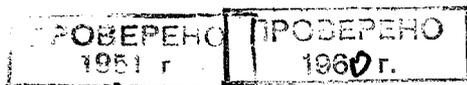


ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР



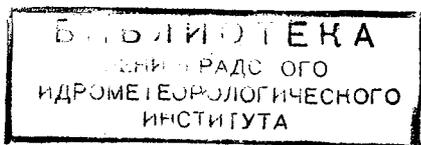
06:551.5  
Т 78

Т Р У Д Ы  
ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ  
ОБСЕРВАТОРИИ  
имени А. И. Воейкова

ВЫПУСК 22(84)

ФИЗИКА ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ ВОЗДУХА

Под редакцией  
докт. физ.-мат. наук  
Д. Л. ЛАЙХТМАНА



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД • 1950

Редактор *Д. Л. Лайтман.*

Техн. редактор *Л. Б. Кононова.*

Сдано в набор 8/VI 1950 г.

Подписано к печати 9/IX 1950 г.

Изд. № 45. Индекс М-Л-45. Тираж 800 экз.

Печ. л. 4,68 + 1 вкл. Уч.-изд. л. 5,67.

Печ. зн. в 1 бум. л. 126 000

Бум. л. 1,8.

М-29145.

Зак. № 1125.

Гидрометеиздат. г. Ленинград 1950 г.

Цена 3 руб. 50 коп.

2-я типо-литография Гидрометеиздата, Ленинград, Прачечный пер., д. 6.

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Д. Л. Лайхтман. Предвычисление суточных колебаний температуры в приземном слое атмосферы . . . . .	3
М. П. Тимофеев. О суточной изменчивости турбулентного обмена . . . . .	15
Г. Х. Цейтин. О новом методе вычисления коэффициента температуропроводности почвы . . . . .	26
Г. А. Волошинова. Сравнение различных методов определения коэффициента температуропроводности . . . . .	34
Ф. Н. Шехтер. К вычислению лучистых потоков тепла в атмосфере . . . . .	38
Д. Л. Лайхтман. О вычислении теплоотдачи почвы . . . . .	52
И. С. Борушко. О подобии профилей метеорологических элементов в приземном слое воздуха . . . . .	55

## ОТ РЕДАКТОРА

Точное предвычисление суточного хода температуры, помимо теории, решающей удовлетворительно принципиальную сторону проблемы, требует знания основных параметров процесса: температуропроводности почвы, турбулентной температуропроводности воздуха, теплоотдачи деятельной поверхности (или ее радиационного баланса). Указанные характеристики до сих пор мало исследованы.

Помещаемые в предлагаемом сборнике статьи, выполненные в Отделе физики атмосферы ГГО в 1949 г., посвящены исследованию этих вопросов, без решения которых невозможно дать пригодный для практики способ предвычисления суточного хода температуры.

В работе Г. А. Волошиновой рассматриваются различные методы определения коэффициента температуропроводности почвы. Путем сравнения этих методов определяются наиболее точные, которые и рекомендуются для применения.

В работе М. П. Тимофеева дается детальный анализ суточного хода коэффициента турбулентности, знание которого необходимо при предвычислении суточных колебаний температуры. Автор показал, что коэффициент турбулентности колеблется в весьма широких пределах и нет оснований пренебрегать его изменением в течение суток.

В работе Г. Х. Цейтина предлагается новый метод определения коэффициента температуропроводности почвы, который является наиболее точным из существующих и может быть рекомендован для предвычислений суточных колебаний температуры.

В первой работе Д. Л. Лайхмана дается решение задачи о суточных колебаниях температуры, учитывающее такие важные факторы, как суточный ход коэффициента турбулентности, влияние адвекции и влияние начальных условий.

Во второй работе Д. Л. Лайхмана даются два способа определения теплоотдачи деятельной поверхности, позволяющих получить эту важнейшую характеристику теплового баланса с большой точностью на основании простейших измерений.

Ф. И. Шехтер разработала новую радиационную диаграмму, имеющую ряд преимуществ перед известными диаграммами Эльзассера, Мюгге и Миллера.

В работе И. С. Борушко на основании экспериментальных данных устанавливается подобие профилей метеорологических элементов в приземном слое воздуха.

## ПРЕДВЫЧИСЛЕНИЕ СУТОЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

1. Теория суточных колебаний температуры за последние годы разрабатывалась целым рядом ученых. Наиболее важные в практическом отношении результаты получены М. Е. Швецом [2], А. Ф. Чудновским [5], И. Г. Лютерштейном и А. С. Зверевым. Однако ввиду чрезвычайной сложности проблемы полученные результаты не дают достаточно общего решения вопроса, и его дальнейшее развитие является одной из важных задач физики атмосферы. В настоящей работе проблема суточных колебаний температуры ставится в виде некоторой задачи — типа задачи Коши, которая решается методом последовательных приближений.

Полученное решение позволяет учесть влияние адвекции и временных изменений коэффициента турбулентности.

2. Для случая, когда исследуется вопрос о колебаниях температуры в горизонтально однородной массе воздуха, система уравнений притока тепла (уравнение турбулентной теплопроводности и уравнения лучистого теплообмена) является замкнутой. Для определения температуры в этом случае требуется знать тепловые константы почвы и воздуха, коэффициент поглощения радиации водяным паром и содержание водяного пара на различных высотах. Эта задача была сформулирована впервые Швецом, который и дал ее решение.

Указанное решение является одним из немногих примеров, позволяющих давать прогноз метеорологических элементов, исходя из данных о солнечной постоянной и пользуясь физическими константами атмосферы и почвы.

Следует отметить, как весьма положительный фактор, то, что полученные решения табулированы, чем облегчается возможность использования теоретически полученных результатов на практике.

Дальнейшее уточнение результатов Швеца, как нам представляется, должно идти по линии учета селективности поглощения, более точно должна быть разрешена задача о распределении водяного пара, а также должен быть улучшен и сам математический метод решения.

Повидимому, значительное уточнение решения полной системы уравнений притока тепла представляет серьезные трудности. Обычно в таких случаях приходится идти либо на некоторые упрощения в самой постановке задачи, которые должны быть оправданы физически, либо воспользоваться эмпирически установленными закономерностями и на их основе упростить задачу, либо, наконец, использовать обе возможности.

Из анализа задачи следует, что при решении можно с достаточной точностью пренебречь радиационным притоком тепла при исследовании суточных колебаний температуры и учесть его только в краевых условиях. Такое допущение было принято в работах А. А. Дородницына [4], И. Г. Лютерштейна и А. Ф. Чудновского [3]. Наибольшее распространение получил метод Лютерштейна и Чудновского. Авторы построили таблицы и номограммы, которые значительно упрощают вычисления; кроме того, они воспользовались известным эмпирическим фактом о постоянстве радиационного

баланса подстилающей поверхности ночью, что позволило значительно упростить вычисления. Проверка на большом материале метода Чудновского и Лютерштейна показала, что он является наиболее удовлетворительным из всех существующих. Метод Зверева, по существу, построен на тех же теоретических основаниях, что и упомянутый метод Чудновского и Лютерштейна; преимуществом его является бóльшая простота расчетов, а по точности он не уступает методу Лютерштейна и Чудновского. Все упомянутые выше методы, строго говоря, дают решения для отклонения температуры от среднесуточного значения; в таком случае, естественно, возникает затруднение при получении значений фактической температуры, а именно последняя представляет наибольший интерес, например при прогнозах заморозков. В этой связи нам представляется правильным сформулировать задачу так, чтобы непосредственно температура определялась по начальным и граничным условиям. Кроме того, решение пишется в таком виде, чтобы можно было бы учесть суточную изменчивость коэффициента турбулентной теплопроводности и хотя бы приближенно адвекцию, что не было сделано в упомянутых работах. Учету временной изменчивости коэффициента турбулентной вязкости посвящена выполненная недавно работа М. И. Юдина; к сожалению, его расчеты оказываются весьма громоздкими, и метод для применения на практике требует некоторого развития.

Подробные данные о суточной изменчивости коэффициента турбулентности приводятся в работе М. П. Тимофеева, помещенной в данном выпуске.

3. Для определения температуры как функции времени и высоты, при пренебрежении лучистым притоком тепла всюду, где  $z \neq 0$ , необходимо решить уравнение

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \text{ для } z \leq 0, \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} k(z, t) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + f \text{ для } z \geq 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

При граничных условиях

$$T(t, z) = \Theta(t, z) \Big|_{z=0}, \quad (2)$$

$$\left. a^2 \rho_1 c_1 \frac{\partial T}{\partial z} = -Q(t) + k \rho c_p \frac{\partial \Theta}{\partial z} \right|_{z=0}, \quad (3)$$

где  $T, \Theta$  — температура почвы и воздуха;  $t, z$  — время и высота;  $a^2 \rho_1 c_1, k \rho c_p$  — коэффициенты теплопроводности почвы и воздуха;  $Q(t)$  — теплоотдача деятельной поверхности в единицу времени (потеря тепла на излучение и испарение);  $f(t, z)$  — скорость изменения температуры, вызванная адвекцией.

Помимо указанных краевых условий, искомое решение должно удовлетворять следующим условиям:

$$\left. \begin{aligned} \Theta(t, z) \Big|_{z=h} &= \Theta_h, \\ T(t, z) \Big|_{z=-\infty} &= T_\infty = \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $\Theta_h$  — температура в свободной атмосфере.

Начальные условия задачи пусть заданы в следующем виде:

$$\Theta(t, z) \Big|_{t=0} = \Theta_0(z), \quad (5)$$

$$T(t, z) \Big|_{t=0} = T_0(z). \quad (6)$$

В том случае, когда существенно учесть адвекцию, необходимо  $\Theta_h$  считать функцией времени, получая ее, например, по методу И. А. Кибеля.

Для удобства решения задачи и выяснения роли отдельных факторов перейдем к безразмерным переменным.

Выберем безразмерные длины

$$\left. \begin{aligned} \text{для почвы } x &= \frac{\Pi}{a^2 \rho_1 c_1 \Delta} z, \\ \text{для воздуха } \xi &= \frac{B}{k_0^2 \rho c_p \Delta} z \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

и безразмерное время

$$\tau = \left( \Delta \frac{a\rho_1 c_1}{\Pi} \right)^{-2} t = \left( \Delta \frac{k_0 \rho c_p}{B} \right)^{-2} t, \quad (8)$$

где приняты следующие обозначения:  $\Pi$  — характерный масштаб для потока тепла в почву и  $B$  — в воздухе, так что

$$\frac{a^2 \rho_1 c_1}{\Pi} \frac{\partial T}{\partial z} = 0(1), \quad \frac{k \rho c_p}{B} \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0(1);$$

$\Delta$  — характерный перепад температуры;  $k_0^2$  — масштаб для коэффициента турбулентной теплопроводности, причем

$$\bar{k}(z, t) \cdot k_0^2 = a^2 \left( \frac{\rho_1 c_1 B}{\rho c_p \Pi} \right)^2 \cdot \bar{k}(z, t) = k(z, t). \quad (9)$$

Система уравнений в безразмерных переменных напишется так:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad -\infty \leq x \leq 0, \quad (1A)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \bar{k}(\xi, \tau) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] + \bar{f}(\tau, \xi) \left( \frac{k_0 \rho c_p \Delta}{B} \right)^2 \frac{1}{\Delta}, \quad (2A)$$

$$\theta(\tau, \xi) = T(\tau, x)|_{x=0}, \quad \left| \frac{\Pi}{Q_0} \frac{\partial T}{\partial x} = -\bar{Q}(\tau) + \frac{B}{Q_0} \bar{k} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right|_{x=\xi=0}, \quad (3A)$$

$$\left| \theta(\tau, \xi) = \theta_0(\tau) \right|_{\xi=\delta = \frac{B}{k_0 \rho c_p} \frac{h}{\Delta}}, \quad (4A)$$

$$\left. \begin{aligned} \theta(\tau, \xi)|_{\tau=0} &= \theta_0 \left( \frac{B\xi}{k_0^2 \rho c_p \Delta} \right) = \theta_H(\xi), \\ T(\tau, x)|_{\tau=0} &= T_0 \left( \frac{\Pi x}{a^2 \rho_1 c_p \Delta} \right) = T_H(x). \end{aligned} \right\} \quad (5A)$$

В выписанных соотношениях принято:

$$\varphi(t, z) = \bar{\varphi}(\tau, \xi).$$

4. Заметим теперь, что в уравнении (2A) по условию  $\frac{\partial T}{\partial x}$ ,  $\bar{Q}(t)$ ,  $\bar{k} \frac{\partial \theta}{\partial \xi}$  имеют порядок единицы, множитель  $\frac{\Pi}{Q_0}$  за исключением очень коротких интервалов времени, имеет также порядок единицы, а множитель  $\frac{B}{Q_0}$  значительно меньше единицы, за исключением, может быть, дневных часов при наибольшей конвекции в ясную летнюю погоду. Из табл. 1 [значения  $\frac{\Pi}{Q_0}$  и  $\frac{B}{Q_0}$  по данным С. А. Сапожниковой (Арьсь)]

Таблица 1

Поток	Часы											
	20—22	22—24	24—2	2—4	4—6	6—8	8—10	10—12	12—14	14—16	16—18	18—20
$\frac{\Pi}{Q_0}$ . . . . .	0,72	0,83	0,92	0,91	0,85	0,77	0,48	0,47	0,38	0,22	3,3	1,00
$\frac{B}{Q_0}$ . . . . .	0,28	0,17	0,08	0,09	0,15	0,23	0,55	0,55	0,62	0,78	3,4	0,05

следует, что даже для южных районов с весьма сильно развитой конвекцией  $\frac{B}{Q_0}$  в течение 16—17 часов из 24 может считаться малой величиной.

Обозначим  $\frac{B}{Q_0} = \varepsilon$  и будем искать решение нашей задачи в виде разложения по малому параметру  $\varepsilon$ :

$$\left. \begin{aligned} T &= T_1 + \varepsilon T_2 + \varepsilon^2 T_3 + \dots, \\ \Theta &= \Theta_1 + \varepsilon \Theta_2 + \varepsilon^2 \Theta_3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В таком случае для определения неизвестных функций получаем следующую систему уравнений:  
для почвы

$$\frac{\partial T_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T_i}{\partial x^2}, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T_i}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \left\{ \begin{aligned} -\frac{\bar{Q}(\tau)}{\Pi}, (i=1), \\ \frac{B}{\Pi} \bar{k} \frac{\partial \Theta_{i-1}}{\partial \xi}, (i>1), \end{aligned} \right\} \\ T_i(\tau, x) \Big|_{x=0} &= \left\{ \begin{aligned} T_H(x), (i=1), \\ 0, (i>1). \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

для воздуха

$$\frac{\partial \Theta_i}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{k}(\tau, \xi) \frac{\partial \Theta_i}{\partial \xi} + \bar{f}_1, \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} \Theta_i(\tau, \xi) \Big|_{\xi=0} &= T_i(\tau, x) \Big|_{x=0}, \\ \Theta(\tau, \xi) \Big|_{\xi=\delta} &= \Theta_\delta(\tau) \\ \Theta_i(\tau, x) \Big|_{x=0} &= \left\{ \begin{aligned} \Theta_H(\xi), (i=1), \\ 0, (i>1), \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\bar{f}_1 = \bar{f}_2 \left( \frac{k_{op} c_p \Delta}{B} \right) \frac{1}{\Delta}, \quad (15)$$

Как вытекает из полученных соотношений, решение для почвы и воздуха можно искать независимо и лишь в определенной последовательности. Вначале отыскивается первое приближение для почвы, при этом требуется знать только эффективное излучение деятельной поверхности и начальное распределение температуры в почве; затем может быть найдено первое приближение для воздуха по известной температуре поверхности почвы, на основании которого строится второе приближение для почвы и т. д.

5. Найдем прежде всего первое приближение для почвы, считая  $Q(t)$  известным. Вопрос задания  $Q(t)$  будет нами рассмотрен особо.

Легко показать, что первое приближение для почвы может быть получено из известных решений уравнения теплопроводности для полуограниченного стержня. Элементарные методы приводят к следующему решению:

$$T_1(\tau, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_0^\infty T_H(u) \left[ e^{-\frac{(u-\xi)^2}{4\tau}} - e^{-\frac{(u+\xi)^2}{4\tau}} \right] du + \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot \Pi} \int_0^\tau \frac{\bar{Q}(v) e^{-\frac{x^2}{4(\tau-v)}}}{\sqrt{\tau-v}} dv \quad (16)$$

или в старых переменных

$$\begin{aligned} T_1(t, z) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty T_0(u) \left[ e^{-\frac{(u-z)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(u+z)^2}{4a^2 t}} \right] du + \\ &+ \frac{1}{a\sqrt{\pi} \rho_1 c_1} \int_0^t \frac{Q(v) e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-v)}}}{\sqrt{t-v}} dv. \end{aligned} \quad (17)$$

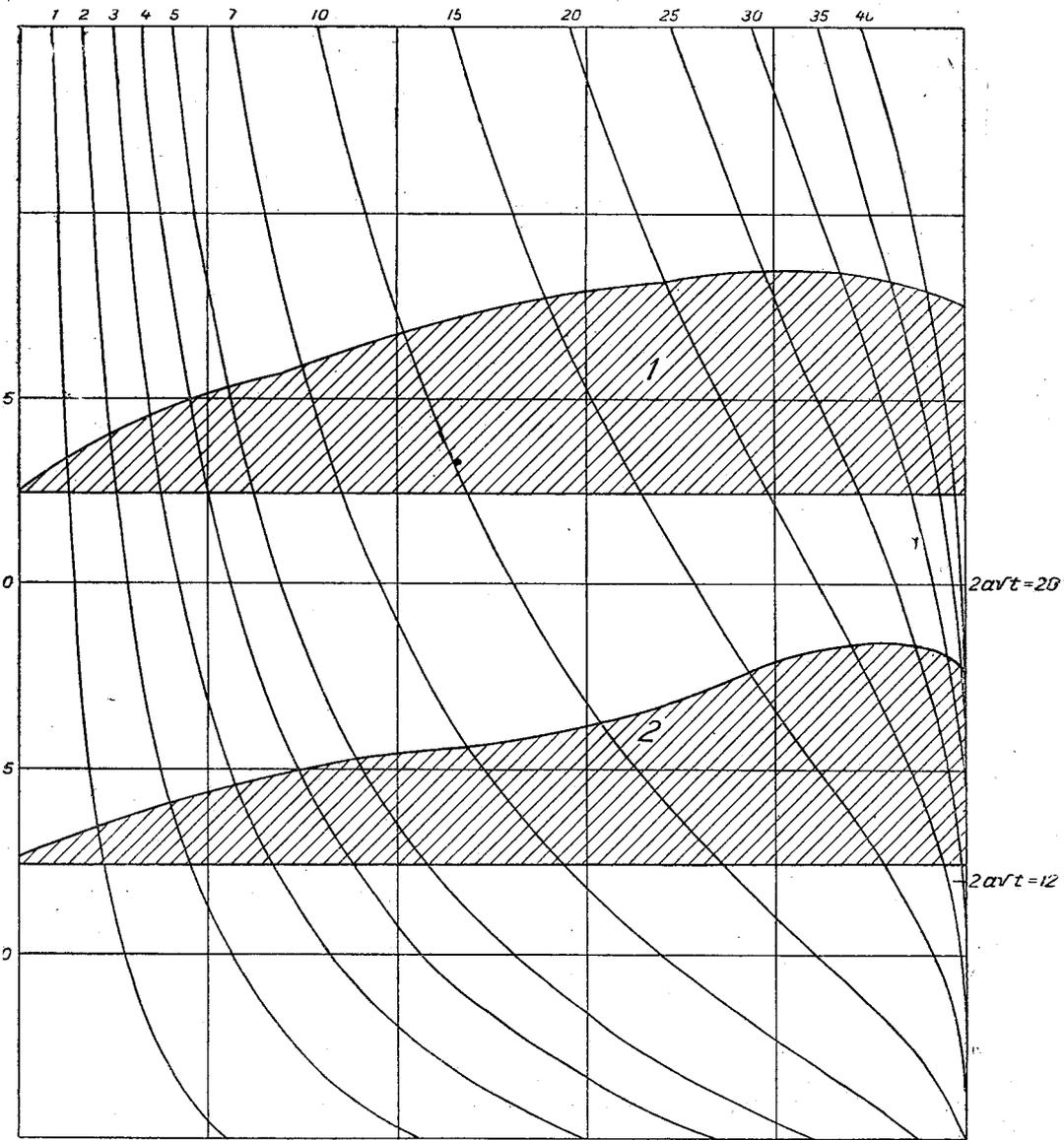


Рис. 1. Вычисление изменений температуры почвы, вызванных влиянием притока тепла из внутренних слоев почвы. 11 декабря 1888 г. Тифлис.

$$\begin{aligned}
 1) \Delta T_2 &= \frac{-Q \cdot 20}{\rho_1 C_1 \cdot 1,77 a^2} = 8,2 \quad S = 102 \quad \left. \begin{array}{l} \Delta T_H = 4,1 \\ T_H = 6,6 \\ \Delta T_2 = 8,2^\circ \end{array} \right\} T = -1,6^\circ \\
 2) \Delta T_2 &= \frac{-0,0034}{0,0048} \cdot \frac{12}{1,77} = -4,8^\circ \quad S = 86 \quad \left. \begin{array}{l} \Delta T_H = +3,4^\circ \\ T_H = 5,9 \end{array} \right\} T = -1,1^\circ
 \end{aligned}$$

При вычислении температуры поверхности почвы полученная формула может быть представлена в более удобной для вычисления форме.

Введя функцию Краппа

$$\Phi \left( \frac{u}{2a\sqrt{t}} \right) = \int_0^u \frac{e^{-\frac{u^2}{4a^2 t}}}{a\sqrt{\pi t}} du = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{u}{2a\sqrt{t}}} e^{-\delta^2} d\delta,$$

получим

$$T_1(t, 0) = \int_{\Phi=0}^{\Phi=1} T_0(u) d\Phi \left( \frac{u}{2a\sqrt{t}} \right) - \frac{2}{\sqrt{\pi} a\rho_1 c_1} \int_{v=0}^{v=t} Q(v) d(\sqrt{t-v}). \quad (18)$$

Вычисление первого интеграла в формуле (18) производится графически по специально построенной номограмме, приведенной на рис. 1. На номограмме  $Y = T_H(u)$ ,  $X = \Phi \left( \frac{u}{2a\sqrt{t}} \right)$ , а семейство изолиний изображает разные глубины в сантиметрах, если считать  $Y = 2a\sqrt{t}$  в системе CGS, и  $X = \Phi \left( \frac{u}{2a\sqrt{t}} \right)$ .

