

06
+78

ПРОВЕРЕНО
1940г.

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

Т Р У Д Ы ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

имени А. И. Воейкова

ВЫПУСК 99

ВОПРОСЫ ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗА И ТЕОРИИ КЛИМАТА

Под редакцией

докт. физ.-мат. наук М. Е. ШВЕЦА,
докт. физ.-мат. наук М. И. ЮДИНА

БИБЛИОТЕКА
ЛЕНИНГРАДСКОГО
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД • 1959

147306

АННОТАЦИЯ

Сборник содержит новые исследования по разработке методики численного анализа и прогноза, результаты испытаний и критические замечания по практическому применению предложенных методов, а также теоретические расчеты температурных аномалий в атмосфере.

Сборник предназначен для специалистов в области динамической и синоптической метеорологии и климатологии, а также студентов старших курсов указанных специальностей.

О ФОРМИРОВАНИИ СРЕДНЕМЕСЯЧНЫХ АНОМАЛИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ АТМОСФЕРЫ

Исследование распределения в атмосфере источников и стоков тепла имеет первостепенное значение для теоретического объяснения формирования температурного режима атмосферы, стационарного [7], [2], [11] и нестационарного. Оно не менее существенно и для динамики атмосферы, так как кинетическая энергия атмосферных движений возникает за счет запасов как потенциальной, так и внутренней энергии воздушных масс.

Но сложность и недостаточная изученность вопросов взаимодействия между источниками и стоками тепла в атмосфере и полем ветра привели к тому, что при теоретическом изучении общей циркуляции атмосферы динамические факторы искусственно отделились от термических. Основные предположения в такого рода исследованиях сводятся к тому, что либо считается известным распределение температуры в атмосфере, либо считается заданным в качестве невозмущенной циркуляции западно-восточный перенос и процессы принимаются адиабатическими ([9], [3], [14] и др.). При такой постановке исследований нельзя достаточно полно решить ни вопросы формирования общей циркуляции, ни вопросы ее изменения во времени. Следует отметить, что в отдельных работах [15], [16] уже делается попытка учесть, правда, в очень схематичной форме влияние на циркуляцию атмосферы притоков тепла, связанных с конденсацией водяного пара и вертикальным турбулентным переносом.

В существующих теоретических методах долгосрочного прогноза метео-элементов уравнение переноса тепла для прогностической части температурного поля решается при условии адиабатичности (климатологический фон температуры считается известным). Тем самым предполагается, что нестационарное поле температуры формируется только под действием динамических факторов, связанных с полем ветра, влияние притоков тепла полностью исключается.

Выяснение роли притоков тепла в формировании аномалий температуры за достаточно большие промежутки времени составляет одну из задач настоящего исследования.

Известно, что уравнение теплового баланса атмосферы представляет проинтегрированное по всей толще атмосферы (для столба воздуха единичного сечения от $z = 0$ до ∞) уравнение притока тепла к единице объема воздуха. В соответствии с этим компоненты теплового баланса атмосферы для этого столба играют роль притоков тепла, определяющих изменение его средней температуры (или изменение его теплосодержания).

Уравнение теплового баланса системы „земля — атмосфера“ может быть записано в следующем виде [12]:

$$L = A + \Pi + R_a + R_0 + Lr - LE - v = \sum_i K_i,$$

где L — изменение теплосодержания столба атмосферы, ограниченного снизу земной поверхностью и простирающегося до верхней границы атмосферы; A — адвективный перенос тепла; Π — горизонтальный турбулентный перенос тепла; R_a — радиационный баланс атмосферы; R_0 — радиационный баланс земной поверхности; Lr — теплота конденсации; LE — затраты тепла на испарение; v — потоки тепла в почву.

Предположим, что теплота, выделяемая конденсирующимся водяным паром в столбе атмосферы, получается как произведение количества осадков r на скрытую теплоту конденсации L .

Такое предположение оправдывается тем, что осадки образуются в основном за счет локальной конденсации водяного пара, вызванной вертикальными движениями; горизонтальная адвекция облачных масс приносит сравнительно небольшое количество влаги, выпадающей в виде осадков.

Для интервалов времени около месяца и больше величина и знак изменения теплосодержания L однозначно связаны с величиной и знаком изменения во времени температуры на среднем уровне (такая же тесная зависимость существует и для температуры на любом уровне): знаки L и $\frac{\partial T}{\partial t}$ совпадают, большим величинам L соответствуют большие величины $\frac{\partial T}{\partial t}$.

Известно также, что средние месячные величины компонентов теплового баланса влияют не только на изменение средней температуры от месяца к месяцу, но и на стационарный термический режим данного месяца, который характеризуется его средней температурой.

Среднюю температуру T данного месяца в некотором пункте можно представить в виде суммы 1) средней годовой зональной температуры $\bar{T}$ (средней многолетней), 2) отклонений от $\bar{T}$ средней годовой локальной температуры T' (средней многолетней), которые обозначим через $\Delta T'$, 3) отклонений $\Delta T''$ от T' средней месячной температуры T'' (средней многолетней), 4) аномалий температуры — отклонений ΔT от T'' средней месячной температуры T данного года.

Таким образом,

$$T = \bar{T} + \Delta T' + \Delta T'' + \Delta T. \quad (2)$$

В соответствии с этим каждый компонент K_i теплового баланса (1) для данного месяца можно представить как сумму среднего годового зонального значения $\bar{K}_i$ (среднего многолетнего) и соответствующих отклонений $\Delta K'_i$, $\Delta K''_i$, ΔK_i . Причем $\Delta K'_i$ определяет не только $\Delta T'$, но также среднее многолетнее L_0 для данного месяца. Точно так же ΔK_i определяет ΔT и отклонение L данного месяца от своего среднего многолетнего значения ΔL .

Тогда уравнение (1) можно представить следующим образом:

$$L = L_0 + \Delta L = \sum_i \bar{K}_i + \sum_i \Delta K'_i + \sum_i \Delta K''_i + \sum_i \Delta K_i. \quad (3)$$

Так как компоненты $\bar{K}_i$, $\Delta K'_i$ определяют стационарные режимы температуры, то

$$\sum \bar{K}_i = \sum \Delta K'_i = 0.$$

Тогда

$$L = \sum \Delta K''_i + \sum \Delta K_i$$

или

$$L_0 = \sum \Delta K''_i \quad (4)$$

$$\Delta L = \sum \Delta K_i. \quad ($$

Заметим, что в уравнениях (4) и (5) все слагаемые приблизительно одного порядка, тогда как в уравнении (3) L и v обычно значительно меньше остальных компонентов.

Предположим, что нам известны величины составляющих уравнения теплового баланса (1) для какого-либо конкретного месяца. Вычтя из месячных величин составляющих их средние многолетние значения, получим уравнение (5) для аномалий компонентов теплового баланса и изменения теплосодержания.

Мы выяснили, что аномалии ΔK_i определяют, во-первых, аномалию средней температуры столба воздуха для данного месяца ΔT (которую можно поставить в соответствие с прогностической частью температуры в гидродинамическом методе долгосрочного прогноза месячных аномалий температуры на среднем уровне атмосферы) и, во-вторых, аномалию изменения теплосодержания столба воздуха (которая соответствует проинтегрированной по высоте локальной производной от прогностической части температуры).

Поэтому, сравнив между собой величины аномалий различных компонентов баланса (1), можно выяснить роль каждой из них в формировании месячных аномалий средней температуры атмосферы или, что то же самое, температуры на некотором среднем уровне атмосферы.

В частности, сравнив в уравнении (5) аномалии компонентов, неучитываемых и учитываемых в гидродинамическом методе прогноза месячных аномалий температуры, можно установить, насколько справедливо принимаемое при этом условие адиабатичности.

С этой целью был исследован тепловой баланс атмосферы, средний многолетний и для конкретных лет, 4 пунктов на Европейской территории СССР: Ленинграда (Воейково), Риги, Одессы и Свердловска. Для Ленинграда месячные величины компонентов были рассчитаны за период 1946—1956 гг., для Риги — за 1945—1954 гг., для Одессы и Свердловска — за 1946—1955 гг.

Получены следующие компоненты теплового баланса: 1) радиационный баланс атмосферы R_a , 2) радиационный баланс системы „земля — атмосфера“ R_s , 3) уходящее излучение атмосферы F , 4) эффективный поток солнечной радиации на верхней границе атмосферы S_s , 5) радиационный баланс земной поверхности R_0 , 6) эффективное излучение земной поверхности I , 7) поток солнечной радиации, поглощенный земной поверхностью Q , 8) поток тепла в почву v , 9) теплота конденсации водяного пара в атмосфере Lr , 10) горизонтальный перенос тепла в атмосфере B .

Эти компоненты между собой и с составляющими уравнения (1) связаны следующими соотношениями:

$$R_s = R_a + R_0,$$

$$R_s = S_s - F,$$

$$R_0 = Q - I,$$

$$B = A + \Pi.$$

Расчеты компонентов K_i были выполнены по методике, разработанной проф. М. И. Будыко и его сотрудниками и опубликованной в [1], [4].

Компоненты теплового баланса земной поверхности (в том числе затраты тепла на испарение LE), средние многолетние и за 1951—1952 гг., были взяты из работ [5], [6]. Затраты тепла на испарение для других лет из-за отсутствия необходимых данных (о стоке, продуктивной влажности почвы и пр.) не рассчитаны. Зональные величины (средние многолетние) радиационного баланса атмосферы R_a получены по данным работы Т. Г. Берлянд [1]. Средние многолетние величины адвективного и турбулентного

переноса тепла A и Π и изменения теплосодержания L_0 взяты из [11]. Для отдельных лет из-за отсутствия необходимого материала расчет этих характеристик не выполнен.

Средние многолетние величины альбеда системы „земля — атмосфера“, необходимые для расчета S_s , взяты из работы А. И. Федосеевой [13], а для отдельных лет получены по той же методике, что и в [13].

Данные о температуре, облачности и влажности для конкретных лет взяты из таблиц ТМ-1, а средние многолетние получены из климатологических справочников.

Примеры расчетов месячных аномалий компонентов теплового баланса атмосферы приведены в [12], а за 1951—1952 гг. для Риги, Одессы и Свердловска представлены там же на рис. 1—7. Для каждого компонента теплового баланса в общей сложности рассчитано 492 месячные величины.

Анализ этих таблиц и графиков показывает, что аномалии R_s , R_a и Lr по величине вполне сравнимы с аномалиями горизонтального переноса тепла B . Аномалии затрат тепла на испарение LE несколько меньше, но также вполне сравнимы с аномалиями B .

Для более наглядного представления этих соотношений на всем полученном материале аномалий рассчитаны средние за рассмотренные для каждого пункта периоды времени квадратичные аномалии компонентов баланса. Такая статистическая характеристика была выбрана потому, что она позволяет сравнивать между собой абсолютные величины аномалий, исключая влияние их знаков на результат осреднения. Эти величины подтверждают выводы, сделанные на основании данных для отдельных лет: аномалии радиационного баланса атмосферы R_a и системы „земля — атмосфера“ R_s , теплоты конденсации Lr сравнимы с аномалиями горизонтального переноса B .

Аномалии радиационного баланса земной поверхности R_0 и его составляющих Q и I в общем несколько меньше компонентов баланса атмосферы R_s , S_s , R_a . Исключение составляют только аномалии уходящего излучения F , которые так же малы, как и ΔR_0 , ΔI и ΔQ .

Итак, анализ полученных на основании обширного фактического материала результатов позволяет сформулировать следующий важный вывод: при образовании месячных аномалий температуры как на среднем уровне атмосферы, так и на любом другом ее уровне (так как температуры на всех уровнях в атмосфере связаны между собой уравнением статики), условие адиабатичности не выполняется. При построении теоретических схем прогноза этих аномалий в уравнении переноса тепла необходимо учитывать, кроме локальных производных от температуры и адвективных членов, радиационные и конденсационные притоки тепла. А в уравнении теплового баланса земной поверхности, которое используется в качестве граничного условия в такого рода задачах, нельзя пренебрегать затратами тепла на испарение.

Весьма наглядное представление о соотношении между аномалиями B , Lr , R_s и R_0 можно получить, рассчитав средние годовые от средних квадратичных аномалий этих компонентов для всех четырех пунктов. Такие величины можно было бы назвать „характерными размерами“ аномалий. Они имеют следующие значения: для ΔB 1,9 ккал/см² мес., для ΔLr 1,6 ккал/см² мес., для ΔR_s 0,8 ккал/см² мес., для ΔR_0 0,5 ккал/см² мес.

Для аномалий компонентов радиационного баланса атмосферы и земной поверхности характерны некоторые общие особенности годового хода. Так, экстремумы $\sqrt{(\Delta R_s)^2}$, $\sqrt{(\Delta S_s)^2}$, $\sqrt{(\Delta R_0)^2}$, $\sqrt{(\Delta Q)^2}$, а следовательно, и $\sqrt{(\Delta R_a)^2}$ обычно совпадают во времени. Для Свердловска это особенно четко проявляется в апреле и октябре, для Риги — в июне и августе, для Одессы — в феврале и июле, для Воейково — почти во все месяцы года.

Очевидно, такая параллельность годового хода средних квадратичных аномалий компонентов радиационного баланса объясняется тем, что имеется общий физический фактор, от которого зависит каждый из этих компонентов. Таким фактором является облачность. Кроме того, для S_s , R_s , Q общим фактором является также альбеда подстилающей поверхности.

Что касается относительных величин аномалий компонентов теплового баланса, т. е. их сравнимости с величинами самих компонентов, то оказывается, что аномалии не всегда малы по сравнению с абсолютными величинами компонентов. Аномалии скрытой теплоты конденсации ΔLr , как правило, сравнимы с величинами Lr во все месяцы года. Аномалии ΔB и ΔR_s сравнимы с соответствующими компонентами преимущественно в летние месяцы, для аномалии ΔR_0 это имеет место в зимние месяцы.

Чтобы получить представление о том, существует ли какая-нибудь непосредственная связь между аномалиями температуры и аномалиями отдельных компонентов теплового баланса, на основании полученного материала были рассчитаны коэффициенты корреляции между ΔT и ΔR_s , ΔS_s , ΔF , ΔR_0 , ΔLr и ΔB . Из-за отсутствия обработанных данных о средней месячной температуре для средних уровней атмосферы в выбранных 4 пунктах ΔT были рассчитаны по наземной температуре. Коэффициенты корреляции r были рассчитаны для каждого пункта и каждого месяца года за выбранный интервал лет. Также подсчитывался суммарный коэффициент корреляции для всех 4 пунктов за каждый месяц. Были выделены те случаи, когда получались достаточно надежные величины r (по крайней мере в 4 раза превосходящие свою вероятную ошибку). Вообще следует отметить, что 10—11 пар значений ΔT и ΔK не вполне достаточно для определения искомых зависимостей. Но и на основании полученных результатов можно сделать некоторые выводы. Прежде всего намечается вполне отчетливая тенденция к совпадению знаков между ΔT и ΔR_s , ΔS_s , ΔR_0 . В первом случае из 11 удовлетворительных величин r положительный знак имеют 10, во втором во всех 17 выделенных случаях r положительны, в третьем то же самое имеет место для 16 случаев. Что касается связи ΔT с аномалиями теплоты конденсации, то здесь намечается тенденция к отрицательной корреляции (из 9 выделенных значений r отрицательными оказались 7). Для связи ΔT с ΔB определенной тенденции не наметилось: случаи с положительными и отрицательными коэффициентами делятся примерно поровну.

Такие же выводы можно получить путем подсчета положительных и отрицательных знаков r для всех случаев без исключения по каждому компоненту.

Отсутствию определенной корреляции в соотношении между ΔT и ΔB можно дать такое объяснение. В [11] показано, что временной и пространственный ход горизонтального турбулентного переноса тепла почти всегда, как правило, противоположен по фазе годовому ходу адвекции A , т. е. положительной адвекции соответствует отрицательный турбулентный перенос и наоборот; что касается абсолютных величин A и Π , то между ними корреляция положительная. Поэтому аномалии ΔA и $\Delta \Pi$ должны почти всегда иметь разные знаки при любом знаке ΔT , и возможность того, что аномалия суммарного горизонтального теплообмена ΔB будет иметь тот или иной знак, равновероятна.

Полученный в [11] результат о противоположности знаков A и Π подтверждает известное положение о том, что адвективные и неадвективные изменения температуры противоположны по знаку: в районах прогрева воздушных масс имеет место адвекция холода, а в районах охлаждения — адвекция тепла [8], [10]. Известно, что адвекция тепла сопровождается восходящими токами, т. е. конвективным охлаждением воздушных масс, а адвекция холода — их конвективным нагреванием [11]. Х. П. Пого-

сян показал это соотношение между адвекцией и притоками тепла на примере неадвективных изменений температуры за счет турбулентного теплообмена с подстилающей поверхностью. Оказалось, что в тылу исландского минимума адвекция холода сопровождается притоком тепла от подстилающей поверхности, а в передней части адвекция тепла связана с охлаждением воздуха под действием подстилающей поверхности. Это имеет важное значение для эволюции циклонов. В [11] показано, что в системе исландского минимума трансформации воздушных масс способствует, кроме вертикального турбулентного теплообмена, также и горизонтальный турбулентный перенос тепла. Тем самым подтверждена существенность горизонтального турбулентного обмена для развития циклонической деятельности в атмосфере.

Особого рассмотрения требует вопрос о точности определения аномалий компонентов теплового баланса. За исключением тех случаев, когда аномалии сравнимы с абсолютными величинами компонентов, они определяются как малые разности двух больших величин. Такие определения, вообще говоря, не являются достаточно точными и в каждом специальном случае требуют особого анализа. В нашем случае о соответствии между рассчитанными и действительными величинами аномалий компонентов баланса нужно сказать следующее.

Компоненты баланса как средние многолетние, так и для конкретных лет, разности между которыми определяются, рассчитаны по одной и той же методике. Поэтому при определении аномалий должны в какой-то степени погашаться систематические ошибки рассчитанных компонентов (определяемые применяемой методикой) относительно их действительных значений. Существенными при определении аномалий являются только случайные ошибки, которые могут значительно изменить отдельные величины некоторого компонента в данном пункте за данный месяц. В статистических же совокупностях аномалий (которые содержат некоторое количество наборов аномалий в данном пункте, за данный месяц, за достаточно длинный ряд лет) эффект этих случайных ошибок должен в достаточной мере погаситься. Эти соображения и привели к необходимости собрать для данной работы материал по аномалиям за достаточно длинный ряд лет, а при анализе основываться на статистических результатах. Заметим, что в некоторых из этих результатов можно усмотреть правильность предположения об уменьшении эффекта случайных ошибок в статистических совокупностях аномалий. Действительно, априори можно было ожидать, что увеличение притока радиационного тепла через верхнюю и нижнюю границы столба атмосферы (т. е. увеличение притоков S_s и R_0) должно привести к увеличению средней температуры воздуха в этом столбе, так как положительные фактические аномалии этих потоков должны быть связаны с положительными аномалиями температуры и наоборот. Это предположение подтвердилось результатами расчетов коэффициентов корреляции r . Также можно объяснить и отрицательную корреляцию между ΔLr и ΔT . Очевидно, эффект уменьшения потоков S_s и R_0 при увеличенной облачности сказывается на средней температуре атмосферы больше, чем приток тепла конденсации. Объяснение связи между ΔB и ΔT мы уже дали.

Такое совпадение выводов о закономерностях фактических аномалий компонентов баланса с некоторой частью полученных здесь результатов позволяет с известным доверием относиться и к остальным статистическим результатам, не поддающимся такому же наглядному сопоставлению с действительными условиями.

Определенный интерес представляет подробное рассмотрение среднего многолетнего теплового баланса атмосферы, на который накладываются аномалии отдельных лет. Для этой цели величины компонентов баланса и температуры представим с помощью уравнений [1] и [2]. Результаты соответствующих расчетов сведены в табл. 8—11 [12].

С помощью этих таблиц средние многолетние значения температуры и теплового баланса отдельного месяца могут быть представлены следующим образом. В качестве примера рассмотрим январь для Одессы.

Средняя годовая зональная температура для широты Одессы $\bar{T} = 253,2^\circ$, средняя годовая температура этого пункта $T' = 252,4^\circ$. Разность между ними $\Delta T' = -0,8^\circ$. Средняя многолетняя температура января $T = 245,1^\circ$, поэтому $\Delta T'' = -7,3^\circ$.

$\bar{T} = 253,2^\circ$ определяется следующими величинами компонентов теплового баланса (ккал/см²мес.): $\bar{R}_0 = 3,8$, $\bar{R}_a = -5,5$, $\bar{Lr} = 3,0$, $\bar{LE} = 3,0$, $\bar{v} = -0,3$, $\bar{\Pi} = 0,6$.

$\Delta T' = -0,8^\circ$ определяется следующими величинами компонентов баланса: $\Delta A' = A = 2,1$, $\Delta R'_0 = -0,7$, $\Delta R'_a = -0,1$, $\Delta Lr' = -2,1$, $\Delta LE' = -1,3$, $\Delta v' = -0,3$, $\Delta \Pi' = -0,2$.

Отклонение средней месячной температуры для января от средней годовой $\Delta T'' = -7,3^\circ$ и среднее многолетнее изменение теплосодержания за этот месяц $L_0 = -0,2$ получаются за счет $\Delta A'' = 6,1$, $\Delta R''_0 = -4,1$, $\Delta R''_a = -2,4$, $\Delta Lr'' = -0,3$, $\Delta LE'' = -1,7$, $\Delta v'' = v = -0,5$, $\Delta \Pi'' = -1,7$.

В связях между знаками $\Delta T'$ и $\Delta K'_i$ намечается следующая тенденция: отрицательным $\Delta T'$ соответствуют отрицательные $\Delta R'_0$, $\Delta R'_a$, $\Delta LE'$ и положительные $\Delta A'$, $\Delta v'$.

Мы уже отмечали тесную корреляцию между изменением теплосодержания столба атмосферы в данный месяц и изменением температуры атмосферы $\Delta_t T''$ на среднем уровне от месяца, предыдущего по отношению к данному и последующему. Уравнение регрессии для L_0 и $\Delta_t T''$, построенное на основании имеющегося в нашем распоряжении материала, имеет вид

$$L_0 = 0,084 \Delta_t T.$$

Соответствующий коэффициент корреляции $r = 0,94$, его вероятная ошибка $\sigma = 0,01$.

Теперь попытаемся выделить из $\Delta K'_i$ части, определяющие $\Delta T''$ и $\Delta_t T''$. Для этого ΔK_i представим следующим образом:

$$\Delta K'_i = \Delta_t T'' x'_i + \Delta T'' y'_i = \Delta K''_i(x'_i) + \Delta K''_i(y'_i). \quad (6)$$

Здесь x'_i обозначает долю $\Delta K'_i$, соответствующую одному градусу между-месячной изменчивости температуры $\Delta_t T''$, а y'_i — долю $\Delta K'_i$, соответствующую одному градусу отклонения $\Delta T''$ средней месячной температуры T'' от T' . Для определения x'_i и y'_i необходимо, кроме уравнения (6), составить еще одно. Предположим, что для соседних месяцев m и $(m+1)$ величины x'_i и y'_i одинаковы, т. е.

$$\begin{aligned} \Delta K''_{im} &= (\Delta_t T''_m) x''_{im} + \Delta T''_m y''_{im}, \\ \Delta K''_{i(m+1)} &= (\Delta_t T''_{(m+1)}) x''_{im} + \Delta T''_{(m+1)} y''_{im}. \end{aligned}$$

Для тех месяцев, для которых сделанное предположение окажется справедливым, должны выполняться два условия

$$\sum_i \Delta_t T'' x''_i = L, \quad (7)$$

$$\sum_i \Delta T'' y''_i = 0. \quad (8)$$

По степени выполнимости условий (7) и (8) можно судить об удовлетворительности расчетов искоемых x_i'' и y_i'' .

В распределении долей $\Delta K_i''$, определяющих $\Delta T''$ и $\Delta_t T''$, обнаруживаются вполне определенные закономерности. Для $R_0, R_a, LE, v, y_i'' > 0, x_i'' > 0$. Для адвекции $A, y_i'' < 0, x_i'' < 0$; для $Lr, y_i'' > 0, x_i'' < 0$.

Следовательно, части $\Delta K_i''(y_i'')$ компонентов R_0, R_a, Lr в зимние месяцы ($\Delta T'' < 0$) дают отрицательный вклад в тепловой баланс атмосферы, а в летние ($\Delta T'' > 0$) наоборот. Для частей $\Delta K_i''(y_i'')$ компонентов LE, v, A имеют место обратные соотношения. Части $\Delta K_i''(x_i'')$ компонентов R_0, R_a дают положительный вклад в тепловой баланс в первую половину года ($\Delta_t T'' > 0$) и отрицательный во вторую ($\Delta_t T'' < 0$). Для частей $\Delta K_i''(x_i'')$ компонентов LE, v, A, Lr зависимость обратная.

Теперь предположим, что в $i - \bar{n}$ компоненте теплового баланса K_i для каждого месяца конкретного года также можно выделить части, определяющие $\Delta_t T$ и $(\Delta T'' + \Delta T)$, согласно уравнению (6).

Тогда мы можем написать

$$\delta K_{imn} = (\Delta_t T)_{mn} x_{imn} + \delta T_{mn} y_{imn}, \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta K_{imn} &= K_{imn} - K_i' = \Delta K_{im}'' + \Delta K_{imn} \\ (\Delta_t T)_{mn} &= T_{(m+1)n} - T_{(m-1)n} \\ \delta T_{mn} &= T_{mn} - T' = \Delta T_m'' + \Delta T_{mn} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Имея набор величин (10) для некоторого ряда лет, мы можем построить уравнение регрессии для определения неизвестных x_{im} и y_{im}

$$\sum_n \delta K_{imn} = \sum_n (\Delta_t T)_{mn} x_{im} + \sum_n \delta T_{mn} y_{im}. \quad (11)$$

При таком определении величин x_{im} и y_{im} предполагается, что они постоянны в течение выбранного ряда n лет. Поэтому если слагаемые уравнения (9) должны удовлетворять условиям:

$$\sum_i \delta T_{mn} x_{imn} = L, \quad (7')$$

$$\sum_i \Delta_t T_{mn} y_{imn} = 0, \quad (8')$$

то для величин x_{im} и y_{im} этого, вообще говоря, ожидать нельзя.

Величины x_{im} и y_{im} из системы (11) найдем по методу наименьших квадратов.

Напишем уравнение (9) для отклонений δK_{imn} , $\Delta_t T_{mn}$ и δT_{mn} от их средних значений δK_{im} , $\Delta_t T_m$ и δT_m за n лет

$$\delta K_{imn} - \delta K_{im} = (\Delta_t T_{mn} - \Delta_t T_m) x_{im} + (\delta T_{mn} - \delta T_m) y_{im}. \quad (12)$$

Уравнение регрессии, составленное по уравнениям (12) за n лет, будет удовлетворяться при любых x_{im} и y_{im} . Умножив уравнение (12) сначала на $(\Delta_t T_{mn} - \Delta_t T_m)$, а затем на $(\delta T_{mn} - \delta T_m)$ и просуммировав результаты по n , получим два уравнения для определения неизвестных x_{im} и y_{im} . Таким способом были определены x_{im} и y_{im} для 10 компонентов теплового баланса ($R_0, R_a, R_s, F, Q, I, S_s, v, Lr, B$) для каждого из 4 пунктов за все месяцы года за период 8 лет.

Из-за отсутствия данных о среднемесячных температурах на средних уровнях атмосферы для конкретных лет здесь, так же как и при определении аномалий ΔT , величины $\Delta_t T_{mn}$ и δT_{mn} рассчитаны по материалам

наземных наблюдений в предположении, что между этими характеристиками температуры у земной поверхности и в свободной атмосфере существует достаточная корреляция для промежутков времени порядка месяца и больше. Расчеты на основании имевшегося в нашем распоряжении материала для Ленинграда и Риги дали $r=0,9$ с вероятной ошибкой $\sigma=0,02$.

Попутно с определением x_{im} и y_{im} были рассчитаны коэффициенты корреляции r_x между δK_{imn} и $\Delta_t T_m$ и r_y между δK_{imn} и δT_{mn} . Очевидно, эти коэффициенты корреляции, определяя тесноту связи между коррелируемыми величинами, характеризуют степень надежности определения параметров x_{im} и y_{im} , так как введение последних предполагает линейную зависимость между указанными величинами. Рассчитаны также множественные коэффициенты корреляции R , характеризующие тесноту связи между тремя корреляционными величинами — δK_{imn} , $\Delta_t T_{mn}$ и δT_{mn} , а также вероятные ошибки их определения. Теснота этой тройной связи выражена в большинстве случаев вполне определенно.

У нас имеются еще данные о δK_{imn} , δT_{mn} и $\Delta_t T_{mn}$ в общей сложности за 18 лет (по 5 лет — для Воейково и Риги, по 4 года для остальных пунктов). На этом материале мы можем попытаться рассчитать по уравнению (12) и известным теперь x_{im} и y_{im} величины $\Delta_t T_{mn}$. При этом мы предполагаем, что величины x_{im} и y_{im} остаются неизменными не только в течение выбранного для их определения ряда n лет, но и в ближайшие к этому периоду годы. Так можно получить некоторый способ прогноза средней месячной изменчивости температуры $\Delta_t T_{np}$ от месяца, предыдущего по отношению к данному, к месяцу последующему.

Величину прогнозируемой для последующего месяца аномалии A_{np} , соответствующей некоторому компоненту K_i , получим, прибавив к фактической температуре предыдущего месяца $T_{(m-1)}$ прогнозируемую изменчивость температуры $\Delta_t T_{np}$ и вычтя нормальную температуру последующего месяца $T_{(m+1)}''$

$$A_{np} = T_{(m-1)} + \Delta_t T_{np} - T_{(m+1)}''$$

Пример расчета A_{np} дан в табл. 1.

Таблица 1

Схема расчета A_{np}

Рига 1953 г., июль ($m+1=7$)

$$\begin{aligned} A &= 1,2 & \Delta_t T_m &= 6,2 & T_{(m-1)} &= 10,8 \\ T_{(m+1)} &= 17,8 & \delta T_m &= 8,5 \\ T_{(m+1)}' &= 16,6 & \delta T_{mn} &= 10,5 \end{aligned}$$

	R_a	R_0	R_s	F	Q	I	S_s	v
$\Delta_t T_m x_{im}$	0,3	0,7	1,0	0,2	1,9	1,3	1,2	0
$\delta T_m y_{im}$	0,2	1,4	1,5	-0,3	1,5	0,1	1,2	0,6
Σ_1^*	0,5	2,1	2,5	-0,1	3,4	1,4	2,4	0,6
δK_{im}	2,6	5,0	7,6	0,3	5,5	0,5	8,0	0,5
$\delta K_{im} - \Sigma_1$	2,1	2,9	5,1	0,4	2,1	-0,9	5,6	-0,1
δK_{imn}	2,7	5,8	8,5	0,5	6,8	1,0	9,0	0,5
$\delta T_{mn} y_{im}$	0,2	1,7	1,9	-0,4	1,9	0,1	1,5	0,8
Σ_2^{**}	2,3	4,6	7,0	0,0	4,0	-0,8	7,1	0,7
$\delta K_{imn} - \Sigma_2$	0,4	1,2	1,5	0,5	2,8	1,8	1,9	-0,2
$\Delta_t T_{np}$	7,1	10,8	8,8	16,2	9,0	8,6	9,5	-25,0
T_{np}	17,9	21,6	19,6	27,0	19,8	19,4	20,3	-14,2
A_{np}	1,3	5,0	3,0	10,4	3,2	2,8	3,7	-30,8
x_{im}	0,056	0,110	0,170	0,031	0,310	0,210	0,200	0,008
y_{im}	0,022	0,160	0,180	-0,036	0,180	0,009	0,140	0,073

* $\Sigma_1 = \Delta_t T_m x_{im} + \delta T_m y_{im}$

** $\Sigma_2 = \delta K_{im} - \Sigma_1 + \delta T_{mn} y_{im}$

Очевидно, мы должны предположить, что не для всех месяцев наш прогноз возможен. Будем считать, что неблагоприятными для прогноза будут те месяцы, в которые для средних климатологических условий имеют место наиболее резкие нарушения уравнения (8), т. е. нет достаточно тесной связи между $\Delta K_i''$, $\Delta T''$ и $\Delta T''$.

Таковыми месяцами будут: для Воейково апрель ($\sum_i \Delta T'' y_i'' = 0,27$), сентябрь ($\sum_i \Delta T'' y_i'' = 0,45$); для Риги февраль ($\sum_i \Delta T'' y_i'' = 1,35$), март ($\sum_i \Delta T'' y_i'' = 0,25$), сентябрь ($\sum_i \Delta T'' y_i'' = 0,34$); для Одессы июнь ($\sum_i \Delta T'' y_i'' = -0,47$), август ($\sum_i \Delta T'' y_i'' = 0,79$), сентябрь ($\sum_i \Delta T'' y_i'' = 0,32$); для Свердловска февраль ($\sum_i \Delta T'' y_i'' = -2,01$), март ($\sum_i \Delta T'' y_i'' = 0,53$), апрель ($\sum_i \Delta T'' y_i'' = 0,45$).

Из-за невыполнимости условий (7') и (8') для отдельных лет при осредненных за n лет коэффициентах x_{im} и y_{im} данная методика неприменима для прогноза величин аномалий температуры, но с ее помощью можно попытаться прогнозировать знак аномалии.

Составить прогноз, т. е. получить определенный ответ о знаке $A_{пр}$, не зная знака фактической аномалии температуры $A_{ф}$, можно, например, путем подсчета количества знаков (+) и (—) при $A_{пр}$, полученных по выбранному K_i . Если число знаков (+) и (—) делится поровну, то следует брать тот, который дает сумма алгебраических величин $A_{пр}$. Очевидно, при таком составлении прогноза различные $A_{пр}$ должны иметь различные веса. Последние должны определяться степенью надежности коэффициентов x_{im} и y_{im} , т. е. величиной коэффициентов корреляции r_{ix} и r_{iy} . Будем считать, что если оба коэффициента r_{ix} и r_{iy} не более чем вдвое превышают свою вероятную ошибку (т. е. составляют не больше половины от своих удовлетворительных значений), то соответствующие им $A_{пр}$ имеют нулевые веса, в обратном случае их вес равен 1.

Приведем один пример такого прогноза, составленного по компонентам R_a , F , I (табл. 2). В табл. 2 отмечены случаи нулевых весов $A_{пр}$ (X), в последней строке указаны знаки фактических аномалий температуры A , в предпоследней — удовлетворительные результаты прогнозов (числитель дроби — число случаев с удовлетворительным знаком аномалии, знаменатель — общее количество знаков).

Успешность прогноза оценивалась отношением числа случаев с положительным результатом прогноза к возможному числу случаев прогноза для данного пункта (все месяцы, за исключением отмеченных выше, а также тех, для которых все выбранные $A_{пр}$ имеют нулевые веса; таких оказалось три: апрель и июль для Воейково, декабрь для Риги). В данном примере величина α имеет следующие значения:

Воейково	Рига	Одесса	Свердловск
0,62	0,59	0,76	0,63

Среднее значение α составляет 0,65 (100 положительных результатов прогноза из 154 возможных). На основании того же материала климатологический прогноз дает успешность 0,56 (для отдельных пунктов соответственно 0,56, 0,54, 0,55, 0,60).

Приведем данные по сезонному ходу оправдываемости прогнозов:

Зима	Весна	Лето	Осень
0,68	0,68	0,56	0,69

Таблица 2

Расчет знака месячной аномалии температуры для Одессы

K_2	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1954 г.												
R_a				-	+					+		+
F		-		-	×					+		+
I		-		-	+					+		
A_{np}		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{2}$					$\frac{3}{3}$		$\frac{2}{3}$
A	-	-	-	-	+		+			+	+	+
1955 г.												
R_a	+	+	-		0,2						-	+
F	×	+	-		×					+	-	+
I	+		-		-2,3					+	-	+
A_{np}	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$		$\frac{1}{2}$					$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{3}$
A	+	+	-	-	-		+			+	-	+
1956 г.												
R_a	+	-		-	-		-				-	-
F	×			-	×		-			-	-	
I	+			-	-					-	-	-
A_{np}	$\frac{2}{2}$			$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{2}$		$\frac{2}{3}$			$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{3}$
A	+	-	-	-	-		-			-	-	-
1957 г.												
R_a		+	-		-		+			-	+	
F	×	+	-	+	×		+					
I			-	+	-					-	+	
A_{np}		$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{2}$		$\frac{2}{3}$			$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	
A	+	+	-	+	-		+			-	+	-
1958 г.												
R_a	+	+	-									
F	×	+	-									
I	+		-									
A_{np}	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$									
A	+	+	-									

Такой ход можно объяснить тем, что летом аномалии наименее резко выражены и их знак труднее уловить при прогнозе.

Следует отметить, что успешность использованного здесь способа прогноза знака месячных аномалий температуры в известной мере заведомо занижена вследствие того, что прогноз дается для температуры у земной поверхности и параметры x_{im} , y_{im} прогностического уравнения также получены по данным о температуре у земной поверхности. Между тем коэффициент корреляции между изменениями температуры за большие промежутки времени на разных уровнях атмосферы может быть велик, но он заведомо не равен 1. Поэтому данная методика должна дать лучшие результаты для средних уровней атмосферы, так как лежащий в ее основе физический механизм связывает компоненты теплового баланса атмосферы с ее средней температурой. Это прежде всего относится к Свердловску, где орोगрафические воздействия на приземную температуру должны быть наибольшими.

Для образования температурных аномалий в западных районах Европейской территории СССР существенное значение имеет адвективный перенос тепла A , определить который у нас не было возможности. Неучет адвективного переноса мог отразиться на результатах прогноза для Воейково и Риги. Суммарная же характеристика горизонтального переноса тепла B не включена в прогноз потому, что по причинам, указанным выше, она плохо коррелирует с аномалиями температуры.

РЕЗЮМЕ

Изложены результаты статистических исследований связи аномалий температуры атмосферы с различными компонентами теплового баланса системы „земля — атмосфера“. Получены некоторые прогностические выводы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берлянд Т. Г. Тепловой баланс атмосферы. В книге: „А. И. Воейков и современные проблемы климатологии“. Л. Гидрометеоиздат. 1956.
2. Блинова Е. Н. К вопросу о среднем годовом распределении температуры в земной атмосфере с учетом материков и океанов. Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз., т. XI, № 1. 1947.
3. Блинова Е. Н. Гидродинамическая теория волн давления, температурных волн и центров действия атмосферы. Докл. АН СССР, т. XXXIX, № 7. 1943.
4. Будыко М. И., Берлянд Т. Г., Зубенок Л. И. Методика климатологического расчета компонентов теплового баланса. Труды ГГО, вып. 48. 1954.
5. Будыко М. И., Берлянд Т. Г., Зубенок Л. И. Тепловой баланс земной поверхности. Изв. АН СССР, сер. геогр., № 3. 1954.
6. Ефимова Н. А. Аномалии радиационного баланса на территории ЕТС. Труды ГГО, вып. 66. 1956.
7. Кибель И. А. Распределение температуры в земной атмосфере. Докл. АН СССР, т. XXXIX, № 1. 1943.
8. Ключарев С. С. Опыт анализа изменений температуры в тропосфере. Метеорология и гидрология, №10. 1940.
9. Кочин Н. Е. Построение модели общей циркуляции атмосферы. Собрание сочинений, т. I. АН СССР. 1949.
10. Погосян Х. П. Циркуляция атмосферы. Гидрометеоиздат. Л. 1956.
11. Ракипова Л. Р. Тепловой режим атмосферы. Гидрометеоиздат. 1956.
12. Ракипова Л. Р. О связи между тепловыми потоками и аномалиями температуры атмосферы. Труды ГГО, вып. 76. 1958.
13. Федосеева А. И. Альbedo системы „земля—атмосфера“ и его распределение по земному шару. Труды ГГО, вып. 41. 1953.
14. Дородницын А. А., Извеков Б. И., Швец М. Е. Математическая теория общей циркуляции. Метеорология и гидрология, № 4. 1935.
15. Phillips N. Общая циркуляция атмосферы. Quart. Journ. Royal. Met. Soc. N 352. 1957.
16. Smagorinsky J. Динамическое влияние крупномасштабных источников и стоков тепла на квазистационарное движение атмосферы. Quart. Journ. Royal. Met. Soc. N 341. 1953.

К УЧЕТУ ВЛИЯНИЯ КОНДЕНСАЦИОННЫХ ПРИТОКОВ ТЕПЛА И СТРАТОСФЕРЫ НА ИЗМЕНЕНИЕ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ

В свободной атмосфере вне пограничных слоев при нормальных условиях притоки тепла невелики [2] и можно считать, что процессы небольшой длительности происходят адиабатически. Это обстоятельство и используется в различных схемах численного прогноза поля давления. Однако в атмосфере очень часто имеются обширные облачные системы, нередко значительной мощности. В этих системах происходят интенсивные процессы фазовых превращений, сопровождающиеся выделением и поглощением значительных количеств тепла. Кроме того, поглощение и излучение лучистой энергии в верхних слоях облака происходят значительно интенсивнее, чем в безоблачной атмосфере. Поэтому при наличии в атмосфере облачных слоев процессы в ней могут существенно отличаться от адиабатических; для учета этого потребуется ввести некоторые исправления в прогностическую схему.

Конденсационные (фазовые) притоки тепла в облаках, как правило, значительно больше лучистых. К тому же притоки коротковолновой и длинноволновой радиации обычно оказываются разных знаков и в какой-то степени компенсируют друг друга. Кроме того, задача нахождения радиационных притоков тепла (по крайней мере для целей анализа) может быть решена из уравнений лучистого переноса независимо от решения задачи об изменении поля давления. Определение же фазовых притоков тепла требует в той или иной форме привлечения уравнений теории изменения давления и не может быть отделено от решения основной задачи.

В дальнейшем будем считать, что лучистыми притоками тепла в облаке можно пренебречь по сравнению с фазовыми.

§ 1. Уравнение притока тепла

Уравнение притока тепла может быть записано в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{w} \frac{RT}{g\zeta} (\gamma - \gamma_a) = \frac{\epsilon}{c_p}, \quad (1)$$

где в качестве независимых переменных приняты горизонтальные координаты x , y , время t и безразмерное давление $\zeta = \frac{P}{P_0}$ (P_0 — стандартное давление на уровне моря), u и v — составляющие скорости ветра вдоль изобарической поверхности, $\tilde{w} = \frac{1}{P_0} \frac{dp}{dt}$ — аналог вертикальной скорости в системе координат x , y , ζ , T — абсолютная температура, R — удельная газовая постоянная воздуха, g — ускорение силы тяжести, γ_a — адиабатический градиент температуры, γ — истинный градиент температуры воздуха, c_p — теп-

лостность воздуха при постоянном давлении, ϵ — фазовый приток тепла (количество тепла, поступающее за единицу времени в единицу массы воздуха за счет конденсации). Он может быть как положительным, так и отрицательным, так как при испарении влаги в облаке происходят затраты тепла. Однако для удобства будем говорить лишь о притоке тепла. Приближенно можно считать, что $\epsilon = -L \frac{dq_m}{dt}$, где L — скрытое тепло парообразования, а q_m — насыщающая удельная влажность.

Определение величины стоков и притоков водяного пара требует совместного решения уравнений динамики атмосферы и уравнения переноса влаги.

В нашей задаче знание величины конденсации влаги нужно лишь для нахождения фазовых притоков тепла, так как мы не ставим себе целью расчет осадков. Поэтому желательно было бы учесть наличие фазовых притоков тепла без непосредственного вычисления конденсации в каждой точке облака.

Для этой цели запишем уравнение притока тепла в облачном слое в следующей форме:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \tilde{w} \frac{RT}{g_c} (\gamma - \gamma_{\text{ва}}) = 0, \quad (2)$$

где $\gamma_{\text{ва}}$ — влажноадиабатический градиент температуры.

Это уравнение представляет собой математическую формулировку закона сохранения эквивалентно-потенциальной температуры в облаке. При этом $\gamma_{\text{ва}}$, в отличие от γ_a , является величиной переменной, зависящей от T , что сильно затрудняет использование полного уравнения (2). Однако в этом нет необходимости: последний член уравнения (2), как указал М. И. Юдин, существенно меньше остальных трех членов.

Действительно, порядок первых трех членов составляет $7 \cdot 10^{-5}$. Оценка произведения $T(\gamma - \gamma_{\text{ва}})$ показывает, что в нижней половине тропосферы в среднем $0 [T(\gamma - \gamma_{\text{ва}})] = 0,25$; $0(\tilde{w}) = 10^{-6}$;

$$0 \left[\tilde{w} \frac{R}{g_c} T (\gamma - \gamma_{\text{ва}}) \right] = 10^{-6} \frac{287}{10 \cdot 0,7} 0,25 = 10^{-5}.$$

Таким образом, последний член уравнения (2) почти на порядок меньше остальных членов и пренебрежение им не должно привести к значительной ошибке.

В результате получим для облачного слоя приближенное уравнение

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Это уравнение справедливо лишь для облаков в нижней половине тропосферы и при не слишком низких температурах. При очень низких температурах $\gamma_{\text{ва}}$ близка к γ_a и конвективным членом в уравнении притока тепла пренебречь нельзя, так как в таких условиях влагосодержание, а следовательно, и фазовые притоки малы.

Уравнение (3) означает, что изменение температуры в облаке определяется лишь горизонтальной адвекцией тепла и не зависит от вертикальных движений. Попытка использовать подобную „адвективную гипотезу“ была сделана Р. Сатклифом [9] для случая безоблачной атмосферы. Однако в этом случае конвективный член в уравнении притока тепла сравним по величине с остальными членами и пренебрежение им значительно завышает роль горизонтальной адвекции тепла. В облачном же слое использование адвективной гипотезы представляется оправданным.

Чтобы лучше уяснить себе физический смысл этой гипотезы, сравним уравнения (1) и (3). Из них непосредственно следует, что

$$\tilde{w} \frac{RT}{g^2} (\gamma - \gamma_a) \approx \frac{\varepsilon}{c_p} \approx - \frac{L}{c_p} \frac{dq_m}{dt}, \quad (4)$$

т. е. приближенно можно считать, что приток тепла в данной точке за счет вертикальных движений целиком расходуется на процессы фазового перехода или, что то же самое, конденсация в данной точке целиком определяется вертикальными токами. Это предположение постоянно используется при прогнозе осадков.

§ 2. Приближенное решение задачи

Будем считать, что в нижней половине тропосферы имеется однородный по горизонтали облачный слой, простирающийся по вертикали от $\zeta = b_1$ до $\zeta = b_2$. Тогда можем разделить атмосферу на три слоя:

- I $0 \leq \zeta \leq b_1$ — надоблачный слой,
- II $b_1 \leq \zeta \leq 1$ — подоблачный слой,
- III $b_1 \leq \zeta \leq b_2$ — облачный слой.

Нашей задачей является определение изменений геопотенциала во времени. Для случая отсутствия облачного слоя решение этой задачи было получено различными авторами. Так, Н. И. Булеев и Г. И. Марчук [1] решили ее методом Фурье, а К. Хинкельман [7] — методом сеток. М. И. Юдин [5] решил эту задачу методом прямых. Метод прямых приложен и при наличии облачного слоя. Поэтому в дальнейшем будем при решении следовать изложению Юдина.

Уравнение притока тепла во внеоблачных слоях I и II используем в форме (1), считая, что $\varepsilon = 0$. С помощью уравнения вихря можно исключить из него вертикальную скорость $\tilde{w}$, в результате чего получим уравнение для определения тенденции геопотенциала

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 \bar{\varphi}}{\partial \zeta^2} + d^2 \Delta \bar{\varphi} = - \zeta \psi, \quad (5)$$

где $\bar{\varphi}(\zeta) = \int_0^\zeta \varphi(\zeta) d\zeta$

$$\varphi(\zeta) = \frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial t} \quad (6)$$

[$\Phi(\zeta)$ — геопотенциал изобарической поверхности ζ , $d^2 = \frac{R^2 T}{g l^2} (\gamma_a - \gamma)$ — параметр устойчивости, который в дальнейшем будет считаться постоянным, l — параметр Кориолиса],

$$\psi(\zeta) = R A_\tau + \frac{d^2 l}{\zeta} \int_0^\zeta A_z d\zeta \quad (7)$$

$$\left(A_\tau = \frac{1}{lR} \left\{ \Phi, \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\} \right) \text{ — адвекция тепла,}$$

$$A_z = \frac{1}{l^2} \left\{ \Phi, \Delta \Phi + \frac{l^2}{2} \right\} \text{ — адвекция вихря,}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ — оператор Лапласа,}$$

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x} \text{ — оператор Якоби.}$$

При выводе уравнения (5) использовалась квазистатичность и квазигеострофичность движений большого масштаба, а также условие на верхней границе атмосферы $\tilde{w}|_{\zeta=0}=0$.

