,0	3,1-4,0	4,1-5,0	5,1-6,0	6,1-7,0	7,1-8,0	8,1-9,0	9,1-10,0		
0,0-3,0	71	151	38	3	2	0	0	0	0	0	265	1,4
	26,8	57,0	14,3	1,1	0,8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	
3,1-6,0	73	309	227	43	2	0	0	0	0	0	654	1,9
	11,2	47,2	34,7	6,6	0,3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	
6,1-9,0	10	129	242	126	34	1	0	0	0	0	542	2,6
	1,8	23,8	44,7	23,2	6,3	0,2	0,0	0,0	0,0	0,0	100,0	
9,1-12,0	2	19	94	91	60	25	4	1	0	0	296	3,5
	0,7	6,4	31,8	30,7	20,3	8,4	1,4	0,3	0,0	0,0	100,0	
12,1-15,0	0	1	14	28	35	14	7	4	0	1	104	4,4
	0,0	1,0	13,5	26,9	33,6	13,5	6,7	3,8	0,0	1,0	100,0	
>15,0	0	0	2	4	10	9	8	3	1	0	37	5,5
(16,0)	0,0	0,0	5,4	10,8	27,1	24,3	21,6	8,1	2,7	0,0	100,0	

Киев

$u_{180}$ м/сек.	$u_{32}$ м/сек.											$n$	$\bar{u}_{32}$ м/сек.
	0,0-1,0	1,1-2,0	2,1-3,0	3,1-4,0	4,1-5,0	5,1-6,0	6,1-7,0	7,1-8,0	8,1-9,0	9,1-10,0	12,1-13,0		
11,5-12,5	1	12	84	222	211	131	68	24	1	0	0	754	4,4
	0,1	1,6	11,1	29,5	28,0	17,4	9,0	3,2	0,1	0,0	0,0	100,0	
15,5-16,5	0	0	2	12	11	29	23	19	6	1	0	103	5,9
	0,0	0,0	1,9	11,7	10,7	28,2	22,3	18,4	5,8	1,0	0,0	100,0	
16,5-17,5	0	0	0	8	4	9	11	5	2	1	0	35	6,1
	0,0	0,0	0,0	8,6	11,4	25,7	31,4	14,3	5,7	2,9	0,0	100,0	
>17,5	0	0	0	1	0	3	10	8	1	1	2	26	7,2
	0,0	0,0	0,0	3,8	0,0	11,5	38,6	30,8	3,8	3,8	7,7	100,0	

градаций скорости на высоте 180 м по данным измерений на телемачте в Новосибирске. Как видно из рисунка, интегральные повторяемости  $F(u)_8$  хорошо спрямляются на номограмме. Заметно увеличение  $\alpha$  и  $\beta$  с ростом  $u_{180}$ .

На рис. 3 показаны графики зависимости параметров  $\beta$  и  $\alpha$ , определяющих распределение скоростей на нижнем уровне слоя, от скорости на верхнем его уровне по трем пунктам. Из рисунка видно, что  $\beta$