Для вычисления первого интеграла наносим  $T_H = f \left( \frac{u}{2a\sqrt{t}} \right)$  и планиметром измеряем площадь в необходимых пределах.

Если вместо  $Q(v)$  подставить полную теплоотдачу деятельной поверхности (с учетом турбулентного притока тепла), то (18) давало бы точное значение температуры поверхности почвы. В некоторых случаях (ясные ночи), как показывает целый ряд рассмотренных примеров, полная теплоотдача деятельной поверхности может быть легко задана. В этом случае по исходному начальному распределению температуры почвы и на основании заданной теплоотдачи можно предвычислить последующий ход температуры поверхности почвы.

Приведем пример такого предвычисления.

По данным о распределении температуры в почве для Тифлиса 11/XII 1888 г. между 19—20 часами получено значение полной теплоотдачи  $\frac{Q}{\rho_1 c_1} = -0,0034$  см/град. сек., коэффициент температуропроводности  $a^2 = 0,0048$  (о способах вычисления  $a^2$  и  $\frac{Q}{\rho_1 c_1}$  см. работы Г. Х. Цейтина и Д. Л. Лайхтмана в настоящем выпуске). Распределение температуры по глубинам в 19 часов приведены в табл. 2

Таблица 2

$z$ , см . . .	0	1	2	5	10	20	40	84	400
$T$ , град. . .	2,5	3,6	4,3	5,4	7,5	8,3	7,6	9,7	15,9

Определим ход температуры поверхности почвы в течение ночи при условии, что теплоотдача не меняется в течение ночи.

Полагая в (18)  $Q$  не зависящим от времени, получаем следующую расчетную формулу:

$$T_1(t, 0) = \int_{\Phi=0}^{\Phi=1} T_H(u) d\Phi \left( \frac{u}{2a\sqrt{t}} \right) + \frac{2Q\sqrt{t}}{\sqrt{\pi} a\rho_1 c_1} = T_1' + T_1''.$$

В табл. 3 приводятся значения и первого и второго слагаемых последней формулы раздельно, а также их сумма. В последней строке приводится наблюдаемая температура.

Таблица 3

	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4
$T'$ . . . . .	—	5,9	6,3	6,6	6,6	6,7	6,8	6,9	6,9	7,0
$T''$ . . . . .	—	-3,4	-4,8	-5,9	-6,8	-7,6	-8,4	-9,1	-9,7	-10,3
$\Sigma$ . . . . .	2,5	2,5	1,7	0,7	-0,2	-0,9	-1,6	-2,2	-2,8	-3,3
$T_{набл.}$ . . .	2,5	1,7	1,1	0,1	-0,4	-1,3	-0,6	-0,9	-1,7	-2,1

Как следует из таблицы, вычисленные значения с точностью до  $1,2^\circ$  совпадают с наблюдаемыми.

На рис. 1 приводится пример вычисления  $T'$  для  $2a\sqrt{t} = 12$  и  $2a\sqrt{t} = 20$ .

Более подробные указания о предвычислении ночного понижения температуры будут даны в одной из последующих работ. Полученные результаты показывают, что в тех случаях, когда полная теплоотдача деятельной поверхности может быть определена, температура поверхности почвы предвычисляется достаточно легко.

6. На основании известной в первом приближении температуры поверхности почвы может быть определена температура воздуха на разных высотах, как это следует из системы (11)–(15).

Примем, что коэффициент турбулентной теплопроводности линейно растет с высотой:

$$k(\tau, z) = \mu' + c'z,$$

тогда

$$\bar{k} = \frac{\mu'}{k_0^2} + \frac{c'}{k_0^2} z = \mu + c\xi, \quad (19)$$

где

$$\mu = \frac{\mu'}{k_0^2}, \quad c = c' \frac{\rho c_p}{B}. \quad (20)$$

Определение  $\Theta_1(\tau, \xi)$  производится из уравнения

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \xi} \bar{k}(\tau, \xi) \frac{\partial \Theta_1}{\partial \xi} + \bar{f}_1(\tau, \xi) \quad (21)$$

при краевых условиях

$$\Theta_1(\tau, \xi)|_{\tau=0} = \Theta_H(\xi), \quad \Theta_1(\tau, \xi)|_{\xi=0} = T_1(\tau, x)|_{x=0}, \quad (22)$$

$$\Theta_1(\tau, \xi)|_{\xi=\infty} = \begin{cases} \Theta_\delta(0) \\ \Theta_\delta(0) + \Delta\Theta(\tau) \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{при отсутствии адвекции} \\ \text{с учетом адвекции} \end{array} \right\} = \Theta_\delta(\tau). \quad (23)$$

Функция  $\bar{f}_1(\tau, \xi)$  зависит от вертикального распределения адвективных изменений температуры. Проблема вертикальной структуры адвекции является капитальной проблемой современной динамической метеорологии; исследование ее выходит далеко за рамки настоящей работы. Этому вопросу посвящены исследования ряда советских ученых; их результатами мы и будем располагать для определения  $\bar{f}_1(\tau, \xi)$ . Прежде всего заметим, что для слоев атмосферы, достаточно удаленных от земной поверхности, можно пренебрегать притоком тепла от турбулентной теплопроводности; на этом основании

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \bar{f}_1(\tau, \xi) = \frac{\partial \Theta_\delta}{\partial \tau}. \quad (24)$$

Для удобства решения перейдем к новым переменным:

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\Theta_1 - \Theta_\delta}{T_1 - \Theta_\delta} = \frac{\Theta_1 - \Theta_\delta}{T_1(t, 0) - \Theta_\delta}, \\ \eta &= \int_0^\tau \frac{c^2}{\mu} d\tau, \\ x &= \int_0^\xi \frac{c}{\mu} d\xi = \frac{c}{\mu} \xi. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Тогда подлежащая решению система уравнений приведет к следующему виду:

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} + v \frac{d \ln (\bar{T}_1 - \bar{\Theta}_\delta)}{d \eta} = \frac{\partial}{\partial x} (1+x) \frac{\partial v}{\partial x} + \left[ \frac{\bar{f}_1(\tau, \xi) - \frac{d\Theta_\delta}{d\tau}}{\bar{T}_1(\tau, 0) - \Theta_\delta(\tau)} \right] \frac{c^2}{\mu}, \quad (26)$$

$$v(\eta, x)|_{x=0} = 1, \quad (27)$$

$$v(\eta, x)|_{x=\infty} = 0, \quad (28)$$

$$v(\eta, x)|_{\eta=0} = \frac{\bar{\Theta}_H(x) - \Theta_\delta(0)}{\bar{T}_1(0) - \Theta_\delta(0)}. \quad (29)$$

Для решения задачи умножим (26) на

$$F(x, \lambda) dx = [J_0(2\lambda \sqrt{1+x}) N_0(2\lambda) - J_0(2\lambda) N_0(2\lambda \sqrt{1+x})] dx \quad (30)$$

и проинтегрируем от  $x=0$  до  $x=\infty$  (здесь  $\lambda$  — параметр,  $0 \leq \lambda \leq \infty$ ). После интегрирования получим

$$\frac{dv_+}{d\eta} + \frac{d \ln (\bar{T}_1 - \bar{\Theta}_\delta)}{d \eta} v_+ = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (1+x) \frac{\partial v}{\partial x} F(x, \lambda) dx + \int_0^\infty F(x, \lambda) \varphi(\eta, x) dx, \quad (31)$$

причем

$$v_+(\eta, \lambda) = \int_0^\infty v(\eta, x) F(x, \lambda) dx \dots, \quad \varphi(\eta, x) = \left[ \frac{\bar{f}_1(\tau, \xi) - \frac{d\Theta_\delta}{d\tau}}{\bar{T}_1(x, 0) - \Theta_\delta(\tau)} \right] \frac{c^2}{\mu}. \quad (31A)$$

Рассмотрим теперь первый интеграл справа в уравнении (31). Интегрируя его дважды по частям, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (1+x) \frac{\partial v}{\partial x} F(x, \lambda) dx &= F(x, \lambda) (1+x) \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_0^\infty - (1+x) \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x} v(\eta, x) \Big|_0^\infty + \\ &+ \int_0^\infty v(\eta, x) \frac{\partial}{\partial x} (1+x) \frac{\partial F}{\partial x} dx. \end{aligned}$$

Легко показать на основании (30), что  $\frac{\partial}{\partial x} (1+x)^{3/4} \frac{\partial F}{\partial x} = -\lambda^2 F$ . Тогда, если воспользоваться тем, что  $F(x, \lambda)|_{x=0} = 0$ , и условиями (27) и (28), получим

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left[ (1+x) \frac{\partial v}{\partial x} \right] F(x, \lambda) dx = \frac{\partial F(x, \lambda)}{\partial x} \Big|_{x=1} - \lambda^2 v_+(\eta, \lambda), \quad (32)$$

при этом мы предположили, что  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{3/4} \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ .

Последнее условие выполняется, если турбулентный поток тепла на больших высотах убывает с увеличением высоты, что, повидимому, всегда имеет место.

Заметив, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=0} &= -\frac{\lambda}{\sqrt{1+x}} \{ J_1(2\lambda \sqrt{1+x}) N_0(2\lambda) - \\ &- J_0(2\lambda) N_1(2\lambda \sqrt{1+x}) \} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{\pi}, \end{aligned} \quad (33)$$

на основании (31), (32), (33) имеем:

$$\frac{dv_+}{d\eta} + \frac{d \ln (\bar{T}_1 - \bar{\Theta}_\delta)}{d\eta} v_+ = -\frac{1}{\pi} - \lambda^2 v_+ + \varphi_+(\eta, \lambda), \quad (34)$$

где

$$\varphi_+(\eta, \lambda) = \int_0^\infty F(x, \lambda) \varphi(\eta) dx, \quad (35)$$

Откуда

$$v_+ = \frac{e^{-\lambda^2 \eta}}{\bar{T}_1 - \bar{\Theta}_\delta} \left[ C_1 - \int_0^\eta \left[ \frac{1}{\pi} - \varphi_+(\eta, \lambda) \right] e^{\lambda^2 \eta} (\bar{T}_1 - \bar{\Theta}_\delta) d\eta \right] \quad (35)$$

Постоянная  $C_1$  на основании условия (29) равна

$$\frac{C_1}{\bar{T}_1(0) - \bar{\Theta}_\delta(0)} = \int_0^\infty v_0(x) F(x, \lambda) dx. \quad (36)$$

Поскольку  $v_+(\eta, \lambda)$  известно, то определение  $v(\eta, x)$  сводится к обращению интеграла (31А).

Для получения обращения воспользуемся доказанной нами [1] общей формулой обращения для интегралов, аналогичных рассматриваемому. После элементарных выкладок искомое обращение находится в следующем виде:

$$v(\eta, x) = 2 \int_0^\infty \frac{v_+(\lambda, \eta) \lambda}{J_0^2(2\lambda) + N_0^2(2\lambda)} F(\lambda, x) d\lambda,$$

а подставляя значение  $v_+(\lambda, \eta)$ , получим

$$v(\eta, x) = \frac{2 [\bar{T}_1(0) - \bar{\Theta}_\delta(0)]}{\bar{T}_1(\eta) - \bar{\Theta}_\delta(\eta)} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda^2 \eta} \lambda F(\lambda, x)}{J_0^2(2\lambda) + N_0^2(2\lambda)} d\lambda \int_0^\infty v_0(y) F(\lambda, y) dy - \\ - \frac{2}{\bar{T}_1(\eta) - \bar{\Theta}_\delta(\eta)} \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda^2 \eta} \lambda F(\lambda, x)}{J_0^2(2\lambda) + N_0^2(2\lambda)} d\lambda \int_0^\eta \frac{1 - \pi \varphi_+(\zeta, \lambda)}{\pi} e^{\lambda^2 \zeta} [\bar{T}_1(\zeta) - \bar{\Theta}_\delta(\zeta)] d\zeta. \quad (37)$$

В большинстве случаев вычисления по полученной формуле могут быть значительно упрощены. Действительно первый интеграл с ростом  $\eta$  быстро стремится к нулю и, начиная с некоторых  $\eta > \eta_0$ , им можно пренебречь. Кроме того, можно часто начальное распределение аппроксимировать логарифмической, тогда задача легко сводится к нулевым начальным условиям, т. е.  $v_0$  можно положить равной нулю.

Что касается второго интеграла, то, учитывая значительные погрешности, с которыми определяются адвективные изменения температуры, вряд ли имеет смысл  $\bar{f}_1(\tau, \xi)$  считать зависящей от высоты; тогда  $\bar{f}_1(\tau, \xi) = \frac{\partial \bar{\Theta}_\delta}{\partial \tau}$  и, значит,  $\varphi_+(\zeta, \lambda) = 0$ .

Принимая оба указанных упрощения, получаем

$$v(\eta, x) = -\frac{2}{\pi [\bar{T}_1(\eta) - \bar{\Theta}_\delta(\eta)]} \int_0^\eta [\bar{T}_1(\zeta) - \bar{\Theta}_\delta(\zeta)] d\zeta \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda^2(\eta-\zeta)} \lambda F(\lambda, x) d\lambda}{J_0^2(2\lambda) + N_0^2(2\lambda)}. \quad (38)$$

Для фиксированной высоты (например, высота будки, для которой обычно придется вычислять температуру) внутренний интеграл зависит только от одного

параметра и может быть легко протабулирован; тогда вычисление сведется к простой квадратуре. Квадратуру удобно выполнить графически, если  $\bar{T}_1(\zeta) - \bar{\Theta}_s(\zeta)$  нанести как функцию  $\Phi(\zeta)$ , где

$$\Phi(\zeta) = -\frac{2}{\pi [\bar{T}_1(\eta) - \bar{\Theta}_s(\eta)]} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2(\eta-\zeta)} F(\lambda, x)}{\lambda [J_0^2(2\lambda) + N_0^2(2\lambda)]} d\lambda. \quad (39)$$

Из формулы (38) легко получить выражение для  $\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0}$ , которое необходимо для определения дальнейших приближений. Пользуясь формулой (33), находим

$$\left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{x=0} = \frac{2}{\pi^2 [\bar{T}_1(\eta) - \bar{\Theta}_s(\eta)]} \int_0^{\eta} [\bar{T}_1(\zeta) - \bar{\Theta}_s(\zeta)] d\zeta \int_0^{\infty} \frac{e^{-\lambda^2(\eta-\zeta)} \lambda d\lambda}{J_0^2(2\lambda) + N_0^2(2\lambda)}. \quad (40)$$

Из условий (8)–(15) следует, что  $i$ -ое приближение для почвы

$$T'_i = T_1 + \varepsilon T_2 + \varepsilon^2 T_3 + \dots + \varepsilon^{i-1} T_i$$

должно удовлетворять следующим краевым условиям:

$$\left. \frac{\partial T'_i}{\partial x} \right|_{x=0} = -\frac{Q(t)}{\Pi} + \frac{B}{\Pi} \bar{k} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Theta_1 + \varepsilon \Theta_2 + \dots + \varepsilon^{i-2} \Theta_{i-1}) \Big|_{\xi=0} = -\frac{Q_i}{\Pi},$$

$$T'_i \Big|_{\tau=0} = T_H(x);$$

$(i-1)$ -ое приближение для воздуха

$$\Theta'_{i-1} = \Theta_1 + \varepsilon \Theta_2 + \dots + \varepsilon^{i-2} \Theta_{i-1}$$

должно удовлетворять условиям

$$\Theta'_{i-1}(\tau, \xi) \Big|_{\xi=0} = T'_{i-1}(\tau, x) \Big|_{x=0}, \quad (41)$$

$$\Theta'_{i-1}(\tau, \xi) \Big|_{\tau=0} = \Theta_H(\xi), \quad (42)$$

откуда следует, что любое приближение может быть вычислено по формулам (16) и (34), если под  $\bar{Q}$  в  $i$ -ом приближении понимать  $\frac{Q_i}{\Pi} = -\frac{Q}{\Pi} + \frac{B}{\Pi} \bar{k} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Theta_1 + \varepsilon \Theta_2 + \dots)$  из (38), а под  $T_1$  в  $(i-1)$ -ом приближении для  $\Theta$ ,  $T'_{i-1}$ .

В заключение укажем, что для предвычисления температуры поверхности почвы и в 2–3-метровых слоях атмосферы двумя приближениями можно чаще всего ограничиться.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лайхтман Д. Л. и Чудновский А. Ф. Физика приземного слоя атмосферы. Гостехиздат, 1949.
2. Швец М. Е. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 2, 1943.
3. Чудновский А. Ф. и Лютерштейн И. Г. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 4, 1945.
4. Дородницын А. А. ДАН, XXX, № 5, 1941.
5. Чудновский А. Ф. Труды ГГО, вып. 1, 1947.
6. Лайхтман Д. Л. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., № 2, 1945.
7. Сапожникова С. А. Труды ГГО, вып. 1, 1947.
8. Юдин М. А. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., 1948.
9. Брент. Физическая и динамическая метеорология. Гидрометеоздат, М.—Л. 1938.

## О СУТОЧНОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА

За последние годы советскими метеорологами выполнено большое количество оригинальных и важных исследований по процессам турбулентного обмена в приземном слое атмосферы. Сейчас, повидимому, считается общепризнанным, что механизм турбулентного обмена имеет решающее значение в явлениях непосредственного взаимодействия воздуха с подстилающей поверхностью, поэтому выводы теории атмосферной турбулентности находят применение при разработке большого круга прикладных проблем метеорологии (см. статью М. И. Юдина [11]). При этом нужно отметить, что заграничные метеорологи после неудач американцев (главным образом Хольцмана и Торнтвейта), пытавшихся использовать теорию Россби—Монтгомери для расчета естественного испарения и получивших неудовлетворительные результаты, в некоторой степени разочаровались в плодотворных возможностях количественной разработки теории турбулентного обмена в приземном слое атмосферы. Характерным примером является работа Сеттона [15], который в своих теоретических построениях дальше качественных выводов не идет. Одной из главнейших особенностей отечественных работ по атмосферной турбулентности является интенсивное развитие теоретических исследований с одновременным непрерывным расширением приложений выводов теории к решению различных прикладных вопросов. Благодаря этому и теоретические исследования не ограничиваются только качественными выводами, а в большинстве случаев дают методы определения характеристик турбулентного обмена. Поэтому, в частности, исследование процессов турбулентного обмена в приземном слое атмосферы в отечественной метеорологии уже давно продвинуто значительно дальше, чем за рубежом.

Достаточно указать хотя бы на тот факт, что за границей до сих пор не существует сколько-нибудь удовлетворительных методов определения или расчета на основании обычных метеорологических наблюдений важнейшей характеристики турбулентного обмена, так называемого коэффициента турбулентности. Для приземного слоя атмосферы, благодаря работам М. И. Будыко [1], [3], Д. Л. Лайхтмана [4], А. М. Обухова [9] мы в настоящее время имеем возможность определить коэффициент турбулентности на основании обычных градиентных наблюдений.

Наиболее проверенными методами определения коэффициента турбулентности являются методы, предложенные Будыко и Лайхтманом.

Указанные методы основываются на так называемой полуэмпирической теории турбулентности, которая существенно была развита авторами применительно к условиям приземного слоя атмосферы. Изложение этой теории можно найти в оригинальных работах. Здесь же мы будем ее касаться только по мере необходимости.

Прежде всего необходимо отметить одно обстоятельство, важное для теории турбулентности в приземном слое атмосферы. Существующие методы расчета коэффициента турбулентности предполагают, что в приземном слое (высотой от нескольких метров до сотни метров) для всех субстанций, таких, как тепло, водяной пар, примеси, турбулентные процессы обмена квазистационарны. Это условие эквивалентно независимости от высоты турбулентных потоков тепла, влаги

и др. Все сделанные до настоящего времени количественные оценки и некоторые экспериментальные данные, повидимому, подтверждают с удовлетворительной точностью для приземного слоя атмосферы выполнимость указанного выше предположения. Последнее же позволяет написать для вертикального потока, например тепла  $P$ , следующее простое соотношение:

$$P = \rho c_p k \frac{\partial \Theta}{\partial z}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — плотность воздуха;  $c_p$  — теплоемкость воздуха,  $k$  — коэффициент турбулентности,  $\Theta$  — потенциальная температура, которая для приземного слоя воздуха мало отличается от абсолютной температуры.

Так как  $P$  не зависит от высоты, то, зная зависимость  $k$  от  $z$ , из соотношения (1) легко получить формулу для расчета теплообмена между воздухом и подстилающей поверхностью. Это тем более важно, что непосредственно величина  $P$  до сих пор не измеряется.

Соотношение (1) и аналогичное для турбулентного обмена количество движения

$$V_*^2 = \frac{T}{\rho} = k \frac{du}{dz} \quad (2)$$

( $T$  — напряжение трения,  $u$  — средняя скорость движения воздуха,  $V_*$  — так называемая скорость трения) позволяют построить простые формулы для расчета коэффициента турбулентности  $k$ .