Для прогноза поля давления в облачном слое используется уравнение притока тепла в форме (3). Так как $T = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}$, то оно может быть приведено к виду

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \bar{\Phi}}{\partial \zeta^2} = -\frac{RA_T}{\zeta}. \quad (8)$$

Будем решать нашу задачу методом прямых. Преимуществом этого метода является его простота. Полученное решение может быть использовано без пересчета функций влияния. Преимуществом метода прямых по сравнению с методом Фурье является также возможность его использования для случая ограниченного по горизонтали облака или для случая изменения параметра устойчивости по горизонтали, когда метод Фурье оказывается непригодным.

Заменяя лапласиан через конечные разности, ищем решение вдоль вертикальных прямых, проходящих через узлы горизонтальной треугольной сетки с шагом h . Будем обозначать f_0 значение функции f в данном узле сетки, а f_1 — значение функции, осредненное по всем шести точкам, находящимся на расстоянии h от данной.

Тогда уравнение (5) можно приближенно заменить системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \zeta^2 \frac{d^2 \bar{\varphi}_0^{(j)}}{d\zeta^2} - 6a^2 \bar{\varphi}_0^{(j)} + 6a^2 \bar{\varphi}_1^{(j)} &= -\zeta \psi_0 \\ \zeta^2 \frac{d^2 \bar{\varphi}_1^{(j)}}{d\zeta^2} + a^2 \bar{\varphi}_0^{(j)} - 3a^2 \bar{\varphi}_1^{(j)} &= -\zeta \psi_1 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $a^2 = \frac{2}{3} \frac{d^2}{h^2}$, $j = \begin{cases} 1 & \text{— для надоблачного слоя} \\ 2 & \text{— для подоблачного слоя.} \end{cases}$

При выводе системы (9) использовался установленный Юдиным факт, что осредненная по горизонтальному кругу радиусом около 1000 км тенденция геопотенциала близка к нулю.

Для слоя III имеем из уравнения (8)

$$\frac{a^2 \bar{\varphi}_0^{(3)}}{d\zeta^2} = -\frac{(RA_T)_0}{\zeta}, \quad \frac{a^2 \bar{\varphi}_1^{(3)}}{d\zeta^2} = -\frac{(RA_T)_1}{\zeta}. \quad (10)$$

Граничными условиями для решения системы уравнений (9) и (10) будут, согласно [5],

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_0^{(1)} &= 0, \quad \bar{\varphi}_1^{(1)} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0 \\ \bar{\varphi}_0^{(2)} &= \frac{3}{8} h^2 f_0 + \frac{3}{4} h^2 f_1, \quad \bar{\varphi}_1^{(2)} = \frac{1}{8} h^2 f_0 + \frac{3}{4} h^2 f_1 \quad \text{при } \zeta = 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$f = l \int_0^\zeta A_s d\zeta + \frac{l^2}{T} \int_0^\zeta A_T d\zeta + \frac{l^2 g}{RT} w_1 \quad (12)$$

(w_1 — вертикальная скорость на поверхности 1000 мб за счет турбулентного трения).

Необходимо также привлечь условия на поверхностях раздела между слоями. Вопрос об условиях на поверхности раздела подробно рассматривается в книге И. А. Кибеля [4]. Оказывается, что в рамках геострофиче-

ского приближения можно считать „вертикальную скорость“ непрерывной на поверхностях раздела. Это обстоятельство использовалось при выводе уравнения (5). Что касается тенденции геопотенциала, то она на поверхности раздела также непрерывна.

Непрерывность $\bar{\varphi}$ следует из самого ее определения (6). Поэтому условия на границах облака будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_0^{(1)} = \bar{\varphi}_0^{(3)}, \quad \frac{d\bar{\varphi}_0^{(1)}}{d\zeta} = \frac{d\bar{\varphi}_0^{(3)}}{d\zeta}, \quad \bar{\varphi}_1^{(1)} = \bar{\varphi}_1^{(3)}, \quad \frac{d\bar{\varphi}_1^{(1)}}{d\zeta} = \frac{d\bar{\varphi}_1^{(3)}}{d\zeta} \quad \text{при } \zeta = b_1 \\ \bar{\varphi}_0^{(2)} = \bar{\varphi}_0^{(3)}, \quad \frac{d\bar{\varphi}_0^{(2)}}{d\zeta} = \frac{d\bar{\varphi}_0^{(3)}}{d\zeta}, \quad \bar{\varphi}_1^{(2)} = \bar{\varphi}_1^{(3)}, \quad \frac{d\bar{\varphi}_1^{(2)}}{d\zeta} = \frac{d\bar{\varphi}_1^{(3)}}{d\zeta}, \quad \text{при } \zeta = b_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Решение системы (9) дает для внеоблачных слоев:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_0^{(j)}(\zeta) &= \sum_{i=1}^2 \left[B_{1i}^{(j)}(\zeta) \zeta^{\lambda_i + \frac{1}{2}} + B_{2i}^{(j)}(\zeta) \zeta^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} \right] \\ \bar{\varphi}_1^{(j)}(\zeta) &= \sum_{i=1}^2 \left(1 - \frac{\lambda_i^2 - \frac{1}{4}}{6a^2} \right) \left[B_{1i}^{(j)}(\zeta) \zeta^{\lambda_i + \frac{1}{2}} + B_{2i}^{(j)}(\zeta) \zeta^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} \right] \\ \varphi_0^{(j)}(\zeta) &= \frac{d\bar{\varphi}_0^{(j)}(\zeta)}{d\zeta} = \sum_{i=1}^2 \left[\left(\lambda_i + \frac{1}{2} \right) B_{1i}^{(j)}(\zeta) \zeta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} + \left(-\lambda_i + \frac{1}{2} \right) B_{2i}^{(j)}(\zeta) \zeta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \right] \\ \varphi_1^{(j)}(\zeta) &= \frac{d\bar{\varphi}_1^{(j)}(\zeta)}{d\zeta} = \sum_{i=1}^2 \left(1 - \frac{\lambda_i^2 - \frac{1}{4}}{6a^2} \right) \left[\left(\lambda_i + \frac{1}{2} \right) B_{1i}^{(j)}(\zeta) \zeta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \left(-\lambda_i + \frac{1}{2} \right) B_{2i}^{(j)}(\zeta) \zeta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt{\frac{a^2}{2}(9 - \sqrt{33}) + \frac{1}{4}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{a^2}{2}(9 + \sqrt{33}) + \frac{1}{4}}, \\ B_{1i}^{(1)} &= C_{1i} + \frac{1}{2\lambda_i} \int_{\zeta}^{b_1} F_i(\psi) \eta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta, \quad B_{1i}^{(2)} = C_{3i} + \frac{1}{2\lambda_i} \int_{\zeta}^1 F_i(\psi) \eta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta, \\ B_{2i}^{(1)} &= C_{2i} + \frac{1}{2\lambda_i} \int_0^{\zeta} F_i(\psi) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta, \quad B_{2i}^{(2)} = C_{4i} + \frac{1}{2\lambda_i} \int_{b_2}^{\zeta} F_i(\psi) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta, \\ F_1(\psi) &= \left(0,50 - \frac{1,5}{\sqrt{33}} \right) \psi_0 + \frac{6}{\sqrt{33}} \psi_1, \quad F_2(\psi) = \left(0,50 + \frac{1,5}{\sqrt{33}} \right) \psi_0 - \frac{6}{\sqrt{33}} \psi_1, \end{aligned}$$

η — переменная интегрирования.

Для облачного слоя решение получается простым интегрированием уравнений (10):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varphi}_0^{(3)}(\zeta) &= C_{50}\zeta + C_{60} - \zeta \int_{b_1}^{\zeta} \frac{(RA_{\tau})_0}{\eta} d\eta + \int_{b_1}^{\zeta} (RA_{\tau})_0 d\eta \\ \bar{\varphi}_1^{(3)}(\zeta) &= C_{51}\zeta + C_{61} - \zeta \int_{b_1}^{\zeta} \frac{(RA_{\tau})_1}{\eta} d\eta + \int_{b_1}^{\zeta} (RA_{\tau})_1 d\eta \\ \varphi_0^{(3)}(\zeta) &= C_{50} - \int_{b_1}^{\zeta} \frac{(RA_{\tau})_0}{\eta} d\eta, \quad \varphi_1^{(3)}(\zeta) = C_{51} - \int_{b_1}^{\zeta} \frac{(RA_{\tau})_1}{\eta} d\eta \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Для определения 12 постоянных, содержащихся в формулах (14) и (15), используем 12 условий (11) и (13). Из условий при $\zeta = 0$ непосредственно следует, что

$$C_{21} = C_{22} = 0. \quad (16)$$

Подстановка в остальные граничные условия дает систему 10-линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^2 \left[B_{1i}^{(1)}(b_1) b_1^{\lambda_i + \frac{1}{2}} + B_{2i}^{(1)}(b_1) b_1^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} \right] = C_{50} b_1 + C_{60} \\ & \sum_{i=1}^2 \left(1 - \frac{\lambda_i^2 - \frac{1}{4}}{6a^2} \right) \left[B_{1i}^{(1)}(b_1) b_1^{\lambda_i + \frac{1}{2}} + B_{2i}^{(1)}(b_1) b_1^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} \right] = C_{61} b_1 + C_{61} \\ & \sum_{i=1}^2 \left[\left(\lambda_i + \frac{1}{2} \right) B_{1i}^{(1)}(b_1) b_1^{\lambda_i - \frac{1}{2}} + \left(-\lambda_i + \frac{1}{2} \right) B_{2i}^{(1)}(b_1) b_1^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \right] = C_{50} \\ & \sum_{i=1}^2 \left(1 - \frac{\lambda_i^2 - \frac{1}{4}}{6a^2} \right) \left[\left(\lambda_i + \frac{1}{2} \right) B_{1i}^{(1)}(b_1) b_1^{\lambda_i - \frac{1}{2}} + \right. \\ & \quad \left. + \left(-\lambda_i + \frac{1}{2} \right) B_{2i}^{(2)}(b_1) b_1^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \right] = C_{51} \\ & \sum_{i=1}^2 \left[B_{1i}^{(2)}(b_2) b_2^{\lambda_i + \frac{1}{2}} + B_{2i}^{(2)}(b_2) b_2^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} \right] = C_{50} b_2 + C_{60} - \\ & \quad - b_2 \int_{b_1}^{b_2} \frac{(RA_\tau)_0}{\eta} d\eta + \int_{b_1}^{b_2} (RA_\tau)_0 d\eta \\ & \sum_{i=1}^2 \left(1 - \frac{\lambda_i^2 - \frac{1}{4}}{6a^2} \right) \left[B_{1i}^{(2)}(b_2) b_2^{\lambda_i + \frac{1}{2}} + B_{2i}^{(2)}(b_2) b_2^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} \right] = \\ & \quad = C_{51} b_2 + C_{61} - b_2 \int_{b_1}^{b_2} \frac{(RA_\tau)_1}{\eta} d\eta + \int_{b_1}^{b_2} (RA_\tau)_1 d\eta \\ & \sum_{i=1}^2 \left[\left(\lambda_i + \frac{1}{2} \right) B_{1i}^{(2)}(b_2) b_2^{\lambda_i - \frac{1}{2}} + \left(-\lambda_i + \frac{1}{2} \right) B_{2i}^{(2)}(b_2) b_2^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \right] = \\ & \quad = C_{50} - \int_{b_1}^{b_2} \frac{(RA_\tau)_0}{\eta} d\eta \\ & \sum_{i=1}^2 \left(1 - \frac{\lambda_i^2 - \frac{1}{4}}{6a^2} \right) \left[\left(\lambda_i + \frac{1}{2} \right) B_{1i}^{(2)}(b_2) b_2^{\lambda_i - \frac{1}{2}} + \right. \\ & \quad \left. + \left(-\lambda_i + \frac{1}{2} \right) B_{2i}^{(2)}(b_2) b_2^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \right] = C_{51} - \int_{b_1}^{b_2} \frac{(RA_\tau)_1}{\eta} d\eta \\ & \sum_{i=1}^2 [B_{1i}^{(2)}(1) + B_{2i}^{(2)}(1)] = \bar{\varphi}_0(1) \\ & \sum_{i=1}^2 \left(1 - \frac{\lambda_i^2 - \frac{1}{4}}{6a^2} \right) [B_{1i}^{(2)}(1) + B_{2i}^{(2)}(1)] = \bar{\varphi}_1(1) \end{aligned} \quad (17)$$

Система (17) может быть разделена на две системы по 5 уравнений в каждой, что очень упрощает ее решение в общем виде.

Если учесть, что

$$1 - \frac{\lambda_1^2 - \frac{1}{4}}{6a^2} = \frac{3 + \sqrt{33}}{12}, \quad 1 - \frac{\lambda_2^2 - \frac{1}{4}}{6a^2} = \frac{3 - \sqrt{33}}{12}, \quad (18)$$

то уравнения системы (17) могут быть разбиты на пары уравнений вида

$$M_1 + M_2 = K_0, \quad \frac{3 + \sqrt{33}}{12} M_1 + \frac{3 - \sqrt{33}}{12} M_2 = K_1. \quad (19)$$

Каждая такая пара может быть представлена в виде:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \left(0,50 - \frac{1,5}{\sqrt{33}}\right) K_0 + \frac{6}{\sqrt{33}} K_1 = F_1(K) \\ M_2 &= \left(0,50 + \frac{1,5}{\sqrt{33}}\right) K_0 - \frac{6}{\sqrt{33}} K_1 = F_2(K) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

что можно проверить простой подстановкой.

В результате всю систему (17) можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} B_{1i}^{(1)}(b_1) b_1^{\lambda_i + \frac{1}{2}} + B_{2i}^{(1)}(b_1) b_1^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} &= b_i F_i(C_5) + F_i(C_6) \\ \left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) B_{1i}^{(1)}(b_1) b_1^{\lambda_i - \frac{1}{2}} + \left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) B_{2i}^{(1)}(b_1) b_1^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} &= F_i(C_5) \\ B_{1i}^{(2)}(b_2) b_2^{\lambda_i + \frac{1}{2}} + B_{2i}^{(2)}(b_2) b_2^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} &= b_2 F_i(C_5) + F_i(C_6) - \\ &- b_2 \int_{b_1}^{b_2} \frac{F_i(RA_T)}{\eta} d\eta + \int_{b_1}^{b_2} F_i(RA_T) d\eta \\ \left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) B_{1i}^{(2)}(b_2) b_2^{\lambda_i - \frac{1}{2}} + \left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) B_{2i}^{(2)}(b_2) b_2^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} &= \\ &= F_i(C_5) - \int_{b_1}^{b_2} \frac{F_i(RA_T)}{\eta} d\eta \\ B_{1i}^{(2)}(1) + B_{2i}^{(2)}(1) &= F_i[\bar{\varphi}(1)] \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где, например, $F_i(C_5) = \left(0,50 - \frac{1,5}{\sqrt{33}}\right) C_{50} + \frac{6}{\sqrt{33}} C_{51}$ и т. д.
($i = 1, 2$)

Соберем искомые коэффициенты в левых частях уравнений:

$$\left. \begin{aligned} b_1^{\lambda_i + \frac{1}{2}} C_{1i} - b_1 F_1(C_5) - F_i(C_6) &= -\frac{b_1^{-\lambda_i + \frac{1}{2}}}{2\lambda_i} \int_0^{b_1} F_i(\psi) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta \\ \left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_1^{\lambda_i - \frac{1}{2}} C_{1i} - F_i(C_5) &= -\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) \frac{b_1^{-\lambda_i - \frac{1}{2}}}{2\lambda_i} \int_0^{b_1} F_i(\psi) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta \\ b_2^{\lambda_i + \frac{1}{2}} C_{2i} + b_2^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} C_{4i} - b_2 F_i(C_5) - F_i(C_6) &= \\ &= -\frac{b_2^{\lambda_i + \frac{1}{2}}}{2\lambda_i} \int_{b_2}^1 F_i(\psi) \eta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta - b_2 \int_{b_1}^{b_2} \frac{F_i(RA_T)}{\eta} d\eta + \int_{b_1}^{b_2} F_i(RA_T) d\eta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_2^{\lambda_i - \frac{1}{2}} C_{3i} + \left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_2^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} C_{4i} - F_i(C_5) = \\
& = -\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) \frac{b_2^{\lambda_i - \frac{1}{2}}}{2\lambda_i} \int_{b_2}^1 F_i(\psi) \eta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta - \int_{b_1}^{b_2} \frac{F_i(RA_\tau)}{\eta} d\eta \\
& C_{3i} + C_{4i} = -\frac{1}{2\lambda_i} \int_{b_2}^1 F_i(\psi) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta + F_i[\bar{\varphi}(1)] \\
& (i = 1, 2)
\end{aligned} \tag{22}$$

Путем решения этой системы постоянные C_{1i} , C_{3i} , C_{4i} , $F_i(C_5)$, $F_i(C_6)$ могут быть выражены через правые части, которые зависят от распределения в атмосфере адвекций тепла и вихря.

Зная $F_i(C_5)$ и $F_i(C_6)$, можно получить и выражения для C_{50} , C_{51} , C_{60} , C_{61} [см. (19) и (20)]. Например,

$$\begin{aligned}
C_{50} &= F_1(C_5) + F_2(C_5), \\
C_{51} &= \frac{3 + \sqrt{33}}{12} F_1(C_5) + \frac{3 - \sqrt{33}}{12} F_2(C_5).
\end{aligned}$$

Мы не будем здесь приводить окончательные выражения для всех постоянных ввиду их сравнительной громоздкости. Ограничимся лишь двумя из них, через которые могут быть представлены и остальные:

$$\begin{aligned}
C_{1i} &= \frac{1}{D_i} \left\{ \left[\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_2^{\lambda_i - \frac{1}{2}} - \left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_2^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \right] \left[\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_1^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_1^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \right] b_1^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} b_2 - \left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_1^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \times \right. \\
& \quad \left. \times \left(b_2^{\lambda_i + \frac{1}{2}} - b_2^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} \right) \right\} \frac{1}{2\lambda_i} \int_0^{b_1} F_i(\psi) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta + \\
& \quad + \frac{1}{D_i} \left[\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_2^{\lambda_i - \frac{1}{2}} - \left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_2^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \right] \int_{b_1}^{b_2} F_i(RA_\tau) d\eta + \\
& \quad + \frac{1}{D_i} \left[-\left(\lambda_i - \frac{1}{2}\right) b_2^{\lambda_i + \frac{1}{2}} + \left(-\lambda_i - \frac{1}{2}\right) b_2^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} \right] \int_{b_1}^{b_2} \frac{F_i(RA_\tau)}{\eta} d\eta - \\
& \quad - \frac{1}{D_i} \int_{b_2}^1 F_i(\psi) \left[\eta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} - \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} \right] d\eta - \frac{2\lambda_i}{D_i} F_i[\bar{\varphi}(1)] \\
C_{2i} &= 0 \\
C_{3i} &= \frac{1}{D_i} \int_0^{b_1} F_i(\psi) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta + \frac{\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_1^{\lambda_i - \frac{1}{2}}}{D_i} \int_{b_1}^{b_2} F_i(RA_\tau) d\eta + \\
& \quad + \frac{\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_1^{\lambda_i + \frac{1}{2}}}{D_i} \int_{b_1}^{b_2} \frac{F_i(RA_\tau)}{\eta} d\eta +
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right)\left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right)(b_1 - b_2)b_1^{\lambda_i - \frac{1}{2}}b_2^{-\frac{1}{2}}}{2\lambda_i D_i} \int_{b_2}^1 F_i(\psi) \eta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta + \\
& + \left[\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right)^2 b_2 - \left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right)^2 b_1 \right] \frac{b_1^{\lambda_i - \frac{1}{2}} b_2^{-\frac{1}{2}}}{D_i} \times \\
& \times \left(\frac{1}{2\lambda_i} \int_{b_2}^1 F_i(\psi) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta - F_i[\bar{\varphi}(1)] \right) \\
C_{4i} = & -C_{3i} - \frac{1}{2\lambda_i} \int_{b_2}^1 F_i(\psi) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta + F_i[\bar{\varphi}(1)] \\
F_i(C_5) = & \left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_1^{\lambda_i - \frac{1}{2}} C_{1i} + \left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) \frac{b_1^{-\lambda_i - \frac{1}{2}}}{2\lambda_i} \int_0^{b_1} F_i(\psi) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta \\
F_i(C_6) = & \left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_1^{\lambda_i + \frac{1}{2}} C_{1i} + \left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) \frac{b_1^{-\lambda_i + \frac{1}{2}}}{2\lambda_i} \int_0^{b_1} F_i(\psi) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta \\
C_{50} = & F_1(C_5) + F_2(C_5), \quad C_{60} = F_1(C_6) + F_2(C_6) \\
C_{51} = & \frac{3 + \sqrt{33}}{12} F_1(C_5) + \frac{3 - \sqrt{33}}{12} F_2(C_5) \\
C_{61} = & \frac{3 + \sqrt{33}}{12} F_1(C_6) + \frac{3 - \sqrt{33}}{12} F_2(C_6) \\
D_i = & - \left[\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_1^{\lambda_i - \frac{1}{2}} b_2 + \left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_1^{\lambda_i + \frac{1}{2}} \right] \left[\left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_2^{\lambda_i - \frac{1}{2}} - \right. \\
& \left. - \left(-\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_2^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \right] + \left(\lambda_i + \frac{1}{2}\right) b_1^{\lambda_i - \frac{1}{2}} \left(b_2^{\lambda_i + \frac{1}{2}} - b_2^{-\lambda_i + \frac{1}{2}} \right)
\end{aligned} \tag{23}$$

Подставив найденные постоянные в формулы (14) и (15), получим окончательное решение задачи. В случае $b_1 = b_2$, т. е. при отсутствии облака, оно совпадает с решением для однослойной задачи.

Как известно, конденсация определяется полями влажности и вертикальных токов. Между тем наше решение на первый взгляд не содержит ни того, ни другого, а лишь параметры b_1 и b_2 и начальные поля адвекций вихря и тепла. Следует, однако, учесть, что задание границ b_1 и b_2 совместно с условием, что в облаке $q = q_m$, полностью определяет поле влажности в облаке, а начальные поля адвекций вихря и тепла полностью определяют вертикальные токи во всей атмосфере.

В качестве примера рассмотрим конкретный случай, когда $b_1 = 0,6$, $b_2 = 0,925$. При этом примем $h = 330$ км, $a^2 = 3,3$, $\lambda_1 = 2,37$, $\lambda_2 = 4,96$. Пренебрегаем также в граничных условиях (11) малыми членами, зависящими от A_τ и w_1 .

Для этого случая были вычислены функции влияния адвекций тепла и вихря на различных уровнях на изменение геопотенциала на данной изобарической поверхности. Решение было получено в виде

$$\begin{aligned}
\varphi_0(\zeta) = & \int_0^1 \{ m_0(\zeta, \eta) [RA_\tau]_0(\eta) + m_1(\zeta, \eta) [RA_\tau]_1(\eta) + \\
& + n_0(\zeta, \eta) [d^2LA_\Sigma]_0(\eta) + n_1(\zeta, \eta) [d^2LA_\Sigma]_1(\eta) \} d\eta,
\end{aligned} \tag{24}$$

где $m_0(\zeta, \eta)$ характеризует влияние адвекции тепла в данном узле сетки на уровне η на изменение геопотенциала на уровне ζ , $m_1(\zeta, \eta)$ характеризует влияние адвекции тепла, осредненной по шести окружающим узлам сетки на уровне η , на тенденцию геопотенциала на уровне ζ , $n_0(\zeta, \eta)$ и $n_1(\zeta, \eta)$ характеризуют влияние адвекций вихря на уровне η .

На рис. 1 для иллюстрации приводятся функции влияния m_0 , m_1 , n_0 и n_1 при наличии облака и при отсутствии его для уровней $\zeta = 0,5$ и $0,85$.

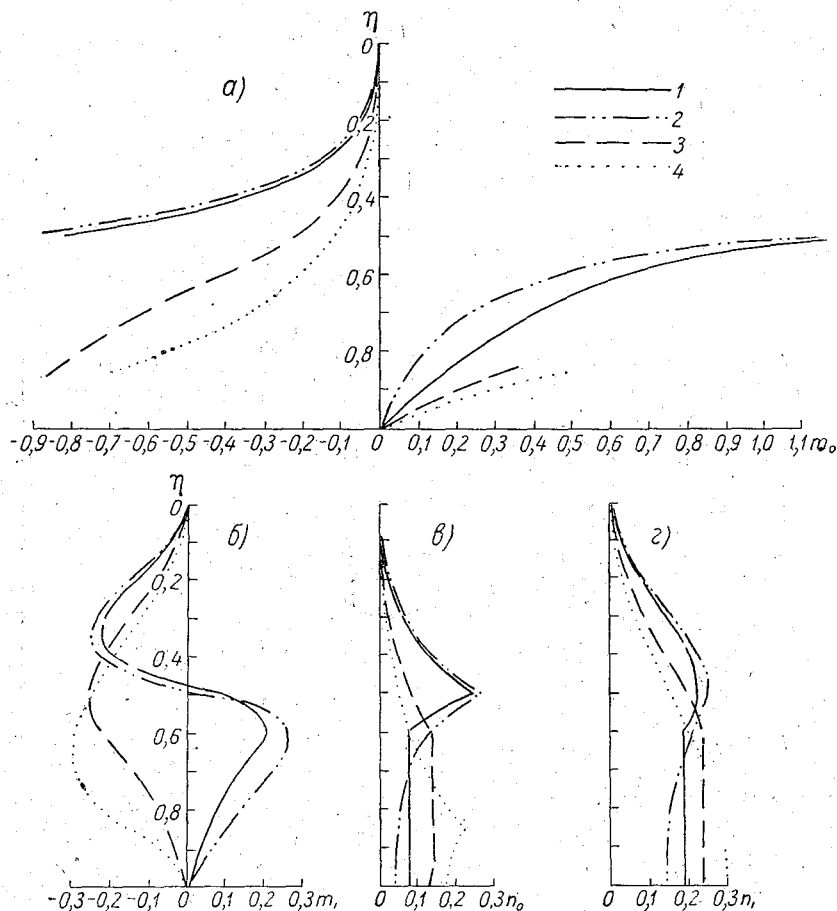


Рис. 1. Значения коэффициентов а — $m_0(\zeta, \eta)$, б — $m_1(\zeta, \eta)$, в — $n_0(\zeta, \eta)$, з — $n_1(\zeta, \eta)$ при наличии облака (1) и при отсутствии облака (2) } $\zeta = 0,50$, при наличии облака (3) и при отсутствии облака (4) } $\zeta = 0,85$.

Численные значения функций влияния для $\zeta = 0,5, 0,7, 0,85$ и $1,0$ приведены в приложении I. При этом функции влияния для безоблачной атмосферы обозначены $\bar{m}_0$, $\bar{m}_1$, $\bar{n}_0$, $\bar{n}_1$. Функции влияния для случая наличия облака обозначены m_0 , m_1 , n_0 , n_1 , а отклонения их от первых — m'_0 , m'_1 , n'_0 и n'_1 . Так как нас интересуют лишь те изменения, которые вызваны наличием облачности, нагляднее рассматривать именно эти отклонения.

Рассмотрение приведенных выше результатов приводит к следующим выводам.

а. Влияние фазовых притоков тепла на изменения геопотенциала изобарических поверхностей, значительно удаленных от облака, мало (подчерк-

нем, что и здесь и в дальнейшем речь идет об изменениях по сравнению с результатами для безоблачной атмосферы). По мере приближения к облаку его влияние сказывается все сильнее и является наиболее сильным на границах. При этом с разных сторон облака оно имеет различный знак, а в средней части облака близко к нулю.

б. Для изобарических поверхностей в надоблачном слое и в верхней части облака наличие фазовых притоков увеличивает геопотенциал при адвекции тепла и уменьшает его при адвекции холода.

Для уровней в нижней части облака и в подоблачном слое наличие фазовых притоков уменьшает геопотенциал при адвекции тепла и повышает его при адвекции холода.

в. Для изобарических поверхностей в надоблачном слое и в верхней части облачного слоя учет фазовых притоков ведет к увеличению геопотенциала при адвекции циклонического вихря в этих слоях и к уменьшению геопотенциала при адвекции циклонического вихря в нижней части облака и над облаком.

Для изобарических поверхностей в нижней части облачного слоя и в надоблачном слое учет фазовых притоков при адвекции циклонического вихря на разных уровнях оказывает обратное влияние.

г. Вблизи границ облака влияние адвекции тепла на разных уровнях на изменение геопотенциала только за счет фазовых притоков тепла сравнимо с влиянием адвекции тепла на изменение геопотенциала в безоблачной атмосфере. Относительное изменение функций влияния адвекций вихря за счет фазовых притоков не столь велико, но все-таки существенно.

Интересно сравнить полученные результаты с результатами С. В. Немчинова. Им рассчитаны функции влияния адвекций тепла и вихря для случая круглого облака радиусом 350 км с конденсацией пара на уровнях 1000 и 850 мб и сублимацией капель на уровне 700 мб. Схематизированное таким образом облако отличается от нашей схемы облака, по существу, лишь горизонтальными размерами, так как в нашей схеме радиус облака должен быть не меньше 500 км.

Немчинов задавал уравнение притока тепла в форме (2), сохраняя в нем конвективный член. Совместно с уравнением вихря это уравнение представляется в виде системы интегральных уравнений, которое решается численно. При этом адвекция вихря, как и адвекция тепла на главных уровнях, характеризуется лишь одним параметром — величиной адвекции в данной точке.

Сопоставление рассчитанных Немчиновым функций влияния с полученными выше функциями m'_0 , m'_1 , n'_0 и n'_1 показывает, что изменения в функциях влияния, вызванные наличием облака, качественно аналогичны в обеих схемах. Поскольку решение производилось различными методами, это совпадение позволяет предполагать, что в обеих схемах правильно уловлены основные черты явления.

Вопрос о влиянии фазовых притоков тепла на крупномасштабные движения рассматривается также в работах С. Манабе [8] и Э. Обера [6]. В них уравнение притока тепла использовалось в форме (1), а фазовые притоки исключались путем привлечения уравнения переноса влаги. Решение полученной системы производится методом сеток и потому не дает возможности отделить друг от друга влияние различных физических факторов. Оба автора приходят к выводу, что учет фазовых притоков может существенно изменить прогноз высоты изобарической поверхности, что вполне соответствует нашим выводам.

На практике мы располагаем картами барической топографии лишь для главных изобарических поверхностей. Поэтому приходится в формуле (24) переходить от интеграла к конечной сумме. В этом случае можно записать

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{(i)} \{ \mu_0(\zeta, \eta_i) [RA_T]_0(\eta_i) + \mu_1(\zeta, \eta_i) [RA_T]_1(\eta_i) + \nu_0(\zeta, \eta_i) [d^2LA_2]_0(\eta_i) + \nu_1(\zeta, \eta_i) [d^2LA_2]_1(\eta_i) \}. \quad (24')$$

Суммирование производится по заранее выбранным главным изобарическим поверхностям. μ_0 , μ_1 , ν_0 и ν_1 — „веса“ адвекций тепла и вихря на этих поверхностях, которые могут быть получены с помощью интерполяционной формулы Симпсона.

К сожалению, в нашем распоряжении обычно не бывает карт барической топографии для поверхностей выше 300 мб. Поэтому для практических расчетов пришлось бы экстраполировать значения A_T и A_2 на более высокие поверхности, что ненадежно.

При получении весов в уравнении (24') пренебрегаем частями интегралов в (24), относящимися к верхней части атмосферы от $\zeta = 0$ до 0,3. Основанием для этого является то, что величины адвекций температуры и вихря в верхней атмосфере несколько раз меняют свой знак. Если учесть еще сравнительную малость функций влияния верхних слоев на уровни в нижней тропосфере, то пренебрежение их влиянием на изменения давления на уровнях 500, 700, 850 и 1000 мб представляется оправданным.

Мы рассчитали для этих уровней коэффициенты μ_0 , μ_1 , ν_0 , ν_1 . В приложении II приводятся увеличенные в 10 раз значения коэффициентов в случае безоблачной атмосферы для нашего примера и разности между ними.

При получении этих весов оказалось очень существенным то обстоятельство, что функции влияния адвекций тепла m_0 и m_1 на уровне $\eta = \zeta$ меняют свой знак, в то время как поправки к ним на влияние облачности m'_0 и m'_1 знака не меняют. Поскольку при получении веса уровня η мы производим некоторое осреднение соответствующей функции влияния, то относительное изменение весов адвекций тепла на уровне $\eta = \zeta$ оказывается значительно больше, чем относительное изменение соответствующих функций влияния.

Функции влияния адвекций вихря n_0 и n_1 сохраняют положительный знак во всей атмосфере, в то время как поправки n'_0 и n'_1 меняют свой знак. Поэтому при интегрировании роль поправок уменьшается, причем в некоторых случаях значительно.

Из данных приложения II следует, что наличие облака существенно изменяет влияние адвекций тепла и вихря на различных уровнях на изменения барического поля во времени. Это еще не означает, что изменение геопотенциала данной поверхности за счет фазовых притоков обязательно должно быть велико. Влияния адвекций тепла и вихря на разных уровнях могут иметь различный знак и компенсировать друг друга. Поэтому в зависимости от распределения в атмосфере адвекций тепла и вихря влияние конденсационных притоков тепла может быть различно. Оно будет максимально, если адвекция тепла на всех уровнях имеет один и тот же знак; адвекция вихря на уровнях выше средней части облака имеет тот же знак (например, адвекции тепла соответствует адвекция циклонического вихря), а ниже средней части облака имеет обратный знак.

Полученные результаты подтверждают предположение некоторых исследователей о том, что высвобождение тепла за счет конденсации может значительно усилить процесс циклогенеза, и дают возможность численно оценить этот эффект.

§ 3. Об учете влияния стратосферы

Как уже указывалось, значения весов в приложении II были рассчитаны в предположении, что влиянием верхних слоев атмосферы на процессы в тропосфере можно пренебречь. Заметим, что и в случае наличия надежных метеорологических данных для этих слоев мы не могли бы правильно

учесть их влияние. Дело в том, что все вышеприведенные расчеты велись в предположении постоянства во всей атмосфере параметра устойчивости d^2 . Между тем стратификация стратосферы сильно отличается от стратификации тропосферы.

Чтобы можно было хотя бы грубо оценить влияние стратосферы, нужно учесть изменение стратификации с высотой. Для этого необходимо в случае отсутствия облаков решать двухслойную, а при наличии их трехслойную или даже четырехслойную задачу. Хотя такие расчеты предложенным выше методом и не представляют принципиальных трудностей, практическое выполнение их очень затруднительно. Поэтому ограничимся выполнением расчетов для безоблачной атмосферы.

Будем считать, что атмосфера состоит из однородных по горизонтали слоев, в каждом из которых величина параметра устойчивости остается постоянной. Пусть b определяет границу между слоями. Будем обозначать

1 $0 \leq \zeta \leq b$ верхний слой (стратосфера),

II $b \leq \zeta \leq 1$ нижний слой (тропосфера).

Параметры устойчивости для верхнего и нижнего слоев обозначаются d_1^2 и d_2^2 соответственно. Строгий учет влияния стратосферы потребовал бы учета изменения высоты тропопаузы в пространстве и во времени. Так как мы хотим оценить лишь влияние изменения стратификации с высотой, то будем впредь считать b постоянным.

В этом случае для каждого слоя выполняется уравнение (5). При решении задачи методом прямых оно заменяется системой (9). Нужно лишь учесть, что в данном случае d^2 и a^2 имеют в каждом слое свои значения.

Система (9) решается при граничных условиях (11) и (13). Решением ее являются формулы (14) с той лишь разницей, что $b_1 = b_2 = b$, а λ_1 и λ_2 имеют в каждом слое свои значения.

Постоянные отыскиваются аналогично тому, как ранее находились постоянные в (23), и имеют вид:

$$\begin{aligned}
 C_1 = & \frac{(\lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)}) b^{\lambda_i^{(2)}} + (\lambda_i^{(2)} - \lambda_i^{(1)}) b^{-\lambda_i^{(2)}}}{D_i} \frac{b^{-2\lambda_i^{(1)}}}{2\lambda_i^{(1)}} \int_0^b F_i(\psi^{(1)}) \eta^{\lambda_i^{(1)} - \frac{1}{2}} d\eta - \\
 & - \frac{b^{-\lambda_i^{(1)}}}{D_i} \int_b^1 F_i(\psi^{(2)}) \left[\eta^{-\lambda_i^{(2)} - \frac{1}{2}} - \eta^{\lambda_i^{(2)} - \frac{1}{2}} \right] d\eta - \frac{2\lambda_i^{(2)} b^{-\lambda_i^{(1)}}}{D_i} F_i[\bar{\varphi}(1)] \\
 C_{2i} = & 0 \\
 C_{3i} = & - \frac{b^{-\lambda_i^{(1)}}}{D_i} \int_0^b F_i(\psi^{(1)}) \eta^{\lambda_i^{(1)} - \frac{1}{2}} d\eta + \frac{1}{2\lambda_i^{(2)} D_i} \int_b^1 F_i(\psi^{(2)}) \times \\
 & \times \left[(\lambda_i^{(2)} - \lambda_i^{(1)}) b^{\lambda_i^{(2)}} \eta^{\lambda_i^{(2)} - \frac{1}{2}} - \lambda_i^{(2)} - \frac{1}{2} + (\lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)}) b^{-\lambda_i^{(2)}} \eta^{\lambda_i^{(2)} - \frac{1}{2}} \right] d\eta - \\
 & - \frac{b^{-\lambda_i^{(2)}} (\lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)})}{D_i} F_i[\bar{\varphi}(1)] \\
 C_{4i} = & - \frac{b^{-\lambda_i^{(1)}}}{D_i} \int_0^b F_i(\psi^{(1)}) \eta^{\lambda_i^{(1)} - \frac{1}{2}} d\eta + \frac{\lambda_i^{(1)} - \lambda_i^{(2)}}{2\lambda_i^{(2)} D_i} \int_b^1 F_i(\psi^{(2)}) \times \\
 & \times \left[\eta^{-\lambda_i^{(2)} - \frac{1}{2}} - \eta^{\lambda_i^{(2)} - \frac{1}{2}} \right] d\eta + \frac{(\lambda_i^{(1)} - \lambda_i^{(2)}) b^{\lambda_i^{(2)}}}{D_i} F_i[\bar{\varphi}(1)] \\
 D_i = & (\lambda_i^{(1)} - \lambda_i^{(2)}) b^{\lambda_i^{(2)}} - (\lambda_i^{(1)} + \lambda_i^{(2)}) b^{-\lambda_i^{(2)}}
 \end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\psi^{(i)} = RA_T + \frac{a_i^2 l}{\zeta} \int_0^{\zeta} A_2 d\zeta.$$

Подстановка (25) в формулы (11) дает окончательное решение двух-слойной задачи. При $\lambda_i^{(1)} = \lambda_i^{(2)} = \lambda_i$ решение это сводится к решению одно-слойной задачи.

Численные расчеты были выполнены для следующих значений параметров:

$$\begin{aligned} a_1^2 &= 6,9; \quad \lambda_1^{(1)} = 3,39; \quad \lambda_2^{(1)} = 7,15; \\ a_2^2 &= 3,3; \quad \lambda_1^{(2)} = 2,37; \quad \lambda_2^{(2)} = 4,96; \quad b = 0,225. \end{aligned}$$

Сравнение полученного решения с решением однослойной задачи приводит к следующим выводам о влиянии стратосферы на изменения давления на уровнях в нижнем слое и в нижней части верхнего слоя.

а. Влияние адвекции тепла на уровнях ниже прогностического увеличивается по абсолютной величине, а на уровнях выше прогностического уменьшается. Если учесть, что эти влияния имеют разный знак, то оказывается, что учет стратосферы приводит к дополнительному росту давления при адвекции тепла на всех уровнях и дополнительному падению его при адвекции холода.

б. Возрастает влияние адвекции вихря на всех уровнях в тропосфере и в нижней части стратосферы (приблизительно до $\zeta = 0,15$). Влияние адвекции вихря в более высоких слоях уменьшается. Это значит, что учет стратосферы вызывает дополнительное падение давления в тропосфере при адвекции циклонического вихря в ней и при адвекции антициклонического вихря в верхней стратосфере.

в. Изменения в функциях влияния, вносимые при учете стратосферы, максимальны на границе раздела и быстро убывают по мере удаления от нее. При этом относительное увеличение функций влияния в нижнем слое сравнительно невелико, а в верхней стратосфере ($\eta < 0,15$) относительное уменьшение функций влияния значительно.

г. Максимальное влияние учет стратосферы оказывает на изменение давления на границе раздела. Для $\zeta = 0,225$ функции влияния нижележащих слоев увеличиваются на 10—15% по сравнению с решением для одно-слойной задачи. Уже для $\zeta = 0,3$ функции влияния нижележащих слоев увеличиваются лишь на несколько процентов. Влияние верхних слоев по-прежнему изменяется существенно.

Введение стратосферы практически не вносит изменений в функции влияния тропосферных уровней на изменения давления для $\zeta \geq 0,5$ при существенном уменьшении и без того малого влияния уровней верхней атмосферы.

Для иллюстрации вышеизложенного в приложении III приведены численные значения функций влияния адвекций тепла и вихря на изменение геопотенциала для $\zeta = 0,3$ и $0,5$, рассчитанные для случая наличия стратосферы. В целях сравнения там же приведены значения $\bar{m}_0$, $\bar{m}_1$, $\bar{n}_0$ и $\bar{n}_1$ функций влияния для однослойной задачи и разности между первыми и вторыми, обозначаемые соответственно $\bar{m}'_0$, $\bar{m}'_1$, $\bar{n}'_0$ и $\bar{n}'_1$.

На изменение барического поля в верхних слоях атмосферы ($\zeta \leq 0,15$) введение стратосферы оказывает влияние, противоположное тому, которое оказывается на изменение барического поля в тропосфере. Поскольку эти уровни практического значения не имеют, то более подробно этот вопрос не рассматривается.

В итоге оказывается, что наличие стратосферы вносит существенные изменения в функции влияния для уровня $\zeta = 0,3$. Поэтому при прогнозе

AT_{300} оно должно обязательно учитываться. Естественно, что для $\zeta = 0,3$ при определении весов различных уровней можно отбрасывать влияние вышележащих слоев лишь начиная с более высоких уровней. В приложении IV приводятся для $\zeta = 0,3$ и $0,5$ увеличенные в 10 раз веса $\mu_0, \mu_1, \nu_0, \nu_1$, которые получаются при учете влияния слоев ниже $\eta = 0,15$ в случае безоблачной атмосферы без учета стратосферы и с учетом ее, а также их разности.

Из таблиц приложения IV видно, что наличие стратосферы существенно изменяет веса верхних уровней и мало меняет веса нижних. Наличие облачности оказывает обратное влияние. Так как облачный слой и стратосфера оказывают малое влияние друг на друга, то достаточно отдельно рассчитать их влияние на изменение давления. Полная поправка на совместное действие этих эффектов с достаточной точностью может быть представлена суммой поправок за счет влияния каждого из них в отдельности.

Рассмотренный ранее случай наличия облака сводился нами к случаю наличия в атмосфере слоя с равновесной стратификацией. Рассмотрение получающихся функций влияния показывает, что в этом слое функции влияния n_0 и n_1 оказываются постоянными, а m_0 и m_1 хотя и изменяются, но медленнее, чем в случае безоблачной атмосферы.

В случае же наличия стратосферы, которая является слоем повышенной устойчивости, функции влияния убывают значительно быстрее, чем они убывали бы в однослойной атмосфере.

Чем более устойчиво стратифицирована атмосфера, тем на меньшее расстояние по вертикали распространяется влияние возмущения на данном уровне. В этом смысле слои, которые являются задерживающими для мелкомасштабных движений, являются задерживающими и для крупномасштабных погодообразующих возмущений. Аналогично менее устойчивые слои способствуют более далекому распространению этих возмущений.

Причиной этого факта, установленного еще К. Хинкельманом [7], является то, что связь между различными слоями в атмосфере осуществляется посредством вертикальных движений. Чем интенсивнее вертикальные движения, тем дальше распространяется возмущение по вертикали, медленнее оно затухает, тем больше связь между слоями. Поэтому, например, повышение устойчивости стратификации в слое, затрудняя вертикальные движения, обуславливает большее затухание возмущений.

В настоящее время наличие стратосферы учитывается в ряде работ. Из этих работ наиболее близкой по постановке задачи является работа Е. Г. Ломоносова [3], в которой аналогичная двухслойная задача решается методом Фурье. Полученные Ломоносовым результаты отличаются от наших. Наиболее существенное отличие заключается в том, что функция влияния адвекции вихря терпит, по Ломоносову, разрыв по тропопаузе. Вследствие наличия этого разрыва функции влияния в стратосфере увеличиваются пропорционально отношению параметров устойчивости стратосферы и тропосферы. Соответственно увеличивается и влияние стратосферы на барическое поле в тропосфере.

Причиной наличия разрыва функции влияния является задание Ломоносовым условия непрерывности тенденции температуры на тропопаузе. Если учесть, что уравнение притока тепла может быть записано в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} - A_T + \frac{a^2 l^2}{\zeta} \tilde{w} = 0$$

и что геострофическая адвекция тепла является непрерывной на тропопаузе, то условие непрерывности тенденции температуры дает

$$a_1^2 \tilde{w}_1 = a_2^2 \tilde{w}_2 \quad \text{и} \quad \tilde{w}_2 = \frac{a_1^2}{a_2^2} \tilde{w}_1.$$

Таким образом условие непрерывности $\frac{\partial T}{\partial t}$ равносильно заданию разрыва $\tilde{w}$, что вызывает и разрыв функции влияния. В нашем же случае $\tilde{w}$ на границе раздела считается непрерывной, вследствие этого оказываются непрерывными и функции влияния.

Точное решение задачи требует более строгого задания условий на поверхности раздела, что в рамках геострофического приближения представляется затруднительным. Можно, однако, ожидать, что результаты, полученные в предположении непрерывности $\tilde{w}$ на тропопauзе, позволяют корректнее оценить влияние стратосферы.

Расчет многослойной задачи для случая наличия неустойчиво стратифицированного слоя может быть аналогичным образом выполнен методом прямых. Практически этот случай большого интереса не представляет, так как в средней атмосфере, как правило, не бывает слоев со сверхадиабатическим градиентом. Такие слои обычно сравнительно небольшой мощности бывают у поверхности земли. Однако поскольку вертикальная скорость на подстилающей поверхности равна нулю, то в пределах приземного слоя она для движений большого масштаба должна быть мала. Поэтому изменения стратификации в приземном слое не должны оказывать большого влияния на изменение барического поля в средней атмосфере.

Так, например, были рассчитаны функции влияния для случая облачности, простирающейся от $b_1 = 0,6$ до $b_2 = 1$. В этом случае слой атмосферы от $\zeta = 0,925$ до 1, который в первом примере считался нормально стратифицированным, заменяется слоем равновесной стратификации. Как и следовало ожидать, функции влияния адвекций тепла и вихря на изменение давления на уровнях $\zeta = 0,5, 0,7$ и $0,85$ при этом очень мало изменяются.

Краткие выводы

1. Облако в нижней половине тропосферы может приближенно считаться влажноравновесным слоем, соответственно существенно упрощается вид уравнения притока тепла.

2. Получено приближенное решение задачи о прогнозе изменения давления во времени для двухслойной и трехслойной атмосферы.

3. Приведенные в § 2 результаты расчетов для выбранного примера показывают, что фазовые притоки тепла в облаках могут оказывать существенное влияние на изменение поля давления в атмосфере.

4. Влияние стратосферы на изменения поля давления в средней и нижней тропосфере невелико и может не учитываться. Влияние ее на верхнюю тропосферу может быть до некоторой степени учтено изложенным в § 3 способом.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается вопрос о влиянии на изменение давления притоков тепла в облаке за счет конденсации. Приближенное решение этой задачи находится методом прямых.