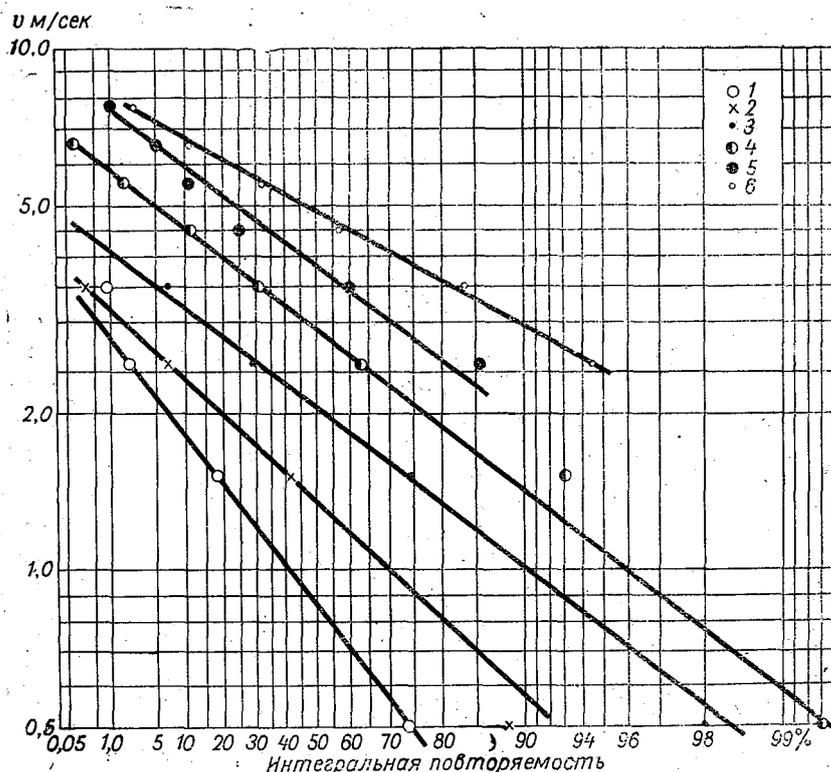


Рис. 2. Интегральное распределение повторяемостей скоростей ветра на высоте 8 м в зависимости от  $u_{180}$  по данным измерений на телевизионной мачте в Новосибирске.

1)  $u_{180} < 3,0$  м/сек., 2)  $3,0 < u_{180} < 6,0$  м/сек., 3)  $6,0 < u_{180} < 9,0$  м/сек., 4)  $9,0 < u_{180} < 12,0$  м/сек., 5)  $12,0 < u_{180} < 15,0$  м/сек., 6)  $u_{180} > 15,0$  м/сек.

линейно возрастает с усилением скорости ветра на верхней границе 180- и 300-метрового слоев. Прирост  $\alpha$  с усилением скорости на уровне 180 м замедляется и  $\alpha$  приближается к некоторой величине, постоянной для данного пункта. Зависимости величины  $\alpha$  от скорости на уровне 301 м практически не обнаруживается.

Характер зависимости параметров  $\beta$  и  $\alpha$  от скорости ветра на верхних уровнях атмосферных слоев позволяет заключить о возможности экстраполяции в сторону больших (ненаблюдаемых) скоростей

с целью нахождения значений этих параметров при расчетной скорости. Аналогичным способом можно найти распределения скоростей ветра на других уровнях в рассматриваемом слое при расчетной скорости на его верхней границе.

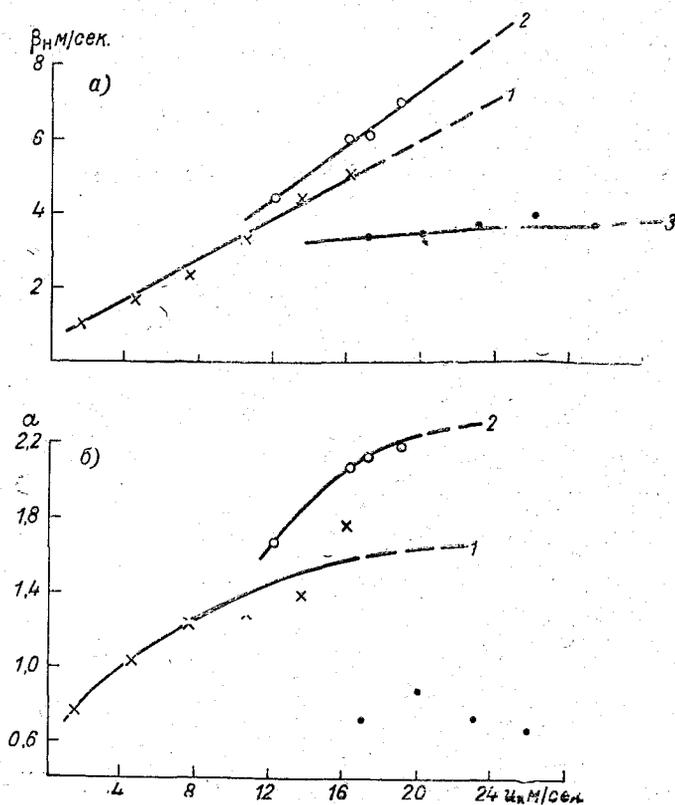


Рис. 3. Зависимость параметров  $\beta$  (а) и  $\alpha$  (б) для распределения скоростей на нижнем уровне слоя  $u_n$  в зависимости от скорости на верхнем уровне его  $u_B$ .

1)  $z_H = 8$  м,  $z_B = 180$  м (Новосибирск); 2)  $z_H = 32$  м,  $z_B = 180$  м (Киев);  
3)  $z_H = 8$  м,  $z_B = 301$  м (Обнинск).

### Выводы

1. При сильном ветре на высоте флюгера вертикальные сдвиги скорости и направления ветра в нижнем 300-метровом слое атмосферы, как правило, незначительны. Температурная стратификация атмосферы чаще всего неустойчивая.