Будыко при выводе формул для коэффициента турбулентности  $k$  использовал соотношение (1), дополнительное энергетическое соображение и предположение о правильности логарифмических законов для вертикальных профилей метеорологических элементов (ветер, влажность, температура) при всех состояниях в атмосфере. Лайхтман свою формулу для  $k$  получил из соотношения (2), предположив, что в общем случае вертикальный профиль пути перемешивания нелинейная функция высоты (как у Будыко) и, как следствие этого, вертикальные профили метеорологических элементов описываются логарифмическим законом только при равновесных условиях, а при условиях, отличных от равновесных (инверсия, сверхадриабатические градиенты), — степенными законами. Нужно отметить, что вопрос о том, какая из формул — логарифмическая (по Будыко) или степенная (по Лайхтману) — лучше соответствует реально наблюдаемому распределению метеорологических элементов, в настоящее время решается следующим образом. Большой экспериментальный материал (в частности см. [6], [7]) показывает, что логарифмический закон удовлетворительно описывает реальное распределение метеорологических элементов только при состояниях, близких к равновесным. При неравновесных состояниях распределение метеорологических элементов заметно отклоняется от логарифмического закона. В этом случае закон Лайхтмана, учитывающий эти отклонения, лучше соответствует наблюдаемым фактам. Отклонения от логарифмического закона заметны даже на небольших высотах (см. измерения Посквилла [13]). Теория Будыко, основывающаяся на универсальной применимости логарифмического закона для описания реального распределения метеорологических элементов в приземном слое воздуха, обладает, как очевидно, существенным недостатком. Одновременно нужно отметить, что теория Будыко обладает и серьезными преимуществами, из которых главные следующие: сравнительная простота расчета коэффициента турбулентности и турбулентных потоков, в основном правильное отображение сильной зависимости коэффициента турбулентности от фактора устойчивости. Эта главнейшая особенность турбулентного обмена сколько-нибудь удовлетворительно не описывается ни одной схемой зарубежных исследователей. Даже больше того, из всех существующих формул для расчета коэффициента турбулентности в приземном слое воздуха только формулы Будыко и Лайхтмана правильно описывают главнейшие особенности турбулентного обмена. Формулы, предложенные различными зарубежными исследователями, совершенно неправильно

отражают главные особенности турбулентного обмена в приземном слое воздуха, в частности влияние фактора устойчивости (это замечание относится к формулам Россби—Монтгомери, Свердруп, Хольцмана и др.).

Формулы Будыко и Лайхтмана, несмотря на их громадные преимущества по сравнению с соответствующими формулами зарубежных исследователей, обладают некоторыми недостатками.

О формуле Будыко в этом смысле сказано выше. Формула Лайхтмана нуждается в некотором уточнении, кроме того основной параметр формулы (в обозначениях Лайхтмана величина  $\epsilon$ ) определяется не всегда с достаточной точностью. При этом нужно иметь в виду, что между формулами Будыко и Лайхтмана имеется следующее различие. Если первая для расчета коэффициента турбулентности использует совместно профиль температуры и ветра, то вторая предполагает получение этой величины только из измерений вертикального профиля ветра. Для формулы Будыко существенно предположение, что коэффициенты турбулентности для различных субстанций (например, для тепла, количества движения) численно одинаковы. Между тем до сих пор прямого, экспериментального, бесспорного доказательства этого предположения не существует. Поэтому между коэффициентами турбулентности, получаемыми по формулам Будыко и Лайхтмана, может не существовать численного совпадения, так как они относятся к физически различным процессам. Вполне возможно, что коэффициент турбулентности, получаемый по формуле Лайхтмана и характеризующий турбулентный обмен количеством движения, может численно не равняться коэффициенту турбулентности для теплообмена. Конечно, это обстоятельство тоже следует рассматривать как предположение, нуждающееся в специальной проверке.

Знание величины коэффициента турбулентности имеет большое значение для решения многих вопросов прикладного и теоретического характера. В частности, вариации этой величины в течение суток важно знать при решении многих вопросов метеорологии, например при исследовании суточного ветрового и термического режимов в приземном слое воздуха. Между тем, исследованию суточной изменчивости коэффициента турбулентности посвящено очень мало работ. По этому вопросу нам известны только две работы: уже устаревшая работа Леттау [12] и работа Шевелевой [10], которая для анализа суточной изменчивости коэффициента турбулентности использовала сравнительно небольшой материал наблюдений, полученный в районе Средне-Азиатской пустыни. Сейчас имеется значительно больше экспериментального материала, и методы определения коэффициента турбулентности существенно улучшены. Представляется поэтому необходимым уточнить и детализировать данные по суточной изменчивости коэффициента турбулентности.

В основу исследования суточной изменчивости коэффициента турбулентности взята величина коэффициента турбулентности, получаемая по формуле Лайхтмана [6—8] для единичной высоты. Известно, что эта величина коэффициента турбулентности  $k_1$  связана с коэффициентом для любой высоты  $k$  простым соотношением

$$k = k_1 z^{1-\epsilon},$$

где  $\epsilon$  — параметр, характеризующий влияние фактора устойчивости на вертикальный профиль ветра в приземном слое.

Метод определения величины  $k_1$  и  $\epsilon$  подробно изложен в работах [6—8], поэтому здесь он не излагается. Что касается суточной изменчивости коэффициента турбулентности, получаемого по формуле Будыко, то этот вопрос в сравнительном плане также будет освещен. Подробное же сравнение коэффициентов по Будыко и Лайхтману здесь не проводится.

Материалом для настоящей работы послужили следующие наблюдения: подробные измерения в течение около 10 суток вертикального распределения ветра и температуры до высоты 15 м на станции физики приземного слоя воздуха (под Ленинградом) летом 1948 г. и градиентные измерения, главным образом ветра,

в том же месте в течение всего 1948 г. Первые материалы относятся к периоду конца июля — начала августа и характеризуют, в общем, обычный для района Ленинграда режим погоды — с переменной облачностью, с отдельными ясными днями и короткими слабыми осадками.

Поскольку коэффициент турбулентности является одним из важных показателей физических процессов в воздухе, следовательно естественна зависимость суточной изменчивости этой величины от погодных условий. За показатель последних взято прежде всего общее количество облачности, причем условия погоды были разбиты на три группы:

Ясная погода — облачность 0—3 балла;

Переменная погода — общая облачность 4—7 баллов;

Облачная погода (пасмурно) — облачность 8—10 баллов.

По указанным группам были осреднены вертикальные профили метеорологических элементов для каждого часа суток и затем вычислены коэффициенты тур-

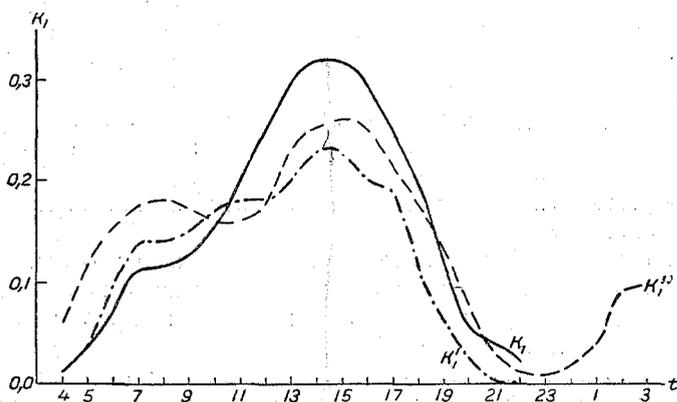


Рис. 1. Суточный ход коэффициента турбулентности на высоте 1 м.

$k_1$  — ясно,  $k_1'$  — переменнo,  $k_1''$  — облачно.

булентности. Такой способ вычисления средних величин  $k_1$ , повидимому, более правилен, чем осреднение отдельно вычисленных  $k_1$ .

Результаты этих вычислений по 10-суточным наблюдениям представлены на рис. 1. Прежде всего нужно отметить, что суточные изменчивости коэффициента турбулентности для случая переменной и облачной погоды практически совпадают. Суточный ход для всех погодных условий характеризуется, в общем, одновременным наступлением максимума величины  $k_1$ . Турбулентный обмен в нижнем слое воздуха определяется, как известно, динамическими и термическими факторами. Наиболее простыми показателями этих факторов являются скорость ветра на фиксированной высоте и разность температур на двух высотах. Оказалось возможным для этой цели использовать величины  $u_1$  — скорость ветра на высоте 1 м — и  $\Delta t = t_{20} - t_{150}$  — разность температур на высотах 20 и 150 см.

Особенности суточной изменчивости коэффициента турбулентности хорошо объясняются суточной изменчивостью величин  $u_1$  и  $\Delta t$ , что ясно видно из сравнения рис. 1 с рис. 1а и 1б, на которых изображена суточная изменчивость средних величин  $u_1$  и  $\Delta t$  за тот же период наблюдений.

Если рассматривать суточную изменчивость  $k_1$  изолированно от суточной изменчивости величин  $u_1$  и  $\Delta t$ , то можно обнаружить, кроме основного максимума, вторичные максимумы в суточном ходе  $k_1$  и в нашем случае для моментов времени около 6 и около 21 часа. Подобные вторичные максимумы были указаны в работе Леттау и затем Шевелевой. Естественно, что эти особенности в какой-то степени другими исследователями абсолютизировались, специально объяснялись и

т. д. На самом деле вторичных максимумов в суточной изменчивости  $k_1$  может и не быть, так как они — следствие суточной изменчивости параметров турбулентности, величин  $u_1$  и  $\Delta t$ . Последние же могут иметь простую суточную изменчивость, — с одним максимумом и минимумом в течение суток. В дальнейшем это обстоятельство будет проиллюстрировано материалом обработки. Поэтому наличие вторичных максимумов и минимумов в суточном ходе не следует считать абсолютным свойством суточной изменчивости  $k_1$ .

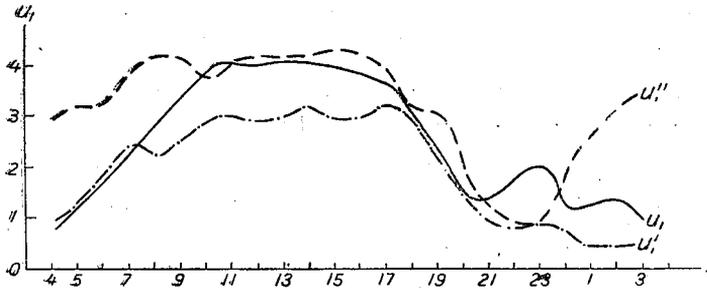


Рис. 1а. Суточный ход скорости ветра на высоте 1 м.  
 $u_1$  — ясно,  $u_1'$  — переменнo,  $u_1''$  — облачно.

Важно установить пределы суточной изменчивости коэффициента турбулентности. Для дневного времени, согласно рис. 1, эти пределы следующие: от 0,05 м<sup>2</sup>/сек. в 5 и в 20 часов до 0,22—0,32 м<sup>2</sup>/сек. в 14 часов; причем для условий переменной и облачной погоды максимальное значение величины  $k_1$  равно 0,22 м<sup>2</sup>/сек., а для ясной погоды — 0,32 м<sup>2</sup>/сек. Эти величины получены в результате обработки 10-дневных летних наблюдений.

Особо следует остановиться на величине коэффициента турбулентности при инверсионных условиях. Определение коэффициента турбулентности для этого случая

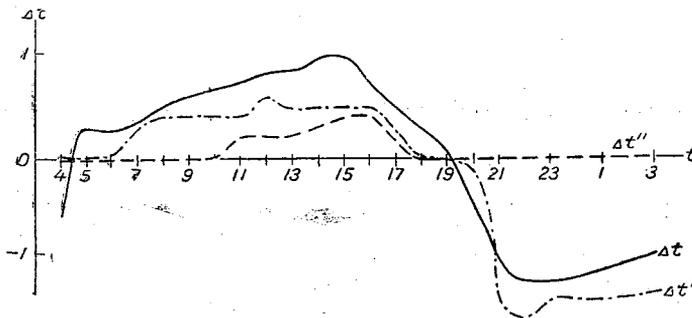


Рис. 16. Суточный ход  $\Delta t = t_{50} - t_{150}$ .  
 $\Delta t$  — ясно,  $\Delta t'$  — переменнo,  $\Delta t''$  — облачно.

является трудной задачей, так как формулы Будыко и Лайхтмана не дают надежных результатов. В настоящее время, повидимому, наиболее надежной формулой для случая хорошо выраженных инверсий является модифицированная формула Лайхтмана с введением ламинарного подслоя. Для определения величин коэффициента турбулентности в инверсионных условиях мы обработали наиболее подробные измерения профилей метеорологических элементов для ночного времени при инверсиях, которые наблюдались летом 1948 г. на станции физики приземного слоя воздуха. В табл. 1 приведены средние результаты обработки.

Таким образом, в летних условиях при ясной погоде коэффициент турбулентности при изменении скорости ветра (на высоте 1 м) от 1 до 4 м/сек. меняется в течение суток от 0,32 до 0,0020 м<sup>2</sup>/сек., т. е. больше чем в 100 раз. Отсюда

ясно влияние фактора устойчивости на турбулентный обмен в приземном слое воздуха. При глубоких инверсиях и скорости ветра меньше 1 м/сек. (но не при

Таблица 1

	Часы			
	21	23	1	3
$k_1$ , м <sup>2</sup> /сек. . . . .	0,0036	0,0020	0,0034	0,0028
$\Delta t$ . . . . .	-1,5°	-1,8°	-1,4°	-1,4°
$u_1$ , м/сек. . . . .	1,0	1,1	1,0	0,7

совершенном штиле) можно ожидать, что величина коэффициента турбулентности будет порядка 0,0001 м<sup>2</sup>/сек., т. е. при ясной погоде коэффициент турбулентности в течение суток может изменяться, по крайней мере, на три порядка (в тысячи раз).

Суточная изменчивость коэффициента турбулентности, изображенная на рис. 1, получена, как уже отмечалось, на материале наблюдений в течение 10 суток. Поэтому представлялось необходимым провести анализ этого вопроса на большем материале. Для этой цели обработаны наблюдения за все лето 1948 г. В результате обработки получена суточная изменчивость, изображенная на рис. 2.

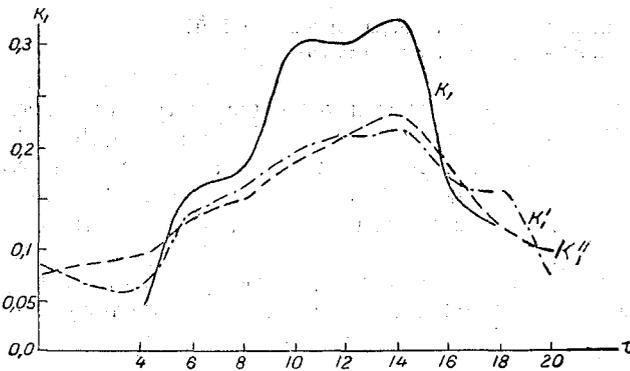


Рис. 2. Суточный ход коэффициента турбулентности на высоте 1 м летом.  
 $k_1$  — ясно,  $k_1'$  — переменнo,  $k_1''$  — облачно.

Из сравнения рис. 1 и 2 видно, что суточная изменчивость коэффициента турбулентности, полученная на основании обработки материала наблюдений за 10 суток, в общем подтверждается и обработкой материала для всего лета. Как и раньше, особенности суточной изменчивости коэффициента турбулентности хорошо определяются суточной изменчивостью для этого периода скорости ветра и разности температур (см. рис. 2а и 2б). Следует отметить, что для лета в целом суточная изменчивость коэффициента турбулентности не характеризуется наличием заметных вторичных максимумов и минимумов.

Для зимнего периода (с наличием снежного покрова) суточная изменчивость коэффициента турбулентности изображена на рис. 3. Максимальное значение коэффициента для зимы примерно в два раза меньше соответствующего значения для лета. Кроме того, как показывает рис. 3б, величина  $\Delta t$  зимой для переменной и облачной погоды близка к нулю, поэтому величина коэффициента и его суточная изменчивость определяется

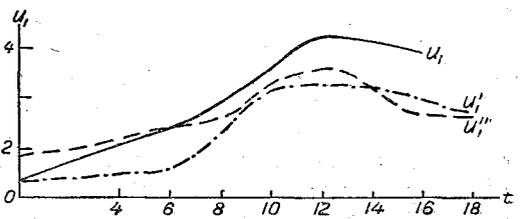


Рис. 2а. Суточный ход скорости ветра на высоте 1 м летом.  
 $u_1$  — ясно,  $u_1'$  — переменнo,  $u_1''$  — облачно.

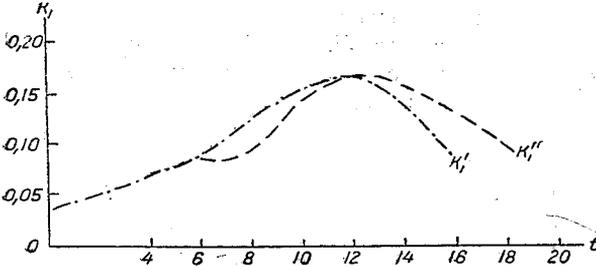
главным образом суточной изменчивостью скорости ветра (см. рис. 3а). Для зимнего времени обработка произведена только для переменной и облачной погоды, так как материала наблюдений для ясной погоды оказалось очень мало. Необходимо отметить, что в силу постоянства величины  $\Delta t$  для зимнего периода пределы суточной изменчивости коэффициента турбулентности оказались значительно меньшими, чем для лета.

Для одного из переходных периодов года — весеннего периода — суточная изменчивость коэффициента турбулентности изображена на рис. 4, из которого видно, что и в этом случае сохраняются общие особенности изменчивости, хотя величины коэффициентов отличаются от характерных величин для зимы и лета, занимая промежуточное положение между последними.

Следует остановиться еще на двух вопросах.

Во-первых, в какой степени результаты, полученные для условий Ленинграда, можно считать действительными для других географических районов. Поскольку суточная изменчивость коэффициента турбулентности определяется, как ясно из всего приведенного материала, суточной изменчивостью скорости ветра  $u_1$  (рис. 4а) и разности температур  $\Delta t$  (рис. 4б), постольку для различных климатических условий следует ожидать различий в суточной изменчивости коэффициента.

Рис. 3. Суточный ход коэффициента турбулентности на высоте 1 м зимой.  
 $k_1'$  — переменнo,  $k_1''$  — облачно.



До настоящего времени ориентировочные оценки изменчивости коэффициента турбулентности для различных климатических условий были сделаны Будыко и Сапожниковой. Сейчас этот вопрос вполне подготовлен для более подробной разработки, так как, по нашему мнению,

Рис. 3а. Суточный ход скорости ветра на высоте 1 м зимой.  
 $u_1''$  — облачно,  $u_1'$  — переменнo.

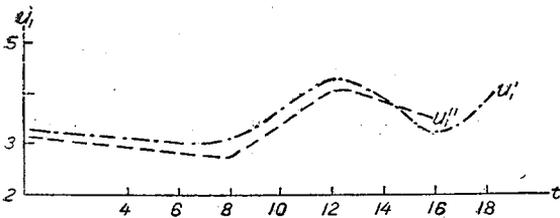


Рис. 25. Суточный ход  $\Delta t = t_{2,0} - t_{1,5}$  летом.  
 $\Delta t$  — ясно,  $\Delta t'$  — переменнo.

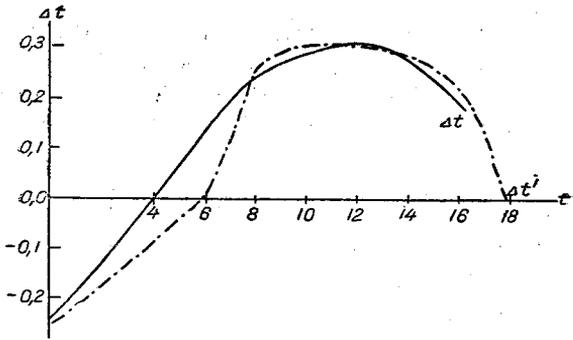
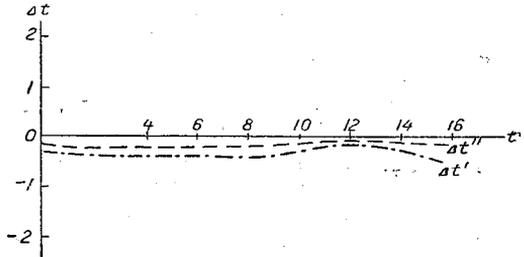


Рис. 3б. Суточный ход  $\Delta t = t_{2,0} - t_{1,5}$  зимой.  
 $\Delta t''$  — облачно,  $\Delta t'$  — переменнo.



ясно показанная в данной статье зависимость коэффициента турбулентности от величин  $u_1$  и  $\Delta t$  будет действительна, во всяком случае, для основных климатических зон нашей территории. Повидимому, общий характер суточной изменчивости коэффициента турбулентности, проиллюстрированный выше на материалах станции

физики приземного слоя воздуха (под Ленинградом), в некоторой степени будет сохраняться и для других районов, хотя величины коэффициента и пределы суточной изменчивости в течение сезонов года могут быть различны для различных районов.

Этот вопрос заслуживает особого и подробного рассмотрения, что не может быть сделано в настоящей работе.

Во-вторых, как указывалось выше, для анализа изменчивости коэффициента турбулентности были использованы величины коэффициентов турбулентности, полученные по формуле Лайхтмана.

Одновременно были вычислены коэффициенты турбулентности (здесь не приводятся) по формуле Будыко (по разностям скорости ветра и температуры на двух высотах). Сравнение коэффициентов турбулентности по Будыко и Лайхтману показало, что:

1) суточная изменчивость коэффициентов, в общем, качественно совпадает, хотя иногда и бывают небольшие различия;

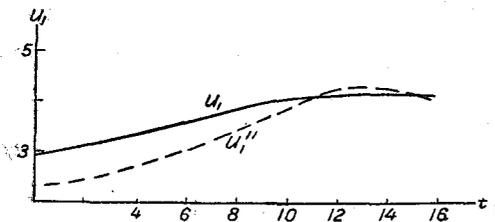
2) численные значения коэффициентов не всегда совпадают, хотя различия значительно меньше, чем это указано в работе Л. С. Гандина [5], который

Рис. 4. Суточный ход коэффициента турбулентности на высоте 1 м весной.

$k_1$  — ясно,  $k_1''$  — облачно.

производил сравнения коэффициентов Будыко и Лайхтмана. При этом содержание материала в данной работе и в работе Гандина, повидимому, несравнимы.

На рис. 5 приводится характерный график суточной изменчивости коэффициентов турбулентности по Будыко и Лайхтману для зимы (облачная погода). Как видно, различия в величинах коэффициентов небольшие, но имеются некоторые качественные различия суточной изменчивости коэффициентов по Будыко (на графике — величина  $k_B$ ) и Лайхт-



ис. 4а. Суточный ход скорости ветра на высоте 1 м весной.

$u_1$  — ясно,  $u_1''$  — облачно.