Аналогичным методом решается задача о влиянии стратосферы на изменение давления в тропосфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булеев Н. И., Марчук Г. И. О динамике крупномасштабных атмосферных процессов. Труды Ин-та физики атмосферы АН СССР, № 2. 1957.
2. Гайгеров С. С., Кастров В. Г. Исследование термической трансформации движущегося воздуха по материалам полетов свободных аэростатов. Труды ЦАО, вып. 6. 1952.
3. Ломоносов Е. Г. Влияние стратосферы на изменение давления в атмосфере и учет этого влияния в прогнозе барического поля. Автореферат диссертации. Л. 1958.

4. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. ГТТИ. М. 1957.
5. Юдин М. И. О прогнозе поля давления численными методами. Труды ГГО, вып. 71. 1957.
6. Aubert E. J. On the release of latent heat as a factor in large - scale atmospheric motions. Journal of meteorology, vol. 14, N 6, 1957.
7. Hinkelmann K. Zur numerischen Wettervorhersage mittels Relaxationsmethode unter Einbeziehung barokliner Effecte. Tellus, vol. 5, N 3. 4. 1953.
8. Manabe S. On the contribution of heat released by condensation to the change in pressure pattern. Collected meteor. papers of the Geoph. Institute of the Tokyo Univ., vol. 7. N 1—2. 1957.
9. Sutcliffe R. C. A contribution to the problem of development. Quart. Journ. of the Roy. Met. Soc., vol. 73, p. 370. 1947.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

Изменение за счет фазовых притоков влияния адвекций тепла и вихря на различные уровнях на тенденцию геопотенциала

η	$\bar{m}_0$	$\bar{m}_1$	$\bar{n}_0$	$\bar{n}_1$	m_0	m_1	n_0	n_1	m'_0	m'_1	n'_0	n'_1
--------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------	-------	-------	-------	--------	--------	--------	--------

 $\zeta = 0,5$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,15	-0,024	-0,087	0,012	0,048	-0,022	-0,078	0,011	0,043	0,002	0,009	-0,001	-0,005
0,20	-0,047	-0,141	0,022	0,081	-0,043	-0,126	0,020	0,072	0,004	0,015	-0,002	-0,009
0,30	-0,147	-0,239	0,057	0,158	-0,133	-0,212	0,051	0,141	0,014	0,027	-0,006	-0,017
0,50	-0,882	0,071	0,260	0,255	-0,803	0,080	0,236	0,223	0,079	0,009	-0,024	-0,032
0,60	1,116	0,263	0,125	0,218	1,195	0,206	0,079	0,190	0,165	-0,057	-0,046	-0,028
0,70	0,462	0,215	0,074	0,181	0,627	0,131	0,079	0,190	0,185	-0,084	0,005	0,009
0,85	0,219	0,097	0,048	0,150	0,404	0,054	0,079	0,190	0,095	-0,043	0,031	0,040
0,925	0,071	0,045	0,044	0,144	0,166	0,026	0,079	0,190	0,044	-0,019	0,035	0,046
1,0	0,031	0	0,043	0,142	0,075	0	0,077	0,189	0	0	0,034	0,047

 $\zeta = 0,7$

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,15	-0,010	-0,042	0,005	0,023	-0,011	-0,044	0,006	0,024	-0,001	-0,002	0,001	0,001
0,20	-0,019	-0,070	0,009	0,038	-0,020	-0,074	0,010	0,040	-0,001	-0,004	0,001	0,002
0,30	-0,047	-0,139	0,022	0,079	-0,050	-0,147	0,023	0,084	-0,003	0,008	0,001	0,005
0,50	-0,205	-0,248	0,074	0,181	-0,220	-0,258	0,079	0,190	-0,015	-0,010	0,008	0,009
0,60	-0,384	-0,227	0,126	0,224	-0,412	-0,220	0,135	0,235	-0,028	0,007	0,008	0,011
0,70	-0,679	-0,061	0,206	0,248	-0,624	-0,140	0,135	0,235	0,055	-0,079	-0,071	-0,013
0,85	0,750	0,050	0,118	0,244	0,805	-0,054	0,135	0,235	0,098	-0,184	0,017	-0,009
0,925	0,230	0,029	0,104	0,241	0,328	-0,022	0,135	0,235	0,048	-0,051	0,031	-0,006
1,0	0,099	0	0,100	0,240	0,147	0	0,129	0,236	0	0	0,029	-0,004

[illegible]

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.15	-0.007	0.004	0.016	-0.011	-0.043	0.006	0.023	-0.004	-0.013
0.20	-0.012	0.006	0.027	-0.017	-0.073	0.010	0.040	-0.005	-0.022
0.30	-0.029	0.014	0.058	-0.048	-0.145	0.022	0.083	-0.019	-0.040
0.50	-0.100	0.043	0.142	-0.209	-0.263	0.077	0.189	-0.109	-0.025
0.60	-0.170	0.067	0.191	-0.390	-0.238	0.129	0.236	-0.120	0.057
0.70	-0.278	0.100	0.240	-0.589	-0.171	0.129	0.236	-0.211	0.152
0.85	-0.545	0.176	0.300	-0.800	-0.101	0.129	0.236	-0.255	0.164
0.925	-0.744	0.231	0.317	-0.879	-0.074	0.129	0.236	-0.135	0.091
1.0	-1	0.298	0.324	-1	0	0.202	0.240	0	0

Изменения за счет фазовых притоков весов адвекций тепла и вихря на главных изобарических поверхностях

η	$\frac{10 \mu, \nu}{\eta}$	$\bar{\mu}_0$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\nu}_0$	$\bar{\nu}_1$	μ_0	μ_1	ν_0	ν_1	μ'_0	μ'_1	ν'_0	ν'_1
$\zeta = 0,5$													
0,30	—	—0,319	—0,240	0,062	0,131	—0,323	—0,203	0,062	0,117	—0,004	0,037	0	—0,014
0,50	—	—0,156	0,077	0,425	0,617	0,408	0,063	0,351	0,542	0,352	—0,014	—0,074	—0,075
0,70	—	0,478	0,350	0,104	0,221	0,708	0,245	0,087	0,219	0,230	—0,105	—0,017	—0,002
0,85	—	0,142	0,195	0,096	0,300	—0,332	0,108	0,158	0,380	0,190	—0,087	0,062	0,080
1,0	—	0	0	0,022	0,070	0	0	0,038	0,094	0	0	0,016	0,024
$\zeta = 0,7$													
0,30	—	—0,031	—0,093	0,014	0,053	—0,033	—0,098	0,015	0,056	—0,002	—0,005	0,001	0,003
0,50	—	—0,548	—0,662	0,200	0,483	—0,587	—0,688	0,213	0,507	—0,039	—0,026	0,013	0,024
0,70	—	—0,078	—0,071	0,240	0,289	—0,014	—0,163	0,158	0,274	0,064	—0,092	—0,082	—0,015
0,85	—	0,460	0,100	0,236	0,488	0,556	—0,108	0,270	0,470	0,196	—0,208	0,034	—0,018
1,0	—	0	0	0,050	0,120	0	0	0,065	0,118	0	0	0,015	—0,002
$\zeta = 0,85$													
0,30	—	—0,021	—0,075	0,011	0,041	—0,033	—0,098	0,015	0,056	—0,012	—0,023	0,004	0,015
0,50	—	—0,312	—0,648	0,128	0,400	—0,387	—0,688	0,213	0,507	—0,275	—0,040	0,085	0,107
0,70	—	—0,524	—0,349	0,145	0,289	—0,369	—0,159	0,158	0,274	—0,345	0,190	0,013	—0,015
0,85	—	—0,262	—0,290	0,365	0,572	—0,389	—0,112	0,270	0,470	—0,327	0,178	—0,095	—0,102
1,0	—	0,139	0,012	0,093	0,153	0,148	0,003	0,067	0,118	0,011	—0,009	—0,026	—0,035
$\zeta = 1,0$													
0,30	—	—0,019	—0,070	0,009	0,039	—0,032	—0,097	0,015	0,055	—0,013	—0,027	0,006	0,016
0,50	—	—0,267	—0,635	0,115	0,379	—0,358	—0,702	0,206	0,505	—0,291	—0,067	0,091	0,126
0,70	—	—0,325	—0,378	0,117	0,280	—0,689	—0,200	0,151	0,276	—0,364	0,178	0,034	—0,004
0,85	—	—1,090	—0,530	0,354	0,598	—1,600	—0,202	0,258	0,472	—0,510	0,328	—0,096	—0,126
1,0	—	—0,500	0	0,149	0,162	—0,500	0	0,101	0,120	0	0	—0,048	—0,042

ПРИЛОЖЕНИЕ III

Изменение за счет наличия стратосферы влияния адвекций тепла и вихря на различные уровни на тенденцию геопотенциала

η	$\bar{m}_0$	$\bar{m}_1$	$\bar{n}_1$	$\bar{n}_0$	m_0	m_1	n_0	n_1	m'_0	m'_1	n'_0	n'_1
$\zeta = 0,3$												
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,10	-0,049	-0,165	0,024	0,092	-0,016	-0,063	0,011	0,046	0,033	0,102	-0,013	-0,046
0,15	-0,138	-0,306	0,058	0,186	-0,065	-0,182	0,040	0,141	0,073	0,124	-0,018	-0,045
0,225	-0,500	-0,372	0,169	0,334	-0,411	-0,308	0,191	0,369	0,089	0,064	0,032	0,035
0,3	-1,456	-0,185	0,425	0,387	-1,430	0,231	0,432	0,406	0,026	0,046	0,007	0,019
0,5	-1,876	0,350	0,057	0,158	-1,902	0,364	0,058	0,163	0,004	0,014	0,001	0,005
0,6	0,091	0,220	0,032	0,106	0,093	0,227	0,033	0,109	0,002	0,007	0,001	0,003
0,7	0,048	0,133	0,022	0,079	0,049	0,137	0,022	0,082	0,001	0,004	0,001	0,003
0,85	0,017	0,052	0,016	0,062	0,017	0,054	0,016	0,064	0	0,002	0	0,002
0,925	0,008	0,024	0,015	0,059	0,008	0,025	0,015	0,060	0	0,001	0	0,002
1	0	0	0,014	0,058	0	0	0,015	0,069	0	0	0	0,002
$\zeta = 0,5$												
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,10	-0,010	-0,042	0,005	0,023	-0,003	-0,015	0,003	0,011	0,007	0,027	-0,002	-0,012
0,15	-0,024	-0,087	0,012	0,048	-0,013	-0,049	0,009	0,036	0,011	0,038	-0,003	-0,012
0,225	-0,064	-0,169	0,028	0,099	-0,052	-0,140	0,032	0,110	0,012	0,029	0,004	0,011
0,3	-0,147	-0,239	0,057	0,158	-0,143	-0,225	0,058	0,163	0,004	0,014	0,001	0,005
0,5	-0,882	0,071	0,260	0,255	-0,880	0,072	0,261	0,257	0,002	0,001	0,001	0,002
0,6	1,116	0,263	0,125	0,218	1,118	0,264	0,126	0,219	0,002	0,001	0,001	0,001
0,7	0,219	0,215	0,074	0,181	0,464	0,216	0,074	0,181	0,001	0,001	0	0
0,85	0,071	0,097	0,048	0,150	0,220	0,098	0,048	0,159	0	0,001	0	0
0,925	0,031	0,045	0,044	0,144	0,071	0,045	0,044	0,144	0	0	0	0
1	0	0	0,043	0,142	0	0	0,043	0,142	0	0	0	0

ПРИЛОЖЕНИЕ IV
Изменение за счет наличия стратосферы весов адвекций тепла и вихря на главных изобарических поверхностях

$\frac{10 \mu, \nu}{\eta}$	$\bar{\mu}_0$	$\bar{\mu}_1$	$\bar{\nu}_0$	$\bar{\nu}_1$	$\bar{\mu}_0$	$\bar{\mu}_1$	ν_0	ν_1	μ'_0	μ'_1	ν'_0	ν'_1
$\zeta = 0,3$												
0,20	-0,335	-0,390	0,121	0,288	-0,231	-0,330	0,119	0,305	0,104	0,060	-0,002	0,017
0,30	0,524	0,215	0,495	0,452	0,554	0,269	0,503	0,474	0,030	0,054	0,008	0,022
0,50	0,516	0,934	0,155	0,422	0,527	0,971	0,158	0,435	0,011	0,037	0,003	0,013
0,70	0,050	0,156	0,026	0,092	0,057	0,161	0,027	0,094	0,001	0,005	0,001	0,002
0,85	0,034	0,104	0,032	0,124	0,035	0,108	0,033	0,128	0,001	0,004	0,001	0,004
1	0	0	0,007	0,029	0	0	0,007	0,031	0	0	0	0,002
$\zeta = 0,5$												
0,20	-0,047	-0,141	0,022	0,081	-0,035	-0,110	0,022	0,084	0,012	0,031	0	0,003
0,30	-0,393	-0,360	0,090	0,210	-0,389	-0,344	0,091	0,215	0,004	0,016	0,001	0,005
0,50	0,156	0,077	0,425	0,617	0,163	0,089	0,428	0,623	0,007	0,012	0,003	0,006
0,70	0,478	0,350	0,104	0,221	0,479	0,350	-0,104	0,221	0,001	0	0	0
0,85	0,142	0,194	0,096	0,300	0,142	0,194	0,096	0,300	0	0	0	0
1	0	0	0,022	0,070	0	0	0,022	0,070	0	0	0	0

ПРИБЛИЖЕННАЯ ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ТЕПЛА КОНДЕНСАЦИИ НА ИЗМЕНЕНИЕ НАЗЕМНОГО ДАВЛЕНИЯ

Основным отличием прогноза на сутки и более длительные сроки является учет притока тепла. Для разработки гидродинамических схем прогноза на сравнительно большой срок в первую очередь следует учитывать притоки тепла за счет конденсации водяного пара и турбулентной теплопроводности.

Влияние радиационного и турбулентного притоков тепла в пограничном слое на изменения поля геопотенциала было рассмотрено А. С. Дубовым в 1953 г.

Результаты исследования показали, что учет притока тепла дает заметное улучшение прогноза, однако из-за громоздкости расчетов он не применялся в оперативных прогнозах.

В настоящей статье сделана попытка учесть влияние притока тепла за счет конденсации водяного пара на изменения наземного поля давления.

В 1952—1957 гг. в Отделе динамической метеорологии Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова проф. М. И. Юдиным [2] был разработан графоаналитический метод прогноза поля давления.

Рассмотрим расчетную формулу первого приближения для изменения геопотенциала на уровне ζ , полученную Юдиным [2],

$$\begin{aligned} \varphi_0(\zeta) = & \sum_{j=1}^2 \left\{ \frac{\lambda_j + \frac{1}{2}}{2\lambda_j} \zeta^{\lambda_j - \frac{1}{2}} \int_{\zeta}^1 F_j \left(RA_{\tau} - \frac{R}{c_p} \frac{dQ}{dt} + \frac{d^2 l}{\lambda_j + \frac{1}{2}} A_{\Sigma} \right) \eta^{-\lambda_j - \frac{1}{2}} d\eta - \right. \\ & - \frac{\lambda_j - \frac{1}{2}}{2\lambda_j} \zeta^{-\lambda_j - \frac{1}{2}} \int_0^{\zeta} F_j \left(RA_{\tau} - \frac{R}{c_p} \frac{dQ}{dt} + \frac{d^2 l}{\lambda_j - \frac{1}{2}} A_{\Sigma} \right) \eta^{\lambda_j - \frac{1}{2}} d\eta - \\ & - \frac{\lambda_j + \frac{1}{2}}{2\lambda_j} \zeta^{\lambda_j - \frac{1}{2}} \int_0^1 F_j \left(RA_{\tau} - \frac{R}{c_p} \frac{dQ}{dt} + \frac{d^2 l}{\lambda_j - \frac{1}{2}} A_{\Sigma} \right) \eta^{\lambda_j - \frac{1}{2}} d\eta + \\ & \left. + \frac{d^2 l^2 g \zeta^{\lambda_j - \frac{1}{2}}}{\left(\lambda_j - \frac{1}{2} \right) RT} F_j(\omega_{\tau}) \right\}, \quad (1) \end{aligned}$$

где $\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ (Φ — геопотенциал), $\zeta = \frac{P}{P_0}$ ($P_0 = 1000$ мб — стандартное давле-

ние атмосферы), λ_j — корни характеристического уравнения, $\frac{dQ}{dt}$ — приток тепла, R — газовая постоянная, c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении, A_z — имеет смысл геострофической адвекции абсолютного вихря, $A_z = \frac{1}{l^2} \left\{ \Phi, \Delta \Phi + \frac{l^2}{2} \right\}$ (l — параметр Кориолиса), A_r — геострофическая термическая адвекция: $A_r = \frac{1}{lR} \left\{ \Phi \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\}$, w_r — вертикальная скорость, обусловленная турбулентным трением, $d^2 = \frac{(\gamma_0 - \gamma) R^2 T}{g l^2}$, T — температура,

$$\begin{aligned} F_1(A) &= \left(0,50 - \frac{1,5}{\sqrt{33}} \right) A_0 + \frac{6}{\sqrt{33}} A_1 \\ F_2(A) &= \left(0,50 + \frac{1,5}{\sqrt{33}} \right) A_0 - \frac{6}{\sqrt{33}} A_1 \end{aligned} \quad (2)$$

(A — любая функция, заданная в узловых пунктах прогностической сетки). Индексом 0 в формуле (2) обозначены значения в точке, индексом 1 — средние значения по окружности радиусом 440 км.

Представим изменения давления в данной точке состоящими из двух частей.

Первая часть обусловлена влиянием адвекции вихря скорости и температуры, вторая — притоком тепла за счет конденсации водяного пара

$$\delta_P = \delta_{P \text{ адiab}} + \delta_{P \text{ неад}}.$$

Способ вычисления $\delta_{P \text{ адiab}}$ подробно рассмотрен в [2]. Приток тепла за счет конденсации водяного пара равен

$$E_k = LQ,$$

где L — теплота парообразования, Q — количество сконденсированного пара в единицу времени.

Запишем формулу (1) для уровня земли

$$\begin{aligned} \zeta_0(1) = - \sum_{j=1}^2 \left\{ \int_0^1 F_j \left(RA_r - \frac{R}{c_p} \frac{dQ}{dt} + \frac{d^2 l}{\lambda_j - \frac{1}{2}} A_z \right) \eta^{\lambda_j - \frac{1}{2}} d\eta + \right. \\ \left. + \frac{d^2 l^2 g}{\left(\lambda_j - \frac{1}{2} \right) RT} F_j(w_r) \right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя (2) для $\delta_{P \text{ неад}}$, будем иметь выражение

$$\delta_{P \text{ неад}} = \int_0^1 \left[F_1 \left(\frac{R}{c_p} \frac{dQ}{dt} \right) \eta^{\lambda_1 - \frac{1}{2}} + F_2 \left(\frac{R}{c_p} \frac{dQ}{dt} \right) \eta^{\lambda_2 - \frac{1}{2}} \right] d\eta, \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} F_1 \left(\frac{R}{c_p} \frac{dQ}{dt} \right) &= 0,24 \left(\frac{R}{c_p} \frac{dQ}{dt} \right)_0 + 1,05 \left(\frac{R}{c_p} \frac{dQ}{dt} \right)_1, \\ F_2 \left(\frac{R}{c_p} \frac{dQ}{dt} \right) &= 0,76 \left(\frac{R}{c_p} \frac{dQ}{dt} \right)_0 - 1,05 \left(\frac{R}{c_p} \frac{dQ}{dt} \right)_1. \end{aligned}$$

При определении интегралов в формулах (3), (4) мы воспользовались вычисленными в [2] значениями коэффициентов при $(RA_r)_0$, $(RA_r)_1$, $(d^2 l A_z)_0$, $(d^2 l A_z)_1$, обозначенных соответственно через m_0 , m_1 , n_0 , n_1 . Так как нам неизвестно распределение мощности стоков водяного пара с высотой, то

примем, что конденсация в основном происходит в некоторой плоскости. Будем считать, что конденсация происходит на уровне поверхности 850 мб.

В качестве исходного материала мы воспользовались синоптическими картами, с которых снимались данные по осадкам за 12 часов как в точке, так и средние по кругу радиусом 440 км.

Далее по формуле (4) вычислялась поправка к изменению давления за счет конденсации водяного пара.

На рис. 1 представлены результаты расчетов. По оси абсцисс отложены средние осадки за 12 часов по кругу радиусом 440 км, по оси ординат — отношение рассчитанной поправки за счет конденсации водяного пара к фактическому изменению давления за 12 часов. В среднем поправка за счет конденсации водяного пара составляет 30%. В отдельных случаях величина поправки достигает 40%.

Такие большие поправки имеют место в случае интенсивных дождей (25—30 мм/12 часов), когда за счет конденсации водяного пара выделяется значительное количество тепла.

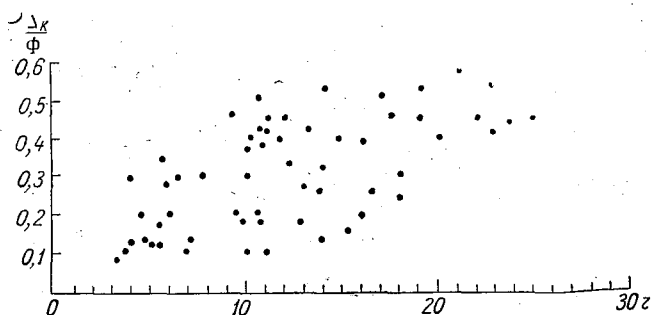


Рис. 1.

Коэффициент корреляции между величинами средних осадков по кругу радиусом 440 км и отношением рассчитанной поправки за счет конденсации водяного пара к фактическому изменению давления равен 0,68.

Поправку на теплоту конденсации мы попытались также ввести в прогнозы наземного поля давления, которые регулярно давались расчетной группой Северо-Западного УГМС.

В табл. 1 приведены результаты сравнения прогноза с введением поправки и без ее введения для сентября 1954 г. Здесь же приводится отношение поправки за счет конденсации к прогнозируемому изменению давления. Средняя величина поправки за счет конденсации составляет 25% прогнозируемой величины.

Анализ табл. 1 показывает, что учет притока тепла за счет конденсации водяного пара дает, как правило, улучшение прогноза. Из 29 рассмотренных нами случаев только в 6 имело место ухудшение результата.

Как следует из формулы (4), для вычисления поправки за счет конденсации водяного пара необходимо знать количество выпавших осадков. Известно, что точность измерения осадков пока еще довольно низкая. Поэтому мы попытались найти корреляционные связи между осадками и их образующими факторами. Одной из причин, обуславливающих конденсацию водяного пара в атмосфере, является наличие в ней вертикальных токов.

Нами была сделана попытка найти корреляционные связи между вертикальной скоростью и осадками. С этой целью для тех же точек прогностической сетки были рассчитаны средние вертикальные скорости по окружности радиусом 440 км.

При вычислении вертикальных скоростей мы предполагали, что в пограничном слое можно принять

$$W \sim k \Delta P,$$

где W — вертикальная скорость, ΔP — оператор Лапласа от давления, k — коэффициент турбулентности.

Результаты расчета представлены на рис. 2, где по оси абсцисс отложены

величины осадков, по оси ординат — рассчитанные вертикальные скорости. Связь получилась довольно отчетливая, коэффициент корреляции равен 0,63.

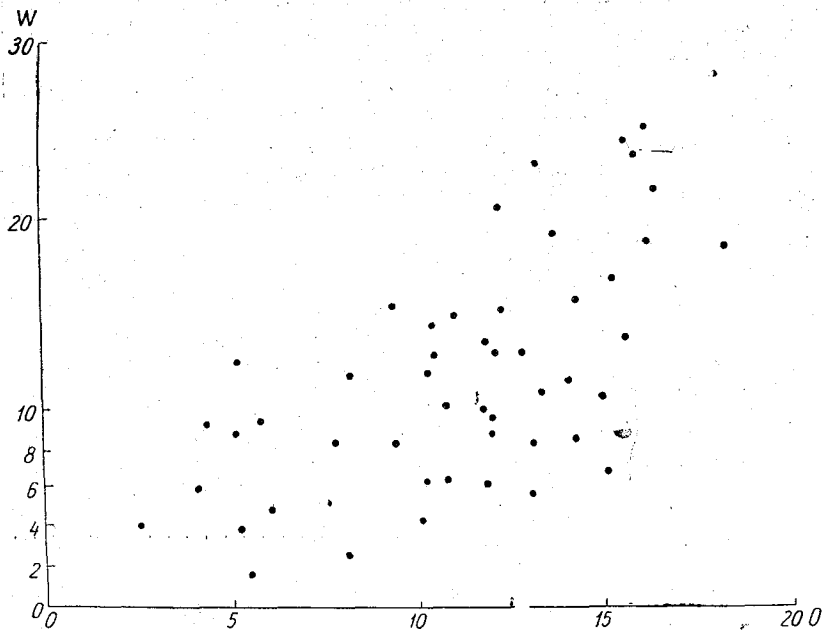


Рис. 2.

В работах О. А. Дроздова [1] показано, что относительная влажность является также одним из существенных параметров, связанных с процес-

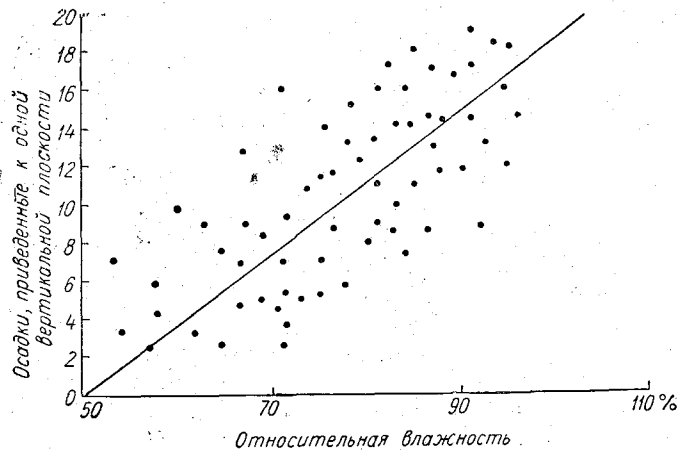


Рис. 3.

сами конденсации. Сравнение относительной влажности и количества осадков было им произведено отдельно для высот 1,5 и 3,0 км по 7 станциям Европейской территории СССР. По полученным графикам была вычислена вероятность выпадения осадков при различных градациях относительной влажности. Между вероятностью выпадения осадков и относительной влажностью на высотах 1,5 и 3,0 км была установлена четкая связь, причем наилучшие результаты получились для высоты 1,5 км.

Однако в работах Дроздова совсем не учитывалось влияние вертикаль-

ной скорости. Представляет интерес исследовать зависимость между осадками, вертикальной скоростью и относительной влажностью. Нами было проведено такое сопоставление, причем рассматривалась средняя относительная влажность по кругу радиусом 440 км на уровне поверхностей 850 и 700 мб в начальный момент времени.

Связь между относительной влажностью и осадками, приведенными к одной вертикальной скорости, находили отдельно для поверхностей 850 и 700 мб. Для поверхности 850 мб получалась достаточно отчетливая связь (рис. 3). На графике по оси абсцисс отложена относительная влажность, по оси ординат — количество осадков, приведенных к одной вертикальной скорости. Менее четкими получились связи для поверхности 700 мб: коэффициент корреляции между относительной влажностью и приведенными осадками составил 0,59. Для поверхности 850 мб коэффициент корреляции равен 0,74, уравнение регрессии в этом случае будет иметь вид

$$O_w = 0,44r - 21,$$

где O_w — количество осадков за 12 часов в миллиметрах, приведенное к одной вертикальной скорости, r — относительная влажность в процентах на уровне поверхности 850 мб.

Таблица 1

Фактический	Прогноз без поправки	Прогноз с поправкой	Поправка	Прогноз с поправкой
				прогноз без поправки
—1	3,0	1,92	1 02	0,34
4	6,5	4,81	1,69	0,26
—7	—4,0	—4,81	0,81	0,20
1	—1,4	—1,93	0,53	0,37
—3	2,3	1,19	0,89	0,39
—1	—0,7	—1,35	0,65	—
1	7,1	6,14	0,94	0,13
5	9,1	7,29	0,81	0,09
—2	6,9	5,54	1,44	0,21
2	7,1	6,13	0,97	0,14
7	—1,8	—2,50	0,70	0,39
8	3,4	2,59	1,19	0,35
6	2,1	1,56	0,54	0,26
11	—1,8	—2,54	0,74	0,41
—15	—6,6	—7,87	1,27	0,19
0	1,1	0,68	0,42	0,38
—2	2,9	2,04	0,14	0,05
—1	2,1	1,35	0,75	0,36
1	1,9	1,46	0,56	0,30
2	4,1	3,24	0,86	0,21
0	3,8	2,92	0,82	0,22
2	3,2	2,50	0,70	0,22
3	6,6	4,70	1,90	0,29
5	5,1	4,22	0,88	0,17
1	3,5	2,21	0,71	0,20
0	3,8	3,03	0,77	0,20
2	3,2	2,54	0,74	0,23
1	1,9	1,21	0,69	0,36
6	7,9	6,62	1,28	0,16

Уравнение множественной корреляции между осадками, относительной влажностью на поверхности 850 мб и вертикальной скоростью можно представить в таком виде:

$$O = 0,17r + 0,38w - 4,94,$$

где O — количество осадков за 12 часов в миллиметрах, w — величина, равная Лапласиану давления в миллибарах, r — относительная влажность в процентах.

Коэффициент множественной корреляции равен 0,82. Как показывают эти корреляционные уравнения, вертикальные токи весьма существенно влияют на осадки. Полученные зависимости могут быть использованы для прогноза осадков и уточнения прогноза давления на уровне земли. Предложенный нами грубый способ учета притока тепла за счет конденсации водяного пара можно рассматривать как первое приближение.

РЕЗЮМЕ

Рассматривается вопрос о влиянии конденсационного притока тепла на изменение наземного давления и предлагается приближенный метод учета притока тепла конденсации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дроздов О. А. О связи относительной влажности с количеством и вероятностью осадков. Труды ГГО, вып. 50. 1955.
2. Юдин М. И. О прогнозе поля давления численными методами. Труды ГГО, вып. 71. 1957.

УТОЧНЕННАЯ СХЕМА УЧЕТА НЕРОВНОСТЕЙ ЗЕМНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ ПРОГНОЗА

Ряд исследований, выполненных в последнее время [4], [6], показывает, что неровности земной поверхности играют заметную роль в формировании атмосферных движений большого масштаба. Следовательно, при численных прогнозах их надо должным образом учитывать. Однако существующие способы учета неровностей крайне упрощены. В этих способах нижнее граничное условие, связанное с наличием неровностей, записывается не для поверхности гор, а для уровня моря [1], [2], [5], [8]. Поэтому, оставаясь в рамках гипотезы квазигеострофичности движения, мы можем получить уточненную схему, задавая это нижнее граничное условие на поверхности горы.

При этом возникает ряд трудностей, связанных с тем, что высота гор сильно меняется от точки к точке. При применении метода полупрямых эти трудности легко обойти, так как этот метод позволяет записать граничное условие локально для каждой точки рабочей сетки [3].

Чтобы получить более точные результаты, целесообразно использовать метод Фурье, широко применяющийся при решении задачи численного прогноза поля давления [5]. М. Е. Шве́ц предложил в этом случае нижнее граничное условие, задаваемое на уровне рельефа, записывать с помощью разложения в ряд Тэйлора вблизи уровня моря. В соответствии с этим решение следует искать также в виде степенного ряда от малого параметра. (Характерная высота горы в системе координат x, y, ζ).

Целью настоящей статьи является решение сформулированной выше задачи.

Примем следующие обозначения: p — давление; R — стандартное значение давления на уровне моря; T — температура; t — время; u, v, w — компоненты скорости; γ — вертикальный градиент температуры; γ_a — адиабатический градиент температуры; Φ — геопотенциал; l — параметр Кориолиса; R — газовая постоянная воздуха; g — ускорение силы тяжести.

В системе координат x, y, ζ (где $\zeta = \frac{p}{P}$) уравнение адиабатичности с учетом уравнения состояния и квазистатичности примет вид

$$\zeta^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} + \zeta^2 \frac{1}{l} \left\{ \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\} + a^2 l^2 \hat{w} = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } \Phi' = \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad a^2 = \frac{(\gamma_a - \gamma) R^2 T}{g l^2} \approx \text{const},$$

$$\hat{w} = -\frac{\zeta}{RT} \left(g w - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \quad (2)$$

(символ типа $\{A, B\}$ — якобиан на плоскости x, y).

Уравнение вихря скорости имеет следующий вид:

$$\Delta \Phi' + \frac{1}{l} \left\{ \Phi, \Delta \Phi + \frac{l^2}{2} \right\} = l^2 \frac{\partial \hat{w}}{\partial \zeta}, \quad (3)$$

где символ Δ есть лапласиан на плоскости x, y .

Исключив $\hat{w}$ из уравнений (1) и (3), получим

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} \right) + a^2 \Delta \Phi' = - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{1}{l} \left\{ \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\} \right) - \frac{a^2}{l} \left\{ \Phi, \Delta \Phi + \frac{l^2}{2} \right\}. \quad (4)$$

Введем безразмерные горизонтальные координаты

$$x_1 = \frac{x}{a}, \quad y_1 = \frac{y}{a}.$$

Тогда уравнение (4) переписывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} \right) + \Delta_1 \Phi' = - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\frac{\zeta^2}{l} \left\{ \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\} \right) - \frac{1}{l} \left\{ \Phi, \Delta_1 \Phi + \frac{a^2 l^2}{2} \right\}, \quad (5)$$

где $\Delta_1 = a^2 \Delta$.

При условии квазигеострофичности соотношение (2) с достаточной точностью может быть представлено в виде

$$\hat{w} = - \frac{\zeta}{RT} (g w - \Phi'). \quad (2a)$$

Два крайних условия по ζ , необходимые для решения уравнения (5), мы получим, принимая, что при $\zeta = 0$, $\hat{w} = 0$ (6) и при $\zeta = \eta$ (уравнение рельефа в системе x, y, ζ),

$$\hat{w} = \frac{\eta}{RT} (\Phi' - g w). \quad (7)$$

Условие (6) означает, что воздушные частицы не покидают землю и не поступают извне. Если предположить, что воздушное течение у земли следует профилю рельефа, то w в равенстве (7) при условии квазигеострофичности выражается следующим образом:

$$w = \frac{0,6}{l} \left\{ \Phi(\eta), H_r \right\},$$

где множитель 0,6 учитывает приземное турбулентное трение [7].

Важно отметить, что здесь нижнее граничное условие (7) задается именно непосредственно на поверхности рельефа.

Напомним, что при решении данной задачи Ш. А. Мусаелян и В. П. Садовков относили это условие к уровню моря [5].

С помощью уравнения (1) условия (6) и (7) можно переписать так, что в них будет входить одна функция Φ .

Условие (6) означает, что

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} = 0. \quad (6a)$$

Условие (7) примет вид

$$\eta \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} + \alpha \Phi' + \frac{\eta}{l} \left\{ \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\} - \alpha g w = 0 \quad (7a)$$

при $\zeta = \eta$,

где $\alpha = \frac{R(\gamma_a - \gamma)}{g} \approx 0,12$.

Уравнение (5) и его граничные условия (6a) и (7a) линейны относительно Φ' . Поэтому из них можно выделить уравнение и граничные условия, характеризующие орографический эффект, а именно уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} \right) + \Delta_1 \Phi' = 0 \quad (8)$$

с граничными условиями

$$\zeta^2 \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{при } \zeta = 0 \quad (9)$$

и

$$\eta \frac{\partial \Phi'}{\partial \zeta} + \alpha \Phi' = \chi_0 \quad \text{при } \zeta = \eta, \quad (10)$$

где $\chi_0 = \alpha g w$.

Отметим, что как в равенствах (8), (9), (10), так и в дальнейшем Φ' означает лишь изменение геопотенциала, обусловленное неровностями земной поверхности.

Представим уравнение подстилающей поверхности в виде

$$\eta = 1 - \lambda \psi, \quad (11)$$

где $\lambda = \frac{p_r}{P}$ есть малый параметр (характерная высота горы в системе координат x, y, ζ), p_r — характерное значение давления на вершинах гор, ψ — безразмерная функция горизонтальных координат.

Для удовлетворения нижнего граничного условия (10) будем искать решение уравнения (8) в виде степенного ряда по малому параметру λ , т. е.

$$\Phi' = \sum_{j=0}^{\infty} \Phi'_j \lambda^j. \quad (12)$$

Каждое Φ'_j в отдельности удовлетворяет уравнению (8), т. е.

$$\Delta_1 \Phi'_j + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi'_j}{\partial \zeta} \right) = 0. \quad (8a)$$

Разлагая Φ'_j и ее производную, взятые в точке $\zeta = \eta$, в ряд Тейлора вблизи точки $\zeta = 1$, получим нижнее граничное условие в виде

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\psi^k}{k!} \lambda^{j+k} \left[(1 - \lambda \psi) \frac{\partial^{k+1} \Phi'_j}{\partial \zeta^{k+1}} + \alpha \frac{\partial^k \Phi'_j}{\partial \zeta^k} \right] = \chi_0 \quad \text{при } \zeta = 1. \quad (10a)$$

Собирая в обеих частях члены с одинаковой степенью λ , получаем

$$\frac{\partial \Phi'_0}{\partial \zeta} + \alpha \Phi'_0 = \chi_0, \quad (10б)$$

$$\frac{\partial \Phi'_j}{\partial \zeta} + \alpha \Phi'_j = \psi \frac{\partial \Phi'_{j-1}}{\partial \zeta} + \sum_{k=1}^j (-1)^{k+1} \frac{\psi^k}{k!} \left(\frac{\partial^{k+1} \Phi'_{j-k}}{\partial \zeta^{k+1}} + \alpha \frac{\partial^k \Phi'_{j-k}}{\partial \zeta^k} - \psi \frac{\partial^{k+1} \Phi'_{j-k-1}}{\partial \zeta^{k+1}} \right) = \chi_j \quad \text{при } \zeta = 1. \quad (10в)$$

Для решения уравнения (8a) с граничными условиями (9) и (10a) используем метод Фурье. После несложных преобразований представим это решение в виде

$$\Phi'_j(x_1, y_1, \zeta) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\zeta}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_j(x'_1, y'_1) X(\xi, r_1) dx'_1 dy'_1, \quad (13)$$

где $\xi = \ln \frac{1}{\zeta}$, $r_1^2 = (x'_1 - x_1)^2 + (y'_1 - y_1)^2$,

$$X(\xi, r_1) = \sigma(\xi, r_1) + \left(\frac{1}{2} - \alpha \right) e^{-\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \xi} \int_{\xi}^{\infty} e^{\left(\frac{1}{2} - \alpha \right) \xi'} \sigma(\xi', r_1) d\xi',$$

$$\sigma(\xi, r_1) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}}{\sqrt{\xi^2 + r_1^2}}.$$

Отметим, что нулевое приближение Φ'_0 в точности совпадает с результатом, полученным Мусаеляном и Садоковым.

При такой постановке задачи можно получить любое число членов разложения, т. е. теоретически можно удовлетворить любой заранее заданной степени точности, которой не может удовлетворить одно только нулевое приближение.

Из формулы (10в) следует, что для получения первого приближения $\lambda\Phi'_1$ надо дважды продифференцировать нулевое приближение Φ'_0 . Но оказалось, что в формуле (13) при $j=0$ нельзя дважды выполнять дифференцирование под знаком интеграла.

Для избежания этой трудности мы можем получить первое приближение следующими двумя способами.

Первый способ. По нулевому приближению Φ'_0 вычислим прогностическое значение изменения геопотенциала во всех точках и тем самым получим численное значение $\Delta_1\Phi'_0$ в конечных разностях. Потом по уравнению (8а) при $j=0$ найдем производную второго порядка по ζ .

Далее χ_1 найдется по формуле (10в), а первое приближение найдется из формулы (13) при $j=1$.

Второй способ. В правой части формулы (13) при $j=0$ разобьем область интегрирования на несколько участков. Для каждого участка вынесем среднее значение χ_0 . Таким образом, в выражении для Φ'_0 мы сначала выполним численное интегрирование по горизонтальной плоскости, а потом будем дважды дифференцировать по ζ . Первое приближение найдется тогда с помощью формулы (10в) при $j=1$ и соотношения (13).

Следующие приближения получим аналогичным способом.

Расчеты показывают, что в случае $\lambda > 0,1$ нулевое приближение не обеспечивает должную точность.

Интересно отметить, что в первом приближении вклад $\bar{\chi}_0$ (значение χ_0 в окружающих точках) обратен вкладу χ''_0 (значение χ_0 в данной прогнозируемой точке). Поэтому с учетом первого приближения можно сказать следующее. При переваливании воздушного течения через горный хребет восходящее движение на наветренной стороне не так просто связано с ростом давления на подветренной стороне гор, как это следует из нулевого приближения, и даже может обусловить его падение. Аналогичная картина имеет место и для нисходящих движений на подветренной стороне по отношению к росту давления на наветренной стороне горных хребтов.

Выше мы рассмотрели влияние рельефа на изменения давления при использовании уточненного граничного условия.

Изложим вкратце способ предвычисления вертикальной скорости.

Вместо настоящей вертикальной скорости w будем искать величину τ , определяемую соотношением

$$\tau = \frac{a^2 l^2}{R} \frac{\hat{w}}{\zeta}. \quad (14)$$

Исключив Φ' из уравнений (1), (3), можно получить уравнение для τ . На основании линейности можно выделить однородное уравнение

$$\Delta_1 \tau + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} \right) = 0, \quad (15)$$

которое при неоднородных граничных условиях, т. е.

$$\tau \text{ ограничено при } \zeta = 0, \quad (16)$$

$$\tau|_{\zeta=\eta} = \frac{\alpha}{R} \Phi'|_{\zeta=\eta} - \frac{\chi_0}{R}, \quad (17)$$

характеризует влияние орографии на „вертикальную скорость“.

Решение уравнения (15) с граничными условиями (16) и (17) также может быть получено в виде степенного ряда

$$\tau = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j [\tau_j^{(1)} + \tau_j^{(2)}], \quad (18)$$

$$\tau_j^{(1)} = \frac{\alpha}{2\pi R \sqrt{\zeta}} \iint_{-\infty}^{\infty} \chi_j X(\xi, r_1) dx'_1 dy'_1, \quad (19)$$

$$\tau_j^{(2)} = \frac{1}{2\pi R \sqrt{\zeta}} \iint_{-\infty}^{\infty} \tilde{\chi}_j \frac{\partial \sigma}{\partial \xi} dx'_1 dy'_1, \quad (20)$$

$$\tilde{\chi}_j = R \sum_{k=1}^j (-1)^k \frac{\psi^k}{k!} \frac{\partial^k \tau_{j-k}^{(2)}}{\partial \zeta^k} \Big|_{\zeta=1},$$

$$\tilde{\chi}_0 = \chi_0.$$

Первая часть полученного решения $\tau_j^{(1)}$ имеет одинаковую структуру с выражением, полученным для барической тенденции Φ_j' . Поэтому к первой части полностью применимо все что было сказано относительно барической тенденции и повторять это нет надобности. Что касается второй части полученного решения $\tau_j^{(2)}$, то здесь также нельзя правую часть формулы (20) дифференцировать по ζ под знаком несобственных интегралов.

Чтобы получить последующие приближения, приходится опять использовать два вышеизложенных способа, а именно: либо сначала в правой части формулы (20) выполнить численное интегрирование, либо привлечь основное уравнение (15).

РЕЗЮМЕ

В отличие от других работ в статье при решении задачи численного прогноза с учетом влияния гор нижнее граничное условие задается на уровне рельефа, а не отнесено к уровню моря. Нижнее граничное условие, задаваемое на уровне рельефа, записано с помощью разложения в ряд Тэйлора. В соответствии с этим решение получено в виде ряда по степеням малого параметра. Задача решена методом Фурье для барической тенденции и вертикальной скорости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоусов С. Л. и Быков В. В. Об учете влияния гор при прогнозе барического поля. Изв. АН СССР № 9, сер. геофиз. 1957.
2. Дубов А. С. О влиянии горных хребтов на перемещение циклонов. Труды ГГО, вып. 76. 1958.
3. Ду Син-юань. Численный прогноз барического поля с учетом влияния высокогорных плато. Настоящий сборник.
4. Е Ду-Чжэн и Гу Чжэн-чао. Влияние Тибетского нагорья на атмосферную циркуляцию и на погоды Китая. Изв. АН СССР, сер. географ., № 2. 1956.
5. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. 1957.
6. Петросянц М. А. О масштабе орографических влияний на синоптические процессы Средней Азии. Методические указания по службе прогнозов погоды, № 27. Ташкент. 1951.
7. Решетникова К. А. Определение вертикальных токов из уравнений динамики турбулентной атмосферы и анализ их среднемесячных значений. Труды ГГО, вып. 71. 1957.
8. Estoque M. A. A graphically integrable prediction model incorporating orographic influence. Journal of Meteorology vol. 14, № 4, 1957.

РАСЧЕТНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА КАРТ

§ 1. Введение

За последние годы наметилось интенсивное развитие исследований по новому кругу вопросов динамической метеорологии — по расчетным методам анализа карт погоды. Речь идет о методах, на основе которых удастся с помощью быстродействующей вычислительной машины выполнить анализ данных наблюдений над полями основных метеорологических элементов. Задача настоящей статьи состоит в том, чтобы описать современное состояние и перспективы развития проблемы расчетных методов анализа.

Хотя первые работы по данной проблеме [14] появились несколько ранее, чем стали применяться количественные прогнозы полей давления с помощью электронных вычислительных машин, несомненно, что интенсивное развитие расчетных методов анализа карт было стимулировано прежде всего работами по расчетным методам прогноза. Дело в том, что затрата времени на вычисление прогноза с помощью электронной вычислительной машины значительно меньше, чем на приготовление исходных данных и интерпретацию результатов прогноза. Так, по данным сотрудников Стокгольмского университета [16], из общего количества времени (6 часов 30 минут), необходимого для получения баротропного прогноза, лишь 40 минут составляет время работы машины, а остальное время (5 часов 50 минут) затрачивается на операции, выполняемые вручную: нанеску исходных данных на карту, проведение изолиний, снятие с карты значений в квадратной сетке точек, перфорирование этих значений для ввода в машину, нанесение результатов вычисления машины на карту, проведение изолиний. Большой объем этого вспомогательного времени в значительной мере обесценивал расчетные методы прогноза в отношении возможностей их оперативного использования. Поэтому многие исследователи стали разрабатывать пути применения электронных вычислительных машин для выполнения этих операций в значительно более краткое время, т. е. расчетные методы анализа карт.

Однако значение расчетных методов анализа карт отнюдь не исчерпывается сказанным. Известно, что большая часть времени синоптиков затрачивается на техническую работу по составлению карт. При этом с ростом запросов практики и совершенствованием методов зондирования атмосферы как количество различных составляемых карт, так и количество сроков, для которых они должны строиться, имеет естественную тенденцию к увеличению. Поэтому весьма существенно, что применение расчетных методов анализа в оперативной практике позволит высвободить значительную часть рабочего времени синоптиков для выполнения ими своих прямых функций — анализа синоптической ситуации и прогноза погоды.

Помимо этого, с помощью машин можно достаточно быстро вычислить поля таких непосредственно не измеряемых метеорологических элементов, как вихрь, дивергенция, агеострофические отклонения, функция тока и т. п. Знание полей этих элементов весьма полезно для успешного анализа и прогноза погоды. Таким образом, на основе оперативного применения расчетных методов анализа удастся не только уменьшить время, затрачиваемое на подготовку необходимой информации о состоянии атмосферы, но и существенно увеличить объем этой информации.

Подобно расчетному прогнозу результат расчетного анализа синоптической ситуации не зависит от лица, выполняющего этот анализ, т. е. является объективным. Этим обусловлен термин „объективный анализ“, применяемый в зарубежной литературе наряду с терминами „расчетные методы анализа“, „численные методы анализа“ и т. п. Объективность расчетного анализа, разумеется, является важным преимуществом его по сравнению с обычно применяемыми путями анализа синоптических ситуаций. Как показал Бест [4], результат баротропного прогноза на 3 суток кардинальным образом меняется, если использовать различные субъективные анализы одной и той же исходной ситуации. Берггрэн [2] выяснил, что результаты оценки успешности одного и того же численного прогноза могут существенно меняться в зависимости от того, с каким анализом конечной ситуации производится сравнение. Поэтому весьма важно иметь объективную методику анализа, позволяющую получить однозначные результаты по заданным значениям измеренных величин.