2. Вертикальные сдвиги скорости ветра возрастают с усилением ветра на верхней границе 300-метрового слоя. При скоростях свыше 27 м/сек. на высоте 300 м в этом слое преобладает устойчивая стратификация атмосферы и чаще отмечается правое вращение ветра с высотей, достигающее  $+50^\circ$ . В нижней части 300-метрового слоя наблюдаются скорости ветра 2—7 м/сек.

3. При сильном ветре на верхнем уровне 200- или 300-метрового слоя интегральные распределения скоростей на нижних уровнях этих слоев достаточно точно аппроксимируются двухпараметрической экспо-

ненциальной функцией скорости ветра (2). Располагая данными о зависимости этих параметров от скорости ветра на верхнем уровне слоя, можно найти распределение повторяемостей скоростей на нижнем уровне слоя при расчетной скорости на его верхнем уровне.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Анапольская Л. Е., Гандин Л. С. Режим больших скоростей ветра на территории СССР для учета ветровых нагрузок на сооружения. В сб. «Вопросы прикладной климатологии». Гидрометеониздат, Л., 1960.

2. Заварина М. В. О расчете максимальных скоростей ветра для определения ветровых нагрузок на высотные сооружения. Метеорология и гидрология, № 3, 1968.

## О РАСПРОСТРАНЕНИИ НАГРЕТОЙ ПРИМЕСИ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ

Для расчета поля концентраций нагретой примеси, выбрасываемой трубами промышленных предприятий, нужно уметь рассчитывать траектории нагретых струй примеси, т. е. знать вертикальную скорость и перегрев струи по мере ее удаления от источника. Приближенное решение этой задачи было получено автором совместно с Д. Л. Лайхтманом для случая постоянного коэффициента турбулентного обмена. Если источник нагретой примеси будет находиться вблизи подстилающей поверхности, гипотеза о постоянстве коэффициента турбулентного обмена неприменима и должен быть выбран какой-то закон изменения исследуемой характеристики. Покажем, как решение задачи может быть получено для линейного роста коэффициента вертикального турбулентного обмена с высотой.

Задача будет заключаться в совместном решении системы двух уравнений, описывающих распространение клуба перегретого дыма (перегрев  $\vartheta$ ), который можно представить в виде некоторого мгновенного источника тепла  $Q$  и вертикальной компоненты количества движения  $\rho'_0 w$ , так что

$$\vartheta(t, x, y, z)|_{t=0} = \frac{Q}{\rho'_0 c_p} \delta(x, y, z - h); \quad (1)$$

$$w(t, x, y, z)|_{t=0} = \frac{M}{\rho'_0} \delta(x, y, z - h). \quad (2)$$

Здесь  $\rho'_0$  — плотность выбрасываемой примеси в начальный момент;  $h$  — высота источника;  $\delta$  — дельта-функция;  $c_p$  — удельная теплоемкость выбрасываемой примеси;  $Q$  — тепловая мощность источника, определяемая как

$$Q = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho'_0 c_p \vartheta(x, y, z, t) dx dy dz; \quad (3)$$

$M$  — динамическая мощность источника

$$M = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho'_0 w(x, y, z, t) dx dy dz. \quad (4)$$

Система уравнений, которую нужно решить, имеет вид (черта осреднения для сокращения записи опущена):

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{g \vartheta}{\Theta_a} + k \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + c \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial w}{\partial z}; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + w \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = -w \beta \Theta_a + k \left( \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} \right) + c \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial \vartheta}{\partial z}. \quad (6)$$

Здесь  $\Theta_a$  — средняя потенциальная температура атмосферы в области действия источника;  $\beta = \frac{1}{\Theta_a} \frac{d\Theta_a}{dz}$  — параметр устойчивости атмосферы;  $u$  — средняя скорость ветра на уровне источника;  $k_x = k_y = k$  — коэффициент горизонтального турбулентного обмена; коэффициент вертикального турбулентного обмена имеет вид

$$k_z = cz. \quad (7)$$

Система (5) — (6) нелинейная. В первом приближении будем считать, что член  $w \frac{\partial w}{\partial z}$  можно заменить членом  $\bar{w} \frac{\partial w}{\partial z}$  и соответственно в (6)  $w$ , в левой части заменим на  $\bar{w}$ , где  $\bar{w}$  не зависит от координат и времени. Система (5) — (6) может быть таким образом сведена к одному линейному уравнению. Для этого умножим (5) на некоторый коэффициент  $\alpha$  и сложим с (6). Тогда получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (\vartheta + \alpha w) + u \frac{\partial}{\partial x} (\vartheta + \alpha w) + \bar{w} \frac{\partial}{\partial z} (\vartheta + \alpha w) = \\ & = k \left[ \frac{\partial^2 (\vartheta + \alpha w)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\vartheta + \alpha w)}{\partial y^2} \right] + c \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial}{\partial z} (\vartheta + \alpha w) + \frac{\alpha g \vartheta}{\Theta_a} - w \beta \Theta_a. \end{aligned} \quad (8)$$