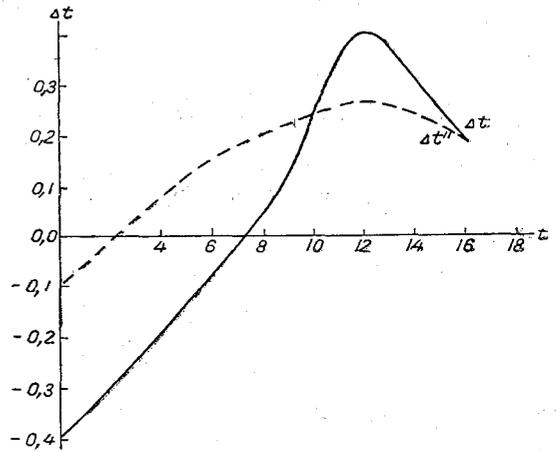


Рис. 4б. Суточный ход  $\Delta t = t_{0,2} - t_{1,5}$  весной.

$\Delta t$  — ясно,  $\Delta t''$  — облачно.

ману. В частности, коэффициент по Лайхтману непрерывно растет до 14 часов, а коэффициент по Будыко в 11 часов несколько уменьшается. Если учесть суточную изменчивость величин  $u_1$  и  $\Delta t$ , которые изображены на этом же графике внизу, то становится ясным, что уменьшение коэффициента Будыко обусловлено наблюдавшимся уменьшением для этого времени величины  $\Delta t$ . Мы отметили эту особенность, так как она характерна и для других случаев. Коэффициент Будыко очень „чувствителен“ к изменению величины  $\Delta t$ . Поэтому даже при некотором увеличении скорости ветра (см. рис. 5) он может уменьшаться, если наблюдается уменьшение

величины  $\Delta t$ , в то время как коэффициент турбулентности по Лайхтману при увеличении скорости ветра (как это видно на рис. 5) растет, несмотря на небольшое уменьшение  $\Delta t$ . Это обстоятельство может объясняться тем, что коэффициенты по Будыко и Лайхтману, несмотря на их, в общем, совпадение, получаются при помощи физически различных предположений, в частности тем, что для формулы Будыко, как указано выше, важно предположение о численном равенстве коэффициентов турбулентности для различных субстанций (тепло, влага и т. д.). По нашему мнению, это предположение непосредственно экспериментально можно было бы проверить следующим образом.

Напишем снова уравнения, которые описывают процессы теплообмена, влагообмена и внутреннего трения (обмен количеством движения) в приземном слое атмосферы:

$$\left. \begin{aligned} P &= c_p \rho k_\theta \frac{\partial \theta}{\partial z}, \\ E &= k_e \frac{\partial e}{\partial z}, \\ T &= \rho k_u \frac{\partial u}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где  $k_\theta$ ,  $k_e$  и  $k_u$  — коэффициенты турбулентности для тепла, влаги и количества движения; остальные обозначения имеют прежний смысл. Можно считать, что в условиях приземного слоя воздуха вертикальные профили температуры, влажности и ветра подобны. Новые данные по этому вопросу приводятся в статье И. С. Борушко (в настоящем выпуске). Кроме того, с достаточной точностью потоки  $P$ ,  $E$  и  $T$  сохраняют постоянство с высотой (в пределах высот от нескольких метров до нескольких десятков метров).

Подобие профилей метеорологических элементов означает подобие профилей коэффициентов турбулентности. Если учесть эти обстоятельства, то из уравнений (3) можно получить следующие выражения для отношений коэффициентов:

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_e}{k_u} &= \frac{v_e}{v_u}, \\ \frac{k_\theta}{k_u} &= \frac{v_\theta}{v_u}, \\ \frac{k_\theta}{k_e} &= \frac{v_\theta}{v_e}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $k_e$ ,  $k_\theta$ ,  $k_u$  — значения коэффициентов турбулентности на фиксированной высоте, индекс которой опущен;  $v_e = \frac{E}{\Delta e}$ ,  $v_u = \frac{T}{\rho \Delta u} = \frac{V_*^2}{\Delta u}$ ,  $v_\theta = \frac{P}{c_p \rho \Delta \theta}$  можно условно назвать скоростями передачи вещества (диффузии), количества движения и тепла;  $\Delta e$ ,  $\Delta u$ ,  $\Delta \theta$  — разности абсолютной влажности, скорости ветра и температуры на двух высотах. Формула (4) показывает, что для определения соотношений коэффициентов  $k_e$ ,  $k_\theta$  и  $k_u$  необходимо знать величину потоков  $E$ ,  $P$  и  $T$  и разностей метеорологических элементов, измеряемых одновременно.

Одновременных измерений профилей метеорологических элементов и потоков  $P$ ,  $E$  и  $T$  до настоящего времени производилось мало. Работа Свердрупа [14], на которую обычно ссылаются иностранные исследователи, обладает серьезными недо-

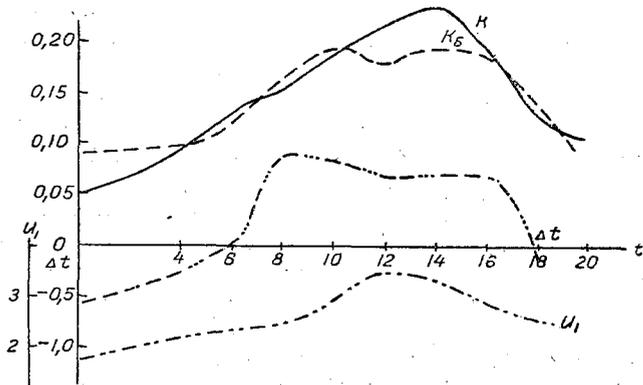


Рис. 5. Суточная изменчивость турбулентности по Лайхтману и Будыко летом в облачную погоду.  
 $k$  — по Лайхтману,  $k_B$  — по Будыко.

статками, вследствие ненадежных градиентных наблюдений. Недавно появившаяся в печати работа Посквилла [13], хотя и содержит данные по измерению профилей метеорологических элементов и потоков  $P$  и  $E$ , но ничего нового не дает, так как измерения испарения произведены ненадежно. О работе Посквилла в целом следует сказать следующее. Опубликованная в „солидном“ английском журнале за 1949 г. и преподносимая в духе новейших „откровений“ науки, она по многим своим выводам и методике измерений представляет плагиат работ Будыко, Лайхмана и других советских исследователей, и, как всякий плагиат, эта работа по многим вопросам не улучшает, а ухудшает „заимствованную“ методику. Так, в частности, получилось с измерением испарения. Воспользовавшись методикой Будыко, Посквилл существенно ухудшил ее, и поэтому его данные намного хуже, чем данные по испарению, полученные Будыко еще в 1945 г. Вывод же Посквилла о существенном численном различии коэффициентов турбулентности для влаги и тепла также нельзя считать бесспорным, так как он основан на использовании ненадежных данных по измерению испарения.

Необходимо отметить, что многие советские исследователи (Будыко, Юдин, Сапожникова и др.) считают, что коэффициенты турбулентности для различных субстанций в условиях развитого турбулентного обмена численно совпадают. Существуют серьезные косвенные доказательства справедливости этого предположения. Прежде всего следует отметить расчеты годового испарения, произведенные Будыко, по уравнению теплового и водного балансов. Однако прямых экспериментальных доказательств, обладающих качеством бесспорности, в настоящее время не существует. Поэтому необходимость постановки и проведения экспериментов, подтверждающих справедливость предположения о равенстве коэффициентов турбулентности для различных субстанций (тепло, влага и др.), по нашему мнению, не вызывает никаких сомнений. Исходя из вышеизложенного, совершенно ясно, что наше предположение о возможной причине различий в величинах коэффициентов турбулентности, получаемых по формулам Будыко и Лайхмана, как указано выше, также нуждается в экспериментальной проверке.

### Выводы

1. На основании обработанных градиентных наблюдений получены подробные данные о суточной изменчивости коэффициента турбулентности на высоте 1 м для различных сезонов года и различных погодных условий района Ленинграда. Установлено, что в летнее время при ясной погоде коэффициент турбулентности в течение суток может изменяться в сотни и тысячи раз, что обуславливается главным образом влиянием фактора устойчивости на интенсивность турбулентного обмена в приземном слое воздуха. Суточная изменчивость коэффициента турбулентности при облачной (облачность 8—10 баллов) и переменной погоде (облачность 4—7 баллов) для всех сезонов практически совпадает. Между суточной изменчивостью коэффициента для ясной и облачной погоды существуют заметные различия для всех сезонов года.

Отсюда следует, что при решении задач о суточном ветровом или температурном режиме нельзя не учитывать суточную изменчивость коэффициента турбулентности.

2. Особенности суточной изменчивости коэффициента турбулентности хорошо объясняются суточной изменчивостью скорости ветра на высоте 1 м и разностью температур на двух высотах. Существует бесспорная необходимость проведения специальных экспериментальных исследований по установлению количественных соотношений между коэффициентами турбулентности для различных субстанций. Такие исследования, как очевидно, имеют прикладное и теоретическое значение.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Будыко М. И. Распределение метеорологических элементов в приземном слое воздуха. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., т. X, № 4, 1946.
2. Будыко М. И. Турбулентный обмен в нижних слоях атмосферы. „Метеорология и гидрология“, № 2, 1946.

3. Будыко М. И. Испарение в естественных условиях. Гидрометеоздат, Л. 1948.
4. Будыко М. И. Измерения естественного испарения. Труды НИУ ГМС, сер. I, вып. 34, 1946.
5. Гандия Л. С. Сравнительный анализ некоторых методов определения коэффициента турбулентного перемешивания. Труды ГГО, вып. 16, 1949.
6. Лайхтман Д. Л. Профиль ветра и обмен в приземном слое атмосферы. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., т. VIII, № 1, 1944.
7. Лайхтман Д. Л. О профиле ветра в приземном слое атмосферы при стационарных условиях. Труды НИУ ГМС, сер. I, вып. 39, 1947.
8. Лайхтман Д. Л. и Тимофеев М. П. Турбулентный обмен в нижних слоях атмосферы. Труды ГГО, вып. 20, 1949.
9. Обухов А. М. Турбулентность в температурно неоднородной атмосфере. Труды инст. теорет. геофизики, т. 1, 1946.
10. Шевелева В. С. К вопросу о суточном ходе коэффициента турбулентности. Известия АН СССР, сер. географ. и геофиз., т. VIII, № 1, 1944.
11. Юдин М. И. Прикладные проблемы учения об атмосферной турбулентности. „Метеорология и гидрология“, № 3, 1947.
12. Lettau H. Über die Höhenabhängigkeit des Austauschkoefizienten im Tagesgang umerhalb der Bodenschicht. Gerl. Beitr. zur Gloph., Bd 57, H. 2, 1941.
13. Pasguill. Eddy diffusion of water vapour and heat near the ground. Proc. Roy. Soc., V. 198, № 1052, 1949.
14. Sverdrup H. The eddy conductivity of the air over a smochth snow field. Glof. Publ., V. XI, 7, 1936.
15. Sutton O. G. Convection in the atmosphere near the ground. Quart. Journ., V. 74, № 319, 1948.

## О НОВОМ МЕТОДЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЭФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПОЧВЫ

Существующие способы расчета коэффициента теплопроводности почвы страдают теми или иными недостатками, которые влекут за собой часто очень большие погрешности в определении его численной величины. Напомним вкратце о некоторых способах определения коэффициента теплопроводности, оставляя в стороне при этом те из них, которые основаны на производстве специальных опытов, как-то: введение в почву нагретых пластин, стержней и т. п.

Прежде всего рассмотрим два способа, основанных на анализе суточной температурной волны [1]. Оба эти способа исходят из предположения, что температура поверхности почвы может быть представлена синусоидой. Первый дает возможность определить теплопроводность почвы, если известны амплитуды колебания температуры на двух разных глубинах, а второй — если известно время запаздывания определенной фазы температуры для данной глубины. Обе эти формулы довольно просты и не требуют сложных вычислений, но недостаток их заключается в том, что, как указано выше, они выведены в предположении, что температура поверхности почвы описывается простой синусоидой.

Действительный ход температуры почвы для данных суток может очень сильно отличаться от периодического хода или вовсе не обнаруживать его. Это побудило искать такие способы определения теплопроводности, которые основывались бы на действительное распределение температуры. Формула, отчасти удовлетворяющая этим условиям, была предложена Д. Л. Лайхтманом и А. Ф. Чудновским [2]. Она имеет вид

$$V\bar{k} = V\sqrt{\pi} \frac{\int_0^{\infty} [T(z, t) - T(z, 0)] dz}{\int_0^t \frac{[T(H, \tau) - T(H, 0)] d\tau}{\sqrt{t-\tau}}}, \quad (1)$$

где  $k$  — коэффициент теплопроводности;  $T(z, t)$  — заданная температура, как функция от глубины  $z$  и времени  $t$ ;  $T(z, 0)$  — температура в начальный момент;  $T(H, t)$  — температура на некоторой фиксированной глубине  $H$ . При ее выводе предположено, что температура в начальный момент распределяется линейно в почве, т. е.  $T(z, 0) = a + bz$ , где  $a$  и  $b$  постоянные, что, как известно, не всегда имеет место.

Следующие две формулы, предложенные Лайхтманом, при своем выводе не требуют никаких специальных предположений о температуре почвы, как-то: периодич-

ности, линейного распределения в начальный момент и т. п. Первая из них [3] имеет вид

$$k = \frac{h \int_0^H (z-H) [T(z,t) - T(z,0)] dz - H \int_0^h (z-h) [T(z,t) - T(z,0)] dz}{h \int_0^t [T(0,\tau) - T(H,\tau)] d\tau - H \int_0^t [T(0,\tau) - T(h,\tau)] d\tau}, \quad (2)$$

где  $h$  и  $H$  — две фиксированные глубины,  $k$  — коэффициент теплопроводности. Примеры расчета по этой формуле и результаты их имеются в статье Т. А. Голубовой [4].

Вычисления по формулам (1) и (2) сравнительно несложны. Входящие в них интегралы заменяются в расчетах соответствующими площадями, но рассчитанные по этим формулам значения коэффициента  $k$  могут содержать большие погрешности по следующим причинам:

1) в формуле (1) интегрирование до бесконечности заменяется некоторой конечной глубиной, где можно считать температуру не меняющейся со временем; это, как показывает опыт вычисления, может привести к большим ошибкам;

2) ошибки по формуле (2) часто проистекают еще оттого, что оба интеграла в числителе или знаменателе или даже в обоих сразу оказываются почти равными по величине, но разных знаков, а также разности, как известно, вычисляются очень грубо.

Дадим теперь вывод второй формулы Лайхтмана.

Исходим из уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}, \quad (*)$$

где  $k$  и  $T(z,t)$  имеют вышеуказанные значения.

Умножив обе части уравнения (\*) на  $z-H$ , где  $H$  некоторая выбранная глубина в почве, и проинтегрировав по  $z$  от  $z=h$  до  $z=H$ , где  $h$  — другая фиксированная глубина, получим

$$\int_h^H (z-H) \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} dz = k \int_h^H (z-H) \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} dz.$$

Проинтегрируем правый интеграл два раза по частям:

$$k \int_h^H (z-H) \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz = k(z-H) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_h^H - k \int_h^H \frac{\partial T}{\partial z} dz = k(H-h) \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} + k [T(h,t) - T(H,t)].$$

Найдем теперь другое выражение для производной  $\frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h}$ ; для этого проинтегрируем обе части уравнения (\*) по  $z$  от  $z=h$  до  $z=\infty$ :

$$\int_h^\infty \frac{\partial T}{\partial t} dz = k \int_h^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dz = k \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} \Big|_{z=h}^{z=\infty}$$

Считая, что температура на большой глубине перестает меняться, т. е.  $k \frac{\partial T}{\partial z} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$ , получим

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} = - \int_h^\infty \frac{\partial T(z,t)}{\partial t} dz.$$

Таким образом, можем написать

$$k [T(h, t) - T(H, t)] = \int_h^H (z - H) \frac{\partial T}{\partial t} dz + \int_h^\infty (H - h) \frac{\partial T}{\partial t} dz$$

или

$$k [T(h, t) - T(H, t)] = \int_h^H (z - h) \frac{\partial T}{\partial t} dz + (H - h) \int_H^\infty \frac{\partial T}{\partial t} dz.$$

Проинтегрировав, наконец, обе части последнего уравнения по  $t$  от  $t = 0$  до  $t = t$ , легко найдем искомое выражение для температуропроводности

$$k = \frac{\int_h^H (z - h) [T(z, t) - T(z, 0)] dz + \int_H^\infty (H - h) [T(z, t) - T(z, 0)] dz}{\int_0^t [T(h, t) - T(H, t)] dt} \quad (3)$$

Полагая  $h = 0$ , получаем формулу в том виде, в каком ее дал Лайтман:

$$k = \frac{\int_0^H [T(z, t) - T(z, 0)] z dz + H \int_H^\infty [T(z, t) - T(z, 0)] dz}{\int_0^t [T(0, t) - T(H, t)] dt} \quad (4)$$

Хотя формула (4) обладает теми же недостатками, что и формула (2), все же, как показывают вычисления, она дает лучшие результаты, чем (2), и, кроме того, вычисления по ней несколько проще, чем по (2). Что касается формулы (3), то она дает возможность [так же как и формула (2)] рассчитывать коэффициент  $k$  для любого горизонтального слоя почвы, выбирая соответствующим образом глубины  $h$  и  $H$ . Приведенная ниже формула, вывод которой сейчас будет дан, свободна от недостатка, о котором упоминается в пункте 1 по поводу формулы (2), и в значительной мере и от второго недостатка, о котором говорится в пункте 2. Метод, на котором основан вывод этой формулы, предложен Д. Л. Лайтманом и используется им для получения значения потоков тепла в почве (см. его вторую статью в этом сборнике).

Способ этот заключается в использовании экстремальных значений в распределении температуры по глубине, что бывает обычно в вечерние и утренние часы, незадолго после захода солнца или после восхода. Действительно (рис. 1), перед заходом солнца распределение температуры в почве происходит по кривой типа 1, ибо поверхность почвы сильнее нагрета, чем более глубокие слои.

С уменьшением высоты солнца температура поверхности почвы резко падает, в то время как температура нижних слоев еще не успела заметно охладиться, в результате чего после захода солнца образуются максимумы температуры А, В, С (кривые 2, 3, и 4).

Глубины, на которых достигаются эти максимальные значения, не остаются постоянными, а растут с увеличением промежутка времени, протекшего от момента захода солнца. После восхода солнца можно наблюдать, наоборот, минимумы температур на глубине. Это представлено на рис. 2, где кривая 1 соответствует некоторому моменту времени до восхода солнца, а 2, 3 и 4 — после. Здесь глубины, на которых наблюдаются минимумы температуры в почве, уменьшаются с увеличением промежутка времени, протекшего от момента восхода.

Перейдем к выводу расчетной формулы.

Умножим обе части уравнения теплопроводности (\*) на  $(z - h)$  и проинтегрируем по  $z$  от  $z = h$  до  $z = H(t)$ , где  $h$  — некоторая выбранная глубина, а  $H(t)$  — глубина, на которой в момент времени  $t$  температура достигает максимума (или минимума), причем  $H(t)$  есть, вообще говоря, функция времени; тогда

$$\int_h^{H(t)} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} (z - h) dz = k (z - h) \int_h^{H(t)} \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} dz. \quad ?$$

Проинтегрировав правый интеграл два раза по частям и учитывая, что  $k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H(t)} = 0$ , получим

$$k [T(h, t) - T(H(t); t)] = \int_h^{H(t)} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} (z - h) dz.$$

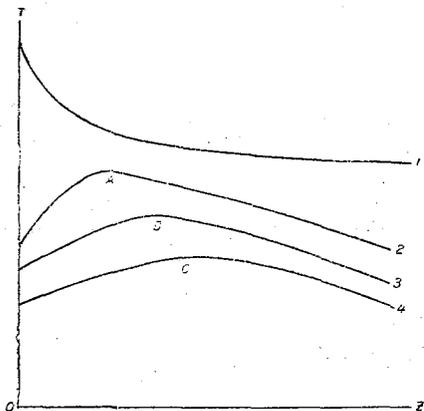


Рис. 1.

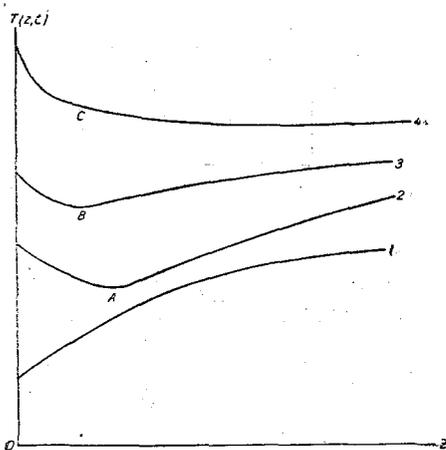


Рис. 2.

Проинтегрируем далее обе части последнего уравнения по времени:

$$k \int_0^t [T(h, t) - T(H(t); t)] dt = \int_0^t d\tau \int_h^{H(\tau)} \frac{\partial T(z, \tau)}{\partial \tau} (z - h) dz.$$

Изменим порядок интегрирования во втором интеграле. Согласно рис. 3, имеем

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau \int_h^{H(\tau)} \frac{\partial T(z, \tau)}{\partial \tau} (z - h) dz &= \int_0^t d\tau \int_h^{H(0)} \frac{\partial T}{\partial \tau} (z - h) dz + \int_0^t d\tau \int_{H(0)}^{H(\tau)} \frac{\partial T}{\partial \tau} (z - h) dz = \\ &= \int_h^{H(0)} (z - h) dz \int_0^t \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau + \int_{H(0)}^{H(t)} (z - h) dz \int_{t_m(z)}^t \frac{\partial T(z, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \\ &= \int_0^{H(0)} [T(z, t) - T(z, 0)] (z - h) dz + \int_{H(0)}^{H(t)} [T(z, t) - T(z, t_m(z))] (z - h) dz. \end{aligned}$$

Откуда окончательно получим

$$k = \frac{\int_h^{H(0)} [T(z, t) - T(z, 0)] (z - h) dz + \int_{H(0)}^{H(t)} [T(z, t) - T(z, t_m(z))] (z - h) dz}{\int_0^t [T(h, t) - T(H(t); t)] dt} \quad (5)$$

где  $t_m(z)$  есть время, когда экстремальное значение температуры наблюдается на глубине  $z$ , а  $T(z, t_m(z))$  есть это экстремальное значение.