Однако расчетные методы анализа подобны расчетным методам прогноза и в том отношении, что результат их применения существенно зависит от разработанной методики или, иными словами, от физических предположений, положенных в основу этой методики. Поэтому разработка расчетных методов анализа карт отнюдь не является технической задачей, а представляет собой научную проблему, успешное решение которой возможно лишь при использовании достаточно полных сведений о полях основных метеорологических элементов.

Проблему расчетных методов анализа синоптической ситуации можно подразделить на несколько более узких вопросов, от успешного решения каждого из которых зависит удовлетворительное решение проблемы расчетных методов анализа в целом. Эти вопросы следующие.

1. Введение исходных данных для численного анализа.
2. Интерполяция полей метеорологических элементов.
3. Согласование полей метеорологических элементов друг с другом.
4. Сглаживание полей метеорологических элементов.
5. Контроль, браковка и исправление данных.
6. Критерии успешности расчетного анализа.
7. Построение карты изолиний с помощью вычислительной машины.

Целью данной статьи является рассмотрение этих вопросов.

§ 2. Проблема ввода исходных данных для численного анализа в машину

Данные метеорологических наблюдений передаются в виде телеграмм, принимаемых с помощью телетайпа. Для того чтобы эти данные могли быть введены в машину, реализующую расчетный метод анализа, необходимо, чтобы по этим данным были пробиты перфокарты или перфоленты. Следовательно, необходимо, чтобы до ввода данных с телеграмм в машину эти телеграммы были расшифрованы.

Вплоть до самого последнего времени как в научно-исследовательской работе, так и при попытках оперативного применения расчетных методов анализа (см., например, [9]) расшифровка данных производилась человеком, а не машиной. Этим в очень значительной мере уменьшался выигрыш во

времени, достигаемый благодаря применению машины при анализе. Действительно, расшифровка большого количества телеграмм производилась вручную, занимала весьма много времени и потому удаляла момент начала работы машины от того момента, когда получены данные.

Лишь в последнее время Бидиенту и Крессмену [5] удалось разработать программу, с помощью которой машина сама производит расшифровку и перфорирующие данные метеорологических телеграмм.

При изучении блок-схемы программы, опубликованной Бидиентом и Крессменом, бросается в глаза чрезвычайная громоздкость программы, обусловленная исключительно несовершенством существующих кодов для передачи данных метеорологических наблюдений. Не имея в виду детально рассматривать этот вопрос, укажем лишь основные недостатки применяющихся кодов (особенно с точки зрения использования вычислительных машин).

1. Большое многообразие кодов. Различные коды применяются не только в различных странах, но и различными ведомствами внутри одной и той же страны.

2. Трудность распознавания „заголовка“ сообщения, т. е. первой для данного сообщения группы цифр, содержащей индекс станции и срок наблюдения. Заголовки также бывают весьма многообразными и их очень легко спутать с данными наблюдений, особенно при машинной расшифровке телеграмм.

3. Обилие „лишних“ с точки зрения применения расчетных методов анализа сведений. Таких лишних сведений особенно много для наземных данных. К ним относятся как сведения качественного характера (например, о характере барограммы), так и сообщения о редко встречающихся явлениях (например, гололеде), расчетный анализ которых не целесообразен.

4. Отсутствие контрольных знаков. Контрольные знаки являются важным средством проверки того, что сообщение не исказилось в процессе передачи. Введение их в том или ином виде позволяет почти однозначно выявить все случаи такого искажения. Введение контрольных знаков было бы весьма полезным отнюдь не только для расчетных, но в равной мере и для обычных методов анализа.

Существующая система кодирования и передачи данных обладает и многими другими менее кардинальными недостатками, также осложняющими машинную расшифровку телеграмм.

В результате основную часть программы, описанной Бидиентом и Крессменом, составляют такие операции, которых при совершенстве кода можно было избежать. Сюда относятся распознавание заголовка сообщения, выяснение типа кода, поиск координат станции в нескольких специальных „словарях“ станций, отбрасывание дублирующих сообщений и т. п. Более того, иногда приходится исключить сообщение только потому, что не удастся обнаружить, к какому типу относится код или где расположен заголовок станции.

Изучение вопроса показывает, что применяющаяся система кодирования и передачи метеорологических данных нуждается в усовершенствовании, в особенности для целей численного анализа. Бидиент и Крессмен предлагают, сохраняя все многообразие существующих кодов, ввести специальный код для сообщений, используемых при численном анализе и прогнозе. Нам представляется более рациональным другой путь, а именно введение единого кода, удобного как для обычного, так и для численного анализа. Основания для такого предложения следующие.

Если применять затем расчетные методы анализа только при подготовке исходных данных для численного прогноза и при том только такого, который в настоящее время может выполняться в оперативном порядке, то в соответствующих телеграммах можно ограничиться минимальным

объемом данных, а именно данными только о высоте, температуре и ветре на главных изобарических поверхностях. При таком подходе к вопросу введение специального кода, предлагаемое Бидиентом и Крессменом, было бы вполне рациональным.

Однако, во-первых, следует иметь в виду, что возможности оперативного применения расчетных методов прогноза не остаются неизменными, а непрерывно расширяются. Так, например, интенсивно разрабатываются расчетные методы прогноза обложных осадков. Для их применения, естественно, нужны сведения о распределении влажности. Вообще, если принять специальный код для целей численного прогноза, то по мере развития методов численного прогноза придется сравнительно часто изменять этот код.

Во-вторых (и это, на наш взгляд, главное), расчетные методы анализа необходимо применять независимо от численного прогноза для автоматического построения карт. При этом, разумеется, расчетный анализ можно применять в значительно большем объеме. Имея это в виду, целесообразно не вводить нового кода, а усовершенствовать и унифицировать существующую систему кодирования данных.

Можно высказать следующие принципы построения унифицированного кода.

1. Место расположения тех или иных данных в телеграмме должно быть определено совершенно однозначно. Действительно, самый простой способ „распознавания“ машиной места в телеграмме, где расположены нужные данные, состоит в нахождении его по геометрическим координатам в телеграмме.

2. Рационально принять не „линейную“, а „двумерную“ структуру каждой телеграммы, т. е. не располагать сообщения вдоль одной линии (при случайных переносах на следующую строчку), как это делается в настоящее время, а установить место каждой группы данных как в столбце, так и в строчке телеграммы.

3. Расположение станции следует характеризовать не условным индексом станции, а непосредственно ее графическими координатами. При существующей системе различного рода индексов оказывается необходимым загрузить память машины несколькими „словарями“ индексов. В силу громоздкости этих словарей их приходится размещать во внешней памяти машины, обращение к которой занимает сравнительно много времени. Кроме того, для движущихся станций (например, пассажирских судов) все равно приходится пользоваться координатами. С другой стороны, если передавать координаты с разумной степенью точности (например, до десятой доли градуса), то они не занимают слишком много места и полностью освобождают нас от необходимости пользоваться словарями станций. Даже если в процессе анализа окажется необходимым использовать не обычные географические, а, например, декартовы координаты на карте, то соответствующий переход можно выполнить на основании аналитических формул, т. е. опять-таки удастся обойтись без словарей.

4. Ни в коем случае не следует допускать, чтобы при отсутствии тех или иных данных на их месте передавались бы следующие данные. Необходимо либо заполнять соответствующие разряды специальными обозначениями, свидетельствующими об отсутствии данных (например, нулями), либо при принятии фиксированных мест для каждой группы данных просто оставлять соответствующие места телеграммы пустыми. Приняв этот принцип, можно не вводить разделения кодов, допустим, на сухопутные и морские, на радиозондовые и шаропилотные и т. п.

5. Необходимо предусмотреть пути проверки правильности сообщаемых данных и отсутствия искажений их в процессе передачи. Сюда относится передача наряду с высотами главных изобарических поверхностей также

толщины главных изобарических слоев; передача изменений элемента от одного срока наблюдения к другому. Кроме того, целесообразно ввести упомянутые выше контрольные знаки, как например, передавать в конце каждой строки цифру, являющуюся последней цифрой суммы всех цифр данной строки.

Сформулированные принципы не являются бесспорными. Не подлежит сомнению лишь тот факт, что существующая система кодирования и передачи данных чрезвычайно затрудняет анализ полей метеорологических элементов с помощью вычислительных машин и с этой точки зрения нуждается в переработке. В настоящее время представляется преждевременным рекомендовать конкретный вид наиболее рационального кода. Такой код должен быть выработан в результате специальных исследований.

§ 3. Интерполяция, согласование и сглаживание полей

Основным этапом расчетного анализа является интерполяция, т. е. получение значений метеорологических элементов в интересующих нас точках — обычно узлах правильной сетки точек — по известным значениям их в пунктах наблюдения. Интерполированные поля должны быть согласованными в том смысле, что между полями различных элементов должны выполняться с той точностью, какая имеет место для движений большого масштаба, соотношения динамики атмосферы, такие, как геострофические соотношения, уравнение статики и т. п. Эти поля должны быть сглаженными, т. е. они должны быть лишены возмущений весьма мелкого масштаба и в то же время должны правильно описывать особенности большого, синоптического масштаба.

Согласование полей не только необходимо, но и весьма полезно в том отношении, что, когда данных о некотором элементе недостаточно, требование согласования его с полями других элементов позволяет использовать данные о последних для получения более обстоятельных сведений о рассматриваемом элементе.

Сглаживание полей обычно осуществляется автоматически в процессе интерполяции и согласования. Однако сверх этого может быть предусмотрен специальный этап вычислительной программы, имеющий целью сглаживание построенных полей.

Начиная с упомянутых уже работ И. А. Кибеля и Г. Пановского [14], в ряде исследований интерполяция производилась посредством полиномиальной аппроксимации, т. е. приближенного представления полей целыми многочленами некоторой заданной степени (обычно второй или третьей). Как Кибель, так и Пановский проводили такую аппроксимацию для сравнительно большой территории¹, причем Кибель использовал результаты для последующего численного прогноза вручную (точнее для вычисления полей тенденций), а Пановский — для построения полей элементов, зависящих от данных и непосредственно не измеряемых (дивергенция скорости ветра, вертикальные скорости, агеострофические отклонения). Пановский ввел также согласование полей давления и ветра на основе геострофических соотношений. Именно он минимизировал сумму вида

$$\sum_{i=1}^k (z_i - \bar{z})^2 + T^2 \sum_{j=1}^m [(u_j - \bar{u})^2 + (v_j - \bar{v})^2], \quad (1)$$

где $z_i (i=1, 2, \dots, k)$ — данные наблюдений над высотой изобарической поверхности, $u_j, v_j (j=1, 2, \dots, m)$ — данные наблюдений над составляющими

¹ Пановский рекомендует также разбивать территорию на несколько участков, проводить на каждом аппроксимацию отдельно, а затем для „сопряжения“ результатов считать коэффициенты полиномов линейными функциями координат. Очевидно, что при этом дело сводится к аппроксимации для всей территории с помощью полиномов более высокой степени.

скорости ветра, z — значение высоты, вычисленное на основании аппроксимации поля z полиномом C_n степени n ,

$$z = C_n = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + \dots + a_{0n}y^n, \quad (2)$$

u и v — значения составляющих геострофического ветра, вычисленные на основании аппроксимации (2),

$$u = -\frac{g}{l} (a_{01} + a_{11}x + 2a_{02}y + \dots + na_{0n}y^{n-1}),$$

$$v = \frac{g}{l} (a_{10} + 2a_{20}x + a_{11}y + \dots + a_{1n-1}y^{n-1})$$

(g — ускорение силы тяжести, l — кориолисов параметр, T — постоянная размерности времени, зависящая от соотношения веса, придаваемого данным о высоте и о ветре). Если при аппроксимации поля высоты не учитывать данных о ветре, то $T=0$. В противоположном крайнем случае $T=\infty$. Пановский принял $T=1,86$ сек. ($\frac{1}{T^2}=0,29$ сек. $^{-2}$).

В дальнейшем, начиная с работы Джилкрита и Крессмена [7], тот же способ полиномиальной аппроксимации применялся для получения исходных данных для численного прогноза, т. е. значений высот изобарической поверхности в правильной сетке точек. При этом аппроксимация производилась заново для окрестности каждой точки сетки и результаты ее использовались лишь для этой точки, так что если поместить в нее начало координат, то единственным коэффициентом полинома (2), подлежащим определению, является a_{00} . Кроме Джилкрита и Крессмена, так же поступали сотрудники Объединенной группы численных прогнозов погоды США [15], Джонсон [11]. Бушби и Хакл [6] предложили, кроме того, вводить данные о высоте z_i и ветре (u_j, v_j) в различных пунктах с разным весом, зависящим от расстояния между пунктом и точкой сетки, так что взамен формулы (1) использовалось более общее выражение

$$\sum_{i=1}^k p_i (z_i - z)^2 + T^2 \sum_{j=1}^m q_j [(u_j - u)^2 + (v_j - v)^2].$$

Можно показать, что это предложение нерационально. Действительно, в результате минимизации выражения (1) искомое значение высоты получается в виде линейной комбинации наблюдаемых значений с весами, различными для различных пунктов. Поэтому введение дополнительных весов p_i и q_j не увеличивает степени общности результата.

Удобство использования полиномиальной аппроксимации для целей интерполяции высот в точке сетки состоит в том, что одновременно с интерполяцией выполняется и согласование полей ветра и давления. Однако этот способ не лишен существенных недостатков. Главный из них состоит в том, что выбор аппроксимирующей функции в виде алгебраического полинома и выбор степени полинома является произвольным, никак не связанным со структурой анализируемых полей. Кроме того, для однозначного определения коэффициентов полинома необходим определенный минимум информации (6 величин в случае полинома C_2 , 10 — в случае C_3 и т. д., причем измерение высоты z дает одну величину, а измерение ветра — две величины). Поэтому в районах с редкой сетью станций аппроксимация по территории заданных размеров может не проходить. В связи с этим Джилкрит и Крессмен [7] предлагают производить эту процедуру несколько раз, увеличивая от раза к разу размер окрестности точки сетки и включая в число данных значения в точках сетки, уже полученные ранее. Кроме того, эти авторы выдвинули мысль, что наряду с данными наблюдений следует использовать в качестве источника информации результаты количественного прогноза на рассматриваемый момент.

Это предложение было осуществлено Бергторссоном и Дёёсом [3], которые разработали методику расчетного анализа, кардинально отличающуюся от рассмотренной. Бергторссон и Дёёс строят поле высот изобарической поверхности в два этапа. Именно сначала, до поступления результатов наблюдений, строится предварительное поле, являющееся комбинацией прогностического поля и поля нормы, т. е. среднего в климатологическом смысле распределения высот. На основании имеющихся сведений о статистических характеристиках отклонений высот от нормы и об оправдываемости численных прогнозов Бергторссон и Дёёс нашли соотношение весов, с какими нужно вводить в предварительное поле результат прогноза и норму. Естественно, что вес прогностических данных значительно превосходит вес нормальных значений.

По мере поступления данных аэрологических наблюдений они используются для исправления предварительного поля. Это делается сразу тремя путями. Будем обозначать величины, относящиеся к предварительному полю, индексом п, а наблюдаемые значения индексом н. Величины, относящиеся к точкам сетки, обозначим индексом т, а значения в пунктах наблюдения (станциях) — индексом с. Тогда три значения z_1, z_2, z_3 высоты изобарической поверхности в точке сетки определяются формулами

$$z_1 = z_{пт} + (z_{нс} - z_{пс}), \quad (3)$$

$$z_2 = z_{нс} + \left(\frac{\partial z}{\partial h} \right)_{нс} h, \quad (4)$$

$$z_3 = z_{нс} + \left(\frac{\partial z}{\partial h} \right)_{пт} h, \quad (5)$$

где h — расстояние от данной станции до данной точки сетки. Формула (3) основана на предположении, что высота изобарической поверхности в точке сетки настолько же превосходит предварительное значение, насколько это имеет место на станции. Формулы (4) и (5) описывают линейную экстраполяцию от станции к пункту наблюдения: формула (4) — экстраполяцию с градиентом, определенным для станций по данным наблюдений над ветром (с помощью геострофического соотношения), формула (5) — экстраполяцию с градиентом в точке сетки, определенным по предварительному полю.

Значения z_1, z_2 , и z_3 вводятся с различными весами μ_1, μ_2, μ_3 . Эти веса предполагаются зависящими только от расстояния h между пунктом наблюдения и точкой сетки. Произведя соответствующее исследование, Бергторссон и Дёёс определили зависимость весов μ_1, μ_2 и μ_3 от расстояния h . Оказалось, в частности, что μ_1 становится ничтожно малым на расстоянии около 1500 км, а μ_2 и μ_3 — на расстоянии 900 км. Поэтому при определении высоты изобарической поверхности для каждой точки сетки учитывались данные о высоте в пунктах наблюдения, отстоящих от нее не более чем на 1500 км, и данные о ветре в пунктах, отстоящих от точки сетки не более чем на 900 км. Для пунктов, отстоящих от точки сетки на расстоянии, большее чем 900, но меньшее чем 1500 км, а также для пунктов, в которых данные о ветре отсутствуют, производился учет высоты изобарической поверхности только по формуле (3), причем соответствующий весовой множитель был, естественно, большим, нежели μ_1 (обозначим его μ_4).

Окончательное значение высоты изобарической поверхности в точке сетки находится как средневзвешенное из предварительного значения и величин z_1, z_2, z_3 , подсчитанных по данным во всех пунктах, расположенных в упомянутой окрестности точки сетки. Соответствующая формула имеет вид

$$z_T = \frac{\mu_{\text{норм}} z_{\text{норм}} + \mu_{\text{пр}} z_{\text{пр}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} (\mu_1 z_1 + \mu_2 z_2 + \mu_3 z_3)_i + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\rho_j} (\mu_4 z_1)_j}{\mu_{\text{норм}} + \mu_{\text{пр}} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\rho_i} (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)_i + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\rho_j} (\mu_4)_j} \quad (6)$$

В формуле (6) первые два слагаемых в числителе и знаменателе относятся к предварительному полю, а именно, к среднему климатологическому (нормальному) и к прогностическому значению соответственно; n означает число пунктов, в которых используются данные о высоте и ветре, m — число пунктов, в которых используются данные только о высоте, ρ_i и ρ_j — значения так называемой „плотности станций“, введенной на основании следующих соображений.

Если имеется, скажем, три станции, отстоящие от рассматриваемой точки сетки на одинаковом расстоянии, то, согласно сказанному до сих пор, данные наблюдений на них следовало бы вводить с одинаковыми весами независимо от того, как расположены эти станции по отношению друг к другу. Пусть, однако, из этих трех станций две расположены близко друг к другу, а третья — далеко от них. Тогда очевидно, что данные первых двух станций, будучи тесно связанными между собой, должны вводиться с меньшими весами, чем данные третьей станции. В пределе, когда первые две станции совпадут друг с другом, вес данных в них должен быть, очевидно, вдвое меньшим, чем для третьей станции. Вообще если станции расположены близко друг к другу, то вес для каждой из них должен быть меньшим, чем если станции расположены на большом расстоянии друг от друга. Это и учитывается введением „плотности станций“ ρ . Величина ρ определяется как количество станций в круге радиусом 375 км вокруг данной станции, включая в это число и последнюю.

Таковы в основных чертах существующие методы, используемые для интерполяции наблюдаемых значений в точке сетки. Оценивая перспективы развития и усовершенствования этих методов, целесообразно высказать следующие соображения.

Применение климатологических норм в том виде, как это предложено Берггорссоном и Дёссом, вряд ли целесообразно. На это имеются указания и в литературе [15]. Вместо этого следует, по нашему мнению, интерполировать отклонения значений элемента от нормы и притом так, чтобы при малом объеме информации эти отклонения оказались меньшими, чем при большем количестве данных. Интерполяция отклонений от норм может, по-видимому, производиться более успешно и более просто, чем интерполяция реальных значений. Кроме того, для целей долгосрочного прогноза нужны именно отклонения от нормы в большей мере, чем наблюдаемые значения элемента [12].

Оба метода интерполяции, описанные выше, обладают весьма существенным недостатком — они основаны на множестве сравнительно произвольных допущений. Поэтому если выполнение машиной интерполяции по той или иной методике является объективным, то сама методика ни в коей мере не может быть признана объективной. С этой точки зрения принципиальным преимуществом перед используемыми методами является способ „оптимальной“ интерполяции [1].

Веса при этом способе находятся совершенно однозначно по данным о структуре поля того самого элемента, который анализируется. При этом способе автоматически учитывается плотность станций, так что никаких поправочных множителей вводить не нужно. При этом способе автоматически учитывается также освещенность района данными наблюдений в том смысле, что в районах с редкой сетью данных отклонения от нормы получаются, вообще говоря, меньшими, а в предельном случае, если дан-

ных наблюдений нет совсем, получаются нормальные значения. Наконец, при этом способе можно заранее оценить ошибку интерполяции.

Методы Джилкрита и Крессмена [7], а также Бергторссона и Дёсса [3] предусматривают проведение одновременно с интерполяцией также согласования полей, а именно, геострофического согласования ветра и высот изобарической поверхности. Целью этого согласования является использование большего количества данных, что особенно важно для районов с редкой сетью станций. Кроме того, Дёсс и Итон [10] воспользовались еще согласованием в вертикальном направлении для получения более полных сведений над океанами. По-видимому, удобнее производить сначала интерполяцию и лишь затем согласование. При этом, как заметил М. И. Юдин, нелогично при анализе пользоваться геострофическим согласованием, а затем при прогнозе использовать более точные предположения, как, например, гипотезу о квазисоленоидальности поля ветра. Вообще согласование должно производиться в соответствии с той физической схемой, которая затем используется для прогноза.

Весьма интересным является вопрос о сглаживании. В настоящее время перед началом численного прогноза, а также периодически, после нескольких шагов по времени, производят сглаживание полей. Этим обеспечивается повышение вычислительной устойчивости метода решения прогнозных уравнений. Сглаживание проводят по более или менее случайно подобранным формулам, различным у разных авторов. Ку Чен-чао [13] показал, что введенное сглаживание в известной мере эквивалентно учету макромасштабной турбулентности. По этой причине можно считать, что сглаживание полей в процессе численного анализа и прогноза имеет определенные физические, а не только математические основания. В этой связи значительный интерес представляет работа Томпсона [17], посвященная теории оптимального сглаживания. На основе этой теории могут быть построены более объективные способы сглаживания метеорологических полей, чем те, которые применяются в настоящее время.

§ 4. Контроль, браковка и исправление данных

Среди данных значений метеорологических элементов на станциях всегда имеется некоторое количество ошибочных. Причины этих ошибок многообразны. Основными источниками ошибочных данных являются:

- 1) ошибки вследствие неисправности приборов,
- 2) ошибки считывания и первичной обработки,
- 3) ошибки кодирования и передачи данных.

Разумеется, следует стремиться к максимальному уменьшению числа ошибочных данных, однако практически неизбежно приходится считаться с тем, что некоторое, пусть минимальное, количество данных является ошибочным.

Влияние ошибочных данных на результат расчетного анализа обычно не слишком велико по двум причинам. Во-первых, если ошибочные значения изолированы, т. е. значения в окружающих точках правильны, то влияние этой ошибки в процессе интерполяции (а также согласования и сглаживания полей) в значительной мере нивелируется. Во-вторых, если наряду с наблюдаемыми значениями в процессе анализа используются также прогнозируемые или нормы (или и те и другие), то это в еще большей мере сглаживает влияние ошибок наблюдений. Так, Бергторссон и Дёсс [3] специально приписали одному из пунктов наблюдений резко ошибочные значения высоты поверхности 500 мб, превышающие истинное (наблюдавшееся в действительности) значение на 27 дкм. В результате этого вычисленные значения высоты в ближайших точках сетки измени-

лись лишь примерно на 3,5 дкм, причем влияние ошибки быстро затухало с расстоянием от пункта с ошибочными данными.

Тем не менее в отдельных случаях влияние ошибок исходных данных может существенно сказаться на результатах количественного анализа. Кроме того, даже небольшие ошибки результатов иногда могут привести к значительным погрешностям численного прогноза, особенно в тех случаях, когда влияние ошибок исходных данных приводит к физическим несообразностям в результатах анализа. Поэтому необходимо предусмотреть меры, направленные на выявление и, если возможно, на исправление ошибочных исходных данных.

С этой целью Джилкрис и Крессмен [7] предложили параллельно с численным анализом строить карту анализируемого элемента, после чего вносить выявленные при визуальном анализе карты исправления в численный анализ, пересчитывая его для тех точек сетки, на которые влияют исправления. Примерно такая же методика описана в отчете Объединенной группы численного прогноза погоды США [15]. Очевидно, что при такого рода методике выявления ошибок в значительной мере утрачиваются оба основных преимущества расчетных методов анализа: быстрота и объективность.

Существенно дальше пошли в этом отношении Бергторссон и Дёес [3]. Они ввели в программу вычислений два специальных этапа, предназначенных для выявления ошибок. Первый из этих этапов предусматривает сопоставление данных наблюдений с предварительным полем. Если расхождение превышает некоторые заранее предписанные пределы (± 10 дкм для высоты или 15 м/сек. для вектора ветра), то такие данные наблюдений считаются сомнительными и печатаются машиной, после чего синоптик решает, как поступить с этими данными. На втором из упомянутых этапов данные наблюдений сопоставляются с результатом полного анализа. Если расхождение превышает величины, уже существенно меньшие, чем на первом этапе (± 5 дкм высоты и 12,5 м/сек. для ветра), то снова такие данные в качестве сомнительных выдаются на печать.

Включение в программу анализа этапов, предназначенных для выявления сомнительных данных, представляется вполне правильным. Наряду с путями, использованными Бергторссоном и Дёесом, можно предложить и другие способы выявления сомнительных данных. В частности, можно вычислять производные различных порядков и считать, что если они (или их комбинации) превосходят определенные пределы, то некоторые из данных сомнительны. Сомнительность данных может хорошо выявляться также при согласовании полей, в частности при требовании, чтобы выполнялось уравнение статики.

Дальнейшим этапом должно быть включение в программу машины предписаний, позволяющих вынести окончательное суждение, является ли сомнительное значение правильным или ошибочным, и в последнем случае исправить ошибку или, если это невозможно, исключить ошибочное значение из рассмотрения.

Нет никаких оснований считать, что действия синоптика по исправлению или браковке ошибочных данных нельзя запрограммировать для машины. Более того, объективизация именно этой стадии работы синоптика особенно желательна, поскольку хорошо известно, что субъективность всего анализа карты синоптиком определяется в наибольшей мере как раз субъективностью при браковке и исправлении данных. Однако для того, чтобы такая программа была рациональной, необходимо предварительно исследовать на массовом материале ошибки исходных данных на синоптических картах, выявить наиболее часто встречающиеся причины ошибок, изучить их закономерности, которые и должны лечь в основу программы по исправлению и браковке данных.

§ 5. О критериях успешности расчетных методов анализа

При разработке и усовершенствовании расчетных методов анализа синоптических положений весьма важно иметь в своем распоряжении критерии, позволяющие оценить успешность выполненного количественного анализа. Установление таких критериев является далеко не простым делом. Более того, можно утверждать, что однозначного критерия, позволяющего оценить успешность численного анализа синоптической ситуации, вообще не существует.

Некоторые авторы [6], [11] судили об успешности выполненного ими количественного анализа путем сопоставления результатов этого анализа с данными обычного, качественного анализа. Такое сравнение явно недостаточно, поскольку его результат существенно зависит от индивидуальности синоптика, производившего качественный анализ. Единственно, для чего может быть использовано такое сопоставление — это для выявления таких погрешностей количественного анализа, которые очевидны и без всяких сопоставлений. Например, Бушби и Хакл [6] показали таким путем, что вес данных о ветре над плохо освещенной территорией необходимо принимать медленнее уменьшающимся с расстоянием, чем в случае хорошо освещенной территории,¹ ибо иначе области вблизи этих данных получаются заполненными мелкомасштабными возмущениями на общем фоне, соответствующем прогностической карте. Разумеется, такие фиктивные мелкомасштабные возмущения выявляются сразу на карте, воспроизводящей результаты количественного анализа, независимо от каких-либо сопоставлений.

Более объективными являются сопоставления с несколькими субъективными анализами одной и той же ситуации, также применявшиеся в ряде работ. Так, Джилкрест и Крессмен [7] для выбора наиболее удачного соотношения весов данных о высотах и о ветре сопоставляли расчетный анализ со средним из трех субъективных анализов для той же ситуации. Примерно такой же путь использован Бергторссоном и Дёёсом [3]. Они брали два независимых субъективных анализа и сопоставляли, во-первых, объективный анализ с каждым из субъективных и, во-вторых, субъективные анализы друг с другом. Оказалось, что различия между объективным и субъективным анализами несколько больше различий между двумя субъективными, но и те и другие разности лежат в пределах средних погрешностей аэрологических данных.

Берггрен [2] занимался вопросом о степени различия субъективных анализов безотносительно к критериям успешности расчетных методов анализа. Он сумел использовать 26 независимых субъективных анализов одной и той же ситуации. Применение столь большого числа субъективных анализов дает возможность получить достаточно надежный „эталон“ для суждения об успешности расчетного анализа. Действительно, средненные данные этого множества субъективных анализов являются в большей мере объективными. Точно так же заслуживающими доверия являются средние характеристики отличия субъективных анализов друг от друга, с которыми можно сопоставлять различия между количественным анализом и средним из субъективных.

Другим важным критерием успешности расчетного анализа является оправдываемость количественного прогноза, выполненного по данным такого анализа. Почти все авторы, разрабатывающие расчетные методы анализа, сравнивали результаты прогнозов по данным численных и субъективных анализов ([3], [6], [7] и др.). Анализ этого материала показывает,

¹ Это требование существенно при использовании принятых в зарубежных работах способах интерполяции. В случае применения оптимальной интерполяции [1] это требование выполняется автоматически.

что в большинстве случаев успешность прогнозов, основанных на данных объективного и субъективного анализов, примерно одинакова: расхождения в таких характеристиках оправдываемости, как коэффициент корреляции и средняя квадратическая ошибка, весьма невелики. Вместе с тем имеются отдельные случаи, когда использование объективного анализа приводит к значительно лучшему прогнозу. Джилкрест и Крессмен [7] объясняют это улучшение тем, что, производя прогноз по квазигеострофической схеме, естественно ожидать лучшей оправдываемости при использовании данных объективного анализа, также учитывающего квазигеострофичность. Однако если принять это объяснение, то непонятно, почему указанный эффект сказывается лишь в редких случаях. По-видимому, существуют некоторые типы синоптических положений, при которых обычная качественная методика анализа приводит к существенным погрешностям, не имеющим места при использовании расчетных методов анализа.

К сравнению успешности численных прогнозов, выполняемых по субъективно и объективно проанализированным данным, следует относиться с определенной осторожностью. Дело в том, что, как указывалось в § 3, расчетный анализ строится на основе не только данных наблюдений в рассматриваемый срок, но и результатов прогноза на этот срок. Это обстоятельство приводит к фиктивному улучшению оправдываемости прогнозов. Дёес [9] выполнил большую серию непрерывно следующих друг за другом численных анализов и прогнозов. При этом он обратил внимание на необычайно высокую оправдываемость прогноза над акваторией Атлантики, где аэрологических наблюдений весьма мало. Этот факт объясняется чрезвычайно просто. Там, где непосредственных наблюдений мало, анализ каждой ситуации базировался главным образом на данных прогноза на рассматриваемый срок. Хорошая оправдываемость прогноза при сравнении с таким анализом означала почти то же самое, что и хорошее согласование прогноза с самим собой.

Некоторые сведения о целесообразности той или иной методики количественного анализа можно получить, исследуя восприимчивость ее к малым изменениям входных параметров. Именно естественно потребовать, чтобы результат численного анализа мало изменялся в результате малых изменений значений анализируемого элемента на некоторых станциях, значений весовых множителей, размеров областей влияния и т. п. Этот вопрос также уже рассматривался. В § 4 упоминался опыт Бергторссона и Дёеса [3], показавших, что влияние единичной ошибки данных на результат анализа по разработанной ими методике весьма мало. Численный опыт подобного рода приводил еще Пановский [14], исследовавший влияние малых случайных ошибок во всех пунктах на результат полиномиальной аппроксимации.

Бергторссон и Дёес выполнили также следующий опыт. Они увеличили вдвое все весовые функции для данных непосредственных наблюдений, оставив неизменными веса норм и прогностических значений. При этом получились чрезвычайно малые различия в анализах — максимум на 1 дкм в отдельных точках сетки.

Все это показывает, что существующие схемы расчетного анализа достаточно устойчивы по отношению к малым изменениям параметров расчета.

Джилкрест и Крессмен [7] судили об успешности расчетного анализа также на основании согласования полей, а именно согласования по вертикали. По данным объективных анализов для трех поверхностей (1000, 700 и 400 мб), выполненных независимо друг от друга, было вычислено поле среднего в слое вертикального градиента температуры и сопоставлено с данными наблюдений. Согласование получилось очень хорошее, несмотря на то что вертикальный температурный градиент пропорционален разности второго порядка от высот изобарических поверхностей. Несомненно, однако,

что рациональнее учитывать требование согласования полей в самой методике количественного анализа, чем проверять по этому согласованию успешность анализа.

По-видимому, значительные возможности выявления степени успешности расчетного анализа кроются в применении спектрального анализа атмосферных возмущений. В настоящее время спектральный анализ к рассматриваемому кругу вопросов не применяется. Лишь недавно Болин применил этот путь при рассмотрении оправдываемости количественных прогнозов. Целесообразно применить этот путь и при исследовании успешности количественных анализов. В частности, естественно потребовать, чтобы спектр количественно проанализированного поля был „обрезан“ со стороны малых длин волн, т. е. чтобы в процессе анализа были отфильтрованы возмущения весьма малого масштаба — „метеорологические шумы“, чтобы спектр количественно проанализированного поля был примерно таким же, как по результатам наилучшего субъективного анализа, чтобы спектры диагностического и прогностического полей в среднем совпадали друг с другом. По выполнению этих и подобных им требований также можно будет судить об успешности расчетного прогноза.

Каждый из перечисленных выше критериев дает возможность вынести определенное суждение об успешности расчетного анализа, однако каждый из таких критериев сам по себе еще недостаточен. Дело в том, что положительный результат применения каждого такого критерия не обязательно будет связан с успешностью выполненного расчетного анализа, а может быть обусловлен другими причинами. Точно так же отрицательный результат какого-либо сопоставления может в принципе свидетельствовать не о неудаче расчетного анализа, а быть вызванным воздействием иных факторов. Поэтому для наиболее полной оценки успешности расчетного анализа синоптического положения необходимо применить несколько различных критериев и подходить критически к результатам этой проверки.

§ 6. Построение карты изолиний с помощью электронной вычислительной машины

Задавая соответствующую программу электронной вычислительной машине, можно произвести на ней все вычисления, необходимые для построения поля изолиний любого проанализированного или прогнозируемого элемента. Используя некоторые дополнительные приспособления или элементы устройства самой машины, можно на выходе этих приспособлений или устройств получить непосредственно карту изолиний данного элемента.

В ряде зарубежных работ достигнуты определенные успехи в этом отношении. Все известные нам исследования касаются лишь построения прогностических карт по результатам численных прогнозов. Вместе с тем, как указывалось в § 1, не меньшее значение имеет построение карт наблюдаемых значений метеорологических элементов с помощью машины, что позволит существенно увеличить объем информации, имеющейся в распоряжении синоптика, сократить интервал времени между сроком наблюдения и сроком готовности карт и, наконец, высвободит значительную часть рабочего времени синоптика. С этой точки зрения весьма существенно, что результаты численного анализа исходной ситуации и результаты численного прогноза получаются в машине в одном и том же виде, а именно, в виде значений метеорологического элемента (или элементов) в узлах некоторой правильной сетки точек. Поэтому результаты разработок по построению с помощью машины прогностических карт на основе численного прогноза применимы без всяких изменений для построения с помощью машины диагностических карт на основе численного анализа.

Последовательность действий, необходимых для построения карты изолиний, складывается из трех этапов: интерполяции, поиска точек изолиний и работы устройства, печатающего карту. Интерполяция необходима потому, что исходный материал (результат численного прогноза или анализа) представлен значениями элемента в точках правильной сетки, расположенных слишком редко, чтобы по ним можно было непосредственно строить изолинии. В существующих методах сотрудники Стокгольмского университета [16] и Дёёс и Итон [10] используют билинейную интерполяцию, т. е. линейную интерполяцию в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Билинейная интерполяция весьма проста и занимает ничтожно малое машинное время. Вместе с тем очевидны недостатки билинейной интерполяции: во-первых, уже первые производные функции, восстановленной путем билинейной интерполяции, терпят разрывы во многих точках; во-вторых, применение билинейной интерполяции искажает в наибольшей мере изолинии вблизи экстремальных значений картируемого элемента, т. е. как раз те области, которые представляют наибольший интерес.

Вместо билинейной можно предложить для использования следующий вариант квадратичной интерполяции, выполнение которого также требует весьма мало времени, но должно приводить к существенно лучшим результатам.

Будем сначала интерполировать вдоль сторон сетки, параллельных, допустим, оси x , причем будем мысленно „передвигаться“ слева направо. Между двумя крайними левыми точками стороны (скажем, точками № 1 и 2) выполним линейную интерполяцию. В следующем интервале — между точками № 2 и 3 — проведем уже квадратичную интерполяцию, задавая не только значения элемента f в точках 2 и 3, но также значение производной $\frac{df}{dx}$ в точке 2, вычисленное по результатам предыдущей интерполяции.

В интервале между точками 3 и 4 выполним квадратичную интерполяцию по известным значениям f в точках 3 и 4 и $\frac{df}{dx}$ в точке 3 и т. д., пока не дойдем до крайней правой точки стороны сетки. Такую интерполяцию произведем для каждой стороны, параллельной оси x . Можно далее выполнить такую же интерполяцию справа налево и результаты осреднить.

Далее перейдем к координате y , по которой будем производить интерполяцию уже не только вдоль сторон исходной сетки, а вдоль всех сторон значительно более густой сетки, в точке которой мы и производим интерполяцию. Интерполяцию будем производить по той же методике, как это делалось в направлении x (т. е. линейную интерполяцию в первом интервале и квадратичную во всех остальных), причем снова можно выполнить интерполяцию в двух противоположных направлениях и результаты осреднить. Наконец, можно произвести очерченный цикл вычислений еще раз, но начиная теперь с оси y , и результаты снова осреднить с полученными ранее.

Описанная методика выражается формулами весьма простого вида, лишь немногим сложнее, чем при билинейной интерполяции, и потому займет весьма мало машинного времени. Некоторые затруднения могут возникнуть с использованием памяти машины, поскольку число узлов густой сетки, в которые производится интерполяция, весьма велико. Однако можно не отсылать все проинтерполированные значения в память, а производить параллельно с интерполяцией следующий этап — поиск точек изолиний. Тогда все значения, не лежащие на изолиниях, не нужны для последующих операций и могут стираться из машинной памяти.

Дальнейшие операции, описанные в статье сотрудников Стокгольмского университета [16], состоят в следующем. Машина производит классификацию всех вычисленных значений элемента в густой сетке точек, при-

сваивая каждому классу свой цифровой индекс. Пусть, например, картируется высота поверхности 500 мб. Тогда всем значениям высоты, лежащим,

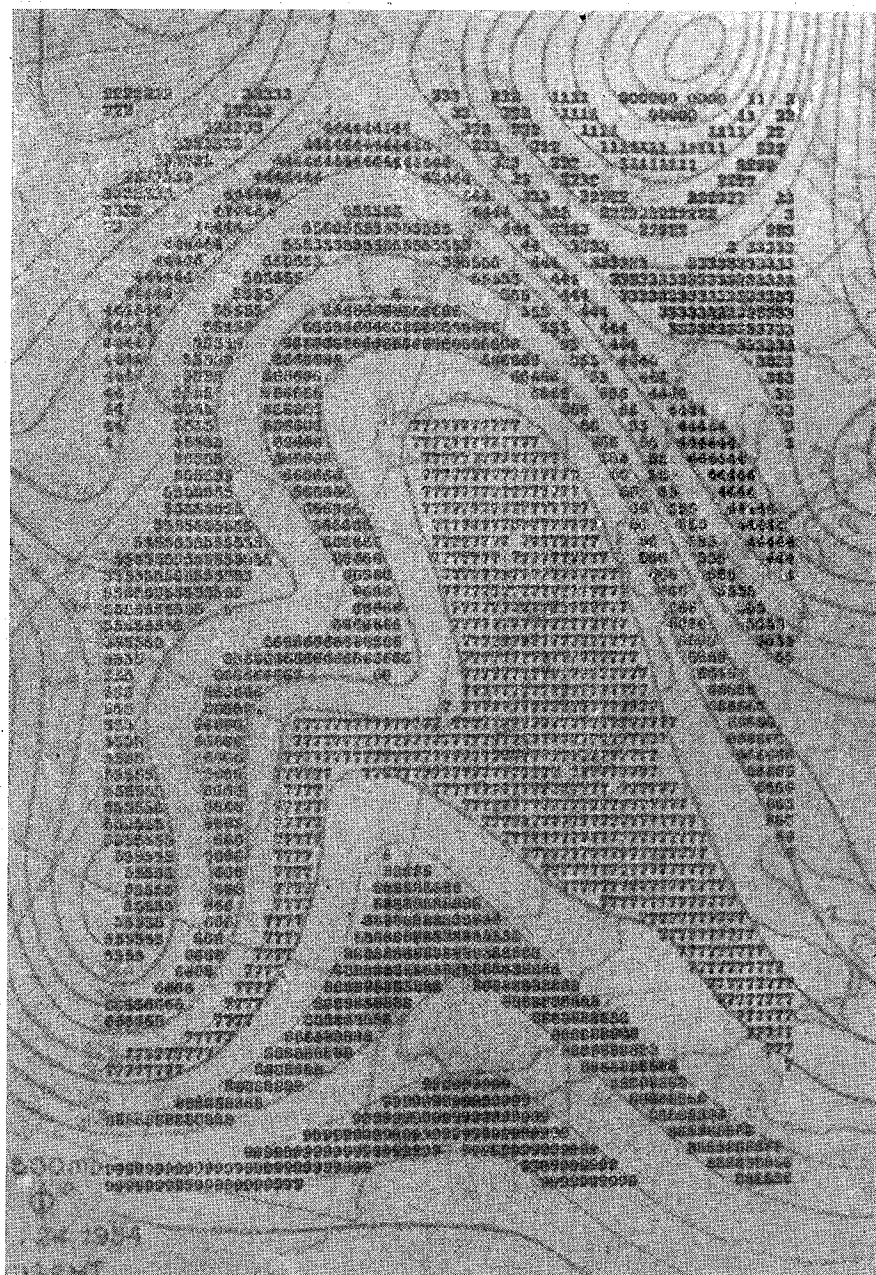


Рис. 1. Карта изогонс AT_{500} , построенная вычислительной машиной при помощи механического печатающего устройства. Из статьи сотрудников Стокгольмского университета [16].

скажем, между 492 и 496 дкм, присваивается индекс 1; значениям $496 < z < 500$ не присваивается никакого индекса. Значениям $500 < z < 504$ присваивается индекс 2, значениям $504 < z < 508$ не присваивается никакого индекса, значениям $508 < z < 512$ — индекс 3 и т. д. Наконец, с помощью

механического устройства типа пишущей машинки на специальном бланке печатаются все эти цифровые индексы в местах, соответствующих координатам точек густой сетки. В результате получается карта, состоящая из полос: полоса, заполненная цифрами 1, соответствует области между изогипсами 492 и 496 дкм, полоса, заполненная цифрами 2, — области между изогипсами 500 и 504 дкм и т. д. Полосы, заполненные цифрами, отделены друг от друга „пустыми“ полосами, также представляющими собой области между изолиниями. Что касается самих изолиний, то они получаются как границы между „черными“ (заполненными цифрами) и „пустыми“ полосами. На рис. 1 показана такая карта, приведенная в работе сотрудников Стокгольмского университета [16].

Аналогичная процедура описана сотрудниками Объединенной группы численных прогнозов погоды США [15].

Недостатки описанной методики очевидны. Во-первых, применение механического печатающего устройства существенно замедляет изготовление карты. Во-вторых, так как каждая цифра на карте не может занимать очень малую площадь, то при интерполяции приходится пользоваться не очень густой сеткой, вследствие чего поле воспроизводится лишь приблизительно. В-третьих, карта получается очень „темной“, что затрудняет какие-либо дальнейшие построения на ней. В частности, если вычислять несколько полей, то воспроизведение их на одной карте с помощью описанной методики оказывается практически невозможным.

Более совершенный способ построения карты изолиний описан в статье Дёсса и Итона [10]. Ими была использована присоединенная к шведской электронной вычислительной машине BESK катодно-лучевая трубка. Разрешающая способность трубки составляла первоначально 256×256 точек, затем была увеличена до 512×512 . После интерполяции в эти точки машина производила выбор точек изолиний на основании неравенства

$$|z - (z_0 + n\Delta z)| < \delta, \quad (7)$$

где z — значение высоты в данной точке густой сетки; z_0 — значение высоты на некоторой изогипсе, принятой в качестве стандартной; Δz — шаг между изогипсами (4 дкм); δ — некоторое малое число; n — параметр, принимающий последовательно все целочисленные значения, при которых может выполняться неравенство (7). Точки, высота z для которых удовлетворяет неравенствам (7), проецировались на экране, остальные точки не проецировались. В результате получалось изображение карты изолиний, которое затем фотографировалось на специальный бланк.

Для того чтобы изолинии на карте получились примерно одинаковой толщины, величина δ в неравенстве (7) бралась переменной, а именно пропорциональной градиенту высоты z .

На рис. 2, заимствованном из статьи Дёсса и Итона [10], представлен пример карты, построенной машиной по описанной методике при разрешающей способности трубки 256×256 точек. Поскольку методика предусматривает применение лишь электронных устройств без обращения к каким-либо механическим устройствам, то карта строится чрезвычайно быстро. Машинное время, затрачиваемое на все необходимые операции при построении карты по результатам численного прогноза (включая билинейную интерполяцию, „поиск“ точек изолиний по формуле (7) и выдачу результатов на катодно-лучевую трубку), составляет около 1 минуты.

Один из недостатков описанной методики состоит в том, что по карте не видно, какому значению высоты z соответствует каждая изолиния, ибо никаких цифровых обозначений на карту не передается. Это не должно приводить к большим затруднениям, поскольку абсолютные значения высоты не представляют большого интереса, а направление градиентов может быть почти безошибочно угадано опытным синоптиком, если только территория, представленная на карте, достаточно обширна.

Тем не менее желательно сделать так, чтобы на карте было видно, какому значению высоты соответствует каждая изогипса. Этого можно достичь различными путями. Оставаясь в пределах описанной методики, можно варьировать толщину изолиний, т. е. отношение $\delta/|\text{grad } z|$. Например, можно приписывать наибольшую толщину изогипсам, на которых n кратно 3 дкм, меньшую — изогипсам, на которых n дает при делении на 3

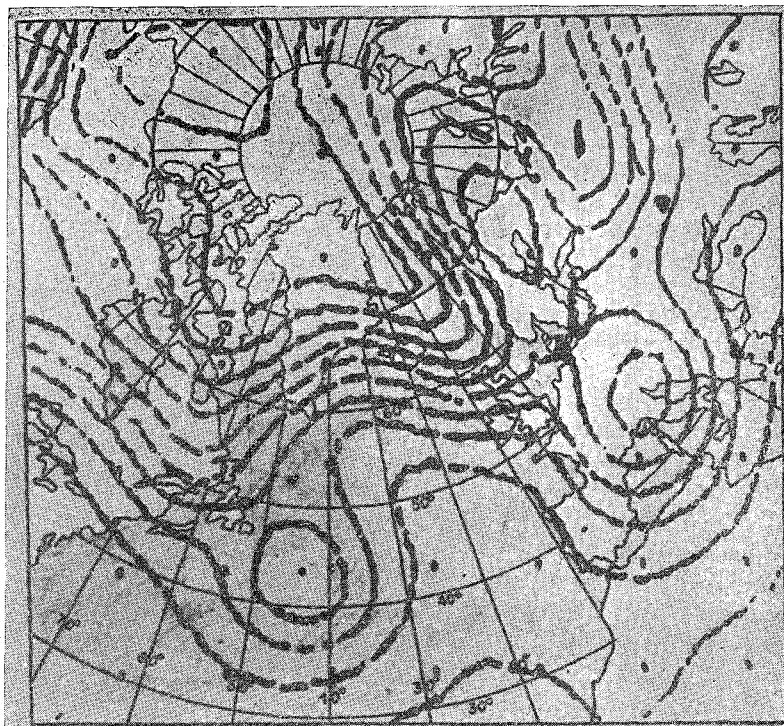


Рис. 2. Карта изогипс AT_{500} , построенная вычислительной машиной при помощи катодно-лучевой трубки. Из статьи Дёёса и Итона [10].