Потребуем, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\alpha g \vartheta}{\Theta_a} - w \beta \Theta_a = m (\vartheta + \alpha w). \quad (9)$$

Тогда отсюда получим

$$m = i \sqrt{\beta g}; \quad \alpha = i \Theta_a \sqrt{\frac{\beta}{g}}. \quad (10)$$

Обозначим

$$\bar{N} = \vartheta + \alpha w. \quad (11)$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} = m \bar{N} + k \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial y^2} + c \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial \bar{N}}{\partial z}. \quad (12)$$

С помощью подстановки  $x' = x - ut$ ,  $t' = t$  уравнение (12) может быть приведено к виду (штрихи для упрощения записи опущены)

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} + \bar{w} \frac{\partial \bar{N}}{\partial z} = m \bar{N} + k \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial x^2} + k \frac{\partial^2 \bar{N}}{\partial y^2} + c \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial \bar{N}}{\partial z}. \quad (13)$$

Граничные и начальные условия для  $\bar{N}$  будут:

$$\bar{N}|_{x, y, z, t \rightarrow \infty} \rightarrow 0; \quad (14)$$

$$\bar{N}|_{t \rightarrow 0} = (\vartheta + \alpha w)|_{t \rightarrow 0} = (A + \alpha B) \delta(x, y, z - h), \quad (15)$$

где  $A = \frac{Q}{\rho_0 c_p}$  и  $B = \frac{M}{\rho_0}$  определяются из условий (3) и (4)

Будем считать, что распределение функции  $N$  симметрично относительно вертикальной оси  $z$ . Это будет означать, что начальная функция  $F(x, y, z)$  (в частном случае для точечного источника она может быть дельта-функцией) четная по  $x$  и  $y$ . Будем при решении уравнения (13) пользоваться методами, употребляемыми в работах [1—3].

Введем функции:

$$X(x; \mu) = \cos \mu x; \quad (16)$$

$$Y(y; \lambda) = \cos \lambda y \quad (17)$$

и обозначим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} N(x, y, z, t) X(x; \mu) Y(y; \lambda) dx dy = \psi(t, z; \lambda, \mu). \quad (18)$$

Согласно теории интегралов Фурье имеет место равенство

$$N(x, y, z, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \psi(t, z; \lambda, \mu) X(x; \mu) Y(y; \lambda) d\mu d\lambda. \quad (19)$$

Умножим (13) на произведение функций  $X(x; \mu) Y(y; \lambda)$  и проинтегрируем по переменным  $x$  и  $y$  в пределах от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Тогда получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (\bar{\omega} - c) \frac{\partial \psi}{\partial z} = -(\lambda^2 k + \mu^2 k - m) \psi + cz \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}. \quad (20)$$

Выполним операционное преобразование по  $t$ . Для этого операторное изображение функции  $\bar{\psi}$  представим в виде

$$\bar{\psi} = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \psi dt, \quad (21)$$

где  $p$  — комплексный параметр.

Умножим (20) на  $p \int_0^{\infty} e^{-pt} dt$ . Тогда получим уравнение вида

$$\frac{d^2 \bar{\psi}}{dz^2} + \left(1 - \frac{\bar{\omega}}{c}\right) \frac{1}{z} \frac{d \bar{\psi}}{dz} - \frac{\lambda^2 k + \mu^2 k - m + p}{c} \frac{1}{z} \bar{\psi} = -\frac{p f}{cz}. \quad (22)$$