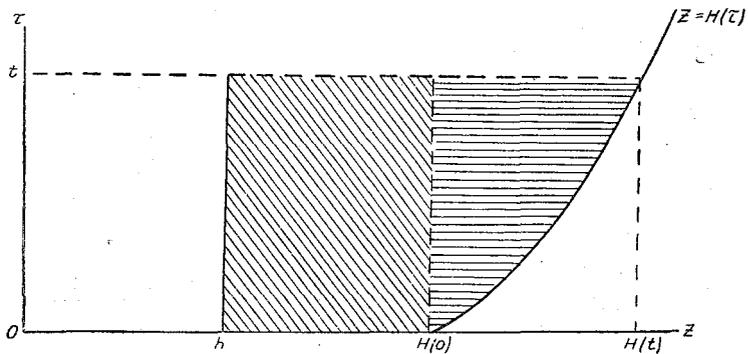


Рис. 3.

Для удобства вычисления целесообразно ввести вместо  $z$  новую переменную, полагая  $u(z) = \frac{(z - h)^2}{2}$ :

$$k = \frac{\int_0^{u(H(0))} [T(u, t) - T(u, 0)] du + \int_{u(H(0))}^{u(H(t))} [T(u, t) - T(u, t_m(u))] du}{\int_0^t [T(h, t) - T(H(t); t)] dt} \quad (6)$$

Это и есть предлагаемая нами новая формула для вычисления коэффициента температуропроводности почвы при наличии экстремумов в кривых распределения температуры. Она применима, так же как и формулы (2) и (4), для расчета коэффициента  $k$  в различных горизонтальных слоях почвы между  $z = h$  и  $z = H(t)$ , выбирая для этого соответствующим образом глубину  $h$ .

Формула (6), как уже сказано, свободна от недостатков, которые присущи остальным формулам, за исключением отдельных случаев, когда при некоторых глубинах  $h$  интегралы в числителе могут оказаться почти одинаковыми, но разных знаков. Ошибки могут еще происходить из-за погрешностей в определении точек экстремумов температуры; но, как показывает опыт вычисления по этой формуле, погрешности в определении  $k$ , как правило, не превышают 10—20%, что можно считать вполне приемлемым. Подробнее об этом сказано в статье Г. А. Волошиновой, помещенной в данном сборнике, а также видно из результатов вычислений по формуле (6) (табл. 1).

Несколько слов о методике вычисления температуропроводности по предлагаемой формуле.

а) Вычисление числителя. Наносим на миллиметровку кривые температуры (рис. 4) как функции от  $U(z)$  для начального момента  $t = 0$  и конечного момента  $t$ .

На этом рисунке площадь  $MNRP$  соответствует первому интегралу в числителе формулы (6), а площадь  $NSRN$  — второму интегралу, причем  $NS$  есть кривая,

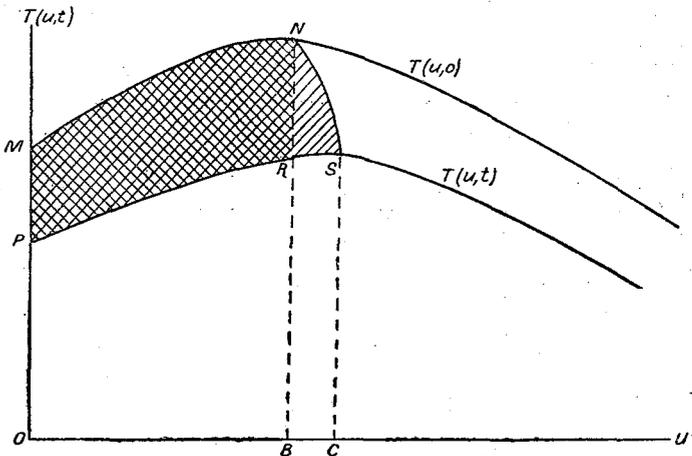


Рис. 4.

по которой располагаются экстремальные значения температуры;  $OB = U(H(0))$ ,  $BC = U(H(t))$ , где  $H(0)$  и  $H(t)$  — глубины, на которых наблюдаются экстремумы температуры, соответственно в начальный момент  $t=0$  и конечный  $t$ . Очевидно, измерив всю площадь  $MNSRPM$  (например, планиметром) и умножив на соответствующий масштаб, получим значение числителя формулы (6).

а) Вычисление знаменателя (рис. 5). На рис. 5 кривая  $MN$  дает распределение температуры во времени от  $t=0$  до  $t$  на выбранной начальной глубине  $h$ ; кривая  $ED$  состоит из экстремальных температур для всех моментов времени от  $t=0$  до  $t=t$  включительно. Измерив площадь  $MNDEM$  и умножив на масштаб, получаем знаменатель формулы (6).

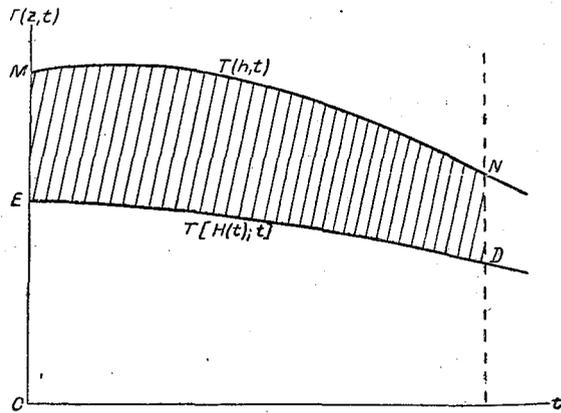


Рис. 5.

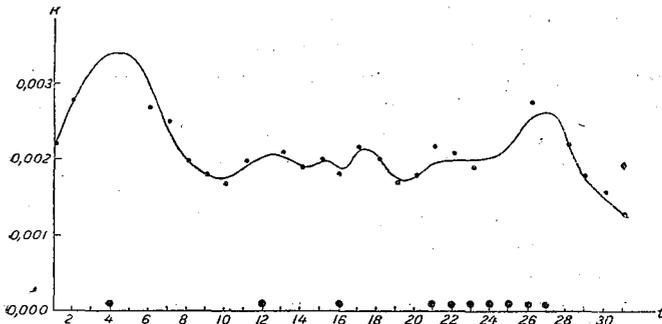


Рис. 6.

В заключение приводим результаты вычисления температуропроводности по формуле (6) по материалам наблюдений над температурой почвы на разных глубинах,

произведенных Тифлисской физической обсерваторией (июль 1888 г.). Для расчетов взяты температуры почвы на глубинах  $z = 0$  (поверхность почвы), 1, 2, 5, 20 и 40 см в 19, 20 21, 22 и 23 часа.

Коэффициент температуропроводности  $k$  см<sup>2</sup>/сек. Тифлис, июль 1888 г.

Число	Часы					Средний
	19—20	20—21	21—22	20—22	21—23	
1/VII	—	—	—	0,0022	—	0,0022
2/VII	0,0027	0,0029	—	—	—	0,0028
3/VII	—	—	—	0,0016	—	—
4/VII	—	—	—	—	—	—
5/VII	—	0,0032	0,0040	0,0036	—	0,0036
6/VII	—	0,0028	0,0027	0,0027	—	0,0027
7/VII	—	0,0026	0,0025	0,0025	—	0,0025
8/VII	—	0,0017	0,0023	0,0021	—	0,0020
9/VII	—	0,0014	0,0022	0,0018	—	0,0018
10/VII	—	0,0016	0,0019	0,0017	—	0,0017
11/VII	—	—	—	—	0,0020	0,0020
12/VII	—	—	—	—	—	—
13/VII	—	—	—	0,0021	—	0,0021
14/VII	—	0,0017	0,0022	0,0019	—	0,0019
15/VII	—	0,0018	0,0022	0,0020	—	0,0020
16/VII	—	0,0016	0,0020	0,0019	—	0,0018
17/VII	—	0,0021	0,0024	0,0022	—	0,0022
18/VII	—	—	—	0,0020	—	0,0020
19/VII	—	0,0015	0,0019	0,0017	—	0,0017
20/VII	—	—	—	0,0018	—	0,0018
21/VII	—	0,0020	0,0023	0,0022	—	0,0022
22/VII	—	0,0021	0,0020	0,0020	—	0,0021
23/VII	—	0,0020	0,0018	0,0019	—	0,0019
24/VII	—	—	—	—	—	—
25/VII	—	0,0016	0,0022	0,0019	—	0,0019
26/VII	—	—	0,0031	0,0025	—	0,0028
27/VII	—	—	—	—	—	—
28/VII	—	0,0018	0,0026	0,0022	—	0,0022
29/VII	—	—	0,0020	0,0017	—	0,0018
30/VII	—	0,0015	0,0017	0,0016	—	0,0016
31/VII	—	0,0014	0,0013	0,0013	—	0,0013

В этой таблице приведены значения  $k$ , рассчитанные для каждого числа месяца по нескольким вечерним срокам, а также приведены средние значения  $k$  для каждого дня. Как видно, согласие между значениями, рассчитанными для разных сроков в течение одного и того же дня, вполне удовлетворительное.

В наших вычислениях мы полагали в формуле (6)  $h = 0$ . Заметим, что при таком выборе  $h$  оба интеграла в числителе формулы (6) всегда получались одинаковых знаков, что увеличивало надежность результатов.

На рис. 6 графически представлен ход средних значений температуропроводности по результатам наших вычислений, содержащихся в вышеприведенной таблице. На этом графике жирными точками отмечены те дни, когда выпадали дожди. Как можно видеть, это влекло за собой увеличение  $k$ , что согласуется с фактом роста температуропроводности при увеличении влажности почвы.

Таким образом, опыт наших вычислений по формуле (6) показывает, что при наличии экстремумов в распределении температуры в почве, последняя может быть успешно применена для вполне надежных определений температуропроводности.

Если в наличии имеются наблюдения над температурой, в которых отсутствуют экстремумы или они очень слабо выражены, расчет предпочтительнее производить по формулам Лайхтмана (3) или (4).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Оболенский В. Н. Метеорология. Гидрометеиздат. М. 1944.
2. Чудновский А. Ф. Физика теплообмена в почве. Гостехиздат. 1948.
3. Лайхтман Д. Л. О точном методе получения коэффициента температуропроводности почвы. Труды ГГО, вып. 2, 1947.
4. Голубова Т. А. Пример расчета коэффициента температуропроводности почвы. Труды НИУ ГМС, сер. 1— Метеорология, вып. 39, 1947.

## СРАВНЕНИЕ РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДОВ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ

Коэффициент температуропроводности является важнейшей тепловой характеристикой почвы.

Точное знание его величины необходимо при прогнозе заморозков, при расчете теплообмена в почве и вообще при решении задач, связанных с тепловыми процессами в почве.

Для расчета коэффициента температуропроводности предложено ряд формул.

Ниже излагаются результаты проверки некоторых формул.

Если задать температуру поверхности почвы в виде простой периодической функции, то решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (1)$$

дается в виде волны, амплитуда которой

$$A_0 = T_0 e^{-\sqrt{\frac{\pi}{k\tau}} z},$$

а время запаздывания максимума на этой же глубине по сравнению с временем наступления его на поверхности

$$\Delta t = \frac{\Delta z}{z} \sqrt{\frac{\tau}{\pi k}} \quad ?$$

мея наблюдения над температурой почвы на двух глубинах  $z_1$  и  $z_2$ , можем найти  $k$  по формулам

$$k = \frac{\pi (z_2 - z_1)^2}{\tau \left( \ln \frac{A_1}{A_2} \right)^2} \quad (a) \quad \text{и} \quad k = \frac{\tau (z_2 - z_1)^2}{\pi (2\Delta t)^2} \quad (I)$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — амплитуды колебаний температуры периода  $\tau$  соответственно на глубинах  $z_1$  и  $z_2$ .

М. А. Кагановым и А. Ф. Чудновским [2] предложена формула для расчета коэффициента температуропроводности по данным срочных измерений температуры на различных глубинах в почве.

Если представить решение уравнения теплопроводности в виде ряда Фурье и принять, что он может быть оборван на второй гармонике, то можно получить формулу для определения  $k$  по температуре почвы на двух глубинах для четырех моментов времени суток:

$$k = \frac{\pi (z_2 - z_1)^2}{\tau (\arctg \Theta)^2} \quad (II)$$

где

$$\Theta = \frac{(T_1 - T_3)(T_2' - T_4') - (T_1' - T_3')(T_2 - T_4')}{(T_1 - T_3)(T_1' - T_3') + (T_2 - T_4)(T_2' - T_4')}$$

где  $T_1, T_2, T_3, T_4$  и  $T_1', T_2', T_3', T_4'$  — температура почвы в четыре равноотстоящих друг от друга момента времени соответственно на глубинах  $z_1$  и  $z_2$ . Время первого отсчета температуры следует выбрать так, чтобы удовлетворялось условие

$$\left. \begin{aligned} |T_1 - T_3| &\approx |T_2 - T_4|, \\ |T_1' - T_3'| &\approx |T_2' - T_4'|. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Из уравнения теплопроводности Д. Л. Лайхтман [1] вывел точную формулу для коэффициента температуропроводности:

$$k = \frac{H_1 \int_0^H (z-H) [T(z,t) - T(z,0)] dz - H \int_0^{H_1} (z-H) [T(z,t) - T(z,0)] dz}{H_1 \int_0^t [T(0,\tau) - T(H,\tau)] d\tau - H \int_0^t [T(0,\tau) - T(H_1,\tau)] d\tau}, \quad (III)$$

где  $\tau$  — время,  $H_1$  и  $H$  — два фиксированных уровня в почве (промежуточный и конечный).

Для времени, когда ход температуры по глубине имеет экстремум, Г. Х. Цейтин предложил формулу

$$k = \frac{\int_0^{H(0)} [T(z,t) - T(z,0)] z dz + \int_{H(0)}^{H(t)} [T(z,t) - T(z,t_m)] z dz}{\int_0^t [T(0,t) - T(H(t),H(t))] dt}, \quad (IV)$$

где  $H(t)$  — глубина, на которой наступает экстремум температуры в момент  $t$ ;  $t_m$  — время наступления экстремума на глубине  $z$ .

Для уточнения преимуществ приведенных методов расчета коэффициента температуропроводности была проведена следующая работа: по фактическому изменению температуры на поверхности почвы и начальному распределению температуры по глубине при некотором фиксированном значении  $k$  была рассчитана температура почвы за сутки на нескольких глубинах.

Затем по полученным значениям температуры вычислялся коэффициент температуропроводности по всем вышеприведенным формулам. Сравнивая полученные величины  $k$  с его значением, положенным в основу расчета, получаем суждение о точности каждой из этих формул.

Для расчета были использованы наблюдения на станции физики приземного слоя воздуха (под Ленинградом) за 8/VII 1948 г.

Имеем следующие исходные данные:

1. Ход температуры на поверхности:

Часы	0	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Тем-ра	8,7	8,1	10,7	17,1	20,9	27,1	31,1	34,1	34,6	35,1	33,5	34,0	32,8	29,8	26,3	22,2	18,5	15,6	11,7	10,4	9,7	9,2

2. Начальное распределение температуры по глубине (за начало взято 0 8/VII):

Глубина (см)	Пов.	5	10	15	20
Температура (град.)	8,7	15,1	16,4	17,8	18,4

3. Коэффициент температуропроводности был принят равным  $0,0035 \text{ см}^2/\text{сек}$ .

Температура почвы была рассчитана по формуле

$$T(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^{\infty} f(x') \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4kt}} \right\} dx' + \frac{x}{2\sqrt{\pi k}} \int_0^t \varphi(\tau) \frac{e^{-\frac{x^2}{4k(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{3/2}} d\tau \quad (3)$$

для глубины 5, 10, 15 и 20 см через 2 часа (табл. 1).

Таблица 1

Часы	Глубина (в см)					Примечание
	Пов.	5	10	15	20	
2	8,0	12,1	14,4	16,7	18,5	Температура в 2 часа на поверхности получена интерполированием
4	8,1	11,4	14,3	16,1	17,4	
6	17,1	12,8	13,8	15,4	16,9	
8	27,1	18,0	15,6	15,6	16,5	
10	34,1	24,1	18,4	16,4	16,7	
12	35,1	27,4	21,4	18,7	17,5	
14	34,0	28,6	23,8	20,5	18,7	
16	29,8	28,4	24,8	21,9	19,9	
18	22,2	25,2	24,3	22,3	20,8	
20	15,6	21,2	22,8	22,1	21,1	
22	10,4	16,9	20,2	21,2	20,8	
24	9,2	14,5	17,9	19,7	20,1	

Результаты расчета коэффициента температуропроводности приведены в табл. 2.

Таблица 2

Формула	Глубина (в см)	Время	k см <sup>2</sup> /сек.	Примечание
(I)	0—20	сутки	0,0047	За начальный момент выбрано $t_0 = 6$ ч. $T_1 - T_3 = 12,4$ ; $T_2 - T_4 = 12,9$ ; $T_1' - T_3' = 6,9$ ; $T_2' - T_4' = 1,0$
(II)	5—20	"	0,0040	
	5—20	"	0,0042	
(III)	5—20	10—14 ч.	0,0036	За начальный момент выбрано $t_0 = 6$ ч. $T_1 - T_3 = 12,4$ ; $T_2 - T_4 = 12,9$ ; $T_1' - T_3' = -3,9$ ; $T_2' - T_4' = -2,6$
		12—16 "	0,0036	
		8—16 "	0,0034	
		10—16 "	0,0034	
		2—8 "	0,0028	
		2—6 "	0,0026	
		8—18 "	0,0026	
		14—18 "	0,0030	
		18—22 "	0,0040	
(IV)	5—20	18—20 "	0,0033	
		16—20 "	0,0033	
		16—22 "	0,0035	
		18—22 "	0,0036	
		20—22 "	0,0036	

Сопоставление полученных значений коэффициента температуропроводности с заданной величиной  $k = 0,0035 \text{ см}^2/\text{сек.}$  показывает, что наибольшие расхождения дают формулы (I) и (II).

Следует отметить, что 8/VII был ясный день, и суточный ход температуры не был искажен влиянием облачности. В противном случае расхождение было бы значительно больше.

Точная формула (III) неприменима для сроков, в течение которых поток тепла меняет направление. В этих случаях температуропроводность определяется с большой ошибкой, ввиду малости как отдельных интегралов формулы (III), так и их разностей.

В приведенном примере ошибка коэффициента температуропроводности достигает 25% для интервалов времени, в которых поток меняет направление.

В дневные сроки формула (III) дает хорошие результаты, — максимальное отклонение от заданной величины составляет 6%. Точная формула применима для расчета коэффициента температуропроводности в любом слое почвы при наличии достаточного числа наблюдений по глубине и по времени.

По формуле (IV) коэффициент температуропроводности можно рассчитывать только в часы, когда наблюдаются экстремумы в ходе температуры по глубине, т. е. тогда, когда формула (III) неприменима. Коэффициент температуропроводности по формуле (IV) мы получаем с большой точностью, — максимальное отклонение от заданной величины составляет 6%.

### Вывод

Точное значение коэффициента температуропроводности дают формула Цейтина (IV) в часы, когда поток меняет направление, и формула Лайхтмана (III) для дневного времени, когда формула Цейтина неприменима.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Чудновский А. Ф. Физика теплообмена в почве. Гостехиздат, 1948.
2. Каганов М. А. и Чудновский А. Ф. Определение коэффициента температуропроводности по данным срочных измерений температуры. Известия АН СССР, № 5, 1948.
3. Лайхтман Д. Л. О точном методе определения температуропроводности почвы. Труды ГГО, вып. 2, 1947.

## К ВЫЧИСЛЕНИЮ ЛУЧИСТЫХ ПОТОКОВ ТЕПЛА В АТМОСФЕРЕ

### 1. Краткая характеристика существующих методов расчета радиационных потоков

Значение величин потоков лучистой энергии, излучаемой атмосферой, является очень важным при изучении теплового баланса. Этому вопросу посвящено значительное количество работ. Существующие методы подсчета радиационных потоков можно разбить на три группы: эмпирические формулы, теоретические формулы, графические способы.

Наиболее употребительными формулами первой группы являются формулы Брента и Онгстрема [1], дающие зависимость встречного излучения атмосферы от приземных значений температуры и влажности. Эти формулы верны лишь для средних условий, а при наличии инверсий дают заниженные значения. Еще хуже обстоит дело в случае увеличения влажности на некоторой высоте (это бывает, например, при вторжении морского воздуха).

Из теоретических формул мы остановимся лишь на предложенных К. Я. Кондратьевым. По его формулам можно вычислять лучистые потоки тепла на любой высоте, если известно распределение температуры и эффективной влажности. Кондратьев дает ряд формул применительно к различной стратификации атмосферы и для атмосферы, распределение температуры в которой произвольно. Поскольку фактическое распределение температуры может в отдельных случаях оказаться весьма сложным, то вычисления по формулам Кондратьева становятся громоздкими.

Графические методы основаны на том, что выражения для потоков лучистой энергии содержат три интегрирования: по всем телесным углам, составляющим полусферу, по всем длинам волн и по всем элементарным слоям, составляющим конечный слой, для которого рассчитывается излучение. Так как порядок интегрирования произволен, то одни авторы (Меллер [10], Эльзасер [11]) выполняют первые два интегрирования заранее, а для последнего предлагают пользоваться так называемыми радиационными диаграммами. Другие (А. А. Дмитриев [4]) предлагают две диаграммы для интегрирования по слоям и по телесным углам.

Остановимся подробнее на самом трудном и ответственном интегрировании: по всем длинам волн. Для его выполнения упомянутые выше авторы (за исключением Эльзасера) применяли в том или ином виде метод представления интеграла в виде конечной суммы и использовали осредненные коэффициенты поглощения. Как правило, эта замена интеграла суммой осуществлялась простой разбивкой спектра поглощения на отдельные части. От этого формального приема выгодно отличается метод Кондратьева своим физически осмысленным исследованием роли различных коэффициентов поглощения. Подробности этого метода можно найти в [5]. К сожалению, за исходные данные Кондратьев взял коэффициенты поглощения, осредненные в интервале  $1 \mu$ , и для значительной части спектра — коэффициенты, полученные Альбрехтом. Хотя в литературе имеются указания на то, что эти коэффициенты не характеризуют поглощение радиации влажным воздухом, они до сих пор используются. Эльзасер для выполнения интегрирования по длинам

волн идеализирует спектр поглощения и вводит так называемый обобщенный коэффициент поглощения [11]. Но из-за плохого знания физических постоянных, характеризующих линии поглощения, этот коэффициент не мог быть определен точно и, в конце концов, превратился в параметр подгонки.