остаток 1 дкм, еще меньшую — тем, на которых этот остаток равен 2 дкм. Тогда направление градиента z определится в каждой точке однозначно. Практически при этом определится однозначно и величина z на каждой изолинии, ибо при анализе карты на достаточно обширной территории ошибиться в оценке этих значений на 12 дкм почти невозможно.

Другим недостатком методики, очевидным из рассмотрения рис. 2, является чрезмерная ширина изолиний. Не меняя методику, можно уменьшить ширину изолиний, лишь увеличивая разрешающую способность трубки. По-видимому, рациональнее изменить принцип поиска точек изолиний. Именно вместо сравнения значений z в точках густой сетки с некоторыми фиксированными значениями, как это предусматривается формулой (7), целесообразно ввести сравнение z в соседних точках друг с другом. Если значение z в данной точке ближе к значению на изолинии, нежели в соответствующих соседних точках, то только такая точка и должна изображаться на экране. Этим будет достигнута минимальная толщина изолиний.

Помимо описанных способов построения машиной карты, основанных на интерполяции, возможно также разработать методику, основанную на аппроксимации. Идея этой методики состоит в следующем.

Аппроксимируем поле рассматриваемого элемента, например, алгебраическим полиномом некоторой заданной степени n . Определение коэффици-

ентов полинома по исходным данным в правильной сетке точек может быть выполнено с помощью формул, выведенных автором [1], и проводится чрезвычайно быстро даже на весьма простой вычислительной машине типа „Погоды“. После нахождения коэффициентов полинома поиск точек изолиний сводится к решению уравнений степени n относительно абсциссы x при заданных значениях ординаты y или наоборот. Такая методика особенно удобна в том случае, если пользоваться изображающими устройствами, имеющими, подобно телевизионной трубке, непрерывную развертку в одном из направлений (вдоль строк).

Недостаток такого подхода к задаче состоит в том, что аппроксимация поля полиномом небольшой степени n на обширной территории может оказаться недостаточно точной, а если разбивать территорию карты на отдельные участки, то нелегко добиться „сопряжения“ изолиний при переходе с одного участка на другой. Кроме того, решение очень большого (по числу строк) количества алгебраических уравнений может существенно замедлить решение задачи.

Во всяком случае этот вопрос нуждается в дальнейшем исследовании.

В заключение коснемся вопроса о перспективах полной автоматизации работы службы погоды (см., например, [8]). Из сказанного ясно, что уже сейчас можно приступить к разработке путей полной автоматизации всех этапов работы по диагнозу и прогнозу погоды или по крайней мере основных ее элементов. Последовательность этих этапов может быть следующая.

1. Автоматические метеорологические наблюдения и передача данных. В настоящее время полностью автоматическими (исключая лишь запуск аппаратуры) являются радиозондовые наблюдения. Разработана также система автоматических наземных метеорологических станций, которые, однако, пока используются в недостаточной мере. Автоматизация наблюдений и передачи данных по основным метеорологическим элементам, по-видимому, не вызывает принципиальных трудностей, а требует лишь решения технических, организационных и экономических вопросов.

2. Автоматическая первичная обработка данных и кодирование результатов обработки для передачи по линиям связи. Для этого необходимо разработать специализированные машины (преимущественно непрерывного действия). Некоторые результаты таких разработок уже имеются.

3. Передача данных по линиям связи и прием их в центрах службы погоды. Передача данных в настоящее время выполняется вручную, однако если будет осуществляться автоматическая первичная обработка, то автоматизация передачи результатов этой обработки не должна встретить значительных затруднений. Процесс приема данных уже в настоящее время осуществляется автоматически — с помощью телетайпов.

4. Ввод данных в вычислительную машину для выполнения численного анализа. Связанные с этим этапом вопросы рассмотрены в § 2.

5. Производство анализа вычислительной машиной (§ 3). После выполнения этого этапа программа разветвляется. Диагностическая ветвь программы ведет к построению карты для данного момента. Соответствующие вопросы рассмотрены в настоящем параграфе. Прогностическая ветвь содержит сначала производство вычислительной машиной численного прогноза некоторых основных метеорологических элементов и лишь затем построение той же машиной прогностических карт. В результате всего этого на выходе соответствующего устройства машины (или, может быть, нескольких машин) получается комплект диагностических и прогностических карт.

6. Автоматическая передача построенных карт в подразделения службы погоды и заинтересованным организациям с помощью так называемой фак-

сипилирующей аппаратуры. Эта аппаратура в настоящее время уже сравнительно хорошо разработана.

Основываясь на рассмотренных в данной статье возможностях развития расчетных методов анализа синоптических положений, можно утверждать, что полная автоматизация работы службы погоды является делом сравнительно недалекого будущего.

РЕЗЮМЕ

В статье дается критический обзор исследований по расчетным методам анализа данных наблюдений. Излагаются соображения о рациональных путях развития этого направления исследований.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. Задача об оптимальной интерполяции. Настоящий сборник.
2. Berggren R. On the accuracy of 500mb analyses with special reference to numerical forecasting. *Tellus*, 9, № 3, pp. 323 — 340, 1957.
3. Bergtorsson P., Döös B. R. Numerical weather map analysis, *Tellus*, 7, № 3, pp. 329 — 340, 1955.
4. Best W. N. Differences in numerical prognoses resulting from differences in analysis. *Tellus*, 8, № 3, pp. 351 — 356, 1956.
5. Bedient H. A., Cressman G. P. An experiment in automatic data processing. *Monthly Weather Review*, 85, № 10, pp. 333 — 340, 1957.
6. Bushby F. H., Huckle V. M. Objective analysis in numerical forecasting. *Quart. Journ. Roy. Meteorol. Soc.*, 83, № 356, pp. 232 — 247, 1957.
7. Gilchrist B., Cressman G. P. An experiment of objective analysis. *Tellus*, 6, № 4, pp. 309—318, 1954.
8. Guy G. A. The role of communication lines in modern weather systems. Summary, *Bull. Amer. Meteorol. Soc.*, 1958.
9. Döös B. R. Automation of 500mb forecasts through successive numerical map analysis. *Tellus*, 8, № 1, pp. 76 — 81, 1956.
10. Döös B. R., Eaton M. A. Upper-air analysis over ocean areas. *Tellus*, 9, № 2, pp. 184 — 194, 1957.
11. Johnson D. H. Preliminary research in objective analysis. *Tellus*, 9, № 3, pp. 316—322, 1957.
12. Clapp P. F. Some considerations involved in preparing long - range forecasts by numerical methods. *Journ. of Meteorol.* 13, № 4, pp. 341—350, 1956.
13. Koo Chen - chao. Smoothing procedure in numerical analysis and forecasting realized by turbulence process. *Acta Meteorol. Sinica* 28, № 4, pp. 322 — 323, 1957.
14. Panofsky H. Objective weather map analysis. *Journ. of Meteorol.* 6, № 6, pp. 386—392, 1949.
15. Staff Members, Joint Numerical Weather Prediction Unit. One year of operational numerical weather prediction. *Bull. Amer. Meteorol. Soc.* 38, № 5, pp. 163 — 268, 1957.
16. Staff Members, Institute of Meteorology, University of Stockholm. Results of forecasting with barotropic models on an electronic computer BESK. *Tellus*, 6, № 2, pp. 139 — 149, 1954.
17. Thompson P. D. Optimum smoothing of two - dimensional fields. *Tellus*, 8, № 3, pp. 384—393, 1956.

2. ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

1. Для разработки методики объективного анализа метеорологических полей основное значение имеет задача об интерполяции поля метеорологического элемента. Эту задачу можно сформулировать следующим образом. Пусть нам известны значения некоторого скалярного метеорологического элемента f в n точках $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ на плоскости или в пространстве

$$f(\vec{r}_i) \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

Требуется найти значение $f(\vec{r}_0)$ элемента f в точке $\vec{r}_0$.

Наиболее естественный подход к решению этой задачи состоит в следующем. Предположим, что $f(\vec{r}_0)$ можно представить в виде линейной комбинации величин $f(\vec{r}_i)$

$$f(\vec{r}_0) = \sum_{i=1}^n p_i f(\vec{r}_i), \quad (1)$$

где „веса“ p_i должны быть нормированы

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (2)$$

Веса p_i определим из того условия, чтобы средний квадрат ошибки, с какой выполняется равенство (1),

$$E = \left[f(\vec{r}_0) - \sum_{i=1}^n p_i f(\vec{r}_i) \right]^2 \quad (3)$$

был бы минимальным. В формуле (3) черта сверху означает осреднение, понимаемое в вероятностном смысле. Введем автокорреляционные моменты элемента f

$$M_{ij} = \overline{f(\vec{r}_i) f(\vec{r}_j)}, \quad (4)$$

причем очевидно, что $M_{ij} = M_{ji}$. С помощью (4) выражение (3) можно переписать в виде

$$E = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j M_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n p_i M_{i0} + M_{00}. \quad (5)$$

Поскольку веса p_i подчинены равенству (2), то условия минимума E получатся приравнением нулю производных по p_i от величины

$$E + \lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right),$$

где λ — неопределенный множитель метода Лагранжа. Тогда получим систему $n + 1$ уравнений с неизвестными $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ и λ :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i M_{ij} &= M_{0j} - \frac{\lambda}{2} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Из системы (6) можно, нарушая симметрию, исключить λ , вычтя, например, первое уравнение из остальных $n - 1$. Тогда система (6) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i (M_{ij} - M_{i1}) &= M_{0j} - M_{01} \quad (j = 2, 3, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

2. В некоторых отношениях удобнее вместо автокорреляционного момента M ввести структурную функцию элемента f

$$B_{ij} = B_{ji} = \overline{[f(\vec{r}_i) - f(\vec{r}_j)]^2}. \quad (8)$$

На основании (8) и (4) имеет место соотношение

$$M_{ij} = \frac{1}{2} (M_{ii} + M_{jj} - B_{ij}). \quad (9)$$

Вводя (9) в (5) и учитывая условие (2), получим

$$E = \sum_{i=1}^n p_i B_{i0} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j B_{ij}. \quad (10)$$

Разыскивая условный минимум выражения (10), приходим к системе, аналогичной (6):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i B_{ij} &= B_{0j} + \lambda \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

или к системе, аналогичной (7):

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i (B_{ij} - B_{i1}) &= B_{0j} - B_{01} \quad (j = 2, 3, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n p_i &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Заметим, что, хотя система (11) для определения p_i эквивалентна системе (6), значения λ в этих двух системах различны. Это обусловлено тем

обстоятельством, что выражение (10) получается из (5) лишь при условии (2). Именно, как легко проверить, λ из уравнений (11) получается прибавлением к λ из системы (6) величины

$$\sum_{i=1}^n p_i M_{ii} - M_{00}.$$

В случае однородности среднего квадрата, т. е. когда

$$M_{ii} = M_0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, n),$$

этот добавок равен нулю и тогда λ в обеих системах совпадают. Что касается систем (7) и (12), то каждое уравнение первой из этих систем эквивалентно соответствующему уравнению второй. При этом, поскольку, согласно (8), B_{ij} при $i=j$ обращается в нуль, система (12) имеет вид несколько более простой, чем (7).

В частных случаях $n=2$ и $n=3$ решение системы (12) имеет следующий вид:

при $n=2$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{B_{02} - B_{01}}{B_{12}} \right) \\ p_2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{B_{01} - B_{02}}{B_{12}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

при $n=3$

$$p_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad p_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad p_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= 2(B_{12}B_{23} + B_{23}B_{31} + B_{31}B_{12}) - (B_{12}^2 + B_{23}^2 + B_{31}^2) \\ \Delta_1 &= B_{23}(B_{31} + B_{12} - B_{23} + B_{02} + B_{03} - 2B_{01}) + (B_{31}B_{02} + B_{12}B_{03}) - \\ &\quad - (B_{31}B_{03} + B_{12}B_{02}) \\ \Delta_2 &= B_{31}(B_{12} + B_{23} - B_{31} + B_{03} + B_{01} - 2B_{02}) + (B_{12}B_{03} + B_{23}B_{01}) - \\ &\quad - (B_{12}B_{01} + B_{23}B_{03}) \\ \Delta_3 &= B_{12}(B_{23} + B_{31} - B_{12} + B_{01} + B_{03} - 2B_{02}) + (B_{23}B_{01} + B_{31}B_{02}) - \\ &\quad - (B_{23}B_{02} + B_{31}B_{01}) \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

3. На основании выведенных систем уравнений для определения весов p_i могут быть упрощены выражения для среднего квадрата E ошибки интерполяции. В частности, упрощая (11) с помощью (10), получим формулу для E , не содержащую произведений весов

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n p_i B_{i0} - \frac{\lambda}{2}. \quad (15)$$

Ценой нарушения симметрии можно получить также формулу для E , линейную относительно p_i и не содержащую λ ,

$$E = \frac{1}{2} (1 + p_1) B_{01} + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n p_i (B_{i0} - B_{i1}). \quad (16)$$

В частности, при $n=2$ имеем

$$E = \frac{1}{4B_{12}} [2(B_{01}B_{12} + B_{02}B_{12} + B_{01}B_{02}) - (B_{01}^2 + B_{02}^2 + B_{12}^2)], \quad (17)$$

а при $n=3$

$$E = \frac{1}{\Delta} [(B_{12} B_{23} B_{01} + B_{23} B_{31} B_{02} + B_{31} B_{12} B_{03} + B_{12} B_{23} B_{03} + \\ + B_{23} B_{31} B_{01} + B_{31} B_{12} B_{02} + B_{12} B_{01} B_{03} + B_{23} B_{02} B_{01} + \\ + B_{31} B_{03} B_{02} + B_{12} B_{02} B_{03} + B_{23} B_{03} B_{01} + B_{31} B_{01} B_{02}) - \\ - (B_{12} B_{01} B_{03} + B_{23} B_{02} B_{03} + B_{31} B_{03} B_{01} + B_{12} B_{23} B_{31}) - \\ - (B_{23}^2 B_{01} + B_{31}^2 B_{02} + B_{12}^2 B_{03} + B_{01}^2 B_{23} + B_{02}^2 B_{31} + B_{03}^2 B_{12})], \quad (18)$$

где Δ уже введена выше [см. (14)]. Интересно отметить, что квадратные скобки в формулах (17) и (18) симметричны не только по отношению к точкам, в которых имеются данные, но и по отношению ко всем точкам, включая точку $\vec{r}_0$. Иначе говоря, они не зависят от того, в какой из точек $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots$ значение элемента f определяется, а в каких эти значения известны. От этого обстоятельства зависят лишь множители перед скобками в формулах (17) и (18).

Средний квадрат ошибки интерполяции E , даваемый формулой (3), очевидно, не отрицателен. Это накладывает определенные условия на структурную функцию B , ибо необходимо, чтобы при любом выборе точек значения E , согласно (17), (18) и аналогичным формулам, были бы не отрицательны. Именно для этого, по-видимому, достаточно (и, вообще говоря, необходимо), чтобы структурная функция B_{ij} возрастала бы с ростом расстояния между точками $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_j$ медленнее, чем квадрат этого расстояния. Структурные функции, не удовлетворяющие этому условию, вообще не имеют смысла.

Если из числа точек $\vec{r}_1, \vec{r}_2 \dots$, в которых значения элемента f известны, исключить одну (или несколько), то ошибка интерполяции вследствие этого не уменьшится. Например, если из двух точек $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ исключить одну (допустим, $\vec{r}_2$), то квадрат ошибки $E|_{n=1}$ будет равен, очевидно, просто структурной функции B_{01} . Поэтому

$$E|_{n=1} - E|_{n=2} = B_{01} - E|_{n=2} = \frac{1}{4B_{12}} (B_{02} - B_{01} - B_{12})^2,$$

откуда действительно

$$E|_{n=1} - E|_{n=2} \geq 0.$$

4. В систему (12) [или (7)] для определения оптимальных весов p_i структурные функции (или соответственно моменты связи) элемента f входят линейно и однородно. Поэтому веса не зависят от характерного масштаба значений структурных функций (моментов связи), а зависят лишь от характера их изменения при переходе от одной пары точек к другой. Иначе говоря, если ввести, например, безразмерную структурную функцию b_{ij} соотношением

$$B_{ij} = A b_{ij},$$

где A — постоянная, имеющая размерность квадрата f , то оптимальные веса не будут зависеть от выбора постоянной A .

Очевидно, что если какие-нибудь две из точек $\vec{r}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) совпадают друг с другом, то в системе (6) или (11) окажутся два совпадающих уравнения, так что решение ее станет неопределенным. Отсюда вытекает, что в случае, если какие-нибудь из пунктов близки друг к другу, можно опасаться, что веса p_i будут определяться с низкой степенью точности.

Интересный и важный для дальнейших рассуждений частный случай получается, если можно пренебречь статистической связью между данными

наблюдений в точках $\vec{r}_i$, т. е. положить $M_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

В этом случае система (6) принимает простой вид:

$$\left. \begin{aligned} p_j M_{jj} &= M_{0j} - \frac{\lambda}{2} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{j=1}^n p_j &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

откуда

$$p_j = \frac{M_{0j}}{M_{jj}} - \frac{1}{M_{jj}} - \frac{\sum_{i=1}^n \frac{M_{0i}}{M_{ii}} - 1}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{M_{ii}} \right)}. \quad (20)$$

В частности, при однородности среднего квадрата, т. е. когда все M_{jj} одинаковы ($M_{jj} = M_0$), равенство (20) принимает вид

$$p_j = \frac{1}{n} + R_{0j} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{0i}, \quad (21)$$

где через R_{0j} обозначен относительный автокорреляционный момент, или коэффициент автокорреляции значений f_0 и f_j

$$R_{0j} = \frac{M_{0j}}{M_0}. \quad (22)$$

Поскольку величина $\frac{1}{n}$ представляет собой среднее значение весового множителя, т. е. значение, которое имел бы каждый из p_j , если бы все они равнялись друг другу, то из (21) вытекает, что в рассматриваемом случае отклонение веса p_j от среднего равно отклонению автокорреляционного коэффициента R_{0j} от его среднего значения.

Если ввести нормированную структурную функцию

$$\beta_{0j} = \frac{B_{0j}}{B_\infty} = \frac{B_{0j}}{2M_0} = 1 - R_{0j}, \quad (23)$$

то равенство (21) можно переписать в виде

$$p_j = \frac{1}{n} - \beta_{0j} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \beta_{0i}. \quad (24)$$

5. Рассмотрим несколько простейших частных случаев расположения точек. Будем при этом, простоты ради, полагать структурную функцию B однородной и изотропной, т. е. будем считать, что функция B_{ij} зависит лишь от расстояния $|\vec{r}_i - \vec{r}_j|$. Эту зависимость удобно на некотором участке аппроксимировать степенной функцией

$$B_{ij} = C |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^\alpha, \quad (25)$$

причем результаты, как показано выше, не будут зависеть от „масштабного“ множителя C .

а. Одномерная экстраполяция по двум точкам. На основании (13) и (25) имеем

$$p_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{r_2^\alpha - r_1^\alpha}{(r_2 - r_1)^\alpha} \right], \quad p_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{r_2^\alpha - r_1^\alpha}{(r_2 - r_1)^\alpha} \right]. \quad (26)$$

Значения весов существенно зависят от показателя α . Именно при $\alpha=1$ $p_1=1$, $p_2=0$. Иначе говоря, если имеет место „закон первой степени“ [см., например, (1)], то экстраполяция сводится к приравнению искомого значения f_0 к значению f_1 в ближайшей точке; значение же f_2 в более отдаленной точке не влияет на результат. При $\alpha > 1$ $p_1 > 1$, $p_2 < 0$, т. е. данные в более удаленной точке входят с отрицательным весом. При $\alpha < 1$ $\frac{1}{2} < p_1 < 1$, $0 < p_2 < \frac{1}{2}$, так что оба веса положительны. Если принять $\alpha=2$, то формулы (26) совпадут с формулами для весов в случае линейной экстраполяции

$$p'_1 = \frac{r_2}{r_2 - r_1}, \quad p'_2 = -\frac{r_1}{r_2 - r_1}.$$

Но так как α не может, согласно сказанному выше, достигать значения 2, то, следовательно, всегда $p_1 < p'_1$, $p_2 > p'_2$. Если $r_1=0$ (один из пунктов наблюдения совпадает с интересующей нас точкой), то независимо от значения α всегда $p_1=1$, $p_2=0$, т. е. дополнительная точка является излишней. Последний вывод верен и в общем случае.

б. Интерполяция по двум точкам. Формулы (13) и (25) дают для одномерного случая

$$p_1 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{r_2^\alpha - r_1^\alpha}{(r_2 + r_1)^\alpha} \right], \quad p_2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{r_2^\alpha - r_1^\alpha}{(r_2 + r_1)^\alpha} \right]. \quad (27)$$

Если $r_1=r_2$ (равноотстоящие точки), то $p_1=p_2=\frac{1}{2}$ независимо от α . При $r_1 \neq r_2$ значения p_1 и p_2 существенно зависят от α . Интересно, что формула (27) совпадает с выражениями для весов в случае линейной интерполяции

$$p'_1 = \frac{r_2}{r_2 + r_1}, \quad p'_2 = \frac{r_1}{r_2 + r_1}$$

не при одном, а при двух значениях α , а именно при $\alpha=1$ и $\alpha=2$. При заданном значении отношения $\frac{r_2}{r_1}$ веса p_1 и p_2 стремятся к $\frac{1}{2}$ как при $\alpha \rightarrow \infty$, так и при $\alpha \rightarrow 1$. Для каждого значения $\frac{r_2}{r_1}$ существует „экстремальное“ значение α , а именно такое, что при нем веса более всего отличаются от $\frac{1}{2}$.

Если точки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ лежат на одинаковом расстоянии от точки $\vec{r}_0$ (но не обязательно на одной прямой с ней, то $B_{01}=B_{02}$ и веса равны $\frac{1}{2}$ независимо от величины расстояния $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$. Но от этого расстояния существенно зависит ошибка интерполяции. Действительно, в случае $B_{01}=B_{02}$ из формулы (17) получаем

$$E = B_{01} - \frac{1}{4} B_{12}. \quad (28)$$

Отсюда видно, что ошибка интерполяции в данном случае при заданном расстоянии $|\vec{r}_1 - \vec{r}_0| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_0|$ тем меньше, чем больше расстояние $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, и, следовательно, минимальна при $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = 2|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|$, т. е. если точки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ лежат на одной прямой с $\vec{r}_0$. Максимальное значение $B=B_{01}$ получается в том случае, когда $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = 0$, т. е. когда точки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ совпадают, что соответствует попросту экстраполяции по одной точке.

в. Интерполяция по трем точкам, равноотстоящим от данной. Если в формулах (14) положить $B_{01}=B_{02}=B_{03}$, то получим

$$p_1 = \frac{1}{\Delta} B_{23} (B_{31} + B_{12} - B_{23}),$$

$$p_2 = \frac{1}{\Delta} B_{31} (B_{12} + B_{23} - B_{31}),$$

$$p_3 = \frac{1}{\Delta} B_{12} (B_{23} + B_{31} - B_{12}),$$

так что веса совсем не зависят от расстояния $|\vec{r}_1 - \vec{r}_0| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_0| = |\vec{r}_3 - \vec{r}_0|$. Примем, кроме того, что расстояния $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$ и $|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|$ равны [так что треугольник $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3)$ равнобедренный]. Тогда из (14) и (18) получаем

$$\left. \begin{aligned} p_1 = p_3 &= \frac{B_{12}}{4B_{12} - B_{31}}, \quad p_2 = \frac{2B_{12} - B_{31}}{4B_{12} - B_{31}} \\ E &= B_{01} - \frac{B_{12}^2}{4B_{12} - B_{31}} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

При этом возможны три предельных случая:

1) $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 0$; в этом случае все три точки совпадают друг с другом, так что $B_{12} = B_{31} = 0$. Формулы (29) дают $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ и $E = B_{01}$, что уже было раньше. В этом случае ошибка наибольшая.

2) $\vec{r}_3 - \vec{r}_1 = 0$; в этом случае совпадают друг с другом точки $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_3$, так что $B_{31} = 0$. Формулы (29) дают $p_1 = p_3 = \frac{1}{4}$, $p_2 = \frac{1}{2}$ и $E = B_{01} - \frac{1}{4} B_{12}$, что, естественно, совпадает с формулой (28).

3) $|\vec{r}_2 - \vec{r}_1| = |\vec{r}_3 - \vec{r}_1|$; в этом случае точки образуют равносторонний треугольник с центром в $\vec{r}_0$, так что $B_{12} = B_{31}$. Формулы (29) дают $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{3}$ и $E = B_{01} - \frac{1}{3} B_{12}$; ошибка получается наименьшая.

Анализ рассмотренных частных случаев показывает, что предлагаемой теорией правильно учитывается не только связь между значениями элемента f в точке $\vec{r}_0$ со значениями в точках $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ и т. д., но и статистическая связь значений в точках $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ и т. д. между собой. Это отчетливо видно на тех примерах, где некоторые из точек совпадают друг с другом. В этих примерах результат получается таким же, как если бы вместо двух совпадающих пунктов фигурировал один. Отсюда ясно, что вес наблюдений в пункте, расположенном близко к другим пунктам, будет при прочих равных условиях меньше, чем вес данных в изолированно расположенном пункте наблюдений, как это и должно быть.

Из анализа частных случаев очевидно также, что оптимальная интерполяция уже по двум точкам существенно отличается от линейной. При этом весовые множители, вообще говоря, существенно зависят от характера структурной функции (или автокорреляционного момента) рассматриваемого элемента. Поэтому применение предлагаемой методики возможно лишь на базе достаточно полных представлений о статистической структуре поля интересующего нас метеорологического элемента.

6. Рассмотрим вопрос о влиянии случайных ошибок наблюдений на оптимальную интерполяцию. Представим каждое измеренное значения f в виде суммы

$$f = \varphi + \delta, \quad (30)$$

где φ — истинное значение рассматриваемого элемента, а δ — ошибка его измерения. Последнюю будем считать случайной прежде всего в том смысле, что поле δ никак не коррелирует с полем истинных значений φ .

Тогда автокорреляционные моменты и структурные функции измеренного поля f и истинного поля φ связаны соотношениями

$$M_{ij}^{(f)} = M_{ij}^{(\varphi)} + \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}, \quad (31)$$

$$B_{ij}^{(f)} = B_{ij}^{(\varphi)} + \sigma_i^2 + \sigma_j^2 - 2\sigma_i \sigma_j \rho_{ij}, \quad (32)$$

где σ_k^2 означает средний квадрат ошибки δ в точке $\vec{r}_k$, а ρ_{ij} — коэффициент корреляции между ошибками в точках $\vec{r}_i$ и $\vec{r}_j$. Предположим теперь, что ошибки в различных точках не коррелируют друг с другом, т. е. что

$$\rho_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Тогда формулы (31) и (32) принимают вид:

$$M_{ij}^{(f)} = \begin{cases} M_{ii}^{(\varphi)} + \sigma_i^2 & i=j \\ M_{ij}^{(\varphi)} & i \neq j \end{cases} \quad (33)$$

и

$$B_{ij}^{(f)} = \begin{cases} B_{ii}^{(\varphi)} = 0 & i=j \\ B_{ij}^{(\varphi)} + \sigma_i^2 + \sigma_j^2 & i \neq j \end{cases} \quad (34)$$

Для учета влияния случайных ошибок нужно просто подставить $M_{ij}^{(f)}$ из (33) в систему (6) или (7) либо $B_{ij}^{(f)}$ в систему (11) или (12).

В случае интерполяции по двум точкам решение соответствующей системы приводит к формулам:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{B_{20} - B_{10} + \sigma_2^2 - \sigma_1^2}{B_{12} + \sigma_2^2 + \sigma_1^2} \right] \\ p_2 &= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{B_{10} - B_{20} + \sigma_1^2 - \sigma_2^2}{B_{12} + \sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где в качестве B_{ij} фигурирует структурная функция истинного поля, т. е. $B_{ij}^{(\varphi)}$. Согласно формулам (35), наличие случайных ошибок наблюдений приводит к сглаживанию поля весовых множителей, т. е. к тому, что веса в меньшей мере отличаются друг от друга, чем при отсутствии случайных ошибок. С ростом случайных ошибок во всех пунктах весовые множители стремятся к совпадению друг с другом.

При разных средних квадратах ошибок измерений в разных точках возрастает роль более точного и уменьшается роль менее точного наблюдения. Так, при $B_{10} = B_{20}$, т. е. практически при одинаковых расстояниях $|\vec{r}_1 - \vec{r}_0|$ и $|\vec{r}_2 - \vec{r}_0|$, веса p_1 и p_2 не равны друг другу: p_1 больше, если $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$, и наоборот.

Естественно, что наличие случайных ошибок измерений приводит к росту ошибки оптимальной интерполяции.

7. В связи с подготовкой исходных данных для производства численного прогноза необходимо на основании данных наблюдений на синоптических станциях вычислить значения элемента в точках правильной сетки. Для этой цели требуется, очевидно, применить оптимальную интерполяцию многократно, а именно столько раз, сколько имеется точек правильной сетки. Сделаем несколько замечаний относительно техники таких расчетов.

Поскольку и расположение станций, и расположение точек известно заранее, то в принципе соответствующие весовые множители можно определить раз навсегда или, точнее говоря, до тех пор, пока не будет учреж-

дена какая-нибудь новая станция или не будет осуществлен переход к новой сетке точек для расчетов. После того как веса вычислены, выполнение интерполяции сводится к составлению весьма простых линейных комбинаций и занимает совершенно ничтожное машинное время.

Обычно изучают структурную функцию не самого элемента, а его отклонений от некоторого среднего значения (нормы). Структурная функция отклонений от нормы может быть по крайней мере приближенно принята однородной и изотропной, чего никак нельзя полагать по отношению к структурной функции самого элемента. При этом между структурной функцией самого элемента $B_{ij}^{(f)}$ и структурной функцией отклонений его от нормы $B_{ij}^{(f')}$ существует простое соотношение

$$B_{ij}^{(f)} = B_{ij}^{(f')} + [\bar{f}(\vec{r}_i) - \bar{f}(\vec{r}_j)]^2. \quad (36)$$

В связи с этим возможны два пути. Можно для каждой пары точек на основании сведений о структурной функции

$$B_{ij}^{(f')} = B_{ij}^{(f')}(|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

и о поле нормальных значений элемента f (т. е. $\bar{f}$) находить по формуле (36) значение структурной функции самого элемента и затем вводить его в расчет. Вместо этого можно производить интерполяцию отклонений от нормы, а затем прибавлять к результату интерполяции заранее вычисленные нормальные значения в точках сетки. В силу линейности интерполяции оба этих пути приведут к тождественным результатам и выбор между ними не является принципиальным. Все же, по-видимому, следует предпочесть второй путь, поскольку для некоторых целей, как, например, для прогноза на увеличенные сроки, желательно знать поле отклонений от нормы.

При интерполяции в какую-либо точку сетки не следует, разумеется, использовать данные во всех пунктах наблюдений, а нужно ограничиться только пунктами, расположенными не слишком далеко. Какие именно данные учитывать и какие отбрасывать — на этот вопрос трудно дать ответ в самом общем случае и его, видимо, целесообразно решать соответствующим численным экспериментом. Можно думать, что на территории с редкой сетью будет целесообразно принимать в расчет данные над большей площадью, чем при густой сети. Возможно, что правильнее исходить не из заданных размеров „области влияния“, а из заданного количества точек, информацию которых следует использовать. При этом вычисления весов будут технически удобнее в том отношении, что каждый раз придется иметь дело с одним и тем же числом уравнений в системе для их определения. Впрочем, для выяснения этого вопроса необходимо прежде всего провести упомянутый численный эксперимент.

Практически всегда по тем или иным причинам сведения по некоторым из станций отсутствуют. Поэтому весовые множители будет необходимо определять с помощью машины в процессе выполнения анализа. Естественно, что машинное время, требуемое для вычисления весов, значительно превосходит время, потребное для интерполяции по известным весам. Во избежание этих затрат времени следует прежде всего добиваться такого положения, чтобы отсутствие данных на некоторых из станций имело место лишь в виде редкого исключения. Кроме того, для тех пунктов, где данные отсутствуют, можно использовать результаты прогноза.

Для определения весовых множителей необходимо решать системы линейных алгебраических уравнений. В принципе проведение этого решения с помощью вычислительной машины не вызывает затруднений. Однако следует иметь в виду, что системы для определения весов, вообще говоря, близки к неопределенным. Именно, если расположение станций относи-

тельно некоторой точки сетки симметрично, то некоторые из уравнений системы совпадают друг с другом. Если же точка сетки расположена далеко от станций, то возникает другое осложнение: небольшое изменение численных значений структурной функции или автокорреляционного момента может приводить к значительным изменениям весов.

Решение систем линейных уравнений может производиться с помощью машины различными способами. В частности, применимы различные итерационные методы. Как известно, количество итераций существенно зависит от того, насколько удачно выбрано начальное приближение. В связи с этим можно рекомендовать следующий выбор начальных значений весов.

Для территории с редкой сетью пунктов наблюдений коэффициенты R_{ij} малы по сравнению с единицей и в качестве начального приближения можно использовать значения, получаемые из формулы (21) или (24). Для случая густой сети можно указать несколько иной путь получения начального приближения. Именно, заменим в каждом уравнении системы (6) коэффициенты недиагональных членов одним характерным значением α_j , например средним арифметическим. В результате этой замены для весов p_j получим приближенную формулу

$$p_j = \frac{R_{0j} - \alpha_j}{1 - \alpha_j} + \frac{1}{1 - \alpha_j} \frac{1 - \sum_{i=1}^n \frac{R_{0i} - \alpha_i}{1 - \alpha_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 - \alpha_i}}. \quad (37)$$

В частности, если все α_j равны между собой ($\alpha_j = \alpha$), то

$$p_j = \frac{1}{n} + \frac{1}{1 - \alpha} \left(R_{0j} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_{0i} \right).$$

При $\alpha = 0$ возвращаемся к формуле (21).

Одним из преимуществ предлагаемого способа интерполяции является то, что параллельно с выполнением самой интерполяции может вычисляться и вероятная ошибка интерполяции. Более того, поскольку эта вероятная ошибка $\sqrt{E}$ не зависит от наблюдаемых значений элемента, а определяется исключительно статистической структурой поля данного элемента и расположением точек, то вычисление поля $\sqrt{E}$ может быть выполнено заранее в той же мере, в какой это возможно в отношении весовых множителей p_i . В частности, можно заранее оценить ту степень информации, какую может дать в среднем сеть станций в зависимости от ее густоты.

РЕЗЮМЕ

Рассмотрена задача об оптимальной интерполяции полей метеорологических элементов. Выведены и проанализированы общие формулы теории оптимальной интерполяции. Разобраны простейшие частные случаи. Проанализированы пути применения полученных формул при объективном анализе полей метеорологических элементов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Основы динамической метеорологии. Под ред. Д. Л. Лайхтмана и М. И. Юдина. Гидрометеиздат. Л. 1955.

9. О СТРУКТУРЕ ПОЛЯ ВЫСОТ ПОВЕРХНОСТИ 500 миллибар

1. Данные о статистической структуре метеорологических полей имеют обширную область применения. На основании этих данных может производиться рационализация размещения сети метеорологических станций и сроков наблюдений [3]. Сведения о статистической структуре полей позволяют разработать рациональную методику статистического прогноза метеорологических элементов [6]. Наконец, эти сведения с успехом используются в вопросах прикладной метеорологии, в частности авиационной метеорологии [2], теории метеорологических приборов [7] и т. п.

В последнее время выявился новый круг вопросов, требующих для своего разрешения достаточно детальных сведений по структуре метеорологических полей, а именно вопросы количественного („объективного“) анализа синоптических положений. Наибольший практический интерес представляет количественный анализ полей высот изобарических поверхностей и ветра на этих поверхностях. Существующих данных по структуре этих полей недостаточно для сколько-нибудь полного решения вопросов количественного анализа.

В связи с этим в настоящей работе проведен анализ основных характеристик структуры поля высот поверхности 500 мб. Выбор поверхности 500 мб обусловлен тем, что расчетный анализ для этой поверхности представляет первоочередной интерес. В дальнейшем при применении расчетных методов анализа на массовом материале целесообразно строить их методику таким образом, чтобы попутно накапливались и данные по структуре анализируемых полей. Тогда можно рассчитывать, что изложенные здесь результаты будут проверены на значительно более обширном материале и соответственно уточнены и обобщены.

2. Как известно, структурная функция некоторого метеорологического элемента f определяется соотношением

$$b_f(d) = \overline{[f'(\vec{r} + \vec{d}) - f'(\vec{r})]^2}. \quad (1)$$

В формуле (1) f' означает отклонение элемента f от некоторого среднего значения („нормы“) $\bar{f}$

$$f' = f - \bar{f}, \quad (2)$$

а черта сверху означает осреднение, понимаемое в вероятностном смысле.

Структурную функцию (1) можно с достаточной точностью считать однородной и изотропной, т. е. зависящей только от скалярного расстояния d , как это и записано в формуле (1).

Наряду с функцией $b_f(d)$ можно ввести аналогичное выражение, содержащее вместо отклонений f' сами значения элемента f ,

$$B_f(\vec{r} + \vec{d}, \vec{r}) = \overline{[f(\vec{r} + \vec{d}) - f(\vec{r})]^2}. \quad (3)$$

В противоположность (1) функция B не является однородной или изотропной. Она зависит от обоих векторов $\vec{r} + \vec{d}$ и $\vec{r}$, т. е. от векторов $\vec{r}$ и $\vec{d}$. Функции B и b связаны вытекающим из формул (1), (2) и (3) соотношением

$$b_f(d) = B_f(\vec{r} + \vec{d}, \vec{r}) - [\overline{f(\vec{r} + \vec{d})} - \overline{f(\vec{r})}]^2. \quad (4)$$

Автокорреляционный момент элемента f $m_f(d)$ определяется соотношением

$$m_f(d) = \overline{f'(\vec{r} + \vec{d}) f'(\vec{r})}. \quad (5)$$

Он может с той же точностью, как и структурная функция, считаться однородным и изотропным и связан с этой функцией очевидным равенством

$$b_f(d) = 2m_f(0) - 2m_f(d), \quad (6)$$

где

$$m_f(0) = \overline{[f'(\vec{r})]^2} \quad (7)$$

представляет собой дисперсию элемента f . Подобно предыдущему можно определить величину, аналогичную автокорреляционному моменту, но составленную из значений самого элемента f ,

$$M_f(\vec{r} + \vec{d}, \vec{r}) = \overline{f(\vec{r} + \vec{d}) f(\vec{r})}$$

и связанную с автокорреляционным моментом соотношением

$$m_f(d) = M_f(\vec{r} + \vec{d}, \vec{r}) - \overline{f(\vec{r} + \vec{d})} \overline{f(\vec{r})}.$$

Согласно формуле (6), с ростом расстояния d по мере уменьшения статистической связи между значениями элемента f структурная функция стремится к постоянному значению

$$b_f(\infty) = 2m_f(0). \quad (8)$$

Целесообразно ввести еще соответствующие безразмерные функции, а именно: нормированный автокорреляционный момент (коэффициент автокорреляции)

$$\mu_f(d) = \frac{m_f(d)}{m_f(0)} \quad (9)$$

и нормированную структурную функцию

$$\beta_f(d) = \frac{b_f(d)}{b_f(\infty)}. \quad (10)$$

Вследствие (6), (9) и (10) функции μ и β связаны простой формулой

$$\beta_f(d) = 1 - \mu_f(d). \quad (11)$$

Очевидно, что функция μ не может по модулю превышать единицу, так что функция β может меняться лишь в пределах от 0 до 2. Практически, впрочем, μ не принимает больших (близких к -1) отрицательных значений, а потому функция β практически не бывает близкой к 2.

3. В данной работе исследованы перечисленные выше статистические характеристики применительно к полю высоты (геопотенциала) H изобари-

ческой поверхности 500 мб. Исходным материалом являлись снятые с карт АТ₅₀₀ данные двухразовых ежедневных наблюдений за интервал времени почти 2 года (с января 1956 г. по ноябрь 1957 г.). Данные снимались в 28 пунктах наблюдений, выбранных таким образом, чтобы из них можно было построить ряды, расположенные примерно вдоль кругов широт и примерно вдоль меридианов. Расположение пунктов показано на рис. 1.

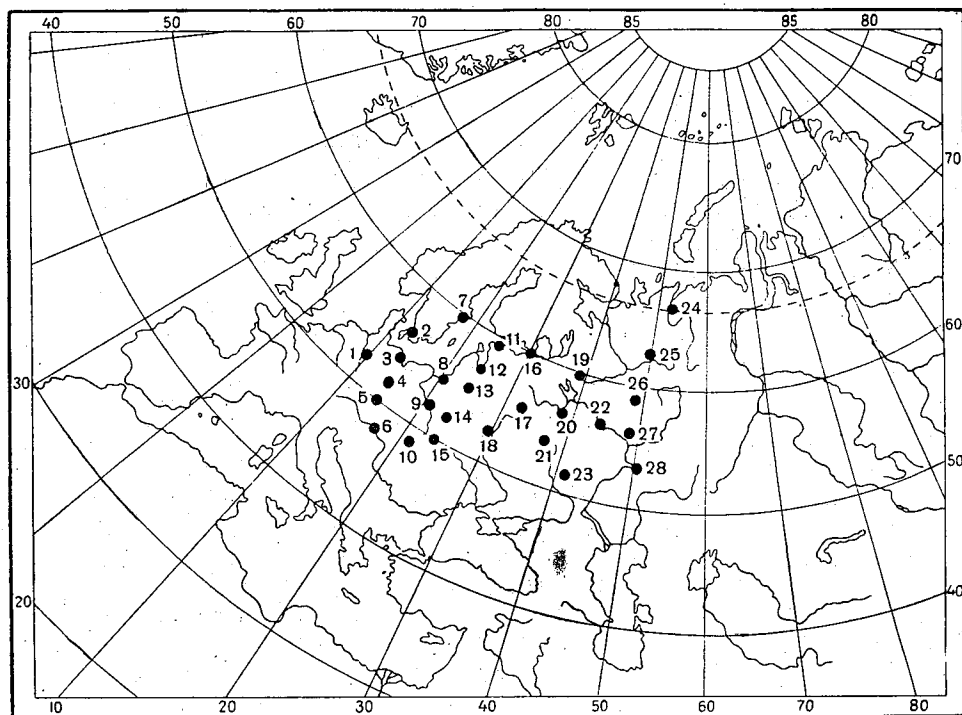


Рис. 1. Расположение пунктов, в которых брались данные о высоте поверхности 500 мб.

В процессе работы выяснилось, что в пункте № 18 большей частью нет данных, поэтому эта точка была исключена из рассмотрения.

Вычисление структурной функции значительно проще, чем автокорреляционного момента, поскольку в первом случае необходимо находить разности высот в различных точках, а во втором — произведения. Поэтому непосредственно вычислялись структурные функции, а автокорреляционный момент определялся затем на основании приведенных выше соотношений.

Для всех меридионально расположенных пар пунктов были построены статистические кривые распределения разностей значений высот. Эти кривые распределения строились отдельно для каждого из четырех сезонов. Затем вычислялись дисперсии распределений, которые и представляли собой значения структурной функции. Вычисления проводились с помощью соотношения (4), так что попутно с вычислением структурной функции $b_H(d)$ определялась величина B_H и средняя разность $\bar{H}(\vec{r} + \vec{d}) - \bar{H}(\vec{r})$. Таблица вычисленных значений величин B_H , $(\Delta \bar{H})^2 = [\bar{H}(\vec{r} + \vec{d}) - \bar{H}(\vec{r})]^2$ и b_H (в дкм²) приведена в приложении. В таблице указаны также расстояния между пунктами каждой пары.

Для проверки того, в какой мере выполняются предположения об однородности структурной функции, был построен для каждого сезона график зависимости $b_H(d)$ в большом масштабе у каждой точки на таких графиках

ках указывалось, какой паре пунктов соответствует данное значение b_H . При некотором общем разбросе точек не удалось подметить какой-либо связи между географическим положением пунктов и значением функции b_H . На основании этого можно считать, что функция хорошо удовлетворяет предположению об однородности, а имеющийся разброс точек на графиках обусловлен главным образом тем, что объем использованных данных не очень велик.

Следует отметить, что априори наибольшие сомнения вызывала возможность принятия однородности именно „меридиональной“ структурной функции. Действительно, вследствие общего увеличения высот от севера к югу разности $\bar{H}(\vec{r} + \vec{d}) - \bar{H}(\vec{r})$ существенно отличны от нуля, а именно положительны при $\vec{d}$, направленном к югу. Как видно из приложения, квадраты этих разностей часто имеют тот же порядок, что и b_H . Можно было опасаться, что вследствие этого нарушится однородность меридиональной структурной функции. После того как этого не произошло, не было особых оснований сомневаться в однородности „широтной“ структурной функции, а также в изотропии, т. е. в совпадении меридиональной и широтной структурных функций.

В связи со сказанным мы не проводили в полном объеме вычислений применительно к широтно расположенным парам пунктов.

Для трех таких пар вычисления были проделаны, и во всех случаях соответствующие точки на графиках оказались внутри области, где располагались значения меридиональной структурной функции. Этим подтверждается изотропия структурной функции. Помимо этого, были выполнены вычисления для двух пар пунктов, расположенных на больших расстояниях друг от друга примерно вдоль круга широт. Указанные вычисления были произведены с целью выявить такие расстояния, начиная с которых структурная функция перестает расти.

С этой же целью были вычислены для трех избранных пунктов дисперсии распределения высот $m_H(0)$. Дисперсии оказались существенно различными в разных точках, так что гипотеза однородности не выполняется. Причина, по-видимому, заключается во влиянии годового хода на величины $m_H(0)$. Действительно, несмотря на то, что вычисления производились для каждого сезона отдельно, влияние годового хода, разумеется, не исключилось полностью, так что значение $m_H(0)$ сложилось под влиянием не только случайных отклонений высоты от средней для данного сезона, но и закономерного изменения высоты в течение сезона. Это означает, что „действительные“ значения $m_H(0)$, характеризующие только случайные отклонения, существенно меньше, чем вычисленные значения. Это объяснение подтверждается тем, что значения $m_H(0)$ оказались большими в пункте, который характеризуется континентальным климатом, а также тем, что в переходные сезоны вычисленные значения $m_H(0)$ больше, чем зимой и летом.

Все указанные величины, вычисленные в дополнение к значениям меридиональной структурной функции, также приведены в приложении.

4. На рис. 2 приведены графики структурных функций высоты поверхности 500 мб для весны, лета, осени и зимы. Имеющиеся данные вычислений, показанные точками на рис. 2, позволили уверенно построить участки этих кривых для не очень больших и не очень малых расстояний d . Экстраполяция в сторону малых d весьма затруднительна, поскольку именно в области малых d проявляется заметная положительная кривизна. В частности, оказалось практически невозможным оценить путем экстраполяции на нуль значение средней квадратической ошибки наблюдений. Мы применили противоположный путь, а именно воспользовались известными

оценками, дающими для средней квадратической ошибки определения высоты поверхности 500 мб величину $\sigma_0 \approx 1,5$ дкм. Это соответствует начальному значению $b_0 = 2\sigma_0^2 \approx 4,5$ дкм². Поэтому мы проводили каждую кривую через начальную ординату 4,5 дкм², заменив тем самым экстраполяцию интерполяцией.