Здесь

$$f(z; \lambda, \mu) = \psi|_{t=0}. \quad (23)$$

Решение уравнения (22) может быть получено в виде

$$\begin{aligned} \bar{\psi} = \frac{p}{c} \left\{ \left[ \int_z^{\infty} f(\zeta; \lambda, \mu) \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{\bar{\omega}}{2c}} K_{\frac{\bar{\omega}}{c}} \left(2 \sqrt{\frac{\lambda^2 k + \mu^2 k - m + p}{c}} \zeta^{\frac{1}{2}}\right) \times \right. \right. \\ \left. \times d\zeta I_{\frac{\bar{\omega}}{c}} \left(2 \sqrt{\frac{\lambda^2 k + \mu^2 k - m + p}{c}} z^{\frac{1}{2}}\right) \right] + \left[ \int_0^z f(\zeta; \lambda, \mu) \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{\bar{\omega}}{2c}} \times \right. \\ \left. \times I_{\frac{\bar{\omega}}{c}} \left(2 \sqrt{\frac{\lambda^2 k + \mu^2 k - m + p}{c}} \zeta^{\frac{1}{2}}\right) d\zeta K_{\frac{\bar{\omega}}{c}} \left(2 \sqrt{\frac{\lambda^2 k + \mu^2 k - m + p}{c}} z^{\frac{1}{2}}\right) \right] \right\}. \quad (24) \end{aligned}$$

Здесь  $\zeta = z - h$ ,  $I_n(\alpha)$  и  $K_n(\beta)$  — функции Бесселя мнимого аргумента 1-го и 2-го рода соответственно.

Переходя от изображения  $\bar{\psi}$  к оригиналу, будем иметь

$$\psi = \frac{1}{2ct} e^{-[(\lambda^2 + \mu^2)k - m]t} \int_0^{\infty} f(\zeta; \lambda, \mu) \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{\bar{w}}{2c}} e^{-\frac{z+\zeta}{ct}} I_{\frac{\bar{w}}{c}} \left[\frac{2}{ct} (z\zeta)^{\frac{1}{2}}\right] d\zeta. \quad (25)$$

Преобразуем (25), используя (16), (17) и (19),

$$\begin{aligned} N(x, y, z, t) &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \psi(t, z; \lambda, \mu) X(x, \mu) Y(y, \lambda) d\mu d\lambda = \\ &= \frac{1}{2c\pi^2 t} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} e^{-[(\lambda^2 + \mu^2)k - m]t} f(\zeta; \lambda, \mu) \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{\bar{w}}{2c}} e^{-\frac{z+\zeta}{ct}} I_{\frac{\bar{w}}{c}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\frac{2}{ct} (z\zeta)^{\frac{1}{2}}\right] d\zeta X(x, \mu) Y(y, \lambda) d\mu d\lambda \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi^2 ct} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta, \zeta) X(\xi, \mu) Y(\eta, \lambda) d\xi d\eta \times \\ &\quad \times \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{\bar{w}}{2c}} e^{-\frac{z+\zeta}{ct}} I_{\frac{\bar{w}}{c}} \left[\frac{2}{ct} (z\zeta)^{\frac{1}{2}}\right] d\zeta e^{-[(\lambda^2 + \mu^2)k - m]t} \cos \mu x \cos \lambda y d\mu d\lambda. \quad (26) \end{aligned}$$

Для интегрирования по  $\lambda$  и  $\mu$  воспользуемся формулой из [4]

$$\int_0^{\infty} e^{-\beta x^2} \cos ax \cos bx dx = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \left[ e^{-\frac{(a-b)^2}{4\beta}} + e^{-\frac{(a+b)^2}{4\beta}} \right] \quad (27)$$

при  $a > 0, b > 0, \operatorname{Re} \beta > 0$ .

Тогда (26) примет вид

$$\begin{aligned} N(x, y, z, t) &= \frac{e^{mt}}{32kt^2 \pi c} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(\xi, \eta, \zeta) \left[ e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4kt}} \right] \times \\ &\quad \times \left[ e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4kt}} + e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4kt}} \right] \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{\bar{w}}{2c}} e^{-\frac{z+\zeta}{ct}} I_{\frac{\bar{w}}{c}} \left[\frac{2}{ct} (z\zeta)^{\frac{1}{2}}\right] d\xi d\eta d\zeta. \quad (28) \end{aligned}$$

Если в начальный момент

$$F(\xi, \eta, \zeta) = (A + \alpha B) \delta(x, y, z - h), \quad (29)$$

то из (28) получим

$$N(x, y, z, t) = \frac{A + \alpha B}{8k\pi ct^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4kt} + mt - \frac{z+\zeta}{ct}} I_{\frac{\bar{w}}{c}} \left[\frac{2}{ct} (z\zeta)^{\frac{1}{2}}\right]. \quad (30)$$