Использование коэффициентов поглощения, полученных Альбрехтом, делает диаграмму Дмитриева и диаграмму Меллера пригодными только для ориентировочных подсчетов. Кроме того, Дмитриев не учитывает излучение, обусловленное присутствием в атмосфере углекислого газа. Эльзасер это излучение учитывает приближенно, полагая, что любой элементарный слой углекислого газа излучает в интервале волн 13—17  $\mu$ , как абсолютно черное тело соответствующей температуры.

Проверка диаграммы Эльзасера, проведенная В. Г. Кастровым [7], показала, что она дает вполне надежные значения встречного излучения атмосферы. Эффективное излучение земной поверхности получается значительно хуже, так как диаграмма не учитывает рода подстилающей поверхности, а дает эффективное излучение черного тела. Давно установлено, что эффективное излучение зависит от подстилающей поверхности и что эту зависимость необходимо учитывать. Весьма подробно этот вопрос рассмотрен Кондратьевым.

Скажем еще несколько слов о полуграфическом методе Робинсона [12]. Как будет видно из изложенного ниже, встречное излучение атмосферы можно представить следующей формулой:

$$A = - \int_0^M E(\tau) dD(\tau), \quad (1)$$

где  $M$  — эффективная влажность всей атмосферы,  $D(\tau)$  — функция пропускания,  $E = \sigma T^4$ .

Предложенный способ состоит в замене интеграла конечной суммой.

Предполагая, что излучение, обусловленное углекислым газом, постоянно и равно 18,5% излучения абсолютно черного тела, и принимая во внимание, что для изотермического слоя воздуха  $D(\tau) = 1 - \eta(\tau)$ , где  $\eta(\tau)$  — излучательная способность, формулу (1) можно заменить приближенной:

$$A = 0,185 \bar{E}_1 + \sum_{i=1}^n \bar{E}_i [\eta_{i+1}(\tau) - \eta_i(\tau)],$$

где  $\bar{E}_i = \frac{\bar{E}_i + \bar{E}_{i+1}}{2}$ , а  $\eta_i(\tau)$  снимаются с предложенного графика.

На построении графика мы останавливаться не будем, так как этот вопрос подробно освещен Кондратьевым. Совершенно ясно, что этот метод является приближенным и должен давать результаты менее точные, чем радиационные диаграммы.

Все изложенное побудило нас предложить диаграмму, при построении которой мы попытались преодолеть недостатки, присущие существующим расчетным методам. Перейдем теперь к изложению теоретических основ.

## 2. Поглощение инфракрасной радиации в атмосфере

Основными поглощающими и излучающими субстанциями в атмосфере являются водяной пар ( $H_2O$ ) и углекислый газ ( $CO_2$ ).

Спектр  $H_2O$  принадлежит к типу полосатых спектров. В свою очередь, полосы поглощения состоят из многочисленных линий различной интенсивности. Наиболее сильные линии расположены в далекой инфракрасной области, в окрестности 50  $\mu$ . Их поглощение распространяется в короткую сторону до 8  $\mu$ . Максимальное поглощение имеет место в центре линии, к краям оно ослабевает, и на далеких крыльях линии можно считать поглощение непрерывным. В области 8—13  $\mu$  линии поглощения настолько слабы, что при атмосферных условиях они почти незаметны

на сплошном фоне. Этим объясняется, что поглощение в этой области хорошо описывается экспоненциальным законом. С увеличением длины волны увеличиваются и интенсивности линий поглощения. До  $16,5 \mu$  линии все же слабы, и основное поглощение происходит за счет сплошного фона. В интервале  $16,5-19 \mu$  вклад обоих видов поглощения примерно одинаков, но для больших длин волн никоим образом нельзя пользоваться средними коэффициентами поглощения.

Также обстоит дело и на близком инфракрасном участке спектра. Здесь, например, на протяжении от  $5,7$  до  $6,7 \mu$  расположено около  $60$  линий. Внутри сильной линии коэффициент поглощения меняется раз в тридцать. Этим объясняется то обстоятельство, что средние коэффициенты поглощения зависят от пути, пройденного лучом в поглощающей среде, и не являются величинами постоянными. Следовательно, экспоненциальный закон не имеет места. Для иллюстрации этого факта мы построили кривые  $k_{\Delta\lambda} = f(u)$  для  $\Delta\lambda = 0,1; 1; 2,5 \mu$  по данным Фоуля [13] и Аделя [14] (рис. 1).

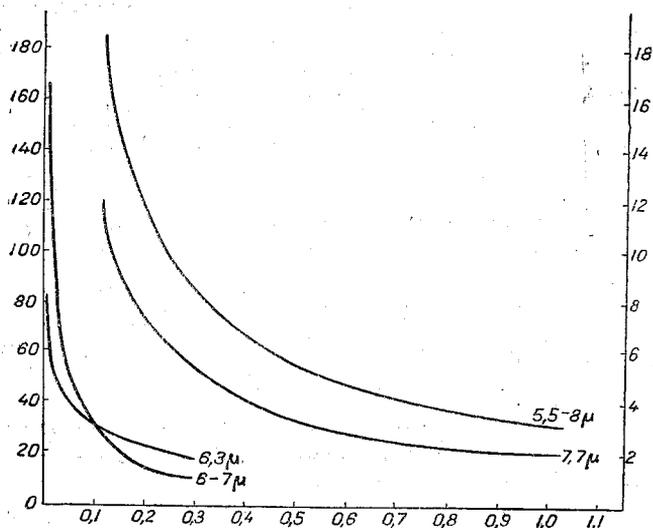


Рис. 1. К зависимости коэффициента поглощения ( $k_{\Delta\lambda} \frac{1}{\text{см}}$ ) от количества водяного пара, пройденного лучом (для  $5,5-8$  и  $7,7 \mu$  шкала слева).

Спектр  $\text{CO}_2$  имеет в общих чертах то же строение, что и спектр  $\text{H}_2\text{O}$ , отличаясь от него большей простотой и правильностью. Из имеющихся в инфракрасной области полос поглощения необходимо учитывать только полосу  $13-17 \mu$ , так как остальные при атмосферных условиях сравнительно слабы.

Установлено, что поглощение лучистой энергии  $\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{CO}_2$  зависит от температуры и давления. Теоретическая часть вопроса подробно изложена в работе Дмитриева [9]; там же показано, что влиянием изменения температуры в атмосфере на поглощение можно пренебречь. Что же касается зависимости от давления, то

экспериментами установлено, что поглощение изменяется в зависимости от давления таким образом, как если бы путь, проходимый лучом, менялся бы в  $\sqrt{\frac{p}{p_s}}$

раз. Мы дали очень беглый обзор строения и свойств спектров поглощения  $\text{H}_2\text{O}$  и  $\text{CO}_2$ ; более подробно данный вопрос освещен Кондратьевым [5] и в работе [11].

Займемся теперь построением функции пропускания, которая понадобится нам в следующем разделе. Рассмотрим прохождение излучения абсолютно черного тела через однородный поглощающий слой конечной толщины. При условии, что поглощение монохроматического луча следует закону Беера, получим для интенсивности излучения, выходящего из слоя в направлении, составляющем угол  $\theta$  с нормалью, следующее выражение:

$$I = \int_0^{\infty} \varepsilon_{0,\lambda} e^{-k_{\lambda} \frac{l_p}{\cos \theta}} d\lambda, \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{\lambda}$  — интенсивность излучения абсолютно черного тела,  $\rho$  — плотность поглощающего вещества,  $l$  — толщина слоя.

Так как поток связан с интенсивностью равенством

$$F = 2\pi \int_0^{\pi/2} I \cos \Theta \sin \Theta d\Theta, \quad (3)$$

то поток, вышедший из слоя после поглощения, будет равен

$$F = 2\pi \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\pi/2} \varepsilon_{0,\lambda} e^{-k_\lambda \frac{u}{\cos \Theta}} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta.$$

Учитывая, что интенсивность излучения абсолютно черного тела не зависит от направления, мы получим следующее выражение для функции пропускания (отношение радиации, пропущенной поглощающим слоем, к вошедшей в слой):

$$D(u) = \frac{2}{E_0} \int_0^{\infty} d\lambda \int_0^{\pi/2} E_{0,\lambda} e^{-k_\lambda \frac{u}{\cos \Theta}} \cos \Theta \sin \Theta d\Theta \quad (4)$$

или

$$D(u) = \frac{2}{E_0} \int_0^{\infty} E_{0,\lambda} H_n(k_\lambda u) d\lambda, \quad (4a)$$

где  $E = \pi\varepsilon = \sigma T^4$ ;  $H_n(x)$  — функция Гольда, определяемая формулой

$$H_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-xt} \frac{dt}{t^n}.$$

Для получения зависимости  $D(u)$  в явном виде обратимся к экспериментам. Заметим прежде всего, что опыты дают нам пропускание параллельной радиации. На основании формулы (4) не представляет труда установить связь между функциями пропускания параллельной радиации  $\bar{D}(u)$  и полного потока  $D(u)$ .

Не останавливаясь на выкладках, напишем сразу нужное нам соотношение:

$$* D(u) = \int_0^{\pi/2} \bar{D}\left(\frac{u}{\cos \Theta}\right) \sin 2\Theta d\Theta. \quad (5)$$

Рассмотрим сначала пропускание лучистой энергии водяным паром. Для получения вида функции  $\bar{D}(u)$  мы используем прежде всего эксперименты, устанавливающие зависимость поглощения или излучения от количества водяного пара на пути луча (изотермический слой излучает столько же энергии, сколько поглощает). Результаты этих экспериментов нанесены на рис. 2.

Оказалось, что имеющихся данных недостаточно для построения надежного графика  $D(u)$ . Максимальное количество водяного пара при опытах не превышало 0,4 см осажденной воды, и, хотя разброс точек невелик, нам представляется опасным экстраполировать среднюю кривую далеко за 0,4 см. Кроме того, для влажностей больше 0,018 см мы имеем лишь точки, полученные таким образом, что безоговорочно базироваться на них опасно. Дело в том, что Эльзасер измерял излучение атмосферного воздуха, содержащего водяной пар и углекислый газ, затем вычитал излучение, обусловленное  $\text{CO}_2$ , и таким образом получал излучение  $\text{H}_2\text{O}$ . Полученный остаток выражает излучение  $\text{H}_2\text{O}$  лишь в том случае, если в области поглощения  $\text{CO}_2$  водяной пар прозрачен. В действительности это не так, и истинное излучение влажного воздуха, свободного от  $\text{CO}_2$ , несколько больше. Поэтому мы попытаемся построить функцию пропускания для большого диапазона влажностей иным путем.

По определению

$$\bar{D}(u) = \frac{1}{E} \int_0^{\infty} E_{\lambda} e^{-k_{\lambda} u} d\lambda.$$

Представим этот интеграл в следующем виде:

$$\bar{D}(u) = \sum_i \frac{\int_{\lambda_i}^{\lambda_i + \Delta\lambda_i} E_{\lambda} e^{-k_{\lambda} u} d\lambda}{\int_{\lambda_i}^{\lambda_i + \Delta\lambda_i} E_{\lambda} d\lambda} \frac{\int_{\lambda_i}^{\lambda_i + \Delta\lambda_i} E_{\lambda} d\lambda}{E} \quad (6)$$

Первый множитель под знаком суммы есть функция пропускания лучистой энергии спектрального интервала  $\Delta\lambda_i$ , второй — доля энергии излучения черного тела, приходящаяся на этот интервал.

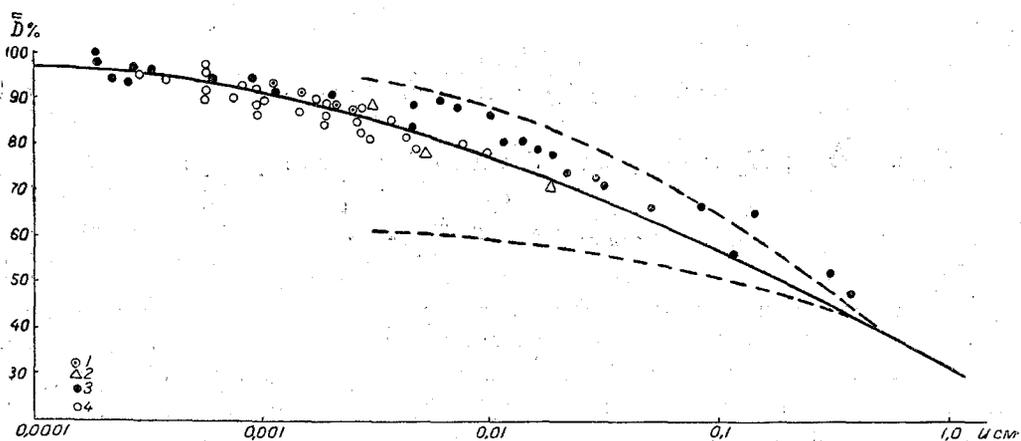


Рис. 2. Пропускание параллельной длинноволновой радиации влажным воздухом.  
1 — Хоттель, 2 — Олдрич, 3 — Эльзасер, 4 — Фалькенберг.

Для интервала 3—9  $\mu$  мы снимали значения пропускания через 1  $\mu$  с кривых, построенных по данным Фоуля [13].

В интервале 9—13  $\mu$  мы использовали теоретические коэффициенты Эльзасера [11] для  $\Delta\lambda = 1 \mu$ .

В области 13—17 и 17—18  $\mu$  мы воспользовались экспоненциальным законом с коэффициентами поглощения, приведенными в работе Кондратьева [5].

Использованные нами коэффициенты поглощения приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\Delta\lambda$ (в $\mu$ )	9—10	10—11	11—12	12—13	13—17	17—18
$k_{\Delta\lambda}$ (в $\text{см}^2/\text{г}$ )	0,12	0,13	0,16	0,21	1,4	17,2

Для длин волн больше 18  $\mu$  мы не имеем необходимого надежного материала. Исследование пропускания луча, в котором имеются лишь длины волн больше 18  $\mu$ , проводилось только Олдричем, причем с источником излучения при температуре 100°С, следовательно его данные несколько завышены. Поэтому мы поступили следующим образом: подсчитали  $\bar{D}(u)$  по формуле (6) как с данными Олдрича, так и в предположении, что длины волн  $\lambda > 18 \mu$  полностью поглощаются уже 0,003 см  $\text{H}_2\text{O}$ . Эти кривые нанесены на рис. 2 пунктиром, они совпали в точке  $u = 0,6$  см.

Основанием для проведения принятой нами кривой  $\bar{D}(u)$  (сплошная линия) послужили нанесенные точки и участок 0,6—3 см. Пунктирные кривые служили своего рода границами. Учет теперь поглощения углекислым газом. При наличии водяного пара и углекислого газа функция пропускания примет вид

$$\bar{D}(u, u_c) = \frac{1}{E} \left\{ \int_0^{13} E_\lambda e^{-k_\lambda^w u} d\lambda + \int_{13}^{17} E_\lambda e^{-k_\lambda^w u - k_\lambda^c u_c} d\lambda + \int_{17}^{\infty} E_\lambda e^{-k_\lambda^w u} d\lambda \right\}.$$

При экспоненциальном характере поглощения водяным паром в области 13—17  $\mu$  это выражение упрощается и после некоторых преобразований приводится к следующему виду:

$$\bar{D}(u, u_c) = \bar{D}_{\text{H}_2\text{O}}(u) - \bar{D}_{13}^{17} \cdot \bar{A}_{\text{CO}_2}, \quad (7)$$

где  $\bar{D}_{13}^{17}$  — пропускание радиации водяным паром в области 13—17  $\mu$ ,  $\bar{A}_{\text{CO}_2}$  — поглощение длинноволновой радиации углекислым газом в процентах абсолютно черного излучения.

Для получения значений  $\bar{A}_{\text{CO}_2}$  мы использовали соответствующий рисунок в работе Меллера [10], несколько дополнив его. Как видно из рис. 3, поглощение длинноволнового излучения углекислым газом удачно аппроксимируется формулой

$$\bar{A}_{\text{CO}_2} = 0,188 \left( 1 - e^{-0,32 u_c^{0,4}} \right), \quad (8)$$

где  $u_c$  — количество  $\text{CO}_2$  в сантиметрах.

Формула (8) показывает, что принимаемый некоторыми авторами экспоненциальный закон для поглощения углекислым газом не имеет места. Формула (7) в совокупности с (8) дает значения функции пропускания в зависимости от двух переменных. Для перехода к одной переменной найдем зависимость между  $u_c$  и  $u$ .

Количества эффективной влажности и эффективного содержания  $\text{CO}_2$  в атмосфере подсчитываются по следующим формулам:

$$m = \int_0^h \rho_w \sqrt{\frac{p}{p_s}} dz = \int_0^h s \rho \sqrt{\frac{p}{p_s}} dz,$$

$$m_c = \int_0^h \rho_c \sqrt{\frac{p}{p_s}} dz = \int_0^h \varphi \rho \sqrt{\frac{p}{p_s}} dz,$$

где  $\rho$  — плотность воздуха,  $\rho_c$  — плотность  $\text{CO}_2$ ,  $s$  — удельная влажность,  $\varphi = \frac{p_c}{p} \cdot 0,0003 = 0,00046$ ,  $\left( \frac{\rho_c}{\rho} = 1,53 \right)$ ,  $0,003\%$  — объемное содержание  $\text{CO}_2$  в тропосфере.

Для нахождения связи между  $m_c$  и  $m$  воспользуемся соотношением между упругостью водяного пара и давлением воздуха. В атмосфере в среднем выполняется зависимость  $\frac{e}{e_0} = \left( \frac{p}{p_0} \right)^3$ , где  $e_0$  и  $p_0$  — упругость  $\text{H}_2\text{O}$  и давление воздуха у земли.

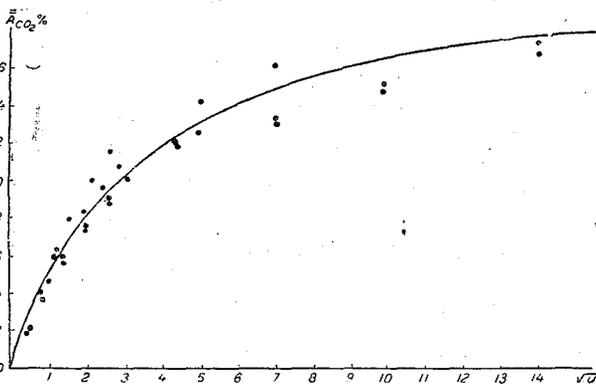


Рис. 3. Поглощение длинноволновой радиации углекислым газом в процентах абсолютно черного излучения.

Используя также формулу  $s = \frac{0,623 e}{p}$ , после элементарных выкладок приходим к соотношению

$$m_c = M_c \left[ 1 - \left( 1 - \frac{m}{M} \right)^{\frac{3}{7}} \right],$$

где

$$M_c = \frac{2\varphi p_0}{g} \sqrt{\frac{p_0}{p_s}} \quad \text{и} \quad M = \frac{2s_0 p_0}{7g} \sqrt{\frac{p_0}{p_s}}.$$

Для вычисления  $M_c$  и  $M$  примем следующие средние значения:  $p_0 = 760$  мм,  $e_0 = 6,3$  г/м<sup>3</sup>,  $g = 981$  см/сек<sup>2</sup>. и  $p_s = 760$  мм. Тогда  $M_c = 0,317$  г/см<sup>2</sup> = 160,3 см и  $M = 1,86$  г/см<sup>2</sup> = 1,86 см. Подставляя эти значения, получим, что

$$m_c = 160,3 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{m}{1,86} \right)^{\frac{3}{7}} \right]. \quad (9)$$

Формула (9) теряет смысл при  $m > 1,86$  см. Это ограничение не существенно, так как поглощение углекислым газом имеет значение лишь при малых количествах H<sub>2</sub>O, но уже при  $m > 1,5$  см вкладом CO<sub>2</sub> в поглощение можно пренебречь.

Подставив (9) и (8) в (7), мы получим пропускание параллельного длинноволнового излучения атмосферой в функции только одной переменной — эффективной влажности:

$$\bar{D}_{\text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2}(m) = \bar{D}_{\text{H}_2\text{O}}(m) - \bar{D}_{13}^{17} \cdot 0,188 \left\{ 1 - e^{-2,42 \left[ 1 - \left( 1 - \frac{m}{1,86} \right)^{\frac{3}{7}} \right]^{0,4}} \right\}.$$

Оказалось, что построенный график удачно аппроксимируется формулой

$$\bar{D}(m) = Q e^{-q_1 \sqrt{m}} + P e^{-p_1 \sqrt{m}}, \quad (10)$$

где  $Q = 0,471$ ,  $P = 0,529$ ,  $q_1 = 0,54$ ,  $p_1 = 6,94$ .

Подставив (10) в (5), мы получим формулу для пропускания атмосферой полного потока лучистой энергии:

$$D(m) = Q_1 H_5(q_1 \sqrt{m}) + P_1 H_5(p_1 \sqrt{m}), \quad (11)$$

где  $Q_1 = 4Q = 1,884$ ,  $P_1 = 4P = 2,116$  и  $H_n(x)$  — функция Гольда.

### 3. Вычисление потоков лучистой энергии

Основные рабочие гипотезы: атмосфера находится в состоянии локального термодинамического равновесия и однородна по горизонтали. Так как высота атмосферы мала по сравнению с радиусом земли, то мы можем рассматривать ее как состоящую из бесконечно протяженных параллельных плоскостей.

Если  $z$  — высота над поверхностью земли, то эффективная влажность  $m = \int_0^z \rho_w \sqrt{\frac{p}{p_s}} dz$  (введением множителя  $\sqrt{\frac{p}{p_s}}$  мы учитываем зависимость поглощения от давления).

Введем также эффективный коэффициент поглощения  $k_\lambda = k_\lambda^w + k_\lambda^c \frac{p_c}{p_w}$ . Здесь  $k_\lambda^w$  и  $k_\lambda^c$  — величины постоянные, определенные при стандартных условиях ( $T_s = 290^\circ$ ,  $P_s = 760$  мм).