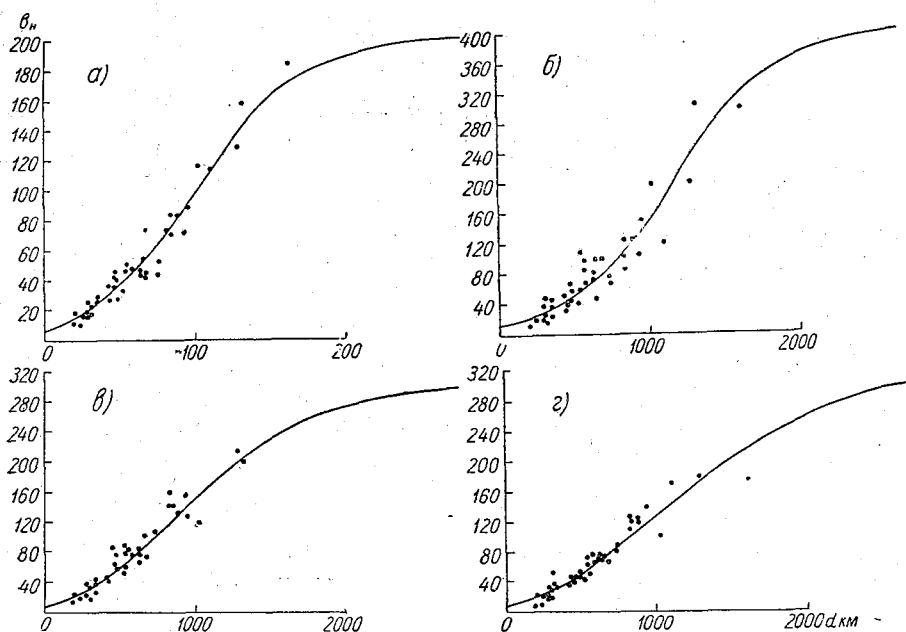


Рис. 2. Структурная функция $b_H(d)$.
а — весна, б — лето, в — осень, г — зима.

Значительные трудности встретились при описании функции $b_H(d)$ для больших d и, в частности, при попытках оценки предельного значения $b_H(\infty)$. Эти значения важно знать, чтобы перейти к автокорреляционным моментам и нормализованным функциям. Между тем непосредственные данные о функции $b_H(d)$ дают весьма мало указаний о значении $b_H(\infty)$, а данные о дисперсии $m_H(0)$, которые можно было бы на основании формулы (8) использовать для оценки $b_H(\infty)$, искажены влиянием годового хода H . Поэтому мы пытались, проводя кривую для больших d и оценивая $b_H(\infty)$, учитывать все имеющиеся сведения. В этом отношении наши оценки в некоторой мере субъективны, но вариация их в тех пределах, как это допускается данными, не привела бы к результатам, существенно отличающимся от описанных ниже.

Неясно, принимает ли где-либо структурная функция b_H значения, превышающие предельное. Данные о значениях b_H при больших d подсказывают положительный ответ на этот вопрос. Однако этих данных недостаточно, чтобы провести сколько-нибудь уверенно соответствующий участок кривой $b_H(d)$. Поэтому мы проводили кривую $b_H(d)$ так, чтобы $b_H(d)$ нигде не превосходила предельное значение $b_H(\infty)$.

Из изложенного ясно, что результаты, касающиеся поведения структурной функции $b_H(d)$ при больших d , нуждаются в дальнейшем уточнении.

Построенные структурные функции были уменьшены на постоянную величину $b_0 = 4,5$ дкм². Тем самым было исключено влияние ошибок наблюдений.

Анализ графиков на рис. 2 показывает, что структурная функция весьма существенно варьирует от сезона к сезону: летом ее значения минимальны, а зимой и осенью максимальны. Очевидно, что причиной этих вариаций является не годовой ход температуры, а изменение интенсивности синоптических процессов от сезона к сезону. В связи с этим можно думать, что различия были бы еще более резкими, если произвести разделение материала не по сезонам, а по типам синоптических процессов. Однако такая типизация неизбежно была бы малообъективной и требовала бы большой дополнительной вычислительной работы. Кроме того, неясно, уничтожились ли бы при этом сезонные различия, поскольку сама типизация процессов обычно включает и сезонную типизацию. Поэтому мы ограничились разделением материала по сезонам.

Из рассмотрения рис. 2 видно также, что от сезона к сезону изменения значений структурной функции на различных расстояниях идут примерно параллельно друг другу и параллельно им меняется, в частности, и предельное значение $b_H(\infty)$. Поэтому нормализованные функции $\beta_H(d)$ и $\mu_H(d)$ весьма мало меняются от сезона к сезону и их целесообразно описывать единой функцией $\beta_H(d)$, приведенной на рис. 3. Графика функции

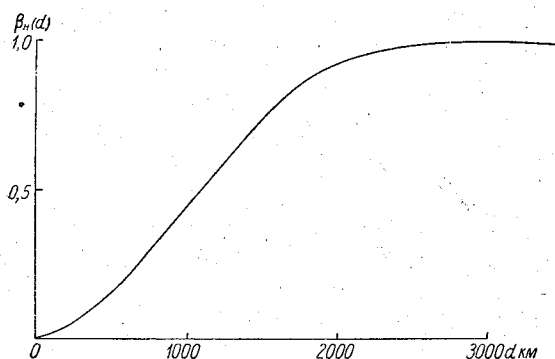


Рис. 3. Нормированная структурная функция высоты поверхности 500 мб $\beta_H(d)$.

мы не приводим; эта функция получается вычитанием $\beta_H(d)$ из единицы.

Помимо структурных функций, были исследованы кривые распределения разностей

$$\Delta H = H(\vec{r} + \vec{d}) - H(\vec{r})$$

при фиксированных d . Для того чтобы каждая кривая распределения базировалась на достаточно обширном материале, данные по парам пунктов были объединены в 6 групп (№ 1—6) так, чтобы расстояния для пар пунктов, отнесенных в одну группу, были

близки друг к другу. Из этого рассмотрения были исключены пары станций с большими расстояниями, ибо таких пар было немного. Группировка пар приведена в приложении (графа „Группа“). При объединении в группы был произведен для каждой пары сдвиг шкалы величин $H(\vec{r} + \vec{d}) - H(\vec{r})$ на среднюю величину $\bar{H}(\vec{r} + \vec{d}) - \bar{H}(\vec{r})$, так что все распределения центрировались около нуля. После этого суммировались частоты одинаковых значений $H'(\vec{r} + \vec{d}) - H'(\vec{r})$ внутри каждой группы. Эти частоты, выраженные в процентах, наносились на график, и по ним строилась сглаженная кривая распределения. Кроме того, строилась кривая нормального распределения

$$Y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\bar{b}_H}} \exp \left\{ -\frac{[H'(\vec{r} + \vec{d}) - H'(\vec{r})]^2}{2\bar{b}_H} \right\}$$

с дисперсией $\bar{b}_H$, средней из дисперсий для пар, образующих группу. Всего было построено 24 таких графика (6 групп, 4 сезона). Три из них приведены в качестве примера на рис. 4. На этих примерах, как и на всем материале, видно, что распределение разностей $H'(\vec{r} + \vec{d}) - H'(\vec{r})$ чрезвычайно близко к нормальному.

5. Сопоставим полученную структурную функцию геопотенциала поверхности 500 мб со структурной функцией давления, исследования по которой были подытожены М. И. Юдиным [4]. Формула, предложенная Юдиным для структурной функции давления на уровне моря b_{p_0} , имеет вид

$$b_{p_0}(d) = A_1 d^2 - C_1 d^3, \quad (12)$$

где A_1 и C_1 — коэффициенты. В системе MTS (давление в сантибарах, расстояние в метрах) $A_1 = 10^{-12}$, $C_1 = 6,5 \cdot 10^{-19}$. Если с помощью призем-

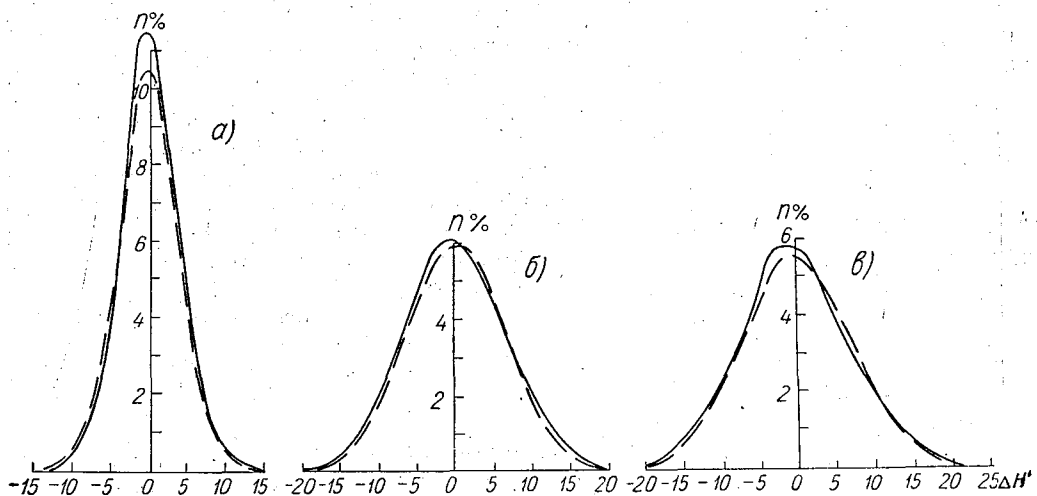


Рис. 4. Распределение разностей $\Delta H' = H'(\vec{r} + \vec{d}) - H'(\vec{r})$.
а — группа № 1, лето; б — группа № 3, осень; в — группа № 5, лето; — — — — — сглаженная кривая, проведенная по точкам, — — — — — нормальное распределение с дисперсией $b_{H'}$.

ной барической ступени 8 дкм/сб перейти от b_{p_0} к структурной функции b_{H_0} высоты средней изобарической поверхности уровня моря (с достаточной точностью поверхности 1000 мб) и выражать расстояния d в сотнях километров, то на основании формулы (12) получим

$$b_{H_0}(d) = A d^2 - C d^3, \quad (13)$$

где численные значения коэффициентов A и C таковы:

$$A = 0,6, \quad C = 0,04.$$

Разумеется, формула (13), как и (12), описывает структурную функцию лишь до значения

$$d = d_{\max} = \frac{2}{3} \frac{A}{C}, \quad (14)$$

при котором b_{H_0} достигает максимального значения

$$(b_{H_0})_{\max} = \frac{4}{27} \frac{A^3}{C^2}.$$

При больших значениях расстояния d формула (13) дает убывание b_{H_0} до нуля при $d = A/C$ и отрицательных значений при $d > A/C$. В действительности же, по-видимому, при $d > d_{\max}$ структурная функция остается постоянной, так что $d_{\max}$ представляет собой расстояние, на котором достигается „насыщение“ структурной функции, и

$$b_{H_0}(\infty) = (b_{H_0})_{\max} = \frac{4}{27} \frac{A^3}{C^2}. \quad (15)$$

На рис. 5 приведен график функции $b_{H_0}(d)$, построенный по формулам (13—15). Пунктиром показана упомянутая выше „фигтивная“ ветвь функции $Ad^3 - Cd^3$ для $d > d_{\max}$. На этом же рисунке приведены для сравнения графики структурной функции высот поверхности 500 мб для лета и осени. Сравнение показывает, что изменчивость геопотенциала существенно возрастает с высотой. Расстояние $d_{\max}$, на котором происходит „насыщение“ структурной функции $b_H(d)$, составляет около 3000 км, т. е. почти в 4 раза больше, чем для функции b_{H_0} . Значения функции $b_H(d)$ превосходят значения b_{H_0} в десятки раз. Так, „насыщающее“ значение $b_{H_0}(\infty)$ составляет 20 дкм², в то время как $b_H(\infty)$ оценивается для лета значением 200 дкм², а для осени 400 дкм². Это означает, что средняя квадратическая изменчивость высоты поверхности 500 мб превосходит изменчивость высоты поверхности 1000 мб примерно в 3—4,5 раза.

Если ввести безразмерное расстояние

$$\delta = \frac{d}{d_{\max}} \quad (16)$$

и нормированную структурную функцию β_{H_0} , то формула (13) приводится к виду

$$\beta_{H_0}(\delta) = 3\delta^2 - 2\delta^3, \quad (17)$$

не содержащему эмпирических коэффициентов. Интересно сопоставить функции $\beta_{H_0}(\delta)$ и $\beta_H(\delta)$. Это сопоставление выполнено на рис. 6. Мы видим, что функция $\beta_H(\delta)$ растет при малых δ быстрее, чем по закону „квадрат

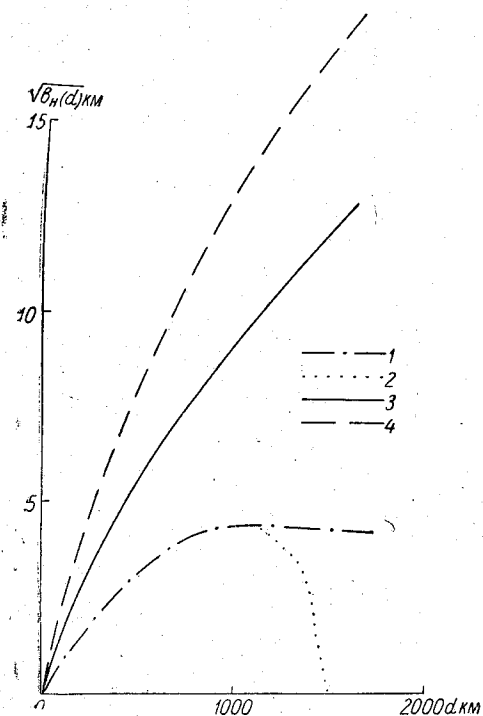


Рис. 5. Сравнение структурных функций $b_H(d)$ и $b_{H_0}(d)$.

1 — функция $b_{H_0}(d)$, по Юдину [5], 2 — фиктивная ветвь функции $b_{H_0}(d)$ [формула (13)], 3 — функция $b_H(d)$ для лета, 4 — функция $b_H(d)$ для осени.

минус куб“ (17), и достигает насыщения более плавно. Уменьшив на $\frac{1}{3}$ значение $d_{\max}$, т. е. приняв $d_{\max} = 2000$ км, можно достичь согласования $\beta_H(\delta)$ с кривой $\beta_{H_0}(\delta)$ всюду, кроме значений δ , близких к единице (рис. 6). Правда, ветвь кривой $\beta_H(\delta)$ при больших δ малонадежна, так что отличие $\beta_H(\delta)$ от $\beta_{H_0}(\delta)$ при этом малодостоверно. Все же есть основания приписать эти различия не недостаткам данных о функции $\beta_H(\delta)$, а недостаткам закона „квадрат минус куб“. Действительно, по этому закону вторая производная $b''(d)$ меняется при $d = d_{\max}$ скачкообразно от $-2A$ при $d = d_{\max} - 0$ до 0 при $d = d_{\max} + 0$, что, разумеется, крайне неестественно. Это означает, что формулу (13) или (17) следует применять для описания структурной функции b_{H_0} не до значения $d = d_{\max}$ ($\delta = 1$), а до несколько меньших расстояний. Впрочем, вопрос о характере структурной функции геопотенциала при больших расстояниях нуждается, как указывалось выше, в дальнейшем исследовании.

6. Полученные данные о структуре поля высот поверхности 500 мб могут быть использованы для выяснения структуры поля геострофического ветра на этой поверхности.

Введем осредненную на отрезке S производную геопотенциала (точнее, отклонения H' геопотенциала от нормы) $\frac{\partial H'}{\partial S}$

$$\frac{\overline{\partial H'}^{(S)}}{\partial S} = \frac{H'(\vec{r} + \vec{S}) - H'(\vec{r})}{S}. \quad (18)$$

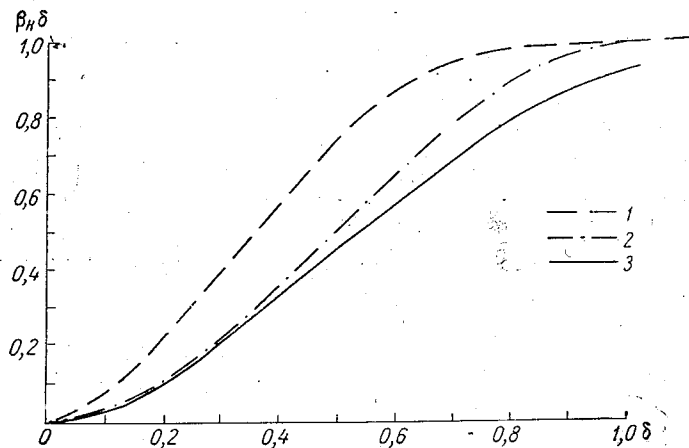


Рис. 6. Сравнение нормированных структурных функций безразмерного расстояния δ .

1 — функция $\beta_{H_0}(\delta)$, по Юдину, 2 — функция $\beta_H(\delta)$ при $d_{\max} = 3000$ км, 3 — функция β и (δ) , приближенная к функции $\beta_{H_0}(\delta)$ путем принятия $d_{\max} = 2000$ км.

Средний квадрат этой величины равен, как известно [5],

$$\left[\frac{\overline{\partial H'}^{(S)}}{\partial S} \right]^2 = m_{\frac{\partial H'}{\partial S}}(0) = \frac{1}{S^2} b_H(S). \quad (19)$$

Структурную функцию величины $\frac{\overline{\partial H}^{(S)}}{\partial S}$ легко выразить через структурную функцию самого геопотенциала H , если подставить в общую формулу (1), записанную применительно к функции $\frac{\overline{\partial H}^{(S)}}{\partial S}$, выражение (18). После несложных преобразований получим

$$b_{\frac{\overline{\partial H}^{(S)}}{\partial S}}(d) = \frac{1}{S^2} [2b_H(S) + 2b_H(d) - b_H(d+S) - b_H|d-S|]. \quad (20)$$

Предельное значение этой структурной функции равно, согласно (20),

$$b_{\frac{\overline{\partial H}^{(S)}}{\partial S}}(\infty) = \frac{2b_H(S)}{S^2}. \quad (21)$$

Формулу (21) можно было также получить из (19) и (8). На основании (20) и (21) получаем для нормированной структурной функции $\beta_{\frac{\overline{\partial H}^{(S)}}{\partial S}}$ формулу

$$\beta_{\frac{\overline{\partial H}^{(S)}}{\partial S}}(d) = 1 - \frac{b_H(d+S) + b_H|d-S| - 2b_H(d)}{2b_H(S)}. \quad (22)$$

Очевидно, нормированная структурная производной $\frac{\partial H}{\partial S}$ равна нормированной структурной функции геострофического ветра. Учитывая это и переходя к значениям нормированной функции и в правой части (22), получаем

$$\beta_{\bar{v}}(d) = 1 - \frac{\beta_H(d+S) + \beta_H|d-S| - 2\beta_H(d)}{2\beta_H(S)} \quad (23)$$

или

$$\mu_{\bar{v}}(d) = \frac{2v_H(d) - v_H(d+S) - v_H|d-S|}{2[1 - v_H(S)]}, \quad (24)$$

где $\bar{v}$ есть геострофический ветер, осредненный по территории, имеющей характерный линейный размер (диаметр) S . Исходя из структурной функции $\beta_H(d)$, приведенной на рис. 3, мы произвели численные подсчеты по формуле (23) для трех случаев: $S = 600$ км, $S = 1000$ км и $S = 2000$ км. Результаты вычислений представлены графически на рис. 7. Как видно из

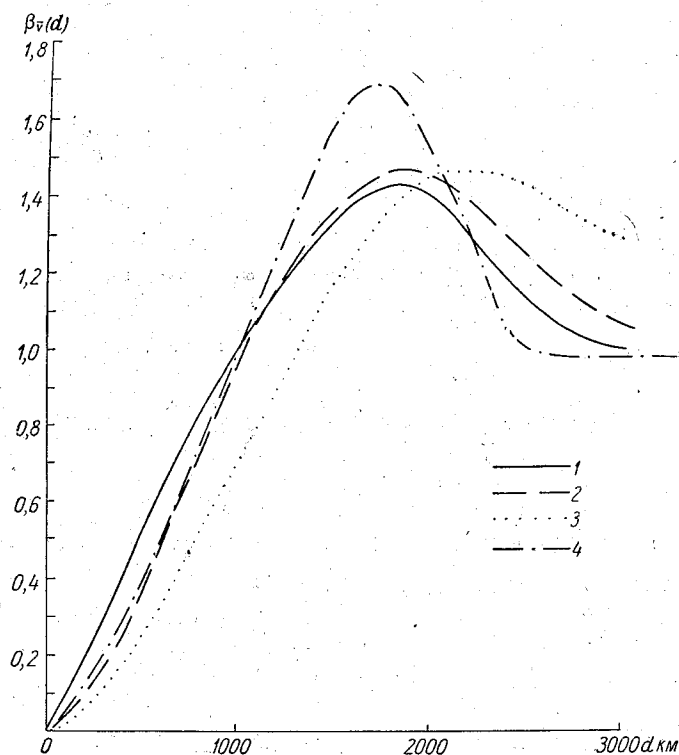


Рис. 7. Нормированная структурная функция геострофического ветра, определенного при шаге S .
1 — $S = 600$ км, 2 — $S = 1000$ км, 3 — $S = 2000$ км, 4 — функция, построенная на основании закона „квадрат минус куб“, $S = 600$ км.

этих графиков, структурная функция геострофического ветра в значительном интервале расстояний d близка к линейной функции d и при малых d тем больше, чем меньше шаг осреднения S . Интересно отметить, что $\beta_{\bar{v}}(d)$ достигает значений, существенно превосходящих единицу. Этот вывод получился несмотря на то, что функция $\beta_H(d)$ нигде не превосходила единицу.

Легко показать, что если исходить не из фактических данных, представленных на рис. 3, а из описания структурной функции $\beta_H(d)$ законом

„квадрат минус куб“ (17); то вид структурной функции $\beta_v(d)$ получится примерно таким же. Именно, если подставить в формулу (23) выражение (17) для функции $\beta_H(\delta)$, учтя, что при $\delta \geq 1$ $\beta_H(\delta) = 1$, то получим, обозначая

$$\frac{S}{d_{\max}} = \sigma,$$

$$\left. \begin{aligned} \beta_v(\delta) &= \frac{2\delta^2(3\sigma - \delta)}{\sigma^2(3 - 2\sigma)} && \text{при } 0 < \delta < \sigma \\ \beta_v(\delta) &= \frac{2(3\delta - \sigma)}{3 - 2\sigma} && \text{при } \sigma < \delta < 1 - \sigma \\ \beta_v(\delta) &= \frac{3(\sigma + \delta)^2 - 2(3\sigma^2 - 3\sigma\delta + 3\sigma\delta^2 + \delta^3) - 1}{2\sigma^2(3 - 2\sigma)} && \text{при } 1 - \sigma < \delta < 1 \\ \beta_v(\delta) &= \frac{3(\sigma^2 + 2\sigma\delta - \delta^2) - 2(3\sigma^3 - 3\sigma^2\delta + 3\sigma\delta^2 - \delta^3) + 1}{2\sigma^2(3 - 2\sigma)} && \text{при } 1 < \delta < 1 + \sigma \\ \beta_v(\delta) &= 1 && \text{при } \delta > 1 + \sigma \end{aligned} \right\} (25)$$

Формулы (25) верны, если $\sigma < \frac{1}{2}$. Если же $\sigma \geq \frac{1}{2}$, то вторая из формул (25) выпадает, а третья верна лишь при $\sigma < \delta < 1$. Формула (25) дает разрывное представление функции $\beta_v(\delta)$. Нетрудно проверить при этом, что как сама функция β_v , так и ее первая производная непрерывны при всех $\delta (0 \leq \delta < \infty)$. Что же касается второй производной, то она, вообще говоря, разрывна, а именно испытывает скачки от нуля к отрицательному значению при $\delta = 1 - \sigma$, от отрицательного к положительному при $\delta = 1$ и от положительного к нулевому при $\delta = 1 + \sigma$ (все это в случае $\sigma < \frac{1}{2}$; при $\sigma > \frac{1}{2}$ картина несколько иная). Разумеется, эти скачки не отражают действительных закономерностей, а являются следствием принятия закона „квадрат минус куб“ для $\beta_H(\delta)$ вплоть до значения $\delta = 1$.

Интересно отметить, что значение $\beta_v(1)$ при законе „квадрат минус куб“ (17) для $\beta_H(\delta)$ не зависит от величины σ и равно $\frac{3}{2}$, как это вытекает из формулы (25).

На основании формулы (25) мы рассчитали кривую $\beta_v(\delta)$ для случая $\sigma = 0,3$, что при значении $d_{\max} = 2000$ км соответствует $S = 600$ км. Эта кривая также приведена на рис. 7. Сопоставление этой кривой с графиком функции $\beta_v(d)$, построенной для $S = 600$ км по эмпирическим данным о структурной функции высот, показывает, что общий характер обеих кривых одинаков. В то же время численные значения ординат заметно отличаются. В частности, максимальное значение функции $\beta_v(d)$, вычисленной на основании закона (17), составляет 1,71, т. е. значительно больше, чем для остальных, „полуэкспериментальных“ кривых.

7. Хотя для разработки методики количественного анализа поля ветра достаточно знать нормированную структурную функцию $\beta_v(d)$, представляет значительный интерес также и ненормированная структурная функция геострофического ветра $b_v(d)$. Знание последней интересно хотя бы с точки зрения сопоставления ее со структурной функцией реального ветра $b_v(d)$, которая исследовалась различными авторами и результаты исследования которой также подытожены М. И. Юдиным [4]. Эти исследования касались

сравнительно малых значений d (примерно до 1000 км), на которых „насыщения“ функции $b_v(d)$ не наблюдалось, так что по материалам этих работ не удается построить нормированную структурную функцию реального ветра.

Переход от нормированной функции $\beta_v(d)$ к ненормированной структурной функции геострофического ветра $b_v(d)$ осуществляется весьма просто. Именно поскольку скорость геострофического ветра выражается формулой

$$\bar{v} = \frac{98}{l} \frac{\partial H}{\partial n},$$

где l — кориолисов параметр, а

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial S_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial S_2}\right)^2}$$

— горизонтальный градиент высоты изобарической поверхности H , выраженной в декаметрах (S_1 и S_2 — две какие-либо перпендикулярные горизонтальные координаты), то

$$b_v(d) = \frac{2 \cdot 98^2}{l^2} b_{\frac{\partial H}{\partial S}}(d). \quad (26)$$

Далее из формул (10) и (21) вытекает, что

$$b_{\frac{\partial H}{\partial S}}(d) = \frac{2\beta_H(S)}{S^2} \beta_v(d) b_H(\infty). \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), получим

$$b_v(d) = \left[\frac{4 \cdot 98^2}{l^2} \frac{\beta_H(S)}{S^2} b_H(\infty) \right] \beta_v(d),$$

где величина в квадратных скобках и представляет собой множитель для перехода от нормированной функции β_v к ненормированной функции b_v :

$$b_v(\infty) = \frac{4 \cdot 98^2}{l^2} \frac{\beta_H(S)}{S^2} b_H(\infty).$$

Так как $b_H(\infty)$ зависит от сезона, то естественно вычислить отношение

$$\frac{b_v(\infty)}{b_H(\infty)} = \frac{4 \cdot 98^2}{l^2} \frac{\beta_H(S)}{S^2}, \quad (28)$$

зависящее только от „шага“ S и широты места φ . На рис. 8 показаны результаты вычисления этого отношения как функции от S при фиксированной широте $\varphi = 55^\circ$. На этом графике по оси ординат нанесены значения корня квадратного из выражения (28), представляющего собой отношение средних квадратических значений геострофического ветра (в метрах в секунду) и отклонения высоты поверхности 500 мб (в декаметрах). Уменьшение этого отношения с ростом S отражает влияние шага конечноразностного дифференцирования на характерную величину геострофического ветра.

На основании графиков рис. 7 и 8 можно рассчитать ненормированную структурную функцию геострофического ветра для каждого значения шага дифференцирования S и вычислить коэффициент пропорциональности $b_v(1)$ при приближенном представлении этой функции линейной зависимостью

$$b_v(d) = b_v(1) d \quad (29)$$

для небольших значений d (практически для d , меньших примерно 1500 км). Если принять в качестве среднего значения $b_H(\infty)$ 300 дкм², то такая оценка дает с точностью до одной значащей цифры

$$\text{при } S = 600 \text{ км } b_v(1) = 3 \cdot 10^{-4} \text{ м/сек.}^2;$$

$$\text{при } S = 1000 \text{ км } b_v(1) = 2 \cdot 10^{-4} \text{ м/сек.}^2$$

По М. И. Юдину [4], $b_v(1) = 7 \cdot 10^{-5} \text{ м/сек.}^2$, т. е. в 3–4 раза меньше.

Это различие можно объяснить, во-первых, тем, что материалом для оценки Юдина послужили данные о ветре на меньших высотах, чем у нас, и, во-вторых, возможным различием структурных функций реального и геострофического ветра. Следует подчеркнуть также, что различия в структурных функциях ветра значительно меньше проанализированных выше различий в структурных функциях геопотенциала.

8. В заключение произведем еще несколько сопоставлений.

На рис. 8, помимо отношения $\frac{b_v(\infty)}{b_H(\infty)}$, приведен также график

отношения $\frac{\overline{\Omega_g^2}}{b_H(\infty)}$, где Ω_g пред-

ставляет собой геострофический вихрь скорости. Это отношение вычислено по формуле

$$\frac{\overline{\Omega_g^2}}{b_H(\infty)} = \frac{982}{l^2} \times \frac{16\beta_H(S) - 4\beta_H(S\sqrt{2}) - 2\beta_H(2S)}{S^4}, \quad (30)$$

получающейся из определения геострофического вихря при использовании квадратной сетки точек (см. также [1]). Применение треугольной сетки, как показано в работе [1], лишь в слабой мере изменило бы эти оценки в сторону уменьшения значений $\overline{\Omega_g^2}$. Как и для геострофического ветра,

на рис. 8 приведены значения не самого отношения $\frac{\overline{\Omega_g^2}}{b_H(\infty)}$, а корня квадратного из него, представляющего собой отношение среднего квадратического значения вихря Ω_g на поверхности 500 мб к „насыщающему“ значению средней квадратической разности высот этой изобарической поверхности. Значения вихря принимаются в сотысячных долях от $\frac{1}{\text{сек.}}$ ($10^{-5} \text{ сек.}^{-1}$).

На рис. 8 видно, что значения $\sqrt{\overline{\Omega_g^2}}$ весьма сильно уменьшаются с ростом шага дифференцирования S , особенно в области малых значений S . Так, при росте S от 200 до 500 км это значение уменьшается примерно в 3 раза, а при росте S от 500 до 1000 км — еще примерно вдвое. В част-

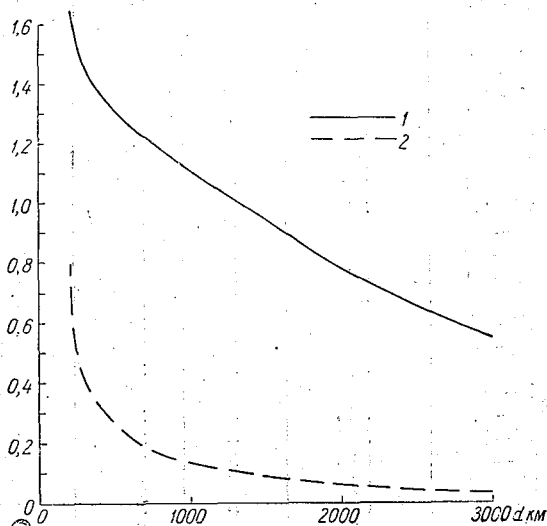


Рис. 8.

1 — отношение $\frac{\sqrt{b_v(\infty)}}{\sqrt{b_H(\infty)}} [10^{-1} \text{ сек.}^{-1}]$ как функция H_S ; 2 — отношение $\frac{\sqrt{\overline{\Omega_g^2}}}{\sqrt{b_H(\infty)}} [10^{-6} \text{ м}^{-1} \text{ сек.}^{-1}]$ как функция от H до S .

Значения структурной функции и связанных

Пара пунктов	d (км)	Группа	Лето				число случаев
			число случаев	B _H	(ΔH̄) ²	b _H	
3—2	190	1	314	13,6	2,1	11,5	231
13—12	200	1	334	30,1	11,7	18,4	250
4—3	230	1	319	17,2	6,6	10,6	266
5—4	250	1	285	30,8	14,1	16,7	223
9—8	280	1	199	35,2	11,3	23,9	133
12—11	280	1	339	25,0	5,5	19,5	260
6—5	280	1	271	20,0	3,0	17,0	204
27—26	300	2	335	28,4	5,8	22,6	225
15—14	300	2	320	31,9	15,0	16,9	241
14—13	340	2	327	26,1	1,9	24,2	242
26—25	340	2	308	34,9	7,7	27,2	245
20—19	410	3	280	40,6	5,6	35,0	262
4—2	420	3	314	42,5	16,8	25,7	222
10—9	450	3	223	46,4	8,8	37,6	122
21—20	460	3	340	56,4	11,6	44,8	243
13—11	470	3	346	70,3	29,6	40,7	248
5—3	470	3	285	64,0	36,3	27,7	212
6—4	510	4	306	54,2	21,7	32,5	300
14—12	530	4	332	66,3	19,5	46,8	247
8—7	550	4	306	84,9	34,9	50,0	223
17—16	580	4	342	75,7	27,6	48,1	231
28—26	610	5	330	71,2	25,0	46,2	238
23—22	610	5	324	69,2	21,4	47,8	241
15—13	630	5	324	69,1	26,3	42,8	240
27—25	650	5	309	83,0	28,0	55,0	239
5—2	660	5	269	103,8	59,2	44,6	202
25—24	670	5	281	76,4	3,7	72,7	225
10—8	730	6	292	96,5	42,0	54,5	194
6—3	740	6	302	106,5	61,9	44,6	233
14—11	810	6	329	119,8	46,2	73,6	246
9—7	830	6	234	175,8	91,4	84,4	138
15—12	830	6	329	143,6	72,4	71,2	249
21—19	880	6	271	128,7	44,5	84,2	239
6—2	930	—	299	162,1	90,1	72,0	219
28—25	950	—	307	149,9	60,8	89,1	219
26—24	1010	—	295	141,1	25,0	116,1	225
15—11	1100	—	273	239	125	114	337
10—7	1280	—	301	302	174	128	186
27—24	1320	—	303	222	63	159	215
28—24	1610	—	301	296	112	184	227
11—16	340	2	236	27,6	1,2	26,4	258
16—19	530	4	333	47,6	1,6	46,0	258
19—26	540	4	320	53,3	3,3	50,0	244
1—23	2210	—	310	218	14,4	203,6	222
1—28	2770	—	311	238	5	233	229
4	0	—	341	80,6	5,0	75,6	242
12	0	—	353	98,8	16,3	82,5	264
27	0	—	351	117,5	9,2	108,3	252

ности, если снова принять в качестве среднего значения $b_H(\infty) = 300$ дкм², то при $S = 500$ км получаем для среднего квадратического значения геострофического вихря величину $4 \cdot 10^{-5}$ сек.⁻¹, а при $S = 1000$ км — величину $2 \cdot 10^{-5}$ сек.⁻¹. По М. И. Юдину [5], при шаге 500 км получается $\sqrt{\overline{Q_g^2}} = 2 \cdot 10^{-5}$ сек.⁻¹. Таким образом, для геострофического вихря получаем вывод, что характерное значение его существенно растет с высотой,

с ней величин для каждой пары точек

Осень			Зима				Весна			
B_H	$(\Delta \bar{H})^2$	b_H	число случаев	B_H	$(\Delta \bar{H})^2$	b_H	число случаев	B_H	$(\Delta \bar{H})^2$	b_H
(дкм ²)				(дкм ²)				(дкм ²)		
17,5	4,0	13,5	259	17,3	2,1	15,2	327	14,7	0,5	14,2
35,7	13,6	22,1	273	31,1	6,3	24,8	331	29,8	7,8	22,0
19,5	2,2	17,3	259	20,4	2,4	18,0	317	15,0	0,7	14,3
28,2	9,9	18,3	227	31,2	9,0	22,2	267	25,2	5,2	20,0
39,3	2,3	37,0	174	39,2	1,3	37,9	112	34,7	1,6	33,1
35,0	10,4	24,6	281	32,7	4,3	28,4	346	24,8	1,7	23,1
18,2	0,9	17,3	239	26,6	0,9	25,7	264	21,2	0,6	20,6
70,5	32,6	37,9	244	48,9	13,8	35,1	319	35,8	6,5	29,3
36,5	19,6	16,9	276	34,0	14,6	19,4	271	32,5	13,6	18,9
30,8	7,1	23,7	271	39,7	1,1	38,6	318	32,9	0,1	32,8
65,0	22,4	42,6	240	34,1	5,3	28,8	283	66,5	33,2	33,3
85,0	34,8	50,2	274	65,6	19,5	46,1	370	58,1	13,4	44,7
49,5	15,0	34,5	248	56,1	14,1	42,0	313	39,4	2,6	36,8
50,8	16,2	34,6	171	106,9	21,2	85,7	238	47,8	7,1	40,7
109,2	65,8	43,4	281	88,5	34,9	53,6	284	60,1	13,8	46,3
103,3	46,9	56,4	271	96,8	20,7	76,1	329	75,1	23,1	52,0
67,3	24,4	42,9	237	77,4	18,2	59,2	273	57,7	8,3	49,4
64,1	23,1	41,0	257	67,4	13,8	53,6	221	45,8	3,7	42,1
94,3	40,0	54,3	279	105,3	14,8	90,5	346	79,0	11,2	67,8
100,8	43,4	57,4	238	123,8	42,9	80,9	324	83,0	33,5	49,5
121,2	54,0	67,2	270	99,1	22,0	77,1	284	85,0	16,6	68,4
192,0	114	78	259	128	41,7	86,3	314	101,5	27,1	74,4
163,8	87	76,8	283	109	41,6	67,4	334	84,6	15,0	69,6
94,0	50,7	43,3	256	101,1	24,5	76,6	324	85,3	13,3	72,0
209	108,2	100,8	244	124,2	41,0	83,2	273	139,0	64,2	74,8
124,5	53,1	71,4	230	137,8	33,0	104,8	280	90,7	12,6	78,1
118	18	100	215	82,9	8,7	74,2	272	132,2	68,5	63,7
110,8	38,9	71,9	234	120,1	20,5	99,6	300	90,1	9,6	80,5
107,1	39,5	67,6	267	132,8	24,1	108,7	314	95,9	7,8	88,1
186,4	84,7	101,7	273	195,6	34,8	160,8	334	135,2	24,8	110,4
190,7	66,3	124,4	175	169,2	26,6	142,6	251	147,5	27,6	119,9
198	113,6	84,4	268	202	58	144	338	167,0	43,7	123,3
311	187	124	266	241,5	108	133,5	319	175	51,7	123,3
178,2	70,6	107,6	258	197,0	40,0	157,0	248	155,2	14,8	140,4
364	213	151	243	211	82	129	229	208	72	136
274,7	76,2	198,5	212	147,5	26,8	120,7	298	320	216	104
326	206	120	259	324	56	268	226	236	63	173
367	168	199	247	379	163	216	305	258	79	179
473	161	312	211	284	81	203	298	429	275	154
674	378	296	222	402	158	244	295	552	376	176
54,0	17,1	36,9	280	48,9	6,3	42,6	347	35,1	3,0	32,1
126,5	17,7	108,8	267	68,7	7,3	61,4	326	63,6	0	63,6
89,8	0,6	89,2	251	85,0	0,8	84,2	314	81,5	4,2	77,3
489	102	387	242	407,5	13,5	394	315	279	0	279
679	176	503	257	508	46	462	317	408	1	407
302	125	177	265	200,5	15,7	184,8	327	153,7	11,3	142,4
228	3	225	330	236	52	184	287	291	2	289
336	16	320	266	231,7	26	205,7	335	321	1	320

а именно в 2—3 раза при поднятии от земли до уровня 500 мб. То, что применительно к этому уровню наши оценки правильны, можно видеть также из рассмотрения карт вихря, содержащихся, например, в работе [8].

Можно было бы пойти дальше и рассчитать, допустим, структурную функцию геострофического вихря. Однако формулы для такого расчета сравнительно громоздки. Поэтому результаты вычисления по ним будут малонадежными. Так, уже для „четырёхточечного“ лапласиана высоты

формула для структурной функции имеет вид

$$\begin{aligned} b_{\overline{v^2H}}(s)(d) = & \frac{1}{S^4} [32b_H(S) - 8b_H(S\sqrt{2}) - 4b_H(2S) + \\ & + 20b_H(d) - 8b_H|d - S| - 8b_H(d + S) + b_H(d + 2S) + \\ & + b_H|d - 2S| + 2b_H(\sqrt{d^2 + 4S^2}) - 16b_H(\sqrt{d^2 + S^2}) + \\ & + 4b_H(\sqrt{(d - S)^2 + S^2}) + 4b_H(\sqrt{(d + S)^2 + S^2})]. \end{aligned}$$

При подсчетах по этой формуле небольшая неточность того или иного конкретного значения функции $b_H(d)$ может привести к значительной погрешности в структурной функции лапласиана. Поэтому таких вычислений мы не производили. Вообще переход от структурной функции какого-либо элемента к структурной функции дифференциальной характеристики поля этого элемента тем менее надежен, чем больше порядок производных, входящих в дифференциальную характеристику. При этом предельное значение структурной функции, необходимое для оценки среднего квадрата данной характеристики, вычисляется точнее: получающееся повышение точности соответствует примерно понижению порядка производной на единицу.

В заключение приведем еще одно сравнение. Среднее квадратическое значение производной от давления по горизонтальной координате $\frac{\partial p}{\partial S}$ по оценке Юдина [5], полученной главным образом по данным наземных наблюдений, составляет $8 \cdot 10^{-7}$ сб/м. Соответствующие подсчеты по нашим данным приводят к значению $\frac{\partial p}{\partial S}$ на высоте поверхности 500 мб (т. е. около 5 км) вдвое большему, $1,5 \cdot 10^{-7}$ сб/м. Это вполне согласуется с результатами других проведенных выше сопоставлений.

РЕЗЮМЕ

На основании обработки большого объема аэрологических данных исследована структурная функция высоты изобарической поверхности 500 мб. Показано, что как по характеру зависимости от расстояния, так особенно по абсолютным значениям структурная функция высот поверхности 500 мб существенно отличается от структурной функции наземного давления. Исследована также структурная функция геострофического ветра на поверхности 500 мб.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г ан д и н Л. С. О линейной интерполяции метеорологических элементов в двух измерениях. Труды ГГО, вып. 71, 1957.
2. Основы динамической метеорологии. Под ред. Д. Л. Лайхтмана и М. И. Юдина, Гидрометеиздат. Л. 1955.
3. Рациональное размещение сети гидрометеорологических станций. Труды ГГО, вып. 4(66), 1947.
4. Ю д и н М. И. Некоторые вопросы теории метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 19(81), 1949.
5. Ю д и н М. И. Применение статистической теории турбулентности к упрощению уравнений динамики атмосферы. Труды ГГО, вып. 33(95), 1957.
6. Я г л о м А. М. Введение в теорию случайных функций. Успехи математических наук, т. 7, № 5(51), 1952.
7. Я г л о м А. М. Об учете инерции метеорологических приборов при измерениях в турбулентной атмосфере. Труды геофиз. ин-та АН СССР, № 24(151), 1954.
8. Cressman G. P. An application of absolute vorticity charts. Journ. Meteorol, 10, № 1, 1953.

ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА ЧИСЛЕННОГО ПРОГНОЗА БАРИЧЕСКОГО ПОЛЯ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ ВЫСОКОГОРНЫХ ПЛАТО

§ 1. Введение

Орографические влияния на изменения поля давления были замечены синоптиками на своем практическом опыте довольно давно. В 1947 г. И. А. Кибель впервые дал теоретическое объяснение наблюдаемым явлениям „сегментации“ циклонов, и эта теория была применена к анализу переваливания циклонов через Скандинавские и Уральские горы. За последние годы в мировой литературе появлялось довольно много работ, посвященных исследованиям влияния рельефа земной поверхности на синоптические процессы.

Вкратце об этих работах можно сказать следующее. Для учета влияния рельефа на синоптические процессы, в частности на изменение поля давления, современные исследователи в области численных методов прогнозов фактически рассматривали только влияние вертикальной скорости, обусловленной рельефом, причем при задании нижнего граничного условия они относили эту вертикальную скорость не к уровню рельефа, где действительно эта скорость имеет место, а к уровню моря.

Такой упрощенный подход к решению задачи имеет ряд недостатков.

Во-первых, при учете влияния рельефа земли недостаточно учитывать только вертикальную скорость, вызываемую наличием наклона подстилающей поверхности. Естественно, что влияние рельефа далеко не исчерпывается одним склоном.

Например, в районах таких высокогорных плато, как Тибет и Монголия, профиль земли, за исключением периферии этих плато, приблизительно плоский. Поэтому над этими плато вертикальная скорость, вызванная неровностью местности, очень мала. Согласно упомянутым выше способам учета рельефа, эти плато будут мало влиять на синоптические процессы. На самом же деле влияние этих грандиозных плато чрезвычайно велико.

Во-вторых, возникает вопрос, можно ли всегда относить вертикальную скорость, обусловленную рельефом, к уровню моря. С математической точки зрения такой подход к решению означает, что в правой части формулы Тэйлора

$$\psi(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \frac{\partial^k \psi(1)}{\partial x^k} \quad (1)$$

отбрасывают, кроме первого члена, все остальные и, таким образом, получают равенство

$$\psi(1-x) = \psi(1). \quad (2)$$

Понятно, что это не всегда может удовлетворять требуемой степени точности. Если для сравнительно низких гор такой подход более или менее применим, то для высоких гор использование этого метода может привести к большим погрешностям.

Из вышеуказанного ясно, что существующие в литературе способы учета рельефа не применимы к условиям высокогорных плато. С этой точки зрения представляется интересным разобрать новые расчетные формулы, учитывающие как эффект общего подъема горы, так и более корректное задание граничного условия у поверхности земли.

§ 2. Решение задачи для условий плоских высокогорных плато

Для учета влияния высокогорных плато на изменения поля давления решим задачу в два приема: будем считать высокогорное плато плоским, т. е. полагая его высоту везде одинаковой и равной средней высоте, а потом при задании нижнего граничного условия мы учтем неровность поверхности высокогорных плато. Это можно сделать на основании того факта, что как прогностическое уравнение, так и граничные условия линейны относительно барической тенденции. Тогда сначала задача сведется к решению неоднородного уравнения с однородными граничными условиями, а затем к решению однородного уравнения с неоднородными граничными условиями.

Основное уравнение для определения тенденции давления пишется, как известно [18], в следующем виде:

$$\zeta^3 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} + a^2 \Delta \varphi = -\zeta f, \quad (3)$$

где ζ — вертикальная координата, а именно $\zeta = \frac{P}{P}$ (P — давление на данном уровне, P — среднее значение давления на уровне моря, принятое равным 1000 мб),

$$\varphi = \int_0^{\zeta} \frac{\partial \Phi}{\partial t} d\zeta'$$

(Φ — геопотенциал).

Величина

$$a^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g l^2},$$

где γ — градиент температуры, γ_a — сухоадиабатический градиент температуры, R — газовая постоянная, T — температура, g — ускорение силы тяжести, l — параметр Кориолиса, принимается постоянным.

Символ Δ означает оператор Лапласа на плоскости x, y ,

$$f = \frac{1}{l} \left\{ \Phi, \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\} + \frac{a^2}{\zeta} \int_0^{\zeta} \left\{ \Phi, \Delta \Phi + \frac{l^2}{2} \right\} d\zeta'.$$

Скобки типа $\{A, B\}$ обозначают плоский якобиан.

Граничные условия задаются следующие:

$$\tilde{w} = 0 \text{ при } \zeta = 0 \text{ и } \zeta = 1, \quad (4)$$

где $\tilde{w} = -\frac{\zeta}{RT} \left(g w - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - u \frac{\partial \Phi}{\partial x} - v \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)$ — скорость смещения частицы относительно изобарических поверхностей.

Следуя М. И. Юдину, решим уравнение (3) с граничным условием (4) методом полупрямых. При этом заменим лапласиан конечными разностями, но более точной формулой

$$\Delta \psi_0 = \frac{4}{h^2} (\psi_1 - \psi_0) - \frac{1}{4} (\Delta \psi_1 - \Delta \psi_0),$$

где ϕ — любая функция, h — шаг, т. е. расстояние между соседними точками. Индекс 0 обозначает величину в данной точке, а 1 — значение функции, осредненное по окружности радиусом 550 км.

Чтобы замкнуть систему уравнений, записанную в конечноразностных аналогах, приняли, что изменения вихря скорости так же, как изменения давления в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии около 1000 км и больше, не связаны между собой. Отметим, что если изменения давления в точках, отстоящих друг от друга, не связаны между собой [17], то отсюда следует, что и изменения вихря скорости (лапласиана от поля давления) также не должны быть связанными. Поэтому при замене лапласиана по более точной формуле фактически никакого дополнительного ограничения введено не было.

Приняв $h \approx 550$ км, получим, что $\frac{a^2}{h^2} \approx 1,71$.