Отделяя вещественную часть от мнимой, окончательно получим

$$\vartheta(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi kct^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt} - \frac{(z+\zeta)}{ct}} (A \cos \sqrt{\beta} g t - B \sin \sqrt{\beta} g t) \times \\ \times I_{\frac{\bar{w}}{c}} \left[ \frac{2}{ct} (z\zeta)^{\frac{1}{2}} \right]; \quad (31)$$

$$\omega(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi kct^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{4kt} - \frac{(z+\zeta)}{ct}} \{A_1 \cos \sqrt{\beta} g t + B_1 \sin \sqrt{\beta} g t\} \times \\ \times I_{\frac{\bar{w}}{c}} \left[ \frac{2}{ct} (z\zeta)^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (32)$$

Решение при  $k_2 = \text{const}$  может быть получено аналогичным методом, оно имеет вид:

$$\vartheta(x, y, z, t) = \frac{1}{8\rho'_0(\pi kt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2+y^2+(z-\bar{w}t)^2}{4kt}} \left[ \frac{Q}{c_p} \cos \sqrt{\beta} g t - \right. \\ \left. - \Theta_a \sqrt{\frac{\beta}{g}} M \sin \sqrt{\beta} g t \right]; \quad (33)$$

$$\omega(x, y, z, t) = \frac{1}{8\rho'_0(\pi kt)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2+y^2+(z-\bar{w}t)^2}{4kt}} \left[ \frac{\Theta_a \sqrt{\frac{\beta}{g}} M \cos \sqrt{\beta} g t + \frac{Q}{c_p} \sin \sqrt{\beta} g t}{\Theta_a \sqrt{\frac{\beta}{g}}} \right]. \quad (34)$$

Сопоставление формул (31), (32) с формулами (33), (34) показывает, что волновой характер затухания значений  $\vartheta$  и  $\omega$  сохраняется, но в случае линейного роста коэффициента турбулентного обмена поведение  $\vartheta$  и  $\omega$  вследствие наличия бесселевых функций имеет несколько более сложный характер.

Для перехода к непрерывному источнику можно либо интегрировать формулы (31) — (34) по времени от 0 до  $\infty$  либо, используя методы, совершенно аналогичные методам решения нестационарной задачи, решать уравнение вида

$$u \frac{\partial N}{\partial x} + \bar{w} \frac{\partial N}{\partial z} = mN + k \frac{\partial^2 N}{\partial y^2} + c \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial N}{\partial z}. \quad (35)$$

Решение уравнения (35) может быть получено в виде

$$N(x, y, z) = \left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{8\pi^{\frac{3}{2}} k^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{m}{u} x} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\eta, \zeta) \left[ e^{-\frac{(y-\eta)^2}{4kx}} + e^{-\frac{(y+\eta)^2}{4kx}} \right] \times \\ \times \left(\frac{z}{\zeta}\right)^{\frac{\bar{w}}{2c}} e^{-\frac{(z+\zeta)u}{c}} I_{\frac{\bar{w}}{c}} \left[ \frac{2u}{cx} (z\zeta)^{\frac{1}{2}} \right] d\eta d\zeta. \quad (36)$$

Полученные формулы могут быть использованы для качественного анализа поведения нагретых струй примеси от точечных мгновенных и непрерывных источников. Для учета нелинейности систему (5), (6) следует решать численным интегрированием с использованием ЭВМ. В этом случае полученные аналитические решения необходимы для проверки отдельных этапов счета.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С., Соловейчик Р. Э. О распространении дыма из фабричных труб. Труды ГГО, вып. 77, 1958.
2. Гандин Л. С., Соловейчик Р. Э. О распределении радиоактивной примеси в атмосфере. Уч. зап. ЛГИ, т. 37, вып. 3, 1961.
3. Гандин Л. С., Соловейчик Р. Э. Распространение радиоактивной эманации в приземном слое атмосферы. Труды ВНМС, т. 7, 1963.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.

## ПРИМЕНЕНИЕ СОРБЦИОННЫХ ДАТЧИКОВ ВЛАЖНОСТИ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА ВЛАГИ

Из разных способов измерения испарения наибольший интерес представляет пульсационный метод, отличающийся физической ясностью и обеспечивающий поэтому при корректной аппаратурной реализации надежные результаты. Суть этого метода состоит в определении турбулентного потока влаги  $E^*$ , выражаемого формулой

$$E^* = \overline{q'(\rho w)}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность воздуха;  $q$  — удельная влажность;  $w$  — вертикальная компонента скорости ветра.

Штрихи означают отклонения от соответствующих средних значений; черта сверху — осреднение на некотором временном интервале обычно порядка нескольких минут.

Суинбенк [1] показал, что формула (1) с высокой точностью может быть заменена следующей:

$$E^* = \frac{R}{R_{\text{н}p}} \overline{e'(\rho w)}, \quad (2)$$

где  $R$ ,  $R_{\text{н}}$  — удельные газовые постоянные сухого воздуха и водяного пара соответственно;  $p$  — атмосферное давление;  $e$  — упругость водяного пара.