После этих замечаний мы можем уравнения переноса интенсивности лучистой энергии спектрального интервала  $\Delta\lambda$  в направлении, составляющем угол  $\Theta$  с вертикалью, записать в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \cos \Theta \frac{dI_{\lambda}^{(1)}}{dm} &= k_{\lambda} (\varepsilon_{\lambda} - I_{\lambda}^{(1)}), \\ \cos \Theta \frac{dI_{\lambda}^{(2)}}{dm} &= k_{\lambda} (I_{\lambda}^{(2)} - \varepsilon_{\lambda}), \end{aligned} \right\} 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (12)$$

где значок (1) относится к радиации, направленной вверх, а (2) — вниз;  $\varepsilon_{\lambda} = \frac{\sigma}{\pi} T^4$ .

Примем следующие граничные условия:

$$m = M (z = \infty): I_{\lambda}^{(2)} = 0, \quad (13)$$

т. е. на верхней границе атмосферы отсутствует излучение, обусловленное  $H_2O$  и  $CO_2$ ;

$$m = 0 (z = 0): I_{\lambda}^{(1)} = \delta \varepsilon_{\lambda} + (1 - \delta) I_{\lambda}^{(2)}, \quad (14)$$

т. е. лучистая энергия, идущая вверх от земной поверхности, состоит из излучения земли и отраженной части встречного излучения атмосферы (считаем, что земля отражает как гладкая поверхность);  $\delta$  — поглощательная способность земли, которую считаем „серым телом“.

Чтобы из (12) получить полные потоки лучистой энергии, надо решить дифференциальные уравнения и выполнить три интегрирования, из которых наибольшую трудность представляет интегрирование по всем длинам волн. Нам известен только единственный прием, позволяющий провести точное аналитическое интегрирование, — метод, примененный В. А. Амбарцумяном [2] при исследовании лучистого равновесия звездных атмосфер.

В дальнейшем этот метод был улучшен А. И. Лебединским [3], который исходил из приближенных уравнений переноса радиации и предположения, что в атмосфере поглощает только водяная пар. Мы применим метод Амбарцумяна — Лебединского, обобщив его на случай точного написания уравнений переноса лучистой энергии и наличия двух поглощающих субстанций.

Идея этого метода состоит в том, что интегрирование по всем длинам волн выполняется в два приема. Сначала проводится интегрирование по тем  $\lambda$ , для которых  $k < k_{\lambda} < k + dk$ , а затем по всем  $dk$ . Далее вводится функция  $\omega(k)$ , представляющая долю полного излучения черного тела, приходящегося на те длины волн, для которых  $k < k_{\lambda} < k + dk$ . Тогда

$$E = \int_0^{\infty} E_{\lambda} d\lambda = \int_0^{\infty} dk \left( \int_{k < k_{\lambda} < k + dk} E_{\lambda} d\lambda \right) = \int_0^{\infty} \omega(k) E dk,$$

следовательно

$$\int_0^{\infty} \omega(k) dk = 1.$$

Обозначим теперь через  $I_k(m, \Theta)$  интенсивность лучистой энергии, содержащей лишь те волны, для которых выполняется условие

$$k < k_{\lambda} < k + dk. \quad (15)$$

Теперь мы можем приступить к решению системы (12). Прежде всего проинтегрируем уравнения (12) и граничные условия (13) и (14) по  $\lambda$ , для которых выполняется условие (15).

В результате получим систему

$$\left. \begin{aligned} \cos \Theta \frac{dI_k^{(1)}}{dm} &= k [\omega(k) \varepsilon - I_k^{(1)}], \\ \cos \Theta \frac{dI_k^{(2)}}{dm} &= k [I_k^{(2)} - \omega(k) \varepsilon], \end{aligned} \right\} 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

с граничными условиями

$$m = M: I_k^{(2)} = 0, \quad (17)$$

$$m = 0: I_k^{(1)} = \delta \omega(k) \varepsilon + (1 - \delta) I_k^{(2)}, \quad (18)$$

Решение системы (16) при условиях (17) и (18) дает следующие значения интенсивностей:

$$\begin{aligned} I_k^{(1)}(m, \Theta) &= \frac{1}{\cos \Theta} \int_0^m k \omega(k) \varepsilon(\tau) e^{-k \frac{m-\tau}{\cos \Theta}} d\tau + \frac{1-\delta}{\cos \Theta} \int_0^M k \omega(k) \varepsilon(\tau) e^{-k \frac{m+\tau}{\cos \Theta}} d\tau + \\ &\quad + \delta \omega(k) \varepsilon(0) e^{-k \frac{m}{\cos \Theta}}, \\ I_k^{(2)}(m, \Theta) &= \frac{1}{\cos \Theta} \int_m^M k \omega(k) \varepsilon(\tau) e^{-k \frac{\tau-m}{\cos \Theta}} d\tau. \end{aligned}$$

Интенсивность и поток лучистой энергии связаны соотношением

$$F = 2\pi \int_0^\infty d\lambda \int_0^{\pi/2} I_\lambda \cos \Theta \sin \Theta d\Theta$$

или

$$F = 2\pi \int_0^\infty dk \int_0^{\pi/2} I_k \cos \Theta \sin \Theta d\Theta. \quad (19)$$

В метеорологии принято обозначать потоки длинноволнового атмосферного излучения, направленные вверх и вниз, буквами  $B$  и  $A$  соответственно. Мы будем придерживаться этих обозначений.

Подставляя в (19)  $I_k^{(1)}$  и  $I_k^{(2)}$ , мы после двукратной перемены порядка интегрирования приходим к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} B(m) &= \int_0^m E(\tau) d\tau \int_0^\infty 2k\omega(k) H_2[k(m-\tau)] dk + \delta E(0) \int_0^\infty 2\omega(k) H_3(km) dk + \\ &\quad + (1-\delta) \int_0^M E(\tau) d\tau \int_0^\infty 2k\omega(k) H_2[k(m+\tau)] dk, \\ A(m) &= \int_m^M E(\tau) d\tau \int_0^\infty 2k\omega(k) H_2[k(\tau-m)] dk. \end{aligned}$$

Выше была введена в рассмотрение функция пропускания полного потока излучения черного тела. Если мы проинтегрируем (4а) методом Амбарцумяна — Лебединского, то получим, что

$$D(u) = 2 \int_0^\infty \omega(k) H_3(ku) dk, \quad (20)$$

Так как

$$\frac{dH_n(x)}{dx} = -H_{n-1}(x),$$

то

$$D'(u) = - \int_0^{\infty} 2k\omega(k) H_2(ku) dk. \quad (21)$$

Принимая во внимание (20) и (21), мы получим

$$A(m) = E(m) - E(M)D(M-m) + \int_m^M D(\tau-m) \frac{dE}{d\tau} d\tau, \quad (22)$$

$$B(m) = E(m) - \Delta E(M)D(M+m) + \Delta \int_0^M D(\tau+m) \frac{dE}{d\tau} d\tau - \int_0^m D(m-\tau) \frac{dE}{d\tau} d\tau, \quad (23)$$

где  $\Delta = 1 - \delta$ ,  $E = \sigma T^4$ .

Численные значения  $D(x)$  даются формулой (11).

Вид формул (22) и (23) и необходимость численного выполнения входящих квадратур наводят на мысль о построении диаграммы, позволяющей сравнительно быстро и легко рассчитывать радиационные потоки тепла на любом уровне в атмосфере.

Рассмотрим какой-нибудь конечный слой воздуха, ограниченный высотами  $z_1$  и  $z_2$ ; соответствующие эффективные влажности  $m_1$  и  $m_2$  и абсолютные температуры  $T_1$  и  $T_2$ .

Если учесть, что  $D(0) = 1$ , то выражение для потока, направленного вниз с уровня  $m_1$ , можно записать следующим образом:

$$F_2 = \int_0^{E_1} D(0) dE + \int_{E_1}^{E_2} D(u) dE + \int_{E_2}^0 D(U) dE = \oint D(u) dE, \quad (24)$$

где  $U = m_2 - m_1$  есть эффективная влажность всего слоя,  $u$  — эффективная влажность, считаемая от  $m_1$  вверх до промежуточных слоев.

Аналогичное выражение можно получить и для потока, направленного вверх с уровня  $m_2$ . В этом случае за нулевой уровень для отсчета эффективной влажности нужно взять  $m_2$ .

Мы видим, что поток выражается интегралом по замкнутому контуру, и если отложить на оси  $x$ -сов значения  $E(T)$ , а на оси  $y$ -ков —  $D(u)$ , то поток будет равен  $\oint y dx$ . Исходя из этого, мы построили диаграмму в виде прямоугольника, на горизонтальной оси которого нанесена температура против соответствующего значения  $E = \sigma T^4$ , на вертикальной оси — эффективная влажность против соответствующих  $D(u)$ . На рис. 4 приводится предлагаемая диаграмма.

В нижней части диаграммы нанесено несколько пунктирных прямых, имеющих значение при расчете эффективного излучения. Слева от основной диаграммы мы поместили вспомогательную для подсчета эффективной влажности. На ней давление нанесено в миллибарах, удельная влажность — в г/кг. Площадь, ограниченная осью абсцисс, кривой  $s(p)$  и ординатами  $p_i$  и  $p_k$ , даст эффективную влажность слоя  $p_k - p_i$ .

Покажем, как пользоваться диаграммой на нескольких примерах.

# 1. Излучение слоя воздуха конечной толщины.

а) Направленное вниз излучение слоя воздуха, ограниченного высотами  $z_1$  и  $z_2$ , дается формулой (24). Так как на диаграмме нанесены температуры, то вместо

$$\int_{E_1}^{E_2} D dE \text{ удобнее писать } \int_{T_1}^{T_2} D dE.$$

Тогда

$$F_2(m_1) = \int_0^{T_1} D(0) dE + \int_{T_1}^{T_2} D(u) dE + \int_{T_2}^0 D(U) dE = \oint D(u) dE.$$

Путь интегрирования (рис. 4а): от точки  $(u=0, T=0)$  по изолинии  $u=0$  до точки  $(u=0, T=T_1)$ , далее по кривой  $u(T)$  до точки  $(u=U, T=T_2)$ , затем по изолинии  $u=U$  до точки  $(u=U, T=0)$  от нее по изотерме  $T=0$  до исходной точки  $(u=0, T=0)$ . Обходя этот контур, получим, что  $F_2$  равно площади  $ABCD$ .

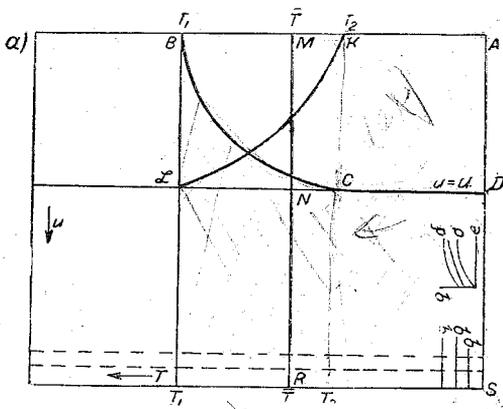


Рис. 4а. Иллюстрация к пользованию диаграммой.

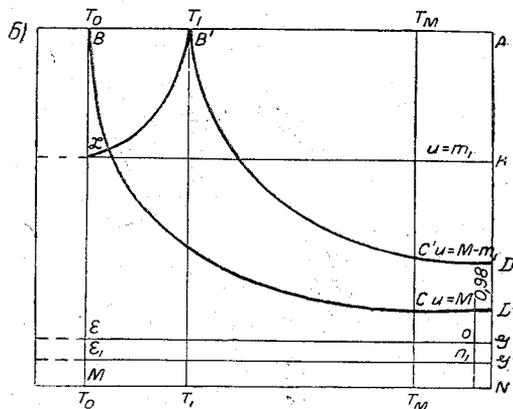


Рис. 4б. Иллюстрация к пользованию диаграммой.

б) Направленное вверх излучение слоя воздуха, ограниченного высотами  $z_1$  и  $z_2$ , равно

$$F_1(m_2) = \int_0^{T_2} D(0) dE + \int_{T_2}^{T_1} D(u) dE + \int_{T_1}^0 D(U) dE = \oint D(u) dE.$$

Путь интегрирования (рис. 4а): от точки  $(0,0)$  по изолинии  $u=0$  до точки  $(0, T_2)$ , затем по кривой  $u(T)$  до точки  $(U, T_1)$  и далее по изолинии  $u=U$  до точки  $(U, 0)$ , откуда по изотерме  $T=0$  в начальную точку  $(0,0)$ . Получим, что  $F_1(m_2)$  равно площади  $AKLDA$ .

в) Пусть наш слой  $m_2 - m_1$  будет изотермичен при температуре  $\bar{T}$ . Тогда

$$F_1(m_1) = F_2(m_2) = \int_0^{\bar{T}} D(0) dE + \int_{\bar{T}}^0 D(U) dE = \oint D(u) dE.$$

Путь интегрирования (рис. 4а): от точки  $(0,0)$  по изолинии  $u=0$  до точки  $(0, \bar{T})$ , по изотерме  $T=\bar{T}$  до точки  $(U, \bar{T})$ , по изолинии  $u=U$  до точки  $(U, 0)$ , по изотерме  $T=0$  до точки  $(0,0)$ .

Излучение изотермического слоя равно площади прямоугольника  $AMNDA$ .

2. Излучение абсолютно черного тела. Его можно представить как излучение изотермического слоя бесконечной влажности:

$$E = \int_0^{\bar{T}} D(0) dE + \int_{\bar{T}}^{\infty} D(\infty) dE = \oint D(u) dE,$$

так как  $D(\infty) = 0$ .

На рис. 4а излучение черного тела при температуре  $\bar{T}$  представляется площадью  $AMRSA$ .

3. Эффективное излучение земной поверхности. Пусть температура земной поверхности —  $T_0$ . Если бы земля была черным телом, то ее излучение равнялось площади  $ABMNA$  (рис. 4б). Но поверхность земли нельзя рассматривать как черную, поэтому поток радиации, идущий вверх от земли, состоит из двух частей:  $B = \delta E + (1 - \delta)A$ .

Считать по этой формуле громоздко, так как надо брать на диаграмме две площади. Поэтому положим, что  $B = qE$ ; здесь  $q$  — некий

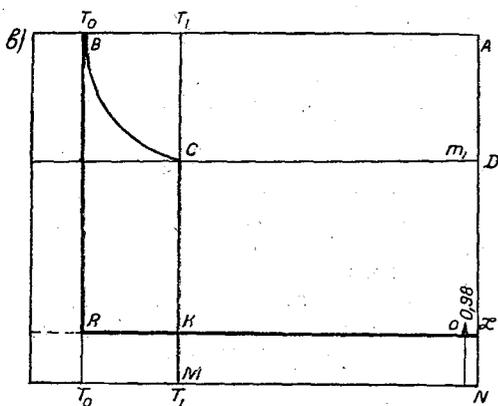


Рис. 4в. Иллюстрация к пользованию диаграммой.

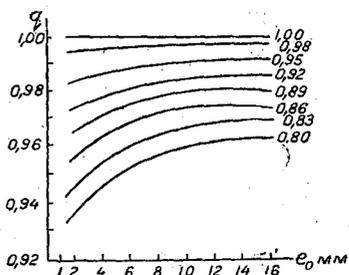


Рис. 5. Зависимость  $q$  от приземной влажности.

коэффициент, зависящий не только от рода подстилающей поверхности, но и от состояния атмосферы. Приравнивая обе величины  $B$ , мы получим, что

$$q = \delta + (1 - \delta) \frac{A}{E} \Big|_{z=0}. \quad (25)$$

Остановимся на определении  $q$ . Излучательная способность поверхности земли зависит не только от растительного покрова и рода почвы, но и от ее состояния (разрыхленности, влажности). Обычно нам известно среднее значение  $\delta$ , поэтому и  $q$ , определяемое формулой (25), будет средним для данного рода поверхности. Следовательно, достаточно получить также среднюю зависимость  $q$  от состояния атмосферы. Воспользовавшись для этого эмпирической формулой Онгстрема, получим

$$q = \delta + (1 - \delta)(a - b \cdot 10^{-ce_0}). \quad (26)$$

На правой стороне основной диаграммы мы поместили таблицу значений  $\delta$ , взятых нами из работ Александрова и Куртнера [6], Точидловского [8] и Фалькенберга (табл. 2) (заметим, что у различных авторов  $\delta$  значительно расходятся). Там же дан график зависимости  $q$  от приземной влажности ( $e_0$  мм Hg) для разных  $\delta$  (рис. 5).

Подсчет  $q$  по формуле (26) проводился при значениях постоянных  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , определенных совсем недавно [15]:  $a = 0,82$ ;  $b = 0,25$ ;  $c = 0,126$ .

Вернемся к получению эффективного излучения на диаграмме. Итак, излучение земной поверхности равно  $qE$ . Пусть, например,  $q = 0,98$ . Тогда для получения значения излучения земной поверхности надо площадь  $ABMNA$  уменьшить на 2%.<sup>0</sup>

Это достигается использованием той из нанесенных внизу диаграммы пунктирных прямых, площадь под которой составляет 2<sup>0</sup>/<sub>0</sub> всей площади диаграммы. Следовательно, излучение земной поверхности будет даваться площадью  $AB\epsilon GA$ . Если эффективная влажность всей атмосферы —  $M$  и температура на верхней границе —  $T_M$ , то встречное излучение атмосферы будет равно площади  $ABCD$ . Следовательно, эффективное излучение земной поверхности равно разности площадей  $AB\epsilon GA - ABCD = B\epsilon GDCB$ .

4. Эффективное излучение на высоте  $z_1$  (рис. 46). Поток вверх из атмосферы на уровне  $m_1$  равен площади  $AB'LKA$ . К нему надо добавить дошедшее до уровня  $m_1$  излучение земной поверхности, равное  $qED(m_1) = q \int_0^{T_0} D(m_1) dE$ . Величина интеграла равна площади  $KLMNK$ . Если  $q = 0,98$ , то ее надо уменьшить на 2<sup>0</sup>/<sub>0</sub>, и тогда  $qED(m_1)$  будет равно площади  $KL\epsilon'G'K$ . Прямая  $\epsilon'G'$  проведена так, что площадь под ней  $NM\epsilon'G'$  равна 2<sup>0</sup>/<sub>0</sub> площади  $KLMNK$ . Таким образом, поток вверх на уровне  $m_1$  равен  $AB'L\epsilon'G'A$ . Так как поток вниз равен  $AB'C'D'A$ , то эффективное излучение на уровне  $m_1$  равно  $AB'L\epsilon'G'A - AB'C'D'A = B'L\epsilon'G'D'C'B'$  (мы считали, что  $m_1 < M - m_1$ ).

На правой стороне основной диаграммы внизу мы нанесли несколько вертикальных прямых, соответствующих различным  $q$ . На каждой прямой нанесены цифры; 0; 0,04 и т. д. Они показывают, до какой пунктирной прямой надо брать площадь при вычислении эффективного излучения. Например, если нас интересует эффективное излучение с уровня  $m = 0,04$ , то мы вычисляем площадь до пунктирной прямой, соответствующей цифре 0,04 на данном  $q$ .

Все разобранные случаи относятся к безоблачной атмосфере. Приближенный учет излучения облаков состоит в том, что достаточно мощный слой облака рассматривают как черное тело. Пусть температура земли —  $T_0$ , нижней поверхности облака —  $T_1$ . Тогда встречное излучение атмосферы при полной облачности изобразится площадью  $ABCMNDA$ , а эффективное излучение земной поверхности — разностью площадей:  $ABRKLDA - ABCMNDA = BCKRB - KMNLK$ . Величину этой разности можно получить одним обводом планиметра по контуру  $KRBCKMNLK$ .

Для сравнения результатов нами были проведены расчеты встречного излучения атмосферы в безоблачные ночи по предлагаемой диаграмме, по диаграмме Эльзасера и по формуле Онгстрема с постоянными, определенными недавно. Полученные величины приведены в табл. 3, из которой видно, что обе диаграммы дают значения, различающиеся в среднем на 1<sup>0</sup>/<sub>0</sub>. Значения встречного излучения по формуле Онгстрема в большинстве случаев несколько ниже, что и следовало ожидать (см. раздел 1).

Мы считаем, что основные преимущества предложенной диаграммы по сравнению с существующими следующие:

1) возможность непосредственного учета рода подстилающей поверхности при расчете эффективного излучения;

Таблица 2

Поглощательные способности различных поверхностей

Подстилающая поверхность	$\delta$	Подстилающая поверхность	$\delta$
Скошенная трава . . . . .	0,84	Супесь . . . . .	0,94
Желтая глина . . . . .	0,85	Песок светлосерый . . . . .	0,89
Известняк светлосерый . . . . .	0,91	Песок известковый . . . . .	0,93
Гравий крупный . . . . .	0,92	Песок кварцевый . . . . .	0,94
Колосья спелой ржи . . . . .	0,93	Чернозем . . . . .	0,87
Суглинок . . . . .	0,93		

- 2) простота использования, так как все изолинии прямые;  
 3) функция пропускания построена на основании экспериментальных данных о поглощении радиации водяным паром и углекислым газом и не содержит никаких неопределенных параметров.

В заключение следует отметить, что метод интегрирования Амбарцумяна — Лебединского является мощным оружием, позволяющим точно решить уравнения переноса радиации в атмосфере и получить удобные расчетные формулы. Для успешного использования этого метода нам необходимы экспериментальные данные о пропускании инфракрасной радиации водяным паром и углекислым газом. Для  $\text{CO}_2$  мы имеем эти данные, но для  $\text{H}_2\text{O}$ , как было показано выше, надежных данных явно недостаточно.

Таблица 3

Встречное излучение атмосферы (в кал/см<sup>2</sup> мин.) по данным аэрологического зондажа в Колтушах. Лето 1948 г.