Окончательное численное решение уравнения (3) для $h = 550$ км и $\frac{a^2}{h^2} = 1,71$ может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \Phi(\zeta)}{\partial t} = \sum_{j=0}^1 \int_0^1 [\alpha_j(\zeta, \zeta_1) M_j(\zeta_1) + \beta_j(\zeta, \zeta_1) N_j(\zeta_1)] d\zeta_1, \quad (5)$$

где $\zeta_1 = \frac{p}{P}$, $M = \frac{1}{l} \left\{ \Phi, \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\}$, $N = \frac{1}{l} \left\{ \Phi, \sum_{550}^6 \Phi + I \right\}$.

Символ $\sum_{550}^6$ означает сумму в окружающих шести точках, расстояние которых от данной точки равно 550 км, I — поправка на силу Кориолиса. Индексы j (0 и 1) имеют тот же смысл, что и ранее.

Для пяти стандартных изобарических поверхностей были вычислены численные значения функций влияния $\alpha_j(\zeta, \zeta_1)$ и $\beta_j(\zeta, \zeta_1)$.

Некоторые из них представлены в табл. 1–3. При $\zeta_1 = \zeta \neq 1$ значения α_0 претерпевают разрыв, поэтому в соответствующих графах приведены оба значения.

Если в случае прогноза над высокогорным плато в качестве вертикальной координаты выбрать другую безразмерную величину, а именно

$$\zeta' = \frac{p}{p_r},$$

где p_r — среднее значение давления на поверхности плато, то диапазон изменения вертикальной координаты от нуля до единицы как в случае высокогорных плато (ζ'), так и в случае равнины (ζ) остается неизменным.

При нахождении барической тенденции в краткосрочном прогнозе горизонтальный масштаб и масштаб времени можно считать одинаковыми как для районов равнины, так и для высокогорных плато. Выбрав безразмерные величины ζ и ζ' соответственно, мы получим одинаковый масштаб и для вертикальной координаты. Тогда движения в обоих случаях будут подобными, и с помощью теории подобия легко перейти от ранее полученных результатов [формула (5)] к результатам, применимым для высокогорных плато.

Сохраняя все прежние обозначения, напомним наши уравнения в системе координат x, y, ζ' . После соответствующих преобразований опять придем к уравнению (3) с граничными условиями (4), только в этом случае в формулах вместо величины ζ везде будет фигурировать ζ' . Нетрудно убедиться в том, что в системе координат x, y, ζ' решение примет такой вид:

$$\frac{\partial \Phi(\zeta')}{\partial t} = \sum_{j=0}^1 \int_0^1 [\alpha_j(\zeta', \zeta'_1) M_j(\zeta'_1) + \beta_j(\zeta', \zeta'_1) N_j(\zeta'_1)] d\zeta'_1. \quad (6)$$

Для $\zeta = 1$

Таблица 1

ζ_1	1	0,9	0,85	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,1
α_0	-1,00	-0,768	-0,668	-0,579	-0,422	-0,299	-0,205	-0,134	-0,081	-0,042	-0,028	-0,016
α_1	0	-0,109	-0,230	-0,280	-0,338	-0,354	-0,331	-0,281	-0,211	-0,135	-0,094	-0,056
β_0	0,659	0,540	0,481	0,424	0,326	0,245	0,178	0,124	0,080	0,045	0,031	0,018
β_1	0,745	0,730	0,709	0,687	0,624	0,549	0,456	0,358	0,255	0,154	0,103	0,064

Для $\zeta = 0,85$

Таблица 2

ζ_1	1	0,925	0,9	0,85	0,8	0,775	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,1
α_0	0	0,186	0,257	0,422	-0,652	-0,602	-0,474	-0,332	-0,220	-0,145	-0,080	-0,045	-0,029	-0,017
α_1	0	-0,063	-0,084	-0,146	-0,210	-0,243	-0,288	-0,338	-0,326	-0,283	-0,217	-0,138	-0,097	-0,059
β_0	0,476	0,491	0,496	0,525	0,465	0,435	0,355	0,264	0,191	0,132	0,084	0,047	0,032	0,018
β_1	0,710	0,708	0,705	0,697	0,680	0,671	0,628	0,559	0,468	0,368	0,265	0,161	0,112	0,067

Для $\zeta = 0,5$

Таблица 3

ζ_1	1	0,9	0,85	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,15	0,1
α_0	0	0,069	0,113	0,164	0,315	0,582	1,142	-0,491	-0,255	-0,107	-0,062	-0,035
α_1	0	0,057	0,089	0,122	0,186	0,206	-0,856	-0,211	-0,282	-0,228	-0,174	-0,110
β_0	0,178	0,184	0,192	0,203	0,250	0,349	0,044	0,356	0,207	0,103	0,066	0,037
β_1	0,459	0,464	0,470	0,479	0,510	0,553	0,590	0,568	0,450	0,294	0,210	0,128

Учитывая соотношение

$$\zeta' = \frac{\zeta}{\eta},$$

где $\eta = \frac{p_r}{p}$ (профиль гор в системе координат x, y, ζ), мы сразу же убедемся в том, что численные значения функции влияния для $\zeta = \zeta_2$ над высокогорными плато равны тем же значениям для $\zeta = \frac{\zeta_2}{\eta}$ над равниной, причем значения ζ_2 заключены в промежутке $0 \leq \zeta_2 \leq \eta$.

Например, для $\eta = 0,85$, т. е. для высокогорных плато высотой приблизительно 1500 м, имеем

$$\left. \frac{\partial \Phi(0,85)}{\partial t} \right|_{\eta=0,85} = \left. \frac{\partial \Phi(1)}{\partial t} \right|_{\eta=1}.$$

Другое эквивалентное соотношение таково:

$$\left. \frac{\partial \Phi(0,5)}{\partial t} \right|_{\eta=0,85} = \left. \frac{\partial \Phi(0,59)}{\partial t} \right|_{\eta=1}.$$

На основании теории подобия полученные значения функции влияния в случае равнины ($\eta = 1$) легко могут быть пересчитаны для получения численных значений функций влияния применительно к высокогорным плато. В качестве примера в табл. 4—6 приведены значения функций влияния для $\zeta = 0,85$ и $0,5$ при $\eta = 0,85$, что соответствует условиям Монголии и прилегающих к ней районов, и $\eta = 0,5$, что соответствует условиям Тибета.

Сопоставляя эти таблицы с предыдущими, увидим, что значения функций влияния сильно отличаются друг от друга при разных η для одного и того же ζ . Это говорит о важности фактора общего поднятия подстилающей поверхности. Этот фактор заметно влияет на изменения поля давления. Отметим, что ранее в мировой литературе этот вопрос не разбирался.

§ 3. Учет неровностей высокогорных плато

Изменения давления, вызываемые наклоном подстилающей поверхности, описываются уравнением

$$\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial t} = l^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta}, \quad (7)$$

где $\tilde{w}$ — вертикальная скорость в системе координат x, y, ζ , обусловленная наклоном подстилающей поверхности.

Решив уравнение Пуассона (7), получим $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ как функцию от $\tilde{w}$.

Для нахождения вертикальной скорости $\tilde{w}$, обусловленной неровностью местности, используем уравнение

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \zeta^2} + a^2 \Delta \tilde{w} = 0 \quad (8)$$

с граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}(0) &= 0 \\ \tilde{w}(\eta) &= -0,6 \frac{g}{RT} \frac{\eta}{l} \{ \Phi, H_r \} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где η — профиль гор в системе координат x, y, ζ ; H_r — геометрическая высота гор в сотнях метров. Отметим, что в формуле (9) нижнее граничное условие задано именно на том уровне, где действительно возникает вертикальная скорость, а не относится к уровню моря, как это делается в ряде работ других авторов.

Таблица 4

Для $\zeta = 0,85$ $\eta = 0,85$												
ζ_1	0,85	0,765	0,722	0,68	0,595	0,51	0,425	0,34	0,255	0,17	0,128	0,085
α_0	-1	-0,768	-0,668	-0,579	-0,422	-0,299	-0,205	-0,134	-0,081	-0,042	-0,028	-0,016
α_1	0	-0,169	-0,230	-0,280	-0,338	-0,354	-0,331	-0,281	-0,211	-0,185	-0,094	-0,056
β_0	0,659	0,540	0,481	0,424	0,326	0,245	0,178	0,124	0,080	0,045	0,031	0,018
β_1	0,745	0,730	0,709	0,687	0,624	0,549	0,456	0,358	0,255	0,154	0,108	0,064

Таблица 5

Для $\zeta = 0,5$ $\eta = 0,85$						
ζ_1	0,85	0,7	0,5	0,4	0,3	0,15
α_0	0	0,210	1,383 -0,862	-0,438	-0,225	-0,065
α_1	0	0,063	-0,024	-0,235	-0,279	-0,169
β_0	0,238	0,269	0,517	0,323	0,186	0,063
β_1	0,540	0,550	0,600	0,550	0,428	0,204

Таблица 6

Для $\zeta = 0,5$ $\eta = 0,5$												
ζ_1	0,5	0,45	0,425	0,4	0,35	0,3	0,25	0,2	0,15	0,1	0,075	0,05
α_0	-1	-0,768	-0,668	-0,579	-0,422	-0,299	-0,205	-0,134	-0,081	-0,042	-0,028	-0,016
α_1	0	-0,169	-0,230	-0,280	-0,338	-0,354	-0,331	-0,281	-0,211	-0,135	-0,094	-0,056
β_0	0,659	0,540	0,481	0,424	0,326	0,245	0,178	0,124	0,080	0,045	0,031	0,018
β_1	0,745	0,730	0,709	0,687	0,624	0,549	0,456	0,358	0,255	0,154	0,108	0,064

Попутно отметим, что в работе [9] излагается другая схема учета неровностей земной поверхности — способ разложения по малому параметру, предложенный М. Е. Швецом.

Множитель 0,6, входящий в правую часть формулы (9), учитывает влияние турбулентного трения на скорость ветра [14].

Решение уравнения (8) с граничными условиями (9), полученное методом полупрямых, имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{w}_0 &= a\zeta^{4,09} + b\zeta^{2,30} \\ \tilde{w}_1 &= -0,271a\zeta^{4,09} + 0,604b\zeta^{2,30} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где

$$a = \frac{0,604\eta_1^{2,30}\tilde{w}_0(\eta_0) - \eta_0^{2,30}\tilde{w}_1(\eta_1)}{0,604\eta_1^{2,30}\eta_0^{4,09} + 0,271\eta_1^{4,09}\eta_0^{2,30}},$$

$$b = \frac{0,271\eta_1^{4,09}\tilde{w}_0(\eta_0) + \eta_0^{4,09}\tilde{w}_1(\eta_1)}{0,271\eta_1^{4,09}\eta_0^{2,30} + 0,604\eta_1^{2,30}\eta_0^{4,09}}.$$

Индексы 0 и 1 как при $\tilde{w}$, так и при η имеют тот же смысл что и ранее. Обращается внимание на то, что в формуле (10) коэффициенты a и b зависят не только от склонов рельефа местности ($\tilde{w}$), но также и от профиля гор (η).

Решив уравнение (7) методом сеток, получим

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -9,9 \frac{\partial \tilde{w}_0}{\partial \zeta} - 18,2 \frac{\partial \tilde{w}_1}{\partial \zeta}, \quad (11)$$

где $\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta}$ определяется формулой (10).

С точки зрения применения графоаналитического метода полученные результаты оказываются слишком громоздкими, поэтому их необходимо упростить. С этой целью примем, что для равнины $\eta_0 = \eta_1 = 1$, а для Монголии и прилегающих к ней районов $\eta_0 = \eta_1 = 0,85$, для Тибета $\eta_0 = \eta_1 = 0,5$.

Заменяя производные конечными разностями, согласно рекомендациям Юдина [18], сведем полученные решения к двухслойной расчетной схеме $AT_{850} - AT_{500}$ применительно к графоаналитическому способу.

В табл. 7 приведены элементы расчетных формул для Монгольского плато и прилегающих к нему районов ($\eta = 0,85$).

Таблица 7

Ведущие потоки	Переносимые величины	Скорость переноса	Результат переноса за сутки
$\Phi(0,5)$	OT_{1000}^{500}	$0,55 V_r$	δ_I
$\frac{1}{10} \sum_{950}^6 \Phi(0,85) + J + 0,60 H_r$	$\Phi(0,85)$	$0,67 V_r$	δ_{II}
$\frac{1}{10} \sum_{950}^6 \Phi(0,5) + J$	$\Phi(0,5)$	$1,82 V_r$	δ_{III}

V_r — скорость геострофического ветра.

Символ $\sum_{950}^6$ означает сумму в шести окружающих точках, расстояние

которых от данной точки равно 950 км (эти точки расположены на втором круге). Согласно исследованию Юдина, данная сумма имеет минимальную суточную изменчивость.

Входящая во второй ведущий поток величина $0,60H_r$ учитывает наклон местности.

Суточное изменение геопотенциала на поверхностях AT_{150} и AT_{500} дается соответственно по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} \delta\Phi(0,85) &= -0,64(\delta_I)_0 - 0,06 \sum_{550}^6 \delta_I + 0,46(\delta_{II})_0 + 0,09 \sum_{550}^6 \delta_{II} + \\ &\quad + 0,19(\delta_{III})_0 + 0,08 \sum_{550}^6 \delta_{III} \\ \delta\Phi(0,5) &= 0,104(\delta_I)_0 + 0,007 \sum_{550}^6 \delta_I + 0,175(\delta_{II})_0 + 0,064 \sum_{550}^6 \delta_{II} + \\ &\quad + 0,45(\delta_{III})_0 + 0,10 \sum_{550}^6 \delta_{III} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

В целях выяснения роли Монгольского высокогорного плато в изменении поля давления были выведены для этих же районов расчетные формулы без учета этого плато (т. е. положено $\eta = 1$ и местность считается абсолютно плоской).

$$\left. \begin{aligned} \delta\Phi(0,85) &= -0,28(\delta_I)_0 - 0,06 \sum_{550}^6 \delta_I + 0,4(\delta_{II})_0 + \\ &\quad + 0,1 \sum_{550}^6 \delta_{II} + 0,2(\delta_{III})_0 + 0,07 \sum_{550}^6 \delta_{III} \\ \delta\Phi(0,5) &= 0,11(\delta_I)_0 + 0,01 \sum_{550}^6 \delta_I + 0,18(\delta_{II})_0 + \\ &\quad + 0,06 \sum_{550}^6 \delta_{II} + 0,4(\delta_{III})_0 + 0,1 \sum_{550}^6 \delta_{III} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

В этих формулах суточные приращения геопотенциала δ_I , δ_{II} , δ_{III} получаются из элементов, приведенных в табл. 8.

Таблица 8

Ведущие потоки	Переносимые величины	Скорость переноса	Результат переноса за сутки
$\Phi(0,5)$	OT_{1000}^{500}	$0,68 V_r$	δ_I
$\frac{1}{10} \sum_{950}^6 \Phi(0,85) + J$	$\Phi(0,85)$	$1,23 V_r$	δ_{II}
$\frac{1}{10} \sum_{950}^6 \Phi(0,5) + J$	$\Phi(0,5)$	$1,33 V_r$	δ_{III}

Статистические данные показали, что над Восточной Азией уровень ведущего потока находится примерно между поверхностями AT_{500} и AT_{300} [15].

Как в формуле (12) [табл. 7], так и в формуле (13) [табл. 8] в качестве первого ведущего потока мы брали изогипсы AT_{500} , а не AT_{700} . Более того, в бюллетени китайских синоптических карт также входят карты AT_{500} , OT_{1000}^{500} , а не AT_{700} , OT_{1000}^{500} . Поэтому выбор карт AT_{500} и OT_{1000}^{500} удобен и для практических расчетов.

§ 4. Опыт применения расчетных схем к условиям Восточной Азии

Для характеристики рельефа использована осредненная гипсометрическая карта земного шара [19]. В качестве интервала осреднения здесь принято 5° широты и долготы, что примерно соответствует шагу в расчетной схеме.

По району Монгольского плато и прилегающим к нему районам для 10 дней были выполнены опытные прогнозы по разработанной двухслойной схеме $AT_{850} - AT_{500}$. Каждый такой прогноз давался дважды: первый раз с учетом влияния высокогорных плато, т. е. расчет проводился по формулам (12) и табл. 7; второй раз прогноз давался по расчетным формулам (13) и табл. 8, т. е. так же, если бы Монгольского плато не было вовсе.

Таким образом, проведено всего 40 расчетов. Они были сделаны студентами ЛГМИ С. И. Андреевым, В. Е. Голубевым, В. С. Дудкой и Н. А. Контонистовой с участием автора настоящей статьи.

Результаты проведенных расчетов представлены в табл. 9. В этой таблице в третьей графе цифра I означает оправдываемость при допустимой ошибке в 4 дкм, II — оправдываемость по интегральной кривой, III — относительную ошибку. В четвертой и шестой графах приведены полученные результаты с учетом высокогорных плато, а в пятой и седьмой — без учета.

На основе 40 расчетов можно сделать заключение, что учет высокогорных плато по нашей схеме заметно улучшает результаты.

В среднем по 20 прогнозам (для двух уровней) оправдываемость при допустимой ошибке в 4 дкм составляет 74% с учетом высокогорных плато, а без учета — только 66% ; оправдываемость по интегральной кривой в обоих случаях соответственно составляет 67 и 60% . Таким образом, можно заключить, что повышение оправдываемости при учете высокогорных плато составляет около 10% . Что же касается относительной ошибки, то в среднем по 20 прогнозам она уменьшается на 23% при учете высокогорных плато (с учетом плато 75% и без учета 98%). Тем самым подтверждена правильность нашего подхода к решению поставленной задачи по учету высокогорных плато при численном прогнозе поля давления.

В то же время следует отметить, что в отдельных случаях учет высокогорных плато незначительно улучшает или даже несколько ухудшает результаты. Эти исключения не опровергают общую правильность принятой нами расчетной схемы. Дело в том, что в нашей схеме имеется ряд ограничений, например квазигеострофичность, адиабатичность, отсутствие фронтов и т. д. Возможно, что в некоторых отдельных случаях вклад высокогорных плато в изменение поля давления в какой-то степени случайно компенсируется отклонением реальных процессов от принятых условий. Однако учет этих отклонений выходит за рамки данной статьи. Впрочем, отдельные случаи ухудшения, имевшие место при расчете, были очень незначительны и не могли повлиять на общее улучшение результатов расчета по предложенной схеме.

Улучшение результатов, получаемых благодаря учету влияния высокогорных плато для AT_{500} , такое же, какое имеет место и для AT_{850} . Это говорит о важности учета влияния общего повышения подстилающей поверхности в горных районах. При этом общее повышение подстилающей поверхности влияет на изменения поля давления на разных уровнях атмосферы примерно одинаково, в то время как наклон подстилающей поверх-

Таблица 9

Номер прогноза	Дата	Результаты	AT ₈₅₀		AT ₅₀₀	
1	10—11/I	I	92	25	58	42
		II	70	38	68	57
		III	77	93	79	100
2	22—23/I	I	25	75	67	83
		II	52	82	67	71
		III	71	86	42	91
3	28—29/I	I	100	100	100	100
		II	61	48	78	67
		III	70	107	56	87
4	26—27/III	I	75	58	67	58
		II	59	50	66	57
		III	75	87	62	72
5	20—21/VI	I	66	25	66	50
		II	74	54	74	60
		III	113	205	76	116
6	28—29/VI	I	66	83	66	75
		II	74	82	76	80
		III	128	104	92	76
7	29—30/VI	I	92	100	83	83
		II	80	72	68	68
		III	90	157	80	86
8	22—23/IX	I	70	42	75	33
		II	68	58	63	46
		III	54	67	61	86
9	5—6/XII	I	73	71	58	58
		II	50	50	56	52
		III	115	121	78	82
10	6—7/XII	I	71	50	100	160
		II	84	67	68	40
		III	61	96	24	40
	Среднее . . .	I	73,0	62,9	74,0	68,2
		II	66,4	60,1	68,4	59,8
		III	85,4	111,9	65,0	83,6

ности заметно влияет только на изобарические поверхности нижней тропосферы.

Следует попутно отметить, что общее повышение подстилающей поверхности является постоянно действующим фактором независимо от особенностей синоптических ситуаций, тогда как влияние наклона подстилающей поверхности существенно сказывается лишь при определенных синоптических положениях. Это влияние заметно только тогда, когда направление воздушного потока перпендикулярно изогипсам гипсометрической карты.

Чтобы дать количественное представление о зависимости результатов прогноза от свойств барических образований и стадий их развития, в табл. 10 приведена средняя алгебраическая ошибка (САО), среднее фактическое алгебраическое изменение (СФАИ) и среднее фактическое изменение по модулю (СФИМ) для каждого случая, рассчитанного с учетом высокогорного плато. В этой же таблице также указан для каждого случая характер синоптической ситуации (ХСС). Антициклонический случай обозначен через А, циклонический случай — через Ц.

Из данных табл. 10 видно, что для случаев углубляющихся циклонов или ослабевающих антициклонов средняя алгебраическая ошибка положительна, т. е. прогностическое значение завышено.

№ случая	ХСС	АТ ₈₅₀			АТ ₅₀₀		
		САО	СФАИ	СФИМ	САО	СФАИ	СФИМ
1	А	-1,2	-0,8	2,5	-3,9	3,8	4,8
2	А	5,0	-8,2	8,2	2,4	-6,8	7,4
3	Ц	-0,4	2,0	2,5	-0,8	1,2	1,9
4	А	3,7	-4,2	5,1	3,4	-2,8	7,7
5	А	-3,1	2,7	3,2	-1,6	2,9	4,7
6	Ц	2,8	-2,0	2,7	3,0	-2,0	3,5
7	Ц	1,5	-0,7	1,8	-0,2	-0,7	2,9
8	А	-3,9	7,6	7,6	-3,2	5,2	5,8
9	Ц	-0,8	1,4	4,4	2,5	5,5	6,2
10	Ц	-0,8	3,0	3,7	-0,8	0,3	6,0

Для случаев заполняющихся циклонов или усиливающихся антициклонов средняя алгебраическая ошибка отрицательна, т. е. прогностическое значение занижено.

В случае углубляющихся циклонов или усиливающихся антициклонов учет приземного трения, которое не было введено в наши расчеты, будет еще больше ухудшать результаты расчета, так как в случаях циклонов приземное трение содействует росту давления, а в случаях антициклонов — падению давления [5].

Поскольку приземное трение тесно связано с диссипацией кинетической энергии, то это наводит нас на мысль, что углубляющиеся циклоны и усиливающиеся антициклоны связаны с механизмом увеличения кинетической энергии атмосферы. Это увеличение настолько значительно, что полностью погашает диссипационный эффект приземного трения. Отметим, что сходные результаты получены и для прогнозов над Европой [7].

Таким образом, в нашей работе дается ответ на вопрос о механизме увеличения кинетической энергии атмосферы. Ряд авторов [10] при рассмотрении данного важного вопроса не учитывают стадий развития барических образований, и поэтому они не могут прийти к правильному выводу.

При выполнении настоящей работы ценные замечания сделаны А. С. Дубовым, М. Е. Швецом и М. И. Юдиным, которым автор выражает благодарность.

РЕЗЮМЕ

Излагается способ учета высокогорных плато при численном прогнозе поля давления. Задача решена методом полупрямых. Прогноз дается на двух уровнях (850 и 500 мб) графоаналитическим методом. Выведенные расчетные формулы применялись к географическим условиям Восточной Азии. Выполнено 40 опытных прогнозов.

В статье приведены результаты этих прогнозов и выполнен их анализ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоусов С. Л., Быков В. В. Об учете влияния гор при прогнозе барического поля. Изв. АН СССР, № 9, сер. геофиз. 1957.
2. Быков В. В. К вопросу о влиянии гор на изменение давления в средней тропосфере. Метеорология и гидрология, № 4. 1955.
3. Гу Чжэнь-чао, Е Ту-чжэн. Некоторые данные о влиянии орографии большого масштаба на синоптические процессы над Китаем и их количественные оценки. Метеорология, т. 26, № 3. Пекин. 1955.
4. Гу Чжэнь-чао, Чжэн Сюн-шан. Возмущения барического поля, вызываемые Тянь-Шанем и Алтаем в стратифицированной атмосфере. Вестник АН Китая, № 12. Пекин. 1957.

5. Дубов А. С. Об учете приземного трения при прогнозе поля давления у земли. Труды ГГО, вып. 71. 1957.
6. Дубов А. С. О влиянии горных хребтов на перемещение циклонов. Труды ГГО, вып. 76. 1958.
7. Дубов А. С., Орлова Л. С. Результаты прогноза наземного поля давления и карт барической топографии графоаналитическим методом. Труды ГГО, вып. 71. 1957.
8. Дусин-юань. Решение пространственной задачи изменения геопотенциала во времени с уточненной заменой лапласиана конечными разностями. Метеорология и гидрология, № 1. 1959.
9. Дусин-юань. Уточненная схема учета неровностей земной поверхности в численных методах прогноза. Настоящий сборник.
10. Ету-чжэн. Об источниках кинетической энергии атмосферы. Метеорология, т. 25, № 4. Пекин. 1954.
11. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Техничко-теоретическое изд-во. 1957.
12. Лю Жи-цзи, Гу Чжэнь-чао. О формировании сухой Северо-Китайской ложбины. Труды Пекинского университета, т. 3, № 1. Пекин. 1957.
13. Петросянц М. А. О масштабе орографических влияний на синоптические процессы Средней Азии. Методические указания по службе прогнозов погоды, № 27. Ташкент. 1951.
14. Решетникова К. А. Определение вертикальных токов из уравнений динамики турбулентной атмосферы и анализ их среднемесячных значений. Труды ГГО, вып. 71. 1957.
15. Тао Ши-янь, Ляу Дун-сиан. Опыт применения советского метода адвективно-динамического анализа в Восточной Азии. Метеорология, т. 25, № 4, Пекин. 1954.
16. Чжоу Сян-пин, Гу Чжэнь-чао. Влияние рельефа большого масштаба на распространение высотной планетарной волны. Метеорология, т. 29, № 2. Пекин. 1958.
17. Юдин М. И. Изменчивость метеорологических элементов в пространстве и времени. А. И. Воейков и современные проблемы климатологии. 1956.
18. Юдин М. И. О прогнозе поля давления численными методами. Труды ГГО, вып. 71. 1957.
19. Berkofsky L. and Bertoni E. A. Mean topographic charts for the entire earth, Bull. Amer. Met. Soc., vol. 36, № 7. 1955.
20. Bolin B. On the influence of the earth's orography on the general character of the westerlies. Tellus, vol. 2, № 3, 1950.
21. Estoque M. A. A graphically integrable prediction model incorporating orographic influences. Journ. of Meteorol., vol. 14, № 4. 1957.
22. Gambo K. and others. Topographical effects on the numerical weather prediction in the lower atmosphere. Journ. Meteorol. Japan, Ser. II, vol. 34, № 5. 1956.
23. Kawata Y. The influence of the Rocky Mts. on non-steady isobaric height patterns. Journ. Meteorol. Soc. of Japan., vol. 35, № 3. 1957.
24. Yen Tu-Cheng and Chu Pao-Chen. Some fundamental problems of the general circulation of the atmosphere. Ch. IX. Peking. 1958.

К ВОПРОСУ О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФРОНТАЛЬНОГО ЦИКЛОГЕНЕЗА

Открытие существования в природе фронтальных поверхностей сыграло большую роль в анализе и прогнозе погоды. Одним из основных синоптических объектов, широко изучающихся в современных исследованиях, являются фронтальные циклоны.

Классические работы советской школы волновой теории тридцатых годов [1], [3], [4] имеют фундаментальное значение. Полученный критерий потери устойчивости фронтальной волны положил основу изучению циклонообразования.

Однако к решению этого важнейшего вопроса еще не привлечены новейшие результаты гидродинамической теории, в частности, полученные с помощью уравнения вихря скорости. В этом направлении появилось лишь несколько работ [2], [6], [7].

При использовании геострофического соотношения ветра в работе В. П. Садокова [2] получилось, что на поверхности фронта вертикальная скорость непрерывна.

Известно, что на фронте горизонтальные составляющие скорости претерпевают разрыв. Следовательно, вообще говоря, должна быть прерывной и вертикальная скорость, однозначно связанная с горизонтальными составляющими скорости уравнением неразрывности. В своем практическом опыте синоптики также хорошо различают типы фронтов — анафронты и катифронты — по знаку разрыва вертикальной скорости. Разрыв вертикальной скорости на поверхности фронта, по-видимому, не только действительно существует, но, как это показано в работе [6], и имеет большое значение при циклогенезе.

Поэтому крайне желательно учесть это важнейшее свойство фронтальной поверхности — разрыв вертикальной скорости — при численном прогнозе как барического поля, так и особенно фронтального циклогенеза. Такая задача и поставлена в настоящей статье.

Однако при этом возникает большая трудность, связанная с необходимостью предвычисления отклонения ветра от геострофического у поверхности фронта. Оказалось, что эту трудность можно преодолеть обходным путем. Использование статистических соотношений позволяет нам избежать прямого вычисления отклонения ветра от геострофического. Такой способ учета разрыва вертикальной скорости на поверхности фронта подсказан М. И. Юдиным и будет использован в данной работе при задании граничных условий.

Чтобы выяснить характер решения, рассмотрим случай одной фронтальной поверхности. Назовем ее S .

Введем безразмерную вертикальную координату $\zeta = \frac{p}{p_0}$, выражаемую от-

ношением значения давления к стандартному давлению на уровне моря. Пусть уравнение фронтальной поверхности S в координатах x, y, ζ в момент t имеет вид

$$\zeta = \zeta_0(x, y, t), \quad (1)$$

где наличие зависимости от времени t означает, что эта поверхность перемещается и деформируется со временем.

Будем обозначать индексами I и II все элементы, отвечающие соответственно холодной и теплой массам. Введем некоторые обозначения. Пусть

$$[f] = f^I(x, y, \zeta_0, t) - f^{II}(x, y, \zeta_0, t), \quad (2)$$

где $f^I(x, y, \zeta_0, t)$ — значение, которое получает f в точке $M(x, y, \zeta_0)$ поверхности S , если прийти к этой точке, оставаясь в среде I; соответственно $f^{II}(x, y, \zeta_0, t)$ отвечает приближению к точке M со стороны среды II.

Уравнение притока тепла запишется так:

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial t} + c^2 \tau = R \zeta A_T, \quad (3)$$

где

$$c^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g},$$

$$\tau = \frac{d\zeta}{dt},$$

$$A_T = -\frac{\zeta}{R} \frac{1}{l} \left\{ \Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\} - \frac{\varepsilon R T}{\zeta c_p P}. \quad (4)$$

Скобки типа $\{m, n\}$ обозначают якобиан на горизонтальной плоскости, Φ — геопотенциал, l — параметр Кориолиса, R — газовая постоянная, ε — плотность тепловой мощности притока энергии, c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении, T — температура воздуха, γ_a — адиабатический градиент температуры, γ — вертикальный градиент температуры, g — ускорение силы тяжести.

Уравнение вихря скорости имеет вид

$$\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial t} - l^2 \frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = -A_\Omega, \quad (5)$$

где

$$A_\Omega = \frac{1}{l} \left\{ \Phi, \Delta \Phi \right\} + \beta \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (6)$$

Символ Δ обозначает лапласиан на горизонтальной плоскости,

$$\beta = \frac{dl}{dy}.$$

Следует отметить, что все эти уравнения должны быть написаны дважды — отдельно для каждой воздушной массы, разделенной фронтальной поверхностью.

В качестве одного граничного условия на поверхности фронта принято условие непрерывности геопотенциальной тенденции, т. е.

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] \approx 0 \quad \text{при } \zeta = \zeta_0. \quad (7)$$

Это условие в точности, вообще говоря, не выполняется, т. е. локальная тенденция на фронтальной поверхности разрывна. Но по сравнению с величиной самой геопотенциальной тенденции значение ее разрыва очень мало. Пренебрежение этим разрывом при нахождении геопотенциальной тенденции вызывает погрешность лишь порядка сотых, что вполне допустимо.

Второе граничное условие можно получить, привлекая уравнение (3). Напишем это уравнение на поверхности фронта

$$\left[\zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial t} \right] + c^2 [\tau] = R \zeta_0 [A_T] \quad (8)$$

при $\zeta = \zeta_0$.

Мы считаем, что c^2 можно принять для обеих масс одно и то же, а именно некоторое среднее значение.

Между отдельными слагаемыми, входящими в уравнение (8), существует определенная корреляционно-статистическая связь, которая и может быть использована при задании второго граничного условия. Второе слагаемое слева имеет знак, обратный знаку остальных слагаемых, т. е.

$$\left[\zeta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial t} \right] = \frac{R}{k^2} [A_T] \quad (9)$$

$$\text{и} \quad \left[\zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \zeta \partial t} \right] = -k_1^2 c^2 [\tau], \quad (9a)$$

где k^2 и k_1^2 — положительные числа, причем

$$1 - k^2 = \frac{1}{k_1^2}.$$

Напомним, что A_T — отток тепла (включая сюда и горизонтальную адвекцию холода) и что

$$T = -\frac{\zeta}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta}, \quad (10)$$

$$\tau \approx -\frac{g}{RT} \zeta w \quad (\text{приближенно}), \quad (11)$$

где w — вертикальная скорость.

Итак, условие (9) означает, что изменение температуры в сторону понижения пропорционально оттоку тепла. Условие (9a) означает, что восходящее (нисходящее) движение сопровождается понижением (повышением) температуры. Указанное справедливо в подавляющем большинстве случаев, т. е. условия (9) и (9a) довольно хорошо улавливают процессы, действительно происходящие в атмосфере, в частности, на фронтальной поверхности.

Будем считать поверхность фронта квазигоризонтальной. Иначе говоря, будем вести расчеты на достаточном удалении от места пересечения фронтальной поверхности с поверхностью земли. Это значит, что будем записывать краевые условия (7), (9) не вдоль наклонной поверхности (1), а при постоянном, не зависящем от x и y , значении ζ ; обозначим его

$$\zeta = \tilde{\zeta}_0, \quad (1a)$$

причем $\tilde{\zeta}_0$ — постоянное число в отличие от ζ_0 , определенного по уравнению (1).

Введем безразмерные горизонтальные координаты

$$x_1 = \frac{l}{c} x, \quad y_1 = \frac{l}{c} y, \quad \Delta_1 = \frac{c^2}{l^2} \Delta.$$

Определим геопотенциальную тенденцию, обусловленную наличием фронтальной поверхности. Исключив вертикальную скорость из уравнений (3) и (5), получим прогностические уравнения для барического поля. Затем из них выделим систему однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi^I}{\partial \zeta \partial t} \right) + \Delta_1 \frac{\partial \Phi^I}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial^2 \Phi^{II}}{\partial \zeta \partial t} \right) + \Delta_1 \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Согласно теории линейных дифференциальных уравнений система (12) при граничных условиях (7) и (9) на поверхности фронта, а также при условиях:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi^I}{\partial t} &= 0 \quad \text{при } \zeta = 1 \\ \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial t} &\text{ ограничено при } \zeta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

характеризует влияние фронтальной поверхности на изменение поля давления.

Решение это, полученное методом Фурье, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \Phi^I}{\partial t} = \frac{\partial \Phi^{II}}{\partial t} = \frac{R}{4\pi k^2} \sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a - \ln \frac{1}{\zeta \zeta_0}}^{a - \ln \frac{1}{\zeta \zeta_0}} \sigma(a, r_1) [A_r] dx'_1 dy'_1, \quad (14)$$

где $r_1^2 = (x'_1 - x_1)^2 + (y'_1 - y_1)^2$,

$$\sigma(a, r_1) = \frac{e^{-\frac{1}{2} \sqrt{a^2 + r_1^2}}}{\sqrt{a^2 + r_1^2}}.$$

Функция $\sigma(a, r_1)$ положительна, симметрична относительно центральной точки, для которой дается прогноз, и быстро убывает с увеличением абсолютной величины своих аргументов. Верхний предел $a = \ln \frac{1}{\zeta \zeta_0}$ всегда

больше, чем нижний предел $a = \ln \frac{\zeta}{\zeta_0}$. Таким образом, в правой части

этих формул разрыв оттока тепла $[A_r]$ имеет отрицательный множитель. Следовательно, с учетом соотношений (9) и (10) можно сделать вывод, что в случае увеличения контраста температур на фронтальной поверхности во всем пространстве имеет место падение давления, причем падение сильно ослабляется с удалением от фронта. Это неравномерное падение давления способствует циклогенезу. Геометрическим изображением значений функции σ на горизонтальной плоскости являются концентрические окружности, центр которых лежит в прогнозируемой точке, а геометрическая фигура функции (A_r) совпадает по форме с фронтом, т. е. с уравнением (1). Сочетание этих двух функций дает квазиэллиптическую фигуру, главная ось которой совпадает с фронтом. Именно такую форму обычно и имеют изобары у фронтов на синоптических картах.

В случае уменьшения контраста температуры на фронтальной поверхности имеет место обратная картина.

Этот вывод также получится при прямом предвычислении индивидуального изменения вихря скорости.

Прежде чем выяснить прямую связь между фронтами и циклогенезом (индивидуальным изменением вихря скорости) удобно вычислить вертикальную скорость, обусловленную наличием фронтальной поверхности.

Будем искать величину τ , однозначно связанную с вертикальной скоростью соотношением (11). Граничные условия на поверхности фронта примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\tau}{\zeta} \right] &= - \frac{R(1 - k^2)}{c^2 k^2} [A_r] \\ l^2 \left[\frac{\partial \tau}{\partial \zeta} \right] &= [A_\sigma] \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Можно выделить систему однородных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \zeta^2 \frac{\partial^2 \tau^I}{\partial \zeta^2} + \Delta_1 \tau^I &= 0 \\ \zeta^2 \frac{\partial^2 \tau^{II}}{\partial \zeta^2} + \Delta_1 \tau^{II} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

которая при граничных условиях

$$\left. \begin{aligned} \tau^I &= 0 & \text{при } \zeta &= 1 \\ \tau^{II} &= 0 & \text{при } \zeta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

и условиях на поверхности фронта (15) характеризует фронтальный эффект. Решение ее следующее:

$$\left. \begin{aligned} \tau^I &= \frac{\sqrt{\zeta \tilde{\zeta}_0}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a=\ln \frac{1}{\tilde{\zeta}_0}}^{a=\ln \frac{1}{\zeta}} \left\{ \frac{R(1-k^2)}{k^2 c^2} \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\partial \sigma}{\partial a} \right) [A_\tau] + \frac{\sigma}{l^2} [A_\sigma] \right\} dx'_1 dy'_1 \\ \tau^{II} &= \frac{\sqrt{\zeta \tilde{\zeta}_0}}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a=\ln \frac{\tilde{\zeta}_0}{\zeta}}^{a=\ln \frac{1}{\tilde{\zeta}_0}} \left\{ \frac{R(1-k^2)}{c^2 k^2} \left(\frac{\sigma}{2} - \frac{\partial \sigma}{\partial a} \right) [A_\tau] + \frac{\sigma}{l^2} [A_\sigma] \right\} dx'_1 dy'_1 - \\ &\quad - \frac{\sqrt{\zeta \tilde{\zeta}_0}}{2\pi} \frac{R(1-k^2)}{c^2 k^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{a=\ln \frac{\tilde{\zeta}_0}{\zeta}}^{\infty} \frac{\partial \sigma}{\partial a} [A_\tau] dx'_1 dy'_1 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Перепишем уравнение (5) в виде, удобном для вычисления индивидуального изменения вихря

$$\frac{d}{dt} \left(\Delta \Phi + \frac{l^2}{2} \right) = l^2 \frac{\partial \tau}{\partial \zeta}. \quad (19)$$

Формулы (18) и (19) позволяют нам предсказать на любой изобарической поверхности индивидуальное изменение вихря скорости, т. е. циклогенез, обусловленный фронтальной поверхностью.

Если проинтегрировать уравнение (19) по ζ от 0 до 1 с учетом условий (17) и (15), то получим среднее изменение вихря во всей атмосферной толще, обусловленное фронтом,

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 \left(\Delta \Phi + \frac{l^2}{2} \right) d\zeta = \frac{R l^2}{c^2 k^2 k_1^2} [\zeta, A_\tau]. \quad (20)$$

Легко проверить, что как из формул (18) и (19), так и из формулы (20) вытекает тот же самый вывод относительно влияния скачка температур на процесс циклогенеза, который получился при анализе формулы (14). Таким образом, мы пришли к совершенно определенному выводу: увеличение (уменьшение) скачка температур на поверхности фронта способствует циклогенезу (циклолизу). Причем этот вывод независим от стадий развития фронтальных волн.

Еще примерно тридцать лет тому назад советская школа волновой теории во главе с Н. Е. Кочиным получила критерий, согласно которому увеличение (уменьшение) скачка температур на фронтальной поверхности способствует уменьшению (увеличению) устойчивости фронтальных волн. Далее была принята гипотеза, что потеря устойчивости приведет к образованию циклонов. Так волновая теория и объясняет процесс начальной стадии циклогенеза.

Нам представляется, что с учетом результатов, полученных в данной статье, теорию Кочина можно связать с гидродинамической теорией изменений давления и дальнейшим углублением циклонов.

Попутно отметим, что концепция норвежской школы волновой теории, которая прямо противоположна работе Кочина [5], в данной статье не нашла подтверждения.

Полученные здесь результаты относительно влияния скачка температур подтверждаются синоптическим опытом.

Например, когда зимой холодная воздушная масса из Сибири подвигается к югу, никакой циклон не возникает над территорией Северного Китая, где контраст температур недостаточен. Фронт быстро доходит до районов Южного Китая, и там часто имеет место фронтальный циклогенез, поскольку, в то время как наверху появляется более теплый тропический воздух, холодный воздух внизу не успел трансформироваться.

Приведем еще пример. В районе Янцзыцзян (Южный Китай) появление зоны осадков у фронтов часто предшествует появлению замкнутых изобар. Появление осадков благоприятствует увеличению контраста температур, так как в этом случае в теплой массе имеет место конденсация, а в холодной — испарение.

Упомянутые факты хорошо известны синоптикам Китайской Народной Республики.

Трудной задачей при этом является лишь определение разрыва значений $[A_T]$ и $[A_Q]$. Предложен следующий способ.

В пространстве по любой линии, пересекающей фронтальную поверхность, в обеих воздушных массах вдали от фронта в ряде точек вычислим A_T и A_Q . На основании плавного изменения метеоэлементов в одной и той же воздушной массе построим две кривые (для каждой массы отдельно). Далее экстраполируем каждую кривую до фронтальной поверхности. Отсюда и определим значения $[A_T]$ и $[A_Q]$.

Необходимо провести большую статистическую обработку, чтобы найти критическую величину $[A_T]$ и $[A_Q]$, при которой возникает или углубляется фронтальный циклон. Полученный таким образом критерий может быть использован при предсказании циклогенеза.

Значения же k^2 или k_1^2 также могут быть определены статистическим путем.

РЕЗЮМЕ

Излагается приближенный способ учета разрыва вертикальной скорости на фронтальной поверхности при прогнозе изменения давления и циклогенеза. В качестве исходных уравнений взяты уравнения вихря и уравнение притока тепла.

Показано, что увеличение (уменьшение) контраста температур на фронтальной поверхности способствует циклогенезу (циклолизу).

ЛИТЕРАТУРА

1. Блинова Е. Н. К теории образования циклонов. Труды ГГО, вып. 23(6). 1938.
2. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды, гл. X. ГТТИ. 1957.
3. Кочин Н. Е. (1931) Об устойчивости поверхностей разрыва Маргулеса. Сбор. соч., ч. I, 1949.
4. Юдин М. И. Об устойчивости фронтальных поверхностей в сжимаемой жидкости. Часть I: Труды ГГО, вып. 18(5), 1937; часть II: Труды ГГО, вып. 23(6), 1938.
5. Юдин М. И. Волны на фронтальной поверхности. Основы динамической метеорологии. Под ред. Д. Л. Лайхмана и М. И. Юдина. 1955.
6. Юдин М. И. и др. К вопросу об эволюции циклонов. Труды ГГО, вып. 81. 1959.
7. Blinova E. N., Kibell. A. Hydrodynamical methods of the short and long-range weather forecasting in the USSR. Part I. Tellus, vol. 9, № 4. 1957.

О ВЕРТИКАЛЬНЫХ ТОКАХ В АТМОСФЕРЕ НАД ТЕРМИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Известно, что отдельные участки подстилающей поверхности по различным причинам нагреваются в разной степени. Эта неоднородность в нагревании обуславливает появление в воздушных массах архимедовых сил, которые вызывают конвективные движения.

Исследованию свободно конвективных движений посвящено большое количество работ.

Конвективные движения в движущихся воздушных массах изучены много меньше, хотя в природе они встречаются значительно чаще. Поэтому их изучение представляет практический интерес.

В настоящее время существует очень мало достаточно надежных методов измерения упорядоченных вертикальных скоростей. Наиболее распространен метод уравновешенных шаров-пилотов, разработанный П. А. Воронцовым [3].

Существующие расчетные методы [4] пригодны только для больших масштабов по горизонтали и по высоте. Следовательно, для изучения и определения вертикальных скоростей, наблюдающихся над небольшими территориями, приобретают значение работы, позволяющие рассчитать вертикальные скорости на основании формул, полученных из теории. К таким работам относятся работы А. С. Мониной и А. А. Дородницына, выполненные в 1949 г.

Монин приближенно решил систему уравнений стационарного движения в пограничном слое, образующемся вследствие нагретости подстилающей поверхности, без учета сил Кориолиса.

В работе получен вывод о том, что искажения набегающего потока вблизи от нагретого берега до расстояний порядка 10^3 м могут быть довольно значительны.

Вертикальные скорости, образующиеся при этом в слое до 100 м, оказываются порядка долей см/сек. и даже см/сек.

В работе Дородницына интегрируется система уравнений возмущенного движения, обусловленного неравномерностью нагревания подстилающей поверхности.

Метод, примененный Дородницыным, дает возможность найти приближенное решение системы в виде рядов, которым можно пользоваться для любого закона изменения скорости основного потока с высотой, при условии, что функция, описывающая изменение скорости, может быть разложена в ряд определенного вида.

В примере, разобранным Дородницыным, ветер в основном движении задается моделью Экмана.

В статье даются таблицы вспомогательных функций, необходимых для определения температуры, горизонтальных и вертикальных скоростей при этом профиле ветра в основном движении.

Приведенных таблиц достаточно, чтобы вычислить несколько членов ряда для температуры и найти таким образом ее величину и распределение.

Таблица вспомогательной функции для нахождения вертикальной скорости дает только первый член разложения для w , на основании которого трудно судить о величине и распределении вертикальных скоростей.

В настоящей работе рассматривается задача, сформулированная Дородницыным, с некоторыми упрощениями. Эти упрощения позволяют получить более обозримые результаты и сделать качественные и количественные выводы о вертикальных скоростях, возникающих над неоднородно нагретой поверхностью.

Остановимся кратко на постановке задачи. Решается система стационарного конвективного движения. Рассматривается плоская задача.

Поскольку из работы Дородницына следует, что влияние сил Кориолиса для данной задачи оказывается существенным только на больших расстояниях, а само явление носит характер краевого эффекта, то силу Кориолиса учитывать не будем.

Дородницыным получена линеаризованная система уравнений для возмущенного движения. Выпишем эту систему, учитывая упрощения, о которых было сказано выше. Кроме этого, предположим, что ветер в основном движении изменяется с высотой по линейному закону

$$U = cz. \quad (1)$$

Такое предположение оправдано тем, что толщина пограничного слоя, образующегося над неоднородно нагретой поверхностью, невелика (см. рис. 4).

Тогда

$$\left. \begin{aligned} cz \frac{\partial u'}{\partial x} + w'c &= \alpha g \frac{\partial}{\partial x} \int_z^\infty \tau' dz + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial z^2} \quad (a) \\ \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} + \frac{w'}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} &= 0 \quad (b) \\ cz \frac{\partial \tau'}{\partial x} + w' \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) &= \nu \frac{\partial^2 \tau'}{\partial z^2} \quad (c) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В формулах (2) все обозначения общепринятые.