В этой же работе [1] описано измерение величины  $E^*$  по формуле (2), причем в качестве датчика пульсаций упругости водяного пара использовался малоинерционный термоэлектрический психрометр. В дальнейших работах этого направления [2, 3] также использовался психрометр, только выполненный из термометров сопротивления. Сложность изготовления и сравнительно большая инерционность (0,5 сек. [3]) «смоченного» термометра датчика делают применение рассматриваемого прибора весьма ограниченным.

В последнее время появились малоинерционные (<0,1 сек.) сорбционные датчики влажности [4], сравнительно надежные и стабильные и вместе с тем простые и дешевые. Выходной параметр таких датчиков — сопротивление связано обычно нелинейной зависимостью с относительной влажностью воздуха. Конструктивно эти датчики выполняются в виде сравнительно массивной стеклянной подложки с расположенными на поверхности изолированными друг от друга двумя электродами, между которыми нанесена пленка гигроскопического вещества толщиной несколько десятков микрон.

Следует отметить, что эти датчики имеют достаточно быструю реакцию на изменения относительной влажности, вызываемые изменением

упругости водяного пара. В случае изменения относительной влажности за счет изменения температуры воздуха инерция датчика многократно возрастает (достигая минуты) в силу исполнения его на инерционной в тепловом отношении подложке.

Если  $T_n$  — температура поверхности датчика, определяемая температурой подложки;  $e$  — упругость водяного пара в среде, то выходной параметр датчика  $r$  можно записать следующим образом:

$$r = f(\varphi_n), \quad (3)$$

где  $\varphi_n = \frac{e}{E(T_n)}$  — относительная влажность в непосредственной близости к датчику, на которую последний и реагирует;  $E(T_n)$  — насыщающая упругость водяного пара при температуре  $T_n$ .

Раскладывая (3) в ряд в окрестности  $\bar{e}$ ,  $\bar{T}_n$ , получим, сохраняя только линейные члены,

$$r = f(\bar{\varphi}_n) + \frac{1}{E(\bar{T}_n)} \left( \frac{df}{d\varphi_n} \right)_{\bar{\varphi}_n} \left[ e' - \bar{e} \left( \frac{1}{E} \frac{dE}{dT_n} \right) T_n' \right]. \quad (4)$$

Определим  $\frac{dE}{dT_n}$ , используя уравнение Клаузиуса — Клапейрона, выражающее связь между температурой и насыщающей упругостью  $E$  водяного пара.

$$\frac{dE}{E} = \frac{L}{R_n} \frac{dT}{T^2}. \quad (5)$$

В формуле (5)  $L$  — удельная теплота испарения воды, с достаточной для практики точностью представляемая формулой [5],

$$L = L(T_0) - (c - c_{p_n})(T - T_0), \quad (6)$$

где  $T_0 = 273^\circ$ ;  $c$ ,  $c_{p_n}$  — удельные теплоемкости воды и водяного пара соответственно.

Подставляя (6) в (5), получим

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dT} = \frac{L(T_0) + (c - c_{p_n})T_0}{R_n} \frac{1}{T^2} - \frac{c - c_{p_n}}{R_n} \frac{1}{T}. \quad (7)$$

Подставим теперь (7) в (4) для  $T = T_n$ ,

$$L(T_0) = 597 \frac{\text{кал.}}{\text{г}}, \quad c = 1 \frac{\text{кал.}}{\text{г} \cdot \text{град}}, \quad c_{p_n} = 0,43 \frac{\text{кал.}}{\text{г} \cdot \text{град}}, \quad R_n = 0,11 \frac{\text{кал.}}{\text{г} \cdot \text{град}},$$

$$r = f(\bar{\varphi}_n) + \frac{\bar{e}}{E(\bar{T}_n)} \left( \frac{df}{d\varphi_n} \right)_{\bar{\varphi}_n} \left[ \frac{e'}{\bar{e}} - \left( 25 \frac{T_0}{T_n} - 5,2 \right) \frac{T_n'}{\bar{T}_n} \right]. \quad (8)$$

Оценим величины отдельных членов в квадратных скобках.

Примем, что температура  $T_n = 293^\circ$ , относительная влажность  $\bar{\varphi}_n \approx 70\%$ , откуда величина  $\bar{e} \approx 16$  мб.