Дата и время (ч. м.)	Диаграмма	По Эльзасеру	По ф-ле Онгстрема	Примечание
18/VI, 03,31	0,445	0,440	0,428	Рост удельной влажности в приземном слое
5/VII, 21,54	0,421	0,424	0,413	Мощность инверсии 4,4°
5/VII, 03,30	0,433	0,431	0,417	Мощность инверсии 6°
6/VII, 22,08	0,417	0,419	0,416	Мощность инверсии 1,1°
7/VII, 03,36	0,406	0,407	0,399	Мощность инверсии 4,7°
8/VII, 22,08	0,432	0,434	0,432	Мощность инверсии 2,4°
8/VII, 02,03	0,424	0,419	0,404	Мощность инверсии 7,7°
8/VII, 03,33	0,420	0,421	0,398	Мощность инверсии 9,2°. Рост удельной влажности в приземном слое
9/VII, 00,05	0,434	0,432	0,423	Мощность инверсии 3,5°
9/VII, 02,05	0,415	0,419	0,414	Мощность инверсии 2,5°
9/VII, 03,33	0,414	0,411	0,411	Мощность инверсии 3,8°
13/VII, 03,33	0,424	0,421	0,422	Мощность инверсии 0,8°

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Оболенский В. Н. Курс метеорологии. Гидрометеиздат, М. 1944.
2. Амбарцумян В. А. Труды астрономической обсерватории, Л. 1936.
3. Лебединский А. И. Лучевое равновесие земной атмосферы. Ученые записки ЛГУ, серия математ., вып. 3, № 31, 1939.
4. Дмитриев А. А. К вопросам о радиационном балансе в атмосфере. „Метеорология и гидрология“, № 11, 1940.
5. Кондратьев К. Я. Некоторые вопросы лучистого теплообмена в атмосфере. Ученые записки ЛГУ, сер. физ., вып. 7, 1949.
6. Лайхтман Д. Л. и Чудновский А. Ф. Физика приземного слоя атмосферы. 1949.
7. Кастров В. Г. Измерения инфракрасного излучения атмосферы в трех участках спектра. Труды ЦАО, вып. 3, 1948.
8. Точидловский И. И. Ночное лучеиспускание. Одесса, 1912.
9. Дмитриев А. А. К зависимости коэффициента поглощения радиации от давления. „Метеорология и гидрология“, № 10, 1940.
10. Möller F. Grundlagen eines Diagramms zur Berechnung langwelliger strahlungsström. Met. Z., 61, № 2, 1944.
11. Elsasser W. Heat transfer by infrared radiation in the atmosphere. Harv. Met. St., № 6, 1942.
12. Robinson G. Notes on the measurement and estimation of atmospheric radiation. Quart. J. R. Met. Soc., 73, № 315—316, 1947.
13. Fowle F. Water-vapor transparency to low-temperature radiation. Smiths. Inst. Misc. Coll., 68, № 8, 1917.
14. Adel A. Atmospheric absorption of infrared solar radiation. Astr. J., 91, № 1 и 5, 1940.
15. Bolz H. und Falckenberg G. Neubestimmung der Konstanten der ängströmschen Strahlungsformel. Z. f. Met., № 4, 1949.

## О ВЫЧИСЛЕНИИ ТЕПЛОТДАЧИ ПОЧВЫ

В недавно опубликованной статье мы указывали на некоторые трудности вычисления диффузионных потоков тепла, водяного пара и других субстанций по эмпирическим данным. Там же была дана формула, принципиально решающая вопрос о точном вычислении указанных характеристик.

В настоящей работе приводятся два новых метода определения потока тепла, обладающих при некоторых условиях значительными преимуществами.

### § 1. Использование точек экстремума для определения тепловых потоков

В некоторых случаях в вертикальном профиле метеорологического элемента имеются экстремальные точки. Так, например, после заката солнца при отрицательном балансе деятельной поверхности в почве и в воздухе на некотором уровне температура имеет максимальное значение. После восхода солнца можно обнаружить минимум температуры на некотором уровне. Это экстремальное значение с течением времени перемещается.

Мы покажем сейчас, как использовать экстремумы для определения тепловых потоков. Интегрируя уравнение диффузии от  $z=0$  до  $z=H_m$ , причем  $H_m$  — уровень, где наблюдается экстремум, имеем

$$\int_0^{H_m} \frac{\partial T}{\partial t} dz = \int_0^{H_m} \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz = -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (1)$$

Для определения потока за некоторый интервал времени проинтегрируем полученную формулу по времени:

$$\int_0^t dt \int_0^{H_m} \frac{\partial T}{\partial t} dz = - \int_0^t k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} dt.$$

Изменяя последовательность интегрирования слева и учитывая, что  $H_m$  зависит от времени, легко получить

$$\begin{aligned} - \int_0^t k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} dt &= \int_0^{H_m(0)} dz \int_0^t \frac{\partial T}{\partial t} dt + \int_{H_m(0)}^{H_m(t)} dz \int_{t_0}^t \frac{\partial T}{\partial t} dt = \\ &= \int_0^{H_m(0)} [T(z, t) - T(z, 0)] dz + \int_{H_m(0)}^{H_m(t)} [T(z, t) - T(z, t_0)] dz, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $t_0$  — время, когда на данной глубине наблюдался экстремум.

Оба интеграла, входящие в формулу (2), графически вычисляются сразу, как это следует из рис. 1. Приведенные же кривые дают распределение  $T$  для двух моментов времени ( $t = 0, t = t$ ). В обозначениях рисунка

$$S_1 = \int_0^{H_m(0)} [T(t, z) - T(0, z)] dz,$$

$$S_2 = \int_{H_m(0)}^{H_m(t)} [T(t, z) - T(t_0, z)] dz.$$

Формула обладает принципиальным преимуществом, так как позволяет вычислять поток без каких-либо сведений о константах диффузии, что оказывается исключительно важным при применении ее в метеорологии.

Ряд вычислений, проведенных автором с помощью полученной формулы, показал весьма большую точность результатов.

Очевидно, что если в формулах (1) и (2) вместо  $T$  подставлять распределение температуры в воздухе, то вычисления дадут поток тепла на уровне  $z = 0$  (который принимается за начало отсчета), вызванный турбулентной теплопроводностью. Необходимо только иметь в виду, что полученное значение  $-k \frac{\partial T}{\partial z}$  должно быть умножено на объемную теплоемкость, которая известна и для воздуха и для почвы с достаточной точностью.

Если в формулах (1) и (2)  $T$  — распределение температуры почвы, то, как следует из уравнения теплового баланса, полученные из (1) и (2) результаты, умноженные на объемную теплоемкость почвы, дадут полную теплоотдачу деятельной поверхности благодаря излучению, потере тепла вследствие испарения и турбулентной теплопроводности.

Следует также отметить, что указанный метод может служить для определения коэффициентов температуропроводности, для этого необходимо вычисленную величину потока разделить на температурный градиент на исходном уровне.

В табл. 1 приводятся значения теплоотдачи поверхности почвы (в см/сек.) для пяти ночей, вычисленные по полученной формуле. Тот факт, что значения теплоотдачи или постоянны, или монотонно изменяются, указывает на большую точность полученных результатов.

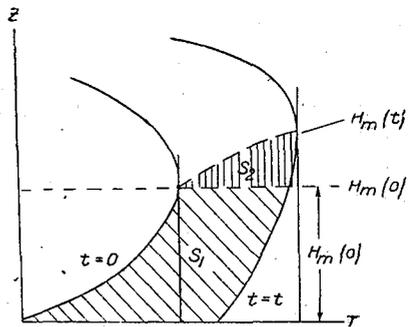


Рис. 1.

Таблица 1

Дата	Часы								Среднее
	9—8	10—9	11—10	12—11	1—12	2—1	3—2	4—3	
12/VII	-0,0040	-0,0037	-0,0033	-0,0030	-0,0033	-0,0030	-0,0033	-0,0045	-0,0040
14/VII	-0,0040	-0,0046	-0,0040	-0,0034	-0,0050	-0,0040	-0,0045	-0,0040	-0,0040
8/VII	-0,0050	-0,0050	-0,0044	-0,0040	-0,0040	-0,0042	-0,0050	-0,0057	-0,0050
20/VII	-0,0044	-0,0042	-0,0040	-0,0044	-0,0040	-0,0040	-0,0040	—	-0,0040
10/VII	-0,0036	-0,0029	-0,0035	-0,0033	-0,0032	-0,0034	-0,0030	-0,0030	-0,0033

Использование экстремумов оказывается эффективным не только для определения теплоотдачи, но и для определения коэффициента температуропроводности.

Этому вопросу посвящена работа Г. Х. Цейтина (помещено в данном сборнике).

<sup>1</sup> Лайтхман Д. Л. К вопросу о вычислении испарения и потока тепла. Труды ГГО, вып. 20, 1949.

## § 2. Определение тепловых потоков по заданному начальному распределению температуры и временным изменениям на одном уровне

Если допустить, что коэффициент температуропроводности — постоянная величина, то решение уравнения теплопроводности для  $z = 0$  при известном начальном распределении температуры и заданном потоке на некотором уровне  $z = 0$  имеет вид

$$T(t, 0) = \frac{1}{a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} T(0, u) e^{-\frac{u^2}{4a^2 t}} du + \frac{1}{a\sqrt{\pi} \rho_1 c_1} \int_0^t \frac{Q(\xi) d\xi}{\sqrt{t-\xi}}, \quad (3)$$

где  $a^2$  — коэффициент температуропроводности,  $\rho_1 c_1$  — объемная теплоемкость почвы,  $u$  — глубина,  $t, \xi$  — время.

Умножим (3) на  $\frac{dt}{\sqrt{\tau-t}}$  и проинтегрируем от  $t=0$  до  $t=\tau$ , тогда имеем

$$\int_0^{\tau} \frac{T(t, 0) dt}{\sqrt{\tau-t}} = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{dt}{\sqrt{t(\tau-t)}} \int_0^{\infty} T(0, u) e^{-\frac{u^2}{4a^2 t}} du + \frac{1}{a\sqrt{\pi} \rho_1 c_1} \int_0^{\tau} \frac{dt}{\sqrt{\tau-t}} \int_0^t \frac{Q(\xi) d\xi}{\sqrt{t-\xi}}$$

Меняя последовательность интегрирования и воспользовавшись тем, что

$$\int_0^{\tau} \frac{e^{-\frac{u^2}{4a^2 t}} dt}{\sqrt{t(\tau-t)}} = \pi \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{u^2}{4a^2 \tau}} \right) \right], \quad \int_0^{\tau} \frac{dt}{\sqrt{(\tau-t)(t-\xi)}} = \pi,$$

получим

$$\int_0^{\tau} \frac{T(t, 0) dt}{\sqrt{\tau-t}} = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \int_0^{\infty} T(0, u) \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{u^2}{4a^2 \tau}} \right) \right] du + \frac{\sqrt{\pi}}{a \rho_1 c_1} \int_0^{\tau} Q(\xi) d\xi,$$

откуда следует

$$\int_0^{\tau} Q(\xi) d\xi = \frac{a \rho_1 c_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{T(t, 0) dt}{\sqrt{\tau-t}} - \rho_1 c_1 \int_0^{\infty} T(0, u) \left[ 1 - \Phi \left( \sqrt{\frac{u^2}{4a^2 \tau}} \right) \right] du.$$

Для удобства вычислений последний интеграл можно преобразовать, тогда

$$\int_0^{\tau} Q(\xi) d\xi = -\frac{2a\rho_1 c_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} T(t, 0) d(\sqrt{\tau-t}) - c_1 \rho_1 \int_0^{\frac{2a\sqrt{\tau}}{\pi}} T(0, u) d \left\{ \frac{2a\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{4a^2 t}} - u \left[ 1 - \Phi \left( \frac{u}{2a\sqrt{\tau}} \right) \right] \right\}. \quad (4)$$

Для ускорения вычислений по формуле (4) Г. Х. Цейтиным построена специальная номограмма. Обработка одного случая отнимает около 30 минут.

В заключение заметим, что полученная возможность определения тепловых потоков с большой точностью по результатам простейших измерений позволила выяснить ряд особенностей в суточном ходе теплового баланса. Работы в этом направлении продолжаются в Отделе физики атмосферы ГГО.

## О ПОДОБИИ ПРОФИЛЕЙ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ ВОЗДУХА

В данной работе анализируется экспериментальный материал по вертикальному распределению метеорологических элементов, приведенный в статье Посквилла [4].

Наблюдения проводились в марте 1948 г. в Англии (под Лондоном). Регистрация скоростей ветра, температуры и влажности воздуха велась на общих высотах 2,0; 1,5; 1,0; 0,5; 0,375 и 0,25. Скорости ветра измерялись в см/сек. (с точностью до 1 см), влажность воздуха — в г/м<sup>3</sup> (до сотых долей), температура — в градусах Фаренгейта (до сотых долей градуса). Всего приведено 25 серий наблюдений в течение 6 дней. Наблюдения в основном освещают дневные условия.

Нами обрабатывался материал с целью проверки подобия профилей метеорологических элементов. Для этого мы воспользовались методикой обработки, предложенной Д. Л. Лайхтманом [1]. Известно, что профиль ветра хорошо описывается формулой Лайхтмана:

$$u = u_1 \frac{z^\epsilon - z_0^\epsilon}{z_1^\epsilon - z_0^\epsilon}, \quad (1)$$

где  $u_1$  — скорость ветра на фиксированной высоте  $z_1$ ;  $z_0$  — мера шероховатости;  $\epsilon$  — параметр, зависящий от устойчивости.

Что же касается профиля температуры и влажности, то для них справедливость закона Лайхтмана до сих пор не была достаточно проверена на экспериментальном материале. Отрицательные результаты для профиля температуры были получены Л. С. Гандиным [2], но им был обработан очень небольшой материал.

Известно, что параметр  $\epsilon$  в формуле Лайхтмана характеризует кривизну профилей метеорологических элементов. Метод определения  $\epsilon$  по измеренным на различных высотах скоростям ветра хорошо известен, и мы на нем не будем останавливаться [3]. Измерения вертикального распределения температуры и влажности можно обработать по той же методике, имея в виду, что для вертикального распределения данных элементов также можно написать обобщенные степенные формулы следующего вида:

$$T - T_1 = \frac{(T_2 - T_1) \left[ \left( \frac{z}{z_1} \right)^\epsilon - 1 \right]}{\frac{\left( \frac{z_2}{z_1} \right)^\epsilon - 1}{\epsilon}}, \quad (2)$$

$$e - e_1 = \frac{(e_2 - e_1) \left[ \left( \frac{z}{z_1} \right)^\epsilon - 1 \right]}{\frac{\left( \frac{z_2}{z_1} \right)^\epsilon - 1}{\epsilon}}, \quad (3)$$

где  $T$  — температура;  $e$  — влажность;  $z$  — высота, на которой измерялась температура или влажность.

Для параметра, зависящего от устойчивости, мы применяем то же обозначение, что и для профиля ветра.

В этих случаях для определения  $\varepsilon$  графическим способом откладывают на одной из осей координат разности температур или влажностей, а на другой величину

$$\frac{\left(\frac{z}{z_1}\right)^\varepsilon - 1}{\varepsilon}$$

Как указывалось, нас интересовал вопрос, существует ли связь между значениями параметра  $\varepsilon$ , определенного из вертикальных профилей ветра, температуры и влажности воздуха. Ответ на этот вопрос имеет существенное значение для подтверждения предположения о подобии профилей указанных элементов в условиях приземного слоя воздуха. Это предположение проверялось многими авторами, но большинство из них не располагало хорошим экспериментальным материалом, поэтому их выводы могут иметь только качественное значение. Данные Посквилла подробно освещают распределение метеорологических элементов в двухметровом приземном слое и дают возможность получить точный вертикальный профиль для каждого из них.

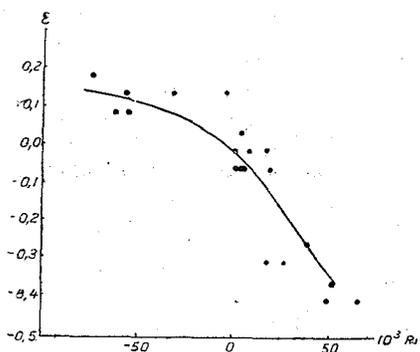


Рис. 1.

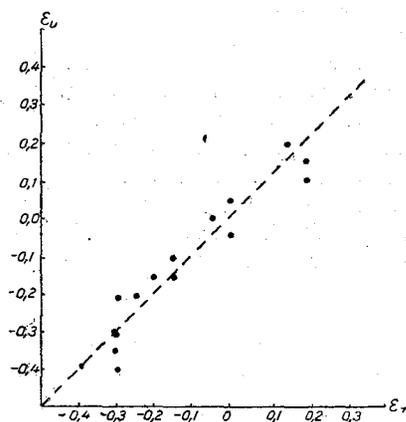


Рис. 2.

Прежде чем перейти к сравнению параметров  $\varepsilon$ , определенных из вертикальных профилей ветра, температуры и влажности, рассмотрим некоторые особенности вертикального распределения ветра.

В зависимости от устойчивости, характеризуемой величиной  $Ri = -\frac{g}{T} \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial z} + \Gamma\right)}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}$ ,

параметр  $\varepsilon$  не только изменяет величину, но и знак, являясь положительным при устойчивом состоянии и отрицательным при неустойчивом состоянии. На рис. 1 приводится график зависимости между величинами  $Ri$  и  $\varepsilon$  (параметр  $\varepsilon$  получен из профиля ветра). Из графика следует, что  $Ri = 0$  соответствует  $\varepsilon = 0$ .

Графики зависимости параметра  $\varepsilon$  от устойчивости, характеризуемой величиной  $\frac{\Delta T}{u^2}$ , приводились в работах Лайхмана [1] и Гандина [2]. При этом у указанных авторов величине  $\frac{\Delta T}{u^2} = 0$  соответствовало значение  $\varepsilon$ , отличное от нуля. У Лайхмана при  $\frac{\Delta T}{u^2} = 0$   $\varepsilon \approx 0,3$ , по данным же Гандина при  $\frac{\Delta T}{u^2} = 0$   $\varepsilon = -0,2$ . Наша обработка показывает совпадение нулевых значений  $Ri$  и  $\varepsilon$ . Это может объясняться тем обстоятельством, что величина  $Ri$ , с которой мы сопоставляем величину  $\varepsilon$ , получена на основании корректного вычисления производных температуры и ско-

рости ветра (по четырем точкам). Далее следует отметить, что предположение многих исследователей о выполнимости логарифмической формулы для метеорологических элементов (температура, влажность, ветер), даже в пределах небольших высот, по данным Посквилла не подтверждается. Вертикальные профили метеороло-

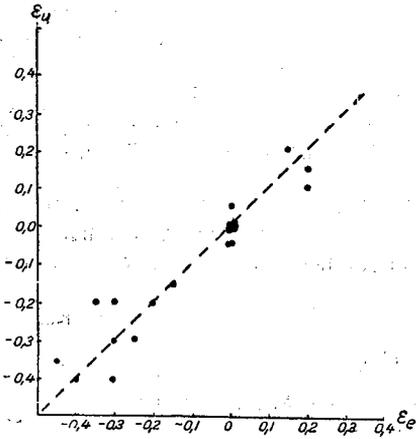


Рис. 3.

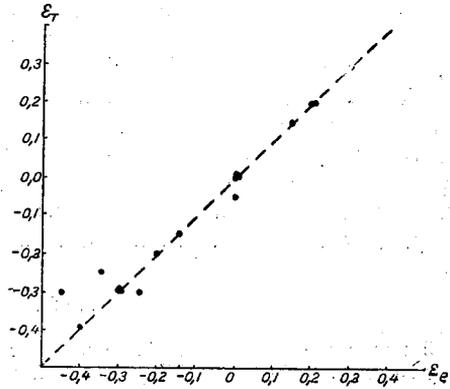


Рис. 4.

гических элементов, построенные Посквиллом в полулогарифмических координатах для каждой серии наблюдений, заметно отличаются от прямой для всех случаев неравновесных условий.

Нами определялась величина параметра  $\epsilon$  из вертикальных профилей ветра, температуры и влажности воздуха. В табл. 1 приводятся значения  $\epsilon$ , полученные в результате обработки измерений температуры, влажности и скорости ветра.

Таблица 1

Дата	Серия	Время (ч. м.)	$\epsilon_u$	$\epsilon_T$	$\epsilon_e$
март 1948 г. 10	1	10,33	-0,30	-0,30	-0,25
	2	12,30	-0,40	-0,40	-0,40
	3	15,30	0,0	—	0,0
	4	17,30	-0,10	-0,15	-0,30
	5	19,30	-0,15	-0,15	-0,15
	6	12,35	-0,25	-0,25	-0,25
	7	14,30	-0,15	-0,20	-0,20
	8	16,34	0,0	—	0,0
	9	19,32	0,10	0,20	0,20
24	10	9,38	-0,40	-0,30	-0,30
	11	11,30	-0,20	-0,25	-0,35
	12	14,30	-0,35	-0,30	-0,45
	13	16,30	-0,05	—	0,0
25	14	18,30	0,15	0,20	0,20
	15	10,30	-0,20	-0,30	-0,30
	16	12,35	-0,30	-0,30	-0,30
	17	15,30	0,05	—	0,0
28	18	18,30	0,20	0,15	0,15
	19	10,30	-0,05	—	0,0
	20	12,33	0,0	—	0,0
	21	14,42	0,0	-0,05	0,0
29	22	16,30	0,15	—	—
	23	19,00	0,50	0,30	0,30
	24	11,39	-0,05	—	0,0
	25	14,03	-0,05	—	—

В таблице приняты следующие обозначения:  $\epsilon_u$  — значение параметра  $\epsilon$ , определенное из профиля ветра;  $\epsilon_T$  и  $\epsilon_e$  — значения  $\epsilon$ , определенные из профилей температуры и влажности.

Как видно из данных таблицы, между  $\epsilon$ , определенными для различных профилей метеорологических элементов, существует хорошая согласованность. На рис. 2, 3 и 4 представлена графическая связь между  $\epsilon$ , взятыми попарно из табл. 1. Обозначения на графиках приняты те же, что и в таблице.

Из вышеизложенного можно сделать следующие заключения:

1. Профили метеорологических элементов (ветер, температура, влажность), во всяком случае в дневное время, подобны между собой, и их кривизна определяется одним и тем же параметром  $\epsilon$ .

2. В приземном слое воздуха степенной закон хорошо описывает действительное распределение метеорологических элементов (ветер, температура, влажность). Универсальность логарифмического закона, даже до небольших высот (2—3 м), не подтверждается экспериментальными данными.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лайхтман Д. Л. О профиле ветра в приземном слое атмосферы при стационарных условиях. Труды НИУ ГМС, сер. I, вып. 39, 1947.
2. Гандин Л. С. Сравнительный анализ некоторых методов определения коэффициента турбулентного перемешивания. Труды ГГО, № 16, 1949.
3. Тимофеев М. П. и Огнева Т. А. Оперативный метод определения коэффициента турбулентного обмена на основании наблюдений над вертикальным профилем ветра. Труды ГГО, № 20, 1949.
4. Pasquill F. Eddy diffusion of water vapour and heat near the ground. Proc. Roy. Soc. 198, № 1052, 1949.