Для удобства интегрирования системы (2) введем новые безразмерные функции и переменные по формулам

$$\frac{u'}{v_0} = u, \quad \frac{w'}{w_0} = w, \quad \frac{\tau'}{T_0} = \tau, \quad \frac{x}{l} = \xi, \quad \frac{z}{k} = \eta; \quad (3)$$

$$w_0 = \frac{\alpha g T_0}{c} \frac{k}{l} \quad (a), \quad v_0 = \frac{\alpha g T_0}{c} \quad (b), \quad k = \sqrt[3]{\frac{\nu l}{c}} \quad (c), \quad (4)$$

где v_0 , w_0 , T_0 , l и k — характерные горизонтальная и вертикальная скорости, температура, масштаб по горизонтали и по вертикали соответственно.

Перепишем теперь систему (2) в безразмерном виде:

$$\left. \begin{aligned} \eta \frac{\partial u}{\partial \xi} + w &= \int_\eta^\infty \frac{\partial \tau}{\partial \xi} d\eta + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (a) \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta} + n w &= 0 \quad (b) \\ \eta \frac{\partial \tau}{\partial \xi} + m w &= \frac{\partial^2 \tau}{\partial \eta^2} \quad (c) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где m и n параметры

$$m = \frac{\alpha g (\gamma_a - \gamma)}{c^2} \quad (6), \quad n = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial \eta}. \quad (7)$$

Произведем оценку этих параметров, пользуясь следующими исходными данными:

$$c = 0,2 \frac{1}{\text{сек.}}, \quad v = 5 \frac{\text{м}^2}{\text{сек.}}, \quad T_0 = 20^\circ.$$

Тогда

$$m = 9 \cdot 10^{-2}, \quad n = 10^{-1} - 10^{-2}.$$

Таким образом, параметр n мал. Параметр m также мал, но при определенных значениях c может возрасти. Мы, однако, воспользуемся малостью n и m и будем решать систему (5), подобно Дородницыну, не учитывая члены, содержащие эти параметры.

Граничные условия

В качестве граничных условий для решения задачи ставятся следующие условия:

$$\left. \begin{aligned} u'|_{z=0} &= 0 & u'|_{z=\infty} &= 0 & (a) \\ \tau'|_{z=0} &= T_0 & \tau'|_{z=\infty} &= 0 & (b) \\ w'|_{z=0} &= 0 & & & (c) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Недостающие для решения системы (2) граничные условия будут выбраны позднее, после перехода в системе (5) к одному независимому переменному.

Интегрирование системы

Введем вместо η и ξ новую переменную по формуле

$$y = \frac{\eta}{\sqrt[3]{\xi}} \quad (9)$$

и вместо u , w , τ — новые функции

$$\left. \begin{aligned} N(y) &= u(\xi, \eta) & (a) \\ M(y) &= w(\xi, \eta) \xi^{\frac{2}{3}} & (b) \\ f(y) &= \tau(\xi, \eta) & (c) \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Тогда система (5) преобразуется следующим образом, если пренебречь членами, содержащими малые параметры:

$$\left. \begin{aligned} 3N'' + y^3 N' - 3M &= \int_y^\infty f' y dy & (a) \\ -\frac{y}{3} N' + M' &= 0 & (b) \\ -y^3 f' &= 3f'' & (c) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Здесь штрихи означают производные по y .

Граничные условия для безразмерных величин в новой переменной y оказываются следующими:

$$\left. \begin{aligned} N|_{y=0} &= 0 & yN'|_{y=\infty} &= 0 & (a) \\ f|_{y=0} &= 1 & f|_{y=\infty} &= 0 & (b) \\ M|_{y=0} &= 0 & & & (c) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Граничное условие (8a) для u' на бесконечности заменено его следствием $\frac{\partial u'}{\partial x} \Big|_{z=\infty} = 0$, которое и дает нам второе условие (12a). Такой вид граничного условия, как будет видно дальше, для решения задачи более удобен.

Уравнение (11с) интегрируется элементарно

$$f = 1 - \frac{\Gamma\left(\frac{y^3}{9}, \frac{1}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}. \quad (13)$$

В формуле (13) $\Gamma\left(\frac{y^3}{9}, \frac{1}{3}\right) = \int_0^y e^{-\frac{y^3}{9}} dy$ — неполная гамма-функция, для которой имеются таблицы [5].

Найдем f' из (13) и подставим в (Па). Тогда получим уравнение

$$N'' + \frac{y^2}{3} N' - M = -\frac{1}{3} \frac{\int_0^y e^{-\frac{y^3}{9}} dy}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}. \quad (14)$$

Продифференцируем это уравнение и используем уравнение (11с). Тогда

$$N''' + \frac{y^2}{3} N'' + \frac{y}{3} N' = \frac{1}{3\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} y e^{-\frac{y^3}{9}}. \quad (15)$$

Таким образом, система (11) свелась к одному уравнению (15). Это уравнение было получено в работе Дородницына.

Будем решать уравнение (15) относительно N' .

Одно граничное условие, необходимое для нахождения функции N' , имеется. Это — условие (12а). В качестве второго условия используем условие, полученное Дородницким из уравнения (14), записанного для уровня $y = C$. Для удобства выпишем оба условия вместе

$$yN' \Big|_{y=\infty} = 0 \text{ (a)}, \quad N'' \Big|_{y=0} = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \text{ (b)}. \quad (16)$$

Рассмотрим однородное уравнение

$$N''' + \frac{y^2}{3} N'' + \frac{y}{3} N' = 0. \quad (17)$$

Его решение для функции N' выражается через функции Бесселя от мнимого аргумента

$$N' = \sqrt{y} \cdot e^{-\frac{y^3}{18}} \left[C_1 J_{\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) + C_2 J_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) \right]. \quad (18)$$

Частное решение уравнения (17) найдено Дородницким

$$N' = -\frac{e^{-\frac{y^3}{9}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}. \quad (19)$$

Таким образом, общее решение уравнения (17) выражается так:

$$N' = \sqrt{y} e^{-\frac{y^3}{18}} \left[C_1 J_{\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) + C_2 J_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) \right] - \frac{e^{-\frac{y^3}{9}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}, \quad (20)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования.

Определение C_1 и C_2

Чтобы использовать граничное условие (16a), необходимо написать асимптотическое разложение функций $J_{\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right)$ и $J_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right)$

$$J_{\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) = \frac{6i^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} y^{\frac{1}{2}}} \cos\left(\frac{y^3}{18i} - \frac{\pi}{3}\right), \quad (21)$$

$$J_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) = \frac{6i^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} y^{\frac{1}{2}}} \cos\left(\frac{y^3}{18i} - \frac{\pi}{6}\right). \quad (22)$$

Заменив косинусы в разложениях (21), (22) через экспоненциальные функции, получим

$$J_{\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) = \frac{e^{\frac{y^3}{18} - i\frac{\pi}{3}} + e^{-\frac{y^3}{18} + i\frac{\pi}{3}}}{2}, \quad (23)$$

$$J_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) = \frac{e^{\frac{y^3}{18} - i\frac{\pi}{6}} + e^{-\frac{y^3}{18} + i\frac{\pi}{6}}}{2}. \quad (24)$$

Подставим (23), (24) в уравнение (20) и умножим его на y

$$yN' = C_1 \frac{3i^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(e^{-i\frac{\pi}{3}} + e^{-\frac{y^3}{9} + i\frac{\pi}{3}} \right) + C_2 \frac{3i^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-\frac{y^3}{9} + i\frac{\pi}{6}} \right) - \frac{ye^{-\frac{y^3}{9}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}. \quad (25)$$

На основании условия (16a) из уравнения (25) найдем

$$C_1 = -C_2 e^{i\frac{\pi}{6}}. \quad (26)$$

Чтобы использовать граничное условие (16b), продифференцируем выражение (20) для N' . После различных преобразований, которые здесь не приводим, получаем N''

$$\begin{aligned} N'' = & -\frac{y^{\frac{5}{2}}}{6} e^{-\frac{y^3}{18}} \left[C_1 J_{\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) + C_2 J_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) \right] + \\ & + \frac{y^{\frac{5}{2}}}{6i} e^{-\frac{y^3}{18}} \left[C_1 J_{-\frac{5}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) + C_2 J_{\frac{5}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) \right] + \frac{y^2}{3} \frac{e^{-\frac{y^3}{9}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}. \end{aligned} \quad (27)$$

Так как условие (16b) ставится при $y=0$, разложим бесселевы функции, входящие в (27), в ряд по малому аргументу. Тогда выражение для N'' представляется в виде

$$\begin{aligned} N'' = & -C_1 \frac{e^{-\frac{y^3}{18}}}{6} \frac{y^3}{(36i)^{\frac{1}{6}}} \left[\frac{1}{\Gamma\left(1\frac{1}{6}\right)} - \frac{\frac{y^6}{(36i)^2}}{\Gamma\left(2\frac{1}{6}\right)} + \dots \right] - \\ & - C_2 \frac{e^{-\frac{y^3}{18}}}{6} \frac{y^3}{(36i)^{-\frac{1}{6}}} \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} - \frac{\frac{y^6}{(36i)^2}}{\Gamma\left(1\frac{5}{6}\right)} + \dots \right] + \end{aligned}$$

$$+ C_1 \frac{e^{-\frac{y^3}{18}}}{6i} \frac{1}{(36i)^{-\frac{5}{6}}} \left[\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} - \frac{\frac{y^6}{(36i)^2}}{\Gamma\left(1\frac{1}{6}\right)} + \dots \right] - \\ - C_2 \frac{e^{-\frac{y^3}{18}}}{6i} \frac{y^5}{(36i)^{\frac{5}{6}}} \left[\frac{1}{\Gamma\left(1\frac{5}{6}\right)} - \frac{\frac{y^6}{(36i)^2}}{\Gamma\left(2\frac{5}{6}\right)} + \dots \right] + \frac{y^2}{3} \frac{e^{-\frac{y^3}{9}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}. \quad (28)$$

Положив $y=0$ в (28) и принимая во внимание условие (16b), найдем

$$C_1 = A\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) 6^{-\frac{2}{3}} i^{\frac{1}{6}}. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (26), запишем C_2

$$C_2 = -A\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) 6^{-\frac{2}{3}} i^{-\frac{1}{6}}, \quad (30)$$

где A определено формулой (16b).

Напишем выражение для N' , подставив C_1 и C_2 в (20),

$$N' = A\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) 6^{-\frac{2}{3}} \sqrt{y} e^{-\frac{y^3}{18}} \left[I_{\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) - I_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) \right] - \frac{e^{-\frac{y^3}{9}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}, \quad (31)$$

где

$$\left. \begin{aligned} I_{\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) &= i^{\frac{1}{6}} J_{\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) \\ I_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) &= i^{-\frac{1}{6}} J_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

В этой формуле мы перешли от мнимого аргумента функций Бесселя к вещественным функциям $I_{\frac{1}{6}}$ и $I_{-\frac{1}{6}}$ [2].

Для того чтобы найти N и, следовательно, μ' , нужно проинтегрировать уравнение (31), что может быть сделано только приближенными квадратурами.

Так как основная цель работы состоит в том, чтобы найти порядок величин вертикальной скорости, то вычислением квадратур мы не занимались.

Функцию M , а затем и w можно находить из уравнения (11b), однако это также связано с вычислением квадратур. Поэтому будем находить M из уравнения (14)

$$M = N'' + \frac{y^2}{3} N' + \frac{1}{3} \frac{y}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \int_0^\infty e^{-\frac{y^3}{9}} y dy. \quad (33)$$

Как видно из этого выражения, для определения M , кроме N' , требуется N'' .

Ранее было найдено выражение (27) для N'' . Прежде чем воспользоваться им для определения M , подставим в него C_1 и C_2 по формулам (29), (30). Тогда

$$N'' = A\Gamma\left(\frac{1}{6}\right) 6^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{y^3}{18}} \left[I_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) - I_{\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) + \right]$$

$$+ I_{-\frac{5}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) - I_{\frac{5}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) \Big] + \frac{y^2}{3} \frac{e^{-\frac{y^3}{9}}}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}, \quad (34)$$

где
$$I_{-\frac{5}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) = i^{-\frac{5}{6}} J_{-\frac{5}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right), \quad I_{\frac{5}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) = i^{\frac{5}{6}} J_{\frac{5}{6}}\left(\frac{y^3}{18i}\right). \quad (35)$$

Подставим (34) и (31) в (33) и учтем выражение (10b), связывающее M с w . Опуская промежуточные выкладки и вычисления, выпишем формулу для безразмерной вертикальной скорости

$$w = \frac{1}{\xi^{\frac{2}{3}}} f(y), \quad (36)$$

где
$$f(y) = -0,098 y^{\frac{5}{2}} e^{-\frac{y^3}{18}} \left[I_{\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) - I_{-\frac{1}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) + I_{\frac{5}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) - I_{-\frac{5}{6}}\left(\frac{y^3}{18}\right) \right] + 0,349 \left[1 - \frac{\Gamma\left(\frac{y^3}{9}, \frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \right], \quad (37)$$

а $\Gamma\left(\frac{y^3}{9}, \frac{2}{3}\right)$ — неполная Г-функция.

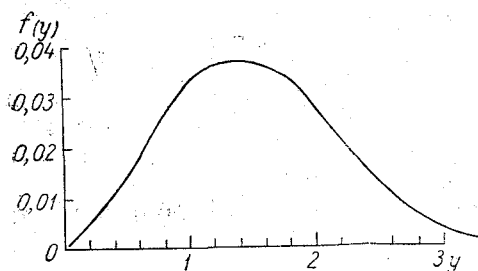


Рис. 1. $c = 0,25$ г/сек., $v = 5$ м²/сек., $T_0 = 20^\circ$.

Функция $f(y)$, график которой представлен на рис. 1, численно совпадает с функцией W_0 , которая представляет собой первый член разложения для w в работе Дородницына.

Анализ формул, примеры расчетов и анализ результатов

Вернемся к первоначальным переменным x и z , подставляя в формулу (9) выражения ξ и η . Получим

$$y = \frac{z}{\sqrt[3]{x}} \sqrt[3]{\frac{c}{v}}. \quad (38)$$

Безразмерную вертикальную скорость можно представить в виде

$$w = \frac{l^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} f(y). \quad (39)$$

Характерная вертикальная скорость по формулам (4a) и (4c) выражается следующим образом:

$$w_0 = \frac{\alpha g T_0}{c} \sqrt[3]{\frac{v}{c}} \frac{1}{l^{\frac{2}{3}}}. \quad (40)$$

Тогда, умножая (39) на (40), получим размерную вертикальную скорость

$$w' = \frac{\alpha g T_0}{c} \sqrt[3]{\frac{v}{c}} \frac{f(y)}{x^{\frac{2}{3}}}. \quad (41)$$

Из анализа формулы (41) следует, что вертикальная скорость изменяется пропорционально перепаду температуры, причем нагревание подстилающей

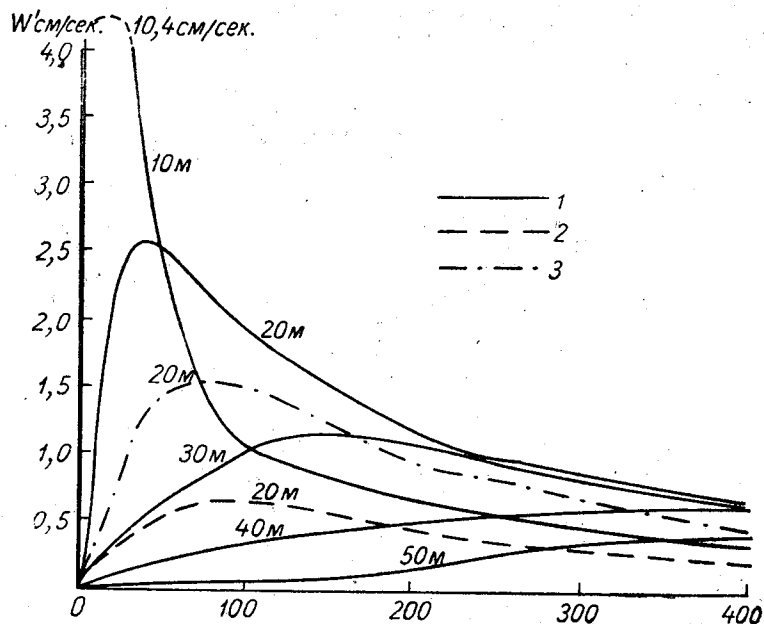


Рис. 2. 1 — $c = 0,2$ 1/сек., $\nu = 5$ м²/сек. } $T_0 = 20^\circ$.
 2 — $c = 0,4$ 1/сек., $\nu = 5$ м²/сек.
 3 — $c = 0,2$ 1/сек., $\nu = 3$ м²/сек.

поверхности ($T_0 > 0$) сопровождается образованием восходящих вертикальных движений. С увеличением расстояния вертикальные скорости убывают.

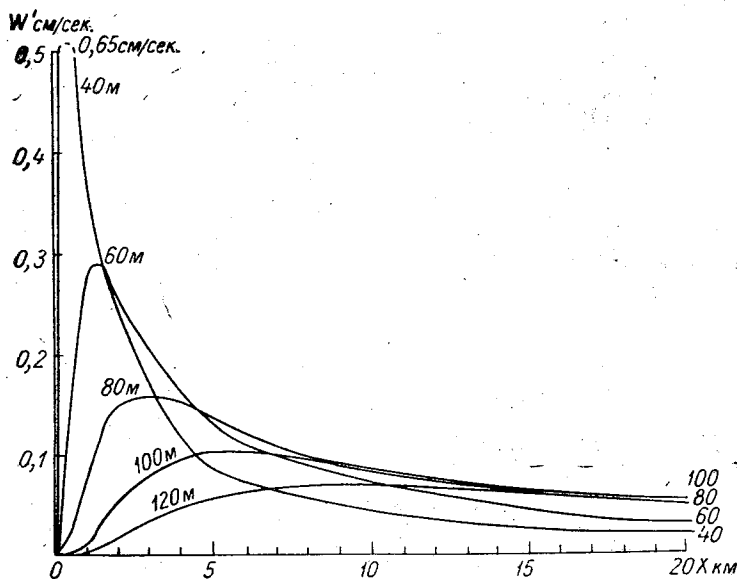


Рис. 3. $c = 0,2$ 1/сек., $\nu = 5$ м²/сек., $T_0 = 20^\circ$.

Параметр c , характеризующий быстроту возрастания ветра с высотой в натекающем воздухе, также оказывает существенное влияние на верти-

кальную скорость. Однако зависимость от c более сложная, чем от T_0 и x , так как c , кроме знаменателя формулы (41), входит еще в $f(y)$.

То же самое можно сказать о ν . Поэтому при выяснении влияния c и ν на вертикальную скорость целесообразно использовать графики.

На рис. 2 и 3 показано изменение вертикальной скорости с расстоянием на разных высотах.

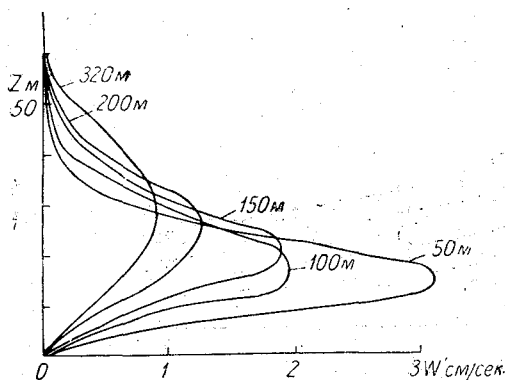


Рис. 4. $c = 0,2$ 1/сек., $\nu = 5$ м²/сек., $T_0 = 20^\circ$.

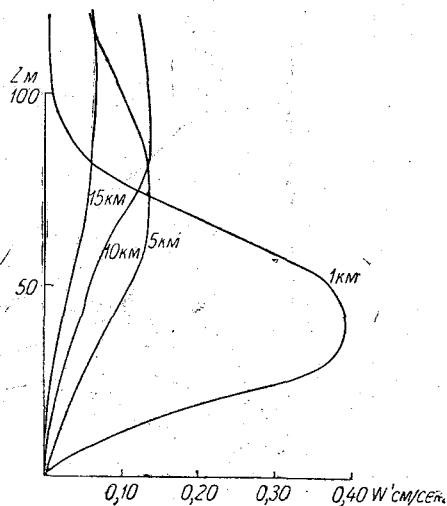


Рис. 5. $c = 0,2$ 1/сек., $\nu = 5$ м²/сек., $T_0 = 20^\circ$.

На графиках видно, что вертикальная скорость на любой высоте вначале сильно растет с расстоянием, а затем убывает.

На рис. 4 и 5 показан профиль вертикальной скорости на различных расстояниях от края.

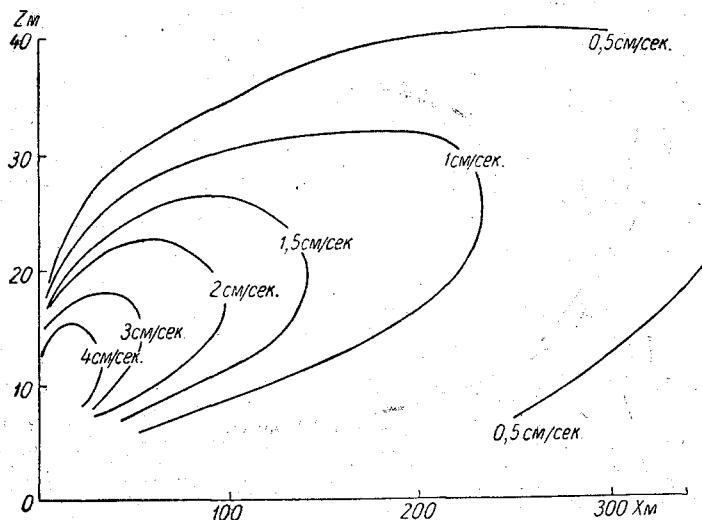


Рис. 6. $c = 0,2$ 1/сек., $\nu = 5$ м²/сек., $T_0 = 20^\circ$.

Как видно из графиков, вертикальная скорость на некоторой высоте достигает максимума. Высота достижения максимума растет с увеличением

расстояния. Это обстоятельство хорошо иллюстрируется рис. 6 и 7, на которых изображено поле вертикальных скоростей у самого края и на больших расстояниях. Область наибольших вертикальных скоростей с увеличением расстояния x поднимается вверх.

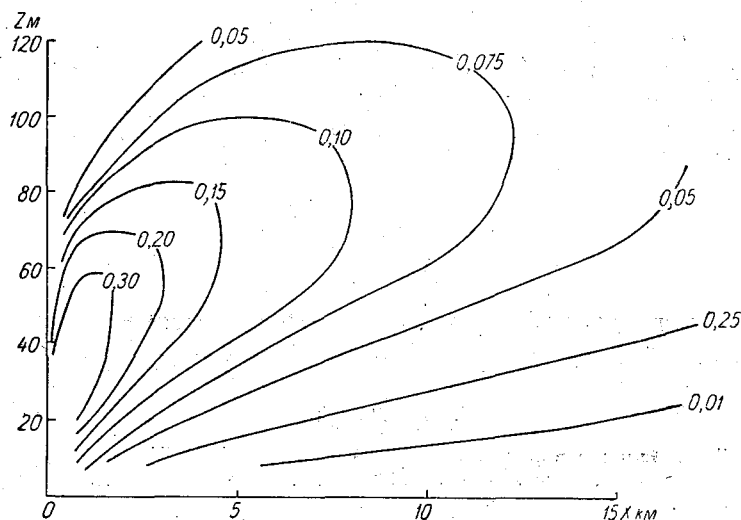


Рис. 7. $c = 0,2 \text{ 1/сек.}$, $\nu = 5 \text{ м}^2/\text{сек.}$, $T_0 = 20^\circ$.
Вертикальные скорости даны в см/сек.

Особенно важным является вопрос об абсолютной величине вертикальных скоростей. Важность его определяется тем, что влияние вертикальных скоростей на процессы тепло- и влагообмена зависит от их величины и распространения [6], [1].

Из графиков видно, что вертикальные скорости, образующиеся из-за неоднородности в нагревании подстилающей поверхности, имеют наибольшее значение вблизи линии раздела двух подстилающих поверхностей. На расстоянии примерно до 500 м от края величина w' может достигать до нескольких см/сек. и больше (рис. 2).

На расстоянии около 10 км абсолютная величина вертикальных скоростей становится на порядок меньше, а область распространения увеличивается (рис. 3).

Характер распределения скоростей на рис. 2 и 3 одинаков.

Графики на рис. 4 и 5, так же как на рис. 2 и 3, отличаются друг от друга только абсолютными значениями w' и масштабом x .

Чтобы выяснить влияние параметров c и ν , были проведены расчеты при $c = 0,4 \frac{1}{\text{сек.}}$, а также при $\nu = 3 \frac{\text{м}^2}{\text{сек.}}$. В каждом случае все остальные исходные данные не менялись. На рис. 2 приведены кривые, показывающие влияние этих параметров.

Увеличение c приводит к уменьшению вертикальных скоростей. Величина c связана со стратификацией натекающего воздуха.

Большему c , т. е. более быстрому возрастанию ветра с высотой, соответствует, как известно, более устойчивая стратификация. Следовательно, в более устойчиво стратифицированном воздухе величина возникающих вертикальных токов меньше. Кроме того, от величины c зависит скорость ветра на данном уровне в натекающем воздухе. Отсюда следует вывод, о том, что при больших скоростях ветра вертикальные скорости также уменьшаются.

Действие турбулентной вязкости состоит в следующем.

Как показывают расчеты, уменьшение турбулентной вязкости сопровождается уменьшением вертикальных скоростей. Это объясняется тем, что при слабом обмене уменьшается влияние температурных неоднородностей подстилающей поверхности.

Из рассмотрения рисунков следует, что область с большими вертикальными токами невелика. Вертикальные токи небольшие по абсолютной величине могут иметь место на довольно больших расстояниях, до 15—30 км. Это зависит в первую очередь от величины перепада температуры.

Все примеры и поля на рис. 6 и 7 построены для $T_0 = 20^\circ$. При другом перепаде температуры T_0 легко можно получить представление о поле вертикальной скорости, умножив численные значения w' на всех графиках на множитель $\frac{T_0}{20}$.

РЕЗЮМЕ

В работе приведена формула, по которой рассчитаны вертикальные скорости над неоднородно нагретой подстилающей поверхностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арраго Л. Р. Влияние вертикальных токов на влагообмен. Труды ГГО, вып. 71. 1957.
2. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. Изд-во иностр. литературы. М. 1949.
3. Воронцов П. А. Метод уравновешенных шаров-пилотов и шаров с замедленной скоростью подъема. Труды ГГО, вып. 51. Гидрометеиздат. 1955.
4. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. Гос. изд-во технико-теоретической литературы. М. 1957.
5. Слуцкий Е. Е. Таблицы для вычисления неполной функции и функции вероятности. Изд-во АН СССР. 1950.
6. Швец М. Е. К вопросу о влагообороте в атмосфере. Труды ГГО, вып. 33. 1952.

К ВОПРОСУ О ПРЕДВЫЧИСЛЕНИИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ В АТМОСФЕРЕ

В предшествующих работах, посвященных расчету вертикальной составляющей скорости ветра, считается, что параметр устойчивости — постоянная величина [3]. Однако такое предположение редко оправдывается; обычно этот параметр существенно изменяется по высоте. Поэтому представляет интерес выяснить вопрос о влиянии изменения параметра устойчивости на распределение вертикальной скорости.

В данной работе уравнение для вертикальной скорости $\tilde{w}$ ($\tilde{w} = \frac{1}{P_0} \frac{dP}{dt}$) интегрируется методом полупрямых при условии, что параметр устойчивости зависит от высоты. Этот метод позволяет решить задачу как в случае непрерывности параметра устойчивости, так и в случае разрывности без явного выделения точек разрыва.

Рассмотрим уравнение для определения аналога вертикальной скорости $\tilde{w}$. В квазигеострофическом приближении это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \zeta^2} + d' \Delta \tilde{w} = F'(x, y, \zeta), \quad (1)$$

где

$$\zeta = \frac{P}{P_0}, \quad d' = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g f^2 \zeta^2 L^2}$$

(L — характерный горизонтальный масштаб x, y — безразмерные горизонтальные координаты, Δ — безразмерный оператор Лапласа),

$$F' = \frac{1}{f} \frac{\partial A_g}{\partial \zeta} - \frac{R}{f^2 \zeta L^2} \Delta A_T, \quad (2)$$

($A_g = \frac{1}{f} \left\{ \Phi, \Delta \Phi + \frac{f^2}{2} \right\}$ — геострофическая адвекция вихря, $A_T = \frac{1}{fR} \left\{ \Phi, \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right\}$ — геострофическая адвекция температуры).

Функция $\tilde{w}$ должна удовлетворять граничным условиям

$$\tilde{w}(0) = \tilde{w}(1) = 0. \quad (3)$$

Предположим сначала, что d' и F' — непрерывные функции.

Представим правую часть F' в виде разложения в интеграл Фурье

$$F'(x, y, \zeta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \bar{F}'(m, n, \zeta) e^{i(mx+ny)} dm dn, \quad (4)$$

где

$$\bar{F}'(m, n, \zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} F'(x, y, \zeta) e^{-i(mx+ny)} dx dy.$$

Соответственно будем искать и „вертикальную скорость“ $\tilde{w}$ в виде разложения в интеграл Фурье

$$\tilde{w}(x, y, \zeta) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \omega(m, n, \zeta) e^{i(m\tau+ny)} dm dn, \quad (5)$$

где

$$\omega(m, n, \zeta) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \tilde{w}(x, y, \zeta) e^{i(mx+ny)} dx dy.$$

Подстановка в уравнение (1) выражений (4) и (5) дает уравнение для трансформанты Фурье ω

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} - \rho^2 d' \omega = \bar{F}', \quad (6)$$

где

$$\rho^2 = m^2 + n^2.$$

Заменим $\frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2}$ конечноразностным выражением

$$\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial \zeta^2} \right)_i = a'_i \omega_{i+1} - b'_i \omega_i + c'_i \omega_{i-1},$$

где

$$a'_i = \frac{2}{\Delta \zeta_{i-1} (\Delta \zeta_i + \Delta \zeta_{i-1})},$$

$$b'_i = a'_i + c'_i,$$

$$c'_i = \frac{2}{\Delta \zeta_i (\Delta \zeta_i + \Delta \zeta_{i-1})}.$$

$$(\Delta \zeta_i = \zeta_{i+1} - \zeta_i).$$

В случае равноотстоящих уровней

$$a'_i = c'_i = \frac{1}{(\Delta \zeta)^2}, \quad b'_i = \frac{2}{(\Delta \zeta)^2}.$$

Уравнение (6) заменится конечноразностным уравнением

$$a'_i \omega_{i+1} - (b'_i + \rho^2 d'_i) \omega_i + c'_i \omega_{i-1} = \bar{F}'_i. \quad (7)$$

Рассмотрим теперь случай, когда d'_i и $\bar{F}'_i$ являются кусочно-непрерывными функциями с возможными точками разрыва первого рода.

На интервале изменения переменной ζ нанесем, помимо основной системы узловых точек ζ_i , вспомогательную систему $\zeta_{i+\frac{1}{2}}$. Точки этих систем взаимно чередуются, т. е.

$$\zeta_{i-\frac{1}{2}} < \zeta_i < \zeta_{i+\frac{1}{2}} \text{ и } \zeta_i < \zeta_{i+\frac{1}{2}} < \zeta_{i+1}.$$

Пусть точки разрыва d' и F' приходятся на точку $\zeta_{i+\frac{1}{2}}$. Целесообразно основные узлы подобрать так, чтобы

$$\zeta_i = \frac{1}{2} \left(\zeta_{i-\frac{1}{2}} + \zeta_{i+\frac{1}{2}} \right).$$

Как показано в работе [4], в этом случае мы приходим к уравнению

$$a_i^* \omega_{i+1} - (b_i^* + d_i^* \rho^2) \omega_i + c_i^* \omega_{i-1} = \bar{\Phi}_i,$$

но коэффициенты его будут иметь вид

$$a_i^* = \frac{1 - x_i}{\Delta \zeta_i (\Delta \zeta)_{i + \frac{1}{2}}},$$

$$b_i^* = (1 + x_i) a_i^* + (1 - x_{i-1}) c_i^*,$$

$$c_i^* = \frac{1}{\Delta \zeta_i (\Delta \zeta)_{i - \frac{1}{2}}},$$

$$\bar{\Phi}_i = \bar{F}_i + \frac{1}{8} a_i^* [\bar{F}' \Delta \zeta^2]_{i + \frac{1}{2}} - \frac{1}{8} c_i^* [\bar{F}' \Delta \zeta^2]_{i - \frac{1}{2}},$$

где

$$\Delta \zeta_i = \zeta_{i + \frac{1}{2}} - \zeta_{i - \frac{1}{2}},$$

$$(\Delta \zeta)_{i + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\Delta \zeta_i + \Delta \zeta_{i+1}),$$

$$[M] = M_i^+ - M_i^- - \text{скачок функции},$$

$$x_i = \frac{1}{8} [d' \Delta \zeta^2]_{i + \frac{1}{2}}.$$

Таким образом, в случае наличия разрыва параметра устойчивости задача сводится к решению уравнений, аналогичных уравнениям вида (7) для непрерывного параметра устойчивости. Будем поэтому в дальнейшем изложении ограничиваться этим случаем.

Обозначим ζ_0 уровень $\zeta = 0$ и ζ_{n+1} уровень $\zeta = 1$. Тогда в соответствии с принятыми граничными условиями

$$\omega_0 = 0, \quad \omega_{n+1} = 0. \quad (8)$$

Уравнение (7), записанное для остальных уравнений ζ_i , дает систему n алгебраических уравнений с n неизвестными.

Разделим каждое уравнение (7) на a_i' и обозначим

$$\frac{b_i'}{a_i'} = b_i; \quad \frac{c_i'}{a_i'} = c_i; \quad \frac{d_i}{a_i'} = d_i; \quad \frac{\bar{F}_i'}{a_i'} = \bar{F}_i.$$

Тогда окончательно получаем следующую систему уравнений:

$$\omega_{i+1} - (b_i + d_i \rho^2) \omega_i + c_i \omega_{i-1} = \bar{F}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

Системы уравнений такого вида часто встречаются в теории линейных колебаний, и их свойства хорошо изучены. Известно [2], что определитель системы такого вида имеет только вещественные и простые корни. Для данного случая, когда $d_i > 0$ (стратификация устойчивая), можно показать также, что все корни определителя отрицательны. Это значит, что для любых неотрицательных значений ρ^2 система (9) имеет решение вида

$$\omega_i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{\Delta_{ki}(\rho^2)}{D_n(\rho^2)}, \quad (10)$$

где $D_n(\rho^2)$ — определитель системы (9), а Δ_{ki} — алгебраическое дополнение элемента этого определителя, лежащего на пересечении k -той строки и i -того столбца.

Если обозначить $-\rho_j^2$ корни определителя $D_n(\rho^2)$, то каждый член суммы (10) может быть представлен в виде суммы простейших дробей

$$\frac{\Delta_{ki}(\rho^2)}{D_n(\rho^2)} = \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ki}(-\rho_j^2)}{D'_n(-\rho_j^2)} \frac{1}{\rho^2 + \rho_j^2}, \quad (11)$$

где

$$D'_n(-\rho_j^2) = \left. \frac{dD_n}{d\rho^2} \right|_{\rho^2 = -\rho_j^2}.$$

Поэтому получаем

$$\omega_i = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \bar{F}_k \frac{\Delta_{ki}(-\rho_j^2)}{D'_n(-\rho_j^2)} \frac{1}{\rho^2 + \rho_j^2}. \quad (12)$$

Если теперь учесть формулы (4) и (5) и совершить обратное преобразование Фурье, то получим

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i(x, y) = & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ki}(-\rho_j^2)}{D'_n(-\rho_j^2)} \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(x', y') \times \\ & \times \frac{e^{im(x-x') + in(y-y')}}{\rho^2 + \rho_j^2} dm dn dx' dy'. \end{aligned} \quad (13)$$

Если воспользоваться известными из теории функций Бесселя [1] соотношениями

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-ipr \cos(\theta - \theta_0)} d\theta &= 2\pi I_0(pr), \\ \int_0^{\infty} \frac{I_0(\rho r)}{\rho^2 + \rho_j^2} \rho d\rho &= K_0(\rho_j r), \end{aligned}$$

где I_0 — функция Бесселя первого рода, а K_0 — функция Макдональда, то две квадратуры в формуле (13) можно выполнить и окончательное решение задачи будет иметь вид

$$\tilde{w}_i = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ki}(-\rho_j^2)}{D'_n(-\rho_j^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_k(x', y') K_0(r\rho_j) dx' dy', \quad (14)$$

где

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

На первый взгляд раскрытие определителя системы D_n , нахождение его корней и отыскание n^2 алгебраических дополнений Δ_{ki} представляется очень трудоемкой задачей. В действительности она может быть существенно упрощена.

Определитель системы имеет следующий вид:

$$D_n = \begin{vmatrix} l_n & c_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & l_{n-1} & c_{n-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_{n-2} & c_{n-2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & l_{n-3} & c_{n-3} & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & l_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & l_1 \end{vmatrix}$$

где $l_i = -(b_i + d_i \rho^2)$. Разложим определитель по элементам первой строки:

$$D_n = l_n \begin{vmatrix} l_{n-1} & c_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & l_{n-2} & c_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & l_1 \end{vmatrix} -$$

$$- c_n \begin{vmatrix} l_{n-2} & c_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ 1 & l_{n-3} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & l_2 & c_2 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & l_1 \end{vmatrix} \quad (15)$$

Заметим, что определители, содержащиеся в правой части равенства (15), совершенно аналогичны определителю D_n , но имеют меньший порядок. Естественно обозначить их D_{n-1} и D_{n-2} . В результате получаем рекуррентную формулу для вычисления определителей D_n

$$D_n = l_n D_{n-1} - c_n D_{n-2}. \quad (16)$$

Если учесть, что $D_1 = l_1$, $D_2 = l_1 l_2 - c_2$, то эта формула дает возможность последовательного вычисления определителей D_n . Выражения для определителей D_1 и D_2 также могут быть получены с помощью формулы (16), если формально принять $D_{-1} = 0$; $D_0 = 1$.

Таким образом, раскрытие определителя системы не слишком высокого порядка производится сравнительно просто.

Рассмотрим теперь таблицу алгебраических дополнений к элементам определителя D_n для случая $\rho^2 = -\rho_j^2$.

$$\begin{vmatrix} \Delta_{11}(-\rho_j^2) & \Delta_{12}(-\rho_j^2) & \dots & \Delta_{1n}(-\rho_j^2) \\ \Delta_{21}(-\rho_j^2) & \Delta_{22}(-\rho_j^2) & \dots & \Delta_{2n}(-\rho_j^2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{n1}(-\rho_j^2) & \Delta_{n2}(-\rho_j^2) & \dots & \Delta_{nn}(-\rho_j^2) \end{vmatrix}$$

Известно [5], что при равенстве нулю определителя D_n соответствующие элементы любых двух строк таблицы алгебраических дополнений к его элементам будут пропорциональны. Поэтому элементы любой строки этой таблицы могут быть выражены, например, через элементы первой строки

$$\Delta_{ki}(-\rho_j^2) = E_k(-\rho_j^2) \Delta_{1i}(-\rho_j^2), \quad (17)$$

где E_k — коэффициент пропорциональности для k -той строки. Если известны элементы первого столбца таблицы, то величины E_k можно определить из следующего выражения:

$$E_k(-\rho_j^2) = \frac{\Delta_{k1}}{\Delta_{11}}. \quad (18)$$

Таким образом, остается вычислить лишь алгебраические дополнения элементов первой строки и первого столбца определителя D_n .

Непосредственное вычисление алгебраических дополнений элементов первой строки дает:

$$\Delta_{11}(-\rho_j^2) = D_{n-1}(-\rho_j^2); \quad \Delta_{12}(-\rho_j^2) = -D_{n-2}(-\rho_j^2)$$

и т. д.

$$\Delta_{1i}(-\rho_j^2) = (-1)^{i+1} D_{n-i}(-\rho_j^2). \quad (19)$$

Для элементов первого столбца получаем

$$\begin{aligned}\Delta_{11}(-\rho_j^2) &= D_{n-1}(-\rho_j^2); \Delta_{21}(-\rho_j^2) = -c_n D_{n-2}(-\rho_j^2), \\ \Delta_{31}(-\rho_j^2) &= c_n c_{n-1} D_{n-3}(-\rho_j^2) \text{ и т. д.,} \\ \Delta_{k1} &= (-1)^{k-1} c_n \dots c_{n-k+2} D_{n-k}(-\rho_j^2).\end{aligned}\quad (20)$$

Таким образом, формулы (17) — (20) позволяют выразить алгебраические дополнения всех элементов определителя D_n через значения определителей меньшего порядка D_i ($i = 1, 2, \dots, n-1$). Последние уже вычислялись при раскрытии определителя системы D_n .

$$\Delta_{ki}(-\rho_j^2) = (-1)^{k+i} \frac{c_n \dots c_{n-k+2} D_{n-k}(-\rho_j^2) D_{n-i}(-\rho_j^2)}{D_{n-1}(-\rho_j^2)}.\quad (21)$$

Рассмотрим частный случай общего решения (14).

Если поместить начало координат в точку, для которой рассчитывается $\tilde{w}_i$, т. е. положить $x = y = 0$, то вместо формулы (14) получим

$$\tilde{w}_i(0, 0) = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ki}(-\rho_j^2)}{D_n(-\rho_j^2)} \int_0^\infty \tilde{F}_k(r) K_0(\rho_j r) r dr,\quad (22)$$

где

$$\tilde{F}_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_k(r, \varphi) d\varphi.$$

Решение вида (22) для асимметрической задачи может быть получено и путем непосредственного применения к исходному уравнению задачи интегрального преобразования Ханкеля.

Если учесть (2), то можно написать

$$\tilde{F}_k(r) = P_k \left(\frac{\partial \tilde{A}_\Sigma}{\partial \zeta} \right)_k - q_k \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{A}_\tau)_k \right],\quad (23)$$

где

$$P_k = \frac{1}{f a_k'}; \quad q_k = \frac{R}{f^2 \zeta L^2 a_k'}.$$

Подстановка (23) в (22) приводит к интегралам типа

$$S = \int_0^\infty K_0(\rho_j r) \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} (\tilde{A}_\tau)_k \right] dr.$$

Возьмем этот интеграл по частям

$$S = K_0(\rho_j r) r \frac{\partial (\tilde{A}_\tau)_k}{\partial r} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty r \frac{\partial K_0}{\partial r} \frac{\partial (\tilde{A}_\tau)_k}{\partial r} dr.$$

K_0 при $r \rightarrow \infty$ стремится к нулю как показательная функция.

В начале координат K_0 имеет логарифмическую особенность, произведение $r K_0$ обращается в нуль. Поэтому первый член равен нулю.

Повторное интегрирование по частям дает

$$S = -r \frac{\partial K_0}{\partial r} (\tilde{A}_\tau)_k \Big|_0^\infty + \int_0^\infty (\tilde{A}_\tau)_k \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial K_0}{\partial r} \right] dr.$$

Пользуясь известными свойствами формулы Макдональда, можно записать

$$\frac{\partial K_0}{\partial r} = -\rho_j K_1(\rho_j r); \quad \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial K_0}{\partial r} \right] = \rho_j^2 r K_0(\rho_j r).$$

Если учесть, что функция $K_1(\rho_j r)$ быстро убывает при $r \rightarrow \infty$, а в начале координат имеет особенность вида $\frac{1}{r\rho_j}$, то можно записать

$$S = -[\tilde{A}_\tau(0)]_k + \rho_j^2 \int_0^\infty (\tilde{A}_\tau)_k K_0(\rho_j r) r dr.$$

При учете этого решение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \tilde{w}_i(0, 0) = & \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ki}(-\rho_j^2)}{D'_n(-\rho_j^2)} q_k [\tilde{A}_\tau(0)]_k + \\ & + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{ki}(-\rho_j^2)}{D'_n(-\rho_j^2)} \int_0^\infty \left[P_k \left(\frac{\partial \tilde{A}_\tau}{\partial r} \right)_k - q_k \rho_j^2 \tilde{A}_{\tau k} \right] K_0(\rho_j r) r dr. \end{aligned} \quad (24)$$

Уровни ζ_i могут выбираться произвольно в зависимости от условий задачи. В случае равноотстоящих уровней практическое выполнение вычислений несколько упрощается ввиду симметричности определителя системы D_n .

В случае, когда на уровне $\zeta = 1$ вертикальная скорость отлична от нуля, она может быть представлена в виде $\tilde{w}_{n+1} = \tilde{w}(1)$, где $\tilde{w}(1)$ — некоторая известная функция. В этом случае входящий в уравнение (7) для уровня ζ_n член вида $a'_n \omega_{n+1}$ может быть перенесен в правую часть. После этого решение дается полученными выше формулами.

Особый интерес представляет случай постоянной устойчивости. Будем считать, что произведение $T_i(\gamma_a - \gamma_i)$ с высотой не меняется. В этом случае диагональные элементы определителя системы D_n можно записать в виде

$$l_i = - \left(b_i + \frac{\chi}{a'_i \zeta_i^2} \right); \quad \chi = (\gamma_a - \gamma) \frac{TR^2}{g f^2 L^2} \rho^2.$$

χ отличается от ρ^2 лишь постоянным множителем, а величины $a'_i \zeta_i^2$ зависят лишь от выбора узловых точек ζ_i .

Нетрудно видеть, что значения алгебраических дополнений и производных определителя D_n в корнях его χ_j при данном выборе узлов ζ_i не зависят от устойчивости атмосферы. От устойчивости атмосферы будут зависеть лишь величины

$$\rho_j = \frac{fL}{R} \sqrt{\frac{g}{T(\gamma_a - \gamma)}} \chi_j.$$

Поэтому при увеличении устойчивости атмосферы в формуле (22) множители при функциях $K_0(\rho_j r)$ остаются постоянными, а аргументы их убывают. Отсюда следует, что увеличение устойчивости замедляет убывание функций влияния при удалении по горизонтали от точки, для которой дается прогноз. Это соответствует хорошо известному факту, что повышение устойчивости атмосферы препятствует распространению возмущений по вертикали и способствует распространению их по горизонтали.

РЕЗЮМЕ

Рассматривается вопрос об интегрировании прогностических уравнений при условии, что параметр устойчивости зависит от высоты.

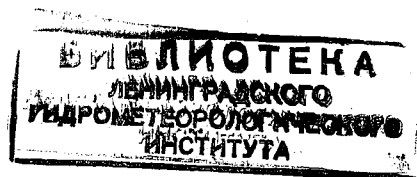
ЛИТЕРАТУРА

1. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. I. М. 1949.
2. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.—Л. 1950.
3. Кибель И. А. Введение в краткосрочный гидродинамический прогноз погоды. М. 1957.
4. Марчук Г. И. Численные методы расчета ядерных реакторов. Атомиздат. М. 1958.
5. Окунев Л. Я. Высшая алгебра. М.—Л. 1937.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

Л. Р. Ракипова. О формировании среднемесячных аномалий температуры атмосферы	3
Р. Л. Каган. К учету влияния конденсационных притоков тепла и стратосферы на изменение поля давления	15
Н. П. Богданова. Приближенная оценка влияния тепла конденсации на изменение наземного давления	37
Ду Син-юань. Уточненная схема учета неровностей земной поверхности в численных методах прогноза	43
Л. С. Гандин. Расчетные методы анализа карт	48
Л. С. Гандин. Задача об оптимальной интерполяции	67
Л. С. Гандин, Е. И. Багрова. О структуре поля высот поверхности 500 мб.	77
Ду Син-юань. Пространственная задача численного прогноза барического поля с учетом влияния высокогорных плато	93
Ду Син-юань. К вопросу о гидродинамической теории фронтального циклогенеза	105
Л. Р. Арраго. О вертикальных токах в атмосфере над термически неоднородной поверхностью	112
М. Е. Швец, Р. Л. Каган. К вопросу о предвычислении вертикальной скорости в атмосфере	123



Редактор *Т. В. Ушакова* Техн. редактор *Н. В. Волков*
Корректоры: *А. И. Вайцман* и *Ф. И. Межиговская*

Сдано в набор 4 VIII 1959 г. Подп. к печ. 4 XII 1959 г.
Бумага 70×108¹/₁₆. Бум. л. 4,13. Печ. л. 11,3.
Уч.-изд. л. 13,39. Тираж 1000 экз. М-53077. Индекс МЛ-8.
Гидрометеорологическое издательство.
Ленинград. В-53, 2-я линия, д. № 23.
Заказ № 904. Цена 9 руб. 40 коп.

Типография № 8 Управления полиграфической
промышленности Ленсовнархоза
Ленинград, Прачечный пер., д. № 6.