Согласно записям Суинбенка [1], величина  $e'$  имеет порядок 1 мб; величина  $T_n'$  представляет собой сглаженные с постоянной времени около минуты пульсации температуры воздуха. Характерная величина

этих пульсаций составляет примерно  $0,5^\circ$ . Используем приближенное уравнение для описания термического режима твердого тела с постоянной времени  $m$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{m} (T - \Theta), \quad (9)$$

где  $T$  и  $\Theta$  — температура тела и прилегающего воздуха соответственно,  $t$  — время. Тогда, используя передаточную функцию для такого устройства, получим

$$\frac{A_T^2}{A_\Theta^2} = \frac{m^{-2}}{m^{-2} + \omega^2}, \quad (10)$$

где  $A_T$  и  $A_\Theta$  — амплитуды температурных пульсаций тела и прилегающего воздуха, соответственно;  $\omega$  — частота температурных возмущений.

Для оценки частотного интервала возмущений, определяющих турбулентный поток влаги, мы воспользуемся данными Ю. А. Волкова, В. П. Кухарца, Л. Р. Цванга [6] о спектрах турбулентного потока тепла. Принимая эти спектры подобными, получим, что основной вклад вносят возмущения с частотой около  $0,1$  гц. Тогда для постоянной времени  $m \approx 100$  сек. получим ослабление пульсаций температуры

$$\frac{A_T}{A_\Theta} \approx 0,1. \quad (11)$$

Следовательно  $T'_n = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05^\circ$ . Подставляя значения  $e'$ ,  $\bar{e}$ ,  $T'_n$  и  $T_n$ , получим, что член с пульсациями температуры составляет примерно  $3\%$  от члена с пульсациями влажности. Пренебрегая этим малым членом, получим

$$r \approx f(\bar{\varphi}_n) + \frac{1}{E(\bar{T}_n)} \left( \frac{df}{d\varphi_n} \right)_{\bar{\varphi}_n} e'. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (2), получим формулу для определения турбулентного потока влаги при использовании сорбционного датчика с выходным параметром  $r$  в случае пренебрежения пульсациями температуры его поверхности

$$E^* \approx \frac{RE(\bar{T}_n)}{R_n p \left( \frac{df}{d\varphi_n} \right)_{\bar{\varphi}_n}} \overline{r(\rho w)'} \quad (13)$$

Точная формула, получаемая подстановкой (8) в (2), имеет вид

$$E^* = \frac{RE(\bar{T}_n)}{R_n p \left( \frac{df}{d\varphi_n} \right)_{\bar{\varphi}_n}} \overline{r(\rho w)'} + \frac{R\bar{e}}{R_n p \bar{T}_n} \left( 25 \frac{T_0}{\bar{T}_n} - 5,2 \right) \overline{T'_n(\rho w)'} \quad (14)$$

и может быть использована при наличии термометра, измеряющего пульсации температуры поверхности датчика влажности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Swinbank W. C. The measurement of vertical transfer of heat and water vapor by eddies in the lower atmosphere. *J. Meteorol.*, vol. 8, No. 3, June, 1951.
2. Dyer A. J., Maher F. J. Automatic eddy-flux instrumentation. *Tellus*, vol. 19, *J. Appl. Met.*, vol. 4, No. 5, Oct., 1965.
3. Högstrom V. A new sensitive eddy-flux instrumentation. *Tellus*, vol. 19, No. 2, 1967.
4. Коган В. А., Коробочкин И. В., Лозинский Ю. М. Вестник сельскохозяйственной науки, № 4, 1967.
5. Тверской П. Н. Курс метеорологии. Гидрометеиздат, Л., 1962.
6. Волков Ю. А., Кухарец В. П., Цванг Л. Р. Турбулентность в пограничном слое атмосферы. Изв. АН СССР, сер. физика атмосферы и океана, т. IV, № 10, 1968.

**ТРУДЫ ГО, ВЫПУСК 241**  
**Физика пограничного слоя**

Редактор В. И. Кузьменко  
Технический редактор И. К. Пелипенко  
Корректор А. В. Хюркес

---

Сдано в набор 30/VI 1969 г. Подписано к печати 22/XI 1969 г. Бумага 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бум. л. 4,125. Печ. л. 11,55. Уч.-изд. л. 10,17.  
Тираж 660 экз. М-15938. Индекс МЛ-146.

Гидрометеорологическое издательство.  
Ленинград, В-53, 2-я линия, д. № 23.  
Заказ 609. Цена 71 к.

---

Сортавальская книжная типография  
Управления по печати  
при Совете Министров Карельской АССР  
Сортавала, Карельская, 